СОВРЕМЕННЫЕ ПРОБЛЕМЫ МАТЕМАТИКИ

Серия выпускается под общим руководством редакционной коллегии журнала «Успехи математических наук»

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

А. П. МИШИНА, Л. А. СКОРНЯКОВ

АБЕЛЕВЫ ГРУППЫ И МОДУЛИ

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

517.1
М 71
УДК 519.443

В монографии даются и исследуются аксиоматические определения понятий чистоты, кручения и полноты (делимости), играющих важную роль в теории абелевых групп. В последнее время в литературе появились различные обобщения этих понятий на модули. Почти все эти обобщения укладываются в предлагаемую в монографии схему. Цель монографии — подытожить успехи в этой области и создать «трамплин» для дальнейших исследований. В изложении широко используются методы гомологической алгебры.

Монография представляет интерес для научных работников, аспирантов и студентов, специализирующихся в области алгебры.

$\frac{2-2-3}{90-68}$

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ

Общеизвестна та важная роль, которую играют в теории абелевых групп понятия чистоты (сервантности), кручения и полноты (делимости). В связи с развитием в последнее десятилетие теории модулей предпринимались многочисленные попытки приспособить к ней эти понятия. Да и в самой теории абелевых групп известны различные обобщения классического понятия чистоты. В настоящей монографии предлагается аксиоматический подход к определению указанных трех понятий. Эти определения охватывают почти все их обобщения, встречавшиеся в литературе. Среди исключений отметим определения делимости, предложенные Хаттори и Леви. Однако и для них находится место в общей схеме. В случае абелевых групп аксиоматически описанные кручение и делимость превращаются в весьма естественные обобщения классических понятий. Положение с чистотой несколько хуже, ибо найти описание всех чистот в случае абелевых групп пока не удалось. В связи с кручением излагаются основные вопросы теории радикала в модулях.

В монографии широко используются понятия, методы и результаты гомологической алгебры. В частности, предполагается знакомство читателя с функторами Hom, $\otimes$, Ext и Tor, а также умение вести «диаграммный поиск». Те из относящихся сюда результатов, которые можно найти в книгах Картана и Эйленберга [б] или Маклейна [г], используются со ссылкой на эти книги. Отсутствующие в них сведения изложены во вспомогательном параграфе настоящей монографии. В отдельных случаях в основном изложении допущены ссылки на другие источники. Во-первых, за определением сложения в группе Ext читатель отсылается к книге Хилтона и Уайли [ж], так как определение из книги Маклейна (разумеется, эквивалентное рассматриваемому) не совсем приспособлено к принятому в монографии изложению[1]). Во-вторых, предлагается ознакомиться с понятием прямого спектра по книге Стинрода и Эйленберга [е]. В-третьих, читатель отсылается к журнальным статьям [5] или [31] в связи с рассмотрением обобщенных колец частных. Наконец, при изложении одного примера допускается ссылка на статью [131]. Помимо результатов, включенных в основное изложение, приводятся без доказательства многочисленные факты из теории групп или из теории модулей над специальными классами колец, которые можно надеяться перенести в общую теорию. Приведенную в конце библиографию мы старались сделать по возможности полной, однако факты из теории групп, имеющиеся в книгах Куроша [в] и Фукса [и], как правило, приводятся без ссылок на оригинальные статьи. В тексте мы неоднократно обращаем внимание читателя на нерешенные вопросы. Все эти вопросы собраны в конце монографии в виде списка проблем. Некоторые результаты, ставшие известными авторам к моменту чтения корректур, отражены в добавлении на стр. 131.

---

[1]) См. также [222], стр. 90—96.

ВСПОМОГАТЕЛЬНЫЕ РЕЗУЛЬТАТЫ

В этом параграфе собраны необходимые для дальнейшего результаты, доказательства которых отсутствуют в упоминаемых во введении монографиях. Кроме того, приводятся постоянно употребляемые обозначения.

На протяжении всей этой книги, если не оговорено противное, все рассматриваемые кольца предполагаются ассоциативными кольцами с единицей, все рассматриваемые модули — левыми и унитарными, а все рассматриваемые группы — абелевыми. Основное кольцо, как правило, обозначается через Λ. Символ e_A означает тождественный автоморфизм модуля A. Произведение гомоморфизмов $f: A \to B$ и $g: B \to C$ обозначается через fg. Если B — Λ-модуль, A и $\mathfrak{M}$ — его подмодуль и подмножество соответственно, то полагаем

$$(A:\mathfrak{M})=\{\lambda \mid \lambda\in\Lambda,\ \lambda x\in A \quad \text{для всех} \quad x\in\mathfrak{M}\}.$$

Заметим, что $(A:\mathfrak{M})$ — левый идеал кольца Λ. Если B — Λ-модуль, A — его подмодуль и I — левый идеал кольца Λ, то полагаем

$$(A:I)=\{b \mid b\in B,\ Ib\subseteq A\}.$$

Кроме того, используем обозначение

$$r(\lambda)=\{\xi \mid \xi\in\Lambda,\ \lambda\xi=0\}.$$

Как само кольцо целых чисел, так и его аддитивную группу будем обозначать символом $\mathbf{Z}$. Сумма модулей обозначается через $A+B$ или $\sum A_\alpha$. Для прямой суммы используются обозначения $A \dotplus B$

и $\dot{\sum} A_\alpha$, а для полной прямой суммы (прямого произведения) — $A \dotplus B$ и $\sum^* A_\alpha$. Под категорией Λ-модулей везде понимается категория *всех* Λ-модулей.

Пусть $\mathscr{C}$ — категория Λ-модулей. Модуль $Q\in\mathscr{C}$ назовем *инъективным относительно гомоморфизма* $f: A\to B$, если всякая диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d] & B \\ Q & \end{tikzcd}$$

может быть дополнена до коммутативной некоторым гомоморфизмом h: $B\to Q$. Если $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{Q}$ — некоторые классы гомоморфизмов и объектов категории $\mathscr{C}$ соответственно, то обозначим через $\Phi(\mathfrak{S})$ класс всех Λ-модулей, инъективных относительно всех гомоморфизмов из класса $\mathfrak{S}$, а через $\Psi(\mathfrak{Q})$ — класс всех гомоморфизмов, относительно которых инъективны все модули класса $\mathfrak{Q}$.

Гомоморфизм φ: $A\to B$, где A, B — Λ-модули, назовем *ретракцией*, если $\varphi\psi=e_A$ для некоторого $\psi: B\to A$. При этом будем говорить, что A — *ретракт* в B.

(0.1) *Для любого класса гомоморфизмов* $\mathfrak{S}$ *и любого класса* Λ-*модулей* $\mathfrak{Q}$ *имеет место*

а) $\sum^* Q_\alpha\in\Phi(\mathfrak{S})$ *тогда и только тогда, когда* $Q_\alpha\in\Phi(\mathfrak{S})$ *для всех* α;

б) *всякая ретракция лежит в классе* $\Psi(\mathfrak{Q})$;

в) *если* f, $g\in\Psi(\mathfrak{Q})$, *то* $fg\in\Psi(\mathfrak{Q})$;

г) *если* $fg\in\Psi(\mathfrak{Q})$, *то* $f\in\Psi(\mathfrak{Q})$;

д) *если* $fg\in\Psi(\mathfrak{Q})$ *и* f — *эпиморфизм, то* $g\in\Psi(\mathfrak{Q})$;

е) *если* $\mathfrak{Q}$ — *совокупность всех ретрактов всех модулей класса* $\mathfrak{K}$, *то* $\Psi(\mathfrak{Q})=\Psi(\mathfrak{K})$.

Для доказательства свойства а) положим $Q=\sum^* Q_\alpha$ и обозначим через i_α и π_α естественные вложения Q_α в Q и проекции Q на Q_α соответственно. Если $Q\in\Phi(\mathfrak{S})$ и дана диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ Q_\alpha & \end{tikzcd} ,$$

где $f \in \mathfrak{S}$, то $\varphi i_\alpha = fh$ для подходящего $h\colon B \to Q$. Отсюда $\varphi = \varphi(i_\alpha \pi_\alpha) = f(h\pi_\alpha)$, т. е. $Q_\alpha \in \Phi(\mathfrak{S})$. Наоборот, из того, что $Q_\alpha \in \Phi(\mathfrak{S})$ для всех α, и из наличия диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ Q & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

вытекает существование таких гомоморфизмов $h_\alpha\colon B \to Q_\alpha$, что $\varphi\pi_\alpha = fh_\alpha$. Отсюда, в силу определения полной прямой суммы, вытекает, что $\varphi = fh$ для подходящего гомоморфизма $h\colon B \to Q$.

Пусть теперь f — ретракция, $Q \in \mathfrak{Q}$ и дана диаграмма $(*)$. Тогда $\varphi = e_A\varphi = f(h\varphi)$ для некоторого $h\colon B \to A$. А это и означает, что $f \in \Psi(\mathfrak{Q})$.

Если $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $f, g \in \Psi(\mathfrak{Q})$ и $\varphi\colon A \to Q$, где $Q \in \mathfrak{Q}$, то для подходящих гомоморфизмов $h_1\colon B \to Q$ и $h_2\colon C \to Q$ получаем равенства $\varphi = fh_1 = f(gh_2) = (fg)h_2$.

Если $f\colon A \to B$, $g\colon B \to C$, $fg \in \Psi(\mathfrak{Q})$, $Q \in \mathfrak{Q}$ и $\varphi\colon A \to Q$, то $\varphi = (fg)h = f(gh)$, где $h\colon C \to Q$. Если же f — эпиморфизм и $\psi\colon B \to Q$, то из равенства $f\psi = (fg)h' = f(gh')$ при некотором $h'\colon C \to Q$ вытекает, что $\psi = gh'$.

Допустим, далее, что $f \in \Psi(\mathfrak{K})$, и рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi"'] & B \\ Q & \end{tikzcd},$$

где $Q \in \mathfrak{Q}$. Найдется такая ретракция $i\colon Q \to K$, что $K \in \mathfrak{K}$. Тогда $\varphi i = fh$, где $h\colon B \to K$, и существует гомоморфизм $\pi\colon K \to Q$, для которого $i\pi = e_Q$. Поэтому $\varphi = \varphi i\pi = f(h\pi)$, т. е. $f \in \Psi(\mathfrak{Q})$. Таким образом, $\Psi(\mathfrak{K}) \subseteq \Psi(\mathfrak{Q})$. Обратное включение очевидно.

Пусть $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{Q}$ — некоторые классы гомоморфизмов и модулей из $\mathscr{E}$ соответственно. Пара $\mathfrak{B} = (\mathfrak{S}, \mathfrak{Q})$ называется *инъективной структурой*, если

C1. $\mathfrak{Q} = \Phi(\mathfrak{S})$.

C2. $\mathfrak{S} = \Psi(\mathfrak{Q})$.

C3. Для всякого Λ-модуля A найдутся модуль Q из $\mathfrak{Q}$ и гомоморфизм $f\colon A \to Q$, принадлежащий $\mathfrak{S}$.

Модули из $\mathfrak{Q}$ будем называть *$\mathfrak{B}$-инъективными*. Если инъективная структура $\mathfrak{B} = (\mathfrak{S}, \mathfrak{Q})$ такова, что f и Q, указанные в C3, всегда могут быть выбраны так, что $\operatorname{Im} f$ плотен в Q[1], то эта инъективная структура называется *плотной*. Инъективная структура $\mathfrak{B} = (\mathfrak{S}, \mathfrak{Q})$ называется *полной*, если класс $\mathfrak{Q}$ замкнут относительно эпиморфных образов, и *моноинъективной*, если класс $\mathfrak{S}$ состоит из мономорфизмов. Разумеется, инъективные модули $\mathfrak{B}$-инъективны для всякой моноинъективной структуры.

Имеет смысл рассматривать понятие, двойственное понятию инъективной структуры. Однако в дальнейшем будет использоваться только следующее определение: модуль P называется *копроективным* относительно мономорфизма $f\colon A \to B$, если всякая диаграмма

$$\begin{tikzcd} & & & P \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "f"] & B \arrow[r] & C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точной строкой может быть дополнена до коммутативной некоторым гомоморфизмом $h\colon P \to B$.

(0.2) *Пусть $\mathfrak{N}$ — класс Λ-модулей, $\mathfrak{S} = \Psi(\mathfrak{N})$ и $\mathfrak{Q}$ — совокупность всех ретрактов модулей из $\mathfrak{N}$. Если для пары $(\mathfrak{S}, \mathfrak{N})$ выполнено условие* C3, *то $\mathfrak{B} = (\mathfrak{S}, \mathfrak{Q})$ — инъективная структура.*

В самом деле, справедливость свойств C2 и C3 сразу следует из предложения (0.1e). Далее, имеем соотношения $\mathfrak{Q} \subseteq \Phi\Psi(\mathfrak{Q}) = \Phi(\mathfrak{S})$. Если $A \in \Phi(\mathfrak{S})$, то для гомоморфизма $\varphi\colon A \to N$, где $\varphi \in \mathfrak{S}$, $N \in \mathfrak{N}$, найдется такой гомоморфизм $h\colon N \to A$, что $\varphi h = e_A$. Следовательно, φ — ретракция, а значит, модуль $A \in \mathfrak{Q}$.

Радикальным фильтром кольца Λ называется система $\mathscr{E}$ левых идеалов кольца Λ, обладающая следующими свойствами:

G1. Если $I \in \mathscr{E}$ и $I \subseteq J$, где J — левый идеал кольца Λ, то $J \in \mathscr{E}$.

[1]) Будем говорить, что модуль A *плотно вложен* в модуль B, если $A \subseteq B$ и $A \cap C \neq 0$ для всякого ненулевого подмодуля C модуля B.

G2. Если $I \in \mathscr{E}$, то для любого $\lambda \in \Lambda$ левый идеал $(I:\lambda)$ также принадлежит $\mathscr{E}$.

G3. Если $I \subseteq J$, где I — левый идеал кольца Λ, $J \in \mathscr{E}$ и идеал $(I:\xi) \in \mathscr{E}$ для любого $\xi \in J$, то $I \in \mathscr{E}$.

(0.3) *Если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр и I, $J \in \mathscr{E}$, то $I \cap J \in \mathscr{E}$.*

Действительно, рассмотрим левый идеал $(I \cap J : \xi)$, где $\xi \in J$. Если элемент $\lambda \in (I:\xi)$, то $\lambda\xi \in I \cap J$, т. е. имеет место включение $(I:\xi) \subseteq (I \cap J : \xi)$. Из свойств G2 и G1 вытекает, что $(I \cap J : \xi) \in \mathscr{E}$, и остается только применить G3.

(0.4) *Пусть $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр кольца Λ и $\mathfrak{T}$ — множество естественных вложений идеалов системы $\mathscr{E}$ в кольцо Λ. Пусть $\mathfrak{S}_{\mathscr{E}}$ — совокупность всех мономорфизмов $f\colon A \to B$, для каждого из которых существует такой эпиморфизм $g\colon B \to C$, что fg — мономорфизм и $(\operatorname{Im} fg : c) \in \mathscr{E}$ для всех $c \in C$, и пусть $\mathfrak{D}_{\mathscr{E}} = \Phi(\mathfrak{T})$. Тогда $\mathfrak{B}_{\mathscr{E}} = (\mathfrak{S}_{\mathscr{E}}, \mathfrak{D}_{\mathscr{E}})$ — плотная моноинъективная структура.*

Доказательство расчленим на несколько этапов. Условимся писать $A \lhd B$, если $A \subseteq B$ и $(A:b) \in \mathscr{E}$ для всех $b \in B$.

(а) *Если $A \lhd B$ и $B \lhd C$, то $A \lhd C$.*

Действительно, пусть $c \in C$. Положим $I = (A:c)$ и $J = (B:c)$. Ясно, что $I \subseteq J \in \mathscr{E}$. Пусть, далее, $\xi \in J$ и $\lambda \in (A:\xi c)$. Тогда $(\lambda\xi)c = \lambda(\xi c) \in A$, т. е. $\lambda \in (I:\xi)$. Таким образом, $(A:\xi c) \subseteq (I:\xi)$. Но $\xi c \in B$, и из свойств G1 и G3 вытекает, что $I \in \mathscr{E}$. Следовательно, $A \lhd C$.

(б) *Всякий Λ-модуль A может быть плотно вложен в Λ-модуль $Q \in \mathfrak{D}_{\mathscr{E}}$ так, что $A \lhd Q$.*

Для доказательства возьмем инъективную оболочку $\hat{A}$ модуля A ([г], стр. 138) и рассмотрим множество $\mathfrak{X} = \{X \mid A \lhd X \subseteq \hat{A}\}$. Используя лемму Куратовского — Цорна, нетрудно убедиться, что $\mathfrak{X}$ содержит максимальный элемент Q. Пусть теперь $I \in \mathscr{E}$ и $\varphi\colon I \to Q$. Ввиду инъективности модуля $\hat{A}$ найдется такой элемент $c \in \hat{A}$, что $\xi\varphi = \xi c$ для всех $\xi \in I$ ([б], стр. 24, теорема 3.2). Положим $\overline{Q} = Q + \Lambda c$. Если $x \in \overline{Q}$, то $x = q + \lambda c$, где $q \in Q$, $\lambda \in \Lambda$. Если $\mu \in (I:\lambda)$, то

$$\mu x = \mu q + (\mu\lambda)c = \mu q + (\mu\lambda)\varphi \in Q.$$

Таким образом, $(I:\lambda) \subseteq (Q:x)$. Применяя свойства G2 и G1, убеждаемся, что $(Q:x) \in \mathscr{E}$. Отсюда $Q \lhd \overline{Q}$ и, в силу утверждения (а), $\overline{Q} \in \mathfrak{X}$. Так как Q максимален, приходим к выводу, что $c \in Q$. Поэтому гомоморфизм $\psi\colon \Lambda \to Q$, определяемый равенством $\xi\psi = \xi c$, продолжает φ, и, следовательно, $Q \in \mathfrak{D}_{\mathscr{E}}$.

(в) *Если $A \lhd B$, $i\colon A \to B$ — естественное вложение и $Q \in \mathfrak{D}_{\mathscr{E}}$, то модуль Q инъективен относительно мономорфизма i.*

В самом деле, пусть $\varphi\colon A \to Q$. Повторяя известные рассуждения Картана и Эйленберга ([б], стр. 24), находим такой подмодуль D модуля B, что $A \subseteq D$ и существует гомоморфизм $\psi\colon D \to Q$, продолжающий φ, который уже нельзя распространить на больший подмодуль. Если $c \in B \setminus D$, то рассмотрим подмодуль $\overline{D} = D + \Lambda c$. Положим $I = (D:c)$. Так как идеал I содержит $(A:c)$, то ввиду свойства G1 он принадлежит $\mathscr{E}$. Определим гомоморфизм $\theta\colon I \to Q$, положив $\xi\theta = (\xi c)\psi$. Поскольку модуль $Q \in \mathfrak{D}_{\mathscr{E}}$, этот гомоморфизм можно продолжить до гомоморфизма $\omega\colon \Lambda \to Q$. Пусть $q = 1\omega$. Если $x \in D$ и $\lambda \in \Lambda$, то положим

$$(x + \lambda c)\overline{\psi} = x\psi + \lambda q.$$

Если $x + \lambda c = y + \mu c$, где $y \in D$, $\mu \in \Lambda$, то $\lambda - \mu \in I$. Поэтому

$$x\psi - y\psi = [(\mu - \lambda)c]\psi = (\mu - \lambda)\omega = (\mu - \lambda)q.$$

Таким образом, $\overline{\psi}$ — гомоморфизм модуля $\overline{D}$ в Q, продолжающий φ. Это, однако, противоречит выбору ψ. Значит, $D = B$ и, следовательно, модуль Q инъективен относительно мономорфизма i.

(г) $\Phi(\mathfrak{S}_{\mathscr{E}}) = \mathfrak{D}_{\mathscr{E}}$.

Действительно, из свойства G2 сразу следует, что $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{S}_{\mathscr{E}}$. Поэтому, применив предложение (в) к мономорфизму fg, легко вывести следующие соотношения:

$$\mathfrak{D}_{\mathscr{E}} \subseteq \Phi(\mathfrak{S}_{\mathscr{E}}) \subseteq \Phi(\mathfrak{T}) = \mathfrak{D}_{\mathscr{E}}.$$

(д) $\Psi(\mathfrak{D}_{\mathscr{E}}) = \mathfrak{S}_{\mathscr{E}}$.

В самом деле, утверждение (г) дает

$$\mathfrak{S}_{\mathscr{E}} \subseteq \Psi\Phi(\mathfrak{S}_{\mathscr{E}}) = \Psi(\mathfrak{D}_{\mathscr{E}}).$$

Если $f \in \Psi(\mathfrak{D}_g)$ и $f\colon A \to B$, то, согласно предложению (б), получаем $A \lhd Q$, где $Q \in \mathfrak{D}_g$. Тогда найдется такой гомоморфизм $g\colon B \to Q$, что $fg = i$, где i — естественное вложение модуля A в Q. Положив $C = \operatorname{Im} g$, убедимся, что $f \in \mathfrak{S}_g$.

(е) $\mathfrak{B} = (\mathfrak{S}_g, \mathfrak{D}_g)$ — *плотная моноинъективная структура*.

Действительно, вложение, указанное в (б), плотно и удовлетворяет требованиям свойства C3. Справедливость свойств C1 и C2 вытекает из утверждений (г) и (д).

Для построения радикальных фильтров полезно предложение

(0.5) *Система левых идеалов*

$$\mathscr{E} = \{I \mid \forall \rho \in \Lambda \setminus I\ \exists \sigma \in \Lambda \setminus (I:\rho),\ (I:\sigma\rho) \text{ плотен в } \Lambda\}$$

является радикальным фильтром.

В самом деле, пусть $I \in \mathscr{E}$, $I \subseteq J$ и $\rho \notin J$. Если идеал $(J:\rho)$ плотен в Λ, то все доказано. В противном случае $\Lambda\xi \cap (J:\rho) = 0$ для некоторого $\xi \neq 0$. Конечно, $\xi\rho \notin I$. Следовательно, существует такое $\sigma \notin (I:\xi\rho)$, что идеал $(I:\sigma\xi\rho)$ плотен в Λ. Но $(I:\sigma\xi\rho) \subseteq (J:(\sigma\xi)\rho)$. Отсюда вытекает, что идеал $(J:(\sigma\xi)\rho)$ плотен в Λ, причем $\sigma\xi \notin (J:\rho)$, так как $\Lambda\xi \cap (J:\rho) = 0$ и $\sigma\xi\rho \notin I$. Если $I \in \mathscr{E}$, $\lambda \in \Lambda$ и $\rho \notin (I:\lambda)$, то $\rho\lambda \notin I$. Поэтому $(I:\sigma\rho\lambda)$ плотен в Λ для некоторого $\sigma \notin (I:\rho\lambda)$. Остается заметить, что $((I:\lambda):\rho) = (I:\rho\lambda)$ и $((I:\lambda):\sigma\rho) = (I:\sigma\rho\lambda)$. Пусть, наконец, $I \subseteq J \in \mathscr{E}$, $(I:\xi) \in \mathscr{E}$ для всех $\xi \in J$ и $\rho \notin I$. Если $\rho \in J$, то, поскольку $1 \notin (I:\rho) \in \mathscr{E}$, получаем, что левый идеал $((I:\rho):\sigma)$ плотен в Λ для некоторого $\sigma \notin ((I:\rho):1) = (I:\rho)$. Но $(I:\sigma\rho) = ((I:\rho):\sigma)$, и, следовательно, идеал $(I:\sigma\rho)$ плотен в Λ. Если же $\rho \notin J$, то найдем $\sigma \notin (J:\rho)$, для которого $(J:\sigma\rho)$ плотен в Λ. Если $(J:\sigma\rho) = (I:\sigma\rho)$, то все доказано. В противном случае для $\eta \in (J:\sigma\rho) \setminus (I:\sigma\rho)$ имеем $\eta\sigma\rho \in J \setminus I$. Таким образом, $1 \notin (I:\eta\sigma\rho)$. Поэтому $((I:\eta\sigma\rho):\xi)$ плотен в Λ для некоторого $\xi \notin (I:\eta\sigma\rho)$. Значит, левый идеал $(I:(\xi\eta\sigma)\rho)$ плотен в Λ и $\xi\eta\sigma \notin (I:\rho)$, что и требовалось.

Радикальные фильтры можно строить и с помощью следующего результата:

(0.6) *Пусть $\mathfrak{D}$ — мультипликативно замкнутая система двусторонних идеалов кольца Λ, конечно-*

порожденных как левые Λ-модули. Тогда множество $\mathscr{E}$ всех левых идеалов кольца Λ, каждый из которых содержит некоторый идеал из $\mathfrak{D}$, является радикальным фильтром.

Действительно, выполнение G1 очевидно. Если $I \in \mathscr{E}$, то найдется такой идеал $H \in \mathfrak{D}$, что $H \subseteq I$. Но тогда для всякого $\lambda \in \Lambda$ и $\eta \in H$ получим $\eta\lambda \in \in H \subseteq I$. Таким образом, $H \subseteq (I:\lambda)$ и, следовательно, $(I:\lambda) \in \mathscr{E}$. Пусть $I \subseteq J \in \mathscr{E}$, $(I:\xi) \in \mathscr{E}$ для всех $\xi \in J$ и H — идеал из $\mathfrak{D}$, лежащий в J. Но $H = \sum_{i=1}^{m} \Lambda\eta_i$. По условию, существуют такие идеалы $H_i \in \mathfrak{D}$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$, что $H_i \subseteq (I:\eta_i)$. Идеал $H_0 = H_1 \ldots H_m H$ принадлежит $\mathfrak{D}$. Если $\zeta \in H$, то $\zeta = \sum_{i=1}^{m} \lambda_i\eta_i$. Поскольку при $\zeta_i \in H_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m)$ элемент $\zeta_1 \ldots \zeta_m\lambda_i$ лежит в идеале H_i, то элементы $\zeta_1 \ldots \zeta_m\lambda_i\eta_i$, а следовательно, и $\zeta_1\zeta_2 \ldots \zeta_m\zeta$ принадлежат идеалу I. Таким образом, $H_0 \subseteq I$, т. е. $I \in \mathscr{E}$.

Из наличия изоморфизма $\Lambda \otimes_\Lambda A \cong A$ ([б], стр. 40; [г], стр. 184) и перестановочности функтора $\otimes$ с прямой суммой ([б], стр. 129, предложение 9.2) вытекает предложение

(0.7) *Если $\mathfrak{B}$ — база свободного правого Λ-модуля F, $x_1, \ldots, x_m \in \mathfrak{B}$, A — левый Λ-модуль, $a_i \in A$ и $\sum_{i=1}^{m} x_i \otimes a_i = 0$, то $a_i = 0$ для всех i.*

Назовем *подинъективными* модулями фактор-модули инъективных модулей:

(0.8) *Модуль A является подинъективным тогда и только тогда, когда он инъективен относительно вложений свободных модулей* [1]).

В самом деле, если модуль A инъективен относительно вложений свободных модулей и $\pi\colon F \to A$ — эпиморфизм, где F — свободный модуль, то A — эпиморфный образ инъективной оболочки $\hat{F}$ модуля F. Наоборот, если модуль A подинъективен, существует эпиморфизм $g\colon Q \to A$, где Q — инъективный модуль. Пусть F — свободный модуль, $f\colon F \to B$ — мономорфизм

[1]) Из доказательства этого предложения видно, что в его формулировке свободные модули можно заменить на проективные.

и φ: $F \to A$. Тогда $\varphi = \varphi' g$, ибо F проективен, и $\varphi' = f\psi'$, ибо Q инъективен. Положив $\psi = \psi' g$, получим равенства $f\psi = f\psi' g = \varphi' g = \varphi$.

(0.9) *Если F — свободный, а F/K — плоский Λ-модули и $x_1, \ldots, x_m \in K$, то существует такой гомоморфизм θ: $F \to K$, что $x_i\theta = x_i$ для всех i.*

Доказательство будем вести по индукции. Пусть $m = 1$ и $x_1 = \sum\limits_i \lambda_i u_i$, где $\{u_i\}$ — база модуля F. Положим $H = \sum \lambda_i \Lambda$. Из точности последовательности

$$0 \to H \otimes_\Lambda F/K \to \Lambda \otimes_\Lambda F/K$$

([г], стр. 212, теорема 8.6) вытекает, что $\sum \lambda_i \otimes (u_i + K) = 0$ в $H \otimes_\Lambda F/K$. Отсюда ввиду точности последовательности

$$H \otimes_\Lambda K \to H \otimes_\Lambda F \to H \otimes_\Lambda F/K \to 0$$

([г], стр. 194, теорема 5.1) получаем, что

$$\sum_i \lambda_i \otimes u_i = \sum_j v_j \otimes w_j,$$

где $v_j \in H$, $w_j \in K$. Если $w_j = \sum \mu_{ji} u_i$, то, учитывая предложение (0.7), приходим к равенству

$$\lambda_i = \sum_j v_j \mu_{ji}.$$

Но $v_j = \sum\limits_k \lambda_k \nu_{kj}$. Определим гомоморфизм θ: $F \to K$, положив $u_k\theta = \sum\limits_j \nu_{kj} w_j$. Тогда

$$x_1\theta = \sum_k \lambda_k (u_k\theta) = \sum_k \Big(\sum_j \lambda_k \nu_{kj} w_j \Big) =$$
$$= \sum_i \Big(\sum_{k,\,j} \lambda_k \nu_{kj} \mu_{ji} \Big) u_i = \sum_i \Big(\sum_j v_j \mu_{ji} \Big) u_i = \sum_i \lambda_i u_i = x_1.$$

Переходя к произвольному m, находим φ: $F \to K$ и ψ: $F \to K$ такие, что

$$x_m \varphi = x_m,$$
$$y_i \psi = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, m-1),$$

где $y_i = x_i - x_i\varphi$. Положив $\theta = \varphi + \psi - \varphi\psi$, получим

$$x_m\theta = x_m + x_m\psi - x_m\psi = x_m,$$

а при $i < m$

$$x_i\theta = x_i - y_i + x_i\psi - (x_i - y_i)\psi = x_i.$$

Модуль A называется *конечно-связанным*, если существует точная последовательность $0 \to K \to F \to A \to 0$, где K и F — конечно-порожденные модули, причем F — свободный модуль.

(0.10) *Конечно-связанный плоский Λ-модуль A проективен.*

Для доказательства рассмотрим точную последовательность

$$0 \to K \to F \to A \to 0,$$

где F — конечно-порожден и свободен, а K — конечно-порожден. Применяя (0.9), легко убедиться, что K — ретракт, после чего проективность модуля A очевидна ([б], стр. 21, теорема 2.2).

(0.11). *Каждый Λ-модуль A является пределом прямого спектра конечно-связанных Λ-модулей.*

Действительно, ясно, что каждый Λ-модуль является пределом прямого спектра (даже суммой) конечно-порожденных модулей [1]). Поэтому справедливость предложения (0.11) достаточно доказать для случая, когда A конечно-порожден. С этой целью представим A в форме $A = F/K$, где F — конечно-порожденный свободный модуль. Ясно, что $K = \sum K_\alpha$, где K_α пробегает множество всех конечно-порожденных подмодулей модуля K. Если $K_\alpha \subseteq K_\beta$, то обозначим через $\pi_{\alpha\beta}$ естественный гомоморфизм F/K_α в F/K_β. Легко убедиться, что отображение

$$(x + K)\varphi = x + K_\alpha,$$

где $x \in F$, определяет изоморфизм модуля A на предел спектра $(F/K_\alpha, \pi_{\alpha\beta})$. Остается заметить, что все модули F/K_α конечно-связаны.

Понятие инъективной структуры ввел Маранда [154]. Им же доказаны предложения (0.1) и (0.2). Радикальный фильтр почти одновременно появился у Маранды [154] и Габриэля [92] (см. также [196]), а немного позже — у Рябухина [22]. Правда, свойство, указанное в предложении (0.3), входило у них в определение. На справедливость предложения (0.3) указал Сандерсон [192], ссылаясь на устное сообщение Чева (Chew). Предложения (0.4) и (0.6) заимствованы у Маранды. Второе из них доказал также Штенштрем [196]. Предложение (0.7) имеется в книге Норскотта [л], а предложения (0.9) и (0.10) — в статье Чейза [58]. Другие доказательства предложения (0.10) имеются в работах Хаттори [104] и Ауслания [34]. Предложение (0.5) доказали Длаб ([70]—[73], [251]), а также Стефенсон.

[1]) Необходимые сведения о прямых спектрах и их пределах можно найти, например, в [е], стр. 274—277.

§ 1. ЧИСТОТА

Скажем, что в категории Λ-модулей задана *чистота* ω, если выделен класс $\mathfrak{H}_\omega$ мономорфизмов со свойствами:

Ч0. Всякая ретракция лежит в $\mathfrak{H}_\omega$.

Ч1. Если $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\varphi\psi \in \mathfrak{H}_\omega$.

Ч2. Если $\varphi\psi \in \mathfrak{H}_\omega$ и ψ — мономорфизм, то $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$.

Ч3. Если строки и столбцы коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] \arrow[d, "e_K"'] & A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\varphi"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "\psi"'] & 0 \\ 0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] & B \arrow[r, "\tau"] & D \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

точны и $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\psi \in \mathfrak{H}_\omega$.

Ч4. Если в указанной выше диаграмме $i, \psi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$.

Мономорфизмы из $\mathfrak{H}_\omega$ будем называть *ω-чистыми*. Если Ч2 выполняется в более сильной форме:

Ч$\overline{2}$. Если $\varphi\psi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$,

чистоту ω будем называть *треугольной*, а класс $\mathfrak{H}_\omega$ — *треугольно чистым*.

Если A — подмодуль модуля B и естественное вложение A в B является ω-чистым, то будем писать $A \subseteq_\omega B$. Нетрудно понять, что, используя это обозначение, свойства Ч0—Ч4 можно выразить так:

Ч0′. Если A — ретракт в B, то $A \subseteq_\omega B$.

Ч1′. Если $A \subseteq_\omega B$ и $B \subseteq_\omega C$, то $A \subseteq_\omega C$.

Ч2′. Если $A \subseteq B \subseteq C$ и $A \subseteq_\omega C$, то $A \subseteq_\omega B$.

Ч3′. Если $A \subseteq_\omega B$ и $K \subseteq A$, то $A/K \subseteq_\omega B/K$.

Ч4′. Если $K \subseteq A \subseteq B$, $K \subseteq_\omega B$ и $A/K \subseteq_\omega B/K$, то $A \subseteq_\omega B$.

Нетрудно проверить, что соотношения $A \cap B \subseteq_\omega C$ и $A + B \subseteq_\omega C$ влекут за собой $A \subseteq_\omega C$ (ср. [и], стр. 93, упражнение 14).

Ясно, что совокупность всех мономорфизмов определяет чистоту, которую будем называть *абсолютной*. Класс, состоящий из одних ретракций, тоже определяет чистоту, которую будем называть *нулевой*. Легко понять, далее, что для всякого семейства чистот $\{\omega_\alpha\}$ класс $\mathfrak{H} = \bigcap\limits_\alpha \mathfrak{H}_{\omega_\alpha}$ также является чистым. Отсюда вытекает, что для любого семейства мономорфизмов найдется минимальный чистый класс, содержащий его.

В случае абелевых групп свойствами Ч0′—Ч4′ обладают вложения в качестве сервантной ([и], § 23; [в], стр. 159) или слабо-сервантной (neat) подгруппы ([и], § 28). Нетрудно проверить, что обе эти чистоты являются треугольными. Будем называть их *сервантной* и *слабо-сервантной* соответственно. Ниже будут приведены и другие примеры.

(1.1) *Если* $A \subseteq_\omega C$ *и* $B \subseteq_\omega D$, *то* $A \dotplus B \subseteq_\omega C \dotplus D$.

Действительно, пусть $\varphi\colon A \to C$ и $\psi\colon B \to D$. Допустим сначала, что $\psi = e_B$. Тогда, согласно свойствам Ч0′ и Ч4′, справедливость (1.1) легко следует из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} A \dotplus B \arrow[r, "\varphi\dotplus\psi"] \arrow[d, "e_A+0"'] & C \dotplus D \arrow[d, "e_C+0"] \\ A \arrow[r, "\varphi"] & C. \end{tikzcd}$$

Используя этот результат, в общем случае получаем, что $A \dotplus B \subseteq_\omega C \dotplus B \subseteq_\omega C \dotplus D$, после чего остается только применить Ч1′.

Пусть ω — некоторая чистота. Точную последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \to C \to 0$$

назовем *ω-чистой*, если $i \in \mathfrak{H}_\omega$.

(1.2) *Если* ω — *чистота* [*треугольная чистота*], *то ω-чистые последовательности образуют подполугруппу* [*подгруппу*] $\omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ *в группе* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$.

В самом деле, ввиду свойства Ч0 $\omega \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ не пусто. Далее, суммой последовательностей

$$0 \to A \xrightarrow{i'} B' \xrightarrow{\pi'} C \to 0$$

и

$$0 \to A \xrightarrow{i''} B'' \xrightarrow{\pi''} C \to 0$$

является нижняя строка коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d] & K \arrow[r] \arrow[d, "k"] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & A' \dotplus A'' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\varphi"'] & H \arrow[r, "\psi"] \arrow[d, "\tau"] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & C \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd},$$

где $A' = A'' = A$, $H = \{(b', b'') \mid (b', b'') \in B' \dotplus B'',\ b'\pi' = b''\pi''\}$, $K = \{(a, -a) \mid a \in A\}$, $(b', b'')\psi = b'\pi$, $(a', a'')\varphi = a' + a''$, а все остальные гомоморфизмы естественные ([ж], стр. 210, или [222], стр. 90—92[1])). Если i', $i'' \in \mathfrak{H}_\omega$, то из предложения (1.1) и свойства Ч2 вытекает, что $j \in \mathfrak{H}_\omega$, после чего ясно, что $i \in \mathfrak{H}_\omega$ ввиду свойства Ч3′. В случае треугольности чистоты ω допустим, что i, $i' \in \mathfrak{H}_\omega$, и рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
K \arrow[r, "k"] \arrow[d, "\xi'"'] & H \arrow[d, "\xi"] \\
A \arrow[r, "i'"] & B'
\end{tikzcd},$$

где $(b', b'')\xi = b'$, а ξ' — ограничение ξ на K. Ввиду свойств Ч0 и Ч1 $k\xi = \xi' i' \in \mathfrak{H}_\omega$, после чего из свойства Ч2 вытекает, что $k \in \mathfrak{H}_\omega$. Отсюда, применив Ч4′,

[1]) Определение сложения в группе Ext можно найти также в книгах Фукса ([и], примечание на стр. 237) и Маклейна ([г], стр. 96). Приведение последнего определения к рассматриваемой форме требует некоторых усилий.

получим, что $j \in \mathfrak{H}_\omega$. Положив $(b', b'')\eta = b''$, где $(b', b'') \in H$, придем к коммутативной диаграмме

$$\begin{tikzcd}
A' \dotplus A'' \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\eta'"'] & H \arrow[d, "\eta"] \\
A \arrow[r, "i''"] & B''
\end{tikzcd},$$

где η' — ограничение η на $A' \dotplus A''$. При этом $\operatorname{Ker} \eta = A'$, $(A' \dotplus A'')\eta = A$ и $H\eta = B''$, откуда, согласно свойству Ч3′, вытекает, что $i'' \in \mathfrak{H}_\omega$.

Если $\mathfrak{H}$ — класс мономорфизмов, то обозначим через $\mathfrak{H}^*$ класс всех таких эпиморфизмов σ, что естественное вложение $\operatorname{Ker} \sigma$ принадлежит $\mathfrak{H}$. Если ω — чистота, то эпиморфизмы из $\mathfrak{H}_\omega$ назовем *ω-кочистыми*. Нетрудно проверить, что свойства Ч3 и Ч4 равносильны следующим:

Ч3*. Если $\sigma\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$ и σ — эпиморфизм, то $\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$.

Ч4*. Если σ, $\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$, то $\sigma\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$.

Для доказательства рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "e_K"] & M \arrow[r] \arrow[d, "f"] & L \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "h"] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "\tau"] & 0 \\
 & & D \arrow[r, "e_D"] \arrow[d] & D \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Если $\pi = \sigma\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$ то $f \in \mathfrak{H}_\omega$. При выполнении свойства Ч3 отсюда вытекает, что мономорфизм $g \in \mathfrak{H}_\omega$, т. е. $\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$. Если имеет место Ч3* и $f \in \mathfrak{H}_\omega$, то сразу получаем, что $g \in \mathfrak{H}_\omega$, т. е. выполнено Ч3. Если σ, $\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$, то h, $g \in \mathfrak{H}_\omega$. Применяя свойство Ч4, получаем $f \in \mathfrak{H}_\omega$, т. е. $\pi \in \mathfrak{H}^*_\omega$. Столь же просто Ч4 выводится из Ч4*.

Чистоту ω назовем *котреугольной*, если свойство Ч3* выполнено в более сильной форме:

Ч$\bar{3}^*$. Если $\sigma\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$, то $\tau \in \mathfrak{H}^*_\omega$.

В этом случае класс $\mathfrak{H}_\omega$ будем называть *котреугольно чистым*.

Если чистота ω треугольна и котреугольна, то назовем ее *битреугольной*.

Сервантная и слабо-сервантная чистоты битреугольны (см. (1.23)).

(1.3) *Если* $f\colon A \to A'$, $g\colon C' \to C$ *и* ω — *треугольная (котреугольная) чистота, то*

$$\omega \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)\operatorname{Ext}(g, e_A) \subseteq \omega \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C', A) \qquad (*)$$

(*соответственно*

$$\omega \operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)\operatorname{Ext}(e_C, f) \subseteq \omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A')). \qquad (**)$$

Если чистота ω *битреугольна, то для точной последовательности*

$$E\colon 0\to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\pi} C \to 0,$$

где $\varphi\in\mathfrak{H}_\omega$, *имеют место точные последовательности*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, A) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, B)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, C)\xrightarrow{\alpha}$$
$$\to \omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, A)\xrightarrow{\beta}\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, B)\xrightarrow{\gamma}\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, C) \qquad (***)$$

и

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C, X) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(B, X)\to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X)\xrightarrow{\alpha'}$$
$$\to \omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, X)\xrightarrow{\beta'}\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, X)\xrightarrow{\gamma'}\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, X), \qquad (****)$$

где X — *любой* Λ-*модуль.*

В самом деле, рассмотрим коммутативные диаграммы

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "e_A"'] & B'' \arrow[r] \arrow[d, "\rho"'] & C' \arrow[r] \arrow[d, "g"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\pi"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}
\quad \text{и} \quad
\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\sigma"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "e_C"] & 0 \\
0 \arrow[r] & A' \arrow[r, "\psi"] & B' \arrow[r, "\tau"] & C \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками, где $\varphi\in\mathfrak{H}_\omega$. Тогда $\pi\in\mathfrak{H}^*_\omega$. Из Ч$\bar{3}^*$ вытекает, что $\tau\in\mathfrak{H}^*_\omega$, т. е. $\psi\in\mathfrak{H}_\omega$, а из Ч$\bar{2}$ вытекает, что $\chi\in\mathfrak{H}_\omega$. Таким образом, включения (*) и (**) доказаны. Далее, вспомним, что $h\alpha = E\operatorname{Ext}(h, e_A)$

для $h\in\mathrm{Hom}_\Lambda(X, C)$ и $h'\alpha' = E\operatorname{Ext}(e_C, h')$ для $h'\in\mathrm{Hom}_\Lambda(A, X)$ ([г], стр. 101—103). Поэтому $\operatorname{Im}\alpha\subseteq\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, A)$ и $\operatorname{Im}\alpha'\subseteq\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, X)$, а последовательности (***) и (****) точны до $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, A)$ и $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, X)$ соответственно. Кроме того, очевидно, что $\beta\gamma=0$ и $\beta'\gamma'=0$. Пусть точная последовательность $0\to B\xrightarrow{k} G\to X\to 0$ определяет элемент из $\operatorname{Ker}\gamma$. Так как $\operatorname{Ext}^1_\Lambda$ — полуточный функтор, то для некоторого Λ-модуля H имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "l"] \arrow[d, "\varphi"'] & H \arrow[r] \arrow[d, "\xi"'] & X \arrow[r] \arrow[d, "e_X"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & B \arrow[r, "k"] & G \arrow[r] & X \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками. Так как $\varphi, k\in\mathfrak{H}_\omega$, то $l\xi=\varphi k\in\mathfrak{H}_\omega$, по Ч1. Поскольку ω — треугольная чистота, отсюда следует, что $l\in\mathfrak{H}_\omega$. Таким образом, $\operatorname{Ker}\gamma=\operatorname{Im}\beta$. Пусть теперь точная последовательность

$$0\to X\to G'\xrightarrow{k'} B\to 0$$

определяет элемент из $\operatorname{Ker}\gamma'$. Тогда для некоторого Λ-модуля H' имеет место коммутативная диаграмма с точными строками

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & X \arrow[r] \arrow[d, "e_X"'] & G' \arrow[r, "k'"] \arrow[d, "\xi'"'] & B \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & X \arrow[r] & H' \arrow[r, "l'"] & C \arrow[r] & 0.
\end{tikzcd}$$

Так как $k', \pi\in\mathfrak{H}^*_\omega$, то $\xi' l' = k'\pi\in\mathfrak{H}^*_\omega$, по Ч4*. Отсюда и из котреугольности чистоты ω следует, что $l'\in\mathfrak{H}^*_\omega$, т. е. $\operatorname{Ker}\gamma'=\operatorname{Im}\beta'$.

(1.4) *Пусть в каждой из групп* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ *выделена подгруппа* $\Phi(C, A)$, *причем*

а) *если* $f\colon A\to A'$, $g\colon C'\to C$, *то*

$$\Phi(C, A)\operatorname{Ext}(g, f)\subseteq\Phi(C', A');$$

б) *для любой точной последовательности*

$$0\to A\xrightarrow{l} B\xrightarrow{\pi} C\to 0,$$

определяющей элемент из $\Phi(C, A)$, *имеют место точные последовательности*

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(e_X, \iota)} \mathrm{Hom}_\Lambda(X, B) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(e_X, \pi)} \to \mathrm{Hom}_\Lambda(X, C) \to \Phi(X, A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}(e_X, \iota)} \to \Phi(X, B) \xrightarrow{\mathrm{Ext}(e_X, \pi)} \Phi(X, C)$$

и

$$0 \to \mathrm{Hom}_\Lambda(C, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\pi, e_X)} \mathrm{Hom}_\Lambda(B, X) \xrightarrow{\mathrm{Hom}(\iota, e_X)} \to \mathrm{Hom}_\Lambda(A, X) \to \Phi(C, X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}(\pi, e_X)} \to \Phi(B, X) \xrightarrow{\mathrm{Ext}(\iota, e_X)} \Phi(A, X),$$

где X — *любой* Λ-*модуль. Тогда существует такая битреугольная чистота* ω, *что* $\Phi(C, A) = \omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$.

Будем считать, что $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$, если точная последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \to C \to 0$$

определяет элемент из $\Phi(C, A)$. Тогда Ч0 выполнено ввиду того, что нуль группы $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, A)$ принадлежит $\Phi(C, A)$. Для доказательства Ч1 и Ч2 рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & \tilde{E}\colon 0 \arrow[d] & & \\
E\colon 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] \arrow[d, "e_A"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "\psi"] & C \arrow[r] \arrow[d, "g"] & 0 \\
\bar{E}\colon 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi\psi"] & \bar{B} \arrow[r] \arrow[d] & \bar{C} \arrow[r] \arrow[d, "\delta"] & 0 \\
 & & D \arrow[r, "e_D"] \arrow[d] & D \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Если $\varphi\psi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$ по условию а). Пусть теперь $\varphi, \psi \in \mathfrak{H}_\omega$. Из естественности связывающего гомоморфизма ([г], стр. 45) вытекает существование коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(\bar{C}, \bar{C}) \arrow[r, "\alpha'"] \arrow[d, "\alpha"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\bar{C}, D) \arrow[d, "\beta'"] \\
\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\bar{C}, A) \arrow[r, "\beta"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\bar{C}, B)
\end{tikzcd}$$

([г], стр. 130). Отсюда $e_{\bar{C}}\alpha'\beta' = e_{\bar{C}}\alpha\beta$, т. е.

$$\tilde{E}\,\mathrm{Ext}(\delta, e_B) = \bar{E}\,\mathrm{Ext}(e_{\bar{C}}, \varphi)^{1)}.$$

Так как $\psi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $\tilde{E} \in \Phi(D, B)$ и, следовательно, $\bar{E}\,\mathrm{Ext}(e_{\bar{C}}, \varphi) \in \Phi(\bar{C}, B)$. Из условия б), точности последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

и того, что $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$, следует, что точна последовательность

$$\Phi(\bar{C}, A) \xrightarrow{\mathrm{Ext}(\bar{C}, \varphi)} \Phi(\bar{C}, B) \xrightarrow{\mathrm{Ext}(\bar{C}, \pi)} \Phi(\bar{C}, C).$$

Кроме того, $\bar{E}\,\mathrm{Ext}(e_{\bar{C}}, \varphi)\,\mathrm{Ext}(e_{\bar{C}}, \pi) = 0$, так как $\varphi\pi = 0$. Поэтому существует такое $E' \in \Phi(\bar{C}, A)$, что $E'\,\mathrm{Ext}(e_{\bar{C}}, \varphi) = \bar{E}\,\mathrm{Ext}(e_{\bar{C}}, \varphi)$, т. е. $(E' - \bar{E})\,\mathrm{Ext}(e_{\bar{C}}, \varphi) = 0$. Так как точна последовательность

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(\bar{C}, C) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\bar{C}, A) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(\bar{C}, B),$$

то $E' - \bar{E} = E\,\mathrm{Ext}(\xi, e_A)$ при некотором $\xi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\bar{C}, C)$. Так как $\varphi \in \mathfrak{H}_\omega$, то $E \in \Phi(C, A)$, и, применяя а), получаем, что $E' - \bar{E} \in \Phi(\bar{C}, A)$. Но $E' \in \Phi(\bar{C}, A)$. Поэтому $\bar{E} \in \Phi(\bar{C}, A)$, т. е. $\varphi\psi \in \mathfrak{H}_\omega$. Для доказательства справедливости свойств Ч3* и Ч4* проведем двойственное рассуждение. С этой целью рассмотрим

[1)] Напомним, что $h\beta' = \tilde{E}\,\mathrm{Ext}(h, e_B)$ ([г], стр. 101—103).

коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
& & & \tilde{E}\colon 0 \arrow[d] \\
& & \tilde{B} \arrow[r, "e_{\tilde{B}}"] \arrow[d, "\delta'"'] & \tilde{B} \arrow[d] \\
\bar{E}\colon & 0 \arrow[r] & \bar{A} \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & \bar{B} \arrow[r, "\sigma\pi"] \arrow[d, "\sigma"'] & C \arrow[r] \arrow[d, "e_C"'] & 0 \\
E\colon & 0 \arrow[r] & A \arrow[r, "\varphi"] & B \arrow[r, "\pi"] \arrow[d] & C \arrow[r] & 0 \\
& & & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Если $\sigma\pi \in \mathfrak{H}^*_\omega$, то $\pi \in \mathfrak{H}^*_\omega$ благодаря условию а). Если же $\sigma, \pi \in \mathfrak{H}^*_\omega$, то из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd}
\mathrm{Hom}_\Lambda(\bar{A}, \bar{A}) \arrow[r, "\alpha"] \arrow[d, "\alpha'"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(\tilde{B}, \bar{A}) \arrow[d, "\beta"] \\
\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \bar{A}) \arrow[r, "\beta'"] & \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \bar{A})
\end{tikzcd}$$

([г], стр. 130) следует, что $e_{\bar{A}}\alpha\beta = e_{\bar{A}}\alpha'\beta'$. Таким образом, $\tilde{E}\,\mathrm{Ext}(e_B, \delta') = \bar{E}\,\mathrm{Ext}(\pi, e_{\bar{A}})$. Так как $\tilde{E} \in \Phi(B, \tilde{B})$, то по а) $\bar{E}\,\mathrm{Ext}(\pi, e_{\bar{A}}) \in \Phi(B, \bar{A})$. Из условия б), точности последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{\varphi} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

и того, что $\pi \in \mathfrak{H}^*_\omega$, вытекает точность последовательности

$$\Phi(C, \bar{A}) \to \Phi(B, \bar{A}) \to \Phi(A, \bar{A}).$$

Кроме того, $\bar{E}\,\mathrm{Ext}(\pi, e_{\bar{A}})\,\mathrm{Ext}(\varphi, e_{\bar{A}}) = 0$, так как $\varphi\pi = 0$. Отсюда следует существование такого $E' \in \Phi(C, \bar{A})$, что $E'\,\mathrm{Ext}(\pi, e_{\bar{A}}) = \bar{E}\,\mathrm{Ext}(\pi, e_{\bar{A}})$. Таким образом,

$(E' - \bar{E})\,\mathrm{Ext}(\pi, e_{\bar{A}}) = 0$. Но тогда из точности последовательности

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \bar{A}) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, \bar{A}) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(B, \bar{A})$$

вытекает, что $E' - \bar{E} = E\,\mathrm{Ext}(e_C, \xi)$ при некотором $\xi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \bar{A})$. Так как $E \in \Phi(C, A)$, отсюда, используя условие а), получаем, что $E' - \bar{E} \in \Phi(C, \bar{A})$. Но $E' \in \Phi(C, A)$. Поэтому $\bar{E} \in \Phi(C, A)$, т. е. $\sigma\pi \in \mathfrak{H}^*_\omega$.

Мысль об аксиоматизации чистоты с помощью свойств Ч0′ – Ч4′ возникает по существу в работе Маранды [153]. Предложения (1.2) – (1.4) легко следуют из результатов Батлера и Хоррокса [53]. Сама по себе идея определения нового функтора путем выделения подгруппы в группе Ext восходит к работе Хохшильда [116] (см. также [48], [218]). В случае групп, исходя из нее, вводились и исследовались различные чистоты ([91], [101], [103], [124], [169], [170], [234]). На некоторые из относящихся сюда проблем указал Фукс [90]. В этой связи интересно следующее свойство слабо-сервантной чистоты ([н], стр. 248, упражнение 17): группа A слабо-сервантна в B тогда и только тогда, когда точная последовательность

$$0 \to A \to B \to B/A \to 0$$

принадлежит подгруппе Фраттини группы $\mathrm{Ext}(B/A, A)$. Отметим также результаты Фукса ([85], ч. I; [87]), доказавшего, что если U — любая группа, а $0 \to A \xrightarrow{\alpha} B \xrightarrow{\beta} C \to 0$ — точная последовательность, где $A\alpha$ сервантна в B, то индуцированные гомоморфизмы α' и β' отображают $\mathrm{Hom}(U, A)$, $\mathrm{Hom}(C, U)$, $\mathrm{Ext}(U, A)$, $\mathrm{Ext}(C, U)$, $A \otimes U$ и $\mathrm{Tor}(U, A)$ на сервантные подгруппы групп $\mathrm{Hom}(U, B)$, $\mathrm{Hom}(B, U)$, $\mathrm{Ext}(U, B)$, $\mathrm{Ext}(B, U)$, $B \otimes U$, $\mathrm{Tor}(U, B)$ соответственно; обратно, если подгруппа $\mathrm{Hom}(U, A)\,\alpha'$ (подгруппа $\mathrm{Hom}(C, U)\,\beta'$, подгруппа $(A \otimes U)\,\alpha'$) сервантна в $\mathrm{Hom}(U, B)$ (в $\mathrm{Hom}(B, U)$, в $B \otimes U$) при любом U, то подгруппа $A\alpha$ сервантна в B. Интересно, имеют ли место аналогичные результаты для модулей, а также для других чистот в группах.

Пусть опять ω — некоторая чистота. Назовем Λ-модуль *ω-инъективным* (*ω-проективным*), если он инъективен (копроективен) относительно всех ω-чистых мономорфизмов. Совокупность всех ω-инъективных (ω-проективных) Λ-модулей обозначим через $\mathfrak{Q}_\omega$ (через $\mathfrak{P}_\omega$). Ясно, что инъективные (проективные) модули ω-инъективны (ω-проективны) для всякой чистоты ω.

Классы сервантно-инъективных и слабо-сервантно-инъективных групп совпадают соответственно с классом всех алгебраически компактных групп ([н], § 26) и классом всех групп вида

$D+\sum_p^* T_p$, где D — делимая группа, $pT_p=0$, p пробегает все простые числа ([103], лемма 4). Класс всех алгебраически компактных групп совпадает с классом всех групп вида $A=D\dotplus\sum_p^* D_p$, где D — делимая группа, а D_p — модуль над кольцом целых p-адических чисел, не имеющий элементов бесконечной высоты и полный в топологии с базой окрестностей нуля $\{p^nD_p \mid n=1, 2, \ldots\}$ ([36]). Известно также, что группа A алгебраически компактна тогда и только тогда, когда она служит прямым слагаемым для некоторой группы, допускающей бикомпактную топологию ([148]). Алгебраическое строение групп, допускающих бикомпактную топологизацию, описал Хулянипцкий ([117], [118]). Другие характеризации класса всех алгебраически компактных групп можно найти в [и] (§ 26), [к] (§ 17), [88], [98] (стр. 177), [119] [121], [148], [150], [152], [181]. Примерами алгебраически компактных групп служат группы Hom (U, V), где U — периодическая, а V — произвольная группа, и Ext (U, V), где группа U произвольна, а V — группа без кручения ([85], ч. I, теоремы 4.1 и 4.3; [102]), а также группа характеров любой группы ([86]). Группы Hom (A, H) и Ext (A, H) алгебраически компактны, если такова группа H ([90], стр. 11). Мадер [152] выяснил, когда алгебраически компактная группа является пополнением в n-адической топологии прямой суммы циклических групп. Известно также, что для произвольных групп A_n факторгруппа $\sum^* A_n/\sum A_n$ алгебраически компактна ([120]; см. также [39], [75], [89], [98]). Интересен вопрос, для каких чистот и каких колец этот последний результат остается справедливым ([90], стр. 12, проблема 2). С алгебраической компактностью связана также проблема 1 из [90]. Класс сервантно-проективных групп совпадает с классом всех прямых сумм циклических групп ([153], стр. 2, теорема 1; [в], стр. 157, 162). Разумеется, слабо-сервантно-проективные группы будут лежать в этом классе. Однако циклическая группа Zc порядка p^k, где p — простое число и $k>1$, не слабо-сервантно-проективна, так как для нее не замыкается диаграмма

$$\begin{tikzcd} & Zc \arrow[d, "\varphi"] & \\ A \arrow[r, "\pi"] & A/B \arrow[r] & 0, \end{tikzcd}$$

где $A=Z/pZ\dotplus Z/p^{k+1}Z$, $B=Z\left(1+pZ,\ p^{k-1}+p^{k+1}Z\right)$, π — естественный эпиморфизм и $c\varphi=(0, 1)+B$. С другой стороны, бесконечная циклическая группа и циклические группы простых порядков, очевидно, копроективны относительно слабо-сервантно-чистых вложений (см. (1.48)). Таким образом, ввиду предложения (1.5) слабо-сервантно-проективными оказываются все прямые суммы бесконечных циклических групп и циклических групп простых порядков и только они.

(1.5) *Прямая сумма (полная прямая сумма) Λ-модулей ω-проективна (ω-инъективна) тогда и только тогда, когда все слагаемые ω-проективны (ω-инъективны).*

Действительно, справедливость доказываемого утверждения для полной прямой суммы сразу следует из (0.1a), а для прямой суммы доказывается двойственным рассуждением.

(1.6) *Если ω — битреугольная чистота, то ω-инъективность Λ-модуля Q (ω-проективность Λ-модуля P) равносильна равенству $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, Q)=0$ (равенству $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(P, X)=0$) для всех Λ-модулей X.*

Действительно, если Q — ω-инъективный модуль, $Q\subseteq_\omega Y$ и $Y/Q=X$, то, поскольку e_Q можно продолжить до гомоморфизма Y в Q, модуль Q оказывается ретрактом в Y, т. е. $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, Q)=0$. Если же $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, Q)=0$ для всех X, $A\subseteq_\omega B$ и ω — битреугольная чистота, то из (1.3) легко вывести, что Hom (i, e_Q), где $i\colon A\to B$ — естественное вложение, отображает $\operatorname{Hom}_\Lambda(B, Q)$ на $\operatorname{Hom}_\Lambda(A, Q)$. Но это и означает возможность продолжить всякий гомоморфизм $\varphi\colon A\to Q$ до гомоморфизма $\psi\colon B\to Q$. Второе утверждение доказывается двойственным рассуждением.

Пусть ω — некоторая чистота. Модуль A назовем ω-*делимым*, если всякий мономорфизм $i\colon A\to B$ является ω-чистым. Модуль C назовем ω-*плоским*, если во всякой точной последовательности $0\to A\xrightarrow{i}B\to C\to 0$ мономорфизм i является ω-чистым. Другими словами, модуль D будет ω-делимым, если $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, D)=\operatorname{Ext}^1_\Lambda(X, D)$ для всех X, а модуль E — ω-плоским, если $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(E, X)=\operatorname{Ext}^1_\Lambda(E, X)$ для всех X. Из свойства Ч0 вытекает, что всякий инъективный модуль является ω-делимым, а всякий проективный — ω-плоским.

Из предложения (1.53) вытекает, что как сервантно-делимыми, так и слабо-сервантно-делимыми являются обычные делимые группы [1]) и только они. Группы без кручения и только они являются ввиду предложения (1.54) как сервантно-, так и слабо-сервантно-плоскими.

(1.7) *Модуль A является ω-делимым тогда и только тогда, когда он ω-чист в некотором инъективном модуле.*

[1]) Делимыми будем называть группы, которые в русской литературе обычно называются полными.

Действительно, пусть $A \subseteq_\omega Q$, где Q — инъективный модуль. Из свойства Ч2′ нетрудно вывести, что $A \subseteq_\omega \hat{A}$, где $\hat{A}$ — инъективная оболочка модуля A ([г], стр. 138). Если $A \subseteq B$, то $A \subseteq \hat{B}$. Можно считать, что $A \subseteq \hat{A} \subseteq \hat{B}$. Но $\hat{B} = \hat{A} \dotplus C$. Из свойств Ч0′ и Ч1′ вытекает, что $A \subseteq_\omega \hat{B}$. Остается применить Ч2′. Обратное очевидно.

(1.8) *Если $A \subseteq_\omega B$ и модуль B является ω-делимым, то и модуль A будет ω-делимым.*

Действительно, ввиду предложения (1.7) $B \subseteq_\omega Q$, где модуль Q инъективен. Из свойства Ч1′ вытекает, что $A \subseteq_\omega Q$. Вторичное применение предложения (1.7) завершает доказательство.

(1.9) *Всякое расширение ω-делимого модуля с помощью ω-делимого является ω-делимым модулем.*

Действительно, пусть $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точная последовательность, где A и C — ω-делимые модули, и пусть $B \subseteq D$. Ясно, что $A \subseteq_\omega D$ и $B/A \subseteq_\omega D/A$. Ввиду свойства Ч4′ $B \subseteq_\omega D$.

(1.10) *Прямая сумма $S = A \dotplus B$ является ω-делимым модулем тогда и только тогда, когда ω-делимы оба прямых слагаемых.*

Действительно, если S — ω-делимый модуль, то A и B также ω-делимы по свойству Ч0′ и предложению (1.8). Обратное следует из (1.9).

(1.11) Лемма. *Если $0 \to K \xrightarrow{i} F \xrightarrow{\pi} B \to 0$ и $0 \to L \xrightarrow{j} A \xrightarrow{\tau} B \to 0$ — точные последовательности и F — свободный модуль, то имеет место коммутативная диаграмма*

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
 & 0 \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[r] \arrow[d, "\alpha"'] & K \arrow[r] \arrow[d, "i"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & N \arrow[r, "\beta"] \arrow[d] & F \dotplus L \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\rho"'] & F \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & L \arrow[r, "j"] \arrow[d] & A \arrow[r, "\tau"] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & 0 & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами, причем $M\alpha \cap N\beta = 0$.

Действительно существует $f\colon F \to A$ такой, что $\pi = f\tau$. Определим $\rho\colon F \dotplus L \to A$, положив $(x, y)\rho = xf + yj$. Если $a \in A$, то $a\tau = x\pi = xf\tau$, откуда $a - xf = yj$. Таким образом, $(x, y)\rho = a$, т. е. ρ — эпиморфизм. Пусть $M = \operatorname{Ker}\rho$ и α — естественное вложение M в $F \dotplus L$. Положим $N = L$ и обозначим через β естественное вложение N в $F \dotplus L$, а через σ — проекцию $F \dotplus L$ на F. Заметим еще, что $(x, y)\sigma\pi = xf\tau = (xf + yj)\tau = (x, y)\rho\tau$, т. е. $\sigma\pi = \rho\tau$. Если $u \in L$ и $v \in M$, то $u\beta\rho = (0, u)\rho = uj$ и $v\alpha\sigma\pi = v\alpha\rho\tau = 0$. Отсюда $N\beta\rho = Lj$ и $M\alpha\sigma \subseteq Ki$. Кроме того, если $(x, y) \in M\alpha \cap N\beta$, то $x = 0$ и $yj = (x, y)\rho = 0$, т. е. $M\alpha \cap N\beta = 0$. Отсюда вытекает, что ограничения ρ и σ на N и M соответственно являются мономорфизмами. Пусть $x \in Ki$. Тогда $x = (x, 0)\sigma$. При этом $(x, 0)\rho\tau = (x, 0)\sigma\pi = x\pi = 0$, т. е. $(x, 0)\rho = yj$. Отсюда $(x, -y)\rho = (x, 0)\rho - (0, y)\rho = 0$, т. е. $(x, -y) \in M\alpha$. Но $(x, -y)\sigma = x$, т. е. $M\alpha\sigma = Ki$.

(1.12) *Модуль B является ω-плоским тогда и только тогда, когда B — эпиморфный образ некоторого проективного модуля с ω-чистым ядром.*

Действительно, из свойства Ч0′, предложения (1.1) и из [б], стр. 21, теорема 2.2, вытекает, что B — эпиморфный образ некоторого проективного модуля с ω-чистым ядром тогда и только тогда, когда B — эпиморфный образ некоторого свободного модуля F с ω-чистым ядром K. Пусть $\tau\colon A \to B$ — эпиморфизм и $L = \operatorname{Ker}\tau$. Рассмотрим диаграмму, построенную в (1.11). Предположим, что $i \in \mathfrak{H}_\omega$. Так как $(M\alpha + N\beta)\sigma = Ki$ и $N\beta \subseteq_\omega F \dotplus L$, согласно свойству Ч0′, то из Ч4′ вытекает, что $M\alpha + N\beta \subseteq_\omega F \dotplus L$. Применив Ч3′, получим $\operatorname{Ker}\tau \subseteq_\omega A$, что и требовалось. Обратное утверждение очевидно.

(1.13) *Если A является ω-плоским модулем, $\tau\colon A \to B$ — эпиморфизм и $\operatorname{Ker}\tau \subseteq_\omega A$, то B — также ω-плоский модуль.*

Действительно, по (1.12), имеет место эпиморфизм $\pi\colon P \to A$, где P — проективный модуль и $\operatorname{Ker}\pi \subseteq_\omega P$. Из свойства Ч4′ следует, что $(\operatorname{Ker}\tau)\pi^{-1} \subseteq_\omega P$. Но $(\operatorname{Ker}\tau)\pi^{-1} = \operatorname{Ker}\pi\tau$. Остается еще раз применить (1.12).

(1.14) *Расширение ω-плоского модуля с помощью ω-плоского является ω-плоским модулем.*

Действительно, пусть $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точная последовательность, где A, C — ω-плоские модули.

Из точной последовательности $0 \to K \xrightarrow{i} D \to B \to 0$ легко получить коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i'"] \arrow[d, "e_K"'] & D' \arrow[r] \arrow[d, "j"'] & A \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "i"] & D \arrow[r] \arrow[d] & B \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
 & & C \arrow[r, "e_C"] \arrow[d] & C \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Из условия вытекает, что i', $j \in \mathfrak{H}_\omega$. Согласно свойству Ч2 $i = i'j \in \mathfrak{H}_\omega$, что и доказывает теорему.

(1.15) *Прямая сумма* $S = A \dotplus B$ *является* ω*-плоской тогда и только тогда, когда* ω*-плоскими являются оба слагаемых.*

Действительно, если S — ω-плоский модуль, то A и B — также ω-плоские модули по свойству Ч0′ и предложению (1.13). Обратное следует из (1.14).

Рохлина заметила, что справедлив следующий результат: *Если* Λ — *наследственное кольцо, то всякий подмодуль* ω*-плоского* Λ*-модуля является* ω*-плоским, а всякий фактор-модуль* ω*-делимого* Λ*-модуля будет* ω*-делимым.*

Это сразу следует из [6], стр. 30, теорема 5.4, предложений (1.7), (1.12) и из свойств Ч3′ и Ч2′.

(1.16) *Если* $\mathfrak{M}$ — *произвольный класс модулей, то класс* $\mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}$ *всех мономорфизмов, относительно которых инъективны все модули из* $\mathfrak{M}$*, является треугольно чистым.*

Действительно, справедливость свойств Ч0, Ч1 и Ч$\overline{2}$ сразу следует из предложений (0.1б), (0.1в) и (0.1г). Справедливость свойства Ч3 проверяется без труда. Допустим теперь, что дана коммутативная диаграмма, указанная в Ч4, $Q \in \mathfrak{M}$ и α: $A \to Q$. Тогда $j\alpha = i\beta'$, где β': $B \to Q$ существует в силу того, что $i \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}$. Пусть теперь $\alpha'' = \alpha - \varphi\beta'$. Поскольку

$j\alpha'' = 0$, то $\alpha'' = \sigma\bar{\alpha}$, где $\bar{\alpha}$: $C \to Q$. Отсюда $\bar{\alpha} = \psi\bar{\beta}$, где $\bar{\beta}$: $D \to Q$. Положив $\beta = \tau\bar{\beta} + \beta'$, получим

$$\varphi\beta = \varphi\tau\bar{\beta} + \varphi\beta' = \sigma\psi\bar{\beta} + \varphi\beta' = \sigma\bar{\alpha} + \varphi\beta' = \alpha'' + \varphi\beta' = \alpha.$$

Таким образом, $\varphi \in \mathfrak{H}_{\mathfrak{M}}$, т. е. свойство Ч4 также выполнено.

Очевидно, что для всякой чистоты ω имеет место включение $\mathfrak{H}_\omega \subseteq \mathfrak{H}_{\mathfrak{Q}_\omega}$. Чистоту $\bar{\omega}$, определяемую классом $\mathfrak{Q}_\omega$, назовем *инъективным замыканием* чистоты ω. Если $\mathfrak{H}_\omega = \mathfrak{H}_{\mathfrak{Q}_\omega}$, то чистоту ω будем называть *инъективно замкнутой.*

(1.17) *Инъективное замыкание* $\bar{\omega}$ *чистоты* ω *является инъективно замкнутой чистотой.*

Для доказательства заметим, что, поскольку $\mathfrak{Q}_\omega$ содержит все инъективные модули, класс $\Psi(\mathfrak{Q}_\omega)$ состоит из мономорфизмов. Следовательно, $\mathfrak{H}_{\bar{\omega}} = \Psi(\mathfrak{Q}_\omega)$. Но $\mathfrak{Q}_\omega = \Phi(\mathfrak{H}_\omega)$. Отсюда $\mathfrak{Q}_{\bar{\omega}} = \Phi(\mathfrak{H}_{\bar{\omega}}) = \Phi(\Psi(\mathfrak{H}_\omega)) = \Phi(\Psi(\Phi(\mathfrak{H}_\omega))) = \Phi(\mathfrak{H}_\omega) = \mathfrak{Q}_\omega$, поэтому $\mathfrak{H}_{\mathfrak{Q}_{\bar{\omega}}} = \mathfrak{H}_{\mathfrak{Q}_\omega} = \mathfrak{H}_{\bar{\omega}}$.

Чистота ω называется *инъективной*, если для всякого модуля A найдется ω-чистый мономорфизм f: $A \to Q$, где Q — ω-инъективный модуль.

Из предложения (1.51) вытекает, что сервантная и слабосервантная чистоты инъективны.

(1.18) *Всякая инъективная чистота инъективно замкнута и треугольна.*

Действительно, пусть ω — инъективная чистота и мономорфизм i: $A \to B$ лежит в $\mathfrak{H}_{\mathfrak{Q}_\omega} = \Psi(\mathfrak{Q}_\omega)$. Рассмотрим точные последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

и

$$0 \to A \xrightarrow{j} Q,$$

где $j \in \mathfrak{H}_\omega$, $Q \in \mathfrak{Q}_\omega$. Тогда $j = ih$, где h: $B \to Q$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "f"'] & B \arrow[d, "g"] \\
0 \dotplus A \arrow[r, "0 \dotplus j"] & C \dotplus Q.
\end{tikzcd}$$

где $bg = (b\pi, bh)$, $af = (0, a)$. Из свойств Ч0, Ч1 и предложения (1.1) вытекает, что $ig=f(0\dotplus j)\in\mathfrak{H}_\omega$. Но $bg=0$ влечет $b\pi=0$ и $bh=0$. Отсюда $b=ai$ и $0=bh=aih=aj$. Таким образом, $a=0$, а значит, $b=0$. Следовательно, g — мономорфизм и $i\in\mathfrak{H}_\omega$ ввиду свойства Ч2. Треугольность инъективно замкнутой чистоты вытекает из предложения (1.16).

(1.19) *Чистота ω инъективна тогда и только тогда, когда пара* $\mathfrak{B}=(\mathfrak{H}_\omega, \mathfrak{Q}_\omega)$ *является моноинъективной структурой.*

В самом деле, если ω — инъективная чистота, то свойства C1, C2, C3 очевидны, в силу (1.18). Обратное сразу следует из C3.

Далее, справедливо такое утверждение

(1.20) *Если $\mathfrak{M}$ — произвольный класс модулей, то класс $\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}$ всех мономорфизмов, относительно которых копроективны все модули из $\mathfrak{M}$, является котреугольно чистым.*

В самом деле, справедливость свойства Ч0 очевидна. Если естественные вложения $i\colon A\to B$, $j\colon B\to C$ лежат в $\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}$, то рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & B \arrow[r, "j"] \arrow[d, "\pi"'] & C \arrow[d, "\tau"'] & & \\
0 \arrow[r] & B/A \arrow[r, "k"] & C/A \arrow[r, "\sigma"] & C/B \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

где π, τ, σ — естественные эпиморфизмы. Если $P\in\mathfrak{M}$ и $\varphi\colon P\to C/A$, то $\varphi\sigma=\psi'\tau\sigma$, где $\psi'\colon P\to C$, так как $j\in\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}$. Тогда $P(\varphi-\psi'\tau)\subseteq(B/A)k$. Поэтому можно рассмотреть гомоморфизм $\varphi'=(\varphi-\psi'\tau)k^{-1}$, отображающий P в B/A. Далее, $\varphi'=\psi''\pi$, где $\psi''\colon P\to B$. Если $\psi=\psi''j+\psi'$, то $\psi\tau=\psi''j\tau+\psi'\tau=\psi''\pi k+\psi'\tau=\varphi-\psi'\tau+\psi'\tau=\varphi$. Следовательно, естественное вложение A в C лежит в $\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}$, т. е. Ч1 выполнено. Если $i\colon A\to B$, $j\colon B\to C$, $ij\in\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}$ и j — мономорфизм, то рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "e_A"'] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "j"'] & B/A \arrow[r] \arrow[d, "\pi"'] & 0 \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "ij"] & C \arrow[r, "\tau"] & C/A \arrow[r] & 0,
\end{tikzcd}$$

где σ, τ — естественные эпиморфизмы, π — естественное вложение. Если $\varphi\colon P\to B/A$, где $P\in\mathfrak{M}$, то $\varphi\pi=\psi'\tau$ для некоторого $\psi'\colon P\to C$. При $x\in P$ имеем

$$x\psi'\tau=x\varphi\pi=b\sigma\pi=bj\tau,$$

где $b\in B$, т. е. $x\psi'=bj+aij$, где $a\in A$. Отсюда $x\psi'j^{-1}=b+ai$ и $x\psi'j^{-1}\sigma=b\sigma=x\varphi$, так как π — мономорфизм, откуда $(\psi'j^{-1})\sigma=\varphi$, т. е. $i\in\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}$ и свойство Ч2 справедливо. Если выполнены условия свойств Ч$\bar{3}$* или Ч4*, то имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] \\
 & & & L \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & A \arrow[r, "i"] \arrow[d, "k"'] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "e_B"'] & C \arrow[d, "\tau"'] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r, "j"] & B \arrow[r, "\sigma\tau"] & D \arrow[d] \\
 & & & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцом. Для доказательства свойства Ч$\bar{3}$* допустим, что $\sigma\tau\in[\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}]^*$ и рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon P\to D$, где $P\in\mathfrak{M}$. Тогда $\varphi=h(\sigma\tau)$, где $h\colon P\to B$. Отсюда $(h\sigma)\tau=h(\sigma\tau)=\varphi$, т. е. $\tau\in[\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}]^*$. Для доказательства свойства Ч4* предположим, что $\sigma, \tau\in[\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}]^*$ и опять рассмотрим гомоморфизм $\varphi\colon P\to D$, где $P\in\mathfrak{M}$. Тогда $\varphi=h'\tau$ и $h'=h''\sigma$, где $h'\colon P\to C$, $h''\colon P\to B$. Следовательно, $h''(\sigma\tau)=h'\tau=\varphi$, т. е. $\sigma\tau\in[\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}]^*$.

Штенштрем [199] рассматривал чистоту ω, определяемую классом $\mathfrak{H}^{\mathfrak{M}}$ (см. 1.20), где $\mathfrak{M}$ — множество всех конечно-связанных модулей. Среди его результатов следует отметить теорему о том, что модуль M является ω-плоским тогда и только тогда, когда он есть предел прямого спектра ω-проективных модулей (ср. [1], [3], [146]). С тем же классом $\mathfrak{M}$ связаны исследования Фильдхауза [82], рассматривавшего универсальную чистоту (см. стр. 40).

Вопрос о треугольности чистоты, определяемой предложением (1.20), даже в случае групп пока открыт.

Разумеется, $\mathfrak{H}_\omega \subseteq \mathfrak{H}^{\mathfrak{P}_\omega}$. Чистоту, определяемую классом $\mathfrak{P}_\omega$, назовем *проективным замыканием* чистоты ω. Естественным образом можно ввести понятие *проективно замкнутой* чистоты.

Рассуждениями, аналогичными примененным для доказательства предложения (1.17), устанавливается:

(1.21) *Проективное замыкание* $\underline{\omega}$ *чистоты* ω *является проективно замкнутой чистотой.*

Чистоту ω назовем *циклически проективно замкнутой*, если ω-чисты все мономорфизмы, относительно которых копроективны все циклические ω-проективные модули. Если для каждого Λ-модуля A существует точная последовательность

$$0 \to K \xrightarrow{i} P \to A \to 0,$$

где P — ω-проективный модуль (прямая сумма циклических ω-проективных модулей) и $i \in \mathfrak{H}_\omega$, то чистота ω называется *проективной* (*циклически проективной*).

(1.22) *Всякая* (*циклически*) *проективная чистота* (*циклически*) *проективно замкнута и котреугольна.*

Действительно, пусть все (циклические) ω-проективные модули копроективны относительно мономорфизма i: $A \to B$. Рассмотрим точные последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$$

и

$$0 \to K \xrightarrow{j} P \xrightarrow{\sigma} C \to 0,$$

где P — ω-проективный модуль (прямая сумма циклических ω-проективных модулей) и $j \in \mathfrak{H}_\omega$. Тогда $\sigma = \varphi\pi$, где φ: $P \to B$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A \dotplus K & \xrightarrow{f} & A \dotplus P \\ {\scriptstyle g'}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ A & \xrightarrow{i} & B \end{array},$$

где $f = e_A + j$, $(a, x)g = ai - x\varphi$, а g' — ограничение g на $A \dotplus K$. Если $b \in B$, то $b\pi = x\sigma = x\varphi\pi$, где $x \in P$, откуда $b - x\varphi = ai$. Этим показано, что g и g' — эпиморфизмы. Если $(a, x)g = 0$, то $x\sigma = x\varphi\pi = ai\pi = 0$, откуда $\operatorname{Ker} g \subseteq \operatorname{Im} f$. Ввиду (1.1) $f \in \mathfrak{H}_\omega$ и из Ч3

вытекает, что $i \in \mathfrak{H}_\omega$. Котреугольность проективно замкнутой чистоты следует из (1.20).

Ввиду предложения (1.49) из (1.22) вытекает циклическая проективная замкнутость сервантной и слабо-сервантной чистот.

Важнейшим примером чистоты является Г-чистота. Чтобы дать ее определение, зафиксируем некоторый свободный Λ-модуль F и отметим в нем подмодуль U. Пусть χ: $U \to F$ — естественное вложение. Модуль A назовем *FU-чистым* в B (в обозначениях $A \subseteq_{FU} B$), если $A \subseteq B$ и для всякой коммутативной диаграммы

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\chi} & F \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ A & \xrightarrow{i} & B, \end{array}$$

где i — естественное вложение, найдется такой гомоморфизм ψ: $F \to A$, что $\varphi = \chi\psi$.

Батлер и Хоррокс ([53], § 21) называют гомоморфизм φ: $U \to A$ FU-системой линейных уравнений над модулем A. Наличие указанной выше коммутативной диаграммы трактуется как разрешимость системы φ в модуле B. Тогда $A \subseteq_{FU} B$ означает, что всякая FU-система над A, разрешимая в B, разрешима и в A. Чтобы установить связь этой терминологии с обычной, обозначим через $\{x_\beta \mid \beta \in \Omega\}$ систему свободных образующих модуля F. Тогда каждый элемент из U имеет вид $\sum \lambda_{\alpha\beta} x_\beta$, где $\lambda_{\alpha\beta} \in \Lambda$, причем почти все $\lambda_{\alpha\beta}$ при фиксированном α равны нулю. Пусть

$$\left(\sum \lambda_{\alpha\beta} x_\beta\right)\varphi = a_\alpha,$$

где $a_\alpha \in A$. Разрешимость системы φ в B означает, что

$$\left(\sum \lambda_{\alpha\beta} x_\beta\right) h = a_\alpha$$

для подходящего гомоморфизма h: $F \to B$. Положив $b_\beta = x_\beta h$, получим равенство

$$\sum \lambda_{\alpha\beta} b_\beta = a_\alpha.$$

Теперь ясно, что если задана система уравнений

$$\sum_{\beta \in \Omega} \lambda_{\alpha\beta} x_\beta = a_\alpha \qquad (\alpha \in \Xi),$$

где Ω и Ξ — произвольные множества, $\lambda_{\alpha\beta} \in \Lambda$, $a_\alpha \in A$ и для каждого α почти все $\lambda_{\alpha\beta}$ обращаются в нуль, которая имеет решение в B в обычном понимании, мы можем трактовать ее как FU-систему уравнений над A, разрешимую в B. Для этого достаточно обозначить через F свободный Λ-модуль со свободными образующими $\{x_\beta \mid \beta \in \Omega\}$, а через U — его подмодуль, порожденный левыми частями данной системы уравнений.

(1.23) *Отношение* $\subseteq_{FU}$ *обладает свойствами* Ч0′, Ч1′, Ч$\bar{2}$, Ч$\bar{3}^*$ *и* Ч4′.

В самом деле, справедливость свойств Ч0′, Ч1′ и Ч$\bar{2}$ очевидна. Для доказательства свойства Ч$\bar{3}^*$ рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "e_K"'] & M \arrow[r, "\sigma'"] \arrow[d, "i"'] & L \arrow[d, "j"'] & U \arrow[l, "\varphi"'] \arrow[d, "\chi"'] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & C \arrow[d, "\tau"'] & F \arrow[l, "h"'] \\
 & & D \arrow[r, "e_D"] \arrow[d] & D \arrow[d] & \\
 & & 0 & 0 &
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами, где $\pi = \sigma\tau$ и, следовательно, $M \subseteq_{FU} B$. Поскольку модуль F свободен, то $h\tau = h'\pi$, где $h'\colon F \to B$. Отсюда $(h - h'\sigma)\tau = 0$, т. е. $\operatorname{Im}(h - h'\sigma) \subseteq Lj$. Далее,

$$\chi h'\pi = \chi h\tau = \varphi j\tau = 0,$$

что позволяет рассмотреть гомоморфизм $\chi h' i^{-1}\colon U \to M$. Так как $\chi h' = (\chi h' i^{-1}) i$ и $M \subseteq_{FU} B$, то $\chi h' i^{-1} = \chi\psi'$, где $\psi'\colon F \to M$. Положим $\psi = \psi'\sigma' + (h - h'\sigma) j^{-1}$. Тогда ψ отображает F в L. При этом

$$\chi\psi'\sigma' j = \chi h' i^{-1} i\sigma = \chi h'\sigma.$$

Отсюда

$$\chi\psi j = \chi h'\sigma + \chi h - \chi h'\sigma = \varphi j,$$

т. е. $\chi\psi = \varphi$. Таким образом, $L \subseteq_{FU} C$. Пусть теперь A, B и K имеют смысл, указанный в условиях свойства Ч4′ (рис. 1). Пусть $C = A/K$, $D = B/K$, $\sigma\colon A \to C$ и $\tau\colon B \to D$ — естественные эпиморфизмы,

$i\colon A \to B$, $j\colon C \to D$ и $k\colon K \to A$ — естественные вложения. Рассмотрим такие гомоморфизмы $\varphi\colon U \to A$ и $h\colon F \to B$, что $\varphi i = \chi h$, где χ — естественное вложение U в F. Тогда

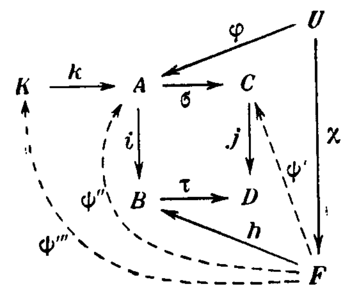

Рис. 1

$$(\varphi\sigma) j = \varphi i\tau = \chi(h\tau).$$

Поскольку $C \subseteq_{FU} D$, то $\varphi\sigma = \chi\psi'$, где $\psi'\colon F \to C$. Но F — свободный модуль. Поэтому $\psi' = \psi''\sigma$, где $\psi''\colon F \to A$. Отсюда $\chi\psi''\sigma = \chi\varphi' = \varphi\sigma$, т. е. $\operatorname{Im}(\chi\psi'' - \varphi) \subseteq Kk$. Поэтому, положив $\varphi' = (\chi\psi'' - \varphi) k^{-1}$, получим соотношение

$$\varphi'(ki) = \chi\psi'' i - \varphi i = \chi(\psi'' i - h).$$

Поскольку $K \subseteq_{FU} B$, то $\varphi' = \chi\psi'''$, где $\psi'''\colon F \to K$. Положив $\psi = \psi'' - \psi''' k$, получим

$$\chi\psi = \chi\psi'' - \chi\psi''' k = \chi\psi'' - \varphi' k = \chi\psi'' - \chi\psi'' + \varphi = \varphi,$$

т. е. $A \subseteq_{FU} B$.

Если $\Gamma = \{(F, U)\}$ — система пар, где F — свободный модуль, а U — его подмодуль, то будем говорить, что модуль A Γ-*чист в* B (в обозначениях: $A \subseteq_\Gamma B$), если $A \subseteq_{FU} B$ для всех $(F, U) \in \Gamma$. Ввиду предложения (1.23) отношение $\subseteq_\Gamma$ задает битреугольную чистоту, которую будем называть Γ-*чистотой*. Если Γ содержит всевозможные пары такого типа, то такая Γ-чистота называется *универсальной*.

Легко проверяются следующие два предложения:

(1.24) *Если все подмодули U в системе Γ конечнопорожденные, а трансфинитная последовательность*

$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_\alpha \subseteq \ldots$$

такова, что $A_\alpha \subseteq_\Gamma C$ для всех α и $B = \bigcup A_\alpha$, то $B \subseteq_\Gamma C$.

(1.25) *Если все модули F в системе Γ конечнопорожденные, а трансфинитная последовательность*

$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_\alpha \subseteq \ldots \subseteq A_\Omega = B$$

такова, что $A_\alpha \subseteq_\Gamma A_{\alpha+1}$ для всех α и $A_\alpha = \bigcup_{\beta<\alpha} A_\beta$ для всякого предельного α, то $A \subseteq_\Gamma B$.

Будем говорить, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & G \\ A & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

замыкается, если существует такой гомоморфизм ρ: $G \to A$, что $f = j\rho$. Диаграмму $(*)$, где G — свободный модуль, а j — мономорфизм, назовем *Γ-допустимой* над A, если из наличия коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "k"'] & F \arrow[d, "l"] \\ V \arrow[r, "j"] & G, \end{tikzcd} \qquad (**)$$

где $(F, U) \in \Gamma$, вытекает, что $kf = \chi\theta$ для некоторого θ: $F \to A$.

(1.26) *Диаграмма* $(*)$, *где* G — *свободный модуль, а* j — *мономорфизм*, Γ-*допустима над* A *тогда и только тогда, когда существуют модуль* B, *гомоморфизм* σ: $G \to B$ *и* Γ-*чистый мономорфизм* i: $A \to B$ *такие, что диаграмма*

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & G \arrow[d, "\sigma"] \\ A \arrow[r, "i"] & B \end{tikzcd} \qquad (***)$$

коммутативна.

Действительно, пусть диаграмма $(*)$ Γ-допустима над A. Положим $B = (A \dotplus G)/K$, где $K = \{(vf, -vj) \mid v \in V\}$. Определим гомоморфизм i: $A \to B$ и σ: $G \to B$, положив $ai = (a, 0) + K$ и $g\sigma = (0, g) + K$. Таким образом, возникает диаграмма $(***)$. Поскольку

$$vfi = (vf, 0) + K = (0, vj) + K = vj\sigma,$$

она коммутативна. Если $ai = 0$, то $(a, 0) = (vf, -vj)$ для некоторого $v \in V$, откуда $v = 0$. Следовательно, $a = 0$, т. е. i — мономорфизм. Чтобы убедиться, что этот мономорфизм Γ-чист, рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "i"] & B, \end{tikzcd} \qquad (****)$$

где $(F, U) \in \Gamma$. Ввиду проективности модуля F существует гомоморфизм τ: $F \to A \dotplus G$ такой, что $h = \tau\alpha$, где α — естественный эпиморфизм $A \dotplus G$ на B, т. е. $xh = x\tau + K$. Обозначим через π' и π'' естественные проекции $A \dotplus G$ на A и G соответственно. Из коммутативности диаграммы $(****)$ вытекает для $u \in U$, что

$$(u\varphi, 0) - u\chi\tau = (vf, -vj),$$

где $v \in V$. Отсюда $u\chi\tau\pi'' = vj$ и $u\varphi - u\chi\tau\pi' = vf$. Таким образом, возникает коммутативная диаграмма $(**)$, где $l = \tau\pi''$, а $k = \chi\tau\pi''j^{-1}$. По условию, имеем $kf = \chi\theta$, где θ: $F \to A$. Отсюда

$$u\chi(\theta + \tau\pi') = u\chi\theta + u\chi\tau\pi' = ukf + u\varphi - vf.$$

Но

$$vfi = vj\sigma = u\chi\tau\pi''\sigma = u\chi l\sigma = ukj\sigma = ukfi.$$

Поэтому $vf = ukf$, и, следовательно, $\chi(\theta + \tau\pi') = \varphi$. Таким образом, мономорфизм i действительно Γ-чист.

Пусть теперь даны диаграммы $(*)$ и $(**)$ и существует модуль B с указанными в формулировке теоремы свойствами. Из соотношения $A \subseteq_\Gamma B$ вытекает, что $kf = \chi\theta$, где θ: $F \to A$, а это и требовалось.

(1.27). *Если всякая* Γ-*допустимая над* A *диаграмма, где мощность базы модуля* G *равна кардинальному числу* $\mathfrak{m}$, *замыкается, то замыкается и всякая диаграмма*

$$\begin{tikzcd} C \arrow[r, "i"] \arrow[d, "\varphi"'] & D \\ A & \end{tikzcd},$$

где i — Γ-*чистый мономорфизм, а модуль* D/C *обладает системой образующих мощности* $\mathfrak{m}$.

Для доказательства рассмотрим диаграмму

$$\begin{tikzcd} & & & G \arrow[d, "\tau"] & \\ 0 \arrow[r] & C \arrow[r, "i"] & D \arrow[r, "\pi"] & D/C \arrow[r] & 0 \end{tikzcd}$$

с точной строкой, где G — свободный модуль с базой мощности $\mathfrak{m}$, а τ — эпиморфизм. Поскольку модуль G

проективен, имеем $\tau = \sigma\pi$, где σ: $G \to D$. Пусть V — полный прообраз подмодуля $Ci \subset D$ относительно гомоморфизма σ. Тогда получим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & G \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \sigma} \\ C & \xrightarrow{i} & D. \end{array}$$

Применив предложение (1.26), убедимся, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \to & G \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \\ C & & \end{array}$$

Г-допустима над C. Отсюда следует, что диаграмма

$$\begin{array}{ccc} V & \xrightarrow{j} & G \\ {\scriptstyle f\varphi}\downarrow & & \\ A & & \end{array}$$

Г-допустима над A. Из условия предложения вытекает, что $f\varphi = j\rho$, где ρ: $G \to A$. Если, далее, $d \in D$, то $d\pi = x\tau$, где $x \in G$. Отсюда $(d - x\sigma)\pi = d\pi - x\tau = 0$, т. е: $d - x\sigma \in \operatorname{Im} i$. Таким образом, $D = \operatorname{Im} i + \operatorname{Im} \sigma$. Если $d = ci + x\sigma = c'i + x'\sigma$, где $c, c' \in C$, $x, x' \in G$, то $(c - c')i = (x' - x)\sigma$. Но $c - c' = vf$ для некоторого $v \in V$. Отсюда $(x' - x)\sigma = (c - c')i = vfi = vj\sigma$. Поэтому $x' - x = vj + yj$, где $yj \in \operatorname{Ker} \sigma$. Отсюда $(c - c')i = (vj + yj)\sigma = (v + y)fi$, т. е. $c - c' = (v + y)f$. Далее, имеем

$$(c - c')\varphi = (v + y)f\varphi = (v + y)j\rho = (x' - x)\rho.$$

Полученное равенство позволяет определить гомоморфизм ψ: $D \to A$, положив

$$d\psi = c\varphi + x\rho,$$

где $d = ci + x\sigma$. Ясно, что $i\psi = \varphi$.

(1.28) *Модуль A является Г-инъективным тогда и только тогда, когда всякая Г-допустимая над A диаграмма (*) замыкается.*

В самом деле, предположим, что A — Г-инъективный модуль и диаграмма (*) Г-допустима над A. Из предложения (1.26) вытекает существование коммутативной диаграммы (***) с Г-чистым мономорфизмом i. Ввиду утверждения (1.6) i — ретракция и существует такое π, что $i\pi = e_A$. Положив $\rho = \sigma\pi$, получим равенство $f = j\rho$. Обратное утверждение сразу следует из предложения (1.27).

(1.29). *Если F — свободный Λ-модуль, U — подмодуль из F и $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ — точная последовательность Λ-модулей, то эквивалентны следующие свойства:*

1) $\operatorname{Im} i \subseteq_{FU} B$;

2) *если χ: $U \to F$ — естественное вложение, то*

$$\operatorname{Im}\operatorname{Hom}(\chi, i) = \operatorname{Im}\operatorname{Hom}(e_U, i) \cap \operatorname{Im}\operatorname{Hom}(\chi, e_B);$$

3) $\operatorname{Hom}(e_{F/U}, \pi)$ — *эпиморфизм;*

4) *модуль F/U копроективен относительно i. В частности, всякая Г-чистота проективно замкнута.*

Для доказательства равносильности свойств 1) и 2) рассмотрим $\sigma \in \operatorname{Im}\operatorname{Hom}(e_U, i) \cap \operatorname{Im}\operatorname{Hom}(\chi, e_B)$. Тогда $\sigma = \varphi i = \chi h$, где φ: $U \to A$, h: $F \to B$. Если выполнено 1), то $\varphi = \chi\psi$, где ψ: $F \to A$. Следовательно, $\sigma = \chi\psi i \in \operatorname{Im}\operatorname{Hom}(\chi, i)$. Таким образом, рассматриваемое пересечение лежит в $\operatorname{Im}\operatorname{Hom}(\chi, i)$. Обратное включение очевидно. Если справедливо свойство 2) и дана коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} U & \xrightarrow{\chi} & F \\ {\scriptstyle \varphi}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ A & \xrightarrow{i} & B, \end{array}$$

то

$$\sigma = \varphi i = \chi h \in \operatorname{Im}\operatorname{Hom}(e_U, i) \cap \operatorname{Im}\operatorname{Hom}(\chi, e_B) = \operatorname{Im}\operatorname{Hom}(\chi, i).$$

Отсюда $\varphi i = \sigma = \chi\psi i$, где ψ: $F \to A$ и, следовательно, $\varphi = \chi\psi$. Таким образом, 1) и 2) эквивалентны.

Эквивалентность свойств 2) и 3) нетрудно вывести из рассмотрения коммутативной диаграммы

$$\begin{tikzcd}
 & & & 0 \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(F/U, A) \arrow[r] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Lambda(F/U, B) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(e_{F/U}, \pi)"] \arrow[d] & \mathrm{Hom}_\Lambda(F/U, C) \arrow[d] & \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(F, A) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\chi, e_A)"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(F, B) \arrow[r] \arrow[d, "\mathrm{Hom}(\chi, e_B)"'] & \mathrm{Hom}_\Lambda(F, C) \arrow[r] \arrow[d] & 0 \\
0 \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(U, A) \arrow[r, "\mathrm{Hom}(e_U, \iota)"] & \mathrm{Hom}_\Lambda(U, B) \arrow[r] & \mathrm{Hom}_\Lambda(U, C). &
\end{tikzcd}$$

Эквивалентность свойств 3) и 4) очевидна.

Утверждение о том, что Г-чистота проективно замкнута, непосредственно следует из эквивалентности свойств 1) и 4).

Ввиду предложения (1.29) из рассмотрения точной последовательности

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(F/U, \hat{A}) \to \mathrm{Hom}_\Lambda(F/U, \hat{A}/A) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(F/U, A) \to 0,$$

где $\hat{A}$ — инъективная оболочка модуля A, вытекает

(1.30) *Модуль A FU-чист в своей инъективной оболочке тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(F/U, A) = 0$.

Из (1.7) и (1.30) получаем

(1.31) *Следующие свойства модуля Q эквивалентны:*

1) *Q является FU-делимым модулем*;

2) $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(F/U, Q) = 0$;

3) *модуль Q инъективен относительно естественного вложения U в F.*

Из предложений (1.10) и (1.31), ввиду [6], стр. 140, предложение 1.2, вытекает

(1.32) *Полная прямая сумма* Г-*делима тогда и только тогда, когда* Г-*делимо каждое слагаемое.*

(1.33) *Если U — проективный подмодуль свободного модуля F, то эпиморфный образ FU-делимого модуля FU-делим.*

Действительно, если U — проективный модуль, модуль A FU-делим, последовательность $A \xrightarrow{\pi} B \to 0$

точна и $\varphi\colon U \to B$ (рис. 2), то $\varphi = \varphi'\pi$, где $\varphi'\colon U \to A$. Применяя предложение (1.31), получаем, что $\varphi' = \chi\psi'$, где $\psi'\colon F \to A$, а χ — естественное вложение U в F. Таким образом, $\varphi = \varphi'\pi = \chi(\psi'\pi)$, откуда ввиду предложения (1.31) вытекает FU-делимость модуля B.

(1.34) *Если* $\Gamma = \{(F_\alpha, U_\alpha)\}$ *и эпиморфный образ* Г-*делимого модуля* Г-*делим, то все U_α проективны.*

В самом деле, рассмотрим точную последовательность

$$0 \to K \xrightarrow{\iota} A \to B \to 0,$$

и пусть $\varphi\colon U_\alpha \to B$ (рис. 3). Обозначим через $\hat{A}$ инъективную оболочку модуля A, а через j и χ естественные

$$\begin{tikzcd}
 & U \arrow[r, "\chi"] \arrow[dl, "\varphi'"'] \arrow[d, "\varphi"] & F \arrow[dll, bend left=60, "\psi'"] \\
A \arrow[r, "\pi"] & B &
\end{tikzcd}$$

Рис. 2.

$$\begin{tikzcd}
 & & U_\alpha \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\varphi"] & F_\alpha \arrow[d, "g"] \arrow[dl, "g'"] \\
K \arrow[r, "\iota"] & A \arrow[r, "\pi"] \arrow[d, "j"] & B \arrow[d, "f"] & \\
 & \hat{A} \arrow[r, "\tau"] & \hat{A}/\mathrm{Im}\, ij &
\end{tikzcd}$$

Рис. 3.

вложения $A \to \hat{A}$ и $U_\alpha \to F_\alpha$ соответственно. Пусть τ — естественный эпиморфизм $\hat{A}$ на $\hat{A}/\mathrm{Im}\, ij$. Легко видеть, что $j\tau = \pi f$, где f — мономорфизм B в $\hat{A}/\mathrm{Im}\, ij$. Из предложения (1.31) легко вывести, что $\hat{A}$ — Г-делимый модуль. Но тогда, по условию, модуль $\hat{A}/\mathrm{Im}\, ij$ также Г-делим и, применяя предложение (1.31), получаем, что $\varphi f = \chi g$, где $g\colon F_\alpha \to \hat{A}/\mathrm{Im}\, ij$. Пусть $g = g'\tau$, где $g'\colon F_\alpha \to \hat{A}$. Если $u \in U_\alpha$ и $u\varphi = a\pi$, где $a \in A$, то $(aj - u\chi g')\tau = a\pi f - u\varphi f = 0$. Следовательно, $aj - u\chi g' \in \mathrm{Im}\, ij$. Таким образом, $u\chi g' \in \mathrm{Im}\, j$. Положив $\psi = \chi g' j^{-1}$, получим $\psi\pi f = \psi j\tau = \chi g'\tau = \chi g = \varphi f$, откуда $\psi\pi = \varphi$. Этим доказана проективность U_α.

Систему $\Xi = \{A_\alpha \mid \alpha \in \Omega\}$ подмодулей модуля A назовем *покрытием*, если $A = \sum A_\alpha$. Модуль A называется *компактным*, если из всякого его счетного покрытия можно выбрать конечное. Легко понять, что всякий конечно-порожденный модуль компактен.

(1.35). *Если модуль U компактен, то прямая сумма любого числа FU-делимых модулей FU-делима.*

Справедливость этого предложения вытекает из (1.10), (1.31) и следующего факта:

Если φ — гомоморфизм компактного модуля A в прямую сумму $B = \dot{\sum\limits_{\alpha \in \Omega}} B_\alpha$ модулей B_α, то $\operatorname{Im} \varphi \subseteq B_{\alpha_1} + \ldots + B_{\alpha_m}$ для некоторых индексов $\alpha_1, \ldots, \alpha_m$.

Для доказательства обозначим через π_α проекцию модуля B на B_α и допустим, что существует счетное множество индексов $\alpha_1, \alpha_2, \ldots$ таких, что $A\varphi\pi_{\alpha_i} \neq 0$. Положим $A_k = \{a \mid a \in A,\ a\varphi\pi_{\alpha_i} = 0$ при $i \geqslant k\}$. Тогда $A = \sum\limits_{k=1}^{\infty} A_k$, откуда, в силу компактности модуля A, $A = \sum\limits_{k=1}^{n-1} A_k$. Отсюда $A\varphi\pi_{\alpha_n} = 0$, вопреки допущению.

(1.36) *Если прямая сумма Γ-делимых модулей Γ-делима, $(F, U) \in \Gamma$ и модуль F конечно-порожден, то U компактен.*

В самом деле, пусть $U = \dot{\sum\limits_{k=1}^{\infty}} U_k$. Положим $A_m = U \Big/ \sum\limits_{k=1}^{m} U_k$ $(m = 1, 2, \ldots)$. Каждый из модулей A_m вложим в инъективный модуль Q_m. Согласно предложению (1.31) Q_m — Γ-делимый модуль. По условию, Γ-делимым является и модуль $Q = \dot{\sum} Q_m$. Отображение $\varphi(u) = \sum u\pi_m$, где $u \in U$, а π_m — естественный эпиморфизм U на A_m, можно рассматривать как гомоморфизм U в Q. Ввиду предложения (1.31) $\varphi = \chi\psi$, где χ — естественное вложение U в F, а ψ: $F \to Q$. Так как модуль F конечно-порожден, то $\operatorname{Im} \varphi \subseteq A_1 \dotplus \ldots \dotplus A_n$, откуда $U = U_1 + \ldots + U_{n+1}$.

Пусть теперь F — свободный Λ-модуль с базой $\{x_k \mid k \in \mathfrak{R}\}$. Систему $\{u_\alpha = \sum \lambda_{\alpha k} x_k \mid \alpha \in \Omega\}$ элементов из F назовем *проекционно-конечной*, если для каждого k лишь конечное число коэффициентов $\lambda_{\alpha k}$ отлично от нуля. Подмодуль U из F назовем *проекционно-конечным*, если он допускает проекционно-конечную систему образующих. Пару (F^*, U^*) назовем *сопряженной* с парой (F, U), если F^* — свободный правый Λ-модуль с базой $\{x_\alpha^* \mid \alpha \in \Omega\}$, а U^* — его подмодуль с образующими $\{u_k^* = \sum x_\alpha^* \lambda_{\alpha k} \mid k \in \mathfrak{R}\}$, где $\{u_\alpha = \sum \lambda_{\alpha k} x_k \mid a \in \Omega\}$ — проекционно-конечная система образующих подмодуля U. Заметим, что всякая пара $(\tilde{F}, \tilde{U})$, где $\tilde{F}$ — правый свободный Λ-модуль, а $\tilde{U}$ — его проекционно-конечный подмодуль, может быть представлена в форме $(\tilde{F}, \tilde{U}) = (F^*, U^*)$, где U — проекционно-конечный подмодуль свободного модуля F.

(1.37). *Если F — свободный Λ-модуль, U — проекционно-конечный подмодуль в F, пара (F^*, U^*) сопряжена с (F, U) и $0 \to A \xrightarrow{i} B \xrightarrow{\pi} C \to 0$ — точная последовательность Λ-модулей, то эквивалентны следующие свойства:*

1) $\operatorname{Im} i \subseteq_{FU} B$;

2) *если* χ^*: $U^* \to F^*$ — *естественное вложение, то*

$$\operatorname{Im}(\chi^* \otimes i) = \operatorname{Im}(e_{F^*} \otimes i) \cap \operatorname{Im}(\chi^* \otimes e_B);$$

3) $e_{F^*/U^*} \otimes i$ — *мономорфизм.*

В самом деле, для доказательства эквивалентности свойств 1) и 2) рассмотрим $y \in \operatorname{Im}(e_{F^*} \otimes i) \cap \operatorname{Im}(\chi^* \otimes e_B)$. Тогда

$$y = \sum x_\alpha^* \otimes a_\alpha i = \sum u_k^* \otimes b_k,$$

где $a_\alpha \in A$, $b_k \in B$. Отсюда, учитывая предложение (0.7), получаем

$$a_\alpha i = \sum \lambda_{\alpha k} b_k.$$

Положив $x_k h = b_k$, будем иметь гомоморфизм h: $F \to B$. Если $u_\alpha \in U$, то $u_\alpha \chi h = \sum \lambda_{\alpha k}(x_k h) = \sum \lambda_{\alpha k} b_k = a_\alpha i$, т. е. можно корректно определить отображение $\varphi = \chi h i^{-1}$: $U \to A$. Если 1) справедливо, то $\varphi = \chi\psi$, где ψ: $F \to A$,

а $\chi\colon U\to F$ — естественное вложение. Пусть
$$x_k\psi = a'_k.$$
Тогда
$$\sum \lambda_{\alpha k} a'_k = u_\alpha\chi\psi = u_\alpha\varphi = u_\alpha\chi h i^{-1} = a_\alpha,$$
откуда
$$y=\sum_\alpha x^*_\alpha\otimes a_\alpha i = \sum_{\alpha,\, k} x^*_\alpha\lambda_{\alpha k}\otimes a'_k i = \sum_k u^*_k\otimes a'_k i \in \mathrm{Im}\,(\chi^*\otimes i).$$
Если справедливо 2) и дана коммутативная диаграмма
$$\begin{tikzcd} U \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\varphi"'] & F \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "i"] & B, \end{tikzcd}$$
то $u_\alpha\chi h = \sum\lambda_{\alpha k}x_k h = a_\alpha i$. Отсюда
$$\sum_\alpha x^*_\alpha\otimes a_\alpha i = \sum_{\alpha,\, k} x^*_\alpha\lambda_{\alpha k}\otimes x_k h = \sum_k u^*_k\otimes x_k h.$$
Ввиду условия 2)
$$\sum_\alpha x^*_\alpha \otimes a_\alpha i = \sum_k u^*_k\otimes a'_k i = \sum_\alpha x^*_\alpha\otimes\sum_k\lambda_{\alpha k}a'_k i.$$
Отсюда, в силу предложения (0.7), получаем
$$a_\alpha = \sum_k \lambda_{\alpha k}a'_k.$$
Положив $x_k\psi = a'_k$, получим соотношение
$$u_\alpha\chi\psi i = \sum\lambda_{\alpha k}x_k\psi i = \sum\lambda_{\alpha k}a'_k i = a_\alpha i = u_\alpha\chi h = u_\alpha\varphi i,$$
т. е. $\chi\psi=\varphi$.

Эквивалентность свойств 2) и 3) нетрудно вывести из рассмотрения коммутативной диаграммы
$$\begin{tikzcd} & U^*\otimes A \arrow[r] \arrow[d] & U^*\otimes B \arrow[d, "\chi^*\otimes e_B"] \\ 0 \arrow[r] & F^*\otimes A \arrow[r, "e_{F^*}\otimes i"] \arrow[d] & F^*\otimes B \arrow[d] \\ & (F^*/U^*)\otimes A \arrow[r, "e_{F^*/U^*}\otimes i"] \arrow[d] & (F^*/U^*)\otimes B \\ & 0 & \end{tikzcd}$$

(1.38) *Если U — проекционно-конечный подмодуль свободного модуля F, то модуль C является FU-плоским тогда и только тогда, когда* $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*,\ C)=0$.

Действительно, рассмотрим точную последовательность
$$0\to K\xrightarrow{i} P\to C\to 0,$$
где P — проективный модуль. Тогда имеет место точная последовательность
$$0\to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*,\ C)\to (F^*/U^*)\otimes K\xrightarrow{e_{F^*/U^*}\otimes i}(F^*/U^*)\otimes P.$$
Если модуль C является FU-плоским, то, по предложению (1.37), $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*,\ C)=0$. Обратно, если $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*,\ C)=0$ и $0\to A\xrightarrow{i} B\to C\to 0$ — точная последовательность, то имеем точную последовательность
$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*,\ C)\to (F^*/U^*)\otimes A\xrightarrow{e_{F^*/U^*}\otimes i}(F^*/U^*)\otimes B,$$
где $e_{F^*/U^*}\otimes i$ — мономорфизм. Отсюда получаем, используя снова предложение (1.37), что C — FU-плоский модуль.

Ввиду [6], стр. 140, предложение 1.2а, из предложений (1.15) и (1.38) вытекает

(1.39) *Если $\Gamma=\{(F_\alpha,\ U_\alpha)\}$ и все подмодули U_α проекционно-конечны, то прямая сумма является Γ-плоским модулем тогда и только тогда, когда все слагаемые Γ-плоские.*

(1.40) *Если всякий подмодуль любого свободного модуля является FU-плоским, то U^* — плоский модуль* [1]).

Действительно, пусть A произвольный Λ-модуль. Рассмотрим точную последовательность $0\to K\xrightarrow{i} G\to A\to 0$, где G — свободный Λ-модуль. Ввиду [6], стр. 142, теорема 1.5а,
$$\mathrm{Tor}_2^\Lambda(F^*/U^*,\ A)\cong \mathrm{Ker}\,(\chi^*\otimes i).$$

---

[1]) В предложениях (1.40)—(1.43) молчаливо предполагается, что U — проекционно-конечный подмодуль модуля F, а пара $(F^*,\ U^*)$ сопряжена с $(F,\ U)$.

Но

$$\chi^* \otimes i = (\chi^* \otimes e_K)(e_{F^*} \otimes i).$$

Так как K — FU-плоский модуль, то, согласно предложению (1.38), $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*, K) = 0$ и, следовательно, $\chi^* \otimes e_K$ — мономорфизм. Но $e_{F^*} \otimes i$ — также мономорфизм, ибо $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*, A) = 0$. Следовательно, $\chi^* \otimes i$ — мономорфизм и, значит,

$$\mathrm{Tor}_2^\Lambda(F^*/U^*, A) = 0.$$

Рассмотрев точную последовательность

$$\mathrm{Tor}_2^\Lambda(F^*/U^*, A) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(U^*, A) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*, A),$$

легко понять, что $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(U^*, A) = 0$. Ввиду произвольности A все доказано.

(1.41) *Если U^* — плоский модуль, то класс FU-плоских модулей замкнут относительно подмодулей.*

Действительно, пусть имеется точная последовательность

$$0 \to A \to B \to B/A \to 0,$$

где B — FU-плоский Λ-модуль. Из рассмотрения точной последовательности

$$\mathrm{Tor}_2^\Lambda(F^*, B/A) \to \mathrm{Tor}_2^\Lambda(F^*/U^*, B/A) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(U^*, B/A)$$

видно, что

$$\mathrm{Tor}_2^\Lambda(F^*/U^*, B/A) = 0.$$

Но тогда из точной последовательности

$$\mathrm{Tor}_2^\Lambda(F^*/U^*, B/A) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*, A) \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*, B),$$

учитывая (1.38), получаем

$$\mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*, A) = 0.$$

Вторичное применение предложения (1.38) завершает доказательство.

(1.42) *Если U^* — конечно-связанный правый Λ-модуль, то класс FU-плоских модулей замкнут относительно полных прямых сумм.*

Действительно, пусть $A = \sum^* A_\beta$, где Λ-модули A_β являются FU-плоскими. Если D — правый Λ-модуль, то положим

$$V(D) = \sum^* (D \otimes A_\beta).$$

Если f: $D \to D'$, то определим $V(f)$: $V(D) \to V(D')$ и $t(D)$: $D \otimes A \to V(D)$, положив

$$(d_\beta \otimes a_\beta) V(f) = (d_\beta f \otimes a_\beta)$$

и

$$[d \otimes (a_\beta)]\, t(D) = (d \otimes a_\beta).$$

(а) *Если G — свободный правый Λ-модуль, то $t(G)$ — мономорфизм.*

В самом деле, пусть $wt(G) = 0$. Но

$$w = \sum_{j=1}^{m} g_j \otimes (a_\beta^{(j)}),$$

где g_j — элементы базы модуля G, а $(a_\beta^{(j)}) \in A$. Тогда

$$\sum_{j=1}^{m} (g_j \otimes a_\beta^{(j)}) = 0.$$

Отсюда

$$\sum_{j=1}^{m} g_j \otimes a_\beta^{(j)} = 0$$

для каждого β, и, следовательно, учитывая предложение (0.7), получаем $(a_\beta^{(j)}) = 0$. Таким образом, $w = 0$.

(б) *Если D — конечно-порожденный правый Λ-модуль, то $t(D)$ — эпиморфизм.*

Действительно, если $D = \sum_{i=1}^{m} d_i \Lambda$ и $(d_\beta \otimes a_\beta) \in V(D)$, то $d_\beta = \sum_{i=1}^{m} d_i \lambda_{i\beta}$. Отсюда

$$(d_\beta \otimes a_\beta) = \left(\sum_{i=1}^{m} d_i \otimes \lambda_{i\beta} a_\beta\right) = \sum_{i=1}^{m} (d_i \otimes \lambda_{i\beta} a_\beta) = \left[\sum_{i=1}^{m} d_i \otimes (\lambda_{i\beta} a_\beta)\right] t(D),$$

что и требовалось.

(в) *Если* $\chi^*\colon U^* \to F^*$ — *естественное вложение, то* $V(\chi^*)$ — *мономорфизм.*

Пусть $v^* \in V(U^*)$ и $v^*V(\chi^*) = 0$. Но $v^* = (v_\beta^*)$, где $v_\beta^* \in U^* \otimes A_\beta$, т. е.

$$v_\beta^* = \sum_i u_{i\beta}^* \otimes a_{\beta i}.$$

Тогда

$$0 = v^*V(\chi^*) = (v_\beta^*)\, V(\chi^*) = \left(\sum_i u_{i\beta}^* \otimes a_{\beta i}\right) V(\chi^*) =$$
$$= \left(\left(\sum_i u_{i\beta}^* \otimes a_{\beta i}\right)\left(\chi^* \otimes e_{A_\beta}\right)\right) = \left(v_\beta^*\left(\chi^* \otimes e_{A_\beta}\right)\right).$$

Значит,

$$v_\beta^*\left(\chi^* \otimes e_{A_\beta}\right) = 0$$

для каждого β.

Однако из предложения (1.38) ввиду точности последовательности

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*,\ A_\beta) \to U^* \otimes A_\beta \xrightarrow{\chi^* \otimes e_{A_\beta}} F^* \otimes A_\beta$$

и FU-плоскости модуля A_β вытекает, что $\chi^* \otimes e_{A_\beta}$ — мономорфизм. Поэтому $v_\beta^* = 0$ для всех β, откуда $v^* = 0$.

(г) *Если* $0 \to K \xrightarrow{i} G \xrightarrow{\pi} D \to 0$ — *точная последовательность конечно-порожденных правых Λ-модулей, то последовательность*

$$V(K) \xrightarrow{V(i)} V(G) \xrightarrow{V(\pi)} V(D)$$

также точна.

В самом деле, ясно, что $\mathrm{Im}\, V(i) \subseteq \mathrm{Ker}\, V(\pi)$. Если $g = (g_\beta) \in \mathrm{Ker}\, V(\pi)$, то $g_\beta\left(\pi \otimes e_{A_\beta}\right) = 0$ для каждого β. В силу точности последовательности

$$K \otimes A_\beta \xrightarrow{i \otimes e_{A_\beta}} G \otimes A_\beta \xrightarrow{\pi \otimes e_{A_\beta}} D \otimes A_\beta \to 0$$

отсюда вытекает, что $g_\beta = k_\beta\left(i \otimes e_{A_\beta}\right)$. Следовательно, $g = (k_\beta)\, V(i) \in \mathrm{Im}\, V(i)$, что и требовалось.

д) *Если* D — *конечно-связанный правый Λ-модуль, то* $t(D)$ — *мономорфизм.*

Для доказательства рассмотрим диаграмму

$$\begin{array}{ccccccc} K \otimes A & \xrightarrow{i \otimes e_A} & G \otimes A & \xrightarrow{\pi \otimes e_A} & D \otimes A & \to 0 \\ \downarrow{\scriptstyle t(K)} & & \downarrow{\scriptstyle t(G)} & & \downarrow{\scriptstyle t(D)} & \\ V(K) & \xrightarrow{V(i)} & V(G) & \xrightarrow{V(\pi)} & V(D), & \end{array} \qquad (*)$$

где G и K — конечно-порожденные правые Λ-модули, причем G свободен. Непосредственным подсчетом проверяем, что эта диаграмма коммутативна, а ее строки точны, в силу (г) и [г], стр. 194, теорема 1. Из (а) и (б) вытекает, что $t(K)$ и $t(D)$ — эпиморфизмы, а $t(G)$ — мономорфизм. По лемме о пяти гомоморфизмах ([б], стр. 20, предложение 1.1), $t(D)$ — мономорфизм.

Переходя к доказательству предложения (1.42), заметим, что из (в) и (д) вытекает, что $(\chi^* \otimes e_A)\, t(F^*) = t(U^*)\, V(\chi^*)$ — мономорфизм. Но тогда $\chi^* \otimes e_A$ — также мономорфизм. Отсюда, используя точность последовательности

$$0 \to \mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*,\ A) \to U^* \otimes A \xrightarrow{\chi^* \otimes e_A} F^* \otimes A,$$

получаем, что $\mathrm{Tor}_1^\Lambda(F^*/U^*,\ A) = 0$, а это, в силу предложения (1.38), и завершает доказательство.

(1.43) *Если полная прямая сумма любого множества экземпляров кольца Λ является FU-плоским Λ-модулем и модуль F конечно-порожден, то U^* — конечно-связанный правый Λ-модуль.*

Для доказательства рассмотрим точную последовательность правых Λ-модулей

$$0 \to K \to G \xrightarrow{\pi} U^* \to 0,$$

где G — свободный модуль. Поскольку F конечно-порожден, то U^* также конечно-порожден. Поэтому можно считать, что G конечно-порожден. Пусть $\{g_1, \ldots, g_m\}$ — его база, причем $g_k\pi = u_k^* = \sum x_\alpha^* \lambda_{\alpha k}$. Пусть, далее, $A = \sum\limits_{\varkappa \in K}^* \Lambda_\varkappa$, где $\Lambda_\varkappa \cong \Lambda$, A — левый Λ-модуль и $\varkappa = \sum\limits_{k=1}^m g_k \xi_{k\varkappa} \in K$. Конечно, $\xi_{k\varkappa} \in \Lambda$. Тогда

$$0 = \varkappa\pi = \sum_{k=1}^m u_k^* \xi_{k\varkappa} = \sum_{\alpha,\, k} x_\alpha^* \lambda_{\alpha k} \xi_{k\varkappa},$$

откуда

$$\sum_{k=1}^{m} \lambda_{\alpha k}\xi_{k\varkappa} = 0.$$

Положив

$$a_k = (\xi_{k\varkappa}) \in A \qquad (k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m),$$

получим равенства

$$\sum_{k=1}^{m} (u_k^* \otimes a_k)(\chi^* \otimes e_A) = \sum_{\alpha} x_\alpha^* \otimes \sum_k \lambda_{\alpha k} a_k = \sum_{\alpha} x_\alpha^* \otimes 0 = 0.$$

Из предложения (1.38) вытекает, что $\chi^* \otimes e_A$ — мономорфизм. Поэтому

$$\sum_{k=1}^{m} u_k^* \otimes a_k = 0.$$

Ввиду точности последовательности

$$K \otimes A \to G \otimes A \to U^* \otimes A \to 0,$$

отсюда следует, что

$$\sum_{k=1}^{m} g_k \otimes a_k = \sum_{l=1}^{n} z_l \otimes a_l',$$

где $z_l \in K$, $a_l' \in A$. Пусть

$$z_l = \sum_{k=1}^{m} g_k \zeta_{kl}.$$

Согласно предложению (0.7),

$$a_k = \sum_{l=1}^{n} \zeta_{kl} a_l'.$$

Если $a_l' = (\xi_{l\varkappa}')$, то

$$\xi_{k\varkappa} = \sum_{l=1}^{n} \zeta_{kl} \xi_{l\varkappa}'.$$

Но тогда

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{m} g_k \xi_{k\varkappa} = \sum_{k} g_k \sum_{l} \zeta_{kl} \xi_{l\varkappa}' = \sum_{k,\,l} g_k \zeta_{kl} \xi_{l\varkappa}' = \sum_{l=1}^{n} z_l \xi_{l\varkappa}',$$

т. е. система $z_1, \ldots, z_n$ является системой образующих правого Λ-модуля K, что и требовалось.

Обратим внимание на следующие пары предложений: (1.29) и (1.37), (1.31) и (1.38), (1.33) и (1.41), (1.34) и (1.40), (1.35) и (1.42), (1.36) и (1.43). Между ними имеется определенная аналогия, особенно ярко проявляющаяся в первых трех случаях. Чтобы пролить некоторый свет на это явление, рассмотрим для каждого Λ-модуля A группу $A^{\#} = \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(A, \boldsymbol{C})$, где $\boldsymbol{Z}$ — кольцо целых чисел, а $\boldsymbol{C}$ — фактор-группа аддитивной группы рациональных чисел по подгруппе $\boldsymbol{Z}$. Группу $A^{\#}$ превратим в правый Λ-модуль, положив

$$a(\varphi\lambda) = (\lambda a)\varphi$$

для $a \in A$, $\varphi \in A^{\#}$, $\lambda \in \Lambda$. Из равенств

$$a[\varphi(\lambda\mu)] = [(\lambda\mu)a]\varphi = [\lambda(\mu a)]\varphi = (\mu a)(\varphi\lambda) = a[(\varphi\lambda)\mu]$$

вытекает, что $A^{\#}$ — действительно правый Λ-модуль. Интересным является следующий факт:

(1.44) *Пусть U — проекционно-конечный подмодуль свободного Λ-модуля F. Для того чтобы Λ-модуль A был FU-плоским, необходимо и достаточно, чтобы правый Λ-модуль $A^{\#}$ был F^*U^*-делимым.*

Для доказательства примем во внимание следующее соотношение:

$$\mathrm{Ext}_{\Lambda}^{1}(F^*/U^*,\ A^{\#}) \cong \mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(F^*/U^*,\ A),\ \boldsymbol{C})$$

([6], стр. 155, предложение 5.1). Если A — FU-плоский модуль, то F^*U^*-делимость правого модуля $A^{\#}$ сразу следует из выписанного соотношения и предложений (1.31) и (1.38). Применение тех же фактов в случае, когда $A^{\#}$ — F^*U^*-делимый правый модуль, дает, что $\mathrm{Hom}_{\boldsymbol{Z}}(\mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(F^*/U^*,\ A),\ \boldsymbol{C}) = 0$. Но из последнего равенства вытекает, что $T = \mathrm{Tor}_1^{\Lambda}(F^*/U^*, A) = 0$. В самом деле, группа $\boldsymbol{C}$ разлагается в прямую сумму групп типа p^∞, по одной для каждого простого числа p. Если $T \neq pT$ для некоторого простого p, то сквозное отображение $T \to T/pT \to \boldsymbol{Z}a$, где $0 \neq a \in \boldsymbol{C}$, $pa = 0$, дает ненулевой гомоморфизм T в $\boldsymbol{C}$.

Если же $0 \neq \dot{T} = pT$ для всех p, то T — прямая сумма групп типа p^{∞} и групп, изоморфных аддитивной группе всех рациональных чисел ([в], стр. 149). Но в этом случае существование ненулевого гомоморфизма T в C очевидно. В заключение еще раз применим предложение (1.38).

Остановимся на некоторых свойствах универсальной чистоты.

(1.45) *Если*

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \to C \to 0$$

— *точная последовательность* Λ-*модулей, то эквивалентны следующие свойства*:

1) *подмодуль* $\operatorname{Im} i$ *универсально чист в* B;

2) $e_D \otimes i$ *является мономорфизмом для всякого правого* Λ-*модуля* D;

3) *подмодуль* $\operatorname{Im} i$ Γ-*чист в* B, *где* $\Gamma = \{(F_\alpha, K_{\alpha\beta})\}$, *причем* F_α *пробегает все конечно-порожденные свободные* Λ-*модули, а* $K_{\alpha\beta}$ — *все конечно-порожденные подмодули модуля* F_α.

Действительно, эквивалентность свойств 1) и 2) вытекает из предложения (1.37). Импликация 2)$\Rightarrow$3) очевидна. Если справедливо 3), то из (1.37) и [г], стр. 211, теорема 8.4, вытекает, что $e_D \otimes i$ — мономорфизм для всякого конечно-связанного правого Λ-модуля D. Применяя предложение (0.11) и [б], стр. 131, предложение 9.2 *, получаем, что $e_D \otimes i$ — мономорфизм для всех правых Λ-модулей D, откуда сразу вытекает 2).

Кроме того, из (1.31) и [б], стр. 24, теорема 3.2, вытекает

(1.46) *Если* ω — *универсальная чистота, то всякий* ω-*делимый модуль инъективен.*

Далее, назовем подмножество $\mathfrak{B}$ Λ-модуля A *независимым*, если сумма $\sum\limits_{b \in \mathfrak{B}} \Lambda b$ является прямой. Независимую систему образующих назовем *базой*.

(1.47) *Пусть* ω — *универсальная чистота. Тогда эквивалентны следующие свойства* Λ-*модуля* A:

1) *все подмодули модуля* A ω-*чисты в нем*;

2) *максимальная независимая система любого подмодуля* B *модуля* A *является базой*;

3) *все подмодули модуля* A *являются ретрактами*.

Действительно, если выполнено условие (1) и $\mathfrak{B}$ — максимальная независимая система подмодуля B, то положим $D = \sum\limits_{b \in \mathfrak{B}} \Lambda b$. Пусть $b_0 \in B \setminus D$ и $I = (D : b_0)$. Определим гомоморфизм h: $\Lambda \to B$, положив $\lambda h = \lambda b_0$. Тогда $Ih \subseteq D$. Но ввиду Ч2′ $D \subseteq_{\omega} B$. Поэтому найдется такой гомоморфизм ψ: $\Lambda \to D$, что $\mu\psi = \mu h$ для всех $\mu \in I$. Положим $b' = b_0 - 1\psi$. Если $\lambda b' \in D$ для некоторого $\lambda \in \Lambda$, то $\lambda b_0 = \lambda b' - \lambda\psi \in D$. Отсюда $\lambda \in I$ и, следовательно,

$$\lambda b' = \lambda b_0 - \lambda\psi = \lambda h - \lambda\psi = 0.$$

Таким образом, сумма $D + \Lambda b'$ оказывается прямой, что противоречит максимальности системы $\mathfrak{B}$. Следовательно, $B = D$, т. е. свойство 2) справедливо. Для доказательства импликации 2)$\Rightarrow$3) достаточно выбрать максимальную независимую систему в подмодуле и дополнить ее до максимальной независимой системы во всем модуле. Справедливость импликации 3)$\Rightarrow$1) сразу следует из Ч0′.

К определению Γ-чистоты приходят Батлер и Хоррокс [53]. Они подходят к нему с функториой точки зрения, хотя внешне обобщают определения Кертеса [137], использующие язык уравнений. В их работе содержится и предложение (1.29). Понятие Γ-чистоты использует также Штейнштрём [197]. Однако он ограничивается случаем, когда модуль F фиксирован. В его работе по существу содержатся предложения (1.24), (1.31), (1.33), (1.34), (1.44). Частным случаем предложения (1.44) является теорема Ламбека [145]. Предложения (1.42) и (1.43) доказаны Чейзом [58] для универсальной чистоты. Предложения (1.26) — (1.28) доказаны Кильпинским [140].

Из предложения (1.31) и результатов Кертеса [137] вытекает, что для инъективности модуля Q необходимо и достаточно существование такого свободного модуля F, что Q является FU-делимым для всех $U \subseteq F$.

Универсальную чистоту рассматривали Кертес ([135], [137]), Кон [63], Кузьминов [13] и Маддок [151]. В частности, предложение (1.47) принадлежит Кертесу [137], а предложение (1.45) обобщает один из результатов Кона. Фельдхауз [82] доказал, что в случае универсальной чистоты ω прямые суммы конечносвязанных модулей и только они являются ω-проективными.

Частным случаем Γ-чистоты является чистота в группах ([и], стр. 88, предложение Н), возникающая, если зафиксировать свободную группу F ранга $\aleph$ и заставить U_α пробегать все ее подгруппы. В частности, при $\aleph < \aleph_0$ получаем сервантную чистоту ([и], стр. 82, теорема 25.5). Некоторые свойства Γ-чистых подгрупп, связанные с мощностью системы свободных образующих свободных модулей, входящих в определение, рассмотрены в книге Фукса ([и], § 27).

Если $\Gamma=\{(\Lambda, I_\alpha)\}$ и $\mathscr{E}=\{I_\alpha\}$, то будем писать $\subseteq_{\mathscr{E}}$ вместо $\subseteq_\Gamma$, $\mathscr{E}$-инъективность вместо Γ-инъективность и т. д.

Можно дать следующую характеризацию $\mathscr{E}$-чистоты:

(1.48) *Пусть система* $\mathscr{E}$ *обладает свойством: если* $I\in\mathscr{E}$ *и* $I\subseteq J$, *где* J — *левый идеал кольца* Λ, *то* $J\in\mathscr{E}$[1]). *Тогда эквивалентны условия:*

1) $A\subseteq_{\mathscr{E}} B$;

2) *если* $b\in B$ *и* $(A:b)\in\mathscr{E}$, *то* $(0:a-b)=(A:b)$ *для некоторого* $a\in A$;

3) A *служит прямым слагаемым для всякого подмодуля* C *такого, что* $A\subseteq C\subseteq B$, $C/A=\dot{\sum}\Lambda\bar{c}_i$ *и* $(0:\bar{c}_i)\in\mathscr{E}$ *при любом* i;

4) A *служит прямым слагаемым для всякого подмодуля* C *такого, что* $A\subseteq C\subseteq B$, $C/A=\Lambda\bar{c}$ и $(0:\bar{c})\in\mathscr{E}$;

5) *если* Λd — *циклический* Λ-*модуль и* $(0:d)\in\mathscr{E}$, *то* Λd *копроективен относительно естественного вложения* A *в* B.

Действительно, если $A\subseteq_{\mathscr{E}}B$, $b\in B$ и $(A:b)\in\mathscr{E}$, то построим гомоморфизм h: $\Lambda\to B$, положив $1h=b$. Ясно, что $(A:b)h\subseteq A$. Поскольку $A\subseteq_{\mathscr{E}} B$, найдется гомоморфизм ψ: $\Lambda\to A$ такой, что $\lambda\psi=\lambda h$ для $\lambda\in(A:b)$. Если $1\psi=a$, то легко проверить, что $(0:a-b)=(A:b)$. Допустим теперь, что выполнено условие 2) и $I\in\mathscr{E}$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} I & \xrightarrow{\chi} & \Lambda \\ \varphi\downarrow & & \downarrow h \\ A & \xrightarrow{i} & B. \end{array}$$

Пусть $b=1h$. Если $\lambda\in I$, то $\lambda b=\lambda(1h)=\lambda\chi h=\lambda\varphi$, т. е. $I\subseteq(A:b)$ (здесь A отождествлено с Ai). Ввиду условия на $\mathscr{E}$ $(A:b)\in\mathscr{E}$. Пусть $(0:a-b)=(A:b)$.

[1]) Это условие используется только при доказательстве импликации 2) $\Rightarrow$ 1).

Положив $1\psi=a$, для всякого $\lambda\in I\subseteq(A:b)=(0:a-b)$ получим соотношение

$$\lambda\chi\psi=\lambda(1\psi)=\lambda a=\lambda b=\lambda\varphi.$$

Таким образом, $\chi\psi=\varphi$, т. е. 2) $\Rightarrow$ 1).

Пусть выполнено условие 2) и C удовлетворяет условиям пункта 3). Тогда для всякого i существует такое $c_i\in\bar{c}_i$, что $(0:c_i)=(0:\bar{c}_i)$. Ясно, что $A\cap\dot{\sum}\Lambda c_i=0$, откуда $C=A\dotplus\dot{\sum}\Lambda c_i$. Таким образом, 2) $\Rightarrow$ 3). Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) очевидна. Пусть выполнено 4), $b\in B$ и $(A:b)\in\mathscr{E}$. Положим $\bar{C}=\Lambda\bar{b}$, где $\bar{b}=b+A$. Определим C из равенства $\bar{C}=C/A$. Тогда $C=A\dotplus C_1$. Если при этом $b=a+b_1$, то, очевидно, $(0:a-b)=$ $=(0:b_1)=(A:b)$, т. е. выполнено 2).

Эквивалентность свойств 1) и 5) вытекает из предложения (1.29).

Из предложения (1.48) нетрудно получить

(1.49) $\mathscr{E}$-*чистота, где* $\mathscr{E}$ *обладает свойством, указанным в формулировке предложения* (1.48), *циклически проективна.*

Действительно, пусть A — Λ-модуль и $a\in A$. Положим

$$P_a=\begin{cases}\Lambda a, & \text{если } (0:a)\in\mathscr{E},\\ \Lambda, & \text{если } (0:a)\notin\mathscr{E}.\end{cases}$$

Далее, обозначим через π_a естественные эпиморфизмы P_a на Λa, а через π — продолжающий их эпиморфизм модуля $P=\dot{\sum\limits_{a\in A}}P_a$ на A. Ввиду предложения (1.48) циклические модули P_a являются $\mathscr{E}$-проективными. Пусть теперь $0\neq p\in P$, $(\operatorname{Ker}\pi:p)\in\mathscr{E}$ и $\pi(p)=a$. Тогда в P существует элемент $\bar{a}$, у которого a-тая координата равна a, а остальные — нулю. Поскольку $p-\bar{a}\in\operatorname{Ker}\pi$, то соотношения $(\operatorname{Ker}\pi:p)=$ $=(0:a)=(0:\bar{a})=(0:(p-\bar{a})-p)$ позволяют заключить с помощью предложения (1.48), что $\operatorname{Ker}\pi\subseteq_{\mathscr{E}}P$.

Из (1.6) и (1.49) вытекает

(1.50) *Всякий* $\mathscr{E}$-*проективный модуль является прямым слагаемым прямой суммы циклических* $\mathscr{E}$-*проективных модулей.*

(1.51) *Если $\mathscr{E}$ — некоторая система конечно-порожденных левых идеалов кольца Λ, то $\mathscr{E}$-чистота инъективна.*

Расчленим доказательство на ряд этапов. Кроме того, введем обозначения: $\mathfrak{i}$ — мощность кольца Λ, $\mathfrak{m} = \mathfrak{n}\aleph_0$, где $\mathfrak{n}$ — мощность системы $\mathscr{E}$, и $\mathfrak{b} = 2^{\mathfrak{m}\mathfrak{i}}$.

а) *Если $A \subseteq B$ и мощность B/A не превосходит $\mathfrak{b}$, то найдется такой модуль D, что $A \subseteq D \subseteq_{\mathscr{E}} B$ и мощность D/A не превосходит $\mathfrak{b}$.*

Для доказательства положим $D_0 = A$ и допустим, что построена такая последовательность модулей

$$D_0 \subseteq D_1 \subseteq \ldots \subseteq D_{n-1},$$

что мощность D_i/A не превосходит $\mathfrak{b}$ и для всякой диаграммы

$$\begin{array}{ccc} I & \longrightarrow & \Lambda \\ {\scriptstyle f}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g} \\ D_{i-1} \to D_i & \to & B, \end{array}$$

где $I \in \mathscr{E}$, а строки — естественные вложения, найдется гомоморфизм g_i: $\Lambda \to D_i$, ограничение которого на I совпадает с f. Пусть $H = \mathrm{Hom}(\Lambda/I,\ B/D_{n-1})$. Каждой коммутативной диаграмме

$$\Delta_I^{(\nu)}: \quad \begin{array}{ccccccc} & & I & \xrightarrow{\chi} & \Lambda & & \\ & & {\scriptstyle f_I^{(\nu)}}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle g_I^{(\nu)}} & & \\ 0 \to & & D_{n-1} & \xrightarrow{i} & B & \xrightarrow{\pi} & B/D_{n-1} \to 0 \end{array}$$

соответствует $\eta \in H$. Для каждого $\eta \in H$ выберем по одной диаграмме $\Delta_I^{(\nu)}$ (если она существует). Обозначим через N_I получившееся множество индексов ν и положим $D_n = D_{n-1} + \sum\limits_{\nu \in \mathrm{N}_I,\, I \in \mathscr{E}} \mathrm{Im}\, g_I^{(\nu)}$. Если, далее, дана диаграмма $\Delta_I^{(\mu)}$, то для некоторого $\nu \in \mathrm{N}_I$ имеем $g_I^{(\nu)}\pi = g_I^{(\mu)}\pi$. Следовательно, $1g_I^{(\nu)} - 1g_I^{(\mu)} = di$, где $d \in D_{n-1}$. Положив $1\psi = 1g_I^{(\nu)} - di$, определим гомоморфизм ψ: $\Lambda \to D_n$. Тогда для $\xi \in I$ получаем $\xi\chi\psi = \xi g_I^{(\nu)} - \xi\, di = \xi g_I^{(\mu)}$. Мощность D_n/A не превосходит

$\mathfrak{n}\mathfrak{b}\mathfrak{b}^{\mathfrak{i}} = \mathfrak{b}$. Модуль $D = \bigcup\limits_{i=1}^{\infty} D_i$ обладает нужными свойствами, поскольку при любом отображении f: $I \to D$ подмодуль $\mathrm{Im}\, f$ принадлежит D_n для некоторого n в силу конечно-порожденности идеала $I \in \mathscr{E}$.

б) *Если $A \subseteq B$ и мощность B/A не превосходит $\mathfrak{b}$, то найдется трансфинитный ряд*

$$A = A_0 \subseteq A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_\alpha \subseteq \ldots \subseteq A_\Omega = B$$

такой, что $A_\alpha \subseteq_{\mathscr{E}} B$ для всех $\alpha > 0$, $A_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$ для предельных α и мощность модуля $A_{\alpha+1}/A_\alpha$ не превосходит $\mathfrak{b}$ для всех $\alpha > 0$.

Действительно, обозначим через A_1 модуль D, построенный в пункте а). Допустим, далее, что для всех $\beta < \alpha$ модули A_β построены. Если α предельное, то положим $A_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$. Ввиду предложения (1.24) $A_\alpha \subseteq_{\mathscr{E}} B$. Если $\alpha - 1$ существует и $A_{\alpha-1} \neq B$, то выберем $b \in B \setminus A_{\alpha-1}$. Применив а), найдем такой модуль D, что $A_{\alpha-1} + \Lambda b \subseteq D \subseteq_{\mathscr{E}} B$ и мощность $D_\alpha/A_{\alpha-1}$ не превосходит $\mathfrak{b}$. Остается положить $A_\alpha = D$.

Из б) и Ч2′ без труда выводится:

в) *Если модуль Q инъективен относительно всех таких чистых мономорфизмов i: $A \to B$, что мощность модуля B/A не превосходит $\mathfrak{b}$, то Q $\mathscr{E}$-инъективен.*

г) *$\mathscr{E}$-чистота инъективна.*

Для доказательства обозначим через $\mathfrak{D}(A)$ множество всех $\mathscr{E}$-допустимых над модулем A диаграмм, в которых мощность модуля G не превосходит $\mathfrak{b}$. Положим $Q_0 = A$ и допустим, что построена трансфинитная последовательность модулей

$$Q_0 \subseteq \ldots \subseteq Q_\beta \subseteq \ldots,$$

где $Q_\beta \subseteq_{\mathscr{E}} Q_\delta$ при $\beta < \delta < \alpha$ и для каждой диаграммы

$$\begin{array}{c} V \to G \\ {\scriptstyle f}\downarrow \quad \\ Q_\beta \quad \end{array}$$

из $\mathfrak{D}(Q_\beta)$ найдется такой гомоморфизм g: $G \to Q_{\beta+1}$ $(\beta + 1 < \alpha)$, ограничение которого на V совпадает с f.

Если α предельное, полагаем $Q_\alpha = \bigcup\limits_{\beta<\alpha} Q_\beta$. По (1.25), $Q_\beta \subseteq_{\mathscr{E}} Q_\alpha$. Если $\alpha-1$ существует, рассматриваем диаграмму

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r, "j"] \arrow[d, "f"'] & G \\ Q_{\alpha-1} & \end{tikzcd} \qquad (*)$$

где $V = \dot{\sum} V_\gamma$ и $G = \dot{\sum} G_\gamma$ — прямые суммы всех соответствующих модулей V_γ и G_γ, принадлежащих диаграммам из $\mathfrak{D}(Q_{\alpha-1})$, причем $V_\gamma j \subseteq G_\gamma$. Пусть $i_\gamma\colon G_\gamma \to G$ и $\pi_\gamma\colon G \to G_\gamma$ — естественные мономорфизмы и эпиморфизмы соответственно. Если $I \in \mathscr{E}$ и имеется коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "k"'] & \Lambda \arrow[d, "l"] \\ V \arrow[r, "j"] & G, \end{tikzcd}$$

то из коммутативности диаграммы

$$\begin{tikzcd} I \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "k\pi_\gamma"'] & \Lambda \arrow[d, "l\pi_\gamma"] \\ V_\gamma \arrow[r] & G_\gamma \end{tikzcd}$$

вытекает, что $k\pi_\gamma i_\gamma f = \chi\theta_\gamma$ для подходящего $\theta_\gamma\colon \Lambda \to Q_{\alpha-1}$. Пусть $\mathfrak{J} = \{\gamma \mid 1l\pi_\gamma \neq 0\}$. Ясно, что это конечное множество. Положив $\theta = \sum\limits_{\mathfrak{J}} \theta_\gamma$, получим

$$\chi\theta = \sum_{\mathfrak{J}} \chi\theta_\gamma = \sum k\pi_\gamma i_\gamma f = kf.$$

Следовательно, диаграмма (*) $\mathscr{E}$-допустима над $Q_{\alpha-1}$ и найдется $\mathscr{E}$-чистый мономорфизм $i\colon Q_{\alpha-1} \to B$, указанный в предложении (1.26). Нетрудно проверить, что можно положить $Q_\alpha = B$. Пусть Ω — наименьший трансфинит мощности, бо́льшей, чем $2^{\mathfrak{b}}$ и $Q = \bigcup\limits_{\alpha<\Omega} Q_\alpha$. Ввиду (1.25) $A \subseteq_{\mathscr{E}} Q$. Если диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & G \\ Q & \end{tikzcd} \qquad (**)$$

$\mathscr{E}$-допустима над Q, где мощность модуля G не превосходит $\mathfrak{b}$, то $\operatorname{Im} f \subseteq Q_\beta$ для некоторого $\beta < \Omega$. При этом можно считать, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} V \arrow[r] \arrow[d, "f"'] & G \\ Q_\beta & \end{tikzcd}$$

допустима над Q_β. В противном случае можно взять такое δ, где $\beta < \delta < \Omega$, что для Q_δ это уже выполнено. Отсюда и из построения модуля Q следует, что диаграмма (**) замыкается. Поэтому из (1.27) и в) вытекает, что модуль Q $\mathscr{E}$-инъективен.

(1.52) *$A \subseteq_{\Lambda\lambda} B$ тогда и только тогда, когда $\lambda B \cap A = \lambda A$.*

Действительно, пусть $\lambda B \cap A = \lambda A$. Рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd} \Lambda\lambda \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Lambda \arrow[d, "h"] \\ A \arrow[r, "i"] & B. \end{tikzcd}$$

Пусть $1h = b$. Отождествляя A с Ai, получаем $\lambda b \in \lambda B \cap A = \lambda A$. Отсюда $\lambda b = \lambda a$, где $a \in A$. Полагая $1\psi = a$, нетрудно проверить, что $\varphi = \chi\psi$. Следовательно, $A \subseteq_{\Lambda\lambda} B$. Если, наоборот, $A \subseteq_{\Lambda\lambda} B$ и $\lambda b \in A$, то, полагая $1h = b$, получаем $\lambda h \in A$. Обозначив через φ ограничение h на $\Lambda\lambda$, найдем такой гомоморфизм $\psi\colon \Lambda \to A$, что $\varphi = \chi\psi$. Если $1\psi = a$, то

$$\lambda a = \lambda\chi\psi = \lambda\varphi = \lambda h = \lambda b.$$

Таким образом, $\lambda b \in \lambda A$, что и требовалось.

Из (1.52) вытекает

(1.53) *Для $\Lambda\lambda$-делимости Λ-модуля Q необходимо и достаточно, чтобы $q \in \lambda Q$, если $(0 : \lambda)q = 0$.*

Действительно, допустим, что модуль Q обладает указанным свойством. Пусть $q \in \lambda\hat{Q} \cap Q$, т. е. $q = \lambda\bar{q}$, где $\bar{q}$ принадлежит инъективной оболочке $\hat{Q}$ модуля Q ([г], стр. 138) и $\xi \in (0 : \lambda)$. Тогда $\xi q = \xi(\lambda\bar{q}) = 0$. По условию, $q \in \lambda Q$. Таким образом, $\lambda\hat{Q} \cap Q = \lambda Q$. Из предложений (1.7) и (1.52) вытекает, что модуль Q $\Lambda\lambda$-делим. Наоборот, если Q является $\Lambda\lambda$-делимым модулем, $q \in Q$ и $(0 : \lambda)q = 0$, то можно определить гомоморфизм $\varphi\colon \Lambda\lambda \to Q$, положив $(\xi\lambda)\varphi = \xi q$. Продолжая φ, согласно (1.31), до гомоморфизма $\psi\colon \Lambda \to Q$, получаем, что $q = \lambda\varphi = \lambda(1\psi) \in \lambda Q$.

Выделим в кольце Λ некоторое множество S таких элементов s, что $r(s) = 0$. Пусть $\mathscr{E}_S = \{\Lambda s \mid s \in S\}$. Элемент a из Λ-модуля A назовем *S-периодическим*, если $sa = 0$ для некоторого $s \in S$.

(1.54) *Λ-модуль C является $\mathscr{E}_S$-плоским тогда и только тогда, когда в C нет ненулевых S-периодических элементов.*

Действительно, допустим, что C есть $\mathscr{E}_S$-плоский Λ-модуль, $c \in C$, $sc = 0$ и $s \in S$. Тогда в точной последовательности $0 \to K \to F \xrightarrow{\pi} C \to 0$, где F — свободный модуль, должно быть $K \subseteq_{\mathscr{E}_S} F$. Если $y\pi = c$, то ввиду (1.52) найдется такой элемент $x \in K$, что $sx = sy$. Отсюда $x = y$, а значит, $c = 0$. Пусть теперь из равенства $sc = 0$, где $s \in S$, $c \in C$, всегда следует $c = 0$. Рассмотрим точную последовательность

$$0 \to A \to B \to C \to 0.$$

Если $s \in S$, $b \in B$ и $sb = a \in A$, то легко видеть, что $b \in A$. Таким образом, $sB \cap A = sA$ для всех $s \in S$. Применяя предложение (1.52), получаем $A \subseteq_{\mathscr{E}_S} B$, что и требовалось.

Остановимся теперь на исследовании $\mathscr{E}$-чистоты для случая, когда $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр.

Из (0.4) и (1.31) вытекает

(1.55) *Если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр, то $\mathscr{E}$-делимые модули образуют класс инъективных объектов плотной моноинъективной структуры.*

Пусть $\mathscr{E}$ — система левых идеалов кольца Λ и A — подмодуль Λ-модуля B. Мы скажем, что модуль A *$\mathscr{E}$-плотен* в B (или что B — *$\mathscr{E}$-существенное расширение* модуля A), если для всякого ненулевого $b \in B$ имеет место $(A : b) \in \mathscr{E}$ и $(A : b)\, b \neq 0$.

(1.56) *Если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр, то модуль A $\mathscr{E}$-плотен в B тогда и только тогда, когда A плотен в B и $\mathscr{E}$-делимые модули инъективны относительно естественного вложения A в B.*

В доказательстве будем использовать обозначения предложения (0.4). Пусть $f\colon A \to B$ — естественное вложение, $\operatorname{Im} f$ плотен в B и $f \in \mathfrak{S}_{\mathscr{E}}$ (см. (1.31) и (0.4)).

Найдем эпиморфизм $g\colon B \to C$, указанный в определении класса $\mathfrak{S}_{\mathscr{E}}$. Если $\operatorname{Ker} g \neq 0$, то, в силу плотности A, $0 \neq \operatorname{Ker} g \cap \operatorname{Im} f \subseteq (\operatorname{Ker} fg) f$, что невозможно. Следовательно, g — изоморфизм. Поэтому $(\operatorname{Im} f : b) \in \mathscr{E}$ для всех $b \in B$. В силу плотности, имеем $(\operatorname{Im} f : b)\, b \neq 0$. Таким образом, модуль A $\mathscr{E}$-плотен в B. Обратное утверждение сразу следует из предложения (0.4).

(1.57) *Если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр, модуль A $\mathscr{E}$-плотен в B, а B $\mathscr{E}$-плотен в C, то A $\mathscr{E}$-плотен в C.*

Действительно, учитывая предложение (1.56), нетрудно проверить, что A плотен в C, после чего остается только трижды применить (1.56).

(1.58) *Если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр, $A \subseteq B \subseteq C$, модуль A $\mathscr{E}$-плотен в C и B $\mathscr{E}$-делим, то $B = C$.*

Действительно, если $c \in C \setminus B$, то $I = (B : c) \supseteq (A : c)$ и, следовательно, $I \in \mathscr{E}$. Равенство $\lambda\varphi = \lambda c$, где $\lambda \in I$, определяет гомоморфизм $\varphi\colon I \to B$, который, в силу $\mathscr{E}$-делимости модуля B, можно продолжить до гомоморфизма $\psi\colon \Lambda \to B$. Пусть $b_0 = 1\psi$. Если $b + \lambda c = b' + \lambda' c$, где $b, b' \in B$, $\lambda, \lambda' \in \Lambda$, то $b - b' = (\lambda' - \lambda) c = (\lambda' - \lambda) b_0$. Поэтому можно определить гомоморфизм $\bar\varphi\colon B + \Lambda c \to B$, положив $(b + \lambda c)\bar\varphi = b + \lambda b_0$. Так как $b\bar\varphi = b$ для всех $b \in B$, то B оказывается ретрактом модуля $B + \Lambda c$. Это, однако, противоречит плотности модуля B в $B + \Lambda c$, вытекающей из плотности A в C.

(1.59) *Если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр в кольце Λ, B — Λ-модуль и A — его подмодуль, то эквивалентны следующие свойства модуля B:*

1) *B является максимальным $\mathscr{E}$-существенным расширением подмодуля A;*

2) *B — минимальный $\mathscr{E}$-делимый модуль, содержащий A;*

3) *B — $\mathscr{E}$-делимый модуль, являющийся $\mathscr{E}$-существенным расширением подмодуля A.*

Докажем импликацию 1) $\Rightarrow$ 2). Из предложений (1.55) и (1.56) вытекает существование такого $\mathscr{E}$-делимого модуля C, что B $\mathscr{E}$-плотен в C. Применяя (1.57), убедимся, что $B = C$, т. е. B оказывается $\mathscr{E}$-делимым модулем. Минимальность модуля B сразу следует из (1.58). Если справедливо условие 2), то, воспользовавшись предложениями (1.55) и (1.56), найдем

$\mathscr{E}$-делимое $\mathscr{E}$-существенное расширение D модуля A. Ввиду (1.56) естественное вложение A в B можно продолжить до гомоморфизма $g\colon D \to B$. Так как $\operatorname{Ker} g \cap A = 0$, то g — мономорфизм. Ясно, что $\operatorname{Im} g$ — $\mathscr{E}$-делимый модуль. Если $\operatorname{Im} g \neq B$, то мы вступаем в противоречие с минимальностью B. Следовательно, модуль A $\mathscr{E}$-плотен в B, т. е. B обладает свойством 3). Справедливость импликации 3)$\Rightarrow$1) сразу следует из предложения (1.58).

Разумеется, $\mathscr{E}$-чистота пользовалась наибольшим вниманием. Маранда [153] рассматривал $\mathscr{E}$-чистоту в случае, когда Λ — коммутативная область главных идеалов. Частными случаями $\mathscr{E}$-чистоты являются уже упоминавшиеся слабо-сервантная чистота ([и], § 28) и сервантная чистота, возникающие, если $\mathscr{E}$ пробегает все максимальные идеалы кольца целых чисел и все ненулевые идеалы кольца целых чисел соответственно. Нетрудно доказать, что в случае коммутативной области главных идеалов для каждого набора $\mathscr{E}$ идеалов, порожденных степенями простых элементов, существует $\mathscr{E}$-чистый мономорфизм, не являющийся $\mathscr{E}'$-чистым ни для какого отличного от $\mathscr{E}$ набора $\mathscr{E}'$ идеалов, также порожденных степенями простых элементов. Мегиббен [161] выяснил, для каких групп всякая слабо-сервантная подгруппа сервантна в них. Для любого набора $\mathscr{E}$ идеалов кольца целых чисел, порожденных степенями простых чисел, Рохлина нашла необходимые и достаточные условия, при которых всякая $\mathscr{E}$-чистая подгруппа данной группы служит для нее прямым слагаемым. Аналогичные условия для сервантной чистоты были ранее найдены Черниковым [26]. Однако эти условия связаны со спецификой кольца целых чисел. Прохазка [176] рассмотрел также вопрос, когда для любой сервантной подгруппы H группы G без кручения существует прямое разложение $G = A \dotplus B$, где $A \cong H$, $B \cong G/H$. Предложения (1.56) — (1.58) имеются у Сандерсона [192], а (1.51) — у Кильпинского [140]. Предложение (1.59) доказано Марандой [154]. Доказательство, изложенное в тексте, принадлежит Сандерсону [192]. Исследованию $\mathscr{E}$-чистоты посвящена статья Гельцера [110]. Им доказаны частные случаи предложений (1.31) и (1.33). Основное содержание его работы относится к случаю, когда $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр. Для этого случая он выясняет, когда $\mathscr{E}$-инъективность модуля равносильна $\mathscr{E}'$-инъективности, где $\mathscr{E}'$ — система, состоящая из всех проективных конечно-порожденных левых идеалов из $\mathscr{E}$. Понятие $\mathscr{E}$-чистоты для случая, когда $\mathscr{E}$ — множество всех главных левых идеалов, встречается у Хаттори [104] и Кертеса [135], доказавших, среди прочего, частные случаи предложений (1.31), (1.38) и (1.53). Левич [18] рассматривал $\mathscr{E}$-чистоту в случаях, когда $\mathscr{E}$ состоит из одного главного левого идеала, или из главных левых идеалов, порожденных степенями одного элемента, или из всех главных идеалов. Капланский ([130], теорема 3) доказал, что $\mathscr{E}$-чистый подмодуль B модуля A над дедекиндовым кольцом Λ, где $\mathscr{E}$ — совокупность всех его идеалов, выделяется прямым слагаемым, если A/B — прямая сумма циклических Λ-модулей и конечно-порожденных модулей без кручения ранга 1. Для случая модулей над коммутативной областью главных идеалов некоторые результаты о разложении $\mathscr{E}$-чистого подмодуля модуля, разлагающегося в прямую сумму модулей ранга 1, получили Бэр ([в], стр. 197—200; [и], стр. 164—165), Эрдеш ([и], стр. 166), Колеттис [142] и Фукс ([85], ч. I). Ренольт [186] использовал $\mathscr{E}$-чистоту в случае, когда $\mathscr{E}$ состоит из всех максимальных левых идеалов кольца Λ.

Пусть снова $\mathscr{E}$ — некоторая система левых идеалов кольца Λ и A — подмодуль Λ-модуля B. Положим $A \subseteq_{\tilde{\mathscr{E}}} B$, если $IB \cap A = IA$ для всех $I \in \mathscr{E}$.

(1.60) *Отношение* $\subseteq_{\tilde{\mathscr{E}}}$ *обладает свойствами* Ч0′, Ч1′, Ч$\overline{2}$, Ч$\overline{3}$* *и* Ч4′.

Действительно, справедливость свойств Ч0′, Ч1′, Ч$\overline{2}$, Ч4′ проверяется, как для обычной сервантности ([в], стр. 159). Для проверки свойства Ч$\overline{3}$* рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "e_K"'] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\tau"'] \\
 & & D \arrow[r, "e_D"] \arrow[d] & D \arrow[d] \\
 & & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Легко проверить, что $B = A\sigma + M$. Поэтому если $m = \sum \lambda_i b_i$, где $m \in M$, $b_i \in B$, $\lambda_i \in I \in \mathscr{E}$, то $m = \sum \lambda_i (a_i\sigma + m_i)$, где $a_i \in A$, $m_i \in M$. При этом $\sum \lambda_i a_i \in L$, и если $L \subseteq_{\tilde{\mathscr{E}}} A$, то $\sum \lambda_i a_i = \sum \mu_j l_j$, где $\mu_j \in I$, $l_j \in L$. Разумеется, $l_j\sigma \in M$, откуда $m \in IM$, что и доказывает Ч$\overline{3}$*.

Таким образом, отношение $\subseteq_{\tilde{\mathscr{E}}}$ определяет битреугольную чистоту, которую будем называть $\tilde{\mathscr{E}}$-чистотой.

(1.61) *Пусть $\mathscr{E}=\{\Lambda\lambda_\alpha\}$, причем все λ_α принадлежат центру $\mathfrak{C}$ кольца Λ. Тогда соотношения $A\subseteq_{\tilde{\mathscr{E}}}B$ и $A\subseteq_{\mathscr{E}}B$ равносильны.*

В самом деле, пусть $\lambda\in\mathfrak{C}$. Если $A\subseteq_{\tilde{\mathscr{E}}}B$ и $\Lambda\lambda\in\mathscr{E}$, то рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
\Lambda\lambda \arrow[r, "\chi"] \arrow[d, "\varphi"'] & \Lambda \arrow[d, "h"] \\
A \arrow[r, "i"] & B.
\end{tikzcd}$$

Если $1h=b$, то $\lambda b\in\Lambda\lambda B\cap Ai=\Lambda\lambda Ai$. Поэтому $\lambda b=\sum\mu_k\lambda a_k=\lambda\sum\mu_k a_k$, где $a_k\in Ai$. Следовательно, $\lambda b\in\lambda Ai$ и, согласно (1.52), $A\subseteq_{\mathscr{E}}B$. Наоборот, если $A\subseteq_{\mathscr{E}}B$, $\Lambda\lambda\in\mathscr{E}$ и $a\in\Lambda\lambda B\cap A$, то $a=\sum\mu_k\lambda b_k=$ $=\lambda\sum\mu_k b_k$, где $\mu_k\in\Lambda$, $b_k\in B$, т. е. $a\in\lambda B\cap Ai$. Но, в силу (1.52), $a=\lambda a'$, где $a'\in A$. Таким образом, $\Lambda\lambda B\cap A=\Lambda\lambda A$, т. е. $A\subseteq_{\tilde{\mathscr{E}}}B$.

Определение $\tilde{\mathscr{E}}$-чистоты имеется у Маранды [154]. Басс ([42], стр. 477, предложение 4.7) установил связь между $\tilde{\mathscr{E}}$-чистотой и замкнутостью подмодуля [1]). Из одного результата Нунке ([165], лемма 5.2) можно вывести, что в случае модулей над дедекиндовым кольцом $\tilde{\mathscr{E}}$-чистота проективно замкнута. В той же работе ([165], теорема 5.1) для дедекиндовых колец установлены некоторые свойства, эквивалентные $\tilde{\mathscr{E}}$-чистоте. Некоторые свойства $\tilde{\mathscr{E}}$-чистоты в случае коммутативных колец установили Бессер и Микали ([45], [46]).

Пусть $\mathfrak{G}$ — некоторый класс модулей, замкнутый относительно эпиморфных образов. Положим $A\leqslant_{\mathfrak{G}}B$, если $A\subseteq B$ и A служит прямым слагаемым для всякого подмодуля S, где $A\subseteq S\subseteq B$ и $S/A\in\mathfrak{G}$.

(1.62) *Отношение $\leqslant_{\mathfrak{G}}$ обладает свойствами* Ч0′, Ч1′, Ч$\overline{2}$, Ч$\overline{3}$*, Ч4′.

Действительно, свойство **Ч0′** очевидно. Пусть теперь $A\leqslant_{\mathfrak{G}}B$, $B\leqslant_{\mathfrak{G}}C$, $A\subseteq S\subseteq C$ и $S/A\in\mathfrak{G}$. Из

[1]) Если $M\subseteq B$, то положим $M'=\{\varphi\mid\varphi\in\operatorname{Hom}(B,\Lambda),\ x\varphi=0$ для всех $x\in M\}$ и $M''=\{b\mid b\in B,\ b\varphi=0$ для всех $\varphi\in M'\}$. Подмодуль M называется *замкнутым*, если $M''=M$. Заметим, что замкнутость подмодуля M равносильна равенству $M=\bigcap_{\varphi\in\Phi}\operatorname{Ker}\varphi$, где $\Phi=\{\varphi\mid\varphi\in\operatorname{Hom}(B,\Lambda),\ M\varphi=0\}$.

существования естественного эпиморфизма φ: $S/A\to(S+B)/B$ вытекает, что $(S+B)/B\in\mathfrak{G}$, откуда $S+B=B\dotplus K$. Пусть i: $S\to B\dotplus K$ и π: $B\dotplus K\to B$ — естественное вложение и проекция соответственно, и пусть $M=\operatorname{Im} i\pi$. Отображение $i\pi$ индуцирует эпиморфизм ψ: $S/A\to M/A$. Отсюда $M/A\in\mathfrak{G}$ и, следовательно, $M=A\dotplus L$. Но тогда $S\subseteq M\dotplus K=A\dotplus L\dotplus K$, откуда $S=A\dotplus S\cap(L\dotplus K)$. Таким образом, свойство Ч1′ выполнено. Для доказательства Ч$\overline{2}$ допустим, что $A\subseteq B$ и для гомоморфизма ψ: $B\to C$, где $A\cap\operatorname{Ker}\psi=0$, имеет место соотношение $A\psi\leqslant_{\mathfrak{G}}C$. Если $A\subseteq S\subseteq B$ и $S/A\in\mathfrak{G}$, то $S\psi/A\psi\in\mathfrak{G}$. Отсюда $S\psi=$ $=A\psi\dotplus A'\psi$, где $\operatorname{Ker}\psi\subseteq A'\subseteq B$. Тогда $S=A+A'$. Если $a\in A\cap A'$, то $a\in A\cap\operatorname{Ker}\psi=0$, т. е. $A\leqslant_{\mathfrak{G}}B$.

Обратимся к доказательству свойства Ч$\overline{3}$*. С этой целью рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "e_K"'] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & B \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d, "\pi"'] & C \arrow[d, "\tau"] \\
 & & D \arrow[r, "e_D"] \arrow[d] & D \arrow[d] \\
 & & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами. Будем считать, что $L\subseteq B$, $M\subseteq C$. Допустим, что $L\leqslant_{\mathfrak{G}}B$. Тогда требуется доказать, что $M\leqslant_{\mathfrak{G}}C$. Пусть $M\subseteq S\subseteq C$ и $S/M\in\mathfrak{G}$. Если $S'=(S\cap\operatorname{Im}\sigma)\sigma^{-1}$, то $L\subseteq S'\subseteq B$ и существует естественный гомоморфизм ρ: $S'/L\to S/M$. Если $s\in S$, то для некоторого $b\in B$ имеем $s\tau=$ $=b\pi=b\sigma\tau$. Отсюда $s-b\sigma\in M\subseteq S$, т. е. $b\in S'$. Но $(b+L)\rho=b\sigma+M=s+M$, т. е. ρ — эпиморфизм. Если $(s'+L)\rho=0$, то $s'\pi=s'\sigma\tau=0$, т. е. $s'\in L$. Поэтому ρ — изоморфизм и, следовательно, $S'/L\in\mathfrak{G}$. Отсюда $S'=L\dotplus T$ и легко видеть, что $S=M+T\sigma$. Если

$t\in T$ и $t\sigma\in M$, то $t\pi = t\sigma\tau = 0$. Отсюда $t\in L\cap T = 0$. Таким образом, $S = M \dotplus T\sigma$, т. е. $M\leqslant_{\mathfrak{G}} C$.

Остается доказать Ч4′. Пусть $K\subseteq A\subseteq B$, $K\leqslant_{\mathfrak{G}} B$, $A/K\leqslant_{\mathfrak{G}} B/K$, $A\subseteq S\subseteq B$ и $S/A\in\mathfrak{G}$. Так как $(S/K)/(A/K)\cong S/A\in\mathfrak{G}$, то $S/K = A/K\dotplus L/K$ для некоторого L. Но $L/K\cong S/A\in\mathfrak{G}$. Поэтому $L = K\dotplus M$. Отсюда $S = A + M$ и $A\cap M = A\cap L\cap M\subseteq K\cap M = 0$, т. е. $A\leqslant_{\mathfrak{G}} B$.

Из предложения (1.62) вытекает, что отношение $\leqslant_{\mathfrak{G}}$ определяет битреугольную чистоту, которую будем называть *$\mathfrak{G}$-факторной*.

(1.63) *Пусть ω — $\mathfrak{G}$-факторная чистота. Тогда для любого Λ-модуля A существует ω-кочистый эпиморфизм $\varphi\colon P\to A$, где $P = F\dotplus\dot{\sum} G_\alpha$, F — свободный модуль и $G_\alpha\in\mathfrak{G}$ при всех α. Модуль P ω-проективен, т. е. ω — проективная чистота.*

Действительно, пусть $\{G_\alpha\}$ — совокупность всех подмодулей модуля A, принадлежащих классу $\mathfrak{G}$, и $i_\alpha\colon G_\alpha\to A$ — естественные вложения. Возьмем эпиморфизм $f\colon F\to A$, где F — подходящий свободный модуль, и положим $P = F\dotplus\dot{\sum} G_\alpha$. Далее, рассмотрим эпиморфизм $\psi\colon P\to A$, где $\psi = f\dotplus\dot{\sum} i_\alpha$. Если $K = \operatorname{Ker}\psi$, $K\subseteq S\subseteq P$ и $S/K\in\mathfrak{G}$, то $S\psi\in\mathfrak{G}$ и, следовательно, $S\psi = G_\beta$ для подходящего индекса β. Пусть $j\colon G_\beta\to P$ — естественное вложение. Определив гомоморфизм $\varphi\colon S\to P$ равенством $s\varphi = s - s\psi j$ для всех $s\in S$, получим равенства

$$s\varphi\psi = s\psi - s\psi j\psi = s\psi - s\psi = 0.$$

Таким образом, φ можно считать гомоморфизмом модуля S в K. Если $x\in K$, то $x\varphi = x - x\psi j = x$, т. е. модуль K оказывается ретрактом в S. Этим доказано, что $K\leqslant_{\mathfrak{G}} P$. Последнее утверждение предложения (1.63) сразу следует из предложений (1.5) и (1.6).

(1.64) *Пусть ω — $\mathfrak{G}$-факторная чистота, A, B — Λ-модули, $\{B_\alpha\}$ — совокупность всех подмодулей модуля B, лежащих в $\mathfrak{G}$, и $\varphi_\alpha\colon \operatorname{Ext}^1_\Lambda(B/B_\alpha, A)\to\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A)$ — гомоморфизмы, индуцированные естественными эпиморфизмами $\pi_\alpha\colon B\to B/B_\alpha$. Тогда*

$$\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A) = \bigcap_\alpha \operatorname{Im}\varphi_\alpha.$$

В самом деле, для любого α из точности последовательности

$$0\to B_\alpha\to B\xrightarrow{\pi_\alpha} B/B_\alpha\to 0$$

вытекает точность последовательности

$$\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B/B_\alpha, A)\xrightarrow{\varphi_\alpha}\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A)\xrightarrow{\psi_\alpha}\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B_\alpha, A).$$

Расширение

$$E\colon 0\to A\to G\to B\to 0 \qquad (*)$$

лежит в $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A)$ тогда и только тогда, когда точная последовательность

$$0\to A\to S\to S/A\to 0 \qquad (**)$$

расщепляется для любого $S\subseteq G$, где $A\subseteq S$, $S/A\in\mathfrak{G}$. Но если $S/A\in\mathfrak{G}$, то существует такой индекс α, что $S/A\cong B_\alpha$. Ввиду коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{rccccccccc}
E\psi_\alpha\colon & 0 & \to & A & \to & S & \to & B_\alpha & \to & 0\\
 & & & \downarrow{\scriptstyle e_A} & & \downarrow{\scriptstyle i} & & \downarrow & & \\
E\colon & 0 & \to & A & \to & G & \to & B & \to & 0,
\end{array}$$

где i — естественное вложение, из [г], стр. 91, лемма 1.2, следует, что представителем элемента $E\psi_\alpha$ группы $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B_\alpha, A)$ можно считать последовательность (**). Эта последовательность расщепляется тогда и только тогда, когда $E\in\operatorname{Im}\varphi_\alpha$. Следовательно, $\omega\operatorname{Ext}^1_\Lambda(B, A) = \bigcap_\alpha \operatorname{Im}\varphi_\alpha$.

Если $\mathfrak{R}$ — класс модулей, замкнутый относительно подмодулей, то положим $A\leqslant^{\mathfrak{R}} B$, если из $S\subseteq A$ и $A/S\in\mathfrak{R}$ всегда следует, что A/S служит прямым слагаемым для B/S.

(1.65) *Отношение $\leqslant^{\mathfrak{R}}$ обладает свойствами* Ч0′, Ч1′, Ч$\overline{2}$, Ч$\overline{3}$*, Ч4′.

Действительно, свойство Ч0′ очевидно. Пусть $A\leqslant^{\mathfrak{R}} B$, $B\leqslant^{\mathfrak{R}} C$, $S\subseteq A$ и $A/S\in\mathfrak{R}$. Тогда $B/S = A/S\dotplus A'/S$. Отсюда $B/A'\cong(B/S)/(A'/S)\cong A/S\in\mathfrak{R}$. Следовательно, $C/A' = B/A'\dotplus B'/A'$. Но тогда $C/S = B/S + B'/S + A'/S = A/S + B'/S$. Пусть $a + S = b' + S$, где $a\in A$, $b'\in B'$. Тогда $a = b' + s$, где $s\in S$, откуда $a + A' = b' + A'$. Отсюда $a \in A'$, т. е. $a + S \in (A/S) \cap (A'/S) = 0$. Таким образом, свойство Ч1′ выполнено.

Для доказательства $\overline{\text{Ч2}}$ допустим, что $A \subseteq B$, ψ: $B \to C$ — гомоморфизм, где $A \cap \operatorname{Ker}\psi = 0$, $A\psi \leqslant^{\mathfrak{N}} C$, $S \subseteq A$ и $A/S \in \mathfrak{N}$. Тогда $A\psi/S\psi \cong A/S \in \mathfrak{N}$, откуда $C/S\psi = A\psi/S\psi \dotplus A'/S\psi$. Положим $A'' = (A' \cap \operatorname{Im}\psi)\psi^{-1}$. Для $b \in B$ имеем $b\psi = a\psi + a'$, где $a \in A$, $a' \in A'$, т. е. $b = a + a'' + x$, где $a'' \in A''$, $x \in \operatorname{Ker}\psi$. Следовательно, $B/S = A/S + (A'' + \operatorname{Ker}\psi)/S$. Если $a = a'' + x + s$, где $a \in A$, $a'' \in A''$, $x \in \operatorname{Ker}\psi$, $s \in S$, то $a\psi = a''\psi + s\psi$, т. е.

$$a\psi + S\psi = a''\psi + S\psi \in (A\psi/S\psi) \cap (A'/S\psi) = 0,$$

откуда $a \in S$. Таким образом,

$$B/S = A/S \dotplus (A'' + \operatorname{Ker}\psi)/S,$$

и $\overline{\text{Ч2}}$ выполнено.

Для доказательства $\overline{\text{Ч3}}^*$ рассмотрим ту же коммутативную диаграмму с точными строками и столбцами, что и в (1.62). Допустим, что $L \leqslant^{\mathfrak{N}} B$, и пусть $S \subseteq M$, $M/S \in \mathfrak{N}$. Если $S' = (S \cap \operatorname{Im}\sigma)\sigma^{-1}$, то существует гомоморфизм $\rho: B/S' \to C/S$, где $(b + S')\rho = b\sigma + S$. Если $b\sigma \in S$, то $b \in S'$, т. е. ρ — мономорфизм. Если $l \in L$, то $(l + S')\rho = l\sigma + S \in M/S$, откуда $L/S' \in \mathfrak{N}$. Следовательно, $B/S' = L/S' \dotplus L'/S'$. Для любого $c \in C$ существует такое $b \in B$, что $c\tau = b\pi = b\sigma\tau$. Отсюда $c - b\sigma \in M$, $c = b\sigma + m' = l\sigma + l'\sigma + m$, где $l \in L$, $l' \in L'$, $m, m' \in M$. Но тогда $c + S = (l\sigma + m + S) + (l'\sigma + S)$, где $l\sigma + m + S \in M/S$, $l'\sigma + S = (l' + S')\rho$, т. е. $C/S = M/S + (L'/S')\rho$. Если $l' \in L'$ и $l'\sigma \in M$, то $l'\pi = l'\sigma\tau = 0$, т. е. $l' \in L$. Но тогда $l' \in S'$. Таким образом, $C/S = M/S \dotplus (L'/S')\rho$, т. е. $\overline{\text{Ч3}}^*$ выполнено.

Обратимся к доказательству свойства Ч4′. Пусть $K \subseteq A \subseteq B$, $K \leqslant^{\mathfrak{N}} B$, $A/K \leqslant^{\mathfrak{N}} B/K$, $S \subseteq A$ и $A/S \in \mathfrak{N}$. Так как $K/(K \cap S) \cong (K + S)/S \subseteq A/S$, то $B/(K \cap S) = K/(K \cap S) \dotplus L/(K \cap S)$, где $K \cap S \subseteq L \subseteq B$. Отсюда $B = K + L$ и $K \cap L = K \cap S$, а также $A = A \cap (K + L) = K + A \cap L$. Если $k + l = k' + l' + s + k''$, где k, k', $k'' \in K$, l, $l' \in A \cap L$, $s \in S \cap L$, то $l - l' - s = k' + k'' - k \in K \cap L \subseteq S$. Следовательно, $l - l' \in S$. Это позволяет определить гомоморфизм φ: $A/(S \cap L + K) \to A/S$, положив

$$[a + (S \cap L + K)]\varphi = l + S,$$

где $a = k + l$, $k \in K$, $l \in A \cap L$. Легко видеть, что φ — мономорфизм. Отсюда следует, что $(A/K)/[(S \cap L + K)/K] \cong A/(S \cap L + K) \in \mathfrak{N}$. Поэтому

$$B/(S \cap L + K) = A/(S \cap L + K) \dotplus D/(S \cap L + K),$$

где $S \cap L + K \subseteq D \subseteq B$. Отсюда $D = D \cap B = D \cap (K + L) = K + D \cap L$ и, следовательно,

$$B = A + D = A + K + D \cap L = A + D \cap L.$$

Но $A \cap (D \cap L + S) = A \cap D \cap L + S = (S \cap L + K) \cap L + S = S \cap L + K \cap L + S \subseteq S$. Поэтому

$$B/S = A/S \dotplus (D \cap L + S)/S,$$

т. е. $A \leqslant^{\mathfrak{N}} B$.

В силу (1.65), отношение $\leqslant^{\mathfrak{N}}$ определяет битреугольную чистоту, которую будем называть *$\mathfrak{N}$-кофакторной.*

(1.66) *Пусть ω — $\mathfrak{N}$-кофакторная чистота. Тогда для любого Λ-модуля A существует ω-чистый мономорфизм φ: $A \to Q$, где Q — ω-инъективный модуль, т. е. ω — инъективная чистота.*

Для доказательства обозначим через $\hat{A}$ инъективную оболочку модуля A и рассмотрим множество $\{K_\alpha\}$ всех таких подмодулей модуля A, что $A/K_\alpha \in \mathfrak{N}$. Пусть π_α: $A \to A/K_\alpha$ — естественные эпиморфизмы и $Q = \hat{A} \dotplus \sum^* A/K_\alpha$. Равенства $a\varphi = (a, (a\pi_\alpha))$ определяют мономорфизм φ: $A \to Q$, который индуцирует мономорфизм $\bar{\varphi}$: $A/S \to Q/S\varphi$ для всякого $S \subseteq A$. Если $A/S \in \mathfrak{N}$, то $S = K_\beta$ для некоторого индекса β. Определим эпиморфизм σ: $Q \to A/S$, положив $(a, (a_\alpha\pi_\alpha))\sigma = a_\beta\pi_\beta$. Так как $S\varphi\sigma = 0$, то σ индуцирует эпиморфизм $\bar{\sigma}$: $Q/S\varphi \to A/S$. При этом $(a + S)\bar{\varphi}\bar{\sigma} = (a\varphi + S\varphi)\bar{\sigma} = a\pi_\beta$ для всякого $a \in A$, т. е. A/S — ретракт в $Q/S\varphi$. Этим доказано, что φ — ω-чистый мономорфизм. Из (1.5) и (1.6) вытекает ω-инъективность модуля Q.

Рассуждениями, двойственными проведенным при доказательстве предложения (1.64), доказывается

(1.67) *Пусть* ω — $\mathfrak{N}$*-кофакторная чистота,* A, B — Λ*-модули,* $\{K_\alpha\}$ — *совокупность всех таких подмодулей модуля* B, *что* $B/K_\alpha \in \mathfrak{N}$, *и* φ_α: $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, K_\alpha) \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)$ — *гомоморфизмы, индуцированные естественными вложениями* K_α *в* B. *Тогда*

$$\omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B) = \bigcap_\alpha \mathrm{Im}\,\varphi_\alpha.$$

Понятие $\mathfrak{G}$-факторной и $\mathfrak{N}$-кофакторной чистоты предложила Уокер [205]. Ею доказаны предложения (1.62) — (1.67), а также соответствующий частный случай предложения (1.3). Если $\mathfrak{F}$ — класс всех конечных групп, то как $\mathfrak{F}$-факторная, так и $\mathfrak{F}$-кофакторная чистота совпадает с сервантной чистотой. Первое утверждение содержится в [и], стр. 82, следствие 25.4, для доказательства второго достаточно провести рассуждения, совершенно аналогичные доказательству теоремы 24.9 в [и], стр. 81. Тот же результат получится, если в качестве $\mathfrak{F}$ взять класс всех групп, порядки элементов которых ограничены в совокупности ([и], стр. 44, теорема 11.2; стр. 82, теорема 25.2 и следствие 25.4; стр. 81, теорема 24.9). Отсюда, из (1.64) и леммы Бэра ([и], стр. 244, лемма 63.1) можно получить следующий известный результат ([и], стр. 246, предложение N): если ω — сервантная чистота, то

$$\omega\,\mathrm{Ext}(B, A) = \bigcap_{0 \neq n \in \mathbf{Z}} n\,\mathrm{Ext}(B, A).$$

Пусть Λ — дедекиндово кольцо, $\mathscr{E}$ — система его левых идеалов, содержащая вместе с каждым идеалом все бо́льшие, и $\mathfrak{F}$ — класс всех Λ-модулей A, для которых $IA = 0$ при некотором $I \in \mathscr{E}$. Тогда как $\mathfrak{F}$-факторная, так и $\mathfrak{F}$-кофакторная чистота совпадает с $\mathscr{E}$-чистотой ([165], теорема 5.1).

Отношения, близкие к $\mathfrak{G}$-факторной и $\mathfrak{N}$-кофакторной чистоте, рассматривал Фукс [91]. Пусть A — некоторая группа. Обозначим через $\mathfrak{J}_A$ идеал в структуре всех ее подгрупп, а через $\mathfrak{D}_A$ — дуальный идеал (фильтр). Скажем, что $A \prec_{\mathfrak{J}} B$ ($A \prec^{\mathfrak{D}} B$), если A — подгруппа в B и A выделяется прямым слагаемым из всякой подгруппы H со свойствами $A \subseteq H \subseteq B$ и $H/A \in \mathfrak{J}_{B/A}$ (если A/K — прямое слагаемое для B/K при любом $K \in \mathfrak{D}_A$). Вопрос о том, как нужно выбирать $\mathfrak{J}_A$ и $\mathfrak{D}_A$, чтобы для отношений $\prec_{\mathfrak{J}}$ и $\prec^{\mathfrak{D}}$ были справедливы свойства Ч0′ — Ч4′, в общем случае открыт. Заметим, что отношение $\prec_{\mathfrak{J}}$ дает сервантную чистоту в группах, если $\mathfrak{J}_A$ для любой группы A состоит из всех ее конечно-порожденных подгрупп (см. (1.48)) или из всех ее подгрупп, порядки элементов которых ограничены в совокупности (так как в этом случае отношение $\prec_{\mathfrak{J}}$ равносильно отношению $\leqslant_{\mathfrak{F}}$, где $\mathfrak{F}$ — класс всех групп, порядки элементов которых в совокупности ограничены). Отношение $\prec^{\mathfrak{D}}$ дает сервантную чистоту в группах, если $\mathfrak{D}_A$ состоит из всех подгрупп группы A, содержащих подгруппы вида nA, где n — натуральное число ([и], стр. 81, теорема 24.9).

Пусть теперь ω — произвольная чистота. Положим $A \subseteq_{\omega\text{в}} B$, если существует такой подмодуль $H \subseteq B$, что $(A+H)/H \subseteq_\omega B/H$ и подмодуль A является H-высоким [1]). Чтобы подчеркнуть использование подмодуля H, в некоторых случаях будем писать $\subseteq_{\omega\text{в}H}$ вместо $\subseteq_{\omega\text{в}}$.

(1.68) *Пусть* ω — *некоторая чистота. Тогда отношение* $\subseteq_{\omega\text{в}}$ *обладает свойствами* Ч0′, Ч1′, Ч$\overline{2}$, Ч3′. *Если* ω — $\mathscr{E}$*-чистота, то* $\subseteq_{\omega\text{в}}$ *обладает свойствами* Ч$\overline{3}$* *и* Ч4*.

Действительно, справедливость свойства Ч0′ для $\subseteq_{\omega\text{в}}$ очевидна. Пусть, далее, $A \subseteq_{\omega\text{в}G} B$ и $B \subseteq_{\omega\text{в}H} C$. Тогда, очевидно, $A \cap (G+H) = 0$. Пусть $x \in C \setminus A$. Если $x \in B$, то ясно, что $W = (A + \Lambda x) \cap (G+H) \neq 0$. Если $x \notin B$, найдутся $b \in B$ и $\lambda \in \Lambda$ такие, что $0 \neq b + \lambda x \in H$. Если $b \in A$, то опять $W \neq 0$. Если же $b \notin A$, то $0 \neq a + \mu b \in G$, где $a \in A$, $\mu \in \Lambda$. Но $\mu b + \mu\lambda x = h \in H$, откуда $0 \neq a + h - \mu\lambda x \in G$ и, следовательно, $w = a - \mu\lambda x \in W$. Если $w = 0$, то $0 \neq h \in H \cap G \subseteq H \cap B = 0$. Таким образом, подмодуль A является $(G+H)$-высоким. По условию, $(A+G)/G \subseteq_\omega B/G$. Отсюда, применяя (1.1), Ч0′ и Ч3′, последовательно получаем $(A+G+H)/G \subseteq_\omega (B+H)/G$ и

$$(A+G+H)/(G+H) \subseteq_\omega (B+H)/(G+H).$$

Кроме того, по условию, $(B+H)/H \subseteq_\omega C/H$. Применяя Ч3′, будем иметь $(B+H)/(G+H) \subseteq_\omega C/(G+H)$, после чего Ч1′ дает $(A+G+H)/(G+H) \subseteq_\omega C/(G+H)$, т. е. $A \subseteq_{\omega\text{в}(G+H)} C$. Пусть теперь $A \subseteq_{\omega\text{в}H} B$ и $K \subseteq A$. Легко проверить, что A/K является $(H+K)/K$-высоким. Из $(A+H)/H \subseteq_\omega B/H$, применяя Ч3′, нетрудно вывести, что $A/K \subseteq_{\omega\text{в}(H+K)/K} B/K$. Таким образом, показано, что $\subseteq_{\omega\text{в}}$ обладает свойствами Ч0′, Ч1′ и Ч3′.

Докажем теперь справедливость свойства Ч$\overline{2}$. Допустим, что f: $A \to B$, g: $B \to C$ и $Afg \subseteq_{\omega\text{в}H} C$. Положив $G = (Bg \cap H)g^{-1}$, нетрудно убедиться, что подмо-

---

[1]) Говорят, что подмодуль A модуля B является H***-высоким*** (или *дополнительным для* H), где H — подмодуль из B, если $A \cap H = 0$, но $(A + \Lambda b) \cap H \neq 0$ для всякого $b \in B \setminus A$.

дуль Af будет G-высоким в B. Если φ — естественное вложение $(Af+G)/G$ в B/G и $(b+G)\psi=bg+H$, то

$$[(Af+G)/G]\varphi\psi=(Afg+H)/H\subseteq_{\omega}(C+H)/H,$$

откуда $\varphi\psi\in\mathfrak{H}_{\omega}$. Нетрудно проверить, что ψ — мономорфизм. Поэтому $\varphi\in\mathfrak{H}_{\omega}$ и, следовательно, $Af\subseteq_{\omega\,\text{в}}B$.

Далее установим справедливость свойства ЧЗ*, если ω — $\tilde{\mathscr{E}}$-чистота. С этой целью рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & 0 \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] \arrow[d, "e_K"'] & L \arrow[r] \arrow[d] & M \arrow[d] \\
0 \arrow[r] & K \arrow[r] & A \arrow[r, "\sigma"] \arrow[d] & B \arrow[d, "\tau"] \\
 & & D \arrow[r, "e_D"] \arrow[d] & D \arrow[d] \\
 & & 0 & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами и допустим, что $\sigma\tau\in\mathfrak{H}^{*}_{\omega\,\text{в}}$. Тогда $L\subseteq_{\omega\,\text{в}\,H}A$. Кроме того, легко проверить, что $B=A\sigma+M$. Положим $G=H\sigma$. Ясно, что $M\cap G=0$. Если $b\in B\setminus M$, то $b=a\sigma+m$, где $a\in A\setminus L$, $m\in M$. Поэтому $0\neq h=\lambda a+l$, где $h\in H$, $l\in L$, $\lambda\in\Lambda$. Конечно, $h\notin K$, ибо $K\cap H\subseteq L\cap H=0$. Но тогда $0\neq h\sigma=\lambda b+(l\sigma-\lambda m)$, т. е. M оказывается G-высоким. Пусть $m+G\in I(B/G)\cap[(M+G)/G]$, где $I\in\mathscr{E}$. Тогда $m=\sum\xi_i b_i+g$, где $b_i\in B$, $g\in G$, $\xi_i\in I$. Но $b_i=a_i\sigma+m_i$, где $a_i\in A$, $m_i\in M$, а $g=h\sigma$, где $h\in H$. Легко понять, что $l=\sum\xi_i a_i+h\in L$. Отсюда, поскольку $(L+H)/H\subseteq_{\mathscr{E}}A/H$, вытекает, что $l=\sum\eta_j l_j+h'$, где $l_j\in L$, $h'\in H$, $\eta_j\in I$. Но тогда

$$m+G=l\sigma+\sum\xi_i m_i+G=$$
$$=\sum\eta_j(l_j\sigma)+\sum\xi_i m_i+G\in I[(M+G)/G].$$

Таким образом, $(M+G)/G\subseteq_{\mathscr{E}}B/G$ и, значит, $\tau\in\mathfrak{H}^{*}_{\omega\,\text{в}}$.

Пусть, наконец, ω — $\tilde{\mathscr{E}}$-чистота и в приведенной выше диаграмме $\sigma,\tau\in\mathfrak{H}^{*}_{\omega\,\text{в}}$. Тогда $K\subseteq_{\omega\,\text{в}\,G}A$ и $M\subseteq_{\omega\,\text{в}\,H}B$. Пусть $N=G\cap H\sigma^{-1}$. Если $x\in L\cap N$, то $x\sigma\in M\cap H=0$, т. е. $x\in K\cap G=0$. Если $a\in A\setminus L$, то $0\neq h=l\sigma+\lambda a\sigma$, где $h\in H$, $l\in L$, $\lambda\in\Lambda$. Отсюда $\lambda a+l\notin K$. Поэтому $0\neq g=k+\mu(\lambda a+l)$, где $g\in G$, $k\in K$, $\mu\in\Lambda$. Но $g\sigma=\mu h\in H$. Таким образом, $0\neq g=(k+\mu l)+\mu\lambda a\in N$, т. е. модуль L будет N-высоким. Пусть, далее, $x+N\in I(A/N)\cap[(L+N)/N]$, где $I\in\mathscr{E}$. Тогда $x=\sum\xi_i a_i+n$, где $x\in L$, $a_i\in A$, $n\in N$, $\xi_i\in I$. Отсюда $x\sigma+H\in I(B/H)\cap[(M+H)/H]$ и, следовательно, $x\sigma=\sum\eta_j m_j+h$, где $m_j\in M$, $h\in H$, $\eta_j\in I$. Но $h\in M\cap H=0$ и, значит, $x=\sum\eta_j l_j+k$, где $l_j\in L$, $k\in K$. Отсюда $\sum\xi_i a_i-\sum\eta_j l_j=k-n$, т. е. $k+G\in I(A/G)\cap[(K+G)/G]$. Поэтому $k=\sum\zeta_s k_s$, где $\zeta_s\in I$, $k_s\in K$, откуда $x+N\in I[(L+N)/N]$. Таким образом,

$$(L+N)/N\subseteq_{\mathscr{E}}A/N\quad\text{или}\quad\sigma\tau\in\mathfrak{H}^{*}_{\omega\,\text{в}}.$$

Из предложения (1.68) вытекает, что для $\tilde{\mathscr{E}}$-чистоты ω отношение $\subseteq_{\omega\,\text{в}}$ определяет битреугольную чистоту, которую будем называть *$\tilde{\mathscr{E}}$-высокой*. Не ясно, остается ли этот вывод справедливым для произвольной битреугольной чистоты.

Штенштрем [198] рассматривал ω-высокую чистоту для случая, когда $\mathfrak{H}_{\omega}$ состоит из всех мономорфизмов. Он, в частности, отметил, что для коммутативных нетеровых колец, в которых все ненулевые простые идеалы максимальны, такая ω-высокая чистота совпадает с $\mathscr{E}$-чистотой, где $\mathscr{E}$ — множество всех максимальных идеалов ([198], стр. 175, следствие). В другой своей работе [200] Штенштрем решал для этих двух чистот следующую задачу: когда все подмодули модуля A ω-чисты в нем?

Харрисон, Ирвин, Пирси и Уокер [103] рассматривали сервантно-высокую и слабо-сервантно-высокую чистоты. В частности, они доказали для этих чистот справедливость предложения (1.3). Однако охарактеризовать сервантно-высоко-инъективные и сервантно-высоко-проективные группы пока не удалось. То же самое относится и к слабо-сервантно-высокой чистоте. Классы сервантно-высоко-делимых и слабо-сервантно-высоко-делимых групп совпадают с классом делимых групп. Это непосредственно следует из того, что все сервантно-высокие и все слабо-сервантно-высокие подгруппы слабо-сервантны ([и], стр. 92, предложение d). Отсюда же вытекает отсутствие кручения у сервантно-высоко-плоских и слабо-сервантно-высоко-плоских групп. Справедливо также утверждение:

если ω — сервантно-высокая чистота, то ω-плоскими являются свободные группы и только они.

Действительно, пусть A — ω-плоская группа и $0 \to K \to F \to A \to 0$ — точная последовательность, где F — свободная группа. Тогда K — сервантно-высокая подгруппа группы F, т. е. в F существует такая подгруппа H, что K дополнительна для H, а $\overline{K} = (K + H)/H$ сервантна в $\overline{F} = F/H$. Из первого условия вытекает, что $\overline{F}/\overline{K}$ — периодическая группа. Если $\overline{T}$ — периодическая часть группы $\overline{F}$, то $\overline{K} \cap \overline{T} = 0$, ибо $\overline{K}$ изоморфна группе K без кручения. Пусть $\bar{x} \in \overline{F}$ и $m\bar{x} = \bar{a} \in \overline{K}$. Тогда $\bar{a} = m\bar{a}_1$ для некоторого $\bar{a}_1 \in \overline{K}$ и $m(\bar{x} - \bar{a}_1) = 0$, откуда $\bar{x} \in \overline{K} + \overline{T}$. Таким образом, $\overline{F} = \overline{K} + \overline{T}$. Пусть $\overline{T} = T/H$. Тогда $T \cap K = 0$ и $F = K + T$, откуда $A \cong F/K \cong T$, т. е. A — свободная группа. Обратное очевидно.

Из проведенного доказательства видно, что сервантно-высокие подгруппы групп без кручения выделяются прямыми слагаемыми.

Для всякой чистоты ω можно ставить вопрос о существовании для подмодуля A заданного модуля B минимального содержащего его ω-чистого подмодуля, который естественно назвать *ω-чистой оболочкой* подмодуля A. Если ω — слабо-сервантная чистота, то всякая подгруппа любой группы имеет в этой группе ω-чистую оболочку ([и], стр, 92, предложение i). Свойства слабо-сервантных оболочек рассматривал Рангасвами [177], [180] (см. также Уокер [209]). Вопрос об условиях, при которых любая подгруппа группы имеет сервантную оболочку, рассматривался Хиллом и Мегиббеном [113]. См. также работы Мегиббена [160], Хеда [106], Хилла ([111] [112]), Шарля [56]. Рассматривался вопрос о вложимости подгруппы в сервантную подгруппу или прямое слагаемое той же мощности, что и сама подгруппа ([и], стр. 78, предложение N; [57], [123], [125], [126], [189]).

Мегиббен [162] и Рангасвами [182] рассматривали подгруппы, являющиеся пересечениями сервантных или слабо-сервантных подгрупп. Этого же вопроса с более общих позиций касался Штенштрем [198].

Отметим еще такое определение. Группы A и B назовем *сервантно-эквивалентными*, если каждая из них изоморфна сервантной подгруппе другой. Де Гроот [99] и Сонсяда [194] исследовали, когда из сервантной эквивалентности вытекает изоморфизм групп (см. также [50]; [и], стр. 181, упражнение 27). Заметим, что утверждения, содержащиеся в [и], стр. 181, упражнение 26, и стр. 201, упражнение 10, ошибочны. Действительно, группы

$$\dot{\sum_{i=1,2,\ldots}} R_i' + \dot{\sum_{i=1,2,\ldots}} R_i'' \quad \text{и} \quad Z \dot{+} \dot{\sum_{i=1,2,\ldots}} R_i' \dot{+} \dot{\sum_{i=1,2,\ldots}} R_i'',$$

где все R_i' изоморфны группе двоичных дробей, все R_i'' изоморфны группе троичных дробей, а Z — группа всех целых чисел, очевидно, сервантно-эквивалентны, вполне разложимы, но не изоморфны между собой ([в], стр. 196). Этот пример дает также отрицательное решение проблемы 28 книги [и].

Легко видеть, что группами, не содержащими нетривиальных сервантных подгрупп, являются все подгруппы аддитивной группы рациональных чисел, примарные циклические группы, группы типа p^{∞} и только они ([и], стр. 94, упражнение 18а). Ввиду предложения (1.47) группами, в которых, наоборот, всякая подгруппа сервантна, являются все прямые суммы циклических групп простых порядков и только они. С этим же классом совпадает класс всех групп, в которых любая конечная система элементов порождает сервантную подгруппу (такие группы называются *локально сервантными*, см. [47]). Группа называется *почти локально сервантной*, если всякая ее конечная система элементов содержится в конечно-порожденной сервантной подгруппе. Всякая счетная почти локально сервантная группа является прямой суммой циклических групп ([47], теорема 6).

Некоторые обобщения понятия сервантности в группах рассматривали также Абиан и Райнхарт ([29] — честные подгруппы), Ванг ([210] — регулярные подгруппы), Куликов, Ирвин и Уокер ([14], [126] — изотипные подгруппы), Рангасвами ([180] — абсорбирующие подгруппы), Ричман и Уокер ([188] — α-квази-слабо-сервантные подгруппы), Робер ([189] — α-сервантные подгруппы; см. также [126]), Хед ([108], [109] — p-подчистота).

Сандомирский [193] исследовал модули, инъективные относительно естественных вложений подмодулей фиксированного модуля, а также модули, проективные относительно естественных эпиморфизмов данного модуля.

Фукс ([90], стр. 31, проблема 34) отмечает, что $\mathrm{Hom}(G, S)$, где S — сервантная подгруппа группы G, является левым идеалом кольца $\mathrm{Hom}(G, G)$, аддитивная группа которого служит ретрактом аддитивной группы кольца $\mathrm{Hom}(G, G)$, и предлагает исследовать возникающие связи. К этому кругу вопросов относится также работа Рейда [185].

Заметим, наконец, что предпринимались попытки дать определение чистоты в структурах ([107]) и универсальных алгебрах ([164], [211]).

§ 2. КРУЧЕНИЕ

Аксиоматическое определение понятия кручения разумно искать в связи с теорией радикала. Будем говорить, что в категории Λ-модулей задан *радикал* $\mathfrak{r}$, если

K1. Каждому Λ-модулю A поставлен в соответствие его подмодуль $\mathfrak{r}(A)$.

K2. $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}(A)) = \mathfrak{r}(A)$.

K3. Если $f\colon A \to B$, то $f(\mathfrak{r}(A)) \subseteq \mathfrak{r}(B)$.

K4. $\mathfrak{r}(A/\mathfrak{r}(A)) = 0$.

Подмодуль $\mathfrak{r}(A)$ назовем $\mathfrak{r}$-*радикалом* модуля A. Если $\mathfrak{r}(A) = A$ или $\mathfrak{r}(A) = 0$, то модуль A назовем $\mathfrak{r}$-*радикальным* или $\mathfrak{r}$-*полупростым* соответственно. Радикал $\mathfrak{r}$ назовем *кручением*, если требование K2 усилено:

K2′. Если $A \subseteq \mathfrak{r}(B)$, то $\mathfrak{r}(A) = A$.

В случае кручения вместо «$\mathfrak{r}$-радикальность» будем говорить «$\mathfrak{r}$-*периодичность*». Если Λ — коммутативная область целостности и $\mathfrak{r}_0(A)$ — обычная периодическая часть модуля A, то, как нетрудно проверить, функция $\mathfrak{r}_0$ оказывается кручением. Назовем *тривиальными* кручения $\mathfrak{r}(A) = 0$ для всех A и $\mathfrak{r}(A) = A$ для всех A.

Из K3 и K4 непосредственно следует

(2.1) *Если $\mathfrak{r}$ — радикал в категории Λ-модулей, то Λ-модуль A является $\mathfrak{r}$-радикальным тогда и только тогда, когда он не допускает ненулевых $\mathfrak{r}$-полупростых эпиморфных образов.*

Из условия K3 вытекает также

(2.2) *Если $A \subseteq B$, то $\mathfrak{r}(A) \subseteq A \cap \mathfrak{r}(B)$*

В частности,

(2.3) *Подмодуль $\mathfrak{r}$-полупростого модуля $\mathfrak{r}$-полупрост.*

Из предложения (2.1) получаем

(2.4) *Если Λ-модуль A является $\mathfrak{r}$-радикальным и $\mathfrak{r}$-полупростым, то $A = 0$.*

(2.5) *Фактор-модуль $\mathfrak{r}$-радикального модуля $\mathfrak{r}$-радикален.*

Из (2.1) и (2.3) нетрудно вывести

(2.6) *Полная прямая сумма и прямая сумма $\mathfrak{r}$-полупростых модулей $\mathfrak{r}$-полупросты.*

Далее, справедливо утверждение

(2.7) *Прямая сумма $\mathfrak{r}$-радикальных модулей $\mathfrak{r}$-радикальна.*

Действительно, если $A = \dot{\sum} A_\alpha$, где A_α — $\mathfrak{r}$-радикальные Λ-модули, и B — $\mathfrak{r}$-полупростой Λ-модуль, то из существования эпиморфизма $\xi\colon A \to B$ вытекает существование гомоморфизмов $\xi_\alpha\colon A_\alpha \to B$, где $\xi = \sum \xi_\alpha$. Так как, в силу предложений (2.3) и (2.1), $\operatorname{Im} \xi_\alpha = 0$ при любом α, то $\operatorname{Im} \xi = B = 0$.

(2.8) *Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал в категории Λ-модулей. Тогда следующие свойства подмодуля T Λ-модуля A эквивалентны:*

1) $T = \mathfrak{r}(A)$;

2) $T \subseteq \mathfrak{r}(A)$ *и* $\mathfrak{r}(A/T) = 0$;

3) T — *наибольший среди $\mathfrak{r}$-радикальных подмодулей модуля A*;

4) T — *максимальный среди $\mathfrak{r}$-радикальных подмодулей модуля A*;

5) $T = \bigcap\limits_{B \in \mathfrak{B}} B$, *где* $\mathfrak{B} = \{B \mid B \subseteq A,\ \mathfrak{r}(A/B) = 0\}$.

Действительно, импликация 1)$\Rightarrow$2) сразу следует из свойства K4, а 2)$\Rightarrow$3) — из K2 и (2.3) — (2.5). Импликация 3)$\Rightarrow$4) очевидна. Если справедливо условие 4), то 1) сразу следует из свойства K2 и включения $T \subseteq \mathfrak{r}(A)$, вытекающего из K3. Если $T = \bigcap B$, то ввиду K4 $T \subseteq \mathfrak{r}(A)$. Поскольку $A/T \subseteq \sum^* A/B$, то из предложений (2.3) и (2.6) вытекает, что $\mathfrak{r}(A/T) = 0$. Отсюда, учитывая, что $\mathfrak{r}(A)/T \subseteq A/T$ и применяя K2 и (2.3) — (2.5), получаем, что $\mathfrak{r}(A) = T$. Наконец, для всякого $B \in \mathfrak{B}$ ввиду предложения (2.3) из соотношения $\mathfrak{r}(A)/[B \cap \mathfrak{r}(A)] \cong [B + \mathfrak{r}(A)]/B \subseteq A/B$ следует, что фактор-модуль $\mathfrak{r}(A)/[B \cap \mathfrak{r}(A)]$ $\mathfrak{r}$-полупрост. Отсюда, в силу свойства К2 и предложения (2.5), вытекает, что $\mathfrak{r}(A) = B \cap \mathfrak{r}(A)$, т. е. $\mathfrak{r}(A) \subseteq B$. Так как $\mathfrak{r}(A) \in \mathfrak{B}$, то импликация $1) \Rightarrow 5)$ также доказана.

(2.9) *Следующие свойства радикала* $\mathfrak{r}$ *эквивалентны*:

1) $\mathfrak{r}$ — *кручение*;

2) $\mathfrak{r}(A) = A \cap \mathfrak{r}(B)$ *для всякого* $A \subseteq B$;

3) *инъективная оболочка* $\mathfrak{r}$*-полупростого модуля* $\mathfrak{r}$*-полупроста.*

В самом деле, импликация $1) \Rightarrow 2)$ легко выводится из предложений (2.2) и (2.8). Импликация $2) \Rightarrow 3)$ очевидна. Если справедливо 3) и $A \subseteq \mathfrak{r}(B)$, то рассмотрим коммутативную диаграмму

$$\begin{array}{ccc} A & \longrightarrow & \mathfrak{r}(B) \\ \downarrow & & \downarrow{\scriptstyle \varphi} \\ A/\mathfrak{r}(A) & \rightarrow & Q, \end{array}$$

где Q — инъективная оболочка модуля $A/\mathfrak{r}(A)$. Из условия 3) и предложений (2.3) — (2.5) вытекает, что $\varphi = 0$, откуда $A = \mathfrak{r}(A)$.

Ввиду предложения (2.8), для того чтобы задать радикал $\mathfrak{r}$, достаточно указать класс $\mathfrak{r}$-радикальных модулей. Последний описывается следующим предложением:

(2.10) *Радикальный класс* $\mathfrak{R}$[1]) *обладает следующими свойствами*:

1) $\mathfrak{R}$ *замкнут относительно эпиморфных образов*;

2) *если всякий ненулевой эпиморфный образ модуля A содержит ненулевой подмодуль из* $\mathfrak{R}$, *то A лежит в* $\mathfrak{R}$;

2′) $\mathfrak{R}$ *замкнут относительно расширений и прямых сумм*;

2″) *если модуль A обладает возрастающим рядом подмодулей*

$$0 = A_1 \subseteq \ldots \subseteq A_\alpha \subseteq A_{\alpha+1} \subseteq \ldots \subseteq A_\Omega = A,$$

где $A_{\alpha+1}/A_\alpha \in \mathfrak{R}$ *при любом* α *и* $A_\alpha = \bigcup\limits_{\alpha<\beta} A_\beta$ *для предельных* α, *то* $A \in \mathfrak{R}$.

[1]) Класс модулей условимся называть *радикальным* (*полупростым*), если он совпадает с классом всех $\mathfrak{r}$-радикальных ($\mathfrak{r}$-полупростых) модулей для некоторого радикала $\mathfrak{r}$.

Если класс $\mathfrak{R}$ *обладает свойством* 1) *и одним из свойств* 2), 2′), 2″), *то он радикален.*

Сначала докажем, что при выполнении условия 1) имеют место импликации $2) \Rightarrow 2') \Rightarrow 2'')$. Действительно, пусть имеет место условие 2). Если $A = \dot{\sum} A_\alpha$, $A_\alpha \in \mathfrak{R}$, $\pi\colon A \to B$ — ненулевой эпиморфизм и $i_\alpha\colon A_\alpha \to A$ — естественные вложения, то $i_\alpha \pi \neq 0$ хотя бы при одном α. Отсюда $0 \neq \operatorname{Im} i_\alpha \pi \subseteq \operatorname{Im} \pi$, причем $\operatorname{Im} i_\alpha \pi \in \mathfrak{R}$ в силу условия 1). Следовательно, в силу 2), $A \in \mathfrak{R}$. Пусть теперь $0 \to A \to B \to C \to 0$ — точная последовательность, где A, $C \in \mathfrak{R}$ и $\pi\colon B \to D$ — ненулевой эпиморфизм. Если $A\pi \neq 0$, то $0 \neq A\pi \subseteq B\pi$ и $A\pi \in \mathfrak{R}$, в силу условия 1). Если же $A\pi = 0$, то $0 \neq B\pi \cong C\pi \in \mathfrak{R}$. Отсюда, согласно свойству 2), вытекает, что $B \in \mathfrak{R}$.

Допустим теперь, что выполнено 2′) и модуль A удовлетворяет условию свойства 2″). Тогда $0 = A_1 \in \mathfrak{R}$. Пусть для всех $\beta < \alpha$ уже доказано, что $A_\beta \in \mathfrak{R}$. Если $\alpha - 1$ существует, то $A_\alpha \in \mathfrak{R}$, согласно свойству 2′). Если α предельное, то $A_\alpha = \Big(\dot{\sum\limits_{\alpha<\beta}} A_\beta\Big)\Big/K \in \mathfrak{R}$ ввиду условий 2′) и 1). Так как $A = A_\Omega$, то справедливость 2″) доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{r}$ — радикал и $\mathfrak{R}$ — класс всех $\mathfrak{r}$-радикальных модулей. Справедливость свойства 1) вытекает из предложения (2.5). Если, далее, модуль A удовлетворяет условиям свойства 2) и $A \neq \mathfrak{r}(A)$, то фактор-модуль $A/\mathfrak{r}(A)$ должен содержать ненулевой $\mathfrak{r}$-радикальный подмодуль, что противоречит предложениям (2.3) и (2.4). В силу доказанного выше, класс $\mathfrak{R}$ обладает свойствами 2′) и 2″).

Пусть, наконец, класс $\mathfrak{R}$ обладает свойством 1) и одним из свойств 2), 2′), 2″). Тогда, как показано выше, он обладает свойствами 1) и 2″). Если A — некоторый модуль, то рассмотрим в нем частично упорядоченное множество всех подмодулей, принадлежащих классу $\mathfrak{R}$. Из свойств 1) и 2″) нетрудно вывести, что объединение возрастающей последовательности таких подмодулей также принадлежит $\mathfrak{R}$. Применяя лемму Куратовского — Цорна, найдем максимальный подмодуль $\mathfrak{r}(A) \in \mathfrak{R}$. Если $B \subseteq A$ и $B \in \mathfrak{R}$, то, согласно свойству 1), получаем, что $[B + \mathfrak{r}(A)]/\mathfrak{r}(A) \cong B/[B \cap \mathfrak{r}(A)] \in \mathfrak{R}$. Применяя свойство 2″) к ряду $0 \subseteq \mathfrak{r}(A) \subseteq B + \mathfrak{r}(A)$, убедимся, что $B + \mathfrak{r}(A) \in \mathfrak{R}$. Ввиду максимальности $\mathfrak{r}(A)$ получаем, что $B \subseteq \mathfrak{r}(A)$. Очевидно, функция $\mathfrak{r}$ обладает свойствами K1 и K2. Из условия 1) нетрудно вывести справедливость свойства K3. Пусть, наконец, $B = \mathfrak{r}(A/\mathfrak{r}(A))$. Тогда $B \cong D/\mathfrak{r}(A)$, где $\mathfrak{r}(A) \subseteq D \subseteq A$. Применение свойства 2″) к ряду $0 \subseteq \mathfrak{r}(A) \subseteq D$ дает, что $D \in \mathfrak{R}$. Но тогда, как показано выше, $D \subseteq \mathfrak{r}(A)$ и, следовательно, $B = 0$. Таким образом, K4 также справедливо, т. е. $\mathfrak{r}$ — радикал. Ясно, что относительно этого радикала класс $\mathfrak{R}$ радикален.

(2.11) *Пусть $\mathfrak{r}$ — радикал, $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{P}$ — классы $\mathfrak{r}$-радикальных и $\mathfrak{r}$-полупростых модулей соответственно. Тогда*

(S1) $\mathfrak{R} \cap \mathfrak{P} = 0$;

(S2) $\mathfrak{R}$ *замкнут относительно фактор-модулей*;

(S2′) $\mathfrak{P}$ *замкнут относительно подмодулей*;

(S3) *для всякого модуля A существует такая точная последовательность $0 \to R \to A \to B \to 0$, что $R \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{P}$.*

Наоборот, для каждой пары классов $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$, обладающих свойствами S1, S2, S2′, S3, *существует такой радикал $\mathfrak{r}$, что $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{P}$ — классы $\mathfrak{r}$-радикальных и $\mathfrak{r}$-полупростых модулей соответственно.*

Действительно, первая часть предложения вытекает из предложений (2.4), (2.5), (2.3) и свойств K1, K2 и K4. Пусть теперь $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ обладает свойствами S1, S2, S2′, S3. Тогда $\mathfrak{R}$ обладает свойством 1) предложения (2.10) согласно S2. Пусть A удовлетворяет условию свойства 2) предложения (2.10). Ввиду S3 существует точная последовательность

$$0 \to R \to A \to B \to 0,$$

где $R \in \mathfrak{R}$, $B \in \mathfrak{P}$, Если $B \neq 0$, то $0 \neq C \subseteq B$, $C \in \mathfrak{R}$. Но $C \in \mathfrak{P}$ ввиду S2′. Получили противоречие с S1. Следовательно, $B = 0$, $A = R \in \mathfrak{R}$. Согласно предложению (2.10) отсюда следует, что существует радикал $\mathfrak{r}$, для которого $\mathfrak{R}$ — класс всех $\mathfrak{r}$-радикальных модулей. Далее, ввиду S1 и S2′ модули из $\mathfrak{P}$ являются $\mathfrak{r}$-полупростыми. Наоборот, если $\mathfrak{r}(A) = 0$, то $A \in \mathfrak{P}$ ввиду (2.3) и S3.

Полупростой класс описывается таким предложением

(2.12) *Полупростой класс $\mathfrak{P}$ обладает следующими свойствами*:

1) $\mathfrak{P}$ *замкнут относительно подмодулей*;

2) *если любой ненулевой подмодуль модуля A имеет ненулевой эпиморфный образ, принадлежащий $\mathfrak{P}$, то $A \in \mathfrak{P}$*;

2′) $\mathfrak{P}$ *замкнут относительно расширений и полных прямых сумм*;

2″) *если модуль A обладает убывающим рядом подмодулей*

$$A = A_1 \supseteq \ldots \supseteq A_\alpha \supseteq A_{\alpha+1} \supseteq \ldots \supseteq A_\Omega = 0,$$

где $A_\alpha / A_{\alpha+1} \in \mathfrak{P}$ для всех α и $A_\alpha = \bigcap_{\beta < \alpha} A_\beta$ для предельных α, то $A \in \mathfrak{P}$.

Если класс $\mathfrak{P}$ обладает свойством 1) *и одним из свойств* 2), 2′), 2″), *то он полупрост* [1]. *Соответствующий радикал является кручением тогда и только тогда, когда класс $\mathfrak{P}$ замкнут относительно перехода к инъективным оболочкам.*

Сначала докажем, что при выполнении свойства 1) справедливы импликации 2)⇒2′)⇒2″). В самом деле, если имеет место свойство 2), $A_\alpha \in \mathfrak{P}$, $A = \sum^* A_\alpha$ и $0 \neq B \subseteq A$, то найдется такая проекция $\pi_\alpha \colon A \to A_\alpha$, что $B\pi_\alpha \neq 0$. Ввиду 1) $B\pi_\alpha \in \mathfrak{P}$. Применяя 2), убеждаемся, что $A \in \mathfrak{P}$. Пусть, далее, имеется точная последовательность $0 \to A \to B \xrightarrow{\pi} C \to 0$, где $A, C \in \mathfrak{P}$, и пусть $0 \neq D \subseteq B$. Если $D \subseteq A$, то $D \in \mathfrak{P}$, как сразу следует из условия 1). Если же $D \nsubseteq A$, то $0 \neq D\pi \in \mathfrak{P}$ ввиду 1). Применяя свойство 2), получаем, что модуль $B \in \mathfrak{P}$.

Допустим теперь, что выполнено свойство 2′) и модуль A удовлетворяет условиям свойства 2″). Тогда $A/A_1 = 0 \in \mathfrak{P}$. Допустим, что для всех $\beta < \alpha$ доказано, что $A/A_\beta \in \mathfrak{P}$. Если $\alpha - 1$ существует, то, применяя свойство 2′) к точной последовательности

$$0 \to A_{\alpha-1}/A_\alpha \to A/A_\alpha \to A/A_{\alpha-1} \to 0,$$

[1]) Свойство 1) в формулировке предложеиия (2.12) можио заменить свойством: всякий ненулевой подмодуль модуля A из $\mathfrak{P}$ имеет неиулевой эпиморфный образ, лежащий в $\mathfrak{P}$ ([17] стр. 919—920).

получим, что $A/A_\alpha \in \mathfrak{P}$. Если же α предельное, то A/A_α оказывается подмодулем полной прямой суммы $\sum\limits_{\beta<\alpha}^{*} A/A_\beta$, и соотношение $A/A_\alpha \in \mathfrak{P}$ вытекает из 2′) и 1). Так как $A = A/A_\Omega$, то справедливость свойства 2″) доказана.

Пусть теперь $\mathfrak{r}$ — радикал и $\mathfrak{P}$ — класс всех $\mathfrak{r}$-полупростых модулей. Справедливость свойства 1) вытекает из предложения (2.3). Если, далее, модуль A удовлетворяет условиям свойства 2), то A лежит в $\mathfrak{P}$, в силу предложения (2.1) и свойства К2, т. е. свойство 2) выполнено. В силу доказанного выше, класс $\mathfrak{P}$ обладает также свойствами 2′) и 2″).

Если, далее, класс $\mathfrak{P}$ обладает свойством 1) и одним из свойств 2), 2′), 2″), то, как показано выше, он обладает свойствами 1) и 2″). Пусть

$$\mathfrak{R} = \{R \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(R, X) = 0 \quad \text{для всех} \quad X \in \mathfrak{P}\}.$$

Пусть $A \notin \mathfrak{R}$. Положим $A_1 = A$ и допустим, что для всех $\beta < \alpha$ построены подмодули $A_\beta \subseteq A$, причем $A_\beta \supseteq A_\gamma$ при $\beta < \gamma < \alpha$ и $0 \neq A_\beta/A_{\beta+1} \in \mathfrak{P}$, если $\beta + 1 < \alpha$. Если $\alpha - 1$ существует и $A_{\alpha-1} \notin \mathfrak{R}$, то найдем такой подмодуль $A_\alpha \subseteq A_{\alpha-1}$, что $0 \neq A_{\alpha-1}/A_\alpha \in \mathfrak{P}$. Если α предельное, то положим $A_\alpha = \bigcap\limits_{\beta<\alpha} A_\beta$. Разумеется, найдется такой трансфинит Ω, что $A_\Omega \in \mathfrak{R}$. Поскольку $(A_\alpha/A_\Omega)/(A_{\alpha+1}/A_\Omega) \cong A_\alpha/A_{\alpha+1} \in \mathfrak{P}$, то ввиду свойства 2″) получаем $A/A_\Omega \in \mathfrak{P}$. Таким образом, пара $(\mathfrak{R}, \mathfrak{P})$ обладает свойством S3 предложения (2.11). Поскольку выполнение свойств S1, S2 и S2′ очевидно, класс $\mathfrak{P}$ оказывается полупростым.

Справедливость последнего утверждения вытекает из предложения (2.9).

С каждым радикалом можно связать два в некотором смысле близких к нему кручения.

(2.13) *Пусть* $\mathfrak{r}$ — *некоторый радикал*, $\mathfrak{R}$ — *класс* $\mathfrak{r}$-*радикальных модулей*,

$$\mathfrak{T}' = \{A \mid \text{все подмодули модуля } A \text{ принадлежат } \mathfrak{R}\}$$

и

$$\mathfrak{T}'' = \{B \mid \mathrm{Hom}(B, Y) = 0, \text{ для всякого инъективного } \mathfrak{r}\text{-полупростого модуля } Y\}.$$

Тогда классы $\mathfrak{T}'$ *и* $\mathfrak{T}''$ *являются классами* $\mathfrak{r}'$- *и* $\mathfrak{r}''$-*периодических модулей для некоторых кручений* $\mathfrak{r}'$ *и* $\mathfrak{r}''$. *При этом*

$$\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{T}''.$$

Если $\mathfrak{r}_0$ — *кручение и* $\mathfrak{T}_0$ — *класс* $\mathfrak{r}_0$-*периодических модулей, то* $\mathfrak{T}_0 \subseteq \mathfrak{R}$ *влечет* $\mathfrak{T}_0 \subseteq \mathfrak{T}'$, *а из* $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{T}_0$ *вытекает, что* $\mathfrak{T}'' \subseteq \mathfrak{T}_0$.

Действительно, учитывая предложения (2.1) и (2.3), нетрудно убедиться в справедливости соотношения $\mathfrak{T}' \subseteq \mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{T}''$. Легко проверяется и первая часть последнего утверждения. Для доказательства его второй части достаточно заметить, что при сделанных предположениях $\mathfrak{r}_0$-полупростые модули $\mathfrak{r}$-полупросты, и применить (2.1) и (2.9). Далее, заметим, что класс $\mathfrak{T}'$ замкнут относительно подмодулей и обладает свойством 1) предложения (2.10). Допустим теперь, что всякий ненулевой эпиморфный образ модуля A содержит ненулевой подмодуль из $\mathfrak{T}'$. Пусть $X \subseteq A$ и $\mathfrak{r}(X) \neq X$. Обозначим через B подмодуль модуля A, являющийся максимальным среди удовлетворяющих условию $B \cap X = \mathfrak{r}(X)$. По условию, найдется такой модуль C, что $B \subsetneqq C \subseteq A$ и $C/B \in \mathfrak{T}'$. Поскольку $(B+X)/B \cong X/\mathfrak{r}(X)$, модуль $(B+X)/B$ является $\mathfrak{r}$-полупростым. Ввиду предложений (2.3) и (2.4) из определения класса $\mathfrak{T}'$ вытекает

$$[(B+X) \cap C + B]/B \subseteq (C/B) \cap [(B+X)/B] = 0.$$

Следовательно, $C \cap X \subseteq C \cap (B+X) \subseteq B$, откуда

$$\mathfrak{r}(X) = B \cap X \subseteq C \cap X \subseteq B \cap X = \mathfrak{r}(X),$$

что противоречит выбору B. Наконец, очевидно, что класс $\mathfrak{T}''$ удовлетворяет условию 1) предложения (2.10). Справедливость свойства 2) сразу следует из равенства $\mathrm{Hom}_\Lambda\left(\dot{\sum} A_\alpha, Y\right) = \sum^{*} \mathrm{Hom}_\Lambda(A_\alpha, Y)$ ([6], стр. 128, предложение 9.1) и полуточности функтора Hom ([6], стр. 45, предложение 4.4). Если $A \subseteq B \in \mathfrak{T}''$ и φ: $A \to Y$, где Y инъективен, то гомоморфизм φ может быть продолжен до гомоморфизма B в X. Следовательно, $A \in \mathfrak{T}''$. Таким образом, класс $\mathfrak{T}''$ действительно является классом $\mathfrak{r}''$-периодических модулей для некоторого кручения $\mathfrak{r}''$.

(2.14) *Пусть $\mathfrak{r}$ — кручение, а $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{P}$ — классы $\mathfrak{r}$-периодических и $\mathfrak{r}$-полупростых модулей соответственно. Тогда найдутся такие модули $X_0 \in \mathfrak{T}$ и $Y_0 \in \mathfrak{P}$, что*

$$\mathfrak{P} = \{A \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(X_0, A) = 0\} \quad \text{и} \quad \mathfrak{T} = \{B \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(B, Y_0) = 0\}.$$

При этом модуль Y_0 может быть выбран инъективным.

Действительно, пусть $\mathfrak{T}_0$ и $\mathfrak{P}_0$ — множества всех ненулевых циклических модулей, принадлежащих классам $\mathfrak{T}$ и $\mathfrak{P}$ соответственно. Пусть, далее, $X_0 = \dot{\sum\limits_{X \in \mathfrak{T}_0}} X$. Согласно предложению (2.7) модуль X_0 принадлежит $\mathfrak{T}$. Положим $\mathfrak{P}' = \{A \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(X_0, A) = 0\}$. Из предложений (2.1) и (2.3) вытекает, что $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{P}'$. Допустим, что $M \in \mathfrak{P}' \setminus \mathfrak{P}$. Тогда найдется $0 \neq x \in \mathfrak{r}(M)$. Ввиду свойства K2' $\Lambda x \in \mathfrak{T}_0$. Но тогда $\mathrm{Hom}_\Lambda(X_0, M) \neq 0$. Противоречие. Теперь обозначим через Y_0 инъективную оболочку модуля $\sum\limits_{Y \in \mathfrak{P}_0}^{*} Y$ и положим $\mathfrak{T}' = \{B \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(B, Y_0) = 0\}$. Из предложений (2.6), (2.9), (2.3), (2.4) и (2.5) вытекает, что $\mathfrak{T} \subseteq \mathfrak{T}'$. Если $M \in \mathfrak{T}' \setminus \mathfrak{T}$, то $\mathfrak{r}(M) \neq M$. Пусть π: $M \to M/\mathfrak{r}(M)$ — естественный эпиморфизм. Выбрав $x \in M \setminus \mathfrak{r}(M)$ и применив (2.3), получаем, что $(\Lambda x)\pi \in \mathfrak{P}_0$. Отсюда и из инъективности Y_0 вытекает, что $\mathrm{Hom}_\Lambda(M, Y_0) \neq 0$. Противоречие.

Модули X_0 и Y_0, указанные в предложении (2.14), весьма велики. В некоторых случаях их можно заменить меньшими.

(2.15) *Для всякого кручения $\mathfrak{r}$ совокупность $\mathscr{E}$ всех левых идеалов, фактор-модули по которым $\mathfrak{r}$-периодичны, является радикальным фильтром. При этом*

$$\mathfrak{r}(A) = \{a \mid (0 : a) \in \mathscr{E}\}.$$

Если $\mathfrak{r}(\Lambda) = 0$, то $\mathfrak{r}(C) = 0$ в том и только в том случае, когда C является $\mathscr{E}$-плоским модулем.

В самом деле, если $I \in \mathscr{E}$ и $I \subseteq J$, то включение $J \in \mathscr{E}$ вытекает из изоморфизма $(\Lambda/I)/(J/I) \cong \Lambda/J$ и предложения (2.5). Таким образом, $\mathscr{E}$ обладает

свойством G1. Если $I \in \mathscr{E}$ и $\lambda \in \Lambda$, то рассмотрим последовательность

$$0 \to (I : \lambda) \to \Lambda \xrightarrow{\pi} (\Lambda\lambda + I)/I \to 0,$$

где $\xi\pi = \xi\lambda + I$. Легко убедиться, что она точна. Следовательно, $\Lambda/(I : \lambda) \cong (\Lambda\lambda + I)/I \subseteq \Lambda/I$. Применяя K2', убедимся, что $(I : \lambda) \in \mathscr{E}$. Таким образом, свойство G2 также справедливо. Пусть теперь $I \subseteq J \in \mathscr{E}$ и $(I : \xi) \in \mathscr{E}$ для всех $\xi \in J$. Допустим, что $\lambda \in J$ и $\lambda + I \notin \mathfrak{r}(J/I)$. Определим гомоморфизм σ: $\Lambda \to J/I$, положив $\xi\sigma = \xi\lambda + I$. Ясно, что $\lambda + I \in \mathrm{Im}\,\sigma \cong \Lambda/(I : \lambda)$. Учитывая предложение (2.8), получим $\lambda + I \in \mathrm{Im}\,\sigma \subseteq \mathfrak{r}(J/I)$. Противоречие. Следовательно, $\mathfrak{r}(J/I) = J/I$. Но тогда, рассматривая точную последовательность

$$0 \to J/I \to \Lambda/I \to \Lambda/J \to 0$$

и применяя предложения (2.10), убеждаемся, что $\mathfrak{r}(\Lambda/I) = \Lambda/I$. Таким образом, выполнено условие G3.

Пусть теперь $A' = \{a \mid a \in A,\ (0 : a) \in \mathscr{E}\}$. Если $a \in \mathfrak{r}(A)$, то ввиду K2' $\mathfrak{r}(\Lambda a) = \Lambda a$. Но $\Lambda a \cong \Lambda/(0 : a)$, и, следовательно, $(0 : a) \in \mathscr{E}$. Таким образом, $\mathfrak{r}(A) \subseteq A'$. Если же $a \in A'$, то из изоморфизма $\Lambda a \cong \Lambda/(0 : a)$ следует равенство $\mathfrak{r}(\Lambda a) = \Lambda a$. Применяя предложение (2.8), получаем включение $\Lambda a \subseteq \mathfrak{r}(A)$.

Пусть, наконец, $\mathfrak{r}(\Lambda) = 0$. Согласно предложению (2.6) $\mathfrak{r}(F) = 0$ для всякого свободного Λ-модуля F. Предположим, что C является $\mathscr{E}$-плоским модулем. Рассмотрим точную последовательность $0 \to K \to F \xrightarrow{\tau} C \to 0$, где F — свободный модуль. Если $c \in \mathfrak{r}(C)$, то, как только что показано, $(0 : c) \in \mathscr{E}$. Если $c = x\tau$, то, поскольку модуль K $\mathscr{E}$-чист в F, из предложения (1.48) вытекает, что $(0 : x - y) \in \mathscr{E}$ для некоторого $y \in K$, т. е., в силу доказанного выше, $x - y \in \mathfrak{r}(F) = 0$. Следовательно, $c = 0$, т. е. C является $\mathfrak{r}$-полупростым. Наоборот, если модуль C $\mathfrak{r}$-полупрост, $0 \to A \to B \xrightarrow{\tau} C \to 0$ — точная последовательность и $(A : b) \in \mathscr{E}$, то $b \in A$. Таким образом, $(A : b) = \Lambda = (0 : (-b) + b)$. Применяя (1.48), убеждаемся, что модуль A $\mathscr{E}$-чист в B.

(2.16) *Если $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр, то функция*

$$\mathfrak{r}(A) = \{a \mid a \in A,\ (0 : a) \in \mathscr{E}\}$$

определяет кручение. При этом $I \in \mathscr{E}$ тогда и только тогда, когда $\mathfrak{r}(\Lambda/I) = \Lambda/I$.

Для доказательства установим справедливость свойств K1, K2′, K3 и K4. Если $x, y \in \mathfrak{r}(A)$, то $(0 : \lambda x) = ((0 : x) : \lambda) \in \mathscr{E}$ ввиду G2, а $(0 : x+y) \in \mathscr{E}$ ввиду G1 и предложения (0.3), поскольку $(0 : x+y) \supseteq \supseteq (0 : x) \cap (0 : y)$. Таким образом, $\mathfrak{r}(A)$ — подмодуль. Справедливость свойства K2′ очевидна, а свойство K3 сразу следует из G1. Если

$$a + \mathfrak{r}(A) \in \mathfrak{r}(A/\mathfrak{r}(A)), \quad \text{то} \quad (\mathfrak{r}(A) : a) \in \mathscr{E}.$$

Далее, для всякого $\xi \in (\mathfrak{r}(A) : a)$ имеем $((0 : a) : \xi) = (0 : \xi a) \in \in \mathscr{E}$, так как $\xi a \in \mathfrak{r}(A)$. Поскольку $(0 : a) \subseteq \subseteq (\mathfrak{r}(A) : a)$ и ξ — любой элемент из $(\mathfrak{r}(A) : a)$, то применение свойства G3 дает $(0 : a) \in \mathscr{E}$, т. е. $a \in \mathfrak{r}(A)$. Этим доказана справедливость свойства K4. Из свойства G1 вытекает, что $I \in \mathscr{E}$ влечет $\mathfrak{r}(\Lambda/I) = \Lambda/I$. Если $\mathfrak{r}(\Lambda/I) = \Lambda/I$, то $(I : \xi) \in \mathscr{E}$ для всех $\xi \in \Lambda$. Применяя свойства G1 и G3, убеждаемся, что $I \in \mathscr{E}$.

Теперь представляется возможным дать описание всех кручений в категории абелевых групп. Пусть $\boldsymbol{P}$ — некоторое множество простых чисел, а $\mathfrak{D}$ — система идеалов кольца $\boldsymbol{Z}$, порожденных всевозможными произведениями степеней чисел из $\boldsymbol{P}$. Ввиду предложения (0.6) множество $\mathfrak{D}$ является радикальным фильтром, который, согласно предложению (2.16), определяет кручение. Обозначим это кручение через $\mathfrak{r}_{\boldsymbol{P}}$.

(2.17) *Всякое нетривиальное кручение в категории абелевых групп имеет вид $\mathfrak{r}_{\boldsymbol{P}}$, где $\boldsymbol{P}$ — некоторое множество простых чисел.*

В самом деле, пусть $\mathfrak{r}$ — нетривиальное кручение в категории абелевых групп. Обозначим через $\mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$ совокупность всех идеалов кольца $\boldsymbol{Z}$, фактор-модули по которым $\mathfrak{r}$-периодичны. Пусть $\boldsymbol{P}$ — совокупность всех простых чисел, входящих в разложения образующих идеалов системы $\mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$. В силу предложений (2.15) и (0.3), $\mathscr{E}_{\mathfrak{r}}$ — совокупность всех идеалов, порожденных произведениями степеней простых чисел из $\boldsymbol{P}$. Но тогда из предложений (2.15) и (2.16) вытекает, что $\mathfrak{r}(A) = \mathfrak{r}_{\boldsymbol{P}}(A)$ для всякой группы A, т. е. $\mathfrak{r} = \mathfrak{r}_{\boldsymbol{P}}$.

(2.18) *Пусть $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр, содержащий наименьший левый идеал I, и $\mathfrak{r}$ — соответствующее*

кручение. Тогда $I^2 = I$, а $\mathfrak{r}(A) = A$ в том и только в том случае, когда $IA = 0$.

В самом деле, если $\mathfrak{r}(A) = A$ и $IA \neq 0$, то $Ia \neq 0$ для некоторого $a \in A$. Но $Ia \cong I/J$. Учитывая свойство K2′ и предложения (2.10) и (2.16), из рассмотрения точной последовательности

$$0 \to I/J \to \Lambda/J \to \Lambda/I \to 0$$

получаем, что $J \in \mathscr{E}$. Это, однако, противоречит минимальности левого идеала I. Наоборот, если $IA = 0$, то рассмотрим эпиморфизм π: $F \to A$, где $F = \dot{\sum} \Lambda$. Ясно, что $\dot{\sum} I \subseteq \operatorname{Ker} \pi$. Поэтому A является эпиморфным образом модуля $\dot{\sum} (\Lambda/I)$. Но $\mathfrak{r}(\Lambda/I) = \Lambda/I$, и из предложений (2.7) и (2.5) вытекает, что $\mathfrak{r}(A) = A$. Наконец, рассмотрим точную последовательность

$$0 \to I/I^2 \to \Lambda/I^2 \to \Lambda/I \to 0.$$

Поскольку $I(I/I^2) = 0$, то, в силу показанного выше, $\mathfrak{r}(I/I^2) = I/I^2$. Применяя предложения (2.10) и (2.16) убеждаемся, что $I^2 \in \mathscr{E}$, откуда ввиду минимальности I получаем, что $I = I^2$.

Класс модулей назовем *радикально-полупростым*, если он является радикальным и полупростым одновре́менно (для некоторых радикалов $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$). Легко видеть, что в этом случае $\mathfrak{r}$ обязательно оказывается кручением.

(2.19). *Пусть $\mathfrak{r}$ — кручение, $\mathscr{E}$ — соответствующий радикальный фильтр* (см. предложение (2.15)) *и $\mathfrak{T}$ — класс $\mathfrak{r}$-периодических модулей. Для того чтобы класс $\mathfrak{T}$ был радикально-полупростым, необходимо и достаточно, чтобы система $\mathscr{E}$ содержала наименьший левый идеал I_0. При этом $\mathfrak{r}'(\Lambda) = I_0$, где $\mathfrak{r}'$ — радикал, определяемый полупростым классом $\mathfrak{T}$.*

В самом деле, если класс $\mathfrak{T}$ радикально-полупрост, то, согласно предложению (2.6), он замкнут относительно полных прямых сумм. Положив $I_0 = \bigcap_{I \in \mathscr{E}} I$, получим точную последовательность

$$0 \to I_0 \to \Lambda \to \sum_{I \in \mathscr{E}}^{*} \Lambda/I.$$

Из К2′ вытекает, что $\Lambda/I_0 \in \mathfrak{T}$, после чего (2.16) дает, что $I_0 \in \mathscr{E}$. Обратное утверждение без труда выводится из (2.12) и (2.18). Наконец, если $J \subseteq I_0$ и $\mathfrak{r}'(I_0/J) = 0$, то $I_0/J \in \mathfrak{T}$. Но тогда, применяя (2.10) к точной последовательности

$$0 \to I_0/J \to \Lambda/J \to \Lambda/I_0 \to 0,$$

убеждаемся, что $\Lambda/J \in \mathfrak{T}$. Ввиду предложения (2.16) $J \in \mathscr{E}$ и, следовательно, $I_0 = J$. Из предложения (2.1) вытекает, что I_0 — $\mathfrak{r}'$-радикальный модуль. Согласно (2.8) $I_0 \subseteq \mathfrak{r}'(\Lambda)$. Но $\Lambda/I_0 \in \mathfrak{T}$. Поэтому $\mathfrak{r}'(\Lambda/I_0) = 0$ и из предложения (2.8) вытекает, что $\mathfrak{r}'(\Lambda) = I_0$.

Если $\mathfrak{T}$ — радикально-полупростой класс, то он определяет два радикала $\mathfrak{r}$ и $\mathfrak{r}'$ так, что $\mathfrak{T}$ совпадает с классом $\mathfrak{r}$-радикальных и с классом $\mathfrak{r}'$-полупростых модулей. Пусть $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{R}$ — классы $\mathfrak{r}$-полупростых и $\mathfrak{r}'$-радикальных модулей соответственно. Выясним, когда классы $\mathfrak{P}$ и $\mathfrak{R}$ совпадают:

(2.20) *Пусть $\mathfrak{T}$ — радикально-полупростой класс Λ-модулей. Тогда эквивалентны следующие свойства:*

1) $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$;

2) $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}'(A)) = 0$ и $\mathfrak{r}'(A/\mathfrak{r}(A)) = A/\mathfrak{r}(A)$ *для всякого Λ-модуля A*;

3) $A = \mathfrak{r}(A) \dotplus \mathfrak{r}'(A)$ *для всякого Λ-модуля A*;

4) $\Lambda = \mathfrak{r}(\Lambda) \dotplus \mathfrak{r}'(\Lambda)$.

Действительно, пусть $\mathfrak{P} = \mathfrak{R}$. Из $\mathfrak{r}'(A) \in \mathfrak{R} = \mathfrak{P}$ вытекает, что $\mathfrak{r}(\mathfrak{r}'(A)) = 0$, а из $A/\mathfrak{r}(A) \in \mathfrak{P} = \mathfrak{R}$ — что $\mathfrak{r}'(A/\mathfrak{r}(A)) = A/\mathfrak{r}(A)$. Пусть теперь выполнено свойство 2). Согласно К2′ и предложению (2.3), $\mathfrak{r}(A) \cap \mathfrak{r}'(A) \in \mathfrak{T} \cap \mathfrak{P}$, т. е. по (2.4), $\mathfrak{r}(A) \cap \mathfrak{r}'(A) = 0$. Далее, ввиду свойства К4 модуль $A/\mathfrak{r}'(A)$ $\mathfrak{r}'$-полупрост и, следовательно, $\mathfrak{r}$-радикален. Из предложения (2.5) и из точности последовательности

$$A/\mathfrak{r}'(A) \to A/(\mathfrak{r}(A) \dotplus \mathfrak{r}'(A)) \to 0$$

вытекает, что $A/(\mathfrak{r}(A) \dotplus \mathfrak{r}'(A)) \in \mathfrak{T}$. Так как, по условию, модуль $A/\mathfrak{r}(A)$ $\mathfrak{r}'$-радикален, то из точности последовательности

$$A/\mathfrak{r}(A) \to A/(\mathfrak{r}(A) \dotplus \mathfrak{r}'(A)) \to 0$$

и из предложения (2.5) получаем, что $A/(\mathfrak{r}(A) \dotplus \mathfrak{r}'(A)) \in \mathfrak{R}$. Следовательно, $A/(\mathfrak{r}(A) \dotplus \mathfrak{r}'(A)) \in \mathfrak{T} \cap \mathfrak{R} = 0$, т. е. $A = \mathfrak{r}(A) \dotplus \mathfrak{r}'(A)$. Импликация 3) $\Rightarrow$ 4) очевидна.

Докажем импликацию 4) $\Rightarrow$ 1). Из предложений (2.18) и (2.19) вытекает, что $\mathfrak{T} = \{A \mid \mathfrak{r}'(\Lambda) A = 0\}$. Но из 4) нетрудно вывести, что $\mathfrak{r}'(\Lambda) = \Lambda\varepsilon$ и $\mathfrak{r}(\Lambda) = \Lambda\delta$, где $\varepsilon^2 = \varepsilon$, $\delta^2 = \delta$, $\varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$, $\varepsilon + \delta = 1$ (см., например, [a], стр. 79, предложение 2). Поэтому $\mathfrak{T} = \{A \mid \varepsilon A = 0\}$. Ввиду (2.1)

$$\mathfrak{R} = \{A \mid \mathrm{Hom}_\Lambda(A, B) = 0 \quad \text{для всех} \quad B \in \mathfrak{T}\}.$$

Следовательно,

$$\mathfrak{R} = \{A \mid A = \varepsilon A\}.$$

Если $A \in \mathfrak{R}$ и $a \in \mathfrak{r}(A)$, то, как только что показано, $\varepsilon a = 0$. Но $a = \varepsilon a'$, где $a' \in A$. Отсюда $a = \varepsilon a' = \varepsilon\varepsilon a' = \varepsilon a = 0$. Таким образом, $\mathfrak{R} \subseteq \mathfrak{P}$. Если $A \in \mathfrak{P}$ и $a \in A$, то $\Lambda\varepsilon \subseteq (0 : \delta a)$. Согласно предложению (2.15) $\delta a \in \mathfrak{r}(A) = 0$. Поэтому $a = \varepsilon a + \delta a = \varepsilon a$. Таким образом, $A = \varepsilon A$ и, следовательно, $\mathfrak{P} \subseteq \mathfrak{R}$.

Аксиоматическое исследование радикалов в алгебраических системах началось с известных работ Куроша и Амицура. В этих работах исследовались радикалы в кольцах. Но уже тогда было ясно, что основные понятия сохраняют свою силу и для других алгебраических объектов. Позже Курош ([16], [17]) исследовал радикалы в группах. Им были доказаны предложения (2.10) и частично (2.12). Для получения окончательной формулировки последнего привлекаются результаты Чан Ван Хао [25]. Некоторые результаты о полупростых классах групп получил Шмелькин [27].

Диксон [66] изучал наименьший периодический класс, содержащий данный простой левый модуль.

Радикал, радикальный класс которого состоит из всех модулей, все ненулевые эпиморфные образы которых содержат простые подмодули, рассматривал Алин [30]. Классы абелевых групп, замкнутые относительно подгрупп, фактор-групп и расширений (как показывает предложение (2.10), такими будут классы периодических модулей), рассматривал Бальцежик ([38], [40]). Батлер ([51], [248]) исследовал классы групп без кручения, замкнутые относительно конечных прямых сумм, сервантных подгрупп и фактор-групп по сервантным подгруппам. Позже [52] он обобщил полученные результаты на случай модулей над коммутативными областями целостности.

Специальное исследование кручения для случая модулей осуществили Габриэль [92] и Маранда [154], а несколько позже — Рябухин [22]. Ими были установлены связи кручения с радикальным фильтром (см. предложения (2.15) и (2.16)). Далеко идущее обобщение этих связей на теоретико-категорном языке предложено супругами Уокер [206], а также Габриэлем и Попеску [93]. Диксон [68] и Шульгейфер [28] описали радикал как подфунктор тождественного функтора. Парежис [172] обобщил на категории радикал, определенный как пересечение максимальных подмодулей. Построение теории радикалов, основанное на выделении пары классов (см. предложение 2.11), предложил Диксон ([66], [67]). Этот подход использовали Джанс [128] и Уокер [205]. В частности, Джансу принадлежат предложения (2.14), (2.18), (2.19) и (2.20). Он же ([128], стр. 1252, теорема 2.1) показал, что наименьший левый идеал радикального фильтра является двусторонним идеалом кольца Λ. Описание всех кручений в абелевых группах (см. предложение (2.17)) имеется в работах Куроша ([16], [17]), Диксона [64] и Рябухина [23]. Радикал, построенный с помощью радикального фильтра, указанного в предложении (0.5), исследовали Длаб ([70]—[73], [251]) и Стефенсон.

Если $\mathfrak{r}$ — радикал в категории Λ-модулей, то назовем Λ-модуль B *$\mathfrak{r}$-копериодическим*, если $\mathfrak{r}(A)=0$ влечет за собой $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)=0$. Из известных свойств функтора Ext ([г], стр. 103, теорема 3.4; стр. 101, теорема 3.2; [б], стр. 140, предложение 1.2) сразу следует, что класс $\mathfrak{r}$-копериодических модулей замкнут относительно расширений и полных прямых сумм.

(2.21) *Если B — $\mathfrak{r}$-копериодический Λ-модуль и $\mathfrak{r}(\Lambda)=0$, то $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(A, B)=0$ для всех Λ-модулей A.*

Действительно, рассмотрим точную последовательность

$$0\to K\to F\to A\to 0,$$

где F — свободный Λ-модуль. Ввиду [г], стр. 131, теорема 9.1, точна последовательность

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(K, B)\to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(A, B)\to \mathrm{Ext}^2_\Lambda(F, B).$$

Но из предложений (2.3) и (2.6) вытекает, что $\mathfrak{r}(K)=0$, а в силу [б], стр. 144, следствие 2.2, и стр. 143, предложение 2.1, имеем $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(F, B)=0$. Следовательно, $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(A, B)=0$.

Пусть $\mathfrak{r}$ — кручение в категории Λ-модулей, $\mathfrak{r}(\Lambda)=0$ и $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр, соответствующий, согласно предложению (2.15), кручению $\mathfrak{r}$. Эти обозначения используем в рассматриваемых ниже предложениях (2.22)—(2.24). Напомним, что, в силу (2.15), классы $\mathfrak{r}$-полупростых и $\mathscr{E}$-плоских модулей совпадают.

(2.22) *Для $\mathfrak{r}$-копериодичности Λ-модуля B необходима и достаточна инъективность его относительно всякого мономорфизма $i: K\to C$, где $\mathfrak{r}(C/\mathrm{Im}\, i)=0$.*

Для доказательства рассмотрим точную последовательность

$$0\to K\xrightarrow{i} C\xrightarrow{\pi} C/\mathrm{Im}\, i\to 0,$$

где $\mathfrak{r}(C/\mathrm{Im}\, i)=0$.

Тогда получим точную последовательность

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(C, B)\xrightarrow{\mathrm{Hom}(i, e_B)}\mathrm{Hom}_\Lambda(K, B)\to$$
$$\to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(C/\mathrm{Im}\, i, B)\xrightarrow{\mathrm{Ext}(\pi, e_B)}\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, B)$$

([г], стр. 101, теорема 3.2). Если B — $\mathfrak{r}$-копериодический Λ-модуль, то $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C/\mathrm{Im}\, i, B)=0$ и сразу получается, что $\mathrm{Hom}(i, e_B)$ — эпиморфизм. А это и доказывает искомую инъективность. Чтобы доказать обратное, возьмем произвольный $\mathfrak{r}$-полупростой модуль A и представим его как $A=C/\mathrm{Im}\, i$, где C — свободный Λ-модуль. Тогда $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(C, B)=0$ ([б], стр. 144, следствие 2.2), а из инъективности относительно i вытекает, что $\mathrm{Hom}(i, e_B)$ — эпиморфизм. Поэтому

$$\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)=0,$$

что и требовалось.

(2.23) *Всякий $\mathscr{E}$-инъективный Λ-модуль $\mathfrak{r}$-копериодичен.*

В самом деле, пусть B — $\mathscr{E}$-инъективный Λ-модуль. Если $\mathfrak{r}(A)=0$, то модуль A является $\mathscr{E}$-плоским. Отсюда $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)=\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)$. Но равенство последней группы нулю сразу следует из (1.6) и (1.23).

В некоторых случаях справедливо обратное.

(2.24) *Всякий $\mathfrak{r}$-полупростой $\mathfrak{r}$-копериодический модуль $\mathscr{E}$-инъективен.*

Действительно, пусть B — $\mathfrak{r}$-полупростой $\mathfrak{r}$-копериодический, а A — $\mathfrak{r}$-периодический Λ-модули. Пусть $P=\dot{\sum\limits_{0\neq a\in A}}\Lambda a$, $\pi: P\to A$ — естественный эпиморфизм и $K=\mathrm{Ker}\,\pi$. Из свойства K2′ и предложения (2.7) вытекает, что $\mathfrak{r}(P)=P$. Применяя свойство 5) предложения (1.48), нетрудно убедиться, что $K\subseteq_{\mathscr{E}} P$ и что Λa — $\mathscr{E}$-проективные модули. Из предложения (1.5) вытекает, что модуль P $\mathscr{E}$-проективен. Ввиду предложения (1.23) $\mathscr{E}$-чистота битреугольна. Поэтому, применяя (1.3) к точной последовательности

$$0\to K\xrightarrow{i} P\to A\to 0,$$

получим точную последовательность

$$\mathrm{Hom}_\Lambda(K, B)\to\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)\to\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P, B).$$

Но из предложений (1.6) и (1.23) вытекает, что $\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(P, B)=0$, а $\mathrm{Hom}_\Lambda(K, B)=0$ ввиду свойства К2′ и предложений (2.1) и (2.3). Следовательно, $\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)=0$. Пусть теперь A — произвольный Λ-модуль. Из К4 и (2.15) вытекает, что $A/\mathfrak{r}(A)$ — $\mathscr{E}$-плоский модуль. Поэтому $\mathfrak{r}(A)\subseteq_{\mathscr{E}} A$. Из предложения (1.3) вытекает точность последовательности

$$\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/\mathfrak{r}(A), B)\to\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)\to\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathfrak{r}(A), B).$$

В силу доказанного выше, $\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathfrak{r}(A), B)=0$, а из К4 и $\mathfrak{r}$-копериодичности B следует, что $\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/\mathfrak{r}(A), B)=$ $=0$. Таким образом, $\mathscr{E}\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)=0$ для всех A, откуда ввиду предложений (1.6) и (1.23) вытекает $\mathscr{E}$-инъективность модуля B.

Из (2.24) следует, что всякая $\mathfrak{r}_Д$-копериодическая группа без кручения (определение радикала $\mathfrak{r}_Д$ см. стр. 105) алгебраически компактна ([85], ч. II, стр. 123 предложение j). Заметим, что тот же результат справедлив и для периодических $\mathfrak{r}_Д$-копериодических групп ([85], ч. II, стр. 123, предложение i). Последнее легко вывести также из [в], стр. 171, 151.

Так как существуют $\mathfrak{r}_Д$-копериодические (см. стр. 105), но не алгебраически компактные (т. е. не сервантно-инъективные) группы ([85], стр. 24), то предложение (2.23) не допускает обращения. Однако это можно исправить за счет другого выбора чистоты. А именно, если $\mathfrak{R}$ и $\mathfrak{P}$ — классы всех $\mathfrak{r}$-радикальных и $\mathfrak{r}$-полупростых модулей соответственно, то предложения (2.3), (2.5), (1.62) и (1.65) позволяют определить $\mathfrak{R}$-факторную и $\mathfrak{P}$-кофакторную чистоты, которые будем называть *$\mathfrak{r}$-факторной* и *$\mathfrak{r}$-кофакторной* соответственно. Если $\mathfrak{r}$ — кручение, то можно определить и $\mathfrak{R}$-кофакторную чистоту. При этих определениях имеет место

(2.25) *Если $\mathfrak{r}$ — радикал и ω — $\mathfrak{r}$-факторная чистота, то классы ω-инъективных и $\mathfrak{r}$-копериодических модулей совпадают.*

Действительно, если Q — ω-инъективный модуль, то ввиду (1.6) и (1.62) $\omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, Q)=0$ для всякого Λ-модуля A. Пусть $\mathfrak{r}(A)=0$ и $B/Q\cong A$. Согласно предложению (2.8) нулевой подмодуль является единственным $\mathfrak{r}$-радикальным подмодулем модуля A.

Следовательно, соотношение $Q\subseteq S\subseteq B$, где S/Q $\mathfrak{r}$-радикален, возможно лишь при $S=Q$. Отсюда $Q\subseteq_\omega B$, т. е. $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, Q)=\omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, Q)=0$. Таким образом, Q оказывается $\mathfrak{r}$-копериодическим модулем. Если, далее, A — произвольный Λ-модуль, то из определения чистоты ω сразу следует, что $\omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathfrak{r}(A), Q)=0$ для любого модуля Q. Если модуль Q $\mathfrak{r}$-копериодический, то $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/\mathfrak{r}(A), Q)=0$. Но из предложений (1.3) и (1.62) вытекает точность последовательности

$$\omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A/\mathfrak{r}(A), Q)\to\omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, Q)\to\omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(\mathfrak{r}(A), Q).$$

Отсюда $\omega\,\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, Q)=0$ и, согласно предложению (1.6), модуль Q является ω-инъективным.

Введем теперь понятие, двойственное $\mathfrak{r}$-копериодичности. Именно, если $\mathfrak{r}$ — некоторый радикал, то назовем Λ-модуль A *$\mathfrak{r}$-бэровским*, если $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, B)=0$ для всех $\mathfrak{r}$-радикальных модулей B. Ясно, что из-за предположения $\mathfrak{r}(\Lambda)=0$ предложения (2.21) — (2.24) не могут быть дуализированы. Но этим недостатком не страдает предложение (2.25). Двойственные рассуждения позволяют получить следующий результат:

(2.26) *Если $\mathfrak{r}$ — радикал и ω — $\mathfrak{r}$-кофакторная чистота, то классы ω-проективных и $\mathfrak{r}$-бэровских модулей совпадают.*

Связь $\mathfrak{r}$-факторной чистоты с кручением $\mathfrak{r}$ освещает следующее предложение:

(2.27) *Если $\mathfrak{r}$ — кручение, то точная последовательность*

$$0\to A\xrightarrow{i} B\xrightarrow{\pi} C\to 0 \qquad (*)$$

индуцирует точную последовательность

$$0\to\mathfrak{r}(A)\to\mathfrak{r}(B)\to\mathfrak{r}(C). \qquad (**)$$

Последовательность

$$0\to\mathfrak{r}(A)\to\mathfrak{r}(B)\to\mathfrak{r}(C)\to 0 \qquad (***)$$

точна и расщепляема тогда и только тогда, когда i является $\mathfrak{r}$-факторно-чистым мономорфизмом.

Действительно, ввиду свойства К2 и предложений (2.5), (2.8) и (2.9) для всякого кручения точная последовательность (*) индуцирует точную последовательность (**). Допустим, что последовательность (***) точна и расщепляема. После необходимых отождествлений будем иметь $\mathfrak{r}(B)=\mathfrak{r}(A)\dotplus H$. Если $A\subseteq S\subseteq B$ и $\mathfrak{r}(S/A)=S/A$, то $S\subseteq\mathfrak{r}(B)+A\subseteq\subseteq A+H$. Отсюда $S=S\cap(A+H)=A+S\cap H$. При этом, учитывая (2.9), получаем, что $A\cap S\cap H=A\cap H==A\cap\mathfrak{r}(B)\cap H=\mathfrak{r}(A)\cap H=0$. Следовательно, A $\mathfrak{r}$-факторно-чист в B. Наоборот, если модуль A $\mathfrak{r}$-факторно-чист в B, то из включений $A\subseteq[\mathfrak{r}(C)]\pi^{-1}\subseteq B$ вытекает, что $[\mathfrak{r}(C)]\pi^{-1}=A\dotplus H$. Отсюда $H\cong[\mathfrak{r}(C)]\pi^{-1}/A==\mathfrak{r}(C)$. Ввиду свойства К2 и предложения (2.8) $H\subseteq\mathfrak{r}(B)$. Поэтому, учитывая К3 и (2.9), получаем

$$\mathfrak{r}(B)=\mathfrak{r}(B)\cap(A+H)=\mathfrak{r}(B)\cap A+H=\mathfrak{r}(A)\dotplus H,$$

что и требовалось.

Справедливо и двойственное утверждение

(2.28) *Если $\mathfrak{r}$ — кручение, то точная последовательность*

$$0\to A\xrightarrow{i}B\xrightarrow{\pi}C\to 0$$

индуцирует точные последовательности

$$0\to A/\mathfrak{r}(A)\xrightarrow{i'}B/\mathfrak{r}(B)$$

и

$$B/\mathfrak{r}(B)\xrightarrow{\pi'}C/\mathfrak{r}(C)\to 0.$$

Последовательность

$$0\to A/\mathfrak{r}(A)\xrightarrow{i'}B/\mathfrak{r}(B)\xrightarrow{\pi'}C/\mathfrak{r}(C)\to 0 \qquad (*)$$

точна и расщепляема тогда и только тогда, когда i — $\mathfrak{r}$-кофакторно-чистый мономорфизм.

В самом деле, из свойства К3 следует, что π индуцирует эпиморфизм π', а из (2.9) легко вывести, что i' — мономорфизм. Допустим теперь, что последовательность (*) точна и расщепляема. Если $S\subseteq A$ и $\mathfrak{r}(A/S)=0$, то $\mathfrak{r}(A)\subseteq S$ согласно (2.8). Ясно, что $[A/\mathfrak{r}(A)]\,i'=[A+\mathfrak{r}(B)]/\mathfrak{r}(B)$. Поэтому

$$[A+\mathfrak{r}(B)]/\mathfrak{r}(B)\dotplus H/\mathfrak{r}(B)=B/\mathfrak{r}(B).$$

Отсюда $A+H=B$ и $A\cap H\subseteq A\cap\mathfrak{r}(B)\subseteq\mathfrak{r}(A)\subseteq S$. Следовательно, $A\cap(H+S)=A\cap H+S\subseteq S$, откуда

$$A/S\dotplus(H+S)/S=B/S.$$

Этим доказано, что A $\mathfrak{r}$-кофакторно-чист в B. Наоборот, если модуль A $\mathfrak{r}$-кофакторно-чист в B, то

$$A/\mathfrak{r}(A)\dotplus H/\mathfrak{r}(A)=B/\mathfrak{r}(A).$$

Отсюда $A+H=B$ и $A\cap H\subseteq\mathfrak{r}(A)$. Допустим, что $b\pi\in\mathfrak{r}(C)$. Записав $b=a+h$, где $a\in A$, $h\in H$, получим точную последовательность

$$0\to A\cap\Lambda h\to\Lambda h\to(\Lambda h)\pi\to 0.$$

Из свойства К2′ и предложения (2.10) вытекает, что $\mathfrak{r}(\Lambda h)=\Lambda h$. Применив (2.8), приходим к тому, что $h\in\mathfrak{r}(B)$. Этим доказано, что $[\mathfrak{r}(C)]\pi^{-1}\subseteq A+\mathfrak{r}(B)$, откуда следует точность последовательности (*). Заметим, наконец, что из предложений (2.1) и (2.3) нетрудно вывести соотношение $\mathfrak{r}(B)/\mathfrak{r}(A)\subseteq H/\mathfrak{r}(A)$. Но тогда

$$[A/\mathfrak{r}(A)]\,i'\dotplus H/\mathfrak{r}(B)=B/\mathfrak{r}(B),$$

что и требовалось.

Понятие копериодической группы было введено в работе Гаррисона [101]. Однако описание всех периодических копериодических групп было независимо получено еще Бэром и Фоминым ([и], стр. 187, теорема 50.3) Свойства копериодических групп изучались в работах Фукса [85], Рангасвами ([178], [179], [181]), Уокера ([207], [208]), Нунке [168]. В частности, Фукс ([85], ч. II, предложение а) доказал, что группа A является копериодической тогда и только тогда, когда $\operatorname{Ext}(R, A)=0$, где R — аддитивная группа всех рациональных чисел. Исследование $\mathfrak{r}$-копериодических и $\mathfrak{r}$-бэровских модулей проводили Капланский [133], Матлис [158], [159], Раду [242], Чейз [58]. Для обычного кручения $\mathfrak{r}$ в группах $\mathfrak{r}$-бэровость рассматривали Бэр ([и], § 50), Нунке [168], Ротман [191]. Из их результатов, в частности, следует, что всякая $\mathfrak{r}$-бэровская группа является группой без кручения, а всякая счетная $\mathfrak{r}$-бэровская группа свободна. К этому же кругу вопросов относится и работа Сонсяды [194]. Но вопрос о том, что представляют собой все $\mathfrak{r}$-бэровские группы, пока не решен. Близким к нему вопросом является проблема Уайтхеда: каковы все группы A, для которых $\operatorname{Ext}(A, Z)=0$? Ротман [191] получил следующий результат: если $\operatorname{Ext}(A, Z)=0$, то A — сепарабельная ([в], стр. 185) узкая ([и], стр. 169) группа без кручения, вложимая в качестве сервантной подгруппы в полную прямую сумму бесконечных циклических групп. Проблемой Уайтхеда занимались также Гриффитс [232], Нунке [168], Чейз [60] — [62] и Вильоен [204].

Предложение (2.21) содержится в работе Штейнтрема [197]. На справедливость утверждения (2.22) указал Фукс [90]. Предложение (2.24) является обобщением результата Фукса [85]. Предложения (2.25) — (2.28) доказала Уокер [205].

Согласно предложению (2.15), для каждого кручения $\mathfrak{r}$, для которого $\mathfrak{r}(\Lambda)=0$, найдется такая чистота ω, что классы $\mathfrak{r}$-полупростых и ω-плоских модулей совпадают. Однако эта чистота не определяется однозначно, даже если ограничиться $\mathcal{E}$-чистотами. В самом деле, например, в случае обычного кручения в группах как класс сервантно-плоских, так и класс слабо-сервантно-плоских групп совпадает с классом всех групп без кручения, в силу предложения (1.54). Существуют также чистоты ω, отличные от $\mathcal{E}$-чистот, для которых имеет место совпадение класса ω-плоских модулей с классом $\mathfrak{r}$-полупростых модулей для данного кручения $\mathfrak{r}$.

(2.29) *Пусть кручение* $\mathfrak{r}$ *таково, что* $\mathfrak{r}(\Lambda)=0$. *Положим* $A\subseteq_\omega B$, *если* $A\subseteq B$ *и* $\mathfrak{r}(B)\pi=\mathfrak{r}(B/A)$, *где* π — *естественный эпиморфизм* B *на* B/A. *Тогда отношение* $\subseteq_\omega$ *определяет чистоту* ω, *причем классы* $\mathfrak{r}$-*полупростых и* ω-*плоских модулей совпадают.*

Для доказательства установим, что отношение $\subseteq_\omega$ обладает свойствами Ч0′ — Ч4′. Справедливость Ч0′ нетрудно вывести из предложения (2.27). Если $A\subseteq_\omega B$ и $B\subseteq_\omega C$, то положим $\pi\colon B\to B/A$, $\sigma\colon C\to C/A$, $\tau\colon C\to C/B$, $f\colon C/A\to C/B$ (π, σ, τ, f — естественные эпиморфизмы). Тогда $\sigma f=\tau$. Отсюда

$$\mathfrak{r}(C)\sigma f=\mathfrak{r}(C)\tau=\mathfrak{r}(C/B)\supseteq\mathfrak{r}(C/A)f\supseteq\mathfrak{r}(C)\sigma f,$$

а значит, учитывая предложение (2.9), получаем

$$\mathfrak{r}(C/A)=\mathfrak{r}(C)\sigma+(B/A)\cap\mathfrak{r}(C/A)=\mathfrak{r}(C)\sigma+\mathfrak{r}(B/A)=$$
$$=\mathfrak{r}(C)\sigma+\mathfrak{r}(B)\pi=\mathfrak{r}(C)\sigma,$$

т. е. $A\subseteq_\omega C$. Пусть, далее, $A\subseteq B\subseteq C$, $A\subseteq_\omega C$ и $\pi\colon C\to C/A$. Ясно, что $[\mathfrak{r}(C)\cap B]\pi\subseteq\mathfrak{r}(C)\pi\cap B\pi$. Если $x\pi=b\pi$, где $x\in\mathfrak{r}(C)$, $b\in B$, то $x-b=a\in A$, т. е. $x\in\mathfrak{r}(C)\cap B$. Таким образом, $[\mathfrak{r}(C)\cap B]\pi=\mathfrak{r}(C)\pi\cap B\pi$. Отсюда

$$\mathfrak{r}(B/A)=\mathfrak{r}(C/A)\cap(B/A)=\mathfrak{r}(C)\pi\cap B\pi=$$
$$=[\mathfrak{r}(C)\cap B]\pi=\mathfrak{r}(B)\pi,$$

т. е. $A\subseteq_\omega B$. Пусть теперь $A\subseteq_\omega B$ и $K\subseteq A$. Тогда

имеет место коммутативная диаграмма

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & B/A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ B/K & \xrightarrow{\tau} & (B/K)/(A/K), \end{array}$$

где h — изоморфизм. Отсюда

$$\mathfrak{r}((B/K)/(A/K))=\mathfrak{r}(B/A)h=\mathfrak{r}(B)\pi h=$$
$$=\mathfrak{r}(B)g\tau\subseteq\mathfrak{r}(B/K)\tau\subseteq\mathfrak{r}((B/K)/(A/K)),$$

т. е. $A/K\subseteq_\omega B/K$. Пусть, наконец, $K\subseteq A\subseteq B$, $K\subseteq_\omega B$ и $A/K\subseteq_\omega B/K$. Тогда в коммутативной диаграмме

$$\begin{array}{ccc} B & \xrightarrow{\pi} & B/A \\ {\scriptstyle g}\downarrow & & \downarrow{\scriptstyle h} \\ B/K & \xrightarrow{\tau} & (B/K)/(A/K) \end{array}$$

отображение h является изоморфизмом. Кроме того,

$$\mathfrak{r}(B/K)=\mathfrak{r}(B)g.$$

Поэтому

$$\mathfrak{r}(B/A)h=\mathfrak{r}((B/K)/(A/K))=\mathfrak{r}(B/K)\tau=\mathfrak{r}(B)g\tau=\mathfrak{r}(B)\pi h.$$

Отсюда $\mathfrak{r}(B)\pi=\mathfrak{r}(B/A)$, т. е. $A\subseteq_\omega B$.

Пусть теперь $\mathfrak{r}(B)=0$, и пусть $0\to K\to A\xrightarrow{\pi}B\to 0$ — точная последовательность. В силу свойства $K3$, $\mathfrak{r}(A)\pi=0=\mathfrak{r}(A/K)$, т. е. модуль B ω-плоский. Обратно, пусть B — ω-плоский модуль, и пусть $0\to K\to F\xrightarrow{\pi}B\to 0$ — точная последовательность, где F — свободный модуль. Тогда $\mathfrak{r}(B)=\mathfrak{r}(F)\pi=0$, ибо $\mathfrak{r}(F)=0$, в силу предложения (2.6).

В случае обычного кручения в группах чистота ω, построенная в предложении (2.29), очевидно, отлична от любой $\mathcal{E}$-чистоты, так как все подгруппы периодических групп оказываются ω-чистыми, в то время как для всякой $\mathcal{E}$-чистоты можно указать примарную циклическую группу, содержащую не $\mathcal{E}$-чистую подгруппу. Например, если $p^k\mathbf{Z}\in\mathcal{E}$, то подгруппа $p^k(\mathbf{Z}/p^{k+1}\mathbf{Z})$ не $\mathcal{E}$-чиста в $\mathbf{Z}/p^{k+1}\mathbf{Z}$, в силу предложения (1.52).

Пусть $\mathfrak{r}$ — кручение и Ξ — класс всех таких чистот ω, что классы ω-плоских и $\mathfrak{r}$-полупростых модулей совпадают. Как отмечалось в § 1, класс $\mathfrak{H} = \bigcap_{\omega \in \Xi} \mathfrak{H}_\omega$ является чистым. Нетрудно проверить, что чистота $\omega_{\min}$, определяемая классом $\mathfrak{H}$, также принадлежит классу Ξ. Вопрос о явном описании чистоты $\omega_{\min}$ остается открытым. Однако описание чистоты, определяемой классом $\mathfrak{H}_0 = \bigcap_{\omega \in \Xi_0} \mathfrak{H}_\omega$, где Ξ_0 состоит из всех инъективно замкнутых чистот, принадлежащих классу Ξ, дает следующее предложение:

(2.30) *Пусть $\mathfrak{r}$ — кручение, $\mathfrak{r}(\Lambda) = 0$, $\mathscr{E}$ — радикальный фильтр, отвечающий кручению $\mathfrak{r}$ согласно предложению* (2.15), *$\mathfrak{K}$ — класс $\mathfrak{r}$-копериодических модулей и ω_0 — чистота, отвечающая классу $\mathfrak{K}$ согласно предложению* (1.16). *Если $\mathscr{E}$-чистота инъективно замкнута, то классы ω_0-плоских и $\mathfrak{r}$-полупростых модулей совпадают. Если ω — такая инъективно замкнутая чистота, что классы ω-плоских и $\mathfrak{r}$-полупростых модулей совпадают, то $\mathfrak{H}_{\omega_0} \subseteq \mathfrak{H}_\omega$.*

Действительно, согласно предложению (2.23), $\mathfrak{Q}_{\mathscr{E}} \subseteq \mathfrak{K}$. Поскольку, по условию, $\mathscr{E}$-чистота инъективно замкнута, отсюда вытекает, что $\mathfrak{H}_{\mathscr{E}} = \Psi(\mathfrak{Q}_{\mathscr{E}}) \supseteq \Psi(\mathfrak{K}) = \mathfrak{H}_{\omega_0}$. Но тогда очевидно, что всякий ω_0-плоский модуль является $\mathscr{E}$-плоским. Отсюда, учитывая предложение (2.15), получаем, что всякий ω_0-плоский модуль $\mathfrak{r}$-полупрост. Если $\mathfrak{r}(C) = 0$ и дана точная последовательность

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \to C \to 0,$$

то, согласно (2.22), $i \in \Psi(\mathfrak{K}) = \mathfrak{H}_{\omega_0}$. Это означает, что C — ω_0-плоский модуль. Таким образом, совпадение классов ω_0-плоских и $\mathfrak{r}$-полупростых модулей доказано. Если, наконец, ω — такая инъективно замкнутая чистота, что классы ω-плоских и $\mathfrak{r}$-полупростых модулей совпадают, то во всякой точной последовательности

$$0 \to A \xrightarrow{i} B \to C \to 0,$$

где $\mathfrak{r}(C) = 0$, мономорфизм i ω-чист. Если Q — ω-инъективный модуль, то Q инъективен относительно всех таких мономорфизмов i и, согласно предложению (2.22), $Q \in \mathfrak{K}$. Таким образом, $\mathfrak{Q}_\omega \subseteq \mathfrak{K}$,

откуда, учитывая инъективную замкнутость чистоты ω, получаем, что $\mathfrak{H}_\omega = \Psi(\mathfrak{Q}_\omega) \supseteq \Psi(\mathfrak{K}) = \mathfrak{H}_{\omega_0}$.

В случае обычного кручения в группах чистота $\omega_{\min}$ инъективно замкнута. Действительно, $\mathfrak{H}_{\omega_{\min}} \subseteq \mathfrak{H}_{\omega_0}$, откуда $\mathfrak{Q}_{\omega_{\min}} \supseteq \mathfrak{Q}_{\omega_0}$, т. е. $\mathfrak{Q}_{\omega_{\min}}$ содержит все копериодические группы. Кроме того, $\mathfrak{H}_{\omega_{\min}}$ содержит все вложения группы A в B, где B/A — группа без кручения. Однако любую группу A можно вложить в копериодическую группу Q так, чтобы Q/A была группой без кручения (см. [178] или [90], стр. 13). Остается применить предложение (1.18). Таким образом, в случае обычного кручения в группах $\omega_{\min} = \omega_0$. В случае произвольного кручения в модулях, для которого соответствующая $\mathscr{E}$-чистота инъективно замкнута, можно только утверждать, что классы инъективных объектов для чистот $\omega_{\min}$ и ω_0 совпадают, как следует из предложения (2.22) и включения $\mathfrak{Q}_{\omega_{\min}} \supseteq \mathfrak{Q}_{\omega_0}$.

Итак, каждому кручению $\mathfrak{r}$, для которого $\mathfrak{r}(\Lambda) = 0$, согласно предложению (2.30), соответствует некоторая чистота. Естественна постановка обратной задачи: для какой чистоты ω класс ω-плоских модулей является полупростым? Частичный ответ содержится в следующем предложении:

(2.31) *Пусть $\Gamma = \{(F_\alpha, U_\alpha)\}$ и все U_α проекционно-конечны. Если все правые Λ-модули U_α^* проективны, то класс всех Γ-плоских модулей является классом $\mathfrak{r}$-полупростых модулей для некоторого радикала $\mathfrak{r}$, причем $\mathfrak{r}(\Lambda) = 0$. Если все F_α конечно-порождены, то справедливо и обратное.*

Действительно, если все U_α^* проективны, то из предложений (1.14), (1.41) и (1.42) вытекает справедливость свойств 1) и 2′) предложения (2.12) для класса всех Γ-плоских модулей. Ввиду предложения (1.38) и [6], стр. 139, предложение 1.1а, $\mathfrak{r}(\Lambda) = 0$. Для доказательства обратного заметим, что из предложений (2.12), (1.40) и (1.43) вытекает, что все модули U_α^* являются плоскими и конечно-связанными. Согласно предложению (0.10) все они проективны.

Как следствие предложения (2.31) получаем

(2.32) *Для того чтобы класс всех $\mathscr{E}$-плоских Λ-модулей, где $\mathscr{E}$ состоит из всех главных левых идеалов кольца Λ, был полупростым, необходимо и достаточно, чтобы все главные правые идеалы кольца Λ были проективными.*

Из предложений (2.31), (1.45) и [6], стр. 32, предложение 6.2, вытекает

(2.33) *Для того чтобы класс всех плоских Λ-модулей являлся полупростым, необходимо и достаточно, чтобы кольцо было полунаследственным справа.*

На справедливость предложения (2.33) указал Койфман. К рассматриваемому кругу вопросов примыкает и другой его результат ([12], стр. 1204, теорема 1): *класс проективных Λ-модулей полупрост тогда и только тогда, когда кольцо Λ наследственно слева, удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов, а все конечно-порожденные правые идеалы кольца Λ конечно-связаны.* Наконец: *класс свободных Λ-модулей полупрост тогда и только тогда, когда кольцо Λ является телом.*

Действительно, пусть класс свободных Λ-модулей полупрост. Тогда ввиду предложения (2.3) все левые идеалы кольца Λ свободны. Но тогда свободны и все проективные Λ-модули ([6], стр. 34, упражнение 7). Поэтому из предыдущей теоремы вытекает, что Λ удовлетворяет условию минимальности для главных правых идеалов. Но тогда в нем нет делителей нуля ([24], стр. 27, предложение 5.2). Отсюда, поскольку джекобсоновский радикал кольца Λ является ниль-идеалом, а фактор-кольцо по нему классически полупросто ([42], стр. 467, теорема Р), вытекает, что Λ — тело. Так как над телом все модули свободны, то второе утверждение доказываемого предложения тривиально.

Отметим еще результат Хилтона [114]: *если Λ — кольцо без делителей нуля и все его правые и левые идеалы являются главными, то класс плоских Λ-модулей совпадает с классом локально свободных модулей* [1]).

Из (2.33) вытекает, что для указанного выше класса колец класс локально свободных модулей полупрост. Будет ли он полупрост для каких-либо других колец? Заметим еще, что вопрос об условиях, при которых радикалы, указанные в теоремах Койфмана, являются кручениями, остается открытым.

Выделим в кольце Λ некоторое множество S таких элементов s, что $r(s)=0$. Пусть $\mathscr{E}_S=\{\Lambda s \mid s\in S\}$. Согласно предложению (2.31) существует такой радикал $\mathfrak{r}_S$, что классы $\mathfrak{r}_S$-полупростых и $\mathscr{E}_S$-плоских модулей совпадают. Важные частные случаи возникают, если $S=S_И\equiv\{s\mid r(s)=0\}$ или $S=S_Л\equiv$ $\equiv\{s\mid r(s)=(0:s)=0\}$. Возникающие при этом радикалы будем соответственно называть *радикалами Иоффе* и *Леви* и обозначать через $\mathfrak{r}_И$ и $\mathfrak{r}_Л$. Ясно, что $\mathfrak{r}_Л(A)\subseteq\mathfrak{r}_И(A)$ для всякого Λ-модуля A. В случае

1) Модуль называется *локально свободным*, если свободен каждый его конечно-порожденный подмодуль.

коммутативной области целостности как $\mathfrak{r}_И(A)$, так и $\mathfrak{r}_Л(A)$ совпадает с обычной периодической частью, а класс $\mathfrak{r}_Л$-полупростых модулей совпадает с классом обычных модулей без кручения. Исследуем связь между радикалами и кольцами частных [1]).

(2.34). *Если система S мультипликативно замкнута и $S\subseteq S_Л$, то эквивалентны следующие свойства:*

1) *Λ обладает левым кольцом частных Λ_S относительно системы S;*

2) *для всякого Λ-модуля A совокупность S-периодических элементов образует подмодуль;*

3) *для всякого Λ-модуля A совокупность его S-периодических элементов совпадает с $\mathfrak{r}_S(A)$.*

Действительно, для доказательства импликации $1)\Rightarrow 2)$ допустим, что Λ_S существует. Тогда для любых $\lambda\in\Lambda$ и $s\in S$ найдутся $\mu\in\Lambda$ и $t\in S$, такие, что $t\lambda=\mu s$. Поэтому если $sa=0$, где $a\in A$, $s\in S$, то $t(\lambda a)=\mu(sa)=0$. Если $s_1a_1=s_2a_2=0$, то $ts_1(a_1+a_2)=$ $=t(s_1a_1)+\mu(s_2a_2)=0$, где $ts_1=\mu s_2$. Если справедливо 2), то используя предложения (1.54) и (2.1) получаем, что множество T всех S-периодических элементов Λ-модуля A является $\mathfrak{r}_S$-радикальным подмодулем модуля A. Если $a\notin T$, $s\in S$ и $sa\in T$, то $s'sa=0$ для некоторого $s'\in S$, т. е. $a\in T$. С помощью предложения (1.54) отсюда выводим, что модуль $(\Lambda a+T)/T$ $\mathfrak{r}_S$-полупрост для любого $a\notin T$ и, следовательно, модуль $\Lambda a+T$ не может быть $\mathfrak{r}_S$-радикальным. Таким образом, T является максимальным $\mathfrak{r}_S$-радикальным подмодулем модуля A и, согласно предложению (2.8), совпадает с $\mathfrak{r}_S(A)$. Допустим, что выполняется условие 3), и пусть $s\in S$. Тогда Λ-модуль $\Lambda/\Lambda s$ является $\mathfrak{r}_S$-радикальным, ибо $s(1+\Lambda s)=0$. По условию 3), для всякого $\lambda\in\Lambda$ найдется такой элемент $t\in S$, что $t\lambda\in\Lambda s$, т. е. $t\lambda=\mu s$ для некоторого $\mu\in\Lambda$. Отсюда нетрудно вывести существование кольца Λ_S (см. [6] или [31]).

Если Λ — кольцо без делителей нуля, то $S_Л=S_И=$ $=\Lambda\setminus 0$, и из предложения (2.34) сразу следует

1) Кольцо Λ_S называется *левым кольцом частных* кольца Λ относительно системы S, если: а) $\Lambda\subseteq\Lambda_S$; б) каждый элемент из S имеет в Λ_S двусторонний обратный; в) если $x\in\Lambda_S$, то $x=s^{-1}\lambda$, где $s\in S$, $\lambda\in\Lambda$.

(2.35) *Если Λ — кольцо без делителей нуля и $S=\Lambda\setminus 0$, то Λ обладает левым кольцом частных Λ_S тогда и только тогда, когда $\mathfrak{t}_{Л}=\mathfrak{t}_{И}$ является кручением.*

Некоторым уточнением предложения (2.34) является следующее утверждение:

(2.36) *Если $S\subseteq S_{Л}$, S мультипликативно замкнута и Λ обладает двусторонним кольцом частных Λ_S* [1]) *относительно системы S, то $\mathfrak{t}_S(A)=\operatorname{Ker}(q\otimes_\Lambda e_A)$, где q — естественное вложение Λ в Λ_S.*

Действительно, если $a\in\mathfrak{t}_S(A)$, то, согласно предложению (2.34), $sa=0$ для некоторого $s\in S$. Отсюда $(1\otimes a)(g\otimes e_A)=s^{-1}s\otimes a=s^{-1}\otimes sa=0$, т. е. $\mathfrak{t}_S(A)\subseteq$ $\subseteq\operatorname{Ker}(q\otimes e_A)$. Обратное включение устанавливается в доказываемом ниже предложении д), которому предпосылается несколько вспомогательных утверждений.

а) *Если кольцо Λ обладает левым [правым] кольцом частных относительно системы S, то для всякого набора элементов $\lambda_1,\ldots,\lambda_m\in\Lambda$ и $s_1,\ldots,s_m\in S$ найдутся элемент $u\in S$ и элементы $\mu_1,\ldots,\mu_m\in\Lambda$ такие, что $u\lambda_i=\mu_i s_i$ $[\lambda_i u=s_i\mu_i]$ $(i=1,\ldots,m)$.*

В самом деле, при $m=1$ это очевидно. При $m=2$ найдем $u_1,u_2\in S$, так что $u_1\lambda_1=\mu_1 s_1$ и $u_2\lambda_2=\mu_2 s_2$. Но $vu_1=\lambda u_2$, где $v\in S$. Положив $u=vu_1$, получим

$$u\lambda_1=v\mu_1 s_1$$

и

$$u\lambda_2=\lambda u_2\lambda_2=\lambda\mu_2 s_2.$$

Далее по индукции.

б) *Левое кольцо частных Λ_S кольца Λ относительно системы S является правым плоским Λ-модулем.*

Для доказательства рассмотрим точную последовательность правых Λ-модулей

$$0\to K\xrightarrow{i}F\xrightarrow{\pi}\Lambda_S\to 0,$$

где F — свободный правый Λ-модуль с базой $\mathfrak{H}=\{x_s\mid s\in S\}$ и $x_s\pi=s^{-1}$. Пусть I — левый идеал

[1]) Левое кольцо частных кольца Λ относительно системы S называется *двусторонним*, если оно является правым кольцом частных кольца Λ относительно системы S.

кольца Λ. Ввиду результатов из [г] (стр. 184, равенство (1.7), стр. 194, теорема 5,1, стр. 211, теорема 8.4) существует коммутативная диаграмма

$$\begin{tikzcd}
 & & 0 \arrow[d] & \\
 & & \operatorname{Tor}_1^\Lambda(\Lambda_S,\Lambda/I) \arrow[d] & \\
K\otimes_\Lambda I \arrow[r, "i\otimes e_I"] \arrow[d] & F\otimes_\Lambda I \arrow[r, "\pi\otimes e_I"] \arrow[d, "\sigma"] & \Lambda_S\otimes_\Lambda I \arrow[r] \arrow[d, "\rho"] & 0 \\
K \arrow[r, "i"] & F \arrow[r, "\pi"] & \Lambda_S \arrow[r] & 0
\end{tikzcd}$$

с точными строками и столбцами, где $(z\otimes\lambda)\sigma=z\lambda$ и $(w\otimes\lambda)\rho=w\lambda$. Если $w\in\Lambda_S\otimes I$, то $w=\sum s_k^{-1}\otimes\lambda_k$, где $s_k\in S$, $\lambda_k\in I$. Если $w\rho=0$, то $\sum s_k^{-1}\lambda_k=0$. Согласно утверждению а), найдутся такие элементы $\mu_1,\ldots,\mu_m\in\Lambda$, что $u=\mu_k s_k$ при некотором $u\in S$. Отсюда $s_k^{-1}=u^{-1}\mu_k$ и, следовательно, $y_k=x_{s_k}-x_u\mu_k\in Ki$. С другой стороны, $\sum\mu_k\lambda_k=\sum us_k^{-1}\lambda_k=0$. Поэтому $\sum y_k\lambda_k=\sum x_{s_k}\lambda_k$. Но σ — мономорфизм ([б], стр. 139, предложение 1.1а). Значит, $\sum y_k\otimes\lambda_k=\sum x_{s_k}\otimes\lambda_k$. Отсюда, поскольку $y_k\in Ki$, получаем $w=\left(\sum x_{s_k}\otimes\lambda_k\right)\times$ $\times(\pi\otimes e_I)=\left(\sum y_k\otimes\lambda_k\right)(\pi\otimes e_I)=\sum y_k\pi\otimes\lambda_k=0$. Таким образом, ρ есть мономорфизм, и, следовательно, $\operatorname{Tor}_1^\Lambda(\Lambda_S,\Lambda/I)=0$. Согласно [б], стр. 131, предложение 9.2*, отсюда следует, что $\operatorname{Tor}_1^\Lambda(\Lambda_S,A)=0$ для всех Λ-модулей A.

Далее будем предполагать выполненными условия предложения (2.36). Рассмотрим точную последовательность

$$0\to K\to G\xrightarrow{\pi}\Lambda_S\to 0,$$

где G — свободный правый Λ-модуль с базой $\{x_1,x_s\mid s\in S\}$, причем $x_1\pi=1$, $x_s\pi=s^{-1}$.

в) *Если $w_1,\ldots,w_m\in K$, то $w_iu=\sum_{s\in S}(x_1-x_s s)\lambda_{s_i}$ для некоторых $u\in S$ и $\lambda_{s_i}\in\Lambda$.*

Очевидно, что достаточно доказать это утверждение для $m=1$, после чего нетрудно провести индукцию. Если

$$w = x_1\xi_1 + \sum_{s\in S'\subset S} x_s\xi_s \in K,$$

то, согласно утверждению а), найдутся $u\in S$ и $\mu_s\in\Lambda$ такие, что $\xi_s u = s\mu_s$ для всех $s\in S'$. Отсюда

$$wu = x_1\xi_1 u + \sum x_s s\mu_s = x_1\left(\xi_1 u + \sum \mu_s\right) - \sum (x_1 - x_s s)\mu_s,$$

и так как $\left(\sum (x_1 - x_s s)\mu_s\right)\pi = 0$, т. е. $\sum (x_1 - x_s s)\mu_s \in K$, то $x_1\left(\xi_1 u + \sum\mu_s\right)\in K$, а значит, $\xi_1 u + \sum \mu_s = 0$.

г) *Если $\hat{A}$ — инъективная оболочка модуля A, то* $\mathfrak{r}(\hat{A}) = \operatorname{Ker}(q\otimes_\Lambda e_{\hat{A}})$.

Действительно, из утверждения б) легко вывести, что $\operatorname{Ker}(\pi\otimes e_{\hat{A}}) = K\otimes\hat{A}$. Поэтому если $1\otimes a = 0$ в $\Lambda_s\otimes\hat{A}$, то $x_1\otimes a \in K\otimes\hat{A}$. Отсюда, учитывая в), включение $u\in S$ и инъективность модуля $\hat{A}$, получаем

$$x_1\otimes a = \sum w_i\otimes a_i = \sum w_i\otimes ua_i' =$$
$$= \sum w_i u\otimes a' = \sum (x_1 - x_s s)\otimes b_s =$$
$$= x_1\otimes \sum b_s - \sum x_s\otimes sb_s,$$

где $w_i\in K$, a_i, a_i', $b_s\in\hat{A}$. Применив утверждение (0.7), получаем $sb_s = 0$, $a = \sum b_s$, откуда $b_s\in\mathfrak{r}(\hat{A})$, а значит, и $a\in\mathfrak{r}(\hat{A})$.

д) $\mathfrak{r}(A) = \operatorname{Ker}(q\otimes_\Lambda e_A)$.

Поскольку, согласно утверждению б), Λ_S — правый плоский Λ-модуль, а из предложения (2.34) вытекает, что $\mathfrak{r}(A) = \mathfrak{r}(\hat{A})\cap A$, то справедливость д) следует из г), в силу коммутативности диаграммы

$$\begin{array}{ccccccc}
0 \to & \operatorname{Ker}(q\otimes e_A) & \to & A & \to & \Lambda_S\otimes A \\
 & \downarrow & & \downarrow & & \downarrow \\
0 \to & \operatorname{Ker}(q\otimes e_{\hat{A}}) & \to & \hat{A} & \to & \Lambda_S\otimes\hat{A}
\end{array}$$

с точными строками.

Связь между чистотой и кручением, исследованная в предыдущих предложениях, имеет своим истоком совпадение классов плоских групп и групп без кручения ([6], стр. 171, предложение 4.2). Этот факт можно получить как следствие предложений (2.15) и (1.38) или (2.33). Частные случаи предложений (2.34) и (2.35) получили Иоффе [9] и Леви [147] (см. также [110]).

Предложение (2.32) принадлежит Хаттори [104], а предложение (2.36) обобщает один из результатов Жантиля [94]. Гельцер [110] исследовал кручение, определяемое классом $\mathfrak{T} = \{B \mid \operatorname{Hom}_\Lambda(B, Y) = 0$, если Y инъективен и $\mathfrak{r}_Л$-полупрост$\}$ (ср. (2.13)). Он же занимался вопросами, примыкающими к предложениям (2.34)—(2.36). Из предложения (2.36) видно, что радикал Леви совпадает с радикалом Ляфона [127], рассматривавшего, правда, только модули над коммутативными кольцами.

Обозначим через $\mathfrak{T}$ класс всех таких Λ-модулей Q, что для всякого плотного мономорфизма $h\colon A\to B$ из равенства $hf = hg$, где f, $g\colon B\to Q$, вытекает, что $f = g$. Если Λ — коммутативная область целостности, то $\mathfrak{T}$ совпадает с классом $\mathfrak{r}_Л$-полупростых модулей. Это показал Плезант [173], предложивший в связи с этим новое обобщение понятия модуля без кручения.

В некоторых случаях с данной чистотой можно связать радикал еще одним способом (правда, этот радикал, как правило, не оказывается кручением). В самом деле, из (2.10), (1.9), (1.33), (1.34), (1.35), (1.36) вытекает:

Пусть $\Gamma = \{(F_\alpha, U_\alpha)\}$. Если все модули U_α проективны и компактны, то Γ-делимый класс радикален. Если Γ-делимый класс радикален, то все модули U_α проективны, а для тех α, для которых F_α конечно-порождены, модули U_α компактны.

Поскольку из компактности всех левых идеалов кольца Λ нетрудно вывести его нетеровость слева, из предыдущего предложения ввиду (2.10), (1.31), (1.35), (1.36), (1.45), (1.46), [6], стр. 30, теорема 5.4, и [6], стр. 32, предложение 7.1, следует:

Класс всех инъективных Λ-модулей радикален тогда и только тогда, когда Λ наследственно слева и нетерово слева.

Матлис ([157], следствие 2.3) доказал радикальность класса подинъективных Λ-модулей, если Λ — коммутативная область целостности, проективная размерность поля частных которой над Λ равна 1.

Отметим, что модули без кручения над кольцами без делителей нуля привлекали внимание Вольфсона ([213], [214]), Гевиртсмана [95], а также Феллера и Своковского [81] в связи с известной задачей: когда изоморфизм колец эндоморфизмов двух модулей влечет изоморфизм самих модулей? Для примарных абелевых групп этот вопрос полностью решен ([и], § 56). Кроме того, исследовалось кольцо эндоморфизмов модуля без кручения над полупервичным кольцом ([219]), а также кольцо так называемых квазиэндоморфизмов группы без кручения ([185]).

Пусть $\mathfrak{r}$ — некоторый радикал. Модуль A назовем *$\mathfrak{r}$-расщепляемым*, если расщепляема точная последовательность

$$0\to\mathfrak{r}(A)\to A\to A/\mathfrak{r}(A)\to 0.$$

Если $\mathfrak{r}$-расщепляемы все Λ-модули, то будем говорить, что радикал $\mathfrak{r}$ *расщепляем*. Из свойств К2, К4 и предложения (2.8) следует

(2.37) *Радикал $\mathfrak{r}$ расщепляем тогда и только тогда, когда $\mathfrak{r}(A) = 0$ и $\mathfrak{r}(B) = B$ влечет* $\operatorname{Ext}^1_\Lambda(A, B) = 0$.

Из предложения (2.37) сразу следует, что расщепляемость радикала $\mathfrak{r}$ равносильна $\mathfrak{r}$-копериодичности всех $\mathfrak{r}$-радикальных модулей. Этот результат, впрочем, почти ничего не дает для разыскания критериев расщепляемости радикала. Заметим, что критерий расщепляемости кручения, задаваемого радикально-полупростым классом, содержится в предложении (2.20). Вполне возможно, что в случае расщепляемости кручения $\mathfrak{t}$ класс всех $\mathfrak{t}$-радикальных модулей окажется радикально-полупростым. Исследования в этом направлении начал Длаб [74]. Несколько общих достаточных условий для нерасщепляемости кручений предложил Горбачук [4]. Из его результатов, в частности, вытекает нерасщепляемость всех нетривиальных кручений в случае абелевых групп. Этот же результат можно получить из теоремы Бэра — Фомина ([и], стр. 187, теорема 50.3), а также из теоремы Ротмана [190], доказавшего, что из расщепляемости радикала $\mathfrak{t}_{\text{Л}}$ для модулей над коммутативной областью целостности Λ (ввиду предложения (2.35) этот радикал является кручением) вытекает, что Λ — поле. Результат Ротмана обобщила Иоффе ([9], стр. 820). Капланский ([130], [132]) установил, что коммутативная область целостности полунаследственна (т. е. является прюферовым кольцом) тогда и только тогда, когда над ней всякий конечно-порожденный модуль $\mathfrak{t}_{\text{Л}}$-расщепляем. Леви ([147], стр. 149, теорема 6.1) доказал $\mathfrak{t}_{\text{Л}}$-расщепляемость всех конечно-порожденных модулей над полунаследственным слева кольцом, обладающим двусторонним кольцом частных, полупростым в классическом смысле. Диксон [65] показал, что расщепляемость радикала $\mathfrak{t}_{\text{Л}}$ над нетеровой коммутативной областью целостности влечет ее артиновость. Таким образом, расщепляемость нетривиального кручения — явление довольно редкое. Это конечно, не мешает расщепляемости отдельных модулей. Например, $\mathfrak{t}_{\text{Л}}$-расщепляема всякая делимая группа ([в], стр. 139). Харада [100] перенес этот результат на случай инъективных модулей над коммутативными областями целостности. Матлис [158] доказал, что подинъективные модули над коммутативными областями целостности $\mathfrak{t}_{\text{Л}}$-расщепляемы. Он же исследовал $\mathfrak{t}_{\text{Л}}$-расщепляемость $\mathfrak{T}_{\mathfrak{t}_{\text{Л}}}$-делимых модулей над коммутативной областью целостности. Леви ([147], стр. 149, теорема 6.1) доказал $\mathfrak{t}_{\text{Л}}$-расщепляемость всех конечно-порожденных модулей над полунаследственным слева кольцом, обладающим двусторонним кольцом частных, полупростым в классическом смысле. Для групп известны многочисленные критерии расщепляемости. Однако большинство из них использует специфику кольца целых чисел. Среди исключений укажем на результат Рейда ([184], предложение 5.1): *группа A является $\mathfrak{t}_{\text{Л}}$-расщепляемой тогда и только тогда, когда в A существует сервантная подгруппа, дополнительная к подгруппе $\mathfrak{t}_{\text{Л}}(A)$*. Имеют смысл в случае модулей также формулировки критериев, предложенных Ирвином, Пирси, Уокером [122], Матлисом [158], Прохазкой [175] и Рудыком [20]. Сюда же примыкают и некоторые результаты Нунке [166].

Остановимся на совершенно ином подходе к понятию кручения. Именно, назовем Λ-модуль A *модулем без кручения* в смысле Басса, если естественный гомоморфизм модуля A в $\mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda), \Lambda)$ [1]) является мономорфизмом.

(2.38) *Следующие свойства Λ-модуля A эквивалентны*:

1) *A не имеет кручения в смысле Басса*;

2) *для всякого ненулевого элемента a из A найдется такой гомоморфизм $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$, что $a\varphi \neq 0$*;

3) *A изоморфно вкладывается в полную прямую сумму некоторого числа экземпляров кольца Λ.*

Действительно, докажем импликацию 1)$\Rightarrow$2). Пусть $a \neq 0$ и $af = 0$ для всех $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$. Тогда при естественном гомоморфизме элемент a переходит в нуль. Ввиду свойства 1) $a = 0$. Противоречие. Пусть теперь выполнено 2). Для каждого $0 \neq a \in A$ найдем такой гомоморфизм $\varphi_a\colon A \to \Lambda$, что $a\varphi_a \neq 0$. Положив $B = \sum\limits_{a \in A}^{*} \Lambda_a$, где $\Lambda_a \cong \Lambda$, заметим, что гомоморфизм φ, заданный формулой $x\varphi = (\ldots, x\varphi_a, \ldots)$, является мономорфизмом A в B. Следовательно, выполнено 3). Наконец, докажем импликацию 3)$\Rightarrow$1). Пусть $f\colon A \to B = \sum^{*} \Lambda_\alpha$ — мономорфизм, указанный в свойстве 3). Если $0 \neq a \in A$, то найдется такой эпиморфизм $\pi_\alpha\colon B \to \Lambda_\alpha$, что $af\pi_\alpha \neq 0$. Ясно, что $f\pi_\alpha \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$. Если φ — образ элемента a при естественном гомоморфизме, то $\varphi(f\pi_\alpha) = af\pi_\alpha \neq 0$. Следовательно, естественный гомоморфизм является мономорфизмом.

(2.39) *Если инъективная оболочка кольца Λ вложима в свободный Λ-модуль F (в частности, если Λ самоинъективно слева), то класс $\mathfrak{P}$ всех Λ-модулей без кручения в смысле Басса является полупростым и соответствующий радикал $\mathfrak{r}$ является кручением.*

Для доказательства установим:

а) *Если $A \subseteq B$, $a \in A$, $\varphi\colon A \to \Lambda$ и $a\varphi \neq 0$, то существует $\psi\colon B \to \Lambda$, причем $a\psi \neq 0$.*

---

[1]) При естественном гомоморфизме элемент $a \in A$ отображается в элемент $\varphi \in \mathrm{Hom}_\Lambda(\mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda), \Lambda)$, определяемый условием $\varphi(f) = af$ для всякого $f \in \mathrm{Hom}_\Lambda(A, \Lambda)$.

Действительно, ясно, что отображение φ можно продолжить до отображения $\psi'\colon B \to F$. Поэтому найдется такая проекция $\pi\colon F \to \Lambda$, что $a\psi'\pi \neq 0$.

Далее, ввиду предложения (2.38) ясно, что класс $\mathfrak{P}$ замкнут относительно подмодулей и полных прямых сумм. Пусть теперь дана точная последовательность $0 \to A \to B \to C \to 0$, где $A, C \in \mathfrak{P}$. Если $b \in B \setminus A$, то для него, очевидно, найдется указанное в предложении (2.38) отображение B в Λ. Если $a \in A$, то существование такого отображения вытекает из а). Таким образом, $B \in \mathfrak{P}$. Согласно предложению (2.12), класс $\mathfrak{P}$ полупрост. Если $A \subseteq \mathfrak{t}(B)$; $\varphi'\colon A \to C$, $C \in \mathfrak{P}$ и $\varphi' \neq 0$, то существует $\varphi = \varphi'\varphi'' \neq 0$, где $\varphi''\colon C \to \Lambda$. Применив а), найдем $0 \neq \psi\colon \mathfrak{t}(B) \to \Lambda$, что невозможно. Используя (2.1), получаем, что $A = \mathfrak{t}(A)$.

Однако в общем случае класс модулей без кручения в смысле Басса не замкнут относительно расширений и, согласно предложению (2.12), не обязан быть полупростым. Для доказательства рассмотрим алгебру Λ над полем P с базой 1, ε, δ, где 1 — единица и $\varepsilon^2 = \delta^2 = \varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$. Пусть A — Λ-модуль с образующими a, b, где $\varepsilon b = \delta a$, $\delta b = 0$. Нетрудно убедиться в точности последовательности

$$0 \to \Lambda \xrightarrow{i} A \xrightarrow{\pi} \Lambda\delta \to 0,$$

где $1i = a$, $a\pi = 0$, $b\pi = \delta$. Ясно, что Λ и $\Lambda\delta$ не имеют кручения в смысле Басса. Допустим, что $\varphi\colon A \to \Lambda$ и $(\delta a)\varphi \neq 0$. Если $b\varphi = \alpha + \beta\varepsilon + \gamma\delta$, где α, β, $\gamma \in P$, то $0 = (\delta b)\varphi = \alpha\delta$, откуда $\alpha = 0$. Но тогда $(\delta a)\varphi = (\varepsilon b)\varphi = \alpha\varepsilon = 0$. Противоречие.

Предложение (2.38) принадлежит Бассу [42]. Там же показано ([42], стр. 477, предложение 4.7), что *конечно-порожденные модули над коммутативной областью целостности не имеют кручения в классическом смысле тогда и только тогда, когда они не имеют кручения в смысле Басса*. Чейз ([58], стр. 468, теорема 4.1) доказал, что *всякий Λ-модуль без кручения в смысле Басса является плоским тогда и только тогда, когда Λ полунаследственно справа*. В указанных работах Чейза и Басса имеются и другие результаты, относящиеся к рассматриваемому вопросу. Свойства модулей без кручения в смысле Басса над некоторыми классами колец исследовали Аусландер [32], [33], Чейз [59], Джанс [127] и Фогель [254]. Кольца эндоморфизмов модулей без кручения в смысле Басса изучали Зельманович [219] и Гевиртсман [96].

§ 3. ПОЛНОТА

К понятию делимости также можно подойти с аксиоматической точки зрения. Именно, назовем *пополнением* функцию θ, ставящую в соответствие каждому Λ-модулю A определенный на нем мономорфизм $\theta(A)$, причем

П1. Если $f\colon A \to B$, то $f\theta(B) = \theta(A)g$ для некоторого гомоморфизма g.

П2. Если $\theta(A)\colon A \to B$ и $f\colon B \to C$ — эпиморфизм, то $\theta(C) = e_C$.

П3. Если $\theta(A)\colon A \to B$, то $\operatorname{Im}\theta(A)$ плотен в B.

Легко понять, что П3 равносильно свойству

П3′. Если $\theta(A)g$ — мономорфизм, то g — мономорфизм.

Если $\theta(A)\colon A \to B$, то модуль B будем называть θ-пополнением модуля A и обозначать через $\mathfrak{z}_\theta(A)$ или $\mathfrak{z}(A)$. Модуль A назовем θ-*полным*, если $A = \mathfrak{z}_\theta(A)$. Отметим, что из П2 вытекает в этом случае равенство $\theta(A) = e_A$. Пополнение θ будем называть *правильным*, если изоморфизм модулей A и B может быть продолжен до изоморфизма модулей $\mathfrak{z}_\theta(A)$ и $\mathfrak{z}_\theta(B)$. Пополнение θ называется *точным*, если включение $A \subseteq B \subseteq \mathfrak{z}_\theta(A)$, где модуль B θ-полон, возможно лишь при $B = \mathfrak{z}_\theta(A)$. Нетрудно проверить, что всякое точное пополнение правильно. Примеры неточных (и тем более неправильных) пополнений пока не известны. Однако

(3.1) *Всякое пополнение в категории абелевых групп является точным.*

Действительно, пусть $A \subseteq B \subseteq \mathfrak{z}_\theta(A)$ и группа B является θ-полной. Из θ-полноты группы B следует, что тождественное отображение группы A на себя можно продолжить до гомоморфного отображения φ группы $\mathfrak{z}_\theta(A)$ в B. Пусть теперь $z \in \mathfrak{z}_\theta(A)$. Так как A

плотно вложено в $\mathfrak{z}_\theta(A)$, то $nz \in A$ для некоторого натурального числа n. Если $n=1$, то $z \in A \subseteq B$. Пусть $n>1$, и пусть для всех $m<n$ уже доказано, что если $z \in \mathfrak{z}_\theta(A)$ и $mz \in A$, то $z \in B$. Предположим, что $nz = a \in A$ и $n = pm$, где p — простое число. Тогда

$$p(mz) = a = a\varphi = (nz)\varphi = p[(mz)\varphi],$$

т. е. $p[mz - (mz)\varphi] = 0$. Отсюда имеем или $mz - (mz)\varphi = 0$ или $\mathbf{Z}[mz - (mz)\varphi] \cap A \neq 0$. В обоих случаях, в силу простоты числа p, справедливо $m(z - z\varphi) = mz - (mz)\varphi = a' \in A$. Однако $m<n$ и, таким образом, $z - z\varphi = b \in B$. Но $z\varphi \in B$ и, следовательно, $z = z\varphi + b \in B$, т. е. $B = \mathfrak{z}_\theta(A)$.

Скажем, что пополнения θ и θ' *равны*, если для каждого модуля A найдется такой изоморфизм σ: $\mathfrak{z}_\theta(A) \to \mathfrak{z}_{\theta'}(A)$, что диаграмма

$$\begin{tikzcd} & \mathfrak{z}_\theta(A) \arrow[d, "\sigma"] \\ A \arrow[ur, "\theta(A)"] \arrow[r, "\theta'(A)"'] & \mathfrak{z}_{\theta'}(A) \end{tikzcd}$$

коммутативна. Легко доказать, что равенство пополнений рефлексивно, симметрично и транзитивно.

Согласно [г], стр. 138, теорема 11.3, имеем

(3.2) *При любом пополнении θ модуль $\mathfrak{z}_\theta(A)$ принадлежит инъективной оболочке модуля A.*

Из свойства П2 и [б], стр. 30, теорема 5.4, нетрудно вывести

(3.3) *Естественное вложение Λ-модуля в его инъективную оболочку является пополнением тогда и только тогда, когда кольцо Λ наследственно слева.*

В частности, в случае абелевых групп пополнением будет функция, ставящая в соответствие каждой группе ее естественное вложение в минимальную из содержащих ее делимых групп.

(3.4) *Если пополнения θ и θ' таковы, что θ — точное и совокупности θ-полных и θ'-полных модулей совпадают, то $\theta = \theta'$.*

Действительно, пусть A — некоторый модуль. Так как $\mathfrak{z}_\theta(A)$ является θ'-полным модулем, то ввиду свойств П1 и П2 имеет место коммутативная

диаграмма

$$\begin{tikzcd} A \arrow[r, "\theta(A)"] \arrow[d, "\theta'(A)"'] & \mathfrak{z}_\theta(A) \arrow[d, "e_{\mathfrak{z}_\theta(A)}"] \\ \mathfrak{z}_{\theta'}(A) \arrow[r, "g"] & \mathfrak{z}_\theta(A). \end{tikzcd}$$

Из П3′ вытекает, что g — мономорфизм. Так как модуль $\mathfrak{z}_{\theta'}(A)$ θ-полон, то, ввиду П2 и точности пополнения θ, $\operatorname{Im} g = \mathfrak{z}_\theta(A)$.

Таким образом, для задания точного пополнения достаточно указать класс полных модулей. Однако внутренняя характеристика такого класса не найдена. Для решения этой задачи может оказаться полезной связь пополнений с моноинъективными структурами.

(3.5) *Для всякого пополнения θ совокупность всех θ-полных модулей является классом $\mathfrak{B}$-инъективных модулей некоторой полной плотной моноинъективной структуры $\mathfrak{B}(\mathfrak{S}, \mathfrak{Q})$. При этом f: $A \to B$ принадлежит $\mathfrak{S}$ тогда и только тогда, когда $fg = \theta(A)$ для подходящего g: $B \to \mathfrak{z}_\theta(A)$.*

Действительно, справедливость первого утверждения сразу следует из П1 — П3 и предложения (0.2). Если, далее, $f \in \mathfrak{S}$, то $fg = \theta(A)$, так как, в силу П2, $\mathfrak{z}_\theta(A) \in \mathfrak{Q}$. Если же $fg = \theta(A)$, то $f \in \mathfrak{S}$ ввиду (0.1г).

Имеет место и обращение этого утверждения:

(3.6) *Пусть $\mathfrak{B} = (\mathfrak{S}, \mathfrak{Q})$ — полная плотная моноинъективная структура. Тогда существует такое пополнение θ, что $\mathfrak{Q}$ совпадает с классом θ-полных модулей.*

Действительно, ввиду плотности моноинъективной структуры для каждого модуля A можно выбрать мономорфизм $\theta(A)$: $A \to \mathfrak{z}(A)$ так, что $\theta(A) \in \mathfrak{S}$, $\mathfrak{z}(A) \in \mathfrak{Q}$ и $\operatorname{Im}\theta(A)$ плотен в $\mathfrak{z}(A)$. Если $A \in \mathfrak{Q}$, то осуществим этот выбор, положив $\theta(A) = e_A$. Это возможно, в силу свойства (0.1б). Если f: $A \to B$, то справедливость свойства П1 вытекает из инъективности модуля $\mathfrak{z}(B)$ относительно $\theta(A)$. Справедливость свойств П2 и П3 ясна из построения.

Далее, отметим

(3.7) *Полная прямая сумма θ-полных модулей θ-полна.*

В самом деле, пусть $A = \sum^* A_\alpha$ — полная прямая сумма θ-полных модулей A_α. Проекции A на A_α обозначим через π_α. Ввиду свойства П2 $\theta(A_\alpha)=e_{A_\alpha}$. Поэтому, применяя П1, получаем

$$\pi_\alpha=\pi_\alpha\theta(A_\alpha)=\theta(A)g_\alpha,$$

где $g_\alpha\colon \mathfrak{z}(A)\to A_\alpha$. Выберем $g\colon \mathfrak{z}(A)\to A$ так, что $g\pi_\alpha=g_\alpha$. Если $a\in A$, то

$$a\theta(A)g\pi_\alpha=a\theta(A)g_\alpha=a\pi_\alpha.$$

Отсюда $a\theta(A)g=a$, т. е. g — эпиморфизм. Остается применить П2.

(3.8) *Пусть θ — некоторое пополнение. Тогда эквивалентны следующие свойства Λ-модуля Q:*

1) *модуль Q θ-полон;*

2) *модуль Q инъективен относительно $\theta(F)$ для всякого свободного Λ-модуля F;*

3) *модуль Q — эпиморфный образ θ-пополнения свободного Λ-модуля.*

В самом деле, импликации 1)$\Rightarrow$2) и 3)$\Rightarrow$1) очевидны. Если справедливо 2), то модуль Q инъективен относительно $\theta(F)$, где F свободен и $\pi\colon F\to Q$ — эпиморфизм. Но тогда Q оказывается эпиморфным образом модуля $\mathfrak{z}(F)$, т. е. выполнено 3).

Пополнение θ называется *аддитивным*, если прямая сумма θ-полных модулей θ-полна.

(3.9) *Следующие свойства точного пополнения θ в категории Λ-модулей эквивалентны:*

1) *θ аддитивно;*

2) $\mathfrak{z}_\theta(\dot\sum A_\alpha)\cong\dot\sum\mathfrak{z}_\theta(A_\alpha)$, *причем изоморфизм* φ: $\dot\sum \mathfrak{z}_\theta(A_\alpha)\to\mathfrak{z}_\theta(\dot\sum A_\alpha)$ *может быть выбран так, что* $i_\alpha\theta(\dot\sum A_\alpha)=\theta(A_\alpha)j_\alpha\varphi$, *где i_α — естественное вложение A_α в $\dot\sum A_\alpha$, а j_α — естественное вложение $\mathfrak{z}_\theta(A_\alpha)$ в $\dot\sum\mathfrak{z}_\theta(A_\alpha)$.*

3) *Модуль Q, инъективный относительно мономорфизма $\theta(\Lambda)$, θ-полон.*

Для доказательства импликации 1)$\Rightarrow$2) положим $A=\dot\sum A_\alpha$ и $B=\dot\sum\mathfrak{z}_\theta(A_\alpha)$. Из П1 и П3′ вытекает существование таких мономорфизмов $\varphi_\alpha\colon\mathfrak{z}_\theta(A_\alpha)\to\mathfrak{z}_\theta(A)$, что $i_\alpha\theta(A)=\theta(A_\alpha)\varphi_\alpha$. Но тогда $\varphi=\sum\varphi_\alpha$ — мономорфизм B в $\mathfrak{z}_\theta(A)$, причем $A\theta(A)\subseteq B\varphi$. Поскольку $B\varphi$ θ-полон, из

точности пополнения θ вытекает, что φ — эпиморфизм. Следовательно, φ — изоморфизм, причем

$$i_\alpha\theta(A)=\theta(A_\alpha)\varphi_\alpha=\theta(A_\alpha)j_\alpha\varphi.$$

Если справедливо 2), то рассмотрим Λ-модуль A, инъективный относительно $\theta(\Lambda)$, свободный Λ-модуль F с базой $\{x_\alpha\}$ и гомоморфизм $f\colon F\to A$. По условию 2) существует изоморфизм $\varphi\colon\mathfrak{z}_\theta(F)\to\dot\sum\mathfrak{z}_\theta(\Lambda x_\alpha)$, причем $i_\alpha\theta(F)\varphi=\theta(\Lambda x_\alpha)j_\alpha$, где $i_\alpha\colon\Lambda x_\alpha\to F$ и $j_\alpha\colon\mathfrak{z}_\theta(\Lambda x_\alpha)\to\dot\sum\mathfrak{z}_\theta(\Lambda x_\alpha)$ — естественные мономорфизмы. Пусть f_α — ограничение f на Λx_α. Тогда $f_\alpha=\theta(\Lambda x_\alpha)g_\alpha$, где $g_\alpha\colon\mathfrak{z}_\theta(\Lambda x_\alpha)\to A$. Обозначим через g продолжение системы $\{g_\alpha\}$ на $\dot\sum\mathfrak{z}_\theta(\Lambda x_\alpha)$. Тогда

$$i_\alpha\theta(F)\varphi g=\theta(\Lambda x_\alpha)j_\alpha g=\theta(\Lambda x_\alpha)g_\alpha=i_\alpha f,$$

откуда

$$\theta(F)\varphi g=f.$$

Таким образом, модуль A инъективен относительно $\theta(F)$ и ввиду предложения (3.8) θ-полон. Этим доказана справедливость свойства 3).

$$\begin{tikzcd}
A \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\theta(A)"'] & B \arrow[d, "k"'] \arrow[dr, "\theta(B)"] & \\
\mathfrak{z}(A) \arrow[r, "\pi"] \arrow[dr, "g_1"'] & \mathfrak{z}(A)/K \arrow[d, "h"'] & \mathfrak{z}(B) \arrow[l, "i"'] \\
& \mathfrak{z}(A)/\operatorname{Ker} g \arrow[ur, "g_2"'] &
\end{tikzcd}$$

Рис. 4.

Для доказательства импликации 3)$\Rightarrow$1) рассмотрим прямую сумму $Q=\dot\sum Q_\alpha$ θ-полных модулей Q_α. Пусть $\varphi\colon\Lambda\to Q$. Тогда $\operatorname{Im}\varphi$ принадлежит сумме конечного числа модулей Q_α. Поэтому предложения (3.7) и (3.8) позволяют продолжить φ до гомоморфизма $\mathfrak{z}(\Lambda)$ в Q. Ввиду условия 3) модуль Q является θ-полным.

(3.10) *Если θ — точное пополнение, $f\colon A\to B$ — эпиморфизм, $g\colon\mathfrak{z}_\theta(A)\to\mathfrak{z}_\theta(B)$ и $f\theta(B)=\theta(A)g$, то*

$$\mathfrak{z}_\theta(A)/(\operatorname{Ker}f)\theta(A)=\mathfrak{z}_\theta(B)i\dotplus\operatorname{Ker}g/(\operatorname{Ker}f)\theta(A),$$

где i — такой мономорфизм, что $f\theta(B)i=\theta(A)\pi$, причем π — естественный изоморфизм $\mathfrak{z}_\theta(A)$ на $\mathfrak{z}_\theta(A)/(\operatorname{Ker}f)\theta(A)$; кроме того,

$$\mathfrak{z}_\theta(A)/A\theta(A)\cong\mathfrak{z}_\theta(B)/B\theta(B)\dotplus\operatorname{Ker}g/(\operatorname{Ker}f)\theta(A).$$

Действительно, пусть $g = g_1 g_2$, где g_1 естественный эпиморфизм $\mathfrak{z}(A)$ на $\mathfrak{z}(A)/\mathrm{Ker}\, g$, а g_2 — мономорфизм. Положим $K = (\mathrm{Ker}\, f)\,\theta(A)$. Так как $K \subseteq \mathrm{Ker}\, g$, то $g_1 = \pi h$, где h — естественный эпиморфизм $\mathfrak{z}(A)/K$ на $\mathfrak{z}(A)/\mathrm{Ker}\, g$. Так как $(\mathrm{Ker}\, f)\,\theta(A)\pi = 0$, то найдется такой мономорфизм $k\colon B \to \mathfrak{z}(A)/K$ (рис. 4), что $fk = \theta(A)\pi$. Тогда

$$f\theta(B) = \theta(A)\, g = \theta(A)\, g_1 g_2 = \theta(A)\, \pi h g_2 = f k h g_2.$$

Отсюда, поскольку f — эпиморфизм, имеем $\theta(B) = khg_2$. Еще раз используя свойство П1 и полноту $\mathfrak{z}(A)/K$, найдем такой гомоморфизм $i\colon \mathfrak{z}(B) \to \mathfrak{z}(A)/K$, что $\theta(B)\, i = k$.

Отсюда
$$\theta(B) = \theta(B)\, i h g_2.$$

Согласно свойству П3′ ihg_2, а значит и i, — мономорфизмы. Применяя П2 и учитывая точность пополнения θ, убеждаемся, что ihg_2 — автоморфизм модуля $\mathfrak{z}(B)$. Отсюда

$$i\left[(hg_2)(ihg_2)^{-1}\right] = e_{\mathfrak{z}(B)}.$$

Если $x \in \mathfrak{z}(A)/K$, то $x = y\pi$, где $y \in \mathfrak{z}(A)$. Полагая $\tau = hg_2(ihg_2)^{-1}$, получаем равенство

$$(x - x\tau i)\, hg_2 = yg - yg\,(ihg_2)^{-1}(ihg_2) = 0.$$

Следовательно, $x - x\tau i \in \mathrm{Ker}\, h = \mathrm{Ker}\, g/K$. Таким образом,

$$\mathfrak{z}(A)/K = \mathfrak{z}(B)\, i + \mathrm{Ker}\, g/K.$$

Если $x \in \mathfrak{z}(B)\, i \cap (\mathrm{Ker}\, g/K)$, то $x = zi = y\pi$, где $z \in \mathfrak{z}(B)$, $y \in \mathrm{Ker}\, g$. Отсюда

$$z = x\tau = y\pi\tau = yg\,(ihg_2)^{-1} = 0.$$

Поскольку $f\theta(B)\, i = fk = \theta(A)\pi$, это завершает доказательство первого утверждения. Наконец, полагая $D = \mathrm{Ker}\, g/K$, приходим к соотношению

$$\mathfrak{z}(A)/A\theta(A) \cong [\mathfrak{z}(A)/K]/[A\theta(A)/K] \cong$$
$$\cong [\mathfrak{z}(B)\, i \dotplus D]/Af\theta(B)\, i \cong \mathfrak{z}(B)/B\theta(B) \dotplus D.$$

Модуль называется *θ-редуцированным*, если он не содержит ненулевых θ-полных подмодулей.

(3.11) *Класс θ-редуцированных модулей является классом $\mathfrak{r}$-полупростых модулей для некоторого радикала $\mathfrak{r}$, причем всякий θ-полный модуль оказывается $\mathfrak{r}$-радикальным.*

В самом деле, ясно, что класс $\mathfrak{P}$ θ-редуцированных модулей замкнут относительно подмодулей и полных прямых сумм. Если имеется точная последовательность
$$0 \to A \to B \to C \to 0,$$
где $A,\ C \in \mathfrak{P}$, $D \subseteq B$ и D θ-полон, то по свойству П2 $D \subseteq A$ и, следовательно, $D = 0$. Остается применить предложения (2.1) и (2.12).

Пополнение θ назовем *расширяемым*, если θ-полно всякое расширение θ-полного модуля с помощью θ-полного.

Из предложения (2.10) вытекает

(3.12) *Класс θ-полных модулей является радикальным тогда и только тогда, когда пополнение θ аддитивно и расширяемо; при этом соответствующий полупростой класс совпадает с классом всех θ-редуцированных модулей.*

Расширяемые пополнения тесно связаны с чистотой.

(3.13) *Пусть θ — расширяемое пополнение, и $\mathfrak{Q}$ — класс всех θ-полных модулей. Положим $A \subseteq_\omega B$, если $B = A + S$, где $A \cap S \in \mathfrak{Q}$. Тогда отношение $\subseteq_\omega$ обладает свойствами Ч0′ — Ч4′ и, следовательно, определяет чистоту ω. Совокупность ω-делимых модулей совпадает с $\mathfrak{Q}$.*

Докажем сначала:

а) *Если $A \subseteq B$, $g\colon B \to D$, $\mathrm{Ker}\, g \subseteq A$ и $S \subseteq B$, то $g(A \cap S) = g(A) \cap g(S)$.*

Действительно, если $x \in g(A) \cap g(S)$, то $x = ag = sg$, где $a \in A$, $s \in S$. Отсюда $s = a + k$, где $k \in \mathrm{Ker}\, g \subseteq A$, т. е. $s \in A \cap S$. Таким образом, $g(A \cap S) \subseteq g(A) \cap g(S) \subseteq g(A \cap S)$.

Теперь проверим справедливость свойств Ч0′ — Ч4′. Действительно, Ч0′ очевидно. Далее, если $A \subseteq_\omega B$ и $B \subseteq_\omega C$, то $B = A + S$, $C = B + T$ и $A \cap S$, $B \cap T \in \mathfrak{Q}$. Ясно, что $A + (S + T) = C$. Кроме того,

$$A \cap (S + T) + S = (S + T) \cap (A + S) =$$
$$= (S + T) \cap B = S + B \cap T.$$

Отсюда

$$[A \cap (S + T)]/(A \cap S) \cong [A \cap (S + T)]/[A \cap (S + T) \cap S] \cong$$
$$\cong [A \cap (S + T) + S]/S \cong (B \cap T + S)/S = (B \cap T)/(B \cap S \cap T).$$

Поскольку
$$A \cap S, \quad (B \cap T)/(B \cap S \cap T) \in \mathfrak{Q},$$

то $A \cap (S+T) \in \mathfrak{Q}$ и, следовательно, $A \subseteq_\omega C$. Таким образом, свойство Ч1′ имеет место. Пусть теперь $A \subseteq B \subseteq C$ и $A \subseteq_\omega C$. Тогда $A+S=C$ и $A \cap S \in \mathfrak{Q}$. Отсюда

$$A + B \cap S = B \cap (A+S) = B \cap C = B$$

и

$$A \cap (B \cap S) = A \cap S \in \mathfrak{Q},$$

т. е. $A \subseteq_\omega B$, Ч2′ доказано. Для доказательства свойства Ч3′ допустим, что $A \subseteq_\omega B$ и $K \subseteq A$. Тогда $B = A+S$ и $A \cap S \in \mathfrak{Q}$. Отсюда $B/K = A/K + (S+K)/K$ и, согласно утверждению а),

$$(A/K) \cap [(S+K)/K \cong (A \cap S + K)/K \cong$$
$$\cong (A \cap S)/(A \cap S \cap K) \in \mathfrak{Q}.$$

Таким образом, $A/K \subseteq_\omega B/K$. Пусть теперь $K \subseteq A \subseteq B$, $K \subseteq_\omega B$ и $A/K \subseteq_\omega B/K$. Тогда $A/K + S/K = B/K$, $K+T=B$ и $(A/K) \cap (S/K)$, $K \cap T \in \mathfrak{Q}$. Отсюда

$$A + S \cap T = A + S \cap T + K = A + S \cap (T+K) = A + S = B.$$

Кроме того, применяя а), получаем

$$(A \cap T + K)/K = (A/K) \cap [(T+K)/K] = (A/K) \cap (B/K) = A/K.$$

Отсюда, вторично применив а), приходим к соотношениям

$$(A \cap S \cap T)/(A \cap S \cap T \cap K) \cong (A \cap S \cap T + K)/K \cong$$
$$\cong [(A \cap T + K)/K] \cap (S/K) \cong (A/K) \cap (S/K) \in \mathfrak{Q}.$$

Поскольку $A \cap S \cap T \cap K = T \cap K \in \mathfrak{Q}$, из расширяемости пополнения θ вытекает, что $A \cap (S \cap T) \in \mathfrak{Q}$. Этим доказано, что $A \subseteq_\omega B$, т. е. установлена справедливость свойства Ч4′. Если, далее, $A \in \mathfrak{Q}$ и $A \subseteq B$, то из соотношений $A+B=B$ и $A \cap B = A \in \mathfrak{Q}$ вытекает, что $A \subseteq_\omega B$. Допустим теперь, что модуль A ω-делим. Тогда $A \subseteq_\omega \mathfrak{z}_\theta(A)$, т. е. $A+S = \mathfrak{z}_\theta(A)$ и $A \cap S \in \mathfrak{Q}$. Отсюда $A/(A \cap S) \cong \mathfrak{z}_\theta(A)/S$. Так как $A \cap S$, $\mathfrak{z}_\theta(A)/S \in \mathfrak{Q}$, то $A \in \mathfrak{Q}$.

Предложение (3.13), конечно, не допускает обращения, ибо даже если ограничиться Г-чистотой, из предложения (1.34) видно, что класс Г-делимых модулей не всегда замкнут относительно эпиморфных образов. Предложение (1.33), правда, позволяет

выяснить, когда это так. Однако и после этого не ясно, составят ли Г-делимые модули класс инъективных объектов моноинъективной структуры (а это необходимо, в силу предложения (3.5)). Еще большие трудности возникают при проверке плотности получившейся моноинъективной структуры. Полная ясность имеется лишь в случае $\mathscr{E}$-чистоты, где $\mathscr{E}$-радикальный фильтр.

(3.14) *Если все левые идеалы радикального фильтра $\mathscr{E}$ проективны, то класс $\mathscr{E}$-делимых модулей совпадает с классом θ-полных модулей для некоторого точного расширяемого пополнения θ. Это пополнение аддитивно тогда и только тогда, когда все идеалы из $\mathscr{E}$ компактны.*

Для доказательства достаточно принять во внимание предложения (3.6), (1.55), (1.33), (1.56), (1.58), (1.9), (1.35) и (1.36).

Пополнение, описанное в предложении (3.14), будем называть *$\mathscr{E}$-пополнением.*

Разумеется, предложение (3.14) можно применить для построения пополнений в абелевых группах. При этом из (3.1) и (3.4) вытекает, что соответствующее пополнение определяется фильтром однозначно. Кроме того, учитывая (0.3) и свойства G1 и G3, нетрудно понять, что система $\mathscr{E}$ однозначно определяется совокупностью $\boldsymbol{P}_{\mathscr{E}}$ простых чисел, порождающих идеалы, входящие в $\mathscr{E}$. Оказывается, что в случае групп никаких других пополнений нет.

(3.15) *Всякое пополнение θ в категории абелевых групп является $\mathscr{E}$-пополнением. При этом*

$$\mathscr{E} = \{(\boldsymbol{Z} : x) \mid x \in \mathfrak{z}_\theta(\boldsymbol{Z})\}$$

и θ-полнота группы A равносильна равенству $pA = A$ для всех $p \in \boldsymbol{P}_{\mathscr{E}}$.

Действительно, пусть θ — некоторое пополнение в категории групп. Построим указанную в формулировке систему идеалов $\mathscr{E}$. Если группа A θ-полна, то ввиду предложения (3.8) она инъективна относительно $\theta(\boldsymbol{Z})$. Отсюда нетрудно вывести, что $pA = A$ для всех $p \in \boldsymbol{P}_{\mathscr{E}}$. Учитывая этот факт и вытекающее из П3 включение $\mathfrak{z}_\theta(\boldsymbol{Z}) \subseteq \boldsymbol{R}$, где $\boldsymbol{R}$ — аддитивная группа всех рациональных чисел, легко проверить, что система $\mathscr{E}$ является радикальным фильтром. Согласно предложению (3.14), существует $\mathscr{E}$-пополнение θ'. Ввиду (1.53) класс θ'-полных групп совпадает с классом групп, в которых возможно деление на все p из $\boldsymbol{P}_{\mathscr{E}}$. В силу отмеченного выше, отсюда вытекает, что всякая θ-полная группа θ'-полна. Отсюда, учитывая П1, П3 и включение $\boldsymbol{Z}\subseteq \mathfrak{z}_\theta(\boldsymbol{Z})$, получаем соотношение

$$\boldsymbol{Z}\subseteq \mathfrak{z}_{\theta'}(\boldsymbol{Z})\subseteq \mathfrak{z}_\theta(\boldsymbol{Z})\subseteq \boldsymbol{R}.$$

Но, в силу сделанного выше замечания о θ'-полных группах, из свойства П2 и предложения (3.1) вытекает, что $\mathfrak{z}_{\theta'}(\boldsymbol{Z})$ состоит из всех тех дробей, знаменатели которых являются произведениями простых чисел из $\boldsymbol{P}_{\mathscr{E}}$. Но тогда из определения $\mathscr{E}$ легко вывести, что $\mathfrak{z}_{\theta'}(\boldsymbol{Z})=\mathfrak{z}_\theta(\boldsymbol{Z})$ и $\theta'(\boldsymbol{Z})=\theta(\boldsymbol{Z})$. Положим, далее, $F=\dot{\sum} Z_\alpha$ и $G=\dot{\sum}\mathfrak{z}_\theta(Z_\alpha)$, где $Z_\alpha\cong \boldsymbol{Z}$. Из предложений (3.1), (3.9) и (3.12) вытекает существование изоморфизма φ: $\mathfrak{z}_{\theta'}(F)\to G$, при чем $i_\alpha\theta'(F)\varphi=\theta(Z_\alpha)j_\alpha$, где i_α: $Z_\alpha\to F$ и j_α: $\mathfrak{z}_\theta(Z_\alpha)\to G$ — естественные мономорфизмы. Обозначим через χ естественное вложение G в $H=\sum^*\mathfrak{z}_\theta(Z_\alpha)$. Из предложения (3.7) и свойства П3$'$ вытекает существование такого мономорфизма ψ: $\mathfrak{z}_\theta(F)\to H$, что $\theta(F)\psi=\theta'(F)\varphi\chi$. Пусть π_α — естественная проекция H на $\mathfrak{z}_\theta(Z_\alpha)$. Допустим, что $x\psi\pi_\alpha\neq 0$ для бесконечного множества Ω индексов α. Найдем такое целое число m, что $0\neq mx=$ $=y\theta(F)$. Пусть τ_β — естественная проекция F на Z_β Найдем такой индекс $\alpha_0\in\Omega$, что $y\tau_{\alpha_0}=0$. Отсюда

$$0\neq mx\psi\pi_{\alpha_0}=y\theta(F)\psi\pi_{\alpha_0}=y\theta'(F)\varphi\chi\pi_{\alpha_0}=$$
$$=\sum_\beta (y\tau_\beta)\,i_\beta\theta'(F)\,\varphi\chi\pi_{\alpha_0}=\sum_\beta (y\tau_\beta)\,\theta(Z_\beta)\,j_\beta\chi\pi_{\alpha_0}=$$
$$=(y\tau_{\alpha_0})\,\theta(Z_{\alpha_0})\,j_{\alpha_0}\chi\pi_{\alpha_0}=0.$$

Полученное противоречие показывает, что $\operatorname{Im}\psi\subseteq\operatorname{Im}\chi$. Поэтому, принимая во внимание предложение (3.1), легко понять, что $\psi\chi^{-1}\varphi^{-1}$ — изоморфизм $\mathfrak{z}_\theta(F)$ на $\mathfrak{z}_{\theta'}(F)$, причем

$$\theta(F)\psi\chi^{-1}\varphi^{-1}=\theta'(F)\varphi\chi\chi^{-1}\varphi^{-1}=\theta'(F).$$

Отсюда, применяя предложение (3.8), нетрудно вывести, что классы θ-полных и θ'-полных групп

совпадают, после чего остается только принять во внимание предложения (3.1) и (3.4).

Как отмечено в предложении (3.3), инъективные модули, вообще говоря, могут не образовывать класс θ-полных модулей, так как фактор-модуль инъективного модуля не обязан быть инъективным. Естественно попытаться рассмотреть класс подинъективных модулей. Однако здесь возникают новые осложнения. Проанализируем их. Если имеем цепочку модулей $A\subseteq B\subseteq C$, то подмодуль D модуля C назовем *наростом* подмодуля A относительно пары (B, C), если $D\cap B=A$. Ясно, что среди наростов подмодуля A относительно (B, C) существуют максимальные. Кольцо Λ назовем *наростным*, если для всякого подмодуля K любого свободного Λ-модуля F найдется такой максимальный нарост L подмодуля K относительно $(F, \hat{F})$, где $\hat{F}$ — инъективная оболочка модуля F, что $\hat{F}\setminus K=(L\setminus K)\dotplus H$, причем $F\setminus K\subseteq H$.

Пополнение θ назовем *подинъективным*, если класс θ-полных модулей совпадает с классом подинъективных модулей, а $\theta(F)$ для свободных модулей совпадает с естественным вложением модуля F в его инъективную оболочку $\hat{F}$.

(3.16) *Если в категории Λ-модулей существует точное подинъективное пополнение, то Λ является наростным кольцом.*

Действительно, пусть θ — точное подинъективное пополнение в категории Λ-модулей. Рассмотрим свободный Λ-модуль F и его подмодуль K. Положим $B=F/K$ и обозначим через f естественный эпиморфизм F на B. По определению $\mathfrak{z}_\theta(F)=\hat{F}$. Поэтому ввиду предложения (3.10) имеем

$$\hat{F}/\overline{K}=\mathfrak{z}_\theta(B)\,i\dotplus\operatorname{Ker} g/\overline{K},$$

где g: $\hat{F}\to\mathfrak{z}_\theta(B)$, $f\theta(B)=\theta(F)g$, $\overline{K}=K\theta(F)$, i — мономорфизм и $f\theta(B)i=\theta(F)\pi$, где π — естественный эпиморфизм $\hat{F}$ на $\hat{F}/K$. Если, далее $x\in\operatorname{Ker} g\cap F\theta(F)$, то $x=y\theta(F)$, где $y\in F$. Отсюда $yf\theta(B)=y\theta(F)g=$ $=xg=0$, т. е. $yf=0$ и $x\in\overline{K}$. Следовательно, $\operatorname{Ker} g$ — нарост подмодуля $\overline{K}$ относительно $(F\theta(F), \hat{F})$. Если $x\notin\operatorname{Ker} g$, т. е. $0\neq xg\in\mathfrak{z}_\theta(B)$, то $0\neq\lambda xg=b\theta(B)$ для некоторых $\lambda \in \Lambda$, $b \in B$. Пусть $b = yf$. Ясно, что $y \notin K$. Но

$$[\lambda x - y\theta(F)]\, g = b\theta(B) - yf\theta(B) = 0.$$

Поэтому

$$(\Lambda x + \operatorname{Ker} g) \cap F\theta(F) \nsubseteq \bar{K}.$$

Таким образом, $\operatorname{Ker} g$ — максимальный нарост. Остается заметить, что $F\theta(F)\pi = Ff\theta(B)\, i \subseteq \mathfrak{z}_\theta(B)\, i$.

Из предложений (3.3) и (3.16) вытекает

(3.17) *Всякое наследственное кольцо является наростным.*

(3.18) *Если Λ — наростное кольцо, то в категории Λ-модулей существует подинъективное пополнение.*

Для доказательства ввиду предложений (0.8), (0.2) и (3.6) достаточно установить, что для каждого Λ-модуля A найдется подинъективный модуль Q и гомоморфизм $f\colon A \to Q$ такие, что подинъективные модули инъективны относительно f и $\operatorname{Im} f$ плотен в Q. С этой целью рассмотрим точную последовательность

$$0 \to K \to F \xrightarrow{\pi} A \to 0,$$

где F — свободный Λ-модуль. Обозначим через L максимальный нарост подмодуля K относительно $(F, \hat{F})$, указанный в определении наростного кольца. Пусть $Q = \hat{F}/L$ и $\hat{\pi}\colon \hat{F} \to Q$ — естественный эпиморфизм. Тогда для естественного вложения $i\colon F \to \hat{F}$ имеем $i\hat{\pi} = \pi f$, где $f\colon A \to Q$ (рис. 5). Так как L — нарост Ki относительно $(Fi, \hat{F})$, то f — мономорфизм. По условию, $\hat{F}/Ki = (L/Ki) \dotplus H$, где $Fi/Ki \subseteq H$. Пусть $j\colon H \to \hat{F}/Ki$ — мономорфизм, $\tau\colon \hat{F}/Ki \to H$ — эпиморфизм и $j\tau = e_H$. Ясно, что существует такой мономорфизм $g'\colon Q \to H$, что $\hat{\pi}g' = g\tau$, где g — естественный эпиморфизм $\hat{F}$ на $\hat{F}/Ki$. При этом $ig = ig\tau j$. Пусть теперь $Q' \in \mathfrak{Q}$ и $\varphi\colon A \to Q'$. Ввиду предложения (0.8) $\pi\varphi = i\psi'$, где $\psi'\colon \hat{F} \to Q'$. Если $x \in Ki$, то $x\psi' = 0$. Следовательно, $\psi' = gh$, где $h\colon \hat{F}/Ki \to Q'$. Положив $\psi = g'jh$, получим

$$\pi f\psi = i\hat{\pi}g'jh = ig\tau jh = igh = i\psi' = \pi\varphi,$$

откуда $\varphi = f\psi$. Таким образом, $f \in \mathfrak{S}$. Заметим, что $Q \in \mathfrak{Q}$. Если $0 \neq x \in Q$, то $x = y\hat{\pi}$, где $y \notin L$. Поэтому найдутся такие $\lambda \in \Lambda$ и $z \in L$, что $\lambda y + z \in Fi \setminus Ki$. Отсюда $\lambda y + z = ui$, где $u \in F \setminus K$ и

$$\lambda x = (\lambda y)\hat{\pi} = (\lambda y + z)\hat{\pi} = ui\hat{\pi} = u\pi f \neq 0.$$

Так как $\lambda x = u\pi f \in \operatorname{Im} f$, то подмодуль $\operatorname{Im} f$ плотен в Q.

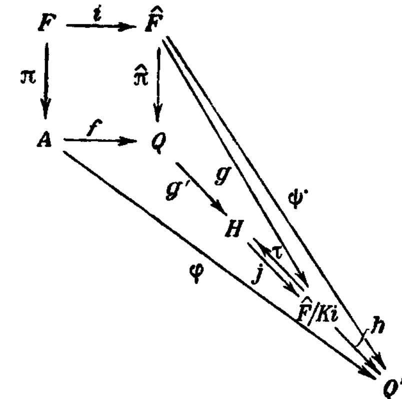

Рис. 5.

Примером наростного кольца служит алгебра Λ над полем из двух элементов с базой 1, ε, δ, где 1 — единица и $\varepsilon^2 = \delta^2 = \varepsilon\delta = \delta\varepsilon = 0$. Действительно, нетрудно проверить, что инъективной оболочкой $\hat{\Lambda}$ модуля Λ является модуль с образующими a, b, c, где $\varepsilon b = \delta a$, $\delta b = 0$, $\delta c = \varepsilon a$, $\varepsilon c = 0$. Нетрудно проверить также, что $\varepsilon\hat{\Lambda}$, $\delta\hat{\Lambda} \subseteq \Lambda$. Пусть $F = \dot{\sum} \Lambda_\alpha$, где $\Lambda_\alpha \cong \Lambda$. Поскольку Λ — нетерово кольцо, прямая сумма $\dot{\sum} \hat{\Lambda}_\alpha$ инъективна ([6], стр. 34, упражнение 8). Отсюда $\hat{F} \subseteq \dot{\sum} \hat{\Lambda}_\alpha$ и, следовательно, $\lambda\hat{F} \subseteq F$ для всякого необратимого элемента λ из Λ. Пусть теперь K — подмодуль модуля F и L — максимальный нарост подмодуля K относительно $(F, \hat{F})$. Обозначим через π естественный эпиморфизм $\hat{F}$ на $\hat{F}/K$. Ясно, что $\pi(F) \cap \pi(L) = 0$. Пусть H — максимальный подмодуль модуля $\hat{F}/K$, содержащий $\pi(F)$ и имеющий нулевое пересечение с $\pi(L)$. Если $x \in \pi(\hat{F}) \setminus [\pi(L)+H]$, то $0 \neq \lambda x + a \in \pi(L)$, где $\lambda \in \Lambda$, $a \in H$, причем λ необратим. Но тогда $\lambda x \in \pi(F) \subseteq H$, т. е. $\lambda x + a \in H \cap \pi(L)$. Противоречие. Таким образом, $\pi(\hat{F}) = \pi(L) \dotplus H$, причем $\pi(F) \subseteq H$, т. е. Λ — наростное кольцо. Заметим еще, что Λ — локальное кольцо. Поэтому каждый проективный Λ-модуль свободен ([131], теорема 2). Следовательно, в Λ нет нетривиальных проективных идеалов. Поэтому Λ не наследственно. Кроме того, из предложения (1.34) вытекает, что подинъективное пополнение не является $\mathscr{E}$-пополнением.

Заметим, что наростных колец не слишком много. Кильп [11] доказал, что *коммутативное кольцо с однозначным разложением на множители наростно тогда и только тогда, когда оно наследственно.*

Так как класс делимых групп совпадает с классом инъективных $\boldsymbol{Z}$-модулей ([6], стр. 172, предложение 5.1), то для обобщения понятия делимости открываются два направления. Одним из них является введение понятия $\mathscr{E}$-делимости, специально рассматривавшейся Гельцером [110]. Хилтон и Яхья [115] изучали $\mathscr{E}$-делимые группы. Согласно предложению (1.53), особо близкое обобщение понятия делимости в группах получается, если система $\mathscr{E}$ состоит из главных левых идеалов. Случай, когда $\mathscr{E}$ состоит из всех таких идеалов, исследовал Хаттори [104]. Леви [147] занимался случаем, когда $\mathscr{E}$ состоит из главных левых идеалов, порожденных неделителями нуля. Условимся называть модули из соответствующих $\mathscr{E}$-делимых классов модулями, ***делимыми в смысле Хаттори*** и ***делимыми в смысле Леви*** соответственно. Модули, делимые в смысле Леви, использовал Левич [18]. Из (1.53) (а также из (1.33)) сразу следует, что класс модулей, делимых в смысле Леви, замкнут относительно эпиморфных образов. Из предложений (1.33) и (1.34) вытекает, что для класса модулей, делимых в смысле Хаттори, это имеет место тогда и только тогда, когда все главные левые идеалы кольца Λ проективны. Отсюда видно, что в общем случае класс модулей, делимых в смысле Хаттори, существенно уже класса модулей, делимых в смысле Леви. Для кольца без делителей нуля эти определения, разумеется, совпадают. Однако и класс модулей, делимых в смысле Леви, не обязан совпадать с классом θ-полных модулей для какого-либо пополнения θ. Действительно, рассмотрим коммутативное кольцо многочленов $P[x, y, z]$ от трех переменных над полем P и обозначим через Ω множество многочленов из $P[x, y, z]$, отличных от констант и не делящихся на x. Пусть $\Lambda' = P[x, y, z, u_F;\ F \in \Omega]$ и H — идеал в Λ', порожденный элементами $u_F F$ и $u_F\ u_G$. Положим $\Lambda = \Lambda'/H$.

(а) *Если φ — неделитель нуля из Λ, то существуют такие $\alpha \in P$, $\psi \in \Lambda$ и $m \geqslant 0$, что $\varphi\psi = \alpha x^m + H$.*

Действительно, пусть $\varphi = x^n\varphi_1 + \varphi_2 + H$, где $\varphi_1 \in P[x, y, z]$, $\varphi_2 \in \sum_{F \in \Omega} \Lambda' u_F$, $\varphi_1 \notin \Lambda' x$, $n \geqslant 0$. Если $\varphi_1 \notin P$, то

$$\varphi(u_{\varphi_1} + H) = x^n \varphi_1 u_{\varphi_1} + \varphi_2 u_{\varphi_1} + H = 0.$$

Если $\varphi_1 = 0$, то $\varphi(u_z + H) = \varphi_2 u_z + H = 0$. Таким образом, $0 \neq \varphi_1 \in P$. Но тогда

$$\varphi(x^n\varphi_1 - \varphi_2 + H) = \varphi_1^2 x^{2n} + H.$$

б) *Если $x\varphi = 0$ в Λ, то $\varphi = 0$.*

Действительно, если $x\varphi = 0$ в Λ и $\varphi = \varphi_1 + \sum \lambda_F u_F + H$, где $\varphi_1 \in P[x, y, z]$ и $\lambda_F \in \Lambda'$, то в Λ' имеет место

$$x\varphi_1 + \sum x\lambda_F u_F = \sum \mu_F u_F F + \sum \nu_{FG} u_F u_G,$$

где $\mu_F \in P[x, y, z]$, $\nu_{FG} \in \Lambda'$. Отсюда $x\varphi_1 = 0$, а значит, $\varphi_1 = 0$. Полагая $x = 0$, получаем

$$\sum \mu_F^0 F^0 u_F + \sum \nu_{FG}^0 u_F u_G = 0.$$

Отсюда $\mu_F^0 = \nu_{FG}^0 = 0$. Но тогда $\mu_F = x\mu_F'$ и $\nu_{FG} = x\nu_{FG}'$, а значит, $\sum \lambda_F u_F = \sum \mu_F' u_F F + \sum \nu_{FG}' u_F u_G \in H$.

Из (а) и (б), в силу (1.53), следует

(в) *Λ-модуль A делим в смысле Леви тогда и только тогда, когда $xA = A$.*

(г) *Если $\varphi + y\psi \in \sum \Lambda u_F$ и φ не зависит от y, то $\varphi \in \sum \Lambda u_F$.*

Действительно, из условия вытекает, что в Λ' справедливо равенство

$$\varphi + y\psi = \sum \xi_F u_F,$$

где $\xi_F \in \Lambda'$. Выбрав из всех ξ_F члены, не зависящие от y, придем к искомому соотношению.

Пусть A — Λ-модуль с образующими $e_0, e_1, \ldots$, причем $xe_0 = ye_0 = ze_0 = u_F e_0 = 0$ для всех $F \in \Omega$, а при $i > 0$ $ye_i = 0$, $xe_i = e_{i-1}$, $u_F e_i = 0$, если $F \in \Omega$. Переменив роли y и z, получим модуль A'. Из (в) следует

(д) *A и A' делимы в смысле Леви.*

Пусть B — Λ-модуль с образующим e_0, причем $xe_0 = ye_0 = ze_0 = u_F e_0 = 0$ при $F \in \Omega$. Конечно, можно считать, что $B \subseteq A$ и $B \subseteq A'$.

(е) *Если $a \in A$ и $za = 0$, то $a \in B$.*

Действительно, пусть $a \in \Lambda e_n \setminus \Lambda R_{n-1}$. Представим a в форме $a = \varphi e_n$, где $\varphi \notin \Lambda x$ и φ не зависит от y. Допустим, что $n \neq 0$. Тогда в свободном Λ-модуле имеет место

$$z\varphi e_n = \varphi_0 x e_0 + \varphi_1 (xe_1 - e_0) + \ldots + \varphi_m (xe_m - e_{m-1}) + \sum_{i \geqslant 0} \psi_i y e_i + \chi z e_0 + \sum_{i \geqslant 0} \sum_{F \in \Omega} \chi_F^{(i)} u_F e_i,$$

причем можно считать, что $m \geqslant n$, а φ_i не зависят от y.

Поскольку $H \subseteq \sum \Lambda u_F$, отсюда вытекает, что элементы $x\varphi_m + y\psi_m$, $x\varphi_{m-1} - \varphi_m + \psi_{m-1}y$, ..., $x\varphi_{n+1} - \varphi_{n+2} + y\psi_{n+1}$, $x\varphi_n - \varphi_{n+1} - y\psi_n - z\varphi$ лежат в $\sum \Lambda u_F$. Применяя (г), последовательно получим, что в $\sum \Lambda u_F$ лежат элементы $x\varphi_m$, $x^2\varphi_{m-1}$, ..., $x^{m-n}\varphi_{n+1}$, $x^{m-n}(x\varphi_n - z\varphi)$. Переходя к равенству в кольце Λ' и собирая в φ_n и коэффициентах при u_F члены, зависящие от z, нетрудно убедиться, что $\varphi = \xi x^{m-n+1} + \sum \eta_F u_F$. Но тогда $a = \varphi e_n = \xi x^{m-n} e_{n-1} \in \Lambda e_{n-1}$, вопреки условию.

Допустим теперь, что класс Λ-модулей, делимых в смысле Леви, θ-полон для некоторого пополнения θ. Пусть $D = \mathfrak{z}_\theta(B)$. Согласно (д) и свойствам П1 и П3 существуют мономорфизмы $f: D \to A$ и $f': D \to A'$, тождественные на B. Так как $xB = 0 \neq B$, то $\operatorname{Im} f' \neq B$. Пусть $a' \in \operatorname{Im} f' \setminus B$, причем $a' = f'(d')$, где $d' \in D$. Тогда $za' = 0$, так как $zA' = 0$. Отсюда $zd' = 0$, т. е. $zf(d') = f(zd') = 0$. Из (е) следует, что $f(d') \in B$, а значит, $d' \in B$. Но тогда $a' = f'(d') \in B$. Противоречие.

Если некоторая полнота θ задана свойствами, не использующими специфику кольца, то естественно постараться выяснить, для каких колец все θ-полные модули окажутся инъективными или подинъективными.

То же самое можно спросить и о модулях, полных в смысле Леви или Хаттори.

Взаимоотношение между инъективностью и делимостью в смысле Леви исследовано для случая, когда основное кольцо Λ обладает двусторонним кольцом частных Q ([147], стр. 141, теорема 3.4). Оказалось, что в этом случае для инъективности каждого делимого в смысле Леви Λ-модуля необходима и достаточна классическая полупростота кольца Q и левая наследственность кольца Λ. При выполнении этих условий кольцо Λ является нетеровым слева. Матлис ([158], теорема 3.3) доказал подинъективность всякого делимого в смысле Леви Λ-модуля для случая, когда Λ—нетерова коммутативная область целостности и всякий ее ненулевой простой идеал максимален. Гельцер ([110], стр. 913, теорема 6.1) установил, что инъективность всех Λ-модулей, делимых в смысле Хаттори, имеет место тогда и только тогда, когда Λ наследственно слева и нетерово слева. Он же указал условия, при которых оказывается инъективным всякий делимый в смысле Леви $\mathfrak{r}_л$-полупростой модуль. Если кольцо Λ обладает левым кольцом частных Q, то, как показал Леви ([147], стр. 140, теорема 3.3), инъективность всех $\mathfrak{r}_л$-полупростых делимых в смысле Леви модулей равносильна классической полупростоте кольца Q.

Можно ставить задачу и о взаимоотношениях между классами $\mathfrak{F}$-делимых и $\mathfrak{F}$-инъективных модулей.

Делимые группы изучены довольно хорошо. Известно описание их строения ([в], стр. 149). Леви [147] обобщил эту теорему на случай наследственного слева кольца, обладающего классическим полупростым двусторонним кольцом частных. Частный случай его результата содержится в работе Понеску и Радо [174].

Делимая группа обладает рядом характеристических свойств. Именно, Длаб [69], Кертес [134] и Селе [201] (см. также [и] стр. 67, упражнение 2; стр. 69, упражнение 32) установили эквивалентность следующих свойств группы A:

1) A — делимая группа;

2) группа A не содержит истинных максимальных подгрупп;

3) группа A не имеет конечных ненулевых эпиморфных образов;

4) группа A не содержит таких подгруппы $H \neq A$ и элемента a, что $H + Za = A$;

5) группа A служит эндоморфным образом для всякой группы, в которой она содержится;

6) A служит прямым слагаемым для всякой содержащей ее группы, для которой она служит эндоморфным образом.

Интересно найти обобщение этого результата.

Интересна также связь делимых групп со слабой сервантностью ([и], стр. 92, предложение h): *если $\hat{A}$ — минимальная делимая группа, содержащая заданную группу A, то подгруппа N группы A слабо-сервантна в A тогда и только тогда, когда $N = A \cap D$ для некоторой делимой подгруппы D группы $\hat{A}$.* Рангасвами [180] рассматривал вопрос, когда утверждение, аналогичное этому предложению, справедливо для некоторой (не обязательно минимальной) делимой группы, содержащей A. Однако в его работе есть ошибки (см. РЖ Мат., 1966, 2А228).

Помимо перечисленных, в литературе встречается и ряд других понятий, напоминающих полноту: квазиинъективность ([10], [54], [80], [100], [129], [163], [183], [215]), малоинъективность ([2], [19]), рациональное расширение ([42]), модули частных ([з], [5], [6], [49], [79], [203], [227], [225], [226]). Однако все эти понятия в случае абелевых групп не приводят к пополнениям, описанным предложением (3.15).

Остановимся еще на одной задаче, связанной с пополнением. Известно, что при некоторых условиях инъективную оболочку кольца можно превратить в кольцо ([144], [171]), которое иногда совпадает с левым кольцом частных. Аналогичной задачей для $\mathfrak{F}$-пополнения занимался Сандерсон [192]. Построение кольца частных с использованием так называемых регулярных инъективных структур предложил Маранда ([154], § 5).

С делимыми группами связана также следующая проблема: когда подгруппа делимой группы является пересечением делимых подгрупп этой группы ([и], проблема 2)? Поставленный вопрос сохраняет смысл для любых θ-пополнений. Для групп ответ получен Кхаббазом [139], Шарлем [55] и Рангасвами [182]. Однако найденное ими описание использует специфику кольца целых чисел. Результат Кхаббаза выведен из теоремы, более перспективной для возможного обобщения.

ДОБАВЛЕНИЕ

Д1. Андрунакиевич и Рябухин [220] охарактеризовали кольца, в категории модулей над которыми существуют лишь тривиальные радикалы.

Д2. На стр. 94 отмечалось, что радикал можно рассматривать как подфунктор тождественного функтора. Производные этого функтора рассматривал Говоров [221], а еще раньше — Диксон [68].

Д3. Фильдхауз [82], [228] установил, что регулярность кольца Λ равносильна тому, что все подмодули любого Λ-модуля универсально чисты в нем. Кольца, не содержащие нетривиальных универсально чистых левых идеалов, рассмотрены в другой его заметке [229]. Рангасвами [244] доказал, что кольцо эндоморфизмов абелевой группы регулярно тогда и только тогда, когда ядра и образы всех ее эндоморфизмов являются ретрактами. Он же отметил, что кольцо эндоморфизмов аддитивной группы регулярного кольца не всегда регулярно.

Д4. Като [236] отметил, что слабо-сервантность всех подгрупп группы G равносильна тому, что порядки элементов группы G свободны от квадратов. Последнее, как показал Кертес ([и], стр. 94, упражнение 27а), равносильно тому, что все подгруппы G являются ретрактами. Рангасвами [244] исследовал группы, в которых образ любого эндоморфизма слабо-сервантен или сервантен. Он же (см. [243]) охарактеризовал группы, в которых всякая слабо-сервантная подгруппа является абсолютным прямым слагаемым. В той же работе рассматривается класс групп, в которых сервантна данная группа. Мията [239] показал, что универсально чистый конечно-порожденный модуль над коммутативным нетеровым кольцом является ретрактом.

Д5. Зафиксируем некоторую группу W и положим $H_0=A$ и $H_{i+1}=\mathrm{Hom}(H_i, W)$. Группа A называется W-периодической, если $a\,\mathrm{Hom}(A, W)=0$ влечет за собой $a=0$ и $H_r\cong H_{r+s}$ для некоторых $r\geqslant 0$ и $s\geqslant 1$. Эта периодичность исследуется в работах Гросса [233]—[235] и Лювена [238].

Д6. Нунке [240] рассматривал на категории групп функтор $S(A)=\mathrm{Im}\,(\mathrm{Hom}(i, e_A))$, где $0\to Z\xrightarrow{i}G\to H\to 0$ — данная точная последовательность, а затем определял чистоту ω, полагая $\omega\,\mathrm{Ext}=S\,\mathrm{Ext}$ (см. предложение (1.4)). Этот аппарат позволил охарактеризовать прямые суммы редуцированных счетных p-групп.

Д7. Ричман и Уокер [245] отметили возможность определения для групп чистот, указанных в предложении (1.20). Если $\mathfrak{H}_\omega=\mathfrak{H}^{\mathfrak{T}}$, где $\mathfrak{T}$ — класс всех периодических групп, то класс редуцированных ω-инъективных групп совпадает с классом редуцированных копериодических групп.

Д8. Голди [230] предложил следующее определение: если A — подмодуль модуля B, то

$$\mathrm{cl}_B A=\{b \mid b\in B,\ (A:B) \text{ плотен в } \Lambda\}.$$

Позже [97] он обобщил это определение, заменив слова «$(A:B)$ плотен в Λ» на «$(A:b)\in\mathscr{E}$, где $\mathscr{E}$ — некоторое множество левых идеалов». Алин и Диксон ([224], стр. 199, предложение (2.1)) установили, что функтор $\mathfrak{t}(A)=\mathrm{cl}_A\mathrm{cl}_A 0$ является кручением — *кручением Голди*. Далее, положим

$$\mathscr{E}'=\{I \mid \mathfrak{t}(\Lambda/I)=\Lambda/I\}$$

и обозначим через $\mathscr{E}$ радикальный фильтр, описанный в предложении (0.5). Пусть $I\in\mathscr{E}'$, $\rho\notin I$ и $\bar\lambda$ — смежный класс из Λ/I, определяемый элементом $\lambda\in\Lambda$. Если $(I:\rho)$ плотен в Λ, то $(I:1\rho)$ плотен в Λ, причем $1\notin I$. В противном случае $\Lambda\mu\cap(I:\rho)=0$ для некоторого $0\neq\mu\in\Lambda$. Поскольку $(\mathrm{cl}\,\bar 0:\bar\rho)$ плотен в Λ, существует $0\neq\sigma\in\Lambda\mu\cap(\mathrm{cl}\,\bar 0:\bar\rho)$. Следовательно, $\sigma\notin(I:\rho)$. Но $\sigma\bar\rho\in\mathrm{cl}\,\bar 0$, т. е. $(I:\sigma\rho)$ плотен в Λ. Таким образом, $\mathscr{E}'\subseteq\mathscr{E}$. Если, наоборот, $I\in\mathscr{E}$, $\rho\notin I$ и $0\neq\mu\in\Lambda$, то при $\mu\rho\in I$ имеем $\mu\bar\rho=\bar 0\in\mathrm{cl}\,\bar 0$, т. е. $\mu\in(\mathrm{cl}\,\bar 0:\bar\rho)$. Если же $\mu\rho\notin I$, то $(\bar 0:\sigma\overline{\mu\rho})=(I:\sigma\mu\rho)$ плотен в Λ для некоторого $\sigma\notin(I:\mu\rho)$. Отсюда $\sigma\mu\rho\notin I$ и, следовательно, $0\neq\sigma\mu\in\Lambda\mu\cap(\mathrm{cl}\,\bar 0:\bar\rho)$. Этим доказано, что $(\mathrm{cl}\,\bar 0:\bar\rho)$ плотен в Λ, т. е. $\bar\rho\in\mathrm{cl}\,\mathrm{cl}\,\bar 0$. Таким образом, $\mathscr{E}\subseteq\mathscr{E}'$, и, согласно предложению (2.16), радикалу Голди соответствует радикальный фильтр, указанный в предложении (0.5). Алин и Диксон рассмотрели функтор $\mathrm{Gold}\,A=(\widehat{A/\mathfrak{t}(A)})/(A/\mathfrak{t}(A))$, где через $\widehat{B}$ обозначена инъективная оболочка модуля B. Если $\mathrm{Gold}\,A=0$ для всех A, то кручение Голди оказывается расщепляемым ([224], стр. 201, следствие 3.3). Доказано также, что точная последовательность $0\to A\to B\to C\to 0$ порождает точную последовательность

$$0\to\mathfrak{t}(A)\to\mathfrak{t}(B)\to\mathfrak{t}(C)\to\mathrm{Gold}\,A\to\mathrm{Gold}\,B\to\mathrm{Gold}\,C\to 0$$

([224], стр. 198, теорема 1.2). Тепли [246] выяснил, когда оказывается инъективной прямая сумма инъективных модулей с нулевым кручением Голди.

Д9. Цукерман доказала, что модули без кручения в смысле Басса образуют $\mathfrak{t}$-полупростой класс для некоторого кручения $\mathfrak{t}$ тогда и только тогда, когда для всякого мономорфизма $f: A\to B$ и любого ненулевого гомоморфизма $\varphi: A\to\Lambda$ найдутся эндоморфизм $\rho:\Lambda\to\Lambda$ и гомоморфизм $\bar\varphi: B\to\Lambda$ такие, что

$\varphi p \neq 0$ и ограничение $\bar{\varphi}$ на A совпадает с φp. Как показали У, Мохицуки и Джанс [247], для артиновых колец это условие равносильно проективности инъективной оболочки кольца. Като [237] и Колби и Раттер [250] исследовали, когда инъективная оболочка модуля без кручения в смысле Басса также не имеет кручения. Из их результатов вытекает, в частности, что условия Цукерман равносильны отсутствию кручения в смысле Басса у инъективной оболочки кольца (ср. 2.29). Этот факт заметила и сама Цукерман. Стефенсон и Цукерман отметили, что полупростота класса проективных модулей (см. стр. 105) влечет за собой проективность всех модулей без кручения в смысле Басса. Они же показали, что для полупростоты класса проективных модулей достаточно первых двух условий, указанных Койфманом.

Д10. Пусть Λ — коновское кольцо (free ideal ring) (РЖ Мат., 1965 4А226). Тогда для каждого Λ-модуля M можно найти точную последовательность вида

$$0 \to \Lambda^n \to \Lambda^m \to M \to 0,$$

где Λ^i — Λ-модуль i-мерных строк. Полагаем $\chi(M) = m - n$. Кон [249] назвал модуль M периодическим, если $\chi(M) = 0$ и $\chi(M') \geqslant 0$ для всех подмодулей $M' \subseteq M$. В случае коммутативных областей главных идеалов это определение совпадает с обычным. Доказывается, что категория всех периодических модулей абелева, артинова и нетерова. Отмечается, что функтор $M \to \mathrm{Ext}^1_\Lambda(M, \Lambda)$ осуществляет двойственность между категориями правых и левых периодических Λ-модулей.

Д11. Некоторые результаты о радикалах в категории модулей над кольцом без единицы анонсировал Келлет [252].

ОТКРЫТЫЕ ВОПРОСЫ

1. Справедливы ли предложения (1.15) и (1.10) для прямых и полных прямых сумм с бесконечным числом слагаемых соответственно? Если нет, то какие свойства чистоты или кольца обеспечивают их справедливость? Обратить внимание на предложения (1.39) и (1.32).

Рохлина заметила, что прямая сумма любого числа ω-плоских модулей будет ω-плоским модулем, если объединение возрастающей последовательности ω-чистых подмодулей всегда является ω-чистым подмодулем. Это может быть выведено из (1.1) и (1.12).

2. Описать все чистоты в абелевых группах.

3. Какие свойства следует добавить к Ч0—Ч4, чтобы соответствующая чистота в случае групп оказалась $\mathscr{E}$-чистотой?

4. Обобщить результаты Фукса ([85], [87]), указанные на стр. 28.

5. Обобщить на модули теорему об алгебраической компактности группы $\left(\sum^* A_i\right)/\left(\dot{\sum} A_i\right)$ (см. стр. 29; [90], проблема 2).

6. Нельзя ли применить к исследованию ω-инъективных модулей топологические методы (см. [90], проблема 1)?

7. При каких условиях чистоты, определенные в предложениях (1.16) и (1.20), являются котреугольной и треугольной соответственно?

8. Для каких систем Γ Γ-чистота оказывается инъективно замкнутой? инъективной? проективной? (см. предложения (1.29), (1.49), (1.51)).

9. Нельзя ли всякий ω-плоский (в частности, Γ-плоский) модуль получить как предел прямого спектра ω-проективных (Γ-проективных) (см. стр. 36)?

10. При каких условиях фактор-модуль ω-делимого модуля по ω-чистому подмодулю ω-делим?

Тот же вопрос для Г-чистоты и $\mathscr{E}$-чистоты (см. (1.33), (1.34) и стр. 33).

11. При каких условиях всякий ω-чистый подмодуль ω-плоского модуля является ω-плоским? Тот же вопрос для Г-чистоты и $\mathscr{E}$-чистоты (см. (1.40), (1.41) и стр. 33).

12. Исследовать взаимоотношение между ω-инъективностью и ω-делимостью (см. предложение (1.46) и стр. 127—130).

13. Справедливо ли утверждение, обратное предложению (1.55)?

14. Исследовать ω-инъективные кольца (в частности, Г-инъективные и $\mathscr{E}$-инъективные).

15. При каких условиях всякий ω-чистый подмодуль данного модуля выделяется прямым слагаемым (см. стр. 67, 79, 80, а также Д4)?

16. Не будет ли $\tilde{\mathscr{E}}$-чистота совпадать с Г-чистотой для некоторой системы Г?

17. При каком выборе идеалов $\mathfrak{J}_A$ и $\mathfrak{D}_A$ отношения $<_{\mathfrak{J}}$ и $<^{\mathfrak{D}}$ обладают свойствами Ч0′—Ч4′ (см. стр. 75—76)?

18. Не будет ли отношение $\subseteq_{\omega в}$ обладать свойством Ч4′ для произвольной чистоты (см. предложение (1.68))?

19. Для каких чистот ω класс $\mathfrak{H}_{\omega в}$ состоит только из ретракций?

20. Охарактеризовать ω-проективные и ω-инъективные группы, если ω — сервантно-высокая или слабо-сервантно-высокая чистота (см. стр. 78—79).

21. Исследовать ω-чистые оболочки (см. стр. 130).

22. При каких условиях все подмодули данного модуля ω-чисты в нем (см. стр. 80, а также Д4)?

23. Исследовать взаимоотношение между ω-чистыми подмодулями модуля A и идеалами кольца $\mathrm{Hom}_\Lambda(A, A)$, в частности для сервантной чистоты (см. стр. 80; [90], стр. 31, проблема 34).

24. При каких условиях оказываются кручениями радикалы, описанные в (2.32) (2.33) и на стр. 105?

25. Описать те чистоты ω в категории абелевых групп, для которых класс ω-плоских групп совпадает с классом $\mathfrak{r}$-полупростых групп для данного кручения $\mathfrak{r}$ (см. предложения (2.15), (2.29) и (2.30), а также стр. 104).

26. Для каких колец являются полупростыми классы локально проективных и локально свободных модулей (см. стр. 105)?

27. В каких случаях инъективен радикал инъективного модуля?

28. При каких условиях $\mathfrak{r}$-периодический $\mathfrak{r}$-копериодический модуль оказывается $\mathscr{E}$-инъективным (см. стр. 97)?

29. Существенно ли в предложении (2.21) предложение, что $\mathfrak{r}(\Lambda)=0$?

30. Будет ли справедливо равенство $\mathrm{Ext}^2_\Lambda(A, B)=0$, если A — $\mathfrak{r}$-бэровский, а B — произвольный Λ-модули?

31. Дать описание $\mathfrak{r}$-бэровских групп (см. стр. 100; [и], стр. 203, проблема 30).

32. Охарактеризовать Λ-модули, удовлетворяющие соотношению $\mathrm{Ext}^1_\Lambda(A, \Lambda)=0$, в частности для $\Lambda=\boldsymbol{Z}$ (см. стр. 100: проблема Уайтхеда).

33. Существенна ли инъективная замкнутость чистоты ω для справедливости включения $\mathfrak{H}_{\omega_*}\subseteq\mathfrak{H}_\omega$ в предложении (2.30)?

34. Существенна ли конечная порожденность модуля F_α во втором утверждении предложения (2.31)? Нельзя ли придать этому предложению форму, не предполагающую проекционную конечность U_α.

35. При каких условиях функтор $\mathfrak{r}(A)=\mathrm{Ker}(\varphi\otimes e_A)$, где φ — гомоморфизм в обобщенное кольцо частных (см. [5] и предложение (2.36)) является радикалом (и, в частности, кручением)?

36. Будет ли всегда полупростым класс $\mathfrak{T}$, рассмотренный Плезантом (см. стр. 110)?

37. Какие свойства $\mathfrak{r}$-полупростого и $\mathfrak{r}$-радикального класса равносильны расщепляемости кручения $\mathfrak{r}$?

38. Какими свойствами обладает кольцо, в котором расщепляется кручение, определяемое данным радикальным фильтром $\mathscr{E}$ (в частности, для радикальных фильтров, указанных в предложении (0.5) и (0.6))? Те же вопросы сохраняют смысл для расщепляемости всех конечно-порожденных модулей (см. стр. 110—112, а также Д1 и Д8).

39. При каких условиях $\mathfrak{r}$-расщепляем всякий $\mathscr{E}$-делимый модуль, где $\mathscr{E}$-радикальный фильтр, соответствующий кручению $\mathfrak{r}$?

Заметим, что в случае групп соответствующее расщепление имеет место всегда.

40. Обобщить на случай модулей критерии расщепления, упомянутые на стр. 111—112.

41. Охарактеризовать кольца, над которыми класс модулей без кручения в смысле Басса является полупростым (см. (2.39), а также Д9)?

42. Существуют ли неточные и неправильные пополнения?

43. Охарактеризовать класс θ-полных модулей (ср. предложения (2.10), (2.12)).

44, Найти характеризации θ-полных модулей, аналогичные перечисленным на стр. 130. Тот же вопрос для ω-делимых модулей, в частности для $\mathscr{E}$-делимых.

45. Охарактеризовать класс θ-редуцированных модулей.

46. Определяется ли полнота θ классом θ-редуцированных модулей?

47. При каких условиях радикал, указанный в предложении (3.11), оказывается кручением?

48. Описать все чистоты ω в категории групп, для которых класс ω-делимых групп совпадает с классом θ-полных групп для данного пополнения θ (см. предложения (3.13) и (3.15)).

49. Описать наростные кольца, отличные от наследственных.

50. При каких условиях класс модулей, делимых в смысле Леви, совпадает с классом θ-полных модулей для некоторого пополнения θ?

51. Для каких колец всякий модуль, делимый в смысле Леви (соответственно в смысле Хаттори), подинъективен (см. стр. 127—129)?

52. Какие условия надо наложить на кольцо Λ и пополнение θ для того, чтобы Λ-модуль $\mathfrak{z}_\theta(\Lambda)$ можно было бы превратить в кольцо с сохранением модульных операций (см. стр. 130)?

53. Для каких пополнений θ отношение

$$[A \subseteq_\omega B] \Leftrightarrow [A = B \cap \mathfrak{z}_\theta(A) \text{ в } \mathfrak{z}_\theta(B)]$$

определяет чистоту (см. стр. 130)?

ЛИТЕРАТУРА

КНИГИ

[а] Джекобсон Н., Строение колец, ИЛ, 1961.
[б] Картан А., Эйленберг С., Гомологическая алгебра, ИЛ, 1960.
[в] Курош А. Г., Теория групп, «Наука», 1967.
[г] Маклейн С., Гомология, «Мир», 1966.
[д] Скорняков Л. А., Дедекиндовы структуры с дополнениями и регулярные кольца, Физматгиз, 1961.
[е] Стинрод Н., Эйленберг С., Основания алгебраической топологии, Физматгиз, 1958.
[ж] Хилтон П., Уайли С., Теория гомологий, «Мир», 1966.
[з] Bourbaki N., Algébre commutative, Paris, Hermann, 1961.
[и] Fuchs L., Abelian groups, Budapest, 1958.
[к] Kaplansky I., Infinite Abelian groups, Ann. Arbor, 1954.
[л] Northcott D. G., An introduction to homological algebra, Cambridge Univ. Press, 1960.

СТАТЬИ

1. Говоров В. Е., Кольца, над которыми плоские модули являются свободными, ДАН СССР 144, № 2 (1962), 265—267.
2. Говоров В. Е., Малоинъективные модули, Алегебра и логика (семинар) 2, № 6 (1963), 21—50.
3. Говоров В. Е., О плоских модулях, Сиб. матем. ж. 6 (1965), 300—304.
4. Горбачук Е. Л., Расщепляемость кручения в категории правых Λ-модулей, Матем. заметки 2 (1967), 681—688.
5. Елизаров В. П., О кольцах частных ассоциативных колец, Изв. АН СССР (сер. матем.) 24 (1960), 153—170.
6. Елизаров В. П., О модулях частных, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 221—226.
7. Журавский В. С., Обобщение некоторых критериев расщепления смешанных абелевых групп, Матем. сб. 51 (1960), 377—382.
8. Журавский В. С., К вопросу о расщеплении смешанных абелевых групп, Уч. зап. Брестск. гос. пед. ин-та, вып. 3 (1960), 63—71.

9. Иоффе Л. Ш., Радикал модуля, Сиб. матем. ж. 5 (1964), 820—826.
10. Кильп М. А., Квазиинъективные группы, Вестн. МГУ, матем., механ., № 3 (1967), 3—4.
11. Кильп М. А., О наростных кольцах, Сиб. матем. ж. 8 (1967), 1193—1196.
12. Койфман Л. А., Радикал модуля, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 1204—1207.
13. Кузьминов В., О производных функторах проективного предела. Сиб. матем. ж. 7 (1967), 333—345.
14. Куликов Л. Я., Обобщенные примарные группы, Тр. Московск. матем. об-ва, 1, 1 (1952), 247—326; II, 2 (1953), 85—167.
15. Куликов Л. Я., Универсально полные абелевы группы, Тр. III Всесоюзного матем. съезда (Москва, 1956), 26—28.
16. Курош А. Г., Радикалы в теории групп, ДАН СССР 141 (1961), 789—791.
17. Курош А. Г., Радикалы в теории групп, Сиб. матем. ж. 3 (1962), 912—931; поправка: Сиб. матем. ж. 6 (1965), 715.
18. Левич Е. М., Модули над кольцом полиномов от одного эндоморфизма, Латв. матем. ежегодник 2 (1966), 127—174.
19. Мишина А. П., Об автоморфизмах и эндоморфизмах абелевых групп, Вестн. МГУ, матем., механ. № 4 (1962), 39—43.
20. Рудык Б. М., К теории расщепляемости смешанных абелевых групп, Вестн. МГУ, сер. 1, 3 (1965), 20—27.
21. Рудык Б. М., Расширение модулей, ДАН СССР 179 (1968), 545—547.
22. Рябухин Ю. М., Радикалы в категориях, Изв. АН Молд. ССР, сер. физ.-матем. и техн. наук № 4 (1964), 58—74.
23. Рябухин Ю. М., Классификация наследственных радикалов абелевых групп, сб. «Материалы IV Конференции молодых ученых Молдавии, 1964, секц. физ.-матем.», Кишинев, 1965, 74—75.
24. Скорняков Л. А., О коновских кольцах, Алгебра и логика (семинар) 4, № 3 (1965), 5—30.
25. Чан Ван Хао, О полупростых классах групп, Сиб. матем. ж. 3 (1962), 943—949.
26. Черников С. Н., Группы с системами дополняемых подгрупп, Матем. сб. 35 (1954), 93—128.
27. Шмелькин А. Л., Одно свойство полупростых классов групп, Сиб. матем. ж. 3 (1962), 950—951.
28. Шульгейфер Е. Г., Функторная характеризация строгих радикалов в категориях, Сиб. матем. ж. 7 (1966), 1412—1421.
29. Abian A., Rinehart D., Honest subgroups of abelian groups, Rend. Circolo mat. Palermo 12 (1963), 353—356.
30. Alin J., Primary decomposition of modules, Notices Amer. Math. Soc. 14 (1967), 529.
31. Asano K., Uber die Quotientenbildung von Schiefringen, J Math. Soc. Japan 2 (1949), 73—79.
32. Auslander M., Modules over unramified regular local rings, III. J. Math. 5 (1961), 631—647.

33. Auslander M., Modules over unramified regular local rings, Proc. Intern. Congr. of Math., 1962, Uppsala, 1963, 230—233.
34. Auslander M., Coherent functors, Proc. of the conference of categorical algebra, La Jolla, 1965, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, № 9 (1966), 189—231.
35. Auslander M., Remarks on a theorem of Bourbaki, Nagoya Math. J. 27 (1966), 361—369.
36. Balcerzyk S., On algebraically compact groups of I. Kaplansky, Fundam. math. 44 (1957), 91—93.
37. Balcerzyk S., On factor groups of some subgroups of a complete direct sum of infinite cyclic groups, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. 7 (1959), 141—142.
38. Balcerzyk S., On classes of abelian groups, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. 9 (1961), 327—329.
39. Balcerzyk S., On groups of functions defined on Boolean algebras, Fundam. nath. 50 (1962), 347—367.
40. Balcerzyk S., On classes of abelian groups. Fundam math. 51 (1962), 149—179; поправка: Fundam. math. 56 (1964), 199—202.
41. Banaschewski B., Quotient extensions of modules, Math. Nachr. 28 (1965), 245—255.
42. Bass H., Finitistic homological dimension and a homological generalization of semi-primary ring, Trans. Amer. Math Soc. 95 (1960), 466—488.
43. Bass H., Torsion free and projective modules, Trans. Amer. Math. Soc. 102 (1962), 319—327.
44. Beaumont R., Pierce R., Torsion-free rings, III. J. Math. 5 (1961), 61—98.
45. Bessere A., Quelques propriétés d'un couple de modules, C. r. Acad. sci. 259 (1964), 22—23.
46. Bessere A., Micali A., Quelques résultats sur les algêbraes universelles, C. r. Acad. sci. 260 (1965), 2658—2659.
47. Boyer D., Walker E., Almost locally pure abelian groups, Pacif. J. Math. 9 (1959), 409—413.
48. Buchsbaum D., A note on homology in categories, Ann. Math. 69 (1959), 66—74.
49. Budach L., Zum Begriff des Modulquotienten, Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin. 6 (1964), 81—85.
50. Bumby R. T., Modules which are isomorphic to submodules of each other, Arch. math. 16 (1965), 184—185.
51. Butler M. C. R., A class of torsion-free abelian groups of finite rank, Proc. Lond. Math. Soc. 15 (1965), 680—698
52. Butler M. C. R., Torsion-free modules and diagrams of vector spaces, Proc. Lond. Math. Soc. 18 (1968), 635—652.
53. Butler M. C. R., Horrocks G., Classes of extensions and resolutions, Philos. Trans. Roy. Soc. London A254 (1961), 155—222.
54. Chaptal N., Sur les modules quasi-injectifs, C. r. Acad. sci. 264, № 4 (1966), A173—A175.
55. Charles B., Une caracterisation des intersections de sous-groupes divisibles, C. r. Acad. sci. 250 (1960), 256—257.
56. Charles B., Étude sur les sous-groupes d'un groupe abélien, Bull. Soc. math. France 88 (1960), 217—227.

57. Charles B., Note sur la structure des groupes abéliens primaires, C. r. Acad. sci. **252** (1961), 1547—1548.
58. Chase S., Direct product of modules, Trans. Amer. Math. Soc. 97 (1960), 457—473.
59. Chase S., Torsion-free modules over $K[x, y]$, Pacif. J. Math. **12** (1962), 437—447.
60. Chase S., Locally free modules and a problem of Whitehead, Ill. J. Math. **6** (1962), 682—699.
61. Chase S., Function topologies on abelian groups, Ill. J. Math. 7 (1963), 593—608.
62. Chase S., On group extensions and a problem of J. H. C. Whitehead, Topics in Abelian groups, Proc. Symp. on Abelian groups New Mexico state Univ., 4—8 June 1962, 1963, 173—194.
63. Cohn P. M., On the free product of associative rings. Math. Z. 71 (1959), 380—398.
64. Dickson S. E. On torsion classes of Abelian groups. J. Math. Soc. Japan 17 (1965), 30—35.
65. Dickson S. E, Noetherian splitting rings are artinian, J. Lond. Math. Soc. 42 (1967), 732—736.
66. Dickson S. E., Decomposition of modules, I, Classical rings, Math. Z. **90** (1965), 9—13. II, Rings without chain conditions Math. Z. **104** (1968), 349—357.
67. Dickson S. E., A torsion theory for Abelian categories, Trans. Amer. Math. Soc. 121 (1966), 223—235.
68. Dickson S. E., Direct decompositions of radicals, Proc. of the conference of categorical algebra, La Jolla, 1965, Springer-Verlag, Berlin—Heidelberg, № 9, (1966), 366—374.
69. Dlab V., Заметка к теории полных абелевых групп, Чехослов. матем. ж. 8 (1958), 54—61.
70. Dlab V., The concept of rank and some related questions in the theory of modules, Comment. Math. Univ. Carolinae 8, N 1 (1967), 39—47.
71. Dlab V., The structure of torsion-free rings, Comment. Math. Uvin Carolinae 9 (1968), № 1, 41—45.
72. Dlab V., Distinguished sets of ideals of a ring, Чех. мат. ж. 18 (1968), 560—567.
73. Dlab V., The concept of torsion module (препринт).
74. Dlab V., Rings over which every module splits (препринт).
75. Dubois D., Modules of sequences of elements of a ring, J. Lond. Math. Soc. 41 (1966), 177—180.
76. Dubois D., Cohesive groups and p-adic integers, Publs math. 12, N 1—4 (1965), 51—58.
77. Eilenberg S., Moore J., Foundations of relative homological algebra, Mem. Amer. Math. Soc. **55** (1964), 39 pp.
78. Endo Sh., On semi-hereditary rings, J. Math. Soc. Japan **13** (1961), 109—119.
79. Enochs E., Torsion-free covering modules, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 884—889.
80. Faith C., Utumi Y., Quasi-injective modules and their endomorphism rings, Arch. Math. 15 (1964), 166—174.
81. Feller E., Swokowski E., The ring of endomorphisms of a torsion-free module, J. Lond. Math. Soc. **39** (1964), 41—42.

82. Fieldhous D., Pure projectivity, Notices Amer. Math. Soc. 14 (1967), 678.
83. Findlay G. D., Lambek J., A generalized ring of quotients, I, Canad. Math. Bull. **1** (1958), 77—85; II, Canad. Math. Bull. 1 (1958), 155—167.
84. Fuchs L., On generalized pure subgroups of abelian groups, Ann. Univ. scient. Budapest, sec. math. **1** (1958), 41—47.
85. Fuchs L., Notes on Abelian groups, I, Ann. Univ. scient. Budapest, sec. math. **2** (1959), 5—23; II, Acta math. Acad. scient. hung. **11** (1960), 117—125.
86. Fuchs L., On character groups of discrete abelian groups, Acta math. Acad. scient. hung. **10** (1959), 133—140.
87. Fuchs L., Über reine Untergruppen abelscher Gruppen, Atti sestro corg. unione mat. ital. Tenuto Napoli 11—16 sett. 1959, Roma Ed. Cremonese, 1960, 249—250.
88. Fuchs L., On algebraically compact abelian groups, J. Natur. Sci. and Math. **3** (1963), 73—82.
89. Fuchs L., Note on factor groups in complete direct sums, Bull. Acad. polon. sci, sér. sci. math., astron. et phys. **11** (1963), 39—40.
90. Fuchs L., Recent results and problems on Abelian groups, Topics in Abelian groups, Proc. Symp. on Abelian groups New Mexico state Univ. 4—8 June 1962, 1963, 9—40.
91. Fuchs L., Some generalizations of the exact sequences concerning Hom and Ext, Proc. colloq. on Abelian groups, 1963, Budapest, Hung. Acad. Sci., 1964, 57—76.
92. Gabriel P., Des catégories abéliennes, Bull. Soc. Math. France **90** (1962), 323—448.
93. Gabriel P., Popescu N., Characterization des catégories abéliennes avec générateurs et limites inductives exactes, C. r. Acad. Sci. Paris **258** (1964), 4188—4190.
94. Gentile E., On rings with one sided field of quotients, Proc. Amer. Math. Soc. **11** (1960), 380—384.
95. Gewirtzman L., Anti-isomorphisms of the endomorphism rings of a class of free modules, Math. Ann. **159** (1965), 278—284.
96. Gewirtzman L., Anti-isomorphisms of the endomorphism rings of torsion-free modules, math. Z. **98** (1967), 391—400.
97. Goldie A. W., Localization in non-commutative Noetherien gings, J. Algebra **5** (1967), 89—105.
98. Golema K., Hulanicki A., The structure of the factor group of the unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups, II, Fundam. math. **53** (1964), 177—185.
99. de Groot J., Equivalent abelian groups, Canad. J. Math. **9** (1957), 291—297.
100. Harada M., Note on quasi-injective modules, Osaka J. Math. **2** (1965), 351—356.
101. Harrison D. K., Infinite abelian groups and homological methods, Ann. Math. **69** (1959), 366—391.
102. Harrison D. K., Two problems of L. Fuchs, Publs Math. Debrecen 7 (1960), 316—319.
103. Harrison D. K., Irwin J. M., Peercy C. L., Walker E. A., High extensions of Abelian groups, Acta math. Acad. scient. hung. **14** (1963), 319—330.

104. H a t t o r i A., A foundation of torsion for modules over general rings, Nagoya Math. J. 17 (1960), 147—158.
105. H e a d T., Dense submodules, Proc. Amer. Math. Soc. **13** (1962), 197—199.
106. H e a d T., Remarks on a problem in primary Abelian groups, Bull. Soc. math. France **91** (1963), 109—112.
107. H e a d T., Purity in compactly generated modular lattices, Acta math. Acad. scient. hung. **17** (1966), 55—59.
108. H e a d T., A direct limit representation for Abelian groups with an application to tensor sequences, Acta math. Acad. scient. Hung. 18 (1967), 231—234.
109. H e a d T., Tensor sequence of Abelian groups, Notices Amer. Math. Soc. **14** (1967), 261.
110. H e l z e r G., On divisibility and injectivity, Canad. J. Math. **18** (1966), 901—919.
111. H i l l P. D., Quasi-closed primary groups Acta math. Acad. scient. hung. **16** (1965), 271—274.
112. H i l l P. D., Pure subgroups having prescribed socles, Bull. Amer. Math. Soc. **71** (1965), 608—609.
113. H i l l P. D., M e g i b b e n Ch., Minimal pure subgroups in primary groups, Bull. Soc. math. France **92** (1964), 251—257.
114. H i l t o n P., Remark on the tensor product of modules, Bull. Acad. polon. sci., ser. sci. math., astron. et phys. **4** (1956), 325—328.
115. H i l t o n P., Y a h y a S., Unique divisibility in Abelian groups, Acta math. Acad. scient. hung. **14** (1963), 229—239.
116. H o c h s c h i l d G., Relative homological algebra, Trans. Amer. Math. Soc. **82** (1956), 246—269.
117. H u l a n i c k i A., Algebraic characterization of abelian divisible groups which admit compact topologies, Fundam. math. **44** (1957), 192—197.
118. H u l a n i c k i A., Algebraic structure of compact abelian groups, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. **6** (1958), 71—73.
119. H u l a n i c k i A., On algebraically compact groups. Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. **10** (1962), 71—75.
120. H u l a n i c k i A., The structure of the factor group of the unrestricted sum by the restricted sum of abelian groups, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. **10** (1962), 77—80.
121. H u l a n i c k i A., N e w m a n M., Existence of unrestricted direct products with one amalgamated subgroup, J. Lond. Math. Soc., **38** (1963), 169—175; поправка: J. Lond. Math. Soc. **39** (1964), 672.
122. I r w i n J., P e e r c y C., W a l k e r E., Splitting properties of high subgroups, Bull. Soc. math. France **90** (1962), 185—192.
123. I r w i n J., R i c h m a n F., Direct sums of countable groups and related concepts, J. Algebra **2** (1965), 443—450.
124. I r w i n J., W a l k e r C., W a l k e r E., On p^{α}-pure sequences in Abelian proups, Topics in Abelian groups, Proc. Symp. on Abelian groups New Mexico state Univ. 4—8 June 1962, 1963. 69—119.

125. I r w i n J., W a l k e r E., On N-high subgroups of Abelian. groups, Pacif. J. Math. **11** (1961), 1363—1374.
126. I r w i n J., W a l k e r E., On isotype subgroups of Abelian groups, Bull. Soc. math. France **89** (1961), 451—460.
127. J a n s J., On finitely generated modules over Noetherian rings, Trans. Amer. Math. Soc. **106** (1963), 330—340.
128. J a n s J., Some aspects of torsion, Pacif. J. Math. **15** (1965), 1249—1259.
129. J o h n s o n R. E., W o n g E. T., Quasi-injective modules and irreducible rings, J. Lond. Math. Soc. **36** (1961), 260—268.
130. K a p l a n s k y I., Modules over Dedekind rings and valuation rings, Trans. Amer. Math. Soc. **72** (1952), 327—340.
131. K a p l a n s k y I., Projective modules, Ann. Math. **68** (1958), 372—377.
132. K a p l a n s k y I., A characterization of Prufer rings, J. Indian Math. Soc. **24** (1960), 279—281.
133. K a p l a n s k y I., The splitting of modules over integral domains, Arch. Math. **13** (1962), 341—343.
134. K e r t é s z A.,On subgroups and homomorphic images, Publs Math. Debrecen **3** (1953), 174—179.
135. K e r t é s z A., Beiträge zur Theorie der Operatormoduln, Acta math. Acad. scient. hung. 8 (1957), 235—257.
136. K e r t é s z A., Über die allgemeine Theorie linearer Gleichungssysteme, Bull. math. Soc., sci. math. et phys. RPR **1** (1957), 303—307.
137. K e r t é s z A., Systems of equations over modules. Acta scient. math. Szeged 18 (1957), 207—234; поправка: ibid **19** (1958), 251—252.
138. K e r t é s z A., Eine kennzeichnende Eigenschaft der injectiven Moduln, Wiss. Z. Martin-Luther-Univ. Halle—Wittenberg Math.-Natur. Reihe **11** (1962), 737—739.
139. K h a b b a z S., The subgroups of a divisible group G which can be represented as intersections of divisible subgroups of G, Pacif. J. Math. **11** (1961), 267—273.
140. K i e ł p i ń s k i R., On Γ-pure injective modules, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. **15** (1967), 127—131.
141. K o e h l e r J. E., The type set of a torsion-free group of finite rank, Ill. J. Math. **9** (1965), 66—86.
142. K o l e t t i s W., A theorem on pure submodules, Canad. J. Math. **12** (1960), 483—487.
143. L a f o n J., Quelques résultats sur le dual d'un module de type fini sur un anneau commutatif et applications à l'étude des modules tels que leurs anneaux d'endomorphismes soient commutatifs, C. r. Acad. sci. **249** (1959), 1849—1851.
144. L a m b e k J., On Utumi's ring of quotients, Canad. J. Math. **15** (1963), 363—370.
145. L a m b e k J., A module is flat if and only if its character module is injective, Canad Math. Bull. **7** (1964), 237—243.
146. L a z a r d D., Sur les modules plats, C. r. Acad. sci. **258**, N 26 (1964), 6313—6316.
147. L e v y L., Torsion-free and divisible modules over non-integral-domains, Canad. I. Math. **15** (1963), 132—151.

148. Łoś J., Abelian groups that are direct summands of every abelian group which contains them as pure subgroups, Fundam. math. 44 (1957), 84—90.
149. Łoś J., Linear equation and pure subgroups, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. 7 (1959), 13—18.
150. Łoś J., Generalized limits in algebraically compact groups, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. 7 (1959), 19—21.
151. Maddox B., Absolutely pure modules, Proc. Amer. Math. Soc. 18 (1967), 155—158.
152. Mader A., A characterization of completions of direct sums of cyclic groups, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. 15 (1967), 231—233.
153. Maranda J. M., On pure subgroups of Abelian groups, Arch. Math. 11 (1960), 1—13.
154. Maranda J. M., Injective structures, Trans. Amer. Math. Soc. 110 (1964), 98—135.
155. Maranda J. M., Completions of modules and rings, Trans. Roy. Soc. Canada, 1965, 271—291.
156. Matlis E., Injective modules over Noetherian rings, Pacif. J. Math. 8 (1958), 511—528.
157. Matlis E., Injective modules over Prufer rings, Nagoya Math. J. 15 (1959), 57—69.
158. Matlis E., Divisible modules, Proc. Amer. Math. Soc. 11 (1960), 385—392.
159. Matlis E., Cotorsion modules, Mem. Amer. Math. Soc. 49 (1964), 66 pp.
160. Megibben Ch., A note on a paper of Bernard Charles (Étude sur les sous-groupes d'un groupe abélien), Bull. Soc. Math. France, 91 (1963), 453—454.
161. Megibben Ch., Kernels of purity in Abelian groups, Publs math., 11 (1964), 160—164.
162. Megibben Ch., On subgroups of primary abelian groups, Publs math. 12 (1965), 293—294.
163. Miyashita Y., On quasi-injective modules, A generalization of the theory of completely reducible modules, J. Fac. Sci. Hokkaido Univ. 18 (1964/65), 158—187.
164. Mycielsky J., Some compactifications of general algebras, Colloq. Math. 13 (1964), 1—9.
165. Nunke R., Modules of extension over Dedekind rings, Ill. J. Math. 3 (1959), 222—241.
166. Nunke R., On the extensions of a torsion module, Pacif. J. Math. 10 (1960), 597—606.
167. Nunke R., A note on abelian group extensions, Pacif. J. Math. 12 (1962), 1401—1403.
168. Nunke R., Slender groups, Acta scient. math. 23 (1962), 67—73.
169. Nunke R., Purity and subfunctors of the identity, Topics in Abelian groups, Proc. Symp. on Abelian groups New Mexico state Univ. 4—8 June 1962, 1963, 121—172.
170. Nunke R., On the structure of Tor, Proc. colloq. on abelian groups, 1963. Budapest, Hung. Acad. Scient., 1964, 115—124.
171. Osofsky B. L., On ring properties of injective hulls, Canad. Math. Bull. 7 (1964), 405—413.

172. Pareigis B., Radikale und kleine Moduln, Sitzungsber. Bayer. Akad. Wiss. München, math.-naturwiss. Kl., 1965, München, 1966, 185—199.
173. Pleasant J. C., Certain relations between objects and morphisms in arbitrary categories and module categories, Doct. diss. Univ. S. C., 1965, 51 pp.; Ref. Dissert. Abstrs 26 (1966), 4697.
174. Popescu N., Radu A., La structure des modules injectifs sur un anneau à ideal principal, Bull. math. Soc. sci. math. et phys. RPR 8, N 1—2 (1964), 67—73.
175. Procházka L., О расщепляемости фактор-групп абелевых групп без кручения конечного ранга, Чехослов. матем. ж. 11, № 4 (1961), 521—557.
176. Procházka L., Über eine Klasse torsionsfreier abelscher Gruppen, Časop. pěstov. mat. 90 (1965), 153—159.
177. Rangaswamy K. M., Neat subgroups of Abelian groups, J. Madras Univ. B33 (1963), 129—135.
178. Rangaswamy K. M., Extension theory of abelian groups, Math. Student 32 (1964), 11—16.
179. Rangaswamy K. M., On Σ-groups, Bull. Soc. math. France 92 (1964), 259—262.
180. Rangaswamy K. M., Full subgroups of abelian groups. Indian J. Math. 6 (1964), 21—27.
181. Rangaswamy K. M., A note on algebraic compact groups, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. 12 (1964), 369—371.
182. Rangaswamy K. M., Characterisation of intersections of neat subgroups of Abelian groups, J. Indian Math. Soc. 29 (1965), 31—36.
183. Ravel J., Extensions essentielles dans un module, C. r. Acad. sci. 264 (1967), A657—A659.
184. Reid J., On subgroups of an abelian group maximal disjoint from a given subgroup, Pacif. J. Math. 13 (1963), 657—664.
185. Reid J., On the ring of quasi-endomorphisms of a torsion free group, Topics in Abelian groups, Proc. Symp. on Abelian groups New Mexico State Univ. 4—8 June 1962, 1963, 51—68.
186. Renault G., Étude de certains anneaux A liées aux sous-modules compléments d'un A-module, C. r. Acad. sci. 259 (1964), 4203—4205.
187. Ribenboim P., A theorem on linear transformations of torsionfree modules of infinite rank, Arch. Math. 14 (1963), 353—358.
188. Richman F., Walker C. P., On a certain purification problem for primary abelian groups, Bull. Soc. math. France 94 (1966), 207—210.
189. Robert É., Généralisation d'un théorème de T. Szele et d'un problème de L. Fuchs, C. r. Acad. sci. 263 (1966), A237—A240.
190. Rotman J., A characterization of fields among integral domains, Anais Acad. brasil. cienc. 32 (1960), 193—194.
191. Rotman J., On a problem of Baer and a problem of Whitehead in abelian groups, Acta math. Acad. scient. hung. 12 (1961), 245—254.

192. Sanderson D. F., A generalization of divisibility and injectivity in modules, Canad. Math. Bull. 8 (1965), 505—513
193. Sandomirski F., Relative injectivity and projectivity, Doct. diss. Pa State Unis., 1964, 67 pp., Dissert. Abstrs. 25 (1965), 6664.
194. Sąsiada E., An application of Kulikov's basic subgroups in the theory of abelian mixed groups, Bull. Acad. polon. sci., Cl. 3, 4 (1956), 411—413.
195. Sąsiada E., Negative solution of I. Kaplansky's first test problem for abelian groups and a problem of K. Borsuk concerning cohomology groups, Bull. Acad. polon. sci., sér. sci. math., astron. et phys. 9 (1961), 331—334.
196. Stănaşilă O., Citeva observaţii aspura topologizării moduleor, Studii şi cerietări mat. 18 (1966), 681—686.
197. Stenström B., Pure submodules, Arkiv Math. 7, N 10 (1967), 159—171.
198. Stenström B., High submodules and purity, Arkiv Math. 7, N 11 (1967), 173—176.
199. Stenström B., Purity in functor categories (препринт).
200. Stenström B., Direct sum decompositions on Grothendieck categories (препринт).
201. Szele T., Ein Analogon der Körpertheorie für abelsche Gruppen, J. reine u. angew. Math. 188 (1950), 167—192.
202. Tellman S., Images of induced endomorphisms in Ext (*H*, *G*), Acta scient. math. 23 (1962), 290—291.
203. Tiwary A. K., On the quotients of indecomposable injective modules, Canad. Math. Bull. 9 (1966), 187—190.
204. Viljoen G., A contribution to the extensions of abelian groups, Ann. Univ. scient. budapest., sec. math. 6 (1963), 125—132.
205. Walker C., Relative homological algebra and Abelian groups, Ill. J. Math. 10 (1966), 186—209.
206. Walker C., Walker E., Quotient categories of modules, Proc. of the conference of categorical algebra, La Jolla, 1965. Springer—Verlag, Berlin—Heidelberg, N 9, 1966, 404—420.
207. Walker E. A., Direct summands of direct products of abelian groups, Arch. Math. 11 (1960), 241—243.
208. Walker E. A., Torsion endomorphic images of mixed Abelian groups, Pacif. J. Math. 11 (1961), 375—377
209. Walker E. A., On *n*-extensions of abelian groups, Ann. Univ. scient. budapest., ser. math. 8 (1965), 71—74.
210. Wang J. S. P., On completely decomposable groups, Proc. Amer. Math. Soc. 15 (1964), 184—186.
211. Węglorz B., Compactness of algebraic systems, Bull. Acad. polon. sci, sér. sci. math., astron. et phys. 13 (1965), 705—706.
212. Węglorz B., Equationally compact algebras (I), Fundam. math. 59, N 3 (1966), 289—298.
213. Wolfson K., Isomorphisms of the endomorphism ring of torsion free modules, Proc. Amer. Math. Soc. 13 (1962), 712—714.
214. Wolfson K., Isomorphisms of the endomorphism ring of a class of torsion-free modules, Proc. Amer. Math. Soc. 14 (1963), 589—594.

215. Wong E., Atomic quasi-injective modules, J. Math. Kyoto Univ. 3 (1964), 295—303.
216. Yahya S., *P*-pure exact sequences and the group of *P*-pure extensions, Ann. Univ. scient. budapest., sec. math. 5 (1962), 179—191.
217. Yoneda N., On the homology theory of modules, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 7 (1954), 193—227.
218. Yoneda N., On Ext and exact sequences, J. Fac. Sci. Univ. Tokyo 8 (1960), 507—576.
219. Zelmanowitz J. M., Endomorphism rings of torsionless modules, J. Algebra 5 (1967), 325—341.

220[1]). Андрунакиевич В. А., Рябухин Ю. М., Наднильпотентные и подидемпотентные радикалы алгебр и радикалы модулей, Матем. исслед. 3, № 2 (1968), 5—15.
221. Говоров В. Е., Производные радикалов модулей, Матем. заметки 3, № 6 (1968), 633—642.
222. Скорнякова Л. А., Лекции по гомологической алгебре, Матем. вестник 5 (1968), 71—113.
223. Alin J., Structure of torson modules, Doct. diss. Univ. Nebr., 1957, 59 pp., Dissert. Abstrs. B28, № 7 (1968), 2925—2926.
224. Alin J., Dickson S., Goldie's torsion theory and its derived functor, Pacif. J. Math. 24, (1968), 195—203.
225. Chew Kim Lin, Extensions of rings and modules. Doct. diss. Univ. Brit. Columbia, 1965, 129 pp., Dissert. Abstrs. 26 (1966), 4681.
226. Chew Kim Lin, Closure operations in the study of rings of quotients, Bull Math. Soc. Nanyang Univ., 1965, 1—20.
227. Endler O., Modules and rings of fractions, Summa Brasil Math. 4 (1959), 149—182.
228. Fieldhouse D., Regular modules, Notice Amer. Math. Soc. 15, № 1 (1968), 139.
229. Fieldhouse D., Pure simple and indecomposable rings, Notice Amer. Math. Soc. 15, № 2 (1968), 376.
230. Goldie A. W., Torsion free modules and rings, J. Algebra 1 (1964), 268—287.
231. Goldie A. W., A note on noncommutative localization, J. Algebra 8 (1968), 41—44.
232. Griffth Ph., A counterexample to a theorem of Chase, Proc. Amer. Math. Soc. 19 (1968), 923—924.
233. Grosse P., Periodizität der iterierten Homomorphismengruppen, Arch. Math. 16 (1965), 393—406.
234. Grosse P., Maximale periodische Klassen Abelscher Gruppen, Math. Z. 94 (1966), 235—255.
235. Grosse P., Homomorphismen endlicher Ordnung, Ann. Univ. scient. budapest., Sec. math. 10 (1967), 31—35.
236. Katô K., On Abelian groups every subgroup of which is a neat subgroup, Comment. Math. Univ. St. Pauli 15 (1966/67), 117—118.

[1]) Работы [220]—[254] добавлены при корректурах.

237. Katô T., Torsionless modules, Tôhoku Math. J. **20** (1968), 234—243.
238. Leeuwen L., A note on a maximal periodic class of Abelian groups, Arch. Math. **18** (1967), 571—576.
239. Miyata T., Note on direct summands of modules, J. Math. Kyoto Univ. 7 (1967), 65—69.
240. Nunke R., Homology and direct sums of countable abelian groups, Math. Z. **101** (1967), 182—212.
241. Nunke R., On the structure of Tor, II, Pacif. J. Math. **22**, (1967), 453—464.
242. Radu N., Module de S-cotorsiune. An. Univ. Bucureşti, Ser. ştiint. natur. Mat. mecan. **15** (1966), 25—32.
243. Rangaswamy K. M., Groups with special properties. Proc. Nat. Inst. Sci. India, part A, **31** (1965), 513—526 (1966).
244. Rangaswamy K. M., Abelian groups with endomorphic images of special types, J. Algebra **6** (1967), 271—280.
245. Richman F., Walker E., Cotorsion free, an example of relative injectivity, Math. Z. **102** (1967), 115—117.
246. Teply M., Torsionfree injective modules, Notice AMS **15**, № 1 (1968), 188—189.
247. Wu L., Mochizuki H., Jans J., A characterization of QF-3 rings, Nagoya Math. J. **27** (1966), 7—13.

---

248. Batler M. C. R., Classes of extensions of torsion-free modules, J. Lond. Math. Soc. **44** (1969), 229—235.
249. Cohn P. M., Torsion modules over free ideal rings, Proc. Lond. Math Soc. **17** (1967), 577—599.
250. Colby R., Rutter E., Semi-primary QF-3 rings, Nagoya Math. J. **32** (1968), 253—258.
251. Dlab V., Distinguished submodules, J. Austral. Math. Soc. **8** (1968), 661—670
252. Kellet J. M., A torsion theory for modules over rings without identity. Notice Amer. Math. Soc. **15** (1968), № 6, 910.
253. Kreindler E., Sur les objects libres dans une catégorie abélienne avec objects principaux, C. r. Acad sci. **266** (1968), № 5, A268—A270.
254 Vogel W., Torsionsfreie Moduln über einem regulären Stellenring, Monatsber. Dtsch. Akad. Wiss. Berlin **9** (1967), 393—395.

УКАЗАТЕЛЬ ТЕРМИНОВ

Анна Петровна Мишина,
Лев Анатольевич Скорняков

Абелевы группы и модули

(Серия: «Современные проблемы математики»)
М., 1969 г., 152 стр. с илл.

Редактор *Г. М. Цукерман*
Техн. редактор *А. А. Благовещенская*
Корректор *Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 6/VIII 1968 г. Подписано к печати 30/I 1969 г. Бумага 84×108$^{1}/_{32}$. Физ. печ. л. 4,75. Условн. печ. л. 7,98. Уч.-изд. л. 7,42. Тираж 7000 экз. Т-02632. Цена книги 47 коп. Заказ № 1429

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы.
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома
Комитета по печати при Совете Министров
СССР. Измайловский проспект, 29.