

*INTERNATIONAL SERIES OF MONOGRAPHS IN
ELECTRICAL ENGINEERING*

VOLUME 7

COMPUTER TECHNIQUES
FOR ELECTROMAGNETICS

Edited by
R. MITTRA

University of Illinois, Urbana, Illinois

Pergamon Press
Oxford · New York · Toronto
Sydney · Braunschweig
1973

**ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ
МЕТОДЫ
В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ**

*Под редакцией
Р. Митры*

Перевод с английского
под редакцией
доктора физ.-мат. наук
Э. Л. Бурштейна

**ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
МОСКВА 1977**

Предисловие редактора перевода

В данной книге, входящей в серию «Вычислительные методы в физике», выпускаемую издательством «Мир», дается обзор современных вычислительных методов, применяемых в электродинамике. Книга написана на основе цикла лекций в Иллинойском университете (США) и впервые обобщает материал многочисленных журнальных статей и научных отчетов по применению ЭВМ для решения широкого круга задач электродинамики, не поддающихся решению аналитическими методами. Наиболее полно в ней представлены задачи, сводящиеся к интегральным уравнениям: нахождение распределения токов в излучающих системах при заданном возбуждении, определение излучаемых полей, рассеяние электромагнитных волн на телах различной формы и др.

Книга представляет интерес для научных работников и инженеров, специализирующихся в области электродинамики, распространения радиоволн, антенной и волноводной техники, а также для математиков, занимающихся постановкой и решением прикладных задач.

Редакция литературы по физике

Прогресс современной вычислительной техники дал новый толчок развитию целого ряда разделов математической физики и вычислительной математики. Для электродинамики, в частности, расширился набор задач, поддающихся расчету, и изменился сам подход к их решению. До эры ЭВМ существовало считанное число идеализированных задач, решаемых классическими аналитическими методами, и ряд приближенных методов (метод возмущений, асимптотические методы, вариационные методы и т. п.), основанных на наличии того или иного малого параметра. В обоих случаях решение заключалось в точном или приближенном аналитическом представлении искомых функций через заданные функции. Применение современных ЭВМ добавляет к числу решаемых класс задач, сводимых к системам уравнений, поддающихся численному решению на ЭВМ. Таким образом, скажем, сведение задачи к интегральному уравнению, или к системе линейных алгебраических уравнений, или к дифференциальному уравнению с граничными условиями при наличии эффективного алгоритма решения этих уравнений на ЭВМ является теперь столь же правомерным методом решения задачи, как и классические аналитические методы.

Возникло новое направление, являющееся синтезом методов электродинамики и вычислительной математики, которое можно назвать «вычислительной электродинамикой». Его возможности неизмеримо шире возможностей классических методов, так как они не ограничены необходимостью применения тех или иных идеализированных или приближенных схем. Но они, конечно, не безграничны, так как ограничиваются объемом памяти и быстродействием современных вычислительных машин. В связи с этим основной задачей «вычислительной электродинамики» является анализ круга электродинамических задач, поддающихся численному счету на современных ЭВМ, определение оптимальных численных методов их решения и выяснение предельных возможностей этих методов. Настоящая книга дает если не полный (на полную цельзя рассчитывать в такой обширной и быстро развивающейся области), то, во всяком случае, глубокий и современный обзор этого круга вопросов.

© Pergamon Press Ltd., 1973

В $\frac{20407-20204-405}{041(01)-77}$ 83-76

© Перевод на русский язык, «Мир», 1977

Основные проблемы электродинамики, рассматриваемые в книге, — определение распределения токов в излучающих системах при заданном возбуждении, определение излучаемых полей и их характеристик, нахождение входных импедансов излучающих систем, рассеяние электромагнитных волн на различных телах, влияние неоднородностей в волноводных структурах, решение обратных задач синтеза поля в раскрыве антенны или синтеза волнового фронта и т. д. По названиям многие из этих проблем совпадают с задачами, рассматриваемыми классическими методами, но по широте охвата далеко превосходят их.

Так, например, численные методы позволяют найти диаграммы направленности излучателей, расположенных на телах сложной формы (например, на фюзеляже самолета), с хорошей точностью совпадающие с экспериментальными, или же рассчитать входные характеристики криволинейной антенны, построить диаграммы рассеяния на теле сложной формы, найти изменение формы импульса при отражении от сложного тела, восстановить форму рассеивающего тела по известному рассеянному полю и т. п.

На примере упомянутых физических задач авторы книги излагают особенности применения различных методов вычислительной математики к каждому классу задач. Наиболее полно представлен в книге метод интегральных уравнений. Рассмотрены как физические аспекты — различные варианты формулировок электродинамических задач в виде интегральных уравнений, так и вычислительные — различные методы сведения интегральных уравнений к матричным и различные методы решения последних. В частности, упомянем хорошее изложение различных вариантов метода моментов и оригинальный подход к формулировке интегральных уравнений, описанные в гл. 3. Приведенные результаты решения различных электродинамических задач имеют, конечно, и самостоятельный физический интерес, но, пожалуй, еще большее значение они имеют как иллюстрации относительных преимуществ и недостатков различных вычислительных методов и их возможностей.

Можно полагать, что приводимые в нескольких главах программы численного счета по описываемой методике тоже окажутся полезными читателю.

Другие численные методы рассмотрены менее детально, чем метод интегральных уравнений. В гл. 6 в применении к задачам различного характера рассмотрены «гибридные» методы, в которых введение предварительных аналитических упрощений приводит к существенному сокращению объема вычислений. В частности, здесь описано применение так называемого «модифицированного метода вычетов» для расчета ленточной линии

и дифракционной решетки и «метода обобщенной матрицы рассеяния» для расчета неоднородностей в волноводе.

Большинство публикаций по рассматриваемым в книге вопросам рассеяно по периодическим журналам и научно-исследовательским отчетам. Авторы глав книги приводят списки основной литературы, однако библиографические перечни не претендуют на полноту, в частности в них не отражены советские исследования. Поскольку назначением библиографических ссылок, по замыслу авторов, является большей частью лишь указание на исходные и типичные работы в рассматриваемых областях, мы не сочли нужным пополнять списки литературы.

В целом книга дает хорошее представление об особенностях и возможностях применения различных методов вычислительной математики в электродинамике и, безусловно, интересна и полезна как физикам и инженерам, так и математикам-вычислителям, сталкивающимся с расчетом излучения или распространения электромагнитных волн.

Перевод книги выполнили: В. Н. Курдюмов (гл. 1, гл. 3, § 1, 2, и гл. 4), Г. В. Воскресенский (гл. 2 и 5) и С. Н. Бреус (гл. 3, § 3, гл. 6 и 7).

Э. Л. Бурштейн

Предисловие

Применение вычислительных методов для решения задач электродинамики составляет относительно новую и быстро развивающуюся область науки. Однако до сих пор большинство публикаций по этому вопросу появлялось лишь в технических журналах или научных отчетах, которые обычно трудно доступны. Можно надеяться, что настоящая монография удовлетворит имеющуюся потребность в подробном пособии по методам вычислений, используемым для решения обширного класса практически важных задач прикладной электродинамики, таких, как вычисление распределений тока в антеннах, расчет радиолокационных характеристик проводящих и диэлектрических тел, исследование влияния неоднородностей в волноводах и решетках, численная реконструкция волновых фронтов и полей в раскрыве и т. д.

Основу книги составили тексты лекций, подготовленных для семинара по вычислительным методам электродинамики, состоявшегося в октябре 1970 г. в Иллинойском университете. Каждого из лекторов попросили составить конспект его лекции. Эти конспекты были впоследствии отредактированы и объединены в один том, который лег в основу настоящей книги. Этот краткий курс был повторен с небольшими исправлениями в 1971 г. в Копенгагене при содействии Датского технического университета и Датского инженерного общества. Он был хорошо принят в обоих случаях, что послужило авторам стимулом для завершения большой работы по переработке, проверке и редактированию их лекций.

В процессе подготовки монографии авторы получали поддержку со стороны многих коллег и организаций, слишком многочисленных, чтобы перечислять их здесь. Тем не менее авторы рады воспользоваться предоставившейся возможностью поблагодарить своих коллег за бескорыстную помощь и советы, несомненно оставившие заметный след в тексте монографии и послужившие ее улучшению.

Редактор хотел бы отметить с благодарностью готовность соавторов к сотрудничеству, даже в периоды разочаровавших задержек, испытывавших их терпение.

Рукопись была очень тщательно просмотрена профессором Лондонского университетского колледжа Алексом Калленом. Его комментарии и замечания были весьма полезными и помогли унифицировать изложение и улучшить содержание книги.

Окончательное редактирование книги проводилось в период, когда редактор находился в творческом отпуске в Датском техническом университете. Он особенно благодарен профессору Кнудсену, руководителю Лаборатории теории электромагнетизма, за помощь и поддержку в течение шестимесячного периода в 1971—1972 гг. Излишне говорить, что большая часть редакторской работы и составление гл. 6 и 7 монографии проведены в Иллинойском университете, и редактору приятно поблагодарить за поддержку в период 1970—1972 гг. сотрудников электротехнического отдела университета.

*Иллинойский университет
Урбана, Иллинойс*

Радж Митра

*Краткий обзор**Р. Митра*

Классический подход к решению краевых задач, связанных с излучением и рассеянием электромагнитных волн, основан на аналитических методах, с помощью которых иногда удается получить решение в замкнутом виде, выраженное через известные функции. Поскольку такие решения существуют лишь для ограниченного класса задач, часто за неимением лучшего ищут приближенное решение, обычно в виде рядов, требующее минимального объема численных расчетов. Появление быстродействующих вычислительных машин открыло новые перспективы и позволило успешно подойти к решению широкого круга задач электродинамики, которые раньше считались совершенно не доступными для аналитических методов.

Из многочисленных существующих методов решения задач об излучении и рассеянии электромагнитных волн, по-видимому, наиболее удобен для реализации на ЭВМ метод интегрального уравнения. С исторической точки зрения интересно упомянуть, что еще Максвелл [1], вычисляя емкость прямоугольной пластины, пытался найти численное решение соответствующего интегрального уравнения с помощью приближенного метода, известного теперь как метод частичных областей.

Нет нужды говорить о том, что свой вклад в развитие общей теории интегральных уравнений внесли многие математики. Читатель может обратиться к прекрасным работам Ловитта [2], Келлога [3], Морса и Фешбаха [4], Михлина [5], Трикоми [6], Смитиса [7] и к нескольким недавно появившимся исследованиям по теории интегральных уравнений. Анализ численных методов решения интегральных уравнений можно найти у Хильдебранда и Краута [8], Краута [9], Янга [10], Канторовича и Крылова [11], Нобла [12] и в работе Вальтера и Дежона [13], где имеется прекрасная библиография по вопросам численного решения интегральных уравнений. Приведенный список не является исчерпывающим, поскольку мы не стремимся дать здесь полный обзор работ по теории интегральных уравнений. Тем не менее было бы несправедливо не упомянуть работу Харрингтона [14], который впервые опубликовал ставшее уже классическим

описание метода моментов для решения интегральных уравнений, встречающихся в электромагнитной теории.

Большинство приведенных в настоящей монографии задач об излучении и рассеянии электромагнитных волн решалось на ЭВМ методом интегральных уравнений. Это относится к гл. 2, в которой рассматриваются тонкие проволочные антенны, к гл. 3 и 4, посвященным рассеянию, к гл. 5, где исследуются нерегулярности в волноводах, и к части гл. 7, посвященной обратным задачам рассеяния. При решении задач гл. 6 удобнее использовать другой метод — непосредственно шить разложения по собственным функциям. Наконец, некоторые из обратных задач, рассмотренных в гл. 7, не сводятся к интегральным уравнениям и требуют специальных приемов решения. И тем не менее подавляющее большинство приведенных в настоящей монографии задач решено с помощью интегральных уравнений.

Рассмотрим, например, как найти распределение тока в антенне, возбуждаемой от заданного источника. Эта задача легко сводится к решению неоднородного интегрального уравнения. Если раньше такой подход носил, как правило, чисто академический характер, то с появлением ЭВМ он нашел практическое применение: теперь интегральные уравнения могут быть решены численно после преобразования их к матричному уравнению. А зная численное решение интегрального уравнения, легко получить распределение тока в антенне, входной импеданс, диаграмму направленности и т. д. До появления ЭВМ те же самые задачи решались главным образом вариационным методом, методом теории возмущений, асимптотическим методом, методом аппроксимаций и т. д. Хотя эти методы подчас весьма эффективны при построении приближенного решения задачи об уединенной прямолинейной тонкой антенне, однако с их помощью очень редко можно получить решение с требуемой точностью для антенн, состоящих из криволинейных проводников или расположенных в непосредственной близости от других тел, а также в случае антенной решетки. Применение же ЭВМ позволяет в принципе найти решение для всех перечисленных задач с любой требуемой точностью.

Перейдем теперь к задачам о рассеянии. Сделанное выше общее замечание относительно тонких проволочных антенн в равной степени относится и к рассматриваемым в настоящей монографии задачам о рассеянии, за одним важным исключением. Даже самые большие современные ЭВМ не позволяют работать с матрицами, порядок которых существенно больше 200. Это в свою очередь ограничивает размер рассеивателей (выраженный в длинах волн излучения), для которых можно получить решение с помощью ЭВМ. Подход к решению задач для рассеивателей с большими электрическими размерами пока

еще основан на таких асимптотических методах, как методы геометрической или физической оптики. Однако в последнее время появились сообщения об определенном прогрессе в методике численного решения на ЭВМ интегральных уравнений для некоторого класса больших рассеивателей [15], хотя в этой области многое еще предстоит сделать.

В распоряжении вычислителя имеется несколько способов сведения интегрального уравнения к матричному, которое непосредственно решается на ЭВМ. Многие из них можно объединить в одну группу под названием «метод моментов». Существует несколько вариантов этого метода, различающихся деталями вычислений и описанных в гл. 2, 4 и 5.

Интегральное уравнение можно записать символически в виде

$$Lf = g,$$

где L — интегральный оператор, g — известная и f — неизвестная функции. Это уравнение можно свести к матричному путем разложения неизвестной функции f в ряд по базисным функциям ϕ_n , например

$$f = \sum_{n=1}^N C_n \phi_n,$$

где C_n — неизвестные коэффициенты разложения. Матричное уравнение в методе моментов можно представить в следующем общем виде:

$$\sum_{m=1}^N C_m \langle \chi_m, L\phi_n \rangle = \langle g, \chi_m \rangle,$$

где символ $\langle \rangle$ обозначает соответствующим образом определенное скалярное произведение, а χ_m — так называемые пробные или весовые функции. Примеры различного выбора функций ϕ_n и χ_m приведены в гл. 2, 4 и 5. Сравнительные преимущества и недостатки того или иного выбора ϕ_n и χ_m определяются степенью сложности предварительных выкладок, порядком матрицы и характером матричных элементов, соответствующих различным базисным функциям.

Решение матричных уравнений на ЭВМ обычно производится либо обращением матрицы, либо методом исключения главного элемента, а иногда методом итераций. Сравнительные достоинства этих методов обсуждаются в настоящей монографии главным образом в гл. 4 и 5. Как известно, для ЭВМ составлены стандартные программы как для обращения матриц, так и для решения систем линейных уравнений методом исключения главного элемента.

Хотя гл. 2, 4 и 5 объединяются указанным выше общим подходом, они существенно различаются по типу рассматриваемых задач и, как следствие, по используемой методике численных расчетов. В случае тонкой проволочной антенны или линейного рассеивателя удастся перейти от общего интегрального уравнения для поверхностной плотности тока к его одномерному аналогу, что значительно упрощает задачу. Следует, однако, отметить, что обычно используемое интегральное уравнение для магнитного поля, весьма удобное (и предпочтительное) в случае трехмерных рассеивающих тел, оказывается неудобным в случае электрически тонких антенн и рассеивателей, например тонких проводников различной формы. Поэтому в таких случаях используют другое интегральное уравнение — уравнение для электрического поля. Эта разница в типе интегрального уравнения является важной характерной особенностью, отличающей подход к задачам для тонких тел от соответствующего подхода для трехмерных рассеивающих тел. Эти два случая существенно различаются и по выбору базисных функций ϕ_n , по которым ведется разложение неизвестного распределения тока в антенне (или рассеивателе). Последнее связано с тем, что в одномерном случае часто удается аналитически вычислить интегралы при использовании более сложных базисных функций, чем, например, простые импульсные функции. Применение же сложных базисных функций может значительно повысить эффективность численных расчетов. При использовании таких базисных функций удается точнее аппроксимировать суммой входящий в уравнение интеграл и тем самым увеличить точность результатов при том же числе неизвестных, описывающих ток. Эти вопросы подробно обсуждаются в гл. 4.

Для рассматриваемых в гл. 5 задач о волноводах в качестве базисных функций удобно использовать собственные функции соответствующих волноводов, поскольку в этом случае интегрирование, необходимое для сведения интегральных уравнений к матричному, может быть проведено в замкнутом виде. Часто последнее соображение оказывается решающим при выборе базисных функций. В тех же случаях, когда вычисление скалярных произведений, определяющих элементы матрицы, приходится проводить численным интегрированием, для экономии машинного времени целесообразно применять более простые базисные функции, например импульсные или δ -функции, для которых возможно аналитическое вычисление интегралов. Хотя такой выбор базисных функций почти всегда требует повышения порядка матричного уравнения для достижения той же точности, общее время счета при этом уменьшается.

Остановимся теперь кратко на способе вывода матричного уравнения, примененном в гл. 3. В нем используется так назы-

ваемый метод обобщенных граничных условий, или метод аналитического продолжения, что существенно отличает его от способа сведения интегрального уравнения к матричному, описанного в гл. 2, 4 и 5. Эта радикально отличающаяся методика приводит, естественно, к элементам матрицы, существенно иным по своему характеру, чем получаемые другими методами. В гл. 3 рассматриваются специальные приемы численного нахождения элементов матрицы и решения соответствующего матричного уравнения. В последнее время в литературе появились сообщения о многочисленных применениях метода обобщенных граничных условий, который фактически эквивалентен (см. [16]) методу Рэлея [17], к задачам о рассеянии на решетках и трехмерных рассеивателях, а также к некоторым задачам о волноводах. Гл. 3 включена в настоящую монографию для того, чтобы показать возможность такого альтернативного подхода к решению задач о рассеянии.

В гл. 6 рассматриваются некоторые эффективные приемы вычислений, использующие «гибридный» подход к решению задач. Обсуждаемые в ней методы требуют предварительных аналитических преобразований до программирования задачи для ЭВМ. Эффективность и высокая точность численных расчетов достигаются в этом случае ценой аналитических выкладок, требующих от вычислителя серьезной математической подготовки. Общей чертой всех вычислительных методов, основанных на аналитических преобразованиях, является их непригодность для структур произвольной конфигурации. Однако в тех случаях, когда эти методы применимы, они дают точные и надежные численные результаты при минимальной затрате машинного времени. Интересно отметить, что советские ученые в отличие от своих западных коллег сосредоточили свое внимание на квазианалитических методах решения краевых задач электродинамики, сводящих задачу к виду, требующему минимального количества машинного времени. Возможно, это связано с тем, что на начальном этапе Советский Союз несколько отставал в разработке быстродействующих вычислительных машин. В пользу развития квазианалитических методов численных расчетов можно сказать многое, поскольку, как уже было отмечено в этой главе, даже большие вычислительные машины обладают ограниченными возможностями и использование их как «грубой силы» редко оказывается экономичным или оправданным, за исключением тривиальных случаев.

Наконец, как уже упоминалось выше, многие из рассмотренных в гл. 7 обратных задач рассеяния формулируются и решаются способом, существенно отличным от метода интегрального уравнения. Специалисты по электродинамике лишь в самое последнее время обратили свое внимание на численные методы решения

обратных задач. Вероятно, это связано с ростом интереса к проблемам дистанционного зондирования и восстановления волнового фронта, где возможности аналитических методов сильно ограничены. Были развиты специальные приемы обработки результатов измерений на фоне шумов, позволяющие выделить определенную информацию об исследуемой среде или рассеивателе. Методика вычислений в подобных задачах по своему характеру существенно отличается от используемой в прямых задачах рассеяния, рассматриваемых в гл. 2—6. Обратные задачи образуют важную область перспективных работ, интерес к которой исследователей, занимающихся численными методами дистанционного зондирования, постоянно растет.

Мы попытались дать краткий обзор вычислительных методов, используемых в электродинамике. Хочется надеяться, что это беглое и весьма схематичное введение пробудит интерес у читателя и он перейдет к изучению последующих глав, в которых детально описываются различные методы, применяемые в «вычислительной электродинамике».

Литература

1. *Maxwell J. C.*, ed., *Electrical Researches of the Hon. Henry Cavendish*, F. R. S. (1771—81), Cambridge Univ. Press, London, 1879.
2. *Lovitt W. V.*, *Linear Integral Equations*. Dover, New York, 1950 (см. перевод: У. Ловитт, *Линейные интегральные уравнения*, ИЛ, М., 1957).
3. *Kellogg O. D.*, *Foundations of Potential Theory*, Dover, New York, 1953.
4. *Morse P. M.*, *Feshbach H.*, *Methods of Theoretical Physics*, Part I, McGraw-Hill, New York, 1953 (см. перевод: Ф. М. Морс, Г. Фешбах, *Методы теоретической физики*, т. 1, ИЛ, М., 1958).
5. *Михлин С. Г.*, *Лекции по линейным интегральным уравнениям*, М., 1959.
6. *Tricomi F. G.*, *Integral Equations*, Interscience, New York, 1957 (см. перевод: Ф. Трикоми, *Интегральные уравнения*, ИЛ, М., 1960).
7. *Smithies F.*, *Integral Equations*, Cambridge University Press, London, 1958.
8. *Hildebrand F. B.*, *Crout P. D.*, *J. Math. Phys.*, 20, 310 (1941).
9. *Crout P. D.*, *J. Math. Phys.*, 19, 34 (1946).
10. *Young A.*, *Proc. Roy. Soc. (London)*, A, 224, 561 (1954).
11. *Канторович Л. В.*, *Крылов В. И.*, *Приближенные методы высшего анализа*, Гостехиздат, М. — Л., 1952.
12. *Noble B.*, *The Numerical Solution of Singular Integral Equations*, MRC Technical Rept. No. 730, Mathematics Research Center, US Army, Univ. of Wis., Madison, Wisconsin, 1966.
13. *Walther A.*, *Dejon B.*, *General report on the numerical treatment of integral and integro-differential equations*, Symposium Proceedings, Provisional International Computation Center, Rome, 1960.
14. *Harrington R. F.*, *Field Computation by Moment Methods*, MacMillan, New York, 1968.
15. *Mitra R.*, *Li T. S.*, *Spectral Domain Approach for the Solution of a Class of Scattering Problems Involving Electrically Large Bodies*, 1972.
16. *Burrows M. L.*, *Electron. Lett.*, 5, 277 (1969).
17. *Rayleigh*, *The Theory of Sound*, Dover, New York, 1945 (см. перевод: Дж. В. Стретт (лорд Рэлей), *Теория звука*, ГИТТЛ, М., 1955).

Проволочные антенны

Г. А. Тил¹⁾

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В настоящей главе, посвященной проволочным, или вибраторным, антеннам, рассматриваются основные принципы и методы численного решения краевых задач для антенн этого типа и приводится ряд примеров, иллюстрирующих применение развитых принципов и методов. Хотя существует много различных путей формулировки исследуемой задачи, в частности в отношении выбора собственных, или базисных, функций, в приведенных примерах разложение ведется в основном по импульсным функциям и используется сшивание в дискретных точках для облегчения иллюстрации развитых методов. Формулировка задачи в более сложных случаях либо обсуждается особо, либо приводится ссылка на оригинальную работу.

В начале главы рассматриваются два основных интегральных уравнения, используемых при исследовании краевых задач для проволочных антенн, и сравниваются их достоинства. Далее в § 3 обсуждается метод моментов. При его применении интегральное уравнение сводится к системе линейных алгебраических уравнений, допускающих представление в матричном виде. При этом важную роль играет выбор системы базисных функций, поэтому § 4 посвящен обсуждению двух основных возможностей выбора базисных функций и их сравнительных достоинств. Последующие § 6—8 посвящены рассмотрению примеров, иллюстрирующих некоторые положения, развитые выше.

В конце главы приведены задачи, подобранные так, чтобы читатель мог приобрести навыки и освоиться с численным решением задач теории проволочных антенн. Для тех, кто уже имеет опыт в этой области, могут оказаться полезными приводимые в приложениях избранные программы вычислений. В заключение приведена довольно обширная, но далеко не исчерпывающая библиография по рассматриваемой теме.

¹⁾ G. A. Thiele, Assistant Professor of Electrical Engineering, The Ohio State University.

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ ТЕОРИИ ПРОВОЛОЧНЫХ АНТЕНН

В задачах о тонких проволочных антеннах используют по меньшей мере три вида интегральных уравнений, два различных способа представления неизвестных функций и множество возможных вариантов базисных функций или интерполяции при применении этих функций. В настоящем параграфе будут подробно рассмотрены два из трех упомянутых интегральных уравнений. В последующих разделах рассматриваются сравнительные достоинства различных схем разложения или интерполяции искомого решения интегрального уравнения. Однако, прежде чем переходить к исследованию этих интегральных уравнений, рассмотрим пространственную теорему эквивалентности, позволяющую представить себе характер полей и токов, связанных этими интегральными уравнениями.

1. ПРОСТРАНСТВЕННАЯ ТЕОРЕМА ЭКВИВАЛЕНТНОСТИ

Рассматриваемая ниже пространственная теорема эквивалентности представляет собой частный случай теоремы замещения. Пусть поля (\mathbf{E}, \mathbf{H}) возбуждаются гармоническим во времени электрическим током в линейной изотропной среде (μ, ϵ) . Эти поля удовлетворяют уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H}, \quad (2.1)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = \mathbf{J} + i\omega\epsilon\mathbf{E}. \quad (2.2)$$

где \mathbf{J} — плотность тока гармонического источника. В другой среде, например в свободном пространстве, тот же ток \mathbf{J} возбуждает поля $(\mathbf{E}_0, \mathbf{H}_0)$, также удовлетворяющие системе уравнений Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}_0 = -i\omega\mu_0\mathbf{H}_0, \quad (2.3)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}_0 = \mathbf{J} + i\omega\epsilon_0\mathbf{E}_0. \quad (2.4)$$

Определим «рассеянное поле» $\mathbf{E}^s, \mathbf{H}^s$ как разность введенных выше полей:

$$\mathbf{E}^s = \mathbf{E} - \mathbf{E}_0, \quad (2.5)$$

$$\mathbf{H}^s = \mathbf{H} - \mathbf{H}_0. \quad (2.6)$$

Вычитая почленно уравнения Максвелла для полей обоих типов, получаем уравнения для рассеянного поля:

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^s = -i\omega(\mu - \mu_0)\mathbf{H} - i\omega\mu_0\mathbf{H}^s, \quad (2.7)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^s = i\omega(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E} + i\omega\epsilon_0\mathbf{E}^s. \quad (2.8)$$

Эти уравнения можно записать в виде

$$\operatorname{rot} \mathbf{E}^s = -\mathbf{K}_{\text{ЭКВ}} - i\omega\mu_0\mathbf{H}^s, \quad (2.9)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H}^s = \mathbf{J}_{\text{ЭКВ}} + i\omega\epsilon_0\mathbf{E}^s, \quad (2.10)$$

где

$$\mathbf{K}_{\text{ЭКВ}} = i\omega(\mu - \mu_0)\mathbf{H}, \quad (2.11)$$

$$\mathbf{J}_{\text{ЭКВ}} = i\omega(\epsilon - \epsilon_0)\mathbf{E}. \quad (2.12)$$

Таким образом, поле, рассеянное материальным телом, может быть представлено в виде поля излучения эквивалентных электрического и магнитного токов $\mathbf{K}_{\text{ЭКВ}}$ и $\mathbf{J}_{\text{ЭКВ}}$, излучающих в свободном пространстве. Эти эквивалентные токи иногда называют «поляризационными токами».

Входящие в уравнение (2.9), (2.10) эквивалентные токи существуют, очевидно, лишь в области пространства, занятой материальным телом, так как в остальных точках разности $(\mu - \mu_0)$ и $(\epsilon - \epsilon_0)$ обращаются в нуль.

Вычислить поля, излучаемые заданным током в свободном пространстве, конечно, нетрудно, но эквивалентные токи, определяемые уравнениями (2.11) и (2.12), на самом деле не являются заданными функциями координат, так как векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} неизвестны. Хотя теорема эквивалентности не дает прямого решения задачи о рассеянии, она все же оказывается полезной как для понимания характера рассеянного поля, так и при выводе интегральных уравнений для полей \mathbf{E} и \mathbf{H} . В связи с этим сделаем еще одно полезное замечание. Запишем комплексную диэлектрическую проницаемость среды в виде

$$\epsilon = \epsilon' - i\sigma/\omega. \quad (2.13)$$

Тогда соотношение (2.12) принимает вид

$$\mathbf{J}_{\text{ЭКВ}} = [\sigma + i\omega(\epsilon' - \epsilon_0)]\mathbf{E}. \quad (2.14)$$

Первый член в правой части определяет плотность тока проводимости. Для хороших проводников этот член намного превышает остальные слагаемые, и, таким образом, выражение для эквивалентного тока имеет вид

$$\mathbf{J}_{\text{ЭКВ}} = \sigma\mathbf{E}. \quad (2.15)$$

Кроме того, для большинства хороших проводников величина магнитной проницаемости такая же, как для свободного пространства, и, таким образом, плотность эквивалентного магнитного тока $\mathbf{K}_{\text{ЭКВ}}$ равна нулю.

Следовательно, для хорошего проводника эквивалентный ток практически совпадает с током проводимости, а поле, рассеянное таким телом, можно рассматривать как поле, излучаемое этим током проводимости в свободном пространстве.

В общем случае эквивалентный ток характеризуется объемной плотностью тока. Однако для рассматриваемых в настоящей главе идеальных проводников (с высокой точностью описывающих хорошие проводники) эквивалентные токи сводятся к поверхностным токам.

2. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ПОКЛИНГТОНА

В областях, содержащих электрические и магнитные источники, уравнения Максвелла имеют вид

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} = -i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{K}, \quad (2.16)$$

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = i\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}. \quad (2.17)$$

Векторы электромагнитного поля выражаются через \mathbf{K} и \mathbf{J} следующим образом:

$$\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A} - \operatorname{grad} V - \frac{1}{\epsilon} \operatorname{rot} \mathbf{F}, \quad (2.18)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \operatorname{rot} \mathbf{A} - \operatorname{grad} U - i\omega\mathbf{F}, \quad (2.19)$$

где

$$\mathbf{A} = \mu \iiint \frac{\mathbf{J}e^{-ikr}}{4\pi r} dv', \quad (2.20)$$

$$\mathbf{F} = \epsilon \iiint \frac{\mathbf{K}e^{-ikr}}{4\pi r} dv', \quad (2.21)$$

$$V = \iiint \frac{\rho e^{-ikr}}{4\pi\epsilon r} dv', \quad (2.22)$$

$$U = \iiint \frac{m e^{-ikr}}{4\pi\mu r} dv', \quad (2.23)$$

r — расстояние между точкой наблюдения (x, y, z) и точкой, где расположен источник (x', y', z') :

$$r = \sqrt{(x-x')^2 + (y-y')^2 + (z-z')^2}, \quad (2.24)$$

ρ и m — объемные плотности электрического и магнитного заряда. Плотности заряда и тока связаны друг с другом, так как полный ток, вытекающий из заданного объема, должен равняться скорости убывания заряда в этом объеме. В результате скалярные потенциалы V и U оказываются связанными с векторными потенциалами \mathbf{A} и \mathbf{F} соотношениями

$$\operatorname{div} \mathbf{A} = -i\omega\mu\epsilon V, \quad (2.25)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{F} = -i\omega\mu\epsilon U, \quad (2.26)$$

где принято условие калибровки Лоренца.

В последующих разделах мы ограничимся рассмотрением сред с магнитной проницаемостью, равной магнитной проницае-

мости вакуума: $\mu = \mu_0$. В этом случае $m = 0$ и $\mathbf{K} = 0$. Если магнитные токи отсутствуют, а электрические токи параллельны оси z , то электрический векторный потенциал \mathbf{A} также имеет лишь z -составляющую. Магнитный векторный потенциал \mathbf{F} , очевидно, равен нулю. Из условия (2.25) имеем

$$\frac{\partial A_z}{\partial z} = -i\omega\mu\epsilon V. \quad (2.27)$$

Равенство (2.18) в этом случае принимает вид

$$E_z = -i\omega A_z - \frac{\partial V}{\partial z}. \quad (2.28)$$

Подставляя в это соотношение выражение (2.27), получаем

$$E_z = \frac{1}{i\omega\epsilon\mu} \left(\frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} + k^2 A_z \right), \quad (2.29)$$

где $k^2 = \omega^2\mu\epsilon$. Создаваемое элементом тока Jdv' поле равно

$$dE_z = \frac{1}{i\omega\epsilon} \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] J dv', \quad (2.30)$$

где

$$G(z, z') = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r}. \quad (2.31)$$

Следовательно, поле, возбуждаемое током с объемной плотностью J , параллельным осью z , равно

$$E_z = \frac{1}{i\omega\epsilon} \iiint \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] J dv'. \quad (2.32)$$

Если ток распределен по поверхности кругового цилиндра, ось которого совпадает с осью z , это выражение сводится к поверхностному интегралу. Более того, для цилиндра радиуса a при $a \ll \lambda$ можно считать, что ток распределен по поверхности цилиндра равномерно. Если точка наблюдения находится на оси цилиндра, то выражение (2.24) принимает вид

$$r = \sqrt{(z-z')^2 + a^2} \quad (2.33)$$

и, следовательно, распределению поверхностного тока можно сопоставить эквивалентный нитевидный линейный источник, расположенный на расстоянии a от точки наблюдения. Таким образом, считая, что выражение (2.32) для E_z дает рассеянное поле, и переходя от объемной плотности эквивалентного тока к поверхностной в соответствии со сказанным в п. 1, приходим к уравнению

$$\int_{-L/2}^{L/2} I(z') \left[\frac{\partial^2 G(z, z')}{\partial z^2} + k^2 G(z, z') \right] dz' = -i\omega\epsilon E_z^i(z), \quad (2.34)$$

где $E_z^i(z)$ — падающее (или наведенное) поле, которое можно считать однородным по азимуту вдоль поверхности цилиндра, так как рассматриваются тонкие проводники. Пределы интегрирования определяются продольными размерами диполя, простирающегося от $z = -L/2$ до $z = L/2$ (фиг. 2.1). Полученное уравнение (2.34) сходно с уравнением, использованным Поклингтоном [1] для доказательства того, что распределение тока в тонком проводе близко к синусоидальному, а скорость волны тока равна скорости света. Уравнение (2.34) есть интегральное уравнение первого рода. Следует подчеркнуть, что здесь *не делалось* предположения о том, что диполь или цилиндрический проводник является бесконечно тонким. Вместо этого было использовано так называемое приближение тонкого вибратора, т. е. радиус проводника считался много меньшим длины волны, но конечным.

Ричмонд [2] использовал, по существу, интегральное уравнение типа Поклингтона, но применил несколько иной способ вывода. Рассмотрим теперь более общий случай, чем случай простого диполя. Пусть имеется произвольное объемное распределение источников, изображенное на фиг. 2.2 (x', y', z' — координаты источника).

Выражая поле через векторный потенциал

$$\mathbf{H} = \frac{1}{\mu} \text{rot } \mathbf{A}, \quad (2.35)$$

получаем

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{v'} \text{rot} \frac{[\mathbf{J} e^{-ikr}]}{r} dv'. \quad (2.36)$$

Используя векторное тождество

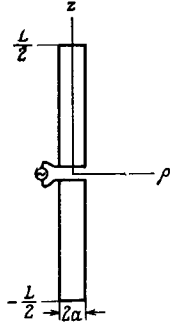
$$\text{rot}(f\mathbf{G}) = \text{grad } f \times \mathbf{G} + f \text{rot } \mathbf{G}, \quad (2.37)$$

находим

$$\mathbf{H} = \frac{1}{4\pi} \iiint_{v'} \left[\text{grad} \frac{e^{-ikr}}{r} \right] \times \mathbf{J} dv', \quad (2.38)$$

так как $\text{rot } \mathbf{J} = 0$, поскольку \mathbf{J} зависит лишь от координат источника (x', y', z') и не зависит от координат точки наблюдения. Легко видеть, что

$$\text{grad} \frac{e^{-ikr}}{r} = -\hat{r} \frac{1+ikr}{r^2} e^{-ikr}, \quad (2.39)$$

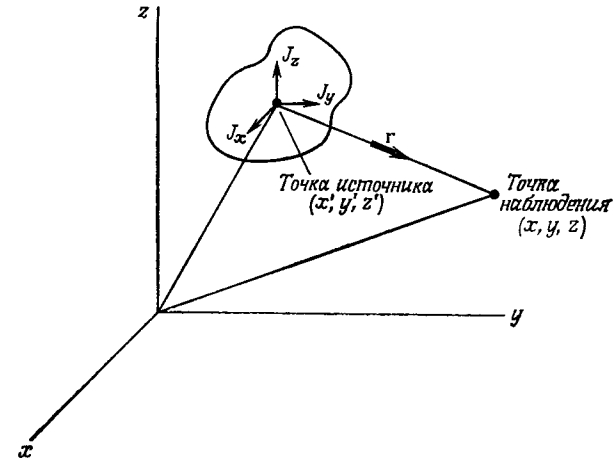


Фиг. 2.1. Диполь длиной L и радиусом a ; ось диполя совпадает с осью z системы координат.

где \hat{r} — единичный вектор, направленный из точки источника в точку наблюдения. В результате выражение для \mathbf{H} принимает вид

$$\mathbf{H}(x, y, z) = -\frac{1}{4\pi} \iiint (\hat{r} \times \mathbf{J}) \frac{1+ikr}{r^2} e^{-ikr} dv'. \quad (2.40)$$

Применяя операцию ротора к обеим частям этого равенства, получаем выражения для составляющих вектора напряженно-



Фиг. 2.2. Система координат для излучающего тела произвольной формы с составляющими плотности тока J_x, J_y, J_z .

сти электрического поля в прямоугольной системе координат, возбуждаемого источником электрических токов в свободном пространстве:

$$E_x = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{4\pi ik} \iiint [F_1(r) J_x + (x-x') F_2(r) \times [(x-x') J_x + (y-y') J_y + (z-z') J_z]] dv', \quad (2.41)$$

$$E_y = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{4\pi ik} \iiint [F_1(r) J_y + (y-y') F_2(r) \times [(x-x') J_x + (y-y') J_y + (z-z') J_z]] dv', \quad (2.42)$$

$$E_z = \frac{\sqrt{\mu/\epsilon}}{4\pi ik} \iiint [F_1(r) J_z + (z-z') F_2(r) \times [(x-x') J_x + (y-y') J_y + (z-z') J_z]] dv', \quad (2.43)$$

где

$$F_1(r) = \frac{-1 - ikr + k^2 r^2}{r^3} e^{-ikr}, \quad (2.44)$$

$$F_2(r) = \frac{3 + 3ikr - k^2 r^2}{r^5} e^{-ikr}. \quad (2.45)$$

Для диполя, расположенного вдоль оси z , из формулы (2.43) получаем следующее выражение для продольной составляющей рассеянного поля:

$$E_z^s(0, z) = \frac{1}{4\pi i \omega \epsilon} \int_{-L/2}^{L/2} I(z') \frac{e^{-ikr}}{r^3} [(1 + ikr)(2r^2 - 3a^2) + k^2 a^2 r^2] dz'. \quad (2.46)$$

Это уравнение можно вывести также из уравнения (2.34). Оно использовалось в работе Ричмонда [2].

Несколько иной подход, основанный на применении соотношений (2.18), (2.20) и (2.22), развит в работе Харрингтона о тонких проволочных излучателях. Эти соотношения можно записать в виде интегрального уравнения [3]

$$E_z^i(0, z) = \int_{-L/2}^{L/2} \left[i\omega \mu I(z') - \frac{1}{i\omega \epsilon} \frac{\partial I(z')}{\partial z'} \frac{\partial}{\partial z} \right] \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} dz'. \quad (2.47)$$

эквивалентного уравнению (2.46).

3. ИНТЕГРАЛЬНОЕ УРАВНЕНИЕ ХАЛЛЕНА

При формулировке краевой задачи для антенны в виде интегрального уравнения в предыдущем разделе рассматриваются значения независимой переменной на поверхности антенны (на границе), так что истинные граничные условия содержатся неявно в интегральном уравнении. При выводе уравнения Халлена обычно исходят из решения дифференциального уравнения. При этом независимые переменные (координаты) могут принимать любые значения, а решение должно удовлетворять дифференциальному уравнению и определенным граничным условиям.

Векторный потенциал, очевидно, должен удовлетворять волновому уравнению

$$\left(\frac{d^2}{dz^2} + k^2 \right) A_z(z) = 0. \quad (2.48)$$

Если рассматривать симметричный диполь, для которого $I_z(-z) = I_z(z)$ и $A_z(-z) = A_z(z)$, то общее решение уравнения (2.48) можно представить в виде

$$A_z(z) = -i \sqrt{\mu \epsilon} (C_1 \cos kz + C_2 \sin k|z|), \quad (2.49)$$

где C_1 и C_2 — произвольные постоянные. Для идеально проводящей тонкой проволочной антенны

$$A_z(z) = \mu_0 \int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') G(z, z') dz', \quad (2.50)$$

где функция $G(z, z')$ определена согласно (2.31), а r дается формулой (2.33). Приравняв выражения (2.49) и (2.50), получим интегральное уравнение Халлена [4] для идеально проводящей дипольной антенны (см. фиг. 2.1)

$$\int_{-L/2}^{L/2} I_z(z') G(z, z') dz' = -\frac{i}{\eta} (C_1 \cos kz + C_2 \sin k|z|), \quad (2.51)$$

где η — волновое сопротивление для свободного пространства. Постоянную C_2 можно выразить через входное напряжение антенны V_T : $C_2 = V_T/2$. Постоянная C_1 определяется из условия обращения в нуль тока на концах антенны.

Решение интегрального уравнения Халлена для различных случаев было получено многими авторами. Особенно значительной представляется работа Мея [5], в которой уравнение Халлена обобщено на антенны с произвольной геометрией. Хороший обзор работ, относящихся к интегральному уравнению Халлена, дан Кингом [6].

Третье встречающееся в литературе интегральное уравнение, упомянутое в начале данного параграфа, является разновидностью уравнения Халлена; оно было подробно исследовано Кингом [7]. По этой причине, а также в соответствии с соображениями, приведенными в следующем абзаце, оно не будет здесь обсуждаться.

Хотя при исследовании проволочных антенн можно исходить как из уравнения Поклингтона, так и из уравнения Халлена, в большей части данной главы рассматривается уравнение Поклингтона, которое оказывается в известном смысле более общим. В самом деле, в правую часть интегрального уравнения Поклингтона входит величина E^i , определяющая поле, создаваемое источником. Источником может быть, например, раскрыв коаксиальной линии, возбуждающей антенну на заземленной плоскости. Или, например, в случае щелевой антенны на металлическом теле в качестве источника E^i можно рассматривать щель, а металлическую поверхность характеризовать или моделировать пассивными элементами антенны или проволочными сегментами. В то же время в интегральном уравнении Халлена для описания возбуждения используется исключительно генератор напряжения, приложенного к бесконечно узкому зазору, что не дает желательной гибкости в выборе различных источников возбуждения. Кроме того, хотя приближение бесконечно узкого зазора весьма полезно, оно значительно хуже, чем модели с конечными источниками, описывает реальную физическую картину и может привести к трудностям при вычислении с большой точностью мнимой части входного импеданса.

После того как произведен выбор интегрального уравнения, остается получить его решения для различных конфигураций проволочных антенн. Решения могут быть получены сведением интегральных уравнений к системам линейных алгебраических уравнений; именно этому посвящен следующий параграф.

§ 3. МЕТОД МОМЕНТОВ

Объединяющей идеей при численном исследовании задач об излучении служит метод моментов [8]. Этот общий подход к задачам об излучении состоит по существу в сведении исследуемого интегрального уравнения к системе линейных алгебраических уравнений с N неизвестными, которые обычно представляют собой коэффициенты некоторого разложения для тока. Посмотрим, как это реализуется в электродинамических задачах общего вида.

Рассмотрим произвольное металлическое тело с распределением плотности тока \mathbf{J} . Потребуем, чтобы касательные к поверхности тела составляющие полного электрического поля обращались в нуль:

$$0 = \mathbf{E}_t^s + \mathbf{E}_t^i, \quad (2.52)$$

где \mathbf{E}_t^s — рассеянное электрическое поле, излучаемое током плотности \mathbf{J} , определенное в § 2, п. 1, \mathbf{E}_t^i — касательная составляющая падающего электрического поля, возбуждаемого источником, расположенным где-либо на поверхности тела или вне его. В дальнейшем индекс t мы будем опускать, так как известно, что используются граничные условия для касательных составляющих электрического поля.

Переписав (2.52) в виде

$$-\mathbf{E}^s = \mathbf{E}^i \quad (2.53)$$

и введя оператор

$$L_{\text{оп}}(\mathbf{J}) \equiv -(\mathbf{E}^s), \quad (2.54)$$

можно воспользоваться понятием линейных векторных пространств и операторов и записать уравнение в операторном виде

$$L_{\text{оп}}(\mathbf{J}) = (\mathbf{E}^i), \quad (2.55)$$

где оператор $L_{\text{оп}}$ должен определяться для каждой конкретной задачи, (\mathbf{E}^i) — заданная функция возбуждения (источник), \mathbf{J} — искомая функция отклика. В задачах, рассматриваемых в этой главе, $L_{\text{оп}}$ — интегральный оператор, действующий на ток \mathbf{J} . Предполагается, что для заданного источника вектор \mathbf{J} определен единственным образом, т. е. существует обратный оператор $L_{\text{оп}}^{-1}$, такой, что

$$\mathbf{J} = L_{\text{оп}}^{-1}(\mathbf{E}^i). \quad (2.56)$$

В конкретной задаче следует установить область определения оператора, или, иными словами, пространство функций, на которые он воздействует, а также область «значений» оператора, или функций, получающихся в результате его действия. В действительности оператор $L_{\text{оп}}$ осуществляет отображение некоторой области пространства функций \mathbf{J} на область пространства функций (\mathbf{E}^i) . Если решение единственно, то это отображение взаимно однозначно.

Помимо нахождения области определения и области значений оператора, часто необходимо найти внутреннее произведение $\langle \mathbf{J}, \mathbf{E} \rangle$, которое определяется как скаляр, получаемый в результате интегрирования скалярного произведения $\mathbf{J} \cdot \mathbf{E}$ по рассматриваемой поверхности. Определенное таким образом внутреннее произведение принято называть реакцией поля [9]. Реакция поля, подобно импульсу или энергии, является физически наблюдаемой величиной. Определим внутреннее произведение так, чтобы выполнялись следующие правила:

$$\langle \mathbf{J}, \mathbf{E} \rangle = \langle \mathbf{E}, \mathbf{J} \rangle, \quad (2.57)$$

$$\langle \alpha \mathbf{J}_1 + \beta \mathbf{J}_2, \mathbf{E} \rangle = \alpha \langle \mathbf{J}_1, \mathbf{E} \rangle + \beta \langle \mathbf{J}_2, \mathbf{E} \rangle, \quad (2.58)$$

$$\text{если } \langle \mathbf{J}^*, \mathbf{J} \rangle > 0, \text{ то } \mathbf{J} \neq 0, \quad (2.59)$$

$$\text{если } \langle \mathbf{J}^*, \mathbf{J} \rangle = 0, \text{ то } \mathbf{J} = 0; \quad (2.60)$$

здесь α и β — скалярные множители, а звездочкой обозначена комплексно сопряженная величина.

Решение задачи может быть получено в четыре этапа:

1. Искомый вектор \mathbf{J} разлагается в ряд по базисным функциям J_n в области определения оператора $L_{\text{оп}}$.
2. Определяется подходящее внутреннее произведение и устанавливается система весовых функций.
3. Вычисляются внутренние произведения и тем самым уравнения приводятся к матричному виду.
4. Находится решение матричного уравнения.

После определения неизвестного (т. е. тока) нетрудно вычислить такие характеристики, как диаграммы излучения в дальней зоне и комплексное сопротивление (импеданс) антенны. Эти четыре этапа ниже рассматриваются более подробно.

1. МЕТОД ГАЛЕРКИНА

В задачах об излучении электромагнитных волн оказывается особенно удобным некоторый конкретный вариант метода моментов. На первом этапе представим функцию отклика \mathbf{J} в виде разложения по системе базисных функций J_1, J_2, J_3, \dots



заданных на поверхности S и принадлежащих к области определения оператора $L_{\text{оп}}$:

$$\mathbf{J} = \sum_n I_n \mathbf{J}_n, \quad (2.61)$$

где коэффициенты I_n , вообще говоря, могут быть комплексными. Решение задачи сводится таким образом к определению неизвестных коэффициентов I_n . Если они найдены, то известны амплитуда и фаза тока на излучателе. Подставляя разложение (2.61) в (2.55), получаем

$$L_{\text{оп}} \left(\sum_n I_n \mathbf{J}_n \right) = (\mathbf{E}^i), \quad (2.62)$$

или, в силу линейности оператора,

$$\sum_n I_n L_{\text{оп}}(\mathbf{J}_n) = (\mathbf{E}^i). \quad (2.63)$$

2. Второй этап решения состоит во введении системы весовых функций $\mathbf{W}_1, \mathbf{W}_2, \dots$, принадлежащих области определения $L_{\text{оп}}$, и образовании внутреннего произведения

$$\sum_n I_n \langle \mathbf{W}_m, L_{\text{оп}} \mathbf{J}_n \rangle = \langle \mathbf{W}_m, \mathbf{E}^i \rangle. \quad (2.64)$$

В случае когда весовые функции совпадают с базисными, $\mathbf{W}_m = \mathbf{J}_m$, метод моментов называют методом Галеркина. Уравнение (2.64) в этом случае принимает вид

$$\sum_n I_n \langle \mathbf{J}_m, L_{\text{оп}} \mathbf{J}_n \rangle = \langle \mathbf{J}_m, \mathbf{E}^i \rangle, \quad (2.65)$$

а внутренние произведения имеют смысл упомянутых выше реакций поля. Интересно отметить, что решение, полученное методом Галеркина, обладает стационарными свойствами, а сам этот метод эквивалентен вариационному методу Рэлея — Ритца, как будет показано в гл. 5.

3. На третьем этапе решения вычисляются различные внутренние произведения, входящие в (2.65). Это приводит к матричному уравнению

$$\begin{bmatrix} \langle \mathbf{J}_1, L_{\text{оп}} \mathbf{J}_1 \rangle & \langle \mathbf{J}_1, L_{\text{оп}} \mathbf{J}_2 \rangle & \dots \\ \langle \mathbf{J}_2, L_{\text{оп}} \mathbf{J}_1 \rangle & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \mathbf{J}_1, \mathbf{E}^i \rangle \\ \langle \mathbf{J}_2, \mathbf{E}^i \rangle \\ \vdots \\ \langle \mathbf{J}_N, \mathbf{E}^i \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.66)$$

которое можно записать в более компактном виде:

$$[Z](I) = (V). \quad (2.67)$$

Элементы матрицы $[Z]$ имеют смысл обобщенных импедансов, а элементы столбцов (I) и (V) — обобщенных токов и напря-

жений. Решение уравнения (2.67) может быть получено с помощью стандартных методов обращения матриц. В результате получаем вектор-столбец тока (I) :

$$(I) = [Z]^{-1}(V), \quad (2.68)$$

где

$$\mathbf{J} = \sum_n I_n \mathbf{J}_n. \quad (2.69)$$

Практически вычисление N^2 элементов матрицы импедансов, требуемое для получения уравнения (2.66), может оказаться чрезвычайно трудным даже при использовании быстродействующих ЭВМ, так как при этом приходится совершать по меньшей мере два численных интегрирования. А именно, если $L_{\text{оп}}$ — интегральный оператор, то $L_{\text{оп}}(\mathbf{J})$ вычисляется с помощью интегрирования; второе интегрирование входит в определение внутреннего произведения. Однако без одного из этих интегрирований можно обойтись, как будет показано ниже.

2. СШИВАНИЕ В ДИСКРЕТНЫХ ТОЧКАХ

При использовании метода Галеркина необходимо вычислять элементы матрицы обобщенных импедансов

$$Z_{mn} = \langle \mathbf{J}_m, L_{\text{оп}}(\mathbf{J}_n) \rangle, \quad (2.70)$$

где $L_{\text{оп}}$ — интегральный оператор. Если все необходимые интегрирования приходится в основном проводить численными методами, вычисление элементов Z_{mn} становится чрезвычайно громоздким и требующим больших затрат машинного времени. Эта трудность может быть сведена к минимуму, если в качестве весовых функций в уравнении (2.66) выбрать дельта-функции. В этом случае имеем

$$\begin{bmatrix} \langle \delta(\mathbf{S} - \mathbf{S}_1), L_{\text{оп}}(\mathbf{J}_1) \rangle & \langle \delta(\mathbf{S} - \mathbf{S}_1), L_{\text{оп}}(\mathbf{J}_2) \rangle & \dots \\ \langle \delta(\mathbf{S} - \mathbf{S}_2), L_{\text{оп}}(\mathbf{J}_1) \rangle & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \\ \vdots & \dots & \dots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle \delta(\mathbf{S} - \mathbf{S}_1), \mathbf{E}^i \rangle \\ \langle \delta(\mathbf{S} - \mathbf{S}_2), \mathbf{E}^i \rangle \\ \vdots \\ \langle \delta(\mathbf{S} - \mathbf{S}_N), \mathbf{E}^i \rangle \end{bmatrix}, \quad (2.71)$$

где \mathbf{S} — расстояние от некоторого начала отсчета, а \mathbf{S}_m — расстояние до точки, в которой требуется удовлетворить граничным

условиям. Нижний индекс у падающего поля \mathbf{E}_1^i показывает, что сшивание производится в точке 1, \mathbf{E}_2^i — сшивание в точке 2 и т. д. При таком выборе весовых функций все интегрирование сводится лишь к вычислению интегрального оператора $L_{оп}$.

Использование системы дельта-функций физически означает применение ослабленных граничных условий на электрическое поле: теперь требуется их удовлетворение не на всей поверхности тела S , а лишь в дискретном наборе точек. В этом смысле данный метод можно назвать «сшиванием по точкам». Опыт проведения расчетов показывает, что при выборе достаточного числа точек, в которых удовлетворяются граничные условия, может быть достигнута высокая точность решения. Однако точность решения может зависеть не только от числа точек, но и от их расположения. Часто хороший результат получается при равномерном распределении точек по поверхности. В частности, это имеет место при вычислении радиолокационных характеристик рассеяния или диаграмм направленности в дальней зоне, когда точка наблюдения удалена от излучателя. Однако, как и следовало ожидать, расчет характеристик поля в ближней зоне, например импеданса, оказывается гораздо более чувствительным к выбору числа и расположения точек сшивания. Тем не менее метод сшивания по точкам относительно прост и обеспечивает достаточную точность результатов для многих задач.

§ 4. БАЗИСЫ

Одна из основных проблем при численном исследовании определенной задачи состоит в выборе системы базисных функций \mathbf{J}_n . Теоретически имеется бесконечное число систем базисных функций. На практике, однако, часто существует лишь малое число базисов, адекватных рассматриваемой задаче. Удачный выбор системы базисных функций обычно позволяет добиться более быстрой сходимости решения, что приводит к меньшему объему расчетов при заданной точности, так как при этом приходится вычислять и обращать меньшую матрицу импедансов. Как правило, чем точнее базисные функции \mathbf{J}_n передают характер действительного распределения тока на излучателе, тем лучше сходимость и в некоторых случаях тем более обусловлена матрица импедансов (т. е. более устойчиво решение).

В настоящем параграфе рассматриваются некоторые возможности выбора базисных функций. В дальнейшем мы будем подразделять базисы на два типа. К первому типу относятся базисные функции, определенные и не равные нулю во всей области определения оператора $L_{оп}$, за исключением, может

быть, множества точек меры нуль. Систему базисных функций этого типа мы будем называть базисом полной области. В отличие от них базисные функции второго типа определены во всей области определения оператора $L_{оп}$, но обращаются в нуль в части этой области. Такую систему базисных функций мы будем называть базисом подобластей. Для проволочных излучателей использование подобного базиса позволяет разбить антенну на отдельные участки (сегменты). В связи с этим иногда базисные функции второго типа называют сегментными. В большинстве последних работ используются базисы подобластей; причина этого станет ясна из дальнейшего. Однако введение базиса полной области также дает ряд преимуществ в некоторых задачах.

В этом параграфе рассматривается также метод преобразования базиса, используемый в том случае, когда при постановке задачи удобна одна система базисных функций, а решение желательнее представить в виде разложения по другому базису. Выбор базиса существенно влияет на устойчивость матрицы импедансов. Обсуждение проблемы устойчивости завершает настоящий параграф.

1. СИСТЕМА БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ПОЛНОЙ ОБЛАСТИ

Здесь рассматриваются базисные функции \mathbf{J}_n , определенные и отличные от нуля во всей области существования \mathbf{J} , причем

$$\mathbf{J} = \sum_n I_n \mathbf{J}_n. \quad (2.72)$$

Рассмотрим для примера излучающую дипольную антенну, изображенную на фиг. 2.3, и применим для ее расчета метод сшивания по точкам, описанный в § 3, п. 2. Пусть координата z без штриха описывает положение точки, в которой удовлетворяются граничные условия (точка наблюдения), а штрихованная координата описывает положение источника. Для идеально проводящей антенны должно выполняться равенство

$$-\mathbf{E}_z^s(0, z) = \mathbf{E}_z^i(0, z), \quad (2.73)$$

или

$$L_{оп}(\mathbf{J}) = \mathbf{E}_z^i(0, z). \quad (2.74)$$

Выражение для интегрального оператора $L_{оп}$, согласно (2.46), можно записать в виде

$$L_{оп} = -\frac{\lambda \sqrt{\mu/\epsilon}}{8\pi^2 l} \int_{-L/2}^{L/2} G(r, r') dz', \quad (2.75)$$

где

$$r = \sqrt{a^2 + (z - z')^2}, \quad (2.76)$$

$$G(r, r') = \frac{e^{-ikr}}{r^3} [(1 + ikr)(2r^2 - 3a^2) + k^2 a^2 r^2]. \quad (2.77)$$

Пределы интегрирования в (2.75) совпадают с координатами верхнего и нижнего концов диполя. Если в качестве базисных функций выбрать $\cos(2n-1)\pi z/L$, то

$$J(z) = \sum_{n=1}^N I_n \cos(2n-1) \frac{\pi z}{L}, \quad (2.78)$$

$$-\frac{L}{2} \leq z \leq \frac{L}{2},$$

где

$$J = \hat{z}J(z), \quad (2.79)$$

причем базисные функции определены во всей области существования тока J . Выражение (2.78) есть разложение в конечный ряд Фурье по косинусам; при этом для удовлетворения условия обращения в нуль тока на концах антенны учитываются лишь нечетные гармоники.

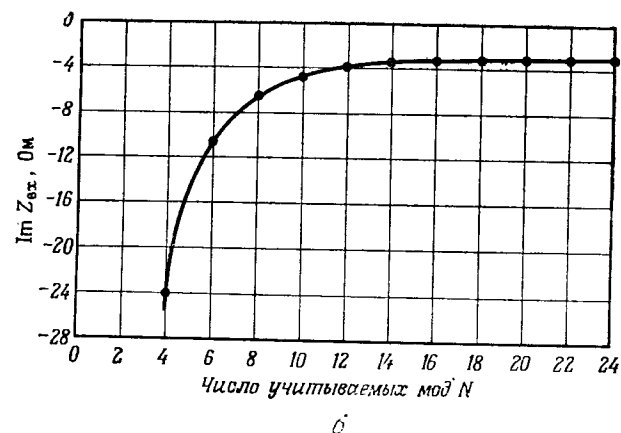
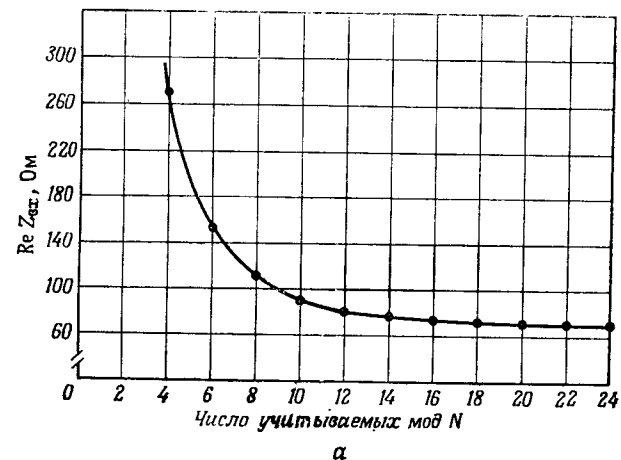
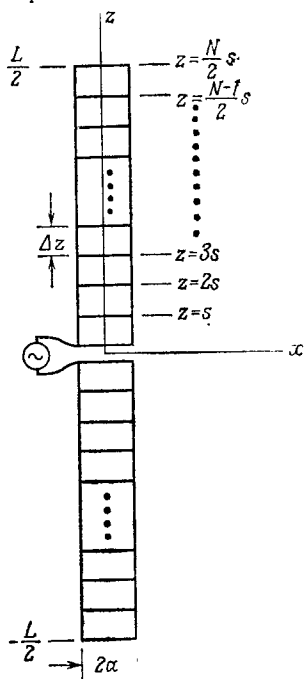
Для иллюстрации скорости сходимости, которая может быть получена при расчете методом сшивания по точкам с использованием разложения по базису полной области (2.78), на фиг. 2.4 приведены вычисленные значения действительной и мнимой частей входного сопротивления для рассматриваемого диполя. Сходимость решения оказывается довольно быстрой,

Фиг. 2.3. Разбиение диполя длиной L и радиусом a на подобласти.

что немаловажно, так как время расчета растет пропорционально N^3 .

2. СИСТЕМА БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ ПОДОБЛАСТЕЙ

В отличие от рассмотренной выше системы базисных функций полной области иногда целесообразнее использовать базисные функции, определенные во всей области определения оператора $L_{оп}$, но равные нулю в части этой области. Такой подход очень удобен при применении метода «сегментации», когда излучатель произвольного вида приближенно заменяется N про-



Фиг. 2.4. Кривая, иллюстрирующая сходимость расчета входного сопротивления диполя при увеличении числа учитываемых косинусоидальных базисных функций ($L = 0,45 \lambda$, $a = 0,007 \lambda$). a — действительная часть, b — мнимая часть.

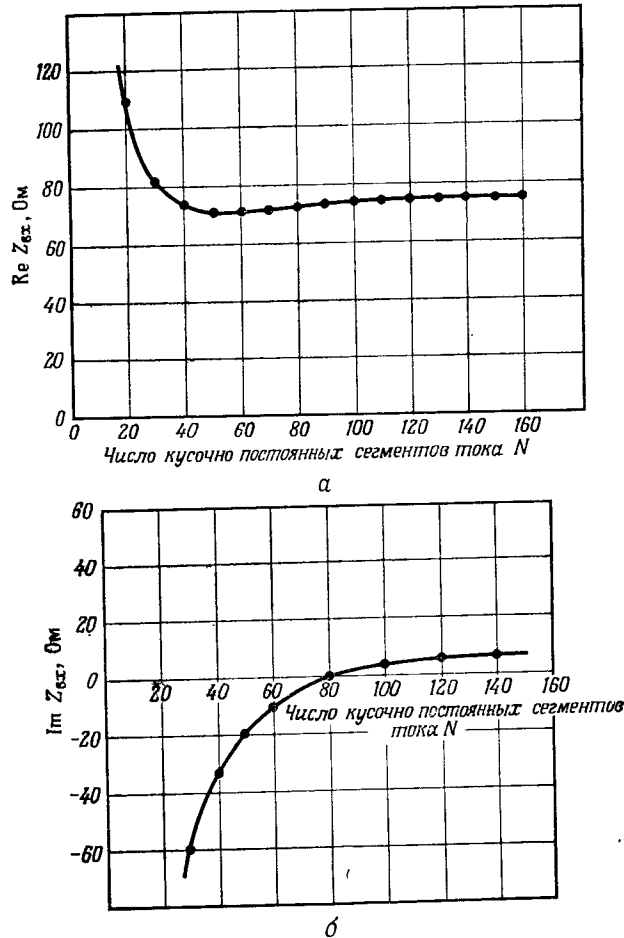
волочными сегментами. Как правило, сегменты считают прямолинейными, хотя это и не обязательно [5].

Проиллюстрируем этот подход на том же примере диполя и интегрального оператора (2.75). Определим базисные функции следующим образом:

$$J(z) = \begin{cases} I_j & \text{при } z' \text{ в интервале } \Delta z_j, \\ 0 & \text{при } z' \text{ вне интервала } \Delta z_j. \end{cases} \quad (2.80)$$

При этом ток аппроксимируется ступенчатой функцией, образованной из кусочно постоянных сегментов тока. Использо-

вание такой простейшей токовой функции при сегментации приводит к довольно грубому приближению для реального распределения тока на диполе. В следующем пункте приводятся



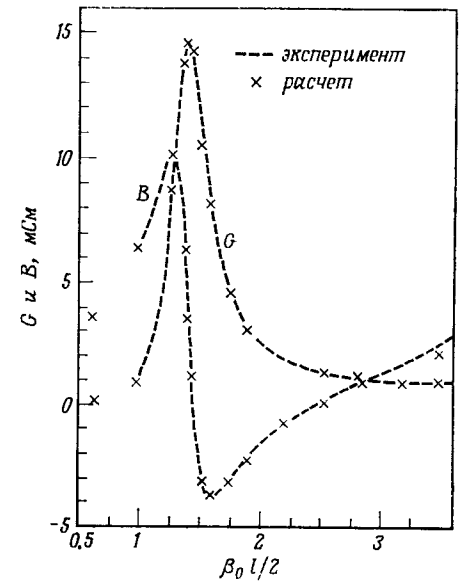
Фиг. 2.5. Кривая, иллюстрирующая сходимость расчета входного сопротивления диполя при увеличении числа учитываемых импульсных функций ($L = 0,47 \lambda$, $a = 0,005 \lambda$).
а — действительная часть, б — мнимая часть.

примеры других возможных способов выбора систем базисных функций, пригодных для сегментации.

Приведенные на фиг. 2.5 данные расчета действительной и мнимой частей импеданса диполя позволяют судить о быстро-

те сходимости решения, полученного методом сшивания по точкам с использованием базисных функций (2.80). Эти результаты можно сравнить с приведенными на фиг. 2.4. Видно, что при использовании более простых базисных функций (2.80) сходимость решения медленнее, чем в случае рассмотренной ранее системы функций полной области. Однако вследствие существенной симметрии, которая имеет место, если длина сегментов одинакова, затраты машинного времени в рассматриваемом случае оказываются меньше, чем при использовании базиса полной области. Вследствие симметрии для ряда конфигураций излучателей (линейный диполь, замкнутая или разомкнутая круглая петля и спираль) имеется лишь N подлежащих определению независимых элементов из общего числа N^2 элементов матрицы импедансов сегментов.

На фиг. 2.6 приведен еще один пример, позволяющий судить о точности, которая достигается при решении методом сшивания по точкам с использованием базисных функций подобластей (2.80) и базиса полной области. Здесь показаны результаты измерений Мака [10] комплексной проводимости диполя и расчетные данные, полученные обоими способами. Видно, что результаты превосходно согласуются как для действительной, так и для мнимой частей проводимости. Это согласие частично обусловлено удачным выбором модели участка возбуждения диполя, как будет показано в последующих параграфах и приложении 1.



Фиг. 2.6. Сравнение измеренной проводимости диполя с результатами расчетов, использующих базис полной области и базисные функции подобластей ($a/\lambda = 7,022 \cdot 10^{-3}$).

3. НЕКОТОРЫЕ СИСТЕМЫ БАЗИСНЫХ ФУНКЦИЙ

Как уже отмечалось, выбор системы базисных функций определяется многими конкретными обстоятельствами, связанными с рассматриваемой задачей. Мы приведем следующие

примеры систем базисных функций полной области, используемых при исследовании проволочных антенн дипольного типа: разложение Фурье

$$I(z) = I_1 \cos \frac{\pi x}{2} + I_2 \cos \frac{3\pi x}{2} + I_3 \cos \frac{5\pi x}{2} + \dots, \quad (2.81)$$

разложение Чебышева

$$I(z) = I_1 T_0(x) + I_2 T_2(x) + I_3 T_4(x) + \dots, \quad (2.82)$$

разложение Маклорена

$$I(z) = I_1 + I_2 x^2 + I_3 x^4 + \dots, \quad (2.83)$$

разложение по полиномам Лежандра

$$I(z) = I_1 P_0(x) + I_2 P_2(x) + I_3 P_4(x) \dots, \quad (2.84)$$

где

$$x = \frac{2z}{L}.$$

Разумеется, можно пользоваться и другими полными системами функций.

В качестве примеров систем базисных функций подобластей назовем следующие:

кусочно постоянные (импульсные) функции

$$J(z) = \begin{cases} I_j & \text{при } z \text{ в области } \Delta z_j, \\ 0 & \text{при } z \text{ вне этой области,} \end{cases} \quad (2.85)$$

кусочно линейные функции

$$J(z) = \begin{cases} \frac{I_j(z_{j+1} - z) + I_{j+1}(z - z_j)}{\Delta z_j} & \text{при } z \text{ в области } \Delta z_j, \\ 0 & \text{вне этой области,} \end{cases} \quad (2.86)$$

кусочно синусоидальные функции

$$J(z) = \begin{cases} \frac{I_j \sin k(z_{j+1} - z) + I_{j+1} \sin k(z - z_j)}{\sin k \Delta z_j} & \text{при } z \text{ в области } \Delta z_j, \\ 0 & \text{вне этой области,} \end{cases} \quad (2.87)$$

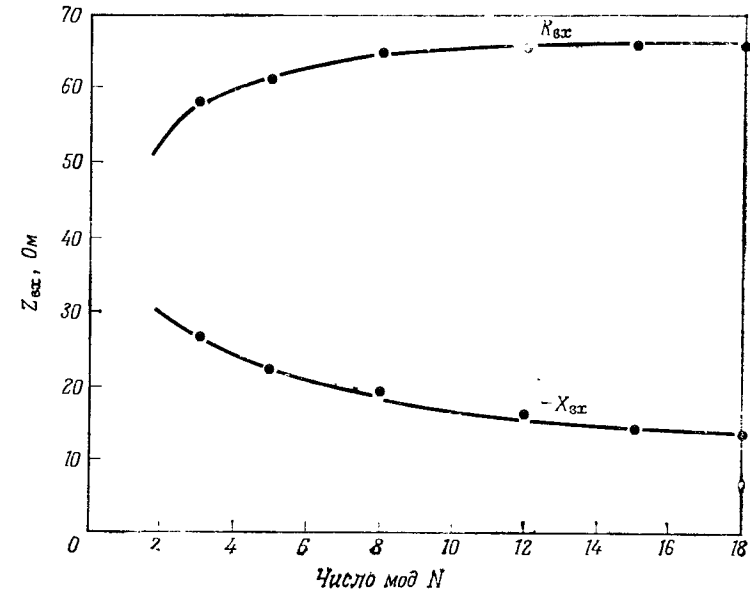
квадратичная интерполяция

$$J(z) = \begin{cases} A_j + B_j(z - z_j) + C_j(z - z_j)^2 & \text{при } z \text{ в области } \Delta z_j, \\ 0 & \text{вне этой области,} \end{cases} \quad (2.88)$$

синусоидальная интерполяция

$$J(z) = \begin{cases} A_j + B_j \sin k(z - z_j) + C_j \cos k(z - z_j) & \text{при } z \text{ в области } \Delta z_j, \\ 0 & \text{вне этой области.} \end{cases} \quad (2.89)$$

При расчетах, основанных на шивании по точкам, проще всего, очевидно, пользоваться кусочно постоянными функциями. Применение двух интерполяционных формул, хотя и обеспечивает более быструю сходимость решения, требует вычисления довольно сложных интегралов.



Фиг. 2.7. Кривые, иллюстрирующие сходимость расчета входного сопротивления диполя по интегральному уравнению Халлена при возрастании числа учитываемых косинусоидальных мод ($L = 0,45\lambda$, $a = 0,007\lambda$).

Интересное сопоставление нескольких базисных функций в применении к интегральному уравнению Халлена для распределения тока проведено Нейрейтером [11].

Нейрейтер рассмотрел решения интегральных уравнений Халлена и Поклингтона, используя модель вибратора с дельта-зазором, возбуждаемого генератором напряжения. Согласно его результатам, для интегрального уравнения Халлена скорость сходимости решения оказывается несколько большей. Однако, как следует из сравнения кривых фиг. 2.7 и 2.4, при использовании одинаковой системы базисных функций для диполя скорость сходимости приблизительно одинакова для обоих уравнений. Следует оговориться, что в приведенных двух случаях источники возбуждения различны: кривая на фиг. 2.4 получена для возбуждения плоским кольцевым магнитным током.

4. МЕТОД ПРЕОБРАЗОВАНИЯ БАЗИСА

После практического сравнения двух типов базисных функций, описанных в п. 1 и 2, можно сделать ряд выводов. Во-первых, применение базисных функций полной области может дать лучшую сходимость, но определение матрицы обобщенных импедансов в этом случае обычно сопряжено с большими затратами машинного времени. Во-вторых, использование базисных функций подобластей обычно облегчает определение матрицы обобщенных импедансов, но может потребовать большего числа уравнений. Это становится особенно заметным при большой кривизне излучателя, когда для достаточно точного описания его геометрии требуется проводить разбиение на большое число коротких сегментов. Было бы желательно иметь некоторый новый подход, который обладал бы достоинствами, присущими как базисам полной области, так и базисам подобластей. Здесь мы обсудим такой метод и применим его к расчету проволочных антенн. Первоначально этот метод был предложен Терпином [12] для расчета проволочных рассеивателей.

Рассмотрим решение задачи об излучении тонкой проволочной антенны, образованной прямолинейными или плавно искривленными идеальными проводниками, для которой применим метод сшивания по точкам. Таким образом, задача сводится к системе N линейных алгебраических уравнений, которая в матричных обозначениях имеет вид

$$(V) = [Z](I), \quad (2.90)$$

где составляющие I_n вектора тока (I) суть коэффициенты разложения тока, наведенного в антенне, по системе ортогональных базисных функций i_1, i_2, \dots, i_N . Матрица импедансов $[Z]$ имеет размерность $N \times N$; ее элемент с индексами mn определяется значением касательной составляющей электрического поля в m -й точке на антенне, обусловленной n -й базисной функцией тока [представленной вектором (i_n)], распределенного по всей длине провода. При использовании кусочно постоянного базиса в качестве базисных функций принимаются единичные импульсы шириной L/N , т. е.

$$(i_1) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (i_2) = \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \dots, \quad (i_N) = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ \vdots \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}. \quad (2.91)$$

Преобразуем теперь выбранный нами базис к новому.

Пусть система линейных уравнений (2.91) относится к базисной системе ортогональных функций i_1, i_2, \dots, i_N . Мы можем привести уравнения (2.90) к новому базису i'_1, i'_2, \dots, i'_N с помощью линейного преобразования

$$(I) = [T](I'), \quad (2.92)$$

где $[T]$ — матрица преобразования, а (I') — вектор, представляющий ток в антенне через новые базисные функции, т. е. отнесенный к векторам (i'_n) , представляющим функции i'_n :

$$(I') = I'_1(i'_1) + I'_2(i'_2) + \dots + I'_N(i'_N), \quad (2.93)$$

где $I'_n, n = 1, 2, \dots, N$, — составляющие вектора (I') . Подставив (2.92) в (2.90), получим

$$[Z][T](I') - (V) = (0). \quad (2.94)$$

Полагая

$$[Z'] = [Z][T], \quad (2.95)$$

перепишем это уравнение в виде

$$[Z'](I') - (V) = (0). \quad (2.96)$$

Уравнение (2.96) эквивалентно уравнению (2.90), отнесенному к новому базису.

Рассмотрим в качестве примера преобразование от базиса импульсных функций к базису ортонормированных собственных функций, таких, как тригонометрические функции. В этом случае матрица преобразования $[T]$ может быть просто определена. Как видно из (2.92), каждый член новой системы базисных функций образует столбец матрицы $[T]$. Так, при выборе в качестве нового базиса функций $\cos n\pi l/L, n = 1, 2, \dots, N$, n -й столбец матрицы $[T]$ описывает распределение по проводу косинусоидальной функции n -го порядка, т. е. элемент $[T]$ с индексами mn равен $\cos n\pi l_m/L$, где l_m определяет положение m -й точки сшивания на оси провода.

Таким образом, уравнение (2.92) принимает вид

$$\begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ \vdots \\ I_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos \frac{\pi l_1}{L} & \cos \frac{2\pi l_1}{L} & \dots & \cos \frac{N\pi l_1}{L} \\ \cos \frac{\pi l_2}{L} & \cos \frac{2\pi l_2}{L} & \dots & \cos \frac{N\pi l_2}{L} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \cos \frac{\pi l_N}{L} & \cos \frac{2\pi l_N}{L} & \dots & \cos \frac{N\pi l_N}{L} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_1 \\ I'_2 \\ \vdots \\ I'_N \end{bmatrix}. \quad (2.97)$$

Простой вид матрицы преобразования в этом примере объясняется тем, что каждая составляющая I_n вектора тока (I) при выборе в качестве базиса кусочно постоянных функций совпадает со значением тока в точке l_n ($-L/2 \leq l_n \leq L/2$) на антенне. Это обусловлено тем, что в точке l_n отлична от нуля лишь n -я базисная функция. В общем случае это не так; в частности, это не справедливо для нового вектора тока (I').

Если выбран нужный базис и тем самым определена матрица преобразования $[T]$, то матрица импедансов $[Z]$ преобразуется согласно (2.95) и мы получаем новую систему уравнений (2.96), отнесенную к новому базису.

Обычно оказывается, что составляющие I'_m искомого вектора тока (I') пренебрежимо малы при $m > M$ ($M < N$), т. е. решение

$$(I') = I'_1(i'_1) + I'_2(i'_2) + \dots + I'_M(i'_M) + \dots + I'_N(i'_N) \quad (2.98)$$

достаточно хорошо приближенно описывается первыми M членами (при надлежащем упорядочении составляющих I'_m). Часто хорошая точность расчета получается уже при $M < N/10$. Поскольку машинное время решения N линейных уравнений приблизительно пропорционально N^3 , преимущества такого преобразования базиса очевидны.

Таким образом, если допустимо такое приближение, то требуется найти решение уравнений (2.96) для M из N неизвестных. Матрица импедансов $[Z']$ с размерностью $N \times N$ может при этом быть заменена прямоугольной матрицей $[Z'_a]$ размерности $N \times M$, образованной из M первых столбцов $[Z']$, а вектор (I') заменяется M -мерным вектором (I'_a), составляющие которого совпадают с первыми M составляющими (I'). Вектор возбуждающего напряжения (V) не меняется. В результате мы приходим к переопределенной системе из N уравнений относительно M неизвестных:

$$\begin{bmatrix} Z'_{a11} & Z'_{a12} & \dots & Z'_{a1M} \\ Z'_{a21} & Z'_{a22} & \dots & Z'_{a2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z'_{aN1} & Z'_{aN2} & \dots & Z'_{aN M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{a1} \\ I'_{a2} \\ \vdots \\ I'_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.99)$$

для которой существует множество решений, зависящих от способа выбора M уравнений подсистемы. Чтобы обойти эту неоднозначность решения, умножим уравнение (2.99) на матрицу,

эрмитово сопряженную матрице $[Z'_a]$:

$$\begin{bmatrix} Z'^*_{a11} & Z'^*_{a21} & \dots & Z'^*_{aN1} \\ Z'^*_{a12} & Z'^*_{a22} & \dots & Z'^*_{aN2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z'^*_{a1M} & Z'^*_{a2M} & \dots & Z'^*_{aN M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} Z'_{a11} & Z'_{a12} & \dots & Z'_{a1M} \\ Z'_{a21} & Z'_{a22} & \dots & Z'_{a2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z'_{aN1} & Z'_{aN2} & \dots & Z'_{aN M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I'_{a1} \\ I'_{a2} \\ \vdots \\ I'_{aM} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} Z'^*_{a11} & Z'^*_{a12} & \dots & Z'^*_{a1M} \\ Z'^*_{a21} & Z'^*_{a22} & \dots & Z'^*_{a2M} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ Z'^*_{aN1} & Z'^*_{aN2} & \dots & Z'^*_{aN M} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} V_1 \\ V_2 \\ \vdots \\ V_N \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix}, \quad (2.100)$$

где звездочками обозначены комплексно сопряженные величины. Произведение $[\tilde{Z}'_a]^* [Z'_a]$, где знак \sim означает транспонирование матрицы, является комплексной симметричной квадратной матрицей ранга M .

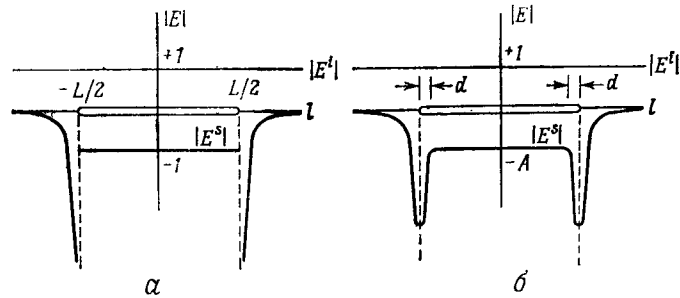
Решение уравнения (2.100) обеспечивает наилучшее (с наименьшей средней квадратичной ошибкой) удовлетворение граничным условиям в N точках провода с помощью M мод. Нужно решить систему лишь из M уравнений, где число мод M может быть, например, меньше 10, в то время как число точек сшивания N может превосходить 100. Как показано ниже в примере, при использовании описываемого метода затраты машинного времени и памяти могут быть существенно сокращены.

Использование метода наименьших квадратов для рассмотрения проволочных антенн замкнутой конфигурации, например рамочных антенн, не встречает затруднений. В то же время возможность применения этого метода к расчету антенн открытой конфигурации (например диполя) требует специального рассмотрения.

Поле вблизи концов проволочной антенны открытого типа обладает неоднородностью, зависящей от геометрии концов вибратора. В случае вибратора с плоскими торцами имеется известная особенность на ребре. При численном решении наличие этой особенности приводит к ошибкам в определении величины рассеянного поля на проводе вблизи торцов. Поэтому любое решение, основанное на удовлетворении граничных условий на проводе в смысле метода наименьших квадратов, должно учитывать этот эффект.

Для выяснения влияния поля вблизи торцов вибратора на решение, получаемое методом наименьших квадратов, рассмот-

рим рассеяние плоской волны, падающей на прямолинейную проволочную антенну нормально к ее оси. Пусть падающее электрическое поле имеет единичную амплитуду, а фаза его равна нулю на оси провода. Наводимый на рассеивателе ток возбуждает рассеянное поле, точное значение которого (фиг. 2.8, а) таково, что касательная составляющая полного электрического поля ($E^i + E^s$) обращается в нуль на проводе. Численное решение дает приближенное значение этого поля (фиг. 2.8, б). При получении решения методом наименьших квадратов, грубо говоря, масштабный коэффициент A на фиг. 2.8, б подбирается



Фиг. 2.8. Распределение падающего и рассеянного полей вдоль проводника при падении плоской волны.
а — точный результат, б — приближенное численное решение.

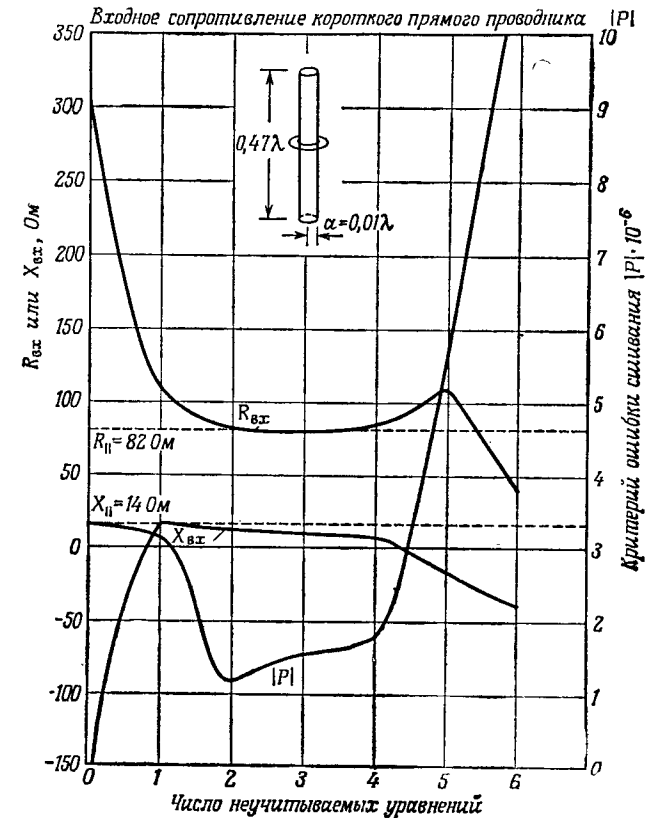
так, чтобы средняя квадратичная ошибка в полном поле была наименьшей. Большая ошибка в вычислении полей вблизи торцов провода приводит к тому, что A становится меньше единицы. В результате этого приближенное значение наводимых токов оказывается заниженным. Однако, как показал Терпин [12], если при применении метода наименьших квадратов исключить точки сшивания, расположенные ближе некоторого расстояния d к торцам (фиг. 2.8, б) (т. е. опустить в системе алгебраических уравнений соответствующие уравнения), то результат улучшается.

Необходимость особого подхода к учету концевых точек не должна нас удивлять; критическая зависимость решения от выбора точек сшивания была замечена и при применении других численных методов [13].

Для оценки точности полученного решения и возможности оптимизации метода решения необходимо сформулировать критерий ошибки в сшивании полей. Полезной характеристикой качества решения может служить величина

$$P = -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \int_L \mathbf{J}^* \cdot \mathbf{E}^T dt \right\}, \quad (2.101)$$

где \mathbf{J}^* — величина, комплексно сопряженная плотности тока, а \mathbf{E}^T — полное электрическое поле (ошибка в значении поля) на проводе. Величина P есть средняя мощность, излучаемая в отсутствие рассеивателя эквивалентным источником тока \mathbf{J} , воз-



Фиг. 2.9. Кривые, иллюстрирующие влияние отбрасывания уравнений, отвечающих точкам сшивания вблизи концов дipoля. Приведены кривые активной и реактивной частей входного импеданса и критерия ошибки сшивания P .

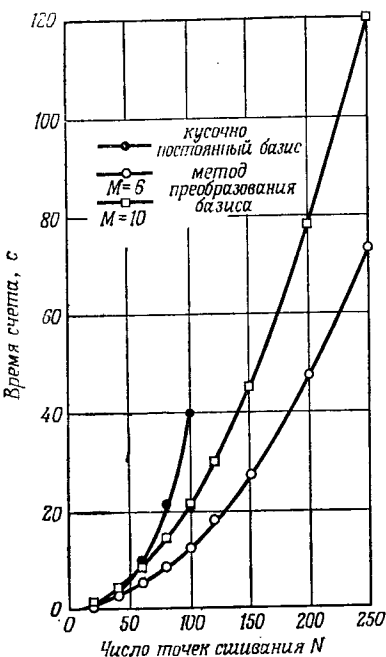
буждающим электрическое поле \mathbf{E}^T . Отрицательные значения P соответствуют поглощению энергии, а положительные — излучению. Поскольку мы рассматриваем идеально проводящий рассеиватель, он не может ни поглощать, ни генерировать энергию. Закону сохранения энергии в этом случае соответствует условие $P = 0$. Желательно поэтому минимизировать величину P .

Следует, однако, подчеркнуть, что удовлетворение условия $|P| = 0$ при численном решении задач рассмотренного типа не обязательно означает, что задача решена точно, так как сам критерий вычисляется с помощью приближенных методов. Выражение (2.101) представляется в приближенном виде:

$$P \approx -\frac{1}{2} \operatorname{Re} \left\{ \sum_{n=1}^N I_n^* \cdot E_n^T \right\}, \quad (2.102)$$

где I_n и E_n^T — значения тока и полного электрического поля в N точках шивания.

На фиг. 2.9 приведены кривые $|P|$ и импеданса для диполя длиной $L = 0,47 \lambda$ с радиусом проводника $a = 0,01 \lambda$. Обратим внимание на то, что пренебрежение всего лишь одной точкой вблизи каждого из торцов диполя уже приводит к существенному улучшению результатов. Это свойство проявляется в большинстве задач. Заметим, что для рассматриваемого диполя это еще не соответствует оптимуму. Оптимальное расстояние от торцов зависит от радиуса проводника и точности вычислений элементов матрицы импедансов. Матрица импедансов $[Z']$, использованная



Фиг. 2.10. Зависимость времени счета от числа точек шивания при использовании кусочно-постоянного базиса и при расчете методом преобразования базиса.

при решении, была получена преобразованием кусочно-постоянных базисных функций с $N = 80$ в косинусный базис с $M = 20$.

В качестве иллюстрации возможного улучшения, достигаемого при преобразовании базиса, рассмотрим изображенные на фиг. 2.10 зависимости, относящиеся к расчету полуволновой излучающей проволочной антенны. Очевидно, что, скажем, при 100 точках шивания можно существенно сократить время прогонки. Отметим также, что метод преобразования базиса дает потенциальную возможность учета большего числа точек шивания (в смысле наименьших квадратов), чем это допускает использование кусочно-постоянного базиса.

5. КУСОЧНО СИНУСОИДАЛЬНЫЙ БАЗИС. МЕТОД СОГЛАСОВАНИЯ РЕАКЦИЙ

Выше рассматривался метод преобразования от одного базиса, требующего решения системы большого числа уравнений, к другому базису, позволяющему описывать задачу системой уравнений существенно меньшего порядка. Основной целью такого преобразования является сокращение времени счета.

При применении метода моментов время счета определяется в основном двумя факторами. Во-первых, это объем вычислительных операций, требуемых для нахождения элементов матрицы обобщенных импедансов $[Z]$. Обычно он определяется сложностью численного интегрирования, требуемого для нахождения элементов Z_{mn} . Вторым фактором — размер матрицы $[Z]$, определяющий время, требуемое для вычисления обратной матрицы $[Z]^{-1}$.

Здесь излагается развитый Ричмондом [14] метод получения элементов матрицы импедансов $[Z]$, основанный на использовании понятия реакции и кусочно-синусоидальных базисных функций. Этот метод обладает двумя достоинствами. Во-первых, объем вычислений при нахождении элементов матрицы $[Z]$ сравнительно невелик, так как для многих интегралов могут быть получены замкнутые выражения. Фактически, для антенных элементов, расположенных в одной плоскости, все интегралы сводятся к замкнутым выражениям, содержащим интегральный синус и интегральный косинус, которые легко могут быть вычислены с помощью ЭВМ [15]. Во-вторых, этот метод обеспечивает очень быструю сходимость результатов; поэтому размер матрицы $[Z]$ оказывается малым по сравнению с расчетами, использующими другие базисные и весовые функции.

Так как в рассматриваемом методе важную роль играет понятие реакции, его иногда называют методом согласования реакций. По существу, этот метод можно рассматривать как обобщение метода наведенных э. д. с. [16]. Для иллюстрации рассмотрим дипольную антенну с центральным возбуждением. Диполь состоит из двух частей, или сегментов, расположенных по обе стороны от точки возбуждения. В методе согласования реакций считается, что антенна образована из двух или большего числа подобных сегментов.

Как можно показать, метод согласования реакций или наведенных э. д. с. эквивалентен методу Галеркина. Доказательство довольно громоздко и здесь не будет приведено. Вместо этого рассмотрим применение метода, начав с решения задачи о двухсегментной антенне.

Заменим первоначальный источник возбуждения линейной антенны (т. е. \mathbf{J}_i и \mathbf{K}_i на диполе) плотностями токов

$$\mathbf{J} = \hat{n} \times \mathbf{H}, \quad (2.103)$$

$$\mathbf{K} = \mathbf{E} \times \hat{n}, \quad (2.104)$$

распределенными по замкнутой поверхности антенны S . Здесь \hat{n} — единичный вектор внешней нормали к поверхности. Поверхностные электрические и магнитные токи \mathbf{J} и \mathbf{K} назовем «истинными источниками». В соответствии с принципом эквивалентности Шелкунова токи \mathbf{J} и \mathbf{K} возбуждают истинное поле вне поверхности S и нулевое поле внутри провода. Для идеально проводящих антенн, рассматриваемых нами, плотность поверхностного тока \mathbf{K} равна нулю всюду, кроме возбуждающего зазора.

Поместим теперь на оси антенны линейный электрический источник и рассмотрим «реакцию», или взаимодействие этого «пробного источника» с истинным. Взаимодействие описывается здесь теоремой взаимности. Так, если распределения токов $\mathbf{J}(a)$, $\mathbf{K}(a)$ возбуждают поля $\mathbf{E}(a)$, $\mathbf{H}(a)$ в присутствии источника b , действующего как приемник (и наоборот), то реакция или взаимодействие источников a и b определяется следующей комплексной величиной:

$$\langle a, b \rangle = \iiint_{V_a} [\mathbf{J}(a) \cdot \mathbf{E}(b) - \mathbf{K}(a) \cdot \mathbf{H}(b)] dV_a. \quad (2.105)$$

Таким образом, реакция является мерой связи между источниками a и b . Если удовлетворяются условия выполнения теоремы взаимности, то

$$\langle a, b \rangle = \langle b, a \rangle. \quad (2.106)$$

В нашей задаче поверхностный электрический ток \mathbf{J} на цилиндрической поверхности диполя обычно может быть заменен эквивалентным линейным источником, параллельным пробному. Таким образом, задача сводится к взаимодействию двух линейных источников, разнесенных на расстояние, равное радиусу сечения диполя.

Пусть распределение тока в пробном диполе имеет вид

$$I_t(z) = \frac{\sin k(h - |z|)}{\sin kh}, \quad (2.107)$$

где h — длина плеча диполя, z отсчитывается от центра, а $k = 2\pi/\lambda$. Ток в истинном источнике (распределение тока по диполю) при двухсегментном решении выражается в виде

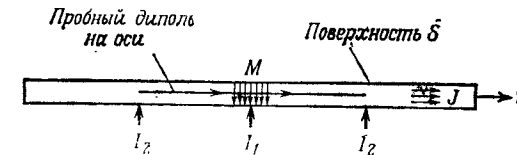
$$I(z) = I_1 \frac{\sin k(h - |z|)}{\sin kh}, \quad (2.108)$$

и задача состоит в определении входного тока I_1 , возбуждаемого заданным генератором напряжения V_1 . Согласно теореме взаимности, искомое решение удовлетворяет соотношению $I_1 Z = V_1$, где Z — реакция между пробным источником, возбуждающим поля \mathbf{E}_t , \mathbf{H}_t , и истинным источником \mathbf{J} , определяемым уравнением (2.103):

$$Z = -\frac{1}{I_1} \int \mathbf{J} \cdot \mathbf{E}_t dl. \quad (2.109)$$

Отметим, что найденное двухсегментное решение для линейной антенны совпадает с известным результатом, получаемым методом наведенных э. д. с. и описанным во многих учебниках.

Результаты двухсегментного решения справедливы лишь в



Фиг. 2.11. При четырехсегментном решении антенна разделяется на четыре сегмента с кусочно синусоидальным распределением тока в каждом из них.

ограниченной области длин и радиусов антенн. Поэтому рассмотрим четырехсегментное решение для одиночной линейной антенны. Обобщение на N -сегментное решение для одиночной или связанных антенн будет тогда очевидным.

Рассмотрим симметричный диполь, разделенный на четыре сегмента (фиг. 2.11). Пусть комплексные величины I_1 и I_2 определяют значения тока $I(z)$ в точках стыка соседних сегментов:

$$I_1 = I(0), \quad (2.110)$$

$$I_2 = I(h/2), \quad (2.111)$$

а на концах антенны $I(z)$ обращается в нуль. Обобщим выражение для тока (2.107), заменив его кусочно синусоидальными функциями

$$I(z) = I_1 \frac{\sin k(h/2 - z)}{\sin kh/2} + I_2 \frac{\sin kz}{\sin kh/2} \quad \text{при } 0 \leq z \leq h/2, \quad (2.112)$$

$$I(z) = I_2 \frac{\sin k(h - z)}{\sin kh/2} \quad \text{при } h/2 \leq z \leq h. \quad (2.113)$$

Искомые величины здесь I_1 и I_2 . Рассмотрим взаимодействие истинного тока $I(z)$ с двумя пробными токами. Одно уравнение описывает взаимодействие тока $I(z)$ с пробным диполем, расположенным на оси антенны так, что центры их совпадают (фиг. 2.11). Длина каждого плеча диполя $h/2$. Второй пробный

ток, взаимодействующий с $I(z)$, соответствует диполю, сдвинутому вправо на расстояние $h/2$. В результате приходим к системе двух линейных алгебраических уравнений

$$I_1 Z_{11} + I_2 Z_{12} = V_1, \quad (2.114)$$

$$I_1 Z_{21} + I_2 Z_{22} = 0, \quad (2.115)$$

где Z_{11} и Z_{22} — взаимные импедансы двух параллельных бесконечно тонких диполей, отстоящих на расстояние a и расположенных рядом; Z_{12} и Z_{21} соответствуют диполям, отстоящим на расстояние a и разнесенным в продольном направлении на $h/2$. В силу симметрии диполя матрица импедансов может быть сделана симметричной, если удвоить значения Z_{21} и Z_{22} в (2.115). Если использовать кусочно синусоидальное распределение тока на каждом сегменте, то ток в любом заданном сегменте можно представить суммой двух синусоидальных токов, каждый из которых обращается в нуль на одном из концов сегмента. В результате эквивалентное распределение поверхностного тока представляется набором, скажем, из N перекрывающихся плотностей токов, соответствующих диполям. Для n -го диполя входной ток равен току I_n в n -й точке сочленения сегментов и обращается в нуль на удаленных от этой точки концах двух сегментов, образующих n -й диполь.

Для получения уравнений относительно неизвестных комплексных амплитуд тока I_n введем систему из N бесконечно тонких пробных диполей с синусоидальным распределением тока, расположенных на оси рассматриваемой проволочной антенны. Рассмотрим последовательно условия взаимности между каждым из пробных диполей и всеми истинными диполями, имеющими форму отрезков цилиндров круглого цилиндра [17]. В результате приходим к следующему соотношению для m -го пробного диполя и n -го истинного диполя:

$$V_m \delta_{mn} = - \int I_n(\tau_n) \cdot E_m d\tau_n, \quad (2.116)$$

где интегрирование проводится по координате τ_n , отсчитываемой вдоль n -го истинного диполя; δ_{mn} — символ Кронекера. Подставляя сюда предположенный вид распределения тока $I_n(\tau_n)$ в истинном диполе, найдем взаимный импеданс

$$Z_{mn} = - \int_{l_{n-1}}^{l_n} \frac{\sin k(l_n - l)}{\sin k d_{n-1}} \hat{\tau}_{n-1} \cdot E_m dl - \int_{l_n}^{l_{n+1}} \frac{\sin k(l - l_n)}{\sin k d_n} \hat{\tau}_n \cdot E_m dl. \quad (2.117)$$

Здесь переменная интегрирования l совпадает с координатой вдоль отдельного сегмента, а d_{n-1} и d_n — длины $(n-1)$ -го и n -го сегментов. Единичные векторы $\hat{\tau}_{n-1}$ и $\hat{\tau}_n$ ориентированы вдоль положительного направления тока на $(n-1)$ -м и n -м сегментах, а E_m , как и прежде, напряженность электрического поля, излучаемого в свободном пространстве m -м пробным диполем с кусочно синусоидальным распределением тока. Выражения для взаимных импедансов Z_{mn} определяются, таким образом, формулами классического метода наведенных э. д. с. Как упоминалось выше, входящие в эти выражения интегралы вычисляются в замкнутом виде для компланарных сегментов. Для некомпланарных сегментов интегралы в (2.117) можно вычислять с помощью известных численных методов.

Уравнение (2.116) можно теперь переписать в виде

$$V_m \delta_{mn} = Z_{mn} I_n, \quad (2.118)$$

где I_n — комплексный ток в центре n -го диполя. Вычисляя взаимную реакцию между m -м пробным диполем и распределением истинного поверхностного тока на проводнике, представляемого суперпозицией перекрывающихся поверхностных токов для N диполей, приходим к соотношению

$$V_m = \sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n. \quad (2.119)$$

Это одно из N уравнений линейной алгебраической системы, которую можно вывести, применяя последовательно теорему взаимности (или вычисляя взаимную реакцию) для совокупности N цилиндрических диполей, описывающей истинное распределение тока, и каждого из N бесконечно тонких пробных диполей на оси. Полученная система может быть представлена в виде матричного уравнения

$$[V] = [Z] [I], \quad (2.120)$$

решение которого относительно вектора тока $[I]$ может быть получено стандартными методами. Обычно принимают, что антенна возбуждается источником напряжения единичной амплитуды; тогда значение тока в точке возбуждения представляет собой входную проводимость антенны.

Проведенное рассмотрение обнаруживает определенное сходство с методом Галеркина. Фактически к согласованию реакций можно прийти, основываясь на методе моментов. Однако в работе [14] исходным пунктом были фундаментальные принципы теоремы взаимности и взаимной реакции.

При изложении метода согласования реакций под напряженностью поля, входящей, например, в уравнение (2.117), подразумевалась напряженность электрического поля, возбуждаемого

в свободном пространстве пробным диполем с кусочно синусоидальным распределением тока. Мы связывали, разумеется, токи на пробных источниках с введенными ранее весовыми функциями.

Получим теперь выражения для полей, возбуждаемых пробным диполем с кусочно синусоидальным распределением тока [18].

Удобные точные выражения для поля гармонического во времени электрического линейного источника с синусоидальным распределением тока

$$I(z) = A \cos kz + B \sin kz \quad (2.121)$$

были даны Шелкуновым и Фриисом [19]. Продольная составляющая этого поля представляется в виде

$$E_z(\rho, z) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \times \\ \times \left[I'(z') \frac{e^{-ikr}}{r} + I(z') \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-ikr}}{r} \right]_{z'=z_1}^{z'=z_2}, \quad (2.122)$$

где

$$r = \sqrt{\rho^2 + (z - z')^2}. \quad (2.123)$$

Как видно из фиг. 2.12, z_1 и z_2 — крайние точки линейного источника; $I'(z)$ — первая производная от $I(z)$, $k = \omega \sqrt{\mu\epsilon}$.

Поле линейного источника с кусочно синусоидальным распределением тока описывается суммой

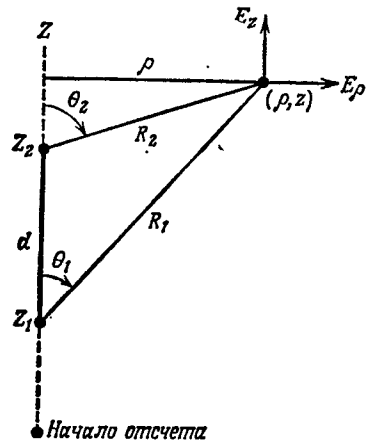
$$E_z(\rho, z) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \sum_{i=1}^{n-1} \left[I'(z') \frac{e^{-ikr}}{r} + I(z') \frac{\partial}{\partial z} \frac{e^{-ikr}}{r} \right]_{z'=z_i}^{z'=z_{i+1}}, \quad (2.124)$$

где ток между точками z_i и z_{i+1} задан в виде (2.121). Если ток $I(z)$ непрерывен в точках z_i (на границах сегментов) и обращается в нуль в крайних точках z_1 и z_n , то выражение (2.124) принимает вид

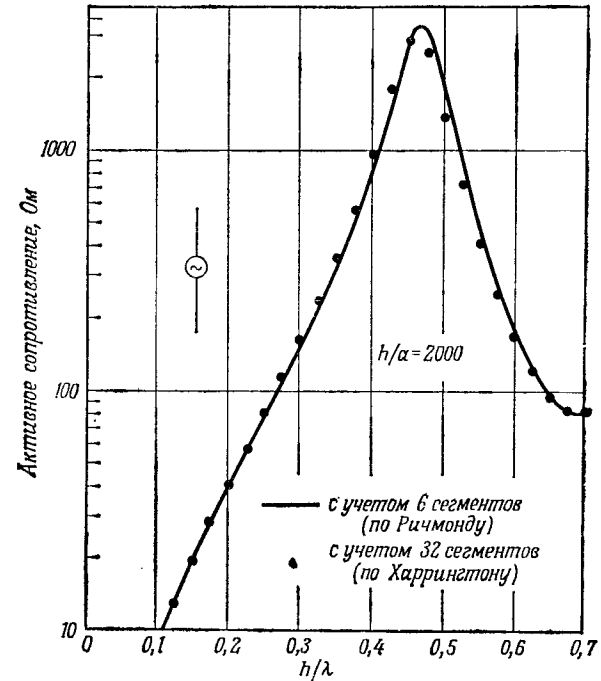
$$E_z(\rho, z) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \sum_{i=1}^n \Delta I'_i \frac{e^{-ikr_i}}{r_i}, \quad (2.125)$$

где

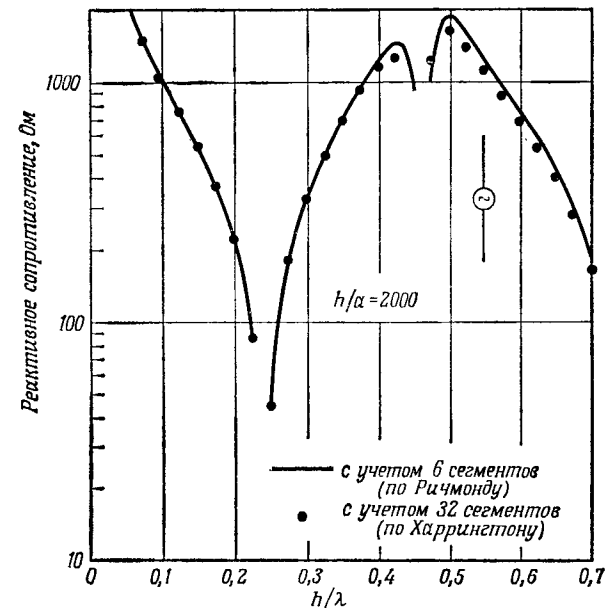
$$\Delta I'_i = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} [I'(z_i - \epsilon) - I'(z_i + \epsilon)]. \quad (2.126)$$



Фиг. 2.12. Электрический линейный источник, расположенный вдоль оси z ; точка наблюдения (ρ, z) .



Фиг. 2.13. Зависимость активной составляющей входного сопротивления цилиндрического вибратора радиуса a и полной длины $L = 2h$ от h/λ .



Фиг. 2.14. Зависимость реактивной составляющей входного сопротивления цилиндрического вибратора радиуса a и полной длины $L = 2h$ от h/λ .

Постоянные $\Delta I'_i$ определяют величины разрывов производной распределения тока в точках z_i . В крайних точках, разумеется,

$$I'(z_1 - \varepsilon) = I'(z_n + \varepsilon) = 0.$$

Аналогичным образом для радиальной составляющей электрического поля можно получить выражение

$$E_\rho(\rho, z) = \frac{-i}{4\pi\omega\varepsilon\rho} \sum_{i=1}^n \Delta I'_i e^{-ikr_i} \cos\theta_i. \quad (2.127)$$

Несмотря на очень простой вид полученных выражений для E_z и E_ρ , они являются точными и справедливыми даже в ближней зоне.

Примеры, иллюстрирующие точность и быстроту сходимости, присущие методу согласования реакций, приведены на фиг. 2.13 и 2.14. Заметим, что точность расчета, достигаемая методом согласования реакции с разбиением на шесть сегментов, при использовании метода сшивания по точкам с кусочно линейной интерполяцией требует приблизительно в 5 раз большего числа сегментов.

6. МОДЫ ТОКА. ЗАДАЧА НА СОБСТВЕННЫЕ ЗНАЧЕНИЯ

При обсуждении достоинств и недостатков различных систем базисных функций, рассмотренных выше, естественно возникает вопрос о существовании особой системы поверхностных токов и соответствующих наводимых ими полей, определяемых размерами и формой антенны и не зависящих от условий возбуждения. Такая базисная система токов действительно существует; токи эти принято называть «собственными функциями», или «модами». Моды тока обладают рядом интересных математических свойств, самым замечательным из которых является их взаимная ортогональность. Таким образом, энергия, излучаемая одной из мод, не зависит от любых других мод, которые могут существовать.

Понятие собственных функций, или мод, не ново: с их помощью обычно решается задача об излучении или рассеянии методом разделения переменных для идеально проводящих тел, граница которых совпадает с одной из координатных поверхностей (например, для сферы). Гарбач [20] предположил, что такие моды существуют для идеально проводящих излучателей любой формы. В 1968 г. он рассчитал моды для нескольких простых случаев [21]. Метод рассмотрения основывался на приведении матрицы рассеяния к диагональному виду. Однако определение мод требовало громоздких вычислений.

Терпину [12] удалось определить моды для нескольких более сложных задач (например, рассеяние на проволочной антенне в виде отрезка дуги круга), но присущие расчету мод вычислительные трудности остались [22]. Недавно Харрингтон и Мотц [23, 24] предложили иной подход к задаче о собственных функциях, основанный на диагонализации матрицы импедансов (2.66). Они связали работу Гарбача с методом моментов и получили общие формулы, позволяющие проводить прямой расчет мод тока для тел произвольной формы.

В то время, когда автор приступил к написанию этой главы, существовали серьезные сомнения относительно полезности введения мод. Однако в связи с описанными успехами в развитии вычислительных методов становится ясно, что в ближайшем будущем при решении задач об излучении (например, при максимизации направленности решетки излучателей) все чаще станут использовать разложения по модам тока. Поэтому мы включили в этот параграф, посвященный рассмотрению базисных функций, описание мод тока, а в приложении 2 кратко рассматриваем некоторые детали математической теории мод.

7. ПРОБЛЕМА УСТОЙЧИВОСТИ

Чрезвычайно важная проблема, редко обсуждаемая в литературе, состоит в получении устойчивого численного решения и в распознавании неустойчивости решения. Очевидно, если матрица импедансов $[Z]$ сингулярна, то обратная ей матрица не существует и нельзя представить решение в виде

$$[I] = [Z]^{-1} [V]. \quad (2.128)$$

В этом случае не существует единственного решения. Однако если матрица импедансов «почти сингулярна», то, как мы увидим, при соблюдении некоторых условий удается получить решение, которое при других условиях становится неустойчивым.

Систему уравнений с «почти сингулярной» матрицей коэффициентов принято называть плохо обусловленной. Решение плохо обусловленных систем может быть неустойчивым. В случае двух измерений сингулярность матрицы коэффициентов (импедансов) означает, что две линии (решения) параллельны. Так как они не могут пересекаться, то решения не существует. Если порядок системы больше двух, аналогичное утверждение справедливо для параллельных плоскостей или гиперплоскостей. Хорошо обусловленная система описывает гиперплоскости, пересекающиеся под углом, близким к 90° [25]. В этом случае пересечение (решение) сравнительно мало чувствительно к ошибке округления. По мере того как угол пересечения гиперплоскостей

стремится к нулю, ошибки округления приводят к все более заметному смещению линии пересечения и тем самым к неустойчивости решения.

В качестве примера рассмотрим сначала хорошо обусловленную систему

$$300x + 400y = 700, \quad (2.129a)$$

$$100x + 100y = 200, \quad (2.129б)$$

имеющую единственное решение $x = 1, y = 1$. Решение «возмущенной» системы

$$303x + 400y = 700, \quad (2.130a)$$

$$101x + 100y = 200 \quad (2.130б)$$

имеет вид $x = 100/101 \approx 0,99, y = 1$. Таким образом, изменение коэффициентов на 1% приводит к изменению решения на 1%. Рассмотрим теперь плохо обусловленную систему

$$300x + 400y = 700, \quad (2.131a)$$

$$100x + 133y = 233, \quad (2.131б)$$

которая также имеет решение $x = 1, y = 1$. Возьмем три системы, получающиеся из исходной малым изменением коэффициентов:

$$300x + 400y = 700, \quad (2.132a)$$

$$100x + 133y = 232; \quad (2.132б)$$

$$300x + 400y = 700, \quad (2.133a)$$

$$100x + 132y = 233 \quad (2.133б)$$

и

$$300x + 400y = 700, \quad (2.134a)$$

$$100x + 132y = 234. \quad (2.134б)$$

Эти системы имеют решения ($x = -3, y = 4$), ($x = 2, y = 1/4$) и ($x = 3, y = -1/2$) соответственно. Мы видим, что при изменении коэффициентов на доли процента относительные изменения решений могут составить сотни процентов.

Причина чувствительности решения к значениям коэффициентов состоит в том, что все три системы плохо обусловлены, а матрицы коэффициентов у них «почти сингулярны». При нормировке коэффициентов в каждом уравнении становится очевидным, что значение детерминанта матрицы гораздо меньше единицы. Так, для уравнений системы (2.131) нормирующие делители равны 500,0 и 166,4 соответственно, а значение детерминанта 0,0012, тогда как значение детерминанта для хорошо обусловленной системы уравнений (1.129) равно 0,1414.

Такое поведение решения плохо обусловленной системы уравнений следует всегда иметь в виду, так как при применении численных методов для анализа задач об излучении вероятность встретиться с описанным явлением велика. Сильная зависимость решения задачи от некоторых параметров может объясняться не ошибками при формулировке задачи или составлении расчетной программы, а степенью обусловленности системы уравнений. Хотя при слабо обусловленных системах уравнений можно иногда получить верное решение, если проводить тщательный анализ возможных источников численных ошибок при вычислении коэффициентов, обычно для исправления положения требуется изменить базисные или весовые функции.

§ 5. РАСЧЕТ АНТЕННЫХ ХАРАКТЕРИСТИК

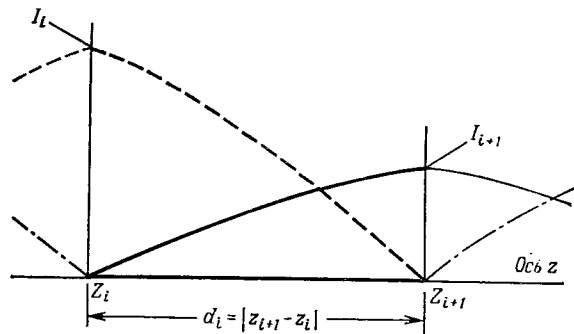
Прежде чем переходить к рассмотрению примеров, представляется полезным обсудить основные способы расчета таких характеристик антенн, как импеданс, диаграмма направленности излучения, коэффициент усиления и других. Конкретные примеры таких вычислений приводятся в § 6—8. В п. 1 данного параграфа мы рассмотрим расчет распределений тока, импеданса и влияния включения сосредоточенной нагрузки, а в п. 2 — расчет характеристик излучения в дальней зоне: диаграммы направленности, коэффициента усиления и коэффициента полезного действия излучателя.

1. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТОКА, ИМПЕДАНС И СОСРЕДОТОЧЕННАЯ НАГРУЗКА

Как мы уже установили, расчет антенных характеристик достаточно прост, если известно распределение тока на излучателе или на излучателе и металлическом теле, на котором он расположен. Начнем поэтому с рассмотрения распределения тока. В качестве базисных функций в методе шивания по точкам будем использовать импульсные функции; тогда если известны коэффициенты I_n , то известны точные значения токов в точках шивания при условии, конечно, что решение сходится. Поскольку расстояние между точками шивания мало по сравнению с длиной волны, распределение тока по излучателю можно с хорошей точностью аппроксимировать плавной кривой, проходящей через точки шивания. Распределение токов между точками шивания можно определить с помощью формул квадратичной или тригонометрической интерполяции. Можно использовать для интерполяции распределения тока и кусочно синусоидальные функции. На фиг. 2.15 показано, как можно получить

распределение тока вдоль проволочной антенны, складывая два парциальных тока.

При использовании базисных функций полной области, например разложений в ряды Фурье (2.78), для получения распределения тока по излучателю приходится проводить суммирование этих рядов в таком числе точек, которое обеспечивает до-



Фиг. 2.15. Кусочно синусоидальное распределение тока на сегменте вибратора.

статочную гладкость кривой распределения. Указанное суммирование легко осуществлять на ЭВМ.

Пусть I_t — ток на зажимах антенны, обусловленный приложенным к этим зажимам напряжением V_t ; тогда по определению импеданс Z_t равен

$$Z_t = \frac{V_t}{I_t}. \quad (2.135)$$

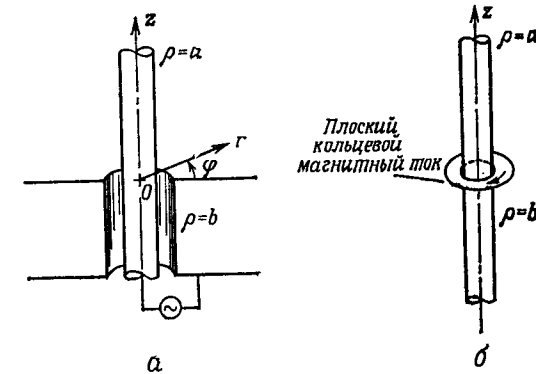
Результаты точного расчета величины импеданса весьма чувствительны к используемой модели участка возбуждения антенны. В ряде приводимых ниже примеров (§ 7, п. 2) используется модель бесконечно тонкого зазора, описанная в § 2, п. 2. В других примерах в качестве источника используется плоский кольцевой магнитный ток, достаточно хорошо моделирующий возбуждение полубесконечного штыря, расположенного на заземленной плоскости, коаксиальной линией (фиг. 2.16). Так как плоский кольцевой магнитный ток хорошо воспроизводит реальный участок возбуждения, эта модель позволяет с хорошей точностью рассчитать входной импеданс антенны. В приложении 1 приведена программа расчета полей, возбуждаемых плоским кольцевым магнитным током.

Покажем теперь, как можно в постановке задачи учесть сосредоточенную нагрузку. Пусть нагрузка Z_m подключена к про-

волочной антенне в точке m , в которой ток равен I_m ; тогда полное напряжение, действующее в этой точке, равно

$$V_m = V_m^g - I_m Z_m, \quad (2.136)$$

где V_m^g — напряжение генератора, подключенного к точке m последовательно с Z_m . Часто V_m^g равно нулю.



Фиг. 2.16. Возбуждение штыря на заземленной плоскости коаксиальной линией (а) и математическая модель антенны (б).

Рассмотрим m -е уравнение системы N линейных уравнений; его можно записать в виде

$$\sum_{n=1}^N Z_{mn} I_n = V_m^g - I_m Z_m, \quad (2.137)$$

или

$$\sum_{n=1}^N Z'_{mn} I_n = V_m^g, \quad (2.138)$$

где

$$Z'_{mm} = Z_{mm} + Z_m. \quad (2.139)$$

Таким образом, новая матрица импедансов отличается от исходной лишь диагональными элементами, т. е. $Z'_{mn} = Z_{mn}$ при $m \neq n$. Следовательно, влияние сосредоточенной нагрузки можно просто учесть, добавив сопротивление нагрузки Z_m к соответствующим диагональным элементам матрицы импедансов [14]. Это иллюстрирует пример, приведенный в § 7, п. 2.

2. ДИАГРАММА НАПРАВЛЕННОСТИ, КОЭФФИЦИЕНТ УСИЛЕНИЯ И КОЭФФИЦИЕНТ ПОЛЕЗНОГО ДЕЙСТВИЯ

Определение поля излучения заданного тока в произвольной удаленной точке пространства производится очень просто. В дальней зоне $\mathbf{E} = -i\omega\mathbf{A}$. Таким образом, для линейного

источника

$$\mathbf{E}(r, \theta, \varphi) = -i\omega\mu \frac{e^{-ikr_0}}{4\pi r_0} \int_{\text{вдоль линейной антенны}} \mathbf{I}(\xi) F(\theta, \varphi) d\xi, \quad (2.140)$$

где

$$F(\theta, \varphi) = \exp\{ik[x' \sin \theta \cos \varphi + y' \sin \theta \sin \varphi + z' \cos \theta]\}, \quad (2.141)$$

(x', y', z') — координаты источника, θ, φ — углы, определяющие положение точки наблюдения. Проводя интегрирование по всем участкам или элементам антенны, получаем ортогональные составляющие поля в дальней зоне $E_\theta(r, \theta, \varphi)$ и $E_\varphi(r, \theta, \varphi)$. Коэффициент усиления антенны по мощности определяется выражением

$$G(\theta, \varphi) = \frac{[|E_\theta|^2 + |E_\varphi|^2] r_0^2}{30 |I_t|^2 R_t}, \quad (2.142)$$

где R_t — действительная часть входного импеданса антенны. Величину коэффициента направленного действия получим, заменив в этой формуле R_t на сопротивление излучения R_r ; при отсутствии потерь в антенне $R_r = R_t$, и, таким образом, усиление и коэффициент направленного действия антенны совпадают.

Пусть средняя по времени подводимая к антенне мощность

$$P_t = |I_t|^2 R_t, \quad (2.143)$$

излученная мощность

$$P_r = |I_t|^2 R_r, \quad (2.144)$$

а мощность потерь

$$P_l = |I_t|^2 R_l, \quad (2.145)$$

где R_l — сопротивление потерь. Коэффициент полезного действия излучателя можно определить как отношение

$$\frac{P_r}{P_t} = \frac{|I_t|^2 R_r}{|I_t|^2 R_t} = \frac{R_r}{R_r + R_l}. \quad (2.146)$$

Полную мощность излучения можно найти также, интегрируя плотность потока мощности в дальней зоне, однако приведенный выше способ более удобен для расчетов.

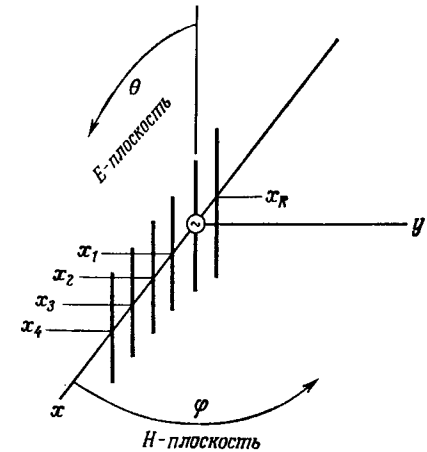
После того как основные антенные характеристики определены, перейдем к рассмотрению различных примеров проволочных антенн.

§ 6. РЕШЕТКИ ВИБРАТОРОВ ТИПА УДА — ЯГИ

В этом параграфе мы рассмотрим применение базисных функций полной области в решении интегрального уравнения Поклингтона сшиванием по точкам. Хотя антенны типа Уда — Яги известны уже очень давно [26, 27], достаточно точного их ис-

следования не было вплоть до появления современных вычислительных машин [28].

Мы приведем две различные формулировки рассматриваемой задачи. В первом случае в качестве источника, возбуждающего активный элемент, используется генератор тока [28]. Такая формулировка задачи обеспечивает быструю сходимость выражений для диаграммы излучения в дальней зоне, фазовой скорости и распределений тока, но не позволяет сравнительно просто определить входной импеданс решетки. Вторая формулировка [29] позволяет весьма точно вычислить импеданс, но уступает в скорости сходимости результатов. Описание обоих этих способов рассмотрения приводится здесь в качестве иллюстрации методов формулировки подобных задач. Возможны, разумеется, и иные подходы.



1. ИНТЕГРАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР

Определим интегральный оператор $L_{оп}$ исследуемой задачи

$$L_{оп}(\mathbf{J}) = (\mathbf{E}^t), \quad (2.147)$$

где \mathbf{J} — плотность тока на различных элементах решетки, изображенной на фиг. 2.17. Рассматривая каждый элемент решетки как отдельную проволочную антенну, можно с помощью простого обобщения выражения (2.75) получить искомое выражение для $L_{оп}$. Оператор $L_{оп}$ для p -го элемента решетки имеет вид

$$L_{оп} = -\frac{\lambda \sqrt{\mu/\epsilon}}{8\pi^2 i} \int_{-L_p/2}^{L_p/2} G(r, r') dz', \quad (2.148)$$

где функция Грина $G(r, r')$ определяется выражением (2.77), а

$$r = \sqrt{(x - x')^2 + (y - y')^2 + (z - z')^2 + a^2}. \quad (2.149)$$

Поскольку каждый элемент решетки рассматривается как отдельная проволочная антенна, воспользуемся системой базисных

Фиг. 2.17. Система координат, используемая при рассмотрении решетки типа Уда — Яги.

функций полной области

$$I_p(z) = \sum_{n=1}^N I_{np} \cos \frac{(2n-1)\pi z}{L_p}, \quad -L_p/2 \leq z \leq L_p/2, \quad (2.150)$$

где

$$I_p(z) = \frac{J_p(z)}{2\pi a}. \quad (2.151)$$

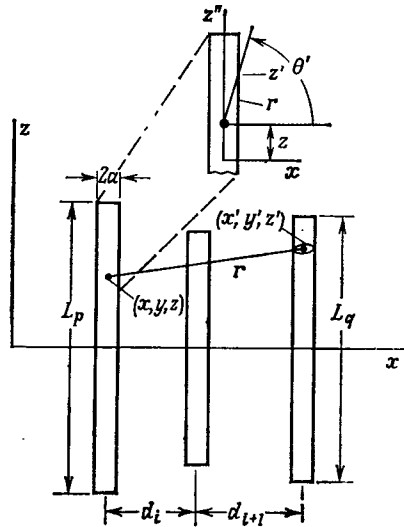
Оператор $L_{оп}(\mathbf{J})$ следует вычислять не только для точки наблюдения на элементе p , но и при ее расположении на других элементах, как показано на фиг. 2.18. Таким образом, его можно записать в виде

$$\begin{aligned} L_{оп}(\mathbf{J}) = & -\frac{\lambda \sqrt{\mu/\epsilon}}{8\pi^2 i} \sum_{p=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N I_{np} \times \\ & \times \int_{-L_p/2}^{L_p/2} G(r, r') \cos(2n-1) \times \\ & \times \frac{\pi z'}{L_p} dz', \quad (2.152) \end{aligned}$$

где $D+2$ — полное число элементов решетки (D — число направляющих элементов), а N — число учитываемых базисных функций в распределении тока каждого элемента антенны. Выражение (2.152) определяет полное поле E_z^s , излучаемое решеткой.

Как было установлено, численное интегрирование по z' удобно при рассмотрении тока в p -м вибраторе из точки наблюдения на q -м вибраторе, причем $p \neq q$. Однако при $p = q$ более удобно в качестве

переменной интегрирования использовать угол θ' , так как при $z \approx z'$ подынтегральное выражение чрезвычайно быстро меняется. Детали используемой замены переменных можно найти в работе Ричмонда [2]. Впрочем, еще лучше при $p = q$ сводить интегрирование к вычислению интегрального синуса и косинуса, легко вычисляемых на ЭВМ [30—32]. В результате из задачи исключается наиболее капризная и трудоемкая операция численного интегрирования.



Фиг. 2.18. Схема, поясняющая смысл расстояния от точки сшивания (точка наблюдения) на p -м элементе до точки источника на q -м элементе. Показано также соотношение между координатами z' и θ' при расположении точки наблюдения и точки источника на одном и том же элементе.

Для дальнейшего анализа такого подхода к антеннам Уда — Яги и рассмотрению других особенностей, которые могут встретиться при программировании, рассмотрим подробнее матричную формулировку задачи.

2. МАТРИЧНАЯ ФОРМУЛИРОВКА

Применение метода сшивания по точкам для расчета таких сложных объектов, как решетка Уда — Яги, можно лучше понять, если рассмотреть описывающую задачу систему линейных алгебраических уравнений и результирующее матричное представление.

Рассмотрим решетку, образованную из D направляющих вибраторов, рефлектора и активного элемента. Для каждого элемента учитываем N мод тока, но считаем, что элементы могут иметь различную длину. Используя выражение (2.152), представим первую часть системы алгебраических уравнений в виде

$$\sum_{p=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{m,np} I_{np} = 0, \quad m = 1, 2, \dots, N \times D. \quad (2.153)$$

Эти уравнения получены из условия равенства нулю касательной составляющей полного поля E в N точках на каждом направляющем вибраторе. Таким образом, касательное поле E равно нулю в $N \times D$ точках направляющих вибраторов. Распределение точек сшивания на одном из вибраторов показано на фиг. 2.19.

Еще N уравнений аналогичного вида дает условие обращения в нуль касательной составляющей E в N точках на рефлекторе. В результате имеем

$$\sum_{p=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{m,np} I_{np} = 0, \quad m = (N \times D) + 1, \dots, N \times (D + 1). \quad (2.154)$$

Наконец, последние N уравнений вытекают из граничных условий для активного элемента, изображенного на фиг. 2.20:

$$\sum_{p=1}^{D+2} \sum_{n=1}^N Z_{m,np} I_{np} = 0, \quad m = N \times (D + 1) + 1, \dots, N \times (D + 2) - 1, \quad (2.155)$$

$$\sum_{n=1}^N I_{ne} = 1, \quad e = D + 2, \quad m = N \times (D + 2). \quad (2.156)$$

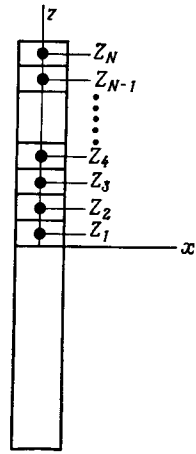
Для активного элемента граничное условие на касательную составляющую поля E накладывается лишь в $N - 1$ точке, хотя учитывается N мод в распределении тока; недостающее N -е уравнение получается при наложении условия на ток в возбуждающем зазоре [33].

Заметим, что в общей матричной формулировке

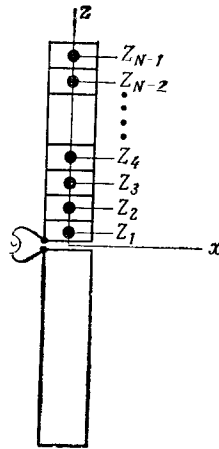
$$L_{оп}(\mathbf{J}) = (\mathbf{E}^i) \quad (2.157)$$

мы положили столбец (\mathbf{E}^i) равным нулю, т. е. считаем, что падающее поле отсутствует.

Чтобы лучше уяснить матричную формулировку, обратимся к простому примеру. Рассмотрим решетку из трех элементов:



Фиг. 2.19. Распределение N точек сшивания на пассивном элементе.



Фиг. 2.20. Распределение $N - 1$ точки сшивания на возбуждающем элементе.

активного вибратора, рефлектора и направляющего элемента. На каждом из элементов будем учитывать лишь две моды тока. Полная система алгебраических уравнений в этом случае имеет вид

$$\begin{bmatrix} Z_{11} & Z_{12} & Z_{13} & Z_{14} & Z_{15} & Z_{16} \\ Z_{21} & Z_{22} & Z_{23} & Z_{24} & Z_{25} & Z_{26} \\ Z_{31} & Z_{32} & Z_{33} & Z_{34} & Z_{35} & Z_{36} \\ Z_{41} & Z_{42} & Z_{43} & Z_{44} & Z_{45} & Z_{46} \\ Z_{51} & Z_{52} & Z_{53} & Z_{54} & Z_{55} & Z_{56} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.158)$$

Элементы выписанной матрицы имеют следующий физический смысл: в точке z_1 на (направляющем) элементе Z_{11} есть «поле», возбужденное первой модой тока, а Z_{12} — поле, возбужденное в

той же точке второй модой; Z_{21} — поле, возбужденное первой модой в точке z_2 на направляющем элементе, а Z_{22} — соответствующее поле второй моды. Аналогичным образом интерпретируются элементы матрицы Z_{33} , Z_{34} , Z_{43} и Z_{44} .

Перепишем приведенную матрицу, введя подматрицы, в следующем виде:

$$\begin{bmatrix} S_{11} & S_{12} & S_{13} \\ S_{21} & S_{22} & S_{23} \\ S_{31} & S_{32} & S_{33} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} I_1 \\ I_2 \\ I_3 \\ I_4 \\ I_5 \\ I_6 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \quad (2.159)$$

Очевидно, что подматрицы главной диагонали независимо от их числа представляют поле, возбужденное током на том же элементе решетки при заданном граничном условии на касательную составляющую поля E . Следовательно, при наличии D одинаковых направляющих вибраторов первые D подматриц на главной диагонали будут одинаковыми. Это свойство, используемое для уменьшения времени прогонки программы, не ограничивает общности метода, который применим и для структур с монотонно или периодически меняющейся геометрией.

Относительно элементов вне главной диагонали подматриц можно сделать следующие замечания. Величина Z_{35} определяет поле в точке 1 на элементе решетки 2 (рефлектор), обусловленное первой модой (мода 5) на активном вибраторе (элемент 3). Аналогично интерпретируются величины Z_{36} , Z_{45} и Z_{46} . Таким образом, подматрицы S_{qr} , $q \neq r$, характеризуют взаимодействие между элементами вибраторов q и r . Если длины всех направляющих элементов одинаковы, то для относящихся к ним подматриц $S_{qr} = S_{rq}$. Далее, при равномерном расположении направляющих элементов имеется несколько характерных расстояний между элементами, которые одинаковы для разных вибраторов.

Рассмотрим изображенную на фиг. 2.17 решетку с четырьмя направляющими вибраторами. Расстояние между вибраторами 1 и 3 такое же, как между 2 и 4. Поэтому $S_{13} = S_{24}$, если размеры вибраторов одинаковы.

Из сказанного выше видно, что нет необходимости проводить вычисления для всех подматриц, и, следовательно, при решении длинной и сложной задачи, требующей проведения численного интегрирования в большом объеме, возможна существенная экономия машинного времени.

3. ИЗЛУЧЕНИЕ В ДАЛЬНОЙ ЗОНЕ

Распределение поля одного элемента антенной решетки, изображенной на фиг. 2.17, в дальней зоне определяется выражением

$$E_{\theta}(\theta) = \frac{i\omega\mu}{4\pi r_0} e^{-ikr_0} \sin\theta \int_{-L/2}^{L/2} I(z') e^{ikz' \cos\theta} dz'. \quad (2.160)$$

Выражая распределение тока в виде ряда Фурье, получаем

$$E_{\theta}(\theta) = \frac{-iL\sqrt{\mu/\epsilon}}{\pi r_0} e^{-ikr_0} \sin\theta \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{(2n-1) I_n \cos(\pi L' \cos\theta)}{(2n-1)^2 - (2L' \cos\theta)^2}, \quad (2.161)$$

где $L' = L/\lambda$. Поскольку

$$r_0 \approx r - (x \sin\theta \cos\varphi + y \sin\theta \sin\varphi + z \cos\theta), \quad (2.162)$$

диаграмму направленности элемента решетки можно представить в виде

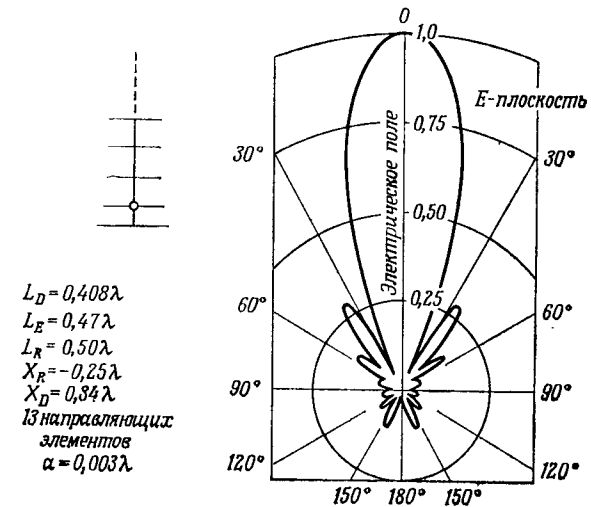
$$F(\theta, \varphi) = L_p \sin\theta \exp[+ik(x_p \sin\theta \cos\varphi + y_p \sin\theta \sin\varphi + z_p \cos\theta)] \times \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{(2n-1) I_{np} \cos(\pi L' \cos\theta)}{(2n-1)^2 - (2L' \cos\theta)^2}. \quad (2.163)$$

Если решетка состоит из W элементов, в каждом из которых учитывается N мод тока, полную диаграмму направленности $F_T(\theta, \varphi)$ можно представить в виде

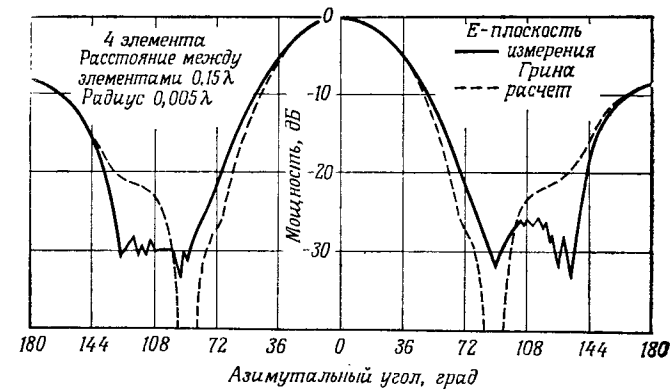
$$F_T(\theta, \varphi) = \sin\theta \cdot \sum_{p=1}^W L_p \exp[+ik(x_p \sin\theta \cos\varphi + y_p \sin\theta \sin\varphi + z_p \cos\theta)] \times \sum_{n=1}^N (-1)^n \frac{(2n-1) I_{np} \cos(\pi L' \cos\theta)}{(2n-1)^2 - (2L' \cos\theta)^2}, \quad W = D + 2. \quad (2.164)$$

Если число мод тока в каждом элементе антенны неодинаково, приведенное выражение, естественно, усложняется. Было установлено на практике, что в активном элементе желательно удерживать большее число мод, чем в пассивных элементах. Например, если для распределения тока в пассивных элементах достаточно учитывать как минимум три моды, то в распределении тока на активном элементе требуется удерживать по меньшей мере пять мод тока.

Применение метода сшивания по точкам к решению краевой задачи для антенны Уда — Яги дает прекрасные результаты. Расчетные диаграммы излучения, полученные этим методом, хо-



Фиг. 2.21. Диаграмма направленности в E -плоскости пятнадцатиеlementной решетки Уда — Яги.

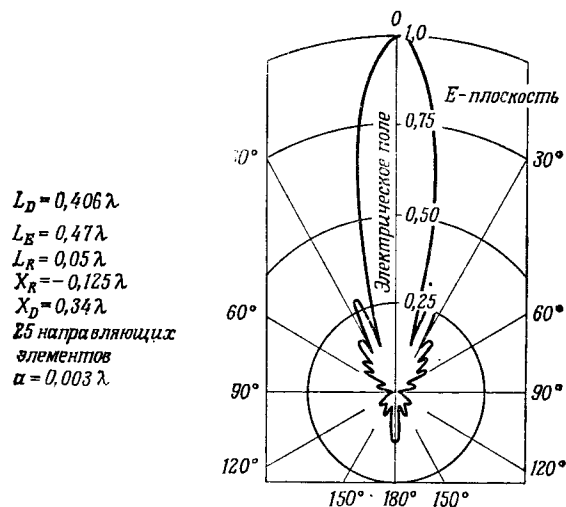


Фиг. 2.22. Диаграмма направленности в E -плоскости четырехэлементной решетки Уда — Яги.

рошо согласуются с опубликованными экспериментальными данными. Так, показанное на фиг. 2.21 расчетное угловое распределение излучения для пятнадцатиеlementной решетки Уда — Яги в пределах точности рисунка совпадает с результатами

эксперимента Фишендена и Уиблина [34]. На этом и последующих рисунках длины направляющего вибратора, активного элемента и рефлектора обозначены соответственно L_D , L_E и L_R . В соответствии с фиг. 2.17 здесь X_R — продольная координата рефлектора, а X_D — расстояние между равномерно расположенными направляющими элементами.

На фиг. 2.22 приведены экспериментально снятые Гринем [35] диаграммы направленности для четырехэлементной решетки.



Фиг. 2.23. Диаграмма направленности в E -плоскости 27-элементной решетки Уда — Яги.

Видно, что согласие между экспериментальной диаграммой направленности и результатами расчета методом шивания по точкам достаточно хорошее. При этом значения отношения мощностей излучения вперед и назад в точности совпадают.

На фиг. 2.23 и 2.24 приведены расчетные диаграммы направленности для 27-элементной решетки в E - и H -плоскостях соответственно. Это максимальное число элементов, которое можно рассчитать на IBM 7094. Используя ЭВМ с большей памятью, например IBM 360-75 или CDC 660C, можно проводить расчеты для решеток с большим числом элементов.

4. РАСПРЕДЕЛЕНИЯ ТОКА

Решив матричные уравнения относительно коэффициентов в расположении для токов, с помощью ЭВМ легко не только рассчитать диаграммы излучения в дальней зоне, но и исследовать распределения тока на различных элементах решетки, вычислив

суммы (2.150) при разных значениях z . Значения относительных амплитуд тока в центре элемента находятся простым суммированием коэффициентов I_{np} при заданном p . Таким способом получена кривая на фиг. 2.25 для решетки, показанной на фиг. 2.23. Распределение тока на каждом элементе близко к синусоидальному.

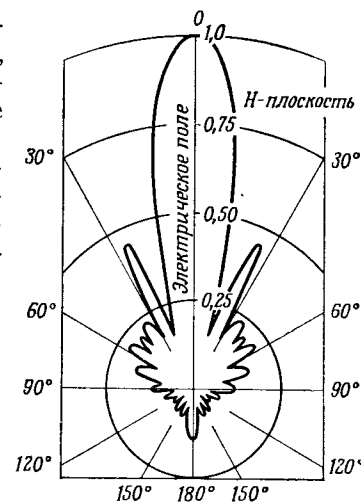
Зная значение тока в точке возбуждения активного элемента антенны и входное напряжение, можно определить входной импеданс решетки. К этой задаче мы и перейдем теперь.

5. ВХОДНОЙ ИМПЕДАНС РЕШЕТКИ

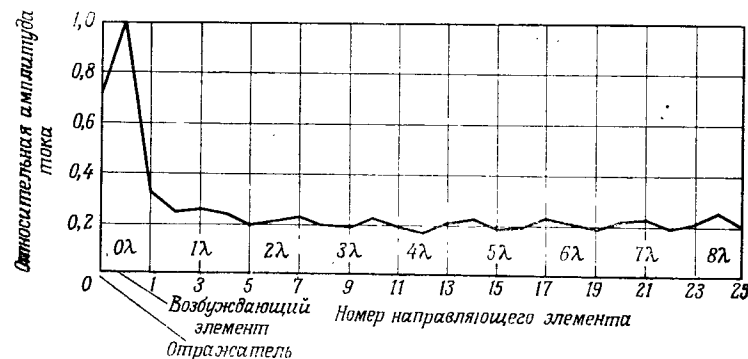
При расчете антенны типа Уда — Яги выше использовалась общая операторная формула

$$L_{оп}(J) = (E^i), \quad (2.165)$$

где столбец (E^i) был равен нулю, а неоднородность системы уравнений обеспечивалась заданием тока в точке возбуждения активного вибратора. Поскольку при этом входное напряжение неизвестно и определить его нелегко,



Фиг. 2.24. Диаграмма направленности в H -плоскости 27-элементной решетки Уда — Яги.



Фиг. 2.25. Распределение тока по элементам решетки.

вычисление входного импеданса решетки при таком подходе сопряжено с трудностями.

Можно, наоборот, считать, что столбец (E^i) представляет поля стороннего источника, создающего заданное напряжение

в зазоре активного элемента. Тогда после определения коэффициентов в разложении тока нетрудно вычислить входной импеданс решетки.

Чрезвычайно удобной моделью источника с точки зрения рассматриваемой задачи является плоский кольцевой магнитный ток, представляющий распределение электрического поля в раскрыве коаксиальной линии, возбуждающей штырь на заземленном плоском экране (фиг. 2.26). При учете лишь основной волны в раскрыве имеет вид

$$E_{\rho} = \frac{V}{2\rho \ln b/a}, \quad (2.166)$$

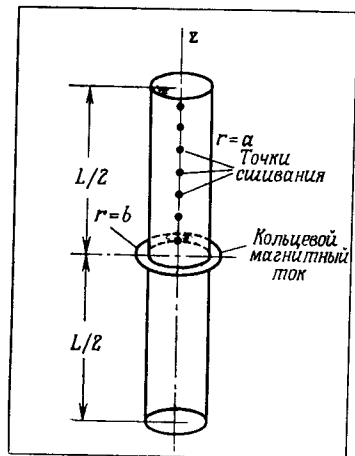
где V — приложенное напряжение, a и b — внутренний и внешний радиусы коаксиальной линии, как показано на фиг. 2.26. Преимущество описанного источника в том, что он весьма точно моделирует реальный физический зазор в месте возбуждения вибратора. В данном случае нет необходимости считать зазор бесконечно узким. Вследствие близкого сходства геометрии реального возбуждающего устройства и его модели можно ожидать, что расчет даст точные значения действительной и мнимой частей импеданса антенны на заземленной плоскости

Фиг. 2.26. Распределение точек сшивания по возбуждающему вибратору, эквивалентному штыревой антенне на заземленной плоскости.

(фиг. 2.27). Входной импеданс такой антенны в свободном пространстве будет, очевидно, вдвое больше.

Вычислив значения касательной составляющей электрического поля в различных точках сшивания (в отсутствие реального металлического проводника), возбуждаемого кольцевым магнитным током (см. приложение 1), находим элементы столбца (E^i) в матричном уравнении, отвечающие заданному напряжению V . Для нашей задачи необходимо определить лишь z -составляющую поля, возбуждаемого магнитным током. При единичном напряжении V это поле имеет вид

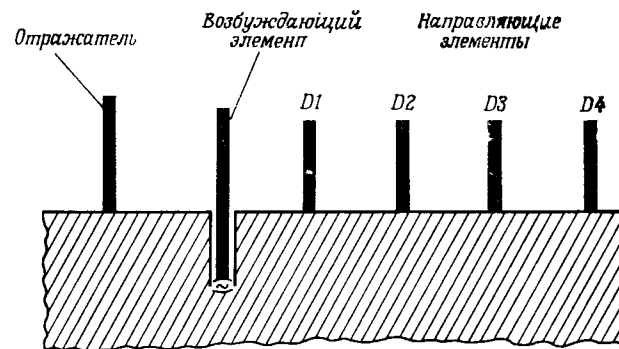
$$E_z = \frac{b^2 - a^2}{8 \ln b/a} \frac{ke^{-ikR_0}}{R_0^2} \left\{ 2 \left(\frac{1}{kR_0} + i - i \frac{b^2 + a^2}{2R_0} \right) + \frac{\rho^2}{R_0} \left[\left(\frac{1}{kR_0} + i - i \frac{b^2 + a^2}{2R_0^2} \right) \left(-ik - \frac{2}{R_0} \right) + \left(-\frac{1}{kR_0^2} + i \frac{b^2 + a^2}{R_0^3} \right) \right] \right\}, \quad (2.167)$$



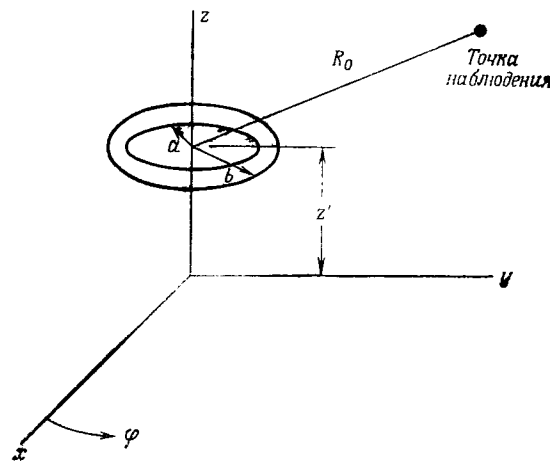
где

$$R_0 = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2}, \quad (2.168)$$

а другие обозначения ясны из фиг. 2.28.



Фиг. 2.27. Антенна Уда — Яги, расположенная на заземленной плоскости.

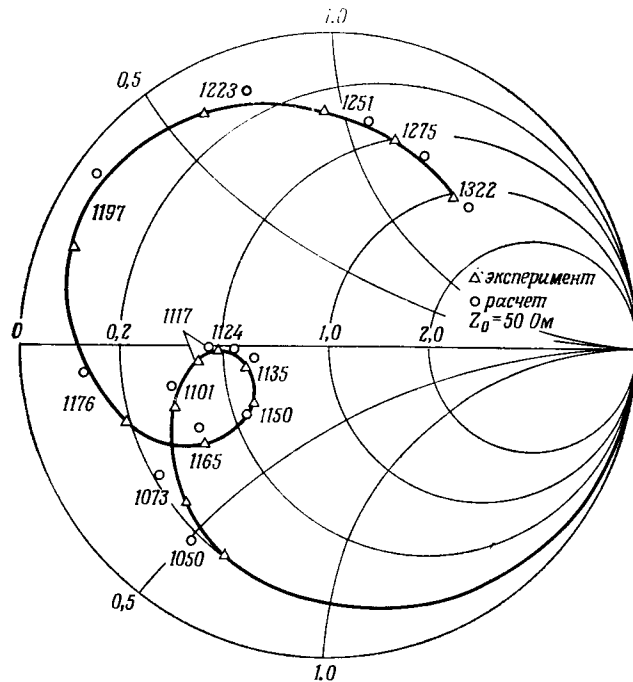


Фиг. 2.28. Плоский кольцевой магнитный ток.

Разрешив матричное уравнение $[Z](I) = (V)$ относительно (I) и обозначив через I_0 найденное значение тока на участке возбуждения активного вибратора, для входного импеданса решетки получаем

$$Z_{\text{вх}} = \frac{1}{I_0} \quad (2.169)$$

(при единичном возбуждающем напряжении). Как и выше, здесь учтено взаимодействие всех элементов антенны. Существенное различие обеих формулировок состоит лишь в том, что в одном случае используется возбуждение генератором тока, а в другом — генератором напряжения.



Фиг. 2.29. Рассчитанные и экспериментальные значения входного сопротивления четырехэлементной антенной решетки Уда — Яги.

Как видно из фиг. 2.29, согласие между результатами расчета и экспериментом для четырехэлементной антенны типа Уда — Яги на заземленной плоскости превосходное, что в значительной степени можно объяснить использованием источника конечных размеров в принятой расчетной модели. Этому методу расчета, однако, также присущ ряд ограничений. Так, число собственных функций для активного и пассивного элементов, которые следует учитывать при расчете, оказывается приблизительно в четыре раза больше, чем в модели с генератором тока. Кроме того, число мод не может быть неограниченно увеличено, так как матрица импедансов становится неустойчивой при очень больших N . Это обусловлено быстрым изменением косинусоидальных собственных функций высокого порядка, используемых в методе

сшивания по точкам. Использование импульсных весовых функций может привести к уменьшению этого эффекта.

Интересно отметить разницу в скоростях сходимости решения при обоих подходах. Если обычно значение тока фиксируется лишь на концах вибратора, то в модели генератора тока величина тока задается также и в центре активного элемента. В результате число требуемых мод в разложении определяется лишь условиями представления формы распределения тока, а не его амплитуды в центре элемента, тогда как в модели генератора напряжения нет ограничений на значения амплитуды и фазы тока в центре. Поэтому не удивительно, что в последнем случае сходимость решения оказывается худшей.

В этом параграфе представлены два способа формулировки задачи для антенны Уда — Яги. В первом способе (генератор тока) решение оказывается быстро сходящимся, что позволяет рассчитать диаграмму направленности, распределения тока на элементах и фазовую скорость, однако этот способ не позволяет достаточно просто рассчитать входной импеданс решетки. Во втором способе (генератор напряжения) имеется возможность весьма точного расчета входного импеданса, однако сходимость при этом приблизительно в четыре раза хуже. В обеих формулировках используются базисные функции полной области. В следующем параграфе, посвященном электрически малым антеннам, используются системы базисных функций подобластей.

§ 7. ЭЛЕКТРИЧЕСКИ МАЛЫЕ АНТЕННЫ

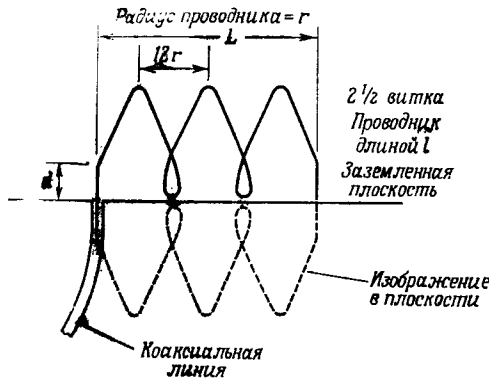
В отличие от предыдущего параграфа, где использовались базисные функции полной области, мы покажем здесь, как можно использовать для решения интегрального уравнения Поклингтона системы базисных функций подобластей. В качестве первого примера рассмотрим многовитковую петлевую антенну. Затем остановимся на проведении расчета антенны на коаксиальной линии. Обе эти антенны относятся к электрически малым проволочным излучателям.

1. МНОГОВИТКОВАЯ ПЕТЛЕВАЯ АНТЕННА

Многовитковая петлевая антенна недавно разработана в Электротехнической лаборатории Университета штата Огайо. Наиболее распространенный вариант этой антенны представляет собой тонкий проводник длиной в четверть волны, свернутый в спираль и укрепленный над заземленной плоскостью, как показано на фиг. 2.30 [36]. Антенна запитывается несимметричной линией и вместе со своим мнимым изображением в плоскости образует полуволновый проводник, возбуждаемый на низшей

антирезонансной частоте [37]. Иногда используют антенну без отражателя, запитывая ее от симметричной линии [17], однако мы здесь рассмотрим лишь первый вариант.

Для простоты при расчете многовитковой антенны мы используем кусочно постоянные базисные функции (2.85). Каждый виток антенны разобьем на большое число коротких прямых сегментов. Так как эти сегменты не параллельны, интегральный оператор в данном случае оказывается гораздо более сложным,



Фиг. 2.80. Многовитковая петлевая антенна с 2,5 витками над заземленной плоскостью.

чем в рассмотренных до сих пор примерах. Для каждого сегмента следует учитывать как продольную, так и радиальную составляющие электрического поля. Так, для изображенного на фиг. 2.31 сегмента имеем

$$-L_{\text{оп}}(\mathbf{J}(z)) = \hat{z}E_z^s + \hat{\rho}E_{\rho}^s, \quad (2.170)$$

где

$$E_z^s = \frac{I\sqrt{\mu/\epsilon}}{4\pi ik} \int_{-s/2}^{s/2} [(1+ikr)(2r^2 - 3a^2) + k^2 a^2 r^2] \frac{e^{-ikr}}{r^5} dt, \quad (2.171)$$

$$E_{\rho}^s = \frac{I\rho\sqrt{\mu/\epsilon}}{4\pi ik} \int_{-s/2}^{s/2} (z-t)(3 + 3ikr - k^2 r^2) \frac{e^{-ikr}}{r^5} dt, \quad (2.172)$$

$$r = \sqrt{\rho^2 + a^2 + (z-t)^2}. \quad (2.173)$$

В выражении для E_{ρ}^s интеграл берется в замкнутом виде; в результате получаем

$$E_{\rho}^s = \frac{\rho I\sqrt{\mu/\epsilon}}{4\pi ik} (1 + ikr) \frac{e^{-ikr}}{r^3} \Big|_{r_1}^{r_2}, \quad (2.174)$$

где

$$r_1 = \sqrt{\rho^2 + a^2 + \left(z + \frac{s}{2}\right)^2}, \quad (2.175)$$

$$r_2 = \sqrt{\rho^2 + a^2 + \left(z - \frac{s}{2}\right)^2}. \quad (2.176)$$

Полученные выражения обладают хорошей точностью при $\rho = 0$ или когда r_1^2 и r_2^2 велики по сравнению с величиной $a\rho$ [31]. Для рассматриваемой здесь задачи эти условия выполняются.

Для определения элементов матрицы импедансов следует вычислить касательную составляющую электрического поля, излученного сегментом j при расположении точки наблюдения в центре сегмента i . Подробности расчета можно найти в приложении 3. Число уравнений N совпадает, разумеется, с полным числом сегментов. Каждое i -е уравнение записывается в виде

$$\sum_{j=1}^N Z_{ij} I_j = E_i^i. \quad (2.177)$$

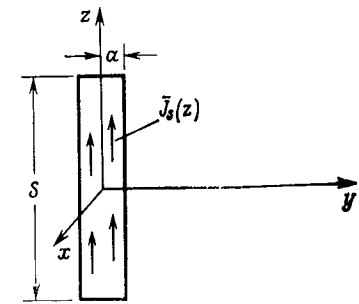
Если учесть симметрию антенны и ее изображения относительно заземленной плоскости, можно уменьшить вдвое число неизвестных и переписать i -е уравнение в виде

$$\sum_{j=1}^{N/2} (Z_{ij} + Z_{i, N/2+j}) I_j = E_i^i, \quad (2.178)$$

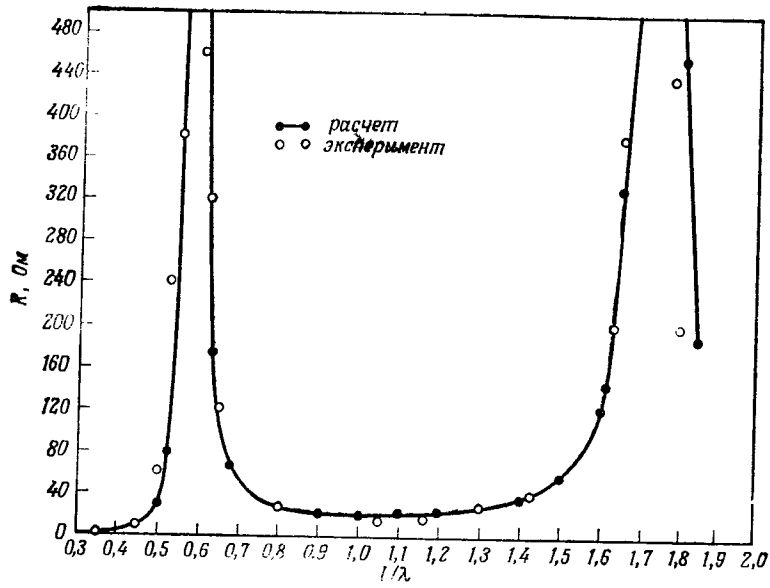
где $I_j = I_{N/2+j}$.

Величина E_i^i описывает поле, возбуждаемое сториим источником. Поле в месте присоединения коаксиального кабеля к плоскости можно, как в § 6, п. 5, представить плоским кольцевым магнитным током. При таком модельном представлении истинного источника расчетное значение входного импеданса хорошо подтверждается экспериментом. В качестве примера на фиг. 2.32 и 2.33 приведены вычисленные и измерения значения входного импеданса петлевой антенны с 2,5 витками; наблюдается превосходное согласие как для действительной, так и для мнимой частей входного импеданса. При расчете антенна была разбита на 126 сегментов.

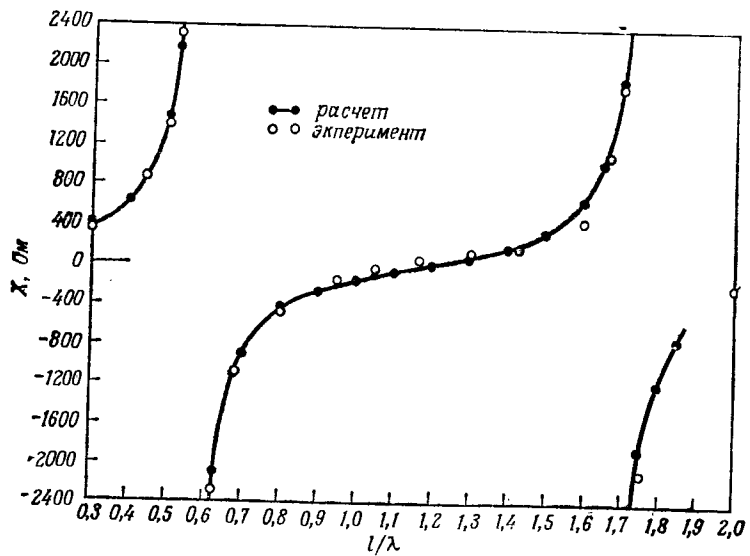
Сходимость решения не слишком плохая даже при использовании импульсных базисных функций. Как видно из графиков на фиг. 2.34, при полной длине (антенны и ее изображения)



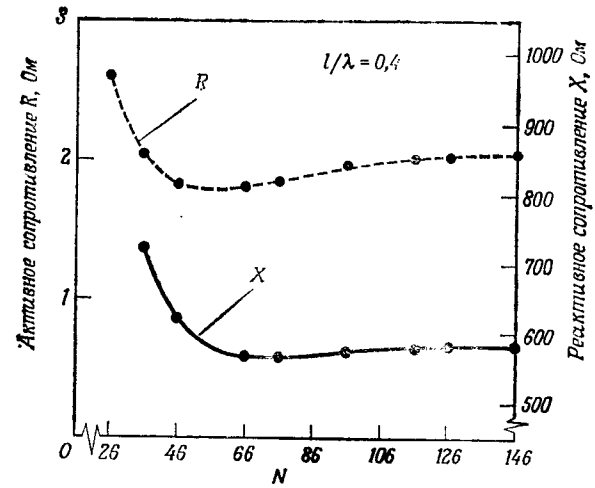
Фиг. 2.31. Сегмент проволочной антенны длиной s , радиусом a ; ток распределен равномерно по поверхности.



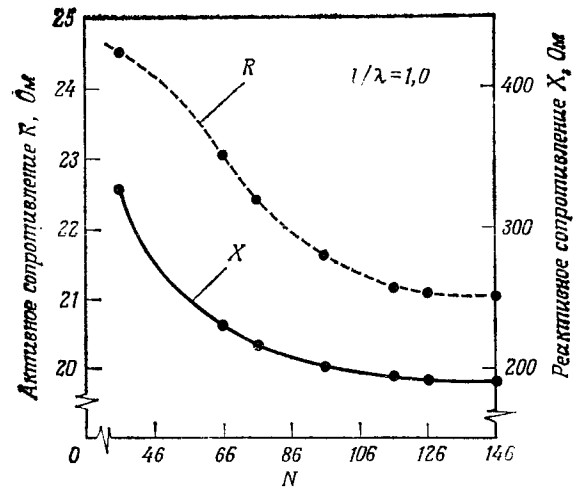
Фиг. 2.32. Активное входное сопротивление петлевой антенны с 2,5 витками.



Фиг. 2.33. Реактивное входное сопротивление петлевой антенны с 2,5 витками.



Фиг. 2.34. Кривые, иллюстрирующие сходимость решения для петлевой антенны с 2,5 витками ($l/\lambda = 0,4$).



Фиг. 2.35. Кривые, иллюстрирующие сходимость решения для петлевой антенны с 2,5 витками ($l/\lambda = 1,0$).

$0,4 \lambda$, начиная с числа сегментов $N \approx 100$, получается достаточно точное значение импеданса. При больших длинах антенны требуется разбиение на большее число сегментов. Так, из графиков на фиг. 2.35, относящихся к антенне с полной длиной λ , видно, что требуется учитывать по меньшей мере 126 сегментов.

Как показал Шрив [36], увеличение числа витков антенны при сохранении физической длины проводника и расстояния между витками приводит к трем эффектам: уменьшается полоса пропускания, слегка понижается первая антирезонансная частота и, наконец, уменьшается сопротивление на других частотах.

Таким образом, расчет многовитковой петлевой антенны осуществим с помощью разбиения на сегменты и сшивания в дискретных точках. Разумеется, для подобного расчета можно использовать и более сложные базисные функции. В следующем параграфе будет показано применение кусочно синусоидальных функций при расчете антенны на коаксиальной линии с помощью метода согласования реакций.

2. АНТЕННА НА КООКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ

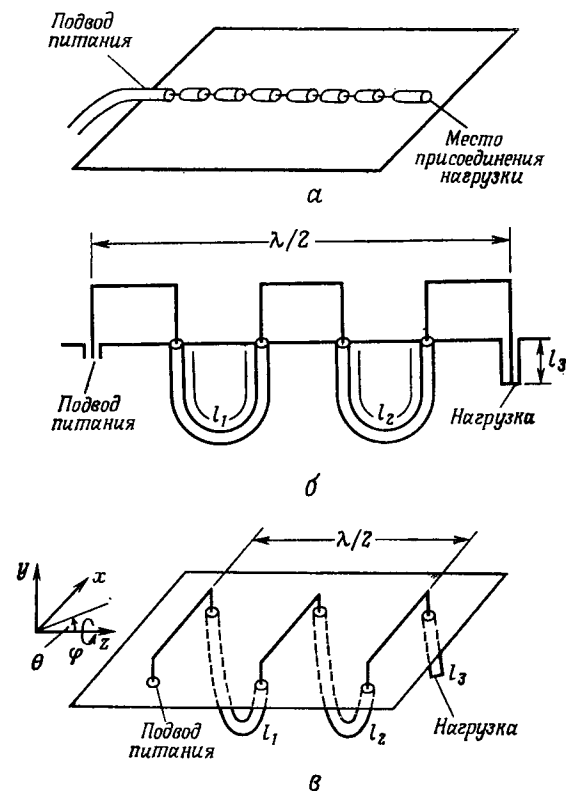
Антенна на коаксиальной линии, или антенна *ТЕМ*, состоит из отрезков линии передачи и излучающих неоднородностей. Три основных варианта антенны на коаксиальной линии показаны на фиг. 2.36. Как видно из рисунка, такая линия весьма компактна и достаточно прочна, так что она удобна для многих приложений. Кроме того она дает разработчику большую свободу в выборе конфигурации для достижения заданных электрических параметров.

В первом варианте антенны *ТЕМ*, показанном на фиг. 2.36, *а*, она размещена над поверхностью, этот вариант удобен для использования в длинных многоэлементных решетках. Здесь, как и в других вариантах, линия передачи нагружена на регулируемую коаксиальную закороченную линию, позволяющую осуществлять настройку. В этом варианте для достижения удовлетворительных значений сопротивления излучения требуются длины порядка двух или более длин волн, так как сопротивление излучения каждого излучающего зазора мало. При удачной конструкции с помощью такой антенны можно добиться умеренной направленности и коэффициента стоячей волны меньше 2.

На фиг. 2.36, *б* показана антенна на коаксиале с существенно меньшими продольными размерами. Этот вариант антенны допускает большую конструктивную гибкость, чем предыдущий, так как размещение кабеля под металлической плоскостью обеспечивает большую свободу в выборе его характеристик и геометрии петли. Этот вариант удобен при малых углах излучения,

хотя может удовлетворительно использоваться и для излучения в поперечном направлении. В последнем случае, однако, предпочтительнее использовать антенну, показанную на фиг. 2.36, *в*.

Пусть требуется исследовать антенну типа фиг. 2.36, *б* с тремя излучающими элементами. Эти элементы связаны двойкой: че-

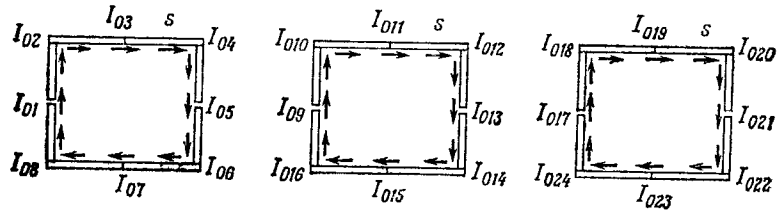


Фиг. 2.36. Различные варианты антенны на коаксиальной линии. *а* — поверхностная антенна, *б* — плоская антенна, *в* — петлевая антенна.

рез электромагнитное поле между двумя элементами и через линии передачи. Для учета электромагнитной связи элементов воспользуемся методом согласования реакций, а связь второго типа будем описывать с помощью соотношений для длинных линий [38].

Для упрощения расчета методом согласования реакций предположим, что антенна идеально проводящая и каждая петля (включая и ее изображение) разделена на восемь сегментов, как показано на фиг. 2.37. Токи в граничных точках сегментов

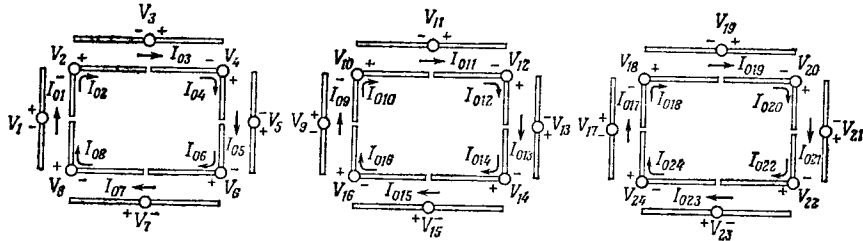
обозначим следующим образом: $I_{01}, I_{02}, \dots, I_{024}$. При расчете методом согласования реакций представим каждую петлю набором из восьми перекрывающихся диполей; таким образом, каждый сегмент принадлежит двум соседним (линейным или Г-образным) диполям, как показано на фиг. 2.38. Ток в каждом



Фиг. 2.37. Величина и направление токов в граничных точках сегментов для трехэлементной антенны TEM.

из 24 диполей аппроксимируется кусочно синусоидальным распределением, описанным в § 4, п. 5.

Предполагая, что возбуждение осуществляется генератором напряжения, включенным в бесконечно узком зазоре, пренебрегая токами смещения в зазоре и применяя условие взаимности



Фиг. 2.38. Восемь перекрывающихся диполей, представляющих каждую петлю.

между истинными диполями или сегментами и пробным диполем, приходим к соотношению

$$\sum_{n=1}^{24} \left[\frac{-1}{I'_{0m} I_{0n}} \int_{\text{вдоль } n\text{-го}} \mathbf{I}_n(l) \cdot \mathbf{E}'_m(l) dl \right] I_{0n} = V_m, \quad (2.179)$$

«истинного»
диполя

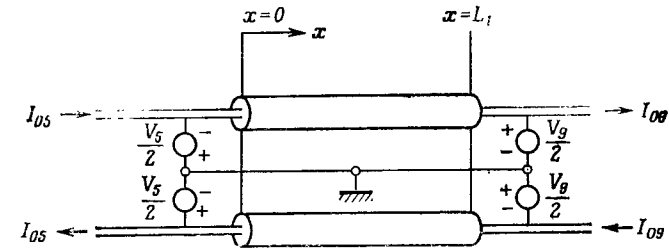
где $\mathbf{I}_n(l)$ — кусочно синусоидальное распределение тока вдоль n -го «истинного» диполя, равное I_{0n} на входе диполя и обращается в нуль на его концах, $\mathbf{E}'_m(l)$ — электрическое поле, возбуждаемое в свободном пространстве m -м «пробным» диполем с кусочно синусоидальным распределением тока, обращаю-

щимся в нуль на концах диполя, V_m — напряжение, приложенное к m -му «истинному» диполю.

Выражение в квадратных скобках в (2.179) назовем взаимным импедансом (или собственным импедансом, если $n = m$) m -го «пробного» диполя и n -го «истинного» диполя. Тогда система из 24 линейных алгебраических уравнений принимает вид

$$\sum_{n=1}^{24} I_{0n} Z_{mn} = V_m, \quad m = 1, 2, \dots, 24. \quad (2.180)$$

Таким образом, задача сведена к рассмотрению линейной конечной пассивной симметричной цепи с сосредоточенными па-



Фиг. 2.39. Отрезок линии передачи между 5-м и 9-м входами.

раметрами с 24 входами. Осталось лишь ввести описание нагрузки и внутренних соединений с помощью отрезков длинных линий. Напряжения V_m на входе каждого «истинного» диполя, за исключением V_1 , либо равны нулю, либо связаны с входными токами соотношениями теории линий передачи.

Учет влияния линий передачи начнем с рассмотрения соотношений, связывающих ток и напряжение в отрезке линии:

$$V = Ae^{\gamma x} + Be^{-\gamma x}, \quad (2.181)$$

$$I = \frac{1}{Z_0} (Ae^{\gamma x} - Be^{-\gamma x}), \quad (2.182)$$

где постоянные A и B определяются граничными условиями, γ — постоянная распространения, а Z_0 — импеданс линии.

Для верхней линии на фиг. 2.39 выполняются следующие граничные условия: при $x = 0$ $V = V_5/2$ и $I = I_{05}$, а при $x = L_1$ $V = V_9/2$ и $I = I_{09}$, где L_1 — длина отрезка линии между первым и вторым излучающими элементами. С помощью этих граничных условий получаем

$$\begin{bmatrix} V_5 \\ V_9 \end{bmatrix} = 2Z_0 \begin{bmatrix} -\text{cth } \gamma L_1 & \text{csch } \gamma L_1 \\ \text{csch } \gamma L_1 & -\text{cth } \gamma L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{05} \\ I_{09} \end{bmatrix}. \quad (2.183)$$

Для линий без потерь $\gamma = -i\beta_0$, где β_0 — фазовая постоянная. Таким образом,

$$\begin{bmatrix} V_5 \\ V_9 \end{bmatrix} = i2Z_0 \begin{bmatrix} \operatorname{ctg} \beta_0 L_1 & -\operatorname{csc} \beta_0 L_1 \\ -\operatorname{csc} \beta_0 L_1 & \operatorname{ctg} \beta_0 L_1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{05} \\ I_{09} \end{bmatrix}. \quad (2.184)$$

Аналогично

$$\begin{bmatrix} V_{13} \\ V_{17} \end{bmatrix} = i2Z_0 \begin{bmatrix} \operatorname{ctg} \beta_0 L_2 & -\operatorname{csc} \beta_0 L_2 \\ -\operatorname{csc} \beta_0 L_2 & \operatorname{ctg} \beta_0 L_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} I_{013} \\ I_{017} \end{bmatrix}, \quad (2.185)$$

где L_2 — длина линии передачи между вторым и третьим излучающими элементами, т. е. между 13-м и 17-м входами.

Напряжение V_{21} равно произведению I_{021} на $2Z_L$, так как, согласно методу изображений, нагрузка реальной антенны равна $2Z_L$. Учитывая направления токов, указанные на фиг. 2.39, получаем

$$V_{21} = -2Z_L I_{021}. \quad (2.186)$$

Подставляя (2.184) — (2.186) в уравнения (2.180) и учитывая, что все напряжения, кроме возбуждающего напряжения на нагрузке и на концах линии передачи, равны нулю, получаем

$$\begin{bmatrix} V_1 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{bmatrix} = [Z'] \begin{bmatrix} I_{01} \\ I_{02} \\ \vdots \\ I_{024} \end{bmatrix}. \quad (2.187)$$

Большинство элементов матрицы $[Z']$ совпадает с элементами $[Z]$, входящими в (2.180); отличающиеся элементы $Z'_{5,5}$, $Z'_{5,9}$, $Z'_{9,5}$, $Z'_{9,9}$, $Z'_{13,17}$, $Z'_{17,13}$, $Z'_{17,17}$, $Z'_{21,21}$ имеют вид

$$Z'_{5,5} = Z_{5,5} - i2Z_0 \operatorname{ctg} \beta_0 L_1, \quad (2.188)$$

$$Z'_{5,9} = Z_{5,9} + i2Z_0 \operatorname{csc} \beta_0 L_1, \quad (2.189)$$

$$Z'_{9,5} = Z_{9,5} + i2Z_0 \operatorname{csc} \beta_0 L_1, \quad (2.190)$$

$$Z'_{9,9} = Z_{9,9} - i2Z_0 \operatorname{ctg} \beta_0 L_1, \quad (2.191)$$

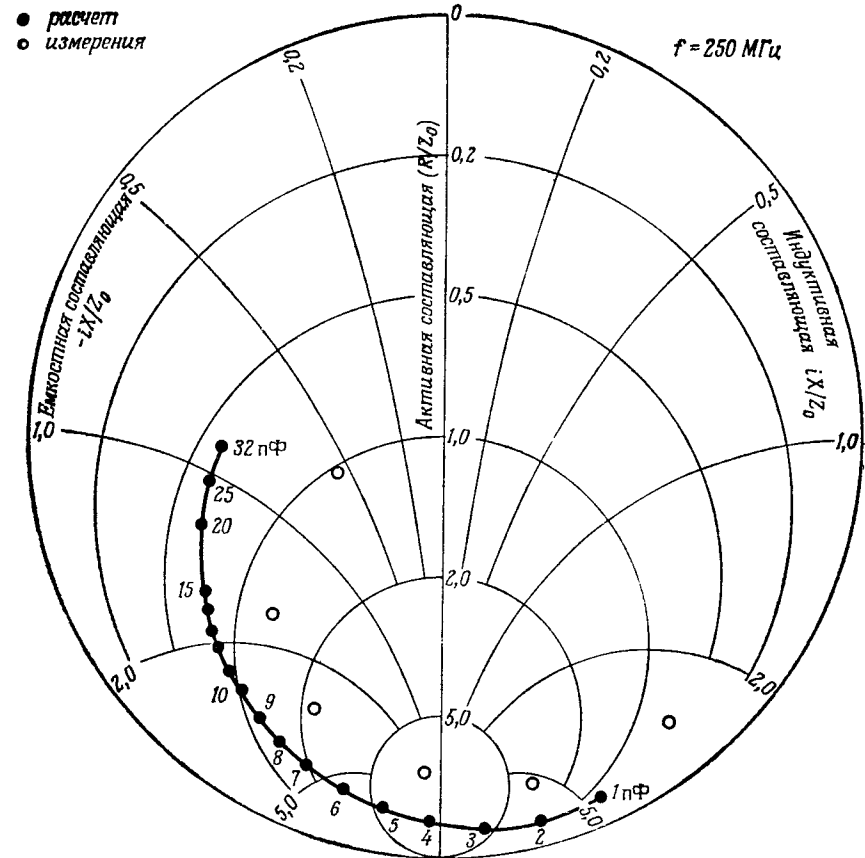
$$Z'_{13,13} = Z_{13,13} - i2Z_0 \operatorname{ctg} \beta_0 L_2, \quad (2.192)$$

$$Z'_{13,17} = Z_{13,17} + i2Z_0 \operatorname{csc} \beta_0 L_2, \quad (2.193)$$

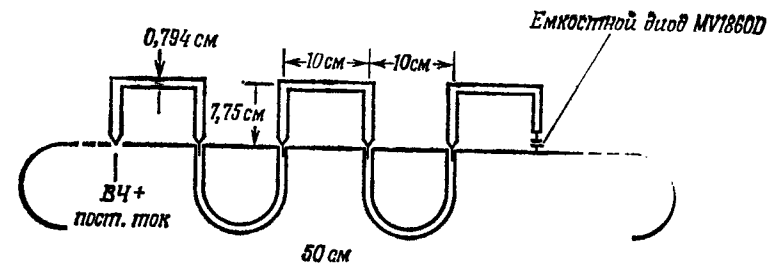
$$Z'_{17,13} = Z_{17,13} + i2Z_0 \operatorname{csc} \beta_0 L_2, \quad (2.194)$$

$$Z'_{17,17} = Z_{17,17} - i2Z_0 \operatorname{ctg} \beta_0 L_2, \quad (2.195)$$

$$Z'_{21,21} = Z_{21,21} + 2Z_L. \quad (2.196)$$



Фиг. 2.40. Рассчитанные и экспериментальные значения входного сопротивления антенны, изображенной на фиг. 2.41, при различных значениях емкости нагрузки.



Фиг. 2.41. Трехэлементная антенна на коаксиальной линии, для которой проведено сравнение расчетных и экспериментальных значений входного сопротивления.

Полагая в (2.187) $V_1 = 1В$, получаем для входного импеданса антенной структуры, показанной на фиг. 2.36, б, следующее значение

$$Z_{вх} = \frac{0,5}{I_{01}}. \quad (2.197)$$

О точности расчетов импеданса можно судить по приведенным на фиг. 2.40 данным, полученным для различных значений емкости нагрузки. Согласие результатов расчета и измерений хорошее, особенно если учесть большое число возможных источников ошибок эксперимента. Результаты для диаграмм излучения не приводятся, хотя их нетрудно получить при известном распределении токов в антенне.

§ 8. МОДЕЛИРОВАНИЕ ВИБРАТОРНЫХ АНТЕНН, РАСПОЛОЖЕННЫХ НА МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ТЕЛАХ

В этом параграфе будет показано, как путем разбиения на сегменты можно учесть расположенные вблизи антенны металлические тела. В частности, будут рассмотрены два примера: антенны на проводящем конусе и на корпусе самолета F4. Влияние поверхностей этих тел моделируется с помощью системы (решетки) проволочных сегментов. Используя подобные модели, можно представлять металлические поверхности произвольной формы [31]. Практические ограничения такого модельного подхода определяются размером используемой матрицы импедансов $[Z]$, которую требуется вычислять и обращать. Размер матрицы, разумеется, пропорционален площади моделируемой поверхности.

1. ШТЫРЬ ИЛИ КРУГОВАЯ ЩЕЛЬ В ОСНОВАНИИ КОНУСА

Рассмотрим штыревую антенну, расположенную на основании конуса вдоль его оси, как показано на фиг. 2.42 [39]. Будем представлять конус с помощью решетчатой модели, образованной системой проводников, расположенных по образующим и соединенных, как показано на фиг. 2.43, а. Вследствие симметрии структуры в плоскостях, перпендикулярных оси z , не требуется вводить дополнительных проводников. Длина антенны и размеры конуса, усеченного конуса или конуса со сферически закругленной вершиной могут задаваться произвольно.

Симметрия поверхности приводит к существенному упрощению, если все образующие линии разбить на одинаковое число сегментов, так что каждый сегмент будет отличаться от подоб-

ных ему сегментов, расположенных на других образующих, лишь ориентацией по азимуту φ .

Токи на таких подобных сегментах должны совпадать по величине и по фазе, так как $I(z)$ не зависит от φ . Пронумеруем сегменты последовательно, начиная с линии, расположенной при $\varphi = 0$, и перемещаясь в направлении против часовой стрелки. Пусть M — число сегментов на каждой линии, а L — число образующих линий, тогда

$$\sum_{j=1}^{L \cdot M} Z_{kj} I_j = -E_k^i, \quad k = 1, 2, \dots, L \cdot M. \quad (2.198)$$

Учитывая равенство токов на подобных сегментах

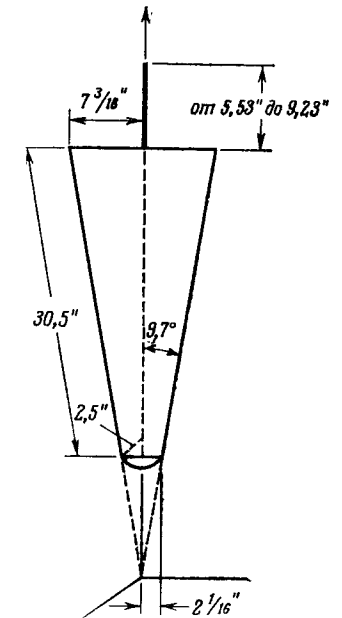
$$I_j = I_{(j+M)} = I_{(j+2M)} = \dots \\ \dots = I_{(j+(L-1)M)}, \quad (2.199)$$

перепишем (2.198) в виде

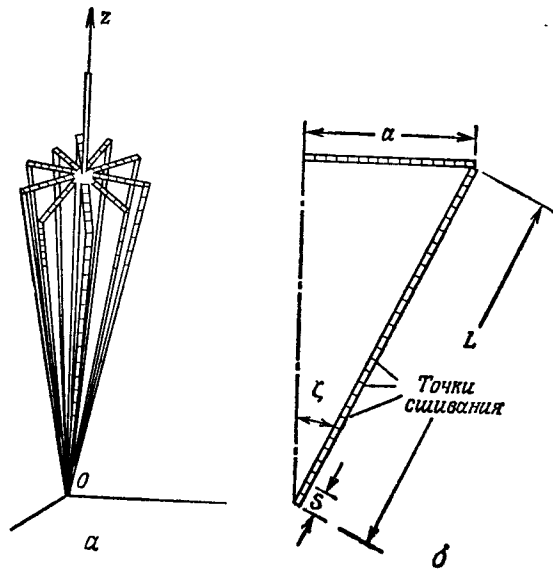
$$\sum_{j=1}^M I_j \left(\sum_{n=0}^{L-1} Z_{k(j+nM)} \right) = -E_k^i, \\ k = 1, 2, \dots, M. \quad (2.200)$$

Преимущество уравнений (2.200) состоит в том, что число неизвестных токов свелось к M , тогда как полное число сегментов равно $L \cdot M$, где L — произвольное число. В результате нет никаких ограничений (кроме времени счета), связанных с выбором числа образующих линий (а следовательно, и полного числа сегментов). Однако число сегментов M на каждой линии ограничено размерами памяти машины. Так, при использовании IBM 7094 M не должно быть больше 100; при расчетах на IBM 360-75 максимальное число сегментов M равно 300. При расчетах приводимых ниже диаграмм направленности L принималось равным 10.

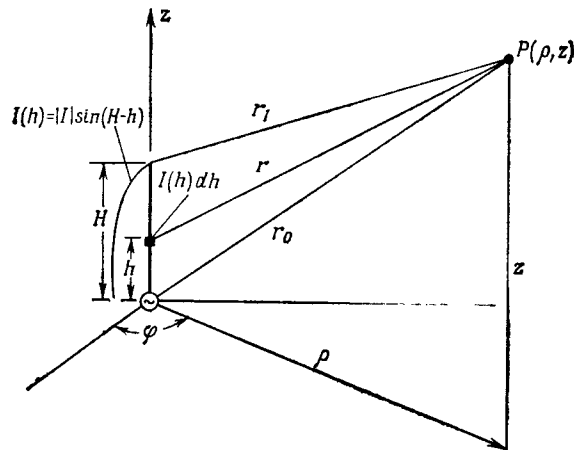
В левой части уравнения (2.200) стоит соответствующий оператор $L_{оп}(J)$ для конуса, остается определить E^i . Для вычисления поля, возбуждаемого штыревой антенной, рассмотрим фиг. 2.44. Исходя из векторного потенциала изображенного распределения тока, получим следующие выражения для



Фиг. 2.42. Размеры экспериментальных моделей. Штырь длиной 18,7 см является четвертьволновым на частоте 400 МГц.



Фиг. 2.43. Решетчатая модель конуса со штыревой антенной на его основании (а) и один из проводников, образующих модель, для которого показано разбиение на сегменты и точки сшивания (б).



Фиг. 2.44. К определению ближнего поля штыревой антенны.

составляющих электрического поля:

$$E_z = -i29,975 |I| \left[\frac{e^{-i\beta r_1}}{r_1} - \frac{e^{-i\beta r_0}}{r_0} \cos \beta H - i \frac{z}{r_0^2} e^{-i\beta r_0} \sin \beta H - \frac{z}{\beta r_0^3} e^{-i\beta r_0} \sin \beta H \right], \quad (2.201)$$

$$E_\rho = \frac{i29,975 |I|}{\rho} \left[(z - H) \frac{e^{-i\beta r_1}}{r_1} - \frac{z}{r_0} e^{-i\beta r_0} \cos \beta H - \frac{iz^2}{r_0^2} e^{-i\beta r_0} \sin \beta H + \frac{\rho^2}{\beta r_0^3} e^{-i\beta r_0} \sin \beta H \right]. \quad (2.202)$$

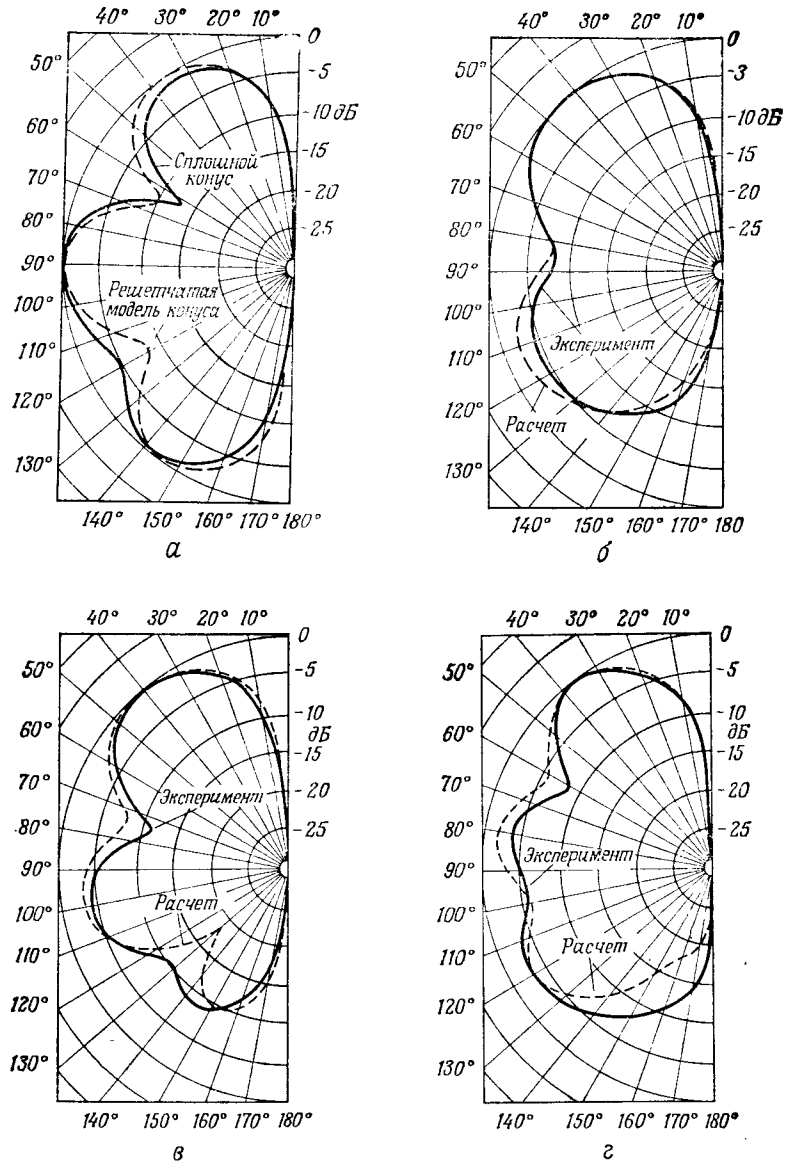
Найдя распределение тока на конусе, можно вычислить диаграмму излучения в дальней зоне для сложной структуры штырь + конус, складывая поля, возбуждаемые токами на конусе и на штыре. Выражение для составляющей E_θ поля конуса в дальней зоне приведено в приложении 3, а составляющая E_θ поля штыря, которую можно получить из выписанного выше выражения для E_z , имеет вид

$$E_\theta = \frac{29,975 |I|}{\sin \theta} \{ \cos \theta \sin \beta H - \sin(\beta H \cos \theta) + i [\cos(\beta H \cos \theta) - \cos \beta H] \}, \quad (2.203)$$

где множитель $e^{-i\beta r}/r$ опущен, чтобы отсчет фазы поля велся от начала координат. Составляющая E_ρ убывает с расстоянием как $1/r^2$ и, следовательно, пренебрежимо мала в дальней зоне.

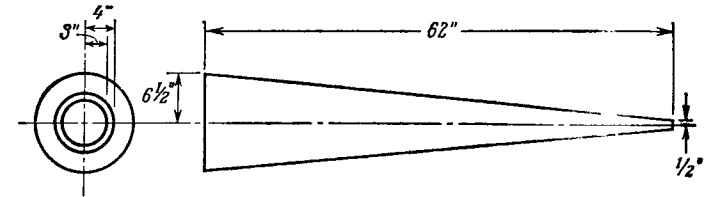
Для экспериментальной проверки возможности представлять металлическую поверхность решетчатой моделью был изготовлен решетчатый конус, укрепленный на пенопластовом коническом сердечнике, подобный изображенному на фиг. 2.43, а. На фиг. 2.45, а приведены типичные экспериментально снятые диаграммы направленности для излучения в присутствии сплошной конической поверхности и ее решетчатого аналога. На фиг. 2.45, б, в, г приведены характерные результаты расчета для решетчатой модели и соответствующие экспериментальные данные для сплошной конической поверхности; совпадение результатов, как правило, хорошее. Заметное различие диаграмм на фиг. 2.45, г при больших углах, по-видимому, объясняется влиянием коаксиального кабеля, используемого в экспериментах для измерения.

Возможны, конечно, и другие способы формулировки задачи. Например, можно не задавать распределения тока на штыре, а считать его неизвестным наряду с токами на металлическом теле. Здесь также возможно несколько вариантов. Можно,



Фиг. 2.45. Диаграммы направленности для четвертьволнового штыря. а — на частоте 400 МГц; б — на частоте 300 МГц; в — на частоте 350 МГц; г — на частоте 500 МГц для штыря длиной 0,312 λ.

например, входной ток на штыре считать заданным, как в § 6, п. 2. При этом подходе учитывается взаимодействие штыря с конусом, но сильно осложняется расчет импеданса. Можно



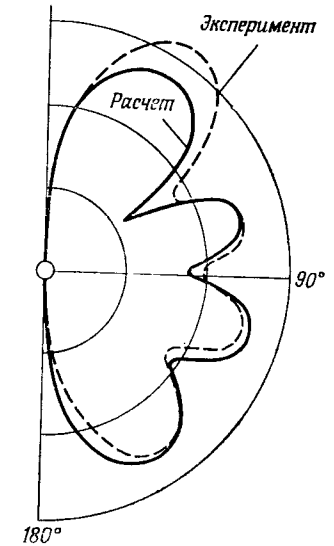
Фиг. 2.46а. Конус с круговой щелью на основании.

здать генератор напряжения у основания штыря, например плоский кольцевой магнитный ток. Расчет токов на конусе и штыре учитывает их взаимодействие и приводит непосредственно к выражению для входного импеданса штыря. Заметим, что при любом подходе описанная выше симметрия задачи, обусловленная симметрией источника возбуждения, может существенно упростить расчет.

После того как рассматриваемая частная задача, скажем для конуса, запрограммирована, легко осуществить численный анализ и при других источниках возбуждения, так как для этого в операторном уравнении $L_{оп}(J) = (E^i)$ достаточно изменить лишь правую часть. Рассмотрим, например, излучение круговой щели, расположенной на основании конуса (фиг. 2.46а). В этой задаче также можно воспользоваться решетчатой моделью конуса, но при этом сегменты не должны пересекать щель или проникать в нее. Возбуждающую щель можно заменить эквивалентным кольцевым магнитным током (приложение 1). На фиг. 2.46б показаны типичные для этого случая диаграммы направленности.

В качестве последнего примера применения метода моделирования рассмотрим теперь моделирование влияния корпуса самолета.

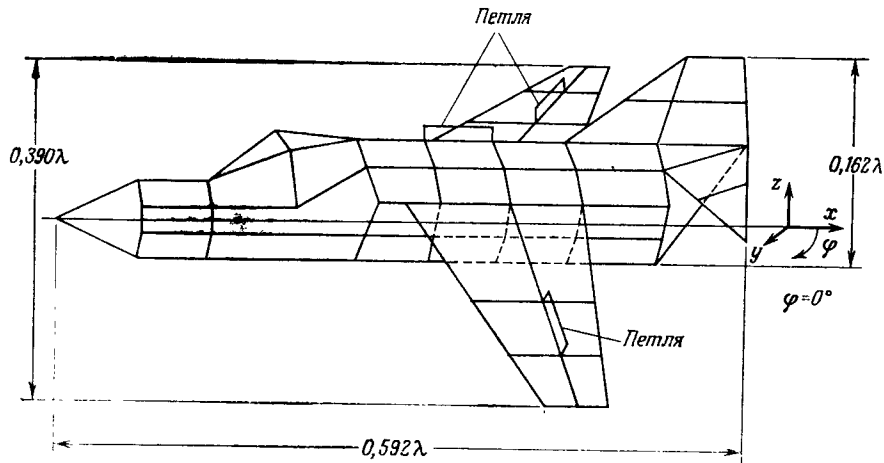
Вершина конуса



Фиг. 2.46б. Рассчитанные и измеренные диаграммы направленности на частоте 300 МГц для круговой щели на основании конуса.

2. ПЕТЛЕВЫЕ САМОЛЕТНЫЕ АНТЕННЫ НА КООКСИАЛЬНОЙ ЛИНИИ

В диапазоне частот 2—30 МГц металлическая поверхность самолета с успехом может быть представлена решетчатой моделью, так как на этих частотах размеры самолета электрически малы. Рассмотрим модель корпуса самолета ВМС типа F4, показанную на фиг. 2.47, где указаны некоторые электрические размеры, соответствующие частоте 10 МГц. Размещение моде-

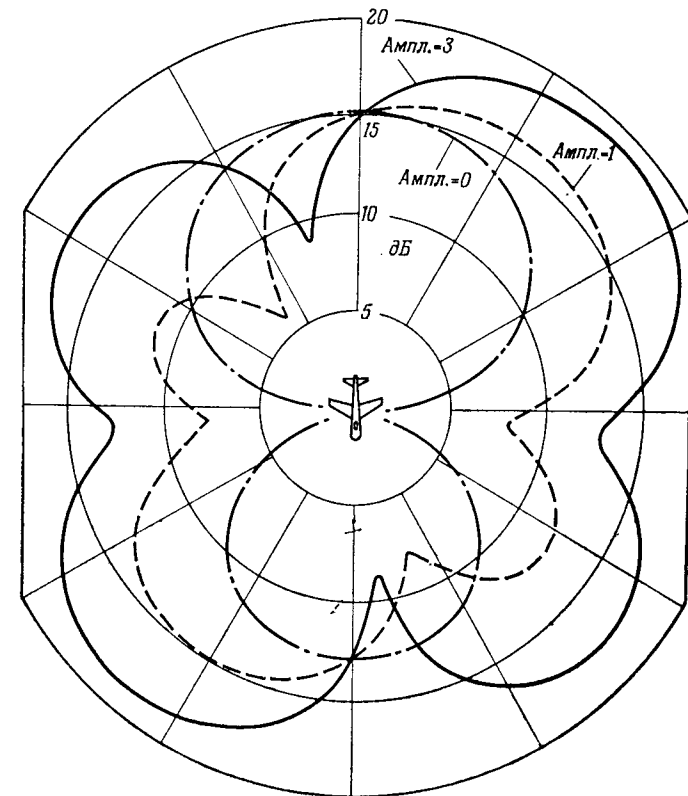


Фиг. 2.47. Расчетная модель корпуса самолета F4. Указаны размеры в длинах волн для частоты 10 МГц.

лирующих проволочных сегментов таково, что фюзеляж представляется трехмерной решеткой, а крылья и хвостовые секции — плоскими решетками. Разумеется, каждый прямолинейный отрезок модели можно представлять не одним, а несколькими сегментами, число которых зависит от его протяженности. В рассматриваемом случае используется та же основная программа расчета, что и для конуса. При определении поля источника (E^i) токи в петлях можно считать постоянными, так как их электрические размеры очень малы. Таким образом, в программе расчета токи на сегментах, представляющих петлевые антенны, считаются известными; поэтому они не входят в столбец, определяющий распределение тока. Суперпозиция полей этих сегментов дает падающее поле (E^i).

Источником возбуждения самолетных антенн служат обычно одноэлементные длинные линии (т. е. малые одиночные петли, см. § 7, п. 2). Одна из причин их применения состоит в том, что в силу своего магнитного характера они возбуждают токи в поверхности, на которой они укреплены. В результате эта по-

верхность ведет себя как часть излучающей системы, тогда как при применении электрических (дипольных) возбуждающих элементов стремятся, наоборот, изолировать антенну от корпуса самолета. Пусть, например, желательно получить приблизитель-



Фиг. 2.48. Диаграммы направленности для самолета F4 при возбуждении петель на крыльях и на фюзеляже со сдвигом фаз 90° . Ток в крыльевых петлях $1 \cdot e^{i \cdot 0}$, ток в фюзеляжной петле $0 \cdot e^{+i\pi/2}$, $1 \cdot e^{+i\pi/2}$ и $3 \cdot e^{+i\pi/2}$.

но равномерное по азимуту распределение излучения. Если крылья и фюзеляж рассматривать как скрещенные диполи, то, возбуждая их со сдвигом фаз $\pi/2$, можно получить хорошее азимутальное перекрытие. Это видно из диаграмм направленности, приведенных на фиг. 2.48. Возбуждение одних лишь крыльев приводит к диаграмме дипольного типа с максимумами вперед и назад, а дополнительное возбуждение фюзеляжа со сдвигом фазы на $\pi/2$ обеспечивает тем лучшее перекрытие по азимуту, чем интенсивнее это возбуждение.

§ 9. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

В этой главе представлены основные принципы и методы численного решения краевых задач электродинамики, связанных с проволочными антеннами. В § 2, п. 2, рассмотрены два основных интегральных уравнения теории проволочных антенн. Хотя некоторые исследователи отдают предпочтение интегральному уравнению Халлена, уравнение Поклингтона, как подчеркивается в § 2, п. 2, в известном смысле является более общим и более гибким. Это связано с тем, что в уравнении Халлена условия возбуждения могут быть описаны лишь с помощью генератора напряжения, приложенного к бесконечно узкому зазору, тогда как уравнение Поклингтона допускает большее разнообразие в представлении источников и, в частности, допускает модель плоского кольцевого магнитного тока, адекватную реальной физической конфигурации системы питания. Поэтому при формулировке большинства краевых задач для различных проволочных антенн, рассмотренных в этой главе, использовалось интегральное уравнение Поклингтона.

В § 3 рассмотрен метод моментов, представляющий основную объединяющую идею численного решения широкого класса задач электродинамики. Метод моментов позволяет достаточно точно аппроксимировать интегральное уравнение системой линейных алгебраических уравнений. Хотя общего математического описания метода моментов не приведено, рассмотрены два важных частных случая. Оба этих случая связаны со специальным выбором используемых весовых или пробных функций. В первом частном случае, известном как метод Галеркина, весовые функции совпадают с базисными функциями, используемыми для разложения искомого решения. При применении метода Галеркина для определения каждого элемента матрицы импедансов $[Z]$ требуется, вообще говоря, двукратное интегрирование. Поэтому, особенно если оба интегрирования приходится выполнять численными методами, вычисление матрицы $[Z]$ может привести к большим затратам машинного времени. Учитывая, что при применении метода Галеркина требуется удовлетворить интегральному соотношению на некоторой поверхности, можно уменьшить число интегрирований, требуемых для вычисления элементов матрицы $[Z]$, если выбрать в качестве весовых функций дельта-функции. Эта вторая разновидность метода моментов обычно называется методом сшивания по точкам. При этом граничные условия удовлетворяются не на всей заданной поверхности, а в дискретном наборе точек. Метод сшивания по точкам представляет собой более прямой способ решения, чем метод Галеркина, и оказывается вполне подходя-

щим для рассмотрения многих задач. Однако сходимость решения обычно оказывается более медленной.

Чрезвычайно важным вопросом при формулировке задачи является выбор базисных функций, т. е. функций, по которым проводится разложение тока. Обсуждению вопросов, связанных с выбором базиса, посвящен § 4. Рассмотрены две различные возможности этого выбора: либо введение системы базисных функций полной области, либо применение базисных функций, отличных от нуля в подобластях; последний случай естественно приводит к разбиению источника на сегменты. Базисные функции полной области использованы в § 6 для расчета антенны типа Уда—Яги, а в § 7 и 8 даны примеры разбиения антенны на сегменты.

В § 4 рассматривается также метод преобразования базиса. Применение этого метода в сочетании со сшиванием по точкам позволяет сформулировать задачу для одного базиса, а затем преобразовать к другому базису, для которого матрица импедансов $[Z]$ меньше и ее обращение производится быстрее.

В § 4, п. 5, рассмотрен особенно удобный базис — система кусочно синусоидальных функций. При использовании этого базиса вычисление матрицы $[Z]$ существенно облегчается, так как многие интегралы могут быть представлены в замкнутом виде, и тем самым значительно сокращается объем требуемого численного интегрирования. Такой метод расчета, называемый методом согласования реакций, представляет собой обобщение метода наведенных э. д. с. и в некотором смысле эквивалентен методу Галеркина. Его применение обеспечивает быструю сходимость решения. Метод согласования реакций, по-видимому, следует считать наиболее совершенным средством численного исследования проволочных антенн, так как он сочетает точность и быструю сходимость решения и обеспечивает высокую эффективность использования машинного времени. В настоящее время метод согласования реакций обобщается на моделирование металлических поверхностей (см. § 8).

Развитые эффективные методы решения краевых задач для проволочных антенн получают без сомнения еще более широкое применение в будущем. Однако многое еще предстоит сделать, в частности проанализировать работу антенн в присутствии различных посторонних возмущающих элементов.

Автор выражает благодарность своим коллегам по Электротехнической лаборатории Университета штата Огайо. В особенности автор благодарен своему руководителю проф. Ричмонду, позволившему воспользоваться материалами его лекций [в частности, § 2, п. 2, и выражения (2.35) — (2.45)]. Автор благодарен также проф. Уолтеру и Гарбачу, прочитавшим рукопись и сделавшим ряд полезных замечаний.

УПРАЖНЕНИЯ

Поля плоского кольцевого магнитного тока

1. Докажите справедливость выражения (2.39).
2. Выведите уравнение (2.46), исходя из (2.43).
3. Покажите, что уравнение (2.47) может быть сведено к уравнению (2.46). Для этого может потребоваться уравнение непрерывности.
4. Покажите, что в интегральном уравнении Халлена $C_2 = V_T/2$.
5. Входящие в уравнение (2.67) величины $[Z]$, (I) и (V) названы матрицами обобщенных импедансов, токов и напряжений. Почему здесь используется определение «обобщенный»?
6. Напишите программу решения задачи о полуволевом диполе, исходя из интегрального уравнения Поклингтона (2.46) и пользуясь методом сшивания по точкам для базисных функций полной области (2.78). (Это легко сделать с помощью менее чем 150 операторов на ФОРТРАНЕ.) Воспользуйтесь приведенной в приложении 1 подпрограммой вычисления поля источника и сравните полученные результаты с приведенными на фиг. 2.6.
7. Рассмотрите упражнение 6, используя импульсные базисные функции (2.85).
8. Рассмотрите упражнение 6, исходя из уравнения Халлена и считая, что диполь возбуждается напряжением единичной амплитуды, приложенным к бесконечно узкому зазору.
9. Установите, является ли приведенная ниже система уравнений плохо обусловленной:

$$5w + 7x + 6y + 5z = 23,$$

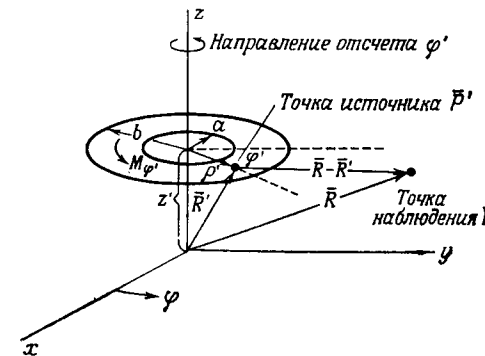
$$7w + 10x + 8y + 7z = 32,$$

$$6w + 8x + 10y + 9z = 33,$$

$$5w + 7x + 9y + 10z = 31.$$

10. Выведите выражение (2.125).
11. Выведите выражение (2.161), исходя из формулы (2.140).
12. Проверьте соотношение (2.183).
13. Получите выражение (2.201) и вытекающее из него выражение (2.203).
14. Получите выражение (2.227), исходя из (2.221).
15. Покажите, что метод согласования реакций связан с методом Галеркина.

Поля, возбуждаемые плоским раскрытием коаксиальной линии с бесконечным металлическим фланцем, могут быть вычислены как поля плоского кольцевого магнитного тока. Точные выражения для поля плоского кольцевого магнитного тока в ближней зоне получены Цаем [40, 41], работам которого мы следуем ниже.



Фиг. 2.49. Плоский кольцевой магнитный ток.

На фиг. 2.49 показано такое распределение тока с внешним и внутренним радиусами кольца a и b и центром, расположенным на оси z при $z = z'$. Предполагая, что в коаксиальной линии распространяется лишь основная волна (типа TEM) единичной амплитуды, и учитывая симметрию задачи, получаем следующее распределение поля в раскрытие:

$$E_{\rho'}(\rho') = \frac{1}{2\rho' \ln b/a} \text{ В/м.} \quad (2.204)$$

Соответствующее распределение магнитного тока имеет вид

$$K_{\psi'} = \frac{-1}{\rho' \ln b/a}. \quad (2.205)$$

Магнитный векторный потенциал \mathbf{F} , создаваемый током \mathbf{K} , равен

$$\mathbf{F}(\mathbf{P}) = \frac{\varepsilon_0}{4\pi} \iint_{\text{по поверхности}} \mathbf{K}'(\mathbf{P}') \frac{e^{-ik|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|}}{|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|} ds' \quad (2.206)$$

(штрихом отмечены координаты источника). Электрические \mathbf{E} и магнитные \mathbf{H} поля выражаются через электрический векторный потенциал \mathbf{A} и магнитный векторный потенциал \mathbf{F} следующим образом:

$$\mathbf{E} = \frac{1}{i\omega\varepsilon_0} (\text{grad div} + k^2) \mathbf{A} + \frac{1}{\varepsilon_0} \text{rot } \mathbf{F}, \quad (2.207)$$

$$\mathbf{H} = \frac{1}{i\omega\mu} (\text{grad div} + k^2) \mathbf{F} + \frac{1}{\mu_0} \text{rot } \mathbf{A}. \quad (2.208)$$

Здесь следует положить $\mathbf{A}=0$, так как источником служат лишь магнитные токи.

При вычислении вектора \mathbf{F} по формуле (2.206) рассмотрим элементарную площадку $ds' = \rho' d\rho' d\varphi'$ на плоском кольце. Если сначала проводить интегрирование по φ' , а затем по ρ' , то плоское кольцо разбивается на систему магнитных кольцевых токов шириной $d\rho'$ каждый. Прежде чем проводить суммирование по всем кольцевым токам, оценим вклад каждого элементарного кольца. В силу осевой симметрии задачи (все величины не зависят от φ) можно без потери общности выбрать точку наблюдения в плоскости yz (при этом $\rho=y$, а \mathbf{F} имеет лишь составляющую по φ). В результате магнитный векторный потенциал, определяемый формулами (2.205), (2.206), принимает вид

$$F_\varphi = \frac{-\varepsilon_0}{2\pi} \frac{1}{\ln b/a} \int_a^b \int_0^\pi \cos \varphi' \frac{e^{-ikR'}}{R'} d\varphi' d\rho'. \quad (2.209)$$

Здесь величина $|\mathbf{R}-\mathbf{R}'|$, введенная на фиг. 2.49, обозначена теперь просто R' и, как легко установить из фиг. 2.50, равна

$$R' = \sqrt{(z-z')^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi'}. \quad (2.210)$$

Так как кольцевой ток направлен по φ' , при вычислении его вклада в интеграл F_φ введен множитель $2 \cos \varphi'$ и интегрирование по φ проводится от 0 до π .

Вычисление интеграла (2.209) проводится численным интегрированием. В частности, при размерах $a = 0,002 \lambda$, $b/a = 2,23$ интегрирование по φ' можно осуществить с высокой точностью, проводя суммирование лишь по трем одинаковым сегментам. Разумеется, для более широких колец нужно учитывать большее число сегментов.

Как показал Цай [40], магнитный векторный потенциал плоского магнитного тока выражается формулой

$$F_\varphi = \frac{-\varepsilon_0}{2\pi \ln b/a} \int_a^b \left[\frac{2}{R_1} K\left(\frac{\pi}{2}, \rho^2\right) + \int_0^\pi \left(\cos \varphi' \frac{e^{-ikR'}}{R'} - \frac{1}{R'} \right) d\varphi' \right] d\rho, \quad (2.211)$$

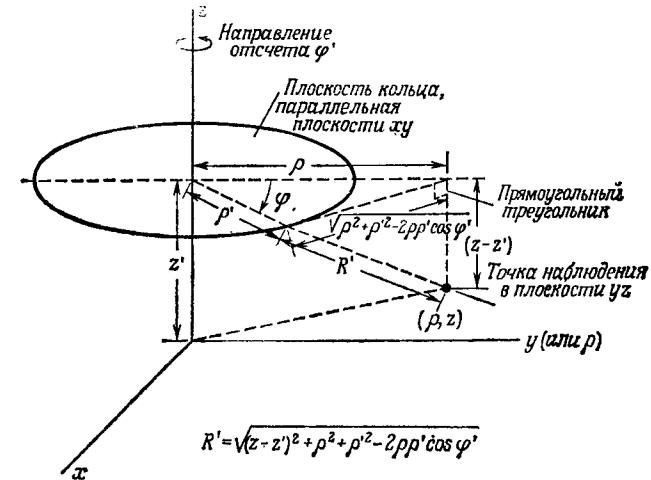
где

$$R' = \sqrt{(z-z')^2 + \rho^2 + \rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi'}, \quad (2.212)$$

$$R_1 = \sqrt{(z-z')^2 + (\rho + \rho')^2}, \quad (2.213)$$

$$\rho^2 = \frac{4\rho\rho'}{(z-z')^2 + (\rho + \rho')^2}. \quad (2.214)$$

$K(\pi/2, \rho^2)$ — полный эллиптический интеграл первого рода. Формулой (2.211) можно пользоваться для точного численного опре-



Фиг. 2.50. Расположение источника и точки наблюдения для кольцевого тока.

деления F_φ в любой точке наблюдения вне поверхности кольца (в том числе и при $\rho < a$). В приводимых ниже программах расчетов описанное интегрирование по φ' проводится методом Симпсона. Разбиение области интегрирования по φ' от 0 до π на пять отрезков приводит, как правило, к удовлетворительному результату (как показывает сравнение с результатами для большого числа отрезков).

Составляющие поля E_z и E_ρ в «ближней зоне» приходится определять численным дифференцированием, эти составляющие

выражаются формулами

$$E_z = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} (\rho F_\Phi), \quad (2.215)$$

$$E_\rho = \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial}{\partial z} (F_\Phi). \quad (2.216)$$

Частные производные находятся численно с помощью формулы Лагранжа для трех точек (при равноотстоящих значениях аргумента)

$$f'_\rho = f'(x_0 + \rho h) = \frac{1}{h} \left\{ \left(\rho - \frac{1}{2} \right) f_{-1} - 2\rho f_0 + \left(\rho + \frac{1}{2} \right) f_1 \right\}, \quad (2.217)$$

где x_0 — центральная точка области $\pm \rho h$, в которой ищется производная (x соответствует ρ или z), а $f_{\pm 1}$ — значения функции при $x = x_0 \pm h$. Точность вычислений проверялась сопоставлением с соответствующими значениями, полученными по четырем точкам, и была в общем случае (за исключением E_z при $\rho = 0$ и E_ρ при $z = 0$) лучше одного процента.

Для упрощения вычислений при $\rho \gg b$ могут быть получены замкнутые выражения для \mathbf{E} и \mathbf{H} . Обычное приближение «дальней зоны» здесь не может быть использовано, так как $\lambda \gg \rho \gg b$; поэтому соответствующие выражения можно рассматривать как формулы для «далекой ближней зоны».

Исходя непосредственно из выражения (2.210), положим

$$R_0 = \sqrt{(z - z')^2 + \rho^2}. \quad (2.218)$$

Тогда

$$R' = R_0 \sqrt{1 + \frac{\rho'^2}{R_0^2} \frac{2\rho\rho' \cos \varphi'}{R_0^2}} \approx R_0 + \frac{1}{2} \frac{(\rho'^2 - 2\rho\rho' \cos \varphi')}{R_0} \quad (2.219)$$

при $\rho \gg \rho'$. Используя это соотношение, нетрудно получить

$$\frac{E_\rho}{k} \approx -\frac{(b^2 - a^2)}{8 \ln b/a} \rho \frac{(z - z')}{R_0} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0^2} \left\{ k - \left(\frac{3}{k} + \frac{k(b^2 + a^2)}{2} \right) \frac{1}{R_0^2} + i \left[\frac{2(b^2 + a^2)}{R_0^3} - \frac{3}{R_0} \right] \right\}, \quad (2.220)$$

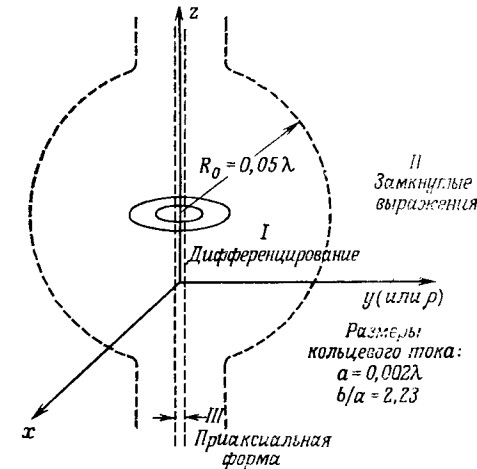
$$\begin{aligned} \frac{E_z}{k} \approx & \frac{(b^2 - a^2)}{8 \ln b/a} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0^2} \left\{ 2 \left(\frac{1}{kR_0} + i - \frac{i(b^2 + a^2)}{2R_0^2} \right) + \right. \\ & + \frac{\rho^2}{R_0} \left[\left(\frac{1}{kR_0} + i - \frac{i(b^2 + a^2)}{2R_0^2} \right) \left(-ik - \frac{2}{R_0} \right) + \right. \\ & \left. \left. + \left(\frac{-1}{kR_0^2} + i \frac{(b^2 + a^2)}{R_0^3} \right) \right] \right\}. \quad (2.221) \end{aligned}$$

Для магнитного поля имеем

$$\frac{H_\Phi}{k} \approx \frac{i}{120\pi} \frac{(b^2 - a^2)}{8 \ln b/a} k \left[\rho \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \left(\frac{1}{kR_0} + i - \frac{i(b^2 + a^2)}{2R_0} \right) \right]. \quad (2.222)$$

Приводимая ниже подпрограмма ЕВ содержит программу вычисления полей плоского кольцевого магнитного тока по формулам (2.220) — (2.222).

Как следует из симметрии задачи, на оси (при $\rho = 0$) радиальная составляющая электрического поля обращается в нуль:



Фиг. 2.51. Схема областей применимости различных выражений для описания ближнего поля кольцевого магнитного тока.

$E_\rho(0, z) \equiv 0$. Приближенные выражения (2.220) — (2.222) при $\rho \rightarrow 0$ неверны. Из-за наличия особенности при $\rho = 0$ формулы численного дифференцирования также становятся неприменимыми. Поэтому необходимо отдельно получить выражение для поля на оси. Перепишем z -составляющую электрического поля в виде

$$E_z = -\frac{1}{\epsilon_0} \frac{F_\sigma}{\rho} - \frac{1}{\epsilon_0} \frac{\partial F_\Phi}{\partial \rho}. \quad (2.223)$$

При $\rho = 0$ выражение (2.210) принимает вид

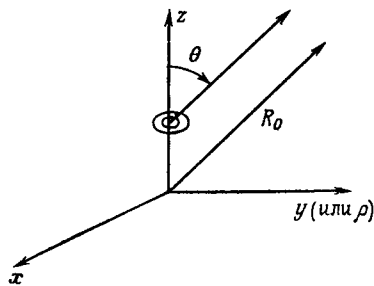
$$R' = \sqrt{(z - z')^2 + \rho'^2}. \quad (2.224)$$

С помощью формулы (2.223) получаем выражение для поля на оси

$$E_z(0, z) = \frac{1}{2 \ln b/a} \left[\frac{e^{-ik \sqrt{(z-z')^2 + a^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + a^2}} - \frac{e^{-ik \sqrt{(z-z')^2 + b^2}}}{\sqrt{(z-z')^2 + b^2}} \right]. \quad (2.225)$$

Очевидно, что $E_\rho(0, z) \equiv H_\varphi(0, z) \equiv 0$. Приведенное выражение для E_z точное и не основано на упрощающих предположениях.

Итак, для вычисления ближнего поля плоского кольцевого магнитного тока следует в общем случае пользоваться комбинацией выведенных выше выражений. На фиг. 2.51 схематически показаны области применимости различных выражений для описания поля. В приводимой ниже программе на ФОРТРАНЕ IV предусмотрена логическая схема выбора надлежащего метода описания поля, так что эту программу можно рассматривать как некоторый общий функционал для расчетов ближнего поля плоского кольцевого магнитного тока.



Фиг. 2.52. К вычислению поля кольцевого магнитного тока в дальней зоне.

Выражения для поля в дальней зоне (фиг. 2.52) могут быть получены и для сравнительно больших размеров кольца, т. е. при условии $\lambda \approx \rho' \ll R_0$. Они принимают вид

$$H_\varphi \approx -\frac{\omega \epsilon_0 (b^2 - a^2)}{8 \ln b/a} k \frac{e^{-ikR_0}}{R_0} \left\{ \sin \theta - \frac{1}{16} k^2 (b^2 + a^2) \sin^3 \theta \right\}, \quad (2.226)$$

$$E_\theta \approx -\frac{\pi^2}{2} \frac{(b^2/\lambda^2 - a^2/\lambda^2)}{\ln b/a} \left\{ \sin \theta - \frac{\pi^2}{4} \left(\frac{b^2}{\lambda^2} + \frac{a^2}{\lambda^2} \right) \sin^3 \theta \right\} \frac{e^{-ikR_0}}{R_0}. \quad (2.227)$$

Было показано, что выражение (2.227) позволяет вычислять поле в дальней зоне с высокой точностью при размерах источника вплоть до $\lambda/4$ ($b = \lambda/8$). Это выражение сходно с формулой Харрингтона [42] для излучения раскрыва коаксиальной линии малых размеров

$$H_\varphi = \frac{\omega \epsilon \pi V (b^2 - a^2)}{2\lambda r \ln b/a} e^{-ikr} \sin \theta, \quad (2.228)$$

но является более общим.

Автор благодарен проф. Цаю за предоставление приводимой ниже программы вычислений поля магнитного тока. Чтобы воспользоваться этой программой, необходимо знать обозначения переменных в подпрограмме EB. Составляющая поля E_z обозначена EZB, составляющая E_ρ — ERB, а H_φ — HPHB; AB и BB — внутренний и внешний радиусы кольца; ZB и RB — значения z и ρ , отнесенные к длине волны вычисляемого поля; наконец, ZPB — расстояние центра кольца от начала координат.

C
C
C

MAGNETIC FRILL CURRENT PROGRAM

```

SUBROUTINE EB (EZB,ERB,HPHB,AB,BB,ZB,ZPB,RB)
COMPLEX EZB,ERB,FINT,XMB(5),T1,T2,T3
COMPLEX HPHB
PI=3.1415927
TPI=2.0*PI
DAB=(BB-AB)/3.
D=RB/50.
BAL=ALOG(BB/AB)
IF (RB.NE.0.) GO TO 10
TO=SQRT((ZB-ZPB)**2+AB**2)
TT=SQRT((ZB-ZPB)**2+BB**2)
EZB=(CEXP(CMPLX(0.0,-TPI*TO))/TO-CEXP(CMPLX(0.0,-TPI*TT))/TT)/BAL)
EZB=EZB/(2.*TPI)
ERB=(0.0,0.0)
GO TO 200
10 H=PI/5.
RO=SQRT((ZB-ZPB)**2+RB**2)
IF (RO.LT.0.05.AND.RB.NE.0.0) GO TO 25
BMA=BB**2-AB**2
BPA=BB**2+AB**2
RO2=RO**2
RO3=RO**3
T1=BMA/8./BAL/RO2*CEXP(CMPLX(0.0,-TPI*RO))
ERB=-T1*RB/RO*(ZB-ZPB)*CMPLX(TPI-(3./TPI+0.5*TPI*BPA)/RO2,2.*BPA/2RO3-3./RO)
T2=CMPLX(1./TPI/RO,1.-BPA/2./RO2)
T3=CMPLX(-1./TPI/RO2,BPA/RO3)
EZB=T1*(2.0*T2+(RB**2)/RO*(T2*CMPLX(-2./RO,-TPI)+T3))
HPHB=CMPLX(0.,1./60.)*RB*T1*CMPLX(1./TPI*RO,1.-BPA/2./RO2)
GO TO 200
25 DO 150 J=1,5
R=RB
Z=ZB
RP=AB+DAB/2.0
IF (J.EQ.2) Z=ZB+D
IF (J.EQ.3) Z=ZB-D
IF (J.EQ.4) R=RB-D
IF (J.EQ.5) R=RB+D
XMB(J)=CMPLX(0.0,0.0)
DO 100 I=1,3
R1=SQRT((Z-ZPB)**2+(R+RP)**2)
PP=4.0*R*RP/(R1**2)
CALL ELPING (ELT,PP)
TEMP=2.0/R1*ELT
CON1=(Z-ZPB)**2+R**2+RP**2
CON2=2.0*R*RP
CALL FUNCT (FR1,FI1,CON1,CON2,0.0)
CALL FUNCT (FR2,FI2,CON1,CON2,PI)
FINT=CMPLX(FR1+FR2,FI1+FI2)
U=H
P=2.0
50 CALL FUNCT (FR3,FI3,CON1,CON2,U)
FINT=FINT+P*CMPLX(FR3,FI3)
U=U+H
IF (U+H/4..LT.PI) GO TO 50
U=H/2.

```

Вычисление собственных функций для распределения токов

DO

```

P=P*2.
IF (P.LT.5.) GO TO 50
FINT=FINT*H/6.+TEMP
RP=RP+DAB
XMB(J)=XMB(J)+FINT*DAB
100 CONTINUE
XMB(J)=XMB(J)/(TPI*BAL)
150 CONTINUE
EZB=XMB(1) RB/TPI+(XMB(5)--XMB(4))/D/2. TPI
ERB=(XMB(2)--XMB(3))/D/2. TPI
HPHB=CMPLX(0.,1.+(120.*PI))*XMB(1)
200 CONTINUE
RETURN
END
SUBROUTINE FUNCT (FCR,FCI CONS1,CONS2,V)
RR=SQRT(CONS1-CONS2*COS(V))
RPI=6.283185*RR
FCR=(COS(V)*COS(RPI)-1.)/RR
FCI=- (COS(V)*SIN(RPI))/RR
RETURN
END
SUBROUTINE ELPING (ELPO,ELPC)
COMPLETE ELLIPTICAL INTEGRAL OF THE FIRST KIND
ELPI=1.0-ELPC
A0=1.3862944
A1=0.096663443
A2=0.035900924
A3=0.037425637
A4=0.014511962
B0=0.5
B1=0.12498594
B2=0.068802486
B3=0.033283553
B4=0.0044178701
ELPO=(((((((A4*ELPI)+A3)*ELPI)+A2)*ELPI)+A1)*ELPI)+A0+ALOG(1.0/ELPI)
2*(((((((B4*ELPI)+B3)*ELPI)+B2)*ELPI)+B1)*ELPI)+B0)
RETURN
END

```

Следуя изложению § 4, п. 6, рассмотрим операторное уравнение

$$L_{\text{оп}}(\mathbf{J}) = Z(\mathbf{J}), \quad (2.229)$$

где $Z = R + iX$. Как и в приведенных выше примерах, будем рассматривать симметричные Z . Таким образом, Z — симметричный оператор, а R и X — действительные симметричные операторы, причем R должно быть неотрицательным, поскольку энергия, излученная током \mathbf{J} на теле, также должна быть по крайней мере неотрицательна.

Уравнение для собственных значений, решение которого мы ищем, имеет вид

$$Z(\mathbf{J}_n) = \nu_n R \mathbf{J}_n, \quad (2.230)$$

так как лишь это уравнение допускает решение в форме ортогональных собственных функций (мод) и соответственно ортогональных диаграмм излучения. Положив

$$\nu_n = 1 + i\lambda_n = -a_n^{-1}, \quad (2.231)$$

получим важное матричное соотношение [21, 23]

$$[X](I) = \lambda [R](I), \quad (2.232)$$

где \mathbf{J} представлено разложением (2.61). В результате для определения λ_n имеем уравнение

$$\det | [X] - \lambda [R] | = 0. \quad (2.233)$$

Эффективный метод решения этого уравнения был развит Харрингтоном и Мотцом [24]. Следует отметить, что все собственные значения λ_n и все собственные функции (моды) тока \mathbf{J}_n оказываются действительными [21]. Касательная составляющая электрического поля, обусловленного каждой из мод тока, имеет одинаковую фазу в любой точке поверхности излучателя [21, 12]. Поэтому при вычислении соответствующего поля (или напряжения) оно оказывается, вообще говоря, комплексным, но имеет постоянную фазу. При проведении вычислений удобно пользоваться нормализованным векторным представлением $(I_c)_n$ для мод тока \mathbf{J}_n , определяемым соотношением

$$(\tilde{I}_c)_m [Z] (I_c)_n = (1 + i\lambda_n) \delta_{mn}. \quad (2.234)$$

При этом каждая нормализованная мода тока излучает единичную мощность. Поле n -й моды тока можно получить с помощью оператора

$$(E_c)_n = [Z] (I_c)_n. \quad (2.235)$$

В большинстве антенных задач задано приложенное напряжение и требуется определить истинное распределение тока, которое может быть следующим образом выражено через моды тока:

$$(I) = \sum_n C_n (I_c)_n. \quad (2.236)$$

Для определения весовых коэффициентов C_n напишем разложение касательной составляющей (E) полного электрического поля на поверхности

$$(E) = \sum_n C_n (E_c)_n. \quad (2.237)$$

Рассмотрим, например, диполь, для которого поле во всех «входных точках» должно быть равным нулю, кроме возбуждающего зазора.

Умножая обе части уравнения (2.237) слева на транспонированную матрицу $(I_c)_m$ и учитывая (2.234), получаем

$$(\tilde{I}_c)_m (E) = \sum_n C_n (\tilde{I}_c)_m (E_c)_n = C_m (1 + i\lambda_m). \quad (2.238)$$

Таким образом,

$$C_n = \frac{(\tilde{I}_c)_n (E)}{1 + i\lambda_n} = -a_n (\tilde{I}_c)_n (E), \quad (2.239)$$

где a_n определяется формулой (2.231) в соответствии с обозначениями Гарбача и Терпина. Подставив (2.239) в разложение (2.236), получаем

$$(I) = - \sum_n a_n (\tilde{I}_c)_n (E) (I_c)_n. \quad (2.240)$$

Так как для антенны с m входами значение (E) отлично от нуля лишь на возбуждающем зазоре, то на каждом входе в произведении (2.240) отличны от нуля лишь значения мод на этом входе. В результате истинный ток на выходе I_t оказывается выраженным через возбуждающее напряжение V_t :

$$I_t = - \sum_n a_n V_t I_{ctn}^2, \quad (2.241)$$

где I_{ctn} определяет значение n -й моды па данном входе. Для собственной проводимости проволочной антенны отсюда получаем выражение

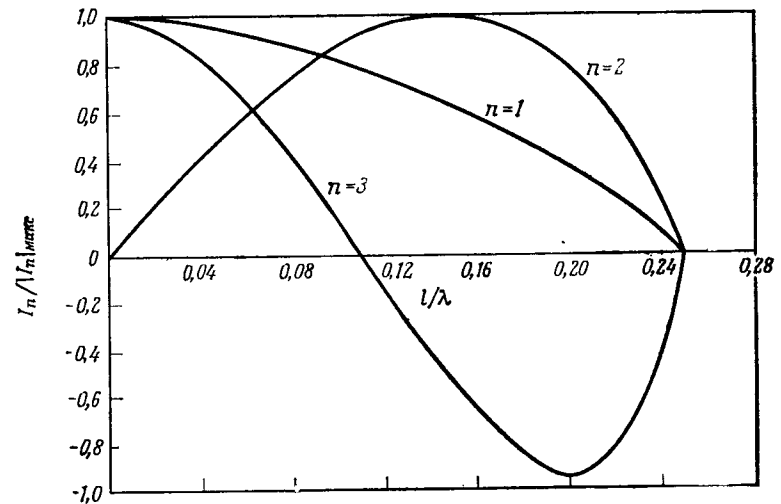
$$Y_{tt} = - \sum_n a_n I_{ctn}^2. \quad (2.242)$$

Совершенно аналогично взаимную проводимость двух проволочных антенн можно представить в виде

$$Y_{st} = - \sum_n a_n I_{csn} I_{ctn}, \quad (2.243)$$

где I_{csn} — составляющая n -й моды тока на зажимах s -й проволочной антенны.

Рассмотрим численный пример расчета проводимости одиночной дипольной антенны. На фиг. 2.53 приведены распределения



Фиг. 2.53. Три первые моды тока для полуволнового диполя.

трех низших мод тока, нормированных по амплитуде на единицу, для полуволнового диполя радиуса $0,0025\lambda$. Нечетные моды тока симметричны, а четные антисимметричны. Низшие собственные значения оказались равными

$$\begin{aligned} \lambda_1 &= 0,5941, & \lambda_3 &= -62,64 \cdot 10^2, \\ \lambda_2 &= -98,48, & \lambda_4 &= -82,87 \cdot 10^4. \end{aligned}$$

Распределение для четвертой моды тока не приведено на фиг. 2.53, так как для нее собственное значение вычислено с недостаточной точностью. На большую ошибку в определении четвертой моды тока указывает ее неортогональность трем первым (в пределах точности расчета), что противоречит (2.234). Чтобы нормировать начальные собственные токи в расчетной программе (см. формулу (27) в работе [24]) на единичную мощность излучения, следует ввести нормирующие коэффициенты

$$N_1 = 2,875, \quad N_2 = 1,795, \quad N_3 = 0,759, \quad N_4 = 0,341.$$

Программа расчета характеристик проволочных антенн, расположенных на металлических телах

Так как величина каждой из мод тока должна быть уменьшена в N^2 раз, то ясно, что первая мода возбуждает поле наиболее эффективно, как и можно было ожидать. Вычисление сумм (2.242) с учетом n членов приводит к следующим значениям собственной проводимости (в мСм):

$$Y_{11} = 9,492 - i5,640 \quad \text{при } n = 1,$$

$$Y_{11} = 9,492 - i5,640 \quad \text{при } n = 2,$$

$$Y_{11} = 9,493 - i5,161 \quad \text{при } n = 3,$$

$$Y_{11} = 9,493 - i5,130 \quad \text{при } n = 4.$$

Очевидно, что собственная проводимость, по существу, определяется первой модой тока. Учет второй моды, обращаемой в нуль в точке возбуждения, не приводит к изменению собственной проводимости, а учет третьей моды сказывается главным образом на ее реактивной части. Вклад четвертой моды вычислен недостаточно точно. Таким образом, суммирование в (2.242) следует оборвать на члене с $n = 3$, хотя соответствующее решение, полученное методом Галеркина с использованием тех же базисных функций, дает $Y_{11} = 9,49 - i4,35$ мСм. Для проволочных антенн, более далеких от резонанса, чем рассматриваемая, влияние собственных токов более высокого порядка должно проявляться сильнее. В рассмотренном выше примере величина действительной части входной проводимости очень хорошо согласуется с результатом, полученным методом Галеркина, а соответствующие значения реактивной проводимости заметно различаются. Однако это не подрывает доверия к теории собственных функций тока, так как практически для нас важна лишь действительная часть проводимости. Мнимая часть, как отмечалось выше, очень сильно зависит от геометрии участка возбуждения антенны.

Здесь рассматривается программа вычислений, с помощью которой были получены результаты, приведенные в § 7, п. 1, и § 8, п. 1, 2, а также проведен расчет диполя в § 4, п. 2. Эта программа использовалась, кроме того, для получения начальной матрицы импедансов в § 4, п. 4. В качестве иллюстрации программа применяется к расчету диаграммы рассеяния на сложном теле, показанном на фиг. 2.47.

Вычисление элементов матрицы импедансов Z_{ij} можно проводить с помощью формул (2.170) — (2.176). Однако, прежде чем использовать эти формулы, нужно, следуя работе [31], вычислить цилиндрические координаты центра сегмента i в системе координат с началом в центре сегмента j и осью z , параллельной оси сегмента j .

Пусть декартовы координаты центральных точек сегментов i и j равны соответственно (x_i, y_i, z_i) и (x_j, y_j, z_j) . Расстояние между этими точками

$$r_{ij} = \sqrt{x_{ij}^2 + y_{ij}^2 + z_{ij}^2}, \quad (2.244)$$

где введены обозначения

$$x_{ij} = x_i - x_j, \quad y_{ij} = y_i - y_j, \quad z_{ij} = \dots \quad (2.245)$$

Радиус-вектор из точки i в точку j равен

$$\mathbf{r}_{ij} = \hat{x}x_{ij} + \hat{y}y_{ij} + \hat{z}z_{ij}. \quad (2.246)$$

Пусть \hat{i} и \hat{j} — единичные векторы, параллельные осям сегментов i и j соответственно. Единичный вектор \hat{i} определяется углом α_i , который он составляет с плоскостью xy , и углом β_i между осью x и проекцией \hat{i} на плоскость xy . Таким образом,

$$\hat{i} = \hat{x} \cos \alpha_i \cos \beta_i + \hat{y} \cos \alpha_i \sin \beta_i - \hat{z} \sin \alpha_i. \quad (2.247)$$

Единичный вектор \hat{j} описывается аналогично определенными углами α_j и β_j .

Удобно ввести вращающуюся цилиндрическую систему координат (ρ', φ', z') с началом отсчета в точке (x_j, y_j, z_j) и с осью

z' , совпадающей с осью сегмента j . Координаты центра сегмента i в этой системе равны

$$z' = x_{ij} \cos \alpha_j \cos \beta_j + y_{ij} \cos \alpha_j \sin \beta_j - z_{ij} \sin \alpha_j, \quad (2.248)$$

$$\rho' = \sqrt{r_{ij}^2 - z'^2}. \quad (2.249)$$

Поле, возбуждаемое сегментом j в точке наблюдения, находящейся в центре сегмента i , можно записать в виде

$$\mathbf{E}_{ij} = \hat{\rho}' E'_\rho + \hat{j} E'_z, \quad (2.250)$$

где

$$\hat{\rho}' = (\mathbf{r}_{ij} - z' \hat{j}) / \rho', \quad (2.251)$$

а E'_ρ и E'_z определяются выражениями (2.170)–(2.176), в которых ρ и z заменены на ρ' и z' .

Наконец, коэффициент Z_{ij} совпадает с составляющей вектора \mathbf{E}_{ij} , касательной к сегменту i :

$$Z_{ij} = \hat{i} \cdot \mathbf{E}_{ij}. \quad (2.252)$$

Из соотношений (2.247), (2.250) и (2.252) следует

$$\begin{aligned} Z_{ij} = & (E'_z - z' E'_\rho / \rho') (\cos \alpha_i \cos \beta_i \cos \alpha_j \cos \beta_j + \\ & + \cos \alpha_i \sin \beta_i \cos \alpha_j \sin \beta_j + \sin \alpha_i \sin \alpha_j) + \\ & + E'_\rho (x_{ij} \cos \alpha_i \cos \beta_i + y_{ij} \cos \alpha_i \sin \beta_i - z_{ij} \sin \alpha_i) / \rho'. \end{aligned} \quad (2.253)$$

Рассмотрим теперь программу расчета проволочной модели тела произвольной формы в применении, например, к расчету антенны на самолете (фиг. 2.47). Программа предусматривает максимум 169 проволочных сегментов, составляющих произвольную пространственную конфигурацию. При желании число сегментов может быть увеличено. Для описания входных данных в программе используются следующие основные символы:

NWIRE	— число сегментов в решетчатой модели,
NEL	— число сегментов, имеющих известное распределение тока (если такие имеются),
IKM	— число рассматриваемых позиций антенны,
IDM	— число рассматриваемых сечений диаграммы направленности для каждой позиции антенны,
DPHI	— шаг по φ ,
DTHET	— шаг по θ ,
FREQ	— частота в МГц,
LINSEG	— подпрограмма вычисления положений сегментов,
X(I)	$= x_i / \lambda$ — безразмерная x -координата центра сегмента i ,
Y(I)	$= y_i / \lambda$ — безразмерная y -координата центра сегмента i ,

Z(I)	$= z_i / \lambda$ — безразмерная z -координата центра сегмента i ,
SI(I)	$= s_i / \lambda$ — безразмерная длина сегмента i ,
ALP	— угол α_i , описывающий ориентацию сегмента i (в градусах),
BET	— угол β_i , описывающий ориентацию сегмента i (в градусах),
V	$= a / \lambda$ — безразмерный радиус проводников (в программе положено $V = 0,001$).

Приведем еще ряд символов, используемых в программе:

SALP(I)	$= \sin \alpha_i$,
CAB(I)	$= \cos \alpha_i \cos \beta_i$,
SAB(I)	$= \cos \alpha_i \sin \beta_i$,
CTHET	$= \cos \theta$,
STHET	$= \sin \theta$,
CPHI	$= \cos \varphi$,
SPHI	$= \sin \varphi$,
STCP	$= \sin \theta \cos \varphi$,
STSP	$= \sin \theta \sin \varphi$,
CTCP	$= \cos \theta \cos \varphi$,
CTSP	$= \cos \theta \sin \varphi$,
XIJ	$= x_{ij} / \lambda$,
YIJ	$= y_{ij} / \lambda$,
ZIJ	$= z_{ij} / \lambda$,
RS	$= (r_{ij} / \lambda)^2$,
ZP	$= z' / \lambda$,
RH2	$= (\rho' / \lambda)^2$,
ERR	— действительная часть величины $\frac{1}{\rho'} E'_\rho$,
ERI	— мнимая часть величины $\frac{1}{\rho'} E'_\rho$,
EZR	— действительная часть E'_z ,
EZI	— мнимая часть E'_z ,
CR(I, J)	— действительная часть коэффициента Z_{ij} ,
CI(I, J)	— мнимая часть коэффициента Z_{ij} ,
COSA(I)	$= \cos k (x_i \sin \theta \cos \varphi + y_i \sin \theta \sin \varphi + z_i \cos \theta)$,
SINA(I)	$= \sin k (x_i \sin \theta \cos \varphi + y_i \sin \theta \sin \varphi + z_i \cos \theta)$,
P(I)	$= \cos \varphi \cos \alpha_i \sin \beta_i - \sin \varphi \cos \alpha_i \cos \beta_i$,
Q(I)	$= \cos \theta \cos \varphi \cos \alpha_i \cos \beta_i + \cos \theta \sin \varphi \cos \alpha_i \sin \beta_i + \sin \theta \sin \alpha_i$.

Коэффициенты Z_{ij} вычисляются в части программы между операторами с номерами 101 и 300. Диагональные элементы Z_{ii} вычисляются между операторами 42 и 45 с помощью выражений,

получаемых заменой переменных в интеграле (2.171), и почленного интегрирования.

Выражения (2.244), (2.245), (2.248) и (2.249) запрограммированы между операторами 103 и 104.

Составляющие E^i и E_z^i поля, рассеянного сегментом j , вычисляются по формулам (2.171) и (2.174) между операторами 103 и 50. Интеграл (2.171) вычисляется с помощью квадратурных формул Ньютона—Котса пятого порядка. Подынтегральное выражение вычисляется в пяти точках, расположенных вдоль сегмента j через равные интервалы, если точка наблюдения (центр сегмента i) находится на расстоянии, превышающем пять длин сегмента от центра вибратора j . В противном случае вычисление подынтегрального выражения проводится в девяти точках.

Выражение (2.253) для элементов Z_{ij} запрограммировано между операторами 50 и 280. Величина E^i вычисляется между операторами 270 и 280, причем действительная и мнимая части этой величины обозначены соответственно CR(I, NP) и CI(I, NP). В рассматриваемом примере считается, что E^i обусловлено токами, возбужденными в трех малых петлях, показанных на фиг. 2.47. Разумеется, можно рассматривать и другие источники поля E^i .

Система линейных алгебраических уравнений решается методом Краута между операторами 300 и 122. Решение выводится на печать в виде перечня токов, наведенных на различных сегментах решетчатой модели. В операторе 160 для описания выходных данных используются следующие символы:

FI — номер сегмента i ,
 CURR(I) — действительная часть тока на сегменте i ,
 CURI(I) — мнимая часть тока на сегменте i ,
 CMAG — абсолютное значение тока на сегменте i ,
 PH — фаза тока на сегменте i (в градусах).

Перед оператором 441 программа выводит на печать следующие выходные данные:

THET = θ в градусах,
 PHI = φ в градусах,
 TB = E_{θ}^i ,
 TC = E_{φ}^i ,
 ETM = $|E_0^i|$,
 EPM = $|E_{\varphi}^i|$,
 GAINТ — зависимость диаграммы направленности от θ в дБ,
 GAINP — зависимость диаграммы направленности от φ в дБ.

ССС

WIRE-GRID BODY PROGRAM

```

1  FORMAT(1H,1P8E15.7)
2  FORMAT(1H,8F15.8)
7  FORMAT(7F10.5)
8  FORMAT(14I5)
11 FORMAT(1H1)
    DIMENSION D(10),X(180),Y(180),Z(180),SI(180),SALP(180),CURR(180),
    2CURI(180),CAB(180),SAB(180),
    3CR(168,169),CI(168,169)
    DOUBLE PRECISION S,CADR,CADI,SI,ST,B2,BK,BK2,BK4,R,SINB,COSB,TANB,
    2PI,TP,FPP,PSQ,ER,EI,ZZ,X,Y,Z,XI,YI,ZI,CABI,SABI,CABJ,SABJ,SS,XIJ,
    3ZIJ,YIJ,SALP,CALP,ZP,RS,RH2,RBRBK,EZR,EZI,ERR,ERI,T,SSS,DEL,RJ,
    4RK,RKCS,CRKS,TRBR,CRY,CCST,Q1,Q2,CSR,CSI,CR,CI,CURR,CURI,CRP,CLL,
    5TAD,ALP,BET,CBET,SBET,CAB,SAB,CMAG,PH,TD,RK2,CP1
    LOGICAL LND
    ZZ=376.72727
    READ(5,7)FREQ
    WAVE=299.776/FREQ
    WFT=1./WAVE/3.280833
    PI=3.141592653590
    P2=PI/2.
    TP=2.*PI
    FPP=TP*TP
    PSQ=PI*PI
    CRY=ZZ/8./PSQ
    CCST=ZZ/180./PSQ
    ZZ2=ZZ/2.
    D(1)=7.
    D(2)=32.
    D(3)=12.
    D(4)=32.
    D(5)=14.
    D(6)=32.
    D(7)=12.
    D(8)=32.
    D(9)=7.
    CNSNT=4.*PI
    TA=.01745329
    TD=57.29578
    TPS=TP
    TAD=TA
    READ(5,8) NWIRE,NEL,IKM,IDM
    READ(5,7) DPHI,DTHET
    B=.001
    B2=B*B
    TRD=10.*B
    BK=TP*B
    BK2=BK*BK
    BK4=BK2*BK2
    L=0
    CALL LINSEG(NWIRE,L,X,Y,Z,SI,SALP,CAP,SAB,WFT)
    N=L
    NN=N+1
    WRITE(6,11)
    IF(N-181)41,41,500
41 CONTINUE
    J1=1

```

```

J2=N
LND=.FALSE.
NO2=N/2
NO2=N
NP=NN
WRITE(6,8)N,NO2
99 DO 300 I=1,NO2
IF(LND) GOTO 45
S=SI(I)
IF(I-1) 101,42,101
101 II=I-1
CR(I,I)=CR(II,II)
CI(I,I)=CI(II,II)
SII=S-SI(II)
SII=ABS(SII)
IF(SII.LT..00001)GO TO 45
42 ST=S/2.
R=DSQRT(B2+ST*ST)
SINB=ST/R
COSB=B/R
TANB=(1.+SINB+COSB)/(1.-SINB+COSB)
RK=TP*R
RK2=RK*RK
ER=-PI/3.*S*(2.-BK2/3.+BK4/60.+RK2*(BK2-8.)/120.)
EI=SINB*(1./RK2+.5+RK2*(1.-7./60.*BK2)/8.-RK2*RK2/240.)
2-(1.-BK2/4.+7./480.*BK4)*DLOG(TANB)
CR(I,I)=ZZ*ER
CI(I,I)=ZZ*EI
45 XI=X(I)
YI=Y(I)
ZI=Z(I)
CABI=CAB(I)
SABI=SAB(I)
FI=I
DO 280 J=J1,J2
FJ=J
IF(I-J) 103,280,103
103 S=SI(J)
ST=S/2.
SS=S*S
CABJ=CAB(J)
SABJ=SAB(J)
XIJ=XI-X(J)
YIJ=YI-Y(J)
ZIJ=ZI-Z(J)
ZP=XIJ*CABJ+YIJ*SABJ-ZIJ*SALP(J)
RS=XIJ*XIJ+YIJ*YIJ+ZIJ*ZIJ
RCH=DSQRT(RS)
RDSN=RCH/B
IF(RCH.LT.TRD)WRITE(6,7)FI,FJ,RCH,RDSN
RH2=RS-ZP*ZP
RB=RH2+B2
RBK=FPP*RB
KK=8
EZR=0.
EZI=0.
ERR=0.
ERI=0.
W=-1.

```

```

T=-ST
SSS=25.*SS
IF(RS.GT.SSS) KK=4
KKK=KK+1
D(5)=(7*KK)/4
FKK=KK
DEL=S/FKK
DO 50 K=1,KKK
R2=RB+(ZP-T)*(ZP-T)
R=DSQRT(R2)
RK=TP*R
COSB=DCOS(RK)/R/R2
SINB=DSIN(RK)/R/R2
RKCS=RK*COSB-SINB
CRKS=COSB+RK*SINB
TRBR=2.-3.*RB/R2
IF(D(K)-7.) 104,104,49
104 ERR=ERR+W*CRY*RKCS
ERI=ERI-W*CRY*CRKS
W=1.
49 EZR=EZR+D(K)*(TRBR*RKCS-RBK*SINB)
EZI=EZI-D(K)*(RBK*COSB+TRBR*CRKS)
50 T=T+DEL
EZR=EZR*CCST*DEL
EZI=EZI*CCST*DEL
Q1=CABI*CABJ+SABI*SABJ+SALP(I)*SALP(J)
Q2=XIJ*CABI+YIJ*SABI-ZIJ*SALP(I)
IF(LND) GOTO 270
CR(I,J)=(EZR-ZP*ERR)*Q1+ERR*Q2
CI(I,J)=(EZI-ZP*ERI)*Q1+ERI*Q2
GO TO 280
270 CSR=(EZR-ZP*ERR)*Q1+ERR*Q2
CSI=(EZI-ZP*ERI)*Q1+ERI*Q2
CR(I,NP)=CR(I,NP)-CSR*CURR(J)+CSI*CURI(J)
CI(I,NP)=CI(I,NP)-CSI*CURI(J)-CSR*CURR(J)
280 CONTINUE
C WRITE(6,1)FI,CR(I,NP),CI(I,NP)
300 CONTINUE
WRITE(6,11)
IF(LND) GOTO 630
DO 118 L=1,NO2
LLL=L-1
DO 118 I=L,NO2
II=I+1
IF(LLL) 105,106,105
105 CP1=CR(I,K)*CR(K,L)-CI(I,K)*CI(K,L)
CR(I,L)=CR(I,L)-CP1
CP1=CI(I,K)*CR(K,L)+CR(I,K)*CI(K,L)
CI(I,L)=CI(I,L)-CP1
CP1=CR(L,K)*CR(K,II)-CI(L,K)*CI(K,II)
CR(L,II)=CR(L,II)-CP1
CP1=CI(L,K)*CR(K,II)+CR(L,K)*CI(K,II)
117 CI(L,II)=CI(L,II)-CP1
106 CRP=CR(L,II)
CLL=CR(L,L)*CR(L,L)+CI(L,L)*CI(L,L)
CR(L,II)=CRP*CR(L,L)/CLL+CI(L,II)*CI(L,L)/CLL
118 CI(L,II)=CI(L,II)*CR(L,L)/CLL-CRP*CI(L,L)/CLL
WRITE(6,2)WFT,WFT

```

```

DO 450 MKI=1,IKM
JJ=N+NEL
DO 620 J=NN,JJ
READ(5,7)X(J),Y(J),Z(J),SI(J),ALP,BET
X(J)=X(J)*WFT
Y(J)=Y(J)*WFT
Z(J)=Z(J)*WFT
SI(J)=SI(J)*WFT
READ(5,7)CURR(J),CURI(J)
WRITE(6,2)CURR(J),CURI(J)
CALP=DCOS(TAD*ALP)
SALP(J)=DSIN(TAD*ALP)
CBET=DCOS(TAD*BET)
SBET=DSIN(TAD*BET)
CAB(J)=CALP*CBET
SAB(J)=CALP*SBET
620 WRITE(6,2) X(J),Y(J),Z(J),SI(J),ALP,BET
J1=NN
J2=JJ
DO 621 I=1,N
CR(I,NP)=0.
621 CI(I,NP)=0.
LND=.TRUE.
GOTO 99
630 CONTINUE
WRITE(6,2)WFT,WFT,WFT
DO 120 L=1,NO2
LLL=L-1
IF(LLL) 205,206,205
205 DO 119 K=1,LLL
CR(L,NP)=CR(L,NP)-CR(L,K)*CR(K,NP)+CI(L,K)*CI(K,NP)
119 CI(L,NP)=CI(L,NP)-CI(L,K)*CR(K,NP)-CR(L,K)*CI(K,NP)
206 CRP=CR(L,NP)
CLL=CR(L,L)*CR(L,L)+CI(L,L)*CI(L,L)
CR(L,NP)=(CRP*CR(L,L)+CI(L,NP)*CI(L,L))/CLL
120 CI(L,NP)=(CI(L,NP)*CR(L,L)-CRP*CI(L,L))/CLL
DO 122 L=2,NO2
I=NP-L
II=I+1
DO 122 K=II,NO2
CR(I,NP)=CR(I,NP)-CR(I,K)*CR(K,NP)+CI(I,K)*CI(K,NP)
122 CI(I,NP)=CI(I,NP)-CI(I,K)*CR(K,NP)-CR(I,K)*CI(K,NP)
123 DO 160 I=1,NO2
CURR(I)=CR(I,NP)
CURI(I)=CI(I,NP)
CMAG=DSQRT(CURR(I)*CURR(I)+CURI(I)*CURI(I))
FI=I
PH=TD*DATAN2(CURI(I),CURR(I))
160 WRITE(6,2) FI,CURR(I),CURI(I),CMAG,PH
162 WRITE(6,11)
DO 443 IDEG=1,IDM
IF(IDEG-1) 410,410,411
410 THET=90.
STHET=SIN(TA*THET)
CTHET=COS(TA*THET)
LPH=360./DPHI
PHI=0.
CPHI=COS(TA*PHI)
SPHI=SIN(TA*PHI)

```

```

GO TO 412
411 FDEG=IDEG-2
PHI=FDEG*90.
SPHI=SIN(TA*PHI)
CPHI=COS(TA*PHI)
THET=0.
STHET=SIN(TA*THET)
CTHET=COS(TA*THET)
LPH=360./DTHET
412 CONTINUE
DO 443 L=1,LPH
STCP=STHET*CPHI
STSP=STHET*SPHI
CTCP=CTHET*CPHI
CTSP=CTHET*SPHI
ETR=0.
ETI=0.
EPR=0.
EPI=0.
DO 400 I=1,JJ
S=SI(I)*ZZZ
ARG=X(I)*STCP+Y(I)*STSP+Z(I)*CTHET
COSA=COS(TPS*ARG)
SINA=SIN(TPS*ARG)
CABI=CAB(I)
SABI=SAB(I)
P=CPHI*SABI-SPHI*CABI
Q=CTCP*CABI+CTSP*SABI+STHET*SALP(I)
FR=(SINA*CURR(I)+COSA*CURI(I))*S
FI=(SINA*CURI(I)-COSA*CURR(I))*S
ETR=ETR+FR*Q
ETI=ETI+FI*Q
EPR=EPR+FR*P
400 EPI=EPI+FI*P
TB=ETR*ETR+ETI*ETI
TC=EPR*EPR-EPI*EPI
ETM=SQRT(TB)
EPM=SQRT(TC)
GAIN=20.*ALOG10(ETM)
GAINP=20.*ALOG10(EPM)
WRITE(6,2)THET,PHI,TB,TC,ETM,EPM,GAIN,GAINP
IF(IDEG-1) 441,441,442
441 PHI=PHI+DPHI
SPHI=SIN(TA*PHI)
CPHI=COS(TA*PHI)
GO TO 443
442 THET=THET+DTHET
STHET=SIN(TA*THET)
CTHET=COS(TA*THET)
443 CONTINUE
450 WRITE(6,11)
500 CONTINUE
STOP
END
SUBROUTINE LINSEG (NW,M,X,Y,Z,SI,SAL,CCAB,CSAB,WFT)
DOUBLE PRECISION X,Y,Z,SI,SAL,CCAB,CSAB
12 FORMAT(1H ,8F15.8)
13 FORMAT(6F10.5,15)
DIMENSION X(1),Y(1),Z(1),SI(1),SAL(1),CCAB(1),CSAB(1)

```



```

WRITE(6,13)WFT
DO16 I=1,NW
READ(6,13)X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2,NINC
WRITE(6,13)X1,Y1,Z1,X2,Y2,Z2,I
X1=X1*WFT
Y1=Y1*WFT
Z1=Z1*WFT
X2=X2*WFT
Y2=Y2*WFT
Z2=Z2*WFT
S2=(X2-X1)*(X2-X1)+(Y2-Y1)*(Y2-Y1)
ST2=S2+(Z2-Z1)*(Z2-Z1)
S=SQRT(S2)
ST=SQRT(ST2)
FNI=NINC
DX=.5*(X2-X1)/FNI
DY=.5*(Y2-Y1)/FNI
DZ=.5*(Z2-Z1)/FNI
SL=ST/FNI
CBET=1.
SBET=0.
IF(S.EQ.0.) GO TO 14
CBET=(X2-X1)/S
SBET=(Y2-Y1)/S
14 SLP=(Z1-Z2)/ST
CLP=S/ST
CABL=CLP*CBET
SABL=CLP*SBET
DO15 J=1,NINC
M=M+1
SI(M)=SL
SAL(M)=SLP
CCAB(M)=CABL
CSAB(M)=SABL
FJ=2*J-1
X(M)=X1+FJ*DX
Y(M)=Y1+FJ*DY
Z(M)=Z1+FJ*DZ
FM=M
15 WRITE(6,12) FM,X(M),Y(M),Z(M),SI(M),SAL(M),CCAB(M),CSAB(M)
16 CONTINUE
RETURN
END

```

Подпрограмма LINSEG в конце основной программы используется для вычисления координат центра и ориентации сегментов. Для ее работы требуются следующие данные:

- X_1 и X_2 — x -координаты концов прямолинейного отрезка в модели,
- Y_1 и Y_2 — y -координаты концов прямолинейного отрезка в модели,
- Z_1 и Z_2 — z -координаты концов прямолинейного отрезка в модели,
- NINC — число сегментов на прямолинейном отрезке.

Литература

1. Pocklington H. C., Camb. Phil. Soc. Proc., 9, 324 (1897).
- ✓ 2. Richmond J. H., Proc. IEEE, 53, 796 (1965) [см. перевод: ТИИЭР, № 8, 920 (1965)].
3. Kyle R. H., Mutual coupling between log-periodic dipole antennas, Ph. D. dissertation, Syracuse University, Syracuse, New York, 1968.
4. Hallen E., Nova Acta Regiae Soc. Sci. Upsaliensis, Ser. 4, 11, 1 (1938).
- ✓ 5. Mei K. K., IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-13, 374 (1965).
- ✓ 6. King R. W. P., Proc. IEEE, 55, 2 (1967) [см. перевод: ТИИЭР, № 1, 6 (1967)].
- ✓ 7. King R. W. P., Theory of Linear Antennas, Harvard Univ. Press, Cambridge, Mass., 1956.
8. Harrington R. F., Field Computation by Moment Methods, Macmillan, New York, 1968.
9. Rumsey V. H., Phys. Rev., ser. 2, 94, 1483 (1954).
10. Mack R. B., A study of circular arrays, Techn. Repts. No 381-6, Cruft Lab., Harvard University, Cambridge, Mass., 1963.
11. Neureuther A. R. et al., A comparison of numerical methods for thin wire antennas, Digest of the 1968 URSI Fall Meeting, 1968.
12. Turpin R. H., Basis transformation, least square, and characteristic mode techniques for thin-wire scattering analysis, Ph. D. dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1969.
13. Ott R. H., Kouyoumjian R. G., Peters L., Jr., Radio Science, 2, 1347 (1967).
- ✓ 14. Richmond J. H., Computer analysis of three-dimensional wire antennas, Techn. Rept. No. 2708-4, Electro-Science Lab., Ohio State University, Columbus, Ohio, 1969.
15. Richmond J. H., Geary N. H., IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-18, 414 (1970).
16. Jordan E. C., Electromagnetic Waves and Radiating Systems, Prentice-Hall, New York, 1950.
17. Richards G. A., Reaction formulation and numerical results for multiturn loop antennas and arrays, Ph. D. dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1970.
18. Otto D. V., Richmond J. H., IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-17, 98 (1969).
19. Schelkunoff S. A., Frijs H. T., Antennas, Theory and Practice, Wiley, New York, 1952 [см. перевод: С. Шелкунов, Г. Фриис, Антенны, изд. «Советское радио», М., (1955)].
20. Garbacz R. J., Proc. IEEE, 53, 856 (1965) (см. перевод: ТИИЭР, № 8, 985 (1965)).
21. Garbacz R. J., A generalized expansion for radiated and scattered fields, Ph. D. dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1968.

22. Garbacz R. J., Turpin R. N., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-19**, 348 (1971).
23. Harrington R. F., Mautz J. R., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-19**, 622 (1971).
24. Harrington R. F., Mautz J. R., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-19**, 629 (1971).
25. Wexler A., IEEE Trans. on Microwave Theory and Techniques, **MTT-17**, 416 (1969).
26. Uda S., J. IEEE (Japan), **452**, 273 (1926); **472**, 1209 (1926).
27. Yagi H., Proc. IRE, **16**, 715 (1928).
28. Thiele G. A., IEEE Trans. on Ant and Prop., **AP-17**, 24 (1969).
29. Thiele G. A., Impedance analysis of Yagi-Uda type antennas, Digest of the 1969 URSI Fall Meeting, 1969.
30. Richmond J. H., Scattering by imperfectly conducting wires, Techn. Rept. 2169-1, Electro-Science Lab., The Ohio State University, 1969.
31. Richmond J. H., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-14**, 782 (1966).
32. Richmond J. H., Scattering by wire loops and square plates in the resonance region, Techn. Rept. 2097-1, Electro-Science Lab., The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1966.
33. Thiele G. A., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-14**, 648 (1965).
34. Fishenden R. M., Wiblin E. R., Proc. IEEE (London), pt. 3, **96**, 5 (1949).
35. Green H. E., Elec. Engrg. Trans. Inst. Engrs. (Australia), **1** (1966).
36. Shreve D. H., Numerical and experimental investigation of impedance and matching techniques associated with multiturn loop antennas, M. Sc. thesis, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1970.
37. Shreve D. H., Thiele G. A., An electrically small antenna, Digest of the 1970 IEEE G-AP International Symposium.
38. Agrawal P. K., Analysis of coplanar TEM line antenna using reaction technique, M. Sc. thesis. The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1969.
39. Thiele G. A., Travieso-Diaz M., Jones H. S., Radiation of a monopole antenna on the base of a conical structure, Proc. of Conf. on Environmental Effects on Antenna Performance vol. 1, edited by J. R. Wait, 1969.
40. Tsai L. L., Analysis and measurement of a dipole antenna mounted symmetrically on a conducting sphere or cylinder, Ph. D. dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1970.
41. Tsai L. L., Near and far fields of a magnetic frill current, Digest of the 1970 URSI Spring Meeting, 1970.
42. Harrington R. F., Time-harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, New York, 1961.
43. Otto D. V., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-17**, 101 (1969).
44. Poggio A. J., Mayes P. E., Numerical solution of integral equations of a dipole and slot antennas including active and passive loading, Techn. Rept. AFAL-TR-69-180, Antenna Lab., University of Illinois, Urbana, Illinois, 1969.
45. Agrawal P. K., Richards G. A., Thiele G. A., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-20**, 561 (1972).
46. Albersten N. C. et al., Methods of evaluating the influence of spacecraft structures on antenna radiation patterns, Pt. I: A literature survey, Lab. of Electromagnetic Theory, The Technical University of Denmark, 1970.
47. Garbacz R. J., Turpin R. H., A generalized expansion for radiated and scattered fields with application to thin wire scatterers, 1969 G-AP/URSI International Symposium Record, 1969.
48. Garbacz R. J., Wickliff R., Introduction to characteristic modes for chaff applications, Techn. Rept. 2584-6, Electro-Science Lab., Ohio State University, Columbus, Ohio, 1970.
49. Travieso-Diaz M. F., Wire-grid reaction solution of electromagnetic scattering and radiation problems, Ph. D. dissertation, The Ohio State University, Columbus, Ohio, 1970.

Численное решение задач рассеяния электромагнитных волн

П. С. Уотерман¹⁾

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы в литературе начали появляться работы, посвященные численному решению на ЭВМ задач рассеяния электромагнитных волн. Большинство предложенных методов основывается на численном решении векторного интегрального уравнения, содержащего интеграл по поверхности. В работе [1] рассмотрен иной теоретический подход, также приводящий к численным результатам. Цель настоящей работы — описать программу для ЭВМ, позволяющую практически использовать метод, предложенный в работе [1]. В § 2 приведена теория, существенно модифицированная по сравнению с первоначальной. В § 3 рассматриваются логические схемы, лежащие в основе различных подпрограмм счета на ЭВМ. В приложении I дана полная программа вычислений на ЭВМ, написанная на ФОРТ-РАНЕ.

Следует отметить, что некоторые из описанных ниже подпрограмм представляют интерес не только для настоящей задачи, но и для других приложений. Здесь нужно упомянуть прежде всего подпрограммы вычисления сферических функций Бесселя и Ганкеля с помощью сочетания метода разложения в степенной ряд с методом рекуррентных соотношений, причем программа включает проверку точности и другие способы расчета в тех случаях, когда трудно обеспечить высокую точность расчета. Подпрограмма вычисления с помощью рекуррентных соотношений присоединенных полиномов Лежандра и их производных также представляет самостоятельный интерес. Наконец, некоторые операции над матрицами (например, ортогонализация матриц) могут быть использованы, возможно с некоторыми изменениями, в других областях.

§ 2. ТЕОРИЯ

1. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ В МАТРИЧНОМ ВИДЕ

Рассмотрим падение электромагнитной волны $\mathbf{E}^i(\mathbf{r})$, $\mathbf{H}^i(\mathbf{r})$ на замкнутую идеальную проводящую поверхность S (фиг. 3.1),

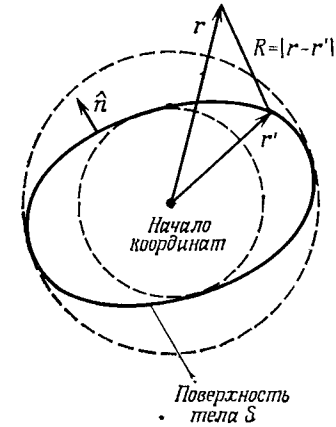
¹⁾ P. C. Waterman, MITRE Corporation, Bedford, Massachusetts 01730.

расположенную в свободном пространстве. В дальнейшем будет предполагаться, что поверхность S достаточно регулярна, чтобы выполнялась теорема Грина, хотя она не обязательно должна иметь непрерывную и однозначную нормаль \hat{n} в каждой своей точке. Мы ограничимся случаем гармонической зависимости от времени с угловой частотой ω ; множитель $\exp(i\omega t)$ во всех величинах мы будем опускать. Поведение поля описывается уравнением Гельмгольца для электрического поля

$$\text{rot rot } \mathbf{E} - k^2 \mathbf{E} = 0 \quad (3.1)$$

и таким же уравнением для магнитного поля \mathbf{H} . Здесь $k = \omega/c = 2\pi/\lambda$ — постоянная распространения в свободном пространстве.

Так как проводимость поверхности S считается бесконечной, тангенциальная составляющая электрического поля на ней должна обращаться в нуль. На поверхности наводятся токи, электрическое поле которых в точности компенсирует тангенциальную составляющую поля \mathbf{E}^i в каждой точке поверхности S . В работе [2] дано представление полей в этой задаче через поверхностные токи. Полученные в этой



Фиг. 3.1. Рассеивающая область, ограниченная замкнутой поверхностью S .

работе формулы с некоторыми незначительными изменениями можно записать в виде

$$\mathbf{E}(\mathbf{r}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{r}) + \int ds' \text{rot rot } \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') g_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (3.2a)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{r}) = \mathbf{H}^i(\mathbf{r}) + ik \int ds' \text{rot } \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') g_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|), \quad (3.2b)$$

где \mathbf{E} и \mathbf{H} — полные поля, $g_0(kR) = (4\pi R)^{-1} \exp(-ikR)$ — (скалярная) функция Грина свободного пространства для расходящихся волн и операторы rot действуют на нештрихованные переменные (т. е. не на переменные интегрирования). Как и следовало ожидать из физических соображений, интегралы, входящие в (3.2), описывают те части \mathbf{E} и \mathbf{H} , которые обусловлены распределением на поверхности электрических диполей. Величина $\mathbf{J}(\mathbf{r})$, которую мы идентифицируем с наведенным на поверхности током, связана со скачком магнитного поля на поверхности S , т. е.

$$\mathbf{J}_s = \left(-\frac{i}{k}\right) \hat{n} \times [\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_-] \text{ на } S. \quad (3.2b)$$

При выводе (3.2) использовались граничные условия $\hat{n} \times \mathbf{E}_+ = -\hat{n} \times \mathbf{E}_- = 0$ на проводящей поверхности S .

Из уравнений (3.2) можно непосредственно получить скачки полей при переходе через поверхность S :

$$\mathbf{E}_+ - \mathbf{E}_- = \text{Div } \mathbf{J}_s \cdot \hat{n} = -i\omega \rho_s \hat{n}, \quad (3.3a)$$

$$\mathbf{H}_+ - \mathbf{H}_- = -ik \hat{n} \times \mathbf{J}_s. \quad (3.3b)$$

Входящая в первое уравнение поверхностная дивергенция тока $\text{Div } \mathbf{J}_s$ может быть определена как поток вектора тока с бесконечно малого элемента поверхности, отнесенный к единице площади (в единицу времени). Второе равенство, содержащее поверхностную плотность заряда ρ_s , следует из уравнения непрерывности $\text{div } \mathbf{J}_s = -\partial \rho_s / \partial t$.

«Обобщенное» граничное условие, требующее обращения в нуль полного электромагнитного поля внутри области (в частности, $\mathbf{E}_- = 0$ на S), гарантирует, как это видно из (3.3a), выполнение обычного внешнего граничного условия $\hat{n} \times \mathbf{E}_+ = 0$. Используя это условие в уравнении (3.2a), получаем «обобщенное» интегральное уравнение

$$\int ds' \text{rot rot } \mathbf{J}_s(\mathbf{r}') g_0(k|\mathbf{r} - \mathbf{r}'|) = -\mathbf{E}^i(\mathbf{r}), \quad (3.4)$$

справедливое для всех точек \mathbf{r} внутри малой сферы, показанной штриховой линией на фиг. 3.1. Беря ротор от обеих частей этого уравнения, мы найдем, что полное магнитное поле \mathbf{H} тоже обращается в нуль в этой области, если выполняется уравнение (3.4). Это уравнение эквивалентно трем скалярным уравнениям для двух неизвестных тангенциальных составляющих \mathbf{J}_s ; однако только два из этих скалярных уравнений являются независимыми, поскольку дивергенция обеих частей равенства (3.4) должна обращаться в нуль.

Уравнению (3.4) можно удовлетворить, разлагая обе его части по регулярным векторным собственным функциям $\mathbf{M}_{\sigma mn}$, $\mathbf{N}_{\sigma mn}$ векторного уравнения Гельмгольца (3.1) [4]. Для удобства рассмотрения интеграла положим $\mathbf{J}_s g_0 = \mathbf{J}_s \cdot \mathbf{1} g_0$. Разложение тензорной функции Грина $\mathbf{1} g_0$ для свободного пространства приведено в книге Морса и Фешбаха [4]. Вследствие ортогональности на любой сферической поверхности с центром в начале координат (фиг. 3.1) соответствующие коэффициенты в обеих частях уравнения (3.4) можно приравнять, в результате чего для падающей плоской волны $\mathbf{E}^i(\mathbf{r}) = \hat{e}_0 e^{-ik \cdot \mathbf{r}}$ получим

$$\int ds \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}_{\sigma mn}^i(\mathbf{r}) = \left(-\frac{4\pi i}{k^3}\right) (-i)^n [n(n+1)]^{1/2} \hat{e}_0 \cdot \mathbf{C}_{mn}^\sigma(\hat{k}), \quad (3.5a)$$

$$\int ds \mathbf{J}_s(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{N}_{\sigma mn}^i(\mathbf{r}) = \left(\frac{4\pi i}{k^3}\right) (-i)^n [n(n+1)]^{1/2} \hat{e}_0 \cdot (-i) \mathbf{B}_{mn}^\sigma(\hat{k}). \quad (3.5b)$$

Здесь \mathbf{M}^4 и \mathbf{N}^4 — расходящиеся волновые функции, а зависимость от направления падения \hat{k} содержится в векторных сферических гармониках \mathbf{C}_{mn}^σ , \mathbf{B}_{mn}^σ [4]. Полученные уравнения справедливы для любой тройки чисел (σ, m, n) , где $\sigma = e, o$ (четн., нечетн.), $m = 0, 1, \dots, n$, $n = 1, 2, \dots$. При этом полные поля \mathbf{E} , \mathbf{H} тождественно равны нулю внутри наибольшей сферы, которую можно вписать в область S вокруг принятого начала координат. Как было показано в работе [1], вследствие аналитичности функций отсюда следует тождественное обращение в нуль полей \mathbf{E} и \mathbf{H} во *всей* области внутри поверхности S .

Представим теперь поверхностный ток в виде разложения по полной системе тангенциальных векторных функций $\hat{n} \times \mathbf{M}$ и $\hat{n} \times \mathbf{N}$:

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{r}) = \frac{4i}{k} \sum_{\sigma m' n'} [a_{\sigma m' n'} \hat{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{M}_{\sigma m' n'}(\mathbf{r}) + b_{\sigma m' n'} \hat{n}(\mathbf{r}) \times \mathbf{N}_{\sigma m' n'}(\mathbf{r})], \quad \mathbf{r} \text{ на } S, \quad (3.6)$$

где коэффициенты разложения подлежат определению. Дальнейшие выкладки существенно упрощаются, если ввести матричные обозначения. Во-первых, тройка индексов, появляющаяся в уравнениях (3.5) и (3.6), объединяется в один индекс ν , пробегаяющий следующие значения $(\sigma mn) = e01, o01, e11, o11, e02, \dots$. Тогда векторные сферические гармоники могут быть представлены в виде матриц-столбцов \mathbf{C} , \mathbf{B} , ν -е элементы которых равны соответственно $(-i)^n [n(n+1)]^{1/2} \mathbf{C}_{mn}^\sigma(\hat{k})$ и $(-i)^n [n(n+1)]^{1/2} \mathbf{B}_{mn}^\sigma(\hat{k})$. Неизвестные коэффициенты разложения в уравнении (3.6) записываются просто в виде столбцов \mathbf{a} и \mathbf{b} .

Подставляя разложение (3.6) в уравнение (3.5), получаем в этих обозначениях два связанных матричных уравнения

$$\begin{bmatrix} [I] & [J] \\ [K] & [L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \hat{e}_0 \cdot \mathbf{C} \\ i\hat{e}_0 \cdot \mathbf{B} \end{bmatrix} \quad (3.7)$$

для определения \mathbf{a} и \mathbf{b} . Раскрывая соответствующие смешанные произведения, находим элементы матрицы $[I]$:

$$I_{\nu\nu'} = (k^2/\pi) \int ds \hat{n}(\mathbf{r}) \cdot \mathbf{M}_{\sigma mn}^4(\mathbf{r}) \times \mathbf{M}_{\sigma' m' n'}^4(\mathbf{r}). \quad (3.8a)$$

Четыре матрицы $[I]$, $[J]$, $[K]$, $[L]$ отличаются друг от друга только векторными произведениями, входящими в подынтегральное выражение (3.8a) и имеющими соответственно вид $\mathbf{M}_\nu^4 \times \mathbf{M}_{\nu'}$, $\mathbf{M}_\nu^4 \times \mathbf{N}_{\nu'}$, $\mathbf{N}_\nu^4 \times \mathbf{M}_{\nu'}$ и $\mathbf{N}_\nu^4 \times \mathbf{N}_{\nu'}$. Поскольку $\mathbf{M} = \text{Re } \mathbf{M}^4$ и $\mathbf{N} = \text{Re } \mathbf{N}^4$, ясно, что выражения $\text{Re}[I]$ и $\text{Re}[J]$ являются кососимметричными, а $\text{Re}[K]$ и $\text{Re}[L]$ — симметричными. В общем случае поверхностные интегралы типа (3.8a) находятся численно,

что наиболее удобно производить в сферических координатах θ, φ , выражая радиальную координату r параметрическим уравнением $r = r(\theta, \varphi)$ поверхности. Из второй формулы Грина

$$\int ds \hat{n} \cdot [\mathbf{A} \times \text{rot } \mathbf{B} - \mathbf{B} \times \text{rot } \mathbf{A}] = \int dv [\mathbf{B} \cdot \text{rot rot } \mathbf{A} - \mathbf{A} \cdot \text{rot rot } \mathbf{B}]$$

вытекает следующая связь между матрицами:

$$\begin{aligned} [K] &= -[J] - i[D_+]^{-1}, \\ [L] &= -[I], \end{aligned} \quad (3.8б)$$

где *диагональная* матрица $[D_\pm]$ (а также используемая ниже матрица $[D_-]$) имеет следующие элементы:

$$[D_\pm]_{\nu\nu} \equiv \pm 1 \frac{\epsilon_m (2n+1)(n-m)!}{4n(n+1)(n+m)!}. \quad (3.8в)$$

Здесь множитель Неймана

$$\epsilon_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0, \\ 2 & \text{при } m \neq 0. \end{cases}$$

Нужно также уметь рассчитывать рассеянные поля \mathbf{E}^s , \mathbf{H}^s , представляемые поверхностными интегралами в (3.2). В частности, для электрического поля мы имеем

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) = 4 \sum_{\sigma mn} [f_{\sigma mn} \mathbf{M}_{\sigma mn}^4(\mathbf{r}) + g_{\sigma mn} \mathbf{N}_{\sigma mn}^4(\mathbf{r})], \quad r > r'_{\text{макс на } \sigma}, \quad (3.9)$$

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{r}) \sim \mathbf{F}(\hat{k}_{\text{набл.}}, \hat{k}_{\text{пад}}) \frac{e^{-ikr}}{r}, \quad kr \gg 1.$$

Векторная амплитуда рассеяния \mathbf{F} , зависящая как от направления падения $\hat{k}_{\text{пад}}$, так и от направления наблюдения $\hat{k}_{\text{набл.}}$, получается при использовании асимптотических выражений для уходящих парциальных волн \mathbf{M}^4 , \mathbf{N}^4 в приведенном выше выражении для \mathbf{E}^s :

$$\mathbf{F}(\hat{k}_{\text{набл.}}, \hat{k}_{\text{пад}}) = \frac{4i}{k} [\mathbf{C}'(\hat{k}_{\text{набл.}}) \mathbf{D}_- \mathbf{f} - i\mathbf{B}'(\hat{k}_{\text{набл.}}) \mathbf{D}_- \mathbf{g}], \quad (3.10)$$

где \mathbf{C}' — транспонированная матрица \mathbf{C} (следовательно, \mathbf{C}' — матрица-строка). Коэффициенты разложения \mathbf{f} , \mathbf{g} уходящих парциальных волн выражаются через поверхностные токи \mathbf{a} , \mathbf{b} :

$$\begin{bmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{bmatrix} = -\text{Re} \begin{bmatrix} [I] & [J] \\ [K] & [L] \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \mathbf{a} \\ \mathbf{b} \end{bmatrix}. \quad (3.11)$$

Эти формулы получаются применением разложения диады Грина для свободного пространства, справедливого вне большой сферы на фиг. 3.1.

Сечение рассеяния $\sigma^{\text{расс}}$ определяется выражением [5]

$$\sigma^{\text{расс}} = \left(\frac{16\pi}{k^2} \right) (\mathbf{f}'^* D_+ \mathbf{f} + \mathbf{g}'^* D_+ \mathbf{g}), \quad (3.12a)$$

где звездочкой обозначены комплексно сопряженные величины. Для проверки точности можно также вычислить полное сечение рассеяния

$$\sigma^{\text{полн}} = - \left(\frac{4\pi}{k} \right) \text{Im} [\hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \mathbf{F}(\hat{\mathbf{k}}_{\text{пад}}, \hat{\mathbf{k}}_{\text{набл}})], \quad (3.12б)$$

которое, согласно известной теореме [5], должно быть равно $\sigma^{\text{расс}}$. Радиолокационное сечение, определяемое как произведение 4π на мощность, излученную обратно в телесный угол 1 стерадиан, отнесенное к мощности, падающей на единицу поверхности, равно

$$\sigma^{\text{рад}} = \left(\frac{64\pi}{k^2} \right) \left| \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \mathbf{C}'(-\hat{\mathbf{k}}_{\text{пад}}) D_- \mathbf{f} - i \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \mathbf{B}'(-\hat{\mathbf{k}}_{\text{пад}}) D_- \mathbf{g} \right|^2. \quad (3.12в)$$

Если отраженный сигнал разложить на две ортогональные линейно поляризованные моды, то это выражение описывает мощность, заключенную в той моде, поляризация которой совпадает с поляризацией исходной падающей волны; мощность *поперечно поляризованного* отраженного сигнала получается из (3.12в) заменой $\hat{\mathbf{e}}_0$ на $\hat{\mathbf{e}}'_0 = \hat{\mathbf{k}}_{\text{пад}} \times \hat{\mathbf{e}}_0$.

2. ВЫЧИСЛЕНИЕ МАТРИЦЫ ПЕРЕХОДА

Вместо того чтобы сначала находить токи \mathbf{a} , \mathbf{b} из уравнения (3.7), а потом, подставляя их в (3.11), определять рассеянную волну \mathbf{f} , \mathbf{g} , мы можем формально исключить токи и получить рассеянную волну непосредственно из падающей:

$$\begin{pmatrix} \mathbf{f} \\ \mathbf{g} \end{pmatrix} = - \begin{pmatrix} [D_+]^{-1/2} & 0 \\ 0 & [D_+]^{-1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [T_1] & [T_2] \\ [T_3] & [T_4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D_+]^{1/2} & 0 \\ 0 & [D_+]^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot \mathbf{C} \\ \hat{\mathbf{e}}_0 \cdot i\mathbf{B} \end{pmatrix}. \quad (3.13)$$

Составная матрица

$$[T] \equiv \begin{pmatrix} [T_1] & [T_2] \\ [T_3] & [T_4] \end{pmatrix} \quad (3.14)$$

называется *матрицей перехода*; эта матрица симметричная, т. е. $[T_1]' = [T_1]$, $[T_2]' = [T_3]$, $[T_4]' = [T_4]$, и обладает тем свойством,

что $[T^*]' [T] = \text{Re}(T)$,
или

$$\begin{pmatrix} [T_1]^* & [T_2]^* \\ [T_3]^* & [T_4]^* \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [T_1] & [T_2] \\ [T_3] & [T_4] \end{pmatrix} = \\ = \begin{pmatrix} [T_1^* T_1 + T_2^* T_3] & [T_1^* T_2 + T_2^* T_4] \\ [T_3^* T_1 + T_4^* T_3] & [T_3^* T_2 + T_4^* T_4] \end{pmatrix} = \text{Re} \begin{pmatrix} [T_1] & [T_2] \\ [T_3] & [T_4] \end{pmatrix}. \quad (3.15)$$

Последнее свойство является следствием унитарности *матрицы рассеяния* $[S] = [1] - 2[T]$, что нетрудно проверить, используя условие унитарности $[S^*]' [S] = 1$.

Если ввести матрицу $[Q]$ с помощью соотношения

$$[Q] = \begin{pmatrix} [Q_1] & [Q_2] \\ [Q_3] & [Q_4] \end{pmatrix} \equiv \\ \equiv \begin{pmatrix} [D_+]^{1/2} & 0 \\ 0 & [D_+]^{1/2} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [J'] & [L'] \\ [I'] & [K'] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} [D_+]^{1/2} & 0 \\ 0 & [D_+]^{1/2} \end{pmatrix}. \quad (3.16)$$

то, используя уравнения (3.7) и (3.11), можно показать, что матрица перехода удовлетворяет матричному уравнению

$$[Q] [T] = \text{Re} [Q], \quad (3.17)$$

которое в общем случае должно решаться численными методами.

При численном счете вместо уравнения (3.17), имеющего блочную структуру и содержащего (после усечения матриц) четыре N -мерные матрицы, удобно перейти к уравнению с $2N$ -мерными матрицами. Для этого необходимо ввести $2N$ -мерную матрицу $[\hat{Q}]$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{Q}_{(2m-1)(2n-1)} &= [Q_1]_{mn}, \\ \hat{Q}_{(2m-1)(2n)} &= [Q_2]_{mn}, \\ \hat{Q}_{(2m)(2n-1)} &= [Q_3]_{mn}, \\ \hat{Q}_{(2m)(2n)} &= [Q_4]_{mn}, \end{aligned} \right\} m, n = 1, 2, \dots, N. \quad (3.18)$$

Матрицы $[\hat{T}]$ и $[\hat{S}] = [1] - 2[\hat{T}]$ вводятся аналогичным образом. Тогда уравнение (3.17) принимает вид

$$[\hat{Q}] [\hat{S}] = - [\hat{Q}]^*. \quad (3.19)$$

Благодаря свойствам радиальных функций (функций Ганкеля), входящих в элементы матрицы $[\hat{Q}]$, мнимые части элементов, расположенных выше диагонали, достигают очень больших численных значений. Во избежание потери точности, связанной с ограниченной точностью арифметических операций ЭВМ, удобно с помощью метода исключения Гаусса обратить в нуль все нарастающие элементы. Это сводится просто к умножению

слева матрицы $[Q]$ на действительную «верхнюю» треугольную матрицу (все элементы которой, расположенные ниже главной диагонали, равны нулю). Предположим, что такая процедура осуществлена в уравнении (3.19), которое мы будем использовать в дальнейшем без изменения обозначений.

К уравнению (3.19) добавляются упомянутые выше условия симметрии и унитарности, которые не изменяются при переходе $[S] \rightarrow [\hat{S}]$ и имеют вид

$$[\hat{S}] = [\hat{S}]', \quad (3.20)$$

$$[\hat{S}]' [\hat{S}] = [1]. \quad (3.21)$$

Существуют два противоположных подхода к решению системы уравнений (3.19) — (3.21). Первый состоит в обрезании матричного уравнения (3.19), численном его решении на ЭВМ и подстановке полученного решения в уравнения (3.20) и (3.21), которые при таком подходе служат для проверки согласованности решения. При втором подходе пытаются решить все три уравнения совместно с самого начала, т. е. искать с самого начала решение уравнения (3.19), удовлетворяющее условиям (3.20) и (3.21). Первый подход использовался в ранних работах в применении к телам, обладающим осевой симметрией, и оказался вполне подходящим для определенного набора форм и размеров. Второй подход используется в настоящей работе с целью расширить набор возможных форм тел, так как условия (3.20), (3.21) фактически дают три четверти информации о решении [можно показать, что если $[\hat{S}]$ удовлетворяет условиям (3.20), (3.21), то из $8N^2$ действительных параметров, входящих в $2N$ -мерную матрицу $[\hat{S}]$, только $N(2N+1)$ являются независимыми].

Заметим, что если матрица $[S]$ может быть представлена в виде

$$[\hat{S}] = [U]' [U], \quad (3.22)$$

где $[U]$ — унитарная матрица, то $[\hat{S}]$ удовлетворяет обоим условиям (3.20), (3.21). Отсюда следует, что вместо обращения матрицы $[Q]$ непосредственно в уравнении (3.19) удобнее сделать ее сначала унитарной. Рассмотрим треугольную матрицу $[M]$, все элементы которой ниже главной диагонали равны нулю. После умножения ее на матрицу $[Q]$ последняя превращается в унитарную $[\hat{Q}_{\text{унит}}]$, т. е.

$$[M][\hat{Q}] = [\hat{Q}_{\text{унит}}]. \quad (3.23)$$

Умножая уравнение (3.19) слева на $[M]$, получаем

$$[\hat{Q}_{\text{унит}}][\hat{S}] = -[M][\hat{Q}]^* = -[M][M]^{*-1}[\hat{Q}_{\text{унит}}]^*.$$

Разрешая последнее уравнение относительно $[\hat{S}]$, имеем

$$[\hat{S}] = -[\hat{Q}_{\text{унит}}]'^* ([M][M]^{*-1}) [\hat{Q}_{\text{унит}}]^*. \quad (3.24)$$

Если подставить это выражение в условие (3.20), то нетрудно показать, что произведение $[M][M]^{*-1}$ должно представлять собой симметричную матрицу. Однако каждая из входящих в это произведение матриц — треугольная. Следовательно, само произведение есть диагональная матрица. Диагональные элементы произведения нетрудно выписать в явном виде:

$$[M][M]^{*-1} = \begin{bmatrix} M_{11}/M_{11}^* & 0 & \dots \\ 0 & M_{22}/M_{22}^* & \dots \\ 0 & 0 & \dots \\ \vdots & \vdots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \vdots \end{bmatrix}.$$

Далее, если удастся сделать диагональные элементы матрицы $[M]$ действительными, то

$$[M][M]^{*-1} = 1. \quad (3.25)$$

Тогда из (3.24) следует

$$[\hat{S}] = [\hat{Q}_{\text{унит}}]'^* [\hat{Q}_{\text{унит}}]^*, \quad (3.26)$$

т. е. матрица $[\hat{S}]$ представлена в требуемой форме (3.22). Подставляя (3.26) в соотношение $[\hat{S}] = [1] - 2[\hat{T}]$ и используя тождество $[\hat{Q}_{\text{унит}}]'^* [\hat{Q}_{\text{унит}}]^* = 1$, получаем искомое выражение для матрицы перехода

$$[\hat{T}] = [\hat{Q}_{\text{унит}}]'^* \text{Re} [\hat{Q}_{\text{унит}}], \quad (3.27)$$

из которого обращением преобразования (3.18) нетрудно найти составную матрицу $[T]$.

Вернемся к матрице $[M]$. Из соотношения (3.25) следует, что $[M]$ — действительная матрица. Тогда весь процесс нахождения решения можно описать следующей (формальной) теоремой: если задано матричное уравнение (3.19), на решение которого наложены условия (3.20), (3.21), то заданная матрица $[Q]$ не может быть произвольной, а должна быть представимой в виде произведения *действительной* треугольной и унитарной матриц, т. е.

$$[\hat{Q}] = [M]^{-1} [\hat{Q}_{\text{унит}}]. \quad (3.28)$$

Преобразование матрицы $[Q]$ в унитарную матрицу по формуле (3.23) осуществляется с помощью метода Шмидта ортогонализацией $2N$ векторов, задаваемых строками матрицы $[Q]$, начиная с нижней строки и продвигаясь вверх.

3. ПРИМЕНЕНИЕ К ТЕЛАМ РАЗЛИЧНОЙ ФОРМЫ

При использовании полученных уравнений для тел, обладающих осью симметрии, эта ось выбирается в качестве полярной оси сферической системы координат. Без потери общности направление падения волны можно считать лежащим в азимутальной плоскости $\nu = 0$, так что $\mathbf{k}_{\text{пад}} = k_{\text{пад}}(u, 0)$. Для тех элементов матрицы, которые не обращаются в нуль в результате интегрирования по азимуту, можно ввести упрощенные обозначения, полагая

$$\begin{aligned} I_{mnn'} &\equiv I_{omnemn'} = -I_{emnomn'}, \\ J_{mnn'} &\equiv J_{emnemn'} = J_{omnomn'}, \\ K_{mnn'} &= -J_{mnn'} - i\delta_{nn'}D_{mnn} - 1, \\ L_{mnn'} &= I_{mnn'}. \end{aligned} \quad (3.29)$$

Два первых матричных элемента имеют вид

$$\begin{aligned} I_{mnn'} &\equiv m \int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (P_n^m P_{n'}^m) (kr)^2 h_n^{(2)}(kr) j_{n'}(kr), \\ J_{mnn'} &\equiv -\frac{2}{\varepsilon_m} \int_0^\pi d\theta \sin \theta \left[\frac{m^2 P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \theta} + \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_{n'}^m}{\partial \theta} \right] \times \\ &\quad \times kr h_n^{(2)}(kr) \frac{d}{dkr} [kr j_{n'}(kr)] = \\ &= -\frac{2}{\varepsilon_m} n'(n'+1) \int_0^\pi d\theta \sin \theta \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} P_{n'}^m h_n^{(2)}(kr) j_{n'}(kr) \frac{\partial}{\partial \theta} kr. \end{aligned} \quad (3.30)$$

Отметим, что действительные части всех этих матриц симметричны. Вследствие обращения в нуль всех матричных элементов с разными азимутальными индексами ($m \neq m'$) все азимутальные моды $m = 0, 1, 2, \dots$ не связаны друг с другом и могут вычисляться порознь.

Согласно определению (3.16), все не обращающиеся в нуль элементы матрицы $[Q]$ могут быть записаны с сокращенным числом индексов следующим образом:

$$\begin{aligned} [Q_1]_{mnn'} &\equiv [Q_1]_{emnemn'} = [Q_1]_{omnomn'}, \\ [Q_2]_{mnn'} &\equiv [Q_2]_{omnemn'} = -[Q_2]_{emnomn'}, \\ [Q_3]_{mnn'} &\equiv [Q_3]_{emnomn'} = -[Q_3]_{omnemn'}, \\ [Q_4]_{mnn'} &\equiv -[Q_4]_{emnemn'} = -[Q_4]_{omnomn'}. \end{aligned} \quad (3.31)$$

Кроме того, эти матричные элементы связаны между собой соотношениями

$$\begin{aligned} [Q_3]_{mnn'} &= [Q_2]_{mnn'}, \\ [Q_4]_{mnn'} &= -[Q_1]_{mnn'} - i[1]. \end{aligned} \quad (3.32)$$

Наконец, анализ уравнения (3.17) показывает, что отличные от нуля элементы в четырех блоках матрицы $[T]$ связаны между собой такими же соотношениями типа (3.31) [но не (3.32)], так что полное решение может быть получено решением уравнения (3.17) с уменьшенным числом индексов.

Дополнительное существенное упрощение предыдущих уравнений имеет место для тел, обладающих зеркальной симметрией относительно плоскости, перпендикулярной оси симметрии (например, цилиндр конечной высоты). В этом случае функция $r(\theta)$, описывающая форму тела, четна относительно угла $\theta = \pi/2$, т. е.

$$r(\theta) = r(\pi - \theta). \quad (3.33)$$

Анализ подынтегральных выражений, определяющих матричные элементы в уравнении (3.3), показывает, что многие из них обращаются в нуль, а именно

$$\begin{aligned} I_{mnn'} &= 0, \text{ если } n+n' \text{ четно;} \\ J_{mnn'} &= 0, \text{ если } n+n' \text{ нечетно.} \end{aligned} \quad (3.34)$$

Поэтому эти элементы можно положить равными нулю заранее, не проводя численного интегрирования.

Вытянутые (и сплюснутые) сферонды имеют плоскость зеркальной симметрии, нормальную к их оси симметрии, так что оба рассмотренных здесь упрощения имеют место. Однако в этом случае имеет место еще одно упрощение, которое при численном обращении матриц обеспечивает их хорошую обусловленность.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим матричные элементы, задаваемые уравнением (3.30). Численные значения этих элементов определяются главным образом радиальными функциями в подынтегральных выражениях. Например, для элемента $I_{mnn'}$ имеем

$$I_{mnn'} \sim (kr)^2 h_n^{(2)}(kr) j_{n'}(kr) \equiv (kr)^2 [j_n j_{n'} - i n_n j_{n'}].$$

При заданном значении x функции Бесселя $j_n(x)$ быстро убывают по амплитуде, а функции Неймана $n_n(x)$ возрастают с ростом индекса n , начиная с n порядка x . Таким образом, действительная часть I , которая очевидно симметрична, быстро убывает с ростом как номера строки, так и номера столбца. Поэтому основную роль играет мнимая часть элементов I , которая также

уменьшается по строке, но увеличивается по столбцу, причем таким образом, что диагональные элементы остаются приблизительно постоянными. Большие численные значения элементов, по-видимому, существенно влияют на процедуру обращения усеченной матрицы.

Можно показать, однако, что для вытянутого или сплюснутого сфероида соответствующие элементы матрицы $[I]$ выше и ниже главной диагонали в равной мере убывают. Матрицы $[I]$ и $[J]$ становятся полностью симметричными, и основные элементы лежат на главной диагонали, как только индекс строки или столбца превышает $kr_{\text{макс}}$, где $r_{\text{макс}}$ — радиус описанной сферы.

Основываясь на результатах Ватсона [6], можно показать, что радиальная зависимость мнимой части элементов $I_{mnn'}$ ниже главной диагонали имеет вид

$$x^2 n_{n+2s+1} j_n \doteq x^2 n_n j_{n+2s+1} + \frac{1}{x^{2s}} + \frac{1}{x^{2s-2}} + \dots + 1, \quad (3.35)$$

где символ эквивалентности (\doteq) указывает, что точные значения коэффициентов разложения при членах, содержащих обратные степени x^2 , не указаны, поскольку они неважны для настоящего рассмотрения. Первый член в правой части соотношения (3.35) точно соответствует симметрично расположенному элементу выше главной диагонали. Таким образом, нужно показать, что члены с обратными степенями x^2 не дают вклада в интеграл

$$\begin{aligned} \text{Im} [I_{m(n+2s+1)n}] = \\ = -m \int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{n+2s+1}^m P_n^m) (kr)^2 n_{n+2s+1} (kr) j_n(kr). \end{aligned} \quad (3.36)$$

Для вытянутого (сплюснутого) сфероида с полуосями a и b имеем

$$kr = ka [\cos^2 \theta + (a/b)^2 \sin^2 \theta]^{-1/2}, \quad (3.37)$$

что можно переписать (обозначая kr через x) в виде

$$1/x^2 \doteq P_0 + P_2. \quad (3.38)$$

Произведение двух функций Лежандра может быть само разложено в ряд по полиномам Лежандра, содержащий члены с индексами от разности до суммы индексов первоначальных функций [7]:

$$P_n^m P_{n'}^m \doteq \sum_{\substack{p=n-n' \\ (p+n+n' \text{ четно})}}^{n+n'} P_p, \quad (3.39)$$

где опять точные значения коэффициентов разложения не указаны. Подставляя (3.38) в (3.35) и повторно используя соотношение (3.39), можно переписать (3.35) в следующем виде:

$$x^2 n_{n+2s+1} j_n \doteq x^2 n_n j_{n+2s+1} + \sum_{q=0}^s P_{2q}. \quad (3.40)$$

Если полученное выражение подставить в (3.36) и учесть, что $\text{Re} I$ симметрично, то мы получим

$$\begin{aligned} I_{m(n+2s+1)n} - I_{mn(n+2s+1)} &\doteq m \int_0^\pi d\theta \frac{\partial}{\partial \theta} (P_{n+2s+1}^m P_n^m) \sum_{q=0}^s P_{2q} \doteq \\ &\doteq -m \int_0^\pi d\theta \sin \theta P_{n+2s+1}^m P_n^m \sum_{q=1}^s P_{2q-1} \doteq \\ &\doteq -m \int_0^\pi d\theta \sin \theta \sum_{p=s}^{s+n} P_{2p+1} \sum_{q=1}^s P_{2q-1} \equiv 0. \end{aligned} \quad (3.41)$$

Здесь сначала проведено интегрирование по частям, затем использовано соотношение (3.39) и, наконец, учтено, что под знаком второй суммы P_{2s-1} — полином Лежандра наивысшего порядка, тогда как первая сумма начинается с полинома P_{2s+1} , так что вследствие ортогональности полиномов интегралы обращаются в нуль.

Чтобы провести аналогичные выкладки для $J_{mnn'}$ следует сначала использовать тождество Грина и переписать $J_{mnn'}$ в более симметричном виде

$$\begin{aligned} J_{mnn'} = -\frac{1}{\epsilon_m} \int_0^\pi d\theta \sin \theta B_{mnn'}(\theta) \frac{d}{dx} [x^2 h_n^{(2)}(x) j_{n'}(x)]_{x=kr(\theta)} + \\ + \frac{1}{2\epsilon_m} \int_0^\pi d\theta \sin \theta C_{mnn'}(\theta) [x^3 h_n^{(2)}(x) j_{n'}(x) \partial(1/x^2)/\partial \theta]_{x=kr(\theta)}, \end{aligned} \quad (3.42)$$

справедливом при $n \neq n'$, где

$$B_{mnn'}(\theta) \equiv \frac{m^2 P_n^m P_{n'}^m}{\sin^2 \theta} + \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} \frac{\partial P_{n'}^m}{\partial \theta}, \quad (3.43a)$$

$$C_{mnn'}(\theta) \equiv n'(n'+1) \frac{\partial P_n^m}{\partial \theta} P_{n'}^m + n(n+1) P_n^m \frac{\partial P_{n'}^m}{\partial \theta}. \quad (3.43b)$$

В данном случае удобно представить $1/x^2$ в виде

$$1/x^2 \doteq \text{const} + \sin^2 \theta.$$

Учитывая это соотношение в разложении по обратным степеням

$$x^2 n_{n+2s} j_n \doteq x^2 n_n j_{n+2s} + \frac{1}{x^{2s-1}} + \frac{1}{x^{2s-3}} + \dots + \frac{1}{x},$$

можно привести уравнение (3.42) к виду

$$J_{m(n+2s)n} - J_{mn(n+2s)} \doteq (2s-1)/\epsilon_m \int_0^\pi d\theta \sin\theta B_{m(n+2s)n} \sum_{q=1}^s (\sin\theta)^{2q} + \\ + 1/\epsilon_m \int_0^\pi d\theta \sin^2\theta \cos\theta C_{m(n+2s)n} \sum_{q=0}^{s-1} (\sin\theta)^{2q}, \quad (3.44)$$

где в первом слагаемом константа в сумме опущена ввиду дополнительных соотношений ортогональности

$$\int_0^\pi d\theta \sin\theta B_{mnn'} = 0 \quad \text{при } n \neq n'.$$

Из рекуррентных формул для присоединенных функций Лежандра следует

$$\sin^2\theta B_{m(n+2s)n} \doteq P_{n+2s-1}^m P_{n+1}^m + P_{n+2s-1}^m P_{n-1}^m + P_{n+2s}^m P_n^m + \\ + P_{n+2s+1}^m P_{n-1}^m + P_{n+2s+1}^m P_{n+1}^m, \quad (3.45a)$$

$$\sin\theta \cos\theta C_{m(n+2s)n} \doteq P_{n+2s-1}^m P_{n+1}^m + P_{n+2s-1}^m P_{n-1}^m + \\ + P_{n+2s+1}^m P_{n-1}^m + P_{n+2s+1}^m P_{n+1}^m. \quad (3.45b)$$

Входящие в уравнение (3.44) полиномы $\sin^2\theta$ могут быть разложены по полиномам Лежандра, причем наивысший порядок полинома будет $2(s-1)$. [Отметим, что множитель $\sin^2\theta$ уже был вынесен и учтен в соотношении (3.45a).] Из уравнения (3.39) видно, что вследствие ортогональности только первые члены в правой части соотношений (3.45a) и (3.45b) дадут ненулевые вклады в соответствующие интегралы. Выписывая ненулевые вклады в соответствующие интегралы. Выписывая ненулевые вклады в соответствующие интегралы. Выписывая ненулевые вклады в соответствующие интегралы. Выписывая ненулевые вклады в соответствующие интегралы.

$$J_{m(n+2s)n} - J_{mn(n+2s)} \doteq - \frac{(2s-1)(n+2s+1)(n+2s+m)(n-m+1)}{\epsilon_m(2n+4s+1)(2n+1)} \times \\ \times \int_0^\pi d\theta \sin\theta P_{n+2s-1}^m P_{n+1}^m (\sin\theta)^{2s-2} + \text{такое же выражение} \equiv 0. \quad (3.46)$$

Таким образом, матрицы $[J]$ и $[J]$ симметричны, и поэтому достаточно вычислить элементы, лежащие на главной диагонали и выше нее. Следует ожидать, что матрицы будут хорошо

обусловленными, так что при усечении численные результаты будут быстро сходиться к точным значениям.

С точки зрения рэлеевского разложения по степеням ka , справедливого на низких частотах, следует заметить, что все матрицы могут быть разложены по степеням ka . Например, полагая $[J^{(m)}]_{nn'} = J_{mnn'}$, имеем

$$[J^{(m)}] = [A] + [B](ka) + [C](ka)^2 + \dots \\ \dots = [A] \{1 + [A]^{-1} \{[J^{(m)}] - [A]\}\}, \quad (3.47)$$

где матрица $[A]$ диагональна, матрица $[B]$ «тридиагональна» (все элементы равны нулю, за исключением лежащих на главной диагонали и на двух соседних диагоналях) и т. д. Разложение обратной матрицы по степеням ka может быть получено с помощью биномиальной теоремы

$$[J^{(m)}]^{-1} = [1 - [A]^{-1} \{[J^{(m)}] - [A]\} + \dots] [A]^{-1}. \quad (3.48)$$

4. РЕЗУЛЬТАТЫ ДЛЯ ЦИЛИНДРОВ КОНЕЧНОЙ ДЛИНЫ И СОЧЕТАНИЯ СФЕРЫ С КОНУСОМ

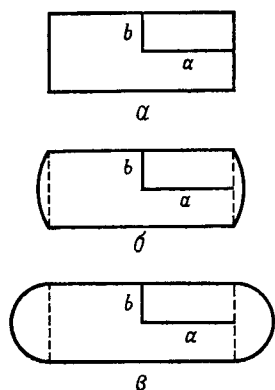
Рассмотрим цилиндры конечной длины, показанные на фиг. 3.2. Размеры правильного кругового цилиндра показаны на фиг. 3.2, а. На фиг. 3.2, б изображен цилиндр с теми же основными размерами, но со сферическими торцами, причем радиус кривизны в два раза превышает радиус цилиндра. Наконец, цилиндр на фиг. 3.2, в имеет сферические торцы с плавным переходом (радиусы сферы и цилиндра одинаковы).

Расчет для цилиндров проводился для шестидесяти значений угла падения волны в интервале $0 \leq u \leq 90^\circ$. При этом использовался метод ортогонализации Шмидта для выражения согласно (3.28) переходной матрицы через матрицу $[Q_{\text{унит}}]$. Вычисленные значения радиолокационных сечений рассеяния для цилиндров с неплавными торцевыми переходами показаны кружками на фиг. 3.3 и 3.4.

Проводились также экспериментальные измерения радиолокационных сечений рассеяния; результаты представлены на фиг. 3.3 и 3.4 сплошными линиями. Модели были приготовлены фирмой МИТРЕ из алюминиевых стержней с допуском в пределах 0,025 мм. Измерения рассеяния СВЧ волн проводились в лаборатории фирмы РКА в Мурстауне, Нью-Джерси, на частоте 9,930 ГГц ($\lambda=3,019$ см) с использованием для калибровки цилиндра с известным радиолокационным сечением рассеяния для бокового падения волны¹⁾.

¹⁾ Д. Маллой и Х. Шпигель, частное сообщение.

Небольшие несоответствия присутствуют в самих результатах измерений (например, различия экспериментальных значений для двух поляризаций при осевом падении волны, $u = 0$, которые теоретически из соображений симметрии должны быть одинаковыми). Поэтому мы решили сдвинуть экспериментальные значения таким образом, чтобы результаты теории и эксперимента совпадали при наибольших значениях радиолокационного сечения рассеяния, когда оба значения, по-видимому, наиболее точны. Величина введенной поправки в децибелах указана в подписях к фигурам. В результате было получено очень хорошее согласие между теорией и экспериментом, особенно если учесть, что масштаб на фигурах перекрывает пять порядков величины.



Фиг. 3.2. Поперечное сечение трех цилиндров конечной длины, для которых исследовалась применимость теории при наличии неплывных сопряжений:

a — прямой круговой цилиндр; b — цилиндр со сферическими основаниями (радиусы сфер равны удвоенному радиусу цилиндра); v — цилиндр, плавно сопряженный с полусферическими основаниями.

Многолепестковая структура в окрестности $u = 90^\circ$ для обоих цилиндров довольно хорошо описывается приближением физической оптики (приближение Кирхгофа для поля на поверхности), что дает [8]

$$\sigma/\pi a^2 \approx b \sin u \sin^2(2ka \cos u) / \pi k a^2 \cos^2 u. \quad (3.49)$$

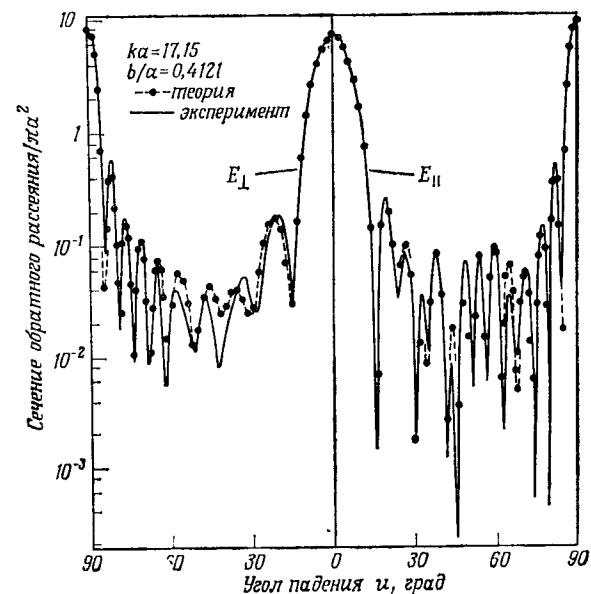
Аналогично при малых углах падения ($u = 0^\circ$) главный лепесток для правильного кругового цилиндра описывается приближенной формулой

$$\sigma/\pi a^2 \approx (b/a)^2 \operatorname{ctg}^2 u J_1^2(2kb \sin u) \quad (3.50)$$

(J_1 — функция Бесселя) для сечения обратного рассеяния от круглого диска. Иначе обстоит дело для случая падения под малыми углами на цилиндр, показанный на фиг. 3.2, б; здесь требуется более тонкий подход, различающий обе поляризации в падающей волне.

Аналогичные расчеты мы пытались произвести для цилиндра с плавным закруглением торцов (фиг. 3.2, в), причем размеры матрицы были несколько увеличены, чтобы компенсировать удлинение периметра тела. К нашему удивлению, несмотря на то, что этот цилиндр отличался от рассмотренных ранее лишь отсутствием резких изломов, не наблюдалось никакого согла-

сия с экспериментом, и мы пришли к выводу, что в данном случае численное решение неверно. Неудача предположительно приписывается неточности численного интегрирования при вычислении элементов матрицы $[Q]$; мы отложим обсуждение этого вопроса до следующего примера, в котором имеет место такая же ситуация.



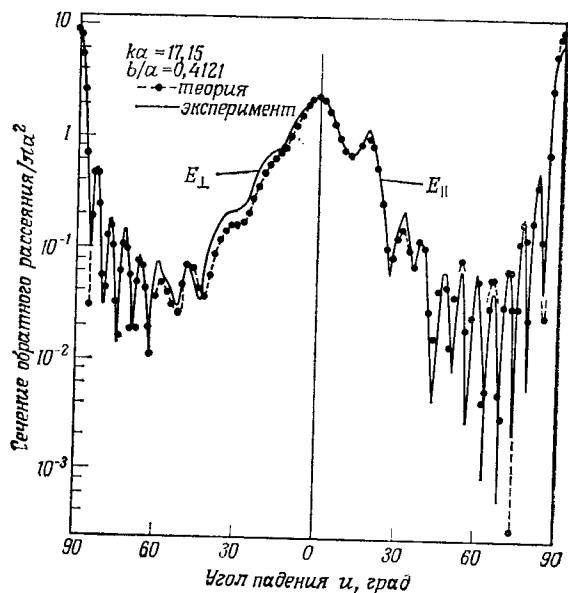
Фиг. 3.3. Теоретические и экспериментальные значения сечений обратного рассеяния в функции угла падения для кругового цилиндра (фиг. 3.2, а). Значения, соответствующие падению на боковую поверхность ($u=90^\circ$) и на основание ($u=0^\circ$), очень близки к даваемым приближением физической оптики. Экспериментальные кривые E_{\perp} , E_{\parallel} сдвинуты соответственно на 1,2 и 1,9 дБ (см. текст).

Другим интересным примером служит конус с углом при вершине 30° , плавно сочлененный со сферой радиуса a . Геометрия тела показана на фиг. 3.5. В этом случае тело не обладает зеркальной симметрией относительно плоскости, нормальной к оси вращательной симметрии, и рассеянное поле приходится вычислять для углов падения во всем интервале $0 \leq u \leq 180^\circ$.

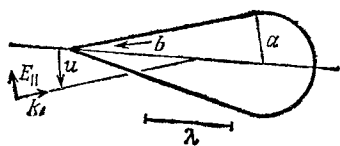
Измерения рассеяния в СВЧ диапазоне для тела такой формы проводились в лаборатории фирмы АВКО в Вильмингтоне, Массачусетс¹⁾. Использовалась мишень, изготовленная из алюминия; измерения сечения обратного рассеяния проводились на частоте 34,25 ГГц ($ka = 3,66$) при изменении угла падения

¹⁾ Н. Педерсен, частное сообщение.

во всем диапазоне 360° для обеих поляризаций. Различие в сечениях рассеяния для двух симметричных углов падения, показанных на фиг. 3.6 и 3.7 тонкими линиями для каждой поля-



Фиг. 3.4. Теоретические и экспериментальные значения сечения обратного рассеяния в функции угла падения для цилиндра, изображенного на фиг. 3.2, б. Сечение рассеяния при боковом падении ($u=90^\circ$) практически не отличается от значений для цилиндра с плоскими торцами (фиг. 3.3); сечение при падении волны на основание ($u=0^\circ$) существенно отличается и сильно зависит от поляризации волны. Экспериментальная кривая сдвинута на 0,2 дБ для обеих поляризаций (см. текст).

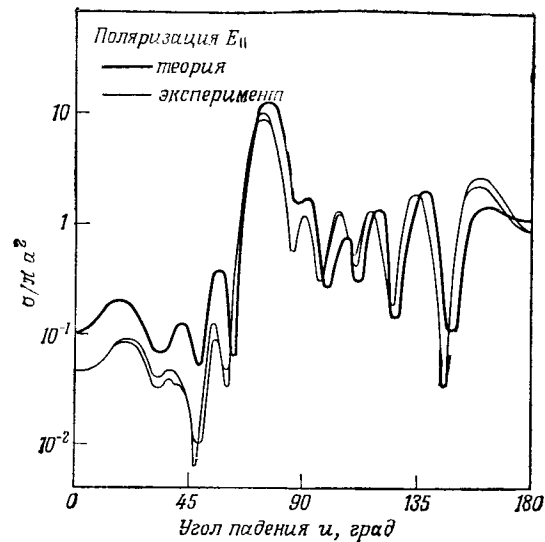


Фиг. 3.5. Конус с гладко сопряженным сферическим основанием (конус-сфера).

При вычислениях вершина конуса округлялась (радиус кривизны $b=0,1 a$); при этом изменения размеров были пренебрежимо малы по сравнению с длиной волны.

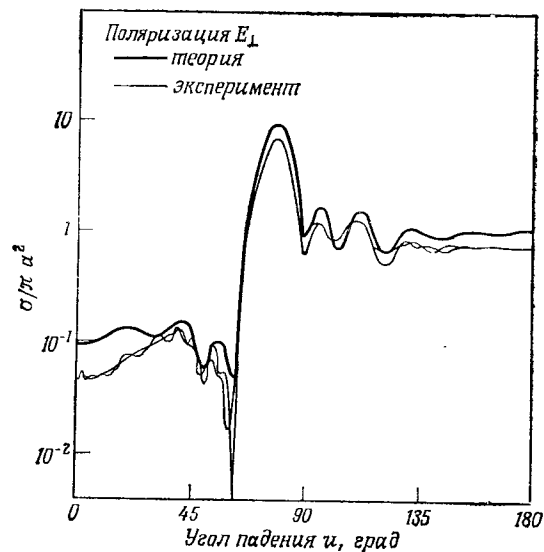
ризации, служит мерой ошибки эксперимента, которая невелика и почти никогда не превышает $\pm 0,5$ дБ. Калибровочной мишенью служила алюминиевая сфера с известным радиолокационным сечением рассеяния.

Первая попытка расчета с использованием процедуры ортогонализации Шмидта опять оказалась неудачной. Однако на



Фиг. 3.6. Теоретическое (толстая кривая) и экспериментальное (тонкие кривые) сечения обратного рассеяния на конусе со сферическим основанием в функции угла падения для поляризации E_{\parallel} .

Большой пик при $u \approx 75^\circ$ обусловлен зеркальным отражением от поверхности конуса.



Фиг. 3.7. То же, что на фиг. 3.6, но для поляризации E_{\perp} .

Кривые для двух поляризаций существенно различаются, за исключением области зеркального отражения при $u \approx 75^\circ$, где сечения практически совпадают.

этот раз удалось убедиться, что трудности обусловлены ошибками численного интегрирования при вычислении элементов матрицы $[Q]$, определяемых из уравнения (3.30). Для многих элементов значения интегралов не сходились при уменьшении шага интегрирования, так что не удавалось найти более двух или трех значащих цифр (в то время как обычно без особого труда удается найти восемь или десять значащих цифр).

Тогда мы ввели закругление конического острия; радиус сферического закругления b был взят равным $0,1 a$. Как видно на фиг. 3.5, изменение размеров тела при этом значительно меньше длины волны. Начало координат также было смещено вправо, так чтобы оно оставалось в центре продольной оси структуры. При этом удалось достигнуть несколько лучшей сходимости результатов, приведенных толстыми линиями на фиг. 3.6 и 3.7. Видна хорошая корреляция между теорией и экспериментом как в отношении числа максимумов, так и их положения; при этом наблюдается численное согласие в пределах 3дБ.

Вычислительные трудности, возникающие для конуса-сферы и для цилиндра, изображенного на фиг. 3.2, *в*, могут быть объяснены следующим образом. При численном интегрировании *только по сферической поверхности* структуры функция $r(\theta)$ в подынтегральном выражении имеет особенность при значении угла, немного превосходящем верхний предел интегрирования (точка, в которой радиус-вектор касается поверхности сферы). Вследствие этого ошибка, определяемая правилом Боде, которая пропорциональна шестой производной подынтегрального выражения [9], хотя и не бесконечно велика, но может стать очень большой. Сдвиг начала координат при округлении острия конуса отодвигает особенность несколько дальше от области интегрирования, так что интегрирование дает приемлемый результат. Заметим, что точно та же ситуация имеет место для цилиндра, сопряженного со сферами (но не для двух других цилиндров на фиг. 3.2). Хотя мы и не пытались проделать этого, однако, по-видимому, этих трудностей численного интегрирования можно полностью избежать, если перейти к интегрированию по длине дуги в уравнениях (3.30).

Интересно привести некоторые данные о времени счета. Для получения приведенных на фиг. 3.6 и 3.7 результатов для конуса-сферы потребовалось 5,5 мин машинного времени. При этом использовались первые семь азимутальных мод ($0 \leq m \leq 6$) и в каждом случае N выбиралось равным 14, так что полная матрица состояла из 28×28 комплексных элементов. (При отсутствии упомянутых трудностей, обусловленных численным интегрированием, по нашим оценкам, достаточно выбрать $N \approx 10$, а число интервалов при интегрировании порядка 50, а не 500,

как это делалось в действительности. При этом время счета уменьшилось бы в 20 раз.)

Для больших тел время счета растет приблизительно пропорционально $(ka)^4$. При этом множитель $N^2 \sim (ka)^2$ обусловлен ростом требуемого числа элементов матрицы Q , другой множитель, пропорциональный ka , возникает из-за увеличения числа точек численного интегрирования, и, наконец, еще один множитель, также пропорциональный ka , связан с увеличением требуемого числа мод. Опыт показывает, что последующие арифметические операции, связанные с преобразованием матрицы (обращение или ортогонализация, умножение), число которых также растет пропорционально $(ka)^4$, занимают лишь незначительную часть общего времени счета. Зеркальная симметрия (например, для цилиндров конечной длины) уменьшает время счета в 4 раза: половина элементов в матрице $[Q]$ пропадает, а для вычисления остальных интегрирование в (3.30) можно провести в меньшем интервале углов $0 \leq \theta \leq \pi/2$. Дополнительное уменьшение на 33% имеет место для сфероидов, так как для них не нужно вычислять элементы $\text{Im } Q$, лежащие выше главной диагонали.

§ 3. СТРУКТУРА ПРОГРАММЫ ДЛЯ ЭВМ

1. ВВЕДЕНИЕ

Программа EMSCAT, предназначенная для численного решения рассмотренных в § 2 задач о рассеянии электромагнитных волн, была написана на языке ФОРТРАН IV для машины IBM 7030. Программа строилась с учетом следующих требований.

Выбирался способ кодирования операций, обеспечивающий минимальное время счета. С этой целью подпрограмма умножения матрицы на вектор была составлена в машинных кодах, что позволило использовать все преимущества такого кодирования. Эта же подпрограмма может транслироваться и с языка ФОРТРАН (хотя при этом снижается эффективность и точность), что позволяет использовать ее и на ЭВМ, отличных от IBM 7030.

Вычисление специальных функций проводилось с точностью до 15 значащих цифр, а если было необходимо, то и с двойной точностью.

Максимально использовалась оперативная память ЭВМ. Максимальный размер матрицы (60×60 комплексных элементов) выбран таким, чтобы при работе программы использовалось только оперативное запоминающее устройство.

Матрицы запоминались и преобразовывались в одном из трех больших блоков общей оперативной памяти. Размер каждого блока 120×120 . Для упрощения программирования эти главные блоки в соответствующих подпрограммах посредством операторов EQUIVALENCE делились на разные сегменты и им присваивались новые наименования.

2. СПИСОК ПОДПРОГРАММ

Программа состоит из основной управляющей подпрограммы MAIN и пятнадцати вспомогательных подпрограмм, перечисленных и кратко описанных ниже. При написании подпрограмм предполагалось, что в библиотеке транслятора с языка ФОРТРАН имеются стандартные функции, такие, как \sin , \lg и т. д., и стандартные операции ввода и вывода.

Основная подпрограмма MAIN определяет общий порядок операций и вычисляет матрицы $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$.

Вызываемые вспомогательные подпрограммы имеют следующие названия:

RDDATA,
GENLGP,
GENKR,
GENBSL,
PRTMTX,
PRCSSM.

Подпрограмма RDDATA считывает входные данные и подготавливает начальную информацию для печати. Обращается к подпрограмме CALENP.

Подпрограмма CALENP вычисляет границы членения тела на части по углу θ (полярный угол) и шаг численного интегрирования.

Подпрограмма GENLGP вычисляет присоединенные функции Лежандра в требуемой области изменения аргумента.

Подпрограмма GENBSL производит вычисление функций Бесселя и функций Неймана по рекуррентным формулам. Обращается к подпрограммам BESSEL и DUMP.

Подпрограмма BESSEL вычисляет функцию Бесселя заданного порядка и аргумента.

Подпрограмма GENKR вычисляет параметр kr и его производную по полярному углу θ .

Подпрограмма PRNQOT печатает заголовки и управляет печатью матрицы $[Q]$. Обращается к подпрограмме PRINTM.

Подпрограмма PRINTM выдает на печать элементы матрицы данного порядка.

Подпрограмма PRCSSM вычисляет матрицу $[Q]$ по матрицам $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$ и преобразует матрицу $[Q]$ в матрицу $[T]$. Обращается к подпрограммам NRMQMX, CNDTNQ, PRTRIT, ADDPRC.

Подпрограмма NRMQMX нормирует матрицы $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$ для вычисления матрицы $[Q]$.

Подпрограмма CNDTNQ улучшает матрицу $[Q]$ (делает ее хорошо обусловленной) перед преобразованием ее в матрицу $[T]$.

Подпрограмма PRTRIT печатает заголовки и управляет печатью матрицы $[T]$. Обращается к подпрограмме PRINTM.

Подпрограмма ADDPRC по матрице $[T]$ вычисляет характеристики рассеяния. Обращается к подпрограммам GENLGP и VECMUL.

Подпрограмма VECMUL умножает матрицу на вектор.

Подпрограмма DUMP печатает содержание памяти, если имеет место ошибка.

Ниже дано более подробное описание подпрограмм в необходимых случаях. Следует отметить, что при этом не всегда используются общепринятые математические обозначения, например, функции Бесселя обозначаются в подпрограммах через B , а не J . Это было сделано для облегчения запоминания используемых в подпрограммах обозначений. При необходимости для описания некоторых параметров использовались идентификаторы, отличные от использованных ранее.

3. ПОДПРОГРАММА ВВОДА

В подпрограмме RDDATA производится считывание начальных данных, печать заголовков и получение информации для численного интегрирования. Ниже описаны перфокарты с начальными данными и указаны соответствующие форматы.

Перфокарта 1.	NM, NRANK, NSECT, IBODY, NUANG FORMAT (5I12)
NM	Число значений m . См. перфокарту 3.
NRANK	Размерность матриц $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$.
NSECT	Число секций, на которое делится тело, и интервалов интегрирования. Более полное описание формы тела см. в подпрограмме CALENP.
IBODY	Индекс, определяющий номер варианта или форму тела; 7 — сфероид, 8 — тело зеркальной симметрии.

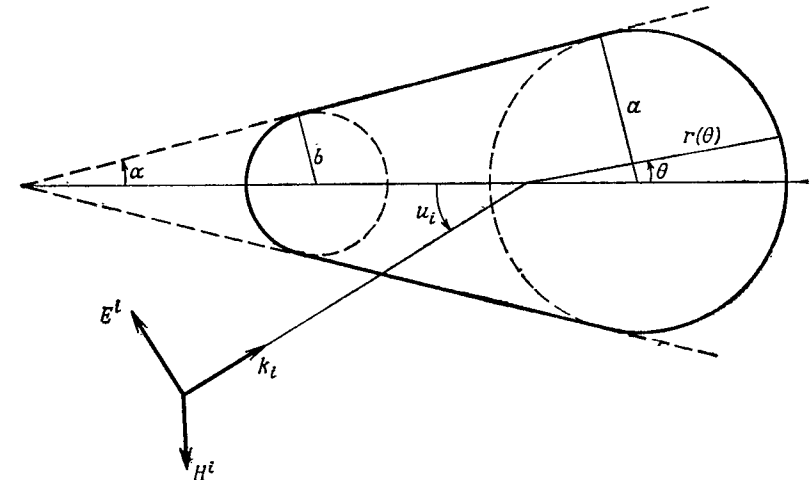
	9 — общий случай тела осесимметричной формы.
NUANG	Число углов наблюдения u . См. перфокарту 5.
Перфокарта 2.	CONK, BRXT, ALPHA FORMAT (3E12.7)
CONK	ka , масштабный множитель для полярного радиуса r , определяющего форму тела.
BRXT	Переменный параметр, используемый при определении формы тела.
ALPHA	α , переменный параметр, используемый при определении формы тела. Более подробное описание его использования см. в подпрограммах CALENP и GENKR, приведенных ниже.
Перфокарта(ы) 3.	CMI(I), I = 1, NM FORMAT (6E12.7)
CMI(I)	I -е значение m , используемое в данном решении. Может быть считано до 30 значений азимутального индекса m ; m — произвольное целое число ≥ 0 .
Перфокарта 4.	NDPS(I), I = 1, NSECT FORMAT (6I12)
NDPS(I)	Число интервалов интегрирования, на которое делится I -я часть тела. Возможное число частей, на которые делится тело, не превышает шести. Эти параметры используются для вычисления шага при численном интегрировании; они должны быть кратны 4.
Перфокарта(ы) 5.	UANG(I), I = 1, NUANG FORMAT (6I12)
UANG(I)	I -е значение u — угла наблюдения (в градусах). Может быть считано до 60 значений u .

4. ВЫЧИСЛЕНИЕ ГРАНИЦ ЧАСТЕЙ ТЕЛА И ШАГА ИНТЕГРИРОВАНИЯ

Подпрограмма CALENP — одна из двух специальных подпрограмм, которые необходимо составлять заново для каждой частной формы тела. В этой подпрограмме вычисляются NSECT значений полярного угла θ , которые являются границами деле-

ния тела на части для численного интегрирования. Каждой граничной точке соответствует свое значение θ . После этого вычисляется шаг интегрирования делением области интегрирования по θ на соответствующее значение параметра NDPS. Отметим, что число интервалов непостоянно для различных частей, но оно должно быть кратно 4.

Поскольку вычисления для каждого варианта могут различаться, для передачи информации о данной форме тела используются параметры ALPHA, BRXT, QB, SNALPH, CSALPH.



Фиг. 3.8. Параметры сферы-конуса-сферы; падающая волна имеет поляризацию E_{\parallel} .

В приведенном ниже частном случае сферы-конуса-сферы используется параметр QB.

В приложении 1 приведены подпрограммы CALENP и GENKR для сферы-конуса-сферы (фиг. 3.8).

Для этой конфигурации вычисляются три граничных значения θ : θ_1 , θ_2 и θ_3 . При этом

$$\theta_1 = \arctg \left[\frac{\sin \alpha \cos \alpha}{q - \sin^2 \alpha} \right], \quad 0 \leq \theta_1 \leq 105^\circ;$$

α (см. фиг. 3.8) — входной параметр, соответствующий переменной ALPHA; b/a (фиг. 3.8) — входной параметр, соответствующий переменной BRXT; величина

$$q = \frac{(1 - b/a)(1 - \sin \alpha)}{2}$$

вычисляется и ее значение присваивается переменной QB;

$$\theta_2 = \arctg \left[\frac{(b/a) \sin \alpha \cos \alpha}{1 - q - (b/a) \cos^2 \alpha} \right], \quad \theta_1 < \theta_2 < \pi, \quad \theta_3 = \pi.$$

5. ОСНОВНАЯ УПРАВЛЯЮЩАЯ ПОДПРОГРАММА

Подпрограмма MAIN определяет общую последовательность операций и вычисляет действительные и мнимые части матриц рассеяния $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$. После того как считаны начальные данные, проводится численное интегрирование с использованием формулы Боде третьего порядка [9]. В подпрограмме вычисляются комплексные элементы матриц $[I]$ и $[J]$ для трех случаев: осесимметричное тело, тело зеркальной симметрии и сфероид. Расчет производится по формуле

$$I_{ij} = m \int_0^\pi \sin \theta (kr)^2 B_j(kr) H_i(kr) \times$$

$$\times \{(i+j) \cos \theta P_i^m P_j^m - (i+m) P_i^m P_{i-1}^m - (j+m) P_i^m P_{j-1}^m\} d\theta,$$

где $B_j(kr)$ — функция Бесселя первого рода j -го порядка от аргумента kr ; $H_i(kr)$ — функция Ганкеля, определяемая как

$$B_i(kr) = \sqrt{-1} N_i(kr);$$

$N_i(kr)$ — функция Неймана i -го порядка от аргумента kr ;

$$P_i^m = \frac{P_i^m(\cos \theta)}{\sin \theta},$$

где $P_i^m(\cos \theta)$ — присоединенные полиномы Лежандра степени m и порядка i ; r — полярный радиус, определяющий форму тела, i — индекс, соответствующий строке матрицы; j — индекс, соответствующий столбцу матрицы;

$$J_{ij} = -\frac{2}{e_m} \int_0^\pi \sin \theta H_i(kr) \{P_i^m P_j^m [kr(kr B_{j-1}(kr) - j B_j(kr)(m^2 + ij \cos^2 \theta) + ij(j+1) \frac{d(kr)}{d\theta} B_j(kr) \sin \theta \cos \theta) - (i+m) P_{i-1}^m P_j^m [kr \cos \theta (kr B_{j-1}(kr) - j B_j(kr) + (j+1) \frac{d(kr)}{d\theta} B_j(kr) \sin \theta) + (j+m) P_{j-1}^m kr [(kr B_{j-1}(kr) - j B_j(kr)) ((i+m) P_{i-1}^m - i \cos \theta P_i^m)]]\} d\theta,$$

где

$$e_m = \begin{cases} 1 & \text{при } m=0, \\ 2 & \text{при } m \geq 1. \end{cases}$$

Каждый элемент массивов $[I]$ и $[J]$ используется в программе для запоминания результатов численного интегрирования по формуле Боде. Таким образом, для заданного значения θ

вычисляются все необходимые функции и результат прибавляется к текущему значению матричного элемента.

Для экономии машинного времени исключаются вычисления, дающие нулевой вклад в интеграл. При этом используются следующие свойства симметрии матриц $[I]$ и $[J]$.

Для произвольного осесимметричного тела

$$\operatorname{Re}(I_{ji}) = \operatorname{Re}(I_{ij}),$$

$$\operatorname{Re}(J_{ji}) = \operatorname{Re}(J_{ij}).$$

Для тела, обладающего зеркальной симметрией, добавляются соотношения

$$I_{ij} = 0, \quad \text{если } i \text{ и } j \text{ одинаковой четности} \\ \text{(оба четны или оба нечетны),}$$

$$J_{ij} = 0, \quad \text{если } i \text{ и } j \text{ разной четности} \\ \text{(одно четное, другое нечетное).}$$

Для сфероида добавляются еще соотношения

$$\operatorname{Im}(I_{ji}) = \operatorname{Im}(I_{ij}),$$

$$\operatorname{Im}(J_{ji}) = \operatorname{Im}(J_{ij}).$$

После этого вычисляются матрицы $[K]$ и $[L]$, связанные с матрицами $[I]$ и $[J]$ следующими соотношениями:

$$\operatorname{Re}(K_{ij}) = -\operatorname{Re}(J_{ij}),$$

$$\operatorname{Im}(K_{ij}) = -\operatorname{Im}(J_{ij}) + b D_{ij},$$

где

$$b = \begin{cases} 1,0 & \text{для произвольных осесимметричных тел,} \\ 0,5 & \text{для тел, обладающих зеркальной симметрией,} \\ & \text{и сфероидов (в этих случаях данные, определяющие форму тела, обязательно вводятся лишь в диапазоне углов } 0 \leq \theta \leq \pi/2), \end{cases}$$

$$D_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq j, \\ \left[\frac{e_m (2i+1) (i-m)!}{4i (i+1) (i+m)!} \right]^{-1} & \text{при } i = j, \end{cases}$$

$$\operatorname{Re}(L_{ij}) = -\operatorname{Re}(I_{ij}),$$

$$\operatorname{Im}(L_{ij}) = -\operatorname{Im}(I_{ij}).$$

После этого комплексные элементы матриц $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$ выводятся на печать с помощью подпрограммы PRTMTX¹⁾ и управление передается подпрограмме PRCSM для дальнейших операций.

¹⁾ Обращение к подпрограмме PRTMTX опущено в приводимой в приложении подпрограмме MAIN. — Прим. ред.

6. ПРИСОЕДИНЕННЫЕ ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА

Подпрограмма GENLGP вычисляет присоединенные полиномы Лежандра $P_i^m(x)$ для данных значений аргумента x , азимутального индекса m и для всех значений индекса i от 0 до определяемого начальными данными значения порядка матрицы NRANK. Два первых значения P вычисляются по формулам, а остальные находятся с помощью рекуррентных соотношений.

Заметим, что в этой подпрограмме всегда вычисляются функции

$$\frac{P_i^m(\cos \theta)}{\sin \theta}.$$

При этом

$$\begin{aligned} \frac{P_i^m(\cos \theta)}{\sin \theta} &= 0 \quad \text{при } i < m, \\ \frac{P_m^m(\cos \theta)}{\sin \theta} &= \frac{(2m)! \sin^{m-1} \theta}{2^m \cdot m!} \quad \text{при } i = m, \\ \frac{P_0^0(\cos \theta)}{\sin \theta} &= \frac{1}{\sin \theta} \quad \text{при } i = m = 0, \\ \frac{P_1^0(\cos \theta)}{\sin \theta} &= \frac{\cos \theta}{\sin \theta}. \end{aligned}$$

Рекуррентные соотношения имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{P_n^m(\cos \theta)}{\sin \theta} &= \\ &= \frac{(2n-1) \cos \theta [(P_{n-1}^m(\cos \theta))/\sin \theta] - (n+m-1) [(P_{n-2}^m(\cos \theta))/\sin \theta]}{n-m}. \end{aligned}$$

7. ФУНКЦИИ БЕССЕЛЯ

Подпрограмма BESSEL вычисляет функции Бесселя первого рода $B_n(x)$ для данных значений аргумента x и порядка n с помощью бесконечных рядов. Для обеспечения точности все арифметические операции производятся с двойной точностью, и ошибка, обусловленная отбрасыванием членов ряда, не превышает 10^{-20} . Если после учета 100 членов ряд не сходится с указанной точностью, то выдается информация об ошибке.

Для вычисления функций Бесселя используются следующие бесконечные ряды:

$$B_n(x) = \frac{x^n}{1 \cdot 3 \cdot 5 \cdot \dots \cdot (2n+1)} \sum_{i=0}^{\infty} a_i,$$

где

$$\begin{aligned} a_0 &= 1, \\ a_i &= \frac{-x^2}{2i[2n+(2i+1)]} a_{i-1}. \end{aligned}$$

8. РЕКУРРЕНТНЫЕ СООТНОШЕНИЯ ДЛЯ ФУНКЦИЙ БЕССЕЛЯ И НЕЙМАНА

Подпрограмма GENBSL обращается к подпрограмме BESSEL для нахождения двух последовательных функций Бесселя для соседних значений индекса при заданном значении аргумента, а затем использует эти значения для расчета значений функций Бесселя из рекуррентных соотношений для значений i от NRANK до нуля. Если две найденные функции порядка NRANK и NRANK-1 не удовлетворяют критериям точности, упомянутым в п. 7, то подпрограмма увеличивает порядок вычисляемой функции Бесселя до 4 (NRANK). Если и после этого не удастся получить удовлетворительную пару функций, то процедура обрывается и проверяется содержание оперативной памяти.

При вычислении функций Бесселя используется рекуррентная формула

$$B_{n-1}(x) = (2n+1)x^{-1}B_n(x) - B_{n+1}(x).$$

В этой же подпрограмме с помощью прямой рекуррентной формулы находятся также функции Неймана, причем первая пара функций вычисляется по формулам

$$\begin{aligned} N_0(x) &= -\frac{\cos x}{x}, \\ N_1(x) &= -\frac{\cos x}{x^2} - \frac{\sin x}{x}. \end{aligned}$$

Рекуррентная формула для нахождения остальных функций Неймана имеет вид

$$N_{n+1}(x) = (2n+1)x^{-1}N_n(x) - N_{n-1}(x).$$

После вычисления вектора функций от нуля до NRANK в программе MAIN осуществляются две проверки точности для всего набора найденных функций Бесселя и Неймана. Если оказывается, что выписанные ниже соотношения не выполняются с точностью до 10^{-10} , то печатается информация об этом и программа продолжает считать дальше. Хотя проверочные тесты проводятся в программе MAIN после обращения к подпрограмме GENBSL, мы для удобства напомним их здесь:

Проверка функций Бесселя:

$$|x^2 [B_1(x) N_0(x) - B_0(x) N_1(x)] - 1| < 10^{-10}.$$

Проверка функций Неймана:

$$|x^2 [B_{NRANK}(x) N_{NRANK-1}(x) - B_{NRANK-1}(x) N_{NRANK}(x)] - 1| < 10^{-10}.$$

9. ПОЛУЧЕНИЕ ФОРМЫ ТЕЛА

Подпрограмма GENKR — одна из упомянутых двух подпрограмм, которые приспособлены к определенной форме тела. Как отмечалось выше при описании подпрограммы CALENP, в распоряжении программиста имеется несколько параметров, которые он может использовать для передачи информации из одной программы в другую. Основная задача всех модификаций подпрограммы GENKR состоит в вычислении полярного радиуса r как функции полярного угла θ , производной $dr/d\theta$ и в масштабном преобразовании этих величин в соответствии с вводимой константой $ka = \text{CONK}$.

Для иллюстрации работы этой программы рассмотрим тело, имеющее структуру конус-сфера-конус (фиг. 3.8). В подпрограмме CALENP было произведено расчленение этого тела на части (по углу θ). В подпрограмме GENKR находятся величины $(ka)r$ и $(ka)(dr/d\theta)$ для заданного значения угла θ ; множитель (ka) вводится в программу заранее.

Часть 1 ($0 \leq \theta \leq \theta_1$):

$$r = \frac{q \cos \theta}{\sin \alpha} + \left[1 - \left(\frac{q \sin \theta}{\sin \alpha} \right)^2 \right]^{1/2},$$

$$\frac{dr}{d\theta} = - \frac{q \sin \theta}{\sin \alpha} - \left(\frac{q}{\sin \alpha} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \left[1 - \left(\frac{q \sin \theta}{\sin \alpha} \right)^2 \right].$$

Замечание: величина q была вычислена в подпрограмме CALENP, где она обозначалась идентификатором QB.

Часть 2 ($\theta_1 \leq \theta \leq \theta_2$):

$$r = \frac{1 - q}{\sin(\theta - \alpha)},$$

$$\frac{dr}{d\theta} = - \frac{(1 - q) \cos(\theta - \alpha)}{\sin^2(\theta - \alpha)}.$$

Часть 3 ($\theta_2 \leq \theta \leq \pi$):

$$r = - \left[\frac{1 - (b/a) - q}{\sin \alpha} \right] \cos \theta + \left[(b/a)^2 - \left(\frac{1 - (b/a) - q}{\sin \alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2},$$

$$\frac{dr}{d\theta} = \left[\frac{1 - (b/a) - q}{\sin \alpha} \right] \sin \theta -$$

$$- \left(\frac{1 - (b/a) - q}{\sin \alpha} \right)^2 \sin \theta \cos \theta \left[(b/a)^2 - \left(\frac{1 - (b/a) - q}{\sin \alpha} \right)^2 \sin^2 \theta \right]^{1/2}.$$

10. ПЕЧАТЬ ПЕРВОЙ МАТРИЦЫ

Подпрограмма PRNQOT осуществляет печать матрицы $[Q]$. Действительные и мнимые массивы помечаются и выводятся на печатающее устройство.

11. ПЕЧАТЬ МАССИВА

Подпрограмма PRINTM осуществляет печать квадратного массива заданной размерности.

12. ПОЛУЧЕНИЕ МАТРИЦ $[Q]$ И $[T]$

Подпрограмма PRCSSM является второй главной управляющей программой, в которой осуществляется преобразование матриц $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$ в матрицу $[Q]$ и последующее решение матричного уравнения, дающее матрицу $[T]$.

В подпрограмме NRMQMX (см. ниже) производится нормировка матриц $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$, необходимая для построения матрицы $[Q]$.

Для удобства вводим обозначения

$$[Q] = \text{Re}[Q] - i \text{Im}[Q] = \begin{pmatrix} [Q_1] & [Q_2] \\ [Q_3] & [Q_4] \end{pmatrix},$$

где $i = \sqrt{-1}$.

Метод, используемый в программе для преобразования матрицы $[Q]$ в матрицу $[T]$, включает ортогонализацию матрицы $[Q]$. После составления комплексной матрицы $[Q]$ нормировкой матриц $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$ матрица $[Q]$ имеет форму, описанную в п. 12. Из этих матриц $[Q]$ составляется новая комплексная матрица $[Q]$ размерности $2N$ с помощью следующих соотношений:

$$[\hat{Q}]_{(2m-1)(2n-1)} = [Q_1]_{mn},$$

$$[\hat{Q}]_{(2m-1)(2n)} = [Q_2]_{mn},$$

$$[\hat{Q}]_{(2m)(2n-1)} = [Q_3]_{mn},$$

$$[\hat{Q}]_{(2m)(2n)} = [Q_4]_{mn}, \quad m, n = 1, 2, \dots, N.$$

Далее новая матрица $[\hat{Q}]$ делается хорошо обусловленной, как описано в подпрограмме CNDTNQ (§ 3, п. 14).

Последующая ортогонализация осуществляется следующим образом:

1. Каждая строчка $[\hat{Q}]$ рассматривается как вектор с $2N$ компонентами; например компонентами первого вектора Q_1 являются

$$Q_{11}, Q_{12}, Q_{13}, \dots, Q_{1(2N)}.$$

Ортогонализация начинается с нижнего $2N$ -го вектора.

2. Нормированный $2N$ -й вектор имеет вид¹⁾

$$\mathbf{Q}_{2N} = \frac{\mathbf{Q}_{2N}}{(\mathbf{Q}_{2N}^* \cdot \mathbf{Q}_{2N})^{1/2}},$$

где скалярное произведение комплексно сопряженного вектора \mathbf{Q}_p^* на другой вектор \mathbf{Q}_q определено следующим образом:

$$\mathbf{Q}_p^* \cdot \mathbf{Q}_q = \sum_{r=1}^{2N} Q_{pr}^* Q_{qr} = Q_{p1}^* Q_{q1} + Q_{p2}^* Q_{q2} + \dots + Q_{p(2N)}^* Q_{q(2N)}.$$

3. Вектор $\hat{\mathbf{Q}}_{(2N-1)}$ делается ортогональным вектору $\hat{\mathbf{Q}}_{(2N)}$:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{2N-1} = \mathbf{Q}_{2N-1} - [\hat{\mathbf{Q}}_{2N}^* \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{2N-1}] \hat{\mathbf{Q}}_{2N}.$$

4. Вектор $\hat{\mathbf{Q}}_{2N-1}$ нормируется по формуле

$$\hat{\mathbf{Q}}_{2N-1} = \frac{\hat{\mathbf{Q}}_{2N-1}}{[\hat{\mathbf{Q}}_{2N-1}^* \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{2N-1}]^{1/2}}.$$

5. Вектор $\hat{\mathbf{Q}}_{2N-2}$ делается ортогональным векторам $\hat{\mathbf{Q}}_{2N}$ и $\hat{\mathbf{Q}}_{2N-1}$:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{2N-2} = \mathbf{Q}_{2N-2} - [\hat{\mathbf{Q}}_{2N-1}^* \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{2N-2}] \hat{\mathbf{Q}}_{2N-1} - [\hat{\mathbf{Q}}_{2N}^* \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{2N-2}] \hat{\mathbf{Q}}_{2N}.$$

6. Вектор \mathbf{Q}_{2N-2} нормируется:

$$\hat{\mathbf{Q}}_{2N-2} = \frac{\hat{\mathbf{Q}}_{2N-2}}{[\hat{\mathbf{Q}}_{2N-2}^* \cdot \hat{\mathbf{Q}}_{2N-2}]^{1/2}}.$$

7. Процесс ортогонализации и нормировки продолжается дальше и заканчивается ортогонализацией вектора $\hat{\mathbf{Q}}_1$ всем последующим векторам.

8. Комплексная матрица $[\hat{T}]$ получается из комплексной матрицы $[\hat{Q}]$ с помощью соотношения

$$[\hat{T}] = [\hat{Q}]^* \text{Re} [\hat{Q}].$$

9. Далее матрица $[\hat{T}]$ разбивается на матрицы $[T_1]$, $[T_2]$, $[T_3]$ и $[T_4]$ с использованием процедуры, обратной процедуре, упомянутой выше. Комплексная матрица $[T]$ выводится на печать с помощью подпрограммы PRTRIT, а окончательная обработка осуществляется подпрограммой ADDPRC.

¹⁾ Здесь и далее знак равенства понимается в смысле оператора присваивания. — Прим. ред.

13. НОРМИРОВКА МАТРИЦ

Подпрограмма NRMQMX нормирует матрицы $[I]$, $[J]$, $[K]$ и $[L]$ для получения матрицы $[Q]$. Как отмечалось в п. 12, матрица $[Q]$ представляется как составная, и отдельные элементы ее находятся по формулам

$$[Q_1] = (Z2)^{-1/2} [J]' (Z2)^{-1/2} \equiv Q_{ij} = \frac{J_{ji}}{\sqrt{Z2_i} \cdot \sqrt{Z2_j}},$$

$$[Q_2] = - (Z2)^{-1/2} [L]' (Z2)^{-1/2},$$

$$[Q_3] = (Z2)^{-1/2} [I]' (Z2)^{-1/2},$$

$$[Q_4] = (Z2)^{-1/2} [K]' (Z2)^{-1/2},$$

где

$$Z2_n = \left[\frac{e_m (2n+1) (n-m)!}{4n (n+1) (n+m)!} \right]^{-1}.$$

Выражение для $Z2_n$ совпадает с выражением, которое использовалось при вычислении матрицы $[K]$ в п. 5. Штрих при $[J]$ и т. д. означает транспонирование.

14. ПРИВЕДЕНИЕ МАТРИЦ К ХОРОШО ОБУСЛОВЛЕННОМУ ВИДУ

После составления матрицы $[\hat{Q}]$ размерности $2N$ эта матрица «улучшается» (делается хорошо обусловленной), начиная с последней строки $\hat{\mathbf{Q}}_{2N}$ в направлении первой $\hat{\mathbf{Q}}_1$, по формуле

$$(\hat{\mathbf{Q}}_{2N})_i = [1/\text{Im}(\hat{\mathbf{Q}}_{2N})_{2N}] (\hat{\mathbf{Q}}_{2N})_i, \quad i = 1, 2, \dots, 2N.$$

Величина $(\hat{\mathbf{Q}}_{2N})_i$ обозначает i -й элемент $2N$ -го (последнего) вектора. Полагаем теперь

$$\hat{\mathbf{Q}}_m = \hat{\mathbf{Q}}_m - [\text{Im}(\hat{\mathbf{Q}}_m)_{2N}] \hat{\mathbf{Q}}_{2N};$$

эта операция осуществляется над каждым из $2N$ элементов $\hat{\mathbf{Q}}_m$ и повторяется для всех строчек $m = 1, 2, \dots, 2N-1$.

Переопределяем

$$\hat{\mathbf{Q}}_{2N-1} = [1/\text{Im}(\hat{\mathbf{Q}}_{2N-1})_{2N-1}] \hat{\mathbf{Q}}_{2N-1},$$

а затем вычисляем

$$\hat{\mathbf{Q}}_m = \hat{\mathbf{Q}}_m - [\text{Im}(\hat{\mathbf{Q}}_m)_{2N-1}] \hat{\mathbf{Q}}_{2N-1}$$

для всех столбцов $m = 1, 2, \dots, 2N-2$.

Продолжаем описанный выше процесс для всех оставшихся столбцов. Последний шаг в этом процессе состоит в получении

$$\hat{Q}_2 = [1/\text{Im}(\hat{Q}_2)_2] \hat{Q}_2,$$

$$\hat{Q}_1 = \hat{Q}_1 - [\text{Im}(\hat{Q}_1)_2] \hat{Q}_2,$$

и в операции $\text{Im}(\hat{Q}_m)_i = 0, 0; i = m + 1, m + 2, \dots, 2N; m = 1, 2, 3, \dots, 2N - 1$.

15. ВЫВОД НА ПЕЧАТЬ МАТРИЦЫ [T]

Подпрограмма PRTRIT, осуществляет печать действительных и мнимых частей элементов матрицы [T] подобно тому, как подпрограмма PRNQOT (п. 10) выводит на печать матрицу [Q]. При этом используется общее печатающее устройство. Поскольку подпрограмма PRTRIT нужна главным образом для осуществления контроля, ее можно исключить, выбрасывая операцию CALL PRTRIT, которая следует после операции 236 в подпрограмме PRCSM.

16. ОКОНЧАТЕЛЬНАЯ ПРОГРАММА УПРАВЛЕНИЯ

Подпрограмма ADDPRC является третьей и последней управляющей программой, осуществляющей преобразование матрицы [T] в окончательные результаты. Получаются два набора величин: один — набор величин для текущего значения m , другой — накапливающийся набор величин для всех значений m вплоть до текущего (включая его).

Для получения окончательных результатов используется следующая процедура: матрица [T] нормируется:

$$[T(k)]_{ij} = (Z2_i)^{1/2} T_{ij}(k) (Z2_j)^{-1/2},$$

где k — номер одного из четырех блоков.

Здесь

$$[T] = \begin{pmatrix} [T_1] & [T_2] \\ [T_3] & [T_4] \end{pmatrix},$$

а величина $Z2_n$ определена в подпрограмме NRMQMX из п. 13.

Замечание. Читатель, который будет разбираться в структуре программы, приведенной в приложении 1, должен учесть распределение общей (COMMON) оперативной памяти, данное в п. 19.

Для каждого значения угла u и для n от 1 до NRANK вычисляются присоединенные функции Лежандра в виде

$$\frac{P_n^m(\cos u)}{\sin u}.$$

Производные этих функций находятся по формуле

$$\frac{d[P_n^m(\cos u)]}{du} = n \cos u \left[\frac{P_n^m(\cos u)}{\sin u} \right] - (n + m) \left[\frac{P_{n-1}^m(\cos u)}{\sin u} \right].$$

Компоненты векторов F^1, G^1 и F^2, G^2 вычисляются в подпрограмме VECMUL. Эти векторы определяются следующим образом:

$$\begin{pmatrix} F^1 \\ G^1 \end{pmatrix} = i \begin{pmatrix} [T_1] & [T_2] \\ [T_3] & [T_4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-i)^n m P_n^m(\cos u) / \sin u \\ (-i)^{n+1} d[P_n^m(\cos u)] / du \end{pmatrix}$$

и

$$\begin{pmatrix} F^2 \\ G^2 \end{pmatrix} = -i \begin{pmatrix} [T_1] & [T_2] \\ [T_3] & [T_4] \end{pmatrix} \begin{pmatrix} (-i)^{n+1} d[P_n^m(\cos u)] / du \\ (-i)^n m P_n^m(\cos u) / \sin u \end{pmatrix}.$$

Окончательные результаты определяются соотношениями

$$\text{SCATT } 1, 2 = \frac{16}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\text{NRANK}} (Z2)^{-1} [|F_n^{1,2}|^2 + |G_n^{1,2}|^2],$$

$$\text{TOTAL } 1, 2 =$$

$$= \frac{16}{(ka)^2} \sum_{n=1}^{\text{NRANK}} (Z2)^{-1} (i)^n \left[F_n^{1,2} \frac{m P_n^m(\cos u)}{\sin u} - i G_n^{1,2} \frac{d(P_n^m(\cos u))}{du} \right],$$

$$\text{RTRAD } 1, 2 =$$

$$= \frac{8}{(ka)} \sum_{n=1}^{\text{NRANK}} (Z2)^{-1} (-i)^n \left[F_n^{1,2} \frac{m P_n^m(\cos u)}{\sin u} + i G_n^{1,2} \frac{d(P_n^m(\cos u))}{du} \right].$$

Эти результаты разделяются на два класса, отмеченные индексами 1 и 2 (SCATT 1, 2 и т. д.). Этим классам соответствуют две различные поляризации падающей волны: классу 1 соответствует волна с параллельной поляризацией, а классу 2 — волна с перпендикулярной поляризацией.

17. УМНОЖЕНИЕ МАТРИЦЫ НА ВЕКТОР

В подпрограмме VECMUL осуществляется умножение матрицы на вектор, что используется для вычисления векторов F^1, G^1 и F^2, G^2 , определенных в п. 16.

18. ПРОВЕРКА СОДЕРЖАНИЯ ПАМЯТИ

Если возникает необычная или неисправимая ошибочная ситуация, подпрограмма DUMP осуществляет вывод содержимого оперативной памяти для облегчения поиска ошибки. Для вывода содержимого памяти в определенных пределах используется системная подпрограмма LVPDMP.

19. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ПАМЯТИ

Для экономии и полного использования оперативной памяти были сформированы три больших матричных массива размерности 120×120 , которые размещались в части общей памяти, именуемой MTXCOM. Для облегчения программирования в различных программах используются операции EQUIVALENCE, позволяющие разбить эти большие массивы на блоки разумных размеров.

Фортранные наименования трех основных блоков таковы:

CMTXRL (120, 120),
CMTXIM (120, 120),
SPRMTX (120, 120).

Внутри программы MAIN память распределяется следующим образом:

CMTXRL { AMXIR (60, 60): RE (I)
 AMXJR (60, 60): RE (J)
 AMXKR (60, 60): RE (K)
 AMXLR (60, 60): RE (L)
CMTXIM { AMXII (60, 60): IM (I)
 AMXJI (60, 60): IM (J)
 AMXKI (60, 60): IM (K)
 AMXLI (60, 60): IM (L)

Блок SPRMTX не используется.

В подпрограммах NRMQMX и PRCSSM (второй управляющей программе) распределение памяти таково:

CMTXRL { QMTXII (60, 60): QI1 (60, 60): IM (Q₁)
 QMTXJI (60, 60): QI2 (60, 60): IM (Q₂)
 QMTXKI (60, 60): QI3 (60, 60): IM (Q₃)
 QMTXLI (60, 60): QI4 (60, 60): IM (Q₄)
SPRMTX { QMTXIR (60, 60): QR1 (60, 60): RE (Q₁)
 QMTXJR (60, 60): QR2 (60, 60): RE (Q₂)
 QMTXKR (60, 60): QR3 (60, 60): RE (Q₃)
 QMTXLR (60, 60): QR4 (60, 60): RE (Q₄)

Замечание. После того как подпрограмма NRMQMX нормирует и передает матрицу [Q] (комплексную) на рабочие поля SPRMTX и CMTXRL, осуществляется преобразование матрицы [Q] в матрицу [T] по процедуре, описанной в п. 12. Перераспределение памяти указано выше.

В подпрограмме INVMBL всегда считается, что обрабатываемая блочная матрица находится на рабочем поле CMTXRL. Промежуточные операции, описанные в п. 14, выполняются на поле CMTXIM.

В третьей (последней) управляющей программе ADDPRC производятся следующие перераспределения памяти:

CMTXRL { QMTXII (60, 60): FGVECT (2, 120, 2)
 QMTXJI (60, 60): FGMUL (120, 2)
 QMTXKI (60, 60): FGANS (60, 10)
 QMTXLI (60, 60): (не используется)

CMTXIM { TCMPLEX (2, 120, 120): действительные и мнимые компоненты
SPRMTX { матрицы [T].

Замечание. Поле TCMPLEX перекрывает рабочие поля CMTXIM и SPRMTX. Как указывалось в п. 16, FGVECT содержит векторы F^1 , G^1 и F^2 , G^2 . Первый индекс отличает действительную и мнимую компоненты векторов, второй — размерность векторов, равную $2(NRANK)$, и последний отличает один вектор от второго.

Массив FGMUL содержит векторы, на которые умножается матрица [T] при получении массива FGVECT. Первый и второй индексы FGMUL соответствуют второму и третьему индексам массива FGVECT.

В массиве FGANS содержатся окончательные результаты. Первый индекс характеризует значение угла наблюдения, а второй — указывает тип характеристики по следующей таблице:

1	2	3	4	5
SCATT ¹	Re (TOTAL ¹)	Im (TOTAL ¹)	Re (RTRAD ¹)	Im (RTRAD ¹)
6	7	8	9	10
SCATT ²	Re (TOTAL ²)	Im (TOTAL ²)	Re (RTRAD ²)	Im (RTRAD ²)

Автор благодарит своих коллег из фирмы МИТРЕ за полезные обсуждения, особенно Мак-Карти, который составил машинную программу и дал ее описание. Автор также признателен Маллоу и Шпигелю из РКА и Педерсону, работавшему раньше в АВКО, за предоставление их неопубликованных экспериментальных результатов. Вся работа поддерживалась Агентством перспективных научных проектов.

ПРИЛОЖЕНИЕ

Подпрограммы на языке ФОРТРАН,
используемые в программе EMSCAT

```

C SCATTERING FROM AXISYMMETRIC CONDUCTORS FOR CASES 7, 8 AND 9.
COMMON DTR,RTD,CPI
COMMON /CMVCOM/ NM, CMI(30), CMV, KMV, CM2, EM, QEM, TWM, PRODM
COMMON /FNCCOM/ PNMLLG(61), BSSLSP(61), CNFUMN(61)
COMMON /THTCOM/ THETA, NTHETA, DLHTA, SINHT, COSTH, ISMRL, ISWTCH
1(7), SRMUL, SMULSS(7), CDH(6), DHM, NSECT, NDPS(6), EPPS(6), KSECT
COMMON /MTXCOM/ NRANK, NRANKI, AMXIR(60,60), AMXJR(60,60), AMXKR(60,60),
1AMXLR(60,60), AMXII(60,60), AMXJI(60,60), AMXKI(60,60), AMXLI(60,60), SPRMTX(120,
2120), CMXNRM(60)
COMMON /BDYCOM/ CKR, DCKR, CKR2, CSKRX, SNKR, CONK, BRXT, ALPHA,
1IBODY, QB, SNALPH, CSALPH
DIMENSION CLRMTX(43200)
EQUIVALENCE (AMXIR, CLRMTX)
C SET PROGRAM CONSTANTS.
DTR = 1.7453292519943E-02
RTD = 57.2957795131
CPI = 3.1415926535898
ISWTCH(1) = 2
ISWTCH(2) = 3
ISWTCH(3) = 4
ISWTCH(4) = 1
SMULSS(1) = 32.0
SMULSS(2) = 12.0
SMULSS(3) = 32.0
SMULSS(4) = 14.0
C CALL ROUTINE TO READ DATA AND PRINT HEADINGS FOR OUTPUT
20 CALL RDDATA
IF(1BODY-9)24,22,24
22 BDYFCT = 1.0
GO TO 26
24 BDYFCT = 0.5
C SET UP A LOOP FOR M AND SET VARIABLES WHICH ARE A FUNCTION OF M.
26 DO 900 IM = 1, NM
KMV = CMI(IM)
CMV = KMV
CM2 = CMV*CMV
PRODM = 1.0
IF(CMV)40,40,44
40 EM = 1.0
GO TO 60
44 EM = 2.0
QUANM = CMV
DO 52 IFCT = 1, KMV
QUANM = QUANM&1.0
PRODM = QUANM*PRODM/2.0
52 CONTINUE
60 QEM = -2.0/EM
TWM = CMV&CMV

C INITIALIZE ALL MATRIX AREAS TO ZERO
DO 80 I = 1, 28800
CLRMTX(I) = 0.0
80 CONTINUE
C SET UP A LOOP FOR ALL VALUES OF THETA.
THETA = 0.0
C SET UP GENERAL LOOP FOR CORRECT NUMBER OF INTEGRATION SECTIONS.
DO 800 ISECT = 1, NSECT
KSECT = ISECT
NTHETA = NDPS(ISECT) & 1
DLHTA = CDH(ISECT)
DHM = DLHTA/22.5
ISMRL = 4
DO 700 IHTA = 1, NTHETA
C SET SWITCHES AND MULTIPLIERS FOR SIMPSONS INTEGRATION METHOD.
IF(IHTA-1)120,120,132
120 SRMUL = 7.0*DHM
IF(ISECT-1)700,700,362
132 IF(IHTA-NTHETA)200,148,148
148 SRMUL = 7.0*DHM
GO TO 340
200 ISMRL = ISWTCH(ISMRL)
SRMUL = SMULSS(ISMRL)*DHM
340 THETA = THETA & DLHTA
348 COSTH = COS(THETA)
SINHT = SIN(THETA)
C GENERATE THE LEGENDRE POLYNOMIALS.
CALL GENLGP
C EVALUATE KR AS A FUNCTION OF THETA. ALSO ITS DERIVATIVE.
CALL GENKR
CSKRX = COS(CKR)/CKR
SNKRX = SIN(CKR)/CKR
CKR2 = CKR*CKR
C GENERATE BESSEL FUNCTIONS, THEIR DERIVATIVES AND NEUMANN
1FUNCTIONS.
CALL GENBSL
C PERFORM BESSEL TEST AND NEUMANN TEST
QUANBT = ABS(CKR2*(BSSLSP(2)*CNEUMN(1)-BSSLSP(1)*CNEUMN(2))-1.0)
QUANNT = ABS(CKR2*(BSSLSP(NRANKI)*CNEUMN(NRANK)-BSSLSP(NRANK)
1*CNFUMN(NRANKI))-1.0)
IF(QUANBT-1.0E-10)360,352,352
352 THTPRT = RTD*THETA
PRINT 356, THTPRT, CKR, QUANBT, QUANNT
356 FORMAT(1HO10X,13H***** THETA =F9.4,6H, KR =F10.4,15H, BESSEL TEST =E12.
15,16H, NEUMANN TEST =E12.5,6H *****)
GO TO 362
360 IF(QUANNT-1.0E-10)362,352,352
362 CROW = 0.0
CROWM = CMV
IMR = 2
DO 600 IROW = 1, NRANK
CROW = CROW & 1.0
CROWM = CROWM & 1.0
C SET UP A LOOP FOR EACH COLUMN OF THE MATRICES.
CCOL = 0.0
CCOLM = CMV
GO TO (364,366), IMR
364 JMR = 1
IMR = 2

```

```

GO TO 368
366 JMR = 2
    IMR = 1
368 DO 400 ICOL = 1, NRANK
    CCOL = CCOL & 1.0
    CRIJ = CROW & CCOL
    CRSSIJ = CROW * CCOL
    CCOLM = CCOLM & 1.0
    CCOL1 = CCOL & 1.0
    IF (IBODY - 7) 372, 369, 372
369 IF (ICOL - IROW) 370, 372, 372
370 GO TO (390, 398), JMR
372 BJ1XP = CCOL1 * DCKR * BSSLSP (ICOL & 1) * SINTH
    BJB1 = CKR * (CKR * BSSLSP (ICOL) - CCOL * BSSLSP (ICOL & 1))
    IF (IBODY - 9) 374, 376, 374
374 GO TO (376, 392), JMR
C   TEST FOR M = 0.
376 IF (CMV) 388, 388, 378
C   CALCULATE THE TERM FOR THE CURRENT ELEMENT IN THE I MATRIX.
378 TERMI = SINTH * CKR2 * BSSLSP (ICOL & 1) * (COSTH * PNMLLG (IROW & 1) * PNMLLG
1 (ICOL & 1) * CRIJ - CROWM * PNMLLG (ICOL & 1) * PNMLLG (IROW) - CCOLM * PNMLLG
2 (IROW & 1) * PNMLLG (ICOL))
    AMXII (IROW, ICOL) = AMXII (IROW, ICOL) & SRMUL * CNEUMN (IROW & 1) * TERMI
    IF (ICOL - IROW) 388, 384, 384
384 AMXIR (IROW, ICOL) = AMXIR (IROW, ICOL) & SRMUL * BSSLSP (IROW & 1) * TERMI
388 IF (IBODY - 9) 390, 392, 390
390 JMR = 2
    GO TO 400
C   CALCULATE TERM FOR CURRENT ELEMENT IN THE J MATRIX.
392 PTJ1 = PNMLLG (IROW & 1) * PNMLLG (ICOL & 1) * (BJB1 * (CM2 & CRSSIJ * COSTH ** 2)
1 & CRSSIJ * COSTH * BJ1XP)
    PTJ2 = CROWM * CCOL * PNMLLG (IROW) * PNMLLG (ICOL & 1) * (COSTH * BJB1 &
1 BJB1XP)
    PTJ3 = CCOLM * PNMLLG (ICOL) * BJB1 * (CROWM * PNMLLG (IROW) - CROW *
1 * COSTH * PNMLLG (IROW & 1))
    AMXJI (IROW, ICOL) = AMXJI (IROW, ICOL) & SRMUL * SINTH * CNEUMN (IROW & 1)
1 * (PTJ1 - PTJ2 & PTJ3)
    IF (ICOL - IROW) 398, 396, 396
396 AMXJR (IROW, ICOL) = AMXJR (IROW, ICOL) & SRMUL * SINTH * BSSLSP (IROW & 1)
1 * (PTJ1 - PTJ2 & PTJ3)
398 JMR = 1
400 CONTINUE
600 CONTINUE
700 CONTINUE
800 CONTINUE
C   SYMMETRIZE REAL MATRICES AND IMAGINARY SPHERICAL MATRICES.
DO 816 IROW = 2, NRANK
    IENDSY = IROW - 1
    DO 812 ICOL = 1, IENDSY
    AMXIR (IROW, ICOL) = AMXIR (ICOL, IROW)
    AMXJR (IROW, ICOL) = AMXJR (ICOL, IROW)
C   TEST FOR SPHERICAL BODIES.
    IF (IBODY - 7) 812, 808, 812
808 AMXII (IROW, ICOL) = AMXII (ICOL, IROW)
    AMXJI (IROW, ICOL) = AMXJI (ICOL, IROW)
812 CONTINUE
816 CONTINUE
C   SUMMATION FOR ALL MATRIX ELEMENTS COMPLETE. FINISH PROCESSING
1THEM

```

```

DO 860 JROW = 1, NRANK
DO 820 JCOL = 1, NRANK
AMXIR (JROW, JCOL) = CMV * AMXIR (JROW, JCOL)
AMXII (JROW, JCOL) = CMV * AMXII (JROW, JCOL)
AMXJR (JROW, JCOL) = QEM * AMXJR (JROW, JCOL)
AMXJI (JROW, JCOL) = QEM * AMXJI (JROW, JCOL)
C   COMPUTE K MATRIX AS A FUNCTION OF THE J MATRIX.
AMXKR (JROW, JCOL) = -AMXJR (JROW, JCOL)
AMXKI (JROW, JCOL) = -AMXJI (JROW, JCOL)
C   CALCULATE THE L MATRIX AS A FUNCTION OF THE I MATRIX.
AMXLR (JROW, JCOL) = -AMXIR (JROW, JCOL)
AMXLI (JROW, JCOL) = -AMXII (JROW, JCOL)
820 CONTINUE
C   COMPUTE ADDITIONAL TERM FOR THE IMAGINARY PART OF THE K MATRIX.
CKROW = JROW
IF (KMOV) 824, 824, 826
824 FCTKI = 1.0
    GO TO 840
826 IF (JROW - KMOV) 828, 830, 830
828 CMXNRM (JROW) = 1.0
    GO TO 860
830 IBFCT = JROW - KMOV & 1
    IEFCT = JROW & KMOV
    FPROD = IBFCT
    FCTKI = 1.0
    DO 832 LFCT = IBFCT, IEFCT
    FCTKI = FCTKI * FPROD
    FPROD = FPROD & 1.0
832 CONTINUE
840 CMXNRM (JROW) = 4.0 * CKROW * (CKROW & 1.0) * FCTKI / (EM * (CKROW & CKROW
1 & 1.0))
    AMXKI (JROW, JROW) = AMXKI (JROW, JROW) & BDFYCT * CMXNRM (JROW)
    CMXNRM (JROW) = SQRT (CMXNRM (JROW))
860 CONTINUE
C   PROCESS COMPUTED MATRICES
CALL PRCSSM
900 CONTINUE
GO TO 20
END

```

```

C   A PROGRAM TO READ INPUT DATA FOR THE SCATTERING PROGRAM.
SUBROUTINE RDDATA
COMMON DTR,RTD,CPI
COMMON /CMVCOM/ NM, CMI(30), CMV, KMV, CM2, EM, QEM, TWM, PRODM
COMMON /FNCCOM/ PNMLLG(61), BSSLSP(61), CNEUMN(61)
COMMON /MTXCOM/ NRANK, NRANKI, CMTXRL(120,120), CMTXIM(120,120), SPRMT
1X(120,120), CMXNRM(60)
COMMON /THTCOM/ THETA, NTHETA, DLTHTA, SINTH, COSTH, ISMRL, ISWTCH
1(7), SRMUL, SMULSS(7), CDH(6), DHM, NSECT, NDPS(6), EPPS(6), KSECT
COMMON /BDYCOM/ CKR, DCKR, CKR2, CSKRX, SNKRX, CONK, BRXT, ALPHA, IBOD
1Y, QB, SNALPH, CSALPH
COMMON /TOTCOM/ ACANS(60,10), STSFCT, RTSFCT
COMMON /UVCCOM/ UANG(60), NUANG
DIMENSION CLRTOT(600)
EQUIVALENCE (ACANS(1,1), CLRTOT)
DIMENSION EPDEG(10)
C   READ NECESSARY INPUT DATA
PRINT 40
40  FORMAT(1H1119X,3HCVM//////////1H039X,40H*****
1*****1H028X,63HELECTROMAGNETIC SCATTERING FROM GENERAL
2AXISYMMETRIC CONDUCTORS/1H039X,40H*****
3*****)
READ 80, NM, NRANK, NSECT, IBODY, NUANG
80  FORMAT(6I12)
NRANKI = NRANK & 1
PRINT 88
88  FORMAT(1H129X,75H      CASES      MATRIX RANK      SECTIONS
1BODY SHAPE      U VECTOR)
PRINT 92, NM, NRANK, NSECT, IBODY, NUANG
92  FORMAT(1H029X,5I15)
READ 96, CONK, BRXT, ALPHA.
96  FORMAT(6F12.7)
RTSFCT = 8.0/CONK
STSFCT = 2.0*RTSFCT/CONK
PRINT 100
100 FORMAT(1H029X,60HBODY PARAMETERS      K(A)      BETA/RHO
1      ALPHA)
PRINT 104, CONK, BRXT, ALPHA
104 FORMAT(1H044X,3F15.3)
READ 96, (CMI(I), I = 1, NM)
READ 80, (NDPS(I), I = 1, NSECT)
PRINT 120, (NDPS(I), I = 1, NSECT)
120 FORMAT(24H0      INTEGRATIONS/SECTION8I12,/(1H023X,8I12))
READ 96, (UANG(I), I = 1, NUANG)
C   CLEAR AREA WHICH CONTAINS RUNNING TOTALS.
DO 136 I = 1, 600
CLRTOT(I) = 0.0
136 CONTINUE
C   COMPUTE END POINTS FOR THETA
ALPHA = DTR*ALPHA
CALL CALENP
DO 140 I = 1, NSECT
EPDEG(I) = RTD*EPPS(I)
140 CONTINUE
PRINT 148, (EPDEG(I), I = 1, NSECT)
148 FORMAT(24H0      END POINTS8F12.4,/(1H023X,8F12.4))
RETURN
END

```

```

C   THIS ROUTINE CALCULATES END POINTS AND SPACING FOR INTEGRATION.
SUBROUTINE CALENP
COMMON DTR,RTD,CPI
COMMON /CMVCOM/ NM, CMI(30), CMV, KMV, CM2, EM, QEM, TWM, PRODM
COMMON /FNCCOM/ PNMLLG(61), BSSLSP(61), CNEUMN(61)
COMMON /MTXCOM/ NRANK, NRANKI, CMTXRL(120,120), CMTXIM(120,120), SPRMT
1X(120,120), CMXNRM(60)
COMMON /THTCOM/ THETA, NTHETA, DLTHTA, SINTH, COSTH, ISMRL, ISWTCH
1(7), SRMUL, SMULSS(7), CDH(6), DHM, NSECT, NDPS(6), EPPS(6), KSECT
COMMON /BDYCOM/ CKR, DCKR, CKR2, CSKRX, SNKRX, CONK, BRXT, ALPHA, IBOD
1Y, QB, SNALPH, CSALPH
SNALPH = SIN(ALPHA)
CSALPH = COS(ALPHA)
QB = (1.0 - BRXT)*(1.0 - SNALPH)/2.0
C   CALCULATE THE FIRST END POINT AND STEP SIZE
TANGAM = SNALPH*(CSALPH/(QB - SNALPH*SNALPH))
GAMMA = ATAN(TANGAM)
IF(GAMMA)20,32,32
20  GAMMA = GAMMA & CPI
32  EPPS(1) = GAMMA
CDVD = NDPS(1)
CDH(1) = EPPS(1)/CDVD
C   CALCULATE THE SECOND END POINT AND STEP SIZE.
TANPSI = -BRXT*SNALPH*CSALPH/(1.0 - QB - BRXT*CSALPH*CSALPH)
PSI = ATAN(TANPSI)
IF(PSI)60,72,72
60  PSI = PSI & CPI
72  EPPS(2) = PSI
CDVD = NDPS(2)
CDH(2) = (EPPS(2) - EPPS(1))/CDVD
C   COMPUTE THIRD END POINT AND STEP SIZE
EPPS(3) = CPI
CDVD = NDPS(3)
CDH(3) = (EPPS(3) - EPPS(2))/CDVD
RETURN
END

```

```

C   A ROUTINE TO GENERATE LEGENDRE POLYNOMIALS.
SUBROUTINE GENLGP
COMMON DTR,RTD,CPI
COMMON /CMVCOM/ NM, CMI(30), CMV, KMV, CM2, EM, QEM, TWM, PRODM
COMMON /FNCCOM/ PNMLLG(61), BSSLSP(61), CNEUMN(61)
COMMON /MTXCOM/ NRANK, NRANKI, CMTXRL(120,120), CMTXIM(120,120), SPRMT
1X(120,120), CMXNRM(60)
COMMON /THTCOM/ THETA, NTHETA, DLHTA, SINTH, COSTH, ISMRL, ISWTCH
1(7), SRMUL, SMULSS(7), CDH(6), DHM, NSECT, NDPS(6), EPPS(6), KSECT.
COMMON /BDYCOM/ CKR, DCKR, CKR2, CSKRX, SNKRX, CONK, BRXT, ALPHA,
1IBODY, QB, SNALPH, CSALPH
DTWM = TWM&1.0
IF(THETA)16,4,16
4 IF(KMV-1)6,12,6
6 DO 8 ILG = 1, NRANKI
  PNMLLG(ILG) = 0.0
8 CONTINUE
GO TO 88
12 PNMLLG(1) = 0.0
  PNMLLG(2) = 1.0
  PLA = 1.0
  GO TO 48
16 IF(KMV)20,20,40
  THE SPECIAL CASE WHEN M = 0.
20 PLA = 1.0/SINTH
  PLB = COSTH*PLA
  PNMLLG(1) = PLA
  PNMLLG(2) = PLB
  IBEG = 3
  GO TO 60
C   GENERAL CASE FOR M NOT EQUAL TO 0.
40 DO 44 ILG = 1, KMV
  PNMLLG(ILG) = 0.0
44 CONTINUE
  PLA = PRODM*SINTH**(KMV-1)
  PNMLLG(KMV&1) = PLA
48 PLB = DTWM*COSTH*PLA
  PNMLLG(KMV&2) = PLB
  IBEG = KMV&3
C   DO RECURSION FORMULA FOR ALL REMAINING LEGENDRE POLYNOMIALS.
60 CNMUL = IBEG&IBEG-3
  CNM = 2.0
  CNMM = DTWM
  DO 80 ILGR = IBEG, NRANKI
  PLG = (CNMUL*COSTH*PLB - CNMM*PLA)/CNM
  PNMLLG(ILGR) = PLC
  PLA = PLB
  PLB = PLC
  CNMUL = CNMUL&2.0
  CNM = CNM&1.0
  CNMM = CNMM&1.0
80 CONTINUE
88 RETURN
END

```

```

C   THIS ROUTINE COMPUTES KR AND ITS DERIVATIVE AS A FUNCTION OF
1THETA
SUBROUTINE GENKR
COMMON DTR,RTD,CPI
COMMON /CMVCOM/ NM, CMI(30), CMV, KMV, CM2, EM, QEM, TWM, PRODM
COMMON /FNCCOM/ PNMLLG(61), BSSLSP(61), CNEUMN(61)
COMMON /MTXCOM/ NRANK, NRANKI, CMTXRL(120,120), CMTIMX(120,120), SPRMT
1X(120,120), CMXNRM(60)
COMMON /THTCOM/ THETA, NTHETA, DLHTA, SINTH, COSTH, ISMRL, ISWTCH
1(7), SRMUL, SMULSS(7), CDH(6), DHM, NSECT, NDPS(6), EPPS(6), KSECT
COMMON /BDYCOM/ CKR, DCKR, CKR2, CSKRX, SNKRX, CONK, BRXT, ALPHA, IBOD
1Y, QB, SNALPH, CSALPH
KSECT = KSECT
C   DETERMINE SECTION FOR INTEGRATION
IF(KSECT-2)40,140,240
C   SECTION 1
40 QUAN1 = SQRT(1.0-(QB*SINTH/SNALPH)**2)
  CKR = CONK*(QB*COSTH/SNALPH&QUAN1)
  DCKR = -CONK*(QB*SINTH/SNALPH)*(1.0&QB*COSTH/(SNALPH*QUAN1))
  GO TO 300
C   SECTION 2
140 QUAN2 = THETA-ALPHA
  SNQN2 = SIN(QUAN2)
  CKR = CONK*(1.0-QB)/SNQN2
  DCKR = -CONK*(1.0-QB)*COS(QUAN2)/(SNQN2*SNQN2)
  GO TO 300
C   SECTION 3
240 QUAN3 = (1.0-BRXT-QB)/SNALPH
  QUNSQ = SQRT(BRXT BRXT-(QUAN3 SINTH)**2)
  CKR = CONK*(QUNSQ-QUAN3*COSTH)
  DCKR = CONK*(QUAN3*SINTH-QUAN3*QUAN3*SINTH*COSTH/QUNSQ)
300 RETURN
END

```



```

C   A ROUTINE FOR BESSEL FUNCTIONS, DERIVATIVES AND NEUMANN
    1FUNCTIONS.
      SUBROUTINE GENBSL
        COMMON DTR,RTD,CPI
        COMMON /CMVCOM/ NM, CMI(30), CMV, KMV, CM2, EM, QEM, TWM, PRODM
        COMMON /FNCCOM/ PNMLLG(61), BSSLSP(61), CNEUMN(61)
        COMMON /MTXCOM/ NRANK, NRANKI, CMTXRL(120,120), CMTXIM(120,120), SPRMT
        1X(120,120), CMXNRM(60)
        COMMON /THTCOM/ THETA, NTHETA, DLTHTA, SINTH, COSTH, ISMRL, ISWTCH
        1(7), SRMUL, SMULSS(7), CDH(6), DHM, NSECT, NDPS(6), EPPS(6), KSECT
        COMMON /BDYCOM/ CKR, DCKR, CKR2, CSKRX, SNKRX, CONK, BRXT, ALPHA, IBOD
        1Y, QB, SNALPH, CSALPH
      DOUBLE PRECISION PCKR, ANSWR, ANSA, ANSB, ANSC, CONN
      SET UP A LOOP TO GET 2 SUCCESSIVE BESSEL FUNCTIONS.
      NVAL = NRANK-1
      PCKR = CKR
      DO 40 I = 1,4
        CALL BESSEL(NVAL,PCKR,ANSWR,IERROR)
        IF(IERROR)20,20,32
      20 ANSA=ANSWR
        NVAL = NVAL&1
        CALL BESSEL(NVAL,PCKR,ANSWR,IERROR)
        IF(IERROR)24,24,28
      24 ANSB = ANSWR
        GO TO 60
      28 NVAL = NVAL-1
      32 NVAL = NVAL&NRANK
      40 CONTINUE
C   PROGRAM UNABLE TO GENERATE BESSEL FUNCTION.
      CALL DUMP
C   SET UP FOR PROPER RECURSION OF THE BESSEL FUNCTIONS.
      60 IF(NVAL-NRANK)100,100,64
      64 IEND = NVAL-NRANK
        CONN = 2*(NVAL-1)&1
        DO 72 IP = 1,IEND
          ANSC = CONN*ANSA/PCKR-ANSB
          CONN = CONN-2.0D0
          ANSB = ANSA
          ANSA = ANSC
      72 CONTINUE
C   PROGRAM IS READY TO RECURSE DONWARD INTO BESSEL FUNCTON
      1VECTOR.
      100 BSSLSP(NRANKI) = ANSB
        BSSLSP(NRANKI-1) = ANSA
        CONN = NRANK&NRANK-1
        IE = NRANKI-2
        JE = IE
        DO 120 JB = 1,JE
          ANSC = CONN*ANSA/PCKR-ANSB
          BSSLSP(IE) = ANSC
          ANSB = ANSA
          ANSA = ANSC
          IE = IE-1
          CONN = CONN-2.0D0
      120 CONTINUE.
C   GENERATE THE NEUMANN FUNCTIONS.
      CMULN = 3.0
      SNSA = -CSKRX

```

```

      SNSB = -CSKRX/CKR-SNKRX
      CNEUMN(1) = SNSA
      CNEUMN(2) = SNSB
      DO 280 I = 3,NRANKI
        SNSC = CMULN*SNSB/CKR-SNSA
        CNEUMN(I) = SNSC
        SNSA = SNSB
        SNSB = SNSC
        CMULN = CMULN&2.0
      280 CONTINUE
      RETURN
      END

```

```

C   A ROUTINE TO COMPUTE A BESSEL FUNCTION OF SET ORDER AND
      1ARGUMENT.
      SUBROUTINE BESSEL (NORDER,ARGMNT,ANSWR,IERROR)
      DOUBLE PRECISION ARGMNT,ANSWR,X,CN,SUM,APR,TOPR,CI,CNI,ACR,PROD,
      1FACT
      IERROR = 0
      N = NORDER
      X = ARGMNT
      CN = N
      SUM = 1.0
      APR = 1.0
      TOPR = -0.5D0*X*X
      CI = 1.0
      CNI = 2*N&3
      DO 60 I = 1,100
        ACR = TOPR*APR/(CI+CNI)
        SUM = SUM&ACR
        IF(DABS(ACR/SUM)-1.0D-20)100,100,40
      40 APR = ACR
        CI = CI&1.0D0
        CNI = CNI&2.0D0
      60 CONTINUE
      IERROR = 1
      GO TO 200
      THE SERIES HAS CONVERGED.
      100 PROD = 2*N&1
        FACT = 1.0
        IF(N)160,160,120
      120 DO 140 IFCT = 1,N
        FACT = FACT*X/PROD
        PROD = PROD-2.0D0
      140 CONTINUE
      160 ANSWER = FACT*SUM
      200 RETURN
      END

```

```

C   A ROUTINE TO ORTHOGONALIZE THE Q MATRICES TO PRODUCE T MATRICES.
    SUBROUTINE PRCSSM
    COMMON /MTXCOM/ NR,NRI,Q11(60,60),Q12(60,60),Q13(60,60),Q14(60,60),P1(60,60),P2
1(60,60),P3(60,60),P4(60,60),QR1(60,60),QR2(60,60),QR3(60,60),QR4(60,60),CMXNRM(60)
    EQUIVALENCE (Q11,R11),(QR1,RR1),(TMMX,P1)
    DIMENSION RR1(120,120),R11(120,120),TMMX(120,120)
C   NORMALIZE AND TRANSPOSE THE I,J,K,L MATRICES TO OBTAIN Q MATRICES.
    CALL NRMQMX
C   SET UP REAL AND IMAGINARY MATRICES FOR GENERAL M CASE.
    DO 6 I=1,NR
    MM=I&I
    DO 4 J=1,NR
    NN=J&J
    TMMX(MM-1,NN-1) = Q11(I,J)
    TMMX(MM-1,NN)   = Q12(I,J)
    TMMX(MM,NN-1)   = Q13(I,J)
    TMMX(MM,NN)     = Q14(I,J)
4   CONTINUE
6   CONTINUE
    NBGR = NR&NR
    DO 10 I = 1,NBGR
    DO 8 J = 1,NBGR
    R11(I,J) = TMMX(I,J)
8   CONTINUE
10  CONTINUE
    DO 14 I = 1,NR
    MM = I&I
    DO 12 J = 1,NR
    NN = J&J
    TMMX(MM-1,NN-1) = QR1(I,J)
    TMMX(MM-1,NN)   = QR2(I,J)
    TMMX(MM,NN-1)   = QR3(I,J)
    TMMX(MM,NN)     = QR4(I,J)
12  CONTINUE
14  CONTINUE
    DO 18 I = 1,NBGR
    DO 16 J = 1,NBGR
    RR1(I,J) = TMMX(I,J)
16  CONTINUE
18  CONTINUE
C   CONDITION Q MATRICES BEFORE ORTHOGONALIZING THEM.
    CALL CNDTNQ
C   NORMALIZE THE NTH ROW OF AN N BY N MATRIX
    SUM1 = 0.0
    DO 20 K = 1,NBGR
    SUM1 = RR1(NBGR,K)**2&R11(NBGR,K)**2&SUM1
20  CONTINUE
    SUM1 = SQRT(SUM1)
    DO 28 K = 1,NBGR
    RR1(NBGR,K) = RR1(NBGR,K)/SUM1
    R11(NBGR,K) = R11(NBGR,K)/SUM1
28  CONTINUE
C   SET UP A LOOP FOR THE N-1 REMAINING ROWS.
    NMI = NBGR-1
    NROW = NBGR
    DO 100 I = 1,NMI
    NROW = NROW-1
    MROW = NROW

```

```

    DO 36 K = 1,NBGR
    TMMX(1,K) = RR1(NROW,K)
    TMMX(2,K) = R11(NROW,K)
36  CONTINUE
    DO 80 J = NROW,NMI
    SR1 = 0.0
    S11 = 0.0
    MROW = MROW & 1
    DO 40 K = 1,NBGR
    SR1 = SR1 & RR1(MROW,K)*RR1(NROW,K) & R11(MROW,K)*R11(NROW,K)
    S11 = S11 & RR1(MROW,K)*R11(NROW,K) - R11(MROW,K)*RR1(NROW,K)
40  CONTINUE
    DO 48 K = 1,NBGR
    TMMX(1,K) = TMMX(1,K) - SR1*RR1(MROW,K) & S11*R11(MROW,K)
    TMMX(2,K) = TMMX(2,K) - SR1*R11(MROW,K) - S11*RR1(MROW,K)
48  CONTINUE
80  CONTINUE
    SUM1 = 0.0
    DO 84 K = 1,NBGR
    SUM1 = SUM1 & TMMX(1,K)**2 & TMMX(2,K)**2
84  CONTINUE
    SUM1 = SQRT(SUM1)
    DO 88 K = 1,NBGR
    RR1(NROW,K) = TMMX(1,K)/SUM1
    R11(NROW,K) = TMMX(2,K)/SUM1
88  CONTINUE
100 CONTINUE
C   PRINT OUT ORTHOGONALIZED Q MATRICES
    PRINT 120
120  FORMAT (1H140X,40HREAL SECTION OF ORTHOGONALIZED Q MATRIX.)
    CALL PRNQOT(RR1,NBGR)
    PRINT 128
128  FORMAT (1H137X,45HIMAGINARY SECTION OF ORTHOGONALIZED Q MATRIX.)
C   PERFORM Q TRANSPOSE * REAL(Q) TO GET T MATRIX.
    DO 160 I = 1,NBGR
    DO 152 J = 1,NBGR
    TMMX(I,J) = 0.0
152  CONTINUE
160  CONTINUE
    DO 180 I = 1,NBGR
    DO 176 J = 1,NBGR
    DO 172 K = 1,NBGR
    TMMX(I,J) = TMMX(I,J) - R11(K,I)*RR1(K,J)
172  CONTINUE
176  CONTINUE
180  CONTINUE
    DO 196 I = 1,NR
    MM = I&I
    DO 192 J = 1,NR
    NN = J&J
    Q11(I,J) = TMMX(MM-1,NN-1)
    Q12(I,J) = TMMX(MM-1,NN)
    Q13(I,J) = TMMX(MM,NN-1)
    Q14(I,J) = TMMX(MM,NN)
192  CONTINUE
196  CONTINUE
    DO 208 I = 1,NBGR
    DO 204 J = 1,NBGR

```

```

TMMX(I,J) = 0.0
204 CONTINUE
208 CONTINUE
DO 220 I = 1,NBGR
DO 216 J = 1,NBGR
DO 212 K = 1,NBGR
TMMX(I,J) = TMMX(I,J) & RR1(K,I) * RR1(K,J)
212 CONTINUE
216 CONTINUE
220 CONTINUE
DO 236 I = 1,NR
MM = I & J
DO 232 J = 1,NR
NN = J & J
QR1(I,J) = TMMX(MM-1,NN-1)
QR2(I,J) = TMMX(MM-1,NN)
QR3(I,J) = TMMX(MM,NN-1)
QR4(I,J) = TMMX(MM,NN)
232 CONTINUE
236 CONTINUE
C PRINT THE T MATRIX
CALL PRTRIT
C DO FINAL PROCESSING
CALL ADDPRC
RETURN
END

```

```

C A ROUTINE TO NORMALIZE THE I,J,K AND L MATRICES TO GET A Q MATRIX.
SUBROUTINE NRMQMX
COMMON /MTXCOM/ NRANK,NRANKI,AMXIR(60,60),AMXJR(60,60),AMXKR(60,60),
1AMXLR(60,60),AMXII(60,60),AMXJI(60,60),AMXKI(60,60),AMXLI(60,60),QMTXIR(60,
260),QMTXJR(60,60),QMTXKR(60,60),QMTXLR(60,60),CMXNRM(603)
EQUIVALENCE (AMXIR,QMTXII),(AMXJR,QMTXJI),(AMXKR,QMTXKI),(AMXLR,
1QMTXLI)
DIMENSION QMTXII(60,60),QMTXJI(60,60),QMTXKI(60,60),QMTXLI(60,60)
C SET UP LOOPS TO PROCESS ALL ROWS AND COLUMNS FOR THE REAL
1MATRICES
DO 200 IR = 1,NRANK
DO 100 IC = 1,NRANK
QUANNM = CMXNRM(IR)*CMXNRM(IC)
QMTXIR(IR,IC) = AXMJR(IC,IR)/QUANNM
QMTXJR(IR,IC) = -AMXLR(IC,IR)/QUANNM
QMTXKR(IR,IC) = AMXIR(IC,IR)/QUANNM
QMTXLR(IR,IC) = AMXKR(IC,IR)/QUANNM
100 CONTINUE
200 CONTINUE
C SET UP LOOPS OF ROWS AND COLUMNS FOR THE IMAGINARY MATRICES.
DO 400 IR = 1,NRANK
DO 300 IC = 1,NRANK
QUANNM = CMXNRM(IR)*CMXNRM(IC)
QMTXII(IR,IC) = AMXJI(IC,IR)/QUANNM
QMTXJI(IR,IC) = -AMXLI(IC,IR)/QUANNM
QMTXKI(IR,IC) = AMXII(IC,IR)/QUANNM
QMTXLI(IR,IC) = AMXKI(IC,IR)/QUANNM
300 CONTINUE
400 CONTINUE
C PRINT OUT NORMALIZED AND TRANSPOSED Q MATRICES
PRINT 420
420 FORMAT(1H140X,38HREAL PART OF Q1(NORMALIZED,TRANSPOSED))
CALL PRINTM(QMTXIR,NRANK)
PRINT 428
428 FORMAT(1H140X,38HREAL PART OF Q2(NORMALIZED,TRANSPOSED))
CALL PRINTM(QMTXJR,NRANK)
PRINT 436
436 FORMAT(1H140X,38HREAL PART OF Q3(NORMALIZED,TRANSPOSED))
CALL PRINTM(QMTXKR,NRANK)
PRINT 444
444 FORMAT(1H140 X38HREAL PART OF Q4(NORMALIZED,TRANSPOSED))
CALL PRINTM(QMTXLR,NRANK)
PRINT 452
452 FORMAT(1H138X,43HIMAGINARY PART OF Q1(NORMALIZED,TRANSPOSED))
CALL PRINTM(QMTXII,NRANK)
PRINT 460
460 FORMAT(1H138X,43HIMAGINARY PART OF Q2(NORMALIZED,TRANSPOSED))
CALL PRINTM(QMTXJI,NRANK)
PRINT 468
468 FORMAT(1H138X,43HIMAGINARY PART OF Q3(NORMALIZED,TRANSPOSED))
CALL PRINTM(QMTXKI,NRANK)
PRINT 476
476 FORMAT(1H138X,43HIMAGINARY PART OF Q4(NORMALIZED,TRANSPOSED))
CALL PRINTM(QMTXLI,NRANK)
RETURN
END

```

```

C   A ROUTINE TO PRINT OUT A MATRIX ARRAY
SUBROUTINE PRINTM(P,N)
DIMENSION P(60,60)
NR = N
DO 100 I = 1,NR
  IB = 1
20  IE = IB&7
  IF(IE-NR)28,28,24
24  IE = NR
28  IF(IB-1)36,36,60
36  PRINT 44,I,(P(I,J),J = IB,IE)
44  FORMAT(5H0 ROWI3,2X,1P8E15.6)
  GO TO 80
60  PRINT 68,(P(I,J),J = IB,IE)
68  FORMAT(1H 9X,1P8E15.6)
80  IB = IE&1
  IF(IB-NR)20,20,100
100 CONTINUE
  RETURN
  END
  END

```

```

C   A ROUTINE TO CONDITION Q MATRICES BEFORE ORTHOGONALIZING THEM.
SUBROUTINE CNDTNQ
COMMON /MTXCOM/ NR,NR1,Q11(60,60),Q12(60,60),Q13(60,60),Q14(60,60),P1(60,60),P2
1(60,60),P3(60,60),P4(60,60),QR1(60,60),QR2(60,60),QR3(60,60),QR4(60,60),CMXNRM(60)
EQUIVALENCE (Q11,R11),(QR1,RR1),(TMMX,P1)
DIMENSION RR1(120,120),R11(120,120),TMMX(120,120)
C   SET UP LOOPS FOR ALL BUT THE FIRST ROW.
NBGR = NR&NR
NROW = NBGR
DO 60 KR = 2,NBGR
C   RESCALE THE CURRENT ROW.
SCLE1 = 1.0/R11(NROW,NROW)
DO 8 LC = 1,NBGR
  RR1(NROW,LC) = SCLE1*RR1(NROW,LC)
  R11(NROW,LC) = SCLE1*R11(NROW,LC)
8  CONTINUE
C   RESCALE ALL THE ROWS UP TO THE CURRENT ROW.
MROW = NROW-1
DO 20 MR = 1,MROW
  RSCL1 = R11(MR,NROW)
  DO 16 MC = 1,NBGR
    RR1(MR,MC) = RR1(MR,MC)-RSCL1*RR1(NROW,MC)
    R11(MR,MC) = R11(MR,MC)-RSCL1*R11(NROW,MC)
16  CONTINUE
20  CONTINUE
  NROW = NROW-1
60  CONTINUE
C   SET IMAGINARY ELEMENTS ABOVE THE MAIN DIAGONAL = 0.
NROW = NBGR-1
DO 80 I = 1,NROW
  IB = I&1
  DO 72 J = IB,NBGR
    R11(I,J) = 0.0
72  CONTINUE
80  CONTINUE
  RETURN
  END

```

C A ROUTINE TO PRINT OUT A MATRIX ARRAY

```
SUBROUTINE PRNQOT(P,N)
DIMENSION P(120,120)
NR = N
DO 100 I = 1,NR
  IB = 1
20  IE = IB & 7
  IF(IE-NR)28,28,24
24  IE = NR
28  IF(IB-1)36,36,60
36  PRINT 44,I,(P(I,J),J = IB,IE)
44  FORMAT(5H0 ROWI3,2X,1P8E15.6)
  GO TO 80
60  PRINT 68,(P(I,J),J = IB,IE)
68  FORMAT(1H 9X,1P8E15.6)
80  IB = IE & 1
  IF(IB-NR)20,20,100
100 CONTINUE
  RETURN
  END
```

C A SUBROUTINE TO PRINT OUT THE T MATRIX.

```
SUBROUTINE PRTRIT
COMMON /MTXCOM/ NRANK,NRANK1,QMTXII(60,60),QMTXJI(60,60),QMTXKI(60,
160),QMTXLI(60,60),PMX1(60,60),PMX2(60,60),PMX3(60,60),PMX4(60,60),QMTXIR(60,60)
2QMTXJR(60,60),QMTXKR(60,60),QMTXLR(60,60),CMXNRM(60)
EQUIVALENCE (QMTXII,CMTXRL),(PMX1,CMTXIM),(QMTXIR,SPRMTX)
DIMENSION CMTXRL(120,120),CMTXIM(120,120),CMTXIM(120,120),SPRMTX(120,120)
PRINT 28
28  FORMAT(1H1///1H052X,16HMATRIX T(1),REAL)
  CALL PRINTM(QMTXIR,NRANK)
  PRINT 128
128  FORMAT(1H1///1H052X,16HMATRIX T(2),REAL)
  CALL PRINTM(QMTXJR,NRANK)
  PRINT 228
228  FORMAT(1H1///1H052X,16HMATRIX T(3),REAL)
  CALL PRINTM(QMTXKR,NRANK)
  PRINT 328
328  FORMAT(1H1///1H052X,16HMATRIX T(4),REAL)
  CALL PRINTM(QMTXLR,NRANK)
  PRINT 428
428  FORMAT(1H1///1H049X,21HMATRIX T(1),IMAGINARY)
  CALL PRINTM(QMTXII,NRANK)
  PRINT 528
528  FORMAT(1H1///1H049X,21HMATRIX T(2),IMAGINARY)
  CALL PRINTM(QMTXJI,NRANK)
  PRINT 628
628  FORMAT(1H1///1H049X,21HMATRIX T(3),IMAGINARY)
  CALL PRINTM(QMTXKI,NRANK)
  PRINT 728
728  FORMAT(1H1///1H049X,21HMATRIX T(4),IMAGINARY)
  CALL PRINTM(QMTXLI,NRANK)
  RETURN
  END
```

C A ROUTINE TO DO FINAL PROCESSING ON THE SCATTERING MATRIX.

```
SUBROUTINE ADDPRC
COMMON DTR,RTD,CPI
COMMON /VMCOM/ NM,CMI(30),CMV,KMV,CM2,EM,QEM,TWM,PRODM
COMMON /FNCCOM/ PNMLLG(61),BSSLSP(61),CNEUMN(61)
COMMON /MTXCOM/ NRANK,NRANK1,QMTXII(60,60),QMTXJI(60,60),QMTXKI(60,
160),QMTXLI(60,60),PMX1(60,60),PMX2(60,60),PMX3(60,60),PMX4(60,60),QMTXIR(60,60),
2QMTXJR(60,60),QMTXKR(60,60),QMTXLR(60,60),CMXNRM(60)
COMMON /VCMCOM/ ISYBG,JSYBG,KSDBG,NSYMT
DIMENSION FGVECT(2,120,2),TCMPLX(2,120,120),FGMUL(120,2),FGANS(60,10)
EQUIVALENCE (QMTXII,FGVECT),(PMX1,TCMPLX),(QMTXJI,FGMUL),(QMTXKI,
1FGANS)
COMMON /THTCOM/ THETA,NTHETA,DLTHETA,SINTH,COSTH,ISMRL,ISWTCH
1(7),SRMUL,SMULSS(7),CDH(6),DHM,NSECT,NDPS(6),EPPS(6),KSECT
COMMON /TOTCOM/ ACANS(60,10),STSFACT,RTSFACT
COMMON /UVCCOM/ UANG(60),NUANG
COMMON /BDYCOM/ CKR,DCKR,CKR2,CSKRX,SNKRX,CONK,BRXT,ALPHA,IBOD
1Y,QB,SNALPH,CSALPH
C NORMALIZE AND STORE SECTIONS T1 AND T3 OF THE COMPLEX T MATRIX.
DO 40 IC = 1,NRANK
DO 20 IR = 1,NRANK
JR = IR & NRANK
QUANNM = CMXNRM(IR)/CMXNRM(IC)
TCMPLX(1,IR,IC) = QUANNM*QMTXIR(IR,IC)
TCMPLX(1,JR,IC) = QUANNM*QMTXKR(IR,IC)
TCMPLX(2,IR,IC) = QUANNM*QMTXII(IR,IC)
TCMPLX(2,JR,IC) = QUANNM*QMTXKI(IR,IC)
20 CONTINUE
40 CONTINUE
NORMALIZE AND STORE SECTIONS T2 AND T4 OF THE COMPLEX T MATRIX.
DO 60 IC = 1,NRANK
JC = IC & NRANK
DO 60 IR = 1,NRANK
JR = IR & NRANK
QUANNM = CMXNRM(IR)/CMXNRM(IC)
TCMPLX(1,IR,JC) = QUANNM*QMTXJR(IR,IC)
TCMPLX(1,JR,JC) = QUANNM*QMTXLR(IR,IC)
TCMPLX(2,IR,JC) = QUANNM*QMTXJI(IR,IC)
TCMPLX(2,JR,JC) = QUANNM*QMTXLI(IR,IC)
60 CONTINUE
80 CONTINUE
C SET UP A LOOP FOR ALL VALUES OF THE ANGLE U.
DO 400 IU = 1,NUANG
C GENERATE LEGENDRE POLYNOMIALS AND DERIVATIVES. RESET THE LIST.
IF(UANG(IU))96,88,96
88 COSTH = 1.0
92 SINTH = 0.0
  THETA = 0.0
  GO TO 112
96 IF(UANG(IU)-180.0)104,100,104
100 COSTH = -1.0
  GO TO 92
104 THETA = DTR*UANG(IU)
  SINTH = SIN(THETA)
  COSTH = COS(THETA)
112 CALL GENLGP
DO 120 IPS = 1,NRANK
FGMUL(IPS,1) = CMV*PNMLLG(IPS & 1)
```

```

CPS = IPS
FGMUL(IPS,2) = CPS*COSTH*PNMLLG(IPS&1) (CPS&CMV)*PNMLLG(IPS)
JPS = IPS&NRANK
FGMUL(JPS,1) = FGMUL(IPS,2)
FGMUL(JPS,2) = FGMUL(IPS,1)
120 CONTINUE
C MULTIPLY THE T COMPLEX MATRIX TIMES THE LEGENDRE VECTORS.
KMVM1 = (KMV-1)/4
KMVM1 = 4*KMVM1
IF(KMVM1)132,132,124
124 DO 128 IZ = 1,KMVM1
FGVECT(1,IZ,1) = 0.0
FGVECT(2,IZ,1) = 0.0
FGVECT(1,IZ,2) = 0.0
FGVECT(2,IZ,2) = 0.0
JZ = IZ&NRANK
FGVECT(1,JZ,1) = 0.0
FGVECT(2,JZ,1) = 0.0
FGVECT(1,JZ,2) = 0.0
FGVECT(2,JZ,2) = 0.0
128 CONTINUE
ISYBG = 242*(KMVM1)
JSYBG = KMVM1
KSYBG = 2*KMVM1
NSYMT = NRANK-KMVM1
GO TO 136
132 ISYBG = 0
JSYBG = 0
KSYBG = 0
NSYMT = NRANK
136 CALL VECMUL
C A LOOP TO ZERO CURRENT SUMS OF SCAT1,2, TOTAL1,2 AND RTRAD1,2.
DO 140 IZ = 1,10
FGANS(IU,IZ) = 0.0
140 CONTINUE
C SET UP LOOP FOR CURRENT VALUES OF THE SUMS.
IPTH = 1
DO 200 ICMS = 1,NRANK
JCMS = ICMS&NRANK
C COMPUTE SCATT1 AND SCATT2 SUMS
FGANS(IU,1) = FGANS(IU,1)&(FGVECT(1,ICMS,1)**2&FGVECT(2,ICMS,1)**2
1&FGVECT(1,JCMS,1)**2&FGVECT(2,JCMS,1)**2)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,6) = FGANS(IU,6)&(FGVECT(1,JCMS,2)**2&FGVECT(2,JCMS,2)**2
1&FGVECT(1,ICMS,2)**2&FGVECT(2,ICMS,2)**2)/CMXNRM(ICMS)**2
C FORM THE REAL AND IMAGINARY PARTS OF TOTAL1,2 AND RTRAD1,2
PFR1 = FGVECT(1,ICMS,1)*FGMUL(ICMS,1)
PFI1 = FGVECT(2,ICMS,1)*FGMUL(ICMS,1)
PFR2 = -FGVECT(2,JCMS,2)*FGMUL(ICMS,1)
PFI2 = FGVECT(1,JCMS,2)*FGMUL(ICMS,1)
PGR1 = FGVECT(1,JCMS,1)*FGMUL(JCMS,1)
PGI1 = FGVECT(2,JCMS,1)*FGMUL(JCMS,1)
PGR2 = -FGVECT(2,ICMS,2)*FGMUL(JCMS,1)
PGI2 = FGVECT(1,ICMS,2)*FGMUL(JCMS,1)
GO TO (150,154,158,162),IPTH
150 SGN = &1.0
IPTH = 2
GO TO 170
154 SGN = -1.0
IPTH = 3

```

```

GO TO 180
158 SGN = -1.0
IPTH = 4
GO TO 170
162 SGN = &1.0
IPTH = 1
GO TO 180
C CASE FOR N MOD 4 IS 1 (-1,&1) OR 3 (&1,-1)
170 FGANS(IU,2) = FGANS(IU,2) &SGN*(PFI1&PGR1)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,3) = FGANS(IU,3) -SGN*(PFR1-PGI1)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,7) = FGANS(IU,7) &SGN*(PFI2-PGR2)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,8) = FGANS(IU,8) -SGN*(PFR2&PGI2)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,4) = FGANS(IU,4) -SGN*(PFI1-PGR1)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,5) = FGANS(IU,5) &SGN*(PFR1&PGI1)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,9) = FGANS(IU,9) -SGN*(PFI2&PGR2)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,10) = FGANS(IU,10) &SGN*(PFR2-PGI2)/CMXNRM(ICMS)**2
GO TO 200
C CASE FOR N MOD 4 IS 2 (-1,-1) OR 4 (&1,&1)
180 FGANS(IU,2) = FGANS(IU,2) &SGN*(PFR1-PGI1)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,3) = FGANS(IU,3) &SGN*(PFI1&PGR1)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,7) = FGANS(IU,7) &SGN*(PFR2&PGI2)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,8) = FGANS(IU,8) &SGN*(PFI2-PGR2)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,4) = FGANS(IU,4) &SGN*(PFR1&PGI1)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,5) = FGANS(IU,5) &SGN*(PFI1-PGR1)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,9) = FGANS(IU,9) &SGN*(PFR2-PGI2)/CMXNRM(ICMS)**2
FGANS(IU,10) = FGANS(IU,10) &SGN*(PFI2&PGR2)/CMXNRM(ICMS)**2
200 CONTINUE
C SCALE ACCUMULATIVE SUMS
FGANS(IU,1) = STSFCT*FGANS(IU,1)
FGANS(IU,2) = STSFCT*FGANS(IU,2)
FGANS(IU,3) = STSFCT*FGANS(IU,3)
FGANS(IU,4) = RTSFCT*FGANS(IU,4)
FGANS(IU,5) = RTSFCT*FGANS(IU,5)
FGANS(IU,6) = STSFCT*FGANS(IU,6)
FGANS(IU,7) = STSFCT*FGANS(IU,7)
FGANS(IU,8) = STSFCT*FGANS(IU,8)
FGANS(IU,9) = RTSFCT*FGANS(IU,9)
FGANS(IU,10) = RTSFCT*FGANS(IU,10)
400 CONTINUE
C PRINT PARTIAL SUMS AND ACCUMULATE TOTALS.
DO 500 IPR = 1,2
PRINT 420,KMV,IPR
420 FORMAT(1H137X,31H***** CURRENT SUMS FOR M =I3,11H*****//6H0
1CLASSI2,82H ANGLE SCATTERING TOTAL(REAL) TOTAL(IMAG)
2(RTRAD)(REAL) RTRAD(IMAG)//)
IBEG = 1 &5*(IPR-1)
IEND = IBEG &4
DO 460 IUP = 1,NUANG
DO 432 ICAL = IBEG,IEND
ACANS(IUP,ICAL) = ACANS(IUP,ICAL) &FGANS(IUP,ICAL)
432 CONTINUE
PRINT 440,UANG(IUP),(FGANS(IUP,LP),LP = IBEG,IEND)
440 FORMAT(1H F14.2,1P7E15.6)
460 CONTINUE
500 CONTINUE
C PRINT THE ACCUMULATE TOTALS.
DO 600 JPR = 1,2
PRINT 520,KMV,JPR
520 FORMAT(1H135X,35H***** ACCUMULATED SUMS FOR M =I3,11H*****

```

```

1**//6H0CLASS12,112H ANGLE SCATTERING TOTAL(REAL) TOTAL
2(IMAG) RTRAD(REAL) RTRAD(IMAG) RCS PHASE ANGLE//

```

```
JBEG = 1&5 (JPR-1)
```

```
JEMD = JBEG&4
```

```
DO 560 JUP = 1,NUANG
```

```
C COMPUTE PHASE ANGLE AND RCS 1 OR 2.
```

```
PHANG = RTD*ATAN2(ACANS(JUP,JEND),ACANS(JUP,JEND-1))
```

```
RCS12 = ACANS(JUP,JEND-1)**2&ACANS(JUP,JEND)**2
```

```
PRINT 440,UANG(JUP),(ACANS(JUP,LP),LP = JBEG,JEND),RCS12,PHANG
```

```
540 FORMAT(1H F14.3,1P7E15.6)
```

```
560 CONTINUE
```

```
600 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```

```
C A ROUTINE TO COMPUTE THE F1, G1 AND F2, G2 VECTORS.
```

```
SUBROUTINE VECMUL
```

```
COMMON /MTXCOM/ NRANK,NRANKI,QMTXII(60,60),QMTXJI(60,60),QMTXKI(60,60),
QMTXLI(60,60),PMX1(60,60),PMX2(60,60),PMX3(60,60),PMX4(60,60),QMTXIR(60,60),Q
2MTXJR(60,60),QMTXKR(60,60),QMTXLR(60,60),CMXNRM(603)
```

```
COMMON /VCMCOM/ ISYBG,JSYBG,KSDBG,NSYMT
```

```
DIMENSION FGVECT(2,120,2),TCMPLX(2,120,120),FGMUL(120,2),FGANS(60,10)
```

```
EQUIVALENCE (QMTXII,FGVECT),(PMX1,TCMPLX),(QMTXJI,FGMUL),(QMTXKI,F
1GANS)
```

```
N = NRANK+NRANK
```

```
C THIS LOOP CONTROLS ROW ELEMENTS,
```

```
DO 200 I = 1,N
```

```
SRA = 0.0
```

```
SIA = 0.0
```

```
SRB = 0.0
```

```
SIB = 0.0
```

```
IP = 1
```

```
C THIS LOOP CONTROLS COLUMN ELEMENT MULTIPLICATION.
```

```
DO 100 J = 1,NRANK
```

```
JP = NRANK+J
```

```
GO TO (20,40,60,80), IP
```

```
N = 1
```

```
20 SRA = SRA+TCMPLX(1,I,J)*FGMUL(J,1)+TCMPL(2,I,JP)*FGMUL(JP,1)
```

```
SIA = SIA+TCMPLX(2,I,J)*FGMUL(J,1)-TCMPL(1,I,JP)*FGMUL(JP,1)
```

```
SRB = SRB+TCMPLX(2,I,J)*FGMUL(J,2)-TCMPLX(1,I,JP)*FGMUL(JP,2)
```

```
SIB = SIB-TCMPLX(1,I,J)*FGMUL(J,2)-TCMPLX(2,I,JP)*FGMUL(JP,2)
```

```
IP = 2
```

```
GO TO 100
```

```
N = 2
```

```
40 SRA = SRA-TCMPLX(2,I,J)*FGMUL(J,1)+TCMPLX(1,I,JP)*FGMUL(JP,1)
```

```
SIA = SIA+TCMPLX(1,I,J)*FGMUL(J,1)+TCMPLX(2,I,JP)*FGMUL(JP,1)
```

```
SRB = SRB+TCMPLX(1,I,J)*FGMUL(J,2)+TCMPLX(1,I,JP)*FGMUL(JP,2)
```

```
SIB = SIB+TCMPLX(2,I,J)*FGMUL(J,2)-TCMPLX(1,I,JP)*FGMUL(JP,2)
```

```
IP = 3
```

```
GO TO 100
```

```
N = 3
```

```
60 SRA = SRA-TCMPLX(1,I,J)*FGMUL(J,1)-TCMPLX(2,I,JP)*FGMUL(JP,1)
```

```
SIA = SIA-TCMPLX(2,I,J)*FGMUL(J,1)+TCMPLX(1,I,JP)*FGMUL(JP,1)
```

```
SRB = SRB-TCMPLX(2,I,J)*FGMUL(J,2)+TCMPLX(1,I,JP)*FGMUL(JP,2)
```

```
SIB = SIB+TCMPLX(1,I,J)*FGMUL(J,2)+TCMPLX(2,I,JP)*FGMUL(JP,2)
```

```
IP = 4
```

```
GO TO 100
```

```
N = 4
```

```
60 SRA = SRA+TCMPLX(2,I,J)*FGMUL(J,1)-TCMPLX(1,I,JP)*FGMUL(JP,1)
```

```
SIA = SIA-TCMPLX(1,I,J)*FGMUL(J,1)-TCMPLX(2,I,JP)*FGMUL(JP,1)
```

```
SRB = SRB-TCMPLX(1,I,J)*FGMUL(J,2)-TCMPLX(2,I,JP)*FGMUL(JP,2)
```

```
SIB = SIB-TCMPLX(2,I,J)*FGMUL(J,2)+TCMPLX(1,I,JP)*FGMUL(JP,2)
```

```
IP = 1
```

```
100 CONTINUE
```

```
FGVECT(1,1,1) = SRA
```

```
FGVECT(2,1,1) = SIA
```

```
FGVECT(1,1,2) = SRB
```

```
FGVECT(2,1,2) = SIB
```

```
200 CONTINUE
```

```
RETURN
```

```
END
```

Литература

1. *Waterman P. C.*, Proc. IEEE, **53**, 805 (1965) [см. перевод: ТИИЭР, № 8, 930 (1965)].
2. *Hönl H., Maue A. W., Westpfahl K.*, Handbuch der Physik, vol. 25/1, pp. 311 and 354—362, Springer-Verlag, Berlin, 1961.
3. *Van Bladel J.*, Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, New York, 1964.
4. *Morse P. M., Feshbach H.*, Methods of Theoretical Physics, McGraw-Hill, New York, 1966, p. 1865 (см. перевод: Ф. М. Морс, Г. Фешбах, Методы теоретической физики, т. 2, стр. 705. ИЛ, М., 1958).
5. *Saxon D. S.*, Phys. Rev., **100**, 1771 (1955).
6. *Watson G. N.*, Theory of Bessel Functions, 2nd ed., Cambridge University Press, 1962, p. 145 (см. перевод: Г. Н. Ватсон, Теория бесселевых функций, ИЛ, М., 1949).
7. *Stein S.*, Quart. Appl. Math., **19**, 15 (1961).
- 7a. *Crusan O. R.*, Quart. Appl. Math., **20**, 33 (1961).
8. *Mentzer J. R.*, Scattering and Diffraction of Radio Waves, Pergamon Press, London, 1955, pp. 108, 131.
9. *Abramowitz M., Stegun I. A.*, Handbook of Mathematical Functions, p. 886, US Government Printing Office, Washington, 1964.

Решение трехмерных задач рассеяния электромагнитных волн с помощью интегральных уравнений

А. Поджо¹⁾ и Е. Миллер²⁾

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой главе основное внимание уделяется решению граничных задач для трехмерной области. Общая процедура решения состоит в сведении трехмерной задачи к двумерной путем замены неизвестных функций, заданных в некотором объеме, неизвестными функциями, заданными на некоторой поверхности. Таким образом, вместо решения простого на вид волнового уравнения с очень сложными граничными условиями мы предпочитаем выражать искомое решение через неизвестные функции, заданные на двумерной поверхности. Такой подход является более общим, чем непосредственное решение волнового уравнения, хотя он и приводит к интегральным уравнениям, которые, во всяком случае в принципе, более трудны для решения. Однако упрощения, связанные с уменьшением числа независимых переменных с трех до двух, и возможность отказаться от специальных систем координат, а также уменьшение ограничений, накладываемых на неизвестные функции (они должны лишь удовлетворять интегральному уравнению), для большинства задач с избытком окупают возникающие дополнительные трудности. В частности, отпадает необходимость выбирать среди всех возможных решений дифференциального уравнения частное решение, удовлетворяющее данной задаче. Мы имеем теперь возможность прямо получить единственное решение (за исключением, конечно, тех сравнительно редких случаев, когда решение интегрального уравнения неединственно или его вообще не существует).

Мы не будем здесь делать различия между интегральными уравнениями и такими интегро-дифференциальными уравнениями, в которых операция дифференцирования стоит под знаком интеграла. Интегро-дифференциальными будем называть только такие уравнения, в которых операция дифференцирования вынесена из-под знака интеграла. С точки зрения процедуры численных расчетов различие заключается в том, действует ли

¹⁾ *A. J. Poggio*, Cornell Aeronautical Laboratory, Buffalo, New York.

²⁾ *E. K. Miller*, Lawrence Livermore Laboratory, Livermore, Calif.

операция численного дифференцирования на неизвестную функцию, заданную на некоторой поверхности, или на весь интеграл.

Принятое деление главы на части представляется авторам наиболее удобным для изучения всего материала. Сначала излагается вывод интегральных уравнений на основе общего интегрального представления величин, затем рассматриваются методы численного решения и, наконец, описываются приложения и приводятся примеры результатов расчета. При таком делении главы каждый раздел может изучаться независимо.

Список цитированной литературы приведен в конце главы. На многие из работ даны ссылки в тексте, некоторые включены в качестве вспомогательного материала. Например, читателю, интересующемуся историей, развитием и методами теории рассеяния, следует внимательно изучить целый ряд выдающихся работ в специальном выпуске журнала Proceedings IEEE [1], посвященном радиолокационным отражениям и дающем прекрасное представление о состоянии дел в этом вопросе к 1965 г. Читатель поступит правильно, если для углубления своего понимания предмета ознакомится со всеми работами.

§ 2. ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Интегральные уравнения теории рассеяния электромагнитных волн могут быть записаны в общем виде, в равной степени пригодном для задач об излучении антенн и задач о рассеянии. В этом параграфе выводятся в общем виде интегральные уравнения для электрического и магнитного полей в пространственно-частотном представлении, которые затем применяются к конкретным задачам. Рассматриваются как двумерные, так и трехмерные случаи. На основе интегральных уравнений в пространственно-частотном представлении выводятся уравнения в пространственно-временном представлении. В заключение приводится сводка интегральных уравнений для обоих представлений.

1. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ЧАСТОТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Два широко используемых вида интегральных уравнений в пространственно-частотном представлении, а именно интегральное уравнение для электрического поля (ИУЭП) и интегральное уравнение для магнитного поля (ИУМП), выводятся из уравнений Максвелла. Приведенный ниже вывод сходен с описанным Стрэттоном [2]. Однако для полноты вывода использован метод, предложенный Боярским¹⁾, а также Чертоком и

¹⁾ N. Bojariski, частное сообщение, 1969 г.

Гроссо [4]. Этот метод позволяет получить интегральное уравнение и в том случае, когда не во всех точках поверхности касательная является дифференцируемой функцией положения точки. Для гладких поверхностей уравнения сводятся к виду, аналогичному приведенному в работе Мауэ [5].

Мы рассмотрим также частные виды этих интегральных уравнений для случаев, когда поверхность совпадает с поверхностью идеального проводника, диэлектрика, тела с импедансным граничным условием и цилиндрического тонкого проводника. Будут получены выражения для вычисления различных характеристик поля.

Векторное тождество Грина для электромагнитных полей и источников

Уравнения Максвелла для гармонических полей (при временной зависимости $e^{i\omega t}$) имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \mathbf{E} &= -i\omega\mu\mathbf{H} - \mathbf{K}, & \operatorname{div} \mathbf{E} &= \rho/\epsilon, \\ \operatorname{rot} \mathbf{H} &= i\omega\epsilon\mathbf{E} + \mathbf{J}, & \operatorname{div} \mathbf{H} &= m/\mu. \end{aligned} \quad (4.1a)$$

Уравнения непрерывности, обеспечивающие сохранение заряда, записываются в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{J} = -i\omega\rho, \quad \operatorname{div} \mathbf{K} = -i\omega m. \quad (4.1b)$$

Здесь \mathbf{E} и \mathbf{H} — векторы электрического и магнитного полей, \mathbf{J} и \mathbf{K} — плотности электрического и магнитного токов, ρ и m — плотности электрического и магнитного зарядов. Для линейной, однородной, изотропной среды ϵ и μ являются скалярными величинами, и векторные волновые уравнения для \mathbf{E} и \mathbf{H} могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{E} - k^2\mathbf{E} &= -i\omega\mu\mathbf{J} - \operatorname{rot} \mathbf{K}, \\ \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{H} - k^2\mathbf{H} &= -i\omega\epsilon\mathbf{K} + \operatorname{rot} \mathbf{J}. \end{aligned} \quad (4.2)$$

Пусть требуется найти решение этих уравнений в объеме, содержащем источники, или в области, электрические параметры которой отличаются от параметров окружающей среды. В этом случае удобно воспользоваться векторной теоремой Грина

$$\int_V (\mathbf{Q} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{P} - \mathbf{P} \cdot \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{Q}) dv = \int_\Sigma (\mathbf{P} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{Q} - \mathbf{Q} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{P}) ds, \quad (4.3)$$

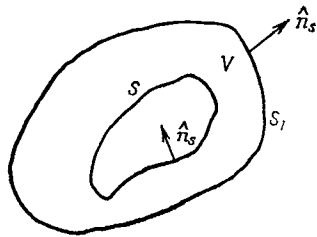
где \mathbf{P} и \mathbf{Q} — векторные функции координат, обладающие непрерывными первыми и вторыми производными внутри объема V и на граничной поверхности Σ . Векторный элемент площади ds направлен по внешней нормали \hat{n}_s . На фиг. 4.1 поверхность Σ

распадается на поверхности S и S_1 , так что Σ представляет собой сумму S и S_1 . В дальнейшем оказывается удобным для представления границы области пользоваться обозначениями $\Sigma = S + S_1$ или $\Sigma = dV$.

Поскольку векторная функция \mathbf{Q} является произвольной (она должна удовлетворять лишь перечисленным выше условиям), то ее можно принять в виде

$$\mathbf{Q} = \hat{a} \varphi(\mathbf{x}, \mathbf{x}') = \hat{a} \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|},$$

где \hat{a} — произвольно направленный единичный вектор, а \mathbf{x} и \mathbf{x}' — радиусы-векторы точки наблюдения и источника. Отметим, что точка $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ пока должна быть исключена из рассмотрения, так как в ней функция φ имеет особенность. Если в качестве вектора \mathbf{P} подставить электрическое поле, то после ряда векторных преобразований (см. [2]) уравнение (4.3) сведется к виду



Фиг. 4.1. Общий вид поверхности интегрирования.

$$\int_V \{i\omega\mu \mathbf{J}\varphi + \mathbf{K} \times \text{grad} \varphi - (\rho/\epsilon) \text{grad} \varphi\} dv = \int_{\Sigma} \{i\omega\mu (\hat{n}_s \times \mathbf{H}) \varphi - (\hat{n}_s \times \mathbf{E}) \times \text{grad} \varphi - (\hat{n}_s \cdot \mathbf{E}) \text{grad} \varphi\} ds. \quad (4.4)$$

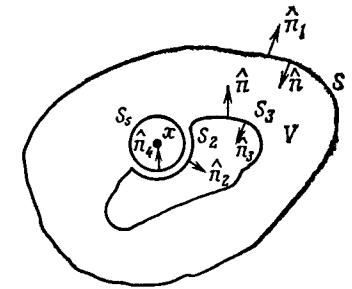
Векторные операции в (4.4) производятся над координатами источника, а связь между координатами точки наблюдения и источника заключена в функции φ . В дальнейшем для обозначения векторных операций над координатами источника будут использоваться штрихи. Штрихом будет обозначаться также нормаль, определяемая в точке источника.

Относительно выбора векторных функций \mathbf{P} и \mathbf{Q} необходимо сделать несколько замечаний. Здесь в качестве функции Грина \mathbf{Q} была выбрана функция Грина для векторного потенциала точечного тока $4\pi\hat{a}\delta(\mathbf{x}-\mathbf{x}')$ в однородном пространстве. Вообще говоря, в качестве \mathbf{P} и \mathbf{Q} может быть выбрана любая пара функций, удовлетворяющих необходимым условиям, и Харрингтон [6] указал несколько различных вариантов выбора. Если мы хотим ограничиться случаем определенной геометрии задачи и частным видом граничных условий, то для упрощения вычисления соответствующего поверхностного интеграла целесообразно пользоваться функциями Грина именно для этой геометрии. Такой метод часто применяется при решении неоднородного волнового уравнения в системах координат, для которых пере-

менные разделяются [7]. Пример такого выбора функций Грина для интегрального уравнения будет приведен ниже для некоторых частных задач. Однако для того, чтобы оставить себе возможность рассматривать поверхности с произвольными граничными условиями, мы будем в дальнейшем пользоваться функцией Грина для бесконечного однородного пространства.

Интегральные представления электромагнитного поля

Условия дифференцируемости и непрерывности, наложенные на электрическое поле \mathbf{E} и функцию \mathbf{Q} , ограничивают область применимости уравнения (4.4). Точка наблюдения \mathbf{x} и точка источника \mathbf{x}' не могут совпадать, поскольку наличие особенности у функции φ при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$ делает уравнение неприменимым. Поэтому точка наблюдения не может находиться на поверхности $S + S_1$ или где-нибудь внутри объема V . Чтобы обойти эту трудность, введем вспомогательную сферу S_s радиуса r с центром в точке \mathbf{x} , как показано на фиг. 4.2. Для упрощения вывода точка \mathbf{x} выбрана на поверхности S . В дальнейшем будет показано, что результаты остаются верными независимо от того, находится ли точка на поверхности S или внутри объема V .



Фиг. 4.2. Вспомогательные поверхности, используемые при выводе интегральных уравнений.

Пусть поверхность S , изображенная на фиг. 4.1, распадается на две части. Как показано на фиг. 4.2, поверхность деформирована таким образом, что имеются две разные области: поверхность S_3 , лежащая вне пересечения областей, ограниченных поверхностями S и S_s , и поверхность S_2 , представляющая собой деформированную часть, которая раньше находилась бы внутри области, ограниченной поверхностью S_s . Интегралы в уравнении (4.4) могут быть переписаны в виде

$$\int_V (i\omega\mu \mathbf{J}\varphi + \mathbf{K} \times \text{grad}' \varphi - \frac{\rho}{\epsilon} \text{grad}' \varphi) dv' = \left[\int_{S_1} + \int_{S_2} + \int_{S_3} + \int_{S_s} \right] \{i\omega\mu (\hat{n}'_s \times \mathbf{H}) \varphi - (\hat{n}'_s \times \mathbf{E}) \times \text{grad}' \varphi - (\hat{n}'_s \cdot \mathbf{E}) \text{grad}' \varphi\} ds', \quad (4.5)$$

где индекс у нормали совпадает с соответствующим индексом у поверхности, по которой проводится интегрирование (за исключением нормали \hat{n}_4 , которая является внешней нормалью к поверхности S_3).

Рассмотрим теперь, чему равен предел суммы интегралов по S_3 и S_2 (обозначаемый в дальнейшем через I) при стремлении $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$ к нулю. При $r \rightarrow 0$ фазовыми множителями у функций φ и $\nabla\varphi'$ можно пренебречь, так что, используя среднее значение поля в точке \mathbf{x}' и равенство

$$\text{grad}' \varphi = \frac{1 + ikr}{r} \frac{e^{-ikr}}{r} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}, \quad (4.6)$$

получаем

$$I = \lim_{r \rightarrow 0} \left\{ -\mathbf{E} \int_{S_3} \frac{\hat{n}_4 \cdot \hat{n}'_4}{r^2} ds' - \mathbf{E} \int_{S_2} \frac{\hat{n}'_2 \cdot \hat{n}'_2}{r^2} ds' \right\}.$$

Вводя телесный угол $d\Omega = (\hat{n} \cdot \hat{r}/r^2) ds$ с вершиной в точке \mathbf{x} (\hat{n} — внешняя нормаль по отношению к области, содержащей точку \mathbf{x}), подынтегральные выражения можно переписать в виде

$$d\Omega_3 = \frac{\hat{n}'_4 \cdot \hat{n}'_4}{r^2} ds', \quad d\Omega_2 = -\frac{\hat{n}'_2 \cdot \hat{n}'_2}{r^2} ds'.$$

При этом предел суммы интегралов в случае, когда точка \mathbf{x} лежит внутри сферы S_3 , равен

$$I = -\mathbf{E}(\mathbf{x}) [4\pi - \Omega_2], \quad (4.7)$$

где Ω_2 — абсолютное значение телесного угла, под которым видна поверхность S_2 из точки \mathbf{x} в пределе $r \rightarrow 0$. Хотя изложенный вывод и не мешает поместить точку наблюдения \mathbf{x} в точку поверхности с недифференцируемой касательной, однако он требует, чтобы поле обладало конечным средним значением.

Обозначения в проделанных выкладках несколько упростились из-за того, что точка наблюдения предполагалась расположенной на поверхности S . Вообще говоря, точка \mathbf{x} может лежать либо на поверхности S , либо на поверхности S_1 , т. е. $\mathbf{x} \in \partial V$. Поэтому индекс у телесного угла Ω можно опустить. При этом следует помнить, что $\Omega = 0$ для точек \mathbf{x} , лежащих не на поверхности ∂V , и $\Omega = 2\pi$ для точек на регулярной части поверхности ∂V . Для точек \mathbf{x} , совпадающих с нерегулярными точками поверхности ∂V , необходимо определить соответствующий телесный угол и иметь в виду условия, налагаемые на поле. Под-

ставляя (4.7) в (4.5), имеем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) = & -\frac{T}{4\pi} \int_V \left(i\omega\mu \mathbf{J}\varphi + \mathbf{K} \times \text{grad}' \varphi - \frac{\rho}{\epsilon} \text{grad}' \varphi \right) dv' - \\ & -\frac{T}{4\pi} \int_{S_1+S} \left\{ i\omega\mu (\hat{n} \times \mathbf{H})\varphi - (\hat{n}' \times \mathbf{E}) \times \text{grad}' \varphi - \right. \\ & \left. - (\hat{n} \cdot \mathbf{E}) \text{grad}' \varphi \right\} ds', \end{aligned} \quad (4.8a)$$

где $T = (1 - \Omega/4\pi)^{-1}$, а символ \int_{S_1+S} используется для обозначения интеграла в смысле главного значения по поверхности $S_1 + S$, т. е. интеграла по замкнутой поверхности, исключаяющей ближайшую окрестность особенности ϵ . Ввиду симметрии уравнений Максвелла магнитное поле может быть записано в аналогичном виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}) = & \frac{T}{4\pi} \int_V \left(-i\omega\epsilon \mathbf{K}\varphi + \mathbf{J} \times \text{grad}' \varphi + \frac{m}{\mu} \text{grad}' \varphi \right) dv' + \\ & + \frac{T}{4\pi} \int_{S_1+S} \left\{ i\omega\epsilon (\hat{n}' \times \mathbf{E})\varphi + (\hat{n}' \times \mathbf{H}) \times \text{grad}' \varphi + \right. \\ & \left. + (\hat{n} \cdot \mathbf{H}) \text{grad}' \varphi \right\} ds'. \end{aligned} \quad (4.8b)$$

Читателю, интересующемуся вычислением интегралов, имеющих особенности в подынтегральном выражении, а также условиями, при которых существует интеграл в смысле главного значения, следует обратиться к работе Келлога [8], где рассматриваются аналогичные интегралы, встречающиеся в теории потенциала.

Упражнение. Выведите уравнение (4.8) из уравнения (4.3) для точек \mathbf{x} , не лежащих на границах области V , используя векторное дифференциальное уравнение для функции Грина

$$\text{rot rot } \hat{a}\varphi - k^2 \hat{a}\varphi - \text{grad div } \hat{a}\varphi = 4\pi\delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}').$$

Обратите внимание, что при этом обходится трудность, обычно имеющая место при $\mathbf{x} = \mathbf{x}'$.

Большой интерес представляет случай, когда поверхность S_1 расположена на бесконечности. Для источников внутри V в области ограниченных размеров условия излучения на бесконечности требуют, чтобы вклад интеграла по поверхности S_1 был полностью обусловлен источниками, находящимися вне S_1 . Эту часть поля (если она существует) мы будем называть падающим

полем и соответственно перепишем уравнения (4.8) в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= T\mathbf{E}^i(\mathbf{x}) - \frac{T}{4\pi} \int_V (i\omega\mu\mathbf{J}\varphi + \mathbf{K} \times \text{grad}'\varphi - \frac{\rho}{\varepsilon} \text{grad}'\varphi) dV' - \\ &- \frac{T}{4\pi} \int_S (i\omega\mu(\hat{n}' \times \mathbf{H})\varphi - (\hat{n}' \times \mathbf{E}) \times \text{grad}'\varphi - (\hat{n}' \cdot \mathbf{E}) \text{grad}'\varphi) ds', \quad (4.9) \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= T\mathbf{H}^i(\mathbf{x}) + \frac{T}{4\pi} \int_V (-i\omega\varepsilon\mathbf{K}\varphi + \mathbf{J} \times \text{grad}'\varphi + \frac{m}{\mu} \text{grad}'\varphi) dV' + \\ &+ \frac{T}{4\pi} \int_S (i\omega\varepsilon(\hat{n}' \times \mathbf{E})\varphi + (\hat{n}' \times \mathbf{H}) \times \text{grad}'\varphi + (\hat{n}' \cdot \mathbf{H}) \text{grad}'\varphi) ds'. \end{aligned}$$

Заметим, что мы неявно подразумевали, что все пространственные неоднородности исключены из области V с помощью поверхности S . В действительности, когда область, внешняя по отношению к поверхности S_1 , является однородной и ее электрические параметры совпадают с параметрами области V , вклад в интеграл по поверхности S_1 всегда обусловлен источниками, расположенными вне поверхности S_1 .

Упражнение. Покажите, что для источников в области V , имеющих ограниченные размеры, вклад интеграла по поверхности S_1 , когда последние стремятся к бесконечности, обусловлен источниками, расположенными вне S_1 .

Указание: Поле на поверхности S_1 представить в виде суммы двух полей, одно из которых соответствует уходящей волне и удовлетворяет условию излучения.

Уравнения (4.8) и (4.9) представляют собой векторные интегральные уравнения для векторов $\mathbf{E}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{H}(\mathbf{x})$ при $\mathbf{x} \in S$. В дальнейшем мы будем называть их интегральным уравнением для электрического поля (ИУЭП) и интегральным уравнением для магнитного поля (ИУМП).

Приведенные интегральные уравнения можно преобразовать к такому виду, чтобы каждое из них содержало лишь одно из полей. Например, обозначим через \mathbf{H}^s интеграл по замкнутой поверхности S в интегральном уравнении для магнитного поля и запишем его в следующем виде:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}^s(\mathbf{x}) &= \frac{T}{4\pi} \int_S [(\hat{n}' \times \text{rot}'\mathbf{H})\varphi + (\hat{n}' \times \mathbf{H}) \times \text{grad}'\varphi + \\ &+ (\hat{n}' \times \mathbf{H}) \text{grad}'\varphi] ds'. \end{aligned}$$

Вычтем теперь из правой части этого уравнения интеграл по поверхности

$$\frac{T}{4\pi} \int_S [(\hat{n}' \cdot \text{grad}'\varphi)(\varphi\mathbf{H}) + \hat{n}' \times \text{rot}'\varphi\mathbf{H} - \hat{n}' \text{div}'(\varphi\mathbf{H})] ds',$$

который тождественно равен нулю. Используя соотношения

$$\text{grad}'\varphi \times (\hat{n}' \times \mathbf{H}) = \hat{n}'(\mathbf{H} \cdot \text{grad}'\varphi) - H(\hat{n}' \cdot \text{grad}'\varphi),$$

$$\hat{n}' \times \text{rot}'(\varphi\mathbf{H}) = -\hat{n}'(\mathbf{H} \times \text{grad}'\varphi - \varphi \text{rot}'\mathbf{H}),$$

$$\hat{n}' \times (\mathbf{H} \times \text{grad}'\varphi) = \mathbf{H}(\hat{n}' \cdot \text{grad}'\varphi) - (\hat{n}' \cdot \mathbf{H}) \text{grad}'\varphi,$$

можно преобразовать интеграл по поверхности в декартовых координатах к виду

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{x}) = \frac{T}{4\pi} \int_S \left(\mathbf{H} \frac{\partial}{\partial n'} \varphi - \varphi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n'} + \hat{n}' \varphi \text{div}' \mathbf{H} \right) ds'. \quad (4.10a)$$

Аналогичным образом интеграл по поверхности для электрического поля принимает вид

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = \frac{T}{4\pi} \int_S \left(\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial n'} \varphi - \varphi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n'} + \hat{n}' \varphi \text{div}' \mathbf{E} \right) ds'. \quad (4.10б)$$

Упражнение. Покажите, что перечисленная последовательность операций действительно приводит к уравнениям (4.10a) и (4.10б).

Следовательно, уравнение (4.9) для свободной от источников области может быть записано в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= T\mathbf{E}^i(\mathbf{x}) - \frac{T}{4\pi} \int_S (i\omega\mu(\hat{n}' \times \mathbf{H})\varphi - \\ &- (\hat{n}' \times \mathbf{E}) \times \text{grad}'\varphi - (\hat{n}' \cdot \mathbf{E}) \text{grad}'\varphi) ds', \quad (4.11) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= T\mathbf{H}^i(\mathbf{x}) + \frac{T}{4\pi} \int_S (i\omega\varepsilon(\hat{n}' \times \mathbf{E})\varphi + \\ &+ (\hat{n}' \times \mathbf{H}) \times \text{grad}'\varphi + (\hat{n}' \cdot \mathbf{H}) \text{grad}'\varphi) ds', \end{aligned}$$

или, что эквивалентно (только в декартовых координатах),

$$\mathbf{E}(\mathbf{x}) = T\mathbf{E}^i(\mathbf{x}) + \frac{T}{4\pi} \int_S \left(\mathbf{E} \frac{\partial}{\partial n'} \varphi - \varphi \frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n'} + \hat{n}' \varphi \text{div}' \mathbf{E} \right) ds', \quad (4.12)$$

$$\mathbf{H}(\mathbf{x}) = T\mathbf{H}^i(\mathbf{x}) + \frac{T}{4\pi} \int_S \left(\mathbf{H} \frac{\partial}{\partial n'} \varphi - \varphi \frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n'} + \hat{n}' \varphi \text{div}' \mathbf{H} \right) ds'.$$

Уравнения (4.11) используются чаще, хотя они и имеют более сложный вид. Помимо прочего, это обусловлено тем, что математическое описание граничных условий на поверхности произвольной формы осуществляется в (4.11) проще, чем в (4.12). Однако уравнения (4.12) находят применения для двумерных задач, в которых разделение поля на *TE*- и *TM*-моды позволяет дать простую интерпретацию слагаемых в подынтегральном выражении. Возможность использования уравнений вида (4.12) для двумерных задач будет исследована в дальнейшем.

Частные случаи. Полученные интегральные выражения оказываются очень полезными при изучении рассеяния электромагнитного поля на различных препятствиях. Здесь мы рассмотрим частные случаи, когда единственный источник расположен на бесконечности. С помощью несложной модификации результаты могут быть обобщены на случай наличия источников внутри области.

Хотя основное внимание будет уделено поверхностным интегральным уравнениям, будет также приведен иной метод для случая рассеяния диэлектрическим телом. В этом методе вводится объемное распределение связанных источников, так что приходится решать объемное интегральное уравнение.

Перед тем, как следовать дальше, целесообразно определить интересующую нас окончательную характеристику. В большинстве случаев нас интересует рассеянное поле $\mathbf{E}^s(\mathbf{x})$ или $\mathbf{H}^s(\mathbf{x})$ вне объема V_s , содержащего рассеивателя, где

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) + \mathbf{E}^s(\mathbf{x}), \\ \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= \mathbf{H}^i(\mathbf{x}) + \mathbf{H}^s(\mathbf{x}). \end{aligned}$$

Очевидно, что эти поля могут быть найдены из уравнений (4.9), если учитывать только вклад от интегралов по поверхности, ограничивающей V_s , причем следует положить T равным единице, поскольку точка \mathbf{x} расположена не на поверхности ∂V_s . Таким образом, рассеянные поля просто равны

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V_s} \{ -i\omega\mu(\hat{n}' \times \mathbf{H})\varphi + (\hat{n}' \times \mathbf{E}) \times \text{grad}'\varphi + \\ &\quad + (\hat{n}' \cdot \mathbf{E}) \text{grad}'\varphi \} ds', \\ \mathbf{H}^s(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{\partial V_s} \{ i\omega\epsilon(\hat{n}' \times \mathbf{E})\varphi + (\hat{n}' \times \mathbf{H}) \times \text{grad}'\varphi + \\ &\quad + (\hat{n}' \cdot \mathbf{H}) \text{grad}'\varphi \} ds'. \end{aligned} \quad (4.13a)$$

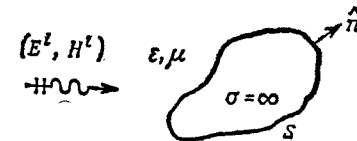
Уравнения (4.13a) дают интегральное представление рассеянного поля через поля (или эквивалентные источники) на поверх-

ности рассеивателя. Рассеянное поле можно также выразить через объемное распределение наведенных источников, т. е. в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_s} \left\{ -i\omega\mu\mathbf{J}\varphi - \mathbf{K} \times \text{grad}'\varphi + \frac{\rho}{\epsilon} \text{grad}'\varphi \right\} dv', \\ \mathbf{H}^s(\mathbf{x}) &= \frac{1}{4\pi} \int_{V_s} \left\{ -i\omega\epsilon\mathbf{K}\varphi + \mathbf{J} \times \text{grad}'\varphi + \frac{m}{\mu} \text{grad}'\varphi \right\} dv'. \end{aligned} \quad (4.13b)$$

Для нахождения полей в подынтегральных выражениях (4.13) необходимо решить интегральные уравнения описанного выше вида. Теперь мы займемся выводом интегральных уравнений, пригодных для частных случаев. При рассмотрении этих примеров читатель убедится, что для одной и той же задачи часто можно написать несколько различных интегральных уравнений (или систем уравнений), и разумный выбор часто упрощает решение задачи. Однако авторы не утверждают, что полученные ими интегральные уравнения во всех случаях являются наиболее удобными для численного решения.

а. Рассеяние на идеальном проводнике. Предположим, что мы интересуемся рассеивающими свойствами идеально проводящего тела S , на которое падает поле, описываемое парой комплексных векторов $(\mathbf{E}^i, \mathbf{H}^i)$. В классических радиолокационных



Фиг. 4.3. Рассеяние на идеальном проводнике.

задачах источник этого поля расположен на бесконечности, так что падающее поле представляет собой плоскую волну. Рассмотрим задачу о рассеянии, схематически представленную на фиг. 4.3.

Граничные условия на поверхности S требуют обращения в нуль касательных составляющих электрического поля, т. е. $\mathbf{n} \times \mathbf{E} = 0$. Кроме того, $\hat{n} \cdot \mathbf{H} = m = 0$, что сразу позволяет написать интегральные уравнения для электрического и магнитного полей. Поскольку достаточно потребовать выполнения уравнения (4.9) для касательных составляющих поля на поверхности S , эти интегральные уравнения можно записать в

виде

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \hat{n} \times \int_S \{i\omega\mu (\hat{n}' \times \mathbf{H}) \varphi - (\hat{n}' \cdot \mathbf{E}) \text{grad}' \varphi\} ds', \quad \mathbf{x} \in S,$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}) = 2\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \int_S (\hat{n}' \times \mathbf{H}) \times \text{grad}' \varphi ds', \quad \mathbf{x} \in S.$$

Заметим, что второе уравнение содержит только одну неизвестную функцию, тогда как первое уравнение в подынтегральном выражении содержит две неизвестные функции. Однако из уравнений Максвелла следует

$$\hat{n}' \cdot \mathbf{E} = \frac{i}{\omega\epsilon} \text{Div}(\hat{n}' \times \mathbf{H}),$$

где Div — оператор поверхностной дивергенции, действующий на координаты источника. Если ввести эквивалентный источник с помощью соотношения

$$\hat{n} \times \mathbf{H} = \mathbf{J}_s,$$

то оба интегральных уравнения мы сможем переписать в виде

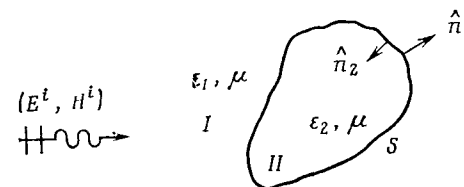
$$\hat{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) = -\frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \hat{n} \times \int_S (-\omega^2\mu\epsilon\mathbf{J}_s\varphi + \text{Div}\mathbf{J}_s\text{grad}'\varphi) ds', \quad \mathbf{x} \in S, \quad (4.14)$$

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}) = 2\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \int_S \mathbf{J}_s \times \text{grad}' \varphi ds', \quad \mathbf{x} \in S.$$

Любое из этих уравнений может служить для отыскания эквивалентного поверхностного тока. В каждом частном случае вопрос о том, выбрать ли интегральное уравнение первого рода (для электрического поля) или интегральное уравнение второго рода (для магнитного поля), решается исходя из геометрии источника и предполагаемого метода решения. Хотя интегральное уравнение второго рода, вообще говоря, предпочтительнее, так как содержит неизвестное как под знаком интеграла, так и вне его, частный вид его, приведенный выше, становится неприменимым, когда тело S представляет собой бесконечно тонкий рассеиватель. Это обусловлено геометрическими свойствами подынтегрального выражения. С другой стороны, как будет показано ниже, ИУЭП идеально подходит для тонких цилиндрических проводников. ИУМП находит наиболее широкое применение для больших проводящих тел с регулярной поверхностью, так как часто из геометрических соображений ясно, что вклад от интеграла должен быть малым. Ниже будут рассмотрены приближенные методы решения, основанные на этом свойстве.

6. *Рассеяние на диэлектрическом теле.* При рассмотрении рассеяния на диэлектрическом теле с диэлектрической проницаемостью ϵ_2 будем считать, что поверхность S совпадает с поверхностью диэлектрика, как это показано на фиг. 4.4. Рассмотрим два различных подхода к этой задаче. Для более детального изучения, а также для ознакомления с другими методами решения читателю следует обратиться к работе Мюллера [9], в которой излагается строгий математический подход, возможно более удобный при численном решении задачи.

1. Метод поверхностного интегрального уравнения. Граничные условия на поверхности S требуют непрерывности касательных составляющих векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} . При



Фиг. 4.4. Рассеяние на диэлектрическом теле.

этом из уравнений Максвелла следует, что нормальная компонента вектора $\mathbf{D} = \epsilon\mathbf{E}$ также непрерывна. Исходя из этого, для касательных составляющих полей на поверхности S в областях I и II могут быть написаны следующие интегральные уравнения:

$$\begin{aligned} \hat{n}_1 \times \mathbf{E}_1(\mathbf{x}) &= T\hat{n}_1 \times \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) + \frac{T}{4\pi} \hat{n}_1 \times \int_S \{-i\omega\mu (\hat{n}'_1 \times \mathbf{H}_1) \varphi_1 + \\ &\quad + (\hat{n}'_1 \times \mathbf{E}_1) \times \text{grad}' \varphi_1 + (\hat{n}'_1 \cdot \mathbf{E}_1) \text{grad}' \varphi_1\} ds', \\ \hat{n}_1 \times \mathbf{H}_1(\mathbf{x}) &= T\hat{n}_1 \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}) + \frac{T}{4\pi} \hat{n}_1 \times \int_S \{i\omega\epsilon_1 (\hat{n}'_1 \times \mathbf{H}_1) \varphi_1 + \\ &\quad + (\hat{n}'_1 \times \mathbf{H}_1) \times \text{grad}' \varphi_1 + (\hat{n}'_1 \cdot \mathbf{H}_1) \text{grad}' \varphi_1\} ds', \\ \hat{n}_2 \times \mathbf{E}_2(\mathbf{x}) &= \frac{T}{4\pi} \hat{n}_2 \times \int_S \{-i\omega\mu (\hat{n}'_2 \times \mathbf{H}_2) \varphi_2 + \\ &\quad + (\hat{n}'_2 \times \mathbf{E}_2) \times \text{grad}' \varphi_2 + (\hat{n}'_2 \cdot \mathbf{E}_2) \text{grad}' \varphi_2\} ds', \\ \hat{n}_2 \times \mathbf{H}_2(\mathbf{x}) &= \frac{T}{4\pi} \hat{n}_2 \times \int_S \{i\omega\epsilon_2 (\hat{n}'_2 \times \mathbf{E}_2) \varphi_2 + \\ &\quad + (\hat{n}'_2 \times \mathbf{H}_2) \times \text{grad}' \varphi_2 + (\hat{n}'_2 \cdot \mathbf{H}_2) \text{grad}' \varphi_2\} ds', \end{aligned} \quad (4.15)$$

где

$$\varphi_i = \frac{e^{-ik_i |\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \quad k_i = \omega \sqrt{\mu \epsilon_i}, \quad \hat{n}_2 = -\hat{n}_1 \quad \text{и} \quad \mathbf{x} \in S.$$

Вследствие непрерывности касательных составляющих поля на поверхности S_1 выполняются равенства

$$\hat{n}_1 \times (\mathbf{E}_1 - \mathbf{E}_2) = 0, \quad \hat{n}_1 \times (\mathbf{H}_1 - \mathbf{H}_2) = 0,$$

а из-за непрерывности нормальной составляющей \mathbf{D} —

$$\hat{n}_1 (\epsilon_1 \mathbf{E}_1 - \epsilon_2 \mathbf{E}_2) = 0.$$

Комбинируя интегральные уравнения, получаем

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \hat{n} \times \int_S \left\{ i\omega\mu (\hat{n}' \times \mathbf{H}) (\varphi_1 + \varphi_2) - (\hat{n} \times \mathbf{E}) \times \right. \\ \left. \times \text{grad}' (\varphi_1 + \varphi_2) - (\hat{n}' \cdot \mathbf{E})' \left(\varphi_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \varphi_2 \right) \right\} ds', \quad \mathbf{x} \in S, \quad (4.16)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}) = -\frac{1}{4\pi} \hat{n} \times \int_S \left\{ i\omega\epsilon_1 (\hat{n}' \times \mathbf{E}) \left(\varphi_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \varphi_2 \right) + \right. \\ \left. + (\hat{n}' \times \mathbf{H}) \times \text{grad}' (\varphi_1 + \varphi_2) + (\hat{n}' \cdot \mathbf{H}) \text{grad}' (\varphi_1 + \varphi_2) \right\} ds', \quad \mathbf{x} \in S,$$

где у полей и нормалей опущен индекс 1. Теперь необходимо выяснить, имеют ли полученные интегральные уравнения единственное решение. Действительно, мы имеем четыре скалярных уравнения для шести неизвестных. Однако нормальные составляющие уравнений Максвелла на поверхности дают следующие соотношения:

$$\hat{n}' \cdot \mathbf{E} = \frac{i}{\omega\epsilon} \text{Div} (\hat{n}'_s \times \mathbf{H}),$$

$$\hat{n}' \cdot \mathbf{H} = -\frac{i}{\omega\mu} \text{Div} (\hat{n}'_s \times \mathbf{E}).$$

Если ввести эквивалентные поверхностные токи

$$\mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H}, \quad \mathbf{K}_s = -\hat{n} \times \mathbf{E},$$

то интегральные уравнения могут быть переписаны в следующем виде:

$$\hat{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \hat{n} \times \int_S \left\{ i\omega\mu \mathbf{J}_s (\varphi_1 + \varphi_2) + \mathbf{K}_s \times \text{grad}' (\varphi_1 + \varphi_2) - \right. \\ \left. - \frac{i}{\omega\epsilon} \text{Div} \mathbf{J}_s \text{grad}' \left(\varphi_1 + \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \varphi_2 \right) \right\} ds', \quad \mathbf{x} \in S, \quad (4.17)$$

$$\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}) = \frac{1}{4\pi} \hat{n} \times \int_S \left\{ i\omega\epsilon \mathbf{K}_s \left(\varphi_1 + \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \varphi_2 \right) - \mathbf{J}_s \times \text{grad}' (\varphi_1 + \varphi_2) - \right. \\ \left. - \frac{i}{\omega\mu} \text{Div} \mathbf{K}_s \text{grad}' (\varphi_1 + \varphi_2) \right\} ds', \quad \mathbf{x} \in S.$$

Хотя нам и удалось уменьшить число неизвестных, так что система (4.17) является однозначно определенной, но зато подынтегральное выражение содержит теперь производные от поверхностных токов.

Упражнение. Покажите, что этот метод можно применить к телам с конечной проводимостью σ , если диэлектрическую проницаемость ϵ считать комплексным числом.

2. Метод объемного интегрального уравнения. В другом подходе к задаче о рассеянии диэлектрическим телом используется объемное распределение связанных источников; этот метод мы будем называть методом тока поляризации. Для получения соответствующего интегрального уравнения выпишем уравнения Максвелла для обеих областей:

$$\text{rot} \mathbf{E}_1 = -i\omega\mu \mathbf{H}_1, \quad \text{rot} \mathbf{H}_1 = i\omega\epsilon_1 \mathbf{E}_1 \quad \text{в области } I, \\ \text{rot} \mathbf{E}_2 = -i\omega\mu \mathbf{H}_2, \quad \text{rot} \mathbf{H}_2 = i\omega\epsilon_2 \mathbf{E}_2 = \\ = i\omega\epsilon_1 \mathbf{E}_2 + i\omega(\epsilon_2 - \epsilon_1) \mathbf{E}_2 \quad \text{в области } II.$$

Преобразование, сделанное в последнем уравнении, позволяет считать, что поля создаются в однородной области V (ограниченной поверхностью S) с параметрами среды ϵ_1 и μ связанными токами с плотностью $\mathbf{J}_e = -i\omega(\epsilon_2 - \epsilon_1) \mathbf{E}_2$. Это объемное распределение связанных токов можно подставить в интегральное уравнение (4.9); при этом надо учитывать, что поверхностный заряд, обусловленный скачком диэлектрической проницаемости, приводит к дополнительному поверхностному интегралу. В результате интегральное уравнение принимает вид

$$\mathbf{E}_2(\mathbf{x}) = \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) + \frac{1}{4\pi} \int_V \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} \omega^2 \mu \epsilon_1 \mathbf{E}_2 \varphi dv + \\ + \frac{1}{4\pi} \int_S \frac{\epsilon_2 - \epsilon_1}{\epsilon_1} (\hat{n}' \cdot \mathbf{E}_2) \text{grad}' \varphi ds'. \quad (4.18)$$

Уравнение (4.18) имеет более простой вид, чем уравнение (4.17); однако следует помнить об одном осложнении: оно справедливо для всех $\mathbf{x} \in V$, т. е. интегральное уравнение должно выполняться во всех внутренних точках области V . Однако это уравнение имеет и некоторые преимущества. Первое и наиболее важное из них состоит в том, что неоднородность диэлектрика не усложняет существенно объемный интеграл; поэтому нет необходимости пересчитывать постоянные распространения в диэлектрике. Во-вторых, предельный переход $\epsilon_2 \rightarrow \epsilon_1$ в уравнении (4.18) очевиден, так что не возникает вопроса о переопределенности или недоопределенности системы уравнений, как это имеет место в методе поверхностного интегрального уравнения.

в. *Рассеяние на тонком проводнике.* Перейдем теперь к рассеянию на тонком проводнике. Если рассеиватель представляет собой идеальный проводник круглого сечения, диаметр которого мал по сравнению с длиной волны, то азимутальной составляющей поверхностного тока можно пренебречь по сравнению с продольной составляющей [10, 11]. В результате поверхностная плотность тока может быть записана в виде

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}) = \frac{I(\mathbf{x})}{2\pi a} \hat{l},$$

где \hat{l} — единичный касательный вектор в аксиальном направлении (фиг. 4.5); предполагается, что распределение тока не зависит от азимута.

Граничные условия на поверхности проводника требуют равенства нулю полного электрического поля. Поскольку мы пренебрегаем азимутальной составляющей тока и влиянием азимутальных составляющих падающего электрического поля, то граничные условия можно записать следующим образом:

$$\hat{l} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}) = 0.$$

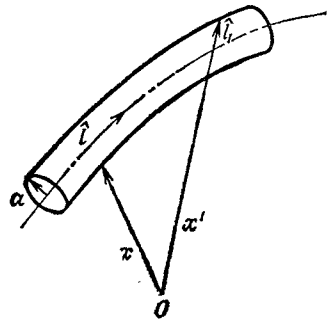
В выбранной системе координат интегральное уравнение для электрического поля принимает вид

$$\hat{l} \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) = -\frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \hat{l} \cdot \int_L \int_0^{2\pi} \left(-\omega^2 \mu \epsilon I(\mathbf{x}') \phi \hat{l}' + \frac{\partial}{\partial l'} I(\mathbf{x}') \text{grad}' \right) \frac{dl' d\theta}{2\pi},$$

где символ $\int_L dl$ означает интегрирование по всей длине проводника, а θ — азимутальный угол. Наконец, предположение о том, что ток можно достаточно хорошо аппроксимировать линейным током на оси проводника при определении поля на поверхности проводника (и наоборот), позволяет переписать уравнение в виде

$$\hat{l} \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \int_L \left(\hat{l} \cdot \hat{l}' k^2 I(\mathbf{x}') \phi + \frac{\partial}{\partial l'} I(\mathbf{x}') \frac{\partial}{\partial s} \phi \right) dl'. \quad (4.19)$$

Расстояние $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|$, функцией которого является ϕ , измеряется от точки источника на оси проводника до точки наблюдения на



Фиг. 4.5. Рассеяние на тонком проводнике.

его поверхности и поэтому никогда не может быть меньше радиуса a . Такой приближенный подход широко применялся при решении задач для тонких проводников [10, 12, 13].

Интегрируя по частям второй член в подынтегральном выражении (4.19) и учитывая, что ток должен обращаться в нуль на концах проводника, можно переписать уравнение в другом виде:

$$\hat{l} \cdot \mathbf{E}^i(\mathbf{x}) = \frac{i}{4\pi\omega\epsilon} \int_L I(\mathbf{x}') \left[\hat{l} \cdot \hat{l}' k^2 \phi - \frac{\partial^2}{\partial l' \partial l} \phi \right] dl'. \quad (4.20)$$

Уравнения (4.19) и (4.20) представляют собой так называемые интегральные уравнения для тонких проводников. Входящая сюда функция $\phi(\mathbf{x}, \mathbf{x}')$ называется функцией Грина для тонкого проводника. Для прямого проводника ϕ записывается в виде

$$\phi = \frac{\exp\{-ik\sqrt{[(l-l')^2 + a^2]}\}}{\sqrt{[(l-l')^2 + a^2]}}.$$

Следует отметить, что в данном случае функция ϕ не имеет особенности в отличие от точной функции Грина для свободного пространства (стр. 180). Заметим еще, что уравнение (4.20) отличается от уравнения (2.34) лишь некоторыми деталями в обозначениях.

Может возникнуть вопрос: почему в задачах такого рода не применяется уравнение для магнитного поля? Легко понять причину трудностей численного решения этого интегрального уравнения. Подынтегральное выражение во втором уравнении (4.14) содержит векторное произведение \mathbf{J} и $\text{grad} \phi$. Поскольку предполагается, что ток направлен вдоль оси проводника, использование функции Грина для тонкого проводника может привести к вычислительным трудностям, обусловленным малостью угла между \mathbf{J} и $\text{grad} \phi$. Интегральное уравнение для электрического поля свободно от этого недостатка и поэтому широко применяется, несмотря даже на то, что наличие второй производной от ϕ может привести к дополнительным трудностям, если использовать точное выражение для ϕ , которое содержит особенность.

г. *Рассеяние на телах с импедансными граничными условиями.* Во многих представляющих практический интерес случаях удается определить связь между касательными составляющими электрического и магнитного полей. Например, если имеет место соотношение типа

$$\mathbf{K} = Z_c \hat{n} \times \mathbf{J}, \quad (4.21)$$

где Z_c — поверхностный импеданс, а \mathbf{K} и \mathbf{J} — эффективные поверхностные магнитные и электрические токи, то интегральные уравнения (4.11) разделяются. Однако не всегда можно ввести поверхностный импеданс в таком простом виде и обычно приходится прибегать к приближенным выражениям для Z_c .

Пример использования импедансных граничных условий можно найти в работе Митцнера [14], где рассматривается задача рассеяния на теле с большой, но конечной проводимостью. Автор рассматривает граничное условие Леонтовича, имеющее вид (4.12), где в данном случае Z_c представляет собой волновой импеданс проводника. Применимость этих условий ограничивается требованием, чтобы радиус кривизны поверхности тела был велик по сравнению с глубиной скин-слоя δ . Рассматриваются также модифицированные граничные условия (введенные Рытовым и Леонтовичем), пригодные для тел с меньшим радиусом кривизны и имеющие вид

$$K_u = (1 - \rho) Z_c J_v, \quad K_v = (1 + \rho) Z_c J_u, \quad (4.22)$$

где

$$\rho = \frac{1}{4} (1 - i) \delta (C_v - C_u),$$

$$Z_c = \frac{1}{2} (1 + i) \omega \mu \delta,$$

а C_u, C_v — главные кривизны.

Эти граничные условия получены с помощью асимптотических разложений. Далее Митцнер выводит дополнительные граничные условия, для которых дает оценку точности. Он показал, что граничные условия Леонтовича приводят к ошибкам порядка $O(\delta^2/\omega^2\mu\epsilon_0)$, $O(\delta^2/h^2)$ и $O(\delta C)$, где h — расстояние до ближайшего существенного источника, а $C = \max(C_u, C_v)$. Дальнейшее уточнение позволяет снизить порядок последней из перечисленных ошибок до $O(\delta^2 C^2)$ для зависящих от кривизны граничных условий

$$(1 + \rho) K_u = -Z_c J_v, \quad (1 - \rho) K_v = Z_c J_u. \quad (4.23)$$

Митцнер предложил также иной вид граничных условий, содержащий поверхностный интеграл и дающий точное описание истинных граничных условий, поскольку он учитывает нелокальный характер взаимодействия.

Сениор [15] также исследовал применимость импедансных граничных условий. Он исходил из волнового уравнения в среде с потерями и получил условия, при которых справедливы приближения, связанные с использованием поверхностного импеданса. Сениор указывает также физические предположения, принимаемые при использовании понятия поверхностного импеданса.

Очевидно, что установление точного вида импедансных граничных условий, вообще говоря, затруднительно. Однако такой подход к задачам является лишь одним из возможных, и во многих случаях он приводит к значительным упрощениям за счет уменьшения точности. Изложенный выше метод решения задач о рассеянии на диэлектрических телах можно перенести и на рассматриваемые здесь рассеиватели. Хотя он и является более точным методом, однако обладает тем существенным недостатком, что требует решения систем интегральных уравнений. Очевидно, что при выборе метода решения подобных задач необходимо сопоставлять потенциальные трудности и возможные ошибки.

Интегральные представления в двумерных задачах

Интегральные уравнения (1.12) оказываются особенно удобными в тех случаях, когда поверхность S инвариантна относительно смещения вдоль некоторой оси. Если, кроме того, все поля также не меняются вдоль этой оси (или периодичны вдоль оси), то можно добиться существенных упрощений. Например, в системе координат, в которой нормальное сечение поверхности S не зависит от z , можно записать

$$\mathbf{E}(z, t) = \mathbf{E}(t) e^{-ik_z z},$$

где t — координаты в плоскости сечения. Поскольку поверхность не зависит от координаты z , можно выбрать плоскость $z=0$ таким образом, чтобы поверхностные интегралы (4.12) сводились к виду

$$\oint_C \left(\mathbf{A} \frac{\partial G}{\partial n'} - G \left\{ \frac{\partial \mathbf{A}}{\partial n'} - \hat{n}' [\operatorname{div}' \mathbf{A}_t - ik_z A_z] \right\} \right) dl,$$

где $\mathbf{E}(t)$ и $\mathbf{H}(t)$ замснены на $\mathbf{A}(t)$, C — контур нормального сечения поверхности S , dl — бесконечно малый элемент этого контура, индексы t и z соответствуют поперечным и продольным составляющим, а

$$G = \int_{-\infty}^{\infty} e^{-ik_z z'} \frac{\exp\{-ik \sqrt{|t-t'|^2 + z'^2}\}}{\sqrt{|t-t'|^2 + z'^2}} dz'.$$

Это интегральное представление функции G хорошо известно [6] и может быть сведено к виду

$$G = -\pi i H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} |t-t'|),$$

так что нормальная производная принимает вид

$$\frac{\partial G}{\partial n'} = \pi i \sqrt{k^2 - k_z^2} H_1^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} |t-t'|) \cos(\hat{n}', t-t'), \quad (4.24)$$

где $\cos(\hat{n}', \mathbf{t}-\mathbf{t}')$ — косинус угла между нормалью и вектором, лежащим в плоскости нормального сечения и соединяющим точку наблюдения и точку источника. С учетом этих соотношений уравнения (4.12) принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{t}) &= T\mathbf{E}^i(\mathbf{t}) + \\ &+ T \frac{i}{4} \oint_C \left[\mathbf{E}(\mathbf{t}') \sqrt{k^2 - k_z^2} H_1^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} |\mathbf{t} - \mathbf{t}'|) \cos(\hat{n}', \mathbf{t} - \mathbf{t}') + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial \mathbf{E}}{\partial n'} - \hat{n}' [\operatorname{div}'_t \mathbf{E}_t - ik_z E_z] \right) H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} |\mathbf{t} - \mathbf{t}'|) \right] dl, \quad (4.25) \\ \mathbf{H}(\mathbf{t}) &= T\mathbf{H}^i(\mathbf{t}) + \\ &+ T \frac{i}{4} \oint_C \left[\mathbf{H}(\mathbf{t}') \sqrt{k^2 - k_z^2} H_1^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} |\mathbf{t} - \mathbf{t}'|) \cos(\hat{n}', \mathbf{t} - \mathbf{t}') + \right. \\ &+ \left. \left(\frac{\partial \mathbf{H}}{\partial n'} - \hat{n}' [\operatorname{div}'_t \mathbf{H}_t - ik_z H_z] \right) H_0^{(2)}(\sqrt{k^2 - k_z^2} |\mathbf{t} - \mathbf{t}'|) \right] dl. \end{aligned}$$

Эти уравнения представляют собой двумерные интегральные уравнения для электрического и магнитного полей. Здесь по-прежнему $T = (1 - \Omega/4\pi)^{-1}$, Ω — телесный угол, под которым видна поверхность при $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}'$; это можно записать также по-другому: $T = (1 - \Lambda/2\pi)^{-1}$, где Λ — угол, под которым виден контур C при $\mathbf{t} \rightarrow \mathbf{t}'$.

Частные случаи. Поскольку двумерные задачи находят ограниченное применение и многие частные трехмерные задачи, рассмотренные выше, легко переносятся на случай двух измерений, мы рассмотрим здесь только одну задачу.

а. *Рассеяние на идеальном проводнике плоской волны при наклонном падении.* Рассмотрим плоскую волну, падающую на двумерный рассеиватель, как это показано на рис. 4.6. Для упрощения рассмотрим два отдельных случая:

1. ТМ-поляризация (\mathbf{H}^i перпендикулярно оси z).
2. ТЕ-поляризация (\mathbf{E}^i перпендикулярно оси z).

Для более детального ознакомления и анализа примеров отсылаем читателя к работам Оширо [16] и Андреасена [17, 18].

1. ТМ-поляризация. Если в падающей волне магнитное поле перпендикулярно оси z , то падающее электрическое поле в цилиндрических координатах можно представить в виде

$$E_z^i(\mathbf{t}) = E_0 \sin \theta_0 e^{ik\rho \cos(\varphi - \varphi_0) \sin \theta_0},$$

где \mathbf{t} — совокупность поперечных координат точки наблюдения (ρ, φ) . Из уравнений Максвелла следует, что для ТМ-поляриза-

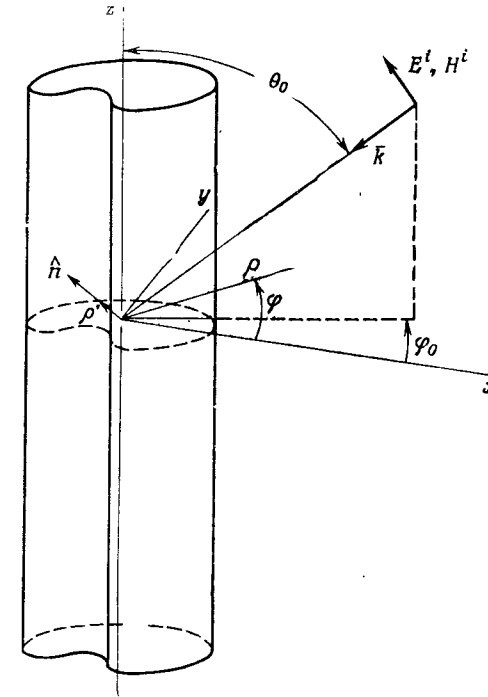
ции

$$\frac{\partial E_z}{\partial n'} = i\omega\mu H_\varphi = i\omega\mu J_z,$$

где использовано соотношение

$$\mathbf{J} = \hat{n} \times \mathbf{H}.$$

Поскольку на поверхности проводящего цилиндра $E_z = 0$ и по-



Фиг. 4.6. Система координат, используемая при анализе рассеяния на бесконечном цилиндре.

скольку $k_z = k \cos \theta_0$, первое уравнение (4.25) можно переписать в следующем виде:

$$E_0 \sin \theta_0 e^{ik\rho \cos(\varphi - \varphi_0) \sin \theta_0} = \frac{\omega\mu}{4} \int_C J_z(\mathbf{t}') H_0^{(2)}(k|\mathbf{t} - \mathbf{t}'| \sin \theta_0) dl, \quad (4.26)$$

где \mathbf{t}' — совокупность поперечных координат точки источника (ρ', φ') и где с учетом граничных условий использованы касательные составляющие уравнений. Уравнение (4.26) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма первого рода

относительно поверхностной плотности тока J_z на цилиндре при падении плоской волны TM -поляризации.

2. TE -поляризация. Когда в падающей волне электрическое поле поляризовано перпендикулярно оси z , удобно рассматривать z -составляющую магнитного поля. В этом случае

$$H_z^i(t) = H_0 \sin \theta_0 e^{ik\rho \cos(\varphi - \varphi_0) \sin \theta_0}$$

Из равенства $\mathbf{J} = \hat{n} \times \mathbf{H}$ следует

$$H_z(t) = -J_\varphi(t);$$

с другой стороны, $\partial H_z / \partial n' = -i\omega \epsilon E_\varphi = 0$ на поверхности проводника. С учетом этого касательная составляющая интегрального уравнения для магнитного поля (4.25) может быть записана в виде

$$\begin{aligned} & 2H_0 \sin \theta_0 e^{ik\rho \cos(\varphi - \varphi_0) \sin \theta_0} = \\ & = -J_\varphi(t) + \frac{ik \sin \theta_0}{2} \int_C J_\varphi(t') H_1^{(2)}(k|\mathbf{t} - \mathbf{t}'| \sin \theta_0) \cos(\hat{n}', \mathbf{t} - \mathbf{t}') dl. \end{aligned} \quad (4.27)$$

Уравнение (4.27) представляет собой интегральное уравнение Фредгольма второго рода для азимутальной составляющей тока на поверхности цилиндра при падении плоской волны TE -поляризации.

Представление характеристик рассеяния

До сих пор мы рассматривали главным образом вывод интегральных уравнений, связывающих наведенные поверхностные или объемные токи и возбуждающие их падающие поля. Поскольку интерес обычно представляют величины, наблюдаемые в дальней зоне, то само решение интегральных уравнений представляет собой лишь промежуточный шаг. Необходимо еще связать вычисленные наведенные источники с измеряемыми величинами. Так как в большинстве случаев в дальней зоне определяется либо рассеянное поле, либо сечение рассеяния, то мы ограничимся только этими величинами.

Поле в дальней зоне, рассеянное ограниченной поверхностью S , легко может быть выражено через наведенные источники с помощью уравнения (4.13а), в котором точки наблюдения устремляются к бесконечности. Оставляя для $\mathbf{x} \gg \mathbf{x}'$ два члена в разложении, имеем $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow r - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{x}')/r$, где $r = |\mathbf{x}|$, $\hat{r} = \mathbf{x}/|\mathbf{x}|$, так что

$$\begin{aligned} \varphi &= \frac{e^{-ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \rightarrow \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ik\hat{r} \cdot \mathbf{x}'}, \\ \text{grad}' \varphi &= \text{grad}' \frac{e^{-ik|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}}{\mathbf{x} - \mathbf{x}'} \rightarrow \hat{r} ik \frac{e^{-ikr}}{r} e^{ik\hat{r} \cdot \mathbf{x}'}. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь оставлены лишь члены порядка $1/|x|$ (более подробно см., например, [19]). В результате рассеянное поле может быть записано в виде

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}) = -\frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int_S [i\omega \mu \mathbf{J}_s + ik \mathbf{K}_s \times \hat{r} - \frac{ik}{\epsilon} \rho_s \hat{r}] e^{ik\hat{r} \cdot \mathbf{x}'} ds',$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{x}) = \frac{e^{-ikr}}{4\pi r} \int_S [-i\omega \epsilon \mathbf{K}_s + ik \mathbf{J}_s \times \hat{r} + \frac{ik}{\mu} m_s \hat{r}] e^{ik\hat{r} \cdot \mathbf{x}'} ds'.$$

Поскольку $\rho_s = (i/\omega) \text{div}' \mathbf{J}_s$ и $\int_S \mathbf{f} \text{div}' \mathbf{J}_s ds' = -\int_S \mathbf{J} \text{grad}' \mathbf{f} ds'$, интегралы можно преобразовать к более удобному виду:

$$\begin{aligned} \mathbf{E}^s(\mathbf{x}) &= \frac{i\omega \mu e^{-ikr}}{4\pi r} \int_S [(\hat{r} \cdot \mathbf{J}_s) \hat{r} - \mathbf{J}_s - \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \mathbf{K}_s \times \hat{r}] e^{ik\hat{r} \cdot \mathbf{x}'} ds', \\ \mathbf{H}^s(\mathbf{x}) &= \frac{i\omega \epsilon e^{-ikr}}{4\pi r} \int_S [(\hat{r} \cdot \mathbf{K}_s) \hat{r} - \mathbf{K}_s + \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \mathbf{J}_s \times \hat{r}] e^{ik\hat{r} \cdot \mathbf{x}'} ds'. \end{aligned} \quad (4.28)$$

Уравнения (4.28) дают искомые представления рассеянных полей в дальней зоне через наведенные электрические и магнитные токи.

Другой величиной, представляющей для нас интерес, является радиолокационное сечение рассеяния (РСР) для данной ориентации рассеивателя. Оно определяется как умноженное на 4π отношение интенсивности (мощность в единице телесного угла) рассеянной в заданном направлении волны к мощности на единицу площади плоской падающей волны заданной поляризации и направления. Таким образом, РСР σ определяется выражением

$$\sigma = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|E^s|^2}{|E^i|^2} = \lim_{r \rightarrow \infty} 4\pi r^2 \frac{|H^s|^2}{|H^i|^2}, \quad (4.29)$$

где рассеянное поле и сечение σ являются функциями направления. Очевидно, что σ является скалярной величиной, определяемой через мощность и не зависящей от поляризации рассеянного поля. В некоторых приложениях удобнее определять РСР по какой-нибудь одной составляющей рассеянного поля, чтобы эта величина зависела от принимаемой поляризации. Тогда поляризационные характеристики приемника явно входят в измеряемую величину РСР, что позволяет оценить деполяризационные эффекты рассеивателя.

Различные способы определения сечения рассеяния и методы его измерения можно найти в работе Кинга и Ву [20]. Для подробного ознакомления с эффектами деполяризации читателю следует обратиться к работе Бекмана [21].

2. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ В ПРОСТРАНСТВЕННО-ВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Интегральное уравнение в пространственно-частотном представлении, выведенное для случая возбуждения гармоническим полем, мы используем теперь для вывода интегрального уравнения в пространственно-временном представлении. Рассмотрим следующие частные виды этого уравнения: интегральное уравнение для электрического поля (ИУЭП), интегральное уравнение для магнитного поля (ИУМП), интегральное уравнение для векторного потенциала искривленных и прямолинейных проводников. С помощью преобразования Фурье из уравнения в пространственно-частотном представлении мы легко получим уравнение в пространственно-временном представлении, пригодное для полей, зависящих от времени произвольным образом.

Прямое и обратное преобразования Фурье

Для перехода от пространственно-частотного представления к пространственно-временному представлению мы применим преобразование Фурье. Будем пользоваться прямым и обратным преобразованиями следующего вида:

$$\tilde{f}(\omega) = \int_{-\infty}^{\infty} f(t) e^{-i\omega t} dt, \quad (4.30)$$

$$f(t) = \mathcal{F}[\tilde{f}(\omega)] = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{f}(\omega) e^{i\omega t} d\omega.$$

Мы часто будем пользоваться теоремой о свертке, которая формулируется следующим образом:

$$\mathcal{F}[\tilde{f}(\omega) \tilde{g}(\omega)] = f(t) * g(t) = \int_{-\infty}^{\infty} f(\tau) g(t - \tau) d\tau. \quad (4.31)$$

Кроме того, будет использовано тождество

$$\mathcal{F}[e^{-i\omega\tau}] = \delta(t - \tau). \quad (4.32)$$

Удобно также ввести понятие о векторной свертке. Применив к векторному произведению векторных функций координат и частоты преобразование Фурье, получим

$$\begin{aligned} \mathcal{F}[\tilde{\mathbf{f}}(\mathbf{x}, \omega) \times \tilde{\mathbf{g}}(\mathbf{x}, \omega)] &= \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{g}(\mathbf{x}, t) = \\ &= \int_{-\infty}^{\infty} \mathbf{f}(\mathbf{x}, t) \times \mathbf{g}(\mathbf{x}, t - \tau) d\tau. \end{aligned} \quad (4.33)$$

В дальнейшем будем полагать, что интегрирование по времени и интегрирование по частоте можно менять местами. Достаточным условием возможности изменения порядка интегрирования является интегрируемость квадратов обеих функций, т. е.

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} |f(t)|^2 dt &< \infty, \\ \int_{-\infty}^{\infty} |g(\omega)|^2 d\omega &< \infty. \end{aligned}$$

Это эквивалентно условию «конечности энергии» для $f(t)$ и $g(t)$.

Интегральные представления электромагнитных полей

Интегральные представления электрического и магнитного полей. Начнем с интегральных уравнений в пространственно-временном представлении, которые соответствуют уравнению (4.9). Для простоты предположим, что источники отсутствуют, и, следовательно, объемный интеграл обращается в нуль. Выведем подробно лишь интегральное уравнение для электрического поля: уравнение для магнитного поля легко написать по аналогии. Результаты нетрудно обобщить на случай, когда внутри объема V имеются источники.

Интегральное уравнение для электрического поля в пространственно-временном представлении может быть получено фурье-преобразованием уравнения (4.9). Поскольку порядок интегрирования можно менять (все члены уравнения интегрируемы в квадрате), операцию \mathcal{F} (фурье-преобразование) и операцию $\int_S ds'$ можно поменять местами. Таким образом,

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= T\mathbf{E}^i(\mathbf{x}, t) - \frac{T}{4\pi} \int_S \{ \mu \hat{n}' \times \mathcal{F}[i\omega \tilde{\mathbf{H}}(\mathbf{x}, \omega) \tilde{\phi}] - \\ &- \mathcal{F}[(\hat{n}' \times \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}', \omega)) \times \text{grad}' \tilde{\phi}] - \mathcal{F}[(\hat{n}' \cdot \tilde{\mathbf{E}}(\mathbf{x}, \omega)) \text{grad}' \tilde{\phi}] \} ds'. \end{aligned} \quad (4.34)$$

Для приведения уравнения (4.34) к более удобному виду воспользуемся следующими соотношениями.

Из теории фурье-преобразования известно, что если $f(t)$ и $(d/dt)f(t)$ стремятся к нулю при t , стремящемся к бесконечности, то

$$\mathcal{F}[i\omega \tilde{f}(\omega)] = \frac{d}{dt} f(t).$$

Из (4.32) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{F} [\tilde{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)] &= \mathcal{F} \left[\frac{e^{-i(\omega/c)|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right] = \frac{\delta [t - (|\mathbf{x} + \mathbf{x}'|/c)]}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}, \\ \mathcal{F} [\text{grad}' \tilde{\varphi}(\mathbf{x}, \mathbf{x}', \omega)] &= \delta \left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c} \right) \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} + \\ &+ \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial t} \delta \left(t - \frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c} \right) \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2}. \end{aligned}$$

Подстановка этих соотношений в уравнение (4.34) приводит к интегралу, содержащему ряд сверток вида (4.33). С помощью теоремы о свертке и используя свойство δ -функций, получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= T\mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) - \frac{T}{4\pi} \int_S \left\{ \mu \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, \tau)] - \right. \\ &- [\hat{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{x}', \tau)] \times \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} - \left. [\hat{n}' \times \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{E}(\mathbf{x}', \tau)] \times \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} - \right. \\ &- [\hat{n}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, \tau)] \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} - \\ &\left. - [\hat{n}' \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{E}(\mathbf{x}, \tau)] \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \right\}_{\tau=t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}} ds'. \end{aligned} \quad (4.35)$$

Здесь $(\partial/\partial\tau)\mathbf{E}(\mathbf{x}', \tau)$ — производная по времени, вычисленная в запаздывающее время, т. е. $(\partial/\partial t)\mathbf{E}(\mathbf{x}', t)|_{t=\tau}$. Уравнение (4.35) представляет собой общий вид интегрального уравнения для электрического поля в пространственно-временном представлении для свободного от источников объема V , ограниченного поверхностью S и замкнутой поверхностью на бесконечности. Источники в объеме легко учесть путем добавления к уравнению (4.35) объемного интеграла

$$\begin{aligned} &- \frac{T}{4\pi} \int_V \left\{ \mu \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{J}(\mathbf{x}', \tau) + \mathbf{K}(\mathbf{x}', \tau) \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} + \right. \\ &+ \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{K}(\mathbf{x}', \tau) \times \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} - \frac{\rho(\mathbf{x}', \tau)}{\varepsilon} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} - \\ &\left. - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\rho(\mathbf{x}', \tau)}{\varepsilon} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \right\}_{\tau=t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}} dv'. \end{aligned} \quad (4.36)$$

На основании принципа двойственности можно сразу записать соответствующее интегральное уравнение для магнитного поля в пространственно-временном представлении для свободной от

источников области:

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= T\mathbf{H}'(\mathbf{x}, t) + \frac{T}{4\pi} \int_S \left\{ \varepsilon \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, \tau)] + \right. \\ &+ [\hat{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{x}', \tau)] \times \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} + \left. [\hat{n}' \times \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}(\mathbf{x}', \tau)] \times \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} + \right. \\ &+ [\hat{n}' \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, \tau)] \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} + \\ &\left. + [\hat{n}' \cdot \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{H}(\mathbf{x}, \tau)] \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \right\}_{\tau=t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}} ds'. \end{aligned} \quad (4.37)$$

При наличии электрических или магнитных источников к нему следует добавить член, аналогичный (4.36).

Большой практический интерес представляет случай, когда поверхность S совпадает с поверхностью идеального проводника. Введем эквивалентные источники $\mathbf{J}_s'(\mathbf{x}, t) = \hat{n} \times \mathbf{H}(\mathbf{x}, t)$ и $\rho_s(\mathbf{x}, t) = \varepsilon \hat{n} \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$. Поскольку граничные условия требуют, чтобы $\hat{n} \times \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) = 0$ и $\hat{n} \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) = 0$ при $\mathbf{x} \in S$, интегральные уравнения в пространственно-временном представлении для идеального проводника можно записать в виде

$$\begin{aligned} 0 &= \hat{n} \times \mathbf{E}'(\mathbf{x}, t) - \frac{1}{4\pi} \hat{n} \times \int_S \left\{ \mu \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) - \right. \\ &- \frac{\rho_s(\mathbf{x}', \tau)}{\varepsilon} \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^3} - \frac{\partial}{\partial \tau} \rho_s(\mathbf{x}', \tau) \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{\varepsilon c|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \left. \right\}_{\tau=t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}} ds', \end{aligned} \quad (4.38)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t) &= 2\hat{n} \times \mathbf{H}'(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \\ &\times \int_S \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) + \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) \frac{1}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|} \right] \frac{\mathbf{x}-\mathbf{x}'}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|^2} \Big|_{\tau=t-\frac{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}{c}} ds'. \end{aligned}$$

Первое из этих уравнений, очевидно, является интегральным уравнением Фредгольма первого рода, а второе уравнение — интегральным уравнением Фредгольма второго рода.

Интегральное уравнение для векторного потенциала (тонкий проводник). Интегральное уравнение для векторного потенциала в пространственно-временном представлении для произвольно изогнутых проводников было получено Меем [13]. Для упрощения преобразования Фурье и интерпретации членов в интегралах, содержащих запаздывающее время, запишем интегральное уравнение в пространственно-частотном представлении

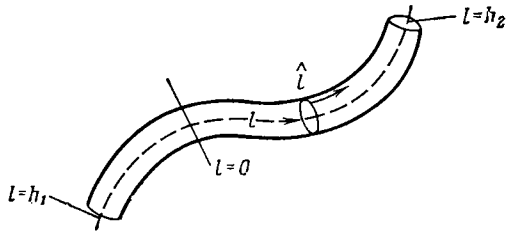
следующим образом:

$$\int_{h_1}^{h_2} \tilde{I}(l', \omega) \left\{ \tilde{G}(l, l', \omega) \hat{l} \cdot \hat{l}' + \frac{1}{2} \int_{h_1}^{h_2} \theta(\xi - l) \left[\frac{\partial \tilde{G}(\xi, l', \omega)}{\partial l'} + \frac{\partial}{\partial \xi} [(\hat{\xi} \cdot l') \tilde{G}(\xi, l', \omega)] \right] e^{-i(\omega/c)|l-\xi|} d\xi \right\} dl' =$$

$$= \tilde{C}(\omega) e^{i(\omega/c)l} + \tilde{D}(\omega) e^{-i(\omega/c)l} + \frac{ec}{2} \int_{h_1}^{h_2} \tilde{E}_\xi^i(\xi, \omega) e^{-i(\omega/c)|l-\xi|} d\xi, \quad (4.39)$$

где $\tilde{G}(l, l', \omega) = \frac{e^{-ikR(l, l')}}{4\pi R(l, l')}$, $\theta(\xi - l) = \pm 1$ при $\xi \leq l$,

$R(l, l')$ — расстояние между двумя сечениями тонкого проводника и $\tilde{E}_\xi^i(\xi, \omega) = \hat{\xi} \cdot \mathbf{E}^i(\xi, \omega)$. Волновое число k определяется соотношением $k = \omega/c$, где c — скорость света. Входящие в это уравнение геометрические параметры определены на фиг. 4.7. Уравнение (4.39) отличается от уравнения Мея только экспоненциальным членом в подынтегральном выражении, наличием функции $\theta(\xi - l)$ и пределами интегрирования по ξ [22]. Отличия обусловлены



Фиг. 4.7. Система координат, используемая при анализе рассеяния на произвольном тонком проводнике.

разным выбором функции Грина дифференциального уравнения в частных производных для векторного потенциала. Применяя к уравнению (4.39) преобразование Фурье, получаем интегральное уравнение в пространственно-временном представлении

$$\int_{h_1}^{h_2} (\hat{l} \cdot \hat{l}') \frac{I(l', \tau)}{4\pi R(l, l')} \Big|_{\tau=t-R(l, l')/c} dl' - \frac{1}{8\pi} \int_{h_1}^{h_2} \int_{h_1}^{h_2} \theta(\xi - l) \times$$

$$\times \left\{ \frac{(\hat{\xi} \cdot \hat{l}') (\partial R(\xi, l')/\partial \xi) + (\partial R(\xi, l')/\partial l')}{cR(\xi, l')} \frac{\partial}{\partial \tau} I(l', \tau) + \left(\frac{\partial R(\xi, l')}{\partial l'} + (\hat{\xi} \cdot \hat{l}') \frac{\partial R(\xi, l')}{\partial \xi} - R(\xi, l') \frac{\partial (\hat{\xi} \cdot \hat{l}')}{\partial \xi} \right) \times \right.$$

$$\times \left. \frac{I(l', \tau)}{R(\xi, l')^2} \right\}_{\tau=t-R(\xi, l')/c-|l-\xi|/c} d\xi dl' =$$

$$= C \left(t - \frac{l}{c} \right) + D \left(t + \frac{l}{c} \right) + \frac{ec}{2} \int_{h_1}^{h_2} E_\xi^i(\xi, t - \frac{|l-\xi|}{c}) d\xi. \quad (4.40)$$

Для прямолинейного проводника уравнение (4.40) упрощается, если учесть, что $\hat{\xi} \cdot l' = 1$, $\partial/\partial \xi R = -\partial/\partial l' R$:

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{I(l', \tau)}{4\pi R(l, l')} \Big|_{\tau=t-R(l, l')/c} dl' = C \left(t - \frac{l}{c} \right) + D \left(t + \frac{l}{c} \right) +$$

$$+ \frac{ec}{2} \int_{h_1}^{h_2} E_\xi^i(\xi, t - \frac{|l-\xi|}{c}) d\xi. \quad (4.41)$$

Нестационарные поля в дальней зоне

Большой практический интерес представляют рассеянные нестационарные поля в дальней зоне. Они могут быть найдены из уравнений (4.35) и (4.37), описывающих рассеяние на произвольном теле, если в них опустить члены, соответствующие падающему полю, положить $T=1$ и совершить предельный переход $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow \infty$. Предполагая опять, что поверхность S ограничена, полагая $\mathbf{x} - \mathbf{x}' \rightarrow \mathbf{x} = \mathbf{r}$, $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'| \rightarrow |\mathbf{x}| = r$, $\mathbf{x}/|\mathbf{x}| = \hat{r}$ и записывая западывающее время в виде $\tau = t - r/c + \hat{r} \cdot \mathbf{x}'/c$, получаем

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi rc} \int_S \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{x}', \tau)] - \frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{x}', \tau) \times \hat{r} - \frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{n}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}', \tau)] \hat{r}] \right\}_{\tau=t-r/c+\hat{r} \cdot \mathbf{x}'/c} ds',$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi rc} \int_S \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{x}', \tau)] + \frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{x}', \tau)] \times \hat{r} + \frac{\partial}{\partial \tau} [\hat{n}' \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}', \tau)] \hat{r} \right\}_{\tau=t-r/c+\hat{r} \cdot \mathbf{x}'/c} ds',$$

или, переходя к эквивалентным источникам,

$$\mathbf{E}^s(\mathbf{x}, t) = -\frac{1}{4\pi rc} \int_S \left\{ \sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{K}_s(\mathbf{x}', \tau) \times \hat{r} - \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{\rho_s}{\epsilon} \hat{r} \right\}_{\tau=t-r/c+\hat{r} \cdot \mathbf{x}'/c} ds',$$

$$\mathbf{H}^s(\mathbf{x}, t) = \frac{1}{4\pi rc} \int_S \left\{ -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{K}_s(\mathbf{x}', \tau) + \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) \times \hat{r} + \frac{\partial}{\partial \tau} \frac{m_s}{\mu} \hat{r} \right\}_{\tau=t-r/c+\hat{r} \cdot \mathbf{x}'/c} ds'. \quad (4.42)$$

Если вычислены поверхностный ток и заряд, то с помощью этих соотношений нетрудно определить рассеянное поле в дальней зоне.

3. СВОДКА ИНТЕГРАЛЬНЫХ ПРЕДСТАВЛЕНИЙ И УРАВНЕНИЙ

Для удобства интегральные представления полей и интегральные уравнения в пространственно-частотном и пространственно-временном представлениях сведены в табл. 4.1 и 4.2. ИУЭП и ИУМП выписаны для случая, когда источник расположен вне поверхности S_1 . Во всех формулах для упрощения введены эквивалентные источники

$$\begin{aligned} \mathbf{J}_s &= \hat{n}' \times \mathbf{H}(\mathbf{x}'), & \rho_s &= \varepsilon \hat{n}' \cdot \mathbf{E}(\mathbf{x}'), \\ \mathbf{K}_s &= -\hat{n}' \times \mathbf{E}(\mathbf{x}'), & m_s &= \mu \hat{n}' \cdot \mathbf{H}(\mathbf{x}'). \end{aligned}$$

Таблица 4.1

Пространственно-частотное представление

Интегральное представление электрического поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}) &= T\mathbf{E}^i(\mathbf{x}) + \frac{T}{4\pi} \int_V \left\{ -i\omega\mu\mathbf{J}\varphi - \mathbf{K} \times \text{grad}'\varphi + \frac{\rho}{\varepsilon} \text{grad}'\varphi \right\} dv' + \\ &+ \frac{T}{4\pi} \int_S \left(-i\omega\mu\mathbf{J}_s\varphi - \mathbf{K}_s \text{grad}'\varphi + \frac{\rho_s}{\varepsilon} \text{grad}'\varphi \right) ds'. \end{aligned}$$

Интегральное представление магнитного поля

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}) &= T\mathbf{H}^i(\mathbf{x}) + \frac{T}{4\pi} \int_V \left\{ -i\omega\varepsilon\mathbf{K}\varphi + \mathbf{J} \times \text{grad}'\varphi + \frac{m}{\mu} \text{grad}'\varphi \right\} dv' + \\ &+ \frac{T}{4\pi} \int_S \left(-i\omega\varepsilon\mathbf{K}_s\varphi + \mathbf{J}_s \times \text{grad}'\varphi + \frac{m_s}{\mu} \text{grad}'\varphi \right) ds'. \end{aligned}$$

Интегральное уравнение для векторного потенциала (изогнутый проводник)

$$\begin{aligned} &\int_{h_1}^{h_2} \tilde{T}(l', \omega) \left\{ \tilde{G}(l, l', \omega) \hat{l} \cdot \hat{l}' + \frac{1}{2} \int_{h_1}^{h_2} \theta(\xi - l) \left[\frac{\partial G(\xi, l', \omega)}{\partial l'} + \right. \right. \\ &\left. \left. + \frac{\partial}{\partial \xi} [(\hat{\xi} \cdot \hat{l}') \tilde{G}(\xi, l', \omega)] \right] e^{-i(\omega/c)|l-\xi|} d\xi \right\} dl' = \\ &= \tilde{C}(\omega) e^{i(\omega/c)t} + \tilde{D}(\omega) e^{-i(\omega/c)t} + \frac{ec}{2} \int_{h_1}^{h_2} \tilde{E}_{\xi}^i(\xi, \omega) e^{-i(\omega/c)|l-\xi'|} d\xi'. \end{aligned}$$

Продолжение табл. 4.1

Интегральное уравнение для векторного потенциала (прямой проводник)

$$\begin{aligned} &\int_{h_1}^{h_2} \tilde{T}(l', \omega) \tilde{G}(l, l', \omega) dl' = \tilde{A}(\omega) e^{-i(\omega/c)t} + \tilde{B}(\omega) e^{i(\omega/c)t} + \\ &+ \frac{ec}{2} \int_{h_1}^{h_2} \tilde{E}_{\xi}^i(\xi, \omega) e^{-i(\omega/c)|l-\xi'|} d\xi'. \end{aligned}$$

Таблица 4.2

Пространственно-временное представление

Интегральное представление электрического поля

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\mathbf{x}, t) &= T\mathbf{E}^i(\mathbf{x}, t) - \frac{T}{4\pi} \int_V \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial t} \mathbf{J}(\mathbf{x}', t) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \right. \\ &- \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \frac{\rho}{\varepsilon} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} + \\ &+ \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \mathbf{K} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \left. \right\} dv' - \\ &- \frac{T}{4\pi} \int_S \left\{ \mu \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} - \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \frac{\rho_s}{\varepsilon} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} + \right. \\ &+ \left. \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \mathbf{K}_s \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right\} ds'. \end{aligned}$$

Интегральное представление магнитного поля

$$\begin{aligned} \mathbf{H}(\mathbf{x}, t) &= T\mathbf{H}^i(\mathbf{x}, t) + \frac{T}{4\pi} \int_V \left\{ -e \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{K}(\mathbf{x}', t) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \right. \\ &+ \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \frac{m}{\mu} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} + \\ &+ \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \mathbf{J} \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \left. \right\} dv' + \\ &+ \frac{T}{4\pi} \int_S \left\{ -e \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{K}_s(\mathbf{x}, \tau) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \right. \\ &+ \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \frac{m_s}{\mu} \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} + \\ &+ \left. \left[\frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} + \frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \right] \mathbf{J}_s \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} \right\} ds'. \end{aligned}$$

Продолжение табл. 4.2

Интегральное уравнение для векторного потенциала (изогнутый проводник)

$$\int_{h_1}^{h_2} (\hat{l} \cdot \hat{l}') \frac{I(l', \tau)}{4\pi R(l, l')} \Big|_{\tau=t-\frac{R(l, l')}{c}} dl' - \frac{1}{8\pi} \int_{h_1}^{h_2} \int_{h_1}^{h_2} \theta(\xi - l) \times$$

$$\times \left\{ \frac{(\hat{\xi} \cdot \hat{l}') \frac{\partial R(\xi, l')}{\partial \xi} + \frac{\partial R(\xi, l')}{\partial l'}}{cR(\xi, l')} \frac{\partial}{\partial \tau} I(l', \tau) + \left(\frac{\partial R(\xi, l')}{\partial l'} + \right. \right.$$

$$\left. \left. + (\hat{\xi} \cdot \hat{l}') \frac{\partial R(\xi, l')}{\partial \xi} - R(\xi, l') \frac{\partial (\hat{\xi} \cdot \hat{l}')}{\partial \xi} \right) \frac{I(l, \tau)}{R(\xi, l')^2} \right\} \Big|_{t-\tau-\frac{R(\xi, l')}{c}-\frac{(l-\xi)}{c}} d\xi dl =$$

$$= C \left(t - \frac{l}{c} \right) + D \left(t + \frac{l}{c} \right) + \frac{ec}{2} \int_{h_1}^{h_2} E_{\xi}^i \left(\xi, t - \frac{|l-\xi|}{c} \right) d\xi.$$

Интегральное уравнение для векторного потенциала (прямой проводник)

$$\int_{h_1}^{h_2} \frac{I(l', \tau)}{4\pi R(l, l')} \Big|_{\tau=t-\frac{R(l, l')}{c}} dl' = C \left(t - \frac{l}{c} \right) + D \left(t + \frac{l}{c} \right) +$$

$$+ \frac{ec}{2} \int_{h_1}^{h_2} E_{\xi}^i \left(\xi, t - \frac{|l-\xi|}{c} \right) d\xi.$$

Для удобства введены следующие обозначения:

$$T = \left(1 - \frac{\Omega}{4\pi} \right)^{-1},$$

$$\theta(\xi - s) = \begin{cases} 1 & \text{при } \xi > s, \\ -1 & \text{при } \xi < s, \end{cases}$$

$\int_S ds$ — интеграл в смысле главного значения по поверхности S ,

$$\varphi = \frac{e^{-ik|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|}}{|\mathbf{x}-\mathbf{x}'|},$$

$$G(s, s') = \frac{1}{4\pi} \frac{e^{-ikR(s, s')}}{R(s, s')}.$$

Для запаздывающего времени используются обозначения, введенные выше [в уравнении (4.35)].

§ 3. ЧИСЛЕННЫЕ МЕТОДЫ РЕШЕНИЯ

Приведенные выше интегральные уравнения сами по себе мало полезны, если их не удастся свести к виду, позволяющему непосредственно получить интересующие нас результаты для частных задач. Ниже мы рассмотрим методы численного решения и приведем типичные полученные результаты.

Решение электродинамической задачи можно разделить на три этапа. Первый этап — получение математических соотношений между интересующими нас физическими величинами. Математическая формулировка задачи основывается на уравнениях Максвелла в той форме (интегральной или дифференциальной), которая лучше подходит для данной задачи (например, позволяет учесть пространственную неоднородность диэлектрика и т. д.). Такая формулировка является строгой в макроскопическом смысле, т. е. когда рассматриваются не поля каждой отдельной элементарной частицы, а лишь усредненные поля и источники. Кроме того, для большинства рассматриваемых здесь практических задач представляется разумным считать среду линейной, покоящейся, с независимыми от времени свойствами, что позволяет пренебречь релятивистскими эффектами и использовать принцип суперпозиции.

Второй этап решения задачи заключается в введении определенных ограничений на поведение полей и источников на соответствующих поверхностях. Для этого могут быть использованы различные математические упрощенные модели, которые являясь приближенными, дают, однако, разумные результаты для реальной физической задачи. Например, металлическое тело можно считать идеальным проводником. Использование граничных условий или условия непрерывности полей приводит к математическим соотношениям, связывающим интересующую нас величину с заданными возбуждающими источниками. В рассмотренных выше задачах источники рассеянного поля (наведенные источники) были связаны с падающим полем через интегральный оператор.

После того как на втором этапе найдено формальное математическое решение задачи, остается заключительный этап получения численных результатов. Для этого может понадобиться промежуточное преобразование формального решения к виду, более удобному для проведения численных расчетов. Во всяком случае, независимо от вида формального решения почти всегда (за исключением самых тривиальных задач) приходится прибегать к численным расчетам. Именно этот этап решения задачи рассматривается в настоящем параграфе.

Следует подчеркнуть, что описываемые ниже методы относятся преимущественно к решению интегральных уравнений.

Хотя для решения определенной задачи возможно применение различных аналитических подходов, они могут существенно различаться по сложности и объему вычислений, необходимых для достижения одинаковой точности. Можно ожидать, что оптимальные процедуры решения независимо от математической формы требуют примерно одинакового объема вычислений для получения численного результата. Поэтому подход, основанный на интегральных уравнениях, следует рассматривать по крайней мере на равных основаниях с другими методами; но, кроме того, он обладает рядом дополнительных преимуществ, связанных с его гибкостью. Мы начнем с рассмотрения численных методов решения уравнений в частотном представлении (для гармонических полей), а затем перейдем к случаю произвольной зависимости от времени.

1. РЕШЕНИЕ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТОТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

В то время как сведение задачи о рассеянии на поверхности тела произвольной формы к интегральному уравнению производится без особого труда стандартным способом, получение численного решения этого уравнения не так-то просто. Даже для новейших вычислительных машин возникают ограничения, связанные с ограниченным объемом памяти и недостаточным быстродействием. Таким образом, если не делать упрощающих приближений при постановке задачи или при численном решении, на практике оказывается, что класс доступных для решения задач ограничен. Поэтому мы рассмотрим как некоторые методы, основанные на физических приближениях (такие, как физическая оптика и метод разреженной матрицы) и пригодные для больших тел, так и «строгие» численные методы, необходимые при рассмотрении резонансного рассеяния. Будут рассмотрены также различные упрощения, обусловленные геометрией тела, а также различные способы проверки точности численного решения.

«Строгое» численное решение

Здесь мы рассмотрим главным образом способы решения, основанные на методе моментов и нашедшие широкое применение при решении задач рассеяния электромагнитных волн. Прекрасное изложение этого метода применительно к задачам электродинамики дается в работах Харрингтона [23, 24]. Очень содержательной является также последняя работа Фенлона [25], который применил метод моментов в акустике. В последнее время работы, содержащие новые оригинальные идеи в области численного решения интегральных уравнений электродинамики, были выполнены Ричмондом [26, 27], Андреасеном [17, 18, 28],

Оширой [29] и Меем [13]. Последующее изложение основывается как на этих работах, так и на бесчисленном множестве других работ, посвященных исследованиям в этой области, а также на личном опыте авторов по применению метода интегральных уравнений для решения задач электродинамики.

а. Метод моментов. Интегральное уравнение для магнитного поля (ИУМП) и интегральное уравнение для электрического поля (ИУЭП) удобно представить в операторном виде:

$$\begin{aligned} L_H [\mathbf{J}_s(\mathbf{x}'), \mathbf{K}_s(\mathbf{x}')] &= 2\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}), \\ L_E [\mathbf{J}_s(\mathbf{x}'), \mathbf{K}_s(\mathbf{x}')] &= 2\hat{n} \times \mathbf{E}^i(\mathbf{x}), \end{aligned} \quad (4.43)$$

где

$$\begin{aligned} L_E [] &= -\mathbf{K}_s(\mathbf{x}) + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \\ &\times \int_S (i\omega\mu\mathbf{J}_s\varphi + \mathbf{K}_s \times \text{grad}'\varphi - \frac{\rho_s}{\epsilon} \text{grad}'\varphi) ds', \\ L_H [] &= \mathbf{J}_s(\mathbf{x}) - \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \\ &\times \int_S (-i\omega\epsilon\mathbf{J}_s\varphi + \mathbf{J}_s \times \text{grad}'\varphi + \frac{m_s}{\mu} \text{grad}'\varphi) ds'. \end{aligned}$$

Отметим, что здесь использовано эквивалентное распределение источников на поверхности S и выписаны тангенциальные составляющие уравнений (4.9).

Метод моментов позволяет получить формальное решение приведенных интегральных уравнений, которые можно представить в следующем виде:

$$L[\mathbf{A}(\mathbf{x}')] = \mathbf{B}(\mathbf{x}). \quad (4.44)$$

Метод моментов дает интуитивно логичный подход к решению уравнения (4.44), который в своей простейшей форме сводится к применению взвешенного усреднения интегрального уравнения по области значений L , приводящему к совокупности линейных уравнений для значений \mathbf{A} в области определения L . Требуемый объем вычислений и достигаемая точность решения сильно различаются в зависимости от вида функций, по которым ведется разложение неизвестных функций \mathbf{A} и заданных источников \mathbf{B} . Основная идея метода моментов состоит в следующем.

Неизвестная функция представляется в виде разложения по базисным функциям

$$\mathbf{x} \approx \sum_{n=1}^N a_n \mathbf{f}_n(\mathbf{x}), \quad (4.45)$$

где a_n — подлежащие определению постоянные, а функции $f_n(x)$ — независимые функции в области определения оператора. Подставляя решение в интегральное уравнение, находим разностную ошибку представления $\epsilon(x)$:

$$\epsilon(x) = \sum_{n=1}^N a_n L[f_n(x)] - B(x), \quad (4.46)$$

где изменен порядок операций суммирования и интегрирования. Определим скалярное произведение на поверхности S двух касательных векторов P и Q как

$$\langle P, Q \rangle = \iint_S P \cdot Q da; \quad (4.47)$$

тогда, взяв скалярные произведения (4.46) на совокупность весовых функций $\{W_m\}$ в области значений оператора L , получим

$$\langle W_m \cdot \epsilon \rangle = \sum_{n=1}^N a_n \langle W_m \cdot L[f_n(x)] \rangle - \langle W_m \cdot B \rangle, \quad m = 1, 2, \dots, M. \quad (4.48)$$

Если теперь проекцию вектора ошибки на пространство весовых функций положить равной нулю, т. е. принять $\langle W_m \cdot \epsilon \rangle = 0$, то получим уравнение, которое может быть записано в матричной форме:

$$[Z][A] = [E], \quad (4.49)$$

где элементы матриц $[Z]$ и $[E]$ равны

$$Z_{mn} = \langle W_m \cdot L[f_n(x)] \rangle, \\ E_m = \langle W_m \cdot B \rangle.$$

Таким образом, первоначальное интегральное уравнение свелось к обманчиво простой на вид системе из M линейных уравнений. Если число уравнений не равно числу неизвестных коэффициентов разложения вектора A , то система может быть рассмотрена стандартным способом¹⁾ (например, построением обобщенной обратной матрицы). Как бы то ни было, в конце концов мы приходим к квадратной матрице. При условии, что матрица $[Z]$, которую мы будем называть матрицей импедансов, имеет соответствующую обратную матрицу, можно найти неизвестный вектор $[A]$ и тем самым получить приближенное решение для функции $A(x)$, определяемой уравнением (4.45).

Здесь необходимо заметить, что каждая базисная функция $f_n(x)$ не обязательно должна быть определена во всей области определения оператора L . Функции $f_n(x)$ могут быть определены в различных подобластях области определения оператора L ,

¹⁾ См., например, стр. 40. — Прим. ред.

так что каждая функция $f_n(x)$ существует лишь в n -й подобласти. В случае интегрального уравнения, когда L является интегральным оператором, применение таких базисных функций эквивалентно замене интеграла на конечную риманову сумму, в которой подынтегральное выражение в каждом интервале Δx_n соответствует одному члену совокупности $\{f_n\}$. Это можно записать следующим образом:

$$A(x) = \begin{cases} a_n f_n(x) & \text{при } x \in \Delta x_n, \\ 0 & \text{в остальной области,} \end{cases} \quad (4.50)$$

или короче:

$$A(x) = U(x_n) a_n f_n(x), \quad (4.51)$$

где

$$U(x_n) = \begin{cases} 1 & \text{при } x \in \Delta x_n, \\ 0 & \text{в остальной области.} \end{cases}$$

Подробное рассмотрение этого и ряда других вопросов читатель может найти в работе Харрингтона [24].

б. Базисные и весовые функции. Из уравнения (4.49) видно, что элементы матрицы $[Z]$ содержат два интегрирования по поверхности (одно — в исходном интегральном уравнении $L[f_n(x')]$, другое — в скалярном произведении $\langle W_m \cdot L[f_n(x')] \rangle$), которые в общем случае не могут быть проведены аналитически. Поэтому для вычисления элементов матрицы Z_{mn} может потребоваться значительное машинное время. Соображения экономии вынуждают разумно выбирать функции f_n и W_m ,

Таблица 4.3

Пары функций, наиболее употребительные в методе моментов

Метод	n -й член разложения вектора A	Весовая функция
1. Галеркина	$a_n f_n(x)$	$f_m(x)$
2. Наименьших квадратов	$a_n f_n(x)$	$Q(x) \frac{\partial \epsilon(x)}{\partial a_m}$
3. Базисных функций полной области	$a_n f_n(x)$	$\delta(x - x_m)$
4. Сшивания по точкам	$a_n \delta(x - x_n)$	$\delta(x - x_m)$
5. Базисных функций подобластей	$U(x_n) \sum_{p=1}^P a_{np} f_p(x)$	$\delta(x - x_m)$

$Q(x)$ — положительно определенная функция точки.

чтобы по возможности удовлетворить противоречивым требованиям, определяемым точностью результата и затратами машинного времени.

Фенлон [25] дал таблицы некоторых пар функций, наиболее часто используемых при решении интегральных уравнений. В слегка модифицированном виде его результаты приведены в табл. 4.3. Методы 3, 4 и 5 позволяют избавиться от двойных поверхностных интегралов за счет использования в качестве весовых функций δ -функции. В методе 4 δ -функция используется также в качестве базисной функции, что позволяет исключить также интегрирование по источникам. В методе 5 применяются разложения вида (4.50) и (4.51). В таблице в этом методе неизвестная функция в каждой подобласти представляется в виде суммы, поэтому коэффициенты имеют двойные индексы. Это позволяет расширить возможности аппроксимации неизвестной функции в данном интервале Δx_n .

Как и следовало ожидать, существует некоторое соответствие между различными возможными методами решения и типами решаемых задач, а также конкретным выбором функций f_n . Как указывает Харрингтон [24], существует бесконечно большое число наборов базисных и весовых функций; перечисленные в табл. 4.3 пары являются лишь примерами наиболее употребительных функций. Для каждой конкретной задачи желательно выбрать f_n и W_m таким образом, чтобы они соответствовали физической сущности задачи и приводили к экономии времени счета на ЭВМ.

Вообще говоря, функции f_n должны быть по своим свойствам близки к искомой функции. В качестве простого примера рассмотрим рассеяние на тонком кольце аксиально падающей плоской волны. В этом случае наведенный ток направлен в основном вдоль окружности кольца и меняется как $\sin \varphi$, поэтому в качестве базисной функции особенно удобно использовать $\sin \varphi$, так как это позволяет получить точное решение для наведенного тока при одной δ -функции в качестве весовой функции. Наоборот, решение при помощи метода базисных функций подобластей требует, чтобы число точек было равно числу констант, необходимых для аппроксимации синусоидальной зависимости тока в интервале $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. В результате может оказаться, что решение найдено не самым эффективным способом и имеет невысокую точность. Другим примером может служить представление тока в двухпроводной линии. В этом случае в качестве базисной функции очень хорошо подходит $\exp(iks)$. Для простейшего трехмерного поверхностного рассеивателя, каким является идеально проводящая сфера, наиболее эффективными оказываются базисные функции вида $\sin \varphi \sum_i A_i P_i(\cos \theta)$, по-

скольку истинное распределение поверхностного тока имеет такой вид [30].

На практике подгонка базисных функций под ожидаемый вид искомой функции снижает общность составленной программы или алгоритма расчета. Использование более общих базисных функций для вычисления поверхностных интегралов приводит к недопустимому возрастанию времени счета на ЭВМ матрицы импедансов. Первые численные решения задач о рассеянии проводились методом базисных функций подобластей, причем в качестве базисных функций выбирались простые импульсные функции. Это соответствует выбору $f_n(x) = U(x_n)$, где $U(x_n)$ определено в (4.51). Такой вид разложения с δ -функцией в качестве весовой функции применяли Ошира [29] и Андреасен [28], а впоследствии также многие другие авторы, работавшие в этой области. Большинство результатов по поверхностному рассеянию, приведенных в данной главе, получено с использованием именно такого разложения (если не оговорено противное).

Более усовершенствованный подход был впоследствии предложен Мотцем и Харрингтоном [31], которые пользовались для тел, обладающих осевой симметрией, методом Галеркина и базисными функциями подобластей, причем функции f_n и W_n имели треугольную форму на перекрывающихся подобластях. В одномерных задачах такой метод приводит к кусочно линейной аппроксимации неизвестной функции.

Другой интересной разновидностью системы базисных функций, находящей широкое применение при решении интегральных уравнений для тонких проводников, является синусоидальная интерполяция [32]. В этом случае применяется метод базисных функций подобластей, причем ток в каждом отрезке (сегменте) проводника представляется в виде разложения:

$$I(l) = a_i + b_i \cos k(l - l_i) + c_i \sin k(l - l_i), \quad l \in \Delta L_i,$$

где ΔL_i обозначает i -й сегмент. Методом экстраполяции, позволяющим выразить две из трех констант для каждого элемента через значения тока в центрах соседних элементов, общее число неизвестных для структуры, состоящей из N элементов, уменьшается с $3N$ до N . Оказалось, что в случае тонкого прямого проводника такое разложение дает более точные результаты при меньшем числе элементов, чем аппроксимация импульсными функциями, как в интегральном уравнении для электрического поля (4.20), так и в интегральном уравнении для векторного потенциала (4.37). Об этом свидетельствуют работы Нейройтера и др. [33] и Поджо и Майеса [34]. Интересно, что по существу тот же результат был получен Харрингтоном [24], использовавшим для тонкого провода интегро-дифференциальное

уравнение для электрического поля. Это объясняется тем, что дифференциальные операторы в интегральном уравнении аппроксимируются конечными разностями; при этом в неявном виде используется аналогичная экстраполяция. Более детальное обсуждение вопроса о базисных и весовых функциях читатель найдет в гл. 2, § 3 и § 4.

Сделаем еще одно замечание о выборе базисных функций. Может оказаться, что данная базисная функция не приводит к функции в области значений исходного интегрального оператора. В этом случае необходимо аппроксимировать сам оператор подходящим способом или переопределить его, расширив область его действия так, чтобы он был применим к функциям, не входившим в первоначальную область определения [24]. При данной комбинации оператора и базисных функций могут встретиться дополнительные ограничения на выбор весовых функций. Обычно трудности такого рода чаще встречаются в задачах, содержащих дифференциальные, а не интегральные операторы, поскольку интегрирование уменьшает, а не увеличивает порядок особенности, имеющейся у функции.

в. Аппроксимация оператора. Для получения численного решения интегрального уравнения помимо аппроксимации неизвестной функции \mathbf{A} может оказаться необходимой аппроксимация самого оператора. Поскольку интегралы, требуемые для определения элементов матрицы импедансов, обычно не могут быть вычислены аналитически, приходится проводить численное интегрирование. Эффективные методы численного интегрирования рассмотрены в гл. 2. Еще один, адаптивный, способ, нашедший широкое применение, подробно описан в работах Миллера [36] и Миллера и Бурке [35]. Эта процедура, конечно, эквивалентна аппроксимации интегрального оператора конечной суммой. Аналогичная ситуация имеет место для скалярного произведения весовой функции и члена, отвечающего источнику, а также интегрального члена интегрального уравнения. Если в интегральном уравнении имеется также дифференциальный оператор, то может понадобиться соответствующая аппроксимация операции дифференцирования конечными разностями. Отметим, что все виды аппроксимаций таких математических операций, как интегрирование и дифференцирование, получаются путем замены операнда полиномом, после чего операция производится точно.

Поскольку расчет всех необходимых поверхностных интегралов может занимать большую часть общего времени счета, необходимого для решения интегрального уравнения, обычно прибегают к довольно грубым методам интегрирования при вычислении $L[\mathbf{f}_n]$. Так, например, в работе Оширы [29], в которой

использовались ИУМП и метод базисных функций частичных областей, интегралы вычислялись с помощью простой формулы прямоугольников. Интеграл по каждой ячейке (подобласти) аппроксимировался произведением значения подынтегральной выражения на площадь ячейки; чтобы получить интеграл в смысле главного значения, просто исключался вклад ячейки, содержащей особенность подынтегральной функции, т. е. для которой $x_n = x_m$. Несмотря на столь грубую аппроксимацию интегрального оператора, удается получить разумные результаты.

Заметим, что для оптимальной эффективности решения нужно, чтобы неточность аппроксимации интегральных и дифференциальных операторов была того же порядка, что и неточность аппроксимации неизвестной функции. Например, аппроксимация тока простой импульсной функцией может ограничивать предельно достижимую при данном делении на частичные области точность численного решения, так что применение более точных методов интегрирования для представления интегрального оператора не увеличит сколько-нибудь значительно общую точность решения. Этот вопрос еще недостаточно изучен главным образом из-за большой стоимости подобных исследований на ЭВМ. Задачей дальнейших исследований должна явиться формулировка общего принципа выбора базисных и весовых функций и способа аппроксимации оператора, обеспечивающих минимум времени счета при данной точности решения.

г. Решение систем линейных уравнений. Решение матричного уравнения $\mathbf{Z}\mathbf{A} = \mathbf{E}$, представляющего собой конечную систему линейных уравнений, может быть найдено многими способами. Типичными методами вычисления компонент вектора \mathbf{A} являются метод обращения матрицы, метод факторизации и метод итерации. Метод обращения матрицы, дающий решение уравнения в виде $\mathbf{A} = \mathbf{Z}^{-1}\mathbf{E}$, требует порядка N^3 операций. Метод факторизации, в котором матрица представляется в виде произведения треугольных матриц, также требует порядка N^3 операций. В табл. 4.4 сравниваются алгоритм Гаусса — Жордана (обращение матриц) и алгоритм Гаусса — Дулиттла (факторизация) [38].

Эффективные итерационные методы требуют лишь порядка N^2 операций; они могут оказаться полезными для матриц большого порядка, для которых время счета методами обращения или факторизации настолько возрастает, что делает их практически непригодными. Однако при изменении вектора источника итерационную процедуру приходится каждый раз проводить заново, тогда как, если уж матрица обращена или факторизована, неизвестный вектор может быть найден с помощью порядка N^2 операций. Если итерационный процесс сходится

Таблица 4.4

Сравнение методов решения систем линейных уравнений

Метод	Число операций умножения и деления
Гаусса — Жордана обращение: Z^{-1} умножение: $Z^{-1}E$ Всего	$N^3 + O(N^2)$ PN^2 $N^3 + PN^2 + O(N^2)$
Гаусса — Дулиттла факторизация: $Z = LU$	$\frac{1}{3}N^3 + O(N^2)$
решение: $LF_p = -E$	$P \frac{1}{2}(N^2 + N)$
решение: $UI_p = F_p$	$P \frac{1}{2}(N^2 + N)$
Всего	$\frac{1}{3}N^3 + P(N^2 + N) + O(N^2)$

Символ $O(N^2)$ обозначает полином второй степени по N .

медленно, то он может оказаться менее эффективным, чем решение путем обращения матрицы.

Из табл. 4.4 видно, что для факторизации матрицы требуется почти в три раза меньше операций, т. е. времени счета, чем для обращения матрицы. Объем оперативной памяти в обоих случаях примерно одинаков. Поэтому если не используется итерационный метод, то метод факторизации обычно предпочтительнее. Однако в некоторых случаях точный метод обращения матрицы может оказаться более удобным. Например, если матрица импедансов в электродинамической задаче обращена, то становится известной взаимная проводимость между отдельными элементами структуры. В каждом конкретном случае метод решения должен выбираться исходя из специфики рассматриваемой задачи.

Следует подчеркнуть, что путем факторизации или обращения матрицы импедансов находятся электрические характеристики структуры, не зависящие от вида источника. Получаемая в результате матрица проводимостей может быть в равной степени использована как в антенных задачах, так и в задачах о рассеянии. Тем самым правильность численного решения задачи для данной структуры может быть установлена сопоставлением найденных независимо рассеивающих и излучающих

свойств структуры. В большинстве приведенных ниже приложений рассматриваются задачи о рассеянии; однако в тех случаях, когда имеются данные лишь по антенным характеристикам структуры или где может оказаться полезной дополнительная проверка правильности решения, приводятся также результаты расчетов антенных характеристик.

Приближенные методы

Описанные выше численные методы решения являются экономически оправданными для данной задачи, если рассматривается область резонансных частот структуры (т. е. $ka \sim \pi$, где a — характерный размер). В этом случае для получения численных результатов за приемлемое время счета не приходится прибегать ни к каким приближениям, кроме метода моментов для сведения интегрального уравнения к системе линейных уравнений.

Однако при использовании методов факторизации или обращения матрицы время счета в функции числа неизвестных N растет как

$$T_c = AN^2 + BN^3, \quad (4.52)$$

где член, пропорциональный N^2 , обусловлен вычислением матрицы импедансов, а член, пропорциональный N^3 , связан с нахождением решения системы уравнений. Поскольку число неизвестных N пропорционально $(ka)^2$, время счета выражается через отношение характерного размера к длине волны следующим образом:

$$T_c = A'(ka)^4 + B'(ka)^6.$$

Очевидно, существует верхний предел значений ka , выше которого решение методом факторизации или обращения матрицы фактически не может быть получено. Даже время счета, требуемое методом итераций, оказывается слишком большим. При этом мы ничего не говорили об объеме оперативной памяти, который, конечно, накладывает ограничения на применимость любого из перечисленных методов решения матричного уравнения, поскольку число неизвестных N растет как $(ka)^2$. Таким образом, при больших ka приходится ограничиваться телами, обладающими определенной симметрией, которая позволяет снизить до приемлемого уровня время счета (как будет показано ниже), или же вводить дополнительные приближения, значительно уменьшающие время счета для больших ka . Некоторые способы, которые широко используются в последнем случае, кратко рассматриваются ниже. Поскольку задачи рассеяния на больших телах и специальные методы их решения составляют самостоятельную область исследований, последующее

изложение по необходимости представляет собой лишь краткий обзор этой важной области.

а. Приближение физической оптики. Хорошо известное в методе физической оптики (ФО) выражение для тока $\mathbf{J}_s = 2\hat{n} \times \mathbf{H}'$ давно применялось для оценки рассеивающих свойств таких больших объектов, как зеркальные антенны. В ИУМП это приближение соответствует полному пренебрежению эффектами взаимодействия, описываемыми интегральным членом уравнения, на освещенной части поверхности рассеивателя и предположению, что в области тени взаимная интерференция полностью гасит падающее поле.

В приближении физической оптики ток на поверхности проводящего тела имеет вид

$$\mathbf{J}_{\text{фо}} = \begin{cases} 2\hat{n} \times \mathbf{H}' & \text{в освещенной области,} \\ 0 & \text{в области тени,} \end{cases} \quad (4.53)$$

так что рассеянное поле, обусловленное током $\mathbf{J}_{\text{фо}}$, может быть выражено в явном виде через падающее поле:

$$\mathbf{H}_{\text{фо}}^s = \frac{1}{4\pi} \int_I \mathbf{J}_{\text{фо}} \times \text{grad}' \varphi ds',$$

или

$$\mathbf{H}_{\text{фо}}^s = -\frac{1}{2\pi} \int_I (\hat{n}' \times \mathbf{H}') \times \text{grad}' \varphi ds',$$

где символ \int_I обозначает интеграл по освещенной части поверхности рассеивателя. Выражение (4.53), известное как векторное приближение Кирхгофа, широко применялось при расчете больших антенн.

Как было сказано выше, наиболее трудоемкими этапами вычисления поверхностного тока с помощью интегрального уравнения являются заполнение матрицы и решение матричного уравнения. Метод физической оптики полностью исключает эти этапы и сразу позволяет найти ток по известной форме рассеивателя и его ориентации по отношению к падающей волне. Однако в обоих методах для нахождения рассеянного поля требуется проведение интегрирования распределения тока по поверхности рассеивателя.

Для более точного вычисления тока могут быть использованы различные модификации приближения физической оптики, занимающие промежуточное положение между строгими численными методами определения наведенных токов и приве-

денным приближением ФО. Одним из основных недостатков приближения ФО является невозможность правильного описания тока вблизи терминатора (границы между освещенной областью и областью тени). Это может послужить причиной существенных ошибок, обусловленных разрывом в плотности тока. Типичным способом обхода этой трудности является использование псевдо-ФО приближения, при котором ток на освещенной части поверхности рассеивателя берется в обычном для ФО виде, а ток на затененной части поверхности находится из интегрального уравнения. Таким образом,

$$\mathbf{J}_s = \begin{cases} 2\hat{n} \times \mathbf{H}' & \text{в освещенной области,} \\ 2\hat{n} \times \mathbf{H}' + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \left[\int_U \mathbf{J}_s \times \text{grad}' \varphi ds' + \right. \\ \left. + \int_I (2\hat{n}' \times \mathbf{H}') \times \text{grad}' \varphi ds' \right] & \text{в области тени,} \end{cases} \quad (4.54)$$

где для уменьшения числа неизвестных в интегральном уравнении используется известный ток приближения ФО на освещенной поверхности, а символ \int_U обозначает интеграл по об-

ласти тени. Однако, поскольку расположение области тени существенно зависит от направления падающей волны, при этом теряется важное преимущество «строгого» решения: независимость матричного описания структуры от свойств источника.

Модифицированный метод ФО позволяет достичь большей точности решения за счет более тщательного вычисления тока вблизи терминатора. Необходимо отметить, что уточнение решения в области тени не обязательно должно распространяться на всю область; достаточно ограничиться районом вблизи терминатора, где в случае больших тел ток имеет наибольшее значение. Тем самым порядок системы линейных уравнений для неизвестных токов может быть уменьшен более чем в два раза по сравнению со случаем, когда распределение тока ищется во всей теневой области.

б. Геометрическая оптика. В методе геометрической оптики принимается, что рассеяние происходит по законам лучевой оптики, т. е. падающий и отраженный лучи лежат в одной плоскости и локальные углы падения и отражения равны. Это эквивалентно предположению, что отражение от каждой точки поверхности рассеивателя происходит таким образом, как если бы эта точка была расположена на бесконечной плоскости, касательной к поверхности рассеивателя. Таким образом, если на

поверхности рассеивателя отсутствует зеркальная точка, отвечающая данному направлению, то, согласно геометрической оптике, рассеянное в этом направлении поле равно нулю. Аналогичные рассуждения применимы к рассеивателям с многократными отражениями. В этом случае для каждого луча необходимо проследить все отражения, чтобы выяснить, дает ли он вклад в рассеяние в заданном направлении.

Согласно Бекману [21], геометрическая оптика приближенно описывает рассеянное поле, тогда как физическая оптика дает приближенное описание источников рассеянного поля. В первом случае предполагается, что наведенные источники локально такие же, как в случае падения плоской волны на бесконечную касательную плоскость. Эти источники излучают во всех направлениях совсем не так, как предсказывает геометрическая оптика. Бекман отметил также, что условие применимости физической оптики требует выполнения неравенства $\lambda^2 \ll \rho^2$, где ρ — радиус кривизны поверхности, в то время как геометрическая оптика требует, чтобы выполнялось неравенство $\sqrt{\lambda} \ll \sqrt{\rho}$, и, кроме того, вклад зеркального отражения в рассеянную волну должен играть главную роль.

В последние годы появились работы, расширившие область применимости физической и геометрической оптики и позволившие учесть краевые эффекты и влияние терминатора. В геометрической теории дифракции, развитой Келлером [42], для установления соотношения между строгими и приближенными решениями (методы физической или геометрической оптики) используются строгие решения задач о рассеянии на телах стандартной формы. В теории Келлера полное рассеянное поле берется в виде совокупности рассеянных полей от отдельных стандартных частей, на которые разбивается тело сложной формы. Уфимцев [43] с помощью аналогичной процедуры нашел способ вычисления наведенных токов для различных видов нерегулярностей. В этом, собственно, основное различие между подходами Келлера и Уфимцева. Как заметил Бекман, Уфимцев «реформировал» физическую оптику, тогда как Келлер «реформировал» геометрическую оптику.

Геометрическая оптика и геометрическая теория дифракции не нашли широкого применения для численного расчета больших рассеивателей. Одним из причин этого, возможно, является трудность прослеживания всех лучей и запоминания соответствующей информации в ЭВМ.

Поскольку подробное изложение этих приближенных методов выходит за рамки настоящей монографии, интересующемуся читателю следует обратиться к работам Бекмана [21], Келлера [42], Уфимцева [43], Бечтела [44], Росса [45], Росса и Бечтела [46] и Куюмджана [47].

в. *Другие приближенные методы.* Наиболее известные приближенные методы, применяемые в задачах с большими значениями ka , — физическая оптика и геометрическая оптика — были рассмотрены выше. Здесь мы обсудим другие приближенные подходы, которые, возможно, не так широко известны. Два из них — метод разреженной матрицы и итерационный метод — являются естественными упрощениями метода интегрального уравнения, тогда как метод разбиения на простые рассеиватели вытекает из оптического подхода к задачам рассеяния.

1. *Метод разреженной матрицы.* Матрица импедансов, получающаяся из интегрального уравнения, учитывает взаимодействие между отрезками кривой или участками поверхности рассматриваемой структуры. При увеличении расстояния между отрезками или участками поверхности соответствующие элементы матрицы, очевидно, уменьшаются. Таким образом, интуитивно представляется, что пренебрежение взаимодействием между достаточно удаленными участками, т. е. приравнивание нулю элементов матрицы, малых по сравнению с главными (диагональными) элементами, не приводит к значительному уменьшению точности.

Удобство этого приближенного метода состоит в том, что матрица импедансов содержит большое число нулей, причем чем больше размеры структуры, тем большую часть матрицы заполняют нули. Матричное уравнение с такой разреженной матрицей проще решать стандартными способами, чем матричное уравнение с исходной матрицей. Одновременно уменьшается необходимый объем оперативной памяти ЭВМ, и, конечно, время вычисления матрицы импедансов также становится существенно меньше. Несмотря на преимущества метода разреженной матрицы при решении задач электродинамики, он не нашел широкого применения, хотя методы решения систем уравнений с разреженной матрицей широко исследовались в связи с решением больших систем линейных уравнений, решением уравнений для потенциала и т. д. [48].

2. *Итерационные методы.* Строго говоря, итерационные методы не следует рассматривать как приближенные, поскольку в принципе если итерационный процесс сходится, то его можно повторять до тех пор, пока в искомом векторе не стабилизируется требуемое число значащих цифр. Однако на практике итерации повторяют лишь до тех пор, пока не будет достигнута заданная точность решения. В результате точность итерационного метода может значительно отличаться от точности, получаемой при обращении матрицы.

Преимущество итерационного метода состоит в том, что для получения решения требуется порядка N^2 операций умножения, тогда как методы факторизации или обращения матрицы

требуют N^3 операций. Легко видеть, что в случае больших систем имеет место существенная экономия времени счета. Эта экономия достигается, правда, за счет снижения общности решения, поскольку решение получается только для одного заданного источника. Таким образом, этот метод потенциально более пригоден для антенных задач, в которых требуется построить диаграмму направленности излучения антенны для одного заданного распределения источников, чем для вычисления сечения обратного рассеяния, когда требуется найти распределение плотности наведенного тока в функции угла падения волны. Комбинация итерационного метода с методом разреженной матрицы представляет собой особенно удобный способ решения антенных задач для больших структур.

Чтобы яснее показать различие между методом обращения матрицы и итерационным методом, необходимо перевести предыдущие рассуждения на язык математики. Рассмотрим цепь с N входами, для которой

$$\left. \begin{aligned} \sum_{j=1}^N Z_{ij} I_j &= V_i, \\ \sum_{j=1}^N Y_{ij} V_j &= I_i, \end{aligned} \right\} i = 1, 2, \dots, N, \quad (4.55)$$

$$(4.56)$$

где Z и Y — матрицы импедансов и проводимостей. (Эти уравнения полностью аналогичны системе линейных уравнений, соответствующей интегральному уравнению для тока на поверхности идеально проводящей структуры.)

Прямое решение уравнений (4.55) для тока I требует нахождения матрицы

$$Y = Z^{-1}. \quad (4.57)$$

Тем самым N^2 элементов матрицы проводимостей определяются в явном виде, если матрица обращена, или в неявном виде, если использована факторизация. Если же воспользоваться итерационным методом, то последовательность векторов источника $V^{(1)}, \dots, V^{(n)}$ даст соответствующую последовательность векторов токов $I^{(1)}, \dots, I^{(n)}$, которая может быть записана в виде

$$I_i^{(p)} = \sum_{j=1}^N Y_{ij} V_j^{(p)}, \quad i, p = 1, \dots, N, \quad (4.58)$$

или, что эквивалентно,

$$I_{ip} = \sum_{j=1}^N Y_{ij} V_{jp},$$

где N векторов-столбцов $I^{(p)}, V^{(p)}$ образуют матрицы размерности $N \times N$ для I и V соответственно. Формально можно написать

$$Y_{ij} = \sum_{p=1}^N I_{ip} (V)_{pj}^{-1}, \quad (4.59)$$

где $(V)^{-1}$ — матрица, обратная матрице V . Если последовательность $V^{(n)}$ выбрана таким образом, что V является единичной матрицей, то соответствующий вектор решения для тока дает N проводимостей для данного входа. Однако при произвольной последовательности $V^{(n)}$, возникающей, например, при вычислении сечения обратного рассеяния, вектор тока не столь просто связан с элементами матрицы проводимостей, а является, как следует из уравнения (4.58), их линейной комбинацией. Но даже в этом случае, как следует из уравнения (4.59), можно найти N^2 элементов матрицы проводимостей при помощи итерационного решения для N векторов тока. Таким образом, хотя итерационный метод и позволяет найти полную матрицу проводимостей, однако если при этом V не является единичной матрицей (т. е. каждый раз рассматривается один вход), то итерационная процедура менее эффективна, чем обращение матрицы.

3. Разбиение рассеивателя на элементы простой формы. Впервые этот приближенный метод вычисления сечения обратного рассеяния большого тела сложной формы был предложен Сигелем и его сотрудниками в Радиационной лаборатории Мичиганского университета [49]. Метод состоит в разбиении сложного тела на ряд простых составных частей, каждая из которых с требуемой точностью моделирует соответствующую часть тела. Затем комбинируются известные характеристики этих простых тел (обычно полученные при помощи метода геометрической оптики или экспериментальным путем) и находятся характеристики рассеяния сложного тела. Заметим, что при этом не учитывается взаимодействие отдельных частей. Такой прямолинейный подход оказался удивительно успешным и до сегодняшнего дня находит применение при вычислении сечения обратного рассеяния больших тел.

Упрощения, обусловленные симметрией структуры

При решении задачи о рассеянии на асимметричном теле необходимо вычислить матрицу импедансов $[Z]$ и решить систему уравнений N -го порядка для N неизвестных токов. (Использование свойства взаимности уравнений Максвелла обсуждается в следующем разделе.) Однако при наличии некоторой симметрии структуры возможны более эффективные спо-

собы решения, поскольку в этом случае матрица импедансов обладает определенной периодичностью, что позволяет заполнить всю матрицу, если известна лишь часть ее элементов. Симметрия может быть использована и дальше, если симметрии источника и структуры совпадают, поскольку в этом случае можно уменьшить также число неизвестных.

Наиболее очевидным видом симметрии обладают тела, поверхность которых образована вращением кривой вокруг некоторой оси. Осевая симметрия позволяет разложить азимутальную составляющую тока в ряд Фурье по азимутальному углу. В этом разложении из-за ортогональности базисных функций, представляющих различные моды, решение для амплитуды тока данной моды в функции продольной координаты поверхности (вдоль оси) можно искать независимо от других мод. Таким образом, при численном решении системы линейных уравнений время счета может быть значительно сокращено, поскольку теперь порядок матрицы определяется числом точек разбиения вдоль оси, которое является уже линейной, а не квадратичной функцией размеров тела. Кроме того, в этом случае достаточно вычислить элементы матрицы импедансов лишь для одной осевой полосы на поверхности тела, а остальные могут быть найдены по уже вычисленным. Если же, кроме того, направление падения волны совпадает с осью тела (пример одинаковой симметрии источника и тела), то возбуждается лишь одна (низшая) мода тока, что еще больше сокращает время счета. Рассеяние на телах такой симметрии было исследовано Андреасеном [28], а также Мотцем и Харрингтоном [31, 50].

Вторым типом симметрии, позволяющим сократить общее время счета, является зеркальная симметрия, при которой структура имеет от одной до трех взаимно ортогональных плоскостей симметрии. Рассмотрим в качестве примера прямоугольный металлический параллелепипед. Эта структура имеет три взаимно ортогональные плоскости симметрии, и можно показать, что матрица импедансов полностью определяется строками Z_{mn} для одного из конгруэнтных элементов структуры. В результате время заполнения матрицы уменьшается в 2^3 , или в 8 раз. Кроме того, время решения системы линейных уравнений уменьшается на множитель порядка 8^2 , так как первоначальная матрица порядка N заменяется на 8 матриц порядка $N/8$. Наконец, для волны, падающей в одной из плоскостей симметрии или вдоль линии пересечения двух плоскостей симметрии, токи также обладают симметрией, что уменьшает число элементов тока, которые необходимо найти для определения всего распределения поверхностных токов. Описание этого вида симметрии и его применения имеется в работах Оширо и Су [51] и Митцнера [52].

Третий тип симметрии, содержащий элементы как осевой, так и зеркальной симметрии, состоит в том, что тело совмещается с самим собой при повороте вокруг некоторой оси на угол $2\pi/P$, где P — целое число (например, правильный многоугольник). В этом случае говорят, что тело обладает осью симметрии P -го порядка. При этом матрица импедансов является периодической с числом периодов, равным числу одинаковых полюсов или сторон, образующих структуру. Если структура имеет ось симметрии P -го порядка, то время заполнения матрицы уменьшается в P раз, а решение полной системы линейных уравнений сводится к решению P матричных уравнений порядка N/P , что уменьшает время счета в P^2 раз. В случае наличия у источника такой же симметрии распределение токов также симметрично, и время их вычисления еще сокращается. Например, при падении на структуру плоской волны вдоль оси симметрии P -го порядка необходимо решать матричное уравнение лишь для одной подматрицы, как это имело место в случае аксиального падения волны при осевой симметрии. Таким образом, при наличии у тела оси симметрии P -го порядка P подматриц играют такую же роль, как различные коэффициенты Фурье для тел с осевой симметрией. Заметим, что использование симметрии P -го порядка особенно эффективно при исследовании проволочных моделей объемных рассеивателей¹⁾. Описание алгоритма обращения матрицы импедансов для этого типа симметрии имеется в работе Ченга и Ценга [53].

Контроль точности решения

Прежде чем применять изложенный метод численного решения интегральных уравнений, необходимо установить, с какой точностью вычисляются значения сечения обратного рассеяния, диаграммы направленности антенны и т. д. Следует подчеркнуть, что определение точности решения для одного какого-либо рассеивающего тела не может служить основанием оценки точности для тела произвольной формы, так что каждый класс тел должен рассматриваться отдельно. Из-за сложности задачи и невозможности получения аналитического решения часто приходится начинать счет, не имея ясного представления о характере ожидаемых результатов. Поэтому желательно иметь способ независимой проверки, который может быть аналитическим, численным или экспериментальным.

Аналитическое решение возможно лишь для нескольких тел простейшей формы, так что оно может быть использовано для контроля точности лишь в небольшом числе случаев. Численное

¹⁾ См. гл. 2, § 8. — Прим. ред.

решение, полученное независимым способом, например исходя из дифференциальных уравнений или во временном представлении, также может использоваться для контроля точности; этот метод не ограничивается, конечно, телами с определенной симметрией. Однако сравнение независимых численных решений не дает такой определенной информации, как сравнение с аналитическим решением, поскольку в случае расхождения между численными результатами невозможно определить, какое из решений является более точным.

Вероятно, самой убедительной проверкой, особенно для тех, кто имеет больше склонности к практическим измерениям, а не к расчетам на ЭВМ, является сравнение с результатами эксперимента. К сожалению, не всегда имеются в распоряжении достаточно точные экспериментальные данные для сравнения с расчетом; между тем, когда наблюдается расхождение между результатами эксперимента и расчета, эксперимент, независимо от того, заслуживает он этого или нет, пользуется большим доверием, чем численные результаты. Однако во многих случаях расхождения обусловлены деталями эксперимента, которые не были учтены в модели, исследуемой численными методами, такими, например, как диэлектрические опоры и т. д. Даже в тех случаях, когда эксперимент и может обеспечить приемлемую точность, небрежность или неправильная методика измерений зачастую значительно снижают точность полученных результатов. Поэтому исследователю-вычислителю следует знать технику и методику эксперимента, если он хочет использовать результаты измерений в качестве эталона для проверки результатов численного решения.

Описанные способы проверки правильности численного решения являются по своему характеру внешними, т. е. независимыми от вычислений, результаты которых контролируются. Имеются также различные «внутренние» виды проверки, которые могут служить для установления достоверности полученных численных результатов. Наиболее удобны способы контроля, основанные на теореме взаимности и законе сохранения энергии. Взаимность для двухпозиционного сечения рассеяния или между диаграммой направленности антенны в режиме приема и передачи является необходимым следствием правильности решения уравнений Максвелла для линейной пассивной среды. Такую проверку легко проделать, если построена матрица проводимостей для структуры. Выполнение теоремы взаимности является необходимым, но не достаточным условием правильности решения, поскольку взаимность внутренне присуща численному решению.

Аналогично обстоит дело с законом сохранения энергии [54]. Так, обращение в нуль потока вектора Пойнтинга через замкнутую поверхность, окружающую идеально проводящий рассеива-

тель, является необходимым, но не достаточным условием правильности решения. Несмотря на эти ограничения, теорема взаимности и закон сохранения энергии являются полезными индикаторами точности численных решений и могут использоваться для проверки его правильности.

Другой способ «внутреннего» контроля, который легко использовать для оценки правильности решения, основан на проверке выполнения граничных условий на поверхности. Определение полной касательной составляющей электрического поля на поверхности идеального проводника по вычисленному распределению плотности тока и сравнение с напряженностью падающего поля позволяют судить о достигнутой степени точности. Можно ожидать, конечно, что поле должно удовлетворять требуемым граничным условиям во всех точках сшивания. Но вычисляя полное поле в точках поверхности рассеивателя, отличных от точек сшивания, и сравнивая с соответствующими значениями поля источника, можно оценить точность вычисленного распределения плотности тока. К сожалению, такой способ контроля требует больше времени счета, чем расходуется на вычисление элементов матрицы импедансов. Поэтому пользоваться им приходится в ограниченном объеме, например лишь для установления основных закономерностей при моделировании различных форм рассеивателей или для проверки выполнения граничных условий в наиболее критичных областях поверхности, таких, как углы, острия и т. д.

2. РЕШЕНИЕ ВО ВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Наиболее полезной характеристикой рассеивателя, определяемой при решении во временном представлении, является импульсная переходная характеристика. Знание импульсной переходной характеристики позволяет рассчитать с помощью свертки любой нестационарный процесс рассеяния при произвольной зависимости падающего поля от времени. Кроме того, преобразование Фурье импульсной переходной характеристики позволяет рассчитать характеристики рассеивателя в частотном представлении. Еще одним практическим применением нестационарных процессов является анализ широкополосного отраженного радиолокационного импульса, при котором импульсная характеристика может служить для идентификации цели.

Для нахождения импульсной переходной характеристики различных рассеивателей было использовано много разных подходов. Метод физической оптики, по-видимому, впервые был применен Кенно и Косгриффом [55] для вычисления в дальней зоне поля, отраженного назад от прямоугольной пластины, сфероида и сферы. Дальнейшее развитие он нашел в ряде работ

Кенно и Моффата [56, 57]. Позднее Рейнштейн [58] строго вычислил короткоимпульсную переходную характеристику диэлектрической и металлической сфер, используя ряды Ми в частотном представлении. Исследование рассеяния во временном представлении проводилось и в акустике. Обзор работ, выполненных до 1958 г., дал Фридлендер [59]. Дифракция звукового импульса на бесконечном цилиндре произвольного поперечного сечения была рассмотрена Фридманом и Шоу [60], а нестационарная задача для твердой сферы была решена Саулзом и Митцнером [61].

Выполненные к настоящему времени работы по рассеянию во временном представлении могут быть разбиты на несколько классов. К одному из них относятся исследования, в которых исходными являются характеристики в частотном представлении, и с их помощью синтезируется отраженный импульс во временном представлении для данного вида падающего поля. Среди работ этого класса можно выделить два различных подхода, один из которых основывается на аналитическом решении в частотном представлении и поэтому ограничен по возможностям применения. Другой подход использует численное решение в частотном представлении описанными выше способами. Еще один класс работ включает исследования, в которых для нахождения рассеянного поля в частотном представлении используются такие приближенные методы, как физическая или геометрическая оптика. Естественно, что этот класс работ имеет все те недостатки, о которых говорилось в предыдущем разделе, однако для диапазона высоких частот он находит широкое применение на практике.

Третий метод получения импульсной переходной характеристики рассеивателя с самого начала исходит из временного представления. Этот метод был использован в акустике Саулзом и Митцнером [61], а в электродинамике Беннетом и Уиксом [62, 63] и Сейром и Харрингтоном [64]. Именно этому методу, в котором используются интегральные уравнения во временном представлении, мы посвятим оставшуюся часть настоящего раздела. Нижеследующее изложение частично следует работам Беннета и Уикса [62, 63].

«Строгое» численное решение

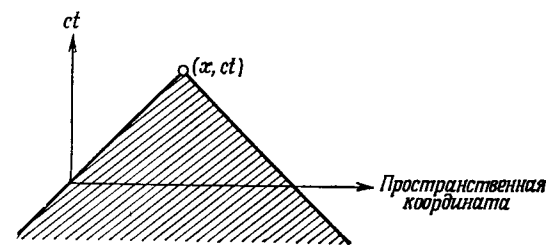
Мы ограничимся случаем идеально проводящих рассеивателей. Поэтому мы будем иметь дело только с уравнениями вида (4.38). Кроме того, мы ограничимся интегральным уравнением для магнитного поля во временном представлении, которое является интегральным уравнением Фредгольма второго рода. Та-

ким образом, будет исследовано численное решение уравнения

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t) = 2\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}, t) + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \oint_S \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) + \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) \frac{1}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} \right] \times \frac{\mathbf{x} - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^2} ds', \quad (4.60)$$

где запаздывающее время τ определяется выражением $\tau = t - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$, а смысл операции $\partial/\partial \tau$ определен в пояснениях к уравнению (4.35).

Перед тем как перейти к рассмотрению метода решения уравнения (4.60) для \mathbf{J}_s необходимо остановиться на некоторых



Фиг. 4.8. Световой конус.

его свойствах. Прежде всего отметим, что член $2\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}, t)$ соответствует обычному приближению физической оптики для освещенной части рассеивателя. Правда, член, содержащий падающее поле, имеется также и в теневой области, где согласно приближению обычной физической оптики, ток равен нулю. Тем не менее наличие в уравнении (4.60) «псевдооптического» члена подсказывает способ обобщения, позволяющий учесть высокочастотные составляющие падающего поля без увеличения времени счета.

Вторая особенность состоит в том, что уравнение (4.60) представляет собой систему трех связанных скалярных интегральных уравнений для трех составляющих вектора \mathbf{J}_s . Однако, поскольку

$$\hat{n}_s \cdot \mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t) = 0,$$

число независимых уравнений можно уменьшить до двух. Видно также, что если точка наблюдения \mathbf{x} и точка источника \mathbf{x}' лежат на одном и том же плоском участке поверхности, то интеграл в уравнении (4.60) не дает вклада в уравнение. Вследствие этого нет непосредственного взаимодействия между элементами тока, протекающими в одной плоскости.

Наконец, следует отметить, что действие тока в точке \mathbf{x}' на ток в точке наблюдения \mathbf{x} запаздывает на время $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|/c$. Этот

эффект особенно важен, поскольку он позволяет решить уравнение для тока без обращения матрицы, что было бы необходимо при численном решении интегрального уравнения в частотном представлении. Действительно, поверхностный ток \mathbf{J}_s может быть определен при помощи «ступенчатой» процедуры во времени, поскольку ток в момент времени t выражается через известное падающее поле в этот момент времени и токи в других областях рассеивателя в предыдущие моменты времени, которые были уже вычислены. Это наиболее наглядно видно при рассмотрении двумерного пространственно-временного конуса, изображенного на фиг. 4.8. Область взаимодействия заштрихована и определяется условием $ct - |\mathbf{x} - \mathbf{x}'| < 0$.

Метод моментов, описанный в п. 1, может быть использован и для решения уравнения (4.60). Выбирая в качестве весовой функции как в координатном, так и во временном пространстве δ -функцию, так что

$$W_{ij} = \delta(\mathbf{x} - \mathbf{x}_i) \delta(t - t_j),$$

можно преобразовать уравнение (4.60) к виду

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}_i, t_j) = 2\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}_i, t_j) + \frac{1}{2\pi} \hat{n} \times \oint_S \left[\frac{1}{c} \frac{\partial}{\partial \tau} \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) + \mathbf{J}_s(\mathbf{x}', \tau) \frac{1}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'|} \right] \times \frac{\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'}{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'|^2} ds', \quad (4.61)$$

где

$$\tau = t_j - \frac{|\mathbf{x}_i - \mathbf{x}'|}{c}, \quad i = 1, 2, \dots, N_s, \quad j = 1, 2, \dots, N_T.$$

Дальнейшее упрощение состоит в замене поверхностного интеграла конечной суммой по элементам поверхности.

Если принять, что падающее поле и все поверхностные токи равны нулю в моменты времени, предшествующие t_0 , то запаздывающее время τ позволит нам начать решение с момента t_0 и рассматривать интегральное уравнение как задачу с начальными условиями. Предположим, например, что в момент времени t_1 падающее поле только что достигло рассеивателя. Учитывая запаздывание (см. световой конус) и то, что интеграл понимается в смысле главного значения, получаем, что на части поверхности рассеивателя наводится ток $2\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}_1, t_1)$. Если перейти к следующему моменту времени t_2 , то ток в каждой точке поверхности будет определяться известным падающим полем, что дает $2\hat{n} \times \mathbf{H}^i(\mathbf{x}_2, t_2)$ плюс вклад от токов в других точках поверхности рассеивателя (определяемый интегралом) в предыдущие моменты времени, который также известен. Так, последовательно переходя к следующим моментам времени,

можно находить значения тока по их значениям в предыдущие моменты времени.

Описанный процесс решения выглядит довольно просто, однако следует подробнее рассмотреть разбиение поверхности на ячейки и времени на интервалы. Поскольку интегрирование производится по пространственным координатам, можно использовать базисные функции подобластей и импульсную аппроксимацию в пространстве и времени. Таким образом, ток представляется в виде

$$\mathbf{J}_s(\mathbf{x}, t) = \sum_{m=1}^{N_s} \sum_{n=1}^{N_T} \mathbf{A}_{mn} V(\mathbf{x}_m) U(t_n), \quad (4.62)$$

где

$$V(\mathbf{x}_m) = \begin{cases} 1 & \text{для } \mathbf{x} \text{ в ячейке с центром } \mathbf{x}_m, \\ 0 & \text{для остальных точек поверхности;} \end{cases}$$

$$U(t_n) = \begin{cases} 1 & \text{для } t \text{ в интервале времени с серединой } t_n, \\ 0 & \text{в остальные моменты времени.} \end{cases}$$

Коэффициенты A_{mn} являются амплитудами тока в пространственном представлении, соответствующими данным (\mathbf{x}_m, t_n) , которые определяются из решения интегрального уравнения, а N_s и N_T — полные числа пространственных ячеек и временных интервалов.

Здесь необходимо остановиться на способе выбора узлов \mathbf{x}_m на поверхности рассеивателя и временных узлов t_n . Факторами, определяющими выбор последовательности узлов тока при численном решении, являются форма и ширина импульсов падающего поля, соотношение размера рассеивателя и ширины импульса и верхняя частота, представляющая интерес в спектральном разложении импульсной переходной характеристики.

Узлы на поверхности рассеивателя должны быть расположены достаточно близко друг от друга, чтобы различать пространственные неоднородности падающего импульса при его проходе вдоль рассеивателя. Это требование тесно связано с указанными выше высокочастотными ограничениями, поскольку чем быстрее падающий импульс изменяется во времени (или, что эквивалентно, в функции координат), тем относительно большая часть его энергии заключена в высокочастотной области (при больших ka). Мы еще коснемся этого вопроса при рассмотрении импульсов специальной формы.

Выбор временных узлов не может проводиться независимо от выбора узлов на поверхности рассеивателя. Помимо связи между ними, возникающей из-за общего требования, чтобы временные узлы позволяли соответствующим образом разрешать падающее поле во времени, а узлы на поверхности обеспечивали

разрешение пространственной зависимости, имеется корреляция вследствие эквивалентности пространства и времени в эффектах запаздывания. Поскольку весьма желательно использовать то обстоятельство, что токи в узлах на поверхности рассеивателя полностью определяются известными токами и полями, необходимо, чтобы интервалы между временными узлами ΔT и расстояния между узлами на поверхности ΔR были связаны соотношением

$$c \Delta T \leq \Delta R. \quad (4.63)$$

Если бы неравенство (4.63) не выполнялось, ток в некотором узле на поверхности рассеивателя зависел бы от величины тока в соседнем (пространственном) узле в том же интервале времени. Такая возможность возникает исключительно из-за представления тока в дискретных точках пространства и времени. Неравенство (4.63) эквивалентно требованию, чтобы расстояние между узлами на поверхности было по крайней мере не меньше, чем расстояние, на которое распространяется электромагнитное поле (движущееся со скоростью света) за один интервал времени. Неравенство (4.63) может быть ослаблено, если допустить взаимодействие между токами в течение одного интервала времени и представить интегральное уравнение как систему линейных уравнений. При этом, однако, будет утрачено преимущество, связанное с тем, что для решения не требовалась операция обращения матрицы.

Рассмотрев в общем виде представление тока в пространстве и во времени, перейдем теперь к характеристике падающего поля. До этого момента мы не накладывали ограничений на вид падающего поля, за исключением требования, чтобы оно достигало рассеивателя в какой-то конечный момент времени в прошлом. Выше было показано, что наибольший практический интерес представляет случай плоской волны, имеющей δ -образный характер во времени, поскольку импульсная переходная характеристика рассеивателя позволяет в этом случае определить отклик рассеивателя на произвольную плоскую волну.

Поскольку из-за практических ограничений времени счета на ЭВМ мы не можем рассматривать строго δ -образный импульс (его частотный спектр простирается от нуля до бесконечности с постоянной амплитудой), необходимо принять приближенный вид импульса падающего поля. Для этой цели был выбран импульс гауссовой формы, определяемый как

$$\delta_g(t) = \frac{g}{\sqrt{\pi}} \exp(-g^2 t^2),$$

поскольку он быстро стремится к нулю и его фурье-образ

$$\Delta_g(\omega) = F\{\delta_g(t)\} = \exp(-\omega^2/4g^2)$$

имеет быстро спадающую с частотой амплитуду. Видно, что высокочастотные составляющие $\delta_g(t)$ растут с увеличением g .

При гауссовой форме импульса, приняв без потери общности, что волна распространяется вдоль оси z , падающее поле можно представить в виде

$$H^i(\mathbf{x}, t) = \hat{y}(g/\sqrt{\pi}) \exp[-g^2(t - z/c)^2],$$

$$E^i(\mathbf{x}, t) = \hat{x}(g/\sqrt{\pi}) \exp[-g^2(t - z/c)^2],$$

где \hat{x} и \hat{y} — единичные векторы вдоль декартовых осей x и y . Отметим, что производные падающего поля по переменным ct и z равны между собой. Это говорит о том, что для получения сравнимого разрешения падающего поля во времени и в пространстве расстояния между узлами на поверхности и серединами соседних интервалов времени должны удовлетворять соотношению

$$c \Delta T \sim \Delta z.$$

Это требование совместимо с неравенством (4.36), поскольку

$$\Delta R \geq \Delta z.$$

Абсолютные значения интервалов ΔR и ΔT определяются значениями параметра g . Легко видеть, что интервал спадающего поля падающего импульса в e раз определяется неравенствами

$$-1/g \leq t \leq 1/g$$

и соответственно

$$-c/g \leq z \leq c/g.$$

Таким образом, ширина импульса в пространстве и времени равна $W_s = 2c/g$ и $W_T = 2/g$. Было найдено, что для достижения приемлемой точности численных результатов соответствующие расстояния между узлами на поверхности и интервалы между временными узлами должны быть порядка одной пятой ширины импульса, т. е.

$$\Delta R \geq (2/g)c/5 = 0,4c/g,$$

$$\Delta T \sim (2/g)/5 = 0,4g.$$

Эти соотношения имеют важное значение для определения верхней границы частот, для которой еще могут быть получены результаты в частотном представлении с помощью приближенно найденной импульсной переходной характеристики. Например, если рассматривать рассеяние на сфере и вспомнить, что минимальное число элементов на длине волны, необходимое для приемлемой точности результатов, примерно равно четырем, то максимальное значение ka (a — радиус сферы), для которого

еще может быть получена полезная информация из решения во временном представлении, удовлетворяет соотношению

$$ka \approx (\pi/2) a/\Delta R < \pi ga/c.$$

Другими словами, полезная информация содержится для длин волн не меньше

$$\lambda \approx \Delta R/4.$$

Итак, мы получили соотношение между физическими размерами рассеивателя и шириной импульса. Мы видим, что наиболее важным параметром является не размер рассеивателя или ширина импульса, а отношение этих двух величин, поскольку

$$ka \leq 2\pi a/W_s.$$

Простейший способ вычисления интеграла в уравнении (4.61) — использование правила прямоугольников. Оно приводит просто к замене интеграла суммой токов в узлах, умноженных на площадь ячейки и на значение ядра подынтегрального выражения в том же узле. Этот довольно грубый, но достаточно точный метод и был использован для получения приведенных ниже результатов. Помимо наглядной демонстрации хорошей точности численных результатов, правило прямоугольников согласуется с использованием постоянного значения тока в пределах каждой ячейки на поверхности рассеивателя. Более эффективный способ вычисления состоял бы в интегрировании ядра в пределах каждой ячейки поверхности при вынесении из-под знака интеграла постоянного значения тока для данной ячейки.

При численном решении уравнения (4.61) требуется найти производную поверхностного тока по времени. Это удобно сделать с помощью метода конечных разностей, в котором временная зависимость тока источника аппроксимируется полиномом, а дифференцирование производится аналитически. Коэффициенты полинома находятся по заданным значениям тока в узлах.

Помимо ограничений в высокочастотной области, определяемых расположением узлов на поверхности тела, имеется еще несколько других возможных источников ошибок. Прежде всего из-за того, что частотный спектр гауссового импульса спадает как $\exp(-\omega^2/4g^2)$, для высокочастотных составляющих фурье-образа тока следует ожидать меньшей точности, чем для низкочастотных. Применение правила прямоугольников для вычисления интеграла по поверхности рассеивателя не позволяет надежно выявить резкую зависимость тока от угла для соседних узлов. Наконец, с ростом частоты становятся более значительными ошибки в определении производной тока по времени.

Приближенные методы

С увеличением отношения размера тела к ширине импульса необходимое число узлов растет как квадрат этого отношения. Кроме того, возрастает число временных интервалов, на которое необходимо разделить время наблюдения (оно обратно пропорционально ширине импульса). Чтобы избежать обусловленного этим чрезмерного возрастания времени счета, можно использовать приближенные методы, аналогичные применяемым в случае гармонического высокочастотного сигнала. Многие из приближенных методов частотного представления, такие, как физическая оптика, геометрическая оптика и метод разбиения рассеивателя на составные части, могут быть в равной степени применены и во временном представлении. Точно так же может быть использована симметрия рассеивателя и источника. Однако мы не будем углубляться в эти вопросы, поскольку перенос результатов частотного представления на этот случай очевиден.

Контроль точности решения

Проверка точности результатов, получаемых при решении во временном представлении, производится во многих отношениях аналогично тому, как это делается при решении в частотном представлении. Однако из-за различия этих двух представлений некоторые виды контроля оказываются более удобными для временного представления, а некоторые — для частотного.

Прогресс, достигнутый в последнее время в импульсной технике, делает практически возможным прямое сравнение вычисленной формы рассеянного или излученного импульса с результатами измерений. Некоторые примеры таких измерений будут приведены ниже. Другим полезным способом проверки вычислений во временном представлении служит сопоставление фурье-образа величин, найденных при решении во временном представлении, с независимо полученными данными расчета в частотном представлении. При невозможности экспериментальной проверки этот способ, по-видимому, представляет собой наиболее эффективный независимый метод контроля точности вычислений.

«Внутренние» методы контроля, аналогичные используемым для частотного представления, также применимы к вычислениям во временном представлении. Теорема взаимности для двухпозиционного рассеяния может быть проверена по временной зависимости рассеянного импульса. Для контроля численных результатов можно использовать также и закон сохранения энергии.

Существуют еще некоторые дополнительные способы контроля, характерные именно для временного представления. Один из них основан на временной задержке, обусловленной так называемой ползущей волной тока, которая должна распространяться вдоль границы тела. В то время как падающее поле уже достигло области за границей тени, полное поле должно еще быть равным нулю до тех пор, пока ползущая волна, распространяющаяся со скоростью, близкой к скорости света, не достигнет этой области. Это можно использовать как очень убедительный способ проверки точности численного решения.

Наконец, форма рассеянного импульса, особенно при рассеянии назад, дает дополнительный способ контроля точности вычислений. Тот факт, что отражения от различных частей рассеивателя разнесены по времени, может быть использован для контроля отдельных вкладов в рассеянное поле. Переходная характеристика позволяет выявить преобладающие источники рассеянного поля и локализовать центры рассеяния. Такое различие действия отдельных частей рассеивателя не может быть столь отчетливо проведено в частотном представлении. Кроме того, форму сигнала, отраженного от «светящихся» точек, можно сравнить с уже имеющимися данными для тел со сходной формой «светящихся» областей.

3. ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Сравнение вычислений в частотном и временном представлении

Выше были получены интегральные уравнения, пригодные для частотного и временного представлений, а также описаны методы их численного решения. Здесь мы попытаемся установить более четкое различие между двумя этими подходами и тем самым выявить относительные преимущества того и другого.

Уже говорилось, что решение в частотном представлении, полученное факторизацией или обращением матрицы, не зависит от геометрии источника. Таким образом, наведенные токи (и обусловленные ими поля) могут быть получены для любого падающего поля как произведение матрицы проводимостей на вектор источника. Это обстоятельство делает частотное представление удобным для вычисления сечения обратного рассеяния, когда требуется определить наведенные токи (и рассеянные поля) для многих видов падающего поля на одной или нескольких частотах.

С другой стороны, решение во временном представлении зависит от геометрии источника, но зато позволяет перекрыть широкий диапазон частот. Поэтому в комбинации с быстрым пре-

образованием Фурье оно удобно для нахождения зависимости от частоты сечения обратного рассеяния или диаграммы двухпозиционного рассеяния для ограниченного числа источников заданной конфигурации. Использование временного представления при определении сечения обратного рассеяния для нескольких частот или же использование частотного представления для расчета рассеяния зависящего от времени поля при нескольких заданных углах падения могут оказаться относительно неэффективными процедурами.

Для оценки относительной эффективности временного и частотного представлений при решении различных задач удобно вернуться к описанию структуры с N узлами тока как цепи с N входами (см. п. 1). С этой точки зрения нахождение отклика структуры при произвольной зависимости падающего поля требует как в частотном, так и во временном представлении определения токов, наведенных в каждом из N входов для стольких распределений источников, сколько необходимо для правильного описания изменения падающего поля.

Начнем с анализа решения в частотном представлении. Когда заданное падающее поле приложено только к одному входу, наведенные им N токов определяют взаимные проводимости данного входа с N входами цепи. При одновременном возбуждении нескольких входов, как, например, в случае падения плоской волны, наведенные N токов не так просто связаны с распределением поля источника, а определяются линейными комбинациями N^2 проводимостей, как это следует из уравнения (4.58). Имеет смысл, однако, рассматривать эти N токов как эквивалентные проводимости, или псевдопроводимости, поскольку из N линейно независимых комбинаций этих токов можно получить истинные проводимости цепи с N входами. Таким образом, для источников и тел самого общего вида мы можем свести процедуру численного решения к нахождению проводимостей для цепи с N входами. Необходимо отметить, что вычисление истинных проводимостей требует приблизительно стольких же операций, сколько и вычисление псевдопроводимостей. Например, обращение матрицы дает N^2 проводимостей за N^3 операций. С другой стороны, решение итерациями дает N псевдопроводимостей за число операций порядка N^2 . Таким образом, в обоих случаях для вычисления одной проводимости (псевдоили истинной) требуется порядка N операций.

Такой способ описания является очевидным для частотного представления, но менее ясен для временного представления. Однако зависимость временного изменения тока на одном входе от временной зависимости возбуждающего источника на другом входе является определенным аналогом проводимости в случае частотного представления. Вследствие временной зависимости

источника найденные N токов также являются функциями времени. По ним можно с помощью преобразования Фурье найти соответствующие характеристики в частотном представлении (проводимости) в некоторой полосе частот, зависящей от типа источника и других факторов. Аналогичные выводы можно сделать и при возбуждении нескольких входов, причем в этом случае преобразование Фурье зависящих от времени токов дает псевдопроводимости.

Поскольку понятие проводимости может быть введено только в частотном представлении и поскольку всегда имеется однозначное соответствие между временным и частотным представлениями, мы проведем сравнение относительных эффективностей обоих подходов в терминах частотного представления. Хотя более тщательный учет общего числа операций, требуемых для получения окончательного результата при том или ином подходе, может ввести некоторые поправки, все же основные выводы останутся без изменений.

Рассмотрим теперь нахождение приближенной импульсной переходной характеристики рассеивателя. Решение во временном представлении, зависящее, как было отмечено выше, от вида источника, подобно итерационному решению в частотном представлении дает зависимость псевдопроводимостей от частоты. Общее число псевдопроводимостей порядка NF , где F — число частотных узлов, необходимых для синтеза зависящего от времени падающего поля. (Отметим, что эквивалентность времени и частоты, связанных преобразованием Фурье, означает, что число временных узлов T равно F .)

При решении в частотном представлении обращение или факторизация матрицы дает все N^2 элементов матрицы проводимостей, которые определяют систему с N входами. Таким образом, применение частотного представления для определения характеристик нестационарного процесса для заданного источника требует вычисления N^2F проводимостей и, очевидно, менее эффективно, чем непосредственное решение во временном представлении.

Аналогично можно показать, что при расчете обратного рассеяния для P углов находятся N^2 проводимостей в частотном представлении и NFP псевдопроводимостей во временном представлении. Таким образом, полагая трудности вычисления одной проводимости (истинной или псевдопроводимости) для временного и частотного представлений одинаковыми, преимущество того или иного способа определяется эффективностью использования найденных значений проводимостей. Поэтому существенно вычислять лишь те проводимости, которые требуются для получения соответствующей характеристики. В табл. 4.5

Таблица 4.5

Сравнение расчетов в частотном и временном представлениях

	Число эквивалентных проводимостей для цепи с N входами		
	Частотное представление (ч. п.)	Временное представление (в. п.)	ч. п./в. п.
Сечение обратного рассеяния (P углов)			
Одна частота	N^2	NFP	N/FP
Импульсная переходная характеристика (F частот)	N^2F	NFP	N/P
Двухпозиционное сечение рассеяния (один угол падения)			
Одна частота	N^2	NF	N/F
Импульсная переходная характеристика	N^2F	NF	N

сравниваются эквивалентные числа проводимостей, которые необходимо вычислять в различных случаях.

Отметим, что если решение в частотном представлении производится итерационным методом, то число проводимостей, вычисляемых для заданного источника, снижается с N^2 до N . Кроме того, при возбуждении нескольких входов системы получаются не истинные проводимости, а псевдопроводимости. Таким образом, итерационный метод в частотном представлении является наиболее гибким по своим возможностям. Он позволяет найти характеристики в частотном и временном представлениях при вычислении минимального числа проводимостей. В то же время N итерационных решений для N линейно независимых источников дают тот же объем информации, что и обращение матрицы импедансов, поскольку полученные N^2 псевдопроводимостей могут быть преобразованы в N^2 истинных проводимостей, характеризующих систему. Тем самым устанавливается верхний предел на число итерационных решений, необходимых для рассмотрения произвольных источников. Главным фактором, определяющим применимость этого метода, является быстрая сходимость итерационного процесса, поскольку время счета N проводимостей линейно зависит от числа необходимых итераций.

Другие методы

Изложенный метод численного решения задач о рассеянии включает ряд ограничений. Как при выводе различных интегральных уравнений для наведенных токов, так и при их

последующем численном решении предполагалось, что точки наблюдения полного поля лежат на поверхности тела. Ограничившись интегральными уравнениями, мы пренебрегли другими возможными подходами (такими, как излагаемый в настоящей монографии метод Уотермана), в которых заключены большие потенциальные возможности для численного решения задач о рассеянии. Здесь мы кратко остановимся на некоторых из этих методов. Мы ограничимся лишь общим описанием методов без математической формулировки, поскольку более подробное изложение выходит за рамки настоящей работы. Отметим также, что рассматриваемые здесь методы отнюдь не исчерпывают все возможности и, несомненно, будут постоянно развиваться все новые методы.

а. Изменение положения точек наблюдения. Одна из простейших возможных модификаций рассмотренного выше метода состоит в помещении точек наблюдения внутрь рассеивателя. Поскольку полное поле внутри идеально проводящего тела равно нулю, ясно, что такие внутренние точки дадут граничные условия, связывающие наведенные поверхностные токи и падающие поля. Внутренние точки были использованы в некоторых акустических задачах о рассеянии, но больше для того, чтобы избежать трудностей, связанных с резонансами, чем из желания дать новый метод решения вместо метода поверхностного интегрального уравнения [65].

Использование внутренних точек наблюдения имеет то преимущество, что упрощает поверхностный интеграл. Однако при этом результирующая матрица импедансов оказывается менее устойчивой, чем соответствующая матрица, полученная решением поверхностного интегрального уравнения. Это может произойти из-за того, что точки наблюдения оказываются расположенными на приблизительно одинаковом расстоянии от нескольких узлов источника, в результате чего в матрице импедансов диагональные элементы перестают быть преобладающими. Поскольку применению внутреннего расположения точек наблюдения было уделено слишком мало внимания, трудно сказать, даст ли оно какие-либо преимущества по сравнению с методом поверхностного интегрального уравнения.

б. Разложение по элементарным источникам. Метод интегрального уравнения в применении к задачам о рассеянии основан на представлении полученных полей в виде интеграла по подлежащему определению распределению токов. С равным основанием к этим задачам применим и дифференциальный подход, при котором наведенные токи выражаются через поверхностное распределение дипольных источников. Поле каждого

диполя может быть представлено в виде рядов Фурье по сферическим волновым функциям. Суммируя по всей поверхности рассеивателя, получаем выражение для излученного поля. потребовав выполнения соответствующих граничных условий, получим систему линейных уравнений для дипольных моментов источников.

Существенная разница между этим подходом и методом интегрального уравнения заключается в том виде, в котором ищется формальное решение: в одном случае оно представляется интегралом, в другом — рядом Фурье. Поскольку представление дипольными источниками уже подразумевает определенную дискретизацию распределения токов, то оно по своей природе является приближенным, тогда как метод интегрального уравнения — точный. Однако сведение интегрального уравнения к системе линейных уравнений также требует введения некоторых приближений, что делает оба метода в этом смысле эквивалентными. Как было отмечено Харрингтоном [24], оба подхода позволяют составить удобные программы счета на ЭВМ, и предпочтение одного из них по большей части определяется личным вкусом исследователя.

в. Метод разностных уравнений. Если рассеивающее тело окружить сферической поверхностью, то внешнее поле можно выразить рядом Фурье по сферическим волновым функциям этой поверхности. Такое разложение можно рассматривать как введение эквивалентных источников на сферической поверхности. Если известны коэффициенты Фурье, то можно найти рассеянные поля.

Коэффициенты Фурье могут быть найдены из уравнений Максвелла в дифференциальной форме. Выражая эти дифференциальные уравнения в виде конечных разностей, можно установить пространственную связь между поверхностью тела, где заданы определенные граничные условия, и поверхностью вспомогательной сферы, на которой касательные составляющие полей должны быть непрерывными. Уравнения в конечных разностях представляют собой систему линейных уравнений с разреженной матрицей, которая определяет поля в узлах сетки и, следовательно, требуемые коэффициенты Фурье. Такой подход особенно удобен при рассмотрении неоднородных сред [66]. Если геометрия структуры позволяет разложить поля на собственные волны, то этот подход сводится к решению системы обыкновенных дифференциальных уравнений.

г. Решетчатые модели. В изложенных выше методах преобладает математический формализм. Метод решетчатых моделей, наоборот, исходит из физических соображений. Интуитивно

представляется очевидным, что путем уменьшения отверстий решетки различие между электромагнитными свойствами трехмерного идеально проводящего тела и его решетчатой модели можно сделать сколь угодно малым. Таким образом, решетчатая модель позволяет использовать для анализа трехмерных тел интегральные уравнения для тонких проводников. Ричмонд [27] показал возможность такого подхода в задачах о рассеянии. Впоследствии этот подход применялся также другими авторами [41]. Одним из преимуществ метода решетчатых моделей является его применимость для трехмерных тел, имеющих углы, острые края и другие поверхностные нерегулярности, а также содержащих проволочные элементы, без специального выделения этих особенностей.

д. Прочие подходы. Помимо перечисленных, рассматривались и другие методы, некоторые из которых применимы лишь к двумерным задачам. Шафай [67] предложил метод, пригодный для цилиндров произвольного сечения и позволяющий учесть также неоднородности среды. Поскольку этот метод основан на конформных преобразованиях сечения цилиндра в круг, он довольно ограничен в своих приложениях.

Даниель и Митра [68] рассмотрели метод решения системы линейных уравнений (в их случае полученных на основе интегрального уравнения, но это несущественно для самого метода), основанный на оптимизации параметров. Их подход состоит в построении квадратичной величины, которая является мерой точности решения. Минимизируя эту величину при помощи последовательности итераций для составляющих тока, получаем оптимальное решение задачи. Этот метод отличается от обычного итерационного метода тем, что последовательные значения токов получаются путем оптимизации параметров составляющих токов.

Когда геометрия структуры такова, что разные части ее поверхности совпадают с координатными поверхностями системы координат, допускающей разделение переменных, можно использовать классический метод разделения переменных. Этот подход был использован Рукгабером и Шульцем [69] для анализа рассеяния на ребристых цилиндрах и сферах. Их результаты находятся в хорошем согласии с решениями, полученными другими методами, в том числе даже для предельных случаев плоского круглого диска и плоской ленты.

Рю [70] использовал для решения задач геофизической разведки «метод элементов», заимствованный из структурного анализа и сходный с методом конечных разностей. В решаемой им задаче рассматривается взаимодействие электромагнитного поля с полупространством конечной проводимости, имеющим различ-

ные электрические включения. Метод конечных элементов заключается в аналитическом решении определяющих дифференциальных уравнений для каждого конечного элемента и связывании результирующих выражений условиями непрерывности на границах элементов. Численное решение Рю получал путем минимизации интеграла энергии.

§ 4. ПРИЛОЖЕНИЯ ЧИСЛЕННЫХ МЕТОДОВ

До настоящего момента наше внимание в основном было сосредоточено на постановке задач о рассеянии и описании методов решения интегральных уравнений, определяющих наведенные токи. Без примеров, демонстрирующих эффективность такого подхода, предыдущее изложение может показаться просто математическим упражнением. Поэтому в настоящем параграфе мы приведем большое число результатов расчета, которые почти во всех случаях сравниваются с данными, полученными независимым способом (численным или аналитическим), или с экспериментальными измерениями. Для каждого графика указывается источник, из которого взяты данные, за исключением случаев, когда результаты получены самими авторами. Сначала приведены результаты решения в частотном представлении; результаты решения во временном представлении даны в п. 2.

1. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ В ЧАСТОТНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Как было сказано выше, для решения задачи о рассеянии на трехмерном проводящем теле может быть использовано интегральное уравнение для поля на поверхности или, при переходе к решетчатой модели, интегральное уравнение для электрического поля тонких проводников. Многие представляющие практический интерес структуры на самом деле полностью состоят из соединенных между собой тонких проводников, так что в этом случае использование ИУЭП для тонких проводников вполне естественно. Ниже мы рассмотрим сначала расчет рассеяния на трехмерных телах с помощью поверхностных ИУЭП и ИУМП, а затем исследование решетчатых моделей трехмерных рассеивателей и систем тонких проводников. В двух последних случаях решение проводится на основе ИУЭП. Рассеиватели предполагаются идеально проводящими, если специально не оговорено противное.

Приведенные ниже кривые двухпозиционного сечения рассеяния в E -плоскости дают зависимость составляющей рассеянного электрического поля в дальней зоне, параллельной плоскости, содержащей вектор электрического поля и волновой вектор

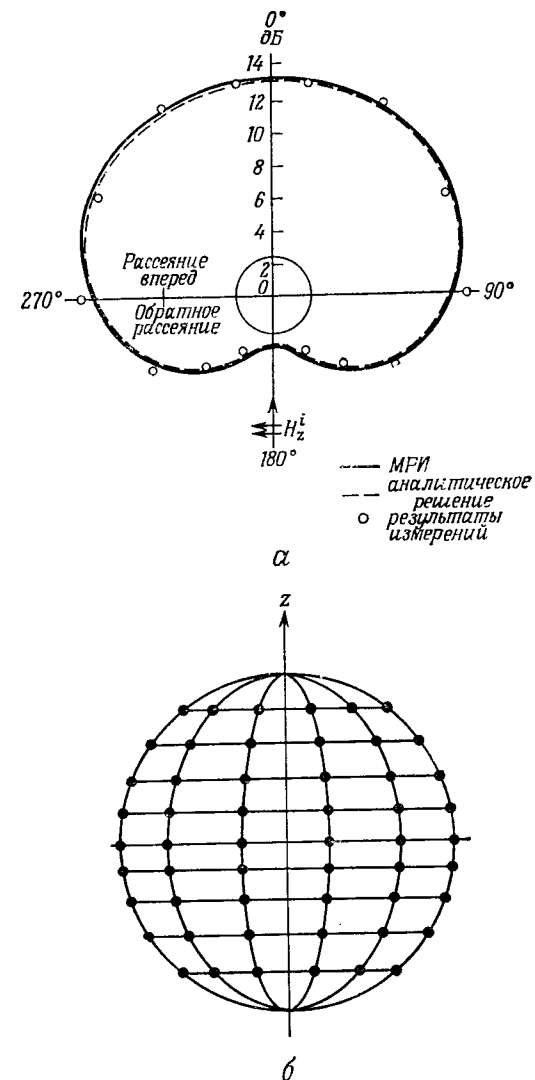
падающей волны, от угла в этой плоскости. Кривые двухпозиционного сечения рассеяния в H -плоскости определяются аналогично с заменой электрического поля на магнитное.

В диаграммах обратного рассеяния E -плоскость обозначается также VV , а H -плоскость — HH . Взаимно перпендикулярные ось вращения мишени и волновой вектор падающей волны определяют плоскость падения. Диаграмма обратного рассеяния в H -плоскости определяется составляющей рассеянного электрического поля, параллельной вектору падающего поля, который нормален плоскости падения. Диаграмма обратного рассеяния в E -плоскости определяется аналогично с заменой электрического поля на магнитное.

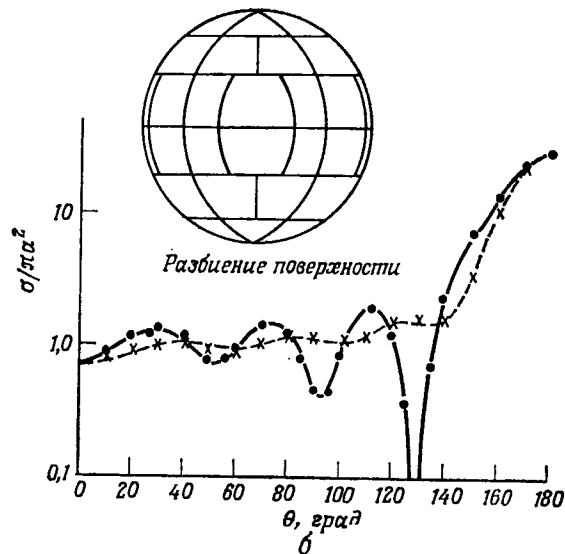
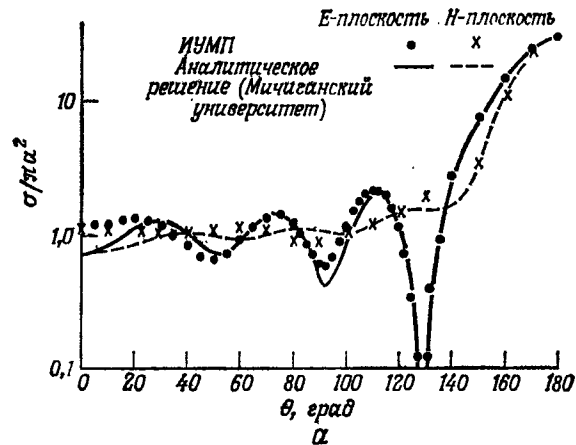
Трехмерные поверхностные рассеиватели

а. «Строгие» численные решения. Первым трехмерным телом, рассеяние на котором исследовалось с помощью численного решения интегрального уравнения, была сфера [29], главным образом потому, что сечение рассеяния на сфере хорошо известно из измерений, а также из решения с помощью рядов Ми. На фиг. 4.9, *а* сравниваются классическое решение и первые результаты численного расчета двухпозиционного сечения рассеяния в H -плоскости, полученные Оширой и Су [51] для проводящей сферы при $ka=1,7$ (a — радиус сферы). Эти результаты были получены с помощью ИУМП, решавшегося методом базисных функций подобластей, называемым методом распределенного источника (МРИ). При этом поверхность сферы делилась на десять равных долей по азимуту и десять широтных слоев, разграниченных равноотстоящими друг от друга плоскостями. Такое разбиение поверхности сферы, обеспечивающее равную площадь всех ячеек, показано на фиг. 4.9, *б*. Численное интегрирование проводилось умножением подынтегрального выражения в центре ячейки на площадь ячейки (правило прямоугольников). Поскольку интеграл следует понимать в смысле главного значения, интегрирование по ячейке, содержащей особенность, не проводилось. Имеет место прекрасное совпадение численного и классического решений.

Поскольку принятая численная модель расчета рассеяния на сфере не является изотропной относительно направления падения (значения сечения обратного рассеяния при падении волны в экваториальной плоскости и вдоль оси могут различаться), была проведена дополнительная проверка путем вычисления сечения обратного рассеяния на сфере. Максимальное отклонение от классического решения — 11,45 дБ составляло 0,3 дБ при изменении угла падения на 90° (от экваториальной плоскости до направления полярной оси). Этот результат



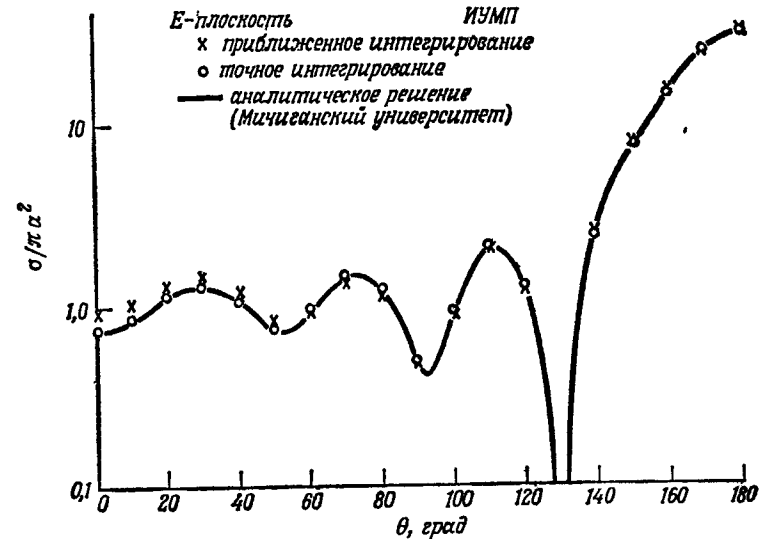
Фиг. 4.9. Рассеяние на сфере ($ka=1,7$) [51].
а — двухпозиционное сечение рассеяния; *б* — разбиение поверхности сферы.



Фиг. 4.10. Рассеяние на сфере ($ka = 5,3$).
 а — ячейки, равномерные по Φ ; б — неравномерные ячейки.

косвенно указывает на степень зависимости точности численного решения от способа разбиения поверхности на ячейки. Аналогичная проверка может быть проведена и для других тел, обладающих осью симметрии.

Представленные на фиг. 4.10 данные иллюстрируют влияние способа разбиения поверхности на ячейки на точность численного расчета двухпозиционного сечения рассеяния для сферы



Фиг. 4.11. Двухпозиционное сечение рассеяния на сфере в E -плоскости при двух способах интегрирования ($ka = 5,3$).

при $ka = 5,3$. Эти результаты были получены авторами с помощью программы численного решения ИУМП, составленной с учетом наличия оси симметрии конечного порядка у принятой численной модели. Результаты, приведенные на фиг. 4.10, а, соответствуют делению поверхности на равные доли по азимуту, как показано на фиг. 4.9, б. Кривые на фиг. 4.10, б отвечают другому способу разбиения поверхности на ячейки, который обладает симметрией относительно поворота на 90° вокруг оси. Сфера делилась на тринадцать шаровых слоев таким образом, чтобы полярный угол θ при переходе от слоя к слою получал одинаковое приращение. Каждый слой делился на равные ячейки, число которых в каждом слое, начиная с полюсов, проходило следующие значения: 4, 8, 12, 16, 20, 24, 24, 20, 16, 12, 8, 4. Интеграл в смысле главного значения аппроксимировался суммой по всем ячейкам, за исключением ячейки, в которой

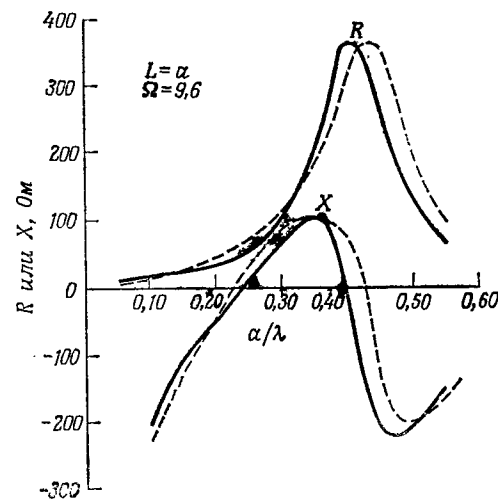
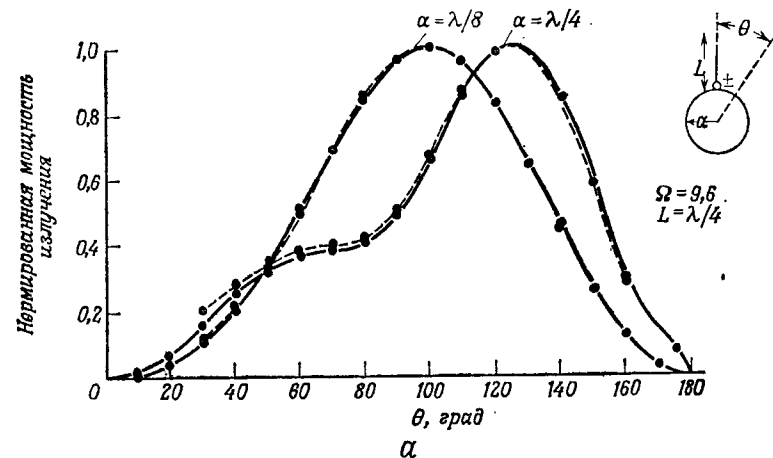
подынтегральное выражение имеет особенность. Использованием такой сетки, у которой отношение длины ячейки к ширине ближе к единице, чем при делении поверхности на ячейки равной площади, достигалось значительное повышение точности.

Влияние точности интегрирования на общую погрешность численного решения задачи иллюстрирует фиг. 4.11, на которой для $ka = 5,3$ сравниваются результаты численного расчета двухпозиционного сечения рассеяния с аналитическим решением при двух способах вычисления поверхностного интеграла. Видно, что вычисление интеграла с помощью правила прямоугольников дает большую погрешность, чем вычисление интеграла с разбиением каждой ячейки на более мелкие подобласти (число узлов 25). В последнем случае при вычислении интеграла в смысле главного значения не учитывается вклад только одной мелкой подобласти, тогда как в предыдущем случае опускается интегрирование по всей ячейке. Отметим, что использование большого числа узлов на поверхности рассеивателя может давать более точное значение сечения рассеяния не только из-за более точного описания зависимости тока от координат, но и из-за более точного вычисления интеграла в результате уменьшения размера ячейки.

В качестве последнего примера для тел сферической геометрии на фиг. 4.12, а и б приведены некоторые результаты расчета диаграммы направленности штыревой антенны, расположенной на сфере, полученные Теше и Нейрейтером [71]. Это решение антенной задачи является ценной проверкой рассмотренных здесь методов численного решения; как было сказано выше, единственная существенная разница «строгого» численного решения задачи о рассеянии и задачи об излучении заключается в виде источника, поскольку в обоих случаях применяется одна и та же матрица проводимостей. Для решения этой задачи были использованы ИУЭП и функция Грина для линейного элемента тока вблизи идеально проводящей сферы. В результате интегрирование по поверхности штыря и сферы, которое пришлось бы проводить при пользовании функцией Грина для бесконечной среды, сводится только к интегрированию по поверхности штыря. Полученные таким способом результаты Теше и Нейрейтера близки к результатам Болле и Моргенштерна [72], которые решали аналогичную задачу, рассматривая предельный случай конической антенны на сфере.

Рассмотрим теперь некоторые примеры расчетов рассеяния на телах такой геометрии, для которых выяснение погрешностей численных методов представляется, вообще говоря, более необходимым, чем в случае сферы. Большое число задач для таких тел, как диск, цилиндр конечной длины, сферонд, конус, было решено Оширой и др. [16, 73—76], Андреасеном [18],

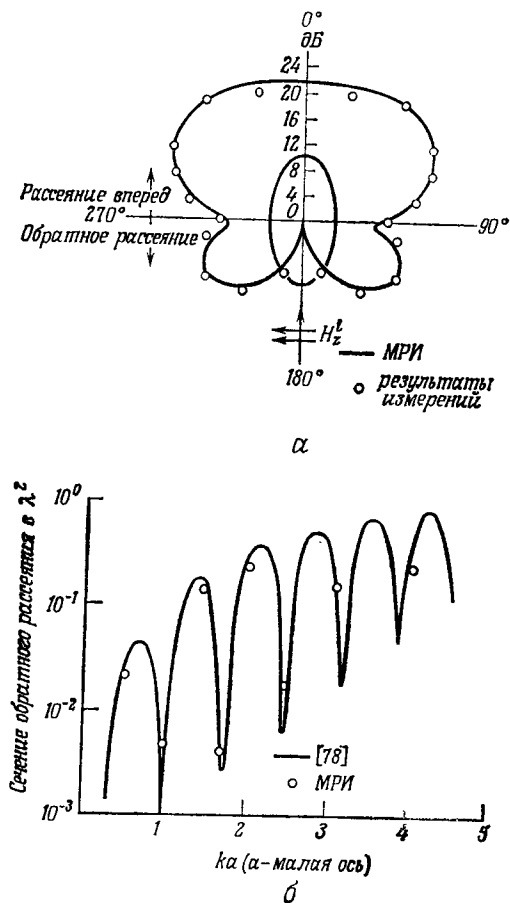
Харрингтоном и Мотцем [50], а также в работе [77]. Поскольку нас в основном интересует демонстрация эффективности



Фиг. 4.12. Штыревая антенна на сфере. а — диаграмма направленности; б — входной импеданс; [71] (сплошные линии) и [72] (штриховые линии).

рассмотренных численных методов, то представленные ниже результаты ограничиваются случаями, для которых имеются независимые данные, позволяющие судить об относительной точности численного решения. Поэтому последующие примеры отнюдь не охватывают результаты всех исследователей,

внесших значительный вклад в этой области, а скорее обусловлены имеющимися в распоряжении авторов результатами, для которых путем сопоставления с независимыми данными можно



Фиг. 4.13. Рассеяние на сфероиде [16].

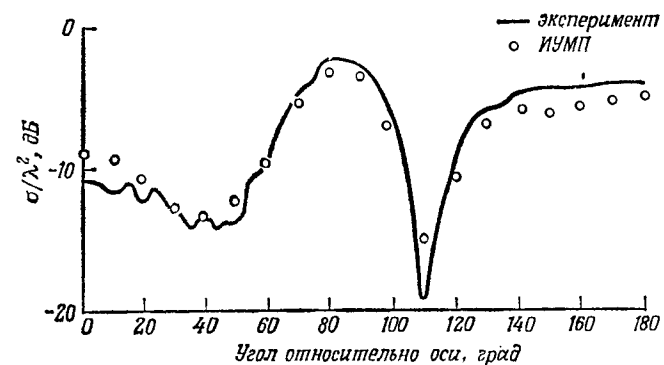
a — двухпозиционное сечение рассеяния ($ka=1,7$); b — сечение обратного рассеяния при аксиальном падении.

провести оценку точности. Поскольку описание деталей большинства расчетов было бы очень сложным и длинным, здесь приводятся лишь основные результаты. Подробности читатель может найти в цитированных работах.

На фиг. 4.13 представлены результаты расчета сечения рассеяния для вытянутого сфероида [16], проведенного на основе ИУМП. Для двухпозиционного сечения рассеяния на сфероиде

при $ka=1,7$ (a — меньшая полуось, b — большая полуось, $b/a=2,0$) получено хорошее совпадение с результатами измерений. Как видно из фиг. 4.13, б, вычисленное Оширой и др. сечение обратного рассеяния в функции ka при аксиальном падении также хорошо согласуется с данными Моффатта и Кенно [78]. Сетка образовывалась разбиением большой оси на десять одинаковых отрезков и равномерным разбиением по азимуту тоже на десять частей.

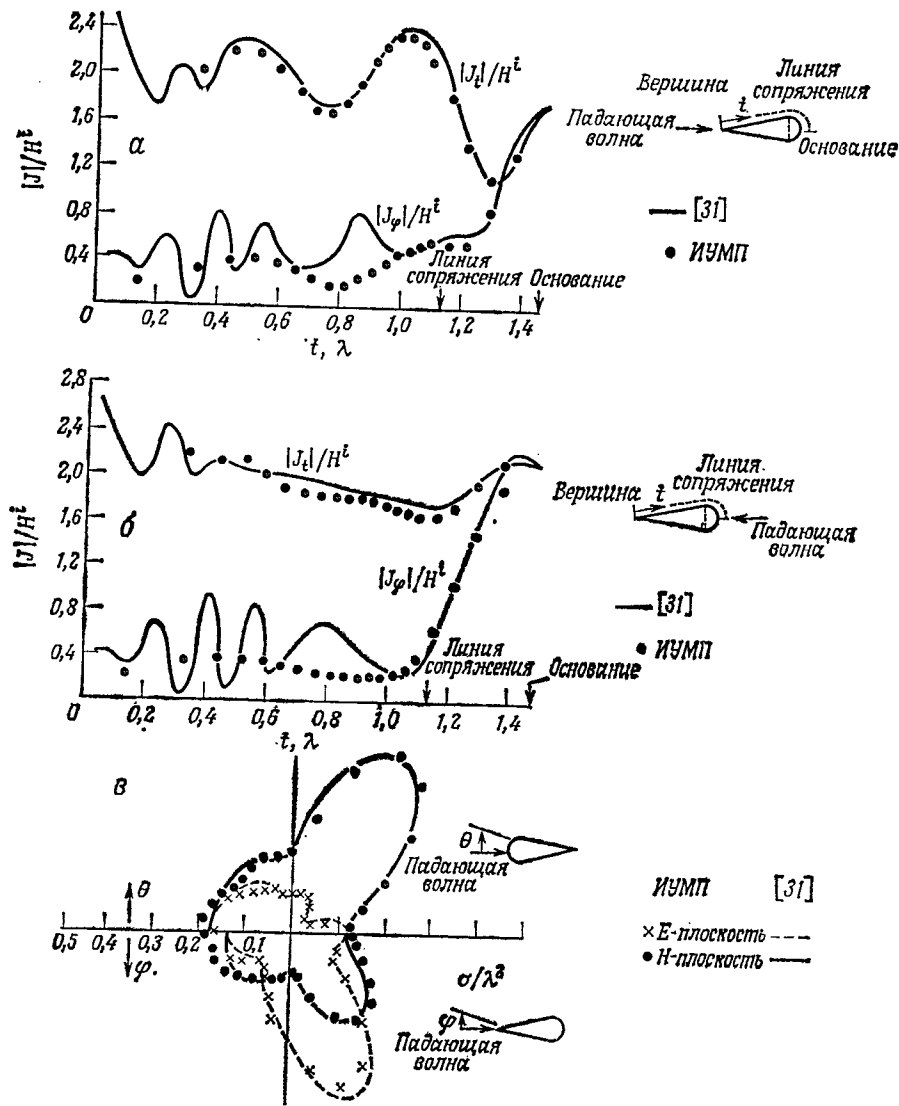
В течение многих лет широко исследовалось рассеяние на теле, представляющем собой конус со сферическим основанием



Фиг. 4.14. Сечение обратного рассеяния на конусе со сферическим основанием в H -плоскости ($ka=1,7$, угол при вершине конуса 30°).

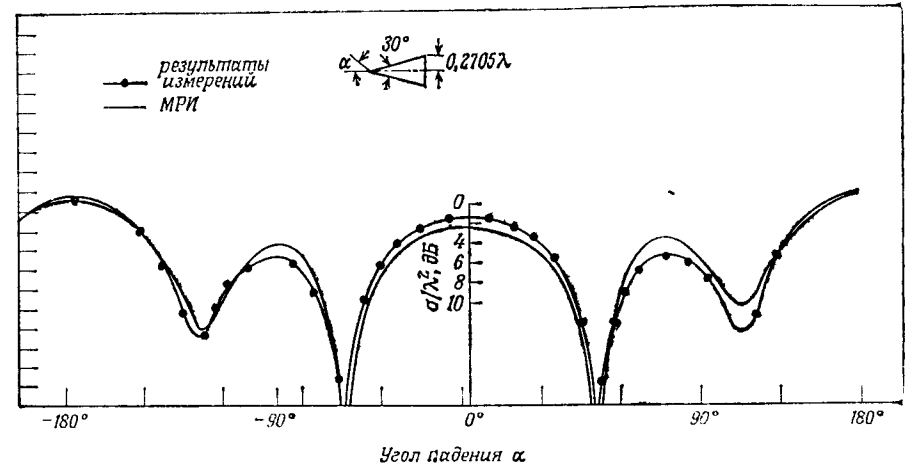
и называемым в дальнейшем конус-сферой. Сравнение эксперимента с результатами вычисления на основе ИУМП сечения обратного рассеяния на конус-сфере с углом при вершине конуса 30° при $ka=1,7$ приведено на фиг. 4.14. Поверхность тела разбивалась на ячейки с помощью равноотстоящих по азимуту плоскостей и плоскостей, нормальных к оси, расстояние между которыми подбиралось таким образом, чтобы площади ячеек были одинаковы. Отметим, что при этом плотность узлов сетки увеличивается от вершины конуса к линии сопряжения со сферой. Опыт показал, что такое разбиение дает большую точность, чем разбиение равноотстоящими плоскостями, перпендикулярными оси конуса. На поверхности сферы также применялась сетка из ячеек равной площади. Результаты численного решения интегрального уравнения, при котором интегрирование проводилось с дополнительным делением ячеек на более мелкие элементы, совпадают с экспериментальной кривой в пределах ± 1 дБ.

На фиг. 4.15 представлены результаты вычисления двумя различными способами сечения рассеяния на конус-сфере с углом



Фиг. 4.15. Рассеяние на конусе со сферическим основанием ($ka=1,26$, угол при вершине конуса 20°) [31].
 а — плотность тока при падении волны со стороны вершины; б — плотность тока при падении со стороны основания; в — двухпозиционное сечение рассеяния.

при вершине 20° для $ka=1,26$. Распределение поверхностной плотности тока и зависимость сечения обратного рассеяния от угла при аксиальном падении волны со стороны конического острия и со стороны сферического основания, полученные в результате решения ИУМП, сопоставляются с данными Мотца и Харрингтона [31], которые решали ИУЭП для тел с осевой симметрией. Как и в случае, показанном на фиг. 4.14, в работе [77]



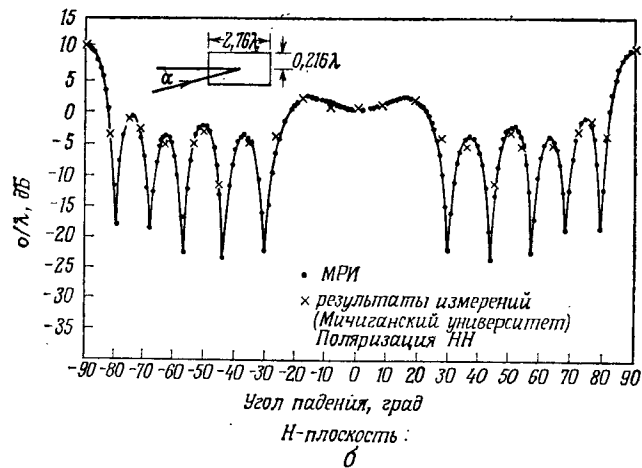
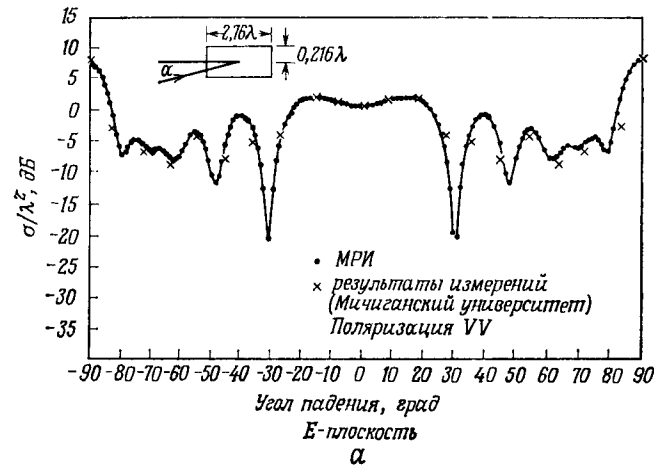
Фиг. 4.16. Сечение обратного рассеяния на конусе с плоским основанием в H -плоскости ($ka=1,7$) [75].

использовалась сетка с равными площадями ячеек на поверхности конуса. Результаты же Мотца и Харрингтона были получены с сеткой, тридцать узлов которой расположены на равном расстоянии друг от друга. Отметим, что для касательной составляющей J_t между результатами этих независимых вычислений имеется хорошее совпадение, а азимутальные составляющие тока J_φ существенно различаются. Несмотря на это, двухпозиционные сечения рассеяния хорошо согласуются между собой, что свидетельствует о слабой зависимости рассеянного поля от распределения плотности тока.

Дальнейшие примеры сравнения результатов численного решения и эксперимента для сечения обратного рассеяния, приведенные Оширой и др. [75], показаны на фиг. 4.16, 4.17 и 4.18. Все вычисления проводились решением ИУМП. Приведенные численные результаты получены без специального рассмотрения особенностей в распределении плотности тока вблизи нерегулярностей поверхности тела. Согласие между экспериментальными

и расчетными данными очень хорошее; различия обычно в пределах ± 2 дБ.

Последний пример «строгого» численного расчета сечения обратного рассеяния для идеально проводящего тела, приведен

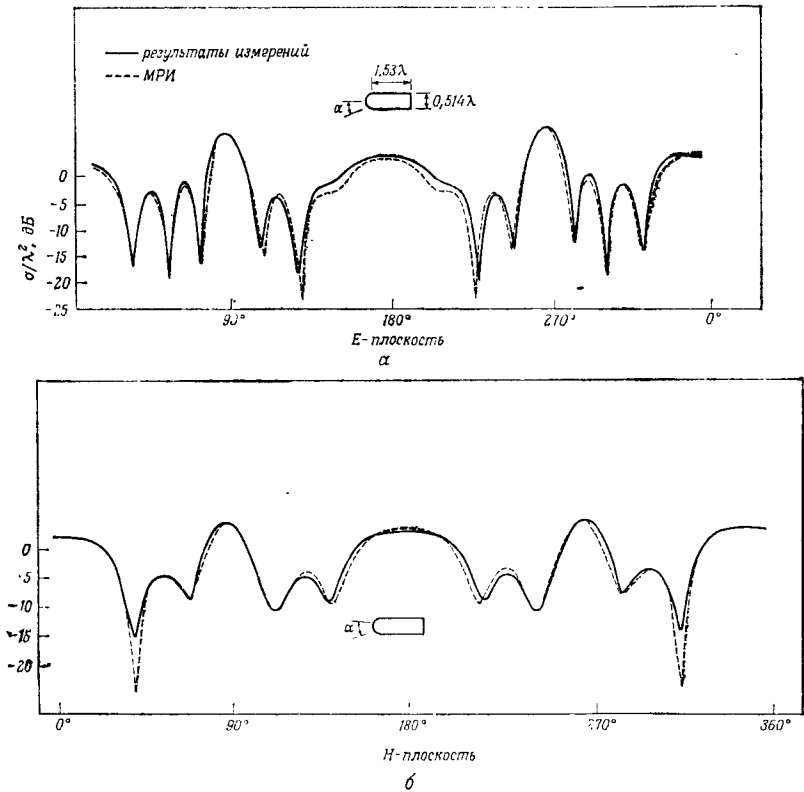


Фиг. 4.17. Сечение обратного рассеяния на правильном круговом цилиндре [74].

ный на фиг. 4.19, б, относится к вычислению сечения обратного рассеяния на цилиндре с выступом, изображенном на фиг. 4.19, а. Хотя в этом случае согласие экспериментальных и расчетных данных [75] не столь хорошее, как в предыдущих примерах, различие обычно не превышает 4 дБ, за исключением направлений

для которых сечение рассеяния очень мало. В целом расчетная кривая зависимости сечения рассеяния от угла падения хорошо коррелирует с экспериментальной кривой.

б. *Приближенные методы и специальные случаи.* В этот раздел включены примеры вычислений в приближении физической

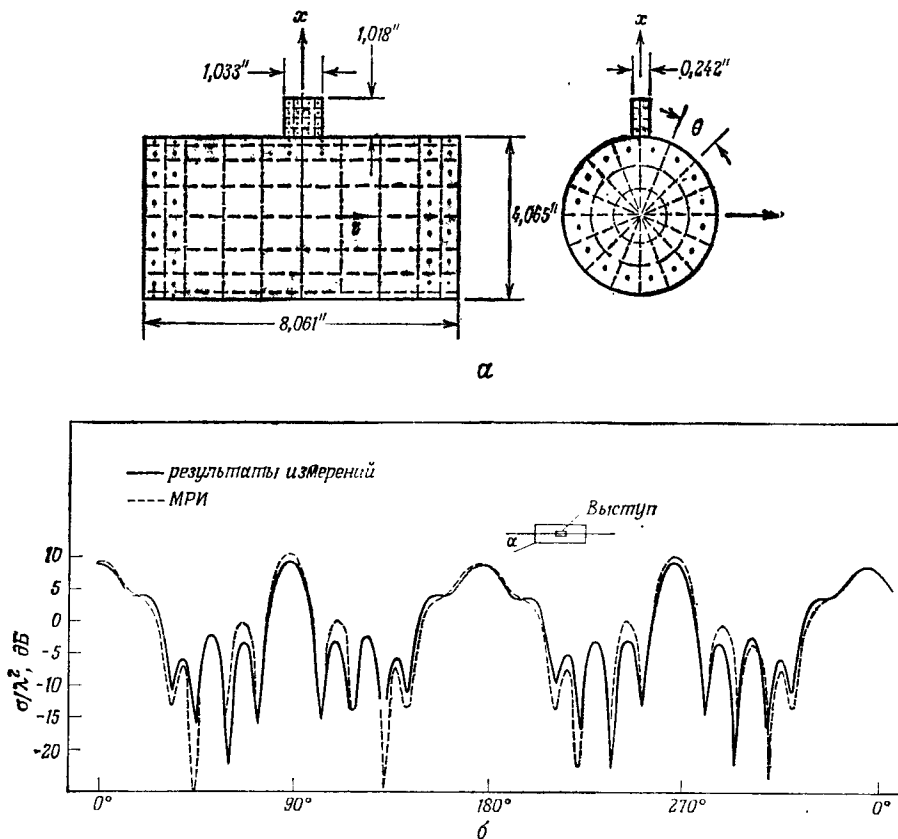


Фиг. 4.18. Сечение обратного рассеяния на цилиндре со сферическими основаниями [75].

оптики и для тел с отличным от нуля поверхностным импедансом. Рассматривается также рассеяние на частотах собственных колебаний структуры.

1. *Физическая оптика.* Возможности применения методов физической оптики и геометрической оптики для оценки сечения рассеяния больших тел были детально рассмотрены Зигелем и др. [49]. Их подход к расчету рассеяния на структурах сложной формы основан на разбиении тела на составные части простой

формы, каждая из которых рассматривается независимо, с последующим сложением отражений для получения полного сечения рассеяния. При обсуждении результатов расчета в приближении физической оптики мы ограничимся здесь двумя при-



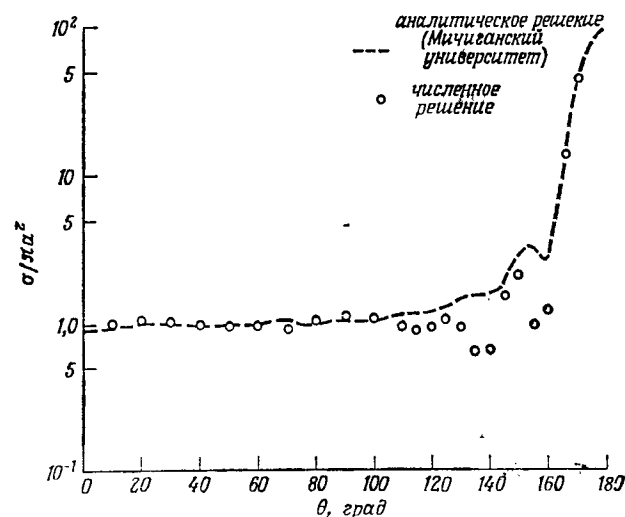
Фиг. 4.19. Сечение обратного рассеяния на цилиндре с выступом. а — разбиение поверхности на ячейки; б — сечение обратного рассеяния в H -плоскости.

мерами, причем в обоих случаях рассматриваются двухпозиционные сечения рассеяния на идеально проводящей сфере.

На фиг. 4.20 приведены кривые зависимости двухпозиционного сечения рассеяния в H -плоскости на сфере ($ka=10,0$) от угла, полученные методом физической оптики, а также результаты расчетов с помощью рядов Ми. Хорошее согласие результатов имеет место как для прямого, так и для обратного рассеяния; только для углов в диапазоне $120-160^\circ$ отличие достигает

3 дБ. Причины этих расхождений были описаны в предыдущем разделе. Хорошее согласие для направления обратного рассеяния указывает на пригодность физической оптики для сечения обратного рассеяния на телах простой формы. Однако для тел сложной формы с поверхностными нерегулярностями нельзя быть полностью уверенным в точности результатов такого расчета.

На фиг. 4.21 проиллюстрирована возможность сочетания метода интегрального уравнения и приближения физической

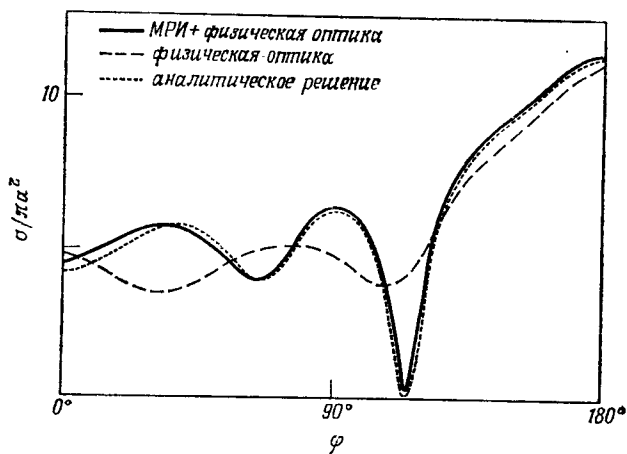


Фиг. 4.20. Двухпозиционное сечение рассеяния на сфере в H -плоскости при $ka=10,0$, вычисленное в приближении физической оптики.

оптики [75]. Приведены кривые двухпозиционного сечения рассеяния при $ka=4,1$, полученные на основе классического решения и решения в приближении физической оптики. Представлены также результаты комбинированного подхода, при котором ток в освещенной области находится по правилам физической оптики, а ток в теневой области вычисляется с помощью интегрального уравнения. Эти результаты показывают, насколько повышается точность решения в результате сочетания приближения физической оптики с более строгим методом, и указывают на успешность применения такого модифицированного метода расчета сечения рассеяния для тел относительно малых размеров.

2. *Внутренние резонансы.* При численном расчете характеристик рассеяния на трехмерном проводящем теле с помощью

ИУМП могут возникнуть трудности, связанные с возбуждением внутренних резонансов, которые существенно искажают рассеянное поле. Та же трудность возникает и при использовании ИУЭП. Она обусловлена неточностью численного расчета токов, связанных с внутренними резонансами, которые, хотя фактически не излучают, тем не менее из-за неточности их численной оценки дают вклад в поле в дальней зоне, и общее сечение рассеяния определяется с ошибкой. Обсуждение трудностей, воз-

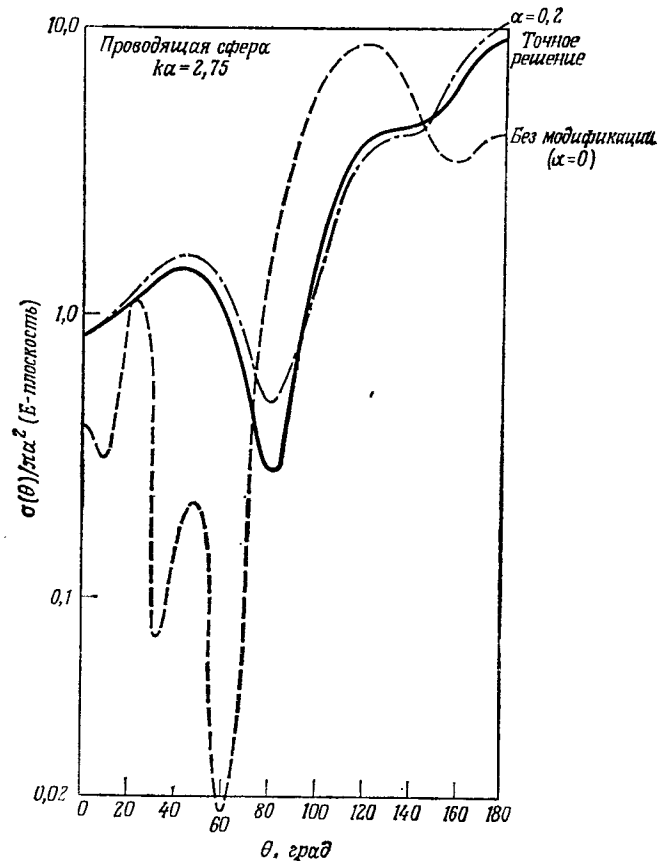


Фиг. 4.21. Двухпозиционное сечение рассеяния на сфере в H -плоскости ($ka=4,1$), вычисленное при помощи сочетания метода распределенного источника и приближения физической оптики.

никающих при решении интегральных уравнений на собственных частотах структуры, можно найти для задач акустики в работе Копли [79], а для задач электродинамики — в работах Бейкера и Копсона [80] и Мюллера [9].

Поскольку внутренние резонансы проявляются в ИУМП и в ИУЭП различным образом, оказывается возможным подавить эффекты резонансов, комбинируя оба интегральных уравнения в одно составное. Такой способ применяли Митцнер [81] и Ошира и др. [82], и он оказался довольно эффективным. По существу такой подход аналогичен в какой-то мере подходу, используемому для решения задач с импедансными граничными условиями. Учитывая свойства ИУМП (оператор имеет особенности на собственных частотах) и ИУЭП (оператор не допускает однозначного обращения матрицы и приводит к бесконечному числу решений, отличающихся на собственные функции), а также то обстоятельство, что в задачах с конечной проводимостью сте-

нок нет действительных собственных частот, Митцнер вывел интегральное уравнение, применимое для всех частот. Обозначая интегральный оператор в ИУМП через L , а интегральный



Фиг. 4.22. Двухпозиционное сечение рассеяния на сфере в E -плоскости для нижней собственной частоты ($ka=2,75$), вычисленное при помощи модифицированного интегрального уравнения [82].

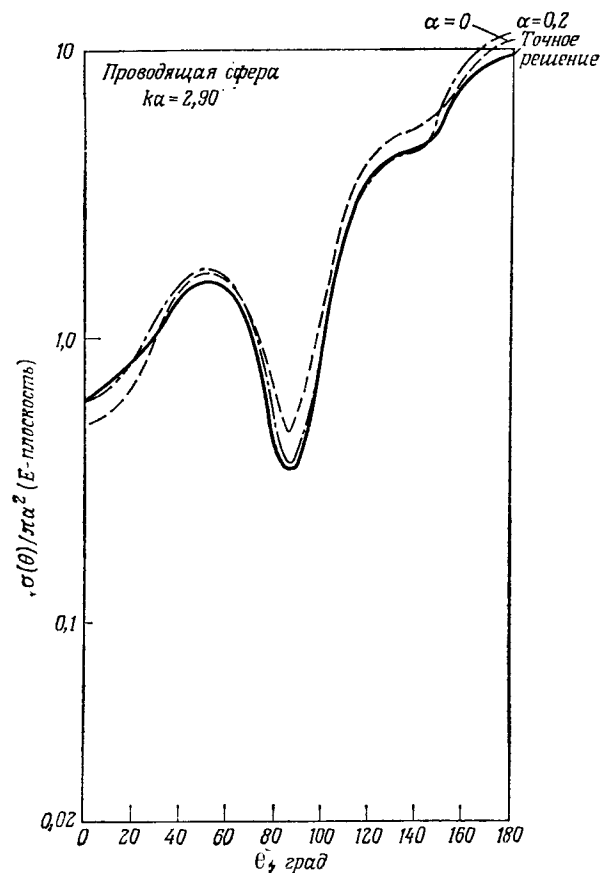
В каждом квадранте 7 интервалов по полярному углу и 4 интервала по азимуту.

оператор в ИУЭП через M , это уравнение можно представить в виде

$$\left(\frac{1}{2}I - L + a\hat{n} \times M\right) \mathbf{J}_s = \hat{n} \times \mathbf{H}^i + \alpha \frac{1}{Z_0} \hat{n} \times (\mathbf{E}^i \times \hat{n}),$$

где Z_0 — волновое сопротивление, I — единичный оператор, α — произвольная константа в интервале $0 < \alpha \leq 1$. Уравнение дает единственное значение \mathbf{J}_s для всех частот, за исключением

собственных, на которых оно имеет бесконечное число решений, различающихся на собственные функции внутренней задачи.



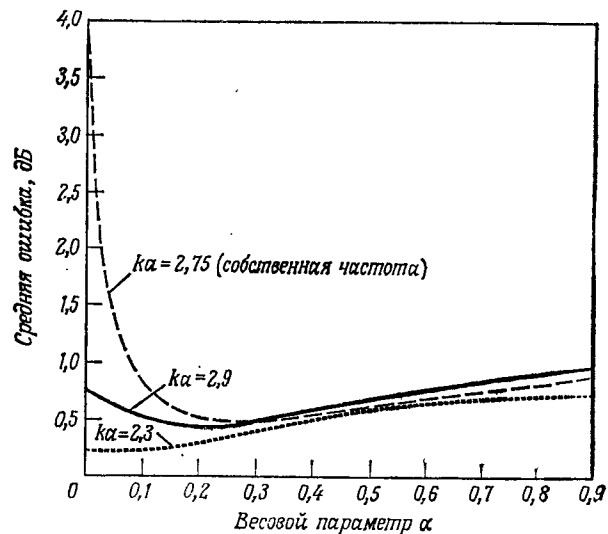
Фиг. 4.23. Двухпозиционное сечение рассеяния на сфере в E -плоскости ($ka=2,9$), вычисленное при помощи модифицированного интегрального уравнения [82].

В каждом квадранте 7 интервалов по полярному углу и 4 интервала по азимуту.

Поскольку возбуждение собственных колебаний внутренней области не дает вклада в излучение, это уравнение дает правильное решение задачи.

Результаты, полученные с помощью приближенного подхода Митцнера, для нижней собственной частоты сферы ($ka=2,75$) представлены на фиг. 4.22, где для сравнения приведена кри-

вая двухпозиционного сечения рассеяния, построенная на основе аналитического решения. В то время как численное решение ИУМП совершенно неприемлемо, решение модифицированного уравнения хорошо согласуется с аналитическим. На фиг. 4.23 приведены аналогичные кривые двухпозиционного сечения рассеяния для значения $ka=2,9$. Графики свидетельствуют о применимости модифицированного интегрального уравнения и вдали от собственных частот. На фиг. 4.24 приведена средняя



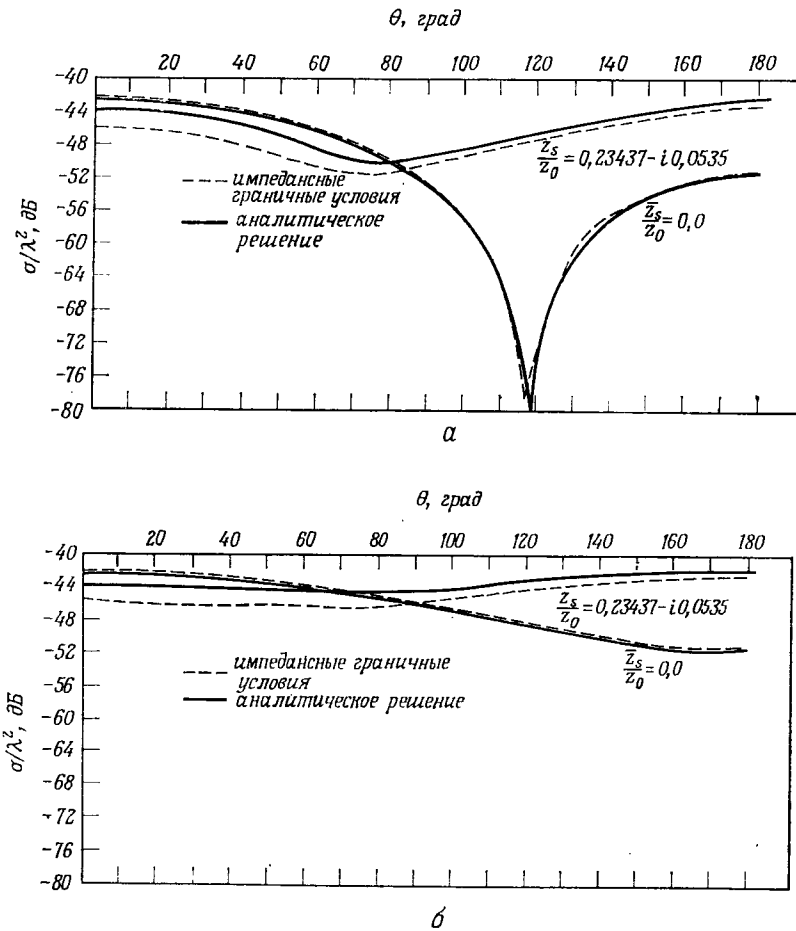
Фиг. 4.24. Средняя ошибка, даваемая модифицированным интегральным уравнением, в функции весового параметра [82].

ошибка в децибелах для трех значений ka в функции параметра α . Видно, что значение α , близкое к 0,2, дает минимальную ошибку в выбранном диапазоне значений ka .

Были предложены и другие способы подавления эффектов внутренних резонансов при расчете полей во внешней области. В акустических задачах использовался метод введения дополнительных внутренних узлов. Как показал Шенк [65] при расчете сечения рассеяния акустической волны на твердой сфере, регуляризация получающейся переопределенной системы уравнений для давления на поверхности сферы приводит к точным значениям рассеянных полей на всех частотах, в том числе и на собственных частотах внутренней области.

3. *Импедансные граничные условия.* Использование импедансных граничных условий и соответствующие ограничения обсуждались выше. Поскольку такой учет конечной проводимости яв-

ляется приближенным, имеет смысл сравнить некоторые результаты, полученные с использованием импедансных граничных условий, с точным решением. Аналитическое решение для



Фиг. 4.25. Двухпозиционное сечение рассеяния на сфере ($ka = 0,25$) при импедансных граничных условиях [75].
а — диаграмма в E -плоскости; б — диаграмма в H -плоскости.

трехмерных тел, отличных от сферы, связано с трудностями, поэтому мы проведем сравнение только для сферы.

Как видно из фиг. 4.25, где представлены кривые двухпозиционного сечения рассеяния на сфере (при $ka = 0,25$) в E - и H -плоскостях, вычисленные с импедансными граничными условия-

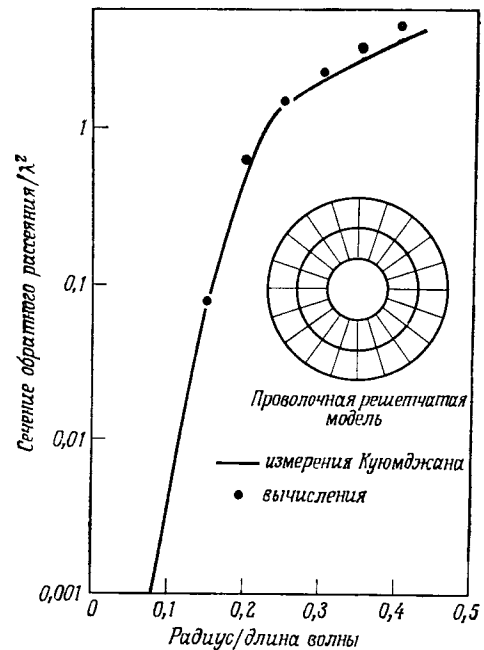
ми (для сравнения приведены также результаты для случая идеальной проводимости), отличие от точного решения лежит в пределах 1 дБ. Как видно из сопоставления с кривыми для идеальной проводимости, в рассмотренном случае поверхностный импеданс существенно отличен от нуля. Поэтому сопоставление результатов с аналитическим решением свидетельствует о правильности расчета с простыми импедансными граничными условиями Леонтовича в случае сферы. Отметим, что для сферы поправка к граничным условиям на кривизну, не требуется, поскольку главные радиусы кривизны в этом случае одинаковы. Более строгую проверку этого приближения можно было бы провести для тел несферической геометрии; Митцнер [14] рассмотрел несколько примеров для цилиндра. Полезно было бы также исследовать задачу с импедансными граничными условиями при различных значениях поверхностного импеданса и радиуса сферы, чтобы более четко выяснить ограничения на точность расчета в случае сферической геометрии.

Решетчатые модели

Впервые решетчатая модель трехмерного тела, по-видимому, была использована Ричмондом [27], который рассматривал модели как для плоской, так и для искривленной поверхностей. Результаты расчета сечения рассеяния на решетчатых моделях круглого диска и сферы представлены на фиг. 4.26 и 4.27, где они сравниваются с экспериментальными результатами и с аналитическим решением. Правомочность использования решетчатых моделей для этих тел ясна из графиков. Вычисления проводились методом базисных функций подобластей с фиксированными узлами тока, причем максимальное число ячеек для моделей диска и сферы составляло соответственно 300 и 1010. В обоих случаях для уменьшения времени счета учитывалась осевая симметрия модели.

Проводилось также экспериментальное исследование решетчатых моделей; некоторые результаты приведены на последующих фигурах. На фиг. 4.28 сравниваются результаты измерения и вычисления сечения обратного рассеяния при нормальном падении на квадратные решетчатые отражатели. Экспериментальные данные, полученные Гансом [83], показывают различие между сечением обратного рассеяния сплошной пластины и решетчатой модели такого же периметра и толщины с M ячейками на каждой стороне. Аналогичное сопоставление произведено для результатов численного счета, причем сплошная пластина моделировалась решеткой 6×6 . (Различие между рассчитанными сечениями обратного рассеяния для решеток 5×5 и 6×6

составляло менее 0,2 дБ для приведенных на фигуре значений периметра.) Диаметр проводников, использовавшийся в расчетах, был такой же, как в экспериментальной модели. Экспериментальные данные, приведенные на фиг. 4.28, свидетельствуют о том, что для решетчатой модели с размером ячейки, меньшим

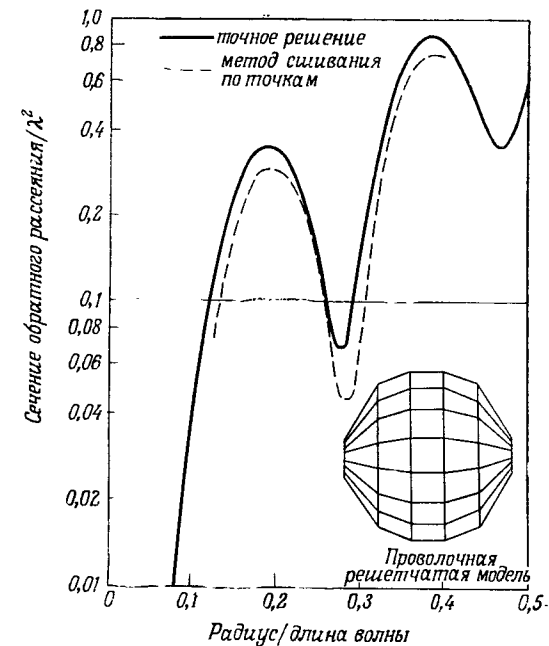


Фиг. 4.26. Сечение обратного рассеяния на дискообразной проволочной решетке при аксиальном падении волны [27].

$\lambda/8$, при нормальном падении волны сечение обратного рассеяния отличается от соответствующего значения для сплошной пластины не более чем на 1 дБ. Кроме того, хорошее совпадение результатов эксперимента и расчета указывает на точность численного метода.

На фиг. 4.29а сравниваются численные и экспериментальные результаты определения сечения обратного рассеяния решетчатой модели со щелью [84]. Результаты вычислений хорошо согласуются с экспериментом даже в той области, где сечение обратного рассеяния спадает больше, чем на 20 дБ. Однако, как видно из фиг. 4.29б, где приведены результаты экспериментальных измерений сечения обратного рассеяния для решетчатой структуры со щелью и двух пластин разной толщины с такой же

щелью, частота, на которой отражение минимально, для решетчатой модели ниже, чем для сплошных пластин. Такой часто наблюдаемый сдвиг по частоте между вычисленным и измеренным положением резонансного рассеяния, по-видимому, связан с отличием от нуля эффективного импеданса, обусловленным дискретизацией в выбранном методе решения.

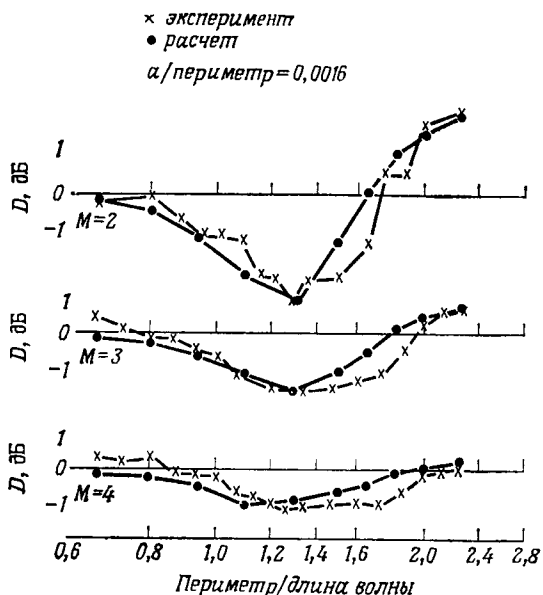


Фиг. 4.27. Сечение обратного рассеяния на сфере из проволочной решетки [27].

На фиг. 4.30 двухпозиционное сечение рассеяния на решетчатой модели конус-сферы с углом при вершине 30° при $ka=1,0$ сравнивается с соответствующими данными, полученными для структуры со сплошной поверхностью методом ИУМП. Кривые различаются не более чем на 2 дБ. Наибольшее различие наблюдается в значениях углов, отвечающих локальным минимумам. Такой сдвиг по углу, по-видимому, связан с указанным выше сдвигом по частоте, поскольку угол минимального сечения рассеяния изменяется с частотой.

На фиг. 4.31а сравниваются результаты измерения и расчета сечения рассеяния для решетчатой модели легкого наблюдательного военного вертолета США типа ОН-6А. Результаты

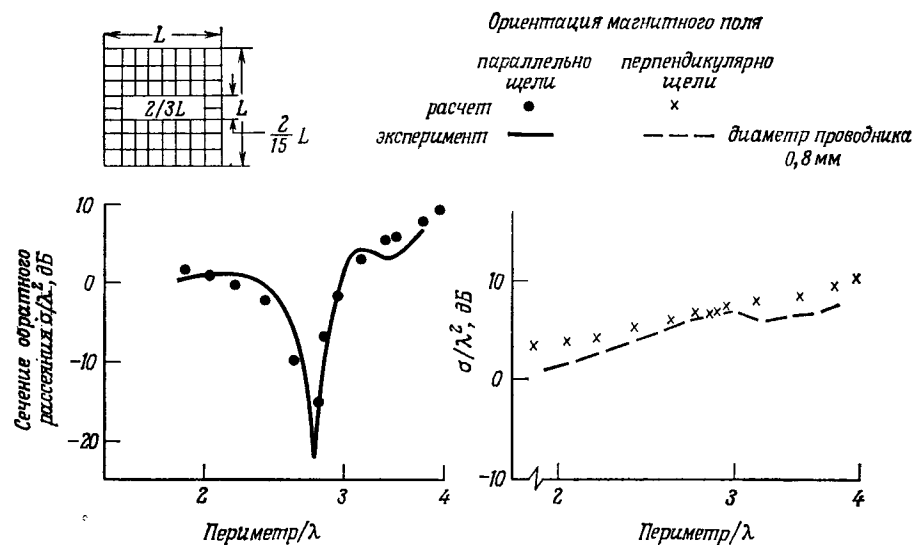
были получены в связи с исследованием возможности численного расчета характеристик антенн, расположенных на этом вертолете. На фиг. 4.316 для этих антенн приведен пример сравнения экспериментальной диаграммы, полученной на модели в $1/5$ натуральной величины, и результатов численного расчета [85]. Напомним, что между «строгим» численным расчетом антенны



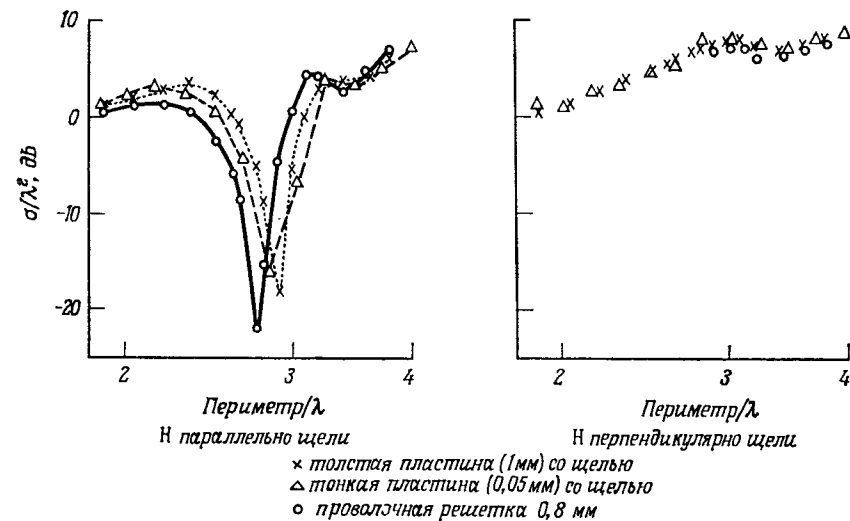
Фиг. 4.28. Разность D сечений обратного рассеяния при нормальном падении волны на решетку из $M \times M$ проводников и на сплошную пластину в функции частоты (расчетная модель сплошной пластины соответствует значению $M = 6$).

и рассеивателя нет другой существенной разницы, кроме вида источника. В обоих случаях используется одна и та же матрица проводимостей.

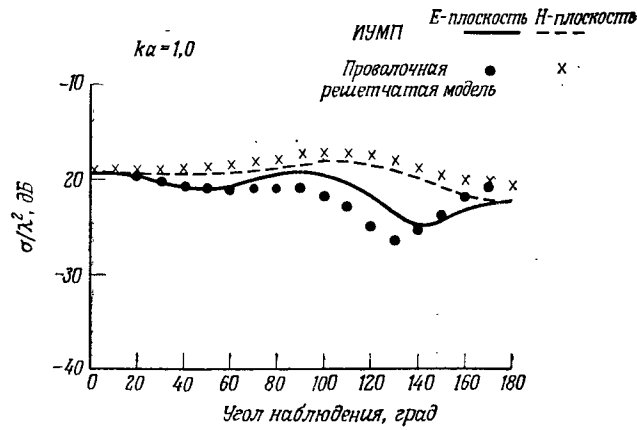
В заключение этого раздела, посвященного решетчатому моделированию поверхности сплошных тел, уместно сопоставить эффективность такого подхода и метода ИУМП для трехмерных поверхностей. Вообще говоря, наш опыт говорит о том, что для решетчатой модели обычно требуется большее число узлов тока, чем для тела со сплошной поверхностью. Например, для получения достаточно точных результатов с помощью ИУМП в большинстве случаев применима сетка со стороной ячейки порядка $0,2 \lambda$. Метод же решетчатого моделирования для достижения той



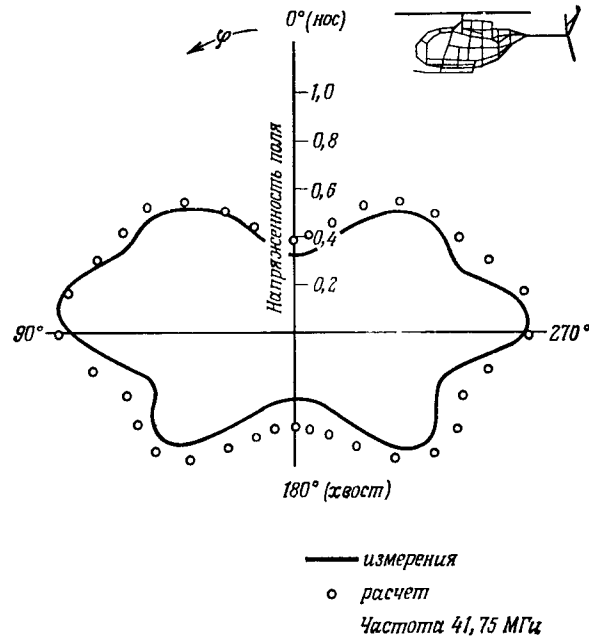
Фиг. 4.29а. Экспериментальные и расчетные значения сечения обратного рассеяния при нормальном падении на решетку со щелью.



Фиг. 4.29б. Экспериментальные значения сечения обратного рассеяния для проволочной решетки и толстой и тонкой пластины со щелью.

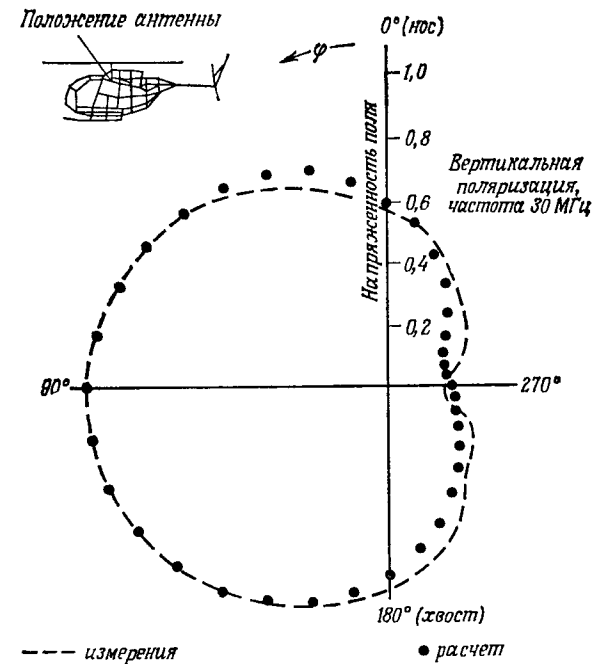


Фиг. 4.30. Двухпозиционное сечение рассеяния на конус-сфере при аксиальном падении волны со стороны вершины конуса, вычисленное с помощью решетчатой модели на основе ИУМП (угол при вершине конуса 30°).



Фиг. 4.31а. Сравнение экспериментальных и расчетных диаграмм двухпозиционного рассеяния на решетчатой модели вертолета ОН-6А.

же точности требует, чтобы расстояния между проводами были от $0,05 \lambda$ до $0,1 \lambda$. Поэтому для достижения точности, сравнимой с получаемой при решении ИУМП для сплошной поверхности, число узлов тока должно быть больше в $\frac{1}{2} (0,2/0,1)^2 - \frac{1}{2} (0,2/0,5)^2$ раз.

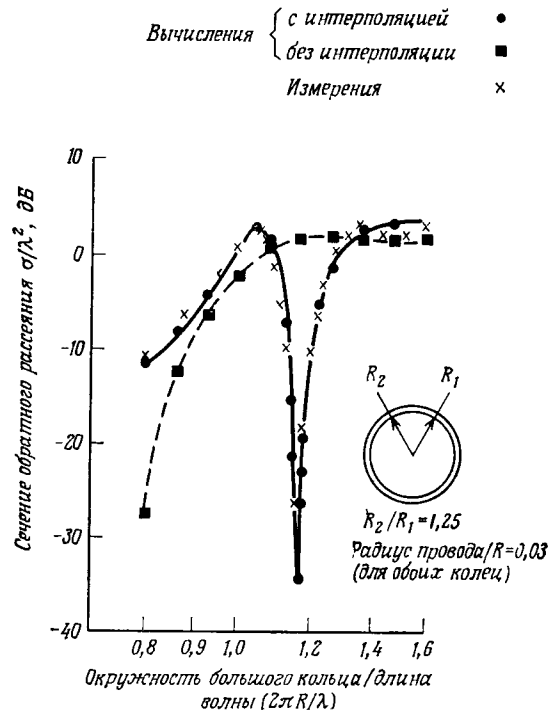


Фиг. 4.31б. Сравнение измеренной диаграммы направленности антенны на вертолете типа ОН-6А с результатами численного расчета с помощью ИУЭП для тонких проводников.

Это, по-видимому, обусловлено двумя основными различиями между обоими видами интегральных уравнений. Во-первых, ядро ИУЭП для тонких проводников включает вторые производные функций Грина для свободного пространства, тогда как ядро ИУМП содержит лишь первые производные. Поэтому ИУЭП более чувствительно к распределению токов и, следовательно, требует более часто расположенных узловых точек для адекватного его описания. Во-вторых, собственный член получается в ИУМП аналитически путем предельного перехода (стр. 189). Кроме того, решетчатое моделирование само по себе является приближенным методом для сплошных поверхностей.

Структуры из тонких проводников

В этом разделе мы рассмотрим рассеяние на структурах, состоящих из тонких проводников. Приведенные ниже результаты получены решением ИУЭП методом базисных функций подоб-

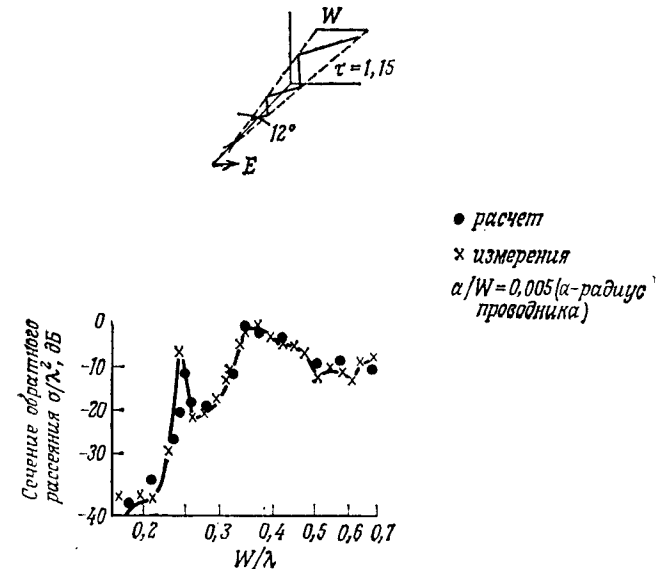


Фиг. 4.32. Частотная зависимость сечения обратного рассеяния на двух коаксиальных компланарных кольцах при аксиальном падении волны, показывающая эффективность синусоидальной интерполяции тока.

ластей. В математической модели использовалось ядро для тонкого проводника.

На фиг. 4.32 приведено сечение обратного рассеяния двух компланарных концентрических колец в функции периметра внешнего кольца, выраженного в длинах волн ka_1 , при аксиальном падении волны. Одна из расчетных кривых получена при учете в разложении тока лишь постоянной составляющей, а другая — с использованием синусоидальной интерполяции тока; в обоих случаях кольцо делится на восемь сегментов. Экспериментальные данные, отмеченные крестиками, получены в работе

[83]. Приведенные данные отчетливо показывают преимущество синусоидальной интерполяции тока перед заменой его постоянным значением. При учете лишь постоянной составляющей тока также можно было бы обнаружить резонансный провал в сечении обратного рассеяния, но только за счет увеличения числа сегментов, а следовательно, времени счета.



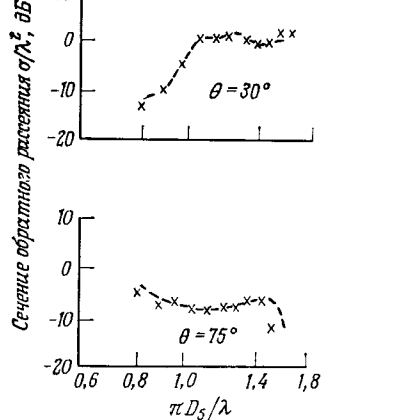
Фиг. 4.33. Сравнение экспериментальной и расчетной частотных зависимостей сечения обратного рассеяния плоской логопериодической зигзагообразной решетки при аксиальном падении волны ($\tau = 1,15$).

На фиг. 4.33 приведена зависимость сечения обратного рассеяния от частоты при аксиальном падении волны на логопериодическую зигзагообразную решетку с углом раствора конуса 12° и параметром $\tau = 1,15$. Видно, что результаты вычислений совпадают с данными эксперимента; главное различие заключается в небольшом сдвиге по частоте между экспериментальным и расчетным положением резонансных пиков.

На фиг. 4.34 показана зависимость сечения обратного рассеяния от частоты при падении волны под углом 30 и 75° к оси пятиэлементной логопериодической решетки из коаксиальных круглых колец ($\alpha = 8^\circ$, $\tau = 1,2$). Различие между результатами вычислений и эксперимента как для приведенных кривых, так и для кривых, отвечающих другим углам падения, обычно лежит в пределах ± 2 дБ.

Приведенные выше результаты по рассеянию на структурах из тонких проводников иллюстрируют частотную зависимость сечения обратного рассеяния.

На фиг. 4.35а—4.35д представлены кривые сечения обратного рассеяния в функции угла падения для различных рассеивателей из тонких проводников. На каждой фигуре дано схематическое изображение рассеивателя с основными размерами, отнесенными к длине волны падающего излучения. Результаты экспериментального измерения сечения обратного рассеяния для структур с одной плоскостью симметрии приводятся для углов от 0 до 180°.



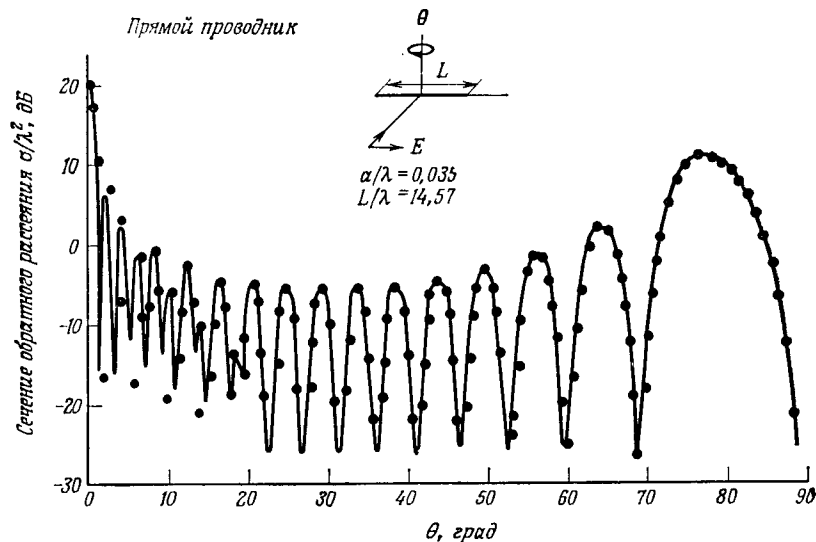
Фиг. 4.34. Сравнение экспериментальной и расчетной частотных зависимостей сечения обратного рассеяния на логопериодической решетке (из пяти коаксиальных колец при двух углах падения волны).

рые расхождения обусловлены дефектами изготовления моделей, так как имеют место существенные различия в результатах измерений при некоторых углах, для которых вследствие симметрии должны получаться одинаковые сечения рассеяния. Возможной причиной расхождений являются экспериментальные погрешности, связанные с неточностями установки моделей и влиянием опорных элементов, как это имеет место для рассеивателя на фиг. 4.35д, для которого измеренные значения се-

Для структур, имеющих две плоскости симметрии, приводятся средние значения сечения обратного рассеяния в функции угла; вертикальными отрезками показан максимальный разброс результатов четырех измерений. Результаты численных расчетов показаны черными кружками.

Согласие результатов измерений и расчетов не всегда одинаково. Для прямого проводника (фиг. 4.35а) имеет место практически совпадение результатов, а для таких структур, как показанная на фиг. 4.35д, — расхождение порядка ± 3 дБ, если отвлечься от смещения положений максимумов и минимумов. Некото-

чения обратного рассеяния для волн двух поляризаций различаются на 2,5 дБ, тогда как вследствие симметрии они должны быть одинаковыми.



Фиг. 4.35а. Сравнение экспериментальных (среднее четырех измерений по и против часовой стрелки; вертикальными отрезками показан разброс значений) и расчетных (показанных точками) значений сечения обратного рассеяния в функции угла падения.

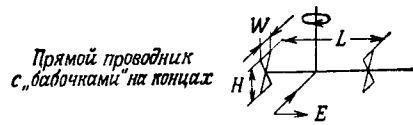
Приведенные схемы структур соответствуют углу падения $\theta = 0^\circ$; a — радиус проводника.

2. ПРИМЕРЫ РАСЧЕТОВ ВО ВРЕМЕННОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

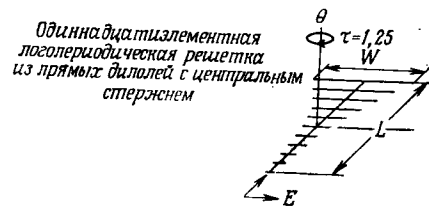
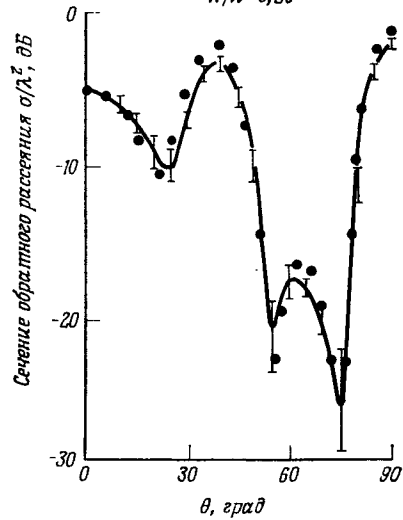
Как и в случае расчетов в частотном представлении, во временном представлении сначала мы рассмотрим трехмерные рассеиватели со сплошной поверхностью, а затем более частный случай структур из тонких проводников.

Рассеиватели со сплошной поверхностью

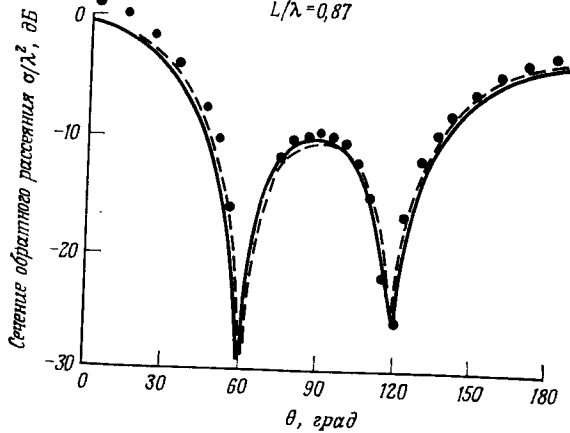
Первым трехмерным телом, для которого было получено решение задачи рассеяния во временном представлении, была сфера. Беннет и Уикс [63] получили зависящее от времени ИУМП для наведенных поверхностных токов и нашли численное его решение для сферы, а также для цилиндра со сферическими торцами. Предшествовавшие этой работе исследования рассеяния на сфере, а также на других телах простейшей формы были выполнены Кенно и Косгрифом [55], Кенно и Моффатом



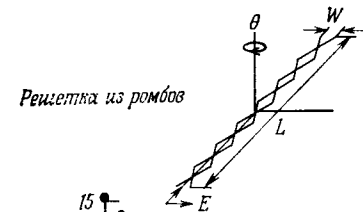
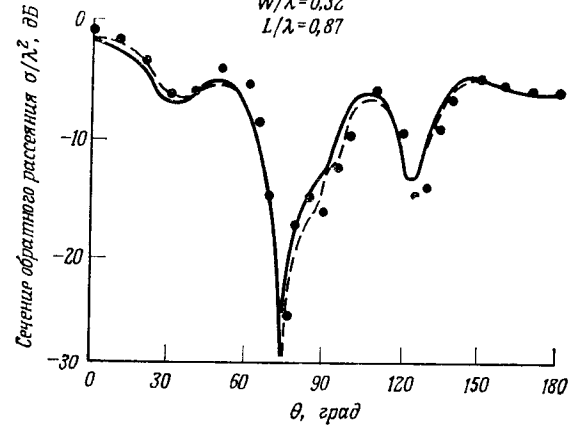
$$\begin{aligned} \alpha/\lambda &= 0,0035 \\ L/\lambda &= 2,09 \\ H/\lambda &= 0,52 \\ W/\lambda &= 0,25 \end{aligned}$$



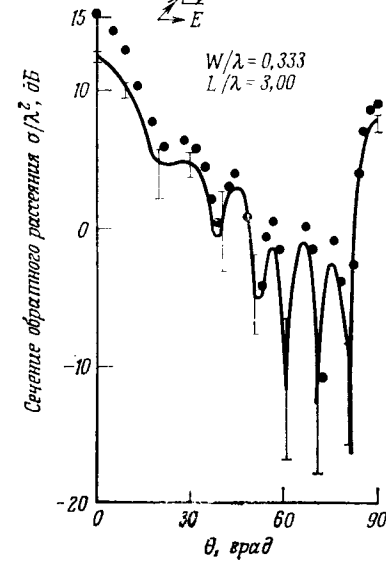
$$\begin{aligned} \alpha/\lambda &= 0,0021 \\ W/\lambda &= 0,64 \\ L/\lambda &= 0,87 \end{aligned}$$



$$\begin{aligned} \alpha/\lambda &= 0,0021 \\ W/\lambda &= 0,32 \\ L/\lambda &= 0,87 \end{aligned}$$



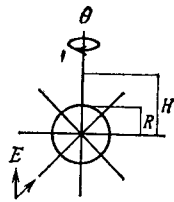
$$\begin{aligned} W/\lambda &= 0,333 \\ L/\lambda &= 3,00 \end{aligned}$$



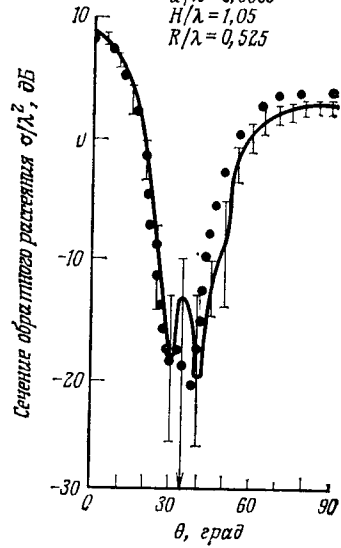
Фиг. 4.35б. То же, что на фиг. 4.35а, для других типов рассеивателей.

Фиг. 4.35в. То же, что на фиг. 4.35а, для других типов рассеивателей.

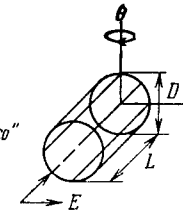
Круглое кольцо со спицами



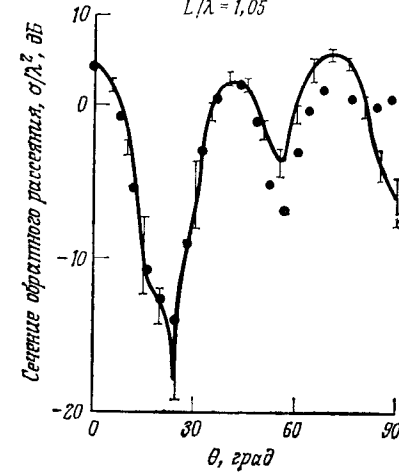
$$\begin{aligned} \alpha/\lambda &= 0,0035 \\ H/\lambda &= 1,05 \\ R/\lambda &= 0,525 \end{aligned}$$



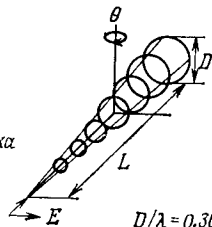
„Белые колеса“



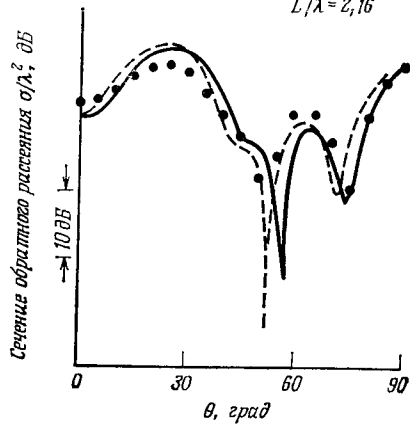
$$\begin{aligned} \alpha/\lambda &= 0,0035 \\ D/\lambda &= 1,05 \\ L/\lambda &= 1,05 \end{aligned}$$



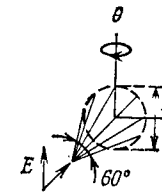
Семилемментная решетка из колец, скрепленных стержнями



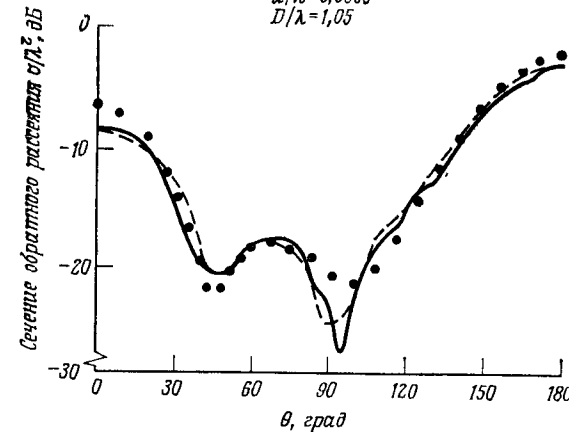
$$\begin{aligned} D/\lambda &= 0,36 \\ L/\lambda &= 2,16 \end{aligned}$$



„Хвосточка“



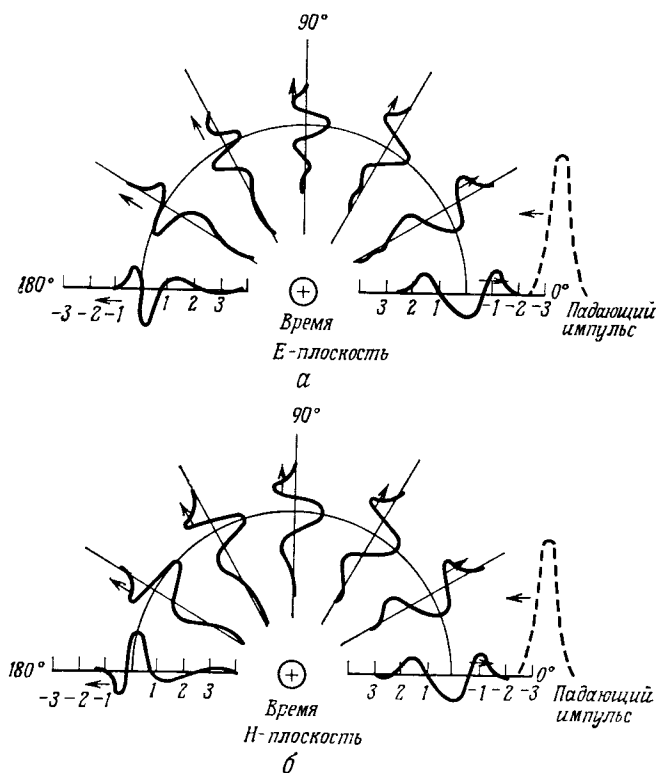
$$\begin{aligned} \alpha/\lambda &= 0,0035 \\ D/\lambda &= 1,05 \end{aligned}$$



Фиг. 4.35г. То же, что на фиг. 4.35а, для других типов рассеивателей.

Фиг. 4.35д. То же, что на фиг. 4.35а, для других типов рассеивателей.

[56, 57] в приближении физической оптики. Рейнштейн [58] рассмотрел рассеяние на сфере с помощью фурье-преобразования рядов Ми. Эти подходы, несмотря на их полезность и присущие им определенные преимущества по сравнению с методом интегрального уравнения, в дальнейшем рассматриваться

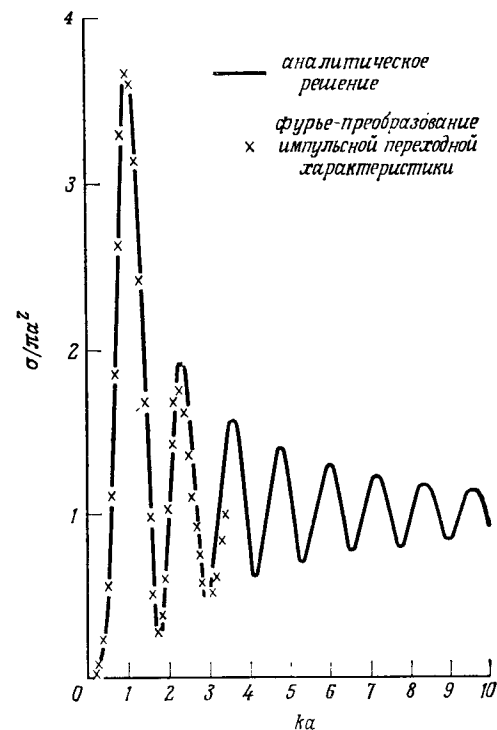


Фиг. 4.36. Двухпозиционная переходная импульсная характеристика сферы в E - и H -плоскостях [62].

не будут, поскольку основное внимание в этой главе уделено методу интегрального уравнения.

На фиг. 4.36 приведена переходная импульсная характеристика сферы в E - и H -плоскостях, вычисленная Беннетом, который составил программу счета на ЭВМ для аксиального падения волны на тело, обладающее двумя перпендикулярными плоскостями симметрии. Приведенные результаты были получены с использованием неравномерных интервалов по углу ϕ для удовлетворения установленному выше критерию на рассеяние узлов в пространстве и времени; при этом общее число

ячеек на поверхности сферы было равно 48. По установившейся практике падающий импульс гауссовой формы и отраженный импульс показаны в одном масштабе со сферой. Внешняя окружность показывает то место в пространстве, которого в данный момент достиг бы центр импульса, если бы он отразился от

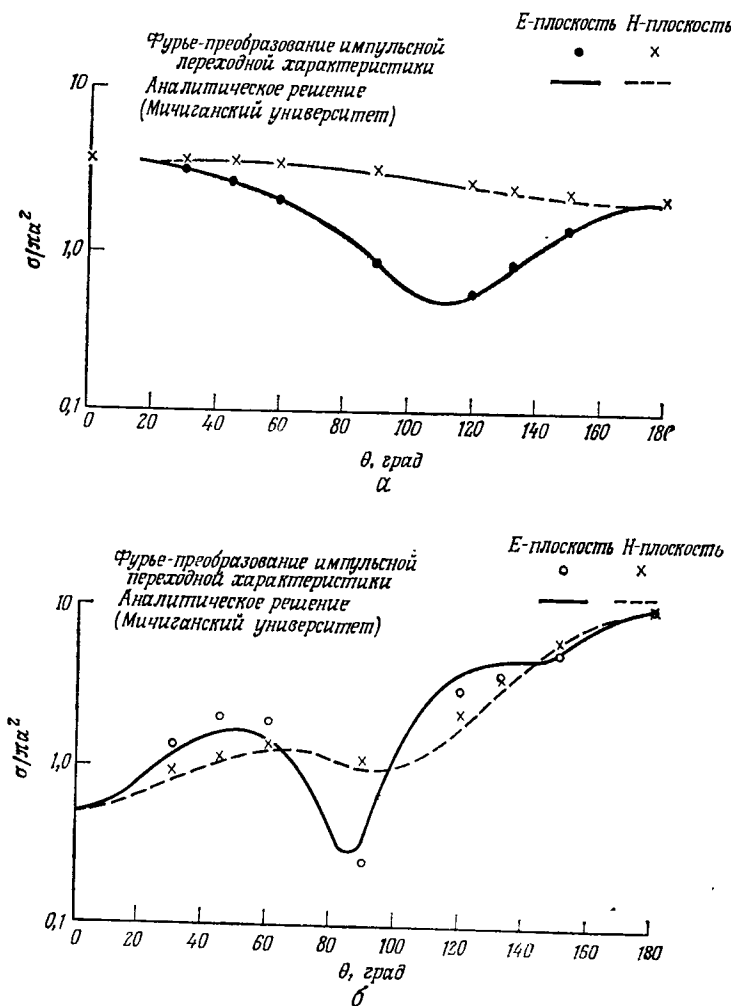


Фиг. 4.37. Сравнение результатов расчетов в частотном и временном представлениях частотной зависимости сечения обратного рассеяния на проводящей сфере [62].

центра сферы, обозначенного крестиком. Стрелки на падающем и отраженном импульсе расположены с той стороны, где амплитуда импульса положительна. В отраженном назад импульсе хорошо видна ползущая волна, представленная вторым положительным пиком. За ведущим положительным пиком следует отрицательный выброс, который можно интерпретировать в приближении физической оптики.

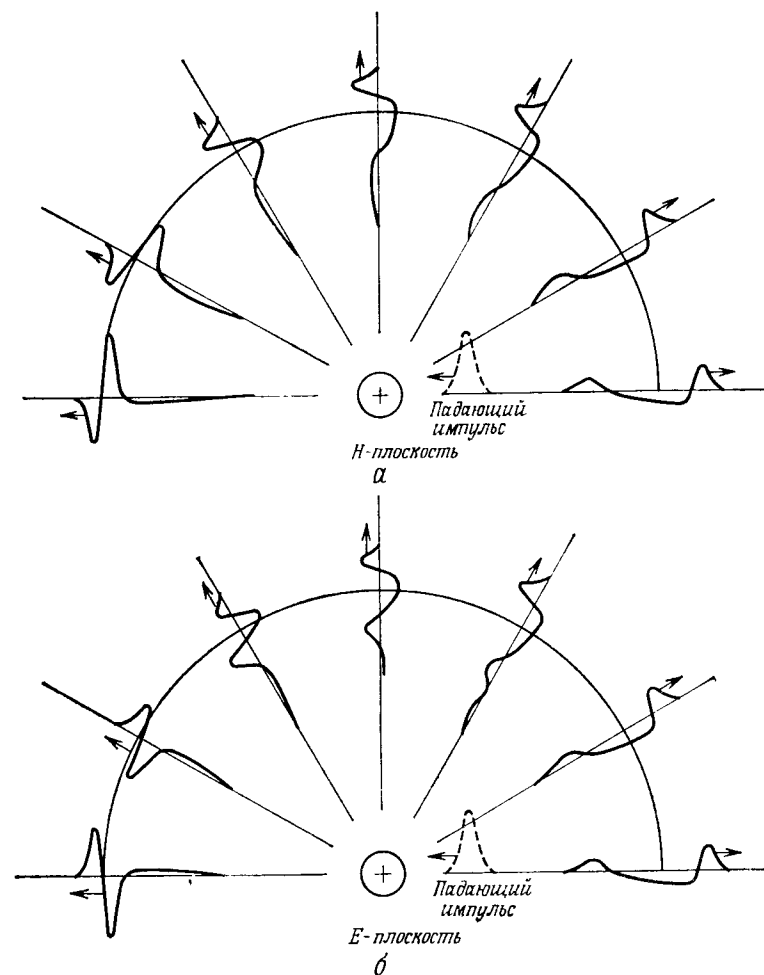
Фурье-преобразование (по времени) рассеянных импульсов, изображенных на фиг. 4.36, позволяет найти соответствующие характеристики в частотном представлении. Полученная таким способом кривая зависимости сечения обратного рассеяния от ka

приведена на фиг. 4.37. На фиг. 4.38 приведены кривые зависимости двухпозиционного сечения рассеяния от угла для двух



значений $ka=1,1$ и $ka=2,9$. В обоих случаях результаты, полученные решением интегрального уравнения во временном представлении, сопоставлены с результатами расчетов с помощью рядов Ми. Видно хорошее согласие данных как для двухпозиционного сечения рассеяния, так и для сечения обратного рассе-

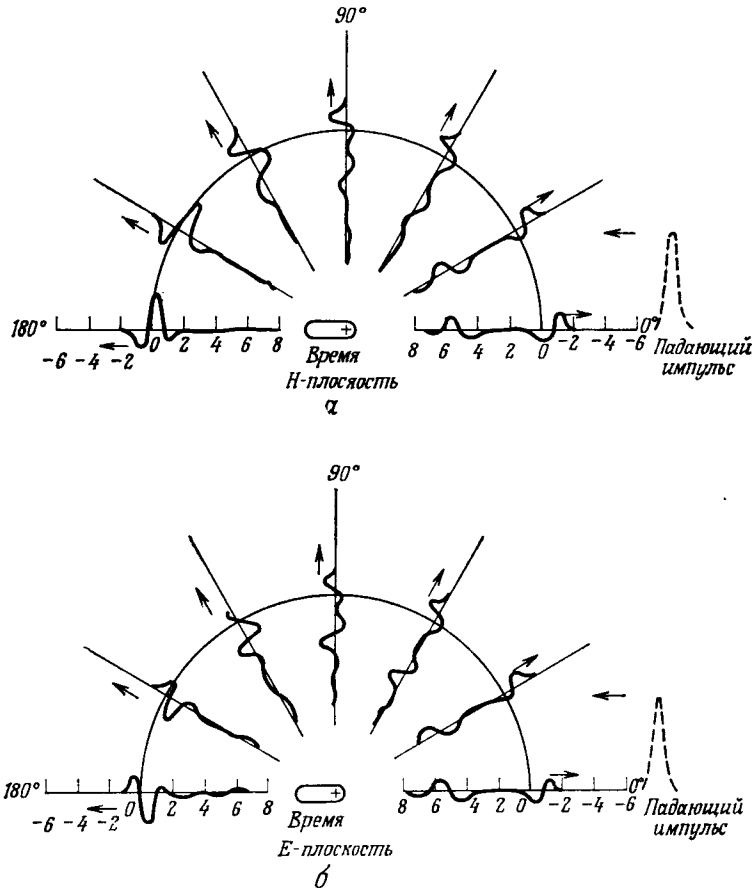
яния для значений ka вплоть до π ; для больших значений ka результаты решения во временном представлении становятся все



Фиг. 4.39. Приближенная двухпозиционная переходная импульсная характеристика сферы [62].

менее точными. Трудность извлечения полезной информации для высоких частот из решения во временном представлении не является неожиданной; она обусловлена как видом частотного спектра падающего импульса, так и расстоянием между узлами на поверхности сферы ΔR . Последняя причина ограничивает верхнюю частоту f , для которой еще справедливы результаты,

значением $f \lesssim c/4\Delta R$, т. е. для получения удовлетворительной точности на длине волны требуется порядка четырех узлов тока. Соотношение между шириной падающего импульса W_p и раз-



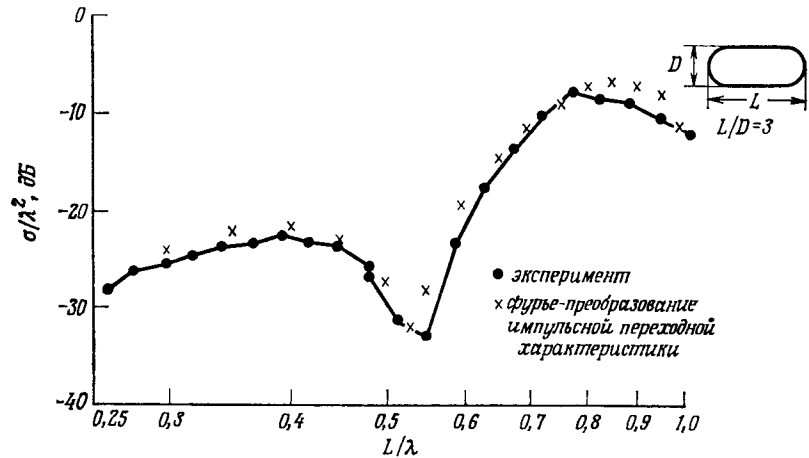
Фиг. 4.40. Двухпозиционная импульсная переходная характеристика цилиндра с полусферическими основаниями в E - и H -плоскостях при аксиальном падении волны [62].

мером рассеивателя W_s также влияет на значение максимальной частоты, до которой результаты остаются достаточно точными, поскольку спектр частот гауссового импульса спадает как $\exp[-a^2\omega^2]$, где a порядка $W_p/4c$. Если $W_p/W_s = R$, то спектр частот падающего импульса спадает как

$$\exp[-\omega^2 R^2/16c^2].$$

Таким образом, чем шире импульс, тем резче спад на высоких частотах. Поэтому предельная частота, до которой сохраняется точность вычислений, зависит не только от ΔR , но также и от R , поскольку точность числовых операций в принципе ограничена.

Для иллюстрации влияния параметра R на форму рассеянного импульса на фиг. 4.39 показаны рассеянные на сфере импульсы в E - и H -плоскости при значении R , в два раза большем,

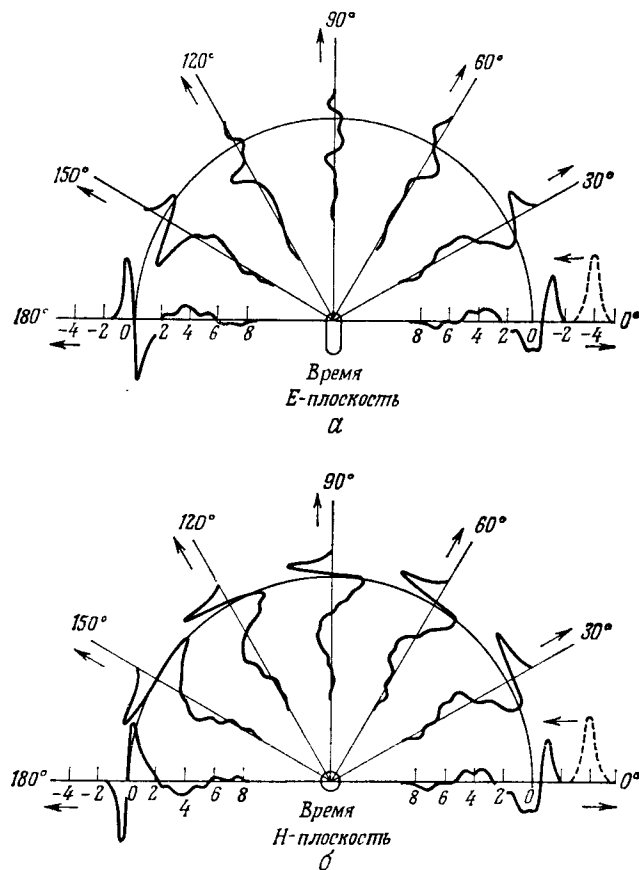


Фиг. 4.41. Сравнение экспериментальной и расчетной частотной зависимости сечения обратного рассеяния на цилиндре с полусферическими основаниями при аксиальном падении волны.

чем на фиг. 4.36. Сравнение импульсов, изображенных на фиг. 4.36 и 4.39, показывает, что в последнем случае амплитуда рассеянного импульса и его ширина, отнесенные к соответствующим параметрам падающего импульса, больше.

На фиг. 4.40 показана диаграмма двухпозиционного рассеяния гауссового импульса при аксиальном падении на цилиндр со сферическими торцами, также полученная Беннетом. Отметим, что отношение ширины импульса к диаметру сферической части структуры такое же, как на фиг. 4.39, а длина цилиндрической части в два раза больше диаметра сферы. Сравнение фиг. 4.39 и 4.40 показывает, что передний фронт импульса, рассеянного на цилиндре со сферическими торцами (фиг. 4.40), в значительной степени совпадает с передним фронтом импульса, рассеянного на сфере (фиг. 4.39). Удлинение рассеянного импульса в случае цилиндра, несомненно, обусловлено его большими размерами. Особый интерес представляет импульс, рассеянный в обратном направлении, вторая часть которого начинается

с отрицательного импульса, обусловленного отражением от линии сопряжения, за которым следует положительный пик, представляющий вклад ползущей волны.

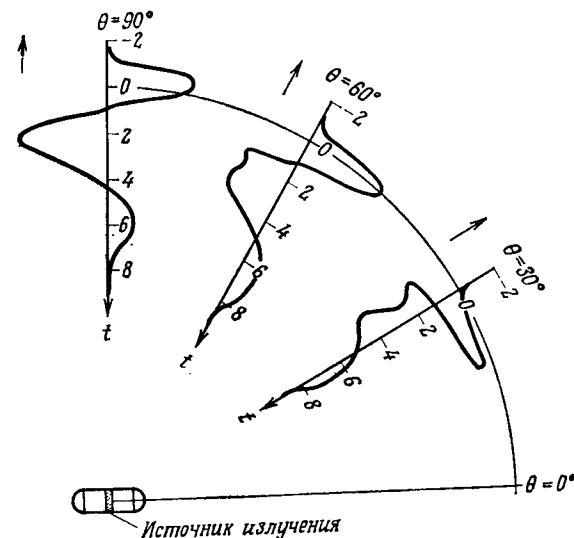


Фиг. 4.42. Двухпозиционная импульсная переходная характеристика цилиндра с полусферическими основаниями в E - и H -плоскостях при падении волны перпендикулярно оси.

На фиг. 4.41 приведена кривая частотной зависимости сечения обратного рассеяния на цилиндре со сферическими торцами; показаны также экспериментальные точки, полученные авторами. Результаты решения во временном представлении находятся в хорошем согласии с результатами эксперимента.

Продолжая рассмотрение цилиндра со сферическими торцами, перейдем к фиг. 4.42, на которой изображены диаграммы

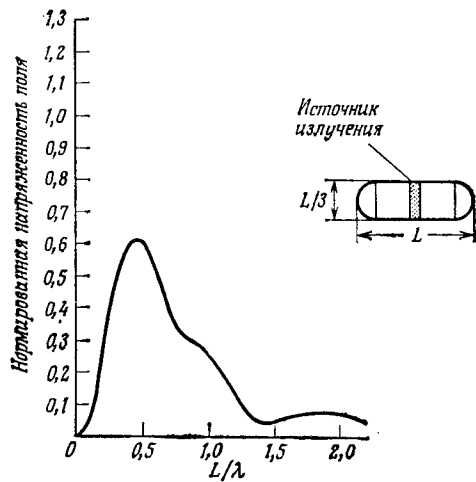
двухпозиционного рассеяния в E - и H -плоскостях при падении волны перпендикулярно оси цилиндра с поляризацией электрического поля вдоль оси. Эти результаты были получены в начале 1969 г. с помощью программы Беннета, модифицированной для структур, обладающих плоскостью симметрии. Сравнение фиг. 4.40 и фиг. 4.42 подтверждает, что зависимость рассеянного импульса от времени удовлетворяет соотношению взаимности, являющемуся следствием уравнений Максвелла.



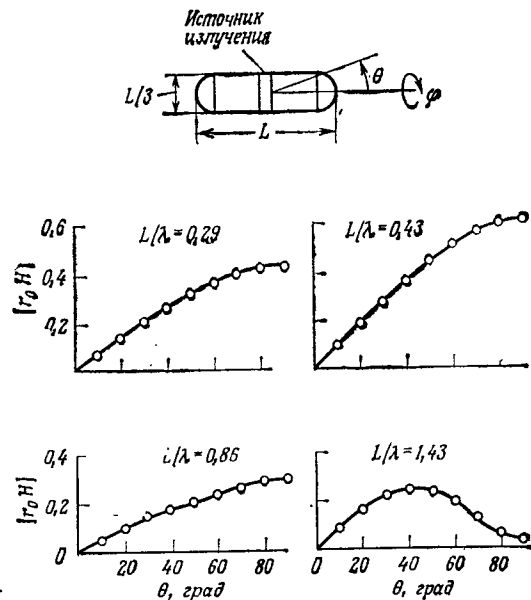
Фиг. 4.43. Гауссова импульсная переходная характеристика цилиндрической антенны с полусферическими основаниями.

Наконец, на фиг. 4.43 и 4.44 представлены диаграммы направленности излучения цилиндра со сферическими торцами, возбуждаемого гауссовым импульсом азимутального магнитного поля в центральном сечении цилиндра. Фурье-преобразование излученного поля (фиг. 4.43) позволяет получить спектральную характеристику излучения, приведенную на фиг. 4.44. Эта характеристика сходна с известной характеристикой линейного диполя.

Перейдем к рассмотрению более интересной для анализа структуры — конуса-сферы. На фиг. 4.45 и 4.46 приведены двухпозиционные сечения рассеяния в E - и H -плоскостях при аксиальном падении волны со стороны конуса и со стороны сферического основания, полученные с помощью составленной авторами программы расчета на ЭВМ во временном представлении. Видно, что обратное рассеяние от вершины конуса много меньше,

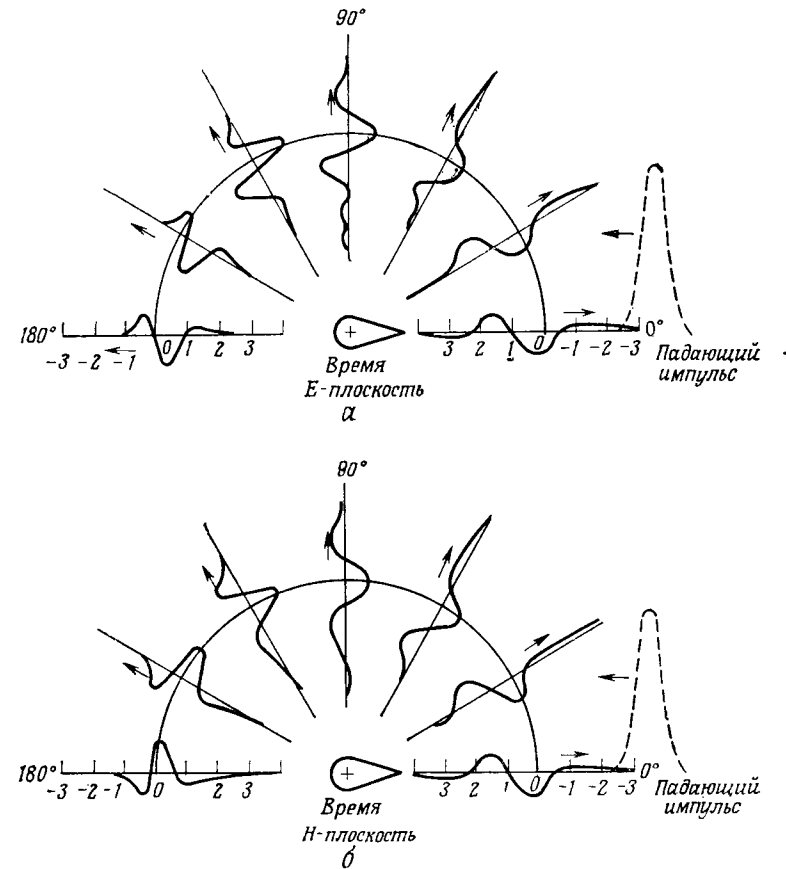


Фиг. 4.44а. Частотная характеристика излучения перпендикулярно оси цилиндрической антенны, вычисленная по гауссовой переходной импульсной характеристике.



Фиг. 4.44б. Диаграмма направленности цилиндрической антенны, рассчитанная по гауссовой импульсной переходной характеристике.

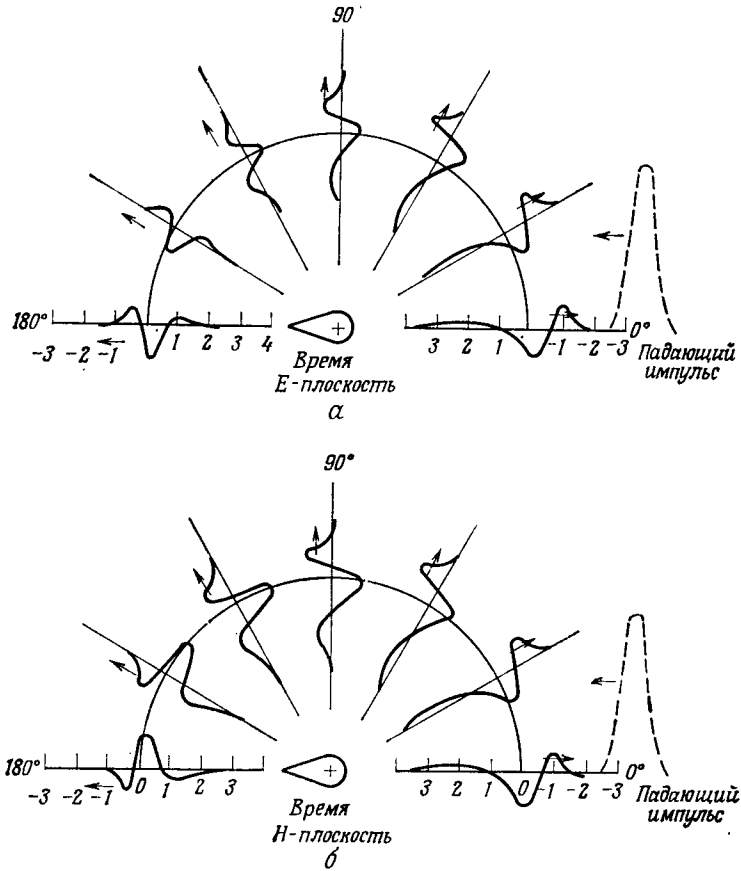
чем от сферического основания, но в обоих случаях вклад области сопряжения существен. Вклад ползущей волны немного больше в случае падения волны со стороны вершины конуса.



Фиг. 4.45. Приближенная двухпозиционная импульсная переходная характеристика конуса-сферы с углом при вершине 30° в E - и H -плоскостях при падении импульса со стороны вершины конуса.

Отметим, что для этих двух углов падения результаты удовлетворяют соотношению взаимности; выполнение этого условия недостаточно для гарантии правильности решения, но является необходимым. Фурье-преобразование рассеянного назад поля для случая падения волны со стороны вершины конуса дает результаты, представленные на фиг. 4.47, где видно хорошее согласие с экспериментом. На фиг. 4.48 производится сравнение значений двухпозиционного сечения рассеяния при падении

волны со стороны вершины конуса, полученных из решения во временном представлении, с соответствующими результатами решения в частотном представлении; здесь также достигнуто хорошее согласие.

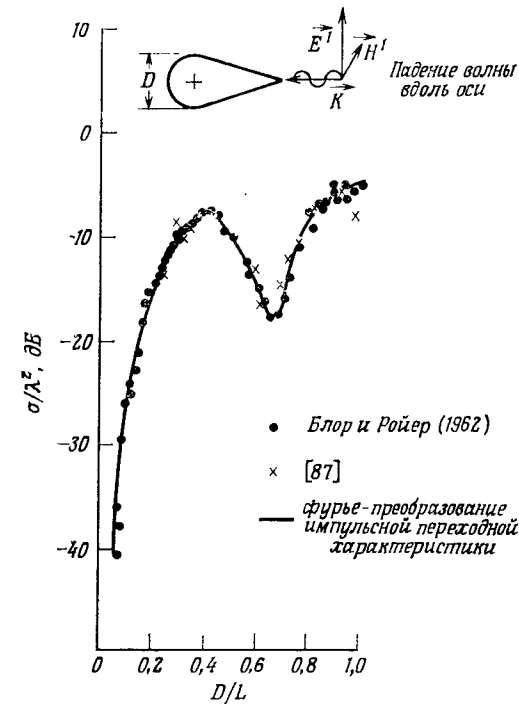


Фиг. 4.46. Приближенная двухпозиционная импульсная переходная характеристика конуса-сферы с углом при вершине конуса 30° в E - и H -плоскостях при падении импульса со стороны сферического основания.

Результаты расчета рассеяния волны, падающей перпендикулярно оси конуса-сферы с электрическим полем вдоль оси, приведены на фиг. 4.49. Сопоставление их с данными, приведенными на фиг. 4.45 и 4.46, позволяет провести дополнительную проверку выполнения теоремы взаимности.

Помимо зависимости рассеянного поля от времени, получаемой в результате этого анализа, представляет интерес также ход

изменения наведенного тока по мере прохождения падающего импульса вдоль рассеивающего тела. На фиг. 4.50 представлен продольный поверхностный ток в H -плоскости в различные моменты времени для случая падения волны со стороны вершины конуса. Для каждой кривой зависимости тока от длины дуги

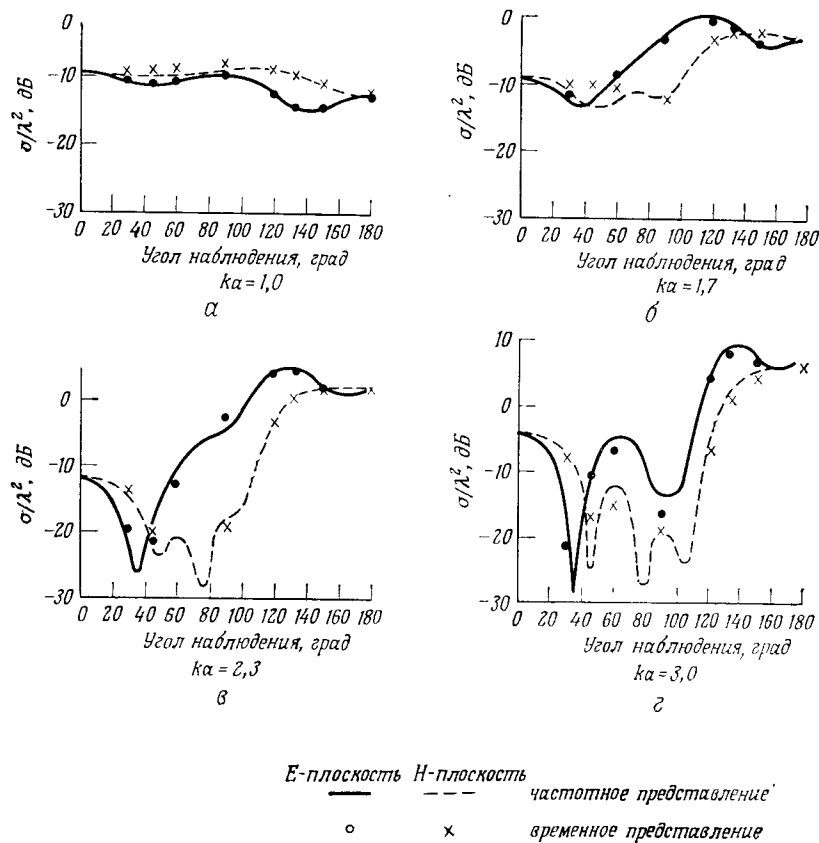


Фиг. 4.47. Сравнение экспериментальной и расчетной частотных зависимостей сечения обратного рассеяния на конусе-сфере с углом при вершине конуса 30° при падении волны со стороны вершины конуса.

вдоль поверхности тела показано положение падающего импульса. Ясно видно распространение импульса индуцированного тока в сторону сферического конца тела и отражение от этого конца. Отметим, что пик тока достигается после прохождения падающим полем конца структуры, что обусловлено запаздыванием ползущей волны, которая распространяется вдоль периметра тела. При определении поля учитывается геометрическое расстояние между источником и точкой наблюдения; ток же течет по более длинному пути вдоль периметра структуры. Таким образом, осуществляется дополнительная численная проверка решения, поскольку полное поле должно оставаться

тождественно равным нулю в теневой области до тех пор, пока ее не достигнет ползущая волна.

Все проведенные до сих пор проверки правильности решения, за исключением проверки выполнения теоремы взаимности, ос-

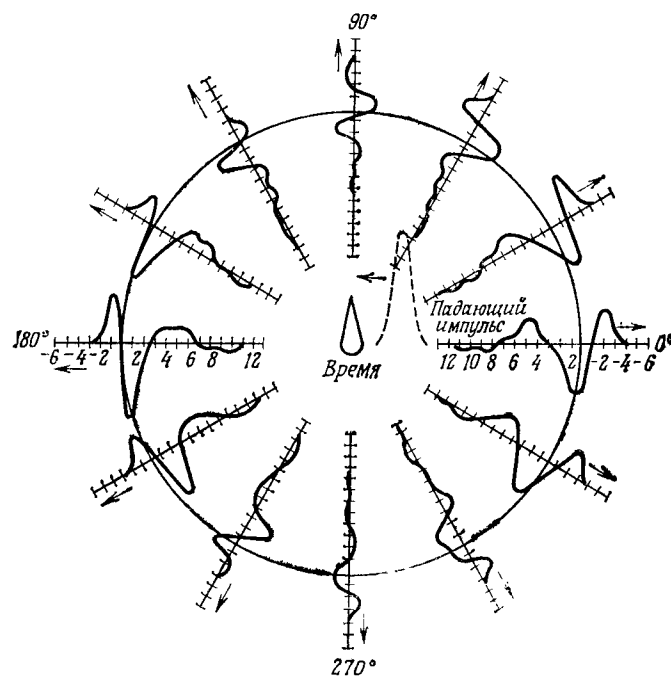


Фиг. 4.48. Двухпозиционные сечения рассеяния на конусе-сфере с углом при вершине конуса 30° при падении волны со стороны вершины конуса, вычисленные в частотном представлении и с помощью фурье-преобразования решения во временном представлении.

новывались главным образом на сопоставлении с полученным независимым способом теоретическим решением или с экспериментальными данными в частотном представлении. В настоящее время существуют различные устройства для прямых измерений характеристик импульсных процессов во временном представле-

нии, не требующие применения преобразования Фурье и позволяющие провести прямую проверку численного решения.

На фиг. 4.51 приведены результаты измерения обратного рассеяния на сфере гауссового импульса, ширина которого равна диаметру сферы. Эти данные получены на полигоне исследовательского центра Сперри Ренд [86]. Показаны изображения на

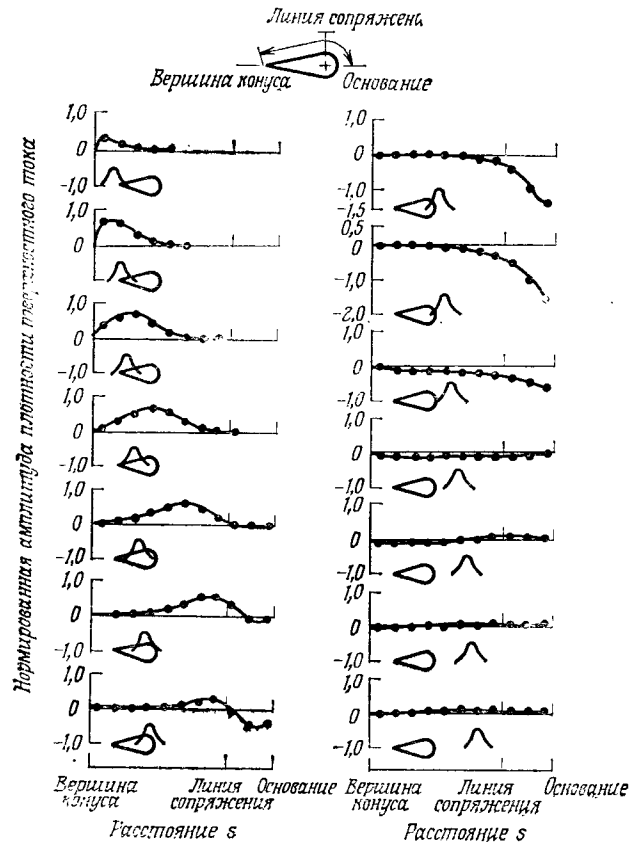


Фиг. 4.49. Приближенная двухпозиционная импульсная переходная характеристика конуса-сферы с углом при вершине конуса 30° в E-плоскости при падении импульса перпендикулярно оси.

экране электроннолучевой трубки падающего и рассеянного импульсов. На фиг. 4.36 представлены результаты счета для того же значения отношения ширины импульса к диаметру сферы. Согласие между расчетной и полученной экспериментально формой рассеянного импульса вполне удовлетворительное.

На фиг. 4.52 приведены результаты измерений формы рассеянного назад импульса при аксиальном падении на правильный круговой цилиндр с отношением длины к диаметру, равным двум [86]. Форма переднего фронта импульса, обусловленного отражением от плоского торца цилиндра, очень близко

описывается производной от падающего импульса, как этого и следовало ожидать при отражении от плоской поверхности [см. уравнение (4.42)]. За пиком, обусловленным нерегулярностью на



Фиг. 4.50. Составляющая наведенного тока в H -плоскости на поверхности конуса-сферы при падении импульса со стороны вершины конуса.

торце, следует последний положительный всплеск, вызванный волной, обегавшей тыловой торец цилиндра.

Приведенные примеры показывают возможности непосредственного исследования процесса рассеяния во временном представлении. Хотя рассмотренные примеры ограничиваются телами сравнительно простой формы, тем не менее изложенный подход пригоден и для анализа структур сложной геометрии. Здесь в основном рассматривались задачи о рассеянии волн, однако сам метод является, быть может, даже более подходящим для

антенных задач. В последнем случае диаграмма направленности излучения может быть найдена однократным решением задачи, тогда как для получения кривой сечения обратного рассеяния вычисления приходится повторять для каждого угла падения волны.

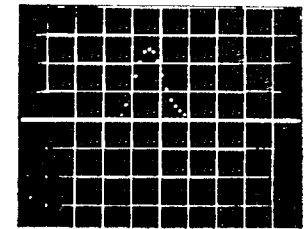
Структуры из тонких проводников

Решение интегрального уравнения во временном представлении для диполя (как излучающего, так и рассеивающего) впервые было получено, по-видимому, в работах Сейра [88] и Сейра и Харрингтона [64], в которых были использованы зависящие от времени векторное и скалярное интегродифференциальные уравнения. Сейр исследовал также случай тонкой круглой петли. Некоторые из его результатов приводятся ниже.

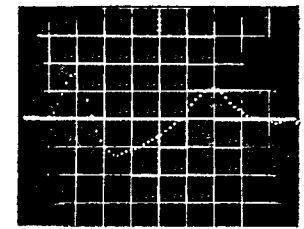
На фиг. 4.53 показана зависимость от времени входного тока в линейной антенне с отношением длины к диаметру проводника $L/2a = 74,2$, возбуждаемой в центре единичным импульсом напряжения. Две кривые соответствуют двум значениям внутреннего сопротивления генератора 0 и 50 Ом. Видно, что отличие от нуля внутреннего сопротивления генератора сказывается лишь в увеличении скорости затухания колебаний, а периодичность тока такая же, как и при нулевом сопротивлении. Период колебаний соответствует основной моде возбуждаемого в центре диполя.

Преобразование Фурье входного тока, представленного на фиг. 4.53, a , приводит к зависимости входной проводимости от kL , показанной на фиг. 4.54.

На фиг. 4.55 представлены кривые зависимости от времени наведенного



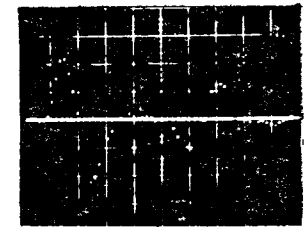
a



b

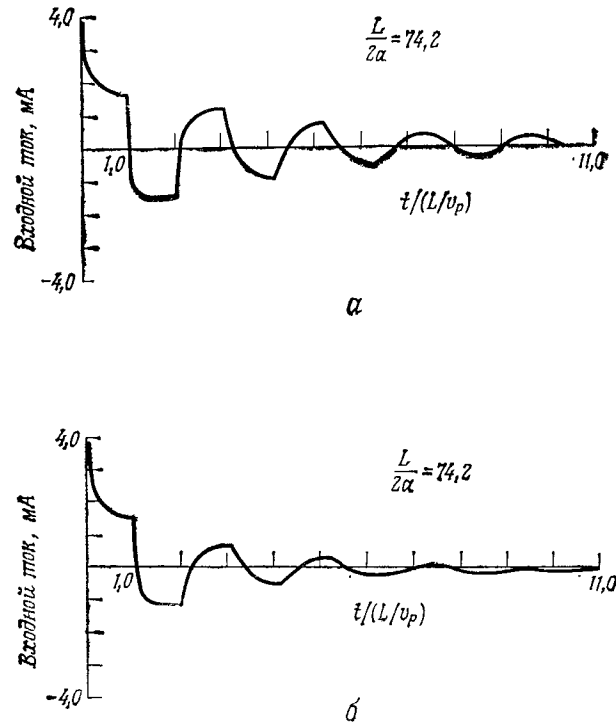
Фиг. 4.51. Сравнение экспериментальной и расчетной импульсной переходной характеристики сферы [86].

a — падающий импульс; b — импульсная переходная характеристика сферы (одно деление горизонтальной шкалы приблизительно равно радиусу сферы).



Фиг. 4.52. Сравнение экспериментальной и расчетной импульсной переходной характеристики правильного кругового цилиндра при падении волны вдоль оси [86].

тока и рассеянного в перпендикулярном направлении поля при падении единичного импульса электрического поля перпендикулярно оси (также для проводника с отношением $L/2a = 74,2$). Ток и рассеянное поле осциллируют с частотой, очень близкой



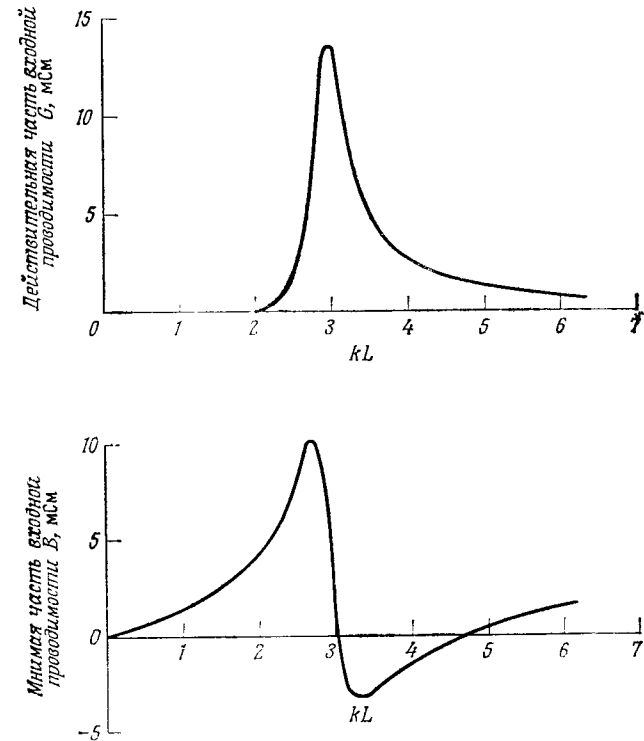
Фиг. 4.53. Расчетные значения входного тока, наведенного единичным импульсом напряжения в линейной антенне [64].

a — генератор с нулевым сопротивлением; *b* — генератор с сопротивлением 50 Ом.

к частоте основной моды проводника. Сглаживание изломов кривой тока со временем говорит об относительно более эффективном излучении высоких гармоник тока. Этот результат аналогичен уже рассмотренному выше для излучающей антенны (фиг. 4.53).

Некоторые дополнительные результаты были получены авторами с помощью интегрального уравнения для электрического поля во временном представлении (4.38), специально модифицированного для систем тонких проводников [89]. При использовании параболической интерполяции становится возможным

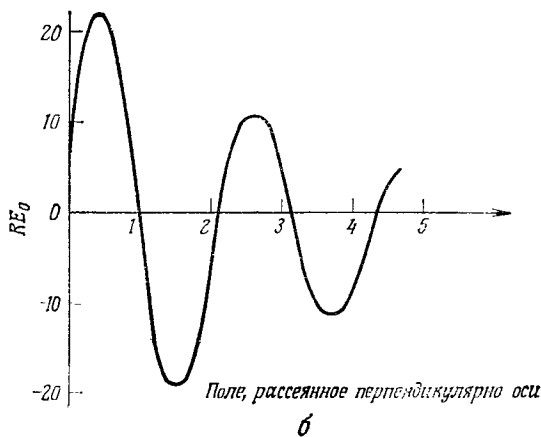
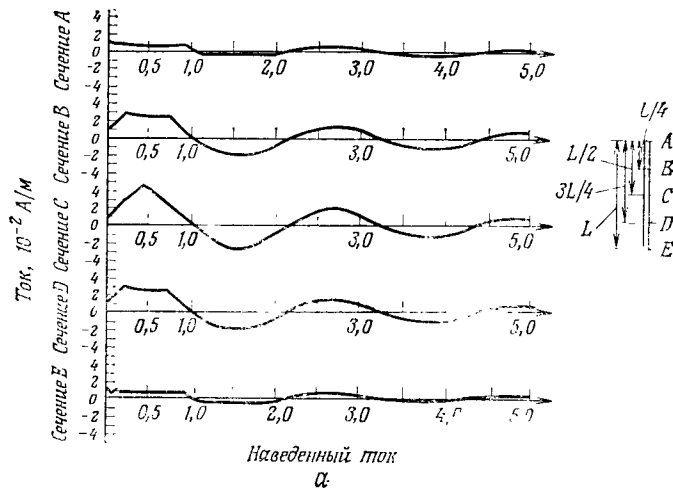
произвольный выбор узлов в пространстве и во времени, так что ΔR не обязательно должно быть больше $c\Delta T$. При этом приходится обращать зависящую от конфигурации системы матрицу порядка N (содержащую, однако, большое число нулей), после



Фиг. 4.54. Частотная зависимость входной проводимости линейной антенны, вычисленная по импульсной характеристике возбуждения [64].

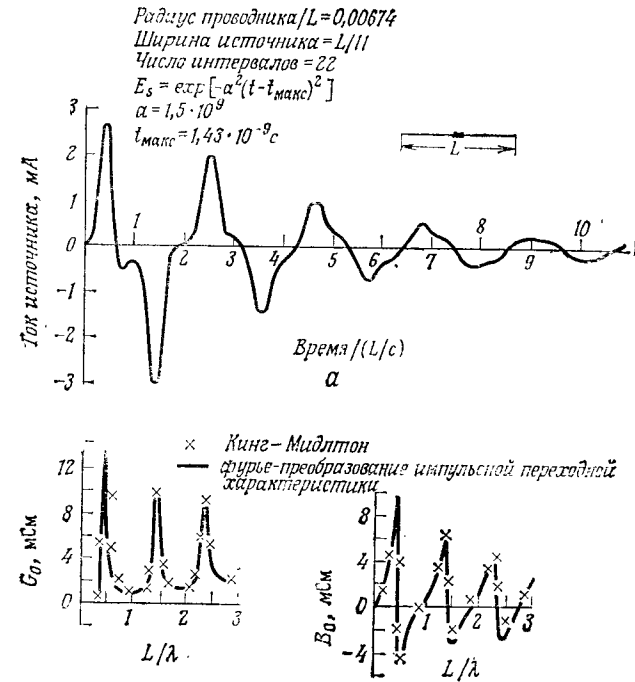
чего процедура решения сводится к описанному выше постепенному переходу к последующим моментам времени. Ниже приводятся несколько примеров решения таким методом задач о рассеянии и об излучении во временном представлении для случая импульса гауссовой формы.

На фиг. 4.56 представлены результаты для линейной дипольной антенны с расположенным в центре источником, зависящим от времени по гауссову закону. Параметры, описывающие возбуждение диполя и способ его разбиения на отрезки, указаны на фигуре. На фиг. 4.56, *a* приведено изменение входного тока; ясно видно влияние гауссовой формы импульса тока, которым



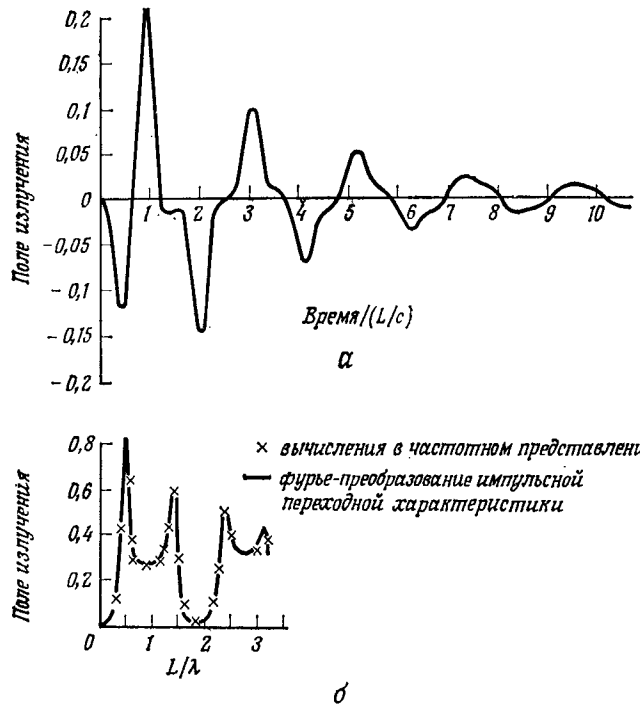
Фиг. 4.55. Наведенный ток (а) и рассеянное поле при падении единичного импульса электрического поля нормально к оси прямого проводника (б) [64].

возбуждается антенна. Фиг. 4.56, б иллюстрирует точность расчета: входная проводимость, вычисленная по отношению коэффициентов преобразования Фурье для входного тока и возбуждающего напряжения, согласуется с данными, полученными независимым способом.



Фиг. 4.56. Возбуждение линейной антенны гауссовым импульсом. а — ток источника; б — входная проводимость.

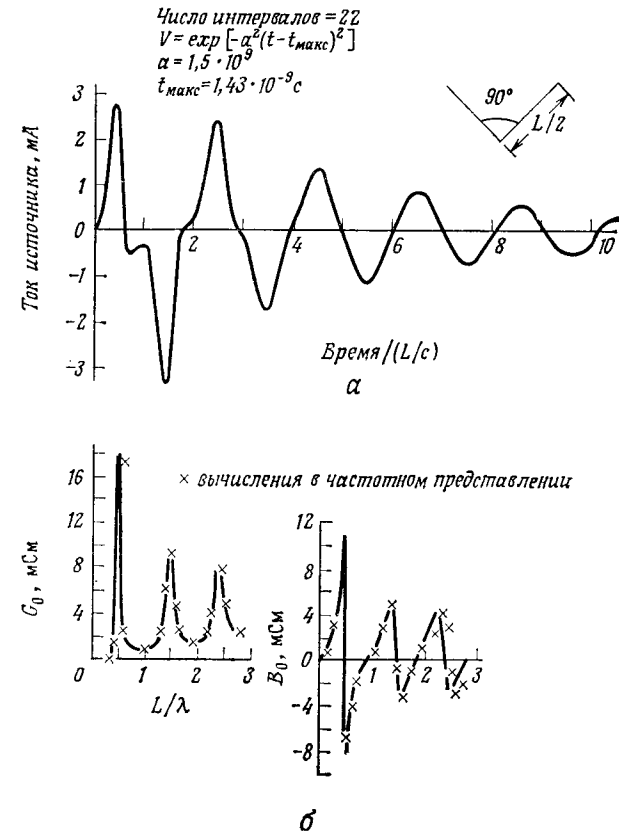
На фиг. 4.57 приведено поле, излученное в направлении, перпендикулярном оси диполя, с теми же параметрами, что и на фиг. 4.56. Для перехода к частотному представлению опять применяется преобразование Фурье. Полученная характеристика сопоставлена с результатами непосредственных расчетов в частотном представлении в диапазоне $0 \leq L/\lambda \leq 3,0$. Таким образом, один расчет во временном представлении позволяет получить спектральные характеристики в широкой полосе частот. На фиг. 4.58 представлена зависимость от времени поля, излученного под углом 40° относительно нормали к оси диполя. Первый пик соответствует излучению источника, а последующие



пики — излучению от ближнего и дальнего концов диполя. Временной интервал между n -м и первым пиком дается выражением

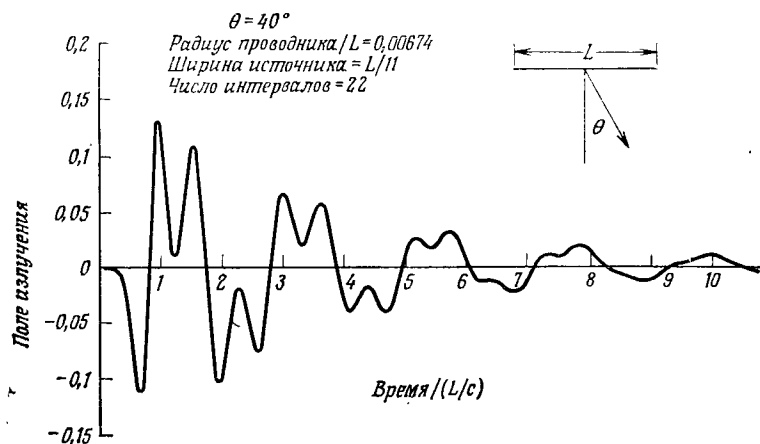
$$L \{ n - (3 + (-1)^{n+1})/2 + (-1)^{n-1} \sin \theta \} / 2c,$$

где θ — угол с нормалью к оси диполя.



Фиг. 4.57. Поле излучения в направлении, перпендикулярном оси линейной антенны, при возбуждении антенны гауссовым импульсом.

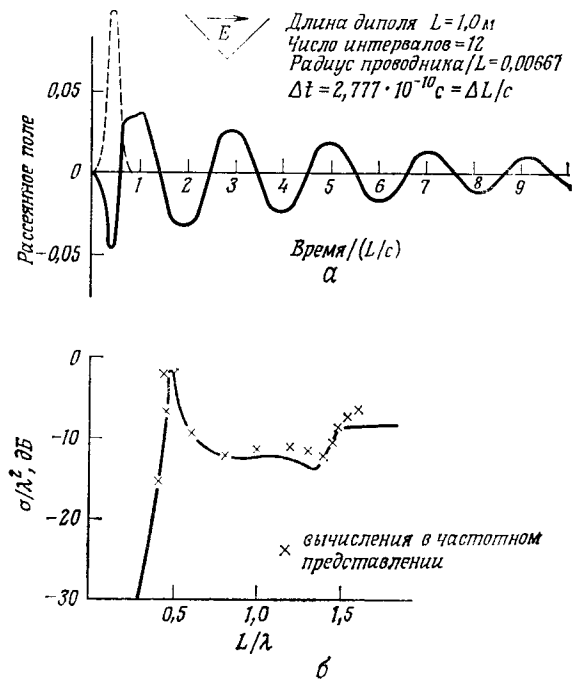
Фиг. 4.59. V-образная антенна, возбуждаемая гауссовым импульсом.



Фиг. 4.58. Поле излучения под углом $\theta = 40^\circ$ к оси линейной антенны, возбуждаемой гауссовым импульсом.

На фиг. 4.59 приведены результаты для V-образной антенны, возбуждаемой током, зависящим от времени по гауссову закону. С помощью преобразования Фурье можно перейти к величинам в частотном представлении и сопоставить их с данными, полученными независимым способом.

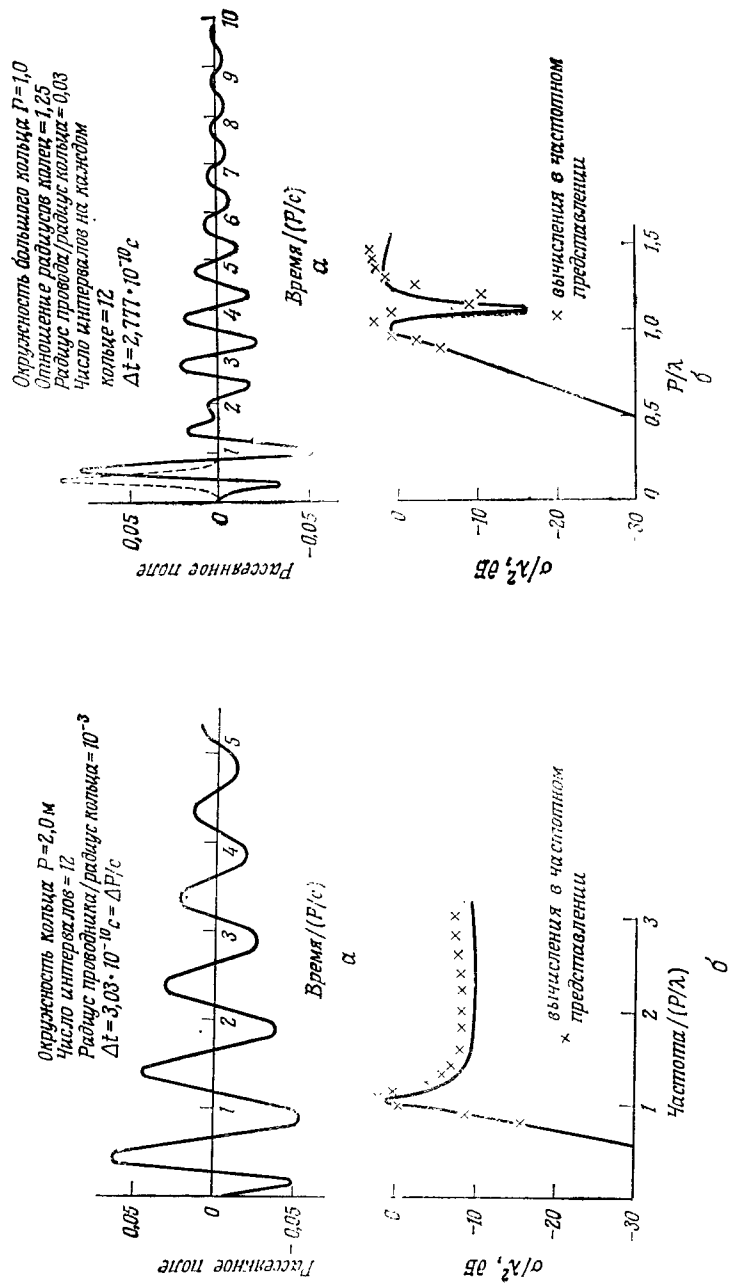
На фиг. 4.60 представлена зависимость от времени рассеянного назад поля при падении на V-образный диполь нормально к его плоскости импульса, в котором электрическое поле поляризовано перпендикулярно биссектрисе угла диполя. Приведены также кривая зависимости сечения рассеяния от частоты, полученная с помощью преобразования Фурье, и результаты решения



Фиг. 4.60. Рассеяние гауссова импульса на V-образном диполе. а — импульсная переходная характеристика; б — частотная характеристика.

непосредственно в частотном представлении. Отметим, что рассеянное назад поле первоначально приближенно соответствует производной падающего импульса и частотные зависимости величин, найденных обоими методами, очень близки. Небольшой сдвиг по частоте обусловлен, по-видимому, разной степенью точности, с которой выполняются граничные условия.

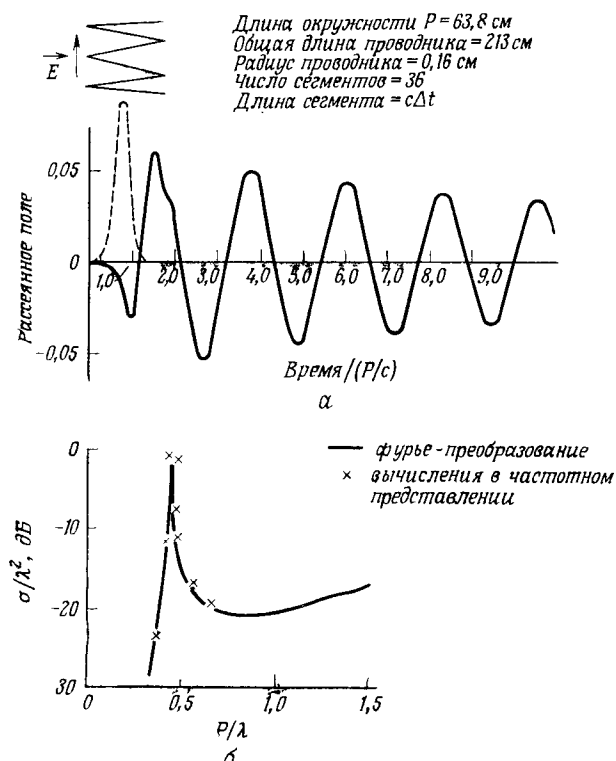
На фиг. 4.61—4.63 представлены аналогичные результаты расчетов характеристик рассеяния при аксиальном падении для круглого кольца, двух концентрических компланарных колец и зигзагообразной полосы («гармошки»), обернутой вокруг цилиндра. Временные зависимости рассеянных этими телами по-



Фиг. 4.61. Рассеяние гауссова импульса на кольце. а — импульсная переходная характеристика; б — частотная характеристика.

Фиг. 4.62. Рассеяние гауссова импульса на двух концентрических кольцах. а — импульсная переходная характеристика; б — частотная характеристика.

лей сильно отличаются друг от друга, что говорит о возможности идентификации целей при использовании временного представления. Анализ других характеристик, зависящих от времени, например ближнего поля или распределения тока,



Фиг. 4.63. Рассеяние гауссова импульса на проволочной «гармошке», обернутой вокруг цилиндра.

α — импульсная переходная характеристика; β — частотная характеристика.

может дать более глубокое представление об электромагнитных свойствах данной структуры, чем соответствующие результаты в частотном представлении.

§ 5. ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Цель проведенного выше рассмотрения заключалась в том, чтобы дать общий обзор современных численных методов, показать возможности и установить границы применимости метода интегральных уравнений при решении задач электродина-

мики. Мы попытались в пределах предоставленного нам объема показать преимущества и недостатки различных подходов, ориентированных на применение вычислительных машин, наметив в общих чертах теорию метода и способ проведения численных расчетов и приведя ряд конкретных примеров решения задач. Цитированные работы и приведенные результаты представляют лишь малую долю всех работ в области численных методов и теории интегральных уравнений. Тем не менее мы надеемся, что рассмотренный материал позволит читателю составить объективное мнение о существующих методах численного решения задач электродинамики с помощью интегральных уравнений.

Несмотря на продемонстрированную эффективность метода численного решения интегральных уравнений для широкого круга задач, имеется ряд вопросов, требующих доработки для более широкой применимости метода. В первую очередь это касается усовершенствования метода моделирования и оценки точности для тел произвольной геометрии, так чтобы каждая новая форма тела не требовала анализа задачи заново. Идеалом было бы установление реальной оценки для ошибки счета в функции размеров тела и особенностей его формы. С этим непосредственно связана и проблема разработки более эффективных методов решения, которые позволили бы свести к минимуму общие затраты, связанные с решением данной задачи. Сюда относятся стоимость и время разработки подходящих математических моделей и описаний программ для данной задачи, а также развитие непосредственного обмена информацией между машиной и пользователем.

Жизненно важным является и обобщение основных методов на случай больших систем. Такое обобщение может включать сочетание различных методов (например, рассмотренная выше комбинация метода физической оптики и метода интегральных уравнений) и использование преимуществ различных приближенных методов, таких, как итерационный метод, метод разреженной матрицы и т. д.

Наконец, чтобы приблизиться к решению многих практически важных задач, очень важным является развитие способов учета таких дополнительных факторов, как наличие диэлектрических тел с различной диэлектрической проницаемостью, влияние земли, неоднородности среды и т. д. Если в настоящее время учет таких факторов возможен лишь для тел простейшей геометрии, то несомненно, что продолжающийся прогресс как в развитии методов решения, так и в разработке более совершенных вычислительных машин, в частности путем объединения аналоговых и цифровых устройств, позволит расширить круг

задач, которые могут быть решены достаточно эффективно и с требуемой точностью.

Исходя из опыта предшествовавшего развития, можно считать, что будущее вычислительных методов является многообещающим. Однако ясно, что, поскольку решающим критерием правильности полученного на машине решения является сравнение с экспериментом, необходим соответствующий прогресс и в развитии экспериментальных методов. В конечном счете теория и эксперимент являются взаимно дополняющими инструментами в электродинамике.

Авторы выражают благодарность своим коллегам Г. Берку и Э. Селдену за помощь в подготовке материала настоящей главы. Авторы высоко ценят сотрудничество с К. Митцнером, позволившее включить в настоящую работу многие результаты численных расчетов и экспериментов. Авторы особенно благодарны мисс Черил Грауман за ее непревзойденную работоспособность, старательность и аккуратность, проявленные при подготовке рукописи к печати.

Литература

1. Special Issue on Radar Reflectivity, Proc. IEEE, 53, 8 (1965) [см. перевод: ТИИЭР, № 8 (1965)].
2. *Stratton J. A.*, Electromagnetic Theory, McGraw-Hill, New York, 1941 (см. перевод: Дж. А. Страттон, Теория электромагнетизма, Гостехиздат, М., 1948).
3. *Waterman P. C.*, Proc. IEEE, 53, 805 (1965).
4. *Chertock G., Grosso M. A.*, Some Numerical Calculations of Sound Radiation from Vibrating Surfaces, Dept. of the Navy, Acoustics and Vibration Laboratory Research and Development Report 2109, 1960.
5. *Maue A. W.*, Zeitschrift für Physik, 126, 601 (1949).
6. *Harrington R. F.*, Time Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, New York, 1961.
7. *Collin R. E.*, Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, New York, 1960.
8. *Kellogg O. D.*, Foundations of Potential Theory, Dover, New York, 1953.
9. *Müller C.*, Foundations of the Mathematical Theory of Electromagnetic Waves, Springer-Verlag, New York, 1969.
10. *Hallen E.*, Nova Acta Regiae Societatis Scientiarum Upsalienis (Sweden), Ser. 4, 11 (1938).
11. *King R. W. P.*, The Theory of Linear Antennas, Harvard University Press, Cambridge, Massachusetts, 1956.
12. *Richmond J. H.*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-13, 334 (1965).
13. *Mei K. K.*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-13, 374 (1965).
14. *Mitzner K. M.*, Radio Science, 2, 1459 (1967).
15. *Senior T. B. A.*, Appl. Sci. Res., Sec. B, 8, (1960).
16. *Oshiro F. K., Cross R. G.*, Northrop Norair Report NOR 66-74, 1966.
17. *Andreasen M. G.*, Proc. IEEE, 53, 812 (1965) [см. перевод: Андреева, ТИИЭР, № 8, 938 (1965)].
18. *Andreasen M. G.*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-13, 303 (1965).
19. *Collin R. E., Zucker F. J.*, Antenna Theory, Part 1, McGraw-Hill, New York, 1969.
20. *King R. W. P., Wu T. T.*, The Scattering and Diffraction of Waves, Har-

- vard University Press, Cambridge, Mass., 1959 (см. перевод: Р. Кинг, У Тай-Цзунь, Рассеяние и дифракция электромагнитных волн, ИЛ, М., 1962).
21. *Beckmann P.*, The Depolarisation of Electromagnetic Waves, The Golem Press, Boulder, Colorado, 1968.
 22. *Poggio A. J.*, Space-time and space-frequency domain integral equations, MBA Technical Memo MB-TM-69/63, 1969.
 23. *Harrington R. F.*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-15, 502 (1967).
 24. *Harrington R. F.*, Field Computation by Moment Methods, Macmillan, New York, 1968.
 25. *Fenlon F. H.*, Proc. IEEE, 57, 291 (1969) [см. перевод: ТИИЭР, 57 № 3, 42 (1965)].
 26. *Richmond J. H.*, Proc. IEEE, 53, 796 (1965) [см. перевод: ТИИЭР, № 8, 920 (1969)].
 27. *Richmond J. H.*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-14, 782 (1966).
 28. *Andreasen M. G.*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-12, 746 (1964).
 29. *Oshiro F. K.*, Source distribution techniques for the solution of general electromagnetic scattering problems, Proc. First GISAT Symposium, Mitre Corp., vol. 1, 83, 1965.
 30. *Jones D. S.*, The Theory of Electromagnetism, Pergamon, New York, 1964.
 31. *Mautz J. R., Harrington R. F.*, Generalized Network Parameters for Bodies of Revolution, Syracuse University Electrical Engineering Department Contract No. F-19628-67-C-0233, Scientific Report No. 1, 1968.
 32. *Yeh Y. S., Mei K. K.*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-15, 634 (1967).
 33. *Neureuter A. R., Fuller B. D., Hakke G. D., Hohmann G. et al.*, A comparison of numerical methods for thin wire antennas, 1968 Fall URSI meeting, Department of Electrical Engineering and Computer Science, University of California, Berkeley, 1969.
 34. *Poggio A. J., Mayes P. E.*, Numerical Solution of Integral Equation of Dipole and Slot Antennas Including Active and Passive Loading, Univ. of Illinois Antenna Lab. Tech. Rept. AFAL-TR-69-180, 1969.
 35. *Miller E. K., Burke G. J.*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-17, 669 (1969).
 36. *Miller E. K.*, J. Comput. Phys., 5, 265 (1970).
 37. *Ralston A.*, A First Course in Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1965.
 38. *Hildebrand F. B.*, Introduction to Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1956.
 39. *Фадеева В. Н.*, Вычислительные методы линейной алгебры, Гостехиздат, М. — Л., 1950.
 40. *Householder A. S.*, Principles of Numerical Analysis, McGraw-Hill, New York, 1953 (см. перевод: Хаусхолдер, Основы численного анализа, ИЛ, М., 1956).
 41. *Miller E. K., Maxum B. J.*, Mathematical Modeling of Aircraft Antennas and Supporting Structures, Final Report, ECOM Contract ADDB 07-68-C-0456, Report, No. ECOM-0456-1, 1970.
 42. *Keller J. B.*, J. Opt. Soc. Amer., 52, 116 (1962).
 43. *Уфимцев П. Я.*, Метод краевых волн в физической теории дифракции, «Советское радио», М., 1962.
 44. *Bechtel M. E.*, Proc. IEEE, 53, 877 (1965) [см. ТИИЭР, № 8 1007 (1965)].
 45. *Ross R. A.*, IEEE Trans. on Ant. and Prop., AP-14, 329 (1966).
 46. *Ross R. A., Bechtel M. E.*, Radar cross section prediction using the geometrical theory of diffraction, IEEE International Antennas and Propagation Symposium Digest, 18, 1966.
 47. *Kouyoumjian R. G.*, An Introduction to Geometrical Optics and the Geometrical Theory of Diffraction, Antenna and Scattering Theory: Recent Advances, vol. 1; Short Courses at Ohio State University, 1966.

48. Willoughby R. A., Proceedings of the Symposium on Sparse Matrices and Their Applications, IBM Watson Research Center, 1968.
49. Crispin J. W., Stegel K. M., Methods of Radar Cross-Section Analysis, Academic Press, New York, 1968.
50. Harrington R. F., Mautz J. R., Radiation and Scattering from Bodies of Revolution, Syracuse University, Electrical Engineering Dept., Contract No. F-19628-67-C-0233, Final Report, 1969.
51. Oshiro F. K., Su C. S., A Source Distribution Technique for the Solution of General Electromagnetic Scattering Problems, Northrop Norair Rept, NOR 65-271, 1965.
52. Mitzner K. M., Electromagnetic scattering from symmetric bodies, Spring URSI Meeting, Washington, D. C., 1969.
53. Cheng D. K., Tseng F. I., Pencil-beam synthesis for large circular arrays, G-AP Int. Symposium, Austin, Texas, p. 26, 1969.
54. Amitay N., Galindo V., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-17**, 747 (1969).
55. Kennaugh E. M., Cosgriff R. L., The use of impulse response in electromagnetic scattering problems, IRE Nation. Conv. Rec., pt. 1, p. 72, 1958.
56. Kennaugh E. M., Moffatt D. L., Proc. IRE (Correspondence), **50**, 199 (1961).
57. Kennaugh E. M., Moffatt D. L., Proc. IEEE, **53**, 893 (1965) [см. перевод: ТИИЭР, № 8, 1025 (1965)].
58. Rheinstein J., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-16**, 89 (1968).
59. Friedlander F. J., Sound Pulses, Cambridge University Press, London, 1958.
60. Friedman M. B., Shaw R., Trans. ASME, Ser. E, **29**, 40 (1962).
61. Soules G. W., Mitzner K. M., Pulses in Linear Acoustics, Northrop Nortronics Rept. ARD 66-60R, 1967.
- 61a. Mitzner K. M., J. Acoust. Soc. Amer., **42**, 391 (1967).
62. Bennett C. L., Weeks W. L., Electromagnetics pulse response of cylindrical scatterers, G-AP Symposium, Boston, Mass., 1968; A Technique for Computing Approximate Electromagnetic Impulse Response of Conducting Bodies, Purdue University Report TR-EE68-11, 1968.
63. Bennett C. L., Weeks W. L., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-18**, 627 (1969).
64. Sayre E. P., Harrington R. F., Transient response of straight wire scatterers and antennas, Proc. 1968 Intl. Ant. Prop. Symposium, Boston, Mass., p. 160, 1968.
65. Schenck H. A., J. Acoust. Soc. Amer., **44**, 41 (1968).
66. Miller E. K., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-16**, 501 (1968).
67. Shafai L., Can. J. Phys., **47**, 795 (1969).
68. Daniel S. M., Mitra R., Proc. IEEE, **58**, 270 (1970) [см. перевод: ТИИЭР, **58**, № 2, 158 (1970)].
69. Ruckgaber G. M., Shultz F. V., Electromagnetic Scattering by Finned Objects, Purdue Univ., School of Electrical Engineering, Contract No. AF-19(628)-1691, Scientific Rept, No. 4, 1968.
70. Ryu J., Finite Element Technique to Electromagnetic Modeling, Preliminary Report, Engineering Geoscience, University of California, Berkeley, 1970.
71. Tesche F. M., Neureuther A. R., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-18**, 692 (1970).
72. Bolle D. M., Morganstern M. D., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-17**, 477 (1969).
73. Oshiro F. K., Torres F. P., Heath H. C., Numerical Procedures for Calculating Radar Cross-section of Arbitrarily Shaped Three-dimensional Geometries, Air Force Avionics Lab. Tech. Rept. AFAL-TR-66-162, 1966.
74. Oshiro F. K., Mitzner K. M., Cross R. G., Scattering from finite cylinders by source distribution technique, Proc. GISAT II Symposium, Mitre Corp., 1967.

75. Oshiro F. K., Mitzner K. M., Digital computer solution of three-dimensional scattering problems, IEEE International Antennas and Propagation Symposium, Ann. Arbor, Michigan, 1967.
76. Oshiro F. K., Mitzner K. M., Locus S. S., et al. Calculation of Radar Cross Section, Air Force Avionics Laboratory Tech. Rept. AFAL-TR-69-52, also AFAL-TR-69-155, 1969.
77. MBAssociates, Log-periodic Scattering Array Program, Final Technical Report under ARPA Order No. 936, Amendment No. 2, 1970.
78. Moffatt D. L., Kennaugh E. M., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-13**, 401 (1965).
79. Copley L. G., J. Acoust. Soc. Amer., **44**, 28 (1968).
80. Baker B. B., Copson E. T., The Mathematical Theory of Huygens' Principal, Oxford University Press, London, 1953.
81. Mitzner K. M., Numerical solution of the exterior scattering problem, at eigenfrequencies of the interior problem, Fall URSI Meeting, Boston, Mass., 1968.
82. Oshiro F. K., Mitzner K. M., Locus S. S. et al., Calculation of Radar Cross-section, Air Force Avionics Laboratory Tech. Rept. AFAL-TR-70-21, 1970.
83. Gans M. J., Proc. IEEE, **53**, 1081 (1965) [см. перевод: ТИИЭР, № 8, 1229 (1965)].
84. Miller E. K., Morton J. B., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-18**, 290 (1970).
85. Robichaux W. G., Griffee L. V., Model Studies for Homing Antennas on Army Aircraft, Contract DA 28-043-AMC-02394 (E), Tech. Rept. ECOM-02394-F, Collins Radio Co., Dallas, Texas, 1967.
86. Bennett C. L., De Lorenzo J. D., Short pulse response of radar targets, G-AP Int. Symposium, Austin, Texas, p. 124, 1969.
87. Moffatt D. L., Low Radar Cross Sections, the Cone Sphere, The Ohio State University Antenna Laboratory, Report No. 1223-5, 1962.
88. Sayre E. P., Transient Response of Wire Antennas and Scatterers, Electrical Engineering Department, Syracuse University, Technical Report TR-69-4, 1969.
89. Poggio A. J., Miller E. K., Burke G. J., Scattering from thin-wire structures in the time domain, Spring URSI Meeting, Washington, D. C., 1971.
90. Bechtel M. E., Ross R. A., Radar Scattering Analysis, Cornell Aeronautical Laboratory Report No. ER/RIS-10, 1966.
91. Bowman J. J., Senior T. B. A., Uslenghi P. L. E., Electromagnetic and Acoustic Scattering by Simple Shapes, North Holland, Amsterdam, 1969.
92. Glauert H., The Elements of Airfoil and Airscrew Theory, Cambridge University Press, London, 1930.
93. Mentzer J. R., Scattering and Diffraction of Radio Waves, MacMillan, New York, 1955.
94. Miller E. K., Burke G. J., Maxum B. J., Neureuther A. R., Pjerrou G. M., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-17**, 381 (1969).
95. Mullin C. R., Sandburg R., Velline C. O., IEEE Trans. on Ant. and Prop., **AP-13**, 141 (1965).
96. Мухелишвили Н. И., Сингулярные интегральные уравнения, изд. «Наука», М., 1968.
97. Ruck G. T., Barrick D. E., Stuart W. D., Kirchbaum C. K., Radar Cross Section Handbook, Plenum Press, New York, 1969.
98. Silver S., Microwave Antenna Theory and Design, McGraw-Hill, New York, 1949.
99. Tanner R. L., Andreasen M. G., IEEE Spectrum, **4**, No. 9, 53 (1967).
100. Van Bladel J., Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, New York, 1964.
101. Van Bladel J., IRE Trans. on Ant. and Prop., **AP-9**, 563 (1961).

Вариационные и итерационные методы решения задач о волноводах и решетках

Ву Чень-пан¹⁾

Как показало исследование волноводных решеток, весьма эффективный подход к решению задач, связанных с этими структурами, состоит в рассмотрении их раскрыва как поверхности раздела и использовании метода сшивания. При таком подходе все пространство считается состоящим из двух отдельных однородных областей: свободного полупространства и области, заполненной волноводными устройствами. Раскрыв антенной решетки служит границей раздела обеих областей. Так как для нахождения поля во всем пространстве достаточно знать распределение на границе раздела касательного электрического или касательного магнитного поля, желательнее сформулировать задачу так, чтобы одна из этих величин была искомой. Наиболее подходящим средством достижения этой цели оказывается аппарат интегральных уравнений. Ядра полученных интегральных уравнений, так же как и в ряде других задач электродинамики, в общем случае комплексно симметричны. Это свойство ядер позволяет найти вариационным методом выражения для входного импеданса решетки. Чтобы убедиться в полезности вариационного метода, достаточно напомнить, что лишь очень малое число задач поддается точному решению. При нахождении решения вариационным методом строится приближенное выражение для неизвестного поля в раскрыве в виде линейной комбинации некоторой совокупности функций. Воспользовавшись затем свойством стационарности решения вариационной задачи, получают систему алгебраических уравнений для определения коэффициентов разложения.

Замена интегрального уравнения системой алгебраических уравнений может быть достигнута также с помощью более прямой и алгебраически более простой процедуры, а именно методом моментов. Применение этого метода к широкому кругу разнообразных задач в течение долгого времени составляло предмет интенсивных исследований. Было установлено, что при некоторых условиях использование вариационного метода и метода моментов приводит к одинаковым результатам. По существу

¹⁾ С. Р. Ву, Bell Telephone Laboratories, Inc., Holmdel, N. J.

применение метода моментов для решения интегрального уравнения можно рассматривать как вариационный метод. После получения системы алгебраических уравнений ее решение можно искать либо прямым методом обращения, либо с применением итерационной схемы.

Концепция граничной поверхности в сочетании с формализмом интегральных уравнений с успехом применялась во многих исследованиях волноводных решеток. Таким способом было проанализировано большое число различных конкретных конфигураций структур и получено много полезных сведений. Большинство полученных результатов опубликовано в различных журналах. Введение поверхности раздела и подход, основанный на интегральном уравнении, могут также плодотворно применяться при рассмотрении ряда задач рассеяния на неоднородностях в волноводе. В качестве очевидного примера укажем задачу о скачкообразном изменении сечения волновода. Мы поставили себе целью рассмотреть некоторые наиболее характерные задачи.

В число таких характерных задач мы включили рассеяние на металлической решетке, преобразование собственных типов волн на сочленении двух круглых волноводов разного радиуса, сочленение прямого волновода с изогнутым, излучение из волновода с диэлектрическим экраном и задачи с двумя последовательными неоднородностями. По мере изложения указываются возможные обобщения на решение других аналогичных задач. Основное внимание уделяется формулировке задачи и обсуждению специфических вычислительных методов, требуемых для решения выбранной характерной задачи.

§ 1. РАССЕЯНИЕ НА БЕСКОНЕЧНОЙ РИШЕТКЕ ИЗ МЕТАЛЛИЧЕСКИХ ЛЕНТ

Пусть плоская волна падает на бесконечную решетку из идеально проводящих лент, как показано на фиг. 5.1. Предположим, что падающее поле не зависит от переменной y и имеет характер волны TM относительно направления z . Магнитное поле падающей волны имеет тогда только составляющую H_y , а электрическое поле лежит в плоскости xz . Предположим также, что металлические ленты бесконечно тонкие¹⁾, а размеры решетки в направлении y не ограничены. При принятых предположениях задача становится двумерной и рассеянное поле состоит лишь из волн типа TM . Сформулируем задачу в виде интегральных уравнений, в которых в качестве неизвестной функции выбрано либо касательное электрическое поле в

¹⁾ Случай металлических лент конечной толщины может быть исследован с помощью метода, описываемого в § 6.

раскрыть (при $|x| < c/2$), либо ток, наведенный на металлических лентах (при $c/2 \leq |x| \leq d/2$).

Падающее поле зададим в виде

$$H_y^i = \sqrt{\frac{1}{d}} e^{-ik(x \sin \theta + z \cos \theta)}, \quad (5.1)$$

$$E^i = \frac{k}{\omega \epsilon_0} \sqrt{\frac{1}{d}} (\hat{x} \cos \theta - \hat{z} \sin \theta) e^{-ik(x \sin \theta + z \cos \theta)},$$

где \hat{x} , \hat{z} — единичные векторы вдоль осей x и z .

Так как падающая волна плоская, а рассеивающее препятствие периодически по x с периодом d , поле в двух точках, разнесенных на расстояние d на прямой, параллельной оси x , отличается лишь постоянным фазовым множителем $\exp(-ikd \sin \theta)$. Математически это утверждение можно записать следующим образом. Пусть $f(x)$ — любая составляющая поля в точке x . Тогда

$$f(x+d) = f(x) e^{-ikd \sin \theta}.$$

Таким образом, чтобы знать поле в любой точке, достаточно найти рассеянное поле лишь в интервале, равном одному периоду, например при $-d/2 \leq x \leq d/2$. В силу периодичности структуры рассеянное поле можно представить в виде разложения по пространственным гармоникам, называемым гармониками Флоке. Для волн в направлении $\pm z$ они имеют вид

$$\Psi_m(x) e^{\mp i\Gamma_m z}. \quad (5.2)$$

Здесь $\Psi_m(x)$ — функции, определяющие изменение поля в поперечном направлении:

$$\Psi_m(x) = \sqrt{\frac{1}{d}} e^{-i(2m\pi/d + k \sin \theta)x}, \quad m = 0, \pm 1, \dots, \quad (5.2a)$$

а

$$\Gamma_m = \sqrt{k^2 - \left(\frac{2m\pi}{d} + k \sin \theta\right)^2} \quad (5.2b)$$

— постоянные распространения. Функции $\{\Psi_m(x)\}$ ортонормированы на отрезке $(-d/2, d/2)$, т. е. их скалярные произведе-

ния удовлетворяют соотношениям

$$\langle \Psi_m, \Psi_n^* \rangle = \int_{-d/2}^{d/2} \Psi_m(x) \Psi_n^*(x) dx = \delta_{mn} = \begin{cases} 1 & \text{при } m=n, \\ 0 & \text{при } m \neq n, \end{cases} \quad (5.3)$$

где звездочкой обозначена комплексно сопряженная функция.

Задача 1. Получите выражение (5.2a) методом разделения переменных.

Представим рассеянное поле в виде разложения по пространственным гармоникам:

$$H_y^s(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I_m \Psi_m(x) e^{i\Gamma_m z}, \quad (5.4a)$$

при $z \leq 0$,

$$E_x^s(x, z) = - \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_m I_m \Psi_m(x) e^{i\Gamma_m z}, \quad (5.4b)$$

$$H_y^s(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I'_m \Psi_m(x) e^{-i\Gamma_m z}, \quad (5.4в)$$

при $z \geq 0$,

$$E_x^s(x, z) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_m I'_m \Psi_m(x) e^{-i\Gamma_m z}, \quad (5.4г)$$

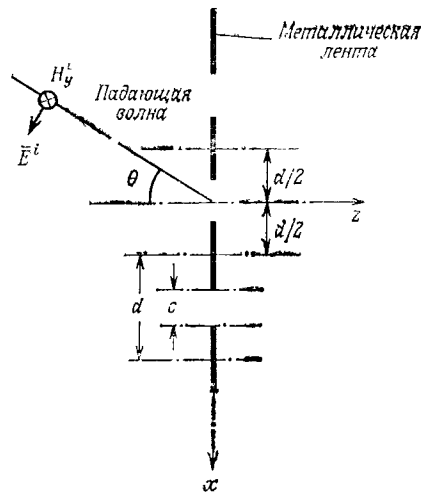
где $\{I_m\}$ и $\{I'_m\}$ — неизвестные коэффициенты, а $Z_m = \Gamma_m / \omega \epsilon_0$ — импеданс m -й пространственной гармоники, определяемый отношением поперечных составляющих электрического и магнитного полей этой гармоники.

Касательные к препятствию составляющие поля падающей волны можно выразить через нулевую пространственную гармонику Ψ_0 . Согласно граничным условиям на поверхности раздела $z=0$, касательные составляющие полей должны быть непрерывны в щели $|x| \leq c/2$. Поэтому

$$H_y(x, 0) = (1 + I_0) \Psi_0(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty (0)} I_m \Psi_m(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I'_m \Psi_m(x), \quad (5.5a)$$

$$E_x(x, 0) = Z_0(1 - I_0) \Psi_0(x) - \sum_{m=-\infty}^{\infty (0)} Z_m I_m \Psi_m(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_m I'_m \Psi_m(x), \quad (5.5b)$$

где символ $\Sigma^{(0)}$ означает, что член с нулевым индексом должен быть опущен в сумме. Так как на поверхности металла касательное электрическое поле обращается в нуль, можно считать, что условие (5.5b) выполняется на всем периоде $|x| \leq d/2$.



Фиг. 5.1. Рассеяние на бесконечной плоской металлической решетке.

Воспользовавшись свойством ортонормированности гармоник (5.3), можно выразить коэффициенты $\{I_m\}$, $\{I'_m\}$ через значение электрического поля в раскрыве:

$$-Z_m I_m = Z_m I'_m = \int_{-c/2}^{c/2} E_x(x', 0) \Psi_m^*(x') dx' \quad \text{при } m \neq 0, \quad (5.6a)$$

$$Z_0(1 - I_0) = Z_0 I'_0 = \int_{-c/2}^{c/2} E_x(x', 0) \Psi_0^*(x') dx'. \quad (5.6b)$$

Как видно из этих выражений, амплитуды пространственных гармоник магнитного поля, за исключением нулевой, в полупространствах $z > 0$ и $z < 0$ равны по величине и различаются лишь знаком, т. е.

$$\begin{aligned} I_m &= -I'_m \quad \text{при } m \neq 0, \\ 1 - I_0 &= I'_0. \end{aligned} \quad (5.7)$$

Используя полученные соотношения, перепишем (5.5a) в виде

$$\begin{aligned} H_y(x, 0) &= 2\Psi_0(x) - (1 - I_0)\Psi_0(x) + \sum_{m=-\infty}^{\infty} {}^{(0)} I_m \Psi_m(x) = \\ &= 2\Psi_0(x) - \sum_{m=-\infty}^{\infty} I'_m \Psi_m(x) = \sum_{m=-\infty}^{\infty} I'_m \Psi_m(x). \end{aligned} \quad (5.8)$$

Из равенства (5.8) следует

$$\sum_{m=-\infty}^{\infty} I'_m \Psi_m(x) = \Psi_0(x). \quad (5.9)$$

Таким образом, наличие решетки не изменяет касательной составляющей магнитного поля в щели; она остается такой же, как в падающей волне. Этот известный результат можно получить и из других соображений [1]. Подставив выражения (5.6) в равенство (5.9), получим интегральное уравнение относительно электрического поля в раскрыве:

$$\Psi_0(x) = \int_A \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m \Psi_m(x) \Psi_m^*(x') \right\} E_x(x', 0) dx', \quad (5.10)$$

где интегрирование проводится по поверхности раскрыва (щели) A , а $Y_m = 1/Z_m$.

При выводе интегрального уравнения (5.10) был изменен порядок интегрирования и суммирования. Это допустимо, так как ядро интегрального уравнения (выражение в фигурных скобках) имеет особенность вида

$$e^{-ik(x-x') \sin \theta} \ln \left[2 \sin \frac{\pi}{d} (x-x') \right],$$

что обеспечивает сходимость интеграла для физически реализуемых решений.

Задача 2. Покажите, что ряд $\sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m \Psi_m(x) \Psi_m^*(x')$ ведет себя при $x \approx x'$ как $e^{-ik(x-x') \sin \theta} \ln \left[2 \sin \frac{\pi}{d} (x-x') \right]$. Указание. Используйте тот факт, что для больших m $Y_m \sim \omega \epsilon_0 d / (2|m|)\pi$, и перепишите ряд в виде [2]

$$\begin{aligned} Y_0 \Psi_0(x) \Psi_0^*(x') + \omega \epsilon_0 \sum_{m=1}^{\infty} \left\{ \left[\frac{id}{2m\pi} + \left(\frac{1}{\Gamma_m} - \frac{id}{2m\pi} \right) \right] e^{i \left(\frac{2m\pi}{d} - k \sin \theta \right) (x-x')} + \right. \\ \left. + \left[\frac{id}{2m\pi} + \left(\frac{1}{\Gamma_{-m}} - \frac{id}{2m\pi} \right) \right] e^{-i \left(\frac{2m\pi}{d} + k \sin \theta \right) (x-x')} \right\}. \end{aligned}$$

Получим теперь интегральное уравнение для тока на металлической ленте. Заметим, что касательная составляющая магнитного поля непрерывна в щели и претерпевает разрыв на поверхности ленты, причем скачок магнитного поля равен наведенному поверхностному току. Это можно записать так:

$$H_y(x, 0^+) - H_y(x, 0^-) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in A, \\ -J_x & \text{при } x \in M, \end{cases} \quad (5.11)$$

где M — интервал $c/2 \leq x \leq d/2$ (поверхность металла). Подставляя сюда выражения для касательных составляющих магнитного поля и учитывая равенства (5.7), получаем

$$2 \sum_{m=-\infty}^m I_m \Psi_m(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } x \in A, \\ J_x & \text{при } x \in M. \end{cases} \quad (5.12)$$

Воспользовавшись снова ортонормированностью функций, найдем

$$I_m = \frac{1}{2} \int_M J_x(x') \Psi_m^*(x') dx'. \quad (5.13)$$

Если подставить эти выражения для коэффициентов в (5.4b) и потребовать обращения в нуль касательной составляющей полного электрического поля на металлической ленте, то мы получим следующее интегральное уравнение¹⁾:

¹⁾ При выводе уравнения (5.14) был изменен порядок интегрирования и суммирования. Строго говоря, этого делать нельзя, так как получаемый интеграл расходится. Мы совершили это, чтобы получить компактное интегральное уравнение. Практически эту трудность можно обойти с помощью подходящего выбора базисных функций. Можно избежать ее также, если учесть,

$$2Z_0\Psi_0(x) = \int_M \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} Z_m \Psi_m(x) \Psi_m^*(x') \right\} J_x(x') dx'. \quad (5.14)$$

Заметим, что при выборе начала координат, как на фиг. 5.1, область интегрирования M состоит из двух отдельных интервалов $-d/2 \leq x \leq -c/2$ и $c/2 \leq x \leq d/2$. Очевидно, этого можно избежать, перенеся начала координат так, чтобы лента занимала область $-(d-c)/2 \leq x \leq (d+c)/2$.

Уравнения (5.10) и (5.14) — два различных возможных вида интегральных уравнений, описывающих рассматриваемую задачу. Это интегральные уравнения Фредгольма первого рода. Первое уравнение, в котором неизвестное представляет собой электрическое поле в щели, справедливо для точек на щели. Второе уравнение относительно наведенного на ленте тока справедливо на поверхности ленты.

Аналитическое решение выведенных интегральных уравнений удается получить лишь в частном случае, когда размеры ленты и щели равны, а волна падает нормально к решетке [3, 4]. Поэтому приходится прибегать к приближенным методам решения.

Задача 3. Выведите интегральное уравнение в случае, когда рассеивающая плоская решетка расположена внутри диэлектрической пластины.

§ 2. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП, МЕТОД МОМЕНТОВ И ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

1. ВАРИАЦИОННЫЙ ПРИНЦИП

Среди различных приближенных методов решения задач рассеяния очень широкое распространение получил вариационный принцип. Для интегральных уравнений с эрмитовым¹⁾ или комп-

что пространственные гармоники удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \Psi_m(x) = \Gamma_m^2 \Psi_m(x),$$

и вместо (5.14) написать соответствующее интегро-дифференциальное уравнение

$$2Z_0\Psi_0(x) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + k^2 \right) \int_M \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} \frac{Z_m}{\Gamma_m^2} \Psi_m(x) \Psi_m^*(x') \right\} J_x(x') dx'.$$

¹⁾ Ядро $L(x, x')$ называют эрмитовым, если $L^*(x', x) = L(x, x')$. При этом, согласно определению скалярного произведения (5.3), имеем $\langle U, LV \rangle = \langle L^*U, V \rangle$.

лексно симметричным ядром могут быть получены стационарные выражения [5, 6, 2]. Задачи рассеяния электромагнитных волн обычно приводят к уравнениям с комплексно симметричными ядрами: ядро $K(x, x')$ является комплексной функцией аргументов x и x' и обладает свойством симметрии, т. е. $K(x, x') = K(x', x)$, так что $\langle U, KV \rangle = \langle KU, V \rangle$. На первый взгляд ядра уравнений (5.10) и (5.14) не обладают свойствами эрмитовости или комплексной симметрии. Эту трудность, однако, можно обойти следующим образом. Воспользовавшись равенством

$$\Psi_m(-x) = \{\Psi_m(x)\}^*,$$

перепишем уравнение (5.10) в виде

$$\Psi_0^*(x) = \int_A \left\{ \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m \Psi_m^*(x) \Psi_m^*(x') \right\} E_x(x', 0) dx'. \quad (5.10a)$$

Теперь ядро комплексно симметрично. Умножая это уравнение на $E_x(x, 0)$ и интегрируя по раскрытию A , после некоторых преобразований с учетом (5.6б) получаем

$$Z_0(1 - I_0) = \frac{\langle \Psi_0^*, E_x \rangle^2}{\langle E_x, K'E_x \rangle}, \quad (5.15)$$

где

$$K'(x, x') = \sum_{m=-\infty}^{\infty} Y_m \Psi_m^*(x) \Psi_m^*(x').$$

Вычислив вариацию от $Z_0(1 - I_0)$, можно убедиться, что полученное выражение действительно стационарно, т. е.

$$\delta \{Z_0(1 - I_0)\} = \frac{2 \langle (K'E_x - \Psi_0^*), \delta E_x \rangle}{\langle E_x, K'E_x \rangle^2} = 0. \quad (5.15a)$$

Стационарность выражения $Z_0(1 - I_0)$ означает, что при аппроксимации решения E_x функцией, содержащей ошибки в первом порядке малости, при вычислении $Z_0(1 - I_0)$ по формуле (5.15) обеспечивается точность во втором порядке малости и выше. Иными словами, хорошее приближение для E_x приводит к хорошей точности вычисления $Z_0(1 - I_0)$. Однако если пробная функция E_x далека от точного решения, то результат может оказаться очень грубым.

При практическом использовании вариационного принципа неизвестное электрическое поле в зазоре чаще всего аппроксимируют просто полем падающей волны. Такой выбор пробной функции часто, но не всегда, приводит к удовлетворительным результатам. Для повышения точности вариационного расчета требуется использовать лучшее приближение неизвестной функции, которое можно получить, например, с помощью метода

Рэлея — Ритца [7, 8]. Неизвестная функция при этом представляется в виде разложения в ряд по системе линейно независимых функций $\{Q_n(x)\}$:

$$E_x(x) = \sum_{n=1}^N a_n Q_n(x). \quad (5.16)$$

Подставив это разложение в стационарное выражение (5.15) и приравняв нулю производные полученного функционала по коэффициентам разложения $\{a_n\}$, приходим к системе линейных уравнений для коэффициентов разложения:

$$\sum_{n=1}^N K'_{mn} a_n = b_m, \quad m = 1, 2, \dots, N, \quad (5.17)$$

где

$$K'_{mn} = \langle Q_m, K'Q_n \rangle = \int_A dx Q_m(x) \int_A dx' K'(x, x') Q_n(x'),$$

$$b_m = \langle Q_m, \Psi_0^* \rangle = \int_A dx Q_m(x) \Psi_0^*(x).$$

Определив коэффициенты $\{a_n\}$ и подставив результирующее выражение для поля в выражение (5.15), получим значение величины $Z_0(1 - I_0)$. К той же системе линейных алгебраических уравнений (5.17) приводит и метод моментов.

2. МЕТОД МОМЕНТОВ

За последнее время вышло много книг, в которых рассматривается приложение метода моментов к решению дифференциальных и интегральных уравнений. Напомним, что обсуждение этого метода можно найти также в гл. 2 и 4 настоящей книги. Поэтому здесь достаточно дать лишь краткое его описание.

Интегральное уравнение Фредгольма первого рода, например уравнение (5.10) или (5.14), может быть записано в виде

$$\int_a^b K(x, x') f(x') dx' = g(x), \quad (5.18)$$

где $K(x, x')$ — ядро, $g(x)$ — известная функция, определяемая условиями возбуждения, а $f(x')$ — искомая неизвестная функция. Представим прежде всего неизвестную функцию в виде разложения по линейно независимой системе функций $\{U_p(x), p = 1, 2, \dots, N\}$:

$$f(x') = \sum_{p=1}^N \alpha_p U_p(x'). \quad (5.19)$$

Подставим это разложение в (5.18) и найдем моменты (т. е. вычислим соответствующим образом определенные скалярные произведения) полученного функционального уравнения по отношению к другой линейно независимой системе функций $\{V_q(x), q = 1, 2, \dots, N\}$. Интегральное уравнение сводится при этом к системе линейных алгебраических уравнений вида

$$\sum_{p=1}^N K_{qp} \alpha_p = \beta_q, \quad q = 1, 2, \dots, N, \quad (5.20)$$

где

$$K_{qp} = \langle V_q, KU_p \rangle,$$

$$\beta_q = \langle V_q, g \rangle.$$

Функции $\{U_p(x)\}$ и $\{V_q(x)\}$ называют соответственно базисными (или основными) и весовыми (или пробными). Известному методу Галеркина — Ритца соответствует частный случай, когда

$$\{U_p(x)\} \equiv \{V_q(x)\}.$$

Нетрудно убедиться, что применяя описанную схему к уравнению (5.10а) и полагая $\{U_p(x)\} \equiv \{V_q(x)\} \equiv \{Q_n(x)\}$, приходим к системе алгебраических уравнений (5.17). Поэтому можно сказать, что решение рассматриваемого интегрального уравнения методом моментов эквивалентно вариационному методу Рэлея — Ритца, если в обоих случаях используются соответствующие базисные функции. В этом смысле метод моментов можно рассматривать как вариационный метод. Поскольку в методе моментов выкладки оказываются проще, в дальнейшем мы будем пользоваться именно им.

Решение системы (5.20) может быть получено по правилу Крамера или с помощью обращения матрицы. Введем обозначения

$$[K] = \begin{bmatrix} K_{11} & K_{12} & \dots & K_{1N} \\ K_{21} & K_{22} & \dots & K_{2N} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ K_{N1} & K_{N2} & \dots & K_{NN} \end{bmatrix}, \quad \alpha = \begin{bmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \vdots \\ \alpha_N \end{bmatrix}, \quad \beta = \begin{bmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \\ \vdots \\ \beta_N \end{bmatrix}.$$

Систему равнений (5.20) можно записать в матричном виде:

$$[K] \alpha = \beta. \quad (5.20a)$$

Пусть $[K]^{-1}$ — матрица, обратная матрице $[K]$. Тогда решение уравнения (5.20а) имеет вид

$$\alpha = [K]^{-1} \beta. \quad (5.21)$$

Подставляя в (5.19) значения $\{\alpha_p\}$ из (5.21), получаем приближенное решение интегрального уравнения (5.18).

Метод обращения матрицы очень распространен при рассмотрении задач рассеяния. Это прямой и простой метод. Однако процесс обращения может оказаться слишком дорогим и продолжительным, особенно при обращении очень больших матриц или при необходимости рассмотрения значительного числа вариантов, возникающей, например, при исследовании зависимости решения задачи от каких-либо параметров. Кроме того, важную роль играет степень обусловленности матрицы. Обращение плохо обусловленной матрицы (т. е. матрицы, детерминант которой близок к нулю), как правило, достигается с трудом и легко может привести к большим ошибкам округления.

3. ИТЕРАЦИОННЫЕ МЕТОДЫ

Иной подход к решению матричного уравнения (5.20) состоит в использовании итерационной процедуры. Матрицу $[K]$ можно представить в виде разности двух матриц:

$$[K] = [P] - [Q]. \quad (5.22)$$

Используя это разбиение в (5.20а), получаем

$$[P]\alpha = [Q]\alpha + \beta \quad (5.22a)$$

и, следовательно, если существует обратная матрица $[P]^{-1}$, то

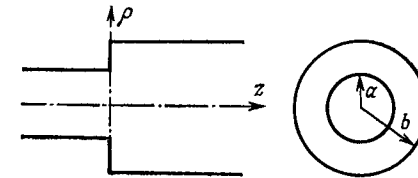
$$\alpha = [P]^{-1}[Q]\alpha + [P]^{-1}\beta. \quad (5.22b)$$

Подставляя в правую часть (5.22b) начальное приближенное решение α_0 , найденное каким-либо способом, можно получить более точное приближенное решение. Продолжая этот процесс, приходим к представлению решения в виде ряда. Достаточное условие сходимости полученного ряда состоит в том, чтобы спектральный радиус (наибольшее по величине собственное значение) матрицы $[P]^{-1}[Q]$ был меньше единицы. Достоинством этого метода является возможность такого выбора разбиения (5.22), который облегчает нахождение обратной матрицы $[P]^{-1}$. Однако следует заметить, что, вообще говоря, спектральный радиус оператора $[P]^{-1}[Q]$ вычислить довольно трудно, так что получить заранее оценку сходимости решения не удастся.

Теория итерационных процессов разработана весьма хорошо, однако она выходит за рамки настоящего исследования [9]. Следует упомянуть, что итерационные методы успешно применялись для рассмотрения различных конкретных задач [10, 11].

§ 3. СКАЧКООБРАЗНОЕ ИЗМЕНЕНИЕ СЕЧЕНИЯ КРУГЛОГО ВОЛНОВОДА (ПРЕОБРАЗОВАНИЕ ВОЛН)

В качестве первого примера применения метода интегральных уравнений рассмотрим задачу о сочленении двух круглых волноводов разного радиуса, изображенных на фиг. 5.2. Волноводные неоднородности такого типа используются в согласующих устройствах и трансформаторах типа волны [12]. В случае, когда в каждом из волноводов может распространяться только одна волна, для исследования задачи о сочленении было разработано несколько приближенных методов. Подход, основанный на рассмотрении интегрального уравнения, позволяет обойтись без этого ограничения.



Фиг. 5.2. Сочленение двух круглых волноводов.

Пусть из волновода меньшего радиуса на сочленение падает волна типа TE_{11} . Она возбуждает рассеянные волны типа TE и TM , распространяющиеся в обе стороны от неоднородности. В силу осевой симметрии рассеянное поле состоит из волн, имеющих ту же зависимость от азимутального угла ϕ , что и у падающей волны.

При формулировке интегрального уравнения необходимо знать выражения для собственных волн в круглом волноводе и их импедансы. Эти выражения можно найти во многих руководствах по электродинамике сверхвысоких частот и, в частности, в «Справочнике по волноводам» [13].

Волна типа TM_{1n} в волноводе радиуса a имеет вид ¹⁾

$$\Phi_n^{(1)} = e_{1n} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{J_1'(x_n \rho/a)}{a J_2'(x_n)} \cos \phi \cdot \hat{\rho} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{J_1(x_n \rho/a)}{x_n \rho J_2'(x_n)} \sin \phi \cdot \hat{\phi}, \quad (5.23a)$$

¹⁾ Возможны два способа выбора функций, зависящих от азимутального угла ϕ , что связано с двукратным вырождением собственных волн с данной зависимостью от азимута (за исключением аксиально симметричных волн). При рассмотрении задач о неоднородностях в волноводе в общем случае следует учитывать обе эти функции. В рассматриваемой задаче, где благодаря осевой симметрии препятствия зависимость поля от угла ϕ сохраняется той же, что и у падающего поля, достаточно воспользоваться лишь одной из них.

а волна типа TE_{1n}

$$\Phi_n^{(2)} = \mathbf{e}'_{1n} = -\sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{\sqrt{x_n'^2 - 1}} \frac{J_1(x_n' \rho/a)}{\rho J_1(x_n')} \cos \varphi \cdot \hat{\rho} + \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{x_n'}{\sqrt{x_n'^2 - 1}} \frac{J_1'(x_n' \rho/a)}{a J_1(x_n')} \sin \varphi \cdot \hat{\phi}. \quad (5.236)$$

Здесь x_n — n -й корень уравнения $J_1(x) = 0$, а x_n' — n -й корень уравнения $J_1'(x) = 0$, где штрихом обозначено дифференцирование по аргументу. Функции, описывающие собственные волны волновода, ортонормированны, т. е. справедливы соотношения

$$\langle \Phi_m^{(p)}, \Phi_s^{(q)} \rangle = \int_0^a \int_0^{2\pi} \Phi_m^{(p)}(\rho, \varphi) \cdot \Phi_s^{(q)}(\rho, \varphi) ds = \delta_{pq} \delta_{ms}, \quad (5.24)$$

где δ_{pq} — символ Кронекера, т. е.

$$\delta_{pq} = \begin{cases} 1, & p = q, \\ 0, & p \neq q. \end{cases}$$

Электрическое и магнитное поля в области $z \leq 0$ можно представить в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^- (\rho, \varphi, z) &= (e^{-i\gamma_1^{(2)}z} + R e^{i\gamma_1^{(2)}z}) \Phi_1^{(2)}(\rho, \varphi) + \\ &+ \sum_{p=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} \Phi_n^{(p)}(\rho, \varphi) e^{i\gamma_n^{(p)}z}, \\ -\hat{z} \times \mathbf{H}_t^- (\rho, \varphi, z) &= y_1^{(2)} (e^{-i\gamma_1^{(2)}z} - R e^{i\gamma_1^{(2)}z}) \Phi_1^{(2)}(\rho, \varphi) - \\ &- \sum_{p=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(p)} A_n^{(p)} \Phi_n^{(p)}(\rho, \varphi) e^{i\gamma_n^{(p)}z}, \end{aligned} \quad (5.25)$$

где R — коэффициент отражения, $\{A_n^{(p)}\}$ — искомые амплитуды возбуждения собственных волн, $\gamma_n^{(1)} = \sqrt{k^2 - (x_n/a)^2}$ и $\gamma_n^{(2)} = \sqrt{k^2 - (x_n'/a)^2}$ — постоянные распространения собственных волн вдоль оси z , $\{y_n^{(p)}\}$ — проводимости для собственных волн. Штрих у знака суммы означает, что в сумме опущена волна того же типа, что и падающее поле. Совершенно аналогично можно представить поле в области $z \geq 0$. В этом случае векторные ортонормированные собственные функции получают заменой a на b в формулах (5.23). Обозначим функции для $z \geq 0$ через

$\Psi_n^{(p)}(\rho, \varphi)$; тогда поле в этой области запишется в виде

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^+ (\rho, \varphi, z) &= \sum_{q=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(q)} \Psi_m^{(q)}(\rho, \varphi) e^{-i\Gamma_m^{(q)}z}, \\ -\hat{z} \times \mathbf{H}_t^+ (\rho, \varphi, z) &= \sum_{q=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} Y_m^{(q)} B_m^{(q)} \Psi_m^{(q)}(\rho, \varphi) e^{-i\Gamma_m^{(q)}z}, \end{aligned} \quad (5.26)$$

где $\{\Gamma_m^{(q)}\}$ и $\{Y_m^{(q)}\}$ — постоянные распространения и проводимости для собственных волн правого волновода, а $\{B_m^{(q)}\}$ — их искомые коэффициенты возбуждения. Выражения (5.25) и (5.26) в плоскости раскрыва $z=0$ принимают вид

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^- (\rho, \varphi) &= \mathbf{E}_t^- (\rho, \varphi, z=0) = (1+R) \Phi_1^{(2)}(\rho, \varphi) + \\ &+ \sum_{p=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} A_n^{(p)} \Phi_n^{(p)}(\rho, \varphi), \\ -\hat{z} \times \mathbf{H}_t^- (\rho, \varphi) &= -\hat{z} \times \mathbf{H}_t^- (\rho, \varphi, z=0) = \\ &= y_1^{(2)} (1-R) \Phi_1^{(2)}(\rho, \varphi) - \sum_{p=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(p)} A_n^{(p)} \Phi_n^{(p)}(\rho, \varphi) \end{aligned} \quad (5.27)$$

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^+ (\rho, \varphi) &= \mathbf{E}_t^+ (\rho, \varphi, z=0) = \sum_{q=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} B_m^{(q)} \Psi_m^{(q)}(\rho, \varphi), \\ -\hat{z} \times \mathbf{H}_t^+ (\rho, \varphi) &= -\hat{z} \times \mathbf{H}_t^+ (\rho, \varphi, z=0) = \sum_{q=1}^2 Y_m^{(q)} B_m^{(q)} \Psi_m^{(q)}(\rho, \varphi). \end{aligned} \quad (5.28)$$

Воспользовавшись ортонормированностью собственных функций, можно выразить коэффициенты $\{A_n^{(p)}\}$, $\{B_m^{(q)}\}$ через касательное электрическое поле в раскрыве E_t :

$$(1+R) = \iint_A \Phi_1^{(2)}(\rho, \varphi) \cdot \mathbf{E}_t^- (\rho, \varphi) ds, \quad (5.29a)$$

$$A_n^{(p)} = \iint_A \Phi_n^{(p)}(\rho, \varphi) \cdot \mathbf{E}_t^- (\rho, \varphi) ds, \quad (5.29б)$$

$$B_m^{(q)} = \iint_A \Psi_m^{(q)}(\rho, \varphi) \cdot \mathbf{E}_t^+ (\rho, \varphi) ds, \quad (5.29в)$$

где интегрирование ведется по плоскости раскрыва A при $z=0$. В (5.29в) входят функции, ортонормированные на поперечном сечении широкого волновода; однако вследствие обращения в нуль касательного поля E_t на поверхности металла область интегрирования сводится к A , как и указано. С помощью равенств (5.29б) — (5.29в) исключим неизвестные амплитуды волн $\{A_n^{(p)}\}$, $\{B_m^{(q)}\}$ в соотношениях (5.27) и (5.28). Тогда магнитные состав-

ляющие поля можно выразить через электрическое поле в раскрыве. Касательные составляющие поля в обеих областях должны быть непрерывны на границе, т. е.

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_t^-(\rho, \varphi) &= \mathbf{E}_t^+(\rho, \varphi) = \mathbf{E}_t(\rho, \varphi) \text{ при } \rho \leq b, \\ \hat{z} \times \mathbf{H}_t^-(\rho, \varphi) &= \hat{z} \times \mathbf{H}_t^+(\rho, \varphi) = \hat{z} \times \mathbf{H}_t(\rho, \varphi) \text{ при } \rho \leq a. \end{aligned} \quad (5.30)$$

Подставив в условия непрерывности полей выражения (5.27) — (5.29), приходим к интегральному уравнению для касательного электрического поля в раскрыве¹⁾:

$$\begin{aligned} 2y_1^{(2)} \Phi_1^{(2)}(\rho, \varphi) &= \sum_{p=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} y_n^{(p)} \Phi_n^{(p)}(\rho, \varphi) \iint_A \Phi_n^{(p)}(\rho', \varphi') \cdot \mathbf{E}_t(\rho', \varphi') ds' + \\ &+ \sum_{q=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} Y_m^{(q)} \Psi_m^{(q)}(\rho, \varphi) \iint_A \Psi_m^{(q)}(\rho', \varphi') \cdot \mathbf{E}_t(\rho', \varphi') ds'. \end{aligned} \quad (5.31)$$

С помощью сходных выкладок можно получить интегральное уравнение для касательного магнитного поля, которое мы приведем без вывода

$$\begin{aligned} 2z_1^{(2)} \hat{z} \times \Phi_1^{(2)}(\rho, \varphi) &= \sum_{p=1}^2 \sum_{n=1}^{\infty} z_n^{(p)} \Phi_n^{(p)}(\rho, \varphi) \times \\ &\times \iint_{A'} \Phi_n^{(p)}(\rho', \varphi') \cdot \mathbf{H}_t(\rho', \varphi') ds' + \\ &+ \sum_{q=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} Z_m^{(q)} \Psi_m^{(q)}(\rho, \varphi) \iint_{A'} \Psi_m^{(q)}(\rho', \varphi') \cdot \mathbf{H}_t(\rho', \varphi') ds', \end{aligned} \quad (5.32)$$

где A' — поперечное сечение широкого волновода.

Задача 4. Получите интегральное уравнение относительно касательной составляющей магнитного поля. Указание. При выражении неизвестных амплитуд собственных волн через касательное магнитное поле для двух разных областей пределы интегрирования будут различными. Эту трудность можно обойти, считая функции $\Phi_n^{(p)}$ тождественно равными нулю в области $(A' - A)$ и полагая

$$\mathbf{H}_t(\rho, \varphi) = \begin{cases} \mathbf{H}_t^-(\rho, \varphi) = \mathbf{H}_t^+(\rho, \varphi) & \text{при } (\rho, \varphi) \in A, \\ \mathbf{H}_t^+(\rho, \varphi) & \text{при } (\rho, \varphi) \in (A' - A). \end{cases}$$

¹⁾ В (5.31) сохранен порядок суммирования и интегрирования, так как перемена порядка этих операций может привести к расходимости интегралов. См. также примечание на стр. 315.

Интегральные уравнения (5.31) и (5.32) представляют собой две возможные формулировки задачи о скачкообразном изменении сечения круглого волновода. К решению обоих уравнений можно применить метод моментов.

Рассмотрим, например, уравнение (5.31). Представим поле \mathbf{E}_t в виде разложения по собственным функциям $\{\Phi_t^{(s)}(\rho, \varphi)\}$:

$$\mathbf{E}_t(\rho, \varphi) = \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^{N_s} a_t^{(s)} \Phi_t^{(s)}(\rho, \varphi), \quad (5.33)$$

где N_s ($s=1, 2$) — число собственных волн каждого типа, учитываемых в разложении.

Подставив (5.33) в уравнение (5.31) и вычислив моменты полученного уравнения с функциями $\Phi_v^{(u)}(\rho, \varphi)$ для $u=1, v=1, 2, \dots, N_1$ и $u=2, v=1, 2, \dots, N_2$, приходим к системе (N_1+N_2) уравнений с (N_1+N_2) неизвестными:

$$2y_1^{(2)} \delta_{2u} \delta_{1v} = \sum_{s=1}^2 \sum_{t=1}^{N_s} a_t^{(s)} \left\{ y_t^{(s)} \delta_{su} \delta_{tv} + \sum_{j=1}^2 \sum_{m=1}^{\infty} Y_m^{(j)} C_{vm}^{(uj)} C_{tm}^{(sq)} \right\}, \quad (5.34)$$

$$u=1, v=1, 2, \dots, N_1 \text{ и } u=2, v=1, 2, \dots, N_2,$$

где коэффициенты связи собственных волн обеих областей

$$C_{mn}^{(sq)} = \iint_A \Phi_m^{(s)}(\rho, \varphi) \cdot \Psi_n^{(q)}(\rho, \varphi) ds. \quad (5.35)$$

Явные выражения для этих коэффициентов имеют вид

$$C_{mn}^{11} = 2 \frac{(x_n a/b)^2}{x_n J_2(x_n)} \frac{J_1(x_n a/b)}{x_m^2 - (x_n a/b)^2}, \quad (5.35a)$$

$$C_{mn}^{(12)} = 0, \quad (5.35б)$$

$$C_{mn}^{(21)} = - \frac{2J_1(x_n a/b)}{x_n J_2(x_n) \sqrt{x_m'^2 - 1}}, \quad (5.35в)$$

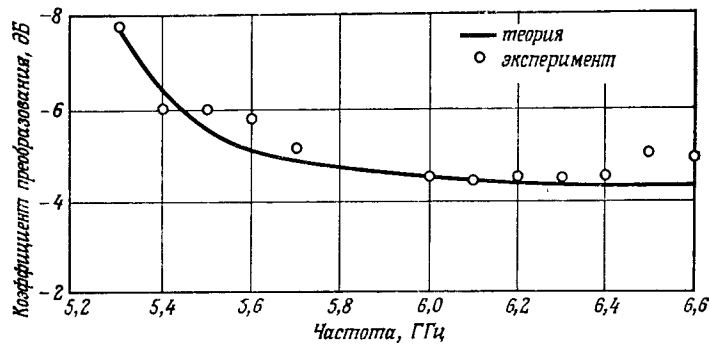
$$C_{mn}^{(22)} = \frac{2x_m'^2 (x_n' a/b) J_1(x_n' a/b)}{J_1(x_n') \sqrt{(x_m'^2 - 1)(x_n'^2 - 1)} [(x_m')^2 - (x_n' a/b)^2]}. \quad (5.35г)$$

Задача 5. Получите выражения (5.35a) — (5.35г).

Полученную систему уравнений можно решать либо обращением матрицы, либо с помощью рассмотренной выше итерационной процедуры¹⁾ [10, 14].

¹⁾ Для записи уравнений (5.34) в матричном виде удобно преобразовать их к системе с одним текущим индексом. Это можно сделать несколькими способами. Например, можно сначала переименовать волны одного типа, а затем расположить волны другого типа. Иной способ состоит в размещении собственных волн в порядке возрастания величины их постоянных распространения.

В рассматриваемой задаче матричные элементы выражаются через проводимости для собственных волн и коэффициенты связи для различных мод. Для вычисления этих величин требуется знать нули функций $J_1(x)$ и $J_1'(x)$ и значения функций Бесселя $J_0(x)$, $J_1(x)$ и $J_2(x)$. Стандартные программы вычисления функций Бесселя в настоящее время имеются практически в каждом вычислительном центре. Поэтому расчет коэффициентов связи собственных волн может быть проведен сравнительно легко и с большой точностью.



Фиг. 5.3. Коэффициент преобразования волны TE_{11} в волну TM_{11} на сочленении круглых волноводов ($a = 2,67$ см, $b = 3,8$ см).

Получив решение системы (5.34), нетрудно по формулам (5.29) вычислить коэффициенты отражения и преобразования в различные волны. Пример частотной зависимости свойств преобразования мод для рассматриваемой неоднородности приведен на фиг. 5.3. Эффективность преобразования определялась как отношение радиальных составляющих электрического поля волн TM_{11} и TE_{11} , вычисленное вблизи стенки волновода большого радиуса:

$$\eta = 20 \lg \left| \frac{E_{\rho}^{TM}}{E_{TE}^{TM}} \right|_{\rho=b} \text{ (дБ)} = 20 \lg \left| \frac{B_1^{(1)} J_1'(x_1)}{B_1^{(2)} J_2(x_1)} \sqrt{x_1'^2 - 1} \right| \text{ (дБ)}.$$

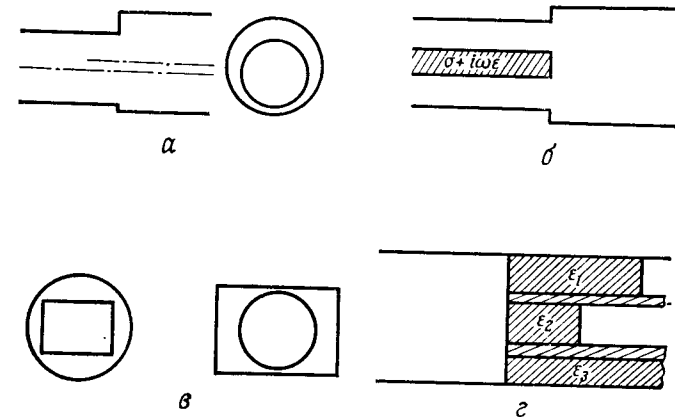
При расчете учитывалось по 25 волн типа TE и TM в каждой области. На фиг. 5.3 приведены также экспериментальные данные. Видно, что согласие результатов расчета и экспериментальных данных достаточно хорошее.

Заметим, что преобразование волн типа TE в волны типа TM можно осуществить и с помощью других неоднородностей, таких, как диафрагма или штырь. Неоднородность типа диафрагмы может быть рассмотрена методом, аналогичным описанному. При толщине диафрагмы, сравнимой с длиной волны, мы

имеем дело с последовательностью двух неоднородностей, метод рассмотрения которой будет рассмотрен ниже.

Задача 6. Получите интегральные уравнения для задачи о бесконечно тонкой идеально проводящей диафрагме в круглом волноводе.

В рассмотренной нами задаче оси обоих волноводов совпали и осевая симметрия структуры не нарушалась. Поэтому рассеянное поле состояло из волн с той же зависимостью от



Фиг. 5.4. Различные ступенчатые неоднородности в волноводах.

а — сочленение круглых волноводов с несовпадающими осями; б — сочленение круглого волновода с коаксиальным волноводом ($\sigma \rightarrow \infty$) или с волноводом, нагруженным диэлектриком ($\sigma = 0$); в — сочленение круглого и прямоугольного волноводов; г — тройное разветвление волновода.

азимута, что и у падающей волны. В более общем случае оси двух волноводов могут быть смещены, как показано на фиг. 5.4а, или же в плоскости сочленения могут располагаться тонкие диафрагмы. На фиг. 5.4 показаны также некоторые другие виды ступенчатых неоднородностей в волноводах. Еще один класс задач, в которых полезно вводить границу раздела, представляют бесконечные фазированные решетки [15]. Если сечение одного волновода не может быть полностью включено в сечение другого, можно ввести «согласующий» участок на стыке волноводов такого сечения, которое перекрывало бы сечения обоих волноводов [16, 17]. Исходная задача может рассматриваться как предельный случай, когда длина такого «согласующего» участка стремится к нулю. При таком подходе рассмотрение сводится к задаче о двух последовательных неоднородностях, которая исследуется в § 6.

Как ясно из вида уравнений (5.34), решение задач о волноводных неоднородностях в значительной степени сводится к эффективному способу вычисления элементов матрицы системы, содержащих коэффициенты связи мод $\{C_{mn}^{(sq)}\}$. Если интегралы, входящие в эти коэффициенты, берутся в замкнутом виде, вычисление матричных элементов сильно упрощается. В следующем параграфе мы рассмотрим пример случая, когда эти коэффициенты связи приходится находить численно. В принципе и в этом случае можно пользоваться интегральным уравнением и методом моментов, хотя собственные функции не выражаются в аналитическом виде. В таких случаях следует прежде всего численными методами, например методом конечных разностей, определить собственные волны структуры и их импедансы.

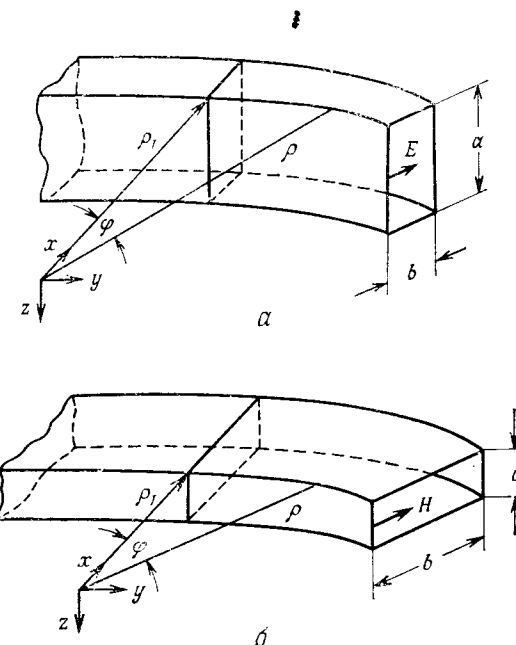
§ 4. СОЧЛЕНЕНИЕ ПРЯМОГО И ИЗОГНУТОГО ВОЛНОВОДОВ

Теперь мы рассмотрим рассеяние на стыке прямого и изогнутого прямоугольных волноводов одинакового сечения [18]. Для упрощения анализа принимаем, что изгиб второго волновода происходит по дуге окружности. На фиг. 5.5 показаны два возможных случая сочленения прямого волновода с изогнутым. В цилиндрической системе координат (ρ, φ, z) боковые стенки изогнутого волновода совпадают с координатными поверхностями $\rho = \rho_1$ и $\rho = \rho_2$. Верхняя и нижняя стенки расположены соответственно при $z=0$ и $z=a$. (Изогнутый волновод представляет собой незамкнутый отрезок структуры с углом раствора φ_0 .) Направление распространения падающего поля совпадает с положительным направлением отсчета φ .

1. СОБСТВЕННЫЕ ВОЛНЫ ИЗОГНУТОГО ВОЛНОВОДА

Прежде чем перейти к формулировке задачи, следует определить собственные волны, которые могут существовать в обоих рассматриваемых волноводах. Собственные волны в прямолинейном волноводе хорошо известны. Волны, которые могут распространяться в изогнутом волноводе, известны не так хорошо, хотя они подробно исследовались многими авторами [19]. Согласно их результатам, в изогнутом волноводе могут распространяться волны двух типов: продольные электрические волны *LSE* и продольные магнитные волны *LSM*. Электрический вектор волн типа *LSE* лежит в плоскости ρ, φ ; для волн типа *LSM* характерно аналогичное распределение магнитного поля. Вообще говоря, при произвольном сочленении волны обоих типов оказываются связанными, но в рассматриваемой задаче в силу однородности структуры вдоль оси z волны *LSE* и *LSM* оказываются независимыми, т. е. при падении на неоднородность

волны *LSE* возбуждаются лишь волны типа *LSE*, а при падении волны *LSM* также возбуждаются лишь волны того же типа. Поэтому мы ограничимся здесь рассмотрением лишь волны *LSE*; случай волны *LSM* может быть исследован совершенно аналогично.



Фиг. 5.5. Сочленение прямого и изогнутого прямоугольных волноводов. а — изгиб в *E*-плоскости; б — изгиб в *H*-плоскости.

Поскольку для волн типа *LSE* электрическое поле поперечно по отношению к оси z , оно может быть описано магнитным вектором Герца, имеющим лишь z -составляющую:

$$\pi_h = \pi_h \hat{z}, \quad (5.36)$$

где функция π_h должна удовлетворять уравнению Гельмгольца. В цилиндрической системе координат оно имеет вид

$$\left[\frac{1}{\rho} \frac{\partial}{\partial \rho} \left(\rho \frac{\partial}{\partial \rho} \right) + \frac{1}{\rho^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right] \pi_h = 0. \quad (5.37)$$

Электрическое и магнитное поля могут быть получены из π_h с помощью соотношений

$$\begin{aligned} \mathbf{E} &= i\omega\mu_0 \operatorname{rot} \pi_h, \\ \mathbf{H} &= \operatorname{rot} \operatorname{rot} \pi_h. \end{aligned} \quad (5.38)$$

Решения уравнения Гельмгольца могут быть получены методом разделения переменных. Примем зависимость от φ в виде $e^{\mp i\nu\varphi}$ где ν — постоянная распространения. Подставив это выражение в (5.37), нетрудно убедиться, что для удовлетворения граничным условиям следует выбрать π_n в виде

$$\pi_n = C_\nu(h_n\rho) \sin \frac{n\pi}{a} z e^{\mp i\nu\varphi}, \quad n = 1, 2, \dots; \quad (5.39)$$

здесь $h_n^2 = k^2 - (n\pi/a)^2$, а C_ν определяется формулой

$$C_\nu(h\rho) = J'_\nu(h\rho_2) Y_\nu(h\rho) - Y'_\nu(h\rho_2) J_\nu(h\rho), \quad (5.40)$$

где $J_\nu(x)$ и $Y_\nu(x)$ — функции Бесселя первого и второго рода порядка ν , а штрихом обозначена производная по аргументу. Функции $C_\nu(h\rho)$ выбраны так, что касательное электрическое поле обращается в нуль при $\rho = \rho_2$. потребовав выполнения аналогичного условия при $\rho = \rho_1$, приходим к характеристическому уравнению

$$C'_\nu(h_n\rho_1) = J'_\nu(h_n\rho_2) Y'_\nu(h_n\rho_1) - Y'_\nu(h_n\rho_2) J'_\nu(h_n\rho_1) = 0, \quad (5.41)$$

определяющему постоянные распространения ν .

Задача 7. Покажите, что уравнение (5.41) является характеристическим уравнением для собственных волн типа LSE в изогнутом волноводе. Получите также характеристическое уравнение для волн LSM.

Составляющие поля для различных собственных волн можно вычислить, подставив (5.39) в (5.38). Решение характеристического уравнения проводилось многими авторами как численными, так и аналитическими методами. Подробное изложение численных результатов и обширную библиографию можно найти в работе [19].

2. ВЫВОД ИНТЕГРАЛЬНОГО УРАВНЕНИЯ

После того как найдены собственные волны изогнутого волновода, можно приступить к выводу интегрального уравнения. Для удобства вычислений поле в прямолинейной волноводной секции будем описывать не обычным способом, а суперпозицией собственных волн типа LSM и LSE. Эти волны можно представить в виде линейных комбинаций обычно используемых мод TE и TM и наоборот.

Задача 8. Покажите, что собственные волны типа LSE и LSM в прямоугольном волноводе могут быть выражены через комбинации волн типа TE и TM и наоборот.

Собственные функции, описывающие волну типа LSE в прямолинейном волноводе, имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{mn}^{(s)} &= \Phi_m^{(s)}(x) \psi_n(z) \hat{x}, \\ \mathbf{h}_{mn}^{(s)} &= -\frac{1}{\omega\mu_0\gamma_{mn}} \frac{d}{dx} \Phi_m^{(s)}(x) \frac{d}{dz} \psi_n(z) \hat{x} - \frac{h_n^2}{\omega\mu_0\gamma_{mn}} \Phi_m^{(s)}(x) \psi_n(z) \hat{z}, \end{aligned} \quad (5.42)$$

где

$$\Phi_m^{(s)}(x) = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0m}}{b}} \cos \frac{m\pi}{b} (\rho_2 - x), \quad m = 0, 1, \dots, \quad (5.43a)$$

$$\delta_{00} = 1, \quad \delta_{0m} = 0, \quad m \geq 1;$$

$$\psi_n(z) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{n\pi}{a} z, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (5.43b)$$

$$h_n^2 = k^2 - (n\pi/a)^2, \quad \gamma_{mn}^2 = h_n^2 - (m\pi/b)^2.$$

Собственные функции нормированы следующим образом:

$$\langle \mathbf{e}_{mn}^{(s)}, \mathbf{e}_{pq}^{(s)} \rangle = \iint_A \mathbf{e}_{mn}^{(s)} \cdot \mathbf{e}_{pq}^{(s)} ds = \delta_{mp} \delta_{nq}, \quad (5.44)$$

где A — поперечное сечение волновода. Заметим, что поперечное электрическое поле имеет лишь одну составляющую, а поперечное магнитное поле — две составляющие. Поэтому импедансы не могут быть определены обычным способом.

Собственные функции в изогнутой волноводной секции имеют вид

$$\begin{aligned} \mathbf{e}_{mn}^{(c)} &= \frac{1}{\rho} \Phi_{mn}^{(c)}(h_n\rho) \psi_n(z) \hat{\rho}, \\ \mathbf{h}_{mn}^{(c)} &= -\frac{1}{\omega\mu_0\nu_{mn}} \frac{d}{d\rho} \Phi_{mn}^{(c)}(h_n\rho) \frac{d}{dz} \psi_n(z) \hat{\rho} - \frac{h_n^2}{\omega\mu_0\nu_{mn}} \Phi_{mn}^{(c)}(h_n\rho) \psi_n(z) \hat{z}, \end{aligned} \quad (5.45)$$

где

$$\Phi_{mn}^{(c)}(h_n\rho) = \frac{C_{\nu_{mn}}(h_n\rho)}{\|C_{\nu_{mn}}(h_n\rho)\|}, \quad (5.45a)$$

$$C_{\nu_{mn}}(h_n\rho) = J'_{\nu_{mn}}(h_n\rho_2) Y_{\nu_{mn}}(h_n\rho) - Y'_{\nu_{mn}}(h_n\rho_2) J_{\nu_{mn}}(h_n\rho), \quad (5.46a)$$

$$\|C_{\nu_{mn}}(h_n\rho)\| = \left[\int_{\rho_1}^{\rho_2} (C_{\nu_{mn}}^2/\rho) d\rho \right]^{1/2}. \quad (5.46b)$$

Здесь через ν_{mn} обозначен m -й корень характеристического уравнения (5.41). Функции $\{\Phi_{mn}^{(c)}(h_n\rho)\}$ ортонормированы на отрезке (ρ_1, ρ_2) с весом $1/\rho$ (как можно показать, исходя из

дифференциального уравнения для этих функций, т. е.

$$\int_{\rho_1}^{\rho_2} \varphi_{mn}^{(c)}(h_n \rho) \varphi_{ph}^{(c)}(h_n \rho) \frac{d\rho}{\rho} = \delta_{mp}.$$

В результате собственные векторы электрического поля оказываются ортонормированными на сечении с весом ρ :

$$\int_0^{\rho_2} \int_0^{\rho_2} \mathbf{e}_{mn}^{(c)}(h_n \rho) \cdot \mathbf{e}_{pq}^{(c)}(h_q \rho) \rho ds = \delta_{mp} \delta_{nq}. \quad (5.47)$$

Прежде всего следует ввести представления для полей в обеих областях. Так как структура однородна по оси z , волны с различным числом вариаций по z ортогональны. Поэтому если зависимость поля падающей волны от координаты z описывается функцией $\psi_n(z)$, то рассеянное поле будет иметь ту же зависимость от z . Обозначим падающие волны в прямолинейной и изогнутой секциях соответственно через $S_p^{(s)} \mathbf{e}_{pn}^{(s)}$ и $S_u^{(c)} \mathbf{e}_{un}^{(c)}$. Тогда касательные составляющие поля в каждой из областей можно записать в следующем виде:

в прямолинейной секции

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(x, y, z) &= S_p^{(s)} \mathbf{e}_{pn}^{(s)} e^{-i\gamma_{pn}y} + \sum_m A_m \mathbf{e}_{mn}^{(s)} e^{i\gamma_{mn}y}, \\ \mathbf{H}(x, y, z) &= S_p^{(s)} \mathbf{h}_{pn}^{(s)} e^{-i\gamma_{pn}y} - \sum_m A_m \mathbf{h}_{mn}^{(s)} e^{i\gamma_{mn}y}; \end{aligned} \quad (5.48a)$$

в изогнутой секции

$$\begin{aligned} \mathbf{E}(\rho, \varphi, z) &= S_u^{(c)} \mathbf{e}_{un}^{(c)} e^{i\gamma_{un}\varphi} + \sum_m B_m \mathbf{e}_{mn}^{(c)} e^{-i\gamma_{mn}\varphi}, \\ \mathbf{H}(\rho, \varphi, z) &= -S_u^{(c)} \mathbf{h}_{un}^{(c)} e^{i\gamma_{un}\varphi} + \sum_m B_m \mathbf{h}_{mn}^{(c)} e^{-i\gamma_{mn}\varphi}. \end{aligned} \quad (5.48b)$$

Пусть на общей границе областей ось ρ совпадает с осью x , а направление отсчета y и φ одинаковы. Приравняв касательные составляющие поля на общей границе, получим

$$\begin{aligned} \mathbf{E}_a &= S_p^{(s)} \mathbf{e}_{pn}^{(s)} + \sum_m A_m \mathbf{e}_{mn}^{(s)} = S_u^{(c)} \mathbf{e}_{un}^{(c)} + \sum_m B_m \mathbf{e}_{mn}^{(c)}, \\ \mathbf{H}_a &= S_p^{(s)} \mathbf{h}_{pn}^{(s)} - \sum_m A_m \mathbf{h}_{mn}^{(s)} = -S_u^{(c)} \mathbf{h}_{un}^{(c)} + \sum_m B_m \mathbf{h}_{mn}^{(c)}. \end{aligned} \quad (5.49)$$

Воспользовавшись соотношениями ортогональности (5.44) и (5.47), находим

$$\begin{aligned} S_p^{(s)} \delta_{pm} + A_m &= \iint_A \mathbf{e}_{mn}^{(s)} \cdot \mathbf{E}_a ds, \\ S_u^{(c)} \delta_{um} + B_m &= \iint_A \rho' \mathbf{e}_{mn}^{(c)} \cdot \mathbf{E}_a ds. \end{aligned} \quad (5.50)$$

Заметим, что неизвестные коэффициенты нельзя выразить непосредственно через магнитное поле в раскрыве из-за неортогональности собственных магнитных функций. Подставив выражения (5.50) в (5.49), приходим к интегральному уравнению

$$2S_p^{(s)} \mathbf{h}_{pn}^{(s)} + 2S_u^{(c)} \mathbf{h}_{un}^{(c)} = \iint_A \mathbf{G}(x, z; x', z') \cdot \mathbf{E}_a ds, \quad (5.51)$$

где ядро

$$\mathbf{G}(x, z; x', z') = \sum_m \{ \mathbf{h}_{mn}^{(s)}(x, z) \cdot \mathbf{e}_{mn}^{(s)}(x', z') + x' \mathbf{h}_{mn}^{(c)}(x, z) \cdot \mathbf{e}_{mn}^{(c)}(x', z') \}.$$

3. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА МОМЕНТОВ

Чтобы получить решение уравнения (5.51) методом моментов, неизвестное электрическое поле в раскрыве представляется в виде разложения по собственным функциям прямолинейного или изогнутого волноводов. Обе системы функций полные. Мы будем пользоваться разложением по собственным функциям прямолинейной секции. Пусть

$$\mathbf{E}_a(x, z) = \sum_m a_m \mathbf{e}_{mn}^{(s)}. \quad (5.52)$$

Подставляя это разложение в (5.51), получаем

$$2S_p^{(s)} \mathbf{h}_{pn}^{(s)} + 2S_u^{(c)} \mathbf{h}_{un}^{(c)} = \sum_m a_m \left\{ \sum_r (\mathbf{h}_{rn}^{(s)} \delta_{rm} + b_{mrn} \mathbf{h}_{rn}^{(c)}) \right\},$$

где

$$b_{mrn} = \int_0^{\rho_2} \varphi_{in}^{(s)}(x) \varphi_{rn}^{(c)}(h_n x) dx. \quad (5.53)$$

Найдем моменты по отношению к системе функций $\{\mathbf{h}_{sn}^{(s)}\}$. Вычисляя вклад от обеих составляющих магнитного поля и объединяя результаты, после ряда алгебраических преобразований приходим к системе уравнений

$$\frac{2S_p^{(s)}}{\gamma_{pn}} \delta_{sp} + \frac{2S_u^{(c)}}{\gamma_{un}} b_{sun} = \sum_m a_m \left\{ \frac{\delta_{sm}}{\gamma_{mn}} + \sum_r \frac{b_{mrn} b_{srn}}{\gamma_{rn}} \right\}, \quad s = 0, 1, 2, \dots \quad (5.54)$$

Заметим, что при использовании системы функции прямолинейного волновода $\{\mathbf{e}_{mn}^{(s)}\}$, $\{\mathbf{h}_{mn}^{(s)}\}$ элементы матрицы выражаются в особенно простом виде.

4. НЕКОТОРЫЕ ВОПРОСЫ ТЕХНИКИ ВЫЧИСЛЕНИЙ

Возможность решения задачи определяется возможностью вычисления постоянных распространения собственных волн γ_{rn} и коэффициентов связи b_{mrn} . Расчет этих величин связан с

некоторыми вычислительными трудностями. Как отмечалось выше, постоянные распространения волн в изогнутом волноводе находятся решением трансцендентного уравнения (5.41). Переменной в этом уравнении служит не аргумент функций Бесселя, а их порядок. Аргумент зависит от частоты и размеров волновода и остается постоянным, если эти величины выбраны. При отсутствии потерь в заполняющей волновод среде аргумент действителен. Поэтому постоянные распространения либо чисто действительны, либо чисто мнимы, как и следовало ожидать из физических соображений. Следовательно, при заданных $h_n \rho_1$ и $h_n \rho_2$ необходимо искать только действительные или мнимые решения v .

Если программы вычисления функций Бесселя целого порядка имеются во многих библиотеках стандартных программ, то для функций Бесселя дробного порядка такие программы встречаются относительно редко. Недавно Кохран и его сотрудники составили подпрограммы, использующие комбинации различных алгоритмов для вычисления функций Бесселя произвольного действительного порядка от действительного аргумента. Эти подпрограммы предусматривают разложения функций Бесселя в степенные ряды при малых значениях индекса и аргумента, нисходящие рекурсивные соотношения Голдсмита при средних значениях индекса и аргумента и асимптотическое разложение для больших значений индекса и аргумента.

Программа вычисления функций Бесселя мнимого порядка до сих пор не существует. Однако можно воспользоваться асимптотическим разложением функций Бесселя, если учесть, что значения модуля чисто мнимых постоянных распространения обычно велики, если частота не слишком близка к граничной частоте собственных волноводных волн. Особенно полезно для этой цели однородное асимптотическое разложение по функциям Эйри, полученное Олвером [20]. Для функций Эйри можно воспользоваться приближенным выражением, учитывающим основные члены разложения по амплитуде и фазе. В результате получаем

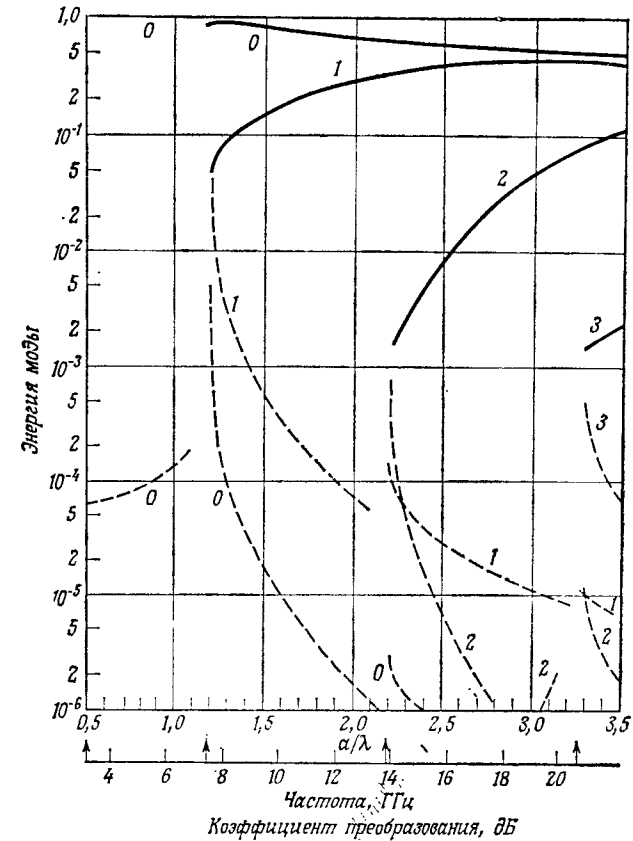
$$C_v \approx \frac{-2}{\pi \mu [1 + \xi^2 a^2 (1 + z^2)]^{1/4}} \frac{\sqrt{1 + z^2}}{z} \cos [\mu (\omega(z) - \omega(\xi z))] + \frac{z}{2\mu (1 + z^2)} \sin [\mu (\omega(z) - \omega(\xi z))], \quad (5.55)$$

$$\omega(z) = \ln \left[\frac{1 + \sqrt{1 + z^2}}{z} \right] - \sqrt{1 + z^2}.$$

$$v = i\mu, \quad z = \frac{h\rho_2}{\mu}, \quad \xi = \frac{\rho}{\rho_2}.$$

Приведенное выражение дает результат с точностью до пятой или шестой значащей цифры при $|v| > 5$.

Мы рассмотрели вычисление функций Бесселя от действительного аргумента с произвольным действительным или боль-



Фиг. 5.6. Преобразование собственных волн на сочленении прямого и изогнутого в E -плоскости волноводов.

Падающая волна типа LSE_0 , нормированная по энергии на единицу; $\rho_1/b = 1,148$, $a/b = 2,15$. Сплошными линиями изображены энергии мод в изогнутом волноводе, штриховыми — в прямом волноводе. Стандартный волновод трехсантиметрового диапазона.

шим мнимым индексом. Постоянные распространения волн можно определить, решая трансцендентное уравнение одним из известных способов, например методом секущих или методом Ньютона — Рафсона [21]. Подставив найденные значения v в (5.53) и учитывая (5.45а), (5.46а), (5.46б), можно найти коэффициенты связи различных волн. Так как замкнутого выражения

для этих коэффициентов нет, приходится пользоваться численным интегрированием. Для этого необходимы численные значения собственных функций в таком числе точек на интервале интегрирования, которое обеспечило бы возможность вычисления интегралов.

Подставив решение системы (5.54) для коэффициентов разложения поля в раскрыве в соотношение (5.50), определим коэффициенты возбуждения собственных волн. Как можно убедиться с помощью теоремы Пойтинга, поток энергии в прямолинейной и изогнутой секциях представляется суммой потоков, переносимых отдельными собственными волнами. Поток энергии для собственной волны с индексами mn равен

$$P_{mn} = \begin{cases} \frac{h_n^2}{\omega \mu_0 \gamma_{mn}} |A_m|^2 & \text{в прямом волноводе,} \\ \frac{h_n^2}{\omega \mu_0 \gamma_{mn}} |B_m|^2 & \text{в изогнутом волноводе.} \end{cases}$$

На фиг. 5.6 показано преобразование энергии волны типа LSE_{01} , набегающей из прямого волновода, в энергию собственных волн прямого и изогнутого волноводов.

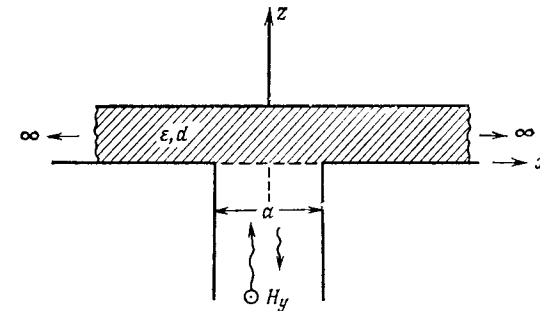
§ 5. ВОЛНОВОДНАЯ АНТЕННА, ЭКРАНИРОВАННАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКОЙ ПЛАСТИНОЙ

Волноводные излучатели получили широкое распространение. Они используются в качестве антенн на самолетах и космических ракетах и как излучающие элементы в фазированных решетках. Антенны указанного типа часто работают в условиях экранировки слоем диэлектрика. Так, например, антенны космического корабля в течение некоторого времени оказываются покрытыми слоем плазмы. Кроме того, антенны, как правило, экранируются от внешнего пространства с помощью обтекателя. Для волноводных антенн, обычно смонтированных заподлицо, защитные обтекатели удобно выполнять в виде диэлектрических пластин. Последние могут быть также применены для согласования входного импеданса фазированных решеток [15].

Для задач об излучении из волновода характерно наличие бесконечного свободного пространства вне волновода. В результате поле излучения следует характеризовать непрерывным спектром частот. Функцию Грина для полупространства, включающего и диэлектрическую пластину над заземленной плоскостью, удается построить лишь в виде преобразования Фурье. В результате в ядро интегрального уравнения входят интегралы Фурье. В этом параграфе мы рассмотрим в основном решение интегрального уравнения с таким ядром методом моментов.

В волноводных антеннах могут использоваться различные волноводы — прямоугольные, круглые, эллиптические и т. д. Для простоты мы рассмотрим излучение из плоского волновода с фланцем, изображенного на фиг. 5.7. Если принять, что зависимость от координаты y отсутствует, то поля можно разложить на независимые волны типа TE и TM относительно z . Мы рассмотрим лишь волны типа TM . Случай волн типа TE может быть исследован аналогичным способом [22, 23].

Хотя задачу можно сформулировать как по отношению к неизвестному касательному магнитному полю в раскрыве, так



Фиг. 5.7. Плоский волновод с фланцем, экранированный диэлектрической пластиной.

и по отношению к касательному электрическому полю, второй способ оказывается более удобным для решения численными методами из-за простого вида граничных условий при $z=0$. Составляющие электромагнитного поля для волн типа TM при $z \geq 0$ должны удовлетворять следующим уравнениям, вытекающим из уравнений Максвелла:

$$\begin{aligned} i\omega \epsilon_0 \epsilon_p E_x &= -\frac{\partial H_y}{\partial z}, & i\omega \epsilon_0 \epsilon_r E_z &= \frac{\partial H_y}{\partial x}, \\ \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \epsilon_p \right) H_y &= 0, \end{aligned} \quad (5.56)$$

где

$$\epsilon_p = \begin{cases} \epsilon & \text{при } 0 \leq z \leq d, \\ 1 & \text{при } d < z. \end{cases}$$

Пусть $H(x)$ и $\mathcal{H}(\alpha)$ — функции, связанные прямым и обратным преобразованиями Фурье:

$$\mathcal{H}(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} H(x) e^{-i\alpha x} dx, \quad H(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \mathcal{H}(\alpha) e^{i\alpha x} d\alpha. \quad (5.57)$$

Применив преобразование Фурье по x к уравнению (5.56), получим

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial z^2} + (k_0^2 \epsilon_p - \alpha^2) \right] \mathcal{H}_y(\alpha, z) = 0. \quad (5.58)$$

Решение этого уравнения, удовлетворяющее условиям излучения (при $z \rightarrow \infty$), можно записать в виде

$$\mathcal{H}_y(\alpha, z) = \begin{cases} B(\alpha) \cos \Gamma_\epsilon z + C(\alpha) \sin \Gamma_\epsilon z, & 0 \leq z \leq d, \\ D(\alpha) e^{-i\Gamma(z-d)}, & d \leq z, \end{cases} \quad (5.59)$$

где $B(\alpha)$, $C(\alpha)$ и $D(\alpha)$ — неизвестные функции, которые подлежат определению из граничных условий при $z=0$ и $z=d$. Ветви корней, определяющие постоянные распространения Γ и Γ_ϵ , выбираются так, что

$$\Gamma_\epsilon = \sqrt{k^2 \epsilon - \alpha^2} = -i \sqrt{\alpha^2 - k^2 \epsilon}, \quad \Gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2} = -i \sqrt{\alpha^2 - k^2}.$$

Воспользовавшись уравнениями (5.56) и решением (5.59), получим выражение для фурье-образа касательного электрического поля:

$$\mathcal{E}_x(\alpha, z) = \begin{cases} -\frac{i\Gamma_\epsilon}{\omega \epsilon_0 \epsilon} [B(\alpha) \sin \Gamma_\epsilon z - C(\alpha) \cos \Gamma_\epsilon z], & 0 \leq z \leq d, \\ \frac{\Gamma}{\omega \epsilon_0} D(\alpha) e^{-i\Gamma(z-d)}, & d \leq z. \end{cases} \quad (5.60)$$

Полагая здесь $z=0$, находим, что фурье-образ касательного электрического поля в раскрыве $\mathcal{E}_x(0, \alpha)$ равен $i\Gamma_\epsilon C(\alpha)/\omega \epsilon_0 \epsilon$. Условия непрерывности касательных составляющих поля при $z=d$ дают соотношения

$$\begin{aligned} B(\alpha) \cos \Gamma_\epsilon d + C(\alpha) \sin \Gamma_\epsilon d &= D(\alpha), \\ -\frac{i\Gamma_\epsilon}{\omega \epsilon_0 \epsilon} [B(\alpha) \sin \Gamma_\epsilon d - C(\alpha) \cos \Gamma_\epsilon d] &= \frac{\Gamma}{\omega \epsilon_0} D(\alpha). \end{aligned} \quad (5.61)$$

С помощью этих соотношений два неизвестных коэффициента, например $B(\alpha)$ и $D(\alpha)$, можно выразить через третий:

$$\begin{aligned} B(\alpha) &= i \frac{\Gamma_\epsilon + i\epsilon \operatorname{tg} \Gamma_\epsilon d}{\epsilon \Gamma + i\Gamma_\epsilon \operatorname{tg} \Gamma_\epsilon d} C(\alpha), \\ D(\alpha) &= \frac{i\Gamma_\epsilon}{\epsilon \Gamma \cos \Gamma_\epsilon d + i\Gamma_\epsilon \sin \Gamma_\epsilon d} C(\alpha). \end{aligned} \quad (5.62)$$

Подставляя эти выражения в (5.59) и (5.60) и применяя обратное преобразование Фурье, получаем

$$\begin{aligned} E_x(x, z) &= \int_A dx' \frac{\partial}{\partial z} F_\epsilon(x, z; x', 0) E_x(x', 0), \\ H_y(x, z) &= \omega \epsilon_0 \epsilon \int_A dx' F_\epsilon(x, z; x', 0) E_x(x', 0), \end{aligned} \quad (5.63)$$

где

$$F_\epsilon(x, z; x', 0) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} da e^{-ia(x-x')} \times \begin{cases} \frac{1}{\Gamma_\epsilon} \left[\frac{\Gamma_\epsilon \cos \Gamma_\epsilon(d-z) + i\epsilon \Gamma \sin \Gamma_\epsilon(d-z)}{\epsilon \Gamma \cos \Gamma_\epsilon d + i\Gamma_\epsilon \sin \Gamma_\epsilon d} \right], & 0 \leq z \leq d, \\ \frac{e^{-i\Gamma(z-d)}}{\epsilon \Gamma \cos \Gamma_\epsilon d + i\Gamma_\epsilon \sin \Gamma_\epsilon d}, & d \leq z. \end{cases}$$

Формулы (5.63) выражают поле в области $z \geq 0$ через касательное электрическое поле в раскрыве.

Поле в волноводе можно вывести аналогично тому, как это сделано в § 3. Разложим касательные составляющие поля по нормальным собственным волнам. Воспользовавшись ортогональностью этих волн, выразим касательное магнитное поле через электрическое поле в раскрыве. Наконец, потребовав непрерывности касательного магнитного поля в раскрыве, получим искомое интегральное уравнение

$$2y_1 \varphi_1(x) = \int_A dx' \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \varphi_n(x) \varphi_n(x') + \omega \epsilon_0 \epsilon \tilde{F}_\epsilon(x, x') \right\} E_x(x', 0), \quad (5.64)$$

где

$$\begin{aligned} \tilde{F}_\epsilon(x, x') &= F_\epsilon(x, z; x', 0)|_{z=0} = \\ &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} da \frac{1}{\Gamma_\epsilon} \frac{\Gamma_\epsilon + i\epsilon \Gamma \operatorname{tg} \Gamma_\epsilon d}{\epsilon \Gamma + i\Gamma_\epsilon \operatorname{tg} \Gamma_\epsilon d} e^{-ia(x-x')}. \end{aligned} \quad (5.65)$$

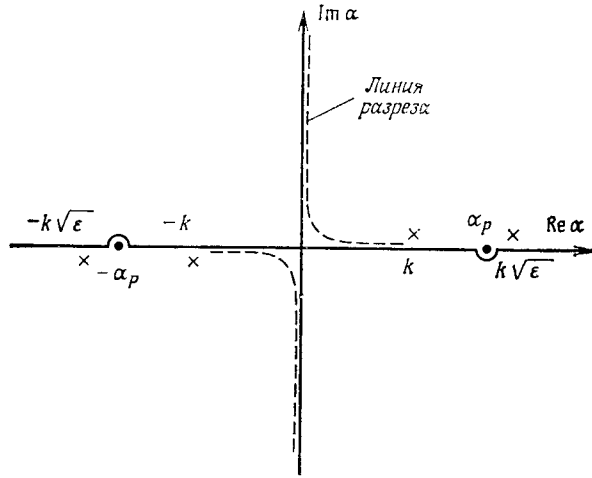
Контур интегрирования в выражении (5.65) проходит на комплексной плоскости α вдоль действительной оси, как показано на фиг. 5.8. Подынтегральное выражение имеет две точки ветвления в нулях функции Γ . (Поскольку подынтегральное выражение является четной функцией от Γ_ϵ , нули Γ_ϵ не являются точками ветвления.) Для однозначного определения подынтегрального выражения из точек ветвления проведены разрезы. Как видно на фиг. 5.8, контур интегрирования огибает полюсы подынтегрального выражения. Эти полюсы определяются решением уравнения $\epsilon \Gamma = -i\Gamma_\epsilon \operatorname{tg} \Gamma_\epsilon d$, представляющего собой дисперсионное уравнение для поверхностных волн типа TM , распространяющихся вдоль диэлектрической пластины, лежащей на металлической плоскости.

Ядро полученного интегрального уравнения содержит вклады как дискретного, так и непрерывного спектра. Вклад непрерывного спектра может быть выражен, по-видимому, лишь в виде интеграла Фурье. При $\epsilon=1$ эту часть удается проинте-

грировать в замкнутом виде; в этом случае

$$\tilde{F}_\varepsilon(x, x')|_{\varepsilon=1} = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{1}{\Gamma} e^{-i\alpha(x-x')} = \frac{1}{2} H_0^{(2)}(k|x-x'|) \quad (5.65a)$$

и рассматриваемое интегральное уравнение существенно упрощается [22].



Фиг. 5.8. Контур интегрирования.

Задача 9. Проверьте соотношение (5.65a).

Рассмотрим теперь решение интегрального уравнения (5.64) методом моментов. Как и в предыдущих случаях, в качестве базисных и весовых функций примем собственные функции волновода Полагая

$$E_x(x, 0) \approx \sum_{p=1}^N V'_p \Phi_p(x), \quad \Phi_p(x) = \sqrt{\frac{2-\delta_{1p}}{a}} \cos \frac{2(p-1)\pi}{a} x \quad (5.66)$$

и следуя обычному способу, получаем систему N уравнений для N неизвестных коэффициентов

$$\sum_{p=1}^N B_{qp} V'_p = 2y_1 \delta_{q1}, \quad q = 1, 2, \dots, N, \quad (5.67)$$

где

$$B_{qp} = y_p \delta_{qp} + \omega \varepsilon_0 \varepsilon \int_A d\nu \varphi_q(x) \int_A dx' \tilde{F}_\varepsilon(x, x') \varphi_p(x'). \quad (5.68)$$

Матричные элементы B_{qp} содержат интегралы с бесконечными пределами, определяющие функцию $F_\varepsilon(x, x')$. Расчет этих интегралов может оказаться трудным и требующим большого времени. Поэтому желательно преобразовать подынтегральное выражение так, чтобы максимально упростить вычисления. При этом оказываются полезными следующие математические и физические соображения [23].

Как видно из спектрального разложения (5.65), волноводная антенна возбуждает в верхнем полупространстве $z \geq 0$ волны с непрерывным бесконечным спектром поперечных волновых чисел $-\infty \leq \alpha \leq \infty$. Лишь часть этого спектрального распределения, отвечающая условию $|\alpha^2| \leq k^2$, составляют «видимые» (распространяющиеся) волны, формирующие поле излучения в дальней зоне. Спектральная область $k^2 < \alpha^2 < k^2 \varepsilon$ соответствует поверхностным волнам. Остальная часть спектра принадлежит неоднородным (или затухающим) волнам, экспоненциально убывающим при удалении от плоскости, где они возбуждаются. Естественно предположить, что существенно влиять на распределение поля в раскрыве могут лишь те волны, которые претерпевают многократные отражения от плоскости раскрыва антенны и границы диэлектрик — воздух. Это означает, что существует такое число $L > k\sqrt{\varepsilon}$, что часть спектра, лежащая выше L , фактически «не видит» границы диэлектрик — воздух из-за быстрого экспоненциального затухания соответствующих волн.

Исходя из этого, исследуем подынтегральное выражение в $\tilde{F}_\varepsilon(x, x')$; мы замечаем, что при $\alpha^2 > k^2 \varepsilon$ обе постоянные распространения Γ и Γ_ε становятся чисто мнимыми. При этом подынтегральное выражение в $\tilde{F}_\varepsilon(x, x')$ можно записать в виде

$$\frac{i}{|\Gamma_\varepsilon|} \frac{|\Gamma_\varepsilon| + \varepsilon |\Gamma| \operatorname{th} |\Gamma_\varepsilon| d}{\varepsilon |\Gamma| + |\Gamma_\varepsilon| \operatorname{th} |\Gamma_\varepsilon| d} e^{-i\alpha(x-x')}.$$

Поскольку при больших u $\operatorname{th} u \approx 1$, возьмем число L настолько большим, чтобы при $|\Gamma_\varepsilon| d \geq L$ было справедливо соотношение

$$\frac{|\Gamma_\varepsilon| + \varepsilon |\Gamma| \operatorname{th} |\Gamma_\varepsilon| d}{\varepsilon |\Gamma| + |\Gamma_\varepsilon| \operatorname{th} |\Gamma_\varepsilon| d} \approx 1.$$

Это приближение можно сделать сколь угодно точным, выбрав достаточно большое значение L . Учтя сказанное, можно переписать выражение (5.65) в виде

$$\tilde{F}_\varepsilon(x, x') = \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{1}{\Gamma_\varepsilon} e^{-i\alpha(x-x')} + \frac{1}{2\pi} \int_{-\infty}^{\infty} d\alpha \frac{1}{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\Gamma_\varepsilon - \varepsilon \Gamma)(1 - i \operatorname{tg} \Gamma_\varepsilon d)}{\varepsilon \Gamma + i \Gamma_\varepsilon \operatorname{tg} \Gamma_\varepsilon d} e^{-i\alpha(x-x')}. \quad (5.69)$$

Первый из интегралов вычисляется в явном виде [см. (5.65a)], во втором же бесконечные пределы можно заменить на L по указанным выше соображениям. В результате получаем

$$\tilde{F}_\varepsilon(x, x') \approx \frac{1}{2} H_0^{(2)}(k \sqrt{\varepsilon} |x - x'|) + \frac{1}{2\pi} \int_{-L}^L d\alpha \frac{1}{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\Gamma_\varepsilon - \varepsilon\Gamma)(1 - i \operatorname{tg} \Gamma_\varepsilon d)}{\varepsilon\Gamma + i\Gamma_\varepsilon \operatorname{tg} \Gamma_\varepsilon d} e^{-i\alpha(x-x')}. \quad (5.69a)$$

Вычисляя матричные коэффициенты B_{qp} с использованием вместо (5.65) выражения (5.69a), получаем

$$B_{qp} \approx y_p \delta_{qp} + D_{qp} + \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{2\pi} \int_{-L}^L d\alpha \frac{(-1)^{p+q} \sqrt{(2 - \delta_{1p})(2 - \delta_{1q})}}{a} \frac{1}{\Gamma_\varepsilon} \frac{(\Gamma_\varepsilon - \varepsilon\Gamma)(1 - i \operatorname{tg} \Gamma_\varepsilon d)}{\varepsilon\Gamma + i\Gamma_\varepsilon \operatorname{tg} \Gamma_\varepsilon d} \times \frac{4a^2 \sin^2(\alpha a/2)}{[(2(q-1)\pi/a)^2 - a^2][(2(p-1)\pi/a)^2 - a^2]}, \quad (5.70)$$

где

$$D_{qp} = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{2} \int_A dx \varphi_q(x) \int_A dx' H_0^{(2)}(k \sqrt{\varepsilon} |x - x'|) \varphi_p(x') = \frac{\omega \varepsilon_0 \varepsilon}{2} \int_0^\omega ds F_{qp}(s) H_0^{(2)}(k \sqrt{\varepsilon} s), \quad (5.70a)$$

$$F_{qp}(s) = (-1)^{p+q} \sqrt{(2 - \delta_{1p})(2 - \delta_{1q})} \times \frac{[(p-1) \sin [2(p-1)\pi s/a] - (q-1) \sin [2(q-1)\pi s/a]]}{\pi [(q-1)^2 - (p-1)^2]}.$$

Задача 10. Получите уравнение (5.70a).

Некоторые вопросы техники вычислений

Матричные элементы в (5.67) состоят из двух частей. Замена бесконечных пределов интегрирования в интегральных слагаемых на конечные облегчает вычисление этих интегралов. Практически значение L не приходится брать очень большим, так как $\operatorname{th} u$ приближается к единице весьма быстро. Так, при u больше 6,5 эта функция отличается от единицы лишь в шестом знаке. Поэтому, если мы хотим вычислять интегралы с точностью до пятой значащей цифры, достаточно положить

$$L = \sqrt{(6,5/d)^2 + k^2 \varepsilon}.$$

При вычислении интегралов по контуру практически иногда оказывается более удобным деформировать контур от действи-

тельной оси. Это особенно желательно, если подынтегральное выражение имеет полюсы, соответствующие поверхностным волнам. В таких случаях интегралы приходится вычислять в смысле главного значения Коши (с добавлением вкладов вычетов), что требует специальных предосторожностей при численном интегрировании.

Величины D_{qp} также приходится вычислять численным интегрированием. Так как функция $H_0^{(2)}(k \sqrt{\varepsilon} s)$ имеет логарифмическую особенность в нуле, интегрирование удобно проводить в два этапа: от 0 до δ и от δ до α . В первом интеграле, если δ выбрано достаточно малым, функция $H_0^{(2)}(k \sqrt{\varepsilon} s)$ может быть приближенно представлена первыми членами ее степенного разложения и интеграл берется в замкнутом виде. Вторая часть вычисляется регулярными методами численного интегрирования с использованием стандартных программ вычисления функций Ханкеля. При этом очень удобно чебышевское представление функции Ханкеля [24].

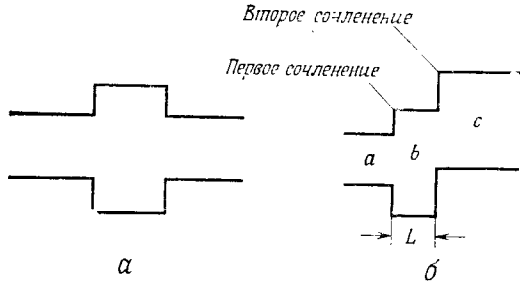
Решение системы (5.67) определяет коэффициенты разложения электрического поля в раскрыве по волноводным волнам. Различные практически интересные величины, такие, как коэффициент отражения, диаграмма направленности, коэффициенты возбуждения поверхностных волн, могут быть выражены через поле в раскрыве. Коэффициент отражения легко вычисляется, если известны амплитуды собственных волноводных волн. Диаграмма направленности и коэффициенты возбуждения поверхностных волн могут быть вычислены методом перевала. Поскольку этот метод подробно рассматривается во многих руководствах, мы не будем описывать его здесь.

Проведенный здесь анализ, очевидно, может быть обобщен на случай излучения фазированной волноводной решетки конечных размеров. При этом волноводы, образующие решетку, не обязательно должны быть одинаковыми. (Для бесконечной решетки с тождественными волноводными элементами поле как внутри волноводов, так и в свободном полупространстве описывается дискретным набором собственных волн; в этом случае можно применять метод, рассмотренный в §3.) Аналогичный подход можно применить к задаче о Т-образном сочленении прямоугольных волноводов как в E -, так и в H -плоскости.

§ 6. ЗАДАЧИ С ДВУМЯ ПОСЛЕДОВАТЕЛЬНЫМИ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

До сих пор мы рассматривали задачи, характеризуемые одной поверхностью раздела. Эти задачи возникают во многих практически интересных случаях. Но часто встречается последовательность двух или более волноводных неоднородностей. Поскольку

амплитуды затухающих собственных волн, возбуждаемых на неоднородности, быстро убывают, при достаточно большом расстоянии между неоднородностями необходимо учитывать взаимодействие лишь распространяющихся волн. Однако для близко расположенных неоднородностей существенную роль играет также взаимодействие между высшими типами волн. На фиг. 5.9 показаны двоянные неоднородности симметричного и асимметричного типа. В случае симметричной двоянной неоднородности, используя соображения симметрии, задачу можно свести к двум вспомогательным задачам с единственной поверхностью



Фиг. 5.9. Двоянная неоднородность. а — симметричная, б — несимметричная.

раздела, поэтому такая задача не сложнее, чем рассмотренные выше. Напротив, исследование асимметричной двоянной неоднородности требует некоторого обобщения развитых выше методов решения. Мы рассмотрим две возможные схемы исследования задач такого типа.

1. СИСТЕМА ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ ОПИСЫВАЮЩИХ ЗАДАЧУ С ДВУМЯ НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

Рассмотрим несимметричную двоянную неоднородность, показанную на фиг. 5,9, б. Пусть $\{q_{an}\}$, $\{q_{bn}\}$ и $\{q_{cn}\}$ — собственные функции в областях a , b и c , а $\{Y_{an}\}$, $\{Y_{bn}\}$ и $\{Y_{cn}\}$ — соответствующие проводимости для собственных волн. Предположим, что из области a падает волна единичной амплитуды. Поперечные составляющие электромагнитного поля в каждой области представляются следующими разложениями:

в области a

$$\mathcal{E}_t = (e^{-i\gamma_{a1}z} + R e^{i\gamma_{a1}z}) q_{a1} + \sum_{n=2}^{\infty} V_n e^{i\gamma_{an}z} q_{an},$$

$$-\hat{z} \times \mathcal{H}_t = Y_{a1} (e^{-i\gamma_{a1}z} - R e^{i\gamma_{a1}z}) q_{a1} - \sum_{n=2}^{\infty} Y_{an} V_n e^{i\gamma_{an}z} q_{an};$$

(5.71a)

в области b

$$\mathcal{E}_t = \sum_{m=1}^{\infty} (G_m e^{-i\gamma_{bm}z} + F_m e^{i\gamma_{bm}z}) q_{bm},$$

$$-\hat{z} \times \mathcal{H}_t = \sum_{m=1}^{\infty} Y_{bm} (G_m e^{-i\gamma_{bm}z} - F_m e^{i\gamma_{bm}z}) q_{bm};$$

(5.71б)

в области c

$$\mathcal{E}_t = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n e^{-i\gamma_{cn}(z-L)} q_{cn},$$

$$-\hat{z} \times \mathcal{H}_t = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{cn} Q_n e^{-i\gamma_{cn}(z-L)} q_{cn}.$$

(5.71в)

Условия непрерывности касательных составляющих поля на граничных поверхностях $z=0$ и $z=L$ приводят к соотношениям

$$\mathbf{E}_t(0) = \mathcal{E}_t(z=0) = (1 + R) q_{a1} + \sum_{n=2}^{\infty} V_n q_{an} = \sum_{m=1}^{\infty} (G_m + F_m) q_{bm},$$

(5.72)

$$-\hat{z} \times \mathbf{H}_t(0) = -\hat{z} \times \mathcal{H}_t(z=0) = Y_{a1} (1 - R) q_{a1} - \sum_{n=2}^{\infty} Y_{an} V_n q_{an} =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} Y_{bm} (G_m - F_m) q_{bm},$$

(5.73)

$$\mathbf{E}_t(L) = \mathcal{E}_t(z=L) = \sum_{m=1}^{\infty} (G_m e^{-i\gamma_{bm}L} + F_m e^{i\gamma_{bm}L}) q_{bm} = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n q_{cn},$$

(5.74)

$$-\hat{z} \times \mathbf{H}_t(L) = -\hat{z} \times \mathcal{H}_t(z=L) =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} Y_{bm} (G_m e^{i\gamma_{bm}L} - F_m e^{-i\gamma_{bm}L}) q_{bm} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{cn} Q_n q_{cn}.$$

(5.75)

Воспользовавшись ортонормированностью собственных волн в каждой из областей, неизвестные коэффициенты разложений $\{V_n\}$, $\{F_n\}$ и т. д. можно выразить через электрические поля при $z = 0$ и $z = L$. В частности, находим

$$G_m + F_m = \int_{A_1} q_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(0) ds,$$

(5.75a)

$$G_m e^{-i\gamma_{bm}L} + F_m e^{i\gamma_{bm}L} = \int_{A_2} q_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(L) ds,$$

(5.75б)

где A_1 и A_2 — поверхности раскрыва в сочленениях 1 и 2. Разрешив эти уравнения относительно G_m и F_m , получаем

$$G_m = \frac{-i}{2 \sin \gamma_{bm} L} \left[e^{i\gamma_{bm} L} \int_{A_1} \varphi_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(0) ds - \int_{A_2} \varphi_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(L) ds \right],$$

$$F_m = \frac{-i}{2 \sin \gamma_{bm} L} \left[\int_{A_1} \varphi_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(0) ds - e^{-i\gamma_{bm} L} \int_{A_2} \varphi_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(L) ds \right]. \quad (5.76)$$

Отсюда можно выразить через $\mathbf{E}_t(0)$ и $\mathbf{E}_t(L)$ комбинации коэффициентов ($G_m - F_m$) и ($G_m e^{-i\gamma_{bm} L} - F_m e^{i\gamma_{bm} L}$), а затем найти значения коэффициентов V_n и Q_n . Подставив полученные выражения для различных коэффициентов в соотношении (5.73) и (5.75), получаем систему интегральных уравнений для электрического поля в раскрывах $\mathbf{E}_t(0)$ и $\mathbf{E}_t(L)$:

$$2Z_{a1} \varphi_{a1} = \sum_{n=1}^{\infty} Y_{an} \varphi_{an} \int_{A_1} \varphi_{an} \cdot \mathbf{E}_t(0) ds +$$

$$+ \sum_{m=1}^{\infty} \frac{-iY_{bm}}{\sin \gamma_{bm} L} \varphi_{bm} \left[\cos \gamma_{bm} L \int_{A_1} \varphi_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(0) ds - \int_{A_2} \varphi_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(L) ds \right], \quad (5.77a)$$

$$\sum_{m=1}^{\infty} \frac{-iY_{bm}}{\sin \gamma_{bm} L} \varphi_{bm} \left[\int_{A_1} \varphi_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(0) ds - \cos \gamma_{bm} L \int_{A_2} \varphi_{bm} \cdot \mathbf{E}_t(L) ds \right] =$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} Y_{cn} \varphi_{cn} \int_{A_1} \varphi_{cn} \cdot \mathbf{E}_t(L) ds. \quad (5.77b)$$

Полученные уравнения необходимо решать совместно, особенно если расстояние L не слишком велико по сравнению с длиной волны в области b структуры. Для решения можно воспользоваться методом моментов. Требуемое число собственных функций в разложениях для обоих неизвестных распределений поля зависит от геометрии структуры. Этот вопрос исследован еще далеко не полностью.

В частном случае симметричных двояких неоднородностей систему интегральных уравнений можно свести к двум независимым уравнениям. В этом случае собственные функции в областях a и c одинаковы, $\{\varphi_{an}\} \equiv \{\varphi_{cn}\}$ и $A_1 = A_2$. Складывая почленно уравнения (5.77a) и (5.77b) и производя упрощения,

получаем

$$2Y_{a1} \varphi_{a1} = \sum_n Y_{an} \varphi_{an} \int_A \varphi_{an} \cdot [\mathbf{E}_t(0) + \mathbf{E}_t(L)] ds + \sum_m \left(iY_{bm} \operatorname{tg} \frac{\gamma_{bm} L}{2} \right) \times$$

$$\times \varphi_{bm} \int_A \varphi_{bm} \cdot [\mathbf{E}_t(0) + \mathbf{E}_t(L)] ds. \quad (5.78a)$$

Аналогично почленное вычитание этих уравнений дает

$$2Y_{a1} \varphi_{a1} = \sum_n Y_{an} \varphi_{an} \int_A \varphi_{an} \cdot [\mathbf{E}_t(0) - \mathbf{E}_t(L)] ds + \sum_m \left(-iY_{cm} \operatorname{ctg} \frac{\gamma_{bm} L}{2} \right) \times$$

$$\times \varphi_{bm} \int_A \varphi_{bm} \cdot [\mathbf{E}_t(0) - \mathbf{E}_t(L)] ds. \quad (5.78b)$$

Сумма решений независимых уравнений (5.78a) и (5.78b) дает удвоенное значение электрического поля при $z=0$ $\mathbf{E}_t(0)$, а разность — удвоенное значение поля при $z=L$ $\mathbf{E}_t(L)$.

Уравнения (5.78a) и (5.78b) могут быть получены также, если последовательно рассмотреть возбуждение в структуре полей с нечетной и четной зависимостью от координат, а затем сложить результаты. При симметричном (четном) возбуждении принимается, что из областей a и c одновременно приходят падающие волны одинаковой амплитуды и фазы (такие же, как и падающая волна в рассмотренной выше задаче). Так как геометрия структуры и источник поля симметричны относительно центральной плоскости $z=L/2$, расположенной в области b , полные поля также симметричны. Такая симметрия позволяет считать, что в плоскости симметрии помещена стенка из идеального магнетика (нагрузка холостого хода). Таким образом, мы пришли к задаче с одной поверхностью раздела, причем вторая область нагружена на бесконечное сопротивление (нагрузка холостого хода). Математическая формулировка этой задачи приводит к интегральному уравнению (5.78a).

Предположим теперь, что падающие из областей a и c волны имеют одинаковые амплитуды и противоположные фазы. При этом распределение поля оказывается антисимметричным и в плоскости симметрии можно поместить стенку из идеального проводника (короткое замыкание). Формулировка задачи в этом случае приводит к уравнению (5.78b). Суперпозиция результатов, отвечающих обоим рассмотренным способам возбуждения, эквивалентна задаче с падающим полем удвоенной амплитуды в области a при отсутствии падающего поля в области c .

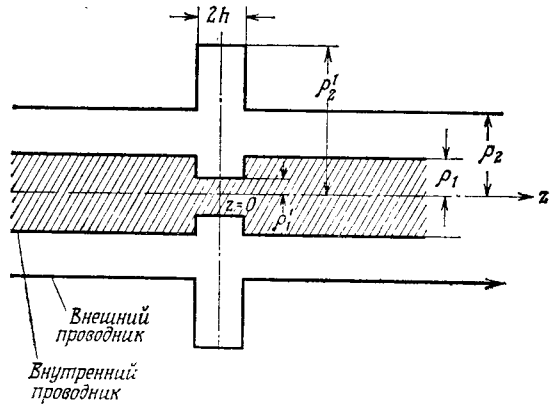
Как показывает вывод системы уравнений (5.77a) и (5.77b), решения для распределений поля в плоскостях $z=0$ и $z=L$

должны искаться одновременно. Однако можно сформулировать задачу таким образом, чтобы рассмотрение неоднородностей происходило последовательно во времени. Процесс начинается для ближайшего к нагрузке сочленения и повторяется для каждого сочленения в направлении к источнику. Влияние предшествующих сочленений учитывается методом матриц рассеяния [25].

Можно также рассеивающие свойства каждого сочленения определять независимо, как если бы они существовали порознь. Совокупный результат для сложной структуры в этом случае вычисляется с помощью обобщенной матрицы рассеяния.

2. ПОЛОСОВОЙ ОТРАЖАТЕЛЬНЫЙ ФИЛЬТР В КОАКСИАЛЬНЫХ ЛИНИЯХ

В качестве примера симметричной сдвоенной неоднородности рассмотрим полосовой отражательный фильтр в коаксиальной линии, который можно осуществить изменением внешнего



Фиг. 5.10. Полосовой фильтр в коаксиальной линии.

или внутреннего радиуса коаксиала, образующим резонансную полость [26]. На фиг. 5.10 показана схема такого фильтра. Размеры коаксиальной линии выбираются так, чтобы могла распространяться лишь основная волна типа *TEM*. При падении этой волны на неоднородность в структуре возбуждаются волны высших типов; некоторые из них могут распространяться в резонаторной области, т. е. между обеими неоднородностями. Вследствие взаимодействия различных мод резонатор может оказаться по отношению к падающей волне эквивалентным короткозамкнутому контуру, и, таким образом, на некоторой частоте падающее поле будет претерпевать полное отражение.

Можно предложить несколько интерпретаций этого явления. Но нашей целью является описание метода решения задачи, поэтому мы приступим непосредственно к ее формулировке.

В силу осевой симметрии структуры и падающего поля токи, наводимые на стенках коаксиальной линии также не зависят от угла φ и рассеянное поле состоит лишь из волны типа *TM*. Используя соображения симметрии, сведем исходную задачу к двум задачам, каждая из которых характеризуется лишь одной ступенчатой неоднородностью и нагрузкой холостого хода или короткого замыкания. Формулировка каждой из этих задач может быть осуществлена так, как это описано выше.

Собственные функции коаксиального волновода с радиусами внутреннего и внешнего проводников ρ_1 и ρ_2 имеют вид

$$\varphi_0(\rho) = \sqrt{\frac{1}{\ln \rho_2/\rho_1}} \frac{1}{\rho},$$

$$\varphi_n(\rho) = \frac{1}{N_n} [J_0(\delta_n \rho_1) Y_1(\delta_n \rho) - Y_0(\delta_n \rho_1) J_1(\delta_n \rho)], \quad n = 1, 2, \dots,$$

где $J_p(x)$ и $Y_p(x)$ ($p=0,1$) — функции Бесселя и Неймана, $\{\delta_n\}$ ($n = 1, 2, \dots, \infty$) — корни дисперсионного уравнения

$$J_0(\delta_n \rho_1) Y_1(\delta_n \rho_2) - Y_0(\delta_n \rho_1) J_1(\delta_n \rho_2) = 0. \quad (5.80)$$

Постоянная распространения γ_n волны номера n связана с δ_n соотношением

$$\gamma_n^2 + \delta_n^2 = k^2,$$

а проводимость для этой волны $y_n = \omega \epsilon_0 / \gamma_n$. Нормировочный множитель N_n имеет вид

$$N_n = \left[\frac{\rho_2^2}{2} \varphi_n^2(\rho_2) - \frac{2}{\pi^2 \delta_n^2} \right]^{1/2}.$$

Систему собственных функций и связанных с ними характеристических постоянных для области $-h \leq z \leq 0$ можно получить, заменив в приведенных выше формулах ρ_1, ρ_2 на ρ'_1, ρ'_2 а δ_n на σ_n ($n=1, 2, \dots$), где σ_n — решения дисперсионного уравнения (5.80), в котором ρ_1, ρ_2 заменены на ρ'_1, ρ'_2 . В дальнейшем собственные функции в области $-h \leq z \leq 0$ мы будем обозначать буквами с «крышками» (например, \hat{y}), чтобы отличать их от функций в области $z \leq -h$.

Следуя обычной процедуре вывода, приходим к интегральным уравнениям для структуры с идеально проводящей перегородкой из идеального магнетика ($s=1$):

$$2y_0 \varphi_0(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} y_n \varphi_n(\rho) \varphi_n(\rho') + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{y}_n \frac{T_{s+1}(-\hat{\gamma}_n h)}{T_s(-\hat{\gamma}_n h)} \hat{\varphi}_n(\rho) \hat{\varphi}_n(\rho') \right\} \times E_p^{(s)}(\rho') \rho' d\rho', \quad (5.81)$$

где функции, описывающие зависимость поля от z , $T_1(z) = T_3(z) = \cos z$, $T_2(z) = -i \sin z$, выбраны так, чтобы удовлетворялись граничные условия на перегородке при $z=0$. От интегрального уравнения (5.81) можно, как и ранее, перейти к системе алгебраических уравнений.

Полученные интегральные уравнения обладают некоторыми особенностями, обусловленными тем, что второй волновод имеет нагрузки холостого хода или короткого замыкания, а на неоднородности возбуждаются лишь волны типа *ТМ*. Перенеся слагаемое, пропорциональное $\varphi_0(\rho)$, в левую часть, перепишем уравнение (5.81) в виде

$$1 - R^{(s)} y_0 \varphi_0(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left\{ \sum_{n=0}^{\infty} y_n \varphi_n(\rho) \varphi_n(\rho') + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{y}_n \frac{T_{s+1}(-\hat{y}_n h)}{T_s(-\hat{y}_n h)} \hat{\varphi}_n(\rho) \hat{\varphi}_n(\rho') \right\} E_0^{(s)}(\rho') \rho' d\rho'. \quad (5.82)$$

Если считать, что в области $z \leq -h$ может распространяться лишь волна типа *ТЕМ*, то проводимости для всех высших типов волн $\{y_n, n \geq 1\}$ чисто мнимые. Эффективные проводимости для собственных волн

$$\left\{ \hat{y}_n \frac{T_{s+1}(-\hat{y}_n h)}{T_s(-\hat{y}_n h)} \right\}$$

также чисто мнимы для всех n . Таким образом, ядро в правой части уравнения оказывается чисто мнимым. Поскольку резонаторная область заканчивается нагрузкой холостого хода или короткого замыкания, то падающая энергия должна полностью отражаться, т. е. $|R^{(s)}| = 1$. Пусть $R^{(s)} = e^{-i\zeta_s}$, тогда уравнение (5.82) перепишется в виде

$$2e^{-i\zeta_s/2} \sin \frac{\zeta_s}{2} y_0 \varphi_0(\rho) = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-iy_n) \varphi_n(\rho) \varphi_n(\rho') + \sum_{n=0}^{\infty} (-i\hat{y}_n) \times \frac{T_{s+1}(-\hat{y}_n h)}{T_s(-\hat{y}_n h)} \hat{\varphi}_n(\rho) \hat{\varphi}_n(\rho') \right\} E_0^{(s)}(\rho') \rho' d\rho'. \quad (5.83)$$

Произведя замену $E_0^{(s)}(\rho) = e^{-i\zeta_s/2} \tilde{E}_0^{(s)}(\rho)$, исключим экспоненциальный множитель $e^{-i\zeta_s/2}$. В результате уравнение становится чисто действительным. Поэтому $\tilde{E}_0^{(s)}$ можно считать чисто действительным. Получить численное решение действительного уравнения конечно значительно проще.

Используя соотношение

$$1 + R^{(s)} = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \varphi_0(\rho) E_0^{(s)}(\rho) d\rho,$$

перепишем уравнение (5.82) в виде

$$\left(\frac{1 - R^{(s)}}{1 + R^{(s)}} \right) \int_{\rho_1}^{\rho_2} y_0 \varphi_0(\rho) \varphi_0(\rho') E_0^{(s)}(\rho') \rho' d\rho' = \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} y_n \varphi_n(\rho) \varphi_n(\rho') + \sum_{n=0}^{\infty} \hat{y}_n \frac{T_{s+1}(-\hat{y}_n h)}{T_s(-\hat{y}_n h)} \hat{\varphi}_n(\rho) \hat{\varphi}_n(\rho') \right\} \times E_0^{(s)}(\rho') \rho' d\rho'. \quad (5.84)$$

В полученном интегральном уравнении второго рода собственным значением служит множитель $(1 - R^{(s)}) / (1 + R^{(s)})$.

Умножая (5.84) на $\tilde{E}_0^{(s)}(\rho) \rho$ и интегрируя по ρ в пределах от ρ_1 до ρ_2 , получаем

$$y_0 \operatorname{tg} \frac{\zeta_s}{2} \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \rho \tilde{E}_0^{(s)}(\rho) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \varphi_0(\rho) \varphi_0(\rho') \tilde{E}_0^{(s)}(\rho') \rho' d\rho' = \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho \rho \tilde{E}_0^{(s)}(\rho) \int_{\rho_1}^{\rho_2} \left\{ \sum_{n=1}^{\infty} (-iy_n) \varphi_n(\rho) \varphi_n(\rho') + \sum_{n=0}^{\infty} (-i\hat{y}_n) \frac{T_{s+1}(-\hat{y}_n h)}{T_s(-\hat{y}_n h)} \hat{\varphi}_n(\rho) \hat{\varphi}_n(\rho') \right\} \tilde{E}_0^{(s)}(\rho') \rho' d\rho'. \quad (5.85)$$

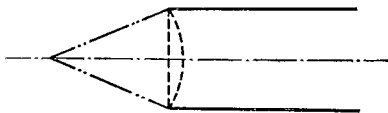
При некоторых условиях, например в случае, когда может возбуждаться лишь один тип волн, это уравнение определяет верхнюю границу приближенных значений [2]. Из аналогичного уравнения для магнитного поля можно найти нижнюю границу. Зная нижнюю и верхнюю границы, можно судить о точности решения.

Можно назвать большое количество двояких неоднородностей, исследование которых представляет практический интерес. К ним относятся, например, диафрагма конечной толщины в волноводе, дифракционные решетки из металлических или диэлектрических брусков прямоугольного сечения, различные волноводные фильтры и двойные изгибы волноводов. Без сомнения, этот перечень неоднородностей можно было бы существенно расширить.

1) Очевидно, все интегральные уравнения, выведенные выше, можно записать в таком виде. Такую форму можно рассматривать как обобщение интегрального уравнения Фредгольма второго рода, так как операторы присутствуют в обеих частях уравнения.

§ 7. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

К тем из рассмотренных выше задач, для которых характерен дискретный спектр собственных значений, можно применять метод сшивания (метод частичных областей). В этом методе используются разложения касательных к границе раздела составляющих электрического и магнитного полей по собственным волнам. Налагая условия непрерывности этих составляющих полей на границе, получаем соотношения, связывающие коэффициенты разложения. Эти соотношения можно свести к двум системам алгебраических уравнений, которые затем сводятся к одной системе, подлежащей решению. Как оказывается, результирующая система совпадет с получаемой при применении метода моментов к исходному интегральному уравнению при условии, что выбрана подходящая система базисных функций.



Фиг. 5.11. Сочленение конического и цилиндрического волноводов.

Существенное преимущество описания задачи с помощью интегральных уравнений, помимо возможности использования этого метода для задач с непрерывным спектром, состоит в значительной свободе в выборе базиса. Так, например, интеграл может быть приближенно представлен различными квадратурными формулами. В соответствии с этим в качестве пробных функций можно использовать различные системы функций. Разумеется, следует помнить, что от выбора базисных функций зависит точность и быстрота получения решения. Поэтому во всех случаях, когда это практически возможно, желательно использовать функции, удовлетворяющие уравнениям Максвелла и соответствующим граничным условиям. Однако часто оказывается удобным использовать «импульсно-точечный» метод, в котором разложение ведется по системе импульсных функций, а в качестве весовых функций применяются дельта-функции. Этот метод очень широко применяется также при рассмотрении внешних задач рассеяния.

В рассмотренных выше задачах для описания поля в обеих однородных областях использовалась одна и та же система координат, так что общая граница частичных областей проходила по одной из координатных линий или поверхностей. Такой выбор границы не является обязательным. Так, в изображенном на фиг. 5.11 сочленении круглого цилиндрического и конического волноводов координатные поверхности (изображенные

пунктиром) для обеих систем координат, удобных для описания поля в соответствующих областях, не совпадают. При рассмотрении задач такого типа наиболее удобно применять разложение по собственным функциям в сочетании с сшиванием в дискретных точках.

При решении таких задач можно встретиться с рядом трудностей, связанных с полнотой систем функций, используемых для представления полей [27]. Этому вопросу следует уделять должное внимание.

Другой важный вопрос, возникающий при численном исследовании, состоит в проверке истинности полученного решения и установления его адекватности рассматриваемой физической задаче. Для этой цели было предложено много критериев: а) соотношение взаимности [7], б) закон сохранения энергии [28], в) проверка сходимости, г) сопоставление результатов для различных базисных функций [29], д) сравнение с результатами, полученными другими методами, е) проверка удовлетворения граничным условиям [10], ж) сравнение с результатами эксперимента и другие. Каждый из критериев имеет свои достоинства и недостатки. К сожалению, недостаток места не позволяет нам подробно обсудить все эти критерии. Только проверка сходимости будет рассмотрена в приложении к этой главе, поскольку она особенно важна в некоторых случаях. Читателю настоятельно рекомендуется обратиться к оригинальным работам для ознакомления с остальными критериями. Однако следует заметить, что, несмотря на большое число таких критериев, эти проверки, за исключением, может быть, экспериментального подтверждения результатов, лишь до какой-то степени повышают степень доверия к истинности полученного решения. Поэтому развитие методов нахождения количественных оценок справедливости решений полученных на ЭВМ, представляется насущным и необходимым.

Наконец следует упомянуть, что, основываясь на формализме интегральных уравнений, можно рассматривать задачи рассеяния на находящемся в волноводе металлических или диэлектрических препятствиях произвольной формы, а также возбуждения волновода зондом или петлей. Для решения задач такого типа удобно использовать функцию Грина для соответствующей волноводной области. При решении получаемых интегральных уравнений методом моментов можно воспользоваться различными приближенными представлениями функций Грина.

Проверка сходимости и проблема относительной сходимости

При переходе от интегрального уравнения к матричному с помощью метода моментов и при решении последнего естественно возникает вопрос: сколько членов разложения и пробных функций следует учесть для достижения достаточно высокой точности результата? Наиболее распространенный критерий удовлетворительности результата состоит в его неизменности при повторных вычислениях с постепенно увеличивающимся числом учитываемых членов разложения и пробных функций. При этом неявно подразумевается, что если этот процесс неограниченно продолжать, то результат совпадает с точным решением задачи. Таким образом, постоянство численного результата рассматривается как его близость к точному решению. Указанный подход оправдывает себя при рассмотрении большинства задач электродинамики. Однако имеются случаи, когда описанный предельный процесс не сходится или сходится к неверному результату, если вычисление предела не проводится специальным образом. С таким явлением столкнулись при исследовании неоднородностей типа диафрагмы в волноводе или двух близко расположенных неоднородностей. Поэтому использование нескольких критериев верности результатов не представляется излишним.

Для иллюстрации рассмотрим задачу о бесконечно тонкой идеально проводящей диафрагме в плоском волноводе (фиг. 5.12). Математическую формулировку задачи легко дать способом, описанным в настоящей главе. Пусть на диафрагму падает волна типа TM_s ; тогда интегральное уравнение для неизвестного распределения поля E_x в плоскости диафрагмы может быть представлено в виде

$$\int_a K(x, x') E_x(x') dx' = g(x), \quad (\text{П. 1})$$

где ядро

$$K(x, x') = \sum_{p=1}^{\infty} Y_p \varphi_p(x) \varphi_p(x')$$

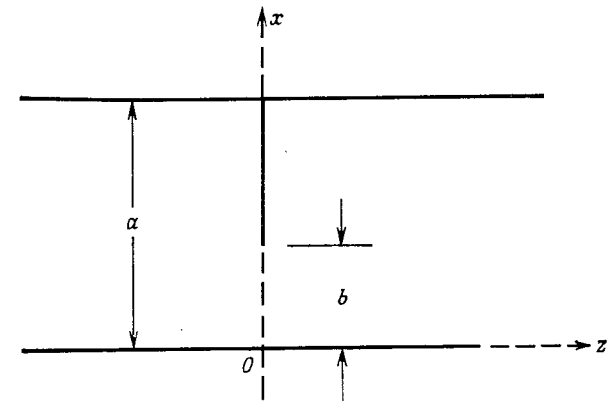
и приняты обозначения

$$Y_p = \omega \epsilon_0 / \gamma_p, \quad \varphi_p = \sqrt{\frac{2 - \delta_{0p}}{a}} \cos \frac{(p-1)\pi x}{a}, \quad g(x) = \varphi_s(x).$$

Матричное уравнение, полученное из интегрального уравнения (П. 1) методом моментов с использованием N базисных функций системы $\{Q_n\}$, имеет вид

$$\sum_{m=1}^N \langle Q_l, KQ_m \rangle B_m = \langle Q_l, g \rangle, \quad l=1, 2, \dots, N. \quad (\text{П. 2})$$

Каждый из матричных элементов $\langle Q_l, KQ_m \rangle$ представляется бесконечной суммой, так как ядро K выражено в виде бесконечного ряда¹⁾. Однако при вычислениях бесконечные ряды заменяются конечными, так что вводится еще одно приближение.



Фиг. 5.12. Бесконечно тонкая диафрагма в плоском волноводе.

Предположим, что при суммировании учитывается P членов ряда.

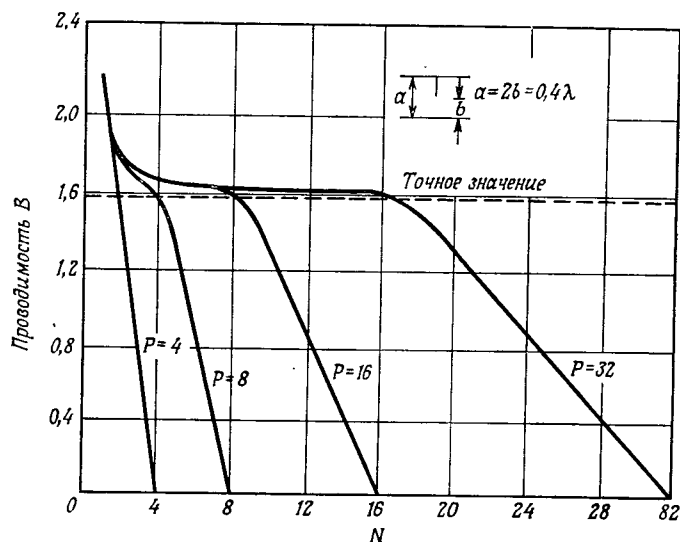
Возникает естественный вопрос, зависит ли и каким образом приближенное решение от выбора чисел N и P . На примере различных задач для неоднородностей диафрагменного типа несколькими авторами [14, 30—33] было показано, что решение таких задач критично к выбору относительных значений N и P . В частности, при решении матричного уравнения (П.2) при фиксированном P и переменном N оказалось, что наилучшее приближение к точному решению достигается при некотором критическом значении N_c , просто зависящем от выбранного зна-

¹⁾ Вообще говоря, ядро можно приближенно представить в виде суммы сингулярной функции и конечного ряда (особенность выделяется с помощью квазистатического приближения). При таком подходе вычисление матричных элементов существенно усложняется, но можно избежать трудностей, связанных с проблемой относительной сходимости.

чения P и геометрии структуры:

$$N_c = P \frac{b}{a}.$$

Этот факт иллюстрируют графики, приведенные на фиг. 5.13, где вычисленные значения входной реактивной проводимости волновода с диафрагмой¹⁾ представлены в функции числа N . Ясно видно, что численные результаты быстро ухудшаются по



Фиг. 5.13. Входная реактивная проводимость плоского волновода с диафрагмой для основной волны типа TEM , вычисленная при фиксированном P .

мере того, как N превышает критическое значение. (Для случая $a = 2b$ можно получить точное решение задачи методом Винера — Хопфа.) В частности, при $N = P$ полученное численными методами значение проводимости оказывается равным нулю, т. е. действие неоднородности исчезает — результат заведомо ошибочный.

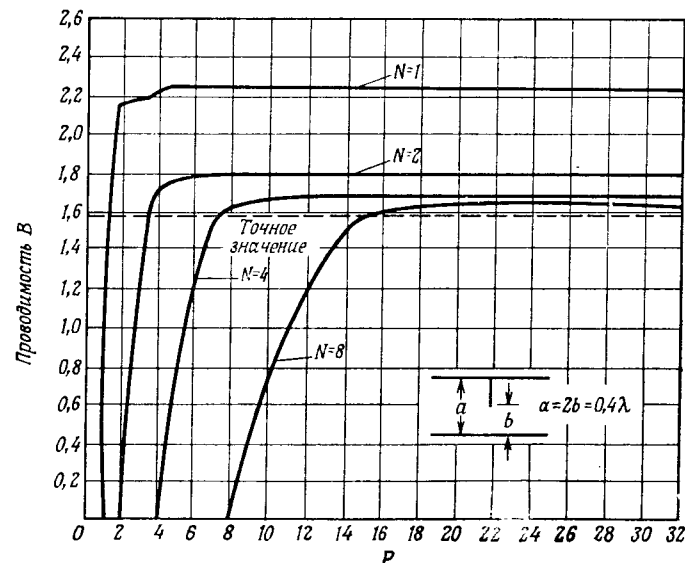
На фиг. 5.14 представлены аналогичные зависимости, вычисленные при фиксированном значении N и меняющемся P . Видно, что полученное численным методом значение проводимости вначале быстро меняется в функции P , а после превышения некоторого критического значения P_c , определяемого формулой

$$P_c = N \frac{a}{b},$$

¹⁾ Входная проводимость равна мнимой части отношения $(1-R)/(1+R)$, где R — коэффициент отражения падающей волноводной волны.

достигает предельного постоянного уровня. Из графиков видно также, что при $P \geq P_c$ приближение тем лучше, чем больше N .

Исследовалось также одновременное изменение N и P таким образом, чтобы отношение P/N оставалось постоянным. Как показывают результаты этих расчетов, вычисленные значения проводимости быстрее всего сходятся к точному значению, если $N/P = b/a$. Более того, в работе Митры и др. [33] недавно



Фиг. 5.14. Входная реактивная проводимость плоского волновода с диафрагмой для основной волны типа TEM , вычисленная при фиксированном N .

было аналитически показано, что численное решение сходится к точному результату лишь в случае, когда $N/P = b/a$, и что лишь при таком выборе полученное решение будет удовлетворять условию на ребре пластины. Следует заметить однако, что при практических расчетах не обязательно выбирать отношение N/P указанным образом для получения решения с точностью, достаточной для удовлетворения технических допусков. Тем не менее принятие надлежащего значения N/P обеспечивает существенное преимущество в скорости расчетов. Факт зависимости сходимости решения от относительного числа функций, используемых при приближенных вычислениях, получил название относительной сходимости. Митра [34] впервые обратил внимание на эту проблему при рассмотрении рассеяния на разветвлении в прямоугольном волноводе.

Литература

1. *Born M., Wolf E.*, Principle of Optics, Pergamon Press, New York, 1959 (см. перевод: М. Борн, Э. Вольф, Основы оптики, изд. «Наука», М., 1970).
2. *Collin R. E.*, Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, New York, 1960.
3. *Baldwin G. L., Heins A. E.*, Math. Scand., 2, 103 (1954).
4. *Вайнштейн Л. А.*, Теория дифракции и метод факторизации, изд. «Советское радио», М., 1966.
5. *Schwinger J., Saxon D.* Discontinuities in Waveguides, Notes on Lecture by J. Schwinger, New York, 1958 [см. перевод: Зарубежная радиоэлектроника, № 3 (1970)].
6. *Lewin L.*, Advanced Theory of Waveguides, Iliffe and Sons, London, 1951 (см. перевод: Л. Левин, Современная теория волноводов, ИЛ, М., 1954).
7. *Jones D. S.*, The Theory of Electromagnetism, Pergamon Press, Oxford, 1964.
8. *Stakgold I.*, Boundary Value Problems of Mathematical Physics, Macmillan, New York, 1968.
9. *Varga R. S.*, Matrices Iterative Analysis, Prentice-Hall, New York, 1962.
10. *Cole W. J., Nagelberg E. R., Nagel C. M.*, Bell Syst. Techn. J., 46, 649 (1967).
11. *Amitay N., Galindo V.*, Radio Science, 3 (New Ser.), 830 (1968).
12. *Nagelberg E. R., Shefer J.*, Bell Syst. Techn. J., 44, 1321 (1965).
13. *Marcuvitz N.*, ed., Waveguide Handbook, McGraw-Hill, New York, 1951 (см. перевод: Справочник по волноводам, изд. «Советское радио», М., 1952).
14. *Masterman P. H., Clarricoats P. J. B.*, Proc. IEEE, 118, 51 (1971).
15. *Amitay N., Galindo V., Wu C. P.*, The Theory and Analysis of Phased Array Antennas, Wiley, New York, 1972 (см. перевод: Н. Амуреи, В. Галиндо, Ч. Ву, Теория и анализ фазированных антенных решеток, изд. «Мир», М., 1974).
16. *Piefke G.*, Arch. Elek. Ubertr., 22, 275 (1968).
17. *Knetsch H. D.*, Arch. Elek. Ubertr., 22, 591 (1968).
18. *Bates C. P.*, Bell Syst. Techn. J., 48, 2259 (1969).
19. *Cochran J. A., Pecina R. G.*, Radio Science, 1, 679 (1966).
20. *Oloer F. W. J.*, Phil. Trans. Roy. Soc., London, A247, 328 (1954).
21. *Froberg C. E.*, Introduction to Numerical Analysis, Addison — Wesley, Reading, Mass., 1965.
22. *Wu C. P.*, Radio Science, 4, 245 (1969).
23. *Wu C. P.*, IEEE Trans., AP-17, 733 (1969).
24. *Abramovitz M., Stegun I. A.*, ed., Handbook of Mathematical Functions, Dover, New York, 1965.
25. *Wexler A.*, IEEE Trans., MTT-15, 508 (1967).
26. *Varon D.*, IEEE Trans., MTT-15, 680 (1967).
27. *Lewin L.*, IEEE Trans., MTT-18, 364 (1970).
28. *Amitay N., Galindo V.*, IEEE Trans., AP-17, 722 (1969).
29. *Galindo V., Wu C. P.*, Bell Syst. Techn. J., 47, 93 (1968).
30. *Masterman P. H., Clarricoats P. J. B., Hannaford C. D.*, Electronics Letters, 5, 23 (1969).
31. *Lee S. W., Jones W. R., Campbell J. J.*, IEEE Trans., MTT-19, 528 (1971).
32. *Itoh T., Mittra R.*, Proc. IEEE, 59, 1363 (1971) [см. перевод: ТИИЭР, № 9, 96 (1971)].
33. *Mittra R., Itoh T., Li T. S.*, IEEE Trans., MTT-20, 96 (1971).
34. *Mittra R.*, J. of Research NBS, 67D, 245 (1963).
35. *Harrington R. F.*, Field Computation by Moment Method, Macmillan, New York, 1968.
36. *Clarricoats P. J. B., Slinn K. R.*, Electronics Letters, 2, (6), 226 (1966).

Некоторые эффективные вычислительные методы

Р. Митра и Т. Ито¹⁾

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

В последние годы с помощью численных методов удалось решить целый ряд задач рассеяния и дифракции электромагнитных волн. При постановке краевой задачи, как правило, первый шаг состоит в выводе интегрального уравнения для неизвестного поля на соответствующей границе раздела или для распределения плотности тока на поверхности рассеивателя. Затем это интегральное уравнение преобразуется с помощью метода моментов (см., например, гл. 5) в бесконечномерное матричное уравнение. И, наконец, полученное матричное уравнение обрывается и решается с помощью ЭВМ. Идея описанного метода решения весьма проста, и, что существенно, его пределы применимости очень широки. Поэтому нет ничего удивительного в том, что этот метод был использован при решении большого числа различных краевых задач.

В отличие от численных аналитические методы решения имеют, как правило, ограниченные области применимости. Точные решения возможны лишь в немногих случаях, допускающих разделение переменных или применение метода Винера — Хопфа. Имеются несколько приемов, расширяющих область применимости аналитических решений, таких, как низкочастотные и высокочастотные разложения или методы геометрической оптики. Тем не менее, даже с учетом этих дополнительных примеров, область применимости аналитических методов остается весьма ограниченной.

Из этих рассуждений может показаться, что численные методы обладают подавляющим преимуществом по сравнению с аналитическими методами. Хотя это и справедливо для определенного класса задач, тем не менее нельзя утверждать, что численные методы являются панацеей от всех бед. В принципе, конечно, можно использовать численный способ решения в случае сколь угодно сложной геометрии. Однако при сложной геометрии задачи требования к объему памяти вычислительной машины, время счета и численные погрешности решения могут оказаться слишком большими. Аналитические же методы, если они примени-

¹⁾ R. Mittra and T. Itoh, University of Illinois, Urbana, Illinois.

мы, гораздо эффективнее при расчетах, дают значительно большую точность, позволяют физически осмысливать задачу и т. д.

Можно ожидать, что некоторая комбинация аналитических и численных методов окажется тем оптимальным направлением, по которому надо следовать при решении определенного класса задач, которые можно считать модификациями классических задач, поддающихся решению аналитическими методами. Целью настоящей главы является доказательство того, что такой подход действительно эффективен при решении задач этого класса.

Этот метод в принципе отличен как от «чисто численного», так и от «чисто аналитического» методов. Если при численном методе стараются сразу получить окончательное матричное уравнение, то при «гибридном» методе, описываемом в настоящей главе, предварительно проводятся определенные аналитические преобразования. Это позволяет получить вспомогательное матричное уравнение, обладающее рядом определенных преимуществ при численном решении. Например, порядок подлежащей обращению матрицы, обеспечивающий заданную точность, как правило, существенно меньше; программа часто содержит критерии сходимости, позволяющие правильно определять порядок обрезаемой матрицы; обеспечивается правильное асимптотическое поведение полей вблизи краев и углов, где некоторые компоненты полей обладают особенностями, которые трудно воспроизвести с помощью обычных численных методов.

Мы продемонстрируем применение этого «комбинированного метода» на ряде различных задач, связанных с исследованием полосковых линий, решеток, неоднородностей в волноводах, излучения от фазированных решеток конечной толщины и т. д. Поскольку каждая из этих задач уже решалась ранее обычными численными методами, легко провести соответствующее сравнение.

§ 2. ПОЛОСКОВЫЕ ЛИНИИ

1. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

В настоящее время в связи с развитием техники микроволновых интегральных схем возрос интерес к изучению полосковых передающих линий. Обычно эти линии обладают плоской геометрией, имеют один или несколько слоев диэлектрической изоляции и большую заземленную пластину. Экранированные полосковые линии помещаются между двумя заземленными пластинами (фиг. 6.1, а). Хотя в действительности в такой системе распространяется не волна ТЕМ, а гибридная волна (см., например, [1]), для анализа можно использовать так называемое квази-ТЕМ-приближение, если рабочая длина волны значительно превосходит толщину линии. В этом случае проблема нахож-

дения длины волны и характеристического импеданса сводится к определению статической емкости системы. При теоретическом анализе полосковых линий использовались в основном следующие методы: 1) модифицированный метод конформных преобразований, 2) релаксационный метод и 3) вариационный метод, или метод Рэлея — Ритца. Ниже будет изложен другой подход к решению задачи, являющийся комбинацией аналитических и численных методов. Он дает эффективный способ нахождения распределения заряда на центральной полоске и распределения потенциала по сечению линии, т. е. двух величин, представляющих основной интерес. Зная эти величины, легко найти емкость системы.

2. ПОСТАНОВКА КРАЕВОЙ ЗАДАЧИ В СПЕКТРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

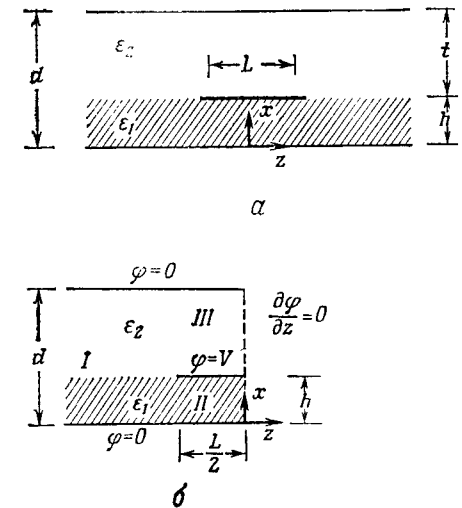
Для простоты мы ограничимся случаем, когда подложка состоит из одного слоя диэлектрика, хотя обобщение на случай нескольких слоев не представляет труда.

Предположим, что центральная полоска и заземленные пластины поддерживаются под напряжением V вольт и 0 соответственно. Поскольку как структура линий, так и возбуждение симметричны относительно оси x , достаточно рассмотреть половину системы, как показано на фиг. 6.1, б.

Представим потенциальную функцию $\phi(x, z)$ в каждой из областей I, II, III в виде разложений Фурье:

Область I:

$$\phi(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\alpha_n x) e^{\alpha_n(z + \frac{L}{2})}, & 0 < x < h, \quad z < -\frac{L}{2}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(\alpha_n h)}{\sin(\alpha_n t)} \sin[\alpha_n(d-x)] e^{\alpha_n(z + \frac{L}{2})}, & h < x < d, \quad z < -\frac{L}{2}. \end{cases} \quad (6.1)$$



Фиг. 6.1. Поперечное сечение заэкранированной полосковой линии (а) и эквивалентная схема (б).

Область II:

$$\phi(x, z) = \frac{Vx}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\beta_n x) \operatorname{ch}(\beta_n z), \quad 0 < x < h, \quad -\frac{L}{2} < z < 0. \quad (6.2)$$

Область III:

$$\phi(x, z) = \frac{V(d-x)}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin[\gamma_n(d-x)] \operatorname{ch}(\gamma_n z), \quad (6.3)$$

$$h < x < d, \quad -\frac{L}{2} < z < 0.$$

Здесь α_n — корни трансцендентного уравнения

$$\varepsilon_1 \cos(\alpha_n h) \sin(\alpha_n t) + \varepsilon_2 \sin(\alpha_n h) \cos(\alpha_n t) = 0, \quad \alpha_n \neq 0, \quad (6.4)$$

и $\beta_n = n\pi/h$, $\gamma_n = n\pi/t$. Коэффициенты A_n , B_n и C_n подлежат определению. Отметим, что выписанные выше потенциальные функции удовлетворяют граничным условиям $\phi = V$ на центральной полоске, $\phi = 0$ на заземленных пластинах и $\partial\phi/\partial z = 0$ на оси x^1). Остается обеспечить непрерывность потенциала ϕ и его нормальной производной на границе раздела $z=L/2$. В результате получаем

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(\alpha_n x) &= \frac{Vx}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} B_n \operatorname{ch} \frac{\beta_n L}{2} \sin(\beta_n x), \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n \sin(\alpha_n x) &= - \sum_{n=1}^{\infty} \beta_n B_n \operatorname{sh} \frac{\beta_n L}{2} \sin(\beta_n x), \end{aligned} \right\} 0 < x < h \quad (6.5)$$

и

$$\left. \begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} A_n \frac{\sin(\alpha_n h)}{\sin(\alpha_n t)} \sin[\alpha_n(d-x)] &= \\ &= \frac{V(d-x)}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} C_n \operatorname{ch} \frac{\gamma_n L}{2} \sin[\gamma_n(d-x)], \\ \sum_{n=1}^{\infty} \alpha_n A_n \frac{\sin(\alpha_n h)}{\sin(\alpha_n t)} \sin[\alpha_n(d-x)] &= \\ &= - \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n C_n \operatorname{sh} \frac{\gamma_n L}{2} \sin[\gamma_n(d-x)], \end{aligned} \right\} h < x < d. \quad (6.6)$$

¹) Кроме того, обеспечена непрерывность ϕ и $\varepsilon \partial\phi/\partial x$ на границе сред ε_1 и ε_2 в области I, что следует из (6.1) и (6.4). — Прим. ред.

Можно было бы попытаться решить полученную систему, обрезав бесконечные суммы. Однако такой способ решения этой системы уравнений весьма неэффективен, так как для достижения нужной точности размерность обрезанной матрицы системы приходится выбирать обычно очень большой, что приводит к большой затрате времени на ее обращение. Кроме того, при использовании такого способа решения трудно контролировать сходимость процесса. Оказывается, что другой способ решения, где вычисления проводятся в спектральном представлении, обладает тем существенным преимуществом, что получающееся матричное уравнение может быть аналитическим путем преобразовано в очень быстро сходящуюся систему уравнений. Подробное изложение этого способа дается ниже.

Прежде всего произведем фурье-преобразование уравнений (6.5) и (6.6), для чего умножим их соответственно на $\sin \beta_m x$ и $\sin \gamma_m(d-x)$ и проинтегрируем по x первые уравнения в пределах от 0 до h , а вторые — от h до d . Складывая и вычитая полученные уравнения, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n - \beta_m} + \frac{1}{\beta_m} = (-1)^m \frac{h}{2} B_m e^{-\beta_m L/2}, \quad (6.7)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n + \beta_m} - \frac{1}{\beta_m} = (-1)^{m+1} \frac{h}{2} B_m e^{\beta_m L/2}, \quad (6.8)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n - \gamma_m} + \frac{1}{\gamma_m} = (-1)^m \frac{t}{2} C_m e^{-\gamma_m L/2}, \quad (6.9)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n + \gamma_m} - \frac{1}{\gamma_m} = (-1)^{m+1} \frac{t}{2} C_m e^{\gamma_m L/2} \quad (6.10)$$

($m = 1, 2, \dots, \infty$); здесь

$$A_n = A_n \sin(\alpha_n h) \quad (6.11)$$

и, кроме того, без ограничения общности положено $V \equiv 1$.

Уравнения (6.7) — (6.11) и являются искомыми уравнениями в спектральном представлении. Эти уравнения по-прежнему составляют четырежды бесконечную систему, однако мы скоро покажем, что от нее можно перейти к вспомогательной системе, матрицу которой можно обрезать, ограничившись небольшим числом членов.

Аналитический метод, удобный для преобразования системы (6.7) — (6.11), получил название модифицированного метода

вычетов (ММВ). Мы опишем лишь основные черты этого метода, так как подробное его изложение можно найти в целом ряде работ, например [2, 3].

3. МОДИФИЦИРОВАННЫЙ МЕТОД ВЫЧЕТОВ

Прежде чем использовать ММВ, исключим B_m и C_m из уравнений (6.7)–(6.10). Для этого умножим (6.8) на $\exp(-\beta_m L)$ и полученное уравнение сложим с (6.7). Аналогичную процедуру сделаем с (6.9) и (6.10). В результате получим

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n - \beta_m} + \lambda_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n + \beta_m} = \frac{1}{-\beta_m} + \frac{\lambda_m}{\beta_m}, \quad (6.12)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n - \gamma_m} + \xi_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n + \gamma_m} = \frac{1}{-\gamma_m} + \frac{\xi_m}{\gamma_m} \quad (6.13)$$

($m = 1, 2, \dots$); здесь

$$\lambda_m = e^{-\beta_m L}, \quad \xi_m = e^{-\gamma_m L}. \quad (6.14)$$

Отметим существенную особенность уравнений (6.12) и (6.13), используемую в ММВ. Во-первых, множители λ_m и ξ_m экспоненциально спадают при $m \rightarrow \infty$. Если в уравнениях (6.12), (6.13) вычеркнуть члены, пропорциональные λ_m и ξ_m , то оставшееся матричное уравнение принимает особый вид, называемый «двойным альтернантом»; такое уравнение можно точно решить с помощью теории вычетов [4, 5]. Это позволяет построить решение уравнений (6.12), (6.13) как возмущение точного решения упрощенной задачи ($\lambda_m = 0$, $\xi_m = 0$).

Опишем теперь некоторые детали этого метода. Покажем, что задача решения бесконечной системы алгебраических уравнений может быть сведена к нахождению функции $f(\omega)$ комплексного переменного ω , которая имеет определенные нули и полюса в комплексной плоскости.

Рассмотрим мероморфную функцию $f(\omega)$ (т. е. функцию, не имеющую особенностей, за исключением простых полюсов) комплексного переменного ω , удовлетворяющую следующим условиям:

1) $f(\omega)$ имеет простые полюса при $\omega = \alpha_n$, где $n = 1, 2, \dots, \infty$, и при $\omega = 0$;

2) $f(\beta_m) + \lambda_m f(-\beta_m) = 0$,

$f(\gamma_m) + \xi_m f(-\gamma_m) = 0$ при $m = 1, 2, \dots, \infty$;

3) $f(\omega)$ ведет себя асимптотически как $K_1 |\omega|^{-\nu}$ при $|\omega| \rightarrow \infty$, где $K_1 = \text{const}$ и $1 < \nu < 2$;

4) вычет $f(\omega)$ при $\omega = 0$, т. е. $R_f(0)$, равен -1 . Тогда функцию $f(\omega)$ можно представить в виде

$$f(\omega) = Kg(\omega)P(\omega), \quad (6.15)$$

$$g(\omega) = e^{R\omega} \frac{\pi(\omega, \beta_n) \pi(\omega, \gamma_n)}{\omega \pi(\omega, \alpha_n)}, \quad (6.16)$$

$$R = \frac{1}{\pi} [h \ln(d/h) + t \ln(d/t)], \quad (6.17)$$

где K — постоянная, которая определяется так, чтобы удовлетворялось четвертое из перечисленных выше условий, а

$$P(\omega) = 1 + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{F_m}{1 - \omega/\beta_m} + \sum_{m=1}^{\infty} \frac{G_m}{1 - \omega/\gamma_m}. \quad (6.18)$$

Кроме того,

$$\pi(\omega, \alpha_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\alpha_n}\right) e^{\omega d/\pi n}, \quad (6.19)$$

$$\pi(\omega, \beta_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\beta_n}\right) e^{\omega h/\pi n}, \quad (6.20)$$

$$\pi(\omega, \gamma_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\gamma_n}\right) e^{\omega t/\pi n}; \quad (6.21)$$

F_m и G_m — константы, подлежащие определению. Множитель $e^{R\omega}$ обеспечивает степенной характер $g(\omega)$, т. е.

$$g(\omega) \sim |\omega|^{-3/2} \quad \text{при} \quad |\omega| \rightarrow \infty. \quad (6.22)$$

Отметим, что функцию $g(\omega)$ с точностью до постоянного множителя можно отождествить с предельным значением $f(\omega)$ при $\lambda_m \equiv \xi_m = 0$ при всех m . Физически она соответствует решению для полубесконечной разделяющей пластины (разветвление волновода). Эта задача рассматривалась в ряде работ, например [4, 5]. Таким образом, нам неизвестна лишь функция $P(\omega)$ в (6.15) или, точнее, коэффициенты F_m и G_m в (6.18). Если функция $f(\omega)$ найдена, то решение исходной системы уравнений, т. е. коэффициенты A_n в (6.12) и (6.13), выражаются через $f(\omega)$

следующим образом. Рассмотрим соотношения

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left\{ \frac{f(\omega)}{\omega - \beta_m} + \lambda_m \frac{f(\omega)}{\omega + \beta_m} \right\} d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_f(\alpha_n)}{\alpha_n - \beta_m} +$$

$$+ \lambda_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_f(\alpha_n)}{\alpha_n + \beta_m} + \frac{R_f(0)}{-\beta_m} + \lambda_m \frac{R_f(0)}{\beta_m} + f(\beta_m) + \lambda_m f(-\beta_m), \quad (6.23)$$

$$m = 1, 2, \dots, \infty,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left\{ \frac{f(\omega)}{\omega - \gamma_m} + \xi_m \frac{f(\omega)}{\omega + \gamma_m} \right\} d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_f(\alpha_n)}{\alpha_n - \gamma_m} + \xi_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_f(\alpha_n)}{\alpha_n + \gamma_m} +$$

$$+ \frac{R_f(0)}{-\gamma_m} + \xi_m \frac{R_f(0)}{\gamma_m} + f(\gamma_m) + \xi_m f(-\gamma_m), \quad (6.24)$$

$$m = 1, 2, \dots, \infty,$$

где $R_f(\alpha_n)$ — вычет $f(\omega)$ в точке $\omega = \alpha_n$. Согласно третьему условию, контурные интегралы равны нулю. Используя второе и четвертое условия и сравнивая (6.23), (6.24) с (6.12), (6.13), получаем

$$A_n = R_f(\alpha_n). \quad (6.25)$$

Коэффициенты разложения Фурье B_m и C_m , входящие в (6.5) и (6.6), можно тоже связать с $f(\omega)$. Рассмотрим соотношение

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\omega)}{\omega + \beta_m} d\omega = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_f(\alpha_n)}{\alpha_n + \beta_m} + \frac{R_f(0)}{\beta_m} + f(-\beta_m). \quad (6.26)$$

Используя те же рассуждения, что и при выводе (6.25), и сравнивая (6.26) с (6.8), получаем

$$B_m = (-1)^m \frac{2}{h} f(-\beta_m) e^{-\beta_m L/2}. \quad (6.27)$$

Аналогично

$$C_m = (-1)^m \frac{2}{l} f(-\gamma_m) e^{-\gamma_m L/2}. \quad (6.28)$$

Распределения потенциала и заряда следующим образом могут быть найдены с помощью (6.25), (6.27) и (6.28). Потенциал в любой точке структуры полосковой линии получается подстановкой (6.25), (6.27) или (6.28) в (6.1), (6.2) или (6.3). Например, в области $x = h$ и $z \leq -L/2$

$$\phi(h, z) = \sum_{n=1}^{\infty} R_f(\alpha_n) e^{\alpha_n(z+L/2)}. \quad (6.29)$$

Распределение заряда на центральной полоске

$$\frac{\rho(z)}{\epsilon_0} = \epsilon_1 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=h^-} - \epsilon_2 \frac{\partial \phi}{\partial x} \Big|_{x=h^+} =$$

$$= \frac{\epsilon_1}{h} + \frac{\epsilon_2}{l} + \epsilon_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{h^2} f(-\beta_m) \{e^{-\beta_m(L/2+z)} + e^{-\beta_m(L/2-z)}\} +$$

$$+ \epsilon_2 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{m\pi}{l^2} f(-\gamma_m) \{e^{-\gamma_m(L/2+z)} + e^{-\gamma_m(L/2-z)}\}, \quad -\frac{L}{2} < z < 0, \quad (6.30)$$

где ϵ_0 — диэлектрическая проницаемость вакуума. Отметим, что первые два члена в (6.30) описывают распределение заряда в конденсаторе, состоящем из трех параллельных бесконечных пластин, а дополнительные члены описывают так называемый «краевой эффект».

Остается лишь определить функцию $P(\omega)$, заданную выражением (6.18) и удовлетворяющую второму условию. Если бы для построения $P(\omega)$ требовалось решить бесконечномерное матричное уравнение для коэффициентов F_m и G_m , то можно было бы считать, что мы почти ничего не достигли приведенными выше рассуждениями. К счастью, для нахождения $P(\omega)$ нужно решить систему, размерность матрицы которой, как правило, меньше 10. Это обусловлено тем, что удастся найти точное решение уравнений, входящих во второе условие, в предельном случае $m \rightarrow \infty$. При $m \rightarrow \infty$ величины λ_m и ξ_m спадают экспоненциально, в то время как $f(-\beta_m)$ и $f(-\gamma_m)$ убывают по степенному закону. Следовательно, асимптотическими значениями нулей функции $f(\omega)$ являются β_m и γ_m . Можно показать, что при таком асимптотическом поведении нулей $f(\omega)$ величина ν в третьем условии равна $3/2$, так что $f(\omega) \sim |\omega|^{-3/2}$, и условие на ребре оказывается выполненным. Это условие остается неизменным, когда полубесконечная пластина заменяется конечной. Более подробное обсуждение условия на ребре читатель может найти в работе [5].

Можно показать исходя из приведенных соображений, что F_m и G_m экспоненциально убывают с ростом m . Поэтому достаточно найти лишь несколько первых коэффициентов F_m и G_m , скажем M_1 и M_2 коэффициентов соответственно, обрезав первый ряд в (6.18) при $m = M_1$, а второй — при $m = M_2$. Прежде чем переходить к описанию численных аспектов этого метода решения, подведем краткие итоги приведенных аналитических преобразований.

Вместо того чтобы решать задачу обычным матричным методом, мы воспользовались тем фактом, что точное решение близкой классической задачи для полубесконечной пластины

(разветвленный волновод) известно, а решение для полосковой линии отличается от него возмущающим множителем $P(\omega)$. Сам множитель $P(\omega)$ выражается через неизвестные константы F_m и G_m , экспоненциально спадающие с ростом m . Следовательно, для получения решения с большой точностью достаточно определить лишь несколько первых F_m и G_m . В отличие от F_m и G_m исходные коэффициенты A_n спадают с ростом n по степенному закону, в результате чего матричное уравнение для A_n сходится медленно. Конечно, за удобство работы с системой уравнений для F_m и G_m приходится расплачиваться тем, что матричные элементы этой системы выражаются через бесконечные произведения. Однако, поскольку размерность обрезанной матрицы системы невелика, число подлежащих вычислению произведений мало и суммарная эффективность метода остается высокой.

4. ЧИСЛЕННЫЙ СЧЕТ

Рассмотрим теперь некоторые основные этапы процесса численных вычислений для задачи о полосковой линии, решаемой описанным выше методом. Эти этапы приведены ниже в том порядке, в каком они следуют при численном решении.

Нахождение корней трансцендентного уравнения (6.4)

Для численного решения уравнения (6.4) его удобно переписать в виде

$$F(\alpha) \equiv \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} + 1\right) \sin(\alpha d) + \left(\frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} - 1\right) \sin[\alpha(h-t)] = 0. \quad (6.31)$$

Это уравнение имеет счетное число корней:

$$\alpha_n = \frac{n\pi}{d} + \frac{i_n}{d}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (6.32)$$

где $\{i_n\}$ — знакопеременная и ограниченная последовательность чисел. Корни уравнения $F(\alpha) = 0$ можно найти с помощью любого итерационного метода решения трансцендентных уравнений. Например, можно использовать метод Ньютона — Рафсона, распадающийся на следующие три шага:

1) Определение расстояния между двумя ближайшими корнями. Это дает величину быстрого приращения для нахождения начального значения α в итерационной схеме Ньютона и определяет область значений α , из которой не следует выходить, чтобы не потерять корни уравнения.

2) Определение корней. Это осуществляется с помощью итерационной схемы Ньютона, содержащейся, скажем, в стандартной программе DRTNI, которая имеется в библиотеке стандарт-

ных программ машины IBM 360. Для счета по этой схеме требуется знание функции $F(\alpha)$ и ее производной.

3) Определение нового начального значения α для схемы Ньютона. Процедура состоит в увеличении α и в проверке знака производной. Как только производная меняет знак, производится проверка, не вышло ли значение α из области, определенной в п. 1.

Вычисление бесконечных произведений (6.19), (6.20) и (6.21)

При практических расчетах бесконечное произведение необходимо обрезать. Поэтому мы должны оценить ошибку, вносимую при замене бесконечного произведения конечным:

$$P_N = \prod_{n=1}^N \left(1 - \frac{\omega}{\beta_n}\right) e^{\omega h/\pi n}. \quad (6.33)$$

Определим относительную ошибку обрезания выражением

$$\epsilon_N = \left| \frac{P_\infty - P_N}{P_N} \right| = \left| \prod_{n=N+1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\beta_n}\right) e^{\omega h/\pi n} - 1 \right|, \quad (6.34)$$

которое можно упростить при больших N , если пренебречь членами, порядок которых меньше $\omega h/N\pi$:

$$\epsilon_N \approx \left| \prod_{n=N+1}^{\infty} \left[1 - \frac{1}{2} \left(\frac{\omega h}{n\pi}\right)^2\right] - 1 \right| \approx \frac{1}{2} \left| \frac{\omega h}{\pi} \right|^2 \sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2}. \quad (6.35)$$

Заметим, что

$$\sum_{n=N+1}^{\infty} \frac{1}{n^2} < \int_N^{\infty} \frac{dx}{x^2} = \frac{1}{N}. \quad (6.36)$$

Поэтому

$$\epsilon_N \approx \frac{1}{2N} \left| \frac{\omega h}{\pi} \right|^2, \quad (6.37)$$

если

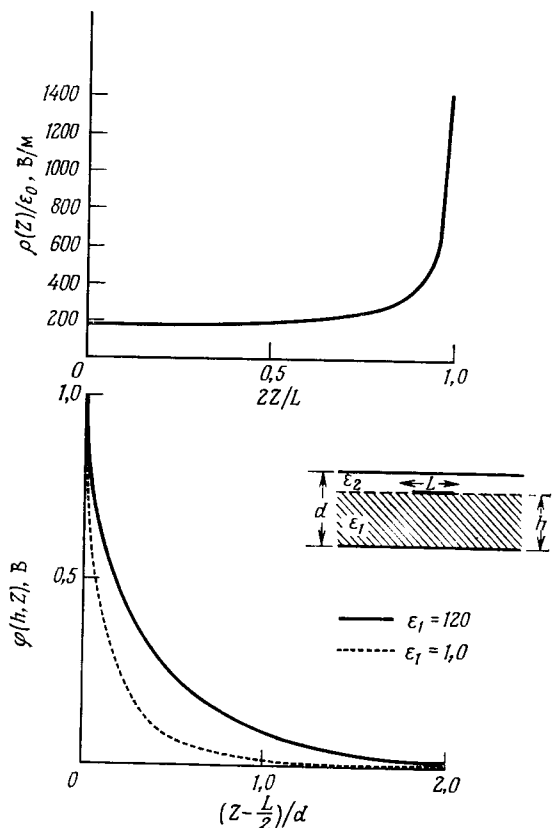
$$\frac{1}{2N} \left| \frac{\omega h}{\pi} \right|^2 \ll 1,$$

иными словами, если $|\omega|$ не слишком велико.

Решение матричного уравнения

Для нахождения F_m и G_m необходимо решить систему большого числа алгебраических уравнений, полученных из второго условия. Во многих ЭВМ имеются для этой цели стан-

дартные программы. Например, в библиотеке стандартных программ машины IBM 360 имеется программа DGELG для решения системы уравнений с действительными коэффициентами.



Фиг. 6.2. Распределения заряда на полоске и потенциала при $x = h$. $\epsilon_1 = 120$, $\epsilon_2 = 1$, $h = d/\sqrt{1,56}$, $L/d = 1$. (Пунктирной линией показано распределение заряда для $\epsilon_1 = 1$.)

Суммирование рядов в (6.29) и (6.30)

Для нахождения распределений заряда и потенциала в полосковой линии необходимо вычислять суммы (6.29). Отметим, во-первых, что, поскольку

$$f(\omega) \sim |\omega|^{-3/2} \quad \text{при } |\omega| \rightarrow \infty,$$

имеем

$$R_f(\alpha_n) \sim n^{-3/2} \quad \text{при } n \rightarrow \infty.$$

До тех пор, пока точка наблюдения не слишком близка к краю центральной полоски (т. е. $|z| \neq L/2$) все суммы в (6.29) и (6.30) сходятся очень быстро благодаря экспоненциально спадающим множителям. Значение (6.29) на краю ограничено и равно единице, поскольку потенциал полоски равен единице. Для нахождения сумм в точках, лежащих вблизи края, можно воспользоваться асимптотическим поведением функции $f(\omega)$. Поскольку при больших m

$$f(-\beta_m) \sim K_2 m^{-3/2},$$

где K_2 — известное число, для вычисления распределения заряда при $z \rightarrow -L/2$ можно использовать соотношение

$$\sum_{m=1}^{\infty} m^{-1/2} e^{-\frac{m\pi}{h}(\frac{L}{2}+z)} \sim \left[\frac{1}{h} \left(\frac{L}{2} + z \right) \right]^{-1/2}. \quad (6.38)$$

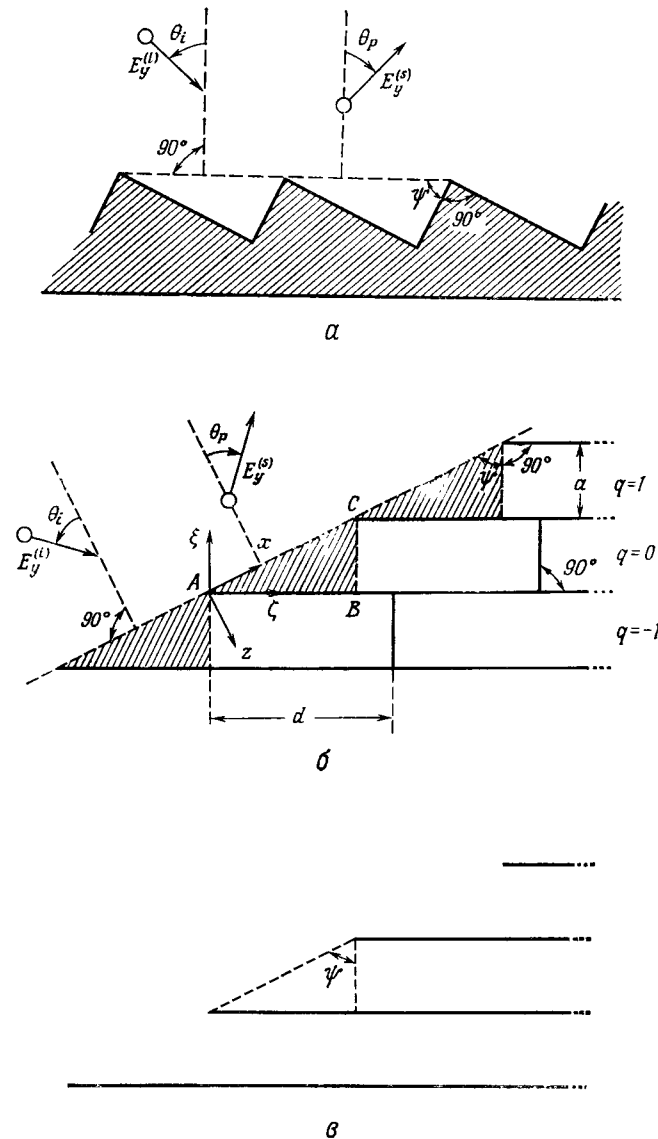
5. РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА

С помощью описанного здесь метода был получен широкий набор численных результатов, опубликованных в работе [6]. Для примера на фиг. 6.2 представлены распределения заряда на центральной полоске и потенциала при $x = h$ для следующих параметров: $\epsilon_1 = 120$, $\epsilon_2 = 1$, $h = d/\sqrt{1,56}$ и $L/d = 1$. Распределение заряда имеет правильную особенность на краю полоски. На фиг. 6.2 пунктиром показано распределение потенциала при $\epsilon_1 = 1$. Характер распределения заряда сохраняется, хотя полный заряд при $\epsilon_1 = 1$ уменьшается. Общее время счета на IBM 360/75, необходимое для получения всех данных для построения кривых фиг. 6.2, порядка 20 с.

§ 3. ДИФРАКЦИОННАЯ РЕШЕТКА

1. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

В этом параграфе мы проиллюстрируем применение модифицированного метода вычетов (ММВ) к задаче, где поле простирается до бесконечности, а именно к задаче о рассеянии на дифракционной решетке (эшелетте). Такая решетка широко используется в качестве частотно-избирательного квазиоптического устройства. Кроме того, численный метод решения задачи дифракции на подобной структуре представляет самостоятельный интерес. Эта структура изучалась рядом исследователей, использовавших стандартный метод интегрального уравнения или его варианты. Метод решения, который будет изложен здесь, отличается от стандартного и немного напоминает рас-



Фиг. 6.3. Геометрия дифракционной решетки (эшелетты) (а), вспомогательная геометрия для решения задачи об эшелетте (б) и сдвинутые параллельные пластины (в).

смотренный в предыдущем параграфе. Материал настоящего параграфа в основном взят из работы [7].

Предположим, что решетка идеально проводящая и в направлении, перпендикулярном плоскости чертежа (фиг. 6.3), однородна и простирается до бесконечности. Пусть угол между соседними гранями решетки равен 90° , а угол между меньшей гранью и горизонтальной плоскостью равен ψ (фиг. 6.3, а). Мы будем рассматривать случай, когда на решетку падает плоская линейно поляризованная волна, вектор электрического поля которой параллелен штрихам решетки (E -волна). Нашей целью является определение комплексных амплитуд рассеянных волн различных порядков, отраженных решеткой.

Описываемый здесь метод решения отличается от обычных уже с самого начала. Как было показано в предыдущем параграфе, идея ММВ состоит в представлении исходной задачи в виде возмущенного варианта близкой эталонной задачи, имеющей точное решение. Тогда решение исходной задачи сводится к построению возмущающего множителя, изменяющего решение эталонной задачи.

На фиг. 6.3 видно, что исходная структура (фиг. 6.3, а) получается из структуры, представленной на фиг. 6.3, б, если в последней положить $d = 0$. Эта последняя структура состоит из бесконечного набора сдвинутых параллельных пластин, закороченных идеально проводящими перегородками, углубленными на расстояние d от открытых концов. Предполагается, что пластины бесконечно тонкие и идеально проводящие, а вся окружающая среда однородная. Отметим, что, переходя к $d = 0$, мы тем самым изменяем физическое условие для поведения электромагнитных полей вблизи ребра (так называемое условие на ребре, упоминавшееся выше) в связи с изменением первоначальной формы ребра (край тонкой пластины) на прямоугольную. Мы увидим, что применяемый здесь метод автоматически учитывает это изменение условия на ребре.

Если закорачивающих стенок нет, то мы приходим к задаче о дифракции на наборе сдвинутых параллельных пластин. Эта задача и является эталонной для данного случая (фиг. 6.3, в).

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ В СПЕКТРАЛЬНОМ ПРЕДСТАВЛЕНИИ

Для удобства мы будем использовать две прямоугольные системы координат (x, y, z) и (ξ, η, ζ) . Пусть ось η совпадает с осью y , перпендикулярной плоскости чертежа (фиг. 6.3, б). Поскольку мы приняли, что падающее электрическое поле имеет лишь y -компоненту, а структура решетки однородна вдоль оси y , то достаточно исследовать поведение одной скалярной

величины E_y , удовлетворяющей двумерному волновому уравнению

$$\nabla_i^2 E_y + k_0^2 E_y = 0, \quad (6.39)$$

где k_0 — волновое число для свободного пространства, а ∇_i^2 — двумерный оператор Лапласа.

Рассмотрим поле в области $z \leq 0$, свободной от проводников. Поскольку структура решетки периодична вдоль оси x с периодом $a \sec \psi$ ($0 < \psi < \pi/2$), для полного поля E_y справедливо гармоническое представление Флоке. Таким образом,

$$E(x, z) = A \exp \left[-i \frac{\phi x}{a \sec \psi} - i \alpha_0 z \right] + \sum_{p=-\infty}^{\infty} A_p \exp \left[-i \frac{\phi + 2p\pi}{a \sec \psi} x + i \alpha_p z \right], \quad (6.40)$$

где A и A_p — амплитуды падающей волны и p -й пространственной гармоники, а

$$\alpha_p = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{\phi + 2p\pi}{a \sec \psi} \right)^2} = i \sqrt{\left(\frac{\phi + 2p\pi}{a \sec \psi} \right)^2 - k_0^2}. \quad (6.41)$$

Угол падения θ_i будем отсчитывать против часовой стрелки, а угол рассеяния θ_p для p -й пространственной гармоники — по часовой стрелке, причем

$$\sin \theta_p = \sin \theta_i + \frac{2p\pi}{ak_0 \sec \psi}, \quad (6.42)$$

$$\cos \theta_p = \frac{\alpha_p}{k_0}, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$$

Уравнения (6.42) называются уравнениями решетки. Один из методов решения рассматриваемой задачи состоит в следующем. Прежде всего выражение (6.40) приравнивается нулю на поверхности решетки (фиг. 6.3, а). В результате получается бесконечное матричное уравнение, которое решается путем обрезания суммы при некотором большом номере P и вычисления E_y в $2P+1$ точке (x, z) на поверхности решетки. Этот метод неэффективен при численном счете, так как коэффициенты A_p с ростом p спадают очень медленно. Кроме того, поскольку выражение (6.40) не справедливо в заштрихованных треугольных областях на фиг. 6.3, б, этот метод дает неудовлетворительные результаты при очень больших значениях P вследствие роста численных ошибок. Хотя эту трудность можно обойти с помощью приема, предложенного Ясуурой [8], эффективность описанного метода оставляет желать лучшего.

Приведем теперь подробный вывод уравнений в спектральном представлении, которые окажутся пригодными для использования ММВ. Рассмотрим поле внутри волноводов, образованных параллельными пластинами, т. е. в областях $qa \leq \xi \leq (q+1)a$, $\xi \leq (q+1)atg \psi$, где $q = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$. Поскольку структура однородна вдоль оси y , в ней возможны лишь моды TE_{n0} . Следовательно, для q -го волновода имеем

$$E_y(\xi, \zeta) = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \left(\frac{n\pi}{a} (\xi - qa) \right) [B_n^q \exp \{ -i\beta_n (\zeta - qa \operatorname{tg} \psi) \} + C_n^q \exp \{ i\beta_n (\zeta - qa \operatorname{tg} \psi) \}], \quad (6.43)$$

$$qa \leq \xi \leq (q+1)a, \\ (q+1)atg \psi \leq \zeta \leq (q+1)atg \psi + d,$$

где β_n — волновое число для моды TE_{n0} , определяемое выражением

$$\beta_n = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{a} \right)^2} = -i \sqrt{\left(\frac{n\pi}{a} \right)^2 - k_0^2}, \quad n = 1, 2, \dots \quad (6.44)$$

Ввиду периодичности амплитуда моды TE_{n0} в q -м волноводе (т. е. коэффициенты B_n^q и C_n^q) связана с амплитудой в нулевом волноводе соотношениями

$$B_n^q = B_n^0 e^{-iq\phi}, \quad C_n^q = C_n^0 e^{-iq\phi}, \quad (6.45)$$

где величина ϕ определена в (6.41). Коэффициенты B_n^0 и C_n^0 , определяющие амплитуду моды TE_{n0} в нулевом волноводе, связаны между собой через граничное условие на закорачивающей пластине при $\zeta = atg \psi + d$:

$$B_n^0 \exp \{ -i\beta_n (atg \psi + d) \} + C_n^0 \exp \{ i\beta_n (atg \psi + d) \} = 0. \quad (6.46)$$

Наша основная задача состоит в нахождении коэффициентов A_p , т. е. амплитуд p -й рассеянной волны. Выведем сначала систему уравнений для этих коэффициентов.

Следует отметить, что сшивание полей на границе раздела нельзя непосредственно произвести для выражений (6.40) и (6.43), поскольку эти выражения не справедливы в заштрихованных треугольных областях на фиг. 6.3, б. Однако, как мы увидим, эту трудность можно обойти с помощью искусственного приема, основанного на двумерной теореме Грина.

Рассмотрим интеграл, взятый вдоль границы одного из заштрихованных треугольников:

$$\oint \left(F \frac{\partial E_y}{\partial n} - E_y \frac{\partial F}{\partial n} \right) ds = 0, \quad (6.47)$$

где n — внешняя нормаль, а F — вспомогательная функция, удовлетворяющая двумерному однородному волновому уравнению.

Заметим, что периодичность структуры позволяет ограничиться рассмотрением только одной ячейки, скажем нулевой. Вспомогательная функция F в значительной степени произвольна. Однако окончательные уравнения принимают наиболее удобный вид, если F выбрать в виде

$$F = \sin\left(m\pi \frac{\xi}{a}\right) e^{-i\beta_m \xi}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6.48)$$

или

$$F = \sin\left(m\pi \frac{\xi}{a}\right) e^{i\beta_m \xi}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.49)$$

Интегрируя (6.47) с использованием (6.48) и (6.49), получаем следующие системы уравнений:

$$\frac{-A}{\beta_{in} + \beta_m} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{A_p}{\gamma_p - \beta_m} = \frac{a^2 \beta_m C_m^0}{m\pi [1 - (-1)^m \exp\{-i\phi - ia\beta_m \operatorname{tg} \psi\}]}, \quad (6.50)$$

$$m = 1, 2, \dots,$$

$$\frac{-A}{\beta_{in} - \beta_m} + \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{A_p}{\gamma_p + \beta_m} = \frac{-a^2 \beta_m B_m^1}{m\pi [1 - (-1)^m \exp\{-i\phi + ia\beta_m \operatorname{tg} \psi\}]}, \quad (6.51)$$

$$m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\beta_{in} = k_0 \cos(\theta_i - \psi), \quad (6.52)$$

$$\gamma_p = k_0 \cos(\theta_p + \psi). \quad (6.53)$$

С помощью (6.46) уравнения (6.50) и (6.51) сводятся к системе

$$\sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{A_p}{\gamma_p - \beta_m} + \lambda_m \sum_{p=-\infty}^{\infty} \frac{A_p}{\gamma_p + \beta_m} = \frac{A}{\beta_{in} + \beta_m} + \lambda_m \frac{A}{\beta_{in} - \beta_m}, \quad (6.54)$$

$$m = 1, 2, \dots,$$

где

$$\lambda_m = -\exp\{-i2\beta_m(a \operatorname{tg} \psi + d)\} \frac{1 - (-1)^m \exp\{-i\phi + ia\beta_m \operatorname{tg} \psi\}}{1 - (-1)^m \exp\{-i\phi - ia\beta_m \operatorname{tg} \psi\}}, \quad (6.55)$$

$$m = 1, 2, \dots$$

Вспомогая, что наша исходная задача (фиг. 6.3, а) соответствует предельному случаю $d = 0$, положим $d = 0$ в (6.54) и (6.55). Кроме того, мы примем $A = 1$ без потери общности.

3. РЕШЕНИЕ МОДИФИЦИРОВАННЫМ МЕТОДОМ ВЫЧЕТОВ

Из сопоставления с предыдущим параграфом мы можем заключить, что уравнение (6.54) удобно для применения модифицированного метода вычетов. Вместо того чтобы решать (6.54), обрезав бесконечномерную матрицу, в ММВ строится вспомогательная функция $f(\omega)$. Эффективность этого метода при численных расчетах обусловлена тем, что функция $f(\omega)$ выражается в виде произведения функции $g(\omega)$, являющейся точным решением эталонной задачи ($\lambda_m = 0$), на возмущающий множитель. Поскольку функция $g(\omega)$ может быть выражена в замкнутом виде, объем численного счета при использовании ММВ существенно уменьшается.

Определим теперь функцию $f(\omega)$. Эта функция является мероморфной и удовлетворяет следующим условиям:

- 1) $f(\omega)$ имеет простые полюса при $\omega = \gamma_p$, $p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$ и при $\omega = -\beta_{in}$;
- 2) $f(\beta_m) + \lambda_m f(-\beta_m) = 0$, $m = 1, 2, \dots$;
- 3) $f(\omega) \rightarrow 0$ при $|\omega| \rightarrow \infty$ и, кроме того, $f(\omega) \sim \omega^{-\nu}$, где $1 < \nu < 2$, при $|\omega| \rightarrow \infty$ в определенной области $\operatorname{arg} \omega$, которая будет определена ниже;
- 4) вычет $f(\omega)$ при $\omega = -\beta_{in}$ равен 1.

Далее по аналогии с предыдущим параграфом рассмотрим контурные интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left\{ \frac{f(\omega)}{\omega - \beta_m} + \lambda_m \frac{f(\omega)}{\omega + \beta_m} \right\} d\omega,$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\omega) d\omega}{\omega - \beta_m}, \quad \frac{1}{2\pi i} \oint \frac{f(\omega) d\omega}{\omega + \beta_m}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Легко показать, что

$$R_f(\gamma_p) = A_p, \quad p = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (6.56)$$

где $R_f(x)$ — вычет функции $f(\omega)$ при $\omega = x$ и

$$f(-\beta_m^1) = \frac{a^2 \beta_m B_m^1}{m\pi [1 - (-1)^m \exp\{-i\phi + ia\beta_m \operatorname{tg} \psi\}]}, \quad m = 1, 2, \dots, \quad (6.57)$$

$$f(\beta_m) = \frac{-a^2 \beta_m C_m^0}{m\pi [1 - (-1)^m \exp\{-i\phi - ia\beta_m \operatorname{tg} \psi\}]}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (6.58)$$

Таким образом, если функция $f(\omega)$ найдена, то задача может считаться решенной.

Построение функции $f(\omega)$ начнем с определения другой мероморфной функции $g(\omega)$:

$$g(\omega) = e^{R\omega} \frac{\pi(\omega, \beta_n)}{(\omega + \beta_{in})(\omega - \gamma_0)\pi(\omega, \gamma_n)\pi(\omega, \gamma_{-n})}, \quad (6.59)$$

где

$$\pi(\omega, \beta_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\beta_n}\right) \exp(i a \omega / n \pi), \quad (6.60)$$

$$\pi(\omega, \gamma_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\gamma_n}\right) \exp(i a \omega e^{i\psi} \sec \psi / 2 \pi n), \quad (6.61)$$

$$\pi(\omega, \gamma_{-n}) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\gamma_{-n}}\right) \exp(i a \omega e^{-i\psi} \sec \psi / 2 \pi n) \quad (6.62)$$

и

$$R = -i \frac{a}{\pi} \{ \ln(2 \cos \psi) + \psi \operatorname{tg} \psi \}. \quad (6.63)$$

С точностью до постоянного множителя функцию $g(\omega)$ можно отождествить с функцией $f(\omega)$ для случая $\lambda_m \equiv 0$, т. е. с решением эталонной задачи (фиг. 6.3, в). Таким образом, для построения $f(\omega)$ необходимо лишь определить положение нулей. Поэтому мы можем записать $f(\omega)$ в виде

$$f(\omega) = K e^{R\omega} \frac{\pi(\omega, \beta'_n)}{(\omega + \beta_{in})(\omega - \gamma_0) \pi(\omega, \gamma_n) \pi(\omega, \gamma_{-n})}, \quad (6.64)$$

где

$$\pi(\omega, \beta'_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\beta'_n}\right) \exp(i a \omega / n \pi), \quad (6.65)$$

и, следовательно, величина β'_n является n -м нулем функции $f(\omega)$. Неизвестный множитель K мы найдем ниже из четвертого условия для функции $f(\omega)$, а именно $R_f(-\beta_{in}) = 1$. Сравнивая $f(\omega)$ и $g(\omega)$, мы видим, что, за исключением постоянного множителя, функция $f(\omega)$ получается из $g(\omega)$ заменой бесконечного набора нулей $\{\beta_n\}$ на $\{\beta'_n\}$. Напомним, что в предельном случае при $\lambda_m = 0$ эти две совокупности нулей совпадают. Покажем, что при $\lambda_m \neq 0$ разность $\Delta_n = \beta'_n - \beta_n$ между нулями стремится к постоянной величине, скажем δ , когда $n \rightarrow \infty$. Более того, предел δ можно найти заранее из условия на ребре, что особенно важно при численных расчетах. Полагая $\beta'_n = \beta_n + \delta$ при больших n , получаем асимптотическое выражение для функции $f(\omega)$:

$$f(\omega) \sim \omega^{-3/2 - i a \delta / \pi}, \quad 0 \leq \arg \omega \leq \pi, \\ f(\omega) \sim (-\omega)^{-3/2 - i a \delta / \pi} \frac{\sin \{i a (\omega - \delta)\}}{\cos(a \omega \operatorname{tg} \psi + \phi) - \cos(i a \omega)}, \quad \pi \leq \arg \omega \leq 2\pi. \quad (6.66)$$

Из (6.66) видно, что при $|\omega| \rightarrow \infty$ функция $f(\omega)$ спадает по степенному закону, если $-\pi/2 + \psi \leq \arg \omega \leq 3\pi/2 - \psi$, и по

экспоненциальному закону, если $\arg \omega$ находится вне указанной области. Такое поведение $f(\omega)$ согласуется с необходимым условием на ребре. Можно показать, что из надлежащего условия на прямоугольном ребре следует

$$\left. \begin{aligned} A_p &\sim |p|^{-3/2}, \quad |p| \rightarrow \infty, \\ B_m^0 \exp(-i a \beta_m \operatorname{tg} \psi) &\sim m^{-3/2}, \\ C_m^0 \exp(+i a \beta_m \operatorname{tg} \psi) &\sim m^{-3/2}, \end{aligned} \right\} m \rightarrow \infty. \quad (6.67)$$

Поэтому из (6.57) и (6.58) вытекает следующее поведение $f(\beta_m)$ и $f(-\beta_m)$:

$$\left. \begin{aligned} f(\beta_m) &\sim m^{-3/2} \exp(-m \pi \operatorname{tg} \psi), \\ f(-\beta_m) &\sim m^{-3/2}, \end{aligned} \right\} \quad (6.68)$$

где мы воспользовались тем, что $\beta_m \sim i m \pi / a$ при $m \rightarrow \infty$. Сравнивая (6.68) с (6.67), получаем

$$-\frac{3}{2} - i \frac{a \delta}{\pi} = -\frac{5}{3}, \quad \text{или } \delta = -i \frac{\pi}{6a}. \quad (6.69)$$

Величину δ можно также вычислить, используя непосредственно (6.66) во втором условии для $f(\omega)$, т. е. в соотношении $f(\beta_m) + \lambda_m f(-\beta_m) = 0$ для больших m .

Мы видим теперь, что единственной нетривиальной проблемой при построении функции $f(\omega)$ в общем случае $\lambda_m \neq 0$ является удовлетворение второму условию. Для этого необходимо найти величины Δ_n , и на первый взгляд кажется, что требуется определить бесконечное число этих величин. Однако оказывается, что численное решение необходимо лишь для нескольких первых значений Δ_n , скажем для $n = 1, 2, \dots, M$, а остальные значения при $n > M$ находятся аналитически по известному значению δ .

С учетом сказанного удобно представить функцию $f(\omega)$ в виде

$$f(\omega) = K f_0(\omega) P(\omega), \quad (6.70)$$

где

$$f_0(\omega) = \frac{e^{R\omega}}{(\omega + \beta_{in})(\omega - \gamma_0)} \prod_{n=1}^M \frac{1 - \frac{\omega}{\beta_n}}{\left(1 - \frac{\omega}{\gamma_n}\right) \left(1 - \frac{\omega}{\gamma_{-n}}\right)} \times \\ \times \prod_{n=M+1}^{\infty} \frac{1 - \frac{\omega}{\beta_n + \delta}}{\left(1 - \frac{\omega}{\gamma_n}\right) \left(1 - \frac{\omega}{\gamma_{-n}}\right)}, \quad (6.71)$$

$$P(\omega) = 1 + \sum_{p=1}^M \frac{F_p}{1 - \frac{\omega}{\beta_n}}. \quad (6.72)$$

Заметим, что в (6.71) мы использовали асимптотическое значение смещенных нулей $\beta_n + \delta$ при $n \geq M + 1$. Выражение (6.72) можно рассматривать как интерполяционную формулу Лагранжа. Неизвестные коэффициенты находятся из требования, чтобы функция $f(\omega)$, определяемая (6.71), удовлетворяла второму условию, т. е. $f(\beta_m) + \lambda_m f(-\beta_m) = 0$. Получающееся матричное уравнение M -го порядка численно решается с помощью какой-либо стандартной программы.

Здесь следует еще раз повторить, что, хотя при использовании ММВ приходится численно решать систему линейных уравнений, размерность матрицы этой системы, необходимая для достижения заданной точности, значительно меньше, чем размерность матрицы, получающейся после обрезания при непосредственном решении системы (6.54).

Кроме того, данный метод гарантирует правильное асимптотическое поведение A_p для больших $|p|$, поскольку при построении $f(\omega)$ было учтено условие на ребре. Это характерное свойство решения, получаемого модифицированным методом вычетов.

4. ПРОЦЕДУРА СЧЕТА

Большинство процедур численного счета сходно с рассмотренными в § 2. Однако для решения данной задачи удобно использовать машинный язык, способный оперировать с комплексными величинами. Кроме того, необходимо изменить некоторые подпрограммы, чтобы они могли работать с комплексными величинами.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА

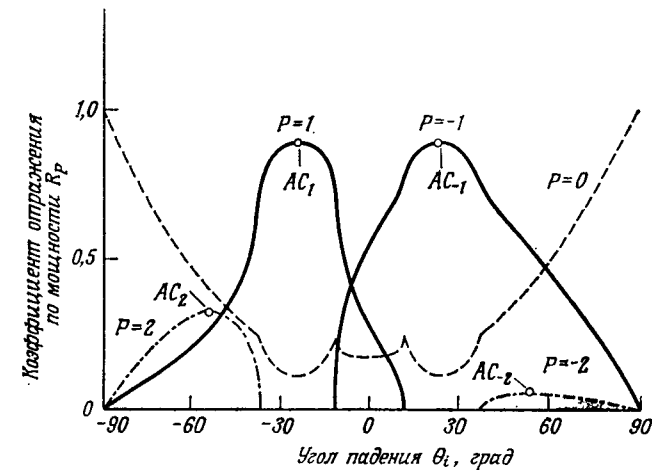
В табл. 6.1 приведены полученные значения величин $\{F_p\}$ для типичного случая $\psi = 30^\circ$, $a = 0,75\lambda$ и $\theta_i = 45^\circ$. Значения

Таблица 6.1

Значения F_p ($p = 1, 2, \dots, 10$) для $\psi = 30^\circ$,
 $a = 0,75 \lambda$ и $\theta_i = 45^\circ$

F_1	$0,528 - i \cdot 1,06$
F_2	$0,430 + i \cdot 0,267$
F_3	$0,113 + i \cdot 0,0526$
F_4	$(0,658 + i \cdot 0,243) \cdot 10^{-1}$
F_5	$(0,448 + i \cdot 0,137) \cdot 10^{-1}$
F_6	$(0,332 + i \cdot 0,0864) \cdot 10^{-1}$
F_7	$(0,256 + i \cdot 0,0579) \cdot 10^{-1}$
F_8	$(0,202 + i \cdot 0,0401) \cdot 10^{-1}$
F_9	$(0,159 + i \cdot 0,0280) \cdot 10^{-1}$
F_{10}	$(0,119 + i \cdot 0,0186) \cdot 10^{-1}$

$f(\beta_m)$ и $f(-\beta_m)$ для тех же параметров представлены в табл. 6.2. С увеличением m величина $f(\beta_m)$ спадает по экспоненциальному закону, а $f(-\beta_m)$ — только по степенному. Такое поведение находится в согласии с выводами, сделанными в п. 3.



Фиг. 6.4. Зависимость коэффициентов отражения по мощности для распространяющихся пространственных гармоник от угла падения ($\psi = 30^\circ$, $a = 1,0825 \lambda$; AC_p — максимум коэффициента отражения для p -й пространственной гармоники).

На фиг. 6.4 приведены графики коэффициента отражения по мощности в видимой области R_p для p -й пространственной гар-

Таблица 6.2

Значения $f(\omega)$ при $\omega = \pm \beta_m$, $m = 1, 2, \dots, 10$,
для $\psi = 30^\circ$, $a = 0,75 \lambda$ и $\theta_i = 45^\circ$

m	$f(\beta_m)$	$f(-\beta_m)$
1	$0,257 + i \cdot 0,427$	$0,792 - i \cdot 0,668$
2	$(0,171 - i \cdot 0,108) \cdot 10^{-1}$	$0,223 + i \cdot 0,00775$
3	$(-0,611 + i \cdot 0,544) \cdot 10^{-3}$	$(0,911 - i \cdot 0,00894) \cdot 10^{-1}$
4	$(0,451 - i \cdot 0,426) \cdot 10^{-4}$	$(0,517 - i \cdot 0,0270) \cdot 10^{-1}$
5	$(-0,420 + i \cdot 0,424) \cdot 10^{-5}$	$(0,340 - i \cdot 0,0287) \cdot 10^{-1}$
6	$(0,448 - i \cdot 0,476) \cdot 10^{-6}$	$(0,245 - i \cdot 0,0269) \cdot 10^{-1}$
7	$(-0,520 + i \cdot 0,575) \cdot 10^{-7}$	$(0,187 - i \cdot 0,0244) \cdot 10^{-1}$
8	$(0,640 - i \cdot 0,733) \cdot 10^{-8}$	$(0,149 - i \cdot 0,0220) \cdot 10^{-1}$
9	$(-0,825 + i \cdot 0,971) \cdot 10^{-9}$	$(0,123 - i \cdot 0,0199) \cdot 10^{-1}$
10	$(-0,110 - i \cdot 0,133) \cdot 10^{-9}$	$(0,104 - i \cdot 0,0182) \cdot 10^{-1}$

моники, который определяется формулой

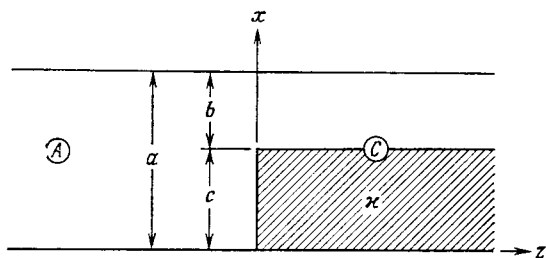
$$R_p = |A_p|^2 \frac{\cos \theta_p}{\cos \theta_i}. \quad (6.73)$$

Максимумы коэффициентов отражения R_p при $p \neq 0$ соответствуют выполнению условия автоколлимации $\theta_p = -\theta_i$. Следует также обратить внимание на поведение коэффициентов R_0 , R_1 и R_{-1} вблизи углов, где одна из пространственных гармоник дифрагирует под углом $\pm 90^\circ$. Резкие изменения коэффициентов отражения при таких углах называются аномалиями Вуда.

§ 4. ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИЙ УСТУП В ВОЛНОВОДЕ

1. ВВЕДЕНИЕ И ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Волноводы, частично заполненные диэлектрическими пластинами, занимающими часть поперечного сечения (фиг. 6.5), применяются в качестве согласующих трансформаторов, фазовращателей, замедляющих структур и в последнее время как



Фиг. 6.5. Полубесконечный диэлектрический уступ в волноводе.

модели ферритовых устройств. Использование таких волноводов в качестве элементов цепей требует знания эффектов, происходящих при соединении однородно заполненных волноводов с неоднородно заполненными. Методы, обычно применявшиеся для решения задачи о таком диэлектрическом уступе, сводились к построению эквивалентной схемы передающей линии. В этом параграфе описывается метод, который позволяет не только вычислить параметры эквивалентной схемы, но и точно определить распределения полей. Этот метод был развит в работе [9].

Стандартные методы решения этой задачи основываются на применении вариационной процедуры Рэлея — Ритца и на методе сшивания полей разных мод. Точность вариационного метода зависит от правильного выбора пробного поля; кроме того, он дает мало сведений о распределении полей, а метод сшивания полей разных мод становится слишком громоздким

с ростом числа учитываемых мод. Помимо этого, с помощью обоих указанных методов трудно воспроизвести правильное поведение полей вблизи ребра диэлектрика.

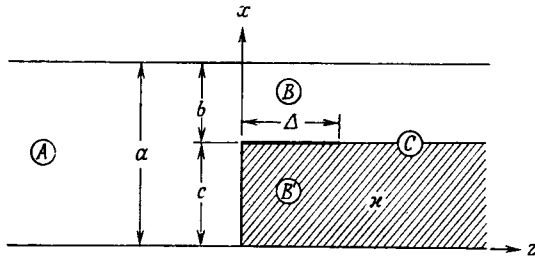
Левин [10] использовал другой подход в решении задачи о полубесконечном диэлектрическом уступе, в котором выполнялось условие на ребре. В его методе применяется квазистатическое приближение совместно с решением сингулярного интегрального уравнения. Однако этот метод, дающий хорошее приближение в предельном случае низких частот, в случае большого значения относительной диэлектрической проницаемости или высоких частот требует учета большого числа членов, что существенно увеличивает время численных расчетов. Широкое использование в микроволновом диапазоне материалов с большим значением диэлектрической проницаемости требует нахождения метода решения, не зависящего от этих параметров.

Для простоты мы будем исследовать случай двумерного волновода, состоящего из двух параллельных пластин, хотя полученные результаты нетрудно обобщить на случай прямоугольного волновода. Рассмотрим соединение пустого полубесконечного плоского волновода с подобным же волноводом, частично заполненным до высоты $x=c$ однородным диэлектриком без потерь с относительной диэлектрической проницаемостью κ . Параллельные пластины будем считать идеально проводящими и простирающимися до бесконечности в обоих направлениях вдоль оси y , перпендикулярной плоскости чертежа на фиг. 6.5. Рассмотрим случай падения слева волны типа TE_{p0} с амплитудой A . Пусть вектор электрического поля параллелен ребру диэлектрика и совпадает с положительным направлением оси z .

Теперь нетрудно сформулировать задачу, используя стандартный метод сшивания мод. Однако получаемую при этом систему уравнений придется потом решать либо прямым обращением ее обрезанной матрицы, либо итерационным методом. Чтобы получить систему уравнений, подходящую для решения модифицированным методом вычетов, целесообразно сначала рассмотреть несколько видоизмененную задачу (фиг. 6.6), близкую к исходной.

Вспомогательная задача (фиг. 6.6) получается, если на диэлектрическую пластину на фиг. 6.5 поместить сверху при $x=c$ бесконечно тонкую идеально проводящую полоску. Полоска простирается от $-\infty$ до ∞ по y и на некоторое короткое расстояние Δ в сторону нагруженного волновода. При стремлении Δ к нулю геометрия фиг. 6.6 переходит в геометрию фиг. 6.5. Такая вспомогательная задача была выбрана из соображений удобства, так как нормальные моды в областях B' ($0 < x < c$, $0 < z < \Delta$) и B ($c < x < a$, $0 < z < \Delta$) известны. Однако этот

выбор не является единственно возможным. Основное требование при выборе состоит в том, чтобы удалось найти в области $0 < z < \Delta$ полную ортогональную систему собственных функций. Как мы убедились в § 3, выбор вспомогательной геометрии является ключевым пунктом ММВ. Сделав этот выбор, мы можем теперь перейти к формулировке задачи о диэлектрическом уступе применительно к геометрии фиг. 6.6.



Фиг. 6.6. Вспомогательная геометрия для задачи о диэлектрическом уступе

2. ФОРМУЛИРОВКА ЗАДАЧИ

Поскольку падающее электрическое поле имеет лишь y -компоненту и во вспомогательной задаче граничные условия не зависят от y , уравнения Максвелла сводятся к двумерному волновому уравнению для скалярной величины E_y

$$\left\{ \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k_0^2 \kappa(x) \right\} E_y = 0, \quad (6.74)$$

где

$$\kappa(x) = \begin{cases} \kappa & 0 < x < c, \quad z > 0, \\ 1 & \text{в остальном пространстве,} \end{cases} \quad (6.75)$$

а k_0 — волновое число в свободном пространстве.

Нормальные моды в областях A , B и B' очевидны. Моды в области C находятся из условия непрерывности поля при $x=c$ и граничных условий при $x=0$ и $x=a$ [см. [4] или [11)].

Получаем следующие выражения для полного поперечного электрического поля в каждой области:

область A

$$E_y = A \sin\left(\frac{\rho\pi x}{n}\right) e^{-\alpha_p z} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin\left(\frac{n\pi x}{a}\right) e^{\alpha_n z}; \quad (6.76)$$

область B

$$E_y = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left[\frac{n\pi(x-c)}{b}\right] \{B_n e^{-\beta_n z} + E_n e^{\beta_n(z-\Delta)}\}; \quad (6.77)$$

область B'

$$E_y = \sum_{n=1}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi n x}{c}\right) \{B_n e^{-\zeta_n z} + E_n e^{\zeta_n(z-\Delta)}\}; \quad (6.78)$$

область C

$$E_y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \psi_n(x) e^{-\gamma_n(z-\Delta)}, \quad (6.79)$$

где

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \sin(h_n x), & 0 < x < c, \\ \frac{\sin(h_n c)}{\sin(l_n b)} \sin[l_n(a-x)], & c < x < a, \end{cases} \quad (6.80)$$

$$\alpha_n = \sqrt{\left(\frac{\pi n}{a}\right)^2 - k_0^2}, \quad (6.81)$$

$$\beta_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k_0^2}, \quad (6.82)$$

$$\zeta_n = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{c}\right)^2 - \kappa k_0^2}, \quad (6.83)$$

$$\gamma_n^2 = \begin{cases} h_n^2 - \kappa k_0^2, & 0 < x < c, \\ l_n^2 - k_0^2, & c < x < a. \end{cases} \quad (6.84)$$

Здесь знак квадратного корня выбирается так, чтобы получающиеся постоянные распространения имели положительные действительные части для затухающих мод и положительные мнимые части для распространяющихся мод. Трансцендентное уравнение для γ_n будет приведено ниже.

Чтобы удовлетворить условию непрерывности при $z=0$, надо приравнять полные тангенциальные составляющие электрического и магнитного полей по обе стороны от плоскости $z=0$ при $0 < x < a$. Как и раньше, вместо того чтобы работать в пространстве x , мы применим преобразование Фурье к выражениям для полей, используя свойства ортогональности мод в областях B и B' . Умножая соответствующие уравнения на $\sin(m\pi x/c)$ и $\sin(m\pi(x-c)/b)$ и интегрируя по x , получаем

$$\frac{A}{\alpha_p^2 - \zeta_m^2 - (\kappa - 1)k_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2 - \zeta_m^2 - (\kappa - 1)k_0^2} = \frac{(-1)^m c^2}{2m\pi} [B_m + E_m e^{-\zeta_m \Delta}], \quad (6.85a)$$

$$\frac{-\alpha_p A}{\alpha_p^2 - \zeta_m^2 - (\kappa - 1)k_0^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n A_n}{\alpha_n^2 - \zeta_m^2 - (\kappa - 1)k_0^2} = \frac{\zeta_n (-1)^m c^2}{2m\pi} [-B_m + E_m e^{-\zeta_m \Delta}], \quad (6.85b)$$

$$\frac{A}{\alpha_p^2 - \beta_m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n^2 - \beta_m^2} = \frac{-b^2}{2m\pi} [B_m + E_m e^{-\beta_m \Delta}], \quad (6.86a)$$

$$\frac{-\alpha_p A}{\alpha_p^2 - \beta_m^2} + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n A_n}{\alpha_n^2 - \beta_m^2} = -\frac{\beta_m b^2}{2m\pi} [-B_m + E_m e^{-\beta_m \Delta}], \quad (6.86b)$$

где

$$A = A \sin\left(\frac{p\pi c}{a}\right), \quad (6.87)$$

$$A_n = A_n \sin\left(\frac{n\pi c}{a}\right). \quad (6.88)$$

Применяя ту же процедуру на границе $z = \Delta$, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\gamma_n^2 - \xi_m^2} = \frac{(-1)^m c^2}{2m\pi} [B_m e^{-\xi_m \Delta} + E_m], \quad (6.89a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n C_n}{\gamma_n^2 - \xi_m^2} = \frac{\xi_m (-1)^m c^2}{2m\pi} [B_m e^{-\xi_m \Delta} - E_m], \quad (6.89b)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{C_n}{\gamma_n^2 - \beta_m^2} = \frac{-b^2}{2m\pi} [B_m e^{-\beta_m \Delta} + E_m], \quad (6.90a)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\gamma_n C_n}{\gamma_n^2 - \beta_m^2} = \frac{-\beta_m b^2}{2m\pi} [B_m e^{-\beta_m \Delta} - E_m], \quad (6.90b)$$

где

$$C_n = C_n \sin(h_n c). \quad (6.91)$$

В выражениях (6.85), (6.86), (6.89) и (6.90) m меняется от единицы до бесконечности, т. е. $m = 1, 2, \dots, \infty$.

В пределе $\Delta \rightarrow 0$ вспомогательная структура фиг. 6.6 переходит в диэлектрический уступ (фиг. 6.5). Перейдем теперь в (6.85), (6.86), (6.89) и (6.90) к пределу при $\Delta \rightarrow 0$. Затем, складывая и вычитая эти уравнения для исключения ненужных коэффициентов B_m , B_m , E_m и E_m , мы получаем следующие уравнения для неизвестных $\{A_n\}$ и $\{C_n\}$:

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A_n \left(\frac{1}{\alpha_n - \beta'_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_n + \beta'_m} \right) + \xi_m \frac{C_n}{\gamma_n + \xi_m} \right\} = \\ = A \left(\frac{1}{\alpha_p + \beta'_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_p - \beta'_m} \right). \end{aligned} \quad (6.92)$$

$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \left\{ A \left(\frac{1}{\alpha_n + \beta'_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_n - \beta'_m} \right) + \xi_m \frac{C_n}{\gamma_n - \xi_m} \right\} = \\ = A \left(\frac{1}{\alpha_p - \beta'_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_p + \beta'_m} \right), \end{aligned} \quad (6.93)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_n}{\alpha_n - \beta_m} + \frac{C_n}{\gamma_n + \beta_m} \right\} = \frac{A}{\alpha_p + \beta_m}, \quad (6.94)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ \frac{A_n}{\alpha_n + \beta_m} + \frac{C_n}{\gamma_n - \beta_m} \right\} = \frac{A}{\alpha_p - \beta_m}, \quad (6.95)$$

где для упрощения записи введены обозначения

$$\beta'_m = \sqrt{\xi_m^2 + (\kappa - 1)k_0^2} = \sqrt{\left(\frac{m\pi}{c}\right)^2 - k_0^2}, \quad (6.96)$$

$$\lambda_m = \frac{\beta'_m - \xi_m}{\beta'_m + \xi_m}, \quad (6.97)$$

$$\xi_m = \frac{2\beta'_m}{\beta'_m + \xi_m}. \quad (6.98)$$

Полученные уравнения справедливы для всех $m = 1, 2, \dots, \infty$.

Эта бесконечная система линейных уравнений несколько отличается по форме от систем, которые мы решали с помощью ММВ в двух предыдущих параграфах. Однако некоторое изменение обычной процедуры позволит применить ММВ к написанной выше системе и получить весьма точное решение для неизвестных $\{A_n\}$ и $\{C_n\}$ без большого объема численных расчетов.

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ

Рассмотрим сначала следующие контурные интегралы в плоскости комплексного переменного ω :

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left[\frac{j(\omega)}{\omega - \beta'_m} + \lambda_m \frac{j(\omega)}{\omega + \beta'_m} + \xi_m \frac{j(\omega)}{\omega - \xi_m} \right] d\omega, \quad (6.99)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \left[\frac{j(\omega)}{\omega + \beta'_m} + \lambda_m \frac{j(\omega)}{\omega - \beta'_m} + \xi_m \frac{j(\omega)}{\omega + \xi_m} \right] d\omega, \quad (6.100)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{j(\omega) d\omega}{\omega - \beta'_m}, \quad (6.101)$$

$$\frac{1}{2\pi i} \oint \frac{j(\omega) d\omega}{\omega + \beta'_m}, \quad (6.102)$$

где $m = 1, 2, \dots, \infty$, $f(\omega)$ — мероморфная функция, свойства которой будут описаны ниже, а контуром интегрирования является обычная окружность бесконечно большого радиуса, охватывающая все полюса и нули функции $f(\omega)$. Неизвестные $\{A_n\}$ и $\{C_m\}$ легко найти, если $f(\omega)$ удовлетворяет условиям:

1) $f(\omega)$ имеет простые полюса при $\omega = \alpha_n$ и $\omega = -\gamma_n$, где $n = 1, 2, \dots, \infty$, и при $\omega = -\alpha_p$.

$$2) f(\pm \beta_n) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

$$3) f(\beta'_n) + \lambda_n f(-\beta'_n) + \xi_n \left[f(\xi_n) - \frac{R_f(-\alpha_p)}{\alpha_p + \xi_n} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_f(\alpha_i)}{\alpha_i - \xi_n} \right] - \sum_{i=1}^{\infty} R_f(-\gamma_i) \left(\frac{1}{\gamma_i + \beta'_n} + \frac{\lambda_n}{\gamma_i - \beta'_n} \right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

$$4) f(-\beta'_n) + \lambda_n f(\beta'_n) + \xi_n \left[f(-\xi_n) - \frac{R_f(-\alpha_p)}{\alpha_p - \xi_n} + \sum_{i=1}^{\infty} \frac{R_f(\alpha_i)}{\alpha_i + \xi_n} \right] - \sum_{i=1}^{\infty} R_f(-\gamma_i) \left(\frac{1}{\gamma_i - \beta'_n} + \frac{\lambda_n}{\gamma_i + \beta'_n} \right) = 0, \quad n = 1, 2, \dots, \infty.$$

5) $f(\omega) \sim \omega^{-\nu}$ при $|\omega| \rightarrow \infty$, где $\nu > 1$ и значение ν определяется из физического условия на ребре, а именно

$$\nu = 1 + \frac{2}{\pi} \arccos \left[\frac{\kappa - 1}{2(\kappa + 1)} \right].$$

$$6) R_f(-\alpha_p) = A,$$

где, как и раньше, $R_f(x)$ — вычет функции $f(\omega)$ при $\omega = x$.

Третье и четвертое условия существенно отличают настоящую задачу от задач, где используется обычный ММВ.

Благодаря пятому условию контурные интегралы (6.99) — (6.102) обращаются в нуль. Применяя теорему о вычетах к (6.99) — (6.102) и используя первое — четвертое условия, получаем

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ R_f(\alpha_n) \left[\frac{1}{\alpha_n - \beta'_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_n + \beta'_m} \right] - \xi_m R_f(-\gamma_n) \left[\frac{1}{\gamma_n + \xi_m} \right] \right\} - R_f(-\alpha_p) \left[\frac{1}{\alpha_p + \beta'_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_p - \beta'_m} \right] = 0, \quad (6.103)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ R_f(\alpha_n) \left[\frac{1}{\alpha_n + \beta'_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_n - \beta'_m} \right] - \xi_m R_f(-\gamma_n) \left[\frac{1}{\gamma_n - \xi_m} \right] \right\} - R_f(-\alpha_p) \left[\frac{1}{\alpha_p - \beta'_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_p + \beta'_m} \right] = 0, \quad (6.104)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ R_f(\alpha_n) \left[\frac{1}{\alpha_n - \beta_m} \right] - R_f(-\gamma_n) \left[\frac{1}{\gamma_n + \beta_m} \right] \right\} - R_f(-\alpha_p) \left[\frac{1}{\alpha_p + \beta_m} \right] = 0, \quad (6.105)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left\{ R_f(\alpha_n) \left[\frac{1}{\alpha_n + \beta_m} \right] - R_f(-\gamma_n) \left[\frac{1}{\gamma_n - \beta_m} \right] \right\} - R_f(-\alpha_p) \left[\frac{1}{\alpha_p - \beta_m} \right] = 0, \quad (6.106)$$

где $m = 1, 2, \dots, \infty$. Сравнивая (6.103) — (6.106) с (6.92) — (6.95), видим, что решение последней системы уравнений имеет вид

$$A_n = R_f(\alpha_n), \quad n = 1, 2, \dots, \infty, \quad (6.107)$$

$$C_n = -R_f(-\gamma_n), \quad n = 1, 2, \dots, \infty. \quad (6.108)$$

Таким образом, если функция $f(\omega)$ найдена, то можно считать, что задача решена.

Рассмотрим теперь построение функции $f(\omega)$, которое существенно отличается от других случаев применения ММВ. Это связано со сложной структурой третьего и четвертого условий. Бесконечные суммы, входящие в третье и четвертое условия, исключают возможность применения асимптотического предельного перехода, примененного в § 3. Поэтому мы будем иметь дело непосредственно с функцией возмущения, как показано ниже.

На основании первого — четвертого условий функцию $f(\omega)$ можно представить в виде

$$f(\omega) = K e^{R\omega} \frac{\pi(\omega, \beta_n) \pi(\omega, -\beta_n) \pi(\omega, \tau_n) \pi(\omega, -\eta_n)}{(\omega + \alpha_p) \pi(\omega, \alpha_n) \pi(\omega, -\gamma_n)}, \quad (6.109)$$

где

$$\pi(\omega, \alpha_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\alpha_n} \right) \exp(a\omega/n\pi), \quad (6.110)$$

$$\pi(\omega, \pm \beta_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 \mp \frac{\omega}{\beta_n} \right) \exp(\pm b\omega/n\pi), \quad (6.111)$$

$$\pi(\omega, -\gamma_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega}{\gamma_n}\right) \exp(-\omega/n\pi), \quad (6.112)$$

$$\pi(\omega, \tau_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 - \frac{\omega}{\tau_n}\right) \exp(c\omega/n\pi), \quad (6.113)$$

$$\pi(\omega, -\eta_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{\omega}{\eta_n}\right) \exp(-c\omega/n\pi), \quad (6.114)$$

а $\{\tau_n\}$ и $\{-\eta_n\}$ — неизвестные нули, характеризующие отклонения от $\{\beta'_n\}$ и $\{-\beta'_n\}$. Для определения величины R , обеспечивающей степенной характер поведения функции $f(\omega)$, мы поступаем следующим образом. Если при больших n смещение нулей отсутствует, т. е. $\tau_n = \eta_n = \beta'_n$, то

$$f(\omega) \sim k\omega^{-2}e^{R\omega}.$$

Асимптотическое смещение нулей может привести лишь к появлению степенного множителя в асимптотическом выражении для $f(\omega)$, поэтому величина R должна быть равна нулю, чтобы функция $f(\omega)$ спадала по степенному закону при $|\omega| \rightarrow \infty$.

Представим теперь функцию $f(\omega)$ в виде

$$f(\omega) = Kf_0(\omega)P(\omega), \quad (6.115)$$

где

$$f_0(\omega) = \frac{\pi(\omega, \beta_n)\pi(\omega, -\beta_n)\pi(\omega, \beta'_n)\pi(\omega, -\beta'_n)}{(\omega + \alpha_p)\pi(\omega, \alpha_n)\pi(\omega, -\gamma_n)}, \quad (6.116)$$

$$P(\omega) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} S_n \left(\frac{\omega}{\beta'_n - \omega}\right) + \sum_{n=1}^{\infty} T_n \left(\frac{\omega}{\beta'_n + \omega}\right), \quad (6.117)$$

$$\pi(\omega, \pm\beta'_n) = \prod_{n=1}^{\infty} \left(1 \mp \frac{\omega}{\beta'_n}\right) \exp(\pm c\omega/n\pi). \quad (6.118)$$

Две суммы, входящие в выражение (6.117), можно рассматривать как возмущающие члены для $P(\omega)$.

Для нахождения $f(\omega)$ остается определить только две бесконечные последовательности коэффициентов $\{S_n\}$ и $\{T_n\}$. Ниже мы покажем, что достаточно вычислить лишь конечное число этих коэффициентов.

Из соотношения (6.115) следует

$$f(\beta'_m) \sim S_m m^{-1}, \quad f(-\beta'_m) \sim T_m m^{-1} \quad \text{при } m \rightarrow \infty. \quad (6.119)$$

Чтобы выполнялось пятое условие, коэффициенты S_m и T_m должны вести себя при $m \rightarrow \infty$ следующим образом:

$$S_m \sim m^{1-\nu}, \quad T_m \sim m^{1-\nu}. \quad (6.120)$$

Можно показать, что из (6.120) следуют соотношения

$$f(\alpha_m) \sim m^{-\nu}, \quad f(-\gamma_m) \sim m^{-\nu}. \quad (6.121)$$

Используя известное асимптотическое поведение возмущающих коэффициентов, выражение для $P(\omega)$ можно представить в виде

$$P(\omega) = 1 + \sum_{n=1}^{N_a-1} S_n \left(\frac{\omega}{\beta'_n - \omega}\right) + \mathbf{S} \sum_{n=N_a}^{\infty} \frac{\omega n^{-\mu}}{\beta'_n - \omega} + \\ + \sum_{n=1}^{N_b-1} T_n \left(\frac{\omega}{\beta'_n + \omega}\right) + \mathbf{T} \sum_{n=N_b}^{\infty} \frac{\omega n^{-\mu}}{\beta'_n + \omega}, \quad (6.122)$$

где $\mu = \nu - 1$, а \mathbf{S} и \mathbf{T} — неизвестные коэффициенты, описывающие все нули, порядок которых больше или равен N_a и N_b соответственно. Теперь мы можем записать систему уравнений для $N_a + N_b$ неизвестных возмущающих коэффициентов. Эта система имеет вид

$$f_0(\omega)P(\omega)|_{\omega=\omega_m} + \lambda_m f_0(\omega)P(\omega)|_{\omega=-\omega_m} + \\ + \xi_m \left[f_0(\rho_m)P(\rho_m) - R_{f_0}(-\alpha_p) \frac{P(-\alpha_p)}{\alpha_p + \rho_m} + \sum_{i=1}^{\infty} R_{f_0}(\alpha_i) \frac{P(\alpha_i)}{\alpha_i - \rho_m} \right] - \\ - \sum_{i=1}^{\infty} R_{f_0}(-\gamma_i) \left[\frac{1}{\gamma_i + \omega_m} + \frac{\lambda_m}{\gamma_i - \omega_m} \right] P(-\gamma_i) = 0, \quad m=1, 2, \dots, N, \quad (6.123)$$

где $R_{f_0}(x)$ — вычет функции $f_0(\omega)$ при $\omega = x$ и

$$\omega_n = \begin{cases} \beta'_n, & n=1, 2, \dots, N_a, \\ -\beta'_{n-N_a}, & n=(N_a+1), \dots, N, \end{cases} \\ \rho_n = \begin{cases} \xi_n, & n=1, 2, \dots, N_a, \\ -\xi_{n-N_a}, & n=(N_a+1), \dots, N, \end{cases} \\ N = N_a + N_b.$$

Число уравнений, которые следует учитывать в (6.123), как и в предыдущих примерах использования ММВ, весьма мало. (Как правило, для получения хороших результатов достаточно поло-

жить $N = 10$ или даже 5.) Кроме того, как будет показано ниже, бесконечное суммирование в (6.123) может быть выполнено очень быстро. Таким образом, хотя этот метод и требует определенного объема предварительных выкладок, они полностью компенсируются достигаемой за счет этого высокой эффективностью численных вычислений.

4. ЧИСЛЕННЫЙ СЧЕТ

При численном решении задачи существенны следующие основные соображения.

Решение трансцендентного уравнения

Постоянная распространения γ_n находится из уравнения

$$\sqrt{\gamma^2 + k_0^2} \sin(c \sqrt{\gamma^2 + \kappa k_0^2}) \cos(b \sqrt{\gamma^2 + k_0^2}) + \sqrt{\gamma^2 + \kappa k_0^2} \cos(c \sqrt{\gamma^2 + \kappa k_0^2}) \sin(b \sqrt{\gamma^2 + k_0^2}) = 0. \quad (6.124)$$

Это уравнение имеет лишь действительные корни γ^2 и решается с помощью итерационной процедуры Ньютона. Поскольку нам нужно получить упорядоченный набор решений $\{\gamma_n^2\}$, существенно иметь для начального значения n -го корня достаточно хорошую аппроксимацию, чтобы процесс итерации сходился именно к нужному корню, а не к какому-либо другому.

Один из возможных способов нахождения начальных значений корней основан на двухмодовом приближении для постоянной распространения, найденном Хордом и Розенбаумом [12] с применением вариационного метода. Другой способ, предложенный Левиным [10], заключается в применении асимптотических выражений для корней γ_n^2 . Хотя полученные Левиным результаты были найдены в предположении больших n , автор утверждает, что они остаются справедливыми вплоть до $n = 1$. Это действительно так при не очень больших значениях диэлектрической проницаемости и коэффициента заполнения c/a . При больших же значениях одной из этих величин погрешность существенно возрастает, так что процесс итерации может сойтись к другому корню.

Сравнение упомянутых двух способов показывает, что способ Левина дает более точное приближение, хотя оба они приводят к тем большим ошибкам, чем меньше номер корня. Для корней, номера которых порядка 20 или выше, приближение Левина обычно совпадает с точным решением, полученным итерационным методом, вплоть до шестой или седьмой значащей цифры.

Приближение Левина дает хорошие результаты, если его использовать в качестве начального значения в итерационной процедуре. Исключения составляют случаи больших значений диэлектрической проницаемости или умеренных ее значений ($6 \leq \kappa \leq 10$), но достаточно высоких коэффициентов заполнения. В этих случаях метод Левина не дает настолько точных начальных значений первых нескольких корней, чтобы их можно было использовать в итерационной процедуре. Поэтому приходится постепенно увеличивать γ^2 , пока левая часть (6.124) не изменит знака, и использовать соответствующее значение γ^2 в качестве начального. Для корней с большими номерами приближение Левина дает очень хорошие результаты при любых значениях физических параметров. Для обоих указанных способов определения начальных значений корней вычисление 200 постоянных распространения с точностью, превышающей семь значащих цифр, занимает на IBM 360/75 менее трех секунд.

Суммирование бесконечных рядов

а. Бесконечные ряды, входящие в (6.122). Чтобы найти хорошее численное приближение для суммы

$$s_1(\pm \omega, N) = \sum_{n=N}^{\infty} \frac{n^{-\mu}}{\beta'_n \pm \omega}, \quad (6.125)$$

удобно использовать формулу Эйлера — Маклорена и преобразовать выражение (6.125) к виду

$$s_1(\pm \omega, N) \approx \sum_{n=N}^{M-1} \frac{n^{-\mu}}{\beta'_n \pm \omega} + \frac{c}{\pi} \left\{ \int_M^{\infty} g(x) dx + \frac{g(M)}{2} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} \frac{d^{(2k-1)}}{dx^{(2k-1)}} g(M) \right\}, \quad (6.126)$$

где

$$g(x) = \frac{x^{-\mu}}{x \pm \alpha}, \quad (6.127)$$

$$\alpha = \frac{c\omega}{\pi}. \quad (6.128)$$

Здесь B_{2k} — числа Бернулли, а для M -го и дальнейших членов суммы использовано асимптотическое выражение для β'_n . Для сходимости интеграла необходимо, чтобы выбранное значение M превосходило $|\alpha|$. Кроме того, оно должно быть достаточно большим, чтобы выполнялось соотношение $\beta'_n \approx \pi n/c$ при $n \geq M$. Интегрирование проводится следующим способом. Выражение

для $g(x)$ представляется в виде

$$g(x) = \frac{1}{x^{1+\mu} (1 \pm \alpha/x)}, \quad (6.129)$$

и знаменатель заменяется суммой членов геометрической прогрессии; в результате получаем

$$\int_M^\infty g(x) dx = \int_M^\infty \frac{1}{x^{1+\mu}} \sum_{n=0}^{\infty} \left(\pm \frac{\alpha}{x}\right)^n dx. \quad (6.130)$$

Равномерная сходимость ряда, входящего под знак интеграла, обеспечивается выбором значения $M > |\alpha|$.

Почленное интегрирование приводит к следующему быстро сходящемуся ряду:

$$\int_M^\infty g(x) dx = M^{-\mu} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(\mp \alpha/M)^n}{n + \mu}. \quad (6.131)$$

Если выбрать $M \geq 2|\alpha|$, то уже первые члены ряда (6.131) и ряда (6.126), содержащего числа Бернулли, будут спадать очень быстро. Достаточная точность может быть достигнута простым обрезанием этих рядов после определенного числа членов. Отметим, что наличие производных от $g(x)$ в точке $x = M$ в виде множителей при числах Бернулли способствует сходимости этого ряда. На практике ряд (6.131) обрезается после 25-го члена, а для суммирования ряда с числами Бернулли достаточно сохранить лишь первые четыре члена. При этом ошибка, связанная с обрезанием ряда (6.126), не превышает 10^{-8} . Время счета на IBM 360/75 для $|\omega| \leq 100$ составляет менее 0,01 с.

б. Бесконечные ряды, входящие в (6.123):

$$S_2 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{f_0}(\alpha_n) P(\alpha_n)}{\alpha_n - \rho_m}, \quad (6.132)$$

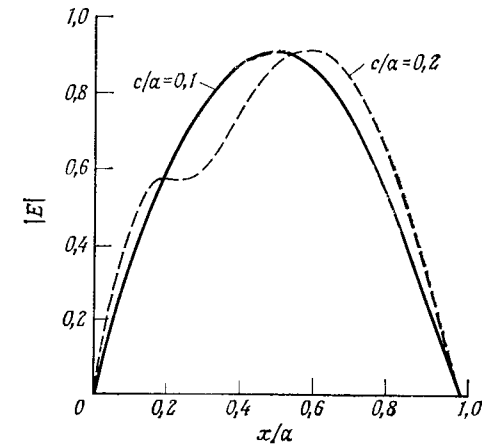
$$S_3 = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{R_{f_0}(-\gamma_n) P(-\gamma_n)}{\gamma_n \pm \omega_m}. \quad (6.133)$$

Эти ряды эффективно суммируются, если использовать асимптотическое поведение $R_{f_0}(-\gamma_n)$.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА

Поскольку результаты численного счета подробно изложены в работе [9], ограничимся здесь лишь некоторыми из них для иллюстрации описанного метода решения. В табл. 6.3 сравни-

ваются результаты, полученные этим методом, с результатами работы [13]; кроме того, приведены три критерия ошибок вычислений. Во-первых, среднеквадратичная ошибка значения тан-



Фиг. 6.7. Поле в раскрыве ($\lambda_0 = 1,63 a$, $\kappa = 9,91$).

Таблица 6.3

Сравнение полученных результатов с результатами Коллина и Брауна [13]
($\lambda_0 = 1,2369 a$, $c/a = 0,2756$, $\kappa = 2,47$)

N	Коэффициент отражения ($\times 10$)		
	Результаты настоящей работы	Результаты Коллина и Брауна	
4	$-0,6938 + i \cdot 0,7830$	$(-0,80 \pm 0,17) + i \cdot (0,87 \pm 0,28)$	
8	$-0,6935 + i \cdot 0,7843$		
16	$-0,6936 + i \cdot 0,7841$		
N	Точность полученных результатов		
	Энергетический параметр e_p	Среднеквадратичные ошибки	
		e_E	e_H
4	$0,131 \cdot 10^{-2}$	$0,989 \cdot 10^{-5}$	$0,199 \cdot 10^{-4}$
8	$0,175 \cdot 10^{-3}$	$0,252 \cdot 10^{-6}$	$0,483 \cdot 10^{-6}$
16	$0,228 \cdot 10^{-4}$	$0,134 \cdot 10^{-6}$	$0,247 \cdot 10^{-6}$

генциальной составляющей электрического поля

$$\epsilon_E = \frac{\iint_{\text{раскрыв}} |E_y^+ - E_y^-|^2 dA}{\iint_{\text{раскрыв}} |E_y^i|^2 dA}, \quad (6.134)$$

где E_y^+ — значение E_y при $z = 0^+$ в области C волновода (фиг. 6.5), E_y^- — значение E_y при $z = 0^-$ в области A . Во-вторых, среднеквадратичная ошибка значения тангенциальной составляющей магнитного поля ϵ_H , которая определяется аналогичным образом. И, наконец, энергетический параметр

$$\epsilon_p = 1 - \frac{P_r + P_t}{P_i}, \quad (6.135)$$

где P_i , P_r и P_t — энергии падающей, отраженной и прошедшей волн.

На фиг. 6.7 представлено распределение электрического поля при $z = 0$. В отличие от других методов данный метод не дает заметного различия между полями в раскрыве при $z = 0^+$ и $z = 0^-$, поэтому на фиг. 6.7 изображено распределение только одного из них.

§ 5. ПРИМЕНЕНИЕ МЕТОДА ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ К ЗАДАЧАМ С НЕОДНОРОДНОСТЯМИ

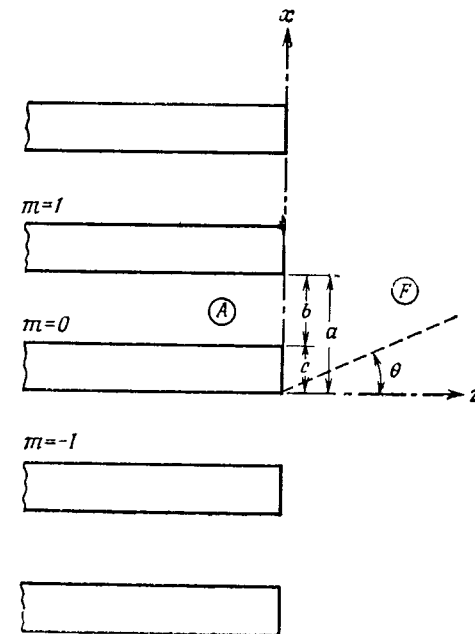
1. ВВЕДЕНИЕ

В предыдущих параграфах мы описали несколько вариантов и обобщений метода вычетов в применении к решению краевых задач. Класс задач, к которым применимы эти методы, обычно характеризуется наличием единственного скачка непрерывности либо в однородной структуре, либо в месте соединения двух разнородных волноводов.

Гораздо более широкий класс проблем, представляющий значительный интерес, характеризуется двумя или большим числом таких соединений. В этом параграфе опишем метод решения задач такого класса, когда для каждого отдельного сочленения задача может быть проанализирована либо с помощью методов, ранее описанных в этой главе, либо с помощью любого другого из известных способов. Для иллюстрации предлагаемого метода мы ограничимся здесь лишь частной задачей о фазированной решетке из волноводов со стенками конечной толщины. Однако этот метод применим к широкому классу задач, охватывающему как открытые, так и замкнутые системы.

2. ИССЛЕДОВАНИЕ ФАЗИРОВАННОЙ РЕШЕТКИ ИЗ ТОЛСТОСТЕННЫХ ВОЛНОВОДОВ С ПОМОЩЬЮ МЕТОДА ОБОБЩЕННОЙ МАТРИЦЫ РАССЕЯНИЯ

На фиг. 6.8 показана фазированная решетка из волноводов со стенками конечной толщины. Примем, что волноводы возбуждаются волнами типа TE_{p0} одинаковой амплитуды с линейным сдвигом фаз, обеспечивающим сканирование луча в H -плоскости.



Фиг. 6.8. Бесконечная решетка с параллельными стенками конечной толщины.

Решетка простирается вдоль оси x от $-\infty$ до ∞ . Поскольку структура решетки и характер ее возбуждения однородны вдоль оси y , задача является двумерной.

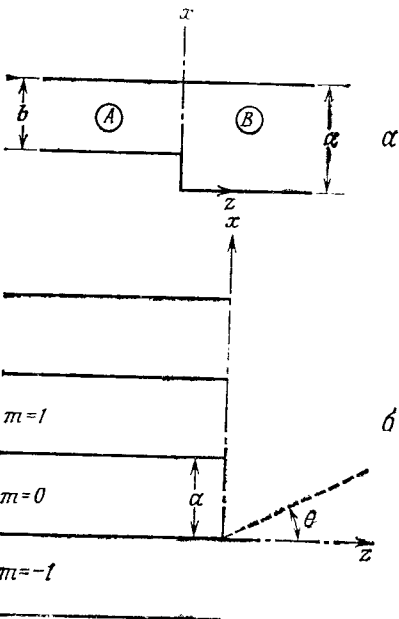
Если стенки волновода бесконечно тонкие, то задача может быть решена точно с помощью метода Винера — Хопфа либо методом теории вычетов [14]. Однако соответствующая задача для волноводов со стенками конечной толщины точно не решается. Ниже будет показано, что эта практически важная задача может быть весьма эффективно и с высокой точностью решена с помощью метода обобщенной матрицы рассеяния совместно с методом вычетов и ММВ.

Идея метода обобщенной матрицы рассеяния тесно связана с понятием обычной матрицы рассеяния из теории цепей. Однако обобщенная матрица рассеяния отличается от обычной тем, что в ней учитываются не только распространяющиеся, но и затухающие моды.

Первый шаг в этом методе состоит в выделении отдельных сочленений для конкретной задачи и в матричном описании этих сочленений. Конфигурацию настоящей задачи можно представить в виде комбинации двух сочленений: уступа в волноводе (фиг. 6.9, а) и перехода от набора полубесконечных волноводов из плоских бесконечно тонких пластин к свободному пространству (фиг. 6.9, б). Это видно на фиг. 6.10, где отмечены оба сочленения во вспомогательной составной структуре, сводящейся к исходной (фиг. 6.8) при $\delta \rightarrow 0$.

После выделения отдельных сочленений поступаем следующим образом. Начнем с характеристики металлического уступа в плоском волноводе (фиг. 6.9, а). Пусть возбуждение производится волной TE_{p0} единичной амплитуды, распространяющейся из области А. Если амплитуда q -й моды отраженной в А волны равна A_q , то (q, p) -элементом матрицы рассеяния $S^{AA}(q, p)$ будет A_q .

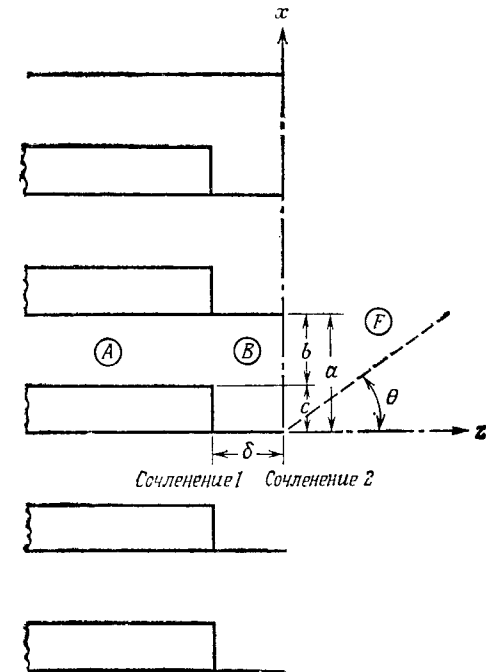
Аналогично если амплитуда прошедшей в В волны равна B_m , то (m, p) -элементом матрицы $S^{BA}(m, p)$ будет B_m . Таким же образом определяются матрицы S^{BB} и S^{AB} . Для обычных матриц рассеяния моды нормируются так, чтобы распространяющаяся волна переносила единичную энергию. Такая нормировка не пригодна для обобщенных матриц рассеяния, поскольку здесь учитываются и затухающие моды. Вместо этого определяют коэффициенты рассеяния как отношение комплексной амплитуды рассеянной волны к амплитуде падающей p -й моды, которая нормирована на единицу. В результате матрицы рассеяния оказываются несимметричными, но это обстоятельство не приводит к появлению дополнительных трудностей.



Фиг. 6.9. Металлический уступ в волноводе (а) и бесконечная решетка из тонких параллельных пластин (б).

3. МЕТОД РЕШЕНИЯ ЗАДАЧИ О ТОЛСТОСТЕННОЙ ФАЗИРОВАННОЙ РЕШЕТКЕ

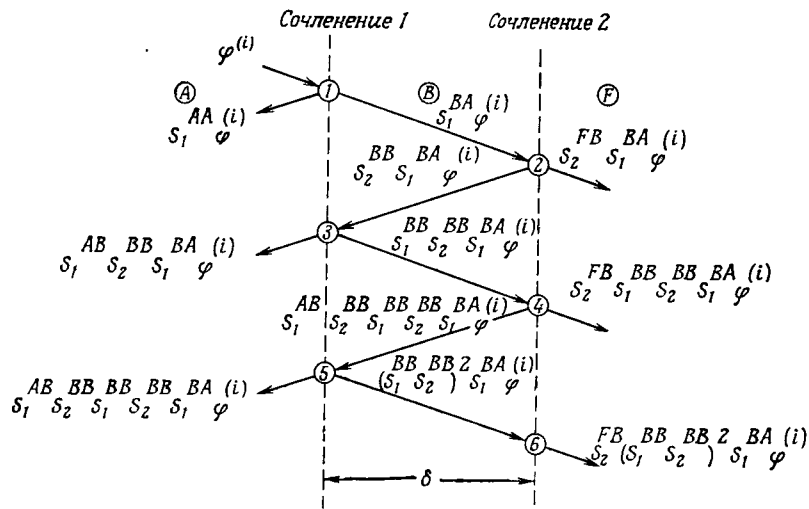
Рассмотрим теперь вспомогательную задачу, представленную на фиг. 6.10, которая соответствует исходной задаче о толстостенной фазированной решетке. Напомним, что при $\delta \rightarrow 0$ вспо-



Фиг. 6.10. Вспомогательная геометрия для задачи о фазированной решетке со стенками конечной толщины.

модательная задача переходит в исходную (фиг. 6.8) Сочленение 1 при $z = -\delta$, имеющееся в каждом волноводе, в точности совпадает с описанной выше ступенчатой неоднородностью. Хотя для нее нет точного решения, в работе [3] было показано, что с помощью ММВ, описанного в предыдущих параграфах, можно получить достаточно точные значения амплитуд рассеянных волн A_q и B_m , а следовательно, найти обобщенные матрицы рассеяния S_1^{AA} , S_1^{BA} и т. д. (Индекс 1 указывает, что матрицы относятся к сочленению 1.) Сочленение 2 при $z = 0$ в точности совпадает с обрезом тонкостенной решетки, для которого известно точное решение [14]. Матрицы, относящиеся к соединению 2, отметим индексом 2, т. е. S_2^{BB} , S_2^{BF} , S_2^{FB} , S_2^{FF} .

Мы не будем подробно останавливаться на выводе обобщенных матриц рассеяния, описывающих каждое из сочленений, поскольку задачи о ступенчатой неоднородности и о тонкостенной решетке описаны в литературе. Предполагая, что эти матрицы рассеяния уже известны, перейдем теперь к вычислению матриц рассеяния для составной структуры, для чего используем метод многократного отражения.



Фиг. 6.11. Многократное рассеяние между сочленениями 1 и 2, показанными на фиг. 10.

Пусть волна TE общего вида попадает на сочленение 1 из области A . Эта волна полностью описывается коэффициентами при модах, т. е. ее можно охарактеризовать векторным столбцом $\phi^{(i)}$, где $\phi_n^{(i)}$ — коэффициент при n -й моде падающего поля. На сочленении 1 часть поля отражается обратно в область A , а часть проходит в область B . Вектор, характеризующий отраженное поле, равен $S_1^{AA} \phi^{(i)}$, а вектор, характеризующий прошедшее в B поле, равен $S_1^{BA} \phi^{(i)}$. Поле, прошедшее в область B , рассеивается на сочленении 2. Часть поля, прошедшего в область F , описывается вектором $S_2^{FB} S_1^{BA} \phi^{(i)}$, а поле, отраженное обратно в область B , — вектором $S_2^{BB} S_1^{BA} \phi^{(i)}$. Отраженное поле доходит до сочленения 1 и вновь рассеивается. Процесс многократного рассеяния продолжается бесконечное число раз, как показано на фиг. 6.11. Отметим, что мы не ввели матриц распространения между соединениями 1 и 2, так как мы предполагаем, что δ бесконечно мало.

Суммируя все вклады в области A от многократных отражений, получаем полное отраженное поле, характеризующееся векторным столбцом $\phi^{(r)}$:

$$\begin{aligned} \phi^{(r)} &= S_1^{AA} \phi^{(i)} + S_1^{AB} S_2^{BB} S_1^{BA} \phi^{(i)} + S_1^{AB} S_2^{BB} S_1^{BB} S_2^{BB} S_1^{BA} \phi^{(i)} + \dots = \\ &= S_1^{AA} \phi^{(i)} + \sum_{n=0}^{\infty} S_1^{AB} S_2^{BB} (S_1^{BB} S_2^{BB})^n S_1^{BA} \phi^{(i)}. \end{aligned} \quad (6.136)$$

Сумма в правой части выражения (6.136) является рядом Неймана. В работе [15] было показано, что такой ряд сходится. Таким образом, выражение (6.136) можно представить в виде

$$\phi^{(r)} = S_1^{AA} \phi^{(i)} + S_1^{AB} S_2^{BB} [I - S_1^{BB} S_2^{BB}]^{-1} S_1^{BA} \phi^{(i)}, \quad (6.137)$$

где I — единичная матрица. Аналогичным образом можно получить выражение для поля, прошедшего в область F (поля излучения):

$$\phi^{(t)} = S_2^{FB} [I - S_1^{BB} S_2^{BB}]^{-1} S_1^{BA} \phi^{(i)}. \quad (6.138)$$

Из (6.137) и (6.138) следует, что матрицы рассеяния составной структуры имеют вид

$$S^{AA} = S_1^{AA} + S_1^{AB} S_2^{BB} [I - S_1^{BB} S_2^{BB}]^{-1} S_1^{BA}, \quad (6.139)$$

$$S^{FA} = S_2^{FB} [I - S_1^{BB} S_2^{BB}]^{-1} S_1^{BA}. \quad (6.140)$$

Таким же способом находятся две другие матрицы:

$$S^{AF} = S_1^{AB} [I - S_2^{BB} S_1^{BB}]^{-1} S_2^{BF}, \quad (6.141)$$

$$S^{FF} = S_2^{FB} + S_2^{FB} S_1^{BB} [I - S_2^{BB} S_1^{BB}]^{-1} S_2^{BF}. \quad (6.142)$$

Следует отметить, что все матрицы рассеяния с индексом 2 являются неявными функциями угла сканирования. В результате матрицы составной структуры тоже зависят от этого угла.

Одно из достоинств описания толстостенной решетки матричными уравнениями (6.139)–(6.142) состоит в том, что при стремлении толщины стенок s к нулю полученные выше матрицы рассеяния точно сводятся к матрицам, характеризующим излучение тонкостенной решетки. Это связано с тем, что при $s = 0$ матрицы рассеяния для сочленения 1 равны

$$S_1^{AA} = S_1^{BB} = 0, \quad (6.143)$$

$$S_1^{BA} = S_1^{AB} = I. \quad (6.144)$$

Подставляя (6.143) и (6.144) в (6.139)–(6.142), получаем, очевидно, матрицы рассеяния для тонкостенной решетки.

4. ЧИСЛЕННЫЙ СЧЕТ

Выражения для составных матриц (6.139)—(6.142) формально являются точными, если известны точные выражения для всех входящих в них матриц рассеяния. Поскольку обращение матриц должно производиться численно, необходимо обрезать матрицы рассеяния так, чтобы при минимальном допустимом размере матриц получить достаточно точные результаты. Элементы матриц рассеяния также находятся численным способом, поэтому уменьшение размеров матриц экономит машинное время, необходимое для их нахождения. Достаточная точность результатов определяется для каждой конкретной задачи, исходя из сходимости решения. К счастью, во всех практически интересных случаях ряды в (6.139)—(6.142) сходятся весьма быстро, что позволяет получать хорошие результаты при умеренных размерах матриц.

Результаты численного счета, приведенные ниже, показывают, как меняется величина коэффициента отражения для основной моды при использовании матриц различных размеров: 1×1 , 3×3 , 5×5 .

Укажем основные этапы численных расчетов:

I. Вычисление элементов матриц рассеяния, относящихся к сочленению 1. Для вычисления можно применить ММВ к задаче о ступенчатой неоднородности в плоском волноводе.

II. Вычисление матричных элементов для сочленения 2. Задачу о такой неоднородности можно решить точно с помощью метода Винера — Холфа или обычного метода вычетов.

III. Составление всех необходимых матриц: S_1^{AA} , S_1^{AB} , S_2^{BB} и т. д.

IV. Обращение соответствующих матриц с помощью одной из программ обращения.

V. Формирование составных матриц рассеяния.

VI. Вычисление требуемой величины, например коэффициента отражения или прохождения, умножением одной из полученных составных матриц на вектор падающего поля и определением нужного элемента.

5. РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА

В табл. 6.4 представлены типичные результаты для коэффициента отражения в волноводе при возбуждении его волной TE_{10} . Параметры задачи выбраны совпадающими с одним из вариантов в работе [16], что позволяет провести сравнение результатов. Размеры волноводов таковы, что в каждом из них существует лишь одна распространяющаяся мода.

Таблица 6.4

Зависимость коэффициента отражения от угла сканирования для толстостенной фазированной решетки
($a/\lambda = 0,6205$, $c/a = 0,063$)

Угол сканирования	Коэффициент отражения (величина, угол)		
	матрица 1×1	матрица 3×3	матрица 5×5
0°	(0,3225; 153,3°)	(0,3239; 150,0°)	(0,3240; 148,3°)
10°	(0,3149; 151,0°)	(0,3159; 147,8°)	(0,3156; 146,1°)
20°	(0,2900; 143,4°)	(0,2897; 140,4°)	(0,2884; 138,7°)
30°	(0,2381; 126,4°)	(0,2350; 123,5°)	(0,2317; 121,9°)
40°	(0,0571; 119,6°)	(0,0506; 121,1°)	(0,0463; 123,1°)
50°	(0,0728; 163,0°)	(0,0726; 166,3°)	(0,0725; 168,4°)
60°	(0,0711; 161,2°)	(0,0705; 164,6°)	(0,0703; 166,8°)
70°	(0,0597; 141,8°)	(0,0560; 145,4°)	(0,0538; 148,4°)
80°	(0,0629; 99,1°)	(0,0553; 97,0°)	(0,0500; 96,2°)
90°	(0,1121; 65,0°)	(0,1059; 59,3°)	(0,1009; 55,6°)

Сравнение производилось и по некоторым другим параметрам, не приведенным в таблице. Оказалось, что во всех рассмотренных случаях метод матрицы рассеяния дает для величины и фазы коэффициента отражения в функции угла сканирования численные значения, неотличимые от представленных графических значений, полученных в работе [16]. Последние были найдены решением интегрального уравнения методом Галеркина с использованием матрицы размера 30×30 с последующей вариационной коррекцией результатов. Следует также отметить, что метод матрицы рассеяния требует лишь решения элементарными средствами двух вспомогательных задач и относительно простых численных расчетов согласно уравнениям (6.139)—(6.142). Поскольку решение задачи о тонкостенной решетке применимо ко всем задачам о толстостенных решетках с одинаковым размером a , а решение для заданной толщины ступенчатой неоднородности справедливо для всех углов сканирования, объем численных расчетов при исследовании целой серии значений параметров существенно уменьшается. Однако следует учитывать, что метод Галеркина является более общим и применим к более широкому классу задач (см. гл. 5).

В табл. 6.4 приведены приближенные результаты для трех размеров обрезанных матриц. Значения коэффициента отражения, полученные при обращении матрицы рассеяния пятого порядка, точно совпадают со значениями, вычисленными в работе [16], и могут считаться «точными».

Интересно сравнить результаты, полученные с помощью матрицы первого порядка, с «точными» результатами. В частности,

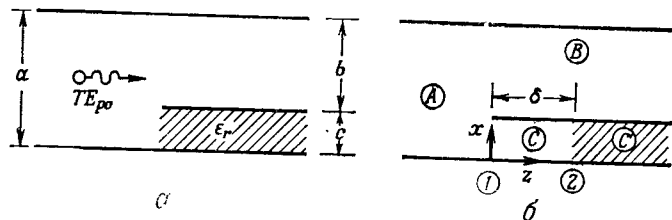
при малых углах сканирования значения коэффициента отражения для матрицы 1×1 очень близки к «точным» значениям с отклонениями до 1% по величине и до 5° по фазе. Поскольку матрица первого порядка — это просто комплексное число, вычисление коэффициента отражения в этом случае почти тривиально.

Коэффициентами при модах отраженного обратно в область A поля являются элементы первого столбца матрицы рассеяния S_{AA} . Зная эти элементы, легко найти поле в раскрыве в виде разложения по модам при $z = 0$, $c \leq x \leq a$.

В заключение уместно сделать следующее замечание. Основное преимущество изложенного метода состоит в том, что сложная конфигурация исходной задачи подразделяется на две более простые конфигурации, относительно которых многое уже известно. При этом используются известные точные решения задачи о тонкостенной решетке и приближенное решение задачи о ступенчатой неоднородности в волноводе. Быстро сходящийся метод численных расчетов, использованный для рассмотренной сложной структуры, может быть с успехом применен и для решения целого ряда других задач, которые могут быть сведены к двум или нескольким вспомогательным задачам, разрешимым стандартными методами или ММВ. Примерами таких задач являются: 1) задача о фазированной решетке из диафрагмированных волноводов; 2) задача о двухступенчатой неоднородности в волноводе; 3) задача об излучении волновода в диэлектрический или плазменный слой и т. д.

ЗАДАЧИ

1. Рассмотрите частично заполненный диэлектриком разветвленный волновод, состоящий из параллельных плоских пла-



Фиг. 6.12.

стин, показанный на фиг. 6.12, а. Эта структура получается из вспомогательной структуры, представленной на фиг. 6.12, б, при $\delta \rightarrow 0$. Предположите, что слева падает волна TE_{p0} с амплитудой A . Покажите, что выражения для поперечного электриче-

ского поля в областях A , B , C и C' имеют следующий вид:

$$(A) \quad E_y = A \sin \frac{n\pi x}{a} e^{-i\alpha_p z} + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin \frac{n\pi x}{a} e^{i\alpha_n z},$$

$$(B) \quad E_y = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin \frac{n\pi(x-c)}{b} e^{-i\beta_n z},$$

$$(C) \quad E_y = \sum_{n=1}^{\infty} \sin \frac{n\pi x}{c} [C_n e^{-i\gamma_n z} + E_n e^{i\gamma_n z}],$$

$$(C') \quad E_y = \sum_{n=1}^{\infty} C_n \sin \frac{n\pi x}{c} e^{-i\bar{\gamma}_n z},$$

где

$$\alpha_n = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{a}\right)^2}, \quad \beta_n = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{b}\right)^2},$$

$$\gamma_n = \sqrt{k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2}, \quad \bar{\gamma}_n = \sqrt{\epsilon_r k_0^2 - \left(\frac{n\pi}{c}\right)^2},$$

$$k_0^2 = \omega^2 \mu_0 \epsilon_0,$$

а A_n , B_n и т. д. — неизвестные коэффициенты.

Используя фурье-преобразование и сшивание полей на поверхностях 1 и 2 вспомогательной структуры, получите следующие уравнения для A_n , положив $\delta \rightarrow 0$ в окончательных уравнениях:

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n - \beta_m} - \frac{A}{\alpha_p + \beta_m} = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n + \beta_m} - \frac{A}{\alpha_p - \beta_m} = \frac{b^2 \beta_m}{m\pi} B_m,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{1}{\alpha_n - \gamma_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_n + \gamma_m} \right] - A \left[\frac{1}{\alpha_p + \gamma_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_p - \gamma_m} \right] = 0,$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{1}{\alpha_n + \gamma_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_n - \gamma_m} \right] - A \left[\frac{1}{\alpha_p - \gamma_m} + \frac{\lambda_m}{\alpha_p + \gamma_m} \right] =$$

$$= (-1)^m \frac{c^2 \gamma_m}{m\pi} C_m,$$

где

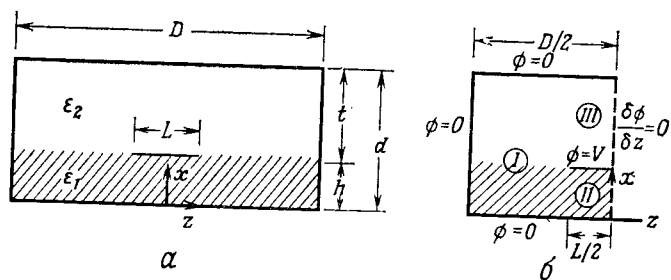
$$\lambda_m = \frac{\gamma_m - \bar{\gamma}_m}{\gamma_m + \bar{\gamma}_m}, \quad A_n = A_n \sin \frac{n\pi c}{a}, \quad A = A \sin \frac{p\pi c}{a}, \quad m = 1, 2, \dots$$

Далее, постройте такую мероморфную функцию $f(\omega)$, чтобы

$$A_n = R_f(\alpha_n) = \text{вычет } f(\omega) \text{ при } \omega = \alpha_n.$$

2. а. Используйте метод обобщенной матрицы рассеяния для решения задачи, показанной на фиг. 6.12, а. Сначала найдите матрицы рассеяния, относящиеся к сочленениям 1 и 2 (фиг. 6.12, б), а затем постройте составные матрицы при $\delta \rightarrow 0$.

Указание. Матрицы рассеяния для сочленения 1 могут быть найдены применением метода вычетов к задаче о разветвленном волноводе с $\epsilon_r = 1$.



Фиг. 6.13.

б. Напишите программу для ЭВМ для вычисления составных матриц рассеяния, считая, что элементы матриц рассеяния для каждого из двух сочленений могут быть взяты из соответствующих подпрограмм.

3. На фиг. 6.13, а представлено поперечное сечение коробчатой полосковой линии. Пусть в волноводе распространяется волна типа TEM. Поскольку структура симметрична относительно оси x , достаточно рассмотреть эквивалентную геометрию, изображенную на фиг. 6.13, б.

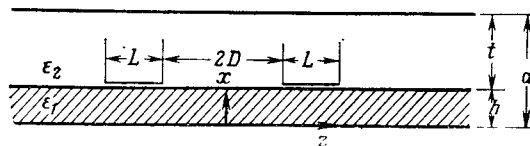
Используя преобразование Фурье и метод шивания, выведите уравнения

$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{1}{\alpha_n - \beta_m} + \frac{t_n}{\alpha_n + \beta_m} \right] + \lambda_m \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{1}{\alpha_n + \beta_m} + \frac{t_n}{\alpha_n - \beta_m} \right] = \left[\frac{1}{-\beta_m} + \frac{\lambda_m}{\beta_m} \right] V,$$

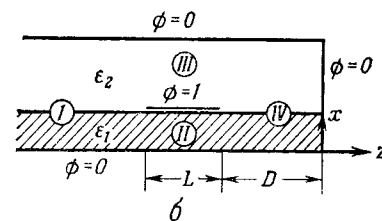
$$\sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{1}{\alpha_n - \gamma_m} + \frac{t_n}{\alpha_n + \gamma_m} \right] + \xi_m \sum_{n=1}^{\infty} A_n \left[\frac{1}{\alpha_n + \gamma_m} + \frac{t_n}{\alpha_n - \gamma_m} \right] = \left[\frac{1}{-\gamma_m} + \frac{\xi_m}{\gamma_m} \right] V,$$

где $t_n = e^{-\alpha_n(D-L)}$, $\lambda_m = e^{-\beta_m L}$, $\xi_m = e^{-\gamma_m L}$, $m = 1, 2, \dots$

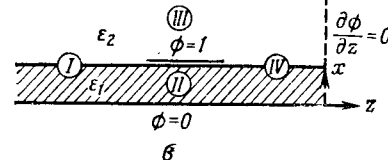
Покажите, что коэффициенты A_n могут быть вычислены как полюса функции $f(\omega)$, т. е. $A_n = R_f(\alpha_n)$, если $f(\omega)$ удовлетворяет следующим условиям:



а



б



Фиг. 6.14.

- $f(\omega)$ имеет простые полюса при $\omega = \pm \alpha_n$, $n = 1, 2, \dots, \infty$, и при $\omega = 0$.
- $f(\beta_m) + \lambda_m f(-\beta_m) = 0$, $f(\gamma_m) + \xi_m f(-\gamma_m) = 0$, $R_f(-\alpha_m) + t_m R_f(\alpha_m) = 0$, $m = 1, 2, \dots, \infty$.
- $f(\omega) \sim K_1 \omega^{-\nu}$, $1 < \nu < 2$ при $|\omega| \rightarrow \infty$.
- $R_f(0) = -1$.

Найдите выражение для такой функции $f(\omega)$.

Указание. Выразите потенциал в области I в виде

$$\phi(x, z) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \phi_n(x) [e^{\alpha_n(z+L/2)} - e^{-\alpha_n(z+D-L/2)}],$$

$$-D/2 < z < -L/2,$$

где

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sin(\alpha_n x), & 0 < x < h, \\ \frac{\sin(\alpha_n h)}{\sin(\alpha_n t)} \sin[\alpha_n(d-x)], & h < x < d. \end{cases}$$

4. На фиг. 6.14, а показана двойная экранированная полосковая линия. В зависимости от характера четности возбуждения получаются две эквивалентные структуры, представленные на фиг. 6.14, б и 6.14, в. При нечетном возбуждении выражения для потенциала в областях I, II, III и IV имеют вид

$$\phi(x, z) = \begin{cases} \sum_{n=1}^{\infty} A_n e^{\alpha_n(z+L+D)} \phi_n(x), & z < -(D+L), \\ \frac{x}{h} + \sum_{n=1}^{\infty} (B_n e^{\beta_n z} + D_n e^{-\beta_n z}) \sin \beta_n x, & 0 < x < h, \\ & -(D+L) < z < -D, \\ \frac{d-x}{t} + \sum_{n=1}^{\infty} (C_n e^{\gamma_n z} + E_n e^{-\gamma_n z}) \sin \gamma_n(d-x), & h < x < d, \\ & -(D+L) < z < -D, \\ \sum_{n=1}^{\infty} F_n \operatorname{sh} \alpha_n z \phi_n(x), & -D < z < 0, \end{cases}$$

$$\phi_n(x) = \begin{cases} \sin \alpha_n x, & 0 < x < h, \\ \frac{\sin \alpha_n h}{\sin \alpha_n t} \sin \alpha_n(d-x), & h < x < d, \end{cases}$$

где α_n удовлетворяют уравнению (6.4), $\beta_n = n\pi/h$ и $\gamma_n = n\pi/t$. Выведите следующие уравнения для коэффициентов разложения:

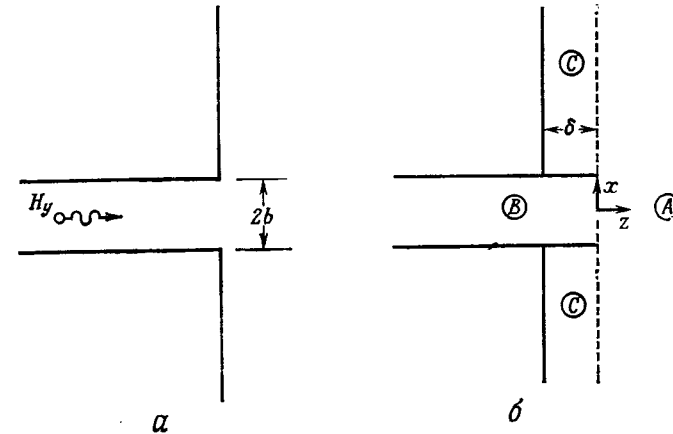
$$\begin{aligned} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n - \beta_m} - \lambda_m \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F_n}{\alpha_n + \beta_m} + \frac{F_n \xi_n}{\alpha_n - \beta_m} \right) &= -\frac{1}{\beta_m} + \frac{\lambda_m}{\beta_m}, \\ \lambda_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n + \beta_m} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F_n}{\alpha_n - \beta_m} + \frac{F_n \xi_n}{\alpha_n + \beta_m} \right) &= -\frac{1}{\beta_m} + \frac{\lambda_m}{\beta_m}, \\ \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n - \gamma_m} - \xi_m \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F_n}{\alpha_n + \gamma_m} + \frac{F_n \xi_n}{\alpha_n - \gamma_m} \right) &= -\frac{1}{\gamma_m} + \frac{\xi_m}{\gamma_m}, \\ \xi_m \sum_{n=1}^{\infty} \frac{A_n}{\alpha_n + \gamma_m} - \sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{F_n}{\alpha_n - \gamma_m} + \frac{F_n \xi_n}{\alpha_n + \gamma_m} \right) &= -\frac{1}{\gamma_m} + \frac{\xi_m}{\gamma_m}, \end{aligned}$$

где

$$\begin{aligned} \mathbf{A}_n &= A_n \sin \alpha_n h, \quad \mathbf{F}_n = \frac{1}{2} F_n \sin \alpha_n h e^{\alpha_n D}, \\ \lambda_m &= e^{-\beta_m L}, \quad \xi_m = e^{-\gamma_m L}, \quad \zeta_n = e^{-2\alpha_n D}. \end{aligned}$$

Покажите, что \mathbf{A}_n и \mathbf{F}_n являются вычетами функций $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$ при $\omega = \alpha_n$, т. е. $R_1(\alpha_n) = \mathbf{A}_n$ и $R_2(\alpha_n) = \mathbf{F}_n$, если эти функции удовлетворяют следующим условиям:

1. $f_1(\omega)$ имеет простые полюсы при $\omega = \alpha_n, n = 1, 2, \dots, \infty$, и при $\omega = 0$.



Фиг. 6.15.

2. $f_2(\omega)$ имеет простые полюсы при $\omega = \pm \alpha_n, n = 1, 2, \dots, \infty$, и при $\omega = 0$.

3. $R_2(-\alpha_n) = -\zeta_n R_2(\alpha_n)$, где $R_2(x)$ — вычет функции $f_2(\omega)$ при $\omega = x$.

4. $f_1(\beta_m) + \lambda_m f_2(-\beta_m) = 0, \quad \lambda_m f_1(-\beta_m) + f_2(\beta_m) = 0,$

$$f_1(\gamma_m) + \xi_m f_2(-\gamma_m) = 0, \quad \xi_m f_1(-\gamma_m) + f_2(\gamma_m) = 0.$$

5. $f_1(\omega) \sim \omega^{-\nu}, \quad f_2(\omega) \sim \omega^{-\nu}$ при $|\omega| \rightarrow \infty, \quad 1 < \nu < 2.$

6. $R_1(0) = R_2(0) = -1.$

Покажите, что распределение заряда может быть выражено через функции $f_1(\omega)$ и $f_2(\omega)$, вычисленные для определенных постоянных значений аргумента [17].

5. Рассмотрите задачу об излучении плоского волновода с фланцем, возбуждаемого слева волной TM_{po} , как показано на фиг. 6.15, а. Фланец считается простирающимся до бесконечности в обоих направлениях оси x . Исходная структура может быть получена из вспомогательной, представленной на фиг. 6.15, б,

при $\delta \rightarrow 0$. Используйте метод шивания мод, обобщенный на тот случай, когда нужно согласовать открытые области (A и C), где для выражения полей требуются спектральные разложения. Поле в различных областях можно представить в виде

$$H_y = \int_0^{\infty} A(\alpha) e^{-\omega z} \cos \alpha x \, d\alpha, \quad z > 0,$$

$$H_y = \cos \frac{\rho \pi x}{b} e^{-\gamma \rho b z} + \sum_{n=0}^{\infty} B_n \cos \frac{n \pi x}{b} e^{\gamma n b z}, \quad z < 0, \quad |x| < b,$$

$$H_y = \begin{cases} \int_0^{\infty} C(\beta) [e^{\Gamma z} + e^{-\Gamma(z+2b)}] \cos \beta(x-b) \, d\beta, & -\delta < z < 0, \quad x > b, \\ \int_0^{\infty} C(\beta) [e^{\Gamma z} + e^{-\Gamma(z+2b)}] \cos \beta(x+b) \, d\beta, & -\delta < z < 0, \quad x < -b \end{cases}$$

где

$$\omega = \sqrt{\alpha^2 - k^2}, \quad \gamma_{nb} = \sqrt{\left(\frac{n\pi}{b}\right)^2 - k^2},$$

$$\Gamma = \sqrt{\beta^2 - k^2}, \quad \gamma_{0b} = ik.$$

Произведите шивание H_y и E_x при $z = 0$ и используйте метод Фурье в обеих областях $|x| < b$ и $|x| > b$. Затем, положив $\delta \rightarrow 0$, выведите соотношения

$$(-1)^{\rho} b \gamma_{\rho b} (1 + \delta_{\rho}^0) \delta_m^{\rho} = \int_0^{\infty} \frac{A(\alpha) \, d\alpha}{\omega - \gamma_{mb}},$$

$$\pi \Gamma A(\beta) \cos \beta b = \mathcal{P} \int_0^{\infty} \left\{ \frac{A(\alpha)}{\omega - \Gamma} + \frac{A(\alpha)}{\omega + \Gamma} \right\} d\alpha,$$

где \mathcal{P} — главное значение интеграла.

Рассмотрите функцию $f(\omega)$ в комплексной плоскости ω , удовлетворяющую следующим условиям:

1. $f(\omega)$ имеет нули при $\omega = \gamma_{nb}$, $n \neq \rho$, $n = 1, 2, \dots, \infty$, и при $\omega = \gamma_{0b} \delta_{\rho}^0$.
2. $f(\omega)$ имеет точку ветвления при $\omega = \gamma_{0b}$.
3. $f(\omega) \sim \omega^{-1/2-\nu}$, $\nu = 1/6$, при $|\omega| \rightarrow \infty$.
4. $f(\gamma_{\rho b}) = b \gamma_{\rho b} (-1)^{\rho} (1 + \delta_{\rho}^0)$.

Вычислите контурные интегралы

$$\frac{1}{2\pi i} \int_P \frac{\tilde{f}(\omega) \, d\omega}{\omega - \gamma_{mb}}, \quad \frac{1}{2\pi i} \int_P \left\{ \frac{f(\omega)}{\omega - \Gamma} + \frac{f(\omega)}{\omega + \Gamma} \right\} d\omega,$$

где контур P изображен на фиг. 6.16, и покажите, что неизвестный коэффициент $A(\alpha)$ выражается через функцию $f(\omega)$ следующим образом:

$$A(\alpha) = \frac{i^+ (\omega) - i^- (\omega)}{2\pi i \omega \sin \alpha b} \Big|_{\omega \text{ на } L},$$

или

$$A(\alpha) = \frac{1}{2\pi \omega \cos \alpha b} \{2f(-\omega) + f^+(\omega) - f^-(\omega)\} \Big|_{\omega \text{ на } L},$$

где $f^+(\omega)$ и $f^-(\omega)$ — значения $f(\omega)$ на каждом из берегов разреза L [18, 19].

6. Рассмотрите задачу о распространении волны TEM вдоль полосковой линии, поперечное сечение которой показано на фиг. 6.17. Опуская общий множитель $\exp(\pm i\beta z)$, где β — постоянная распространения, покажите, что потенциал $\phi(x, y)$ удовлетворяет уравнению Пуассона

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \right) \phi(x, y) = -\frac{\rho(x, y)}{\epsilon_0},$$

где $\rho(x, y)$ — распределение заряда, которое для данного случая можно записать в виде

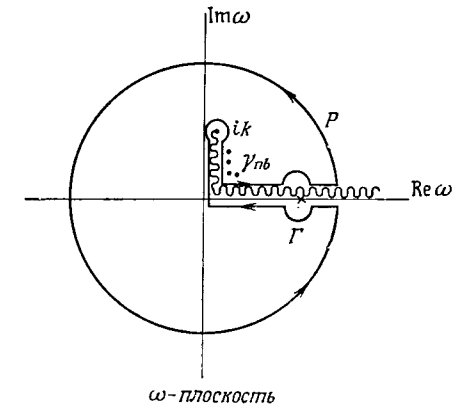
$$\rho(x, y) = \rho_s(x) \delta(y - d - s), \quad |x| < L$$

(ρ_s — поверхностная плотность заряда). Используйте следующие граничные условия:

- 1) $\phi(x, 0) = 0$ при всех x ;
- 2) $\phi(x, y) \rightarrow 0$ при $y \rightarrow +\infty$ и всех x ;
- 3) $\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=d+s+0} - \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=d+s-0} = -\frac{\rho_s(x)}{\epsilon_0}$, $|x| < L$;
- 4) $\phi(x, d+s+0) = \phi(x, d+s-0)$ при всех x , $\phi(x, d+s) = 1$, $|x| < L$;
- 5) $\phi(x, d+0) = \phi(x, d-0)$ при всех x ;
- 6) $\frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=d+0} = \epsilon_r \frac{\partial \phi}{\partial y} \Big|_{y=d-0}$ при всех x

и, положив $s \rightarrow 0$, получите уравнение

$$G(\alpha) \tilde{\rho}_s(\alpha) = \tilde{\phi}(\alpha, d),$$



ω -плоскость

Фиг. 6.16.

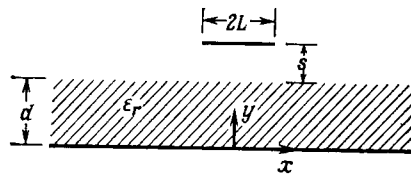
где

$$\tilde{\phi}(\alpha, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \phi(x, y) e^{i\alpha x} dx,$$

$$\tilde{\rho}_s(\alpha) = \int_{-L}^L \rho_s(x) e^{i\alpha x} dx,$$

$$G(\alpha) = \frac{1}{\epsilon_0 \alpha [1 + \epsilon_r \operatorname{cth}(\alpha d)]}.$$

Найдите вариационное представление для емкости линии С [20].



Фиг. 6.17.

Указание. Выразите потенциал в виде

$$\tilde{\phi}(\alpha, y) = \begin{cases} A(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y, & 0 < y < d, \\ B(\alpha) \operatorname{sh} \alpha y + C(\alpha) \operatorname{ch} \alpha y & d < y < d + s, \\ D(\alpha) \exp(-\alpha y), & y > d + s. \end{cases}$$

7. Покажите, что функция $\tilde{\phi}(\alpha, d)$ из задачи 6 представляется в виде

$$\tilde{\phi}(\alpha, d) = \tilde{\phi}_1(\alpha) + e^{i\alpha L} \tilde{\phi}_+(\alpha) + e^{-i\alpha L} \tilde{\phi}_+(-\alpha),$$

где

$$\tilde{\phi}_1(\alpha) = \int_{-L}^L e^{i\alpha x} dx = \frac{2 \sin \alpha L}{\alpha},$$

$$\tilde{\phi}_+(\alpha) = \int_L^{\infty} \tilde{\phi}(x, d) e^{i\alpha(x-L)} dx \quad (\text{неизвестная функция}).$$

Следовательно, уравнение

$$G(\alpha) \tilde{\rho}_s(\alpha) = \frac{2 \sin \alpha L}{\alpha} + e^{i\alpha L} \tilde{\phi}_+(\alpha) + e^{-i\alpha L} \tilde{\phi}_+(-\alpha)$$

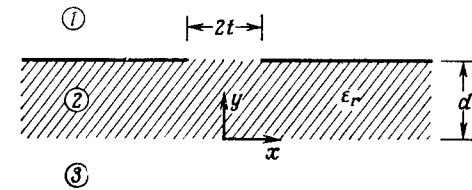
содержит две неизвестные величины $\tilde{\rho}_s$ и $\tilde{\phi}_+$. Используя метод Галеркина в пространстве образов, выведите матричное уравнение

$$\sum_{n=1}^M G_{mn} A_n = B_m, \quad m = 1, 2, \dots, M,$$

где

$$G_{mn} = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}_m(\alpha) G(\alpha) \tilde{\xi}_n(\alpha) d\alpha,$$

$$B_m = \int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}_m(\alpha) \frac{2 \sin \alpha L}{\alpha} d\alpha,$$

 $\tilde{\xi}_m(\alpha)$ — соответствующие базисные функции, а A_n — неизвестные коэффициенты.**Указание.** При разложении $\tilde{\rho}_s(\alpha)$ по функциям $\tilde{\xi}_n(\alpha)$ с неизвестными коэффициентами A_n следует так выбрать функции

Фиг. 6.18.

 $\tilde{\xi}_n(\alpha)$, чтобы величина $\xi_n(x)$ [обратный фурье-образ функции $\tilde{\xi}_n(\alpha)$] тождественно равнялась нулю при $|x| > L$. Затем используйте теорему Парсеваля для вычисления интеграла

$$\int_{-\infty}^{\infty} \tilde{\xi}_m(\alpha) \tilde{\phi}(\alpha, d) d\alpha$$

и покажите, что интегралы, содержащие произведения $\tilde{\xi}_m(\alpha) \tilde{\phi}_{\pm}(\alpha)$, тождественно равны нулю.8. На фиг. 6.18 показано поперечное сечение щелевой линии — передающей линии нового типа, используемой в микроволновых интегральных схемах. Одна сторона диэлектрической подложки покрыта двумя полубесконечными проводящими пластинами, разделенными зазором ширины $2t$; считается, что структура простирается до бесконечности в обоих направлениях оси z . В системе возможны только гибридные моды, которые можно выразить через скалярные потенциалы $\phi_i^{(e)}(x, y)$ и $\phi_i^{(h)}(x, y)$ ($i = 1, 2, 3$), пропорциональные соответственно полям E_z и H_z [общий множитель $\exp(-i\beta z)$ отброшен]. Граничные условия и условия непрерывности имеют следующий вид:

- 1) E_z, E_x, H_z и H_x непрерывны при $y=0$.
- 2) $E_{z1} = E_{z2}, E_{x1} = E_{x2}, -\infty < x < \infty, y = d$.
- 3) $E_z = \begin{cases} 0, & |x| \geq t, \\ f(x), & |x| \leq t; \end{cases} E_x = \begin{cases} 0, & |x| \geq t, \\ g(x), & |x| \leq t, \end{cases} y = d$.
- 4) $J_x = H_{z1} - H_{z2} = \begin{cases} s(x), & |x| \geq t, \\ 0, & |x| \leq t, \end{cases} y = d;$
 $J_z = H_{x1} - H_{x2} = \begin{cases} \omega(x), & |x| \geq t, \\ 0, & |x| \leq t, \end{cases} y = d,$

где индексы 1, 2 и 3 соответствуют трем областям, указанным на фиг. 6.18. Функции f, g, s и ω — неизвестные пока функции от x .

Применяя эти условия в пространстве образов Фурье, выведите следующие два уравнения:

$$\Gamma_1(\alpha, \beta) F(\alpha) + \Gamma_2(\alpha, \beta) G(\alpha) = e^{i\alpha t} S_+(\alpha) + e^{-i\alpha t} S_+(-\alpha),$$

$$\Gamma_3(\alpha, \beta) F(\alpha) + \Gamma_4(\alpha, \beta) G(\alpha) = e^{i\alpha t} W_+(\alpha) + e^{-i\alpha t} W_+(-\alpha),$$

где

$$F(\alpha) = \int_{-t}^t f(x) e^{i\alpha x} dx, \quad G(\alpha) = \int_{-t}^t g(x) e^{i\alpha x} dx,$$

$$S_+(\alpha) = \int_t^\infty s(x) e^{i\alpha(x-t)} dx, \quad W_+(\alpha) = \int_t^\infty \omega(x) e^{i\alpha(x-t)} dx.$$

Найдите также коэффициенты $\Gamma_1(\alpha, \beta)$ и т. д. Решите эти уравнения методом Галеркина в пространстве образов [21].

Указание. Выразите образы потенциалов в виде

$$\tilde{\phi}_1^{(p)}(\alpha, y) = A^{(p)}(\alpha) e^{-\gamma(y-d)}, \quad y > d,$$

$$\tilde{\phi}_2^{(p)}(\alpha, y) = B^{(p)}(\alpha) \text{sh } \gamma_2 y + C^{(p)}(\alpha) \text{ch } \gamma_2 y, \quad 0 < y < d,$$

$$\tilde{\phi}_3^{(p)}(\alpha, y) = D^{(p)}(\alpha) e^{\gamma y}, \quad y < 0,$$

где $p = e$ или h и

$$\gamma_i^2 = \alpha^2 + \beta^2 - k_i^2, \quad k_1 = k_3 = k_0 = \omega \sqrt{\epsilon_0 \mu_0}, \quad k_2 = \sqrt{\epsilon_r} k_0.$$

9. Формула Эйлера — Маклорена имеет вид

$$\int_a^b f(x) dx = h \left[\frac{f(a)}{2} + f(a+h) + f(a+2h) + \dots + f(b-h) + \frac{f(b)}{2} \right] - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{B_{2k}}{(2k)!} h^{2k} \left[\frac{d^{(2k-1)}}{dx^{(2k-1)}} f(b) - \frac{d^{(2k-1)}}{dx^{(2k-1)}} f(a) \right],$$

где B_{2k} — числа Бернулли. Используя это соотношение, найдите удобную формулу для численного вычисления суммы

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n^{\nu-1}}{n+\alpha},$$

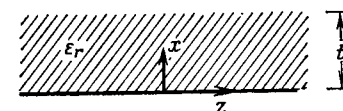
где $0 < \nu < 1, \alpha > 0$. Напишите программу расчета по этой формуле для ЭВМ.

Указание. Используйте формулу преобразования Стильтьеса

$$\int_0^{\infty} \frac{x^{\nu-1}}{x+\alpha} dx = \Gamma(\nu) \Gamma(1-\nu) \alpha^{\nu-1},$$

где $\Gamma(\nu)$ — гамма-функция.

10. Рассмотрите распространение поверхностной волны TM в направлении оси z по диэлектрической пластине толщины t ,



Фиг. 6.19.

лежащей на идеально проводящей плоскости (фиг. 6.19). Выведите характеристическое уравнение, из которого получают постоянные распространения поверхностной волны в функции частоты ω . Напишите программу нахождения этих корней для ЭВМ. Заданными величинами считайте ω, ϵ_r и t .

Указание. Волны TM имеют лишь одну компоненту магнитного поля H_y .

Литература

1. Mitra R., Itoh T., IEEE Trans., **MTT-19**, 47—56 (1971).
2. Mitra R., Lee S. W., VanBlaricum G. F., Jr., Int. J. Engrg. Sci., **6**, 395 (1968).
3. VanBlaricum G. F., Jr., Mitra R., IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, **MTT-17**, 302 (1969).
4. Collin R. E., Field Theory of Guided Waves, McGraw-Hill, New York, 1960.
5. Mitra R., Lee S. W., Analytical Techniques in the Theory of Guided Waves, Macmillan, New York, 1971 (см. перевод: *Р. Митра, С. Ли, Аналитические методы теории волноводов*, изд. «Мир», М., 1974).
6. Mitra R., Itoh T., IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, **MTT-18**, 149 (1970).
7. Itoh T., Mitra R., IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, **MTT-17**, 319 (1969).
8. Yasuura K., A view of numerical methods in diffraction problems. The XVIth General Assembly of the URSI, Ottawa, Canada, 1969.

9. Royer E. G., Mittra R., IEEE Trans., **MTT-20**, 273—279 (1972).
10. Lewin L., Reflection at the junction of an inhomogeneously loaded waveguide, Proc. Copenhagen URSI Symposium on Electromagnetic Waves, Pergamon Press, New York, 1963.
11. Harrington R. F., Time-Harmonic Electromagnetic Fields, McGraw-Hill, New York, 1961.
12. Hord W. E., Rosenbaum F. J., IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, **MTT-16**, 228 (1968).
13. Collin R. E., Brown J., Proc. IEE (London), **103**, pt. C, 121 (1956).
14. Berz F., Proc IEE (London), **98**, pt. 3, 47 (1951).
15. Pace J., Mittra R., Generalized scattering matrix analysis of waveguide discontinuity problems, Quasi-Optics, XIV, 172—197, Polytechnic Institute of Brooklyn Press, New York, 1964.
16. Galindo V., Wu C. P., IEEE Trans. Ant. and Prop., **AP-14**, 149 (1966).
17. Itoh T., Mittra R., Proc. IEEE, **59**, 332 (1971).
18. Itoh T., Mittra R., Proc. IEEE, **59**, 1131 (1971).
19. Mittra R., Bates C. P., в книге Electromagnetic Wave Theory, Pergamon Press, New York, 1967, p. 261.
20. Yamashita E., Mittra R., IEEE Trans. Microwave Theory and Techniques, **MTT-16**, 251 (1968).
21. Itoh T., Mittra R., Electronics Letters, **7**, 364 (1971).

Обратная задача рассеяния и дистанционное зондирование

Р. Митра¹⁾

§ 1. ВВЕДЕНИЕ

Обратная задача рассеяния возникает во многих физических исследованиях. Системы дистанционного зондирования, как наземные, так и расположенные на спутниках, используются метеорологами и экологами для изучения атмосферы. Геологи и геофизики применяют магнитные и сейсмические зондовые методы для исследования процессов горообразования и для нахождения залежей полезных ископаемых внутри Земли. С обратными задачами рассеяния мы встречаемся и в диагностике плазмы, и при изучении свойств световодов. Проблема опознавания цели, или так называемая проблема идентификации, играет важную роль в радиолокации. Важным биоакустическим приложением ультразвукового зондирования является задача об определении местоположения и формы больных участков ткани. Для исследования проблем синтеза антенн и антенного зондирования также необходимо решать обратную задачу.

Если прямой задаче рассеяния посвящено очень много работ, то работ, имеющих дело с обратной задачей, сравнительно мало. Это связано в основном с теми сложностями, с которыми приходится сталкиваться при решении обратной задачи. Прежде всего многие обратные задачи невозможно сформулировать с помощью линейных матричных или интегральных уравнений, а следовательно, для их решения необходимо прибегать к сложным методам. Даже в тех случаях, когда удастся свести обратную задачу к решению линейного матричного уравнения, полученное уравнение часто оказывается плохо обусловленным, так что его обращение неустойчиво. Для решения таких задач тоже приходится придумывать специальные методы.

Чтобы познакомить читателя с вычислительными методами, полезными при решении обратных задач, мы рассмотрим пять иллюстративных задач такого рода. Сначала мы рассмотрим проблему определения формы рассеивателя по известному полю в его дальней зоне. Затем мы изложим метод обратного преобразования применительно к проблеме нахождения дефектных элементов в раскрыве большой фазированной решетки по изме-

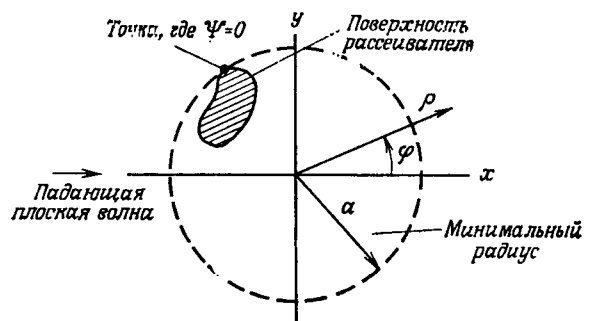
¹⁾ Mittra R., University of Illinois, Urbana, Illinois.

рениям поля излучения в зоне Френеля раскрыва. Далее мы рассмотрим метод синтеза антенных решеток, позволяющий получать заданную диаграмму направленности поля в дальней зоне. После этого мы рассмотрим задачу о нахождении профиля слоистой неоднородной среды по известному полю рассеяния. И, наконец, мы остановимся на матричном методе восстановления волнового фронта в случае плоского раскрыва, когда обратная задача неустойчива.

§ 2. ДВУМЕРНАЯ ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА РАССЕЯНИЯ

1. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ И ПРЕДВАРИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

Задача, которую мы собираемся исследовать, может быть сформулирована следующим образом: требуется определить форму и расположение в пространстве идеально проводящего



Фиг. 7.1.

рассеивателя, если известно поле рассеяния в дальней зоне. Хотя общее решение этой проблемы может быть найдено в трехмерном случае, для простоты мы ограничимся одним или несколькими цилиндрическими рассеивателями произвольного поперечного сечения, на которые падает плоская волна с вектором электрического поля, параллельным осям цилиндров. На фиг. 7.1 показана геометрия задачи. Метод решения, описанный в этом параграфе, изложен более подробно в работе [1].

Рассматриваемая задача может быть сведена к эквивалентной скалярной задаче, если положить $\Psi(\rho, \varphi) = E_z(x, y)$ и учесть, что все другие компоненты полей выражаются через Ψ . Из уравнений Максвелла можно вывести обычное волновое уравнение для Ψ

$$(\nabla^2 + k^2)\Psi(\rho, \varphi) = 0, \quad \nabla^2 = \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}, \quad k = \frac{2\pi}{\lambda} \quad (7.1)$$

с граничным условием $\Psi \equiv 0$ на всех идеально проводящих поверхностях и условием излучения на бесконечности для рассеянного поля Ψ . Полное поле Ψ является суммой падающего и рассеянного полей, т. е.

$$\Psi(\rho, \varphi) = \Psi_i(\rho, \varphi) + u(\rho, \varphi), \quad (7.2)$$

где падающее поле $\Psi_i = e^{-ik\rho \cos \varphi}$. Рассеянное поле в дальней зоне можно записать в виде

$$u(\rho, \varphi) = e^{-ik\rho} (2i/\pi k\rho)^{1/2} g(\varphi), \quad \rho \rightarrow \infty, \quad (7.3)$$

где $g(\varphi)$ — «диаграммная функция» рассеянного поля. Мы полагаем, что функция $g(\varphi)$ нам известна, и наша задача состоит в получении информации о форме рассеивателя по виду этой функции.

2. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ФОРМЫ ОБЪЕКТА ПО ЗАДАННОЙ ДИАГРАММНОЙ ФУНКЦИИ

Прежде всего необходимо разложить диаграммную функцию $g(\varphi)$ в ряд Фурье и найти коэффициенты разложения a_n :

$$g(\varphi) \approx \sum_{n=-M}^M a_n e^{in\varphi}, \quad 0 < \varphi < 2\pi. \quad (7.4)$$

Алгоритмы анализа Фурье хорошо известны, и при желании для вычисления коэффициентов a_n можно воспользоваться какой-нибудь стандартной программой из библиотеки ЭВМ. Мы принимаем, что функция $g(\varphi)$ известна при всех значениях φ ; обобщение на случай, когда $g(\varphi)$ известна не при всех φ , будет рассмотрено позднее.

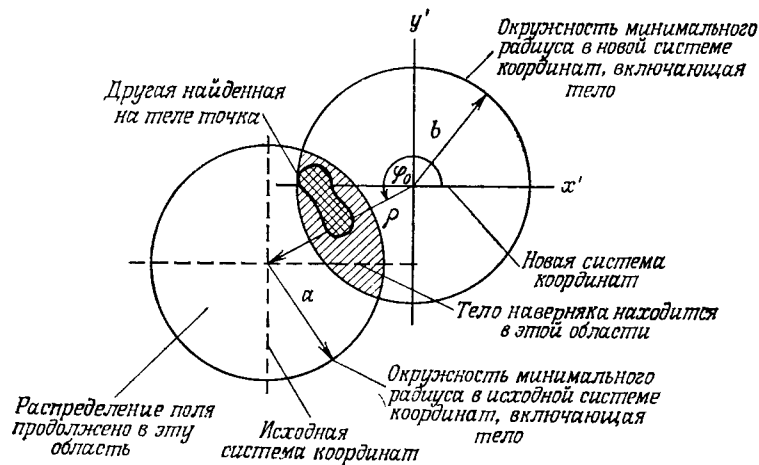
Следующей задачей является выражение поля в ближней зоне у поверхности рассеивателя через коэффициенты a_n . Оказывается, что такую операцию в общем случае нельзя осуществить для произвольной точки пространства с помощью одного линейного алгебраического преобразования. Приходится разрабатывать алгоритм, позволяющий произвести преобразование от дальнего поля к полю в ближней зоне посредством серии операций. О том, как это делается, рассказано ниже.

Для всех точек, расположенных вне окружности минимального радиуса, охватывающей рассеиватель, функцию $u(\rho, \varphi)$ можно выразить через a_n с помощью ряда

$$u(\rho, \varphi) = \sum_{n=-M}^M a_n i^{-n} H_n^{(2)}(k\rho) e^{in\varphi}, \quad \rho \geq a, \quad (7.5)$$

где $H_n^{(2)}$ — функция Ганкеля второго рода.

Следует иметь в виду, однако, что минимальный радиус нам заранее не известен, поскольку мы не знаем, где расположен рассеиватель. Однако мы можем найти положение рассеивателя, если будем вычислять полное поле согласно (7.2) и (7.5) для последовательно уменьшающихся значений радиуса ρ и проверять каждый раз, не обратилось ли полное поле в нуль хотя бы в одной точке окружности. Когда это происходит, мы заключаем, что нам удалось обнаружить местоположение по крайней мере одной точки на поверхности рассеивателя. Далее мы продол-



Фиг. 7.2. Метод аналитического продолжения в область $\rho < a$ для выпуклых тел.

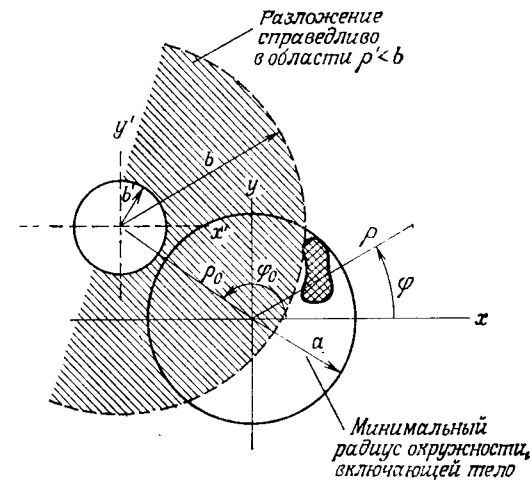
жаем поиск остальных точек. Если нам заранее известно, что рассеиватель один и он выпуклый, то поиск можно продолжать следующим образом. Выбираем новое начало координат, скажем в точке (ρ_0, φ_0) (фиг. 7.2), и для него повторяем поиск точки, для которой полное поле равно нулю. Для этого нужно предварительно преобразовать диаграммную функцию к новым координатам. Очевидно,

$$g'(\varphi) = g(\varphi) e^{ik\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)} = \sum_{m=-P}^P a'_m e^{im\varphi}, \quad (7.6)$$

где a'_m — новые коэффициенты разложения Фурье, которые надо связать со старыми коэффициентами a_n . Разлагая функции $g(\varphi)$ и $e^{ik\rho_0 \cos(\varphi - \varphi_0)}$ в ряды Фурье и перегруппировывая члены, получаем

$$a'_m = \sum_{n=-M}^M a_n i^{m-n} J_{m-n}(k\rho_0) e^{-i(m-n)\varphi_0}. \quad (7.7)$$

Правую часть уравнения (7.7) можно рассматривать как умножение матрицы на вектор $\{a_{-M}, \dots, a_M\}$, что нетрудно произвести на ЭВМ. В соотношении (7.6) весьма существен правильный выбор числа P . Поскольку последовательность коэффициентов a_n была обрезана при $n = M$, существенно знать, на каком значении P следует остановиться. Этот вопрос мы обсудим более подробно позднее.



Фиг. 7.3. Метод аналитического продолжения в область $\rho < a$ для тел произвольной формы.

Как только коэффициенты a'_m найдены с помощью (7.7), нетрудно получить поле в ближней зоне вне и на окружности минимального радиуса в новой системе координат:

$$u(\rho', \varphi') = \sum_{m=-P}^P a'_m i^{-m} H_m^{(2)}(k\rho') e^{in\varphi'}. \quad (7.8)$$

И снова мы можем найти точку, принадлежащую телу и расположенную на окружности минимального радиуса, требуя обращения в нуль полного поля. Описанную процедуру можно повторять до тех пор, пока не будет найдено достаточное число точек на поверхности выпуклого рассеивателя произвольной формы. Следует отметить, что для описания размеров и местоположения рассеивателя требуется небольшое число точек, поскольку сама окружность минимального радиуса уже ограничивает область, где может находиться рассеивающее тело.

Рассмотрим теперь случай, когда рассеиватель не является выпуклым. Если форма тела произвольная или рассеивателей

несколько, приходится пользоваться несколько отличной процедурой.

На фиг. 7.3 опять показан перенос начала координат в точку (ρ_0, φ_0) . Однако теперь для представления полей мы используем так называемое внутреннее разложение. Для $u(\rho', \varphi')$ в новой системе координат разложение имеет вид

$$u(\rho', \varphi') = \sum_{n=-Q}^Q c_n J_n(k\rho') e^{in\varphi'}. \quad (7.9)$$

Оно справедливо внутри и на окружности радиуса $\rho' = b$, т. е. в области, заштрихованной на фиг. 7.3. Как и в предыдущем случае, нам нужно выразить коэффициенты c_n через a_n , т. е. через коэффициенты фурье-разложения диаграммной функции $g(\varphi)$. Необходимое соотношение, полученное в работе [1] с помощью теоремы сложения для функций Бесселя, имеет вид

$$c_n = \sum_{m=-M}^M i^{-m} a_m H_{n-m}^{(2)}(k\rho_0) \times e^{-l(n-m)(\varphi_0 - \pi)}. \quad (7.10)$$

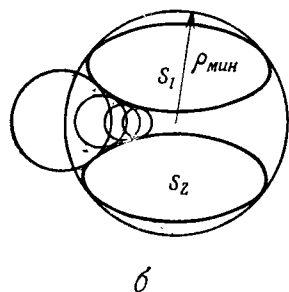
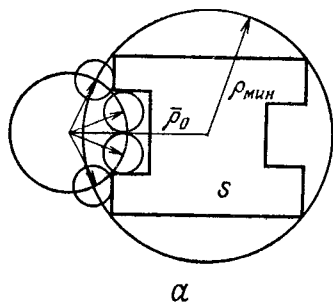
Нетрудно заметить, что выражение (7.10) сходно с (7.7), так что его вычисление может быть произведено теми же численными методами. Основное различие между (7.7) и (7.10) состоит в том, что в первое выражение входят функции J_n , а

Фиг. 7.4. Различные способы переноса начала системы координат.

a — перенос начала координат в разных направлениях от начала исходной системы координат (метод «ветвления»); *б* — «цепной» способ переноса начала системы координат.

во второе — H_n . Кроме того, следует иметь в виду, что для тел сложной формы или же при наличии нескольких рассеивателей приходится много раз производить смещение системы координат, чтобы найти все точки на поверхности рассеивателя (или рассеивателей, если их несколько). Пример такого случая приведен на фиг. 7.4.

Процедура нахождения границы рассеивателя сводится, как и раньше, к поиску точек, где полное поле обращается в нуль. Эти точки считаются расположенными на поверхности рассеивателя. Эту процедуру повторяют до тех пор, пока не выясняется форма всего рассеивающего тела.



В некоторых случаях диаграммная функция $g(\varphi)$ оказывается известной не при всех значениях φ , так что стандартная процедура анализа Фурье не применима для определения коэффициентов a_n . Один из возможных способов нахождения a_n состоит в использовании метода оптимизации параметров, который более подробно описан в § 4. Идея метода заключается во введении показателя качества:

$$F(\bar{a}_{-N}, \bar{a}_{-N+1}, \dots, \bar{a}_0, \dots, \bar{a}_{N-1}, \bar{a}_N) = \int_{\varphi_1}^{\varphi_2} |g(\varphi) - \sum \bar{a}_n e^{in\varphi}|^2 d\varphi.$$

Минимизируя функцию F , мы получаем хорошее приближение для $g(\varphi)$ в области $\varphi_1 < \varphi < \varphi_2$, где задана диаграммная функция (конечно, если удастся сделать F достаточно малым за счет подбора параметров \bar{a}_n). В библиотеке стандартных программ ЭВМ имеются программы¹⁾ минимизации функций многих параметров, которыми можно воспользоваться при решении задачи.

Определив таким способом подходящие значения коэффициентов \bar{a}_n , мы можем далее использовать описанную выше процедуру нахождения местоположения рассеивателя, найдя по коэффициентам \bar{a}_n поле в ближней зоне и точки, где полное поле обращается в нуль.

3. СВОДКА ЭТАПОВ ВЫЧИСЛИТЕЛЬНОЙ ПРОЦЕДУРЫ

а. По заданной функции $g(\varphi)$ для $n = -M, \dots, M$ вычисляются такие коэффициенты $a_n = \int_0^{2\pi} g(\varphi) e^{in\varphi} d\varphi$, чтобы удовлетворялось соотношение

$$\int_0^{2\pi} \left| g(\varphi) - \sum_{n=-M}^M a_n e^{in\varphi} \right|^2 d\varphi < \varepsilon_1,$$

где ε_1 зависит от точности задания $g(\varphi)$.

б. Определяется окружность минимального радиуса минимизацией функции

$$\Psi_t(\rho, \varphi) = \left| \sum_{n=-M}^M a_n i^n H_n^{(2)}(k\rho) e^{in\varphi} + \Psi_t(\rho, \varphi) \right|,$$

¹⁾ См. приложение А.

характеризующей величину полного электрического поля. Функция $\Psi_t(\rho, \varphi)$ минимизируется по параметрам ρ, φ с помощью подходящего метода. Считается, что радиус ρ соответствует минимальному радиусу a окружности, охватывающей тело, если минимальное значение Ψ_t становится меньше малого числа ϵ_2 , введенного заранее в ЭВМ. Отсутствие минимума свидетельствует о том, что исходные данные недостаточно точны.

в. Для тела произвольной формы вычисляются коэффициенты c_n по формуле (7.10). На точности счета коэффициентов c_n с большими индексами n сильно сказываются значения коэффициентов a_n с большими n , поэтому чрезвычайно важно обрывать вычисления при надлежащем значении минимального индекса Q . Подходящим критерием¹⁾ может служить условие $|c_n| + |c_{-n}| > 5$.

г. По коэффициентам c_n вычисляется полное поле по формуле

$$\Psi(\rho', \varphi') = \sum_{n=-Q}^Q c_n J_n(k\rho') e^{in\varphi'} + \Psi_t(\rho', \varphi')$$

и находятся такие значения ρ', φ' , при которых оно минимально. Если минимальное значение поля оказывается меньше ϵ_2 , то считается, что соответствующая точка лежит на поверхности тела. К углу φ_0 прибавляется $\Delta\varphi_0$, и процедура повторяется.

д. Если описанной выше процедурой не удастся найти ни одного минимального значения, меньшего ϵ_2 , то выбирается новая система координат (ρ_1, φ_1) , начало которой расположено внутри окружности радиуса a . Вычисляются новый набор коэффициентов c_n'' по формуле

$$c_n'' = \sum_{m=-R}^R c_m J_{n-m}(k\rho_1) e^{-i(n-m)(\varphi_1 - \pi)}$$

и полное поле в системе (ρ'', φ'') :

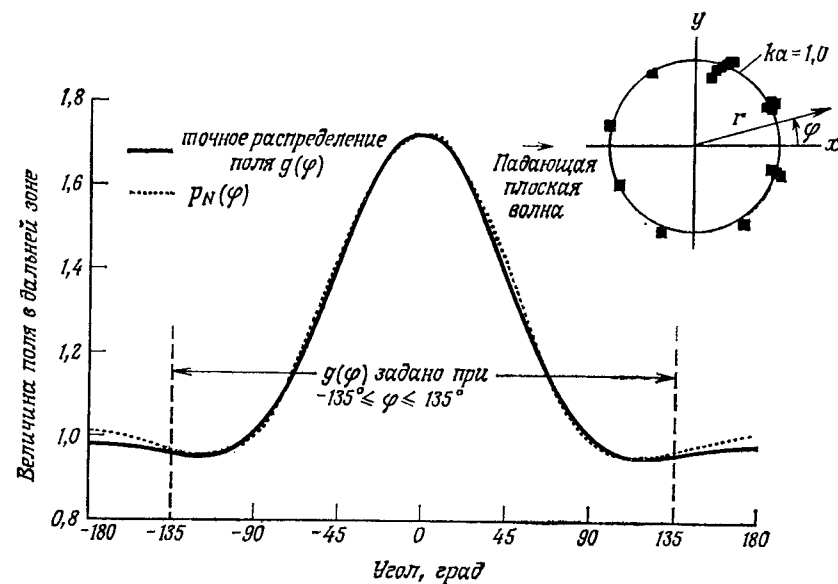
$$\Psi(\rho'', \varphi'') = \sum_{n=-R}^R c_n'' J_n(k\rho'') e^{in\varphi''} + \Psi_t(\rho'', \varphi'')$$

где для выбора R справедлив тот же критерий, что и для выбора Q . Отыскивается минимальное значение Ψ относительно ρ'', φ'' , меньшее величины ϵ_2 . Соответствующая точка считается находящейся на поверхности тела.

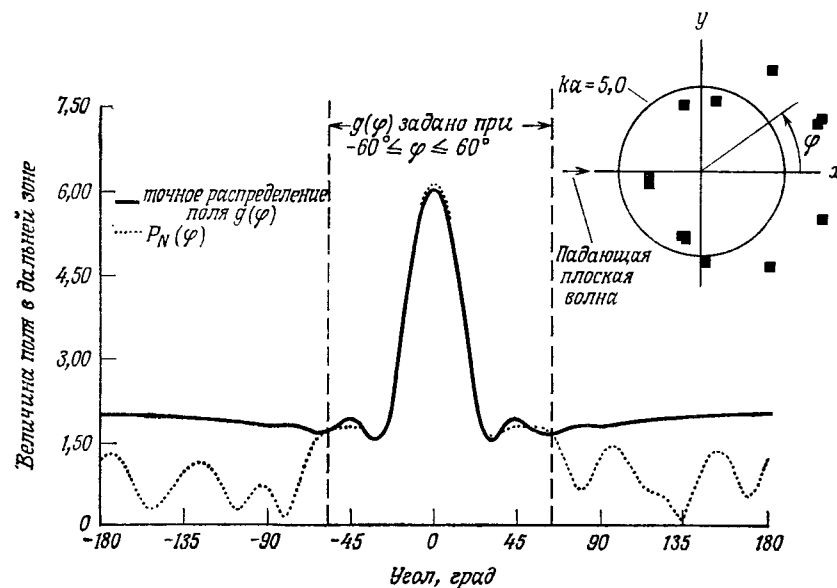
е. Угол φ_0 увеличивается на $\Delta\varphi_0$, и процедура повторяется.

ж. После окончания расчетов по найденным точкам на поверхности рассеивателя графически определяется его форма.

¹⁾ Этот критерий пригоден и для выбора верхнего предела R , используемого при вычислении коэффициентов a_m' [см. выражение (7.7) для выпуклого тела].



Фиг. 7.5. Поле в дальней зоне, заданное при углах $-135^\circ \leq \varphi \leq 135^\circ$.

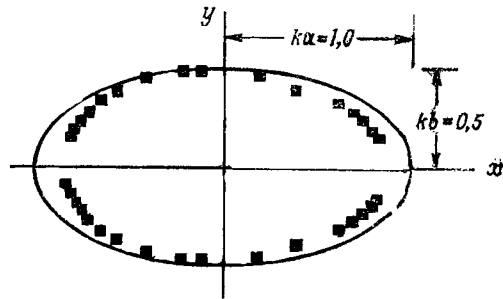


Фиг. 7.6. Поле в дальней зоне, заданное при углах $-60^\circ \leq \varphi \leq 60^\circ$.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ РАСЧЕТА

Для установления практической применимости описанной выше схемы численных расчетов были проведены пробные расчеты. Мы приведем некоторые типичные результаты.

В первом примере рассматривается рассеяние на круговом цилиндре, для которого поле в дальней зоне точно известно и применим простой алгоритм решения для выпуклого тела. Если поле в дальней зоне известно при всех значениях угла φ , то реконструкция цилиндрической поверхности оказывается практически идеальной (соответствующие графики здесь не приве-



Фиг. 7.7. Эллиптический цилиндр ($ka = 1$, $kb = 0,5$).

Сплошной линией показана поверхность рассеивателя, квадратиками — точки, найденные на ЭВМ.

дены). На фиг. 7.5 и 7.6 представлены результаты восстановления формы, когда поле в дальней зоне известно соответственно в областях $-135^\circ < \varphi < 135^\circ$ и $-60^\circ < \varphi < 60^\circ$. На фигурах приведен также график приближенного выражения

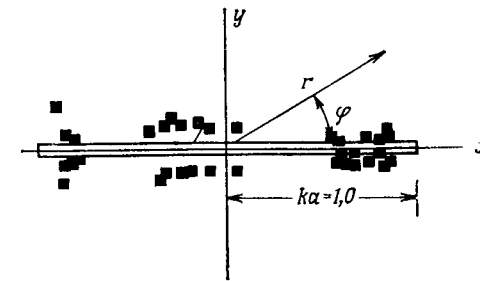
$$P_N(\varphi) = \sum_{n=-N}^N \bar{a}_n e^{in\varphi}$$

для диаграммной функции. Учитывая малые размеры рассеивателя и недостаточность данных, имеющих во втором случае ($-60^\circ < \varphi < 60^\circ$), можно заключить, что результаты расчетов вполне приемлемы.

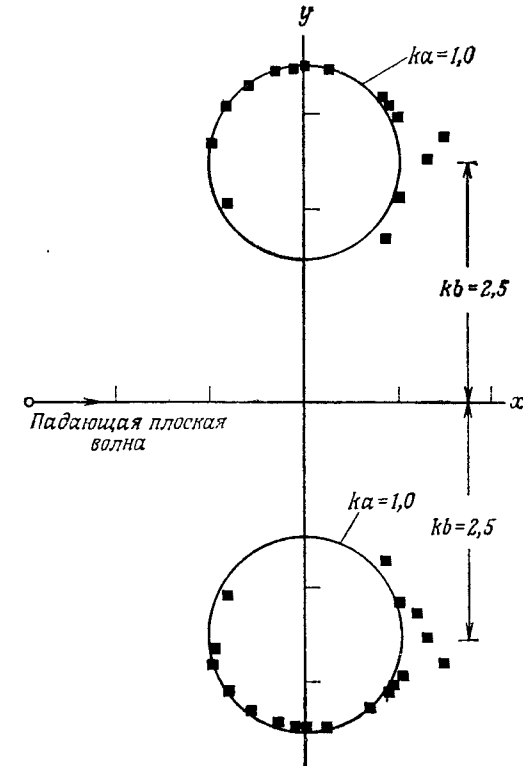
На фиг. 7.7 представлены результаты восстановления формы эллиптического рассеивателя ($ka = 1$, $kb = 0,5$), произведенного с помощью того же алгоритма для выпуклых тел.

На фиг. 7.8 и 7.9 приведены результаты применения алгоритма для тел произвольной формы, использующего внутреннее разложение (7.9), для случаев проводящей ленты и двух цилиндров.

Было исследовано также влияние шумов, имеющих в исходных данных, и показано, что развитый здесь метод дает



Фиг. 7.8. Проводящая лента.



Фиг. 7.9. Восстановление формы двух цилиндров при $ka = 1$ и $kb = 2,5$.

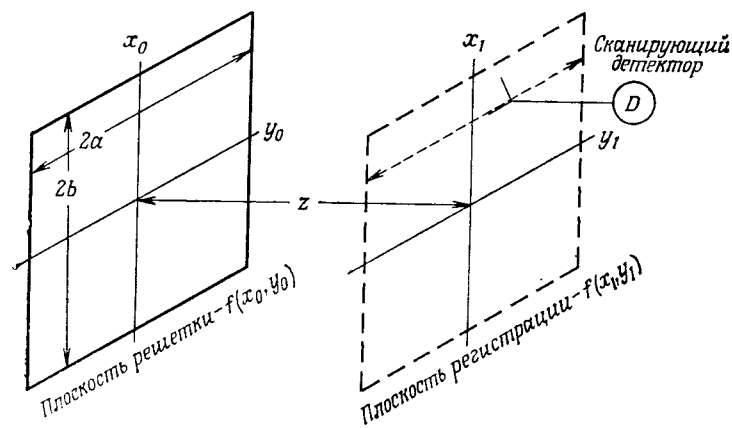
весьма хорошие результаты даже при уровне шумов порядка -20 дБ в исходных данных для поля дальней зоны.

Время счета на IBM 360/75 для типичного рассеивателя порядка 30 с. Следует отметить, что время счета растет с увеличением размеров рассеивателя и может стать неприемлемо большим при $ka \gg 1$, т. е. в области применимости геометрической оптики. При больших размерах рассеивателя удобнее пользоваться методом, предложенным Льюисом [2].

§ 3. ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ РАСКРЫВА АНТЕННЫ ГОЛОГРАФИЧЕСКИМ МЕТОДОМ

1. ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

В этом параграфе мы опишем некоторые аналитические и численные методы решения задачи об определении поля в раскрыве антенны по измерениям ее поля излучения в зоне Френеля



Фиг. 7.10. Плоскость решетки и плоскость регистрации поля.

неля. Такая проблема может, например, возникнуть, если необходимо найти дефектные элементы в большой фазированной решетке, не прибегая к обследованию каждого элемента. Материал этого параграфа заимствован из работы [3].

Экспериментально определяются как амплитуда, так и фаза поля излучения в зоне Френеля в плоскости, параллельной плоскости раскрыва решетки. Геометрия задачи изображена на фиг. 7.10. Расстояние между плоскостью раскрыва и плоскостью регистрации поля z может быть порядка размеров решетки. Задача состоит в обработке полученной информации для нахождения характеристик распределения поля в раскрыве решетки.

2. АНАЛИТИЧЕСКИЕ СООТНОШЕНИЯ

Поле f в раскрыве решетки связано с полем g в плоскости регистрации посредством дифракционной формулы Рэлея

$$g(x, y) = \int_{-b}^b \int_{-a}^a f(x_0, y_0) h_z(x_0, y_0, x, y) dx_0 dy_0, \quad (7.11)$$

где ядро преобразования

$$h_z = -\frac{1}{2\pi} \frac{\partial}{\partial z} \left(\frac{e^{-ikr}}{r} \right),$$

$$r = \sqrt{(x-x_0)^2 + (y-y_0)^2 + (z-z_0)^2}$$

и k — волновое число для свободного пространства. Поскольку h_z зависит от разности координат, формулу (7.11) можно записать в виде

$$g(x, y) = h_z(x, y) * f(x, y), \quad (7.12)$$

где звездочка обозначает свертку.

Стандартный подход к решению обратной задачи состоит в сведении (7.11) к матричному уравнению либо методом дискретизации, либо методом моментов с последующим решением полученного уравнения для f с помощью обычных приемов. Однако если размеры раскрыва велики по сравнению с длиной волны, такой метод оказывается крайне неэффективным и требует много машинного времени. Ниже мы опишем процедуру, основанную по существу на принципе голографии, которая позволяет осуществить приближенное обращение g с помощью формулы

$$f(x, y) \approx h_z^*(x, y) * g(x, y), \quad (7.13)$$

где звездочка сверху обозначает сопряжение. Очевидно, что с точки зрения численных расчетов гораздо предпочтительней использовать формулу (7.13) а не стандартный метод, описанный выше. Правда, формула (7.13) является приближенной, поскольку она обращает лишь ту часть спектра f , которая находится в его видимой области²⁾. Тем не менее при больших

¹⁾ Здесь предполагается, что задача нахождения полей сведена к эквивалентной скалярной задаче, хотя описанный в этом параграфе метод может быть обобщен и на векторный случай.

²⁾ Видимая область спектра функции $p(x, y)$ определяется значениями функции $P(\xi, \eta)$ в области $\xi^2 + \eta^2 \leq k^2$, где $P(\xi, \eta)$ — Фурье-образ функции p :

$$P(\xi, \eta) = \Phi [p(x, y)] = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} p(x, y) e^{-i(\xi x + \eta y)} dx dy.$$

раскрывах решетки информации, содержащейся в этой области спектра, оказывается вполне достаточно. Это утверждение будет проиллюстрировано ниже на примере фазированной решетки с раскрывом порядка 30λ .

Для изучения применимости такого метода часто бывает удобно промоделировать всю процедуру, включая накопление экспериментальных данных, на ЭВМ. Мы также воспользуемся таким подходом, т. е. по предположенному распределению поля в раскрыве $f(x, y)$ смоделируем измеренные значения поля $g(x, y)$ в прямоугольной области плоскости регистрации. Затем мы попытаемся восстановить функцию f , обрабатывая это распределение g . Мы не будем предполагать, что f — полностью произвольная функция. Примем, что лишь некоторая доля элементов в раскрыве решетки является «дефектной» и вносит случайные ошибки в фазе. Расположение таких элементов будет тоже предполагаться случайным. Наша задача сводится к определению местоположения этих дефектных элементов.

3. СХЕМА ЧИСЛЕННОГО СЧЕТА

Процедура численного счета включает следующие этапы:

1. Моделирование по формуле (7.11) измеряемого поля g в прямоугольной области для распределения поля в раскрыве

$$\hat{f} = f_0 + f_e,$$

где f_0 — идеальное, синфазное распределение при отсутствии каких-либо погрешностей, а f_e характеризует случайные фазовые ошибки распределения.

2. Моделирование ошибок измерений введением ограниченной случайной погрешности в распределение g .

3. Вычисление идеального поля g_0 по заданному идеальному распределению f_0 .

4. Определение поля ошибок $g_e = g - g_0$.

5. Применение приближенной формулы обращения (7.13) для получения f_e из g_e .

6. Графическое определение местонахождения дефектных элементов путем нахождения областей раскрыва, для которых $|f_e| > T \cdot t(x, y)$, где T — постоянная, характеризующая пороговый уровень, а $t(x, y)$ — функция, учитывающая возможные изменения амплитуды в распределении поля в раскрыве.

Заметим, что как при вычислении смоделированных значений поля в плоскости регистрации (этап 1), так и при обращении (этап 5) приходится производить операцию двумерной свертки, требующую вычисления двойных интегралов. Поскольку такая операция отнимает много машинного времени, желательно найти эффективный метод численного вычисления интегралов

типа свертки. К счастью, алгоритм быстрого преобразования Фурье (БПФ) позволяет эффективно вычислять такие интегралы. Для определения g сначала вычисляют величины

$$F(\xi, \eta) = \Phi[f(x, y)], \quad H(\xi, \eta) = \Phi[h(x, y)],$$

затем находят их произведение и, наконец, производят обратное фурье-преобразование методом БПФ. Если функции f и g представляются в виде двумерных квадратных массивов, содержащих N^2 комплексных чисел, то для прямого вычисления интеграла типа свертки требуется N^4 операций (умножений и сложений). Для двукратного же применения метода БПФ необходимо провести лишь $4N^2 \log_2 N$ операций. Следовательно, относительный выигрыш во времени пропорционален $N^2/4 \log_2 N$, где N^2 — число элементов массива. Например, при $N = 60$ счет методом БПФ примерно в 150 раз быстрее, чем прямым методом свертки. В приложении Б изложены некоторые подробности использования БПФ для нахождения фурье-образов функций.

4. РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА

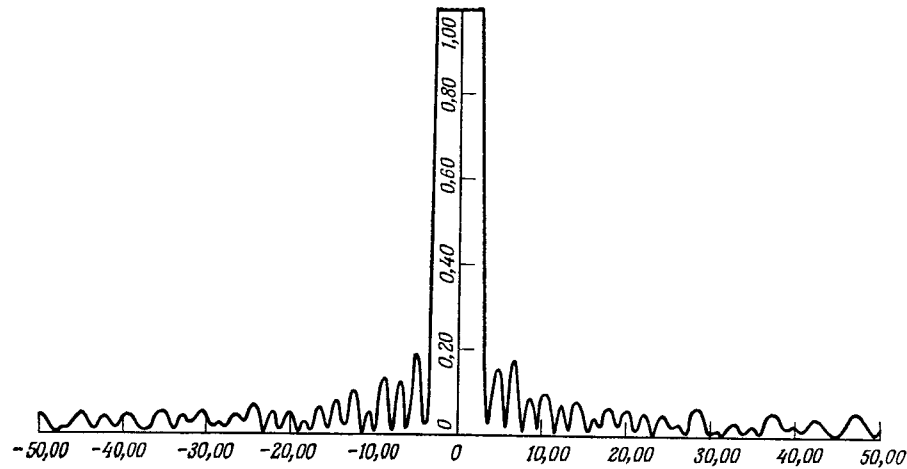
Вычисления производились для случая квадратной ($a/\lambda = b/\lambda = 30,5$) плоской решетки, содержащей 61×61 равноотстоящих на расстояние $\lambda/2$ элементов.

Мы предположили гауссово распределение поля в раскрыве $t(x, y)$ со спаданием поля к краю на 20 дБ. Полезно отметить, что влияние погрешностей фазы на работу решетки будет значительно менее выражено, если вместо спадающего амплитудного распределения, выбранного в нашем примере, взять однородное распределение.

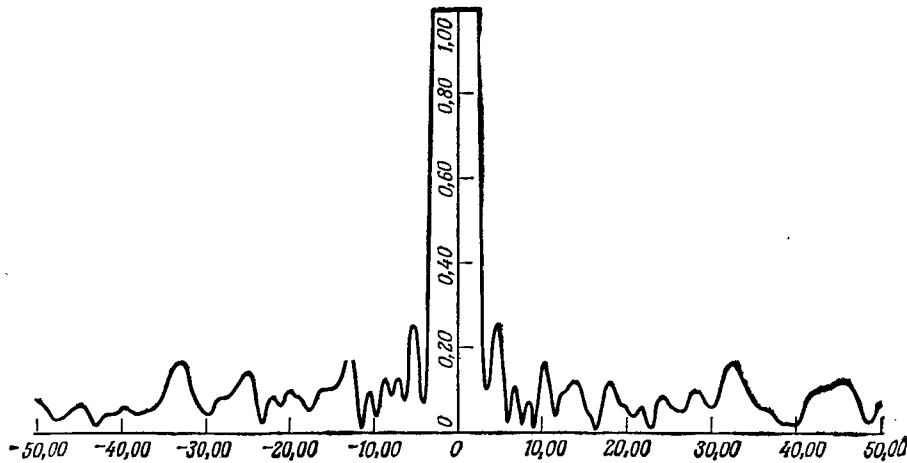
На фиг. 7.11 представлена невозмущенная диаграмма направленности бокового излучения в дальней зоне для выбранной нами решетки. Основной лепесток, имеющий ширину $2,3^\circ$, не показан на фигуре для того, чтобы можно было ясно изобразить боковые лепестки, которые более чем на 35 дБ ниже основного. В дальнейшем для удобства мы будем нормировать максимум всех диаграмм относительно максимума этой невозмущенной диаграммы. Уровень наибольшего бокового лепестка относительно максимума указывается в подписях к фигурам.

В 186 случайно расположенных элементах решетки (5% от всех элементов) были введены случайные ошибки по фазе $-\pi \leq \phi \leq \pi$. Это производилось с помощью простой подпрограммы¹⁾, содержащей 8 предложений, которая при каждом

¹⁾ Имеется в виду стандартная программа RANDU, которая способна выдать 2^{29} однородно распределенных случайных чисел между 0 и 1, прежде чем она начнет повторяться.



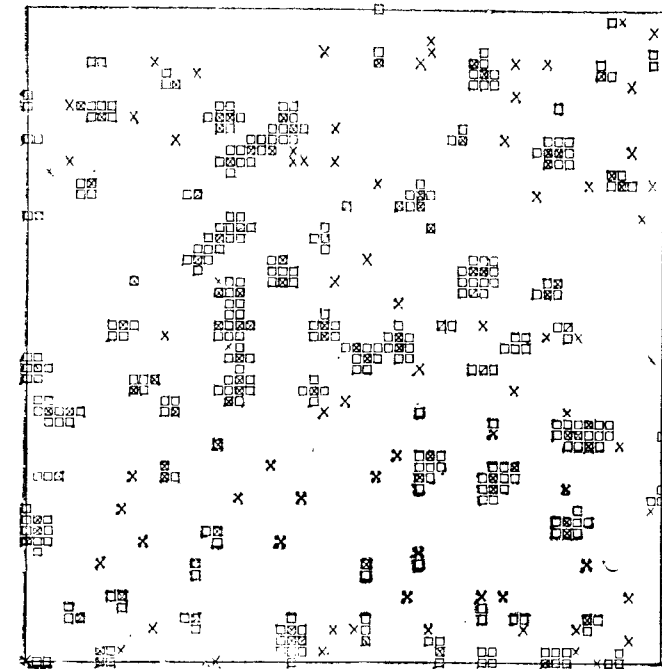
Фиг. 7.11. Боковые лепестки диаграммы направленности решетки с гауссовым распределением поля в раскрыве и спаданием к краю 20 дБ. Уровень максимального бокового лепестка на 35,4 дБ ниже уровня главного максимума.



Фиг. 7.12. Боковые лепестки диаграммы направленности решетки с 5% дефектных элементов.

Уровень максимального бокового лепестка равен -31,5 дБ.

вызове дает случайное число между нулем и единицей. Например, первые два обращения к подпрограмме дают числа r_1 и r_2 , определяющие случайные положения дефектного элемента в $(N_r - r_1)$ -м ряду и $(N_c - r_2)$ -м столбце решетки (N_r и N_c — число рядов и столбцов в решетке). Третье обращение дает



Фиг. 7.13. Действительное расположение дефектных элементов решетки (крестики) и расположение дефектных элементов, рассчитанное с помощью ЭВМ (квадратики); ошибки измерений отсутствуют.

число r_3 , с помощью которого устанавливается величина фазовой погрешности по формуле $(2r_3 - 1)\pi$. Эта последовательность вызовов подпрограммы повторяется 186 раз до полного введения всех упомянутых случайных фазовых ошибок.

Результирующая диаграмма направленности в дальней зоне для «испорченной» решетки показана на фиг. 7.12, где видно, что уровень максимального бокового лепестка поднялся до -31,5 дБ. Для некоторых приложений требуется исправить этот подъем уровня бокового лепестка, поэтому мы рассмотрим теперь возможность определения местоположения дефектных элементов в раскрыве решетки.

При $z/\lambda = 30,5$ в плоскости регистрации было рассчитано распределение поля в квадратном раскрыве, равном по величине раскрыву решетки. Вычисления производились методом БПФ.

В этом примере не учитывались экспериментальные ошибки измерений величины g . С помощью метода, описанного выше, находились сначала g_e , а затем f_e . Использовался пороговый критерий и с помощью самописца отмечались те места, где поле f_e превышало $Tt(x, y)$. Величина порогового уровня T определялась по формуле

$$T = |f_e|_{\text{ср}} + c(|f_e|_{\text{макс}} - |f_e|_{\text{ср}}), \quad (7.14)$$

где постоянная c , которую можно варьировать, выбирается для изменения порогового уровня.

При $c = 0,2$ было рассчитано расположение 384 дефектных элементов, из которых 104 действительно содержали фазовые ошибки. Результаты приведены на фиг. 7.13, где в раскрыве решетки показаны 186 дефектных элементов (обозначенные крестиками) и 384 выданных ЭВМ положения (обозначенные квадратиками). Следует отметить, что, уменьшив c , можно увеличить число правильно обнаруженных дефектных элементов, однако такая процедура приведет к увеличению числа выданных ЭВМ элементов, не содержащих в действительности фазовых ошибок.

Следует также отметить, что полное число выданных ЭВМ дефектных элементов составляет всего примерно 10% от полного числа элементов, причем из них примерно 28% оказались действительно дефектными. Более того, выданные ЭВМ положения

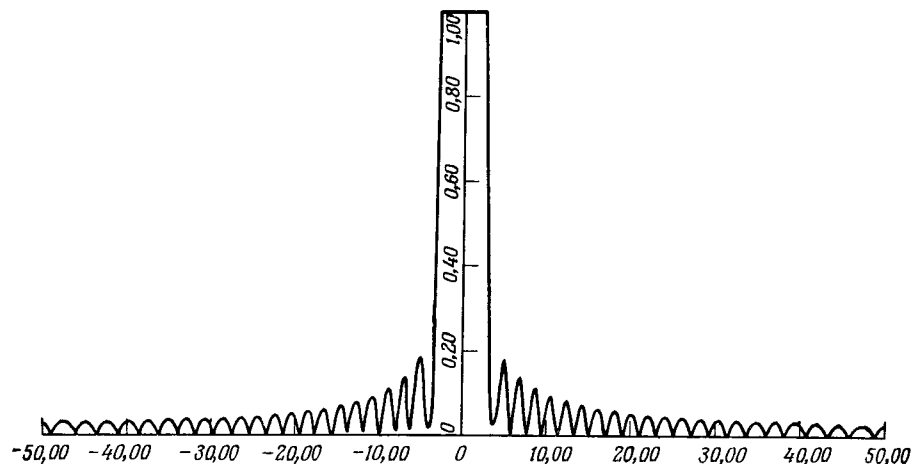
Таблица 7.1

Число дефектных элементов, найденных в различных вариантах счета на ЭВМ

Диапазоны фазовых ошибок	0-45°	45-90°	90-135°	135-180°	Общее число
Число дефектных элементов	34	58	44	50	186
Число дефектных элементов, найденных при шуме 0% ($c = 0,2$)	6	21	35	42	104
Число дефектных элементов, найденных при шуме 5% ($c = 0,2$)	4	24	35	42	105
Число дефектных элементов, найденных при шуме 0% в двух последовательно проведенных расчетах:					
Первый расчет ($c = 0,3$)	2	10	26	35	73
Второй расчет ($c = 0,4$)	4	29	16	9	58
Общее число найденных в обоих расчетах дефектных элементов	6	39	42	44	131

не распределены случайно в плоскости раскрыва, а группируются вокруг действительно дефектных элементов.

В табл. 7.1 приведено распределение 104 правильно предсказанных дефектных элементов по четырем диапазонам фазовых ошибок. Из таблицы видно, что описанная процедура позволяет найти подавляющую часть элементов с наибольшей ошибкой в фазе. Чтобы оценить, насколько улучшается диаграмма направленности после исправления этих 104 элементов, была рассчитана



Фиг. 7.14. Боковые лепестки диаграммы направленности решетки после исправления выданных ЭВМ дефектных элементов.

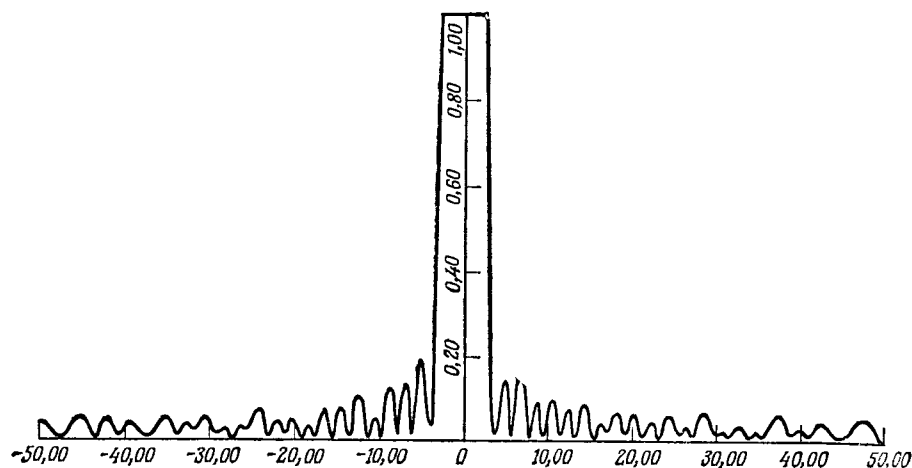
Уровень максимального бокового лепестка -34,4 дБ.

тана исправленная диаграмма. Она приведена на фиг. 7.14, где видно, что уровень боковых лепестков снизился до -34,4 дБ.

В другом рассчитанном примере на смоделированные на ЭВМ значения функции g накладывался пятипроцентный шум. Это осуществлялось умножением g на коэффициент $(1 + 0,05r)$, где r — случайное число в интервале $(-1, 1)$, вырабатываемое стандартной программой RANDU. При том же значении $c = 0,2$ было предсказано 420 элементов, из которых действительно дефектными оказались 105 элементов, или примерно 25% от числа предсказанных. В табл. 7.1 приведены статистические данные и для этого случая; их можно сравнить с результатами предыдущего примера. Диаграмма направленности, рассчитанная после исправления 105 дефектных элементов, показана на фиг. 7.15, где видно, что уровень боковых лепестков составляет -34,2 дБ. Следовательно, можно заключить, что пятипроцентный шум в данных измерений практически не влияет на точность предсказаний.

Таким способом можно найти и большее число дефектных элементов, если повторить описанную выше процедуру.

Хотя мы выбрали частный пример для иллюстрации метода дистанционного зондирования раскрыва, сам метод носит общий характер. Тем не менее следует еще раз напомнить, что голографический метод формирования реального изображения по данным о рассеянном поле является лишь приближенным, причем это приближение ухудшается с уменьшением отношения



Фиг. 7.15. Боковые лепестки диаграммы направленности решетки с введенным шумом 5% после исправления.

Уровень максимального бокового лепестка —34,2 дБ.

размеров раскрыва и области регистрации поля к длине волны. Если модифицировать описанную выше процедуру решения обратной задачи рассеяния, то, возможно, удастся применить ее к случаю, когда размеры раскрыва, выраженные в длинах волн, не очень велики либо когда раскрыв неплоский. Однако процедура вычислений в этих случаях должна быть значительно более сложной, чем рассмотренная здесь.

§ 4. СИНТЕЗ АНТЕННЫ ПО ЕЕ ДИАГРАММЕ НАПРАВЛЕННОСТИ ПО МОЩНОСТИ

1. ВВЕДЕНИЕ И ОПИСАНИЕ ЗАДАЧИ

Важной задачей теории антенн является проблема синтеза распределения поля в раскрыве, создающего заданную диаграмму направленности. Эта задача исследовалась рядом авторов для случая, когда заданы как амплитудное, так и фазовое

распределения поля в дальней зоне. Однако такая постановка задачи не интересна практически, так как в качестве технического условия обычно задается только амплитудная диаграмма направленности. Стандартные методы синтеза становятся в этом случае неприменимыми, поскольку все они базируются на линейном анализе, тогда как задание одной лишь амплитуды требует нелинейного подхода. Метод синтеза, излагаемый в этом параграфе, был описан в работе [4] и оказался весьма эффективным при решении подобных нелинейных обратных задач. Он основывается на описанном в § 2 методе оптимизации параметров; последний метод будет еще раз обсуждаться в § 5 в связи с проблемой дистанционного зондирования неоднородной среды. Хотя излагаемый ниже метод применим к проблемам синтеза как дискретных, так и непрерывных распределений в раскрыве, мы рассмотрим лишь случай дискретного распределения, когда раскрыв состоит из набора линейных источников. Другие примеры использования этого метода можно найти в работе [5].

2. ПОСТАНОВКА ЗАДАЧИ

Диаграмма направленности поля линейной решетки изотропных излучателей дается выражением

$$g(\varphi) = \sum_{m=1}^M I_m e^{i x_m \sin \varphi}, \quad (7.15)$$

где I_m — ток в m -м элементе, x_m — нормированное расстояние от начала координат до m -го элемента (2π , умноженное на число длин волн), а φ — угол между направлением излучения и нормалью к плоскости раскрыва. Выражение для диаграммы направленности антенны по мощности удобно получить из (7.15), разложив $e^{i x_m \sin \varphi}$ в ряд по функциям Бесселя и умножив полученный двойной ряд на такое же представление функции $g^*(\varphi)$, комплексно сопряженной с $g(\varphi)$. После некоторых упрощений мы приходим к следующему выражению для диаграммы направленности по мощности:

$$|g(\varphi)|^2 = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right), \quad (7.16)$$

где

$$a_n = \epsilon_n i^n \{ \mathbf{1}^t A_n \mathbf{1} \}, \quad (7.17)$$

$$\epsilon_n = \begin{cases} 1, & n = 0, \\ 2, & n > 0. \end{cases}$$

Здесь $\mathbf{1} = \{I_1, I_2, \dots, I_n\}$ — n -мерный вектор распределения тока, $A_n^{ij} = J_n(x_i - x_j)$, где J_n — функция Бесселя n -го порядка.

Из (7.17) видно, что проблема синтеза заданной диаграммы направленности $|g(\varphi)|^2$ эквивалентна проблеме синтеза коэффициентов a_n в (7.16) соответствующим выбором компонент вектора \mathbf{I} . Из (7.17) следует также, что связь между a_n и I_n является нелинейной, и поэтому обычные матричные или другие линейные методы оказываются неприменимыми для решения этой задачи.

Методом, которым широко пользуются в системотехнике для решения подобных нелинейных проблем, служит метод оптимизации параметров¹⁾. Предположим, что мы выбрали некоторые пробные значения для компонент вектора тока \mathbf{I}_t и набора координат x_n , записанного в виде вектора \mathbf{x}_t . Пусть P_t — диаграмма направленности по мощности при таком выборе параметров антенны. Выразим P_t в виде, сходном с (7.16):

$$P_t = \sum_{n=0}^N b_n \cos n \left(\frac{\pi}{2} - \varphi \right). \quad (7.18)$$

Тогда мы можем ввести показатель качества

$$F(\mathbf{I}_t, \mathbf{x}_t) = \sum_{n=0}^N (a_n - b_n)^2, \quad (7.19)$$

обращение которого в нуль свидетельствует о том, что диаграмма направленности P_t при $\mathbf{I} = \mathbf{I}_t$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_t$ совпадает, по крайней мере с точностью до N коэффициентов Фурье, с заданной диаграммой направленности. При численном счете функция F не может тождественно обращаться в нуль, и ее величина служит мерой точности синтеза заданной диаграммы направленности.

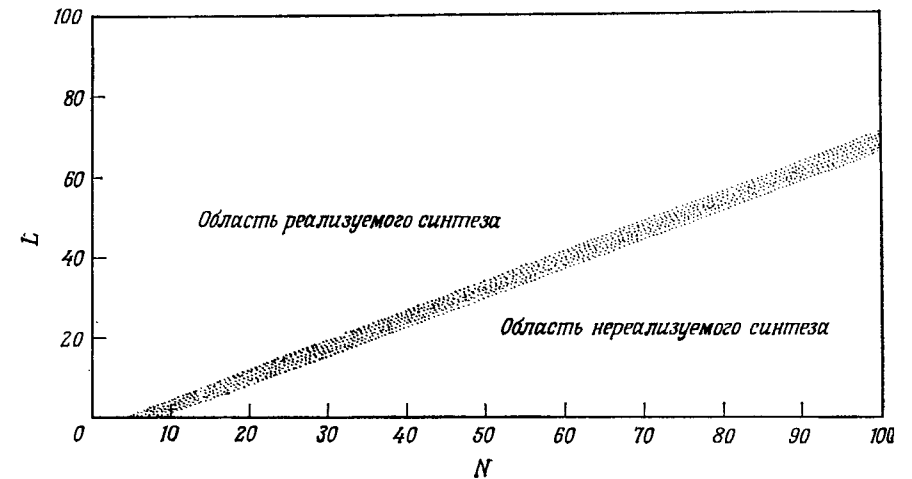
Для минимизации функции F можно использовать любой алгоритм оптимизации параметров (методы Розенброка, Дэвидона или метод сопряженного градиента). Некоторые детали этих методов изложены в приложении А.

3. ЧИСЛЕННЫЙ СЧЕТ

Если размеры антенны не заданы, то значение N определяется количеством коэффициентов Фурье в разложении P , которые необходимо аппроксимировать. Если же размеры антенны ограничены, то значение N для антенн, не обладающих сверхнаправленностью, выбирается следующим образом. Если максимально возможный размер решетки равен $L = x_m - x_1$, то все аргументы функций Бесселя, входящих в матрицу A_n , меньше или равны L . При $n > L$ функция Бесселя для больших

¹⁾ Другие применения этого метода к задачам электродинамики рассмотрены в § 2 и 4.

n ведет себя асимптотически как $(1/n)^{n+1/2}$, т. е. очень быстро стремится к нулю. Поэтому, как следует из (7.18), для получения существенных вкладов в a_n при больших n требуются большие значения токов \mathbf{I} , что приводит к появлению эффекта сверхнаправленности. Чтобы избежать этого, необходимо ограничить значения I_n , в результате чего все коэффициенты a_n , начиная с некоторого $n > N$, окажутся приближенно равными нулю. Значение N не зависит от \mathbf{I} и \mathbf{x} , а определяется размером решетки L .



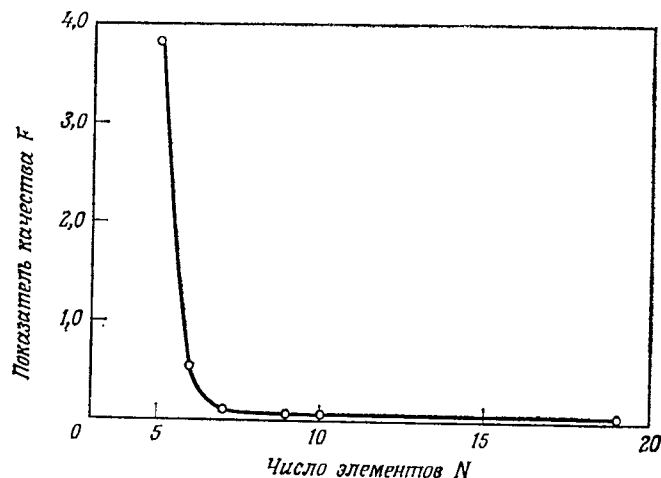
Фиг. 7.16. Зависимость размера решетки L (выраженного как число длин волн, умноженное на 2π) от максимального возможного номера реализуемого коэффициента Фурье N .

Этот результат графически иллюстрирует фиг. 7.16, где показаны области реализуемого и нереализуемого синтеза, разделенные кривой зависимости нормированного размера антенны L от максимального возможного номера реализуемого коэффициента Фурье N . Видно, что граница этих областей является практически линейной и приближенно описывается соотношением $N = \alpha L$, где α несколько больше единицы.

Даже если число элементов N не ограничено, из этого вовсе не следует, что с ростом N показатель качества F будет непрерывно уменьшаться при фиксированном размере антенны L . Так, например, бессмысленно увеличивать число N после того, как показатель качества F выходит на плато. Это иллюстрирует фиг. 7.17 для типичного случая $L = 18$; видно, что увеличение N после примерно 7 практически бесполезно.

Другим важным вопросом является вопрос об обрезании суммы, входящей в (7.16). Известно, что распределение поля

в дальней зоне антенны описывается аналитической функцией от $\sin \varphi$, поэтому, если заданное распределение не удовлетворяет критерию аналитичности, например если оно обладает разрывами, то синтезировать его невозможно. Однако практически нужное распределение всегда можно аппроксимировать в пределах заданных инженерных допусков, учитывая члены более высоких порядков в разложении Фурье, что в свою очередь приводит, как правило, к необходимости увеличения L .

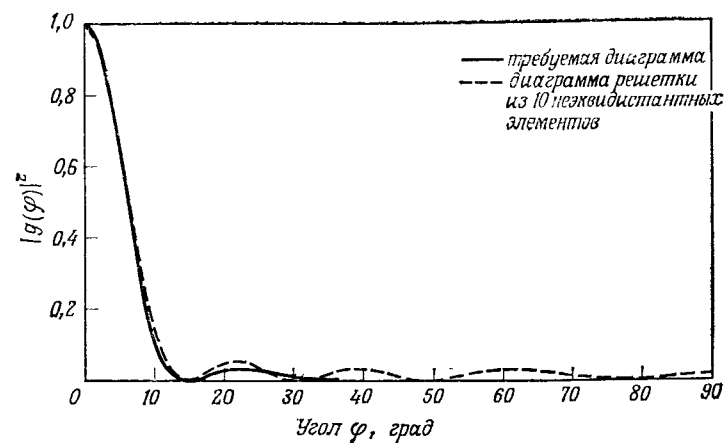


Фиг. 7.17. Зависимость показателя качества F от числа элементов N .

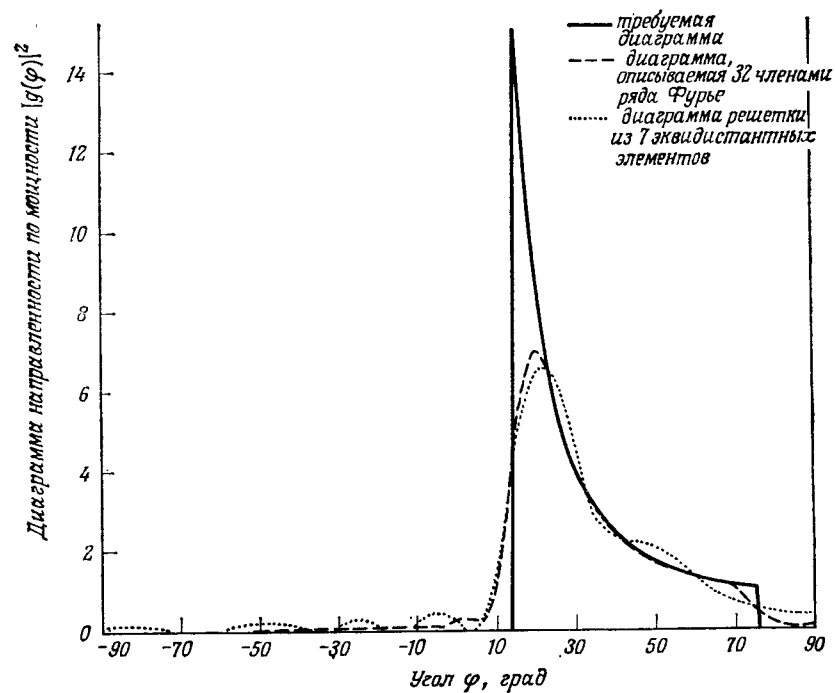
4. РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА

В качестве первого примера рассмотрим экспоненциальную диаграмму с шириной луча 30° между нулями и с боковыми лепестками в 15 дБ. Эта диаграмма аппроксимировалась рядом Фурье, содержащим 24 члена, а затем эта приближенная диаграмма синтезировалась с помощью решетки из десяти неэквидистантных элементов. Результаты приведены на фиг. 7.18. Приведенное решение соответствует $L = 21$, т. е. попадает в область реализуемого синтеза, как видно из фиг. 7.16.

Во втором примере рассматривается диаграмма с резким обрывом, описываемая функцией $\operatorname{cosec}^2 \varphi$ в интервале $15^\circ < \varphi < 75^\circ$ и равная нулю при остальных значениях φ . Эта диаграмма была синтезирована с помощью эквидистантной решетки из семи элементов, причем максимальный нормированный размер решетки был взят равным 18. Согласно фиг. 7.16, максимальный возможный номер коэффициента Фурье N в этом случае равен 32. На фиг. 7.19 представлены диаграмма, описываемая 32 чле-

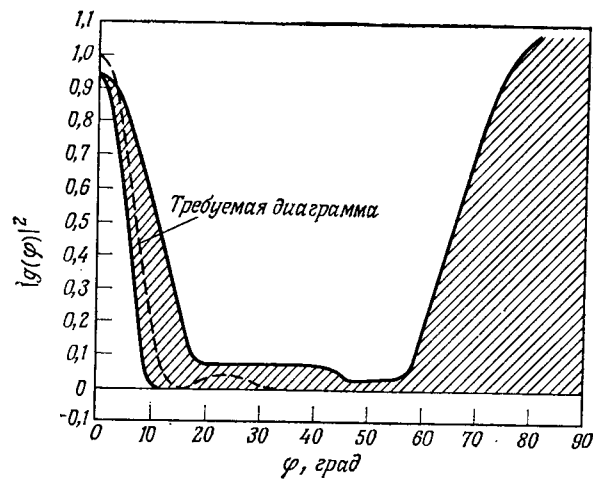


Фиг. 7.18. Диаграмма излучения с шириной луча $\sim 30^\circ$ и с боковыми лепестками в 15 дБ.

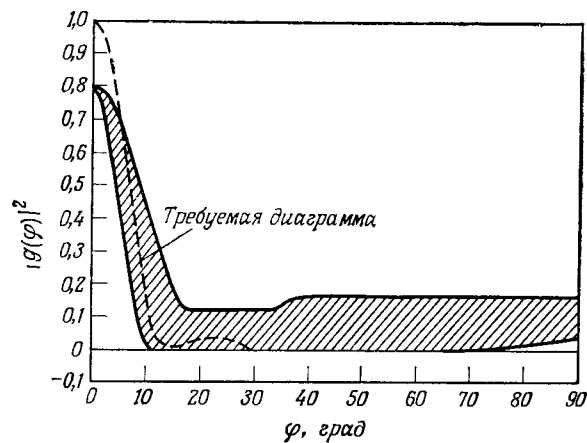


Фиг. 7.19. Синтез косекансной диаграммы излучения для $15^\circ \leq \varphi \leq 75^\circ$.

нами ряда Фурье, и полученная синтезированная диаграмма. Обращаясь к фиг. 7.17, которая соответствует параметрам этого



Фиг. 7.20. Огибающая диаграмм, полученная для решетки, рассчитанной на среднюю частоту.



Фиг. 7.21. Огибающая диаграмм, полученная после оптимизации с учетом изменения частоты.

примера, мы видим, что выбранное число элементов (7) является достаточным. Уместно отметить, что после определенной точки значения функции F практически перестают зависеть не только от числа элементов, но и от величины L .

Наконец, полезно упомянуть, что решетку можно сделать широкополосной, если рассматривать частоту в качестве одного из параметров. Такая решетка рассчитывается минимизацией по нормализованным координатам x и по вектору распределения тока I максимального значения F в диапазоне частот, т. е. минимизацией наихудшего значения F . Такой метод решения называется в литературе «методом минимакса».

На фиг. 7.20 показана огибающая диаграмм, которая получается для эквидистантной решетки из семи элементов, рассчитанной на среднюю частоту, при ее использовании в диапазоне, в котором частота изменяется в два раза. При средней частоте вектор x_0 взят равным $x_0' = [-9,0, -7,0, -5,0, 0, 5,0, 7,0, 9,0]$. Счет на ЭВМ сводился к минимизации величины $\min [F_{\max}(x_0, I, f)]$.

Из фиг. 7.21 видно, насколько улучшается решение после минимизации по частоте описанным выше способом.

§ 5 ДИСТАНЦИОННОЕ ЗОНДИРОВАНИЕ НЕОДНОРОДНЫХ СРЕД

1. ВВЕДЕНИЕ

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые вопросы численного решения задачи дистанционного зондирования и диагностики неоднородных сред, свойства которых зависят только от одной координаты¹⁾. Большое количество работ по математическим методам определения свойств среды читатель может найти в сборнике [7]. Методы, которые будут изложены ниже, описаны в статье [8], включенной в упомянутый сборник.

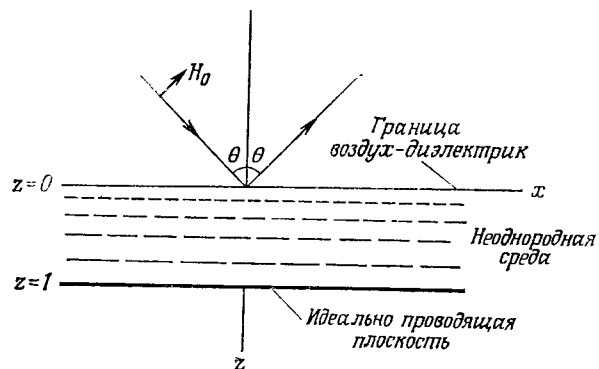
Исследуемую задачу можно сформулировать следующим образом: по заданным рассеивающим свойствам среды надо найти функцию, описывающую характер ее неоднородности. Мы рассмотрим два метода решения этой задачи, один из которых является линейным, а другой нелинейным. На первый взгляд это может показаться странным, так как при наличии выбора между линейным и нелинейным методами решения одной и той же задачи естественно, казалось бы, предпочесть первый метод второму. Однако ниже мы покажем, что описанный здесь линейный подход, хотя и более привлекательный аналитически, является менее эффективным при численном решении. Это связано с тем, что линейный метод приводит к неустойчивым решениям, причем эта неустойчивость носит катастрофический характер. Напротив, нелинейный подход, хотя и не такой изящ-

¹⁾ Геометрооптический подход к решению этой задачи описан в работе [6].

ный, как линейный, позволяет получить вполне приемлемые численные решения для целого ряда обратных задач. Этот подход основывается на использовании метода оптимизации параметров, с которым мы уже несколько раз встречались в этой главе.

2. ЛИНЕЙНЫЙ ПОДХОД

Рассмотрим плоскую волну, падающую на среду, расположенную между плоскостями $z = 0$ и $z = 1$, показатель преломления которой является непрерывной функцией от z . Пусть неоднородность среды описывается величиной относительной



Фиг. 7.22. Падение волны под углом θ на среду с непрерывно изменяющимися вдоль z свойствами, лежащую на идеально проводящей плоскости.

восприимчивости $\kappa(z)$, $0 < z < 1$, не зависящей от x и y . Кроме того, будем считать, что среда лежит на идеально проводящей плоскости, расположенной при $z = 1$, как показано на фиг. 7.22.

Предположим, что электрическое поле падающей волны поляризовано в направлении y . Тогда из уравнений Максвелла нетрудно получить скалярное волновое уравнение для $\psi = E_y$

$$\frac{d^2\psi(z, \beta)}{dz^2} + [k^2\kappa(z) - \beta^2]\psi(z, \beta) = 0, \quad 0 < z < 1, \quad (7.20)$$

с граничным условием $\psi = 0$ при $z = 1$. Параметр β в (7.20) равен $k \sin \theta$, где θ — угол падения зондирующей плоской волны¹⁾ (фиг. 7.22). Задача тогда формулируется следующим образом: найти функцию $\kappa(z)$, если известна зависимость коэффициента отражения плоской волны от угла падения θ .

¹⁾ Если при зондировании используется не плоская волна, а ограниченный источник, то параметр β удобно интерпретировать как волновое число в направлении z для спектральной гармоника поля источника.

Стандартная процедура решения дифференциального уравнения в частных производных типа (7.20) состоит в сведении его к интегральному уравнению. Определим сначала вспомогательную функцию ϕ , которая удовлетворяет уравнению

$$\frac{d^2\phi(z, \beta)}{dz^2} - \beta^2\phi(z, \beta) = 0, \quad (7.21)$$

$$\phi = 0 \quad \text{при} \quad z = 1.$$

Далее умножим уравнения (7.20) и (7.21) на ϕ и ψ соответственно, составим разность полученных выражений и проинтегрируем ее по z от 0 до 1. В результате получим

$$\int_0^1 (\phi\psi'' - \psi\phi'') dz_0 + k^2 \int_0^1 \kappa(z_0)\psi(z_0, \beta)\phi(z_0, \beta) dz_0 = 0. \quad (7.22)$$

Интегрируя по частям первый член в левой части (7.22), имеем

$$\begin{aligned} & [\phi(z_0, \beta)\psi'(z_0, \beta) - \psi(z_0, \beta)\phi'(z_0, \beta)] \Big|_0^1 + \\ & + k^2 \int_0^1 \kappa(z_0)\psi(z_0, \beta)\phi(z_0, \beta) dz_0 = 0. \end{aligned} \quad (7.23)$$

Вспоминая, что обе функции ψ и ϕ равны нулю при $z = 1$, мы заключаем, что значение первого члена на верхнем пределе равно нулю. Кроме того, нам известны поле падающей плоской волны и ее коэффициент отражения при $z \leq 0$. Если взять

$$\phi(z_0, \beta) = \text{sh } \beta(z_0 - 1) \quad (7.24)$$

в качестве решения уравнения (7.21), то значение $(\phi\psi' - \psi\phi')$ при $z = 0$ окажется полностью известным. Пусть

$$-f(\beta) = (\phi\psi' - \psi\phi') \Big|_{z=0} \quad (7.25)$$

есть известная функция. Тогда (7.23) можно переписать в виде

$$k^2 \int_0^1 \kappa(z_0)\psi(z_0, \beta)\phi(z_0, \beta) dz_0 = f(\beta). \quad (7.26)$$

Уравнение (7.26) можно рассматривать как интегральное уравнение для $\kappa(z_0)$; однако оно отличается от обычных интегральных уравнений. Дело в том, что функция, играющая роль ядра этого интегрального уравнения, а именно $\psi(z_0, \beta)\phi(z_0, \beta)$, не является полностью известной, поскольку, согласно (7.26), $\psi(z_0, \beta)$ неявно зависит от $\kappa(z_0)$ и ψ и κ неизвестны при $0 < z_0 < 1$. Другими словами, (7.26) является нелинейным уравнением относительно $\kappa(z_0)$. Тем не менее с помощью определенных

манипуляций, описанных ниже, мы можем (7.26) свести к линейному уравнению.

Считая β и k в уравнении (7.20) независимыми параметрами и сравнивая (7.20) с (7.21), мы можем заключить, что в пределе $k \rightarrow 0$ функция ψ стремится к ϕ с точностью до постоянного множителя, зависящего только от β . При соответствующей нормировке амплитуды падающей волны, являющейся функцией β , этот множитель может быть положен равным единице. Прделав это, мы затем разложим в ряд функции ψ и f в окрестности точки $k = 0$. В результате получаем

$$k^2 \int_0^1 \kappa(z_0) \phi^2(z_0, \beta) dz_0 + k^3 \int_0^1 \kappa(z_0) \psi^{(1)}(z_0, \beta) \phi(z_0, \beta) dz_0 + \dots = \\ = f^{(0)}(\beta) + kf^{(1)}(\beta) + \frac{k^2}{2!} f^{(2)}(\beta) + \frac{k^3}{3!} f^{(3)}(\beta) + \dots, \quad (7.27)$$

где верхние индексы обозначают номера производных ψ и f по k , взятым при $k = 0$. Приравнявая в обеих частях (7.27) члены, содержащие одинаковые степени k вплоть до k^2 , находим

$$f^{(0)}(\beta) = f^{(1)}(\beta) = 0, \quad (7.28)$$

$$\int_0^1 \kappa(z_0) \phi^2(z_0, \beta) dz_0 = f^{(2)}(\beta), \quad (7.29)$$

где

$$\phi(z_0, \beta) = \text{sh } \beta(z_0 - 1).$$

Уравнение (7.28) не дает никакой новой информации, так как оно просто выражает условие, которому удовлетворяет известная функция $f(\beta)$. Уравнение же (7.29) представляет собой требуемое интегральное уравнение для $\kappa(z)$, поскольку ядро $\phi^2(z_0, \beta)$ и неоднородный член в этом уравнении являются известными функциями. Таким образом, мы сможем решить исходную задачу, т. е. найти функцию $\kappa(z_0)$, если сумеем обратить уравнение (7.29).

Однако при численном решении (7.29) обнаруживается, что это уравнение чрезвычайно плохо обусловлено. Оказывается, например, что для нахождения разумного профиля $\kappa(z)$ погрешность неоднородного члена $f^{(2)}(\beta)$ не должна превышать 10^{-10} , что, конечно, совершенно неосуществимо. Естественно, возникает вопрос о причине такой неустойчивости. Ответ на этот вопрос можно найти, изучая поведение собственных значений соответствующего матричного уравнения, получающегося при дискретизации (7.29) обычным методом моментов. Оказывается, что $\lambda_1 \sim 1$, $\lambda_2 \sim 10^{-2}$, $\lambda_3 \sim 10^{-4}$, $\lambda_4 \sim 10^{-6}$, $\lambda_5 \sim 10^{-10}$ и т. д. Известно, что обращение матрицы с таким спектром собственных

значений является крайне неустойчивой операцией, поскольку разложение решения матричного уравнения по собственным векторам содержит n -й член разложения, пропорциональный λ_n^{-1} . Таким образом, при наличии обычных данных измерений, погрешность которых, как правило, порядка нескольких процентов, применение описанного выше линейного подхода приводит к бессмысленным результатам.

Однако полученное нами линейное интегральное уравнение обладает одним важным свойством, которым мы можем воспользоваться. Дело в том, что исследование линейного уравнения дает доказательство единственности решения данной обратной задачи, в то время как из нелинейного уравнения такое доказательство часто получить очень трудно, а иногда просто невозможно.

Для численных же расчетов мы вынуждены отказаться от линейного подхода и искать метод решения исходной нелинейной задачи.

3. РЕШЕНИЕ МЕТОДОМ ОПТИМИЗАЦИИ ПАРАМЕТРОВ

Как можно было видеть по ранее описанным примерам применения метода оптимизации параметров, первый шаг состоит во введении подходящего показателя качества F , зависящего от неизвестных параметров, подлежащих определению. Тогда решение задачи сводится к нахождению минимума функции F , возможно более близкого к нулю.

Для данной обратной задачи функцию F удобно взять в виде

$$F = \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N |(\psi_g[\beta_m, \omega_n, a_j] - \psi_t[\beta_m, \omega_n, a_{jt}])_{z=0}|^2 + \\ + \sum_{m=1}^M \sum_{n=1}^N \left| \frac{d}{dz} (\psi_g[\beta_m, \omega_n, a_j] - \psi_t[\beta_m, \omega_n, a_{jt}])_{z=0} \right|^2. \quad (7.30)$$

Здесь a_j , $j = 1, \dots, J$, — коэффициенты разложения $\kappa(z)$ в области $0 < z < 1$ по подходящей системе известных функций. В качестве таких функций обычно берут функции z^n , так что

$$\kappa(z) = \sum_{j=0}^J a_j z^j, \quad (7.31)$$

и задача сводится к нахождению коэффициентов a_j по заданным значениям падающего и отраженного полей на поверхности $z=0$.

Величины $\psi_g|_{z=0}$ и $d\psi_g/dz|_{z=0}$ считаются известными из измерений, и наш метод состоит в таком подборе пробных параметров a_{jt} , чтобы сумма квадратов разностей между заданными

и пробными значениями ψ на поверхности $z = 0$ и квадратов разностей $d\psi_g/dz|_{z=0}$ и $d\psi_l/dz|_{z=0}$ была меньше определенного малого числа ϵ . Следует отметить, что в (7.30) мы позволили себе изменять не только угол падения спектральной гармоники падающей волны β , но и ее угловую частоту ω .

Определив показатель качества F выражением (7.30), мы можем приступить к минимизации F , используя одну из схем оптимизации параметров. Правда, остается проблема определения ψ_l при заданном выборе совокупности a_{ji} , которая в свою очередь характеризует посредством (7.31) пробный профиль $\kappa_l(z)$. Поскольку функция ψ удовлетворяет основному уравнению (7.20), необходимо решить это уравнение, заменив $\kappa(z)$ на $\kappa_l(z)$, с граничным условием $\psi_l(z) = 0$ при $z = 1$. Обычный способ нахождения ψ_l состоит в интегрировании (7.20) с помощью метода Рунге—Кутты, имеющегося в библиотеке стандартных программ машины ИВМ.

4. ЧИСЛЕННЫЙ СЧЕТ

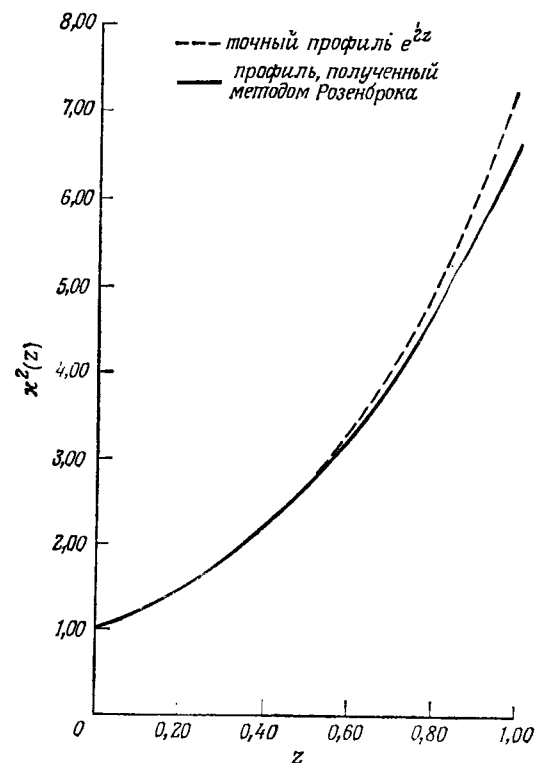
При использовании метода оптимизации параметров для нахождения профиля $\kappa(z)$ возникают следующие вопросы.

1. Моделирование исходных данных. Для испытания пригодности предложенного метода удобно смоделировать измеряемые данные для $\psi_g|_{z=0}$ и $d\psi_g/dz|_{z=0}$ на ЭВМ. Это делается с помощью стандартной процедуры Рунге—Кутты. В этой процедуре предусмотрен критерий точности, который можно принять порядка 10^{-4} , т. е. получить результат с хорошей точностью. Для моделирования ошибок измерений можно на полученные данные наложить случайный шум¹⁾. Уровень этого шума тоже меняется, скажем в пределах от 2 до 10%.

2. Выбор числа ϵ — минимального значения F . В схемах оптимизации счет может быть остановлен либо после N итераций, либо после выполнения критерия $F \leq \epsilon$. Ясно, что, чем ближе F к нулю, тем ближе характеристики пробной среды к истинным. Однако ниоткуда не следует, что с помощью метода оптимизации можно всегда достигнуть истинного минимума функции F при достаточно продолжительном счете. Другими словами, метод оптимизации, вообще говоря, не гарантирует достижения истинного минимума ($F = 0$) за исключением особых случаев, например когда характеристическая функция является квадратичной. В большинстве практических задач удается в лучшем случае достигнуть локального минимума, приемлемость которого

¹⁾ Это можно сделать, например, так же, как в § 3.

проверяется затем из условия, что F должно быть меньше ϵ . При решении всех рассмотренных до сих пор задач по нахождению профиля κ удавалось положить $\epsilon = 10^{-5}$, а в некоторых случаях удавалось достичь значений ϵ порядка 10^{-8} . Тем не менее следует еще раз подчеркнуть, что метод не гарантирует



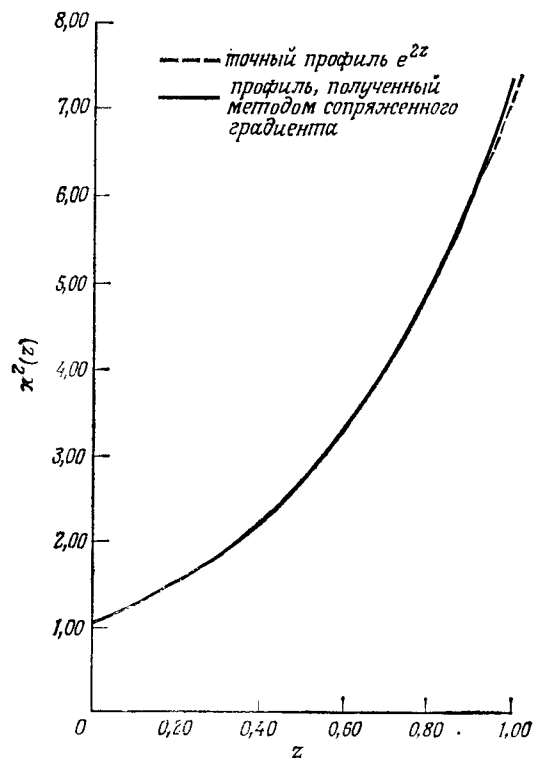
Фиг. 7.23. Профиль относительной восприимчивости $\kappa(z) = e^{2z}$ для слоя, лежащего на идеально проводящей плоскости $z = 1$ (метод Розенброка).

получения требуемого решения после достаточной серии итераций, хотя накопленный до сих пор опыт свидетельствует о том, что всегда удавалось успешно провести вычисления для всех просчитанных профилей κ .

3. Дополнительный критерий успешности алгоритма обращения. Правильность программы обращения необходимо проверять, сравнивая отклик пробной среды с действительным экспериментальным (или смоделированным на ЭВМ) откликом реальной среды. Решение считается приемлемым, если эти отклики

при частных значениях ω_n и β_m совпадают в пределах определенных допусков.

4. Выбор метода оптимизации. Для осуществления процесса минимизации был испытан как метод Розенброка, так и метод



Фиг. 7.24. Профиль относительной восприимчивости $\kappa(z) = e^{2z}$ для слоя, лежащего на идеально проводящей плоскости $z=1$ (метод сопряженного градиента).

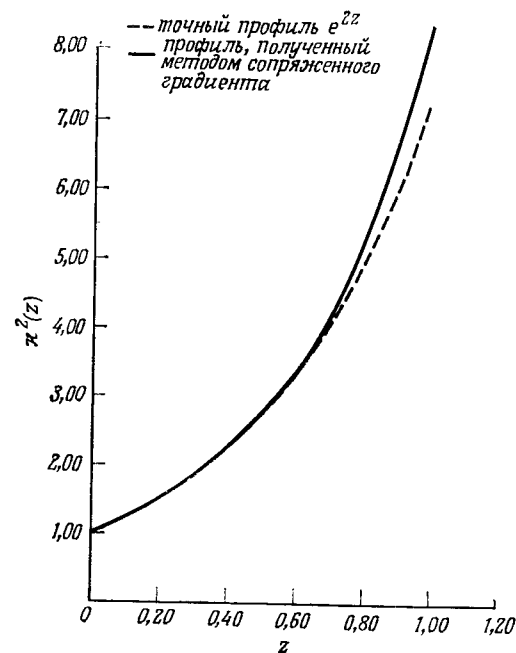
сопряженного градиента. Как видно из описания последнего метода (см. приложение А), при его использовании требуется знание функций F и $\text{grad } F$. Вектор градиента записывается в явном виде следующим образом:

$$(\text{grad } F)^t = \left\{ \frac{\partial F}{\partial a_1}, \frac{\partial F}{\partial a_2}, \dots, \frac{\partial F}{\partial a_J} \right\},$$

где индекс t обозначает транспонирование. Поскольку для пробного профиля $\kappa(z)$ величина ψ определяется численно методом Рунге — Кутты, вектор градиента также приходится находить численно, используя схему численного дифференцирования.

В результате на каждом шаге итерации в методе сопряженного градиента ЭВМ обращается к процедуре Рунге — Кутты в n раз чаще, чем в методе Розенброка. Поэтому счет с помощью метода градиента, как правило, более продолжителен, чем с помощью алгоритма Розенброка. Однако опыт показывает, что метод градиента позволяет получить более точные результаты.

5. Выбор величины J в (7.31). В методах оптимизации увеличение числа членов в разложении $\kappa(z)$ (7.31) не обязательно

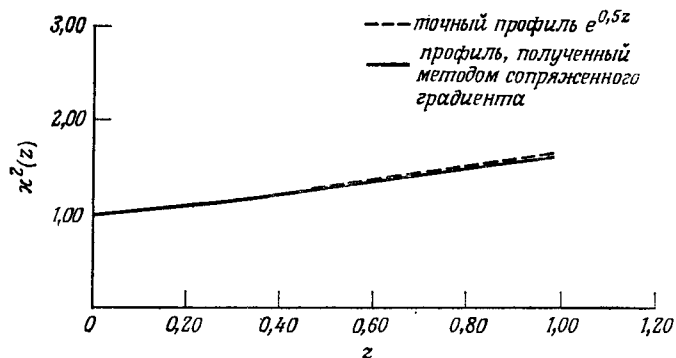


Фиг. 7.25. Профиль относительной восприимчивости $\kappa(z) = e^{2z}$ для слоя, лежащего на идеально проводящей плоскости $z=1$ при наличии шума 10% в измеряемых данных.

приводит к увеличению точности. Оказалось, что выбор $J=4$, т. е. пятичленного разложения, дает решения обратной задачи, которые существенно не меняются в большинстве случаев при увеличении J до шести. Это не означает, что с помощью методов оптимизации невозможно исследовать случаи с большим числом параметров. Например, в некоторых задачах рассеяния, где применялись методы оптимизации, число параметров, подлежащих оптимизации, превышало 200. Однако, поскольку в случае обратных задач минимум характеристической функции обычно

неглубокий, можно найти несколько различных профилей, дающих почти сходные отклики. Поэтому, чтобы предпочесть одно решение другому, необходимо вводить некий критерий гладкости, основанный на дополнительных данных о физических свойствах среды. Один из способов введения такого критерия состоит в ограничении J , т. е. числа членов в разложении $\kappa_i(z)$.

6. Выбор диапазона изменения частоты и (или) угла падения. Можно ожидать, что точность программы обращения будет улучшаться с увеличением числа точек по частоте и углу падения, в которых мы согласуем отклики реальной и пробной сред.



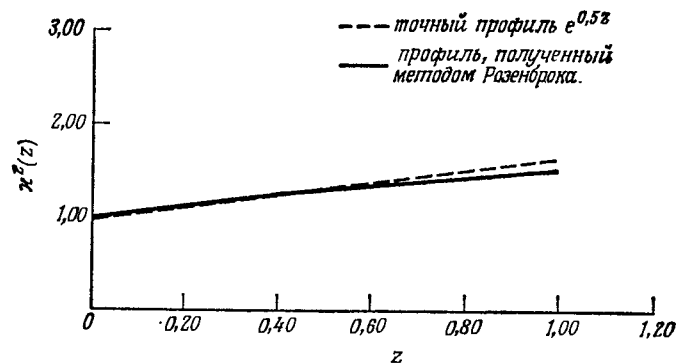
Фиг. 7.26. Профиль относительной восприимчивости $\kappa(z) = e^{0,5z}$ для слоя, лежащего на идеально проводящей плоскости $z=1$ (метод сопряженного градиента).

Однако после достижения хорошего согласования по углу падения результаты существенно не улучшаются, если затем варьировать частоту, при условии, что первоначально выбранная частота не выходит из подходящего диапазона, т. е. не является слишком высокой или слишком низкой. Для большинства исследованных профилей подходящий диапазон волнового числа k лежит в пределах от 0,5 до 2,5. Однако размеры этого диапазона могут зависеть от характера изменения исследуемого профиля.

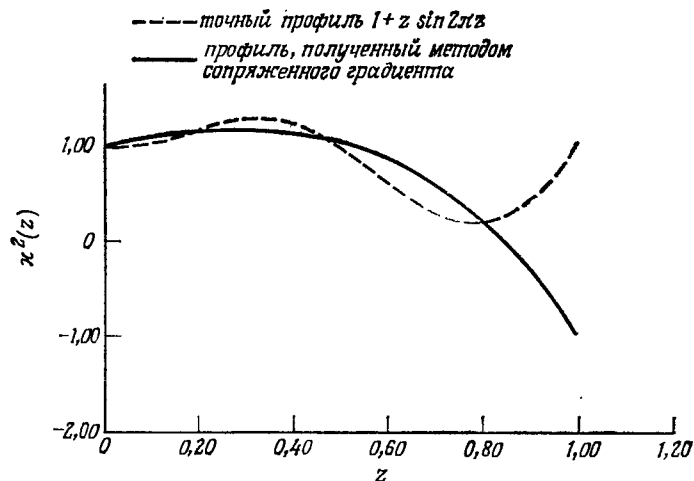
5. РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА

Численные эксперименты проводились для следующих профилей:

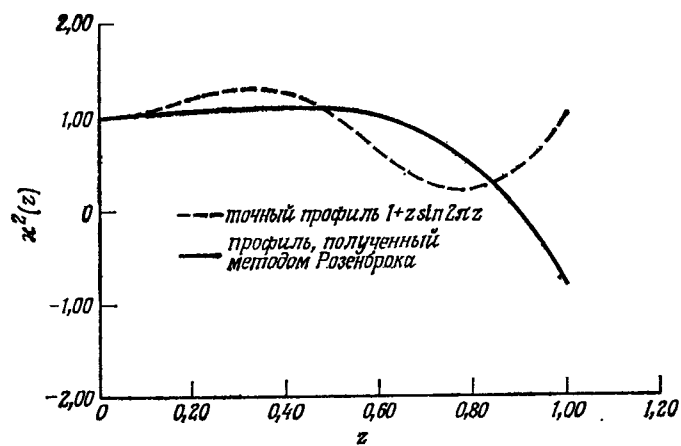
- 1) $\kappa(z) = e^{2z}$,
- 2) $\kappa(z) = e^{0,5z}$,
- 3) $\kappa(z) = 1 + 0,5z$,
- 4) $\kappa(z) = 1 + z \sin(2\pi z)$,
- 5) $\kappa(z) = 1 + \sin(\pi z)$.



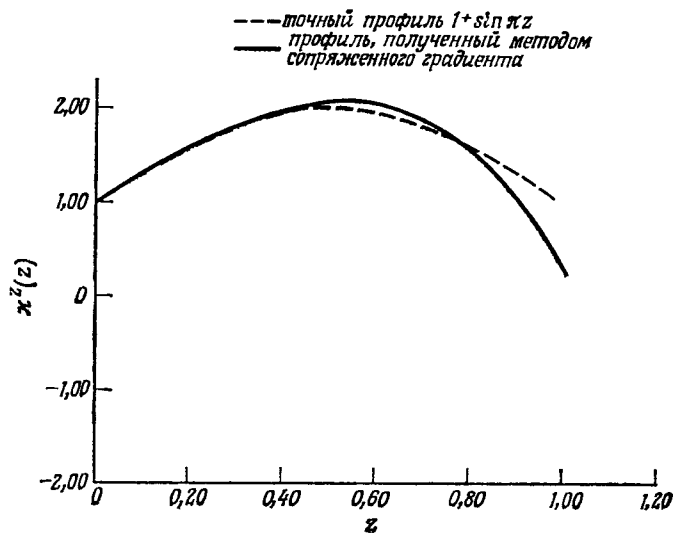
Фиг. 7.27. Профиль относительной восприимчивости $\kappa(z) = e^{0,5z}$ для слоя, лежащего на идеально проводящей плоскости $z=1$ (метод Розенброка).



Фиг. 7.28. Профиль относительной восприимчивости $\kappa(z) = 1 + z \sin 2\pi z$ для слоя, лежащего на идеально проводящей плоскости $z=1$ (метод сопряженного градиента).



Фиг. 7.29. Профиль относительной восприимчивости $\kappa(z) = 1 + z \sin 2\pi z$ для слоя, лежащего на идеально проводящей плоскости $z = 1$ (метод Розенброка)



Фиг. 7.30. Профиль относительной восприимчивости $\kappa(z) = 1 + \sin \pi z$ для слоя, лежащего на идеально проводящей плоскости $z = 1$ (метод сопряженного градиента).

Таблица 7.2
Сравнение значений Ψ и $\partial\Psi/\partial z$ для точного и обращенного профилей при $k = 1$ и при различных углах падения

Угол падения, град	Амплитуда рассеянного Ψ			Амплитуда рассеянного $\partial\Psi/\partial z$		
	точная	полученная методом Розенброка	полученная методом сопряженного градиента	точная	полученная методом Розенброка	полученная методом сопряженного градиента
0	-0,5692	-0,5748	-0,5693	0,1308	0,1293	0,1313
30	-0,5998	-0,6057	-0,5999	0,2108	0,2099	0,2114
60	-0,6637	-0,6699	-0,6638	0,3831	0,3835	0,3837
90	-0,6969	-0,7034	-0,6970	0,4756	0,4766	0,4761

Точный профиль $\kappa(z) = e^{2z}$	
Метод Розенброка	Метод сопряженного градиента
Обращенный профиль Показатель качества Время счета программы, написанной на ФОРТРАНЕ	$\kappa(z) = 1 + 2,16z + 2,16z^2 + 0,58z^3 + 0,726z^4$ $F = 0,89 \cdot 10^{-5}$ 40,11 с
	$\kappa(z) = 1 + 2,07z - 1,64z^2 + 1,42z^3 + 1,32z^4$ $F = 0,136 \cdot 10^{-8}$ 35,15 с

Таблица 7.3

Сравнение значений ψ и $\partial\psi/\partial z$ для точного и обращенного профилей при наличии в измеряемых данных случайного шума от 2 до 10% ($k=1$) и при различных углах падения

Угол падения, град	Амплитуда рассеянного ψ		Амплитуда рассеянного $\partial\psi/\partial z$	
	точная	полученная методом сопряженного градиента	точная	полученная методом сопряженного градиента
0	-0,5692	-0,5584	0,1307	0,1209
30	-0,5999	-0,5887	0,2108	0,1998
60	-0,6638	-0,6518	0,3832	0,3696
90	-0,6970	-0,6847	0,4757	0,4607

Точный профиль $\kappa(z) = e^{2z}$

Метод сопряженного градиента

Обращенный профиль
Показатель качества
Время счета программы, написанной на ФОРТРАНЕ

$$\kappa(z) = 1 + 2,11z + 1,68z^2 + 1,25z^3 + 1,02z^4 + 0,771z^5 + 0,594z^6$$

$$F = 0,294 \cdot 10^{-1}$$

$$133,71 \text{ с}$$

Таблица 7.4

Сравнение значений ψ и $\partial\psi/\partial z$ для точного и обращенного профилей при $k=1$ и различных углах падения

Угол падения, град	Амплитуда рассеянного ψ			Амплитуда рассеянного $\partial\psi/\partial z$		
	точная	полученная методом Розенброка	полученная методом сопряженного градиента	точная	полученная методом Розенброка	полученная методом сопряженного градиента
0	-0,7981	-0,7999	-0,7981	0,4654	0,4650	0,4653
30	-0,8351	-0,8370	-0,8351	0,5686	0,5683	0,5686
60	-0,9120	-0,9140	-0,9120	0,7892	0,7893	0,7892
90	-0,9520	-0,9540	-0,9520	0,9069	0,9062	0,9069

Точный профиль $\kappa(z) = e^{0,5z}$

Метод Розенброка

Метод сопряженного градиента

Обращенный профиль
Показатель качества
Время счета программы, написанной на ФОРТРАНЕ

$$\kappa(z) = 1 + 0,591z - 0,082z^3$$

$$F = 0,67 \cdot 10^{-6}$$

$$113,93 \text{ с}$$

$$\kappa(z) = 1 + 0,495z + 0,134z^2 + 0,337z^3 + 0,557z^4 - 0,162z^5 - 0,163z^6$$

$$F = 0,271 \cdot 10^{-9}$$

$$62,54 \text{ с}$$

Таблица 7.5

Сравнение значений ψ и $\partial\psi/\partial z$ для точного и обращенного профилей при $k=1$ и различных углах падения

Угол падения, град	Амплитуда рассеянного ψ		Амплитуда рассеянного $\partial\psi/\partial z$		
	точная	полученная методом Розенброка	полученная методом сопряженного градиента	точная	полученная методом сопряженного градиента
0	-0,8043	-0,8047	-0,8042	0,4740	0,4739
30	-0,8414	-0,8418	-0,8414	0,5778	0,5778
60	-0,9187	-0,9191	-0,9187	0,7997	0,7997
90	-0,9588	-0,9592	-0,9588	0,9180	0,9180

Точный профиль $\chi(z) = 1 + 0,5z$

	Метод Розенброка	Метод сопряженного градиента
Обращенный профиль	$\chi(z) = 1 + 0,523z - 0,07z^2$	$\chi(z) = 1 + 0,474z - 0,088z^2 - 0,0342z^4 - 0,04z^6$
Показатель качества	$F = 0,29 \cdot 10^{-5}$	$F = 0,49 \cdot 10^{-6}$
Время счета программы, написанной на ФОРТ-РАНЕ	31,49 с	100,12 с

Таблица 7.6

Сравнение значений ψ и $\partial\psi/\partial z$ для точного и обращенного профилей при $k=1$ и различных углах падения

Угол падения, град	Амплитуда рассеянного ψ		Амплитуда рассеянного $\partial\psi/\partial z$		
	точная	полученная методом Розенброка	полученная методом сопряженного градиента	точная	полученная методом сопряженного градиента
0	-0,8630	-0,8552	-0,8627	0,5317	0,5313
30	-0,9017	-0,8938	-0,9015	0,6410	0,6408
60	-0,9822	-0,9741	-0,9823	0,8744	0,8746
90	-1,024	-1,016	-1,024	0,9988	0,9992

Точный профиль $\chi(z) = 1 + z \sin 2\lambda z$

	Метод Розенброка	Метод сопряженного градиента
Обращенный профиль	$\chi(z) = 1 + 0,158z + 0,962z^2 - 0,894z^3 - 1,98z^4$	$\chi(z) = 1 + 1,04z - 1,08z^2 - 1,1z^3 - 0,83z^4$
Показатель качества	$F = 0,99 \cdot 10^{-3}$	$F = 0,94 \cdot 10^{-6}$
Время счета программы, написанной на ФОРТРАНЕ	70,21 с	85,55 с

Таблица 7.7

Сравнение значений ψ и $\partial\psi/\partial z$ для точного и обращенного профилей при $k=1$ и различных углах падения

Угол падения, град	Амплитуда рассеянного ψ		Амплитуда рассеянного $\partial\psi/\partial z$	
	точная	полученная методом сопряженного градиента	точная	полученная методом сопряженного градиента
0	-0,7283	-0,7282	0,2864	0,2861
30	-0,7036	-0,7035	0,3821	0,3820
60	-0,8371	-0,8371	0,5874	0,5876
90	-0,8753	-0,8754	0,6971	0,6974

Точный профиль $x(z) = 1 + \sin \pi z$

	Метод сопряженного градиента
Обращенный профиль Показатель качества Время счета программы, написанной на ФОР- ТРАНЕ	$x(z) = 1 + 3,06z - 0,823z^2 - 1,51z^3 - 1,47z^4$ $F = 0,531 \cdot 10^{-6}$ 98,5 с

На фиг. 7.23—7.30 представлены точные и найденные обращением профили, а в табл. 7.2—7.7 приведены некоторые относящиеся к ним данные. Полученные результаты подтверждают сделанное выше замечание о том, что метод сопряженного градиента превосходит по точности метод Розенброка, хотя в большинстве случаев требует более длительного счета. Сравнение фиг. 7.24 и 7.25 показывает что для простых профилей результаты мало чувствительны к шумам в данных измерений.

Из графиков, представленных на фиг. 7.28 и 7.29 видно, что сложные профили, несколько раз меняющие свой наклон, обращать трудно. При этом, однако, существенно, что отклик обращенной среды достаточно хорошо совпадает с откликом реальной среды (см. табл. 7.6). Таким образом, можно заключить, что метод оптимизации все же достигает своей цели, причем при этом проявляется тенденция сглаживания колебаний профиля $x(z)$ реальной среды.

Наконец, следует отметить, что этот метод пригоден не только для сред с непрерывно изменяющимися свойствами, но и для слоистых сред. Его можно также обобщить на случай других геометрий, например цилиндрической или сферической. Некоторые полезные результаты, относящиеся к этим случаям, были уже получены.

§ 6. ВОССТАНОВЛЕНИЕ ВОЛНОВЫХ ФРОНТОВ МАТРИЧНЫМИ МЕТОДАМИ

1. ВВЕДЕНИЕ

В § 3 мы ознакомились с «обратной задачей» восстановления поля в раскрыве антенны по заданному полю излучения. Был развит голографический метод решения такой задачи, в котором использовалось простое приближение для обращения ядра соответствующего интегрального уравнения, имеющего вид

$$g(y) = \int_{-a}^a K(x, y) f(x) dx, \quad -b < y < b. \quad (7.32)$$

Однако, как отмечалось в § 3, такое приближенное обращение справедливо лишь в том случае, когда размеры раскрыва и плоскости регистрации велики по сравнению с длиной волны. Если же эти условия не выполняются, то приходится искать более точный метод обращения ядра интегрального уравнения. Такое обращение можно осуществить, преобразуя обычным способом, например с помощью метода моментов, интегральное уравнение в матричное. Тогда решение может быть в принципе найдено численным обращением полученной матрицы. Однако, как отмечалось в последнем параграфе, такой подход не всегда дает устойчивое решение, т. е. небольшие ошибки в исходных данных могут привести к очень большим возмущениям в решении, если оператор обращения не является ограниченным¹⁾.

Прежде чем перейти к описанию метода, предложенного в работе [9] для решения неустойчивых или, как их еще назы-

¹⁾ Оператор A называется ограниченным, если существует такое положительное число M , что выполняется условие $\|Ax\| \leq M\|x\|$ для всех x из области определения A . Если такого положительного числа M не существует, то оператор A называется неограниченным. Символ $\|h\|$ означает норму функции h в смысле L^2 , т. е.

$$\|h\|^2 = \int_{-a}^a h(x) h^*(x) dx,$$

где h^* — величина, комплексно сопряженная h .

вают, некорректных задач, следует заметить, что подобные задачи возникают не только в связи с описанной выше проблемой восстановления волновых фронтов, но и при обработке данных, получаемых в целом ряде других экспериментов по дистанционному зондированию. Поэтому полезно рассмотреть вместо (7.32) более общее уравнение. Рассмотрим уравнение

$$Tf = g, \quad (7.33)$$

где оператор T и функция g заданы и требуется обращением T определить функцию f . Нас особенно интересуют случаи, когда задача является неустойчивой, т. е. когда погрешности в определяемой функции f становятся неприемлемо большими, даже если различие между точным полем g и измеренным полем g_v удовлетворяет условию $\|g_v - g\| < \nu$, где ν — малое положительное число.

2. АНАЛИТИЧЕСКАЯ ОСНОВА МЕТОДА

Описываемый здесь метод решения основан на идее регуляризации, предложенной Тихоновым [10]. Введем функционал

$$M(f, g_v; \alpha) = \|Tf - g_v\|^2 + \alpha W[f], \quad (7.34)$$

$$W[f] = C_0 \|f\|^2 + C_1 \|f'\|^2.$$

Здесь α — положительное число, которое в дальнейшем будет называться параметром регуляризации; оно играет очень важную роль в последующем изложении. Штрих над функцией f обозначает производную по аргументу, а C_0 и C_1 — положительные константы.

Сошлемся теперь на теорему Тихонова, доказанную в его работе [10] и состоящую в том, что для каждой квадратично интегрируемой функции g_v существует единственная непрерывная и дифференцируемая функция $f_{\alpha v}$, которая при заданном значении α минимизирует функционал M , и что эта функция дает устойчивое решение. Отметим прежде всего, что при $\alpha = 0$ и $g_v = g$ минимальное значение M тождественно равно нулю и достигается только в том случае, когда f удовлетворяет уравнению (7.33). Другими словами, минимизация M относительно функции f дает точное решение нашей задачи, когда регистрируемая функция g свободна от шумов. Идея введения члена $\alpha W[f]$ в (7.34) состоит в подавлении сильных осцилляций в решении, возникающих при прямом матричном обращении f с помощью (7.33) в реальных условиях, когда известна не точная функция g , а лишь $g_v (= g + \text{шумы})$. Сильно осцилляционные решения неприемлемы из физических соображений, поэтому приходится налагать ограничение на f и f' при отыскании решения.

Предположим, что функционал M минимален для заданного значения α при $f = f_{\alpha v}$, так что первая вариация M обращается в нуль. Тогда, дифференцируя выражение для M , получаем уравнение, которому удовлетворяет функция $f_{\alpha v}$:

$$Lf_{\alpha v} = T^+ g_v, \quad (7.35)$$

$$L = T^+ T + \alpha (C_0 I - C_1 D^2); \quad (7.36)$$

здесь T^+ — оператор, сопряженный T , I — единичный оператор и D^2 — оператор второй производной.

Решение уравнения (7.35) формально можно записать в виде

$$f_{\alpha v} = L^{-1} T^+ g_v = R_{\alpha v} g_v \quad (7.37)$$

и использовать его вместо прямого решения $T^{-1} g_v$ в качестве искомого решения обратной задачи при наличии измеренных на опыте данных.

В работе [9] было показано, что при $C_0 = 1$ и $C_1 = 0$ имеем ²⁾

$$\|f_{\alpha v} - f_{\alpha}\| \leq \nu / (2\sqrt{\alpha}). \quad (7.41)$$

Кроме того, если $\|f_{\alpha} - f\| < \gamma$, то при $C_0 = 1$, $C_1 = 0$ и $\nu = 0$ (т. е. измеренные данные не содержат шумов)

$$\gamma \leq \frac{\alpha}{\alpha + \lambda_N} \|f\|, \quad (7.42a)$$

¹⁾ Для интегрального уравнения (7.32) оператор T^+ записывается в следующем явном виде:

$$T^+ g = \int_{-b}^b K^*(x, y) g(y) dy, \quad (7.38)$$

где K^* комплексно сопряжено K . Оператор $T^+ T$, действующий на функцию f , имеет вид

$$T^+ T f = \int_{-a}^a \rho(x, x') f(x') dx', \quad (7.39)$$

где

$$\rho(x, x') = \int_{-b}^b K^*(x, y) K(x', y) dy. \quad (7.40)$$

²⁾ Здесь f_{α} — значение функции f при отсутствии ошибок в g . — Прим. ред.

где λ_N — наибольшее собственное значение оператора T^+T . При $\gamma \ll \|f\|$

$$\alpha \leq \lambda_N \gamma / \|f\|. \quad (7.426)$$

Уравнения (7.42а) и (7.42б) определяют верхний предел значений α . Отметим, что для применения этих уравнений требуется оценить норму решения $\|f\|$, а также норму ошибки, вносимой процедурой регуляризации ($\gamma \neq 0$).

Можно также вычислить верхнюю границу для $\|f_{\alpha\gamma} - f\|$. Она определяется выражением

$$\|f_{\alpha\gamma} - f\| \leq \frac{\nu}{2\sqrt{\alpha}} + \frac{\alpha}{\alpha + \lambda_N} \|f\|. \quad (7.43)$$

Если мы хотим ограничить эту ошибку так, чтобы норма отклонения регуляризованного решения при наличии шумов в измеряемых данных была меньше μ , то для α должно выполняться следующее неравенство [9]:

$$\alpha \geq \frac{1}{4} \left(\frac{\nu}{\mu - \gamma} \right)^2. \quad (7.44)$$

Неравенство (7.43) гарантирует, что $\|f_{\alpha\gamma} - f\| \leq \nu$, а неравенство (7.44) — что $\|f_{\alpha\gamma} - f\| \leq \mu$. Эти неравенства позволяют получить грубую оценку величины α при нахождении $f_{\alpha\gamma}$.

Чтобы лучше оценить преимущество применения соотношения (7.37) вместо обычной процедуры обращения, полезно рассмотреть проведенный для этого численный эксперимент.

3. ЧИСЛЕННЫЙ ЭКСПЕРИМЕНТ

Численный эксперимент проводился следующим образом. Мы приняли, что ядро $K(x, y)$ уравнения (7.32) имеет вид ядра в преобразовании Фурье $e^{2\pi ixy}$. Размер объекта был принят равным двум длинам волн ($a = 1$), а раскрыв в плоскости регистрации занимал всю видимую область ($b = 1$). Неискаженное регистрируемое поле g численно находилось из (7.32) по заданной пробной функции f . Функция f задавалась в N равноотстоящих точках, а для нахождения квадратной матрицы, необходимой для приближенного вычисления интегрального оператора T , использовалась треугольная аппроксимация (см., например, [11]). Функция g тоже вычислялась в M равноотстоящих точках. Далее ошибки измерения моделировались введением случайных гауссовых ошибок независимо в амплитуду и фазу поля g . Все необходимые величины определялись с помощью

следующих формул:

$$g = \int_{-1}^1 f(x) e^{2\pi ixy} dx, \quad -1 < y < 1,$$

$$\{\tilde{g}\} = \{g_1, \dots, g_m, \dots, g_M\},$$

$$\{\tilde{g}_\nu\} = \{g_{\nu 1}, \dots, g_{\nu m}, \dots, g_{\nu M}\},$$

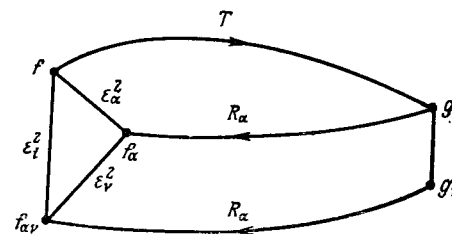
$$g_{\nu m} = g_m (1 + \eta_m) e^{i\pi \eta'_m},$$

$$E(\eta_m) = \text{мат. ожидание } \eta_m = 0,$$

$$E(\eta'_m) = 0,$$

$$E(\eta_m^2) = E(\eta'^2_m) = \eta^2.$$

Затем находились решения f по формуле (7.37) как для случая неискаженного поля g , так и для поля g_ν при наличии ошибок. Эти решения обозначались соответственно f_α и $f_{\alpha\nu}$.



Фиг. 7.31. Схематическое представление источников и полей, а также различных параметров ошибок.

Далее определялись следующие параметры, характеризующие ошибки:

$$\epsilon_\alpha^2 = \|f_\alpha - f\|^2 / \|f\|^2, \quad (7.45)$$

$$\epsilon_\nu^2 = \|f_{\alpha\nu} - f_\alpha\|^2 / \|f\|^2, \quad (7.46)$$

$$\epsilon_t^2 = \|f_{\alpha\nu} - f\|^2 / \|f\|^2. \quad (7.47)$$

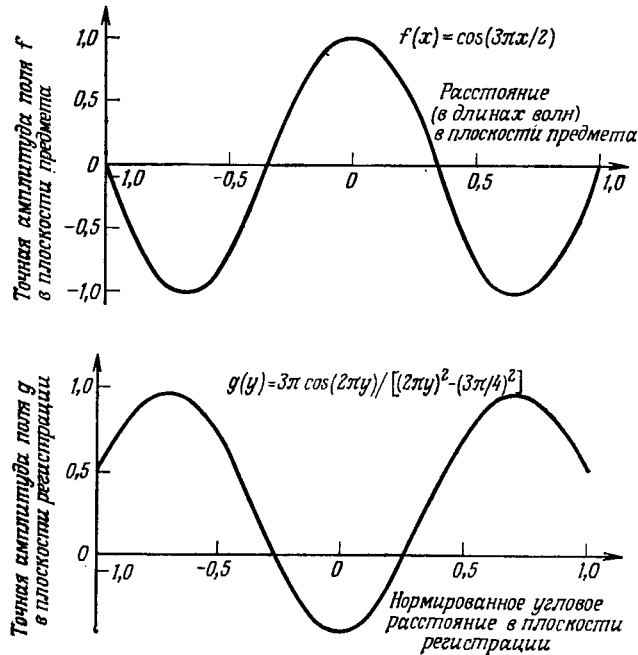
Смысл этих параметров таков. Величина ϵ_α^2 есть нормированная ошибка, появляющаяся в случае искаженных шумами данных из-за введения отличного от нуля параметра регуляризации. Параметр ϵ_ν^2 есть нормированная ошибка, характеризующая отклонение обращенной функции f_α при отсутствии шумов от реальной функции $f_{\alpha\nu}$, получаемой обращением возмущенных данных g_ν ; при этом f_α и $f_{\alpha\nu}$ вычисляются при отличном от нуля параметре α . Наконец, ϵ_t^2 характеризует нормированное

отклонение $f_{\alpha v}$ от точной функции f . Эти параметры ошибок вычислялись при каждом выбранном значении α . Весь процесс повторялся для P наборов шумовых возмущений, и находились средние значения ϵ_v^2 и ϵ_f^2 .

На фиг. 7.31 схематически представлены различные величины f , g , f_{α} , g_{α} и т. д. и определенные выше параметры ошибок. Изучение зависимости этих параметров ошибок от α позволяет предложить процедуру выбора параметра регуляризации α . Она описана ниже вместе с некоторыми результатами численных расчетов.

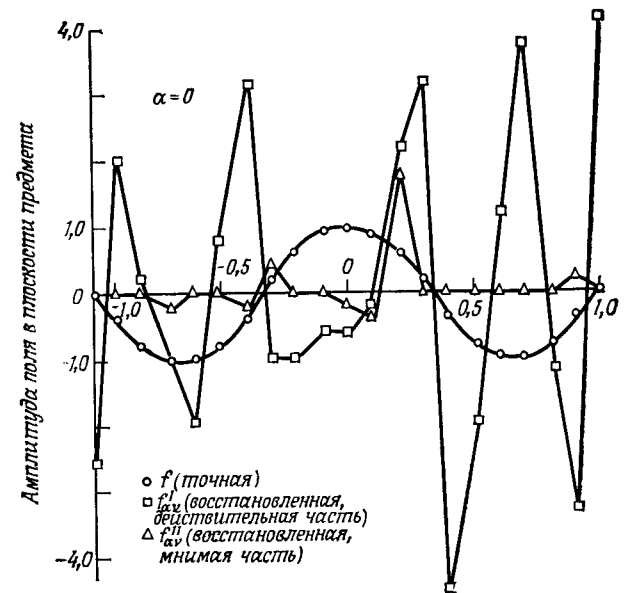
4. РЕЗУЛЬТАТЫ СЧЕТА

На фиг. 7.32 показаны принятая функция f и соответствующая функция g , найденная с помощью уравнения (7.32). Числа

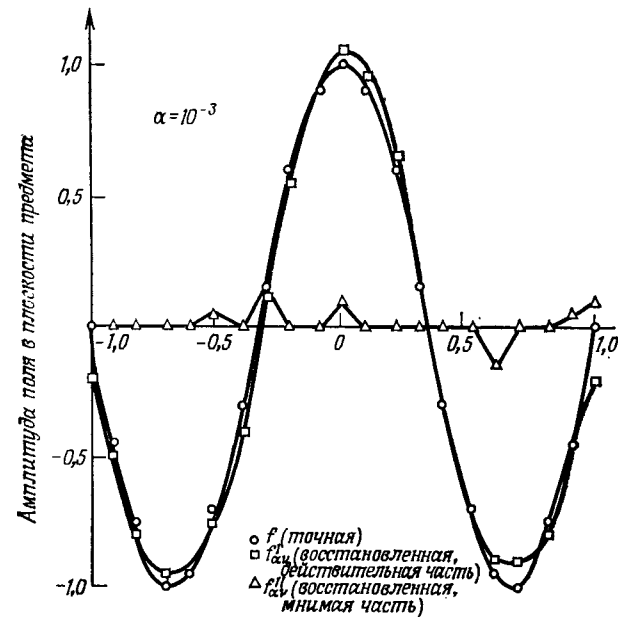


Фиг. 7.32. Точные поля в плоскости предмета и в плоскости регистрации.

N и M полагались равными 21, т. е. функции f и g определялись в 21 точке. Для числа наборов шумовых возмущений P принято значение 25, и один из этих 25 наборов брался для построения восстановленной функции $f_{\alpha v}$, соответствующей возмущенным исходным данным. Для сравнения на фиг. 7.33—7.35



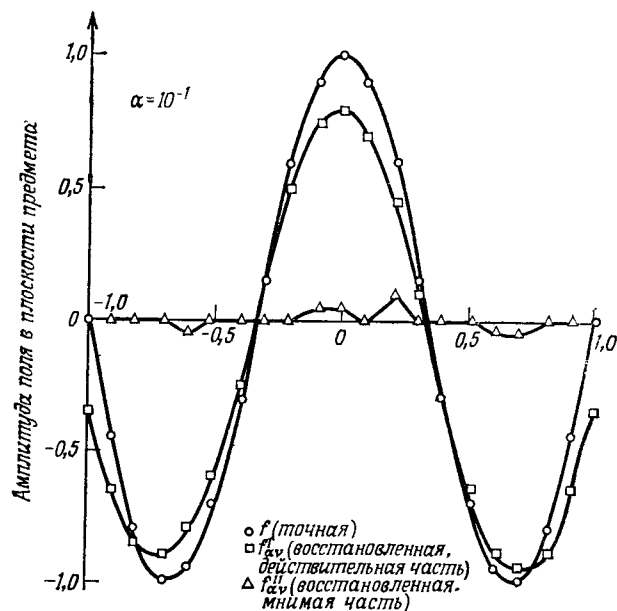
Фиг. 7.33. Действительная и мнимая части восстановленного поля в плоскости предмета при наличии шума 5% в измеряемых данных при $\alpha = 0$.



Фиг. 7.34. Действительная и мнимая части восстановленного поля в плоскости предмета при наличии шума 5% в измеряемых данных при $\alpha = 10^{-3}$.

приведены восстановленные функции $f_{\alpha v}$ для различных значений α вместе с точной функцией f . Кроме того, на фиг. 7.36 представлены графики зависимости параметров ошибок $\bar{\epsilon}_\alpha^2$, $\bar{\epsilon}_v^2$ и $\bar{\epsilon}_t^2$ от α .

На фиг. 7.33 видно, что при $\alpha = 0$ решение носит сильно осцилляторный характер. Это свидетельствует о том, что опера-

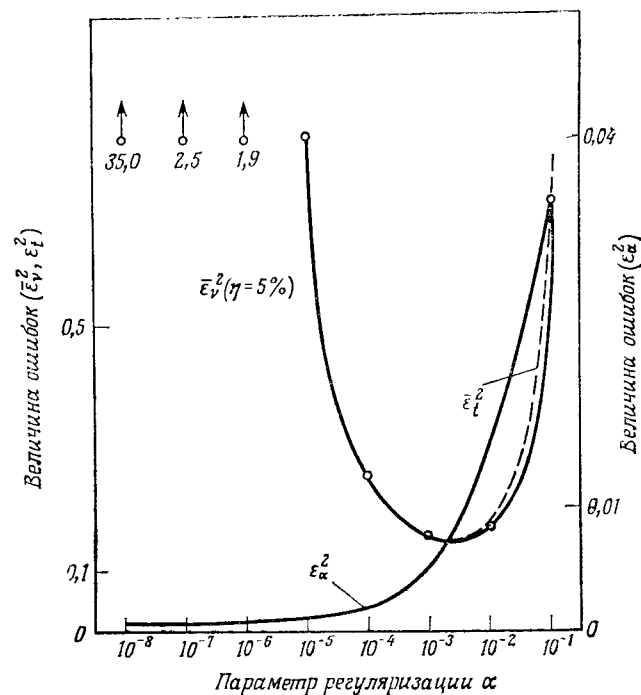


Фиг. 7.35. Действительная и мнимая части восстановленного поля в плоскости предмета при наличии шума 5% в измеряемых данных при $\alpha = 10^{-1}$.

тор T^{-1} является неограниченным и необходимо использовать процедуру регуляризации для получения разумного решения.

Как видно на фиг. 7.36, качество восстановления улучшается с ростом α при малых положительных значениях α , о чем свидетельствует уменьшение ошибок $\bar{\epsilon}_\alpha^2$ и $\bar{\epsilon}_t^2$ вплоть до значений α порядка 10^{-3} . Одновременно с ростом α увеличивается значение ϵ_α . Этого и следовало ожидать, поскольку при отсутствии шумов рост α приводит к тому, что решение f_α все больше отходит от точного решения f . Однако, как видно из фиг. 7.36, полезность процедуры регуляризации при наличии шумов становится очевидной: в реальных условиях ошибки восстановленного поля сильно нарастают с уменьшением α при значениях α меньше 10^{-4} .

Заметим, что, как следует из фиг. 7.34—7.36, введение небольшого α улучшает результаты, но с увеличением α эти результаты не обязательно становятся еще лучше. Плато на графиках $\bar{\epsilon}_v^2$ и $\bar{\epsilon}_t^2$ достигается вблизи $\alpha = 10^{-3}$, после чего ошибки снова растут. При этом восстановленное поле, которое



Фиг. 7.36. Зависимость параметров ошибок $\bar{\epsilon}_\alpha^2$, $\bar{\epsilon}_v^2$ и $\bar{\epsilon}_t^2$ от параметра регуляризации α .

очень близко к точному полю при $\alpha \approx 10^{-3}$, начинает отходить от точного решения при значениях α , больших 10^{-2} . Следует, однако, отметить, что если при малых α функция $f_{\alpha v}$ носит резко осцилляторный характер, то при больших значениях параметра регуляризации восстановленное поле оказывается сильно сглаженным. Это чрезмерное сглаживание проявляется в резком увеличении ошибки $\bar{\epsilon}_\alpha^2$, что свидетельствует о появлении существенных погрешностей в процедуре обращения даже в случае неискаженных исходных данных, если параметр α слишком большой.

На основании всех этих соображений можно предложить следующую регулярную процедуру выбора значения α . Сначала

мы проверяем поведение восстановленного решения $f_{\alpha v}$ при очень малых значениях α , чтобы установить, не является ли оно неустойчивым для заданной функции g_v . Если оно оказывается неустойчивым, то мы увеличиваем α небольшими шагами до тех пор, пока решение не становится устойчивым и не сохраняется в таком состоянии. При дальнейшем увеличении α можно заметить, что решение начинает чрезмерно сглаживаться. Если одновременно вычислять функцию $g_{\alpha v} = T f_{\alpha v}$, то мы обнаружим, что после некоторого значения α функция $g_{\alpha v}$ начнет сильно отклоняться от g_v . Это говорит о том, что наше решение «перерегуляризовано», поэтому мы начинаем теперь уменьшать α вплоть до значения, когда наступает согласование $g_{\alpha v}$ и g_v , а решение $f_{\alpha v}$ остается еще устойчивым. Значение α , при котором выполняется этот критерий, и есть искомое значение α .

Наконец, значение параметра α можно оценить заранее, если статистика шумов в данных измерений нам известна или ее можно получить из данных измерений. Подробности таких оценок читатель может найти в работе [9].

Методы оптимизации

Имеется целый ряд различных схем минимизации функции нескольких переменных. Подробное описание разнообразных аналитических и численных методов, на которых базируются эти схемы, содержится в прекрасной книге Ковалика и Осборна [12].

Мы лишь кратко опишем последовательность операций для трех различных алгоритмов оптимизации.

Метод поворота системы координат Розенброка

Для минимизации функции $G(\mathbf{x})$, где $\tilde{\mathbf{x}} = \{x_1, x_2, \dots, x_n\}$, необходимо осуществить следующие действия:

1. Выбираем n ортогональных векторов $\xi_1, \xi_2, \dots, \xi_n$, выходящих из произвольной точки.

2. Образует $\mathbf{p}_{\text{стар}} = \lambda \xi_k^i = \mathbf{p}_{\text{нов}}$, где λ — произвольная длина вдоль каждой компоненты ξ_k .

3. Если переход оказался успешным, т. е. если $G(\mathbf{p}_{\text{нов}}) \leq G(\mathbf{p}_{\text{стар}})$, то умножаем λ на $\alpha > 1$. Если же переход оказался неудачным, т. е. $G(\mathbf{p}_{\text{нов}}) > G(\mathbf{p}_{\text{стар}})$, то умножаем λ на $-\beta$, где $0 < \beta < 1$.

4. Повторяем то же самое, выбирая новые точки, до тех пор, пока после успешного перехода не последует неудачный.

5. Повторяем всю процедуру вдоль направления ξ_{k+1} .

6. После завершения этих процедур вдоль всех осей этап поиска считается законченным.

7. Пусть d_k — наибольшая удачная длина λ в направлении ξ_k . Образует тогда векторы \mathbf{A}_k , определяемые формулами

$$\mathbf{A}_1 = d_1 \xi_1 + d_2 \xi_2 + \dots + d_n \xi_n,$$

$$\mathbf{A}_2 = \quad d_2 \xi_2 + \dots + d_n \xi_n,$$

$$\vdots$$

$$\mathbf{A}_m = \quad \quad \quad d_n \xi_n.$$

8. Вводим новые единичные ортогональные векторы ξ_k следующим образом. Определяем

$$\mathbf{B}_1 = \mathbf{A}_1,$$

$$\mathbf{B}_2 = \mathbf{A}_2 - \mathbf{A}_1 \langle \mathbf{A}_1, \mathbf{A}_2 \rangle / |\mathbf{A}_1|^2,$$

⋮

$$\mathbf{B}_m = \mathbf{A}_m - \sum_{j=1}^{m-1} \mathbf{A}_j \langle \mathbf{A}_j, \mathbf{A}_m \rangle / |\mathbf{A}_j|^2.$$

Тогда m ортогональных векторов, которые используются на следующем этапе, таковы:

$$\xi_1 = \mathbf{B}_1 \cdot \frac{1}{|\mathbf{B}_1|}, \quad \xi_2 = \mathbf{B}_2 \cdot \frac{1}{|\mathbf{B}_2|}, \quad \dots, \quad \xi_m = \mathbf{B}_m \cdot \frac{1}{|\mathbf{B}_m|}.$$

9. Процедура поиска, описанная в пунктах 1—5, повторяется с новыми базисными векторами.

10. Вся процедура продолжается до тех пор, пока расстояние d_k вдоль оси ξ_k не становится меньше числа ε , выбранного заранее в качестве критерия остановки счета.

Метод быстрого спуска

1. Принимаем в качестве вектора \mathbf{x} какой-либо начальный \mathbf{x}_i .
2. Вычисляем вектор градиента $\text{grad } G(\mathbf{x}_i) \equiv \mathbf{g}_i$ аналитически или численно.
3. Образует $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \lambda \mathbf{g}_i$, где λ — величина шага.
4. Находим λ_i из условия минимума $G(\mathbf{x}_{i+1}(\lambda))$.
5. Получаем новые $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i - \lambda \mathbf{g}_i$.
6. Заменяем \mathbf{x}_{i+1} на \mathbf{x}_i и возвращаемся к пункту 2.
7. Повторяем весь процесс до тех пор, пока либо $G(\mathbf{x}_i)$ не станет меньше ε_1 , либо $\text{grad } G(\mathbf{x}_i)$ — меньше ε_2 , либо не выполнятся оба условия одновременно. Значения ε_1 и ε_2 выбираются заранее и служат для остановки счета.

Метод сопряженного градиента

1. Начинаем с какого-то начального вектора \mathbf{x}_i .
2. Вычисляем $\text{grad } G(\mathbf{x}_i) \equiv \mathbf{g}_i$.
3. Образует

$$\mathbf{s}_i = -\mathbf{g}_i \quad \text{при } i=0,$$

$$\mathbf{s}_i = -\mathbf{g}_i + \frac{\tilde{\mathbf{g}}_i \mathbf{g}_i}{\tilde{\mathbf{g}}_{i-1} \mathbf{g}_{i-1}} \mathbf{s}_{i-1} \quad \text{при } i > 0.$$

4. Вводим $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{s}_i$.
5. Находим λ_i из условия минимума $G(\mathbf{x}_{i+1}(\lambda))$.
6. Получаем новый $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{s}_i$.
7. Заменяем \mathbf{x}_i на \mathbf{x}_{i+1} , возвращаемся к пункту 2 и повторяем весь процесс до тех пор, пока G , $\text{grad } G$ или обе функции одновременно не станут удовлетворять критерию остановки счета.

Метод Дэвидона

1. Начинаем с начального вектора \mathbf{x}_i .
2. Вычисляем $\text{grad } G(\mathbf{x}_i) = \mathbf{g}_i$.
3. Образует

$$\mathbf{s}_i = -\mathbf{g}_i \quad \text{при } i=0 \quad (H_{i-1} = I),$$

$$\mathbf{s}_i = -H_{i-1} \mathbf{g}_i \quad \text{при } i > 0.$$

4. Вводим

$$\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda \mathbf{s}_i.$$

5. Находим λ_i из условия минимума $G(\mathbf{x}_{i+1}(\lambda))$.
6. Получаем новые $\mathbf{x}_{i+1} = \mathbf{x}_i + \lambda_i \mathbf{s}_i$.
7. Вычисляем $\mathbf{z}_i = \mathbf{g}_{i+1} - \mathbf{g}_i$.
8. Вычисляем

$$H_i = H_{i-1} + \lambda_i \frac{\tilde{\mathbf{z}}_i \mathbf{z}_i}{\tilde{\mathbf{g}}_i H_{i-1} \mathbf{g}_i} - \frac{H_{i-1} \mathbf{z}_i \tilde{\mathbf{z}}_i H_{i-1}}{\tilde{\mathbf{z}}_i H_{i-1} \mathbf{z}_i}.$$

9. Заменяем \mathbf{x}_{i+1} на \mathbf{x}_i , возвращаемся к пункту 2 и повторяем весь процесс до тех пор, пока G , $\text{grad } G$ или обе функции одновременно не станут удовлетворять критерию остановки счета.

ПРИЛОЖЕНИЕ Б

Применение алгоритма быстрого преобразования Фурье [13, 14]

Дискретное преобразование Фурье (ДПФ)

Интегральное преобразование Фурье в одномерном случае записывается в виде

$$F(\xi) = \int dx e^{i2\pi\xi x} f(x). \quad (7.48)$$

Этот интеграл можно численно определить при N значениях ξ по значениям подынтегрального выражения для N значений x с помощью обычных квадратурных формул. При применении всех этих формул требуется N^2 машинных операций. Однако ввиду периодичности ядра преобразования Фурье удобна следующая формула:

$$F_m \approx \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{i2\pi mn/N} f_n, \quad -\frac{N}{2} \leq m < \frac{N}{2}, \quad (7.49)$$

где

$$f_n = f(ns), \quad F_m = F\left(\frac{m}{T}\right). \quad (7.50)$$

Величина T (область изменения x) связана с периодом s выборки по x соотношением

$$N = \frac{T}{s}. \quad (7.51)$$

Формулу (7.49) называют формулой дискретного преобразования Фурье (ДПФ). Основное преимущество этой формулы перед другими квадратурными формулами состоит в том, что для нее существует алгоритм, который при $N = 2^p$, где p — целое число, позволяет вычислить (7.49) с помощью всего лишь $2N \log_2 N$ машинных операций вместо N^2 машинных операций, требуемых при прямом вычислении. Выигрыш в машинном времени может стать существенным даже при не очень больших значениях N ($\sim 10^4$). Термин «быстрое преобразование Фурье» (БПФ) относится к формуле ДПФ, если она вычисляется с помощью указанного быстрого алгоритма.

Чтобы правая часть (7.49) хорошо аппроксимировала $F(\xi)$ (левую часть) в выбранных точках, необходим правильный выбор величин T и s , который отнюдь не очевиден.

Предположим, что функция $f(x)$ отлична от нуля на конечном отрезке порядка a , а ее фурье-образ существенно отличен от нуля в полосе порядка b , т. е.

$$f(x) = 0, \quad |x| > a \quad \text{и} \quad F(\xi) \approx 0, \quad |\xi| > b.$$

Тогда для использования ДПФ нужно выполнить следующие операции:

а. Выбрать $s < 1/b$, чтобы минимизировать ошибку, обусловленную дискретизацией f (тогда правая часть (7.49) \approx левой части).

б. Выбрать $T > a$, чтобы функция $F(\xi)$ надежно получалась из F_n . Согласно теореме отсчетов (теореме Котельникова), это всегда можно осуществить с помощью фильтра. Но если величина T существенно превосходит a , то $F(\xi)$ получается из F_n прямой интерполяцией.

в. Положить $N = T/s = 2p$, где p — целое число.

г. Найти значения $f(x)$ при $x = ns$, где $-N/2 \leq n < N/2$, т. е. получить f_n .

д. Вычислить F_m с помощью БПФ при $-N/2 \leq m < N/2$.

е. Определить $F(\xi)$ по найденным F_m с помощью интерполяции.

Алгоритм быстрого преобразования Фурье

Существуют различные варианты алгоритма БПФ. Одним из наиболее коротких и простых является алгоритм Рэнсома, имеющийся в библиотеке вычислительных программ антенной лаборатории Иллинойского университета. Параметрами процедуры вычислений служат величины X , N , IFS, где X — идентификатор комплексного массива введенных выше величин f_n , N — число комплексных элементов массива X ($=2^p$), а IFS полагают равным $+1$, когда необходим анализ Фурье [см. (7.49)], и равным -1 , когда необходим синтез (обратная операция). В алгоритме предполагается, что действительные части элементов X занимают нечетные, а мнимые части — четные места в одномерном массиве X . Например, если

$$X = \begin{bmatrix} x'_1 + ix''_1 \\ x'_2 + ix''_2 \\ x'_3 + ix''_3 \end{bmatrix},$$

то массив X формируется следующим образом:

$$X = \begin{bmatrix} x'_1 \\ x''_1 \\ x'_2 \\ x''_2 \\ x'_3 \\ x''_3 \end{bmatrix}.$$

Исходный массив X , т. е. (f_n) , используется в процессе вычислений, а затем он заполняется фурье-образами (F_m) .

Метод БПФ в двумерном случае

В упомянутой выше библиотеке вычислительных программ имеется также короткая программа FORT 2D. Она использует программу FORT 4 для вычисления двумерного фурье-образа. В частности, двумерная формула дискретного преобразования Фурье имеет вид

$$F_{pq} = \frac{1}{\sqrt{MN}} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} e^{i2\pi \left(\frac{mp}{M} + \frac{nq}{N} \right)} f_{mn} \quad (7.52)$$

$(-M/2 \leq p < M/2, -N/2 \leq q < N/2)$; ее можно представить как два последовательных одномерных преобразования. Сначала преобразуются столбцы матрицы f_{mn} :

$$\hat{f}_{pn} = \frac{1}{\sqrt{M}} \sum_{m=-M/2}^{M/2-1} e^{i2\pi \frac{mp}{M}} f_{mn} \quad (7.53)$$

$(-M/2 \leq p < M/2, -N/2 \leq n < N/2)$. Затем преобразуются строчки \hat{f}_{pn} :

$$F_{pq} = \frac{1}{\sqrt{N}} \sum_{n=-N/2}^{N/2-1} e^{i2\pi \frac{nq}{N}} \hat{f}_{pn} \quad (7.54)$$

$(-N/2 \leq n < N/2, -M/2 \leq p < M/2)$.

Подпрограмма FORT 2D просто применяет программу FORT 4 к определенным столбцу или строчке двумерного массива. Число машинных операций при использовании двумерного БПФ равно $4N^2 \log_2 N$, в то время как при использовании метода ДПФ это число порядка N^4 .

Литература

1. Imbriale W. A., Mittra R., IEEE Trans., AP-18, No. 5, 633 (1970).
2. Lewis R. M., IEEE, Trans., AP-17, No. 3, 308 (1969).
3. Ransom P. L., Mittra R., Proc. IEEE, 59, No. 6, 1029 (1971) [см. перевод: ТИИЭР, 59, № 6, 212 (1971)].
4. Imbriale W. A., Heller J., Mittra R., Cruz J. B., Radio Science, 7, No. 7, 757 (1972).
5. Bojsen J. H., Jacobsen H. S., Nilsson E., Andersen J. B., Electronics Letters, 7, No. 18, 531 (1971).
6. Kharadly M. M. Z., Cullen A. D., Proc. IEE (London), 114, No. 8, 1035 (1967).
7. Collin L., Ed., Mathematics of profile inversion, NASA Workshop Proceedings, 1972.
8. Mittra R., Schaubert D., в книге Mathematics of profile inversion, ed. L. Collin, 1972.
9. Cabayan H. S., Mittra R., Numerical aspect of wavefront reconstruction, 1973.
10. Тихонов А. Н., ДАН СССР, 153, № 1, 49 (1963).
11. Ralston A., A first course in numerical analysis, McGraw-Hill, New York, 1965.
12. Kowalik, Osborne, Methods for unconstrained optimization problem, American Elsevier, New York, 1968.
13. Ransom P. L., Deschamps G. A., Antenna Laboratory, University of Illinois Tech. Report No. 69-8, 1969.
14. Cochran W., Proc. IEEE, 55, 1664 (1967) [см. перевод: ТИИЭР, 55, № 10, 7 (1967)].

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Алгоритм оптимизации параметров 438
 — — — метод Дэвидона 438, 473
 — — — — Розенброка 438, 460
 — — — — сопряженного градиента 438, 472
 Антенна *ТЕМ* 76, 78
 Асимптотическое разложение функции Бесселя 334
- Базисные функции 13, 31, 211—213, 233, 319
 Бернулли числа 394, 415
 Бесселя функции 127, 144, 145, 330, 335
 — — — асимптотическое разложение 334
 — — — многого порядка 334
 Большие расщепления 13
 Быстрое преобразование Фурье 480
- Вариационный метод 310, 316, 319, 382
 Векторные сферические гармоники 120
 Весовые функции 212—214, 216
 Винера — Хопфа метод 356, 359
 Вклад вычетов 343
 Внутреннее (скалярное) произведение 27, 312, 319
 Внутренние резонансы 259, 260
 Возбуждение поверхностных волн 343
 Восстановление волновых фронтов 461
 Входная проводимость 49, 356
 Входной импеданс 67, 310
- Галеркина (Ритца — Галеркина) метод 27, 213, 319, 403, 412, 414
 Гамма-функция 415
 Гаусса — Дулиттла метод 218
 Гаусса — Жордана метод 218
- Гауссова форма импульса 234
 Гельмгольца векторное уравнение 119
 Геометрическая оптика 221, 222
 Гибридные моды 413
 Голографический метод 428
 Границы приближенных значений 351
 Граничные условия 187, 189, 192, 193, 313, 337
 Грина вторая формула 121
 — теорема 179, 375
 — функция 181, 336
 — — свободного пространства 118
 — — тензорная 119
- Двухпозиционное сечение рассеяния 245
 Диафрагма идеально проводящая 354
 Дисперсионное уравнение 339, 349
 Дистанционное зондирование 417
 — — раскрыва антенны 428
 — — неоднородной среды 443
 Дифракционная решетка 371
 Диэлектрическая пластина 316, 336, 339, 382
 Диэлектрические брусья 351
 — препятствия 353
 Диэлектрический уступ 382
- Замедляющая структура 382
- Интегральное представление временное 177
 — — — магнитного поля 201, 207
 — — — электрического поля 201, 207
 — — — частотное 181
 — — — в двумерных задачах 195
 — — — магнитного поля 181, 206
 — — — электрического поля 181, 206

- Интегральное уравнение (временное представление) для векторного потенциала 203, 230
 — — — — магнитного поля 202, 230
 — — — — электрического поля 201, 230
 — — (частотное представление) для векторного потенциала 203, 207
 — — — — магнитного поля 184, 187, 192, 206, 211, 245
 — — — — электрического поля 184, 187, 192, 206, 211, 245
 Интегро-дифференциальное уравнение 316
 Итерационная процедура (схема) 217, 311, 320, 392
- Квазистатическое приближение 324
 Квази-*ТЕМ* приближение 307
 Кольцевая щель 87
 Контроль точности 227, 228, 237, 238
 Контурные интегралы 342, 357, 366, 377
 Коэффициент возбуждения 323
 — отражения 322, 326, 343, 356
 — полезного действия 58
 — преобразования волны 326
 — связи собственных волн 325, 333, 335
 — усиления антенны 58
 Краевой эффект 367
 Кусочно синусоидальный базис 45
- Лапласа оператор 374
 Лежандра функции 128, 144
LSE волна 328—330
LSM волна 328—330, 336
- Магнитный кольцевой ток 68, 87
 Максвелла уравнения 18, 209, 337
 Матрица действительная 125
 — диагональная 125
 — единичная 401
 — импедансов 224
 — нормировка 123
 — обращение 217, 319, 325
 — перехода 122
 — плохо обусловленная 320
 — приведенная к хорошо обусловленному виду 149
 — проводимости 224
 — разреженная 144, 145
 — рассеяния 122
- Метод базисных функций подобластей 213, 214
 — вычетов 396
 — — модифицированный 363, 371, 377, 387, 397
 — моментов 13, 26, 211, 213, 310, 318, 328, 333, 340, 352, 354
 — «минимакса» 443
 — наименьших квадратов 213
 — перевала 343
 — разделения переменных 313, 330
 — решетчатых моделей 244, 265, 267
 — секущих 335
 — сшивания 310, 352
 — факторизации 217, 218
 Многовитковая петлевая антенна 71
 Моды тока 52, 101
- Нагрузка сосредоточенная 56
 Наименьшая средняя квадратичная ошибка 41
 Неймана ряды 401
 — функции 127, 145
 Неоднородная волна 341
 Неоднородность сдвоенная несимметричная 344
 — — симметричная 344
 — две последовательные 311, 327, 343, 344
 — двуступенчатая в волноводе 404
 — типа диафрагмы 326, 354
 Непрерывный спектр 352
 Нестационарное поле в дальней зоне 205
 Ньютона итерационная процедура (схема) 368, 392
 Ньютона — Рафсона метод 335, 368
- Обобщенное интегральное уравнение 119
 Обобщенные граничные условия 119
 Обратная задача рассеяния 417
 Обратное рассеяние 240, 246, 252, 257, 267
 Оптимизация параметров 244, 438, 447
 Ортогонализация 148
 Ортонормированность 314, 315
 Освещенная область 220, 221
 Особенность 314
 — логарифмическая 349
 Относительная сходимость 354, 355
- Параллельно сдвинутые пластины 373
 Парсевала теорема 413

- Периодические структуры 374, 376
 Плазменный слой 336, 404
 Плоский волновод 354, 383
 — с фланцем 409
 Плохо обусловленная матрица 320
 Поверхностный импеданс 194
 — ток 118, 220, 194
 Показатель качества 423, 438, 440, 448
 Поклингтона интегральное уравнение 20
 Поле излучения в дальней зоне 341
 Полосковая линия 360, 361, 408, 411
 Полосовой отражательный фильтр 348
 Полубесконечная разделяющая пластина 365
 Полюс 339
 Поляризационный ток 19, 191
 Преобразование базиса 38
 Проволочные антенны 17
 Продольные электрические (магнитные) волны 328
 Пространственные гармоники 313, 374
 Пуассона уравнение 411
- Радиолокационное сечение рассеяния (РСР) 161, 177**
 Разветвление волновода 357
 Разностная ошибка 212
 Разностное уравнение 243
 Разреженная матрица 223
 Разрезы, обусловленные точками ветвления 339
 Распределение заряда в полосковой линии 366
 Рассеяние на «белом колесе» 279
 — — вертолете 271
 — — диэлектрическом теле 189
 — — идеальном проводнике 187
 — — коаксиальных кольцах 272, 302, 303
 — — конусе 255
 — — конус-сфере 253, 254, 270, 287, 289, 294
 — — круговом цилиндре 256
 — — логопериодической решетке 273, 277
 — — пластине 268
 — — проволочной «гармошке» 304
 — — прямом проводе 275
 — — сфере 246—249, 280—283
 — — сфероиде 252
 — — телах с импедансными граничными условиями 193
 — — тонком проводнике 192
 Рассеяния матрица 123
 Рассеянное поле 186, 198
- Решетка 311, 312, 316, 351
 Ритца — Галеркина метод 319
 Розенброка метод 460
 Рэлея — Ритца метод (процедура) 318, 382
- Сечение рассеяния 122, 199
 Симметрия структуры 225
 — уравнений Максвелла 183
 Синусоидальная интерполяция 215
 Скалярное (внутреннее) произведение 27, 312, 319
 Собственные значения 52, 351
 Спектральный радиус 320
 Спектр дискретный 339
 — непрерывный 336, 339
 Степенные ряды (разложения) 334, 343
 Сферонды 128
 Сходимость 32
 — относительная 254, 355
 Сшивание в дискретных точках 29, 213, 353
- Теневая область 220, 221
 TE волны (поляризация) 196, 198, 321, 330
 Теорема взаимности 228, 237
 — Грина 179, 375
 — о свертке 200
 — Парсевала 413
 — Пойнтинга 336
 — эквивалентности 18
 T-образное сочленение прямоугольных волноводов 343
 Точка ветвления 339
 TM волны (поляризация) 196, 198, 321, 330, 354
- Уда — Яги решетка вибраторов 58, 65
 Условия излучения 338
 — на ребре 357, 367, 373
 — непрерывности 179
 Устойчивость решения 53
- Фазированная решетка 327, 396
 — — из диафрагмированных волноводов 404
 Фазовращатель 382
 Физическая оптика 220, 221
 Функции базисные 13, 31, 211—213, 233, 319
 — Бесселя 127, 144, 145, 330, 334, 335

- Функции весовые (пробные) 13, 212—214, 232, 319
 — гамма 415
 — Грина 181, 336
 — дельта 29, 214, 232, 352
 — Лежандра 128, 144
 — Неймана 127, 145
 — Эйри 334
 Фурье коэффициенты разложения 366
 — преобразование 200
- Щель кольцевая 87
- Эйлера — Маклорена формула суммирования 393, 414
 Эйри функции 334
 Эквивалентные источники (токи) 19, 188, 190, 206
 Электрические малые антенны 71
 Энергетический параметр 396
- Халлена интегральное уравнение 24
 Характеристики рассеяния 198
- Цилиндр конечной длины 131
- Ядро интегрального уравнения 310, 339
 — комплексное симметричное 310, 317
 — эрмитово 317

Предисловие редактора перевода	5
Предисловие	8
Глава 1. Краткий обзор (Р. Митра)	11
Литература	16
Глава 2. Проволочные антенны (Г. А. Тил)	17
§ 1. Введение	17
§ 2. Интегральные уравнения теории проволочных антенн	18
1. Пространственная теорема эквивалентности	18
2. Интегральное уравнение Поклингтона	20
3. Интегральное уравнение Халлена	24
§ 3. Метод моментов	26
1. Метод Галеркина	27
2. Сшивание в дискретных точках	29
§ 4. Базисы	30
1. Система базисных функций полной области	31
2. Система базисных функций подобластей	32
3. Некоторые системы базисных функций	35
4. Метод преобразования базиса	38
5. Кусочно синусоидальный базис. Метод согласования реакций	45
6. Моды тока. Задача на собственные значения	52
7. Проблема устойчивости	53
§ 5. Расчет антенных характеристик	55
1. Распределение тока, импеданс и сосредоточенная нагрузка	55
2. Диаграмма направленности, коэффициент усиления и коэффициент полезного действия	57
§ 6. Решетки вибраторов типа Уда — Яги	58
1. Интегральный оператор	59
2. Матричная формулировка	61
3. Излучение в дальней зоне	64
4. Распределения тока	66
5. Входной импеданс решетки	67
§ 7. Электрически малые антенны	71
1. Многовитковая петлевая антенна	71
2. Антенна на коаксиальной линии	76
§ 8. Моделирование вибраторных антенн, расположенных на металлических телах	82
1. Штырь или круговая щель в основании конуса	82
2. Петлевые самолетные антенны на коаксиальной линии	88
§ 9. Заключение	90
Упражнения	92

Приложение 1. Поля плоского кольцевого магнитного тока	93
Приложение 2. Вычисление собственных функций для распределения токов	101
Приложение 3. Программа расчета характеристик проволочных антенн, расположенных на металлических телах	105
Литература	105
Глава 3. Численное решение задач рассеяния электромагнитных волн (П. С. Уотерман)	117
§ 1. Введение	117
§ 2. Теория	117
1. Формулировка задачи в матричном виде	117
2. Вычисление матрицы перехода	122
3. Применение к телам различной формы	126
4. Результаты для цилиндров конечной длины и сочетания сферы с конусом	131
§ 3. Структура программы для ЭВМ	137
1. Введение	137
2. Список подпрограмм	138
3. Подпрограмма ввода	139
4. Вычисление границ частей тела и шага интегрирования	140
5. Основная управляющая подпрограмма	142
6. Присоединенные полиномы Лежандра	144
7. Функции Бесселя	144
8. Рекуррентные соотношения для функций Бесселя и Неймана	145
9. Получение формы тела	146
10. Печать первой матрицы	147
11. Печать массива	147
12. Получение матриц [Q] и [T]	147
13. Нормировка матриц	149
14. Приведение матриц к хорошо обусловленному виду	149
15. Вывод на печать матрицы [T]	150
16. Окончательная программа управления	150
17. Умножение матрицы на вектор	151
18. Проверка содержания памяти	151
19. Распределение памяти	152
Приложение. Подпрограммы на языке ФОРТРАН, используемые в программе EMSCAT	154
Литература	176
Глава 4. Решение трехмерных задач рассеяния электромагнитных волн с помощью интегральных уравнений (А. Поджо и Е. Миллер)	177
§ 1. Введение	177
§ 2. Интегральные уравнения в электродинамике	178
1. Вывод интегральных уравнений в пространственно-частотном представлении	178
2. Вывод интегрального уравнения в пространственно-временном представлении	200
3. Сводка интегральных представлений и уравнений	206
§ 3. Численные методы решения	200
1. Решение уравнений в частотном представлении	210
2. Решение во временном представлении	229

3. Дополнительные замечания	238
§ 4. Приложение численных методов	245
1. Примеры расчетов в частотном представлении	245
2. Примеры расчетов во временном представлении	275
§ 5. Заключение	304
Литература	306
Глава 5. Варнационные и итерационные методы решения задач о волноводах и решетках (Ву Чень-пан)	310
§ 1. Рассеяние на бесконечной решетке из металлических лент	311
§ 2. Варнационный принцип, метод моментов и итерационные методы	316
1. Варнационный принцип	316
2. Метод моментов	318
3. Итерационные методы	320
§ 3. Скачкообразное изменение сечения круглого волновода (преобразование волн)	321
§ 4. Сочленение прямого и изогнутого волноводов	328
1. Собственные волны изогнутого волновода	328
2. Вывод интегрального уравнения	330
3. Применение метода моментов	333
4. Некоторые вопросы техники вычислений	333
§ 5. Волноводная антенна, экранированная диэлектрической пластиной	336
§ 6. Задачи с двумя последовательными неоднородностями	343
1. Система интегральных уравнений, описывающих задачу с двумя неоднородностями	344
2. Полосовой отражательный фильтр в коаксиальных линиях	348
§ 7. Заключительные замечания	352
Приложение. Проверка сходимости и проблема относительной сходимости	354
Литература	358
Глава 6. Некоторые эффективные вычислительные методы (Р. Митра и Т. Ито)	359
§ 1. Введение	359
§ 2. Полосковые линии	360
1. Описание задачи	360
2. Постановка краевой задачи в спектральном представлении	361
3. Модифицированный метод вычетов	364
4. Численный счет	368
5. Результаты счета	371
§ 3. Дифракционная решетка	371
1. Описание задачи	371
2. Постановка задачи в спектральном представлении	373
3. Решение модифицированным методом вычетов	377
4. Численный счет	380
5. Результаты счета	380
§ 4. Диэлектрический уступ в волноводе	382
1. Введение и описание задачи	382
2. Формулировка задачи	384
3. Метод решения	387
4. Численный счет	392
5. Результаты счета	394

§ 5. Применение метода обобщенной матрицы рассеяния к задачам с неоднородностями	396
1. Введение	396
2. Исследование фазированной решетки из толстостенных волноводов с помощью метода обобщенной матрицы рассеяния	397
3. Метод решения задачи о толстостенной фазированной решетке	402
4. Численный счет	402
5. Результаты счета	402
Задачи	404
Литература	415
Глава 7. Обратная задача рассеяния и дистанционное зондирование (Р. Митра)	417
§ 1. Введение	417
§ 2. Двумерная обратная задача рассеяния	418
1. Постановка задачи и предварительные замечания	418
2. Определение формы объекта по заданной диаграммной функции	419
3. Сводка этапов вычислительной процедуры	423
4. Результаты расчета	426
§ 3. Дистанционное зондирование раскрыва антенны голографическим методом	428
1. Описание задачи	428
2. Аналитические соотношения	429
3. Схема численного счета	430
4. Результаты счета	431
§ 4. Синтез антенны по ее диаграмме направленности по мощности	436
1. Введение и описание задачи	436
2. Постановка задачи	437
3. Численный счет	438
4. Результаты счета	440
§ 5. Дистанционное зондирование неоднородных сред	443
1. Введение	443
2. Линейный подход	444
3. Решение методом оптимизации параметров	447
4. Численный счет	448
5. Результаты счета	452
§ 6. Восстановление волновых фронтов матричными методами	461
1. Введение	461
2. Аналитическая основа метода	462
3. Численный эксперимент	464
4. Результаты счета	466
Приложение. А. Методы оптимизации	471
Приложение. Б. Применение алгоритма быстрого преобразования Фурье	474
Литература	477
Предметный указатель	478

УВАЖАЕМЫЙ ЧИТАТЕЛЬ!

Ваши замечания о содержании книги, ее оформлении, качестве перевода и другие просим присылать по адресу: 129820, Москва, И-110, ГСП, 1-й Рижский пер., 2, изд-во «Мир».

ВЫЧИСЛИТЕЛЬНЫЕ МЕТОДЫ
В ЭЛЕКТРОДИНАМИКЕ

Редактор Н. Телеснин
Художник В. Щетинин
Художественный редактор Е. Самойлов
Технический редактор Н. Толстякова

Сдано в набор 21/VI 1976 г.
Подписано к печати 28/XII 1976 г.
Бум. тип. № 1 60×90 L_4 =15,25 бум. л. Печ. л. 30,50
Уч.-изд. л. 28,98. Изд. № 2/8231
Цена 3 р. 06 к. Зак. 270.

Издательство «Мир»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ордена Трудового Красного Знамени
Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой Союзполиграфпрома
при Государственном комитете Совета
Министров СССР по делам издательств,
полиграфии и книжной торговле,
198052, Ленинград, Л-52, Измайловский пр., 29