

Г. Моффат

ВЛЮЛ

ВОЗБУЖДЕНИЕ

MAGNETIC
FIELD GENERATION
IN ELECTRICALLY
CONDUCTING FLUIDS

H. K. Moffatt
professor of applied mathematics,
University of Bristol

Cambridge University Press
Cambridge
London - New York - Melbourne
1978

Г. Моффат

ВОЗБУЖДЕНИЕ
МАГНИТНОГО
ПОЛЯ
В ПРОВОДЯЩЕЙ
СРЕДЕ

Перевод с английского
канд. физ.-мат. наук
А. А. РУЗМАЙКИНА

под редакцией
академика
Я. Б. ЗЕЛЬДОВИЧА

Решение проблемы генерации магнитного поля в движущейся электропроводящей среде важно для анализа многих задач астрофизики, геофизики, а также для исследований по управляемому термоядерному синтезу. Основное внимание автор монографии уделяет теории; в качестве практических приложений рассмотрены магнитные поля Земли и Солнца.

Книга представляет большой интерес для астрофизиков, геофизиков, специалистов по физике плазмы. Может быть использована в качестве учебного пособия для студентов старших курсов соответствующих специальностей.

*Редакция литературы
по космическим исследованиям,
астрономии и геофизике*

17050 40000

М 20604-108 108-80
041 (01)-80

© 1978 by Cambridge University Press

© Перевод на русский язык, "Мир", 1980

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ

Монография известного английского ученого Г. Моффата, главного редактора "Journal of Fluid Mechanics", посвящена общей теории возбуждения магнитного поля в движущейся проводящей среде, которую принято называть "теорией магнитного динамо". Магнитные поля повсеместно присутствуют во Вселенной, и вопрос об их происхождении и поддержании имеет большое значение для понимания ряда астрофизических и геофизических процессов (в частности, цикла солнечной активности и обращений земного магнитного поля). Это определяет актуальность предлагаемой читателю монографии, в которой впервые систематически изложены основы теории динамо, подробно освещена математическая сторона вопроса и указана перспектива развития теории.

Теорию динамо принято считать молодой. И это верно, если иметь в виду ее наивысшие достижения — те результаты, которые получены в последние два десятилетия, во время бурного развития астрофизики и геофизики. Однако основы теории динамо были заложены в дорелятивистский и даже домаксвелловский периоды. В частности, одна из главных компонент динамо-механизма — дифференциальное вращение — играет решающую роль в открытом Фарадеем явлении униполярной индукции. Отсутствие в теории динамо тока смещения позволяет при рассмотрении сред с бесконечно большой проводимостью эффективно использовать представление о силовых линиях магнитного поля, введенное в ту же эпоху. Большое значение для развития теории и ее приложений имела теорема о "вмороженности" магнитных силовых линий в движущуюся идеально проводящую среду, сформулированная Альвеном [4] (уже в XX в.). Вмороженность силовых линий приводит к тому, что при движении среды поле может нарастать. Простейшие примеры подобного процесса — это усиление поля при сжатии проводящего вещества и его усиление в волнах Альвена за счет искривления и удлинения силовых линий. Другой практически важный пример — это усиление поля при случайном турбулентном движении вещества за счет растяжения силовых линий и уменьшения их масштаба.

Проблема магнитного динамо была сформулирована в знаменитой работе Лармора [119]. Принято говорить, что первые результаты теории динамо были отрицательными. Широкую известность получила теорема Каулинга [57] о невозможности поддержания магнитного поля осесимметричным движением проводящей жидкости и последующие ее обобщения на случай двумерного движения [230] и других движений с простой симметрией. Однако сегодня особенно важно подчеркнуть позитивное значение работ того периода. Именно после них стало ясно, что движения, способные поддерживать и генерировать магнитные поля, должны быть несимметричными и трехмерными. Кроме того, этими работами были впервые выявлены некоторые физические эффекты, которые прочно утверждаются в современной теории, например диамагнитный эффект выталкивания силовых линий из турбулизованной проводящей области (см. цитированную выше работу [230]).

Таким образом, рассматриваемая в книге Моффата теория динамо — это теория возбуждения магнитных полей трехмерными несимметричными движениями проводящей среды. Основная идея, которая пронизывает всю книгу и придает ей цельность, заключается в том, что для действия динамо должна быть нарушена "отражательная симметрия" движений, простейшей мерой которой служит спиральность (произведение вихря на скорость). Именно после того, как Паркером [155], Брагинским [26–29] и особенно Штейнбеком, Краузе и Редлером [202] было показано, что проводящая среда, мелкомасштабные движения которой имеют спиралевидный характер, способна генерировать крупномасштабные магнитные поля, и начался современный этап развития теории динамо. Автор предлагаемой читателю книги внес большой вклад в теорию динамо. Он дал топологическую интерпретацию спиральности движений и поля и доказал ряд теорем, характеризующих инвариантные свойства среды, не обладающей отражательной симметрией. Более того, Моффат в своей книге утверждает, что магнитное динамо в турбулентной среде, по-видимому, может работать лишь в отсутствие отражательной симметрии. В этой связи нужно отметить, что в книге тщательно анализируется известный вопрос о генерации поля однородной изотропной турбулентностью (пример Бэтчелора) и делается вывод о недостаточности имеющихся доказательств действия динамо в этом случае.

В теории динамо принято выделять кинематическую постановку задачи, когда движение жидкости задано, и полную динамическую самосогласованную постановку, когда учитывается влияние магнитного поля на движение. В представленном в монографии материале правильно отражена степень разработанности этих постановок. Большая часть книги посвящена изложению кинематического подхода. Особо

выделена ламинарная теория динамо, где дана постановка кинематической проблемы динамо, доказаны классические теоремы о невозможности осесимметричного, чисто тороидального и двумерного динамо и приведены конкретные примеры динамо с более сложным движением. Изложение теории динамо, связанного со случайными движениями (турбулентность и случайные волны), ведется на основе двухмасштабного подхода, когда определяется магнитное поле, усредненное по мелкомасштабным пульсациям, причем вклад последних характеризуется конечным числом функций. Здесь существенно отметить, что результаты, излагаемые Моффатом, как правило, получены в предположении малого магнитного числа Рейнольдса $R_m \ll 1$, хотя для основных приложений этой теории, особенно в астрофизике, интересен как раз обратный случай $R_m \gg 1$, который также исследован (например, в работах Краузе [190] и Вайнштейна [219]). Результаты этих исследований не всегда совпадают с соображениями Моффата (см. примечания редактора в разд. 7.7, 7.8).

Большой интерес представляют последние три главы книги, посвященные наиболее трудной и слабо развитой теории динамо с учетом влияния магнитного поля на движение среды. Хотя представленный здесь материал зачастую отражает личные интересы автора (например, большее место отведено рассмотрению случайных волн, а не турбулентности), надо подчеркнуть, что именно здесь проходит передний край современной теории динамо. Хочется особо отметить последний раздел книги, где излагается теория простого двухдискового динамо, моделирующего случайные обращения полярности земного магнитного поля. Здесь ярко продемонстрирована связь теории динамо с современными достижениями качественной теории дифференциальных уравнений, а именно с открытием стохастичности в системе с малым (≥ 3) числом степеней свободы и особыми притягивающих областей в фазовом пространстве системы (странных аттрактов). Отметим, впрочем, что автор не пользуется этой терминологией.

Следует сказать, что прикладной стороне теории динамо в книге отведено меньше места. Хотя в ней и разбираются три важнейших приложения теории динамо: генерация магнитных полей Земли, Солнца и Галактики, — однако эти вопросы изложены очень кратко и схематично. Это, разумеется, объясняется тем, что интересы автора монографии лежат в области математических проблем теории динамо. Пользуясь возможностью, укажем, что читатель, заинтересовавшийся приложениями теории динамо к физике Солнца и астрофизике, может получить дополнительные сведения в выходящей в этом году в издательстве "Наука" книге С.И. Вайнштейна и авторов данного предисловия "Турбулентное динамо в астрофизике".

Моффат знает и цитирует работы многих советских ученых (С.И. Брагинского, С.И. Вайнштейна, А. Гайлитиса, Г.С. Голицына, А.З. Долгинова, Э.М. Дробышевского, Я.Б. Зельдовича, А.Н. Колмогорова, А. Лиелаусиса, В.С. Юферева и др.). В частности, теории С.И. Брагинского, ставшей классической, посвящена целая глава книги.

Книга Моффата написана изящным, лаконичным языком. Пусть читатель судит сам, в какой мере удалось сохранить эти качества в переводе. Английский драматург Бернард Шоу когда-то сформулировал всю трудность задачи перевода, сказав, что перевод, как жена: если верен, то некрасив, если красив, то неверен. В любом случае перевод книги на русский язык был необходим. Монография Моффата — это первое (и в этом одно из ее достоинств) в мировой научной литературе систематическое изложение основ теории динамо.

Книга может быть рекомендована научным работникам, студентам и аспирантам, специализирующимся по астрофизике, геофизике и магнитной гидродинамике. С нее может начать и тот, кто впервые хочет познакомиться с теорией динамо. Книга написана с педагогическим тактом и может быть использована как учебное пособие.

Я.Б. Зельдович,

А.А. Рузмайкин

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ

Развитие теории генерации магнитных полей в космических условиях, в частности магнитных полей Земли и Солнца, в значительной степени стимулировано работами советских ученых и плодотворным воздействием идей, развивавшихся на Западе и в Советском Союзе. Поэтому мне особенно приятно выразить благодарность академику Я.Б. Зельдовичу и А.А. Рузмайкину, взявшим на себя труд по редактированию и переводу моей книги. Я надеюсь, что книга будет способствовать дальнейшему обмену идеями и плодотворному сотрудничеству между советскими и зарубежными учеными в этой развивающейся области науки.

Книга была опубликована на английском языке в феврале 1978 г. Я хочу поблагодарить моего научного ассистента Дж. Чепмена, который с большой тщательностью прочел книгу и обнаружил ряд ошибок, исправленных в русском издании.

Благодарю также А.А. Рузмайкина, указавшего на ошибки, содержащиеся в разд. 9.9 английского издания и исправленные при переводе. Надеюсь, что теперь все недочеты исключены, однако я несу полную ответственность за те ошибки, которые могли остаться.

Г.К. Мофفات

ПРЕДИСЛОВИЕ

В последнее десятилетие наблюдался значительный сдвиг в понимании процесса генерации магнитного поля при движениях проводящей среды (процесса, обычно называемого "динамо"). В теории динамо естественным образом выделяются кинематический и динамический аспекты, но ни один из них не был в достаточной мере развит приблизительно до 1960 г. Положение изменилось после того, как в 1966 г. Штейнбек, Краузе и Редлер предложили использовать двухмасштабное приближение. С помощью такого подхода удалось понять, как влияют на генерацию усредненного магнитного поля движения среды, обладающие случайной или пространственно-периодической составляющими. Благодаря этому достижению мы имеем в настоящее время хорошо разработанную теорию динамо в кинематической постановке и посвящаем также на более трудные, динамические аспекты теории.

Хотя появился ряд специальных обзоров, в которых рассматриваются приложения теории динамо к геофизике и физике Солнца, я полагаю, что данная монография представляет собой первое самостоятельное изложение теории динамо. Я постарался сосредоточить внимание на более фундаментальных аспектах теории динамо и с этой целью в первых главах книги изложил некоторые результаты магнитной гидродинамики, которые составляют основу теории. Однако в книгу включены и две главы, касающиеся магнитных полей Земли и Солнца и описывающие соответствующие физические свойства этих тел; в следующих за ними главах часто даются ссылки на специфические приложения теории динамо к геофизике и физике Солнца. Таким образом, будучи написанной с точки зрения теоретика-гидромеханика, книга может оказаться полезной аспирантам и научным работникам, специализирующимся в геофизике и астрофизике, особенно тем из них, кто интересуется геомагнетизмом и солнечным магнетизмом.

Изложение основано на курсе лекций, которые в различных формах читались автором в течение ряда лет аспирантам Кембриджского университета, готовящимся к сдаче III части экзамена по математике.

Я также имел удовольствие прочесть курс лекций в течение 1975/76 академического года студентам 3-го курса, специализирующимся по теоретической механике, в университете им. Пьера и Мари Кюри в Париже. Материал всех глав, за исключением трудной гл. 8, посвященной теории С.И. Брагинского, был таким образом представлен на суд студенческой критики, что оказало мне большую помощь в процессе написания книги.

Во всей книге многократно повторяется идея, которая, как я надеюсь, вносит некоторое единство в изложение. Суть ее заключается в "отсутствии отражательной симметрии" движений среды, простейшей мерой которой служит "спиральность". В этом смысле книга посвящена спиральности. Инвариантность и топологическая интерпретация этой псевдоскалярной величины обсуждаются в начале книги (гл. 2); ключевое значение спиральности для теории динамо подчеркнуто в гл. 7 и 8. Спиральность является также темой гл. 10 (о спиральных волновых движениях) и гл. 11, в которой обсуждается влияние спиральности на турбулентные течения с магнитным полем и в отсутствие последнего. Предварительное и более сокращенное описание некоторых из этих тем содержалось в вышедшей ранее обзорной статье автора [147].

Мне приятно выразить благодарность многим из моих коллег, с которыми я обсуждал теорию динамо, в особенности В. Дайнцеру, Д. Губбинсу, У. Фришу, Р. Крейчнану, Ф. Краузе, У. Малкусу, К.-Г. Рёдлеру, П. Робертсу, М. Стиксу и Н. Вейсу, а также Г. Робертсу, Э. Соурду и М. Проктору, чьи первые шаги в этой области науки я с удовольствием наблюдал и которые потом внесли значительный вклад в теорию динамо, и, наконец, Д. Бэтчелору, редактору кембриджской серии монографии по механике и прикладной математике, за постоянную помощь и советы. Я приношу сердечную благодарность тем, кто сделал критические замечания по рукописи и помог исправить ошибки; впрочем за любые ошибки, пропуски и неясности, которые могли остаться, я несу полную ответственность.

Я закончил работу над книгой в 1975–1976 гг. во время пребывания в университете им. Пьера и Мари Кюри и благодарен П. Герману, Г. Кабанне и их коллегам из Лаборатории теоретической механики, пригласившим меня поработать в таком дружном творческом коллективе.

ВВЕДЕНИЕ И ИСТОРИЯ ПРОБЛЕМЫ

"Каким образом вращающееся тело, например Солнце, может стать магнитом?" Так звучало заглавие знаменитого "краткого сообщения" сэра Лармора, посланного им в 1919 г. в Британскую ассоциацию содействия прогрессу науки. Вопрос был вполне естественным, поскольку в то время проблема происхождения магнитного поля Солнца являлась загадкой. Любопытно, что в отношении земного магнитного поля такой вопрос не ставился. Еще верили, что его можно объяснить исходя из представлений о постоянном намагничивании. Однако уже давно стало известно, что температура внутри Земли значительно превышает критическую температуру (точку Кюри), при которой ферромагнитные материалы теряют свою "постоянную" намагниченность, и что надо искать другое объяснение происхождения земного магнитного поля. Глубокую связь с проблемой имеет тот факт, что большая доля внутренней части Земли находится в жидком состоянии (это известно из сейсмических наблюдений).

Можно с уверенностью утверждать, что не только Земля и Солнце, но и любое жидкое (полностью или частично) и вращающееся космическое тело должно обладать магнитным полем. Это утверждение носит универсальный характер и применимо независимо от величины рассматриваемого пространственного масштаба. Например, в планетарном масштабе, наряду с Землей, быстро вращается Юпитер (период вращения Юпитера равен ~ 10 ч), и полагают, что он имеет жидкую внутреннюю часть, состоящую из сплава жидкого металлического водорода и гелия [93]. На поверхности Юпитера обнаружено магнитное поле ~ 10 Гс¹⁾ (для сравнения укажем, что поле Земли равно ~ 1 Гс). У звезд обычно невозможно зарегистрировать магнитные поля столь же слабые, что и солнечное поле (~ 1 Гс); однако имеются многочисленные звезды, вращающиеся с периодами от нескольких суток до

¹⁾ Единицей магнитного поля в международной системе единиц служит тесла (Т), $1 \text{ Т} = 1 \text{ Вб/м}^2 = 10^4 \text{ Гс}$.

нескольких месяцев, у которых обнаружены поверхностные поля $\sim 10^2 - 3 \cdot 10^4$ Гс [173]. Что касается галактических масштабов, то наша Галактика вращается относительно нормали к плоскости диска с периодом $\sim 3 \cdot 10^8$ лет и обладает магнитным полем $\sim (3 - 4) \cdot 10^{-6}$ Гс, ориентированным приблизительно в плоскости галактического диска.

Вид этих естественно возникающих магнитных полей и характер их поведения во времени будут подробно описаны в последующих главах. В данный момент нам достаточно указать (не касаясь деталей свойств), что такие поля существуют, и это является исходным мотивом многочисленных исследований, описанных в данной монографии.

Лармор выдвинул три альтернативных пробных предположения относительно происхождения магнитного поля Солнца, из которых лишь одно выдержало испытание временем. Это предположение, которое является фундаментальным в теории гидромагнитного динамо, заключается в том, что проводящая жидкость во вращающемся теле может благодаря индуктивному действию, вызванному ее протеканием через магнитное поле, генерировать токи $\mathbf{J}(\mathbf{x})$, требуемые для поддержания этого магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{x})$.

Наиболее просто эффект "бутстрапа" такого типа проиллюстрировать на примере системы, состоящей целиком из твердых (а не жидких) проводников, так называемого "униполярного" дискового динамо [36] (рис. 1.1). Сплошной медный диск вращается на валу с угловой

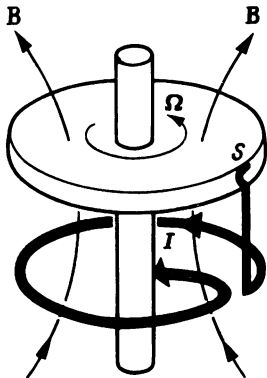


Рис. 1.1

Униполярное дисковое динамо. Отметим, что проволока, по которой течет ток $I(t)$, должна быть закручена в том же направлении, в котором вращается диск.

скоростью Ω , токовое соединение обода с валом осуществляется с помощью проволоки, закрученной, как это показано на рисунке, вокруг вала в форме петли. Эта система может быть неустойчивой относительно роста возмущений магнитного поля. Пусть в петле течет

ток $I(t)$; он генерирует магнитный поток Φ через поверхность диска. Если проводимость диска не слишком высока, то $\Phi = M_0 I$, где M_0 – взаимная индукция петли и обода диска. (Оговорка, касающаяся проводимости диска, необходима, поскольку очевидно, что для сверхпроводящего диска любой поток через край диска должен обращаться в нуль. Аналогично ведет себя в зависящем от времени магнитном поле и высокопроводящий диск.) При вращении диска возникает электродвижущая сила $\mathcal{E} = \Omega \Phi / 2\pi$, создающая ток $I(t)$, уравнение для которого имеет вид

$$L \frac{dI}{dt} + RI = \mathcal{E} = M \Omega I, \quad (1.1)$$

где $M = M_0 / 2\pi$, а L и R – самоиндукция и сопротивление всей цепи тока. Очевидно, система неустойчива относительно роста бесконечно малого тока I (а поэтому и Φ), если

$$\Omega > R/M. \quad (1.2)$$

При выполнении этого условия ток растет экспоненциально, так же экспоненциально растет и тормозящий момент, связанный с распределением силы Лоренца в диске. В конечном итоге угловая скорость уменьшится и будет стремиться к равновесному критическому значению $\Omega_0 = R/M$, при котором закручивающее усилие G в точности компенсирует сумму этого тормозящего момента и любого момента сил трения. Система может проскочить это равновесное состояние и колебаться около него. Колебания будут затухать за счет трения.

Этот пример, безусловно, привлекателен, однако он отличается от случая проводящей жидкости тем, что ток благодаря закрученной проволоке течет здесь по очень специальной траектории, особенно способствующей возникновению динамо (т.е. превращению механической энергии в магнитную). Такие геометрические ограничения отсутствуют, например, в жидкости, обладающей постоянной электропроводностью и заполняющей сферический объем; возникает вопрос, может ли течение жидкости в такой сфере или другой односвязной области поддерживать подходящим образом искривленный ток, дающий униполярное самовозбуждающее динамо такого рода.

Однако два свойства дискового динамо, с которыми мы столкнемся в рассматриваемых далее гидромагнитных случаях, заслуживают на данном этапе особенного внимания. Во-первых, разрыв угловой скорости на скользящем контакте S между вращающимся диском и стационарной проволокой означает, что в системе имеется *дифференциальное вращение*. Тот факт, что дифференциальное вращение в данном случае сконцентрировано в одной точке S , не имеет существенного

значения для действия динамо; в принципе мы можем произвольным образом распределить дифференциальное вращение, разделив диск на ряд колец (причем электрический контакт между соседними кольцами может осуществляться с помощью жидкой пленки, например ртутной) и заставив вращаться кольца с различными угловыми скоростями. Если самое удаленное от центра кольцо удерживается фиксированным (так что не будет никакого скольжения на контакте S), то поле скорости полностью осесимметрично и дифференциальное вращение распределено по всей плоскости диска. Если угловая скорость внутренних колец имеет направление, указанное на рис. 1.1, и достаточно велика, то система все еще будет представлять собой динамо.

Во-вторых, система *не обладает отражательной симметрией*: чтобы работало динамо, диск на рис. 1.1 должен вращаться в ту же сторону, в которую закручена проволока. Действительно, из уравнения (1.1) ясно, что вращение с $\Omega < 0$ приводит к *ускорению затухания* любого тока, первоначально имевшегося в цепи. Признание важной роли, которую играет отсутствие отражательной симметрии, дает ключ к пониманию природы динамо, реализуемого благодаря сложным движениям проводящей жидкости.

Однако первые исследователи, желая избежать аналитических трудностей задачи, ограничивались анализом систем с максимальной степенью симметрии. В применении к вращающимся телам, например к Земле и Солнцу, наиболее естественно рассмотреть "простой случай", когда как поле скорости, так и магнитное поле осесимметричны. Этот идеализированный случай рассмотрел Каулинг [57], исследовавший происхождение значительно более локализованных и интенсивных магнитных полей солнечных пятен (см. гл. 5); однако он пришел к выводу, что осесимметричные движения не могут поддерживать стационарное осесимметричное поле.

В последующих исследованиях были найдены обобщения этой первой теоремы "антидинамо" [16, 59], и, наконец, Бэкас [14] показал, что осесимметричные движения способны не более чем в 4 раза удлинить характерное время затухания осесимметричного поля. В случае земного магнитного поля, характерное время затухания которого $\sim 10^4 - 10^5$ лет (см. гл. 4), эта скромная задержка совершенно неспособна объяснить непрерывное существование главного дипольного поля в течение времени ($3 \cdot 10^9$ лет), по порядку величины совпадающего с возрастом Земли (в пользу этого свидетельствуют исследования магнетизма горных пород), и его относительную устойчивость в течение 10^6 и более лет [37]. Было ясно, что для достижения какого-либо реального прогресса в теории динамо необходимо рассматривать неосесимметричные конфигурации. В действительности именно принци-

пиально трехмерный характер "проблемы динамо" (как и проблемы объяснения происхождения магнитного поля Земли или любого другого достойного упоминания космического тела) придает ей как особую трудность, так и своеобразную прелесть.

Эльзассер [71], осознав трехмерность природы задачи, начал изучать взаимодействие заданного неосесимметричного поля скорости с общим неосесимметричным магнитным полем в проводящей жидкости, ограниченной твердой сферической оболочкой; предполагалось, что среда снаружи является непроводящей. Эльзассер отстаивал метод разложения обоих полей по сферическим гармоникам, который был существенно развит и обобщен в исследовании Булларда и Геллмана [39]. В § 7 (е) этой замечательной статьи ясно продемонстрирована желательность для работы динамо двух составляющих поля скорости:

1) дифференциального вращения, которое, вытягивая силовые линии полоидального поля, создает тороидальное поле (определение этих понятий см. гл. 2), и 2) неосесимметричного движения, способного исказить тороидальную силовую линию путем поднятия петель и последующего их закручивания та^{ким} образом, чтобы генерировать полоидальное поле, т.е. осуществить обратную связь.

Взаимодействие поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ и магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{x})$ (осуществляемое благодаря члену $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ в законе Ома) приводит к бесконечному набору связанных обыкновенных дифференциальных уравнений для определения сферических гармонических составляющих возможных стационарных конфигураций магнитного поля; для численного решения естественно ограничиться конечным числом уравнений и заменить радиальные производные конечными разностями. Конечно, такие процедуры законны при численном поиске решения, которое заведомо существует; однако они могут привести к ошибочным заключениям, если нет уверенности в том, что точное стационарное решение задачи существует. Буллард и Геллман сознавали эти опасности, однако фактически именно то поле скорости, которое они предложили в качестве наиболее убедительного кандидата для динамо в сфере, как показало более тщательное исследование на современных быстродействующих ЭВМ [80], оказалось непригодным.

Неадекватность чисто вычислительных методов решения задачи усилила необходимость поиска фундаментальных теоретических методов, не требующих обращения к ЭВМ. Решающий шаг в этом направлении сделал Паркер [155], который утверждал, что упомянутый выше эффект неосесимметричного поднимания петель можно объединить с процедурой усреднения в уравнениях для компонент *среднего магнитного поля* (т.е. поля, усредненного по азимутальному углу ϕ относительно оси вращения системы). Аргументация Паркера носила скорее

эвристический, чем дедуктивный характер, и, возможно, по этой причине прошло несколько лет, прежде чем метод получил всеобщее признание. Теория Паркера кратко упоминается в монографии Каулинга "Магнитная гидродинамика" [58], где приведено следующее заключение¹⁾: "В действительности доказательство не вполне убедительно и необходим более подробный анализ. Паркер, не делая попыток провести такой анализ, ограничивается извлечением математических следствий из принятой им картины. Однако, несомненно, его предложение заслуживает большого внимания".

Идея Паркера в течение ряда лет не вызывала интереса, пока наконец не получила развития в двух весьма различных подходах к проблеме, один из которых был разработан Брагинским [26, 27], другой — Штейнбеком, Краузе и Рёдлером [202]. Главная идея, лежащая в основе метода Брагинского, заключалась в том, что, хотя стационарные осесимметричные решения задачи динамо исключены теоремой Каулинга, тем не менее слабые отклонения от осевой симметрии могут поддерживать среднее магнитное поле. Этот подход оправдан, если проводимость жидкости σ очень велика [или, что эквивалентно, очень мал коэффициент диффузии магнитного поля $\lambda = (\mu_0 \sigma)^{-1}$] и теория строилась на основе разложения в степенные ряды по малому параметру, пропорциональному $\lambda^{1/2}$. Таким способом Брагинский продемонстрировал, что (как это доказывал Паркер) если магнитное поле преимущественно тороидальное, то неосесимметричные движения действительно могут создать эффективную среднюю тороидальную электродвижущую силу. Эта э.д.с. создает тороидальный ток, генерирующий полоидальное поле, завершая тем самым, как это предсказывали Буллард и Геллман, динамо-цикл.

Подход, который отстаивали Штейнбек, Краузе и Рёдлер [202], потенциально носит более общий характер. Он применим тогда, когда поле скорости разделяется на среднюю и турбулентную (или случайную) компоненты, которые имеют сильно различающиеся характеристические длины, допустим, L и l ($L \gg l$). Основное внимание сосредоточено на рассмотрении поведения среднего магнитного поля в масштабах, превышающих l . Конечно, метод усредненного поля хорошо развит в теории сдвиговых турбулентных течений и непроводящих жидкостей (см., например, [217]) и уже применялся в магнитной гидродинамике (например, в работе [109]). Однако сила метода Штейнбека и др. [202] заключается в осознании того факта, что турбулентность

¹⁾ Справедливости ради следует отметить, что эта до некоторой степени осторожная оценка исключена из последнего издания этой книги [60].

может порождать электродвижущую силу, имеющую компоненту, параллельную главной составляющей локального среднего магнитного поля (как и в модели Брагинского). Авторы показали, что этот эффект будет иметь место, если статистические характеристики фоновой турбулентности не *обладают отражательной симметрией* (смысл этого понятия будет ясен из гл. 7), свойством, которое случайным образом аналогично чисто геометрической особенности обсуждавшегося выше простого дискового динамо.

С 1966 г. поток статей, посвященных различным аспектам этих теорий и их приложений к Земле, Солнцу и другим системам, стал расти. Цель этой книги состоит в том, чтобы дать связанное изложение наиболее значительных из этих достижений. Ссылки на определенные статьи, опубликованные после 1966 г., будут приведены в основном в соответствующих местах текста.

Однако несколько других более ранних работ, являющихся историческими вехами, во введении стоит упомянуть. Решающую роль турбулентности для действия динамо поняли независимо Бэтчелор [18] и Шлютер и Бирман [195], которые рассмотрели влияние случайного поля скорости на случайное магнитное поле, причем оба поля обладали нулевым средним значением.

Бэтчелор понял, что в идеально проводящей жидкости случайное растяжение магнитных силовых линий может привести к экспоненциальному росту магнитной энергии. Воспользовавшись аналогией с вихрем (см. разд. 3.5), он получил критерий того, как велика должна быть проводимость, чтобы этот вывод остался справедливым для жидкости, обладающей конечной проводимостью, и оценил тот конечный равновесный уровень плотности магнитной энергии, который можно ожидать при учете обратного воздействия лоренцевых сил на поле скорости. Шлютер и Бирман, используя соображения, связанные с равным распределением энергии, получили другой критерий для роста поля и значительно более высокую оценку конечного уровня плотности магнитной энергии. Еще одну (третью) возможность выдвинул Саффман [194], который пришел к выводу, что хотя магнитная энергия может временно возрастать от слабого начального значения, в конечном итоге благодаря ускоренному омическому затуханию, связанному с постоянным уменьшением характерного масштаба магнитного поля, оно будет всегда стремиться к нулю¹⁾. Теперь из рассмотрения влияния турбулентности, не обладающей отражательной симметрией (см. гл. 7), мы знаем, что в общем случае ни один из трех выводов

¹⁾ Впервые этот вывод был сделан в работе Я.Б. Зельдовича [230], где рассматривалась двумерная турбулентность. — *Прим. ред.*

перечисленных выше статей не справедлив, хотя вопрос о том, что произойдет, если турбулентность обладает отражательной симметрией, остается до некоторой степени открытым (см. разд. 11.4).

Поставленную Бэтчелором [18] проблему можно до некоторой степени обойти, осознав тот факт, что реальный интерес представляет магнитное поле, усредненное по ансамблю, и если, как в сформулированной Бэтчелором модели, это среднее обращается в нуль, то модель не может иметь непосредственного отношения к Земле и Солнцу, которые имеют отличный от нуля дипольный момент. Это несомненная удача, поскольку Крейчнан и Нагараян [114] поставили довольно пессимистический диагноз многочисленным конкурирующим теориям: "Соображения равномерного распределения, аналогия с вихрем и известные приближения в теории турбулентности неспособны адекватно предсказать, будет ли в конечном итоге магнитная энергия затухать или расти экспоненциально. Ввиду отсутствия ограничений на ошибки нельзя надежно предсказать знак возможной суммарной скорости роста магнитной энергии". Однако мы не можем сказать, что Крейчнан и Нагараян оказались неправы в отношении основной проблемы для однородной изотропной турбулентности. Паркер [157] комментирует положение следующим образом: "Циклоническая турбулентность¹⁾ в совокупности с крупномасштабным сдвигом генерирует магнитное поле с очень высокой скоростью. Следовательно, мы вправе спросить, действительно ли вопрос о возможном росте полей в случайной турбулентности без циклонического упорядочения имеет первостепенный интерес. Даже если можно было бы показать, что случайная турбулентность усиливает плотность потока магнитного поля, эффект не был бы замечен в большинстве астрофизических объектов ввиду быстрой генерации поля циклонической турбулентностью и неоднородным вращением".

Решающее значение фактора отрицательной симметрии жидких движений, способствующих динамо, стало ясным также из работ Герценберга [89] и Бэкаса [15], давших первые примеры ламинарных полей скорости внутри сферы, для которых можно было строго доказать возможность существования самоподдерживающегося динамо. Модель Герценберга представляет собой два сферических ротора, вращающихся внутри проводящей сферы с угловыми скоростями ω_1 и ω_2 и разнесенных друг от друга на векторное расстояние \mathbf{R} . Конфигурация может быть правосторонней или левосторонней в зависимости от того,

¹⁾ Так Паркер называет турбулентность, статистические свойства которой не инвариантны относительно отражений.

положительно или отрицательно смешанное произведение $\omega_1 \cdot \omega_2 \times R$. Необходимым условием возникновения динамо (см. разд. 6.9) является отличие от нуля этого смешанного произведения; в таком случае конфигурация, конечно, не обладает отражательной симметрией.

Динамо Бэкаса [15] построено по образцу динамо Булларда и Геллмана, но разбито по времени на части, которые удобны для математического анализа. Рассматриваемое поле скорости состояло из трех активных фаз, разделенных продолжительными периодами покоя (или "застоя"), в течение которых нежелательные высокие гармоники магнитного поля успевают затухнуть до пренебрежимо низкого уровня. Были выделены следующие три фазы: 1) сильное дифференциальное вращение, которое генерировало сильное тороидальное поле из первоначально имевшегося полоидального; 2) неосесимметричная полоидальная конвекция, которая генерировала полоидальное поле из тороидального; 3) твердотельное вращение на угол $\pi/2$, которое ориентировало вновь генерированный дипольный момент вдоль первоначального дипольного момента. Отсутствие отражательной симметрии вытекает в данном случае из взаимной связи между фазами 1) и 2) полей скорости (см. разд. 6.2).

Принятая в этой книге точка зрения состоит в том, что случайные флуктуации поля скорости и магнитного поля почти несомненно имеются как в земном ядре, так и в конвективной зоне Солнца и что реалистическая теория динамо должна с самого начала включать в себя эффекты, связанные с такими флуктуациями. Конечно, ламинарные теории тоже ценны, в частности благодаря математическому проникновению в существо вопроса, которое они дают. Однако всякий, кто добросовестно проработал такие статьи, как [15, 39], легко согласится с тем, что проблема ламинарного динамо необычайно сложна. Замечательно, что рассмотрение турбулентности (или, возможно, случайных волновых движений) и соответствующих процедур усреднения в действительности приводит к сильнейшему упрощению проблемы. Причина в том, что теорема антидинамо Каулинга несправедлива для уравнений, которым удовлетворяют средние поля, и, следовательно, можно анализировать осесимметричный случай и с определенностью получать положительные и обнадеживающие результаты. Уравнения допускают как статические решения, моделирующие квазистатическое во времени дипольное поле Земли, так и решения, похожие во многих отношениях на магнитное поле Солнца, обладающее 22-летним циклом.

Еще одно решающее преимущество подхода, включающего случайные флуктуации, связано с тем, что до некоторой степени можно применять динамические соображения в противоположность чисто кинематическим. В кинематической теории кинематическое поле скорости

$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ предполагается известным детально или по крайней мере статистически, если рассматриваются случайные флуктуации и изучается его влияние на поведение магнитного поля. В динамической теории считается, что $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ должно удовлетворять соответствующим уравнениям движения (обычно уравнениям Навье – Стокса, в которые в зависимости от контекста включены силы плавучести, кориолисовы и лоренцевы силы), и снова исследуется влияние поля скорости на эволюцию магнитного поля. Лишь с появлением "электродинамики усредненного поля" Брагинского и Штейнбека, Краузе, Рёдлера стал возможен прогресс в динамических аспектах теории динамо. В сравнении с хорошо развитой кинематической теорией динамическая теория еще относительно малоработана. Однако за последние несколько лет ситуация изменилась, и можно ожидать, что в ближайшие десять лет динамическая теория будет доведена до такого же уровня, как и кинематическая.

Общая структура книги такова. Гл. 2 посвящена простым предварительным результатам, касающимся структуры и диффузии магнитного поля в стационарном проводнике. В гл. 3 мы коснемся влияния взаимодействия конвективных и диффузных эффектов на поведение магнитного поля в движущейся жидкости. В гл. 4 и 5 мы отключимся от чисто математического рассмотрения и дадим необходимый краткий обзор наблюдаемых свойств земного магнитного поля (и полей других планет) и магнитного поля Солнца (и других астрофизических полей) и расскажем о связанных с ними физических свойствах этих тел. Эти главы предназначены для того, чтобы дать подробную мотивировку материалу последующих глав. Некоторым читателям такая мотивировка может показаться излишней, однако она необходима, в частности, когда мы перейдем к изучению конкретных динамических моделей при рассмотрении предельных процессов, для которых различные безразмерные числа, характеризующие систему, очень малы или очень велики. Желательно, чтобы такие предельные процессы по крайней мере не противоречили наблюдениям в конкретной сфере применимости теории.

В гл. 6 мы дадим постановку кинематической проблемы динамо, получим множество точных результатов для ламинарного случая (включая различные теоремы антидинамо) и кратко опишем метод Булларда – Геллмана. В гл. 7 будет проанализировано влияние случайного поля скорости с нулевым средним значением (которое можно представить себе по традиции как турбулентность или как поле случайных волн) на эволюцию магнитного поля. Тот же подход будет развит далее в гл. 8 в связи с обсуждением теории Брагинского (в формулировке Соурда [198]) в рамках электродинамического усредненного поля. В гл. 9 будут исследованы свойства "уравнений динамо", вытекающих

из теории усредненного поля, и описаны различные попытки решения (аналитического и численного) этих уравнений.

Гл. 10 – 12 посвящены динамической теории на современном уровне ее понимания. Если в результате действия случайного поля скорости магнитное поле растет, то сила Лоренца начнет оказывать обратное влияние на движение двояким образом: во-первых, растущее поле стремится подавить турбулентные флуктуации, которые частично или полностью ответственны за его рост; во-вторых, средняя сила Лоренца видоизменяет любое первоначально имеющееся среднее поле скорости (или генерирует среднее поле скорости, если последнее вначале отсутствовало). Эти эффекты проанализированы в гл. 10, 11 и 12. В гл. 12 рассмотрена также модель динамо двух связанных дисков [180]. Хотя эта модель имеет только три степени свободы (по сравнению с дважды бесконечным числом степеней свободы жидкого проводника), в ней правильно выражены связи между магнитными и динамическими методами, и поведение решений уравнений динамо (которые существенно не тривиальны) представляет необычайный интерес в свете проблемы объяснения случайных обращений земного магнитного поля (см. гл. 4).

Кинематическая теория на современном уровне знаний неизбежно должна занять довольно большую, чем она того заслуживает, долю книги. Однако следует напомнить, что любые результаты, которые могут быть получены в кинематической теории на базе минимального предположения, что $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – кинематически возможное, но во всех других отношениях произвольное поле скорости, будут иметь большую общность, чем результаты, полученные в любой последовательно принятой для определения \mathbf{u} динамической модели. Важно найти эту общность, поскольку, хотя неопределенности в отношении уравнений, определяющих эволюцию магнитного поля (т.е. уравнений Максвелла и закона Ома), почти отсутствуют, имеется много неопределенностей, касающихся применимости различных динамических моделей к магнитным полям Земли и Солнца. Еще неизвестно, например, каков источник энергии движений в ядре, реализующих земное динамо. В такой ситуации особую ценность представляют любые результаты, которые не зависят от деталей определяющих динамических уравнений (каковы бы они не были). По этой причине следует, возможно, приветствовать тот факт, что рассмотрение динамических соображений отнесено к последним трем главам.

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАГНИТНОЙ КИНЕМАТИКИ

2.1. Структурные свойства \mathbf{B} -поля

В разд. 2.1–2.4 мы рассмотрим основные свойства мгновенных распределений магнитного поля $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, не интересуясь пока его зависимость от времени. Первое и, может быть, наиболее фундаментальное из этих свойств состоит в том, что для любой замкнутой поверхности S с единичной нормалью \mathbf{n} , направленной наружу, справедливо соотношение

$$\int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = 0, \quad (2.1)$$

т.е. изолированных магнитных полюсов не существует. Из глобального утверждения (2.1) вытекает существование однозначного векторного потенциала $\mathbf{A}(\mathbf{x})$, удовлетворяющего соотношениям

$$\mathbf{B} = \text{rot } \mathbf{A}, \quad \text{div } \mathbf{A} = 0. \quad (2.2)$$

Этим равенствам удовлетворяет не единственный потенциал, поскольку, не изменяя \mathbf{B} , к \mathbf{A} можно добавить градиент произвольной гармонической функции. Однако в задачах для бесконечной области векторный потенциал можно сделать полностью однозначным, наложив граничное условие

$$\mathbf{A} \rightarrow 0 \quad \text{при } |\mathbf{x}| \rightarrow \infty. \quad (2.3)$$

Из равенства (2.1) следует, что в точках, где \mathbf{B} дифференцируема,

$$\text{div } \mathbf{B} = 0, \quad (2.4)$$

а при переходе через произвольную поверхность S_d , на которой скачком изменяются физические свойства среды (или терпят разрыв другие рассматриваемые поля, например поле скорости),

$$[\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}] = (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})_+ - (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B})_- = 0, \quad (2.5)$$

где индексы "+" и "-" относятся к двум сторонам поверхности S_d , а \mathbf{n} в данном случае представляет собой единичную нормаль к S_d , направленную от стороны с индексом "-" к стороне с индексом "+". Для обозначения таких поверхностных величин мы будем всегда использовать квадратные скобки.

Силовые линии **В**-поля (или "**В**-линии") определяются как интегральные кривые дифференциальных уравнений

$$d\mathbf{x} \times \mathbf{B} = 0. \quad (2.6)$$

В исключительных случаях **В**-линия может быть замкнутой. В более общем случае она может покрывать замкнутую поверхность S , т.е. если проследить за силовой линией достаточно далеко, то она пройдет как угодно близко от любой точки поверхности S . **В**-линия может также заполнять пространство в том смысле, что если проследить за ней достаточно далеко, то она пройдет как угодно близко от любой точки трехмерной области V . Примеры конечных и всюду дифференцируемых соленоидальных **В**-полей, обладающих этим свойством, пока не найдены. Тем не менее это утверждение, по-видимому, невозможно опровергнуть из топологических соображений, и кажется вполне вероятным, что в действительности **В**-поля произвольной степени сложности будут в общем случае заполнять пространство.

Пусть далее C — произвольная (не имеющая узлов) замкнутая кривая, охватываемая открытой ориентируемой поверхностью S с нормалью \mathbf{n} . Поток Φ поля **В** через поверхность S определяется выражением

$$\Phi = \int_S \mathbf{B} \cdot \mathbf{n} dS = \oint_C \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.7)$$

где криволинейный интеграл берется в направлении движения правого винта относительно нормали к S . *Силовой трубкой* называется совокупность **В**-линий, проходящих через замкнутую кривую (обычно малого или бесконечно малого размера). В силу (2.1) поток Φ вдоль силовой трубки остается постоянным.

Мерой структурной сложности **В**-поля служит набор интегралов вида

$$I_m = \int_{V_m} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} d^3\mathbf{x} \quad (m = 1, 2, 3 \dots), \quad (2.8)$$

где V_m — произвольный объем, охватываемый поверхностью S_m , на которой $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$. Предположим, например, что **В** обращается тождественно в нуль всюду, кроме двух силовых трубок, которые занимают объемы бесконечно малого сечения V_1 и V_2 , выделяемые замкнутыми кривыми C_1 и C_2 (рис. 2.1, а), и пусть Φ_1 и Φ_2 — соответствующие потоки. Заметим, что если трубки сцеплены так, как показано на рисунке, а направления полей в них таковы, как это указано стрелками, то каждая трубка имеет правовинтовую ориентацию относительно другой трубки; при изменении направления одной из стрелок ориентация становится левовинтовой; изменение направлений обеих стрелок оставляет

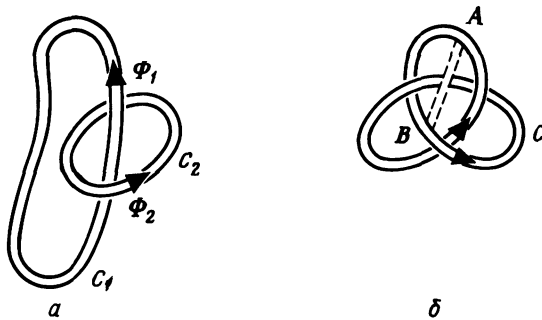


Рис. 2.1.

а — две силовые трубки сцеплены таким образом, что соответствующая магнитная спиральность положительна; б — трубка тока, имеющая форму правостороннего трилистного узла. Если между точками А и В вставить равные и противоположные по направлению токовые элементы, то получим две трубки тока, сцепленные так, как указано на рис. а

ориентацию правовинтовой. Для изображенной на рисунке конфигурации величину $\mathbf{B} d^3 \mathbf{x}$, очевидно, можно заменить на кривой C_1 величиной $\Phi_1 d\mathbf{x}$, а на кривой C_2 — величиной $\Phi_2 d\mathbf{x}$, что дает

$$I_1 = \Phi_1 \oint_{C_1} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \Phi_1 \Phi_2 \quad (2.9)$$

и аналогично

$$I_2 = \Phi_2 \oint_{C_2} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x} = \Phi_1 \Phi_2. \quad (2.10)$$

В более общем случае, когда трубки обвиваются одна вокруг другой N раз (т.е. N — число витков C_1 относительно C_2),

$$I_1 = I_2 = \pm N \Phi_1 \Phi_2, \quad (2.11)$$

причем знак "+" или "-" выбирается в соответствии с относительной право- или левовинтовой ориентацией трубок. Следовательно, существует глубокая связь между интегралами I_1 и I_2 и фундаментальным топологическим инвариантом N пар кривых C_1 и C_2 .

Если \mathbf{B} -поле имеет ограниченную пространственную протяженность (т.е. $\mathbf{B} \equiv 0$ вне некоторой достаточно большой сферы), то в качестве одного из объемов, по которым проводится интегрирование, можно выбрать все трехмерное пространство V_∞ ; причем соответствующий интеграл обозначается как I_∞ . Очевидно, для случая двух сцепленных между собой силовых трубок

$$I_\infty = I_1 + I_2. \quad (2.12)$$

В более общем случае, когда V_m можно выбрать так, что $V_\infty = \bigcup_{m=1}^{\infty} V_m$, то

$$I_\infty = \sum_{m=1}^{\infty} I_m. \quad (2.13)$$

Если отдельная силовая трубка (с потоком Φ), прежде чем замкнуться, обвивается вокруг себя (т. е. на ней имеется узел), то интеграл I_∞ для соответствующего магнитного поля в общем случае не будет обращаться в нуль. Простейшая нетривиальная возможность продемонстрирована на рис. 2.1, б: кривая C представляет собой правовинтовой трилистный узел. Если между точками A и B вставить два одинаковых элемента с противоположно направленными полями, то становится ясно, что этот узел эквивалентен конфигурации рис. 2.1, а с $\Phi_1 = \Phi_2 = \Phi$, так что $I = 2\Phi^2$. Завязанные трубки таким способом всегда можно разложить на две или большее число сцепленных трубок.

Может, конечно, случиться, что $\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} \equiv 0$. Хорошо известно, что это необходимое и достаточное условие существования скалярных функций $\varphi(\mathbf{x})$ и $\psi(\mathbf{x})$, удовлетворяющих соотношениям

$$\mathbf{A} = \varphi \nabla \varphi, \quad \mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \varphi. \quad (2.14)$$

В этом случае \mathbf{B} -линии представляют собой линии пересечения поверхностей $\varphi = \text{const}$ и $\psi = \text{const}$, а \mathbf{A} -линии везде ортогональны к поверхностям $\varphi = \text{const}$. Из проведенного выше обсуждения ясно, что \mathbf{B} -поля, имеющие сцепленные или заузленные \mathbf{B} -линии, не допускают такого представления.

То же ограничение применимо и при использовании переменных Клебша φ, ψ, χ , определенных (если они существуют) равенствами

$$\mathbf{A} = \varphi \nabla \varphi + \nabla \chi, \quad \mathbf{B} = \nabla \psi \times \nabla \varphi. \quad (2.15)$$

Если, например, \mathbf{B} -поле можно представить в таком виде и φ, ψ, χ — однозначные дифференцируемые функции \mathbf{x} , то

$$\begin{aligned} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B} &= \nabla \chi \cdot (\nabla \psi \times \nabla \varphi), \\ I_m &= \int_{V_m} \nabla \chi \cdot (\nabla \psi \times \nabla \varphi) d^3 \mathbf{x} = \int_{V_m} \nabla \cdot (\chi \nabla \psi \times \nabla \varphi) d^3 \mathbf{x} = \\ &= \int_{S_m} \chi \mathbf{n} \cdot \mathbf{B} dS = 0, \end{aligned} \quad (2.16)$$

поскольку $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$ на поверхности S_m . Обратное, если $I_m \neq 0$ (как это случится, если \mathbf{B} -линии сцеплены или имеют узлы), то \mathbf{A} и \mathbf{B} невозможно представить везде в виде (2.15) (хотя локально такое представление может быть полезным).

Особенности локальной структуры поля, для которого величина $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V}$ не обращается в нуль, можно проиллюстрировать примером (в декартовых координатах)

$$\mathbf{V} = (V_0, 0, 0), \quad \mathbf{A} = (A_0, -\frac{1}{2} B_0 z, \frac{1}{2} B_0 y), \quad (2.17)$$

где A_0 и B_0 — постоянные. Заметим, что возможные переменные Клебша имеют вид

$$\varphi = z, \quad \psi = B_0 y, \quad \chi = A_0 x - \frac{1}{2} B_0 yz; \quad (2.18)$$

замкнутая поверхность, на которой $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0$, здесь отсутствует и указанная выше проблема не возникает. Ясно, что $\mathbf{A} \cdot \mathbf{V} = A_0 B_0$, и \mathbf{A} -линии представляют собой эллипсы

$$x = (2A_0/B_0)t, \quad y = \cos t, \quad z = \sin t. \quad (2.19)$$

Эти эллипсы являются правовинтовыми или левовинтовыми в зависимости от того, положительна или отрицательна величина $A_0 B_0$.

Величина $\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A}$ для произвольного векторного поля $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ называется *плотностью спиральности* поля \mathbf{A} . Интеграл I_∞ от этой величины по объему V_∞ представляет собой в таком случае спиральность поля \mathbf{A} , интегралы I_m по объемам V_m можно назвать "неполными спиральностями". Плотность спиральности является псевдоскалярной величиной, так как она равна произведению полярного вектора на аксиальный. Поэтому при переходе от правой системы координат к левой ее знак изменяется на противоположный. Следовательно, поле \mathbf{A} , обладающее "отражательной симметрией" (т.е. инвариантное относительно перехода от правой системы координат к левой, когда $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$), должно иметь равную нулю плотность спиральности. Обратное, конечно, не справедливо, поскольку при $\mathbf{A} \cdot \text{rot } \mathbf{A} = 0$ могут не обратиться в нуль другие псевдоскалярные величины, например величина $\text{rot } \mathbf{A} \cdot \text{rot } \text{rot } \mathbf{A}$.

2.2. Представления магнитного поля

В сферической геометрии наиболее естественно воспользоваться сферическими координатами (r, θ, φ) , которые связаны с декартовыми координатами (x, y, z) соотношениями

$$x = r \sin \theta \cos \varphi, \quad y = r \sin \theta \sin \varphi, \quad z = r \cos \theta. \quad (2.20)$$

Напомним прежде всего некоторые основные свойства, которыми обладают функции в этой системе координат.

Пусть $\psi(r, \theta, \varphi)$ – произвольная функция координат. Тогда

$$\Delta \psi = \frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial \psi}{\partial r} + \frac{1}{r^2} L^2 \psi, \quad (2.21)$$

где

$$L^2 \psi = \left(\frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} \sin \theta \frac{\partial}{\partial \theta} + \frac{1}{\sin^2 \theta} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} \right) \psi. \quad (2.22)$$

Воспользовавшись векторным тождеством

$$(\mathbf{x} \times \nabla)^2 \psi \equiv r^2 \Delta \psi - 2(\mathbf{x} \cdot \nabla) \psi - \mathbf{x} \cdot (\mathbf{x} \cdot \nabla) \nabla \psi, \quad (2.23)$$

получим

$$L^2 \psi = (\mathbf{x} \times \nabla)^2 \psi. \quad (2.24)$$

Здесь L^2 – оператор количества движения, играющий важную роль в квантовой механике. Его собственные значения равны $-n(n+1)$

($n = 0, 1, 2, \dots$), а соответствующие собственные функции являются поверхностными гармониками

$$S_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n A_n^m P_n^m(\cos \theta) e^{im\varphi}, \quad (2.25)$$

где $P_n^m(\cos \theta)$ – присоединенные полиномы Лежандра, а A_n^m – произвольные комплексные постоянные, т.е.

$$L^2 S_n = -n(n+1) S_n. \quad (2.26)$$

Пусть теперь $f(r, \theta, \varphi)$ – любая гладкая функция, среднее от которой по сферам $r = \text{const}$ обращается в нуль, т.е.

$$4\pi r^2 \langle f \rangle \equiv \int_0^{2\pi} \int_0^\pi f(r, \theta, \varphi) \sin \theta d\theta d\varphi = 0. \quad (2.27)$$

Мы можем разложить f по поверхностным гармоникам

$$f(r, \theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) S_n(\theta, \varphi), \quad (2.28)$$

где в силу (2.27) исключен член с $n = 0$. Функции S_n удовлетворяют соотношениям ортогональности

$$\langle S_n S_{n'} \rangle = 0, \quad (n \neq n'), \quad (2.29)$$

и поэтому коэффициенты $f_n(r)$ равны

$$f_n(r) = \langle f S_n \rangle / \langle S_n^2 \rangle. \quad (2.30)$$

Если теперь

$$L^2 \psi = f(r, \theta, \varphi), \quad (2.31)$$

то ясно, что оператор L^2 можно обратить:

$$\psi = L^{-2} f = \sum_{n=1}^{\infty} f_n(r) [n(n+1)]^{-1} S_n(\theta, \varphi), \quad (2.32)$$

причем результат также удовлетворяет равенству $\langle \psi \rangle = 0$.

Заметим, что любая функция вида $f = \mathbf{x} \cdot \text{rot } \mathbf{A}$, где \mathbf{A} — произвольное гладкое векторное поле, удовлетворяет условию (2.27). Действительно,

$$\int_{S(r)} \mathbf{x} \cdot \text{rot } \mathbf{A} dS = r \int_{S(r)} \mathbf{n} \cdot \text{rot } \mathbf{A} dS = r \int_{V(r)} \text{div rot } \mathbf{A} dV = 0, \quad (2.33)$$

где $S(r)$ — поверхность сферы радиуса r , а $V(r)$ — объем этой сферы.

Тороидальным магнитным полем \mathbf{V}_T называется любое поле вида

$$\mathbf{V}_T = \text{rot}(\mathbf{x} T(\mathbf{x})) = -\mathbf{x} \times \nabla T, \quad (2.34)$$

где $T(\mathbf{x})$ — любая скалярная функция координат. Заметим, что добавление к T произвольной функции r не изменяет \mathbf{V}_T , поэтому без потери общности можно полагать, что $\langle T \rangle = 0$. Отметим далее, что $\mathbf{x} \cdot \mathbf{V}_T = 0$; следовательно, силовые линии тороидального поля (\mathbf{V} -линии) лежат на сферических поверхностях $r = \text{const}$.

Полоидальным магнитным полем \mathbf{V}_P называется любое поле вида

$$\mathbf{V}_P = \text{rot rot}(\mathbf{x} P(\mathbf{x})) = -\text{rot}(\mathbf{x} \times \nabla P), \quad (2.35)$$

где $P(\mathbf{x})$ — произвольная скалярная функция координат, причем снова можно полагать, что $\langle P \rangle = 0$. В общем случае \mathbf{V}_P должно иметь ненулевую радиальную компоненту.

Из этих определений ясно, что ротор тороидального поля является полоидальным полем. Более того, справедливо также и обратное утверждение. Действительно,

$$\text{rot rot rot}(\mathbf{x} P) = -\Delta \text{rot}(\mathbf{x} P) = -\text{rot}(\mathbf{x} \Delta P). \quad (2.36)$$

Последнее тождество тривиально проверяется в декартовых координатах.

Предположим теперь, что

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_P + \mathbf{V}_T = \text{rot rot}(\mathbf{x} P) + \text{rot}(\mathbf{x} T). \quad (2.37)$$

Тогда

$$\mathbf{x} \cdot \mathbf{V} = -(\mathbf{x} \times \nabla)^2 P, \quad \mathbf{x} \cdot \text{rot } \mathbf{V} = -(\mathbf{x} \times \nabla)^2 T, \quad (2.38)$$

и, таким образом, P и T можно записать в виде

$$P \doteq -L^{-2} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}), \quad T = -L^{-2} \mathbf{x} \cdot \text{rot } \mathbf{B}. \quad (2.39)$$

Обратно, задавшись произвольным соленоидальным полем \mathbf{B} , мы определим, согласно (2.39), P и T , которые удовлетворяют равенству (2.37), т.е. разложение \mathbf{B} на полоидальную и тороидальную составляющие всегда возможно.

Если мы применим к равенству (2.37) операцию, обратную ротору, то получим векторный потенциал поля

$$\mathbf{A} = \text{rot} (\mathbf{x} P) + \mathbf{x} T + \nabla U, \quad (2.40)$$

где U — скалярная "функция интегрирования". Поскольку $\text{div } \mathbf{A} = 0$, то U и T связаны соотношением

$$\Delta U = -\text{div} (\mathbf{x} T). \quad (2.41)$$

Благодаря этому условию величину $\mathbf{x} T + \nabla U$ можно представить в виде некоторого полоидального поля

$$\mathbf{x} T + \nabla U = \text{rot rot} (\mathbf{x} S), \quad S = -L^{-2} (r^2 T + \mathbf{x} \cdot \nabla U). \quad (2.42)$$

Тороидальная часть \mathbf{A} равна просто

$$\mathbf{A}_T = \text{rot} (\mathbf{x} P) = -\mathbf{x} \times \nabla P. \quad (2.43)$$

Осесимметричные поля

Поле \mathbf{B} называется осесимметричным относительно линии Oz (оси симметрии), если оно инвариантно относительно поворотов вокруг Oz . В этом случае ясно, что определяющие скаляры P и T [см. (2.37)] не зависят от азимутального угла φ , т.е. $T = T(r, \theta)$, $P = P(r, \theta)$. Тороидальное поле $\mathbf{B}_T = -\mathbf{x} \times \nabla T$ принимает вид

$$\mathbf{B}_T = (0, 0, B_\varphi), \quad B_\varphi = -\partial T / \partial \theta, \quad (2.44)$$

и, таким образом, \mathbf{B}_T -линии представляют собой окружности $r = \text{const}$, $\theta = \text{const}$ с центром на оси Oz . Аналогично,

$$\mathbf{A}_T = (0, 0, A_\varphi), \quad A_\varphi = -\partial P / \partial \theta, \quad (2.45)$$

и соответственно в сферических координатах

$$\mathbf{B}_P = \text{rot } \mathbf{A}_T = \left(-\frac{1}{r^2 \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial \theta}, \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial \chi}{\partial r}, 0 \right), \quad (2.46)$$

где

$$\chi = A_\varphi r \sin \theta = -r \sin \theta \partial P / \partial \theta. \quad (2.47)$$

Скаляр χ аналогичен функции тока Стокса $\psi(r, \theta)$ для несжимаемых осесимметричных полей скорости. \mathbf{B} -линии описываются равенствами

$\chi = \text{const}$, а дифференциал

$$2\pi d\chi = (B_\theta dr - B_r d\theta) 2\pi r \sin\theta \quad (2.48)$$

представляет собой поток \mathbf{B} через бесконечно малое кольцо, полученное вращением вокруг оси Oz линейного элемента, соединяющего точки (r, θ) и $(r + dr, \theta + d\theta)$. Поэтому χ лучше назвать *силовой функцией* поля \mathbf{B} .

В тех случаях, когда не возникает сомнений, мы будем опускать индекс φ у B_φ и A_φ и записывать \mathbf{B} просто в виде

$$\mathbf{B} = B i_\varphi + \text{rot} (A i_\varphi), \quad (2.49)$$

где i_φ — единичный вектор в направлении φ ¹⁾.

Двумерная аналогия

Ввиду геометрических усложнений, свойственных сферической геометрии, часто полезно найти более простые представления поля. В частности, при рассмотрении процессов в сферическом кольце $r_1 < r < r_2$ с $r_2 - r_1 \ll r_1$ целесообразно воспользоваться локальными декартовыми координатами (рис. 2.2). Ось Oz в данном случае соответствует радиальному направлению (т.е. вертикальному направлению для наблюдателя, расположенного на поверхности Земли или Солнца), ось Ox направлена на юг, а ось Oy — на восток; поэтому координаты (r, θ, φ) переходят в (z, x, y) .

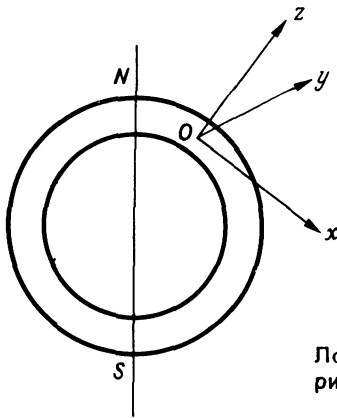


Рис. 2.2.

Локально декартова система координат в сферическом кольце; ось x направлена к югу, y — на восток и z — вертикально вверх.

¹⁾ В общем случае i_q будет обозначать единичный вектор, направленный в сторону увеличения q , где q — любая обобщенная координата.

Разложение поля, аналогичное (2.37), приобретает в таком случае вид

$$\mathbf{V} = \mathbf{V}_P + \mathbf{V}_T = \text{rot rot}(\mathbf{i}_z P) + \text{rot}(\mathbf{i}_z T), \quad (2.50)$$

а P и T вычисляются из равенств

$$\Delta_2 P = -\mathbf{i}_z \cdot \mathbf{V}, \quad \Delta_2 T = -\mathbf{i}_z \cdot \text{rot } \mathbf{V}, \quad (2.51)$$

где Δ_2 — двумерный лапласиан

$$\Delta_2 = (\mathbf{i}_z \times \nabla)^2 = \partial^2 / \partial x^2 + \partial^2 / \partial y^2. \quad (2.52)$$

Если поле \mathbf{V} не зависит от координаты y (аналогия осевой симметрии), то $P = P(x, z)$, $T = T(x, z)$. "Тороидальное" и "полоидальное" поля приобретают вид

$$\mathbf{V}_T = B \mathbf{i}_y, \quad B = -\partial T / \partial x, \quad (2.53)$$

$$\mathbf{V}_P = \text{rot}(A \mathbf{i}_y), \quad A = -\partial P / \partial x, \quad (2.54)$$

\mathbf{V} -линии описываются теперь равенством $A(x, z) = \text{const}$, а A является силовой функцией \mathbf{V}_P -поля.

Отвлекаясь от случая сферического кольца, можно сказать, что двумерные поля представляют самостоятельный интерес и рассмотрение идеализированной двумерной ситуации часто позволяет получить ценную информацию. Возможно, более естественно в общем случае считать ось z направлением инвариантности \mathbf{V} и представить поле в виде

$$\mathbf{V} = \text{rot}(A(x, y) \mathbf{i}_z) + B(x, y) \mathbf{i}_z. \quad (2.55)$$

2.3. Соотношения между электрическим током и магнитным полем

В установившемся состоянии магнитное поле $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ связано с распределением электрического тока $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ законом Ампера, который в интегральной форме имеет вид

$$\oint_C \mathbf{V} \cdot d\mathbf{x} = \mu_0 \int_S \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} dS, \quad (2.56)$$

где S — любая открытая ориентируемая поверхность, ограниченная замкнутой кривой C , а μ_0 — постоянная, связанная с выбором системы единиц¹⁾. Если \mathbf{V} измерено в Вб/м² (1 Вб/м² = 10⁴ Гс), а \mathbf{J} — в А/м², то

$$\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Вб/А} \cdot \text{м}. \quad (2.57)$$

¹⁾ Для задач, рассматриваемых в данной книге, эффекты, связанные с проницаемостью, вообще не существенны, и мы с самого начала будем ими пренебрегать.

Из равенства (2.56) следует, что в любой области, в которой \mathbf{V} и \mathbf{J} дифференцируемы,

$$\operatorname{rot} \mathbf{V} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \operatorname{div} \mathbf{J} = 0, \quad (2.58)$$

а соответствующие граничные условия на поверхностях разрыва имеют вид

$$[\mathbf{n} \times \mathbf{V}] = \mu_0 \mathbf{J}_S, \quad [\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}] = 0, \quad (2.59)$$

где \mathbf{J}_S (А/м) – распределение поверхностного тока. Поверхностные токи (подробно сосредоточенным вихревым слоям) могут выжить только в случае, когда диссипативные процессы не ведут к диффузному уширению, т.е. лишь в идеальном проводнике. В жидкостях или твердых телах, обладающих конечной проводимостью, мы можем обычно считать, что $\mathbf{J}_S = 0$, и тогда из равенств (2.59) и (2.5) вытекает, что все компоненты \mathbf{V} непрерывны:

$$[\mathbf{V}] = 0. \quad (2.60)$$

В неустановившемся состоянии закон (2.56) обычно изменяют таким образом, чтобы включить максвелловский ток смещения. Однако хорошо известно, что при изучении явлений, характерное время протекания которых велико по сравнению со временем распространения электромагнитной волны через рассматриваемую область, током смещения можно пренебречь. Это условие, несомненно, выполнено в геофизике и физике Солнца, и поэтому мы будем повсюду пренебрегать током смещения, т.е. электромагнитные волны будут исключены из основной системы уравнений. Получающиеся уравнения являются полностью классическими (т.е. нерелятивистскими); их иногда называют "домаксвелловскими уравнениями".

Если, согласно определению (2.2), ввести векторный потенциал \mathbf{A} , то (2.58) приобретает вид векторного уравнения Пуассона

$$\Delta \mathbf{A} = -\mu_0 \mathbf{J}. \quad (2.61)$$

При переходе через поверхность разрыва векторный потенциал обычно непрерывен (поскольку $\mathbf{V} = \operatorname{rot} \mathbf{A}$ обычно конечно), а из равенства (2.60) дополнительно следует, что градиент \mathbf{A} в направлении нормали также должен быть непрерывным, т.е. в общем случае

$$[\mathbf{A}] = 0, \quad [(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{A}] = 0. \quad (2.62)$$

Разложение магнитного поля по мультиполям

Пусть теперь S представляет собой замкнутую поверхность, охватывающую объем V . Обозначим внешний объем через \hat{V} и предположим, что ток $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ отличен от нуля только в области V и $\mathbf{J}(\mathbf{x}) \equiv 0$ в \hat{V} .

Чтобы исключить возможность существования поверхностного тока на S , мы должны также предположить, что $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J}(\mathbf{x}) = 0$ на поверхности S . Из (2.58) следует, что в области \hat{V} ротор \mathbf{B} равен нулю, а потому здесь существует скалярный потенциал $\Psi(\mathbf{x})$ такой, что в области \hat{V}

$$\mathbf{B} = -\nabla\Psi, \quad \Delta\Psi = 0. \quad (2.63)$$

Заметим, что потенциал Ψ , вообще говоря, не однозначен. Однако если предположить, как это мы и сделаем, что \hat{V} — односвязная область, то Ψ становится однозначным. Мы можем дополнительно предположить, что $\Psi \rightarrow 0$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$.

Если выбрать начало координат O в области V , то общее решение уравнения (2.63), обращающееся в нуль на бесконечности, можно записать в виде

$$\Psi(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \Psi^{(n)}(\mathbf{x}), \quad \Psi^{(n)}(\mathbf{x}) = -\mu_{ij\dots s}^{(n)}(r^{-1}),_{ij\dots s}, \quad (2.64)$$

где $\mu_{ij\dots s}^{(n)}$ — тензор мультипольного момента ранга n , $r = |\mathbf{x}|$, а индекс i после запятой означает дифференцирование по x_i . В силу (2.1) первый член с $n = 0$ обращается в нуль. Члены с $n = 1, 2$ дают соответственно диполь и квадруполь; в векторных обозначениях

$$\Psi^{(1)}(\mathbf{x}) = -\mu^{(1)} \cdot \nabla(r^{-1}), \quad \Psi^{(2)}(\mathbf{x}) = -\mu_{ij}^{(2)}(r^{-1})_{ij}. \quad (2.65)$$

Аналогично выписываются и члены более высокого порядка.

Очевидно, в области \hat{V} поле \mathbf{B} можно разложить в ряд

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{n=1}^{\infty} \mathbf{B}^{(n)}(\mathbf{x}), \quad B_{\alpha}^{(n)}(\mathbf{x}) = \mu_{ij\dots s}^{(n)}(r^{-1})_{ij\dots s\alpha}, \quad (2.66)$$

а поскольку $\Delta(r^{-1}) = 0$ в области \hat{V} , то выражению для \mathbf{B}^n можно придать вид $\mathbf{B}^n = \text{rot } \mathbf{A}^{(n)}$, где

$$A_q^{(n)} = -\epsilon_{qmi} \mu_{mj\dots s}^{(n)}(r^{-1}),_{ij\dots s} \quad (2.67)$$

Таким образом, первые два члена разложения векторного потенциала, соответствующие (2.65), имеют вид

$$\mathbf{A}^{(1)}(\mathbf{x}) = -\mu^{(1)} \times \nabla(r^{-1}), \quad \mathbf{A}^{(2)}(\mathbf{x}) = -\epsilon_{qmi} \mu_{mj}^{(2)}(r^{-1}),_{ij}. \quad (2.68)$$

Тензоры $\mu^{(n)}$ можно определить как линейные функционалы от $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ следующим образом. Выпишем решение уравнения (2.61), обращающееся в нуль на бесконечности:

$$\mathbf{A}(\mathbf{x}) = \frac{\mu_0}{4\pi} \int_V \frac{\mathbf{J}(\mathbf{x}')}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} d^3\mathbf{x}' \quad (2.69)$$

(воспользовавшись тем, что $\nabla \cdot \mathbf{J} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$ на S , легко проверить, что это решение удовлетворяет условию $\nabla \cdot \mathbf{A} = 0$). Разлагая функцию $|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1}$ в ряд Тейлора

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|^{-1} = \sum_n \frac{(-1)^n}{n!} x'_i x'_j \dots x'_s (r^{-1})_{,ij\dots s} \quad (2.70)$$

и подставляя это в (2.69), немедленно находим $\mathbf{A} = \Sigma \mathbf{A}^n(\mathbf{x})$, где

$$A_q^{(n)}(\mathbf{x}) = c_{ij\dots sq} (r^{-1})_{,ij\dots s},$$

$$c_{ij\dots sq} = \frac{\mu_0}{4\pi} \frac{(-1)^n}{n!} \int_V x_i x_j \dots x_s J_q(\mathbf{x}) d^3\mathbf{x}. \quad (2.71)$$

Сравнение равенств (2.67) и (2.71) дает затем соотношения эквивалентности:

$$c_{ij\dots sq} = -\varepsilon_{qmi} \mu_{mj\dots s}^{(n)},$$

$$\mu_{mj\dots s}^{(n)} = -\frac{1}{2} \varepsilon_{qmi} c_{ij\dots sq}. \quad (2.72)$$

В частности, для членов $n = 1, 2$ мы имеем

$$\mu^{(1)} = \frac{\mu_0}{8\pi} \int_V \mathbf{x} \times \mathbf{J} d^3\mathbf{x},$$

$$\mu_{mj}^{(2)} = -\frac{\mu_0}{16\pi} \int_V x_j (\mathbf{x} \times \mathbf{J})_m d^3\mathbf{x}. \quad (2.73)$$

Осесимметричные поля

Эти результаты упрощаются, если $\mathbf{J}(\mathbf{x})$ обладает осевой симметрией относительно направления единичного вектора $\mathbf{i}_z = \mathbf{e}$. Выбирая сферические координаты (r, θ, φ) с полярной осью z , мы, очевидно, имеем

$$\mu^{(1)} = \mu^{(1)} \mathbf{e}, \quad \mu^{(n)} = \frac{1}{4} \mu_0 \iint J_\varphi(r, \theta) r^3 \sin^2 \theta dr d\theta. \quad (2.74)$$

Момент $\mu_{mj}^{(2)}$ также должен быть осесимметричным относительно оси z , а поскольку, согласно (2.73), $\mu_{jj}^{(2)} = 0$, то, следовательно, ему можно придать вид

$$\mu_{mj}^{(2)} = \frac{3}{2} \mu^{(2)} (e_m e_j - \frac{1}{3} \delta_{mj}). \quad (2.75)$$

Полагая в равенствах (2.73) и (2.75) $m = 3, j = 3$, получаем

$$\mu^{(2)} = -\frac{1}{8} \mu_0 \iint J_\varphi(r, \theta) r^4 \sin^2 \theta \cos \theta dr d\theta. \quad (2.76)$$

Ясно, что в рассматриваемом осесимметричном случае разложение (2.64) имеет вид

$$\Psi(\mathbf{x}) = - \sum_{n=1}^{\infty} \mu^{(n)} \frac{\partial^n}{\partial z^n} \left(\frac{1}{r} \right). \quad (2.77)$$

2.4. Бессилловые поля

Мы часто будем рассматривать магнитные поля, для которых \mathbf{B} везде параллельно $\mathbf{J} = \mu_0^{-1} \text{rot } \mathbf{B}$, а потому на данном этапе полезно собрать воедино некоторые свойства таких полей¹⁾, получивших название "бессилловых" [133], поскольку соответствующая им сила Лоренца $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, конечно, тождественно обращается в нуль. Для любого бессиллового поля существует такая скалярная функция координат $K(\mathbf{x})$, что $\text{rot } \mathbf{B} = K \mathbf{B}$, $\mathbf{B} \cdot \nabla K = 0$. (2.78)

При выводе последнего равенства учтено, что $\nabla \cdot \mathbf{B} = 0$. Следовательно, K постоянно на \mathbf{B} -линиях, а если \mathbf{B} -линии покрывают поверхности, то K должно быть постоянно на каждой из таких поверхностей. В простейшем случае K постоянно везде. Применяв тогда операцию ротора к уравнению (2.78), мы немедленно получим уравнение Гельмгольца $(\Delta + K^2) \mathbf{B} = 0$. (2.79)

Заметим, однако, что в общем случае эта процедура необратима: поле \mathbf{B} , которое удовлетворяет уравнению (2.79), не должно с необходимостью удовлетворять также и уравнениям $\text{rot } \mathbf{B} = \pm K \mathbf{B}$.

Приведем простейший пример бессиллового поля с $K = \text{const}$ в декартовых координатах:

$$\mathbf{B} = B_0 (\sin Kz, \quad \cos Kz, \quad 0). \quad (2.80)$$

Свойство $\text{rot } \mathbf{B} = K \mathbf{B}$ тривиально проверяется. \mathbf{B} -линии, как указано на рис. 2.3, *a*, лежат в плоскости $x-y$ и поворачиваются с ростом z в направлении правого или левого винта в зависимости от того, положительна или отрицательна величина K . Векторный потенциал поля \mathbf{B} равен просто $\mathbf{A} = K^{-1} \mathbf{B}$, так что его плотность спиральности однородна:

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = K^{-1} \mathbf{B}^2 = K^{-1} B_0^2. \quad (2.81)$$

Если представить себе, что силовые линии замкнуты пунктирными линиями, как это указано на рисунке, то к возникающим зацеплениям можно применить рассуждения разд. 2.1.

¹⁾ В общем случае векторное поле $\mathbf{B}(\mathbf{x})$, для которого $\text{rot } \mathbf{B}$ везде параллелен \mathbf{B} , известно как *поле Бельтрами*.

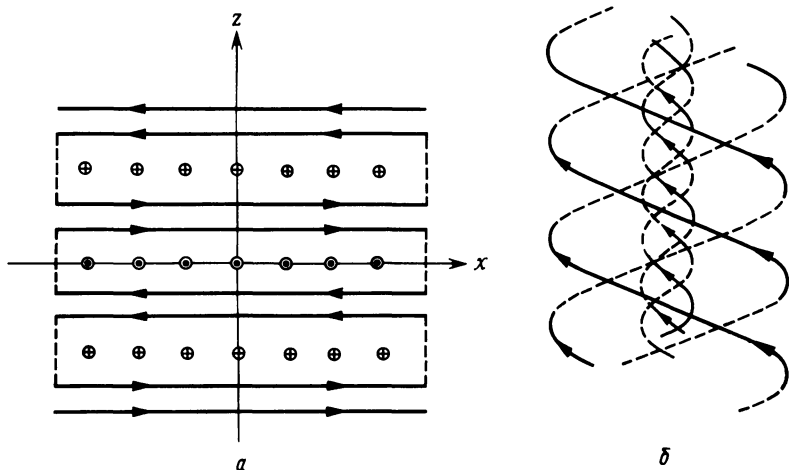


Рис. 2.3.

а — силовые линии поля (2.80) (при $K > 0$). Значок \oplus указывает, что линия направлена в положительном направлении оси y (т.е. от читателя), а \ominus — в отрицательном направлении. С увеличением z силовые линии поворачиваются в направлении левого винта. Замыкание силовых линий с помощью пунктирных сегментов дает сцепления, отвечающие положительной спиральности поля. б — типичные спиралевидные силовые линии поля (2.82); изображены сцепления отрицательного знака, соответствующие отрицательной величине K в (2.82).

Второй пример (рис. 2.3, б) бессилового поля опять с $K = \text{const}$ мы дадим в цилиндрических координатах (s, φ, z):

$$\mathbf{B} = B_0 (0, J_n(Ks), J_0(Ks)), \quad (2.82)$$

где J_n — бесселева функция порядка n . \mathbf{B} -линии здесь представляют собой спирали, лежащие на цилиндрах $s = \text{const}$. Снова $\mathbf{A} = K^{-1} \mathbf{B}$, и

$$\mathbf{A} \cdot \mathbf{B} = K^{-1} \mathbf{B}^2 = K^{-1} B_0^2 [(J_1(Ks))^2 + (J_0(Ks))^2], \quad (2.83)$$

и опять любое простое замыкание силовых линий будет приводить к зацеплениям (которые дают спиральность отрицательного знака, поскольку для рис. 2.3, б выбрано отрицательное значение K).

В приведенных примерах \mathbf{J} -поле простирается до бесконечности. В действительности не существует бессиловых полей (кроме $\mathbf{B} = 0$), для которых \mathbf{J} отлично от нуля в конечном объеме V (как в разд. 2.3), а \mathbf{B} всюду дифференцируема и ведет себя как $O(r^{-3})$ на бесконечности¹⁾.

¹⁾ Это условие означает, конечно, что единственным источником \mathbf{B} служит распределение тока \mathbf{J} и нет дополнительных "источников на бесконечности". Ясно, что главный член разложения (2.66) ведет себя как $O(r^{-3})$. Может быть, стоит упомянуть еще, что доказательство проходит и при более слабом условии $\mathbf{B} = o(r^{-3/2})$, соответствующем конечности магнитной энергии $\int T_{ii} d^3 \mathbf{x}$.

Для доказательства этого утверждения рассмотрим максвелловский тензор напряжений

$$T_{ij} = \mu_0^{-1} (B_i B_j - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{ij}), \quad (2.84)$$

обладающий свойствами

$$(\mathbf{J} \times \mathbf{B})_i = T_{ij, j}, \quad T_{ii} = -(2\mu_0)^{-1} \mathbf{B}^2, \quad (2.85)$$

и предположим, что $\mathbf{J} \times \mathbf{B} \equiv 0$. Тогда

$$0 = \int x_i T_{ij, j} d^3 \mathbf{x} = \int_{S_\infty} n_j x_i T_{ij} dS - \int T_{ii} d^3 \mathbf{x}, \quad (2.86)$$

причем объемный интеграл берется по всему пространству. Далее, поскольку $\mathbf{B} = O(r^{-3})$ при $r \rightarrow \infty$, $T_{ij} = O(r^{-6})$, то интеграл по поверхности S_∞ обращается в нуль. Следовательно, обращается в нуль интеграл от \mathbf{B}^2 и, таким образом, $\mathbf{B} \equiv 0$. Доказательство не годится, если допускаются поверхности разрыва \mathbf{B} (и тем самым T_{ij}), поскольку тогда необходимо в равенство (2.86) включить дополнительные поверхностные интегралы, которые, вообще говоря, не должны обращаться в нуль.

Бессилловые поля в сферической геометрии

Однако мы можем построить решения уравнений (2.78), которые являются бессилловыми в конечной области V , имеют равный нулю ток во внешней области \hat{V} и не исчезают на бесконечности. В важном случае, когда V представляет собой сферу радиуса $r < R$, это можно сделать точно [49] следующим образом. Пусть вначале

$$K = \begin{cases} K_0 & (r < R), \\ 0 & (r > R) \end{cases}, \quad (2.87)$$

где K_0 — постоянная. В разд. 2.2 мы показали, что магнитное поле можно разложить на полоидальную и тороидальную составляющие:

$$\mathbf{B} = \text{rot rot}(\mathbf{x}P) + \text{rot } \mathbf{x} T, \quad (2.88)$$

откуда мы имеем

$$\text{rot } \mathbf{B} = -\text{rot}(\mathbf{x} \Delta P) + \text{rot rot}(\mathbf{x}T), \quad (2.89)$$

и, таким образом, уравнениям (2.78) можно удовлетворить, если

$$T = KP \quad \text{и} \quad (\Delta + K^2)P = 0. \quad (2.90)$$

Здесь K претерпевает разрыв на поверхности $r = R$, однако непрерывность \mathbf{B} [см. (2.60)] требует, чтобы на этой поверхности T , P и $\partial P / \partial r$

были непрерывными, что эквивалентно

$$P = 0, \quad [\partial P / \partial r] = 0 \quad \text{на } r = R. \quad (2.91)$$

Простейшее решение уравнений (2.90) с граничными условиями (2.91) в сферических координатах (r, θ, φ) имеет вид

$$P(r, \theta) = \begin{cases} Ar^{-1/2} J_{3/2}(K_0 r) \cos \theta & (r < R), \\ -B_0(r - R^3/r^2) \cos \theta & (r > R), \end{cases} \quad (2.92)$$

где

$$J_{3/2}(K_0 R) = 0 \quad \text{и} \quad 3B_0 = -A(d/dR)(R^{-1/2} J_{3/2}(K_0 R)), \quad (2.93)$$

— условия, вытекающие из (2.91). Соответствующая силовая функция $\chi(r, \theta)$ описывается выражением (2.47); \mathbf{V}_P -линии определяются равенствами $\chi = \text{const}$ и изображены на рис. 2.4, а для случая, когда $K_0 < 0$ и $|K_0| R$ — наименьший нуль функции $J_{3/2}(x)$. Вне сферы ($r > R$) \mathbf{V} -линии совпадают с линиями безвихревого потока и $\mathbf{V} \sim \mathbf{V}_0 = B_0 \mathbf{i}_z$ при $r \rightarrow \infty$. В области $r < R$ \mathbf{V} -линии лежат на семействе гнездообразных тороидальных поверхностей (рис. 2.4, б). Полоидальное поле имеет нейтральную точку на $\theta = \pi/2$ при $r = r_c$, где $(d/dr)(r^{1/2} J_{3/2}(K_0 r)) = 0$. Окружность $r = r_c$, $\theta = \pi/2$ является вырожденным тором семейства, который называется "магнитной осью" поля. Каждая \mathbf{V} -линия представляет собой спираль, причем по мере движения наружу через семейство тороидальных поверхностей шаг спирали непрерывно уменьшается от бесконечности на магнитной оси до нуля на сфере $r = R$.

Еще раз отметим, что $\mathbf{A} = K^{-1} \mathbf{V}$ для $r < R$ и что неравенство (при $K_0 < 0$)

$$\int_{r < R} \mathbf{A} \cdot \mathbf{V} d^3 \mathbf{x} = K_0^{-1} \int_{r < R} \mathbf{V}^2 d^3 \mathbf{x} < 0 \quad (2.94)$$

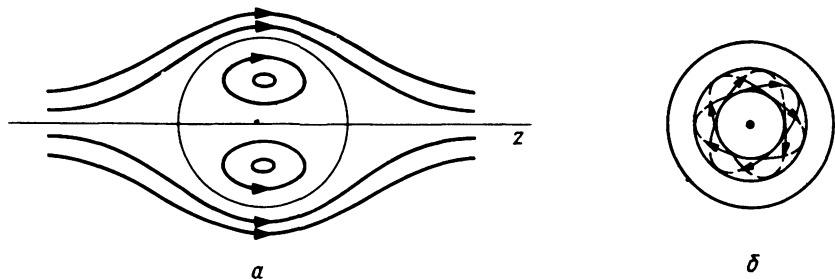


Рис. 2.4.

а — \mathbf{V}_P -линии ($\chi = \text{const}$) бессилового поля (2.92) для первого нуля $K_0 R$ функции $J_{3/2}(x)$; б — типичная \mathbf{V} -линия (спираль на тороидальной поверхности); ось симметрии на рисунке перпендикулярна плоскости страницы.

совместимо с бесспорным фактом наличия зацепления силовых линий внутри сферы. Каждая силовая линия наматывается, например, вокруг магнитной оси, которая представляет собой одну из **B**-линий поля. В общем случае **B**-линии в области $r < R$ покрывают тороидальные поверхности; однако если шаг p , который определяется как приращение азимутального угла $\Delta\phi$ при однократной обмотке тора **B**-линией, равен $2\pi m/n$, где m и n целые числа (которые, как можно предположить, не обладают общим множителем), то **B**-линии замкнуты. Более того, если $m \geq 2$ и $n \geq 3$, кривая имеет узлы! Соответствующий узел называется тороидальным узлом $K_{m,n}$, причем $K_{2,3}$ совпадает с трилистным узлом, изображенным на рис. 2.1, б. Отметим любопытное свойство этого **B**-поля. Если мы возьмем подсемейство, состоящее из **B**-линий по одной на каждой тороидальной поверхности, то каждый тороидальный узел будет представлен в этом подсемействе один и только один раз, поскольку величина $p/2\pi$, непрерывно уменьшаясь от бесконечности до нуля, проходит через каждое рациональное число m/n один раз. И все же замкнутые **B**-линии являются исключением, они составляют подсемейство меры нуль в семействе всех **B**-линий внутри сферы!

Более сложные бессиловые поля можно построить, выбрав нули более высокого порядка функции $J_{\frac{1}{2}}(K_0 R)$ (в этом случае имеется более чем одна магнитная ось) или заменив (2.92) более общими решениями уравнений (2.90). Однако если говорить о прототипе тех пространственных структур, которых мы коснемся позже, то приведенных выше примеров вполне достаточно.

2.5. Лагранжевы переменные и эволюция магнитного поля

Рассмотрим теперь эволюцию магнитного поля в движущейся проводящей среде. Мы будем описывать движение с помощью поля смещений $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$, изображающего положение той жидкой частицы в момент t , которая в исходный момент $t = 0$ проходила через точку \mathbf{a} ; в частности

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}, \quad (\partial x_i / \partial a_j)_{t=0} = \delta_{ij}. \quad (2.95)$$

Каждая частица характеризуется начальным положением \mathbf{a} . Ясно, что для истинного движения непрерывной среды преобразование $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ является однозначным и с равным правом можно рассматривать обратное преобразование $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x}, t)$.

Скорость частицы равна

$$\mathbf{u}^L(\mathbf{a}, t) = (\partial \mathbf{x} / \partial t)_{\mathbf{a}} = \mathbf{u}(\mathbf{x}, t). \quad (2.96)$$

Здесь $\mathbf{u}^L(\mathbf{a}, t)$ – скорость в лагранжевом представлении, а $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – скорость в более привычном эйлеровом представлении. Всякий раз, когда поля являются функциями переменных (\mathbf{a}, t) , мы будем использовать верхний индекс L ; например, магнитное поле в лагранжевых переменных обозначается следующим образом:

$$\mathbf{V}^L(\mathbf{a}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}(\mathbf{a}, t), t). \quad (2.97)$$

Из определения обычной лагранжевой (или материальной) производной

$$\frac{D}{Dt} = \left(\frac{\partial}{\partial T} \right)_{\mathbf{a}} = \left(\frac{\partial}{\partial t} \right)_{\mathbf{x}} + \mathbf{u} \cdot \nabla \quad (2.98)$$

ясно, в частности, что

$$\frac{D\mathbf{V}}{Dt} \equiv \frac{\partial \mathbf{V}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{V} = \left(\frac{\partial \mathbf{V}^L}{\partial t} \right)_{\mathbf{a}}. \quad (2.99)$$

Материальной кривой C_L называется кривая, которая целиком состоит из жидких частиц, и следовательно, переносится и искривляется при движении жидкости. Если p – параметр на кривой в момент $t = 0$, так что $\mathbf{a} = \mathbf{a}(p)$, то

$$\mathbf{x} \equiv \mathbf{x}(\mathbf{a}(p), t) \quad (2.100)$$

является параметрическим представлением смещения в момент t . Кривая C_L замкнута, если $\mathbf{a}(p)$ является периодической функцией p . Аналогично с помощью двух параметров можно определить материальную поверхность S_L .

Бесконечно малый материальный линейный элемент можно описать дифференциалом

$$dx_i = E_{ij}(\mathbf{a}, t) da_j, \quad E_{ij}(\mathbf{a}, t) = \partial x_i / \partial a_j. \quad (2.101)$$

Симметричная и антисимметричная части E_{ij} описывают соответственно искривление и вращение жидкого элемента, первоначально находившегося в точке \mathbf{a} . Материальная производная от E_{ij} равна

$$DE_{ij}/Dt = \partial u_i^L / \partial a_j, \quad (2.102)$$

откуда следует, что

$$Ddx/Dt = da_j \partial u^L / \partial a_j = (d\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (2.103)$$

Этот результат понятен также из элементарных геометрических соображений.

Изменение потока через движущийся контур

Предположим далее, что

$$\Phi(t) = \int_{S_L} \mathbf{B} \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C_L} \mathbf{A} \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.104)$$

где C_L — материальная кривая, покрываемая материальной поверхностью S_L . Для вычисления $d\Phi/dt$ воспользуемся лагранжевыми переменными:

$$\Phi(t) = \oint_{C_L} A_i^L(\mathbf{a}, t) (\partial x_i / \partial a_j) (da_j / dp) dp. \quad (2.105)$$

Мы можем затем произвести дифференцирование под знаком интеграла при постоянном $\mathbf{a}(p)$. Используя равенство (2.103) и выполнив стандартные преобразования, получим

$$\begin{aligned} \frac{d\Phi}{dt} &= \oint_{C_L} \left(\frac{DA}{Dt} \cdot d\mathbf{x} + \mathbf{A} \cdot (d\mathbf{x} \cdot \nabla) \mathbf{u} \right) = \\ &= \oint_{C_L} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{A} + \nabla (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u}) \right) d\mathbf{x}. \end{aligned} \quad (2.106)$$

Поскольку величина $(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})$ однозначна, то член, содержащий $\nabla(\mathbf{A} \cdot \mathbf{u})$, не вносит вклада в интеграл; следовательно, мы имеем

$$\frac{d\Phi}{dt} = \oint_{C_L} \left(\frac{\partial \mathbf{A}}{\partial t} - \mathbf{u} \times \mathbf{B} \right) \cdot d\mathbf{x}. \quad (2.107)$$

Закон индукции Фарадея

В наиболее фундаментальной форме закон Фарадея гласит, что если для произвольной движущейся замкнутой кривой C_L определить поток Φ_t так, как это указано выше, то

$$\frac{d\Phi}{dt} = - \oint_{C_L} (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot d\mathbf{x}, \quad (2.108)$$

где $\mathbf{E}(\mathbf{x}, t)$ [В/м] — электрическое поле в некоторой фиксированной системе отсчета. Сравнение равенств (2.107) и (2.108) показывает, что $-\mathbf{E}$ отличается от $\partial \mathbf{A} / \partial t$ не более чем на градиент однозначной скалярной функции $\phi(\mathbf{x}, t)$:

$$\mathbf{E} + \partial \mathbf{A} / \partial t = -\nabla \phi. \quad (2.109)$$

Применение к этому соотношению операции ротора приводит к известному уравнению Максвелла

$$\operatorname{div} \mathbf{B} / \partial t = -\operatorname{rot} \mathbf{E}. \quad (2.110)$$

Соответствующее граничное условие на поверхности разрыва имеет вид [см. (2.108)]

$$[\mathbf{n} \times (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B})] = 0. \quad (2.111)$$

Галилеева инвариантность домаксвелловских уравнений

Следующее простое свойство трех уравнений

$$\operatorname{div} \mathbf{B} = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B} = \mu_0 \mathbf{J}, \quad \partial \mathbf{B} / \partial t = -\operatorname{rot} \mathbf{E}, \quad (2.112)$$

несомненно, заслуживает упоминания. При галилеевом преобразовании

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{V}t, \quad t' = t \quad (2.113)$$

уравнения переходят в

$$\operatorname{div} \mathbf{B}' = 0, \quad \operatorname{rot} \mathbf{B}' = \mu_0 \mathbf{J}', \quad \partial \mathbf{B}' / \partial t' = -\operatorname{rot} \mathbf{E}', \quad (2.114)$$

где

$$\mathbf{B}' = \mathbf{B}, \quad \mathbf{J}' = \mathbf{J}, \quad \mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{V} \times \mathbf{B}. \quad (2.115)$$

Рассматриваемые преобразования Галилея — это нерелятивистский предел более общих преобразований Лоренца для полных уравнений Максвелла. Важно отметить, что \mathbf{B} и \mathbf{J} инвариантны относительно галилеева преобразования, но \mathbf{E} не является инвариантом. Если среда движется со скоростью $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, то

$$\mathbf{E}' = \mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B} \quad (2.116)$$

представляет собой электрическое поле, измеренное наблюдателем, движущимся со средой. Поэтому правую сторону равенства (2.108) можно рассматривать как (взятую со знаком минус) *эффективную* электродвижущую силу в движущемся контуре.

Закон Ома в движущемся проводнике

Мы будем повсюду использовать простейшую форму закона Ома, устанавливающего связь между электрическим полем и электрическим током. Рассмотрим элемент жидкости, движущийся со скоростью \mathbf{u} . В системе отсчета, покоящейся относительно элемента (в предположении, что ускорение элемента не влияет на процессы молекулярного переноса), мы имеем обычное соотношение $\mathbf{J}' = \sigma \mathbf{E}'$ между током \mathbf{J} и электрическим полем \mathbf{E}' , где σ — электропроводность среды (измеренная в единицах А/В · м). При переходе к неподвижной системе отсчета это соотношение принимает вид

$$\mathbf{J} = \sigma(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.117)$$

Следует подчеркнуть, что в отличие от фундаментальных уравнений (2.112) соотношение (2.117) представляет собой некоторую феноменологическую зависимость, и определение величины σ , зависящей от молекулярной структуры среды, требует привлечения методов статистической физики, что выходит за рамки данной книги.

Комбинируя равенства (2.61), (2.109) и (2.117), сразу же получаем

$$\partial \mathbf{A} / \partial t = \mathbf{u} \times \text{rot } \mathbf{A} - \nabla \varphi + \lambda \Delta \mathbf{A}, \quad (2.118)$$

где $\lambda = (\mu_0 \sigma)^{-1}$ — коэффициент *магнитной диффузии* среды. Ясно, что, как и любой коэффициент диффузии, λ имеет размерность $[L^2 \cdot T^{-1}]$, и, если не оговорено противное, мы будем всегда предполагать, что λ однородно и не зависит от времени. Дивергенция уравнения (2.118) с учетом условия $\text{div } \mathbf{A} = 0$ дает

$$\Delta \varphi = \text{div}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}). \quad (2.119)$$

А ротор уравнения (2.118) представляет собой хорошо известное в магнитной гидродинамике *уравнение индукции*

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B}. \quad (2.120)$$

Если \mathbf{u} задано, то ясно, что это уравнение определяет (в соответствии с граничными условиями) эволюцию поля $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ по известному начальному полю $\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0)$. В следующей главе мы подробно рассмотрим некоторые свойства уравнения (2.120).

2.6. Кинематически возможные поля скоростей

Поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ связано с полем плотности в движущейся среде уравнением сохранения массы

$$\partial \rho / \partial t + \text{div}(\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (2.121)$$

Мы имеем также соответствующее граничное условие

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } S_r, \quad (2.122)$$

где S_r — любая стационарная твердая граница. Обе связи (2.121) и (2.122) являются кинематическими (в противоположность динамическим связям), и если суммарное поле $(\mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \rho(\mathbf{x}, t))$ удовлетворяет этим соотношениям, то оно называется *кинематически возможным*. Конечно, лишь небольшое подсемейство таких полей является также и динамически возможным, т.е. будет удовлетворять, скажем, уравнениям Навье — Стокса с заданными объемными силами. Однако можно получить много полезных результатов, не обращаясь к динамическим уравнениям, и эти результаты обычно справедливы для любых кинематически возможных течений.

Уравнение (2.121) можно записать в эквивалентной лагранжевой форме

$$D\rho/Dt = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (2.123)$$

Мы часто будем обращаться к случаю несжимаемой жидкости, для которой $D\rho/Dt = 0$. В этом случае кинематически возможным называется просто течение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, удовлетворяющее равенствам

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = 0, \quad \mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } S_r. \quad (2.124)$$

Закон сохранения массы эквивалентно можно записать в лагранжевых переменных как равенство между дифференциалами

$$\rho(\mathbf{x}, t) d^3 \mathbf{x} = \rho(\mathbf{a}, 0) d^3 \mathbf{a}. \quad (2.125)$$

Далее

$$\varepsilon_{lmn} d^3 \mathbf{x} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} \frac{\partial x_k}{\partial a_n} d^3 \mathbf{a}, \quad (2.126)^1$$

поэтому равенство (2.125) приобретает вид

$$\rho(\mathbf{x}, t) \varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} \frac{\partial x_k}{\partial a_n} = \rho(\mathbf{a}, 0) \varepsilon_{lmn}. \quad (2.127)$$

Для случая несжимаемой жидкости оно, конечно, становится особенно простым:

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial a_l} \frac{\partial x_j}{\partial a_m} \frac{\partial x_k}{\partial a_n} = \varepsilon_{lmn}. \quad (2.128)$$

2.7. Свободно затухающие моды

В отсутствие движений среды поле тока $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$, отличное от нуля в ограниченной области V , и соответствующее магнитное поле $\mathbf{B}(\mathbf{x}, t)$ затухают под действием магнитной ("омической") диффузии. Рассмотрение этого простого эффекта полезно в качестве предварительного шага к темам последующих глав. Прежде всего предположим, что $\mathbf{u} \equiv 0$ в области V ; таким образом [см. (2.120)], \mathbf{B} удовлетворяет уравнению диффузии

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \lambda \Delta \mathbf{B} \quad \text{в } V. \quad (2.129)$$

¹ Это эквивалентно утверждению $d^3 \mathbf{x} = J d^3 \mathbf{a}$, $J = \partial(x_1, x_2, x_3) / \partial(a_1, a_2, a_3)$, где J — якобиан преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$.

Предположим далее, что внешняя область \hat{V} является непроводящей, так что

$$\mu_0 \mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{B} = 0 \quad \text{в } \hat{V}. \quad (2.130)$$

Мы имеем также граничные условия

$$[\mathbf{B}] = 0 \quad \text{на } S, \quad \mathbf{B} = O(r^{-3}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty, \quad (2.131)$$

где S — поверхность области V .

Характерные моды затухания для этой задачи определяются равенством

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{B}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \exp p_\alpha t, \quad (2.132)$$

где $\mathbf{B}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ удовлетворяет следующим уравнениям и граничным условиям:

$$\begin{aligned} (\Delta - p_\alpha / \lambda) \mathbf{B}^{(\alpha)} &= 0 \quad \text{в } V, \\ \text{rot } \mathbf{B}^{(\alpha)} &= 0 \quad \text{в } \hat{V}, \end{aligned} \quad (2.133)$$

$$[\mathbf{B}^{(\alpha)}] = 0 \quad \text{на } S, \quad \mathbf{B}^{(\alpha)} = O(r^{-3}) \quad \text{при } r \rightarrow \infty.$$

Уравнения (2.133) формулируют задачу о собственных значениях, причем собственные значения равны p_α , а соответствующие собственные функции $\mathbf{B}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$. С точки зрения общей теории уравнений с частными производными эллиптического типа эти собственные функции образуют полный набор и начальное поле $\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0)$, соответствующее произвольному начальному распределению тока $\mathbf{J}(\mathbf{x}, 0)$ в области V , можно разложить на сумму собственных функций

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \mathbf{B}^{(\alpha)}(\mathbf{x}). \quad (2.134)$$

Тогда для $t > 0$ имеем следующее разложение поля:

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \sum_{\alpha} a_{\alpha} \mathbf{B}^{(\alpha)}(\mathbf{x}) \exp p_{\alpha} t. \quad (2.135)$$

После стандартных преобразований из (2.133) получим

$$-p_{\alpha} = \lambda \frac{\int_{V_{\infty}} (\text{rot } \mathbf{B}^{(\alpha)})^2 d^3 \mathbf{x}}{\int_V (\mathbf{B}^{(\alpha)})^2 d^3 \mathbf{x}}, \quad (2.136)$$

где $V_{\infty} = V \cup \hat{V}$. Следовательно, все p_{α} действительны и отрицательны и их можно упорядочить таким образом, чтобы

$$0 > p_{\alpha 1} \geq p_{\alpha 2} \geq p_{\alpha 3} \geq \dots \quad (2.137)$$

Если область V представляет собой сферу $r < R$, как это было при рассмотрении мод бессилового поля в разд. 2.4, то удобно разложить поле на полоидальную и тороидальную составляющие. Предположим

прежде всего, что

$$\mathbf{V} = \text{rot rot}(\mathbf{x} P(\mathbf{x}, t)) + \text{rot}(\mathbf{x} T(\mathbf{x}, t)) \quad (2.138)$$

с соответствующим распределением тока

$$\mu_0 \mathbf{J} = -\text{rot}(\mathbf{x} \Delta P) + \text{rot rot}(\mathbf{x} T). \quad (2.139)$$

Тогда уравнения (2.129) – (2.131) удовлетворяются, если

$$\begin{aligned} \partial P / \partial t &= \lambda \Delta P, & \partial T / \partial t &= \lambda \Delta T & \text{при } r < R, \\ \Delta P &= 0, & T &= 0 & \text{при } r > R, \\ [P] &= [\partial P / \partial r] = [T] = 0 & \text{на } r = R. \end{aligned} \quad (2.140)$$

Тороидальные моды затухания

Поле T всегда можно разложить по поверхностным гармоникам

$$T(r, \theta, \varphi, t) = \sum T^{(n)}(r, t) S_n(\theta, \varphi), \quad (2.141)$$

где $T^{(n)}(r, t)$, как это следует из (2.140), удовлетворяет уравнению

$$\frac{\partial T^{(n)}}{\partial t} = \lambda \left(\frac{1}{r^2} \frac{\partial}{\partial r} r^2 \frac{\partial T^{(n)}}{\partial r} - \frac{n(n+1)}{r^2} T^{(n)} \right) \quad \text{для } r < R, \quad (2.142)$$

$$T^{(n)} = 0 \quad \text{для } r \geq R.$$

Полагая $T^{(n)}(r, t) = f^{(n)}(r) \exp p_\alpha t$, мы получаем для $f^{(n)}(r)$ модифицированную форму уравнения Бесселя, решение которого (регулярное в $r = 0$) имеет вид

$$f^{(n)}(r) \propto r^{-1/2} J_{n+1/2}(k_\alpha r), \quad k_\alpha^2 = -p_\alpha / \lambda. \quad (2.143)$$

Граничному условию $f^{(n)}(R) = 0$ можно удовлетворить, если

$$J_{n+1/2}(k_\alpha R) = 0. \quad (2.144)$$

Пусть x_{nq} ($q = 1, 2, \dots$) обозначают нули функции $J_{n+1/2}(x)$ (табл. 2.1),

тогда скорости затухания тороидальных мод равны

$$-p_\alpha = \lambda R^{-2} x_{nq}^2 \quad (n = 1, 2, \dots; q = 1, 2, \dots), \quad (2.145)$$

где символом α в данном случае обозначена пара чисел (n, q) . Общее решение для T имеет вид (в области $r < R$)

$$T(r, \theta, \varphi, t) = \sum_n S_n(\theta, \varphi) \sum_q \exp p_{nq} t A_{nq} r^{-1/2} J_{n+1/2}(k_{nq} r). \quad (2.146)$$

Полоидальные моды затухания

Аналогично мы можем разложить и P

$$P(r, \theta, \varphi, t) = \sum P^{(n)}(r, t) S_n(\theta, \varphi). \quad (2.147)$$

Однако теперь, поскольку $\Delta P = 0$, в области $r > R$ мы имеем

$$P^{(n)}(r, t) = c_n(t) r^{-(n+1)} \quad (r > R). \quad (2.148)$$

Таблица 2.1

Нули x_{nq} функции $J_{n+\frac{1}{2}}(x)$,

вычисленные с точностью до трех десятичных знаков

	q					
	1	2	3	4	5	6
0	π	2π	3π	4π	5π	6π
1	4,493	7,725	10,904	14,007	17,221	20,371
n 2	5,763	9,095	12,323	15,515	18,689	21,854
3	6,988	10,417	13,698	16,924	20,122	23,304
4	8,813	11,705	15,040	18,301	21,525	24,728

Поэтому непрерывность $P^{(n)}$ и $\partial P^{(n)} / \partial r$ при $r = R$ требует, чтобы

$$P^{(n)}(R, t) = c_n(t) R^{-(n+1)},$$

$$(\partial P^{(n)} / \partial r)_{r=R} = -(n+1) c_n(t) R^{-(n+2)}, \quad (2.149)$$

или после исключения $c_n(t)$

$$\partial P^{(n)} / \partial r + (n+1) R^{-1} P^{(n)} = 0 \quad \text{на } r = R. \quad (2.150)$$

Полагая $P^{(n)}(r, t) = g_n(r) \exp p_\alpha t$ для $r < R$, мы получаем далее, как и для тороидальных мод,

$$g_n(r) \propto r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_\alpha r), \quad k_\alpha^2 = -p_\alpha / \lambda. \quad (2.151)$$

Однако условие (2.150) сводится теперь к условию¹⁾

$$J_{n-\frac{1}{2}}(k_\alpha R) = 0, \quad (2.152)$$

¹⁾ При получении этой формулы использовано рекуррентное соотношение $x J'_\nu(x) + \nu J_\nu(x) = x J_{\nu-1}(x)$.

которое отличается от (2.144). Следовательно, скорости затухания полоидальных мод равны

$$-P_\alpha = \lambda R^{-2} x_{(n-1)q}^2 \quad (n = 1, 2, \dots; q = 1, 2, \dots), \quad (2.153)$$

а общее решение для P , аналогичное решению (2.146), имеет вид

$$P(r, \theta, \varphi, t) = \begin{cases} \sum_n S_n(\theta, \varphi) \sum_q \exp(p_{(n-1)q} t) B_{nq} r^{-\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(k_{(n-1)q} r), & (r < R) \\ \sum_n c_n(t) S_n(\theta, \varphi) r^{-(n+1)} & (r > R), \end{cases} \quad (2.154)$$

где в силу (2.149)

$$c_n(t) = \sum_q B_{nq} J_{(n+\frac{1}{2})} (k_{(n-1)q} R) R^{n+\frac{1}{2}} \exp(p_{(n-1)q} t). \quad (2.155)$$

Поведение дипольного момента

Нижайшей затухающей модой является полоидальная мода с $n = 1$, $q = 1$, для которой $p_\alpha = -\lambda R^{-2} x_{01}^2$ (2.153). В области $r > R$ эта мода имеет дипольную форму. Если мы выберем ось $\theta = 0$ в направлении вектора дипольного момента $\mu^{-1}(t)$, то ясно, что угловая часть соответствующего вклада в определяющий скаляр P будет содержать только одну осесимметричную поверхностную гармонику $S_1(\theta, \varphi) \propto \cos \theta$.

Интересно исследовать случай магнитного поля, которое в начальный момент отлично от нуля только в проводящей области $r < R$ (т.е. $\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0) \equiv 0$ для $r > R$). Тогда дипольный момент этого поля (так же как все тензорные мультипольные моменты), очевидно, равен нулю, поскольку магнитный потенциал Ψ , описываемый формулой (2.64), при $r > R$ должен обращаться в нуль во всех порядках. Достаточно рассмотреть случай, когда $\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)$ имеет ту же угловую зависимость, что и диполь, т.е. предположить, что в приведенном выше анализе для полоидального поля присутствует только член с $n = 1$. Ясно, что дипольный момент связан с коэффициентом $c_1(t)$. Действительно, используя равенство $\Delta P = 0$, мы имеем для $r > R$

$$\mathbf{V}_P = \text{rot rot } \mathbf{x} P = -\Delta \mathbf{x} P + \nabla \text{div } \mathbf{x} P = -\nabla \Psi, \quad (2.156)$$

где

$$\Psi = -P - (\mathbf{x} \cdot \nabla) P = -P - r \partial P / \partial r, \quad (2.157)$$

и с $P = c_1(t) r^{-2} \cos \theta$ (2.148) это дает, что $\Psi = c_1(t) r^{-2} \cos \theta$. Следовательно, дипольный момент в действительности равен

$$\mu^{(1)}(t) = c_1(t) \mathbf{i}_z, \quad (2.158)$$

а его изменение во времени описывается формулой (2.155) с $n = 1$. Согласно принятым условиям, мы должны иметь

$$c_1(0) = \sum_q B_{1q} J_{3/2}(k_{0q} R) R^{3/2} = 0. \quad (2.159)$$

Для $t > 0$ коэффициент $|c_1(t)|$ будет отклоняться от нуля, достигая за время $R^2 \lambda^{-1}$ максимального значения, а затем снова упадет до нуля за время того же порядка, причем доминирующим в конечном счете будет член, соответствующий $q = 1$.

Важно заметить в этом примере, что в отсутствие восстанавливающего агента диффузия может приводить к временному увеличению дипольного момента с последующим затуханием. Заманчиво предположить, что линейная суперпозиция экспоненциально затухающих функций должна с неизбежностью уменьшаться во времени. Однако рассмотрение простой функции $e^{-t} - e^{-2t}$ позволяет отвергнуть это предположение. Аналогично ведет себя и функция $c_1(t)$ из приведенного выше примера.

Эта возможность *диффузного увеличения дипольного момента* столь важна, что желательно дать ей альтернативную и, возможно, более ясную формулировку. С этой целью мы должны сначала получить альтернативное выражение для $\mu^{(1)}$. Из (2.73) имеем

$$\delta \pi \mu^{(1)} = \int_V \mathbf{x} \times \text{rot } \mathbf{V} d^3 \mathbf{x}. \quad (2.160)$$

Выделим сначала в \mathbf{V} дипольную полоидальную составляющую¹⁾ \mathbf{V}_1 , т.е. положим $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}'$, где $\mathbf{V}_1 = O(r^{-3})$, $\mathbf{V}' = O(r^{-4})$ при $r \rightarrow \infty$. Поскольку $\text{rot } \mathbf{V}' = 0$ для $r > R$, мы можем переписать (2.160) в виде

$$\delta \pi \mu^{(1)} = \int_V \mathbf{x} \times \text{rot } \mathbf{V}_1 dV + \int_{V_\infty} \mathbf{x} \times \text{rot } \mathbf{V}' dV, \quad (2.161)$$

где, как обычно, V_∞ — объем всего пространства. Второй интеграл сводится к поверхностному

$$\int_{V_\infty} \mathbf{x} \times \text{rot } \mathbf{V}' dV = \int_{S_\infty} (\mathbf{x} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{V}') + 2(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}') \mathbf{x}) dS, \quad (2.162)$$

а поскольку $\mathbf{V}' = O(r^{-4})$ на бесконечности, то этот интеграл, как и ожидалось, обращается в нуль. Аналогично можно преобразовать и первый интеграл, выделив дивергенцию в подынтегральном выражении:

$$\delta \pi \mu^{(1)} = \int_S \mathbf{x} \times (\mathbf{n} \times \mathbf{V}_1) dS + 2 \int_V \mathbf{V}_1 dV, \quad (2.163)$$

¹⁾ Под "дипольной составляющей" мы будем понимать составляющую, имеющую ту же угловую зависимость, что и дипольное поле.

где S – поверхность $r = R$. Далее, величина $\mathbf{n} \times \mathbf{V}$, непрерывна при переходе через поверхность $r = R$, а на поверхности $r = R_+$ поле $\mathbf{V}_1 = = \nabla(\mu^{(1)} \cdot \nabla)r^{-1}$. Поверхностный интеграл в (2.163) можно в таком случае легко вычислить, и он оказывается равным $(8\pi/3)\mu^{(1)}$. Следовательно,

$$\mu^{(1)} = \frac{3}{8\pi} \int_V \mathbf{V}_1 \cdot dV. \quad (2.164)$$

Отсюда находим скорость изменения

$$\frac{8\pi}{3} \frac{d\mu^{(1)}}{dt} = \int_V \frac{\partial \mathbf{V}_1}{\partial t} \cdot dV = \lambda \int_V \Delta \mathbf{V}_1 \cdot dV = \lambda \int_S (\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{V}_1 \cdot dS. \quad (2.165)$$

Следовательно, изменение $\mu^{(1)}$ можно полностью приписать диффузии поля \mathbf{V}_1 через поверхность S , происходящей при отличном от нуля нормальном градиенте $(\mathbf{n} \cdot \nabla) \mathbf{V}_1$ на S . В случае сферы

$$\int_V \mathbf{V}_1 \cdot dV = \int_V B dV$$

и (2.164) принимает вид

$$\mu^{(1)} = \frac{3}{8\pi} \int_V B dV. \quad (2.166)$$

ПЕРЕНОС, ИСКРИВЛЕНИЕ И ДИФФУЗИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ

3.1. Теорема Альвена и ее следствия

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые основные свойства выведенных в предыдущей главе уравнений в идеализированном предельном случае бесконечной проводимости $\sigma \rightarrow \infty$, или эквивалентно $\lambda \rightarrow 0$. Прежде всего из (2.108) и (2.117) мы имеем

$$d\Phi/dt = - \oint_{C_L} \sigma^{-1} \mathbf{J} \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.1)$$

Таким образом, в пределе $\sigma \rightarrow \infty$, если \mathbf{J} остается конечным на кривой C_L , $\Phi = \text{const}$. Это применимо к каждой замкнутой материальной кривой C_L . Рассмотрим, в частности, силовую трубку, состоящую из совокупности силовых линий, проходящих через малую замкнутую кривую. Поскольку поток через произвольную кривую, охватывающую трубку тока и движущуюся вместе с жидкостью, сохраняется, удобно сказать, что сама силовая трубка движется с жидкостью (или *вморожена в жидкость*), а ее поток сохраняется. Это и есть теорема Альвена [4], которая совершенно аналогична теореме Кельвина о циркуляции, известной из механики идеальной жидкости.

Разумеется, теорему о "вмороженности поля" можно вывести и более формально. Действительно, расписав для случая $\lambda = 0$ правую часть уравнения (2.120), получим эквивалентное уравнение

$$D\mathbf{B}/Dt = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} - \mathbf{B} \nabla \cdot \mathbf{u}. \quad (3.2)$$

Комбинируя это уравнение с (2.123), находим

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) = \frac{1}{\rho} \frac{D\mathbf{B}}{Dt} - \frac{\mathbf{B}}{\rho^2} \frac{D\rho}{Dt} = \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \mathbf{u}. \quad (3.3)$$

Следовательно, \mathbf{B}/ρ удовлетворяет тому же уравнению, которое имеет место для линейного элемента $d\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ (2.103). Отсюда получим решение [ср. (2.101)]

$$\frac{B_i(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}, t)} = \frac{B_j(\mathbf{a}, 0)}{\rho(\mathbf{a}, 0)} \frac{\partial x_i}{\partial a_j}, \quad (3.4)$$

связанное с именем Коши¹⁾. Предположим теперь, что в момент $t = 0$ линейный элемент $d\mathbf{a}$ направлен вдоль силовой линии поля $\mathbf{V}(\mathbf{a}, 0)$, так что $\mathbf{V}(\mathbf{a}, 0) \times d\mathbf{a} = 0$. Тогда в момент $t > 0$ мы имеем

$$\begin{aligned} (\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \times d\mathbf{x}(\mathbf{a}, t))_i &= \epsilon_{ijk} B_j(\mathbf{x}, t) dx_k(\mathbf{a}, t) = \\ &= \epsilon_{ijk} \frac{\rho(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{a}, 0)} B_m(\mathbf{a}, 0) \frac{\partial x_j}{\partial a_m} da_n \frac{\partial x_k}{\partial a_n} \quad \text{из (2.101) и (3.4),} \\ &= \epsilon_{lmn} \frac{\partial a_l}{\partial x_i} B_m(\mathbf{a}, 0) da_n \quad \text{из (2.127).} \end{aligned}$$

Следовательно,

$$(\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) \times d\mathbf{x}(\mathbf{a}, t))_i = (\mathbf{V}(\mathbf{a}, 0) \times d\mathbf{a})_l \partial a_l / \partial x_i = 0. \quad (3.5)$$

Таким образом, линейный элемент $d\mathbf{x}$ направлен вдоль силовой линии $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$. Отсюда следует, что если материальная кривая C_L совпадает с \mathbf{V} -линией в момент $t = 0$ и $\lambda = 0$, то она совпадает с \mathbf{V} -линией и для всех $t > 0$. Следовательно, каждую силовую линию можно отождествить с материальной кривой.

Из приведенного обсуждения также ясно, что при $\lambda = 0$ любое движение, растягивающее линейный элемент $d\mathbf{x}$ на силовой линии, будет пропорционально увеличивать и \mathbf{V}/ρ . Если жидкость несжимаема ($D\rho/Dt = 0$), то это значит, что растягивание \mathbf{V} -линий вызывает пропорциональное усиление поля. Иначе обстоит дело в сжимаемой жидкости; например, при однородном сферически-симметричном расширении со скоростью $\mathbf{u} = (\alpha r, 0, 0)$ ($\alpha > 0$) в сферических координатах длина любого материального линейного элемента возрастает линейно с r , тогда как плотность жидкого элемента в точке $r(t)$ уменьшается пропорционально r^{-3} ; следовательно, поле \mathbf{V} , вмороженное в жидкий элемент, уменьшается как r^{-2} . Обратно, при сферически-симметричном сжатии ($\alpha < 0$) поле, связанное с жидким элементом, *возрастает* как r^{-2} .

Сохранение магнитной спиральности

Из факта вмороженности \mathbf{V} -линий в жидкость вытекает, что топологическая структура поля не может изменяться во времени. Поэтому следует ожидать, что если $\lambda = 0$, то определенные формулой (2.8) интегралы I_m остаются постоянными для любого кинематически возможного движения жидкости. Нижеследующее представляет собой обобщение [141] результата, полученного в работе [226].

¹⁾ Коши получил эквивалентный результат для уравнения вихря в механике идеальной жидкости (см. разд. 3.2).

Получим сначала выражение для $D(\rho^{-1} \mathbf{A} \cdot \mathbf{B})/Dt$. Из (2.118) при $\lambda = 0$ мы имеем

$$\frac{DA_i}{Dt} \equiv \frac{\partial A_i}{\partial t} + u_j \frac{\partial}{\partial x_j} A_i = u_j \frac{\partial}{\partial x_i} A_j - \frac{\partial \varphi}{\partial x_i}. \quad (3.6)$$

Комбинируя это с уравнением (3.3), получим

$$\frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \right) = \mathbf{A} \cdot \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \right) + \frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \frac{D\mathbf{A}}{Dt} = \left(\frac{\mathbf{B}}{\rho} \cdot \nabla \right) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - \varphi). \quad (3.7)$$

Пусть далее S_m — материальная поверхность [охватывающая область V_m , см. (2.8)], на которой (постоянно) $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B} = 0$. Тогда, в силу $D(\rho d^3\mathbf{x})/Dt = 0$,

$$\begin{aligned} \frac{dI_m}{dt} &= \int_{V_m} \frac{D}{Dt} \left(\frac{\mathbf{A} \cdot \mathbf{B}}{\rho} \right) \rho d^3\mathbf{x} = \int_{V_m} (\mathbf{B} \cdot \nabla) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - \varphi) d^3\mathbf{x} = \\ &= \int_{S_m} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) (\mathbf{A} \cdot \mathbf{u} - \varphi) dS = 0, \end{aligned} \quad (3.8)$$

что и требовалось доказать.

При $\lambda \neq 0$ этот результат, конечно, не справедлив; учет диффузионных членов приводит к равенству

$$\frac{dI_m}{dt} = \lambda \int_{V_m} (\mathbf{B} \cdot \Delta \mathbf{A} + \mathbf{A} \cdot \Delta \mathbf{B}) d^3\mathbf{x}. \quad (3.9)$$

Таким образом, в общем случае I_m изменяется во времени под действием диффузии. Это означает, что топологическая структура поля изменяется во времени и невозможно однозначно проследить за отдельной силовой линией при переходе от одного момента времени к следующему. Иногда делались попытки определить "эффективную скорость скольжения" $\mathbf{w}(\mathbf{x}, t)$ силовых линий относительно жидкости под действием диффузии. Если бы такая концепция была правильной, то эволюция поля при $\lambda \neq 0$ была бы эквивалентна эволюции поля в идеальной жидкости, движущейся со скоростью $\mathbf{u} + \mathbf{w}$; отсюда вытекало бы сохранение всех узлов и зацеплений силовых линий, что, вообще говоря, несовместимо с (3.9). Поэтому мы должны сделать вывод, что кажущееся удобным с физической точки зрения представление о "скорости скольжения" силовых линий способно ввести в заблуждение при рассмотрении поля сложной структуры.

3.2. Аналогия с вихрем

Уравнение индукции (2.120)

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot } \mathbf{u} \times \mathbf{B} + \lambda \Delta \mathbf{B} \quad (\text{div } \mathbf{B} = 0) \quad (3.10)$$

близко по форме к уравнению вихря $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$ при баротропном (давление $p = p(\rho)$) течении жидкости с однородными свойствами, в которой действуют консервативные объемные силы:

$$\partial \boldsymbol{\omega} / \partial t = \text{rot} (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (\text{div } \boldsymbol{\omega} = 0), \quad (3.11)$$

где ν — кинематическая вязкость. Эта аналогия, впервые указанная Эльзассером [71] и использованная Бэтчелором [18] при рассмотрении действия турбулентности на слабое случайное магнитное поле, любопытна в том отношении, что $\boldsymbol{\omega}$ связано с \mathbf{u} равенством $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$; таким образом, (3.11) является нелинейным уравнением, в то время как уравнение (3.10), несомненно, линейно по \mathbf{B} , если считать $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ заданной. Тот факт, что $\boldsymbol{\omega}$ в отличие от \mathbf{B} ограничено (из-за дополнительной связи с \mathbf{u}), означает, что аналогия носит односторонний характер; общие результаты, полученные из уравнения (3.10) для магнитного поля, обычно имеют "двойника" в более частном уравнении (3.11). В противоположность этому решения уравнения (3.11) не могут иметь аналога в более общем уравнении (3.10).

Мы уже отмечали параллель между теоремой Альвена, справедливой при $\lambda = 0$, и теоремой Кельвина о циркуляции, имеющей место при $\nu = 0$. Для $\nu = 0$ известны также результаты, аналогичные другим теоремам разд. 3.1, а именно:

1. В обозначениях разд. 3.1

$$\frac{\omega_i(\mathbf{x}, t)}{\rho(\mathbf{x}, t)} = \frac{\omega_j(\mathbf{a}, 0)}{\rho(\mathbf{a}, 0)} \frac{\partial x_i}{\partial a_j}. \quad (3.12)$$

Этот результат, полученный Коши, иногда называют "решением" уравнения вихря, что, по-видимому, может ввести в заблуждение, поскольку величина $\partial x_i / \partial a_j$ в данном случае неизвестна, и $\mathbf{x}(\mathbf{a}, t)$ можно определить только после того, как будет найден вихрь $\boldsymbol{\omega}_i(\mathbf{x}, t)$. Равенство (3.12) представляет собой не решение уравнения (3.11) с $\nu = 0$, а скорее переформулировку этого уравнения. В противоположность этому равенство (3.4) в случае магнитного поля, где величины $\partial x_i / \partial a_j$ и $B_i(\mathbf{x}, t)$ действительно независимы (до тех пор, пока можно пренебречь лоренцевыми силами), является истинным решением уравнения (3.2) или (3.3).

2. Интеграл

$$I_m \{ \boldsymbol{\omega} \} = \int_{V_m} \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} d^3 \mathbf{x} \quad (3.13)$$

остаётся постоянным, если $\mathbf{v} = 0$ и $\boldsymbol{\omega} \cdot \mathbf{n} = 0$ на материальной поверхности S_m , охватывающей объем V_m [141]. Этот интеграл можно интерпретировать, исходя из представлений о зацеплении вихревых трубок (точно так же, как в разд. 2.1), и сохранение $I_m \{ \boldsymbol{\omega} \}$, конечно, обязано тому факту, что при $\mathbf{v} = 0$ и $p = p(\rho)$ вихревые линии заморожены в жидкость. Интеграл $I_m \{ \boldsymbol{\omega} \}$ представляет собой спиральность поля скорости в области V_m . Чтобы отличить $I_m \{ \boldsymbol{\omega} \}$ от магнитной спиральности $I_m \{ \mathbf{B} \}$, мы будем называть ее "кинетической" спиральностью. Кинетическая спиральность, как выяснится в последующих главах, имеет огромное значение в теории динамо.

Относительный вклад двух членов в правой части уравнения (3.11) характеризуется в классической механике жидкостей хорошо известным числом Рейнольдса R_e . Если u_0 — характеристическая скорость поля скорости \mathbf{u} , а l_0 — характеристическая длина, на которой происходит изменение этой скорости, то

$$|\text{rot}(\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})| / |\mathbf{v} \Delta \boldsymbol{\omega}| = O(R_e), \quad \text{где } R_e = u_0 l_0 / \nu. \quad (3.14)$$

Аналогично, если l_0 — характеристическая длина изменения \mathbf{B} , совпадающая с l_0 для \mathbf{u} , то отношение двух членов в правой части уравнения (3.10) равно

$$|\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})| / |\lambda \Delta \mathbf{B}| = O(R_m), \quad \text{где } R_m = u_0 l_0 / \lambda = \mu_0 \sigma u_0 l_0. \quad (3.15)$$

Величина R_m называется *магнитным числом Рейнольдса* и может рассматриваться как безразмерная мера проводимости при заданном течении жидкости. Если $R_m \gg 1$, то диффузионный член относительно незначителен и приближенно справедлива картина замороженного поля, описанная в разд. 3.1. При $R_m \ll 1$ преобладает диффузия, течение не способно вызывать сильные отклонения поля от той конфигурации, которая имела бы место под действием только одной диффузии.

Конечно, эти выводы носят сугубо предварительный характер и в отдельных случаях потребуют модификации. Укажем сразу два случая, когда оценка (3.15) способна ввести в заблуждение. Во-первых, если характеристическая длина L для поля \mathbf{B} значительно превышает l_0 для \mathbf{u} , тогда

$$|\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})| / |\lambda \Delta \mathbf{B}| = O(R_m L / l_0), \quad R_m = u_0 l_0 / \lambda. \quad (3.16)$$

Следовательно, если L / l_0 достаточно велико, то даже при $R_m \ll 1$ может преобладать индуктивный член $\text{rot}[\mathbf{u} \times \mathbf{B}]$. Во-вторых, в любой области быстрого изменения \mathbf{B} (например, при диффузии через тонкий токовый слой) соответствующий масштаб изменения поля δ может быть *малым* по сравнению с l_0 . В этом случае мы имеем

$$|\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})| / |\lambda \Delta \mathbf{B}| = O(R_m \delta / l_0) \quad \text{или} \quad O(R_m (\delta / l_0)^2) \quad (3.17)$$

в зависимости от геометрии задачи. В таких слоях с быстрым изменением поля диффузия может быть существенной даже при $R_m \gg 1$. Во всяком случае при использовании оценок типа (3.15) обычно необходимо проявлять осторожность и всегда, получив ответ, еще раз вернуться и проверить эти оценки.

3.3. Аналогия со скалярным переносом

Иногда приводится другая аналогия [19] между уравнением (3.10) для переноса "векторной примеси" $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ и уравнением

$$D\Theta/Dt = \partial\Theta/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla\Theta = \kappa \Delta\Theta, \quad (3.18)$$

описывающим перенос скалярной примеси $\Theta(\mathbf{x}, t)$ (например, температуры или концентрации красящего вещества) при наличии молекулярной диффузии. Вектор $\mathbf{G} = \nabla\Theta$ удовлетворяет уравнению

$$\partial\mathbf{G}/\partial t = -\nabla(\mathbf{u} \cdot \mathbf{G}) + \kappa \Delta\mathbf{G} \quad (\text{rot } \mathbf{G} = 0), \quad (3.19)$$

которое аналогично уравнению (3.10) для безвихревого (а не соленоидального) векторного поля.

Если $\kappa = 0$, то решение уравнения (3.18) в лагранжевых координатах имеет простой вид

$$\Theta(\mathbf{x}, t) = \Theta(\mathbf{a}, 0), \quad (3.20)$$

т.е. поверхности постоянного Θ заморожены в жидкость. По аналогии с магнитным числом Рейнольдса можно написать безразмерное число Пекле

$$P_e = u_0 l_0 / \kappa, \quad (3.21)$$

определяющее роль диффузии. При $P_e \ll 1$ преобладает диффузия, а если $P_e \gg 1$, то диффузией можно пренебречь.

3.4. Сохранение жгута магнитных силовых линий при течении с постоянной скоростью деформации

В качестве простой иллюстрации совместного действия эффектов переноса и диффузии рассмотрим влияние магнитного поля на безвихревое поле скорости в несжимаемой жидкости:

$$\mathbf{u} = (\alpha x, \beta y, \gamma z), \quad \alpha + \beta + \gamma = 0. \quad (3.22)$$

Скорость тензора деформации $\partial u_i / \partial x_j$ постоянна, и ее главные значения равны α, β, γ . Предположим далее, что α положительно, а β и γ отрицательны, так что жидкие элементы имеют тенденцию вытягиваться параллельно оси x . Аналогично стремятся вытянуться и \mathbf{V} -линии, поэтому мы предположим, что

$$\mathbf{V} = (V(y, z, t), 0, 0). \quad (3.23)$$

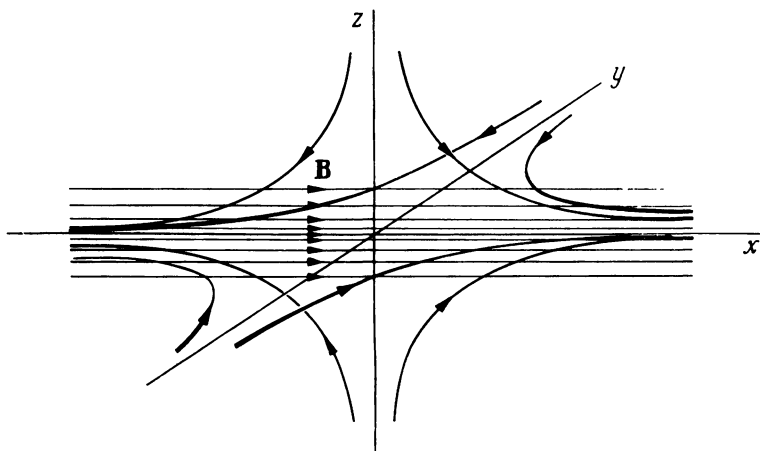


Рис. 3.1.

Поддержание магнитного жгута движением (3.22) с однородной деформацией.

Тогда уравнение (3.10) имеет лишь x -компоненту

$$\frac{\partial B}{\partial t} + \beta y \frac{\partial B}{\partial y} + \gamma z \frac{\partial B}{\partial z} = \alpha B + \lambda \Delta B. \quad (3.24)$$

Это уравнение изучалось в работах Кларка [54, 55] для различных специальных случаев. Легко убедиться, что уравнению (3.24) удовлетворяет стационарное решение

$$B(y, z) = B_0 \exp\{-(|\beta| y^2 + |\gamma| z^2)/2\lambda\}, \quad (3.25)$$

описывающее жгут магнитных силовых линий эллиптического сечения, вытянутый вдоль оси x (рис. 3.1). Полный поток жгута равен

$$\Phi = \int_{-\infty}^{\infty} \int_{-\infty}^{\infty} B(y, z) dy dz = 2\pi B_0 \lambda (\beta \gamma)^{-1/2}. \quad (3.26)$$

Перенос поля к оси точно компенсируется диффузией наружу. Действительно, воспользовавшись преобразованием Фурье, нетрудно показать, что (3.25) представляет собой асимптотическое решение уравнения (3.24) для произвольных условий. Постоянная B_0 , как это видно из (3.26), связана с полным начальным потоком поля \mathbf{B} через любую плоскость $x = \text{const}$, т.е. с величиной, которая сохраняется при последующем растяжении силовых линий и в процессе диффузии.

Если поле скорости осесимметрично относительно оси x , то $\beta = \gamma = -\alpha/2$ и решение (3.25) принимает вид

$$B(y, z) = B_0 \exp\{-\alpha(y^2 + z^2)/4\lambda\}. \quad (3.27)$$

Жгут магнитных силовых линий имеет гауссов профиль с характеристическим радиусом $\delta = O(\lambda/\alpha)^{1/2}$.

3.5. Пример ускоренной омической диффузии

Предположим теперь, что однородная деформация, описанная в разд. 3.4, двумерна, т.е.

$$\mathbf{u} = (\alpha x, -\alpha y, 0) \quad (\alpha > 0), \quad (3.28)$$

и что в момент $t = 0$

$$\mathbf{V} = (0, 0, B_0 \sin k_0 y). \quad (3.29)$$

При $t > 0$ \mathbf{V} -линии (которые параллельны оси z) сдвигаются к плоскости $y = 0$. Очевидно, что как волновое число, так и амплитуда поля должны изменяться во времени. Мы можем искать решение уравнения (3.10) в виде

$$\mathbf{V} = (0, 0, B(t) \sin k(t) y), \quad (3.30)$$

где $k(0) = k_0$ и $B(0) = B_0$. Подставляя (3.30) в (3.10), получаем $(dB/dt) \sin ky + (dk/dt) y B \cos ky = \alpha y B k \cos ky - \lambda k^2 B \sin ky$,

а поскольку это должно выполняться для всех y , то

$$dk/dt = \alpha k; \quad dB/dt = -\lambda k^2 B. \quad (3.31)$$

Откуда следует, что

$$k(t) = k_0 e^{\alpha t}, \quad B(t) = B_0 \exp \left\{ -\frac{\lambda k_0^2 e^{2\alpha t} - 1}{2\alpha} \right\}. \quad (3.32)$$

Вследствие переноса всех изменений поля к плоскости $y = 0$ длина волны неоднородности поля, очевидно, уменьшается как $e^{-\alpha t}$, что сильно ускоряет процесс затухания поля. Заметим, что силовые линии не растягиваются ($\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u} = 0$), а просто переносятся ($\mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{V} \neq 0$), поскольку в данном случае поле \mathbf{V} ориентировано вдоль оси, на которой скорость деформации равна нулю.

3.6. Уравнение для векторного потенциала и силовой функции при наличии симметрии

Предположим теперь, что \mathbf{u} — соленоидальное поле скорости, и разложим \mathbf{u} и \mathbf{V} на полоидальную и тороидальную составляющие:

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_p + \mathbf{u}_T, \quad \mathbf{V} = \mathbf{V}_p + \mathbf{V}_T. \quad (3.33)$$

Пусть далее оба поля \mathbf{u} и \mathbf{V} двумерны (т.е. не зависят от декартовой координаты z) или осесимметричны (т.е. инвариантны относительно

вращений вокруг оси симметрии Oz). Тогда ясно, что $\mathbf{u}_T \times \mathbf{V}_T = 0$, а потому и

$$\mathbf{u} \times \mathbf{V} = (\mathbf{u}_P \times \mathbf{V}_T + \mathbf{u}_T \times \mathbf{V}_P) + (\mathbf{u}_P \times \mathbf{V}_P), \quad (3.34)$$

причем первый член в круглых скобках является полоидальным, а второй тороидальным. Полоидальная составляющая уравнения (3.10) имеет в таком случае вид:

$$\partial \mathbf{V}_P / \partial t = \text{rot}(\mathbf{u}_P \times \mathbf{V}_P) + \lambda \Delta \mathbf{V}_P. \quad (3.35)$$

Записав $\mathbf{V}_P = \text{rot} \mathbf{A}_T$ и совершив над (3.35) операцию, обратную взятию ротора, мы получим уравнение, которое фактически является тороидальной составляющей уравнения (2.118):

$$\partial \mathbf{A}_T / \partial t = \mathbf{u}_P \times \text{rot} \mathbf{A}_T + \lambda \Delta \mathbf{A}_T, \quad (3.36)$$

причем тороидальный вклад от члена $-\nabla \varphi$ [см. (2.118)] в данном случае отсутствует¹⁾. Аналогично выписывается и тороидальная составляющая уравнения (3.10)

$$\partial \mathbf{V}_T / \partial t = \text{rot}(\mathbf{u}_P \times \mathbf{V}_T + \mathbf{u}_T \times \mathbf{V}_P) + \lambda \Delta \mathbf{V}_T. \quad (3.37)$$

Уравнения (3.36) и (3.37) достаточно удобны, поскольку как \mathbf{A}_T , так и \mathbf{V}_T имеют в двумерном и осесимметричном случаях только по одной компоненте. Однако в последующем потребуются до некоторой степени различные способы изложения этих случаев.

Двумерный случай

В этом случае

$$\mathbf{A}_T = A(x, y) \mathbf{i}_z \quad \text{и} \quad \text{rot} \mathbf{A}_T = -\mathbf{i}_z \times \nabla A;$$

Следовательно, (3.36) принимает вид

$$\partial A / \partial t + \mathbf{u}_P \cdot \nabla A = \lambda \Delta A. \quad (3.38)$$

Таким образом, A ведет себя подобно скалярной примеси [ср. (3.18)].

Аналогично, $\mathbf{V}_T = V(x, y) \mathbf{i}_z$ и $\mathbf{u}_T = u_z(x, y) \mathbf{i}_z$, а уравнение (3.37) принимает вид

$$\partial V / \partial t + \mathbf{u}_P \cdot \nabla V = (\mathbf{V}_P \cdot \nabla) u_z + \lambda \Delta V. \quad (3.39)$$

¹⁾ В осесимметричном случае это связано с тем, что φ не зависит от азимутального угла φ . В двумерном случае может присутствовать постоянное электрическое поле E_z , направленное по оси z ; однако это требует источников поля на бесконечности, а мы исключаем такую возможность.

Здесь поле B также описывается уравнением, подобным уравнению для скалярной величины, но с источником $(\mathbf{B}_P \cdot \nabla) u_z$ в правой части. Этот член имеет простую интерпретацию, заключающуюся в том, что если скорость u_z изменяется вдоль линии \mathbf{B}_P , то течение будет стремиться деформировать \mathbf{B}_P -линию в направлении оси z , т.е. генерировать тороидальную составляющую поля.

Осесимметричный случай

Отличия осесимметричного случая от двумерного связаны только с искривленностью геометрии и в этом смысле тривиальны. Прежде всего, для $\mathbf{A}_T = A(s, z) \mathbf{i}_\varphi$ в цилиндрических координатах (z, s, φ) , где $s = r \sin \theta$ мы имеем

$$\Delta \mathbf{A}_T = \mathbf{i}_\varphi (\Delta - s^{-2}) A, \quad \mathbf{u}_P \times \text{rot } \mathbf{A}_T = -s^{-1} (\mathbf{u}_P \cdot \nabla) s A \mathbf{i}_\varphi. \quad (3.40)$$

Таким образом, уравнение (3.36) принимает вид

$$\partial A / \partial t + s^{-1} (\mathbf{u}_P \cdot \nabla) s A = \lambda (\Delta - s^{-2}) A. \quad (3.41)$$

Аналогично, для $\mathbf{B}_T = B(s, z) \mathbf{i}_\varphi$ $\mathbf{u}_T = u_\varphi(s, z) \mathbf{i}_\varphi$,

$$\text{rot} (\mathbf{u}_P \times \mathbf{B}_T) = -\mathbf{i}_\varphi s (\mathbf{u}_P \cdot \nabla) (s^{-1} B),$$

$$\text{rot} (\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}_P) = \mathbf{i}_\varphi s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) (s^{-1} u_\varphi), \quad (3.42)$$

поэтому (3.37) принимает вид

$$\partial B / \partial t + s (\mathbf{u}_P \cdot \nabla) (s^{-1} B) = s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) (s^{-1} u_\varphi) + \lambda (\Delta - s^{-2}) B. \quad (3.43)$$

В уравнении для B снова появился источник, однако теперь он связан с изменением угловой скорости $\omega(s, z) = s^{-1} u_\varphi(s, z)$ вдоль \mathbf{B}_P -линии, что благодаря изгибанию поля приводит к генерации тороидальной составляющей. Подробнее мы рассмотрим это явление ниже в разд. 3.11.

Иногда удобнее использовать силовую функцию $\chi(s, z) = sA(s, z)$ [см. (2.47)]. Из (3.41) получаем уравнение для χ

$$\partial \chi / \partial t + (\mathbf{u}_P \cdot \nabla) \chi = \lambda D^2 \chi, \quad (3.44)$$

где

$$D^2 \chi = s (\Delta - s^{-2}) (s^{-1} \chi) = (\Delta - 2s^{-1} \partial / \partial s) \chi. \quad (3.45)$$

Оператор D^2 , который называется оператором Стокса, часто встречается в осесимметричных задачах. В сферических координатах он имеет вид

$$D^2 = \frac{\partial^2}{\partial r^2} + \frac{\sin \theta}{r^2} \frac{\partial}{\partial \theta} \frac{1}{\sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta}. \quad (3.46)$$

Заметим, что из (3.45) следует

$$D^2\chi = \nabla \cdot \mathbf{f}, \quad \text{где } \mathbf{f} = \nabla \chi - 2s^{-1}\chi \mathbf{i}_s. \quad (3.47)$$

3.7. Искажение поля дифференциальным вращением

Под *дифференциальным вращением* мы будем понимать соленоидальное осесимметричное, скажем, относительно оси z поле скорости, линии тока которого имеют вид окружностей с центром на этой оси. В цилиндрических координатах такое движение имеет вид

$$\mathbf{u} = \omega(s, z) \mathbf{i}_z \times \mathbf{x}. \quad (3.48)$$

Если $\nabla \omega = 0$, мы получаем твердотельное вращение, при котором магнитное поле вращается без искажения. При $\nabla \omega \neq 0$ силовые линии в общем случае искажаются, причем эффект зависит как от соответствующего значения магнитного числа Рейнольдса R_m (см. разд. 3.3), так и от ориентации поля относительно вектора \mathbf{i}_z . Две основные возможности проиллюстрированы на рис. 3.2. В случае (а) скорость ω зависит только от s , а поле \mathbf{B} лежит в плоскости xy , перпендикулярной \mathbf{i}_z . Если пренебречь диффузией, то влияние движения сводится к закручиванию поля в тугую двойную спираль в плоскости xy . В случае (б) $\omega = \omega(r)$, где $r^2 = s^2 + z^2$, а \mathbf{B} в начальный момент осесимметрично и полоидально. В пренебрежении диффузией вращение приводит к генерации тороидального поля; в области действия дифференциального вращения \mathbf{B} -линия превращается в спираль.

Оба типа искажения поля важны при исследовании солнечного магнетизма, а также, по-видимому, геомагнетизма, и хорошо изучены. В следующих двух разделах мы сначала обсудим искажение

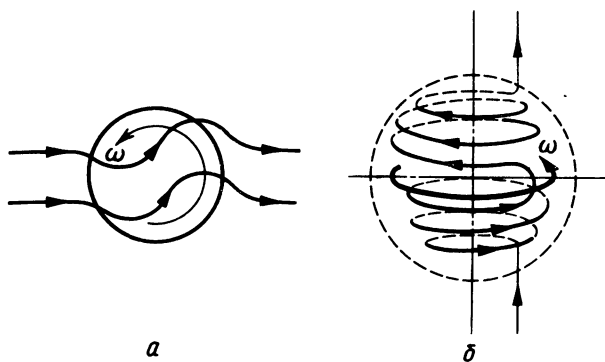


Рис. 3.2.

Качественная демонстрация действия дифференциального вращения на первоначально однородное магнитное поле; а — угловая скорость ω \perp перпендикулярна полю, б — угловая скорость ω \parallel параллельна полю.

типа (а) (впервые подробно изученное Паркером [156]) и связанное с ним важное явление выталкивания магнитных силовых линий из области с замкнутыми линиями тока.

3.8. Влияние дифференциального вращения, зависящего от одной координаты на первоначально однородное поле

Предположим, что $\omega = \omega(s)$, т.е. поле скорости, описываемое формулой (3.48), не зависит от z и в момент $t = 0$ поле $\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0)$ однородно и равно \mathbf{V}_0 . Выберем ось x в направлении \mathbf{V}_0 . Для $t > 0$ $\mathbf{V} = -i_z \times \nabla A$, где A , согласно (3.38), удовлетворяет уравнению $\partial A / \partial t + \omega(s)(\mathbf{x} \times \nabla A)_z = \lambda \Delta A$.

$$(3.49)$$

Естественно воспользоваться полярными координатами

$$x = s \cos \varphi, \quad y = s \sin \varphi, \quad (3.50)$$

в которых уравнение (3.49) принимает вид

$$\partial A / \partial t + \omega(s) \partial A / \partial \varphi = \lambda \Delta A. \quad (3.51)$$

Начальное условие $\mathbf{V}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{V}_0$ эквивалентно условию

$$A(s, \varphi, 0) = B_0 s \sin \varphi, \quad (3.52)$$

а искомое решение уравнения (3.51), очевидно, имеет вид

$$A(s, \varphi, t) = \text{Im } B_0 f(s, t) e^{i\varphi}, \quad (3.53)$$

где

$$\frac{\partial f}{\partial t} + i\omega(s)f = \lambda \left(\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} s \frac{\partial f}{\partial s} - \frac{1}{s^2} \right) f \quad (3.54)$$

$$\text{и} \quad f(s, 0) = s. \quad (3.55)$$

Начальная фаза

В начальный момент времени $t = 0$ поле \mathbf{V} однородно и диффузия отсутствует; поэтому естественно ожидать, что на ранних стадиях искажения поля диффузией можно пренебречь. При $\lambda = 0$ решение уравнения (3.54), удовлетворяющее начальному условию (3.55), имеет вид $f(s, t) = s e^{-i\omega(s)t}$, и, таким образом, [см. (3.53)]

$$A(s, \varphi, t) = B_0 s \sin(\varphi - \omega(s)t). \quad (3.56)$$

Это решение, конечно, представляет собой лагранжево решение $A(\mathbf{x}, t) = A(\mathbf{a}, 0)$, поскольку для рассматриваемого движения частица, имеющая в момент времени t координаты (s, φ) , в начальный момент вре-

мени находилась в точке $(s, \varphi - \omega(s)t)$. Выпишем теперь компоненты поля $\mathbf{B} = -\mathbf{i}_z \times \nabla A$:

$$\begin{aligned} B_s &= s^{-1} \partial A / \partial \varphi = B_0 \cos(\varphi - \omega(s)t), \\ B_\varphi &= -\partial A / \partial s = -B_0 \sin(\varphi - \omega(s)t) + B_0 s \omega'(s)t \cos(\varphi - \omega(s)t). \end{aligned} \quad (3.57)$$

Если вращение твердотельно, т.е. $\omega(s) = 0$, то, как и предполагалось, поле просто вращается с жидкостью. При $\omega'(s) \neq 0$, благодаря процессу вытягивания, φ -компонента поля \mathbf{B} линейно растет во времени.

Из равенства (3.56) можно оценить, в течение какого времени мы имеем право пренебречь диффузией. С этой целью вычислим

$$\begin{aligned} \lambda \Delta A &= -\lambda B_0 s^{-2} (s^3 \omega')' t \cos(\varphi - \omega(s)t) - \\ &\quad - \lambda B_0 s (\omega')^2 t^2 \sin(\varphi - \omega(s)t) \end{aligned} \quad (3.58)$$

и

$$\omega \partial A / \partial \varphi = B_0 \omega s \cos(\varphi - \omega(s)t). \quad (3.59)$$

Предположим, что $\omega(s)$ является достаточно гладкой функцией и

$$\omega_0 = \max |\omega(s)|, \quad \omega_0 / s_0 = \max |\omega'(s)|. \quad (3.60)$$

Ясно, что величина $\lambda \Delta A$ пренебрежимо мала по сравнению с $\omega \partial A / \partial \varphi$, если коэффициенты при косинусе и синусе в равенстве (3.58) малы по сравнению с коэффициентом $B_0 \omega s = O(B_0 \omega_0 s_0)$ из равенства (3.59). Это приводит к условиям

$$\omega_0 t \ll R_m \quad \text{и} \quad \omega_0 t \ll R_m^{1/2}, \quad (3.61)$$

где $R_m = \omega_0 s_0^2 / \lambda$ — соответствующее магнитное число Рейнольдса. Если $R_m \ll 1$, то более жестким является условие $\omega_0 t \ll R_m$, и, таким образом, диффузией можно пренебречь лишь в течение малой доли первого периода вращения. Однако при $R_m \gg 1$ более жестким является условие $\omega_0 t \ll R_m^{1/2}$, но даже при таком ограничении диффузией можно пренебрегать в течение большого числа оборотов. Заметим, что в этом случае поле успевает существенно усилиться к тому моменту, когда начнет играть роль диффузия. Как следует из (3.57), при $R_m \gg 1$ и $\omega_0 t = O(R_m^{1/2})$ у компоненты B_φ преобладает член, линейный по t , что дает оценку максимального значения величины $|\mathbf{B}|$, которое достигается к тому моменту, когда диффузия начинает оказывать существенное влияние на процесс:

$$|\mathbf{B}|_{\max} = O(R_m^{1/2}) B_0. \quad (3.62)$$

Оценки (3.61) и (3.62) отличаются от оценок, полученных Парке-

ром [156]¹⁾, который обнаружил, что при $R_m \gg 1$ радиальное расстояние между нулями поля B_φ , согласно (3.57), есть $\Delta s = O(s_0/\omega_0 t)$; таким образом, характерное время диффузии равно

$$t_d = O[(\Delta s)^2/\lambda] = O(s_0^2/\lambda \omega_0^2 t^2). \quad (3.63)$$

Паркер полагал, что диффузией можно пренебречь для всех $t \ll t_d$, т.е. получил условие

$$\omega_0 t \ll R_m^{1/2}, \quad (3.64)$$

отличающееся от (3.61). Соответствующее максимальное значение $|\mathbf{B}|$ также отличается от (3.62):

$$|\mathbf{B}|_{\max} = O(R_m^{1/2})B_0. \quad (3.65)$$

Однако можно показать, что диффузия в равной степени пренебрежима вплоть до момента времени $t_d \gg t_{in}$, где t_{in} — характерное время изменения поля, вызванное движением, т.е.

$$t_{in} = |\mathbf{B}| / |\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B})|. \quad (3.66)$$

Точный расчет с использованием формул (3.57) дает

$$t_{in} = O(\omega_0^{-1}). \quad (3.67)$$

Условие $t_d \gg t_{in}$ снова приводит к оценкам (3.61) и (3.62). Различие между $O(R_m^{1/2})$ и $O(R_m^{1/3})$ не важно для умеренных значений R_m , однако оно становится существенным, скажем при $R_m > 10^6$.

Конечное установившееся состояние

Следует ожидать, что при $t \rightarrow \infty$ решение уравнения (3.54) описывает установившееся состояние, т.е. $f_1(s)$ будет определяться уравнением

$$\frac{i\omega(s)}{\lambda} f_1 = \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} s \frac{d}{ds} - \frac{1}{s^2} \right) f_1, \quad (3.68)$$

и если $\omega(s) \rightarrow 0$ при $s \rightarrow \infty$, то внешнее граничное условие должно быть таким, чтобы поле на бесконечности оставалось невозмущенным, т.е.

$$f_1(s) \sim s \quad \text{при} \quad s \rightarrow \infty. \quad (3.69)$$

¹⁾ Вейс [223] также получил оценки, аналогичные оценкам Паркера, но для поля скорости, состоящего из периодической совокупности вихрей; фактически оценки типа (3.61) и (3.62) также применимы и к этому случаю. Численные результаты, полученные Вейсом для значений R_m вплоть до 10^3 , совместимы скорее с (3.65), чем с (3.62); однако нельзя быть уверенным в том, что при этом достигался асимптотический режим $R_m \rightarrow \infty$. Вопрос, по-видимому, заслуживает дальнейшего изучения.

Проиллюстрируем это примером, выбрав специальную форму угловой скорости¹⁾:

$$\frac{\omega(s)}{\lambda} = \begin{cases} k_0^2 & (s < s_0), \\ 0 & (s > s_0), \end{cases} \quad (3.70)$$

где k_0 – постоянная. В этом случае задача (3.68) – (3.70) допускает прямое решение

$$f_1(s) = \begin{cases} s + Cs^{-1} & (s > s_0), \\ DJ_1(ps) & (s < s_0), \end{cases} \quad (3.71)$$

где $p = (1 - i)k_0/\sqrt{2}$. Постоянные C и D определяются из условий непрерывности B_s и B_φ (а следовательно, f_1 и f_1') при $s = s_0$:

$$D = \frac{2}{pJ_0(ps_0)}, \quad C = \frac{s_0(2J_1(ps_0) - ps_0J_0(ps_0))}{pJ_0(ps_0)}, \quad (3.72)$$

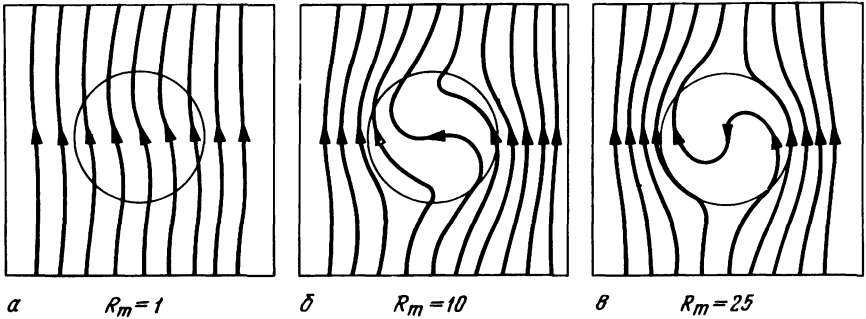


Рис. 3.3.

Установившиеся стационарные распределения поля для трех значений R_m . Если R_m мало, то искажение поля мало, в то время как при больших R_m поле выталкивается из вращающейся области. Вращение происходит против часовой стрелки (кривые рассчитаны Гардингом).

¹⁾ Заметим, что для рассматриваемого случая разрывного $\omega(s)$ обсуждавшаяся выше начальная фаза может отсутствовать; диффузия должна работать, как только движение начнет устранять начальную сингулярность магнитного поля в точке $s = s_0$. Отметим также, что на окончательное распределение поля влияет только зависимость отношения ω/λ от s ; в частности, если $\omega = 0$ при $s > s_0$, то λ для $s > s_0$ может быть произвольной (строго положительной) функцией s .

что завершает формальный вывод $f_1(s)$, а отсюда и A , B_s и B_φ . В-линии изображены на рис. 3.3 для $R_m = 1, 10$ и 25 . Отметим, что с ростом R_m степень искривления поля увеличивается.

При $R_m \gg 1$ характер решения представляет особый интерес; в этом случае $|ps_0| \gg 1$, и как для (3.72) с $z = ps_0$, так и для (3.71) с $z = ps$ можно использовать асимптотические формулы¹⁾:

$$J_0(z) \sim (2/\pi z)^{1/2} \sin(z + \pi/4), \quad J_1(z) \sim - (2/\pi z)^{1/2} \cos(z + \pi/4). \quad (3.73)$$

Результирующая формула для вектора потенциала, определенного ра венством (3.53), после некоторого упрощения принимает вид

$$A \sim \begin{cases} B_0 \left(s - \frac{s_0^2}{s} \right) \sin \varphi + \frac{2B_0 s_0^2}{k_0 s} \sin(\varphi + \pi/4) & (s > s_0), \\ \left(\frac{2B_0}{k_0} \right) \exp\left(-\frac{k_0(s_0 - s)}{\sqrt{2'}}\right) \sin\left(\varphi + \frac{k_0(s_0 - s)}{\sqrt{2'}} + \frac{\pi}{4}\right) & (s < s_0). \end{cases} \quad (3.74)$$

В пределе $R_m = \infty$ ($k_0 = \infty$) это решение вырождается в

$$A \sim \begin{cases} B_0 \left(s - \frac{s_0^2}{s} \right) \sin \varphi & (s > s_0), \\ 0 & (s < s_0). \end{cases} \quad (3.75)$$

Силовые линии $A = \text{const}$ в этом случае совпадают с линиями тока безвихревого течения, обтекающего цилиндр. В рассматриваемом пределе эффективно бесконечной проводимости поле полностью выталкивается из вращающейся области $s < s_0$; тангенциальная компонента поля испытывает разрыв на поверхности $s = s_0$, которая, следовательно, содержит токовый слой.

Такой вид исключения поля связан со скин-эффектом, известным из классического электромагнетизма. В системе координат, вращающейся с угловой скоростью ω_0 , речь идет о поле, вращающемся с угловой скоростью $-\omega_0$ в области, окружающей цилиндрический проводник. (В стационарном состоянии в области $s > s_0$ проводимость, как отмечалось в сноске на стр. 66, пренебрежимо мала, поэтому среду в этой области можно считать изолятором.) Вращающееся поле можно разложить на две перпендикулярные компоненты, колеблющиеся

¹⁾ Строго говоря, в малой окрестности точки $s = 0$ асимптотические формулы (3.73) не применимы, однако из характера результата (3.74) очевидно, что это не имеет существенного значения.

в противофазе, и на высоких частотах эти осциллирующие компоненты выталкиваются из проводника. Тот же аргумент применим, конечно, к вращению проводника любой формы в магнитном поле, если среда вне проводника является изолятором. Если у поля отсутствует компонента, параллельная угловой скорости, то при высокой скорости вращения поле всегда исключается из проводника.

Дополнительные члены в (3.74) описывают малое возмущение предельной формы (3.75), которое появляется, если учесть эффекты конечной проводимости. Очевидно, поле должно проникать в эту область на малое расстояние δ , где

$$\delta = O(k_0^{-1}) = O(R_m^{-1/2}) s_0. \quad (3.76)$$

Ток (отличный от нуля в области $s < s_0$) распределен теперь в слое толщиной $O(\delta)$, в котором поле падает почти до нулевого значения. Описанное поведение поля прослеживается на картине силовых линий уже при $R_m = 25$ (см. рис. 3.3, в).

Промежуточная фаза

Полная (с учетом временной зависимости) задача (3.54) и (3.55) была решена Р. Паркером [165] для случая твердотельного вращения $\omega = \omega_0$ в области $s < s_0$ и нулевой проводимости ($\lambda = \infty$) при $s > s_0$. В этом случае в области $s > s_0$ токи отсутствуют, т.е. здесь $\Delta A = 0$ (для всех t) и, следовательно, [ср. (3.71)]

$$f(s, t) = s + C(t) s^{-1}. \quad (3.77)$$

Эта функция удовлетворяет уравнению

$$f + s \partial f / \partial s = 2s, \quad (3.78)$$

и, таким образом, непрерывность f и $\partial f / \partial s$ в точке $s = s_0$ дает граничное условие для решения уравнения (3.54)

$$f + s_0 \partial f / \partial s = 2s_0 \quad \text{при } s = s_0. \quad (3.79)$$

Положив $f = f_1(s) + g(s, t)$, мы можем найти промежуточную функцию $g(s, t)$ как сумму решений с разделяющимися переменными s и t . Результат (полученный Паркером, использовавшим преобразование Лапласа) имеет вид

$$g(s, t) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{4s_0 \exp(-i\omega_0 t - (\omega_0 t \sigma_n^2 / R_m)) J_1(\sigma_n s / s_0)}{\sigma_n^2 (i + (\sigma_n^2 / R_m)) J_1(\sigma_n)}, \quad (3.80)$$

где σ_n — n -й нуль функции $J_0(\sigma)$.

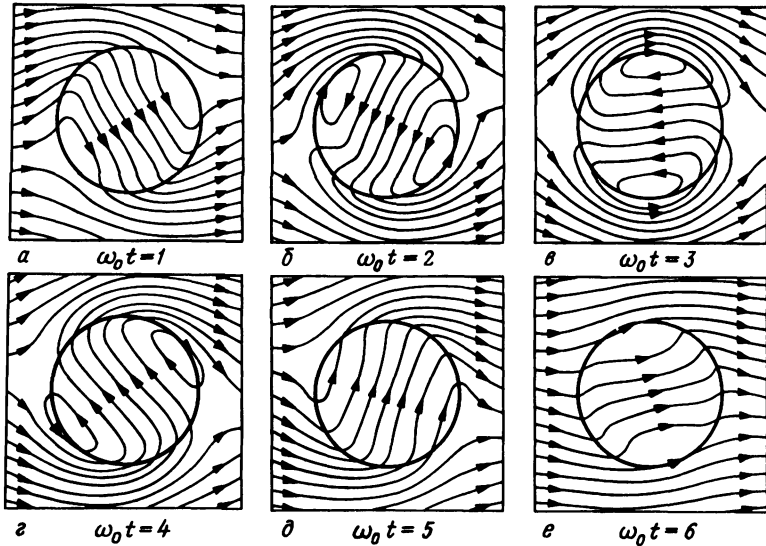


Рис. 3.4.

Поведение силовых линий $A = \text{const}$ при вращении цилиндра по часовой стрелке с угловой скоростью ω_0 . На последовательности рисунков а – е показан один полный оборот цилиндра с магнитным числом Рейнольдса $R_m = \omega_0 a^2 / \lambda = 100$. Из работы [165].

Силовые линии $A = \text{const}$, вычисленные Паркером для $R_m = 100$ и различных значений $\omega_0 t$ для первого оборота цилиндра, воспроизведены на рис. 3.4. Отметим появление замкнутых петель¹⁾ при $\omega_0 t \approx 2$ и последнее их исчезновение при $\omega_0 t \approx 5$; ясно, что этот процесс ответствен за ликвидацию силовых линий во вращающейся области. В последующих оборотах этот процесс повторяется, причем силовые линии выталкиваются до тех пор, пока не будет достигнуто конечное установившееся состояние. Действительно, Паркер показал, что при $R_m = 100$ замкнутые петли появляются и исчезают в течение каждого из первых пяти оборотов цилиндра, но не после. Он показал также, что число оборотов, во время которых появляются замкнутые петли, растет для больших R_m как $R_m^{3/2}$. Другими словами, полю необходимо удивительно много времени, чтобы окончательно достигнуть установившегося состояния.

¹⁾ Тот факт, что диффузионные эффекты появляются раньше, чем это следует из обсуждения, предшествовавшего формуле (3.61), по-видимому, можно приписать (по крайней мере частично) разрыву ω в точке $s = s_0$.

3.9. Выталкивание силовых линий обычными течениями с замкнутыми линиями тока

Вейс [223] получил ряд решений уравнения (3.38) для стационарных полей скорости, представляющих собой отдельный вихрь или регулярную совокупность вихрей. Рассчитанная им картина силовых линий изменяется примерно так, как это описано в предыдущем разделе для течения специального типа; замкнутые петли образуются и распадаются таким образом, что все магнитные силовые линии постепенно выталкиваются из любой области с замкнутыми линиями тока¹⁾. Покажем [174] (аналогичное рассуждение проведено Бэтчелором [21] для вихря), почему в пределе больших R_m (т.е. $\lambda \rightarrow 0$) магнитное поле в любой области с замкнутыми линиями тока в конечном установившемся состоянии должно обращаться в нуль.

Рассмотрим установившееся соленоидальное поле скорости, построено с помощью функции тока $\psi(x, y)$:

$$\mathbf{u} = (\partial\psi/\partial y, -\partial\psi/\partial x, 0). \quad (3.81)$$

В пределе $\lambda \rightarrow 0$ при стационарных условиях уравнение (3.38) принимает вид $\mathbf{u} \cdot \nabla A = 0$, т.е. A постоянно на линиях тока, или эквивалентно $A = A(\psi)$.

Если бы λ обращалось в нуль точно, то произвольная функция $A(x, y)$ вида (3.82) оставалась бы стационарной. Однако отличие λ от нуля стремится исключить любое изменение A поперек линий тока. Чтобы показать это, проинтегрируем точное стационарное уравнение

$$\mathbf{u} \cdot \nabla A \equiv \nabla \cdot (\mathbf{u}A) = \lambda \Delta A \quad (3.83)$$

по площади, охватываемой произвольной замкнутой линией тока C . Поскольку $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ на кривой C , где \mathbf{n} — нормаль к C , то после интегрирования левая часть уравнения (3.83) обращается в нуль, в то время как правая принимает вид

$$\oint_C \lambda \mathbf{n} \cdot \nabla A ds = \lambda A'(ψ) \oint_C (\partial\psi/\partial n) ds = \lambda K_C A'(ψ), \quad (3.84)$$

где s — длина дуги, а K_C — циркуляция по контуру C . Отсюда следует, что $A'(ψ) = 0$, следовательно, $A = \text{const}$, и, таким образом, во всей области с замкнутыми линиями тока $\mathbf{B} \equiv 0$.

Мы показали в разд. 3.8, что магнитное поле должно проникать в область с замкнутыми линиями тока на расстояние $\delta = O(l_0 R_m^{-1/2})$, где l_0 — размер этой области. Внутри этого тонкого слоя диффузион-

¹⁾ Впервые эффект выталкивания магнитных силовых линий обнаружен в работе [230] для случая двумерной турбулентности. — *Прим. ред.*

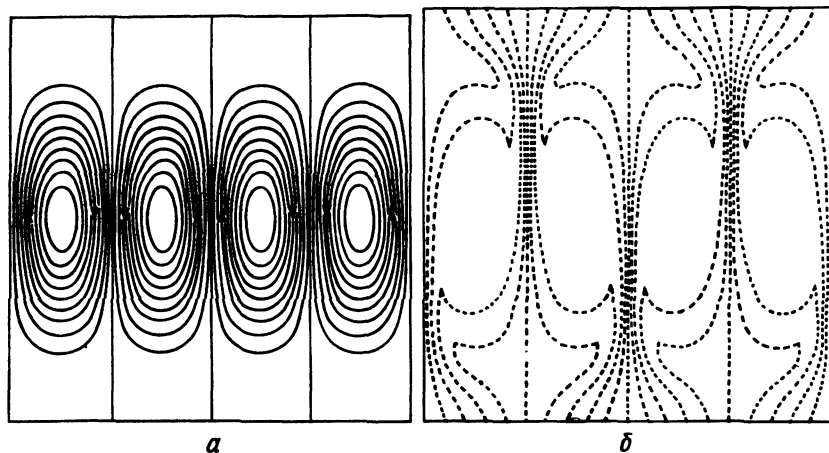


Рис. 3.5.

Концентрация магнитных силовых линий в жгуты в конвективном слое ($R_m = 10^3$); а — линии тока $\psi = \text{const}$, где ψ описывается выражением (3.85); б — силовые линии получающегося стационарного магнитного поля [223].

ный член уравнения (3.83), равный $O(\lambda A/\delta^2)$, имеет тот же порядок величины, что и член $\mathbf{u} \cdot \nabla A = O(u_0 A/l_0)$, осуществляющий перенос.

Явление выталкивания магнитных силовых линий имеет интересные следствия для случая горизонтального ряда вихрей, действующих на вертикальное магнитное поле. На рис. 3.5, взятом из работы [223], воспроизведена картина силовых линий установившегося поля для

$$\psi(x, y) = -(u_0/4\pi l_0)(1 - (4y^2/l_0^2))^4 \sin(4\pi x/l_0) \quad (3.85)$$

и $R_m = u_0 l_0/\lambda = 10^3$. Поле концентрируется в слое, ориентированные вдоль вертикальных плоскостей, между соседними вихрями. Слои имеют толщину $O(R_m^{-1/2})$, а поле в центре слоя равно по порядку величины $R_m^{1/2} B_0$, где B_0 — однородное вертикальное поле вдали от вихрей. Этот результат следует из того, что полный магнитный поток через площадку, перпендикулярную вертикали, не должен зависеть от высоты. Описанная картина совместима с решением (3.25) для силовой трубки; если в этом решении положить $\beta = 0$, то трубка превращается в "слой".

3.10. Выталкивание полоидальных полей меридиональной циркуляцией

Рассмотрим теперь осесимметричный аналог результата, полученного в предыдущем разделе. Пусть \mathbf{u} — стационарное полоидальное осесимметричное поле скорости с функцией тока Стокса $\psi(s, z)$,

а \mathbf{B} — полоидальное осесимметричное магнитное поле с силовой функцией $\chi(s, z, t)$. Тогда из (3.44) имеем

$$D\chi/Dt = \partial\chi/\partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla\chi = \lambda D^2\chi. \quad (3.86)$$

Откуда немедленно следует, что если $\lambda = 0$, то в лагранжевых переменных $\chi(\mathbf{x}, t) = \chi(\mathbf{a}, 0)$. Поэтому стационарные условия в области с замкнутыми линиями тока в меридиональных плоскостях в пределе $R_m = \infty$ могут иметь место, если

$$\chi = \chi(\psi(s, z)). \quad (3.87)$$

Влияние диффузии, как и в плоском случае, снова сводится к исключению любого изменения χ как функция ψ . Это можно показать следующим образом.

Воспользовавшись равенством $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ и формулой (3.47) для $D^2\chi$, мы можем записать точное стационарное уравнение для χ в виде

$$\operatorname{div}(\mathbf{u}\chi) = \lambda \operatorname{div}(\nabla\chi - 2s^{-1}\chi\mathbf{i}_s), \quad (3.88)$$

Пусть C — произвольная замкнутая линия тока в меридиональной плоскости sz , а S и \mathcal{T} — поверхность и внутренняя область тора, описываемого вращением кривой C вокруг оси z . Тогда $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ на S , и интегрирование уравнения (3.88) по области \mathcal{T} дает

$$\int_S \mathbf{n} \cdot \nabla\chi dS = \int_S 2s^{-1}\chi\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{n} dS. \quad (3.89)$$

Замечая, что $\chi = \chi(\psi)$ и $\mathbf{i}_s \cdot \mathbf{n} = \mathbf{i}_z \cdot \mathbf{t}$ на S , где \mathbf{t} — единичный вектор, тангенциальный к C , имеем

$$\chi'(\psi) \int_S \mathbf{n} \cdot \nabla\psi dS = 4\pi\chi \oint_C \mathbf{i}_z \cdot d\mathbf{x} = 4\pi\chi \oint_C dz = 0. \quad (3.90)$$

Таким образом, $\chi'(\psi) = 0$, и поэтому в области с замкнутыми линиями тока $\mathbf{B} \equiv 0$.

Следовательно, как и для плоской двумерной конфигурации, описанной в разд. 3.9, полоидальное магнитное поле выталкивается стационарной меридиональной циркуляцией из областей с замкнутыми меридиональными линиями тока.

3.11. Генерация тороидального поля дифференциальным вращением

Рассмотрим теперь такой осесимметричный случай, когда поле скорости чисто тороидально, т.е.

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_T = s\omega(s, z)\mathbf{i}_\varphi, \quad (3.91)$$

и стационарное полоидальное магнитное поле $\mathbf{B}_P(s, z)$ поддерживается некоторым, пока не конкретизованным, механизмом. Тогда тороидальное поле \mathbf{B}_T описывается в соответствии с (3.37) уравнением

$$\partial \mathbf{B}_T / \partial t = \text{rot} (\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}_P - \lambda \text{rot} \mathbf{B}_T). \quad (3.92)$$

Положив $\mathbf{B}_T = B \mathbf{i}_\phi$, мы можем получить из (3.43) эквивалентное уравнение

$$\partial B / \partial t = s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega + \lambda (\Delta - s^{-2}) B. \quad (3.93)$$

Отметим прежде всего, что если ω постоянно на \mathbf{B}_P -линиях, т.е. $\mathbf{B}_P \cdot \nabla \omega = 0$ и $B = 0$ при $t = 0$, то $B = 0$ также и при $t > 0$. Это один из первых результатов магнитной гидродинамики, получивший название *закона изоротации* [74]. В свете теоремы Альвена он представляется очевидным. Действительно, если ω постоянно на \mathbf{B}_P -линиях, тогда каждая \mathbf{B}_P -линия вращается вокруг оси z без искажения и генерация тороидального поля отсутствует.

Если $s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega \neq 0$, то несомненно, что поле $B(s, z, t)$ будет изменяться от нулевого значения вначале согласно уравнению (3.93). Сразу не ясно, будет ли этот механизм изменять суммарный поток поля \mathbf{B}_T через всю меридиональную плоскость. Пусть S_m обозначает меридиональную плоскость ($0 \leq s < \infty$, $-\infty < z < \infty$), а C_m — ее границу, состоящую из оси z и полуокружности на бесконечности. Тогда интегрирование уравнения (3.92) по поверхности S_m дает

$$\frac{d}{dt} \int_{S_m} \mathbf{B}_T \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C_m} (\mathbf{u}_T \times \mathbf{B}_P - \lambda \text{rot} \mathbf{B}_T) \cdot d\mathbf{x}. \quad (3.94)$$

Предположим, что $\omega(s, z)$ конечно на оси $s = 0$ и для простоты тождественно равно нулю вне некоторой сферы конечного радиуса R . Тогда $\mathbf{u}_T \equiv 0$ на C_m и, кроме того, как это станет ясным из приводимого ниже детального решения, $\text{rot} \mathbf{B}_T = O(r^{-3})$ при $r = (s^2 + z^2)^{1/2} \rightarrow \infty$. Поэтому равенство (3.94) принимает вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} \int_{S_m} \mathbf{B}_T \cdot d\mathbf{S} &= - \int_{-\infty}^{\infty} \lambda \left(\frac{1}{s} \frac{d}{ds} s B \right)_{s=0} dz = \\ &= - \int_{-\infty}^{\infty} \mu_0 \lambda (\mathbf{J}_P \cdot \mathbf{i}_z)_{s=0} dz. \end{aligned} \quad (3.95)$$

Следовательно, суммарный поток тороидального поля *может* изменяться только в результате диффузии и при условии, если член $s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega$ в уравнении (3.93) не антисимметричен относительно любой плоскости $z = \text{const}$ (в противном случае поле будет просто антисимметричным и его полный поток тривиально обращается в нуль).

И здесь, как и в случае, обсуждавшемся в конце гл. 2, очевидна решающая роль диффузии. Если $\lambda = 0$, то, хотя тороидальное поле и изменяется, интегральный поток этого поля через меридиональные плоскости остается равным нулю. *Суммарный* поток тороидального поля может появиться только при $\lambda \neq 0$. Отметим, что (совершенно случайно) равенства (3.92) и (3.95) остаются справедливыми, даже если λ — произвольная функция s и z .

Рассмотрим теперь подробнее поведение решений уравнения (3.93) с начальным условием $B = 0$ при $t = 0$. Как и в случае, обсуждавшемся в разд. 3.8, здесь имеется начальная фаза, когда влиянием диффузии можно пренебречь, и конечное установившееся состояние, когда диффузионные эффекты особенно существенны.

1. Начальная фаза

При $\lambda = 0$ уравнение (3.93) решается просто:

$$B(s, z, t) = s(\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega t. \quad (3.96)$$

С физической точки зрения ясно, что \mathbf{B}_P -линии захватываются жидкостью и "загибаются" вокруг оси z в тех областях, где ω максимально. В специальном случае, когда $\mathbf{B}_P = B_0 \mathbf{i}_z$, причем B_0 — постоянная, решение (3.96) принимает вид

$$B(s, z, t) = s B_0 (\partial \omega / \partial z) t; \quad (3.97)$$

очевидно, что если ω симметрично относительно плоскости $z = 0$, то B антисимметрично, и наоборот. В общем случае, если \mathbf{B}_P -линии симметричны относительно плоскости $z = 0$, то симметрия B противоположна симметрии произведения $B_z \omega$.

Диффузионный член, которым мы пренебрегли в (3.93), равен по порядку величины $\lambda B / l_0^2$, где l_0 — характеристическая длина, на которой существенно изменяется ω . Он становится сравнимым с членом $s(\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega$, который мы сохранили, при $t = O(l_0^2 / \lambda)$.

Если $\omega = O(\omega_0)$ и $|\nabla \omega| = O(\omega_0 / l_0)$, то на этой стадии [в противоположность (3.62)]

$$B = O(R_m) B_0, \quad \text{где } R_m = \omega_0 l_0^2 / \lambda. \quad (3.98)$$

2. Конечное установившееся состояние

Можно ожидать, что при $t \gg l_0^2 / \lambda$ поле B достигает стационарного состояния, описываемого уравнением

$$(\Delta - s^{-2}) B = -\lambda^{-1} s(\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega. \quad (3.99)$$

Чтобы решить это уравнение, заметим вначале, что если $\mathbf{B}_T = \text{rot} (\mathbf{x} T)$, то, согласно (2.44), $B = -\partial T / \partial \theta$. Отсюда прямо следует, что

$$(\Delta - s^{-2}) B = -\partial(\Delta T) / \partial \theta. \quad (3.100)$$

Предположим, что T можно разложить в ряд

$$T = \sum_n f_n(r) P_n(\cos \theta). \quad (3.101)$$

Тогда

$$\Delta T = \sum_n g_n(r) P_n(\cos \theta), \quad g_n(r) = r^{-2} [(r^2 f_n)'' - n(n+1)f_n]. \quad (3.102)$$

Если же для правой части уравнения (3.99) справедливо разложение

$$-\lambda^{-1} s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega = -\sum_1^{\infty} g_n(r) dP_n(\cos \theta) / d\theta, \quad (3.103)$$

то (3.101) дает соответствующее разложение для $T(r, \theta)$, а соотношение $B = -\partial T / \partial \theta$ для B дается как

$$B(r, \theta) = -\sum_1^{\infty} f_n(r) dP_n(\cos \theta) / d\theta. \quad (3.104)$$

Если величина $(\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega$ регулярна в точке $r = 0$, то из (3.103) ясно, что $g_n(0) = 0$ для каждого n . Кроме того, мы предположим, что при $r \rightarrow \infty$ для каждого n в лучшем случае $g_n(r) = O(r^{-3})^1$. Тогда решение $f_n(r)$ [см. (3.102)], для которого $f_n(0)$ конечно и $f_n(\infty) = 0$, имеет вид

$$f_n(r) = \frac{-1}{2n+1} \left\{ \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r x^{n+2} g_n(x) dx + r^n \int_r^{\infty} \frac{g_n(x)}{x^{n-1}} dx \right\}. \quad (3.105)$$

Особый интерес представляет случай $\text{rot } \mathbf{B}_P = 0$, т.е. $\mathbf{B}_P = -\nabla \Psi$, $\Delta \Psi = 0$. Тогда осесимметричная и конечная в $r = 0$ величина Ψ может быть разложена в ряд

$$\Psi = \sum_{m=1}^{\infty} \Psi_m, \quad \Psi_m = -A_m r^m P_m(\cos \theta). \quad (3.106)$$

¹⁾ Это, конечно, менее ограничительное предположение, чем $g_n(r) \equiv 0$ для $r > R$; однако оно включает в себя такую возможность. Если $g_n(r)$ падает с ростом r достаточно быстро, то влияние дифференциального вращения локализовано.

В целях упрощения предположим далее, что ω является функцией только $r = (s^2 + z^2)^{1/2}$. Тогда

$$\begin{aligned} s(\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega &= -r \sin \theta \frac{\partial \Psi}{\partial r} \omega'(r) = \sum_{m=1}^{\infty} mA_m r^m \omega'(r) \sin \theta P_m(\cos \theta) = \\ &= -\sum_{m=1}^{\infty} \frac{mA_m}{2m+1} r^m \omega'(r) \frac{d}{d\theta} (P_{m+1}(\cos \theta) - P_{m-1}(\cos \theta)). \end{aligned} \quad (3.107)^1)$$

Сравнивая это выражение с (3.103), мы имеем для $n = 1, 2, \dots$

$$\lambda g_n(r) = - \left\{ \frac{(n-1)A_{n-1} r^{n-1}}{2n-1} - \frac{(n+1)A_{n+1} r^{n+1}}{2n+3} \right\} \omega'(r), \quad (3.108)$$

где можно положить $A_0 = 0$. Из (3.105) после интегрирования по частям и упрощения находится соответствующее выражение для $f_n(r)$:

$$\begin{aligned} \lambda f_n(r) &= \frac{-(n-1)A_{n-1}}{(2n-1)r^{n+1}} \int_0^r x^{2n} \omega(x) dx + \frac{(n+1)A_{n+1}}{(2n+1)r^{n+1}} \int_0^r x^{2n+2} \omega(x) dx + \\ &+ \frac{2(n+1)A_{n+1} r^n}{(2n+3)(2n+1)r^n} \int_r^{\infty} x \omega(x) dx. \end{aligned} \quad (3.109)$$

В частном случае, когда $\mathbf{B}_P = B_0 \mathbf{i}_z$, мы имеем только член $\Psi = \Psi_1$ с $A_1 = B_0$. Тогда, согласно (3.104) и (3.109),

$$B(r, \theta) = -\frac{1}{3} \lambda^{-1} B_0 \sin \theta \cos \theta r^{-3} \int_0^r x^4 \omega(x) dx. \quad (3.110)$$

Заметим, что в этом случае для справедливости условия $B = O(r^{-3})$ на бесконечности достаточно, чтобы при $x \rightarrow \infty$ выполнялось условие $\omega = O(x^{-6})$.

Аналогично, если $\Psi = -A_2 r^2 P_2(\cos \theta)$, то

$$\begin{aligned} B(r, \theta) &= -\lambda^{-1} A_2 \left\{ \frac{2}{3} r^{-2} \int_0^r x^4 \omega(x) dx + \frac{4}{15} r^{-1} \int_r^{\infty} x \omega(x) dx \right\} \sin \theta + \\ &+ \frac{3}{5} \lambda^{-1} A_2 \left\{ r^{-4} \int_0^r x^6 \omega(x) dx \right\} (1 - 5 \cos^2 \theta) \sin \theta. \end{aligned} \quad (3.111)$$

Наиболее важная вещь, о которой следует сказать, — это асимптотическое поведение довольно сложного выражения (3.111) при $r \rightarrow \infty$.

¹⁾ Мы воспользовались здесь рекуррентным соотношением $(1 + 2m)P'_m(\mu) = P'_{m+1}(\mu) - P'_{m-1}(\mu)$.

Если $\omega(x) = O(x^{-6})$ при $x \rightarrow \infty$, то

$$B(r, \theta) \sim \frac{2A_2 \sin \theta}{3\lambda r^2} \int x^4 \omega(x) dx \quad \text{при } r \rightarrow \infty. \quad (3.112)$$

Оно не совпадает с асимптотикой (3.110) (где $B \propto r^{-3}$ при $r \rightarrow \infty$), полученной в первом случае. Выражение (3.111) приводит к *бесконечному* потоку тороидального поля через меридиональную плоскость S_m . Из вводного обсуждения к настоящему разделу ясно, что этот поток возникает благодаря диффузии, время действия которой до установления стационарного поля (3.111) во всем пространстве, очевидно, равно бесконечности.

Более медленное уменьшение B , описываемого выражением (3.112), с ростом r по сравнению с B из (3.110) связано с симметрией поля относительно плоскости $z = 0$ ($\theta = \pi/2$). Поле (3.112) с простой угловой зависимостью $\sin \theta$ менее подвержено влиянию диффузии, чем поле (3.110) с более сложной структурой $\sin \theta \cos \theta$, и потому поле (3.112) диффундирует дальше от области действия дифференциального вращения. Отсюда имеем важное следствие, заключающееся в том, что если в общем случае \mathbf{B}_P неоднородно, то генерация тороидального поля на больших расстояниях определяется градиентом \mathbf{B}_P в окрестности центра вращения (а не его локально усредненным значением).

В заключение заметим, что во всех случаях в установившемся состоянии

$$\max |B| = O(R_m) |\mathbf{B}_P|. \quad (3.113)$$

Это означает, что здесь в отличие от ситуации, рассмотренной в разд. 3.8, отношение тороидального поля к полоидальному возрастает до значения R_m и затем, не изменяясь по порядку величины, выходит благодаря процессу диффузии на стационарный уровень. Время всего процесса по порядку величины равно l_0^2/λ . Предположение о существовании какого-либо механизма выталкивания магнитных силовых линий здесь не делается; силовые линии не должны выталкиваться, если "приложенное поле" \mathbf{B}_P симметрично относительно оси вращения.

Вышеприведенное рассмотрение можно обобщить на случай, когда наряду с осесимметричными имеются и неосесимметричные составляющие полоидального поля \mathbf{B}_P (см. [88], где рассмотрен случай жесткого сферического ротатора, вставленного в твердотельный проводник). Анализ усложняется, так как при обращении оператора $\Delta - s^{-2}$ появляются сферические функции Бесселя; однако результат не является неожиданным: при $R_m \gg 1$ неосесимметричные составляющие исключаются из вращающейся области, а осесимметричные лишь искажаются таким образом, как это описано выше.

3.12. Топологическая накачка магнитных силовых линий

Фундаментальный вариант механизма выталкивания магнитных силовых линий, который обсуждался в разд. 3.8 – 3.10, был открыт Дробышевским и Юфревым [66]. Поводом к исследованию послужил тот факт, что при стационарной тепловой конвекции между двумя горизонтальными плоскостями, нижняя из которых однородно нагрета, ячеистая картина конвекции сказывается в общем случае топологически асимметричной относительно центральной плоскости: жидкость обычно поднимается в центре конвективных ячеек и опускается на периферии, так что области поднимающейся жидкости отделены друг от друга, а области опускающейся жидкости связаны друг с другом. Такое поведение конвекции нельзя, конечно, объяснить, исходя из анализа устойчивости в линейном приближении, поскольку если $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ – произвольное поле скорости, удовлетворяющее уравнениям, линеаризованным относительно покоящейся жидкости, то $-\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ также является решением этих уравнений. Причину следует искать в нелинейных динамически устойчивых характеристиках задачи. Однако было бы неуместно отказаться от рассмотрения задачи, сославшись на нелинейность. В духе используемого здесь кинематического подхода предположим просто, что стационарное поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, обладающее указанной выше топологической асимметрией, задано; рассмотрим, к каким следствиям приведет действие диффузии и конвекции $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ на первоначально горизонтальное поле \mathbf{B} .

Предположим, что жидкость заключена между двумя плоскостями $z = 0, z_0$. Вблизи верхней плоскости $z = z_0$ поднимающаяся жидкость должна расходиться, т.е. поток везде направлен к периферии конвективных ячеек. В таком случае горизонтальная силовая линия вблизи $z = z_0$ будет искажаться этим движением таким образом, что будет сноситься к периферии ячейки, откуда затем благодаря конвекции она может опускаться вниз. В противоположность этому горизонтальная силовая линия вблизи $z = 0$ не может быть искажена так, чтобы везде находилась в области поднимающейся жидкости, поскольку эти области отделены друг от друга. Следовательно, **В-линия не может** быть перенесена наружу (хотя каждая всплывающая капля жидкости может поднимать вверх петли поля). Отсюда следует, что если говорить о горизонтальном усредненном поле $\mathbf{B}_0(z, t) = \langle \mathbf{B}(x, y, z, t) \rangle$ то имеется клапанный эффект, который разрешает перенос вниз, но запирает перенос вверх. Этот эффект противоположен диффузии, однако на основе физических соображений можно ожидать, что установится такое распределение $\mathbf{B}_0(z)$, которое будет асимметричным

относительно плоскости $z = z_0/2$ и будет иметь большой поток в нижней части, причем степень асимметрии связана с соответствующим магнитным числом Рейнольдса.

Регулярную ячеистую структуру над горизонтальной плоскостью можно характеризовать границами ячеек, которые имеют треугольную, квадратную или гексагональную форму. В нормальной бенаровской конвекции преобладает гексагональная форма (вновь по причинам, связанным с нелинейной динамикой системы). Однако для поля скорости с ячейками, границы которых имеют квадратную форму, анализ упрощается, а качественное поведение системы, несомненно, не зависит от того, какую форму имеют границы ячеек.

Дробышевский и Юферев выбрали поле скорости вида

$$\mathbf{u} = u_0 \left[-\sin x' \left(1 + \frac{1}{2} \cos y' \right) \cos z', - \left(1 + \frac{1}{2} \cos x' \right) \times \right. \\ \left. \times \sin y' \cos z', (\cos x' + \cos y' + \cos x' \cos y') \sin z' \right], \quad (3.114)$$

где $x' = \pi \mathbf{x} / z_0$. Это поле скорости удовлетворяет равенствам $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$, $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ на $z' = 0$, π , имеет ячейки с квадратными границами $x' = (2n + 1)\pi$, $y' = (2m + 1)\pi$ ($n, m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$) и обладает упомянутой выше основной топологической асимметрией. Дискретные области поднимающейся жидкости заключены внутри замкнутых кривых $\cos x' + \cos y' + \cos x' \cos y' = 0$; центры этих кривых совпадают с центрами ячеек, а сами кривые заключены в кольцевых областях

$$\frac{2}{3} z_0 \leq [(x - 2nz_0)^2 + (y - 2mz_0)^2]^{1/2} \leq z_0 / \sqrt{2}, \quad (3.115)$$

т.е. приближенно они имеют вид окружностей радиуса $0,68 z_0$.

В стационарных условиях магнитное поле $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ должно удовлетворять уравнению (3.10) с $\partial \mathbf{V} / \partial t = 0$. Если положить $\mathbf{u}' = \mathbf{u} / u_0$ и опустить штрихи у \mathbf{u}' и \mathbf{x}' , то это уравнение примет вид

$$\Delta \mathbf{V} = -R_m \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{V}), \quad R_m = z_0 u_0 / \pi \lambda. \quad (3.116)$$

Для решения этого уравнения необходимы граничные условия для функции \mathbf{V} . Следуя Дробышевскому и Юфереву, мы предположим, что твердотельные области $z < 0$ и $z > \pi$ представляют собой идеальные проводники, в которых поля \mathbf{E} и \mathbf{V} обращаются в нуль. Тогда, согласно (2.5),

$$V_z = 0 \quad \text{на} \quad z = 0, \pi. \quad (3.117)$$

Из равенств (2.111) и (2.117) мы имеем, что $\mathbf{n} \times \mathbf{J} = 0$ на границе или эквивалентно (так как $\mu_0 \mathbf{J} = \text{rot } \mathbf{B}$)

$$\partial B_x / \partial z = \partial B_y / \partial z = 0 \quad \text{на } z = 0, \pi. \quad (3.118)$$

(При таких условиях на границах будет присутствовать поверхностный ток.) Наконец мы предположим, что в отсутствие движения жидкости поле \mathbf{B} однородно (или, эквивалентно, когда $R_m = 0$) и направлено вдоль оси x , т.е. $(B_0, 0, 0)$. В таком случае поток $\Phi_0 = z_0 B_0$ заключен между идеально проводящими плоскостями, и задача состоит в нахождении распределения среднего потока из уравнения (3.116) при $R_m \neq 0$.

При $R_m \ll 1$ решение можно искать в виде ряда

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} R_m^n \mathbf{B}^{(n)}(\mathbf{x}), \quad (3.119)$$

где $\mathbf{B}^{(0)} = (B_0, 0, 0)$ и, как следует из (3.116),

$$\Delta \mathbf{B}^{(n+1)} = -\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}^{(n)}) \quad (n = 0, 1, 2, \dots). \quad (3.120)$$

Поскольку правая часть этого равенства всегда является периодической функцией координат, то для обращения оператора Лапласа Δ достаточно просто многократно применить тождество

$$\begin{aligned} \Delta^{-1} \cos(lx + p) \cos(my + q) \cos(nz + r) = \\ = (l^2 + m^2 + n^2)^{-1} \cos(lx + p) \cos(my + q) \cos(nz + r). \end{aligned} \quad (3.121)$$

Затем можно построить усредненное горизонтальное поле $\mathbf{B}_0^{(n)}(z) = \langle \mathbf{B}^{(n)}(x, y, z) \rangle$. Для получения эффекта накачки эту несколько угловительную процедуру необходимо довести до члена $\mathbf{B}_0^{(3)}(z)$. В этом приближении получим $\mathbf{B}_0(z) = B_0(z) \mathbf{i}_x$, где

$$B_0(z) = B_0 \left(1 + \frac{7R_m^2}{48} \cos 2z + \frac{R_m^3}{240} (28 \cos z - 3 \cos 3z) + O(R_m^4) \right). \quad (3.122)$$

Член, пропорциональный R_m^2 , в этом выражении *симметричен* относительно центральной плоскости $z = 1/2$. Следовательно, в этом приближении мы имеем симметричное выталкивание силовых линий, как и в случае двумерных потоков Вейса [223] (однако здесь эффект, конечно, слабее, поскольку $R_m \ll 1$). Член, пропорциональный R_m^3 , *антисимметричен* относительно плоскости $z = 1/2$ и, как ожидалось, дает

суммарный перенос поля вниз. Фактически разность потоков в нижней и верхней половинах в размерных единицах равна

$$\Delta\Phi = \left(\int_0^{z_0/2} - \int_{z_0/2}^{z_0} \right) B_0(z) dz = B_0 z_0 (0,24 R_m^3 + O(R_m^5)). \quad (3.123)$$

Можно заметить, что при учете следующих членов разложения (3.122) в эффект асимметричной накачки будут вносить вклад только члены с нечетными степенями R_m , поскольку члены с четными степенями инвариантны относительно замены u_0 на $-u_0$.

Функция $B_0(z)$ была вычислена непосредственно из уравнения (3.116) (с помощью метода, основанного на обрыве рядов Фурье) [66] для пяти значений R_m , максимальное из которых равно $16/\pi = 5,09$. На рис. 3.6 показаны кривые, рассчитанные для этих значений R_m . Довольно очевидна концентрация магнитного потока в нижней части промежутка. Особенно удивительно, что эта концентрация растет с увеличением R_m .

Можно сказать, что при $R_m \gg 1$ среднее поле будет концентрироваться в тонком слое толщиной $\delta = O(R_m^{-1/2})z_0$ на нижней границе. Тогда здесь должна быть справедливой теория пограничного слоя. Однако трехмерность скорости делает задачу трудной, и она до сих пор не решена. Численные расчеты для R_m , превышающих вышеупомянутое значение 5,09, также отсутствуют.

Дополнительные аспекты явления накачки магнитных силовых линий были исследованы Проктором [174], который указал, что асим-

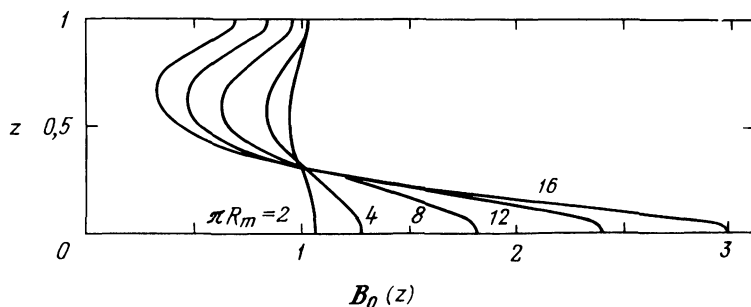


Рис. 3.6.

Распределение среднего поля, вычисленное из (3.116) для различных значений R_m [66]. Отметим 1) почти симметричный, но слабый эффект выталкивания поля при $\pi R_m = 2$; 2) сильную концентрацию поля вблизи нижней границы при $\pi R_m = 16$.

метричная накачка может происходить даже в отсутствие топологического различия между поднимающимися и опускающимися движениями жидкости. Проктор подробно проанализировал влияние *двумерных* движений и показал, что для существования суммарного потока, направленного вверх или вниз, достаточно отсутствия *геометрической* симметрии относительно срединной плоскости. Например, если $\langle w^3 \rangle \neq 0$, где w – вертикальная скорость в срединной плоскости, то появляется суммарный перенос, названный Проктором *геометрической* (в противоположность топологической) накачкой. Однако он показал, что в пределе $R_m \gg 1$, когда механизм Дробышевского и Юферева наиболее эффективен, двумерной топологической накачкой можно пренебречь.

МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ

4.1. Магнитные поля планет

Блестящие результаты космических программ со спускаемыми аппаратами в последние несколько лет позволили взглянуть на Землю как на одну из планет, обладающих магнитным полем. Некоторые свойства пяти ближайших к Солнцу планет (для которых в настоящее время имеются измерения магнитных полей)¹⁾ собраны в табл. 4.1. Из этих планет наибольшее среднее поверхностное поле (определяемое величиной μ/R^3) у Юпитера, далее следуют Земля, Меркурий и Марс.

В настоящее время принято считать, что магнитное поле Земли создается в жидком ядре. Механизм генерации и поддержания поля связан с движениями проводящей жидкости, испытывающей сильное воздействие кориолисовых сил. На рис. 4.1, а представлена схема крупномасштабного строения Земли, полученная на основании сейсмологических исследований и знания распределения плотности Земли и относительного обилия составляющих ее химических соединений (см., например, [103]). Если принять, что средний радиус Земли $R_E = 6380$ км (имеются, конечно, небольшие отклонения от идеальной сферы), то можно указать на четкие фазовые переходы при $r = R_C$ (разрыв Леман – Гутенберга) и при $r = R_I$, где

$$R_C \approx 0,55 R_E, \quad R_I \approx 0,19 R_E. \quad (4.1)$$

Поверхность $r = R_C$ является границей ядра; внешнее ядро $R_I < r < R_C$ состоит из расплавленного металла – по-видимому, железа с малой примесью легких элементов; серы, углерода или кремния. Доказательство наличия серы [150] основано на относительном дефиците серы во внешних слоях Земли и предположении о том, что процессы химической и гравитационной дифференциации на ранних стадиях эволюции

¹⁾ Браун [35], интерпретировав гектометровое радиоизлучение от Сатурна, сделал вывод, что магнитное поле этой планеты составляет около 12% поля Юпитера.

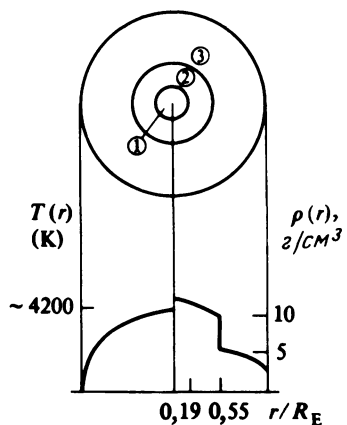
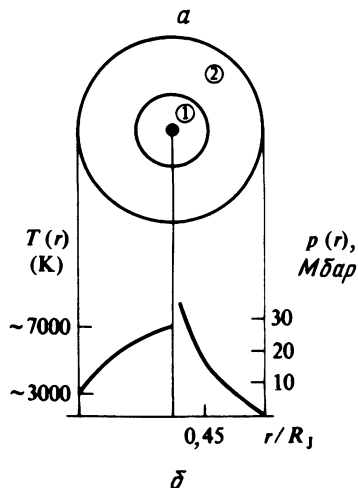


Рис. 4.4.

Внутреннее строение Земли и Юпитера.
 а – Земля, $R_E = 6380$ км: 1) твердое внутреннее ядро (железо-никелевый сплав); 2) жидкое внешнее ядро (железо и некоторые легкие элементы); 3) твердая мантия (ферромагнитные силикаты [103]).
 б – Юпитер, $R_J = 71\,460$ км: 1) жидкое ядро (гелиево-водородный сплав); 2) твердый водород; для $r/R_J \leq 0,1$ может существовать твердое внутреннее ядро, состоящее из гелия и более тяжелых элементов. (Согласно модели Смолуховского [107].)



Земли могут привести к относительно высокой концентрации серы в центральных областях.

Наиболее вероятно, что внутреннее ядро $r < R_I$ состоит из твердого сплава железа и никеля, образовавшегося, как предполагается, путем медленной кристаллизации из внешнего ядра. Наиболее вероятный состав мантии $r > R_C$, которая является твердой (хотя за характерные времена порядка миллионов лет в ней могут развиваться вязкоупругие деформации), – ферромагнитные силикаты $(MgOFeO)SiO_2$, в которых Fe и Mg свободно замещают друг друга [90].

Следовательно, с точки зрения приложения теории динамо к Земле, мы сталкиваемся с задачей о течении жидкости во вращающейся

Таблица 4.1

Характеристики планет Меркурий, Венера, Земля, Марс и Юпитер. Сведения о магнитном поле Меркурия взяты из работы [151], о поле Марса — из работы [65] и Юпитера — из работ [196, 221]. Направление собственного вращения Венеры обратно направлению ее обращения вокруг Солнца. Направление вращения остальных четырех планет — прямое. Величину μ/R^3 в последнем столбце можно считать мерой средней напряженности поверхностного поля.

Планета	Радиус R , км	Средняя плотность, кг/м ³	Период вращения, сут	Угловая скорость Ω , с ⁻¹	Дипольный момент μ , Гс/км ³	μ/R^3 , Гс
Меркурий	2440	5400	59	$1,23 \cdot 10^{-6}$	$4,8 \cdot 10^7$	$3,3 \cdot 10^{-3}$
Венера	6050	5200	243	$2,99 \cdot 10^{-6}$	$< 4 \cdot 10^7$	$< 1,8 \cdot 10^{-4}$
Земля	6380	5500	1,0	$7,27 \cdot 10^{-5}$	$8,05 \cdot 10^{10}$	$3,11 \cdot 10^{-1}$
Марс	3390	3900	1,026	$7,09 \cdot 10^{-5}$	$2,47 \cdot 10^7$	$6,36 \cdot 10^{-4}$
Юпитер	71400	1300	0,41	$1,77 \cdot 10^{-4}$	$1,31 \cdot 10^{15}$	3,61

сферической оболочке $R_I < r < R_C$ и электрических токах и магнитных полях, которые могут генерировать такое течение. В теории динамо жидкость целесообразно считать несжимаемой, при чисто кинематическом подходе можно рассматривать любые кинематически возможные поля скорости, удовлетворяющие только соотношениям $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$ на $r=R_I, R_C$. На следующем этапе нужно, конечно, учесть природу сил (или источников энергии), поддерживающих движение жидкости. Дальнейшее рассмотрение физического состояния внутренней части Земли мы отложим до разд. 4.4.

Информация, содержащаяся в табл. 4.1, подтверждает (хотя это подтверждение носит предварительный характер) вывод о том, что для действия планетарного динамо необходимо как проводящее жидкое ядро, так и "достаточная степень вращения" (т.е. достаточное влияние кориолисовых сил). Венера, например, имеет приблизительно те же радиус и среднюю плотность, что и Земля. Однако она вращается очень медленно по сравнению с Землей и разумно предположить, что именно по этой причине она не имеет заметного магнитного поля. С другой стороны, Марс вращается приблизительно с той же угловой скоростью, что и Земля, однако благодаря более низкой средней плотности и соответственно меньшему обилию обогащенных железом компонент он имеет значительно меньшее расплавленное металлическое ядро (если оно вообще существует). Меркурий вращается медленно, поэтому его довольно значительный дипольный момент (для планеты с такими размерами) кажется до некоторой степени удивительным. Меркурий, обладающий промежуточными между Землей и Венерой значениями скорости вращения и поверхностной напряженности поля, может служить тем объектом, на котором должны проверяться модели динамо.

Наконец, особый интерес с точки зрения теоремы динамо представляет Юпитер. Ввиду низкой средней плотности внутренний химический состав Юпитера полностью отличен от состава четырех перечисленных выше планет. Гипотетическое строение Юпитера, также основанное на знании полной массы и общих соображениях, касающихся относительного обилия элементов в протопланетной среде, изображено на рис. 4.1, б. Большая часть планеты состоит из жидкого водорода, возможно, с небольшой примесью гелия. Высокое давление ($3 \cdot 10^6$ атм и более) в области ядра $r \lesssim 46000$ км (исключая очень маленькую центральную область, в которой могут концентрироваться более тяжелые элементы) заставляет молекулы водорода диссоциировать на атомы, т.е. водород находится здесь в металлической фазе и его электропроводность сравнима с электропроводностью других жидких металлов. Скорость вращения планеты более

чем в два раза превышает угловую скорость Земли, и кориолисовы силы, несомненно, существенны в динамике движения жидкости внутри Юпитера. Разумно ожидать, что магнитное поле Юпитера, как и поле Земли, генерируется динамо-механизмом в жидкой проводящей ядерной области.

4.2. Разложение магнитного поля Земли по сферическим гармоникам

Магнитное поле на поверхности Земли создается отчасти токами, текущими внутри Земли, и отчасти токами во внешних проводящих слоях земной атмосферы. Путем измерений всех трех компонент поля на поверхности можно разделить эти вклады. Таким образом удалось показать, что самый главный вклад связан с внутренней областью. За подробными цифрами мы отсылаем читателя к классическому трактату Чемпена и Бартельса [51] по геомагнетизму, см. также [97].

Магнитный потенциал, созданный внутренними токами, можно разложить по сферическим гармоникам [ср. (2.64)]:

$$\Psi(r, \theta, \varphi) = -R_E \sum_{n=1}^{\infty} (R_E/r)^{n+1} S_n(\theta, \varphi) = \sum_{n=1}^{\infty} \Psi^{(n)}, \quad (4.2)$$

где

$$S_n(\theta, \varphi) = \sum_{m=0}^n (g_n^m(t) \cos m\varphi + h_n^m(t) \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta) \quad (4.3)$$

и $P_n^m(\cos \theta)$ — присоединенный полином Лежандра с нормировкой

$$\int_{-1}^1 P_n^m(\cos \theta) P_{n'}^m(\cos \theta) d \cos \theta = (2n+1)^{-1} \delta_{nn'}. \quad (4.4)$$

Коэффициенты $g_n^m(t)$ и $h_n^m(t)$ обычно называют "геомагнитными элементами". Географическая ось (т.е. ось вращения) Земли направлена вдоль $\theta = 0$; отсчет широты $\varphi = 0$ производится от Гринвича.

Потенциал Ψ удобно разделить на дипольную и недипольную составляющие:

$$\Psi = \Psi_d + \Psi_{nd}, \quad \Psi_d = \Psi^{(1)}, \quad \Psi_{nd} = \sum_{n=2}^{\infty} \Psi^{(n)}. \quad (4.5)$$

Дипольная составляющая соответствует воображаемому диполю μ , расположенному в центре Земли, где с учетом того, что декартовы координаты (x, y, z) связаны со сферическими (r, θ, φ) соотношением (2.20),

$$\mu_x = R_E^3 g_1^1, \quad \mu_y = R_E^3 h_1^1, \quad \mu_z = R_E^3 g_1^0. \quad (4.6)$$

Этот диполь составляет с осью z угол $\psi(t)$, тангенс которого равен

$$\operatorname{tg} \psi = ((g_1^1)^2 + (h_1^1)^2)^{1/2} / g_1^0. \quad (4.7)$$

Воспользовавшись значениями g_n^m , h_n^m и их производными по времени ($n, m \leq 8$), приведенными в первых двух строках табл. 4.2 [17], получим из (4.7) $\psi \approx 11^\circ$.

Таблица 4.2

Геомагнитные элементы $g_n^m(t)$, $h_n^m(t)$ и скорости их изменения в эпоху 1975,0 для $n, m \leq 8$. За единицу измерения поля выбрано $1 \gamma = 10^{-5} \text{ Гс} = 10^{-9} \text{ Вб/м}^2$ [17]

m	n	g_n^m, γ	h_n^m, γ	$\dot{g}_n^m, \gamma/\text{год}$	$\dot{h}_n^m, \gamma/\text{год}$
0	1	-30103,6		26,8	
1	1	-2016,5	5682,6	10,0	-10,1
0	2	-1906,7		-25,0	
1	2	3009,9	-2064,7	0,3	-2,8
2	2	1633,0	-58,1	5,5	-18,9
0	3	1278,2		-3,8	
1	3	-2142,0	-329,8	-10,5	7,2
2	3	1254,7	265,9	-4,7	2,8
3	3	831,0	-227,0	-4,7	-6,4
0	4	946,9		-0,9	
1	4	792,5	193,4	-2,2	5,4
2	4	443,8	-265,8	-4,0	0,7
3	4	-403,9	53,0	-2,1	2,6
4	4	212,5	-285,2	-4,6	-0,7
0	5	-220,6		0,2	
1	5	351,4	24,5	-1,0	0,9
2	5	262,3	148,4	1,3	2,6
3	5	-63,8	-161,3	-2,1	-2,7
4	5	-157,5	-83,4	-0,6	1,3
5	5	-40,2	92,3	1,3	1,1
0	6	44,1		0,6	
1	6	69,9	-11,2	0,9	-0,3
2	6	27,7	100,4	2,3	-0,2
3	6	-194,3	77,6	3,5	0,2
4	6	-0,9	-40,3	0,0	-1,6
5	6	3,8	-7,9	0,8	0,4
6	6	-108,7	15,6	-0,4	2,0
0	7	71,5		-0,4	

(Продолжение табл. 4.2.)

m	n	g_n^m, γ	h_n^m, γ	$g_n^m, \gamma/\text{ГОД}$	$h_n^m, \gamma/\text{ГОД}$
1	7	-53,3	-76,6	-0,2	-1,2
2	7	2,3	-24,7	-0,5	-0,2
3	7	13,4	-4,5	0,3	0,0
4	7	-6,4	7,0	0,8	0,3
5	7	3,2	24,5	0,6	-0,6
6	7	17,0	-21,8	0,5	0,0
7	7	-5,9	-12,9	-0,8	1,2
0	8	11,0		0,4	
1	8	5,1	4,9	0,3	-0,2
2	8	-2,6	-13,9	0,0	-0,3
3	8	-12,6	5,0	0,4	-0,3
4	8	-13,8	-18,0	-0,2	-0,3
5	8	-0,1	5,7	-0,4	0,5
6	8	-2,4	14,5	0,6	-0,5
7	8	12,3	-11,1	-0,3	-0,6
8	8	4,9	-16,7	0,0	0,5

Для $r = R_E$ ряд (4.2) сходится очень быстро. Если токи, создающие поля, протекают строго в области ядра $r < R_C$, то ряд будет сходиться для $r > R_C$. В действительности, хотя проводимость мантии значительно меньше проводимости ядра, она не является идеальным изолятором и между ядром и мантией может протекать некоторый ток. Поэтому вблизи $r = R_C$ разложением (4.2) надо пользоваться с осторожностью. Тем не менее интересно отложить на графике (рис. 4.2) среднеквадратичные вклады $\langle B_n^2 \rangle$, где $\mathbf{v}_n = -\nabla \Psi^{(n)}$, а угловые скобки означают усреднение по сфере $r = \text{const}$ для $n = 1, 2, \dots, 8$ [130]. На сфере $r = R_E$, несомненно, имеет место сходимость, хотя при $r = R_C$, как и ожидалось, сходимость не очевидна. В самом деле, ясно, что все гармоники, вплоть до $n = 8$, на $r = R_C$ дают приблизительно одинаковые вклады в среднеквадратичное поле. Таким образом, хотя на поверхности Земли поле почти дипольное, его структура, как мы убедились выше, изменяется у границы ядра. Различие между структурой поля на сферах $r = R_E$ и $r = R_C$ проявится еще отчетливее, если воспользоваться средними квадратами от производных по времени \dot{B}_n^2 . Тогда на $r = R_C$ с определенностью прослеживается рост $\langle \dot{B}_n^2 \rangle$ с увеличением n (рис. 4.2, б). Однако в силу случайных ошибок в вековых вариационных коэффициентах значения $\langle \dot{B}_n^2 \rangle$ для $n = 7, 8$ на этом рисунке остаются неопределенными.

Недипольное поле обычно изображается с помощью магнитных карт, т.е. набором контуров, скажем, постоянного вертикального

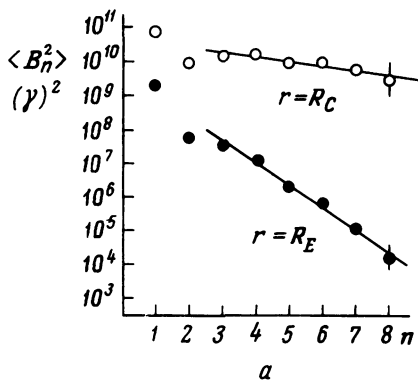
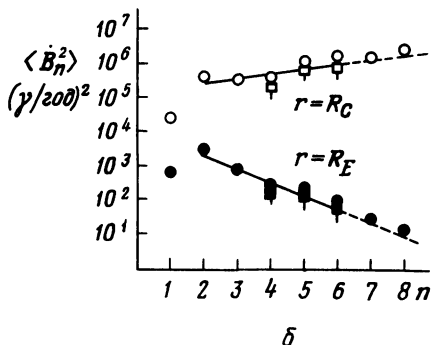


Рис. 4.2.

а — среднеквадратичное поле и б — скорость изменения среднеквадратичного поля на поверхностях $r = R_E$ и $r = R_C$. $\mathbf{B}_n = \nabla \Psi^{(n)}$, а угловые скобки означают усреднение по сферической поверхности. За единицу напряженности поля взято $1 \gamma = 10^{-5}$ Гс. Точками с квадратиками на рис. 4.2, б отмечены значения $\langle B_n^2 \rangle$, исправленные за случайные ошибки вековых вариационных коэффициентов g_n^m , h_n^m [130]. (Использованы данные по остаточному полю Бауэра 1965 — 1970 гг.)



магнитного поля (обычно получаемого из среднегодовых значений поля). Для качественного доказательства изменения во времени недипольного поля используется сравнение таких карт, составленных, например, с интервалами в 10 лет. Поскольку $\langle B_{nd}^2 \rangle^{1/2} \approx 0,02$ Гс и $\langle \dot{B}_{nd}^2 \rangle^{1/2} \approx 0,0005$ Гс/год, то характерное время векового изменения недипольного поля в любой фиксированной точке равно по порядку величины 40 годам. Магнитные контуры эволюционируют с таким характерным временем, причем центры активности растут и распадаются подобно изобарам на метеорологических картах. Определенный вклад в это изменение вносит западный дрейф недипольного поля, проходящий, как показали Буллард и др. [38], со скоростью $0,18 \pm 0,015$ доли в год (т.е. приблизительно 7° за 40 лет).

4.3. Долгопериодические вариации дипольного поля

Измеренные значения коэффициентов $g_n^m(t)$ и $h_n^m(t)$ известны только со времени Гаусса. За период 1835 — 1945 гг. среднеквадратичная напряженность дипольного поля уменьшилась от 0,464 до 0,437 Гс.

Это означает, что характерное время изменения поля равно величине порядка 2000 лет (это значение является, по-видимому, нижним пределом, см. ниже). Мы располагаем двумя важными источниками информации, свидетельствующими об изменении поля в догауссовы эпохи. Первую и наиболее важную информацию дает наука о магнетизме горных пород (палеомагнетизм), которая позволяет получить оценки B в те геологические эпохи, когда горные породы были охлаждены ниже точки Кюри. Поскольку, как это известно из радиометрических данных, некоторые горные породы имеют возраст $3,5 \cdot 10^9$ лет, а возраст Земли оценивается как $5 \cdot 10^9$ лет, то мы имеем информацию о магнитном поле на ранних стадиях эволюции Земли. Аналогичную информацию извлекают из анализа морских донных отложений. Во-вторых, археомагнетизм (т.е. изучение остаточного намагничивания, приобретаемого глиняными горшками, печами для сушки и обжига и другими объектами деятельности человека) позволяет получить сведения о величине и направлении поля за прошедшие ~ 4000 лет. Информация, полученная из обоих источников, надежна только тогда, когда анализируемые образцы имеют точную датировку. Точность датирования древних горных пород около 3%, поэтому, грубо говоря, чем дальше мы уходим назад в геологическом времени, тем более неопределенной становится картина.

Тем не менее из таких исследований в настоящее время делают определенные общие выводы (см., например, [37, 104]). Во-первых, на основании археомагнитных исследований было показано, что напряженность поля испытывает флуктуации с характерным временем $\sim 10^4$ лет и что за последние несколько тысяч лет она уменьшилась от величины, превышающей на $\sim 50\%$ современное значение поля. Изменяется также и направление дипольного момента ("шатание" диполя), правда, со скоростью, меньшей по сравнению со скоростью западного дрейфа недипольного поля. Имеются указания, что усредненный за период $\sim 10^3 - 10^4$ лет средний дипольный момент $\mu(t)$ ориентирован точно в направлении север – юг. Малость угла $\psi \approx 11^\circ$ между современной магнитной и географической осями свидетельствует о влиянии вращения на движение проводящей жидкости в ядре. Еще более выразительным доказательством сильного влияния вращения на возбуждение магнитного поля служит равенство нулю или почти нулю долгопериодического среднего от ψ .

Палеомагнитные исследования дают удивительно ясное доказательство наличия обращений полярности земного магнитного поля, многократно происходивших за время эволюции Земли. На рис. 4.3 из работы [62] показана запись изменений полярности земного поля в недавнем геологическом прошлом, т.е. за последние 4 млн. лет. Очевидно, что обращения происходят во времени случайным образом, причем

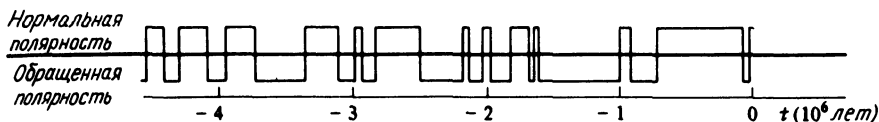


Рис. 4.3.

Запись обращений полярности дипольного поля Земли за последние $4 \cdot 10^6$ лет [62]. Показано только направление диполя без учета величины напряженности поля.

типичный период между обращениями равен по порядку величины 2×10^5 лет. Однако этот период сильно изменяется; при отходе дальше назад в геологическом времени в пермском периоде (между 280 и 230 млн. лет тому назад) имеется довольно заметный интервал в 5×10^7 лет, когда обращения полярности поля отсутствовали [102]. Имеется также определенное изменение в статистике обращений продолжительностью ~ 45 млн. лет [104].

Детальное описание отдельных обращений, которые происходят за времена порядка 10^4 лет, можно найти в работе [63]. Во время этого процесса напряженность поля вначале уменьшается до $1/4$ своего обычного значения за период в несколько тысяч лет; затем направление, прежде чем изменится на противоположное, испытывает несколько колебаний с амплитудой, достигающей 30° ; наконец, в обращенном состоянии напряженность достигает первоначальной величины.

4.4. Параметры и физическое состояние нижней мантии и ядра

Наряду с химическим составом фундаментальными термодинамическими переменными во внутренней части Земли являются плотность и температура, из которых в принципе можно вывести и другие свойства, например электропроводность (хотя это требует смелой экстраполяции кривых, построенных на основании имеющихся лабораторных данных). Плотность $\rho(r)$, как это следует из сейсмических данных, монотонно возрастает с глубиной от $\sim 3,4$ г/см³ в верхней мантии до $\sim 5,5$ г/см³ в нижней мантии на поверхности раздела ядро – мантия (см. рис. 4.1, а). Затем при переходе через границу ядро – мантия она скачком изменяется до величины, примерно равной 10 г/см³, и достигает ~ 12 г/см³ на поверхности раздела внутреннего и внешнего ядер. На этой поверхности возможен дополнительный скачок плотности, верхний предел которого равен 1,9 г/см³ [24]. Считается, что плотность в центре внутреннего ядра достигает значения $\sim 13 - 14$ г/см³.

Также монотонно с увеличением глубины растет и температура $T(r)$, достигая во внутреннем ядре значения $\sim 4200 - 4300$ К. Эта оценка основана на знании точки плавления железа при высоком давлении и разумном предположении, что температура на поверхности внутреннего ядра точно совпадает с температурой плавления, соответствующей локальному гидростатическому давлению [98]. Поскольку внешнее ядро является жидким, то ясно, что его температура должна везде превышать температуру плавления. Если на границе между внутренним и внешним ядром вещество находится в химическом и тепловом равновесии, то отсюда вытекает серьезное ограничение на распределение температуры во внешнем ядре. В частности, путем экстраполяции кривых плавления железа при высоких давлениях Хиггинс и Кеннеди [98] доказали, что градиент точки плавления значительно меньше, чем адиабатический градиент, соответствующий условиям нейтральной конвективной устойчивости. В дополнение к этому они утверждали, что в этих условиях истинная температура должна быть очень близка к температуре плавления $T_m(r)$, так что возникающий температурный градиент оказывается недостаточным для возбуждения конвективных токов. При последующем изучении задачи те же авторы [106] подтвердили свои первоначальные выводы, относящиеся к внешним 2/3 внешнего ядра, но согласились с тем, что в силу неопределенностей используемых параметров во внутренней трети ядра возможен сверхадиабатический градиент температуры; турбулентная конвекция в этом режиме будет затем возвращать распределение температуры в среднем к адиабатическому.

Однако доказательство Хиггинса и Кеннеди основано на предположении о химическом и тепловом равновесии на границе твердого внутреннего ядра с жидким внешним, хотя не вполне ясно, справедливо ли такое предположение. Присутствие серы во внешнем ядре приведет к понижению точки плавления скорее на жидкой стороне поверхности раздела, чем на твердой, и до некоторой степени ликвидирует упомянутое выше ограничение температуры. На это можно возразить, поскольку концентрация серы (более легкого элемента), по-видимому, увеличивается с ростом r , что ведет к дополнительной стабилизации изменения плотности.

Возможность устойчивой стратификации внешнего ядра относительно тепловой конвекции обнаружил Брагинский [28], который тем не менее доказал, что конвекция может поддерживаться благодаря всплыванию более легких элементов (Брагинский рассматривал кремний) во время процесса кристаллизации железа из внешнего ядра на границе с внутренним. Еще раньше аналогичный процесс дифференциации плотности предложил Юри [218], который показал, что выплавление железа из мантии во внешнее ядро и последующее осаждение

его к внутреннему (сквозь более легкую жидкую часть ядра) также может привести к возбуждению конвективных токов. В обоих процессах освобождается гравитационная энергия, часть которой с помощью механизма динамо может превратиться в магнитную. В то же время оба процесса приводят к уменьшению момента инерции Земли S относительно ее оси вращения, поэтому угловая скорость Земли увеличивается (если пренебречь влиянием моментов внешних сил), что в принципе можно зарегистрировать, изучая минутные изменения "продолжительности суток". К сожалению, малые изменения угловой скорости Земли могут вызвать многие другие конкурирующие механизмы [149], но пока не удалось однозначно отделить влияние гравитационного осаднения во внешнем ядре от других эффектов. В действительности более вероятно, что этот эффект будет "смазан" более существенным эффектом *задержки*, связанным с приливным трением.

Даже если бы внешнее ядро было устойчиво стратифицировано, это, конечно, не означало бы, что все радиальные движения невозможны. В устойчиво стратифицированной среде могут распространяться внутренние гравитационные волны (видоизмененные под действием кориолисовых, а также, возможно, и лоренцевых сил). В общем случае такие волны генерируются возмущающими силами внутри жидкости или на ее границе. Имеются некоторые свидетельства в пользу того, что граница ядро – мантия не гладкая, а имеет искривления, характерные размеры которых составляют около сотни километров в тангенциальном направлении и один или два километра в радиальном (см. ниже разд. 4.6). Если это так, то легко представить себе, как на поверхности раздела ядро – мантия возникают возмущения в остальном плавном течении жидкости в ядре.

Как показали Буллард и Геллман [39], электропроводность внешнего ядра равна $3 \cdot 10^5 \Omega^{-1} \text{ м}^{-1}$, причем оценка может быть уменьшена или увеличена в 3 раза. Коэффициент диффузии магнитного поля при $\mu_0 = 4\pi \cdot 10^{-7} \text{ Гц/м}$ равен $\lambda = (\mu_0 \sigma)^{-1} = 2,6 \text{ м}^2/\text{с}$. Согласно оценке Брагинского и Николайчик [33], проводимость нижней мантии равна $\sigma_m \approx 2 \cdot 10^3 \Omega^{-1} \text{ м}^{-1}$, поэтому $\lambda_m = (\mu_0 \sigma_m)^{-1} \approx 2 \cdot 10^3 \text{ м}^2/\text{с}$ и $\sigma / \sigma_m = \lambda_m / \lambda \approx 1,5 \cdot 10^2$.

$$(4.8)$$

По другим оценкам (см., например, [186]) это отношение ближе к 10^3 . В любом случае отношение достаточно велико для того, чтобы в первом приближении рассматривать мантию как изолятор ($\sigma_m \approx 0$). Однако некоторые явления (например, электромагнитная связь между ядром и мантией, см., например, [127]) решающим образом зависят от протекания электрического тока между ядром и мантией, поэтому при рассмотрении таких процессов, естественно, необходимо учитывать слабую проводимость мантии.

Наиболее мало известной величиной во всей геофизике является кинематическая вязкость ν внешнего ядра [187]; она заключена в интервале $10^{-7} < \nu \ll 10^5 \text{ м}^2/\text{с}$ [90], причем верхний предел определяется тем фактом, что сейсмические P -волны проходят через ядро, не претерпевая существенного затухания. Часто наиболее разумной оценкой считается значение, близкое к нижнему пределу, например Лоупер [127] принимает $\nu = 4 \cdot 10^{-6} \text{ м}^2/\text{с}$, снова ссылаясь на неопределенность в ту или иную сторону. Принимая эту оценку и приведенную выше оценку λ , мы получим оценку безразмерного отношения ν/λ (*магнитное число Прандтля*)

$$\nu/\lambda \approx 1,5 \cdot 10^{-6}, \quad (4.9)$$

которую можно сравнить со значением $1,5 \cdot 10^{-7}$, полученным для ртути при нормальных лабораторных условиях. Из малости отношения ν/λ вытекает, что главный вклад в диссипацию энергии во внешнем ядре вносит омическое, а не вязкое затухание, и что в основных динамических уравнениях везде (за исключением, возможно, тонких деформированных слоев на твердых границах внешнего ядра или внутри его) можно пренебречь вязкими эффектами.

4.5. Необходимость теории динамо для объяснения магнитного поля Земли

Если бы движения проводящей жидкости в ядре отсутствовали или ими можно было пренебречь, то любой ток, протекающий в основном ядре, исчез бы за характерное время (разд. 2.7) $t_d = R_C^2/\lambda \pi^2$, что составляет для $\lambda = 2,6 \text{ м}^2/\text{с}$, $R_C = 3500 \text{ км}$ $4,7 \cdot 10^{11} \text{ с} \approx 1,5 \times 10^4 \text{ лет}$. Как отмечалось в разд. 4.3, исследования магнетизма горных пород указывают, что поле Земли существует, обладая приблизительно современной напряженностью (если не говорить о быстрых изменениях его полярности), в течение геологического времени 10^9 лет. Отсюда ясно, что его нельзя считать реликтовым полем, захваченным при аккреции Земли из межпланетного вещества; такое поле в отсутствие какого-либо восстанавливающего механизма не способно просуществовать в течение продолжительной истории Земли.

С другой стороны, существование короткопериодических вариаций поля, характерные времена которых чрезвычайно малы по сравнению с геологическими временами порядка 10^6 лет и более (например, вековое изменение недипольного поля с характерным временем около 40 лет), — довольно сильное свидетельство в пользу того, что такие вариации надо приписать не общим свойствам эволюции Земли, проявляющимся в это геологическое время, а скорее относительно быстрым процессам, непосредственно связанным с движениями жидкости в ядре.

Существование западного дрейфа ($0,18^\circ$ в год) означает, что вблизи поверхности раздела ядро – мантия ядро движется относительно мантии со скоростью $u_c \approx 4 \cdot 10^{-4}$ м/с (согласно простой картине магнитных возмущений, переносимых жидкостью ядра). Характеристическая длина магнитных возмущений, связанных с вековой вариацией, равна $l_c \approx 10^3$ км. Зная эти цифры, можно вычислить магнитное число Рейнольдса

$$R_m = u_c l_c / \lambda \approx 150. \quad (4.10)$$

Оно, разумеется, не бесконечно, но, по-видимому, достаточно велико, чтобы по крайней мере в первом приближении можно было считать, что для магнитных возмущений справедливо условие вмороженности.

4.6. Поверхность раздела ядро – мантия

Хайд и Мейлин [95], которые анализировали известную сильную корреляцию между структурой недипольного магнитного потенциала на поверхности Земли Ψ_{nd} и структурой потенциала Φ_g гравитационных флуктуаций, сделали замечательное открытие. Определив эту корреляцию следующим образом:

$$R(\varphi_0) = \langle \Psi_{nd}(R_E, \theta, \varphi - \varphi_0) \Phi_g(R_E, \theta, \varphi) \rangle / \langle \Psi_{nd}^2 \rangle^{1/2} \langle \Phi_g^2 \rangle^{1/2}, \quad (4.11)$$

где угловые скобки означают усреднение по сфере $r = R_E$, и рассматривая данные, в которых существенными считались только поверхностные гармоники до $n = 4$, они нашли, что в 1965 г. функция $R(\varphi_0)$ имела максимум при $\varphi_0 = 160^\circ = \hat{\varphi}_0$, тогда $R(\hat{\varphi}_0) = 0,84$. Здесь $\hat{\varphi}_0$ представляет собой такой сдвиг геомагнитного потенциала Ψ_{nd} к востоку, при котором корреляция достигает максимума. Анализ данных для предшествующего порядка показал, что $\hat{\varphi}_0$ не постоянно во времени, а возрастает со скоростью около $0,27^\circ$ в год, что, по-видимому, является доказательством западного дрейфа магнитного потенциала относительно (фиксированного) гравитационного потенциала. До тех пор пока не выявлена общая причина флуктуации этих двух полей, степень корреляции, превышающая 0,84, статистически незначима. Хайд и Мейлин предположили, что этой общей причиной служат неровности и неоднородности ("выпуклости") поверхности раздела ядро – мантия. Такие выпуклости могут быть следствием медленной тепловой конвекции в нижней мантии¹⁾. Из существования скачка плотности на этой поверхности раздела с определенностью вытекает, что над выпуклостями имеются гравитационные возмущения. Кроме

¹⁾ Поддерживаются ли соответствующие гравитационные напряжения веществом нижней мантии – вопрос спорный.

того, любое течение в ядре над выпуклостями в присутствии магнитного поля будет генерировать магнитные возмущения, которые могут быть значительно сдвинуты по фазе относительно выпуклостей благодаря конвекции или распространению волн. Статистическая значимость корреляции Хайда – Мейлина оспаривалась в работах [107, 129] и подтверждена в работе [96]. Окончательную определенность в этот вопрос, по-видимому, внесут независимые данные о строении поверхности раздела ядро – мантия. На данном этапе мы можем просто сказать, что присутствие на поверхности раздела выпуклостей размером около одного или двух километров по высоте (ниже уровня разрешения сейсмических волн) по крайней мере достаточно вероятно, и если это так, то выпуклости, несомненно, будут оказывать влияние на оба поля, как это описано выше. Детальную модель мы рассмотрим в разд. 10.8.

Возможное присутствие выпуклостей на поверхности раздела ядро – мантия имеет решающее значение для задачи расчета момента сил, действующих со стороны ядра на мантию [91]. Интуитивно кажется вероятным, что выпуклости могут сильно увеличить момент сил по сравнению с его величиной, полученной для гладкой поверхности [127]; однако, как показали расчеты Ануфриева и Брагинского [9], присутствие в окружающей среде любого горизонтального магнитного поля, по крайней мере когда оно достаточно сильное, может существенно ограничить эффект увеличения момента.

4.7. Прецессия вектора угловой скорости Земли

Угловая скорость мантии Земли $\Omega(t)$ не вполне стационарна, а медленно изменяется как по величине, так и по направлению [149]. Основное из этих изменений, представляющее интерес для динамики ядра, связано с медленной прецессией Ω относительно нормали к плоскости обращения Земли вокруг Солнца, которая вызвана воздействием приливного момента сил от Солнца и Луны на экваториальную выпуклость Земли. Период прецессии известен из астрономических наблюдений и равен 25 800 лет; за это время вектор Ω описывает конус раствором 47° . Угловая скорость прецессии равна $\Omega_p = 7,71 \cdot 10^{-12} \text{ с}^{-1}$. Малкус [134, 135] считал, что прецессия служит наиболее вероятным источником энергии для движений в ядре, однако эта точка зрения оспаривалась в работе [193].

Нетрудно понять, почему прецессия должна вызывать некоторые отклонения от твердотельного вращения в области жидкого ядра. Во-первых, средняя плотность ядра существенно выше средней плотности мантии, поэтому динамическая эллиптичность $\epsilon_c = (C_c - A_c) / C_c$ ядра (где A_c и C_c – соответственно экваториальный и полярный моменты инерции) меньше, чем соответствующая величина ϵ_m для мантии,

фактически $\epsilon_c \approx 3/4 \epsilon_m$. Если бы ядро и мантия были динамически не связаны, то они прецессировали бы с различными угловыми скоростями, пропорциональными соответственно ϵ_c и ϵ_m , т.е. угловая скорость прецессии ядра была бы равна $3/4 \Omega_p$; таким образом, через 10^5 лет угловые скорости ядра и мантии, будучи равными по величине, были бы совершенно различными по направлению. Отсюда вытекало бы существование больших относительных скоростей $\Omega R_c \approx 200$ м/с между ядром и мантией, что противоречит наблюдениям. Поэтому можно сделать вывод, что ядро и мантия *не могут* быть динамически не связанными, да в сущности и нет причины ожидать этого. В самом деле, благодаря вязкому и электромагнитному переносу момента количества движения через поверхность раздела ядро и мантия сильно связаны друг с другом. Эта связь должна действовать таким образом, чтобы выравнивать угловые скорости прецессий ядра и мантии, хотя в отсутствие идеальной связи можно ожидать, что средняя угловая скорость ядра на прецессионной орбите будет отставать от угловой скорости мантии. Если угловые скорости различаются, то на поверхности раздела ядро – мантия образуется пограничный слой; в чисто вязком случае это явление изучалось в работах [42, 207, 214], а в гидромагнитном случае – в работах [127, 186, 192].

Было бы неуместно на данном уровне обсуждать какие-либо детальные расчеты, выполненные указанными авторами; это увело бы в сторону от главной темы монографии. Влияние прецессии здесь упомянуто просто как один из элементов сложного динамического фона, который должен быть полностью понят, прежде чем можно будет считать, что проблема земного динамо решена. Имеются еще значительные разногласия в вопросе о главном источнике энергии движений ядра. Основными кандидатами, заслуживающими серьезного рассмотрения, являются конвекция, поддерживаемая силами плавучести (теплового или осадочного происхождения, см. разд. 4.4), и прецессионные моменты сил. Недавно проведенный подробный анализ проблемы связи ядра и мантии [127] показал, что скорость подвода энергии в механизме прецессионной связи примерно в 10^{-3} раз меньше рассчитанной скорости омической диссипации в ядре. Лоупер считает также, что часть этой энергии (в стационарной модели необходимо иметь 100%!) диссипирует в пограничных слоях, через которые происходит перенос момента количества движения от мантии к ядру. Однако концепция прецессионного динамо основана на существовании турбулентного течения в ядре, которое возникает благодаря неустойчивостям этих пограничных слоев и создаваемых ими вторичных течений [135]; поэтому совершенно неясно, применима ли к этой ситуации аргументация Лоупера. Детальные модели динамо, в которых главным источником

энергии является прецессия, еще не построены, и ответ на вопрос о том, возможно ли такое динамо в принципе (отвлекаясь от вопроса об энергосодержании Земли), требует дальнейших достижений в численном и экспериментальном моделировании.

СОЛНЕЧНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ

5.1. Введение

Магнитное поле Солнца отличается сильной пространственной неоднородностью и переменнo во времени. Поэтому большинство астрофизиков в настоящее время считают, что источником солнечного поля, как и земного, служат движения проводящей среды. Эти движения локализованы во внешней конвективной зоне, простирающейся от видимой поверхности Солнца ($r = R_{\odot} = 6,96 \cdot 10^5$ км) вглубь приблизительно до $0,8 R_{\odot}$. Характерное время затухания основной дипольной моды поля составляет около $4 \cdot 10^9$ лет [228], т.е. того же порядка, что и возраст Солнечной системы. Если бы в течение этого времени магнитное поле Солнца оставалось неизменным, то не было бы необходимости в поиске механизма генерации поля. Оно могло быть просто "ископаемым остатком" магнитного поля, замороженного в межзвездный газ, конденсация которого привела к образованию Солнца. Даже зависящие от времени локальные явления, например образование и исчезновение солнечных пятен (см. ниже разд. 5.2), можно было бы рассматривать как локализованные случайные события, протекающие под влиянием реликтового магнитного поля. И подобная точка зрения действительно господствовала среди астрофизиков до середины 50-х гг. нашего столетия. Благодаря изобретению солнечного магнитографа [13] удалось непосредственно измерить напряженность слабого полоидального общего поля Солнца и обнаружить обращение полярности этого поля (см. ниже разд. 5.4) сначала в 1957 – 1958 гг., а затем в 1969 – 1971 гг. (в обоих случаях изменения полярности наблюдались в периоды максимальной активности процесса пятнообразования или тотчас же после них). Стало ясно, что 22-летний цикл солнечных пятен в действительности представляет собой специфическое проявление почти периодического поведения общего магнитного поля Солнца. Таковую периодическую зависимость поля от времени, по-видимому, невозможно объяснить в рамках теории реликтового поля. Любопытно, что теория магнитного динамо первоначально была задумана для объяснения постоянства космических магнитных полей, а теперь в случае солнечного

поля привлекается для объяснения экстремально быстрых (по сравнению с характерными космическими временами) изменений поля.

В настоящей главе дан предельно сжатый обзор некоторых наблюдаемых особенностей солнечной активности с целью подвести какой-то фундамент под теоретическое строение, которое будет воздвигнуто в гл. 7, 9 и 11. Всестороннее (хотя отчасти и устаревшее) рассмотрение физики Солнца и связанных с нею проблем и методов имеется в сборнике "Солнце" под редакцией Койпера [116]; обсуждение современных достижений можно найти в Трудах симпозиума МАС "Основные механизмы солнечной активности", который проходил в Праге в 1975 г. [41] (готовится русский перевод. — *Ред.*)

5.2. Наблюдаемые поля скоростей

Солнце вращается с периодом около 27 сут вокруг оси, составляющей угол $7^{\circ}15'$ с нормалью к плоскости земной орбиты. Однако скорость вращения неоднородна по широте: экваториальная область вращается быстрее (приблизительно на 4 сут за период оборота), чем окрестности полюсов. Угловая скорость $\omega(\theta)$ на поверхности $r = R_{\odot}$ как функция полярного угла θ может быть описана формулой [100]

$$\omega(\theta) = (2,78 + 0,35 \cos^2 \theta + 0,44 \cos^4 \theta) \cdot 10^{-8} \text{ с}^{-1}. \quad (5.1)$$

Этот результат основан на измерениях доплеровского сдвига спектральных линий, наблюдаемых вблизи солнечного лимба на различных широтах. Обнаружены также малые флуктуации $\omega'(t, \theta)$ относительно угловой скорости $\omega(\theta)$.

Яркость видимой поверхности Солнца также неоднородна; наблюдается регулярный узор гранул, средний радиус которых равен приблизительно 1000 км. Детали грануляционной картины успевают измениться за несколько минут. При измерениях доплеровских сдвигов спектральных линий обнаружены также флуктуации скорости, равные по порядку величины 1 км/с, которые связаны с грануляцией и представляют собой поверхностное проявление конвективной турбулентности, простирающейся на глубину около $1,5 \cdot 10^5$ км [83, 225]. Существуют флуктуации скорости и в больших масштабах (например, скорости $\sim 0,1$ км/с связаны с "супергранулами" и "гигантскими ячейками", размеры которых $\sim 10^4 - 10^5$ км). Кроме того, они могут быть обнаружены во всех меньших масштабах вплоть до предела разрешения, который равен ~ 100 км. Если мы примем

$$l_g \sim 10^3 \text{ км}, \quad u_g \sim 1 \text{ км/с} \quad (5.2)$$

в качестве характеристических длины и скорости тех ячеек турбулентной конвекции во внешних слоях Солнца, которые содержат максимальное количество энергии, и воспользуемся следующими оценками кинематической вязкости и коэффициента диффузии магнитного поля:

$$\nu \sim 10^{-8} \text{ км}^2/\text{с}, \quad \lambda \sim 10^{-1} \text{ км}^2/\text{с}, \quad (5.3)$$

то можем вычислить число Рейнольдса R_e и магнитное число Рейнольдса R_m :

$$R_e = \frac{u_g l_g}{\nu} \sim 10^{11}, \quad R_m = \frac{u_g l_g}{\lambda} \sim 10^4. \quad (5.4)$$

Если магнитные эффекты не играют существенной роли в динамике, то из классической колмогоровской теории турбулентности (см. гл. 11) следует, что существует непрерывный спектр флуктуаций скорости во всех масштабах вплоть до "внутреннего масштаба" $l_\nu \sim R_e^{-3/4} l_g \sim 1 \text{ см}$, который в 10^7 раз меньше предела разрешения! В отсутствие теории, способной описать поведение турбулентности в малых масштабах, принято, воспользовавшись понятиями турбулентной (или "вихревой") вязкости ν_e и турбулентной диффузии λ_e магнитного поля, оперировать с грубыми усредненными характеристиками турбулентности. Если предположить, что введение этих понятий полностью заменяет описание турбулентных эффектов в масштабах, меньших характеристического размера гранул l_g , то можно сделать следующие оценки по порядку величины турбулентной вязкости ν_e и коэффициента турбулентной диффузии магнитного поля λ_e :

$$\nu_e \sim \lambda_e \sim u_g l_g \sim 10^3 \text{ км}^2/\text{с}. \quad (5.5)$$

Как осуществляется совместный каскадный перенос кинетической и магнитной энергии турбулентности ко все меньшим и меньшим пространственным масштабам и, в конечном счете, к таким малым масштабам, в которых действуют омическая и вязкая диссипация, пока неясно. Некоторые аспекты этой трудной проблемы будут рассмотрены в гл. 11.

5.3. Солнечные пятна и солнечный цикл

Солнечные пятна представляют собой темные пятна диаметром 10^4 км , которые появляются и исчезают на поверхности Солнца в основном в полосе $\pm 35^\circ$ относительно экваториальной плоскости $\theta = 90^\circ$. Число наблюдаемых пятен изменяется изо дня в день и от года к году, причем наиболее поразительной особенностью солнечных пятен

является периодическая (с периодом около 11 лет) зависимость среднегодового числа пятен от времени (см. рис. 5.1)¹⁾. На этом рисунке можно обнаружить также слабую долгопериодическую зависимость с периодом около 80 лет.

Солнечные пятна обычно появляются парами, выстроенными приблизительно вдоль линии $\theta = \text{const}$, и вращаются с угловыми скоростями, слегка превышающими угловую скорость (5.1) (см., например, [68]), причем ведущее пятно пары обычно располагается несколько ближе к экваториальной плоскости, чем замыкающее пятно. Типичное расстояние между пятнами в паре (или более сложной группе пар) по порядку величины равно 10^5 км.

Процесс образования пар солнечных пятен представляет собой по существу чисто магнитогидродинамическое явление, которому можно дать следующую физическую интерпретацию [154]. Предположим, что имеется слабое полоидальное магнитное поле, скажем, дипольной симметрии, которое поддерживается неким еще не определенным механизмом. Тогда любое дифференциальное вращение, которое имеет в конвективной зоне Солнца вследствие перераспределения момента количества движения тепловой турбулентностью, будет стремиться генерировать тороидальное поле, во много раз превышающее полоидальное поле ($O(R_m)$), если самым мощным является механизм, описанный в разд. 3.11). Рассмотрим далее трубку сильного тороидального поля ($B_\phi \sim 10^4$ Гс), погруженную на некоторую глубину в конвективную зону. Если эта трубка находится в динамическом равновесии с окружающей средой, то полное давление $p + (2\mu_0)^{-1} B_\phi^2$ внутри трубки должно быть равным давлению жидкости снаружи. Следовательно, давление внутри трубки меньше, чем снаружи; таким образом, если давление монотонно зависит от плотности, плотность внутри трубки также должна быть меньше плотности снаружи. Трубка в таком случае обладает плавучестью относительно окружающей среды (подобно тороидальному пузырю), и, если плотность вне трубки не слишком быстро убывает с высотой, в ней могут развиваться неустойчивости. Более подробно это явление, названное Паркером [154] "магнитной плавуче-

¹⁾ Возможно, что наблюдаемая периодичность не является неизменной особенностью поведения Солнца; прежние астрономические записи, которые подробно обсуждены в [69], указывают, в частности, что 70-летний период 1646 – 1715 гг. был аномальным в том смысле, что зарегистрировано очень мало солнечных пятен и не отмечалось никакой периодичности. Имеются также свидетельства [70] в пользу того, что градиент угловой скорости $d\omega/d\theta$ на низких широтах в этот период времени превышал современное значение градиента примерно в три раза!

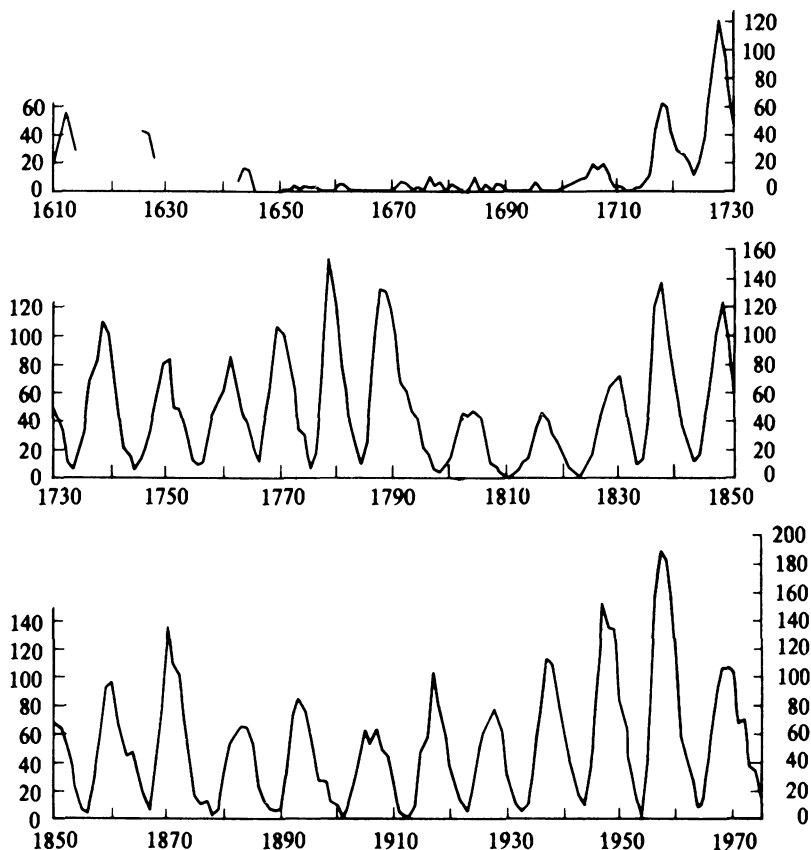


Рис. 5.1.

Среднегодовое число солнечных пятен за период 1610 — 1975 гг. В течение последних 250 лет отмечалась характерная периодичность приблизительно с 11-летним периодом. Последняя половина XVII в. была аномальной в том смысле, что было зарегистрировано очень мало пятен. До 1650 г. систематические наблюдения не проводились и в данных имеются большие пробелы (с любезного согласия Джона Эдди).

стью", будет рассмотрено в разд. 10.7. В данный момент достаточно сказать, что неустойчивость может проявляться в форме сильных изгибаний тороидальной силовой трубки, которая может подниматься и прорываться через поверхность Солнца (рис. 5.2). Такой подъем, как показано на примере обсуждавшегося в разд. 3.4 идеализированного решения уравнения индукции, связан с растяжением силовых линий трубки вдоль вертикали. Кроме того, поскольку можно ожидать, что жидкость в окрестности поднимающейся петли будет расширяться при

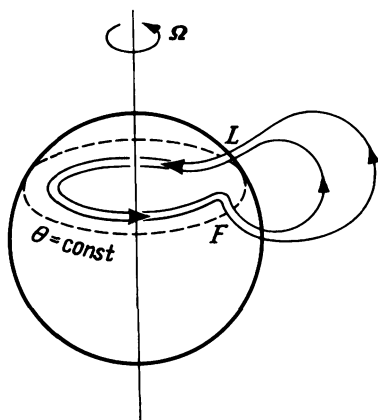


Рис. 5.2.

Схематическое изображение образования пары солнечных пятен путем всплывания силовой трубки поверхностного торoidalного поля. Вертикальное поле усилено в точках L и F , где образуются ведущее и замыкающее пятна. Расширение всплывающего газа ведет к дефициту локальной вертикальной компоненты момента количества движения относительно вращающегося Солнца, а потому к закручиванию пары солнечных пятен LF относительно поверхностной широтной линии $\theta = \text{const}$ [154].

подъеме (полная протяженность явления по вертикали велика по сравнению со шкалой высот), в силу сохранения момента количества движения поднимающаяся жидкость будет вращаться в направлении левого винта (в северной полусфере). Так мы получаем естественное объяснение вышеупомянутого эффекта наклона линии, соединяющей пару пятен, относительно параллели.

Можно ожидать, что созданные таким образом сильные локализованные вертикальные поля будут подавлять тепловую турбулентность и, следовательно, резко уменьшать перенос тепла к поверхности Солнца. Отсюда вытекает, что солнечное пятно должно выглядеть темнее окружающего его вещества.

Впервые магнитные поля в солнечных пятнах обнаружил в 1908 г. Хейл [87]. Обычно измеряемые в пятне величины полей порядка 10^3 Гс, но могут быть поля вплоть до 4000 Гс. Полярность полей солнечных пятен (т.е. направление поля по радиусу внутрь или наружу) почти всегда совместима с описанной выше физической картиной, т.е. в любой паре пятен полярность поля положительна в одном пятне пары и отрицательна в другом. Более того, все пары в одной полусфере (за незначительным числом исключений) имеют одно и то же направление полярности. Это указывает на то, что поле в них есть результат всплывания подфотосферного торoidalного магнитного поля, которое является связанным на протяжении всей полусферы. А пары солнечных пятен в противоположных полусферах обычно имеют противоположные направления полярности, что свидетельствует об антисимметричности торoidalного поля относительно экваториальной плоскости.

Как отмечалось ранее, солнечные пятна появляются только в полосе, ограниченной широтами, приблизительно $\pm 35^\circ$ выше и ниже эква-

ториальной плоскости $\theta = 90^\circ$. В действительности распределение пятен по широте периодически изменяется во времени с периодом, равным периоду цикла солнечных пятен (~ 11 лет). Это поведение пятен обычно демонстрируют с помощью прославленных "бабочек" Маундера [138, 139]. На рис. 5.3 воспроизведена диаграмма Маундера [139] для 1874 – 1913 гг. Она строится путем нанесения для каждого оборота Солнца серии отрезков вертикальных линий, соответствующих полосам широт, в которых наблюдаются солнечные пятна за время оборота. На такой диаграмме вновь ясно видна 11-летняя периодичность. Отчетливо выражена также миграция системы солнечных пятен по направлению к экваториальной плоскости, которая (если правильна описанная качественная картина пятнообразования) отражает миграцию подфотосферного тороидального поля.

Как показывают наблюдения, знак полярности пар солнечных пятен в каждой полусфере изменяется от одного 11-летнего цикла к следующему. Отсюда следует, что подфотосферное тороидальное магнитное поле периодически во времени с периодом около $2 \times 11 = 22$ лет. Если это тороидальное поле генерируется с помощью стационарного дифференциального вращения из полоидального поля, то и это поле также должно быть периодически во времени с тем же самым периодом. Наблюдаемые свидетельства в пользу такого поведения поля мы обсудим в следующем разделе.

5.4. Общее полоидальное магнитное поле Солнца

С 1953 г. солнечный магнитограф [12] используется для получения ежедневных карт общего магнитного поля Солнца. С 1966 г. сигналы магнитографа обсерватории Маунт Вилсон записываются на магнитную ленту для последующего анализа [99]. На рис. 5.4 показаны записи направленной по лучу зрения компоненты магнитного поля, усредненной по различным полосам широт и сглаженной за 27-суточный период солнечного вращения. Несмотря на такое усреднение еще заметны временные вариации среднего поля, которые, очевидно, имеют случайную природу; отклонения от среднего ограничены, однако, интервалом ± 2 Гс. Если провести дальнейшее усреднение сигнала за один год, то станут заметными некоторые особенности этих кривых. Ясно, например, что усредненное таким образом поле в окрестности южного полюса, ограниченной широтой 60° , было положительным в 1968 г., но отрицательным в каждом году в период 1969 – 1973 гг. Аналогично, северное полярное поле было в среднем отрицательным с января 1970 г. по июль 1971 г., но в среднем положительным с августа 1971 г. до конца 1973 г. В этом смысле можно сказать, что

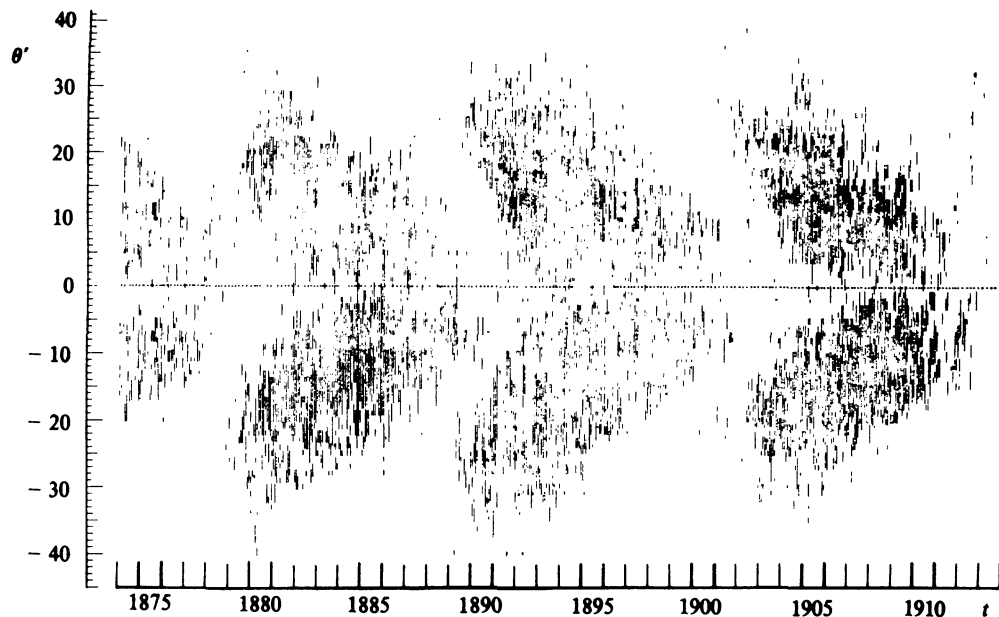


Рис. 5.3.

"Бабочки" Маундера, демонстрирующие уменьшение числа солнечных пятен в зависимости от широты $\theta' = 90^\circ - \theta$ и времени t за период 1874 – 1913 гг. Вертикальная черточка ставилась для каждого широтного интервала и каждого 27-суточного периода тогда и только тогда, когда в этом интервале за один период наблюдалось не менее одного пятна. Ясно видны 11-летний цикл и миграция "активных областей" по направлению к экваториальной плоскости [139].

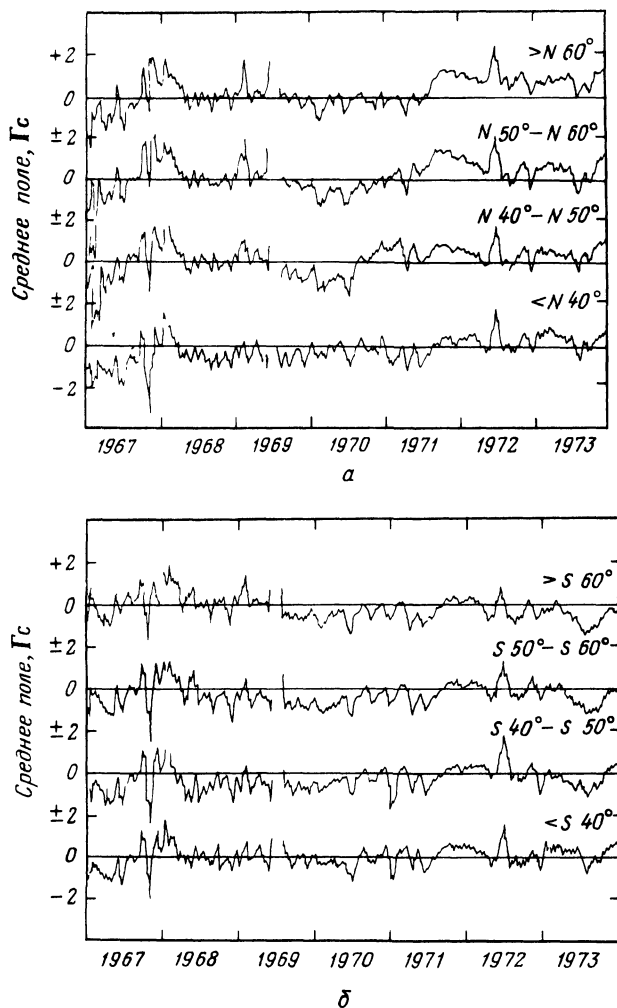


Рис. 5.4.

Записи (полученные на обсерватории Маунт Вилсон) лучевой компоненты магнитного поля на поверхности Солнца, усредненные по широтным полосам и сглаженные за 27-суточный период; а — северная полусфера, б — южная полусфера [99].

южное полярное поле изменило свое направление на противоположное примерно в начале 1969 г., а изменение знака северного полярного поля произошло приблизительно в июле 1971 г., причем изменение по-

лярности поля в своих случаях произошло сразу после максимума активности солнечных пятен.

Аналогичные изменения полярности были зарегистрированы [10] во время предыдущего максимума солнечной активности в 1957 – 1959 гг.: южное полярное поле изменило свой знак (с отрицательного на положительный) в начале 1957 г., а обращение северного полярного поля (с положительного на отрицательный) произошло приблизительно в ноябре 1958 г.

Эти наблюдения свидетельствуют о том, что, несмотря на ясно выраженные сильные случайные эффекты в эволюции солнечного магнитного поля, имеется значимая связь между полоидальной и тороидальной составляющими поля, и обе эти компоненты (при подходящем усреднении) изменяются во времени с периодом около 22 лет. Несомненно, что тщательное изучение любых моделей динамо, включающих связь между тороидальной и полоидальной составляющими поля и способных предсказать такой периодический режим во времени, достаточно мотивировано с наблюдательной точки зрения.

Связь между эволюцией усредненного полоидального поля и активностью солнечных пятен удивительным образом обнаруживается на рис. 5.5 (из работы Стикса [211]), на котором показаны кривые постоянного радиального поля $B_r(\theta, t) = \text{const}$, наложенные на диаграмму Маундера периода 1954 – 1975 гг. Радиальное поле было получено с помощью коэффициентов разложения поля по сферическим гармоникам, найденных Альтшулером и др. [5] по магнитографическим записям обсерватории Маунт Вилсон. В течение полуцикла 1964 – 1975 гг. полярность ведущих пятен в северной полусфере была отрицательной, т.е. B_ϕ положительно в северной полусфере (и отрицательно в южной). В то же самое время B_r было отрицательным в северной полусфере (в зоне солнечных пятен) и положительно в южной. Как указал Стикс [211], для выбора возможных динамо-механизмов большое значение имеет тот факт, что колебания B_r и B_ϕ не совпадают по фазе. Этот вопрос мы обсудим позже при анализе конкретных динамо-моделей (см. разд. 9.12).

Рассмотрим теперь кратко детали пространственной структуры радиальной компоненты магнитного поля, наблюдаемого на солнечном диске. Благодаря высокому качеству спектроскопических методов детектирования в настоящее время можно обнаружить тонкую структуру этого поля вплоть до масштабов порядка 1000 км и меньше. Замечательно, что хотя средняя по пространству напряженность радиального поля порядка 1 – 2 Гс, это поле распределено по солнечной поверхности отнюдь не однородно, а, по-видимому, сконцентрировано в "элементы потока" с диаметрами порядка 200 км и меньше, типич-

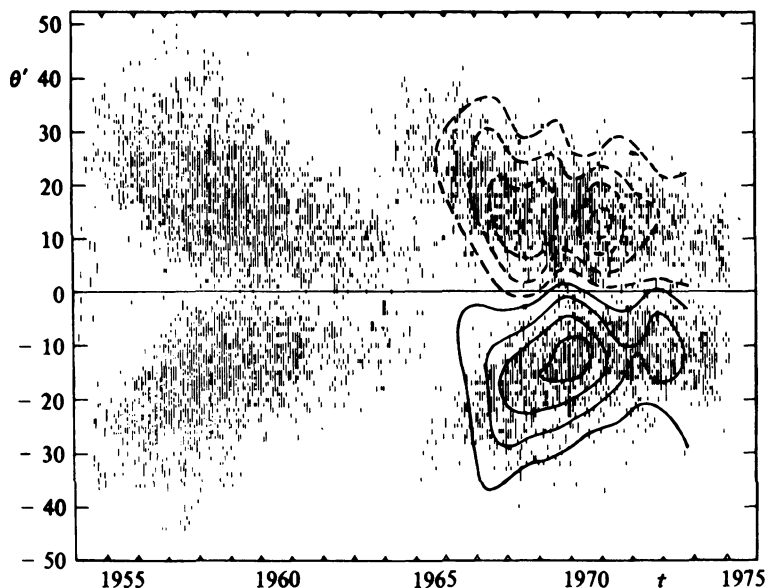


Рис. 5.5.

"Бабочки" Маундера за период 1954 — 1975 гг. (обсерватория Маунт Вилсон) и контуры постоянного радиального поля, построенные приблизительно для $\pm 0,17$; $\pm 0,50$; $\pm 0,83$ и $\pm 1,16$ Гс; положительные знаки для сплошных кривых и отрицательные для пунктирных [211].

ные напряженности полей в которых порядка $1000 - 2000$ Гс [206]. Такие элементы потока естественно занимают очень маленькую долю солнечной поверхности ($\sim 0,1\%$); число элементов, требуемых для создания полного наблюдаемого потока, равно $\sim 10^5$. На основе рассмотренного в разд. 3.9 механизма выталкивания потока можно представить себе, как протекает процесс концентрации потока; однако здесь имеются определенные трудности. Дело в том, что описанное в разд. 3.9 выталкивание потока осуществляется эффективно, если картина потока стационарна в течение времени, превышающего время оборота вихрей, составляющих турбулентность, тогда как наблюдения грануляционной картины свидетельствуют о нестационарности с характерным временем t_g , несколько меньшим времени оборота вихря $l_g/u_g \sim 10^3$ с. Исследование тонкой структуры солнечного поля является сложной проблемой, которая пока никоим образом не может считаться полностью решенной.

Однако в последующих главах мы будем в основном касаться эволюции *среднего* магнитного поля (причем под "средним" понимается

пространственное усреднение по масштабам, превышающим l_g , или усреднение по временам, превышающим t_g). При таком подходе трудности, связанные с мелкомасштабной структурой, до некоторой степени маскируются. Тем не менее подобная трактовка оправдана, поскольку при изучении магнитного поля Солнца (как и магнитного поля Земли) прежде всего необходимо построить теорию, описывающую **крупномасштабные** свойства наблюдаемого поля. Изучение тонкой структуры поля на этом этапе следует считать до некоторой степени вторичной проблемой, хотя в действительности оба аспекта неразрывно связаны и понимание динамо-механизма будет полным лишь тогда, когда будут исследованы детальные тонкоструктурные процессы и вызываемые ими кумулятивные эффекты.

5.5. Магнитные звезды

Магнитное поле Солнца в сравнении с полями других звезд обнаружимо только благодаря его исключительной близости к Земле. Магнитные поля удаленных звезд удастся обнаружить только тогда, когда они столь сильны, что вызывают заметное зеемановское расщепление линий в спектрах звезд. А это явление можно наблюдать только для звезд, спектральные линии которых достаточно четки, т.е. не "смазаны" другими эффектами, например быстрым вращением. Обнаружение [11] магнитного поля с напряженностью порядка 500 Гс у звезды 78 Девы открыло новую эру в области космической электродинамики. Эта звезда входит в класс пекулярных А-звезд (Ap), в которых при изучении их спектроскопических свойств обнаружен необычный в сравнении с Солнцем химический состав. Теперь известно (см., например, [173]), что 78 Девы является типичной Ap-звездой, спектральные линии которой не в такой степени уширены вращением, чтобы нельзя было измерить зеемановское расщепление. Фактически у всех таких звезд зарегистрированы магнитные поля в диапазоне 100 – 30 000 Гс; поля переменны во времени, и у части этих магнитных звезд периодичны с периодом порядка нескольких суток.

Поля этих звезд имеют порядок величин, совместимый с простым и далеко идущим предположением о механизме образования поля звезды путем сжатия общего галактического магнитного поля (которое имеет величину $\sim 10^{-5} - 10^{-6}$ Гс) в процессе гравитационной конденсации звезды из межзвездной среды. Для газовой сферы радиусом R и массой M , магнитный поток через которую равен F , это дает простое соотношение между средней плотностью ρ и средней напряженностью поля на поверхности B :

$$Br^2 \sim F, \quad \rho r^3 \sim M, \quad B \sim (F/M^{2/3}) \rho^{2/3}, \quad (5.6)$$

и, следовательно,

$$B_s / B_g = (\rho_s / \rho_g)^{2/3}, \quad (5.7)$$

где индексы s и g означают соответственно звездное и галактическое поле. Таким образом, для объяснения величины наблюдаемых полей ($B_s / B_g \sim 10^{10}$) достаточен коэффициент сжатия порядка 10^{15} . В действительности ρ_s / ρ_g значительно больше, чем 10^{15} , и проблема состоит скорее в том, как объяснить вытекающую отсюда потерю магнитного потока в процессе гравитационной конденсации и последующей ранней эволюции звезды (см., например, [140]).

Как и в случае Солнца, характерное (омическое) время затухания поля магнитной звезды того же порядка (или даже больше), что и время жизни звезды. Поэтому возможна такая точка зрения, что это поле является просто "ископаемым остатком" поля, созданного во время начальной конденсации звезды. Если дипольный момент звезды наклонен к оси вращения, то наблюдаемые периодичности находят естественное объяснение в модели вращающегося диполя (модель "наклонного ротатора"). Однако некоторые наблюдения (например, нерегулярные изменения поля, наблюдаемые по крайней мере в нескольких Ар-звездах) невозможно объяснить в модели наклонного ротатора, и, вероятно, в большинстве случаев важную роль, частично определяющую эволюцию поля, могут играть динамо-процессы, подобные тем, которые действуют на Солнце. Как указал Престон [173], динамо-теория и теория наклонного ротатора не являются с необходимостью взаимоисключающими возможностями. Более вероятно, что протекают и взаимодействуют оба процесса, контролируя эволюцию наблюдаемых полей.

Простейшее соотношение (5.7) свидетельствует, что если магнитный поток в процессе эволюции массивных звезд ко все более сжатым состояниям сохраняется на ее поздних стадиях, то соответствующие поверхностные поля должны усиливаться. Очень сильные магнитные поля (порядка $10^7 - 10^8$ Гс) были зарегистрированы в белых карликах (см., например, [8, 118]). В экстремальных условиях конденсации нейтронных звезд ожидаются поля порядка 10^{12} Гс и более (см., например, [227]). В этих ситуациях кажется, однако, невероятным, что гидромагнитные эффекты играют важную роль, и наиболее разумно интерпретировать наблюдаемые поля как сжатые ископаемые остатки полей ранних эпох звездной эволюции.

ТЕОРИЯ ЛАМИНАРНОГО ДИНАМО

6.1. Формальная постановка кинематической задачи динамо

Пусть, как и в предыдущих главах, V обозначает ограниченную область в \mathbf{R}^3 , S — ее поверхность, а \hat{V} — внешнюю область, простирающуюся до бесконечности. Предположим, что в объеме V заключена проводящая жидкость с постоянным коэффициентом диффузии магнитного поля λ ($0 < \lambda < \infty$), а среда в объеме \hat{V} является изолятором¹⁾, так что распределение тока $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t)$ также заключено в области V . Пусть $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ — скорость жидкости, удовлетворяющая условию

$$\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на } S. \quad (6.1)$$

Особый интерес представляют стационарные поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$; в последующих главах мы рассмотрим также турбулентные поля скорости, обладающие независимыми от времени статистическими свойствами. Ограничимся в основном изучением течений несжимаемой жидкости, для которых $\operatorname{div} \mathbf{u} = 0$. Предположим также, если не оговорено противное, что \mathbf{u} дифференцируемо в области V , а полная кинетическая энергия движения $E(t)$ всегда ограничена:

$$E(t) = \frac{1}{2} \int_V \rho \mathbf{u}^2 dV \leq E_0. \quad (6.2)$$

Что касается магнитного поля $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$, то предположим, что оно полностью создается распределением тока \mathbf{J} , которое не имеет искусственно заданных особенностей, тем самым и поле \mathbf{V} не обладает особенностями. При $r = |\mathbf{x}| \rightarrow \infty$ оно удовлетворяет внешнему граничному условию

$$\mathbf{V} = O(r^{-3}). \quad (6.3)$$

Разумеется, всегда справедливо и условие $\operatorname{div} \mathbf{V} = 0$.

¹⁾ Это предположение не является обязательным, среда в области \hat{V} может быть и проводящей. Важно только, чтобы $\mathbf{V} \rightarrow \mathbf{0}$ при $|\mathbf{x}| \rightarrow \infty$. — *Прим ред.*

Изменение поля описывается уравнениями

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{B} / \partial t &= \text{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B} & \text{в } V, \\ \text{rot } \mathbf{B} &= 0 & \text{в } \hat{V}, \\ [\mathbf{B}] &= 0 & \text{на } S \end{aligned} \quad (6.4)$$

с начальным условием, которое совместимо с уравнениями (6.4) и имеет вид

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}). \quad (6.5)$$

Полная магнитная энергия дается интегралом $M(t)$

$$M(t) = (2\mu_0)^{-1} \int_{V_\infty} \mathbf{B}^2 dV, \quad (6.6)$$

где V_∞ — как обычно, объем всего пространства. При выполнении сформулированных выше условий $M(t)$, разумеется, ограничено, и мы предположим, что $M(0) = M_0 > 0$. Мы знаем, что если $\mathbf{u} \equiv 0$, то $M(t) \rightarrow 0$ при $t \rightarrow \infty$; причем характерное время процесса омического затухания (см. разд. 2.7) равно $t_d = L^2/\lambda$, где L — характеристический размер области V . Тогда естественное определение динамо формулируется следующим образом: для заданных V и λ поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ *действует в качестве динамо*, если $M(t) \neq 0$ при $t \rightarrow \infty$, т.е. если оно в достаточной мере нейтрализует разрушающее действие омической диссипации. При этом $M(t)$ может быть постоянным (не равным нулю) или флуктуировать относительно этого значения регулярным или нерегулярным образом¹⁾ или неограниченно возрастать²⁾.

Заданное поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ может работать в качестве динамо не для всех, а лишь для некоторых начальных полей $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ и некоторых значений параметра λ . Поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ *способно действовать в качестве динамо*, если существует такое начальное поле $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ и такая конечная величина λ , для которых при выполнении равенств (6.3) — (6.5) $M(t) \neq 0$ при $t \rightarrow \infty$. Главная цель теории динамо должна заключаться в том, чтобы получить критерий, с помощью которого можно было бы проверить, способно ли поле скорости действовать в качестве динамо в соответствии с данным выше определением.

¹⁾ В кинематической постановке случай постоянного или чисто осциллирующего $M(t)$ является вырожденным (он составляет множество меры нуль). — *Прим ред.*

²⁾ При таком "нефизическом" поведении поля будет расти и сила Лоренца $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$, которая в конечном счете начнет влиять на поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$.

6.2. Ограничение на скорость деформации как критерий динамо

Поскольку усиление магнитного поля связано с вытягиванием магнитных силовых линий, то с физической точки зрения ясно, что в качестве необходимого условия динамо надо потребовать, чтобы скорость деформации, связанная с $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, была бы в некотором смысле (для данного λ) достаточно велика. Точное условие [см. ниже неравенство (6.14)] сформулировано Бэкасом [15]. Предположим для простоты, что V представляет собой сферу $r < R$, а скорость \mathbf{u} стационарна, соленоидальна и обращается в нуль при $r = R$. Поскольку вне сферы на бесконечности поток вектора Пойнтинга $\mathbf{E} \times \mathbf{B}$ равен нулю, то скорость изменения магнитной энергии дается интегралом

$$\frac{dM}{dt} = - \frac{1}{\mu_0} \int_{V_\infty} \mathbf{B} \cdot \text{rot } \mathbf{E} dV = - \frac{1}{\mu_0} \int_{V_\infty} \mathbf{E} \cdot \text{rot } \mathbf{B} dV. \quad (6.7)$$

Следовательно, для $r > R$ (поскольку $\text{rot } \mathbf{B} = 0$)

$$dM/dt = \mathcal{P} - \mathcal{J}, \quad (6.8)$$

где

$$\mu_0 \mathcal{P} = \int_V (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \cdot (\text{rot } \mathbf{B}) dV = \int_V \mathbf{B} \cdot \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) dV = \int_V \mathbf{B} \cdot (\mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u}) dV, \quad (6.9)$$

и

$$\mu_0 \mathcal{J} = \lambda \int_V (\text{rot } \mathbf{B})^2 dV = \mu_0 \int_V \sigma^{-1} \mathbf{J}^2 dV. \quad (6.10)$$

Здесь \mathcal{P} представляет собой скорость образования магнитной энергии из кинетической, а \mathcal{J} — скорость омической диссипации.

На оба эти интеграла можно наложить следующие ограничения.

Пусть прежде всего $e_{ij} = (1/2)(u_{i,j} + u_{j,i})$ — скорость тензора деформации¹⁾ с главными значениями $e^{(1)}, e^{(2)}, e^{(3)}$, причем $e_{ii} = \text{div } \mathbf{u} = 0$.

Тогда из равенства (6.9) имеем

$$\mu_0 \mathcal{P} = \int_V B_i B_j e_{ij} dV \leq e_m \int_V \mathbf{B}^2 dV \leq 2e_m \mu_0 M, \quad (6.11)$$

где $e_m = \max_{\mathbf{x} \in V} (|e^{(1)}|, |e^{(2)}|, |e^{(3)}|)$. Во-вторых, с помощью стандартных методов вариационного исчисления легко показать, что отношение \mathcal{J}/M достигает минимума, когда \mathbf{B} совпадает с нижней свободной затухающей модой (см. разд. 2.7) и, следовательно [см. (2.145) с $x_{01} = \pi$]

$$\mathcal{J} \geq 2\pi^2(\lambda/R^2)M. \quad (6.12)$$

¹⁾ Индекс после запятой будет обозначать дифференцирование по координатам, например $u_{i,j} = \partial u_i / \partial x_j$.

Поэтому из равенства (6.8) и неравенств (6.11) и (6.12) имеем

$$dM/dt \leq 2(e_m - \pi^2 \lambda / R^2)M, \quad (6.13)$$

и, таким образом, если $e_m < \lambda \pi^2 / R^2$, то M , конечно, стремится к нулю, т.е. движение не может действовать в качестве динамо. Обратное, необходимое (хотя никоим образом не достаточное) условие динамо имеет вид

$$e_m R^2 / \lambda \geq \pi^2. \quad (6.14)$$

Знак равенства (6.14) достигается только тогда, когда e_{ij} везде постоянно, \mathbf{V} везде ориентировано вдоль направления максимальной скорости деформации и геометрия \mathbf{V} совпадает с геометрией свободно затухающей моды. В общем случае этим условиям невозможно удовлетворить одновременно, поэтому условие (6.14), вероятно, дает сильно заниженное по порядку величины значение скорости деформации, необходимое для действия динамо.

Альтернативная, хотя и более слабая форма критерия (6.14), вытекает из того факта, что если $u_m = \max_{\mathbf{x}, \mathbf{x}' \in V} |\mathbf{u}(\mathbf{x}) - \mathbf{u}(\mathbf{x}')|$, то $e_m \leq u_m / R$. Поэтому из (6.14) следует, что

$$R_m = u_m R / \lambda \geq \pi. \quad (6.15)$$

Следовательно, чтобы динамо стало возможным, магнитное число Рейнольдса, вычисленное с помощью максимальной относительной скорости, должно быть достаточно велико.

6.3. Скорость изменения дипольного момента

Мы показали в разд. 2.7, что для случая, когда распределение тока заключено в области V , дипольный момент можно представить в виде

$$\boldsymbol{\mu}^{(1)}(t) = \frac{3}{8\pi} \int_V \mathbf{V}(\mathbf{x}, t) dV. \quad (6.16)$$

Следовательно, скорость его изменения равна

$$\frac{8\pi}{3} \frac{d\boldsymbol{\mu}^{(1)}}{dt} = - \int_V \text{rot } \mathbf{E} dV = - \int_S \mathbf{n} \times \mathbf{E} dS. \quad (6.17)$$

Поскольку $\mathbf{E} = -\mathbf{u} \times \mathbf{V} + \lambda \text{rot } \mathbf{V}$ и на поверхности S $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$, это неравенство принимает вид

$$\frac{8\pi}{3} \frac{d\boldsymbol{\mu}^{(1)}}{dt} = \int_S \mathbf{u}(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) dS - \lambda \int_S \mathbf{n} \times \text{rot } \mathbf{V} dS. \quad (6.18)$$

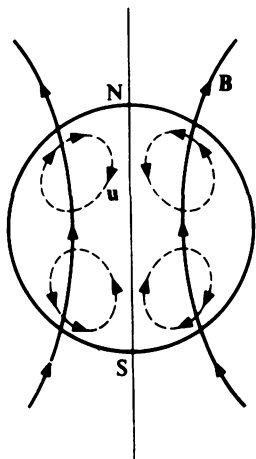


Рис. 6.1.

Движение, иллюстрирующее тенденцию к увеличению дипольного момента благодаря сносу поверхностного поля к северному и южному полюсам [25].

Отсюда следует, что в предельном случае бесконечной проводимости ($\lambda = 0$) дипольный момент $|\mu^{(1)}|$ будет увеличиваться любым движением \mathbf{u} , для которого во всех точках поверхности выполнено неравенство $(\mathbf{u} \cdot \mu^{(1)})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}) \geq 0$, т.е. движением, которое сносит силовые линии к полярным областям определяемым направлением вектора $\mu^{(1)}$ (рис. 6.1). Как указали Бонди и Голд [25], возможное увеличение $|\mu^{(1)}|$ под действием этого механизма ограничено, и лишь когда силовые линии, пересекающие S , будут полностью сконцентрированы на полюсах, $|\mu^{(1)}|$ достигнет максимального значения¹⁾.

Малая, но отличная от нуля диффузия ($\lambda \neq 0$) может полностью изменить ситуацию. Как показано в разд. 2.7, даже одна диффузия способна приводить к временному росту $|\mu^{(1)}|$, если величина $(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ распределена по поверхности S подходящим образом. Можно говорить о *длительном* диффузионном росте $|\mu^{(1)}|$, если распределение $(\mathbf{n} \cdot \nabla)\mathbf{V}$ на поверхности S поддерживается с помощью поля скорости \mathbf{u} . Парадоксально, но диффузия должна играть главную роль в увеличении $|\mu^{(1)}|$ (если рост длительный), а индукция, действие которой в отсут-

¹⁾ Бонди и Голд показали, что указанное ограничение на рост $|\mu^{(1)}|$ при $\lambda = 0$ не всегда применимо, если V имеет не сферическую, а тороидальную топологию, и привели пример униполярного дискового динамо с $\lambda = 0$, обладающего тороидальной топологией. Однако, как указано в разд. 1.1, даже в этой простой системе для изменения потока $\Phi(t)$ во времени требуется, чтобы проводимость в диске была конечна $\sigma < \infty$ (т.е. $\lambda > 0$). То же *ограничение* должно быть, разумеется, применимо для тороидальных систем общего вида.

ствии диффузии сводится к нулю, играет решающую, но вспомогательную роль, делая возможным длительное увеличение $|\mu^{(1)}|$.

6.4. Невозможность осесимметричного динамо

Если векторы \mathbf{u} и \mathbf{V} (и соответствующие векторы \mathbf{A} , \mathbf{E} , \mathbf{J}) имеют общую ось симметрии z , то, как мы убедились в разд. 3.6, тороидальная компонента закона Ома принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{A}_T}{\partial t} = \mathbf{u}_P \times \mathbf{V}_P - \lambda \operatorname{rot} \mathbf{V}_P. \quad (6.19)$$

Можно записать также соответствующее уравнение для силовой функции

$$\frac{\partial \chi}{\partial t} + \mathbf{u}_P \cdot \nabla \chi = \lambda D^2 \chi. \quad (6.20)$$

Как показал Каулинг [57], отсутствие в этом скалярном уравнении источника указывает на то, что стационарное состояние невозможно.

Докажем это утверждение, следуя с небольшими изменениями Брагинскому [26]. Допустим, что λ является осесимметричной функцией координат и удовлетворяет равенству

$$\mathbf{u}_P \cdot \nabla \lambda = 0, \quad (6.21)$$

т.е. λ постоянно на линиях тока поля \mathbf{u}_P . [Заметим, что уравнения (6.19) и (6.20) справедливы и для переменного λ .] Условие (6.21) естественно, поскольку вариации проводимости (а следовательно, и λ) переносятся жидкостью, и потому $\lambda(\mathbf{x})$ может быть стационарной только при выполнении этого условия. Условие (6.21) охватывает тот случай, когда коэффициент λ постоянен в области V и является произвольной функцией координат в области \hat{V} ; в частности, оно включает в себя и предельный случай непроводящей среды в области \hat{V} .

Умножим теперь уравнение (6.20) на $\lambda^{-1} \chi$ и проинтегрируем его по всему пространству. Поскольку $\lambda^{-1} \chi \mathbf{u}_P \cdot \nabla \chi = (1/2) \operatorname{div}(\mathbf{u}_P \lambda^{-1} \chi^2)$, то, используя равенства (6.21) и $\operatorname{div} \mathbf{u}_P = 0$, получим

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\infty} \frac{1}{2\lambda} \chi^2 dV + \int_{S_\infty} \frac{1}{2\lambda} \chi^2 \mathbf{u}_P \cdot \mathbf{n} dS = \int_{V_\infty} \chi D^2 \chi dV. \quad (6.22)$$

Если поле на бесконечности имеет дипольный характер, то $\chi = O(r^{-1})$ ($r \rightarrow \infty$) и поверхностный интеграл обращается в нуль при условии, что $\lambda^{-1} |\mathbf{u}_P| \rightarrow 0$ при $r \rightarrow \infty$. Последнее условие, разумеется, тривиально выполнено, если $\mathbf{u}_P \equiv 0$ вне ограниченного объема V . Кроме того, воспользовавшись (3.47), имеем

$$\int_{V_\infty} \chi D^2 \chi dV = \int_{V_\infty} \chi \operatorname{div} \mathbf{f} dV = - \int_{V_\infty} \mathbf{f} \cdot \nabla \chi dV = - \int_{V_\infty} (\nabla \chi)^2 dV, \quad (6.23)$$

где мы воспользовались асимптотикой $\chi = O(r^{-1})$, $|\mathbf{f}| = O(r^{-2})$, чтобы отбросить поверхностные интегралы на бесконечности. При переходе к последнему интегралу использовано также тождество $\chi^2 \operatorname{div}(\mathbf{i}_s / s) = 0$. Следовательно, равенство (6.22) принимает вид

$$\frac{d}{dt} \int_{V_\infty} \frac{1}{2\lambda} \chi^2 dV = - \int_{V_\infty} (\nabla \chi)^2 dV = - \int_{V_\infty} s^2 \mathbf{B}_P^2 dV. \quad (6.24)$$

Отсюда ясно, что при $\chi \neq 0$ стационарное состояние невозможно и асимптотически

$$\int s^2 \mathbf{B}_P^2 dV \rightarrow 0. \quad (6.25)$$

Исключив возможность того, что при $t \rightarrow \infty$ в \mathbf{B}_P возникают сингулярности (что нереально с физической точки зрения), мы приходим к выводу, что $\mathbf{B}_P \rightarrow 0$ везде.

Следовательно, меридиональная циркуляция \mathbf{u}_P не может предотвратить затухание осесимметричного полоидального поля¹⁾. Как ясно из уравнения (6.20), поле \mathbf{u}_P может перераспределять силовые линии но не способно создавать их. Кажется вероятным, что в случае сильной меридиональной циркуляции процесс перераспределения будет, вообще говоря, приводить к существенному ускорению затухания поля по следующей причине. Как мы показали в разд. 3.10, при $R_m \gg 1$ (для вычисления R_m используется характеристический размер a и интенсивность u_0 меридиональной циркуляции) полоидальное магнитное поле будет выталкиваться из областей с замкнутыми линиями тока поля \mathbf{u}_P . За время $R_m^{1/2} t_0$, где $t_0 = a/u_0$ — характерное время оборота меридиональных вихрей, масштаб поля \mathbf{B}_P в результате искривления силовых линий уменьшается от $O(a)$ до $O(\delta)$, где $\delta = R_m^{-1/2} a$; характерное время последующего затухания по порядку величины равно $\delta^2/\lambda = O(R_m^{-1}) a^2/\lambda = O(t_0)$. Тогда полное характерное время процесса искажения силовых линий и последующего затухания поля равно $R_m^{1/2} t_0 = R_m^{-1/2} a^2/\lambda$. Оно значительно меньше времени естественного затухания a^2/λ (при $R_m \gg 1$).

С другой стороны, слабая меридиональная циркуляция ($R_m = O(1)$ или меньше) несколько удлиняет процесс затухания [14].

¹⁾ Следует подчеркнуть, что доказанная теорема относится к случаю, когда оба вектора \mathbf{B} и \mathbf{u} осесимметричны относительно одной и той же оси. Стационарное поддержание неосесимметричного \mathbf{B} -поля осесимметричным \mathbf{u} -полем не исключается; пример такого динамо будет рассмотрен в разд. 6.10.

Предельное затухание тороидального поля

В осесимметричной ситуации тороидальная компонента уравнения индукции принимает вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} + s (\mathbf{u}_P \cdot \nabla) \frac{B}{s} = s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega - [\text{rot } \lambda (\text{rot } B \mathbf{i}_\varphi)] \cdot \mathbf{i}_\varphi, \quad (6.26)$$

где мы воспользовались обозначениями, принятыми в разд. 3.6. Мы уже видели, что пока $\mathbf{B}_P \neq 0$, источник $s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega$ в правой части этого уравнения может привести к возбуждению сильной тороидальной компоненты поля $B \mathbf{i}_\varphi$. Однако в конечном итоге \mathbf{B}_P будет равномерно стремиться к нулю, и тогда из (6.26) находим, что

$$\frac{d}{dt} \int \frac{1}{2} (B/s)^2 dV = - \int \lambda (\text{rot } B/\check{s})^2 dV, \quad (6.27)$$

и, действуя по аналогии с использованным выше доказательством, находим отсюда, что везде

$$\mathbf{B}_T = B \mathbf{i}_\varphi \rightarrow 0. \quad (6.28)$$

6.5. Доказательство Каулинга, в котором используется понятие нейтральной точки

Приведенное в предыдущем разделе доказательство невозможности осесимметричного динамо основано на использовании глобальных свойств поля, определенных интегралами, появившимися в соотношении (6.22). Поучительно дополнить его доказательством, предложенным Каулингом [57], в котором используются чисто локальные свойства поля. Силовая функция χ равна нулю на бесконечности и (по симметрии) на оси z . Если \mathbf{B}_P (а потому и χ) не обращается в нуль тождественно, то в плоскости (s, z) должна существовать по крайней мере одна точка, скажем N , в которой χ максимально или минимально. В точке N поле \mathbf{B}_P обращается в нуль, а в окрестности этой точки \mathbf{B}_P -линии замкнуты, т.е. N — нейтральная точка O -типа поля \mathbf{B}_P .

Пусть C_ϵ — замкнутая силовая линия поля \mathbf{B}_P в окрестности точки N , имеющая малую длину ϵ , а S_ϵ — покрывающая ее в плоскости (s, z) поверхность (рис. 6.2). Предположим, что поле \mathbf{B}_P стационарно. Тогда из (6.19) при $\partial \mathbf{A}_T / \partial t = 0$ имеем

$$\int_{S_\epsilon} (\mathbf{u}_P \times \mathbf{B}_P) \cdot d\mathbf{S} = \oint_{C_\epsilon} \lambda \mathbf{B}_P \cdot d\mathbf{x}. \quad (6.29)$$

Пусть B_ϵ — среднее значение $|\mathbf{B}_P|$ на C_ϵ , тогда в главном порядке по ϵ правая сторона равенства (6.29) равна $\lambda_N \epsilon B_\epsilon$, где λ_N — значение λ в точке N . Кроме того, поскольку $B_\epsilon \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$, среднее значение

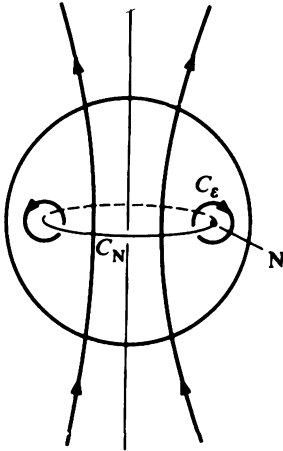


Рис. 6.2.

Движение не способно воспрепятствовать омическому затуханию поля в окрестности нейтральной точки N полоидального поля.

$|\mathbf{V}_P|$ на поверхности S_ϵ при достаточно малом ϵ , очевидно, меньше чем B_ϵ . Отсюда

$$\left| \int_{S_\epsilon} (\mathbf{u}_P \times \mathbf{V}_P) \cdot d\mathbf{S} \right| \leq U B_\epsilon S_\epsilon, \quad (6.30)$$

где U — максимальное значение $|\mathbf{u}|$ в области V . Следовательно,

$$\lambda_N \epsilon \leq U S_\epsilon. \quad (6.31)$$

Однако $S_\epsilon = O(\epsilon^2)$ при $\epsilon \rightarrow 0$, что для любого значения величины U/λ_N не совместимо с (6.31). Отсюда делаем вывод, что в окрестности нейтральной точки индукционный эффект, описываемый в (6.19) членом $\mathbf{u}_P \times \mathbf{V}_P$, не может компенсировать действие диффузии — $\lambda \operatorname{rot} \mathbf{V}_P$. Разумеется, если имеется много точек O -типа, то же самое будет справедливо для окрестности любой точки.

Контур C_N , полученный вращением точки N вокруг оси симметрии, представляет собой замкнутую \mathbf{V} -линию (на которой $\mathbf{V}_P = 0$, $\mathbf{V}_T \neq 0$), и невозможность динамо в окрестности точки N можно эквивалентным образом интерпретировать как неспособность электродвижущей силы $\mathbf{u} \times \mathbf{V}$ поддерживать ток, протекающий вдоль такой замкнутой \mathbf{V} -линии. Если в общем случае мы проинтегрируем закон Ома (2.117) вдоль замкнутой \mathbf{V} -линии, предполагая при этом, что \mathbf{E} — стационарное электрическое поле (и, следовательно, не вносит вклада в интеграл), то тривиально получим

$$\oint_{\text{по } \mathbf{V}\text{-линии}} \lambda (\operatorname{rot} \mathbf{V}) \cdot d\mathbf{x} = 0. \quad (6.32)$$

Следовательно, если величина $\mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V}$ не обращается в нуль в каком-нибудь участке замкнутой \mathbf{V} -линии, то, в силу (6.32), ее положительные значения должны компенсироваться отрицательными.

В более общем случае пусть S_B — любая замкнутая "магнитная" поверхность (охватывающая область V_B), на которой $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V} = 0$. Тогда из равенства $\lambda \text{rot } \mathbf{V} = -\nabla \varphi + \mathbf{u} \times \mathbf{V}$ имеем

$$\int_{V_B} \lambda \mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} dV = - \int_{V_B} \mathbf{V} \cdot \nabla \varphi dV = - \int_{S_B} \mathbf{n} \cdot \mathbf{V} \varphi dS = 0. \quad (6.33)$$

В частном случае, когда тороидальная поверхность S_B стягивается в замкнутую кривую C , этот результат сводится к (6.32). В этом случае $\mathbf{V} dV \rightarrow \Phi d\mathbf{x}$, где Φ — полный поток \mathbf{V} в торе.

Аналогично, если S_u — замкнутая поверхность (охватывающая V_u), на которой $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$, и если $\text{div } \mathbf{u} = 0$ в области V_u , то из тех же рассуждений следует, что в стационарных условиях

$$\int_{V_u} \lambda \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{V} dV = 0. \quad (6.34)$$

Результаты (6.33) и (6.34) справедливы, даже если коэффициент λ диффузии поля не постоянен.

6.6. Некоторые замечания к случаю $(\mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V}) \equiv 0$

Ясно, что осесимметричное полоидальное поле удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{V} \cdot \text{rot } \mathbf{V} \equiv 0. \quad (6.35)$$

Осесимметричное тороидальное поле также удовлетворяет (6.35). Из разд. 6.4 мы знаем, что в каждом из этих случаев динамо невозможно. Кажется вероятным, что динамо невозможно для *любого* поля, удовлетворяющего соотношению (6.35), однако это еще не было доказано.

Хорошо известно, что равенство (6.35) является необходимым и достаточным условием существования семейства поверхностей, везде ортогональных \mathbf{V} , или эквивалентно условиям существования таких функций $\alpha(\mathbf{x})$ и $\beta(\mathbf{x})$, что

$$\mathbf{V} = \beta(\mathbf{x}) \nabla \alpha(\mathbf{x}), \quad \text{rot } \mathbf{V} = \nabla \beta \times \nabla \alpha. \quad (6.36)$$

Ортогональные поверхности описываются в таком случае равенством $\alpha = \text{const}$. Во внешней области \hat{V} , где $\text{rot } \mathbf{V} = 0$, мы можем, очевидно, принять, что $\beta = 1$.

Легко показать, что не существует поля вида (6.36), удовлетворяющего условиям $\mathbf{V} = O(r^{-3})$ на бесконечности и $\mathbf{V}^2 > 0$ для всех

конечных \mathbf{x} . Действительно, в этом случае $\beta > 0$ для всех конечных \mathbf{x} и, таким образом, везде $\beta^{-1} \mathbf{B}^2 > 0$. Однако

$$\int_{V_\infty} \beta^{-1} \mathbf{B}^2 dV = \int_{V_\infty} \mathbf{B} \cdot \nabla \alpha dV = \int_{S_\infty} (\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}) \alpha dS = 0, \quad (6.37)$$

т.е. мы пришли к противоречию.

Отсюда следует, что любое поле вида (6.36), имеющее дипольный характер на бесконечности, должно обращаться в нуль по крайней мере для одного конечного значения \mathbf{x} . Для простейшей топологии поля, представляющего собой произвольное возмущение осесимметричного полоидального поля, каждая точка замкнутой кривой C в области V является нейтральной точкой O -типа для поля \mathbf{B} . Если имеется только одна такая кривая, то все поверхности $\alpha = \text{const}$ пересекаются на ней. В этом случае $\beta = 0$ на C и α — неоднозначная функция, и простое утверждение (6.37) уже не применимо.

Пичахчи [168] пытался доказать, что динамо невозможно, если $\mathbf{E} \equiv 0$, т.е. если $\lambda \text{rot } \mathbf{B} = \mathbf{u} \times \mathbf{B}$ в области V [откуда немедленно следует (6.35)]. Однако его доказательство основано на неоправданном (и, вообще говоря, некорректном) допущении, что поверхности $\alpha = \text{const}$ не должны пересекаться. Тем не менее требуемый результат кажется достижимым и правильное доказательство представляло бы значительный интерес.

6.7. Невозможность динамо для чисто тороидального движения

С физической точки зрения кажется правдоподобным, что полоидальные скорости необходимы для возбуждения полоидальных магнитных полей, и, следовательно, чисто тороидальное поле скорости не способно дать непрерывно действующее динамо. Этот результат был получен Буллардом и Геллманом [39] попутно в работе, в которой был развит метод решения уравнения индукции с помощью разложений по сферическим гармоникам. Более простое прямое доказательство дано Бэкасом [15], методу которого мы будем следовать ниже. Вернемся к стандартной ситуации, когда λ предполагается постоянным в области V , и ограничимся рассмотрением полей скорости для несжимаемой жидкости, когда $\text{div } \mathbf{u} = 0$. Тогда из уравнения индукции, записанного в виде

$$D\mathbf{B}/Dt = \mathbf{B} \cdot \nabla \mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{B}, \quad (6.38)$$

мы можем получить немедленно уравнение для скаляра $\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}$, а именно

$$\frac{D}{Dt} (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}) \equiv \mathbf{x} \cdot \frac{D\mathbf{B}}{Dt} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{B} = (\mathbf{B} \cdot \nabla)(\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}) + \lambda \Delta (\mathbf{x} \cdot \mathbf{B}). \quad (6.39)$$

Следовательно, если движение чисто тороидально, так что $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u} = 0$, то величина $Q = \mathbf{x} \cdot \mathbf{V}$ удовлетворяет уравнению диффузии

$$DQ/Dt = \lambda \Delta Q \quad \text{в объеме } V. \quad (6.40)$$

Кроме того, $\Delta Q = 0$ в области \hat{V} , а Q и $\partial Q/\partial n$ непрерывны при переходе через поверхность S , ограничивающую область V . После стандартных преобразований получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V Q^2 dV = -2\lambda \int_{V_\infty} (\nabla Q)^2 dV, \quad (6.41)$$

таким образом, везде $Q \rightarrow 0$.

Далее, при обычном разложении поля \mathbf{V} на тороидальную и полоидальную составляющие мы имеем $L^2 P = -\mathbf{x} \cdot \mathbf{V}$ [см. (2.38)], а уравнение $L^2 P = 0$ с внешним граничным условием $P = O(r^{-2})$ на бесконечности имеет только тривиальное решение $P \equiv 0$. Отсюда следует, что стационарное состояние возможно только для $\mathbf{V}_T \equiv 0$.

Тогда уравнение для тороидального поля \mathbf{V}_T принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{V}_T}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u}_T \times \mathbf{V}_T) + \lambda \Delta \mathbf{V}_T. \quad (6.42)$$

При $\mathbf{V}_T = -\mathbf{x} \times \nabla T$ и $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}_T = 0$ мы имеем

$$\mathbf{u}_T \times \mathbf{V}_T = -\mathbf{x}(\mathbf{u}_T \cdot \nabla)T, \quad (6.43)$$

поэтому (6.42) переходит в уравнение

$$-\mathbf{x} \cdot \nabla \left(\frac{\partial T}{\partial t} \right) = (\mathbf{x} \times \nabla) \mathbf{u}_T - \lambda (\mathbf{x} \times \nabla) \Delta T, \quad (6.44)$$

где использована перестановочность операторов $\mathbf{x} \times \nabla$ и Δ . Следовательно,

$$\frac{DT}{Dt} \equiv \frac{\partial T}{\partial t} + \mathbf{u}_T \cdot \nabla T = \lambda \Delta T + f(r) \quad (6.45)$$

для некоторой функции $f(r)$. Если мы умножим это уравнение на T и проинтегрируем его по объему V , то член, содержащий $f(r)$, не даст вклада, поскольку интеграл от T по каждой поверхности $r = \text{const}$ обращается в нуль. Более того, $T = 0$ на поверхности S , и, таким образом, мы получаем

$$\frac{d}{dt} \int_V T^2 dV = -2\lambda \int_V (\nabla T)^2 dV. \quad (6.46)$$

Следовательно, T (а также и \mathbf{V}_T) в конечном итоге стремится к нулю.

С помощью дополнительных преобразований над (6.39) в работе [45] удалось получить оценку величины радиальной скорости, которая

требуется для того, чтобы предотвратить диффузионное затухание радиального магнитного поля. Сравнение двух членов в правой части уравнения (6.39) дает предварительную оценку скорости

$$u_r \sim \lambda B_r / |\mathbf{B}| R. \quad (6.47)$$

Если удержать в (6.39) член с $\mathbf{x} \cdot \mathbf{u}$, то, как показано в работе [45], равенство (6.41) сменяется неравенством

$$\frac{d}{dt} \int_V Q^2 dV \leq -2 \left[\lambda - \max(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) \left(\frac{M}{2M_P} \right)^{1/2} \right] \int_{V_\infty} (\nabla Q)^2 dV, \quad (6.48)$$

где M — полная магнитная энергия, а M_P — энергия полоидальной части магнитного поля. Следовательно, необходимое условие усиления $\int_V Q^2 dV$ имеет вид

$$\max(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x}) > \lambda (2M_P/M)^{1/2}. \quad (6.49)$$

Сравним его с (6.47). Ясно, что для заданного распределения магнитного поля (а следовательно, заданного отношения M_P/M) неравенство (6.49) дает необходимое (хотя ни в коем случае не достаточное) условие, которому должно удовлетворять поле скорости, если оно поддерживает стационарное распределение магнитного поля при наличии омического затухания.

Условие (6.49) представляет особый интерес и имеет прямое отношение к геофизике в свете доказательств существования устойчиво стратифицированного ядра (разд. 4.4). Устойчивая стратификация подразумевает подавление радиальных (конвективных) полей скорости, но тем не менее допускает существование волновых движений (например, внутренних гравитационных волн, видоизмененных под действием кориолисовых сил), если присутствуют возмущающие силовые поля. Условие (6.49) указывает, какой минимальный уровень радиальных флуктуационных скоростей необходим для поддержания заданного уровня энергии полоидального магнитного поля.

Почувительно переписать условие (6.49), используя магнитные числа Рейнольдса R_{mT} и R_{mP} , характеризующие тороидальное и полоидальное движения. Мы показали, что при $R_{mT} \gg 1$ энергия тороидального магнитного поля в $O(R_{mT}^2)$ раз превышает энергию полоидального поля, т.е. $(M_P/M)^{1/2} = O(R_{mT}^{-1/2})$; следовательно, неравенство (6.49) принимает простой вид

$$R_{mP} R_{mT} \geq 1, \quad (6.50)$$

где $R_{mP} = \max(\mathbf{u} \cdot \mathbf{x})/\lambda$.

Интересно отметить, что результат, касающийся невозможности динамо при чисто тороидальном течении, не имеет аналога в цилиндрической геометрии, т.е. когда скорость сосредоточена на цилиндрических (не на сферических) поверхностях. Причина заключается в том, что в задаче о диффузии в цилиндрической геометрии с координатами (s, φ, z) имеется связь между радиальной B_s и азимутальной B_φ компонентами поля. Однако в декартовых координатах (см. следующий раздел) аналог полученного результата имеется.

6.8. Невозможность динамо для плоского двумерного движения

Аналогом чисто тороидального движения в декартовых координатах является такое движение \mathbf{u} , для которого $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$, где \mathbf{k} — единичный вектор, например $(0, 0, 1)$. Компоненты поля $\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}$ при таком условии удовлетворяют уравнению

$$\frac{D}{Dt} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}) = \lambda \Delta (\mathbf{v} \cdot \mathbf{k}). \quad (6.51)$$

Пусть далее $\mathbf{v} = \text{rot} (\mathbf{k} T(x, y, z)) = (\mathbf{k} \times \nabla T)$, где мы предположили, что $\int T(x, y, z) dx dy = 0$

и где интеграл берется по произвольной плоскости $z = \text{const}$. Тогда после использования равенств $\mathbf{u} \times \mathbf{v} = -[\mathbf{u} \times (\mathbf{k} \times \nabla T)] = -(\mathbf{u} \cdot \nabla T) \mathbf{k}$ уравнению индукции можно придать вид

$$-(\mathbf{k} \times \nabla) \frac{\partial T}{\partial t} = (\mathbf{k} \times \nabla) \mathbf{u} \cdot \nabla T - \lambda (\mathbf{k} \times \nabla) \Delta T. \quad (6.52)$$

Интегрируя, получим

$$\frac{DT}{Dt} = \lambda \Delta T + f(z), \quad (6.53)$$

где $f(z)$ — некоторая функция. Если положить $T = O(r^{-2})$ при $r \rightarrow \infty$, то отсюда следует, что везде $\nabla T \rightarrow 0$ [ср. доказательство, проведенное после формулы (6.45)] и, следовательно, везде $\mathbf{v} \rightarrow 0$.

Заметим, что этот результат справедлив независимо от того, является ли \mathbf{v} функцией z или нет, важно только, что $\mathbf{k} \cdot \mathbf{u} = 0$. В слабой форме (в предположении $\partial \mathbf{v} / \partial z = 0$) результат был получен в работе [128]. Впервые аналогичный результат для случая двумерной турбулентности был установлен Зельдовичем [230]¹⁾.

¹⁾ В этой работе рассмотрено также начальное усиление и последующее затухание магнитного поля и процесс "диамагнитного" выталкивания силовых линий из турбулизованной области. — *Прим. ред.*

6.9. Роторные динамо

Обратимся теперь к некоторым примерам кинематически возможных движений в однородном проводнике, которые *дают* стационарное динамо. Принимая во внимание следствие упомянутых выше теорем антидинамо, мы должны с необходимостью рассматривать достаточно сложные движения; соответственно усложняется и решение задачи. Тем не менее если мы уверены, что не существует всеохватывающей теоремы антидинамо, то важно найти по крайней мере один точный пример динамо. Первый такой пример, найденный в 1958 г. Герценбергом [89], был замечателен в том отношении, что было недвусмысленно доказано существование в сфере, заполненной проводящей жидкостью, стационарных движений $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, способных компенсировать омическое затухание стационарного магнитного поля $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ и создать отличный от нуля дипольный момент вне сферы.

Герценберг рассмотрел поле скорости, состоящее из двух сферических роторов, погруженных в проводящую жидкую сферу, причем жидкость, окружающая роторы, считалась неподвижной. Угловая скорость внутри каждого ротора постоянна, а радиусы роторов малы по сравнению с расстоянием между их центрами, которое в свою очередь мало по сравнению с радиусом проводящей сферы. Последующее обсуждение этого динамо основано главным образом на работах [77, 78, 79, 184], в которых анализ Герценберга был существенно улучшен.

Пусть S_α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) обозначает n сфер $|\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha| = a$, и предположим, что $|\mathbf{x}_\alpha - \mathbf{x}_\beta| \gg a$ для каждой пары (α, β) , т.е. расстояния между сферами значительно превышают их радиус. Определим поле скорости

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}) = \begin{cases} \boldsymbol{\omega}_\alpha \times (\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha) & \text{при } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha| < a, \quad (\alpha = 1, 2, \dots, n) \\ 0 & \text{при } |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha| > a, \end{cases} \quad (6.54)$$

где $\boldsymbol{\omega}_\alpha$ ($\alpha = 1, 2, \dots, n$) — постоянные, т.е. жидкость внутри сферы S_α вращается с постоянной угловой скоростью $\boldsymbol{\omega}_\alpha$, а жидкость вне всех n сфер покоится. Мы хотим выяснить, при каких условиях такое поле скорости, заданное в жидкости, имеющей бесконечную протяженность и постоянную проводимость, может поддерживать стационарное магнитное поле $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, которое на бесконечности убывает в лучшем случае как $O(r^{-3})$.

Если такое поле $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ существует, то в окрестности сферы S_α его можно разложить на полоидальную и тороидальную составляющие:

$$\mathbf{V}_P^\alpha = \text{rot rot } \mathbf{r}_\alpha P(\mathbf{r}_\alpha), \quad \mathbf{V}_T^\alpha = \text{rot } \mathbf{r}_\alpha T(\mathbf{r}_\alpha), \quad (6.55)$$

где $\mathbf{r}_\alpha = \mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha$. Пусть $P^s(\mathbf{r}_\alpha)$ и $T^s(\mathbf{r}_\alpha)$ — средние значения $P(\mathbf{r}_\alpha)$,

и $T(\mathbf{r}_\alpha)$, полученные путем усреднения по азимутальному углу, определенному относительно вектора угловой скорости ω_α , и пусть $P^a(\mathbf{r}_\alpha)$ и $T^a(\mathbf{r}_\alpha)$ находят из равенств

$$P = P^s + P^a, \quad T = T^s + T^a \quad (6.56)$$

(верхние индексы s и a означают симметрию и асимметрию относительно оси вращения). Пусть соответствующие разложения \mathbf{V}^s и \mathbf{V}^a имеют вид

$$\mathbf{V}_P^\alpha = \mathbf{V}_P^{\alpha s} + \mathbf{V}_P^{\alpha a}, \quad \mathbf{V}_T^\alpha = \mathbf{V}_T^{\alpha s} + \mathbf{V}_T^{\alpha a}. \quad (6.57)$$

Мы знаем (разд. 6.7), что тороидальное движение в сфере S_α не способно генерировать поле \mathbf{V}_P^α , которое всецело поддерживается движением проводящей жидкости в других $n - 1$ сферах. Следовательно, поле \mathbf{V}_P^α можно считать "приложенным" в окрестности S_α , и вращение сферы S_α в присутствии этого приложенного поля определяет геометрию тороидального поля \mathbf{V}_T^α . Антисимметричная часть полного поля \mathbf{V}^α просто исключается из вращающейся области главным образом благодаря процессу, описанному в разд. 3.8. С другой стороны, симметричная часть \mathbf{V}_P^α , взаимодействуя с дифференциальным вращением (градиент $\omega(r)$ в данном случае локализован на сферической поверхности $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}_\alpha| = a$), генерирует поле $\mathbf{V}_T^{\alpha s}$, которое согласно разд. 3.11, по порядку величины равно $O(R_{m\alpha})|\mathbf{V}_P^{\alpha s}|$, где $R_{m\alpha} = \omega_\alpha a^2/\lambda$. Если, как мы предположим, $R_{m\alpha} \gg 1$, то $\mathbf{V}_T^{\alpha s}$ будет главной составляющей полного поля \mathbf{V}^α в окрестности S_α .

Далее, $\mathbf{V}_P^{\alpha s}$ можно разложить в ряды Тейлора в окрестности точки $\mathbf{x} = \mathbf{x}_\alpha$:

$$\begin{aligned} B_{P_i}^{\alpha s}(\mathbf{x}) &= B_{P_i}^{\alpha s}(\mathbf{x}_\alpha) + r_{\alpha j} B_{P_i, j}^{\alpha s}(\mathbf{x}_\alpha) + O(r_\alpha^2) = \\ &= B_{P_i}^{\alpha s}(\mathbf{x}_\alpha) + \frac{1}{2} r_{\alpha j} (B_{P_i, j}^{\alpha s}(\mathbf{x}_\alpha) + B_{P_j, i}^{\alpha s}(\mathbf{x}_\alpha)) + O(r_\alpha^2). \end{aligned} \quad (6.58)$$

Поскольку $\text{rot } \mathbf{V}_P^\alpha$ представляют собой тороидальный ток, который обращается в нуль в точке \mathbf{x}_α , то это разложение можно записать в эквивалентной форме

$$\mathbf{V}_P^{\alpha s}(\mathbf{x}) = \nabla \Phi + O(r_\alpha^2), \quad (6.59)$$

где

$$\Phi = A_1^\alpha r P_1(\cos \theta) + a^{-1} A_2^\alpha r^2 P_2(\cos \theta), \quad (6.60)$$

и (при условии, что по повторяющимся греческим индексам суммирование *не производится*)

$$A_1^\alpha = \omega_\alpha^{-1} \omega_\alpha \cdot \mathbf{V}_P^{\alpha s}(\mathbf{x}_\alpha), \quad A_2^\alpha = \frac{1}{2} a \omega_\alpha^{-2} \omega_\alpha \cdot \nabla \mathbf{V}_P^{\alpha s}(\mathbf{x}_\alpha) \cdot \omega_\alpha. \quad (6.61)$$

Используя результаты в разд. 3.11, находим отсюда, что при $r_\alpha \gg a$

$$\mathbf{V}_T^{\alpha s}(\mathbf{x}) \sim -\frac{1}{5} a^3 A_1^\alpha R_{m\alpha} \frac{(\boldsymbol{\omega}_\alpha \cdot \mathbf{r}_\alpha)(\boldsymbol{\omega}_\alpha \times \mathbf{r}_\alpha)}{\omega_\alpha^2 r_\alpha^5} + \\ + \frac{2}{5} a^2 A_2^\alpha R_{m\alpha} \frac{\boldsymbol{\omega}_\alpha \times \mathbf{r}_\alpha}{\omega_\alpha r_\alpha^3} + O(r_\alpha^{-4}). \quad (6.62)$$

Поле в окрестности сферы S_β является суммой полей вида (6.62) генерируемых всеми другими сферами S_α ($\alpha \neq \beta$), т.е.

$$\mathbf{V}^\beta(\mathbf{x}) = \sum_{\alpha(\neq \beta)} \mathbf{V}_T^{\alpha s}(\mathbf{x}). \quad (6.63)$$

Для самосогласованности при $\beta = 1, 2, \dots, n$ мы должны иметь

$$A_1^\beta = \omega_\beta^{-1} \boldsymbol{\omega}_\beta \cdot \mathbf{V}_P^{\beta s}(\mathbf{x}_\beta) = \sum_{\alpha(\neq \beta)} \omega_\beta^{-1} \boldsymbol{\omega}_\beta \cdot \mathbf{V}_T^{\alpha s}(\mathbf{x}_\beta), \quad (6.64)$$

и, аналогично,

$$A_2^\beta = \sum_{\alpha(\neq \beta)} \frac{1}{2} a \omega_\beta^{-2} \boldsymbol{\omega}_\beta \cdot \nabla \mathbf{V}_T^{\alpha s}(\mathbf{x}_\beta) \cdot \boldsymbol{\omega}_\beta. \quad (6.65)$$

Если в (6.62) пренебречь членами порядка $O(r_\alpha^{-4})$, то это дает $2n$ линейных уравнений для A_1^α и A_2^α ($\alpha = 1, 2, \dots, n$), причем для существования нетривиального решения детерминант, составленный из коэффициентов этой системы, должен обращаться в нуль.

Трехсферное динамо

Описанная процедура проще всего прослеживается для конфигурации из трех сфер [78], изображенной на рис. 6.3. Пусть

$$\mathbf{x}_1 = (d, 0, 0), \quad \mathbf{x}_2 = (0, d, 0), \quad \mathbf{x}_3 = (0, 0, d) \quad (6.66)$$

и

$$\boldsymbol{\omega}_1 = (0, 0, -\omega), \quad \boldsymbol{\omega}_2 = (-\omega, 0, 0), \quad \boldsymbol{\omega}_3 = (0, -\omega, 0), \quad (6.67)$$

где $\omega > 0$. Причина такого выбора знака выяснится ниже. Эта конфигурация обладает тройной симметрией в том смысле, что она не изменяется при поворотах на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ относительно направления $(1, 1, 1)$. Поэтому мы будем искать только такие поля $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, которые имеют ту же степень симметрии. В частности, в приведенных выше обозначениях мы имеем

$$A_1^1 = A_1^2 = A_1^3 = A_1, \quad A_2^1 = A_2^2 = A_2^3 = A_2. \quad (6.68)$$

Следовательно, из (6.64) и (6.65) получилось только два условия, которые связывают A_1 и A_2 .

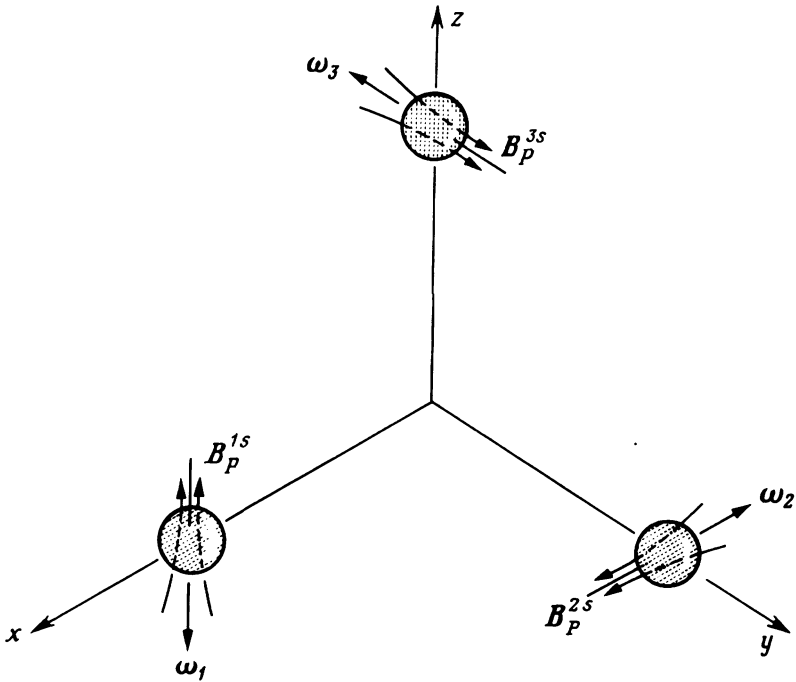


Рис. 6.3.

Трехсферное динамо Гибсона [78] для особой конфигурации, которая инвариантна относительно поворотов вокруг направления $(1, 1, 1)$ на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$.

В окрестности сферы S_3

$$\mathbf{r}_1 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_1 \approx (-d, 0, d), \quad \mathbf{r}_2 = \mathbf{x}_3 - \mathbf{x}_2 \approx (0, -d, d), \quad (6.69)$$

поэтому при $\beta = 3$ равенства (6.64) и (6.65) после некоторых преобразований принимают вид

$$A_1 \left(1 + \frac{R_m}{10} \left(\frac{a}{R}\right)^3\right) = \frac{4}{15\sqrt{2}} R_m \left(\frac{a}{R}\right)^3 A_2 \frac{R}{a}, \quad (6.70)$$

$$A_2 \left(1 - \frac{a^3 R_m}{5R^3}\right) = 0, \quad (6.71)$$

где $R_m = \omega a^2 / \lambda$, а $R = d\sqrt{2}$ — расстояние между центрами сфер. Равенство (6.71) дает критическое магнитное число Рейнольдса

$$R_{mc} = 5 \left(R/a\right)^3, \quad (6.72)$$

после чего (6.70) принимает вид

$$A_2 = \frac{9}{4\sqrt{2}} \frac{A_1 a}{R}. \quad (6.73)$$

Конфигурация $\mathbf{V}_P^{\alpha s}$ -линий в окрестности каждой сферы показана на рис. 6.3. (Нарисовать полную трехмерную картину силовых линий, конечно, трудно.)

В приведенном выше вычислении определенные моменты заслуживают специальных замечаний. Во-первых, отметим, что поскольку $a \ll \ll R$, то A_2 на порядок меньше A_1 . Это означает, что в окрестности сферы S_α поле $\mathbf{V}_P^{\alpha s}$ приблизительно однородно. Однако было бы совершенно неверным считать его полностью однородным, что соответствовало бы условию $A_2 = 0$ в (6.70) и (6.71) и привело бы к ошибочному выводу, что динамо будет работать при $R_m = -10 (R/a)^3$ (причем требуется, чтобы в (6.67) было $\omega < 0$). Небольшой градиент в окрестности каждой сферы необходим в силу явления, описанного в разд. 3.11, и очевидно, что в выражении (6.62) для $\mathbf{V}_T^{\alpha s}$ члены, зависящие от градиента $\mathbf{V}_P^{\alpha s}$, более медленно уменьшаются с расстоянием, чем члены, зависящие в окрестности сферы от самого поля $\mathbf{V}_P^{\alpha s}$. Этот эффект компенсирует малость коэффициента A_2 .

Во-вторых, заметим, что направления векторов ω_1 , ω_2 и ω_3 на рис. 6.3 выбраны из соображений максимальной простоты. Однако тот же метод применим, если выбрать направление ω_1 произвольно, а ω_2 и ω_3 получить из ω_1 поворотами на углы $2\pi/3$ и $4\pi/3$ вокруг направления $(1, 1, 1)$. Но если одна такая триада $(\omega_1, \omega_2, \omega_3)$ дает динамо, то триада $(-\omega_1, -\omega_2, -\omega_3)$ не может поддерживать поле $\mathbf{V}(\mathbf{x})$, обладающее той же самой трехкратной симметрией.

В-третьих, в действительности ω не обязана быть постоянной в каждой сфере. Результаты, полученные в разд. 3.11, показывают, что пока мы интересуемся полем, индуцированным вдали от сферы и $\omega = \omega(r)\mathbf{k}$, существенна лишь величина $\bar{\omega}$, где

$$\frac{1}{5} a^5 \bar{\omega} = \int_0^a r^4 \omega(r) dr. \quad (6.74)$$

Если ω зависит от радиуса внутри каждой сферы, но $\bar{\omega}$ для всех сфер одинакова, то приведенные выше результаты применимы при $R_m = \bar{\omega} a^2 / \lambda$.

Двусферное динамо

Если имеется только две сферы, то, выбрав начало координат в точке расположенной на середине линии, соединяющей центры сфер,

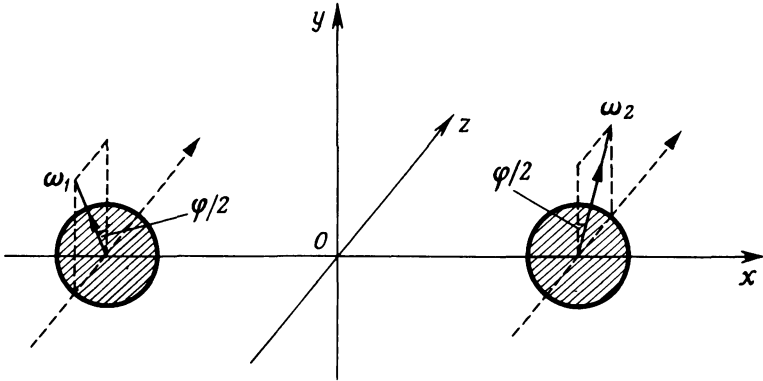


Рис. 6.4.

Динамо для конфигурации из двух сфер [см. (6.75), (6.76)].

можно принять

$$\mathbf{x}_1 = \left(-\frac{1}{2}R, 0, 0\right), \quad \mathbf{x}_2 = \left(\frac{1}{2}R, 0, 0\right). \quad (6.75)$$

Предположим (рис. 6.4), что

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \omega(0, \cos(\varphi/2), -\sin(\varphi/2)), \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \omega(0, \cos(\varphi/2), \sin(\varphi/2)). \quad (6.76)$$

Тогда конфигурация инвариантна относительно поворота на угол π вокруг оси y , и, следовательно, мы можем искать магнитное поле, обладающее той же двукратной симметрией. Если положить $A_1^1 = A_1^2 = A_1$ и $A_2^1 = A_2^2 = A_2$, то условия (6.64) и (6.65) сводятся к ¹⁾

$$A_1 = -\frac{2a^2}{15R^2} A_2 R_m \sin \varphi \quad (6.77)$$

и

$$A_2 = \frac{a^4}{10R^4} A_1 R_m \sin \varphi \cos \varphi. \quad (6.78)$$

Следовательно,

$$\left(\frac{1}{5} R_m (a/R)^3 \sin \varphi\right)^2 (-\cos \varphi) = 3, \quad (6.79)$$

¹⁾ Условия антисимметрии $A_1^1 = -A_1^2$ и $A_2^1 = -A_2^2$ приводят к тому же значению R_m (6.79) и полю, которое при повороте на угол π вокруг оси y изменяет свой знак, т.е. $\mathbf{B}(\mathbf{x}) \rightarrow -\mathbf{B}(\mathbf{x})$.

поэтому динамо возможно, если $\pi/2 < \varphi < 3\pi/2$ (точка $\varphi = \pi$ исключается). Далее, из (6.77) имеем

$$A_2 = \frac{1}{2} A_1 (a/R)(-3 \cos \varphi)^{1/2}. \quad (6.80)$$

Динамо наиболее эффективно (т.е. получающееся R_m имеет наименьшее значение), если $\operatorname{tg} \varphi = \pm 2^{-1/2}$, т.е. $\varphi = 145$ или 215° . Тогда $A_2 \approx 0,78 A_1 (a/R)$. (6.81)

Результат (6.79) является частным случаем результата, полученного Герценбергом, изучавшим конфигурацию более общего вида [89]:

$$\omega_1 = \omega (\cos \theta_1, \sin \theta_1 \cos (\varphi/2), -\sin \theta_1 \sin (\varphi/2)),$$

$$\omega_2 = \omega (\cos \theta_2, \sin \theta_2 \cos (\varphi/2), \sin \theta_2 \sin (\varphi/2)). \quad (6.82)$$

Если исключить случай $\theta_1 = \pm \theta_2$, то эта конфигурация не обладает двукратной симметрией и, следовательно, в общем случае *априори* нет причин полагать $A_1^1 = A_1^2$ и $A_2^1 = A_2^2$. Поэтому (6.64) и (6.65) дают четыре линейных по этим величинам уравнения. Равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов этих уравнений, приводит к условию

$$\lambda^2 \equiv \left\{ \left[\frac{1}{5} R_m (a/R)^3 \sin \theta_1 \sin \theta_2 \sin \varphi \right]^2 (\cos \theta_1 \cos \theta_2 - \sin \theta_1 \sin \theta_2 \cos \varphi) - 3 \right\}^2 = 0. \quad (6.83)$$

Если $\theta_1 = \theta_2 = \pi/2$, то условие $\lambda = 0$ сводится к (6.79). Однако Герценберг заметил, что члены, которыми пренебрегали в рассматриваемой схеме разложения [например, член $O(r \alpha^{-4})$ в (6.62)], могут в принципе (если их учесть) дать отрицательный вклад, скажем $-\epsilon^2$ в правую часть равенства (6.83). Мы получили бы тогда, что $\lambda = \pm i\epsilon$ и результирующее магнитное число Рейнольдса стало бы комплексным; это свидетельствовало бы о невозможности динамо для данного поля скорости¹⁾.

Герценберг разрешил эту трудность путем учета полей, отраженных от удаленной сферической границы проводника. Вместо (6.83) он получил равенство вида

$$(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0, \quad (6.84)$$

¹⁾ Как показал Гайлитис, в этом случае имеются чисто колебательные решения (см. "Магнитная гидродинамика", 4, 12, 1973). — *Прим. ред.*

где λ_1 и λ_2 — малые числа, определяемые эффектами на удаленной границе. В общем случае $\lambda_1 \neq \lambda_2$, для $\lambda = \lambda_1$ или $\lambda = \lambda_2$ мы получаем два определенных значения R_m , при которых возможно стационарное динамо и два соответствующих (но различных) поля.

Если проводник имеет во всех направлениях неограниченные размеры, то кратность корня уравнения (6.83) для R_m означает, что даже для конфигурации, не обладающей двукратной симметрией относительно произвольной оси, задача о собственных значениях является вырожденной, т.е. критическому значению R_m соответствуют две линейно независимые собственные функции $\mathbf{V}_1(\mathbf{x})$ и $\mathbf{V}_2(\mathbf{x})$. Если конфигурация обладает двукратной симметрией (рис. 6.4), то в целом кажется возможным, что одна из этих функций будет симметричной, а другая — антисимметричной в том смысле, что при повороте на угол π вокруг оси $\mathbf{V}_1(\mathbf{x}) \rightarrow \mathbf{V}_1(\mathbf{x})$, а $\mathbf{V}_2(\mathbf{x}) \rightarrow -\mathbf{V}_2(\mathbf{x})$. В действительности Гибсон [77] показал, что учет в (6.62) членов порядка r^{-4} не устраняет вырожденности, имеющейся в (6.83). Вероятно, вырожденность остается во всех порядках, по крайней мере для симметричного случая (6.76).

Роторное динамо Лоуэса и Уилкинсона

Лоуэс и Уилкинсон [131, 132] построили лабораторную модель динамо, состоящего из двух твердотельных цилиндрических роторов, вставленных в болванку, сделанную из того же материала; причем электрический контакт между роторами и болванкой осуществляется с помощью тонкой ртутной пленки. Типичная ориентация цилиндров показана на рис. 6.5. Принцип действия динамо по существу тот же, что и в модели Герценберга: "приложенное" полоидальное поле ротора A является индуцированным тороидальным полем ротора B , и наоборот. Использование не сфер, а цилиндров диктовалось экспериментальной целесообразностью; однако взаимодействие между двумя концами цилиндров в действительности сильнее, чем между сферами. Грубо

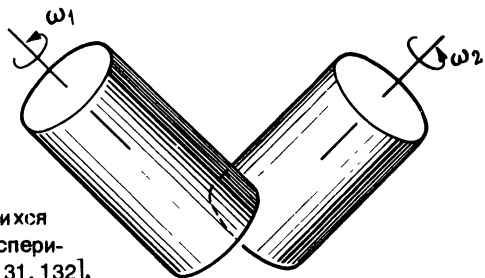


Рис. 6.5.

Конфигурация из двух вращающихся цилиндров, рассмотренная в экспериментах Лоуэса и Уилкинсона [131, 132].

говоря, все силовые линии тороидального поля, генерируемого вращением цилиндра в почти однородном аксиальном поле, имеют одинаковый знак у концов цилиндров [88] (в противоположность случаю вращающейся сферы, где при переходе через экваториальную плоскость тороидальное поле изменяет знак).

Достаточно малое значение коэффициента диффузии магнитного поля $\lambda = (\mu\sigma)^{-1}$ было достигнуто за счет использования ферромагнитного материала для роторов и болванки. (В первой модели использовался чугун "перминвар", в дальнейшем – мягкая закаленная сталь.) Было найдено, что для большинства благоприятных ориентаций цилиндров динамо возможно при критической угловой скорости роторов ~ 400 об/мин, соответствующей критическому магнитному числу Рейнольдса $R_m \approx 200$. Динамо проявляло себя следующим образом: как только угловые скорости достигали критической величины, магнитное поле, измеренное вне болванки, внезапно возрастало. Токи в болванке (и соответствующее поле) увеличиваются до тех пор, пока действующий на роторы тормозящий момент, связанный с силой Лоренца, не окажется достаточным для того, чтобы остановить надкритический рост угловых скоростей.

В стационарном состоянии [131] мощность, подводимая к роторам, равна суммарной скорости омического и вязкого затухания в смазочных ртутных пленках. В последующей улучшенной модели [132] скорость вязкой диссипации была сильно уменьшена и в системе появились представляющие интерес колебания относительно возможных стационарных состояний. Такого типа режим, который интересен в связи с объяснением изменений полярности дипольного поля Земли (разд. 4.3), требует учета динамических эффектов, рассматриваемых в последних главах данной книги (разд. 12.4).

6.10. Динамо, связанное с парой кольцевых вихрей

Другой простой пример динамо, связанного с парой роторов, был рассмотрен Гайлитисом [76]. Поле скорости, изображенное на рис. 6.6, осесимметрично, имеет круговые линии тока и заключено внутри двух тороидальных колец \mathcal{J}_1 и \mathcal{J}_2 . Из теоремы Каулинга мы знаем, что такое поле скорости не может поддерживать стационарное осесимметричное магнитное поле, обращающееся в нуль на бесконечности. Однако при определенных условиях оно может поддерживать неосесимметричное поле, пропорциональное $e^{im\varphi}$, где φ – азимутальный угол, определенный относительно общей оси тороидов, и m – целое число. На рис. 6.6 изображены силовые линии в окрестности каждого тора при $m = 1$ и качественно показано, как вращение внутри каждого тора

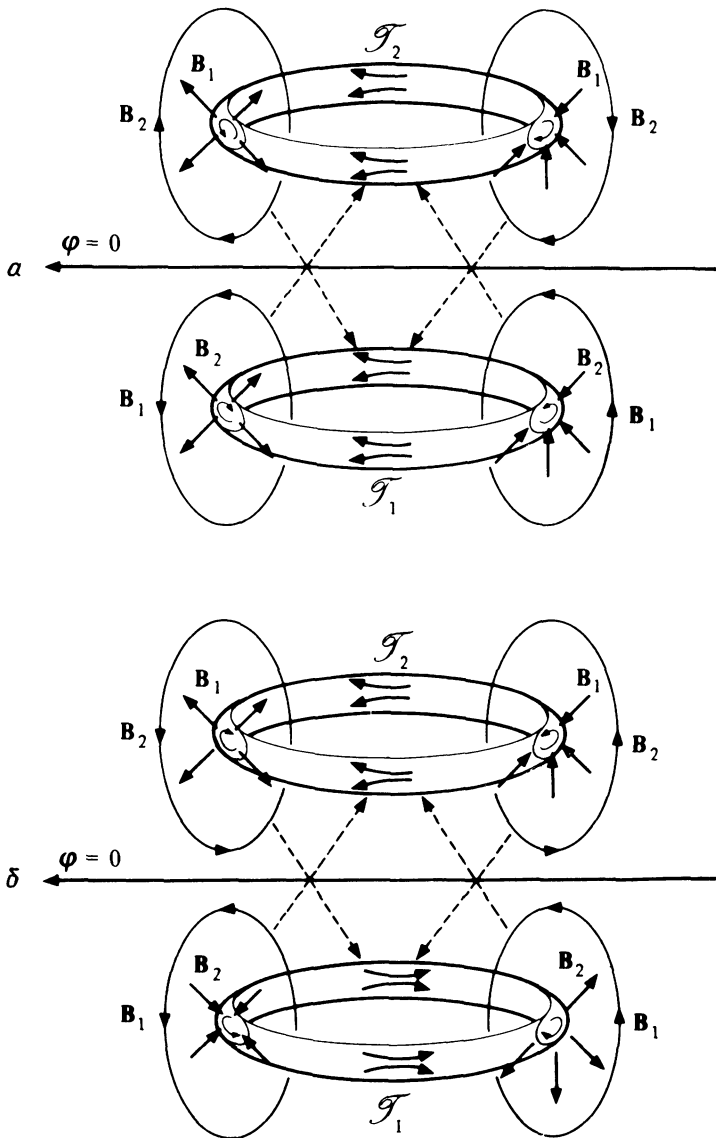


Рис. 6.6.

Поддержание поля парой кольцевых вихрей [76]; а – дипольная конфигурация, б – квадрупольная конфигурация. В каждом из случаев вращение внутри одного тора индуцирует в окрестности другого тора поле, которое, как указано на рисунках, имеет радиальное направление.

может генерировать магнитное поле, которое является индуцирующим полем для другого тора.

Гайлитис [76] (мы лишь несколько изменили обозначения) решал задачу следующим образом. Пусть (z, s, φ) — обычные цилиндрические координаты, а (τ, χ, φ) — смещенные цилиндрические координаты [184], которые определяются соотношениями

$$s = c - \tau \cos \chi, \quad z = \tau \sin \chi. \quad (6.85)$$

Пусть \mathcal{J}_1 — тор $\tau = a$, где $a \ll c$, а \mathcal{J}_2 — тор, полученный путем отражения \mathcal{J}_1 в плоскости $z = \frac{1}{2} z_0$, где также $a \ll z_0$. Мы будем везде пренебрегать членами, пропорциональными a/c и a/z_0 . Представим поле скорости в виде

$$\mathbf{u} = \mathbf{u}_1(\mathbf{x}) + \mathbf{u}_2(\mathbf{x}), \quad (6.86)$$

где

$$\mathbf{u}_1(\mathbf{x}) = \begin{cases} v_1(\tau) \mathbf{i}_\chi & \text{внутри } \mathcal{J}_1, \\ 0 & \text{вне } \mathcal{J}_1, \end{cases} \quad (6.87)$$

и аналогично (относительно \mathcal{J}_2) определена скорость $\mathbf{u}_2(\mathbf{x})$. Полное поле скорости отлично от нуля только в двух тороидах. Заметим, что предположение $a \ll c$ позволяет пренебречь малыми вариациями $v_1(\tau)$, возникающими при изменениях χ в соответствии с условием несжимаемости $\operatorname{div} \mathbf{u}_1 = 0$.

Выпишем формальное решение стационарного уравнения индукции

$$\lambda \Delta \mathbf{V} + \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{V}) = 0, \quad (6.88)$$

Положив $\mathbf{V} = \mathbf{V}_1 + \mathbf{V}_2$, где

$$\begin{aligned} \lambda \Delta \mathbf{V}_1 + \operatorname{rot}(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{V}_1) &= -\operatorname{rot}(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{V}_2), \\ \lambda \Delta \mathbf{V}_2 + \operatorname{rot}(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{V}_2) &= -\operatorname{rot}(\mathbf{u}_2 \times \mathbf{V}_1). \end{aligned} \quad (6.89)$$

Мы считаем, что поле \mathbf{V}_1 индуцируется движением \mathbf{u}_1 и индуцирует движение \mathbf{u}_2 . Аналогичное утверждение справедливо и для поля \mathbf{V}_2 .

Основная идея, использованная Гайлитисом, очень похожа на идею, примененную в модели Герценберга. Пусть \mathbf{V}_2^s — вектор, полученный путем усреднения компонент $\mathbf{V}_2(\tau, \chi, \varphi)$ по углу χ , и пусть

$$\mathbf{V}_2^a = \mathbf{V}_2 - \mathbf{V}_2^s \quad (6.90)$$

есть поле, среднее от которого по χ равно нулю. Соответствующее решение уравнения (6.89) можно обозначить как $\mathbf{V}_1^a + \mathbf{V}_1^s$. Мы знаем (см. разд. 3.10), что если магнитное число Рейнольдса R_m , вычисленное с использованием a и подходящим образом усредненной скорости

v (τ) [см. ниже (6.105)], велико, то влияние движения \mathbf{u}_1 с замкнутыми линиями тока сводится просто к выталкиванию асимметричного магнитного поля из вращающейся области, т.е.

$$\mathbf{V}_1^a + \mathbf{V}_2^a \approx 0 \quad \text{в области } \mathcal{J}_1. \quad (6.91)$$

С другой стороны, движение \mathbf{u}_1 с помощью механизма дифференциального вращения генерирует из \mathbf{V}_2^s (разд. 3.7) поле \mathbf{V}_1^s ; при этом

$$|\mathbf{V}_1^s| = O(R_m) |\mathbf{V}_2^s|. \quad (6.92)$$

Ясно, что для $R_m \gg 1$ это поле вносит основной вклад в \mathbf{V}_1 , и поэтому при вычислении \mathbf{V}_1 из (6.89) мы можем считать поле \mathbf{V}_2 в окрестности тора \mathcal{J}_1 симметричным относительно χ .

Предположим далее, что в области \mathcal{J}_1

$$B_{2\varphi} = B_0 e^{im\varphi}. \quad (6.93)$$

Тогда из условия $\text{div } \mathbf{V}_2 = 0$ следует, что в этой области

$$B_{2\varphi} = -(i\tau m / 2c) B_0 e^{im\varphi}, \quad (6.94)$$

и поэтому

$$\mathbf{u}_1 \times \mathbf{V}_2 = B_0 v_1 e^{im\varphi} (i_\tau + (im\tau/2c) i_\varphi) \quad \text{в } \mathcal{J}_1, \quad (6.95)$$

а также

$$\mathbf{g} \equiv \text{rot}(\mathbf{u}_1 \times \mathbf{V}_2) = -\frac{imB_0 e^{im\varphi}}{2c} \tau^2 \frac{d}{d\tau} \left(\frac{v}{\tau} \right) i_\chi \quad \text{в } \mathcal{J}_1. \quad (6.96)$$

Как и ожидалось, дифференциальное вращение, связанное с движением \mathbf{u}_1 в торе \mathcal{J}_1 , генерирует χ -компоненту поля. Отсюда следует, что $\mathbf{u}_1 \times \mathbf{V}_1 = 0$, и поэтому решение уравнения Пуассона (6.89) имеет вид

$$\mathbf{V}_1(\mathbf{x}') = \frac{1}{4\pi\lambda} \int_{\mathcal{J}_1} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x})}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|} dV. \quad (6.97)$$

Далее, чтобы узнать, может ли \mathbf{V}_1 быть индуцирующим полем для \mathcal{J}_2 , мы должны вычислить φ -компоненту этого интеграла по искривленной оси тора \mathcal{J}_2 . Пусть \mathbf{x}_0 — точка на оси тора \mathcal{J}_1 с цилиндрическими координатами $(0, c, \varphi)$, \mathbf{x}'_0 — точка на оси тора \mathcal{J}_2 с координатами (z_0, c, φ') , и пусть $\psi = \varphi' - \varphi$. Тогда

$$|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0| = [z_0^2 + 2c^2(1 - \cos\psi)]^{1/2}, \quad (6.98)$$

и для $\mathbf{x} \in \mathcal{J}_1$

$$|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|^{-1} = |\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0|^{-1} \left(1 - \frac{\tau i_\tau \cdot (\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0)}{|\mathbf{x}_0 - \mathbf{x}'_0|^3} + O(\tau^3) \right) \quad (6.99)$$

Кроме того,

$$\mathbf{i}_{\varphi'} \cdot \mathbf{i}_{\chi} = -\sin \chi \cdot \sin \psi \quad (6.100)$$

Если выражения (6.99) и (6.100) подставить в уравнение

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}'_0) \cdot \mathbf{i}_{\varphi'} = \frac{1}{4\pi\lambda} \int_{\mathcal{J}_1} \frac{\mathbf{g}(\mathbf{x}) \cdot \mathbf{i}_{\varphi'}}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'_0|} c \tau d\tau d\chi d\varphi, \quad (6.101)$$

то при интегрировании по χ ненулевой вклад дает только член, пропорциональный $\sin^2 \chi$. Результат упрощается, если воспользоваться равенством (6.96)

$$\mathbf{B}_1(\mathbf{x}'_0) \cdot \mathbf{i}_{\varphi'} = B'_0 e^{im\varphi'}, \quad (6.102a)$$

где

$$B'_0 = B_0 \left(\frac{a}{c}\right)^2 \frac{V_1 a}{\lambda} F_m \left(\frac{z_0}{c}\right), \quad V_1 a^3 = \int_0^a \tau^2 v_1(\tau) d\tau \quad (6.102b)$$

и

$$F_m(q) = \frac{1}{2} m q \int_0^{2\pi} \frac{\sin \psi \sin m\psi d\psi}{(q^2 + 2 - 2 \cos \psi)^3} \quad (> 0 \text{ для } q > 0). \quad (6.103)$$

Аналогично, анализируя индуктивное влияние движения в торе \mathcal{J}_2 , мы получим

$$B_0 = -B'_0 \left(\frac{a}{c}\right)^2 \frac{V_2 a}{\lambda} F_m \left(\frac{z_0}{c}\right), \quad (6.104)$$

где V_2 определено так же, как V_1 , но для движения в торе \mathcal{J}_2 . Результаты (6.102a) и (6.104) совместимы только при условии, что V_1 и V_2 имеют противоположные знаки. Таким образом, суммарные циркуляции в двух тороидах [взвешенные в соответствии с равенством (6.102b)] должны иметь противоположные знаки. Определив

$$R_m = + (-V_1 V_2)^{1/2} a / \lambda, \quad (6.105)$$

мы получим условие существования стационарного динамо

$$R_m = \left(\frac{c}{a}\right)^2 T_m \left(\frac{z_0}{c}\right), \quad (6.106)$$

где $T_m = F_m^{-1}$. Если $m = 1$, то одно возможное соотношение $V_1 = -V_2 < 0$ соответствует конфигурации поля, изображенной на рис. 6.6, а, для которой существует стационарный дипольный момент, лежащий в плоскости $\varphi = 0$ и перпендикулярный оси z ; другое возможное соотношение $V_1 = -V_2 > 0$ соответствует конфигурации поля, представленной

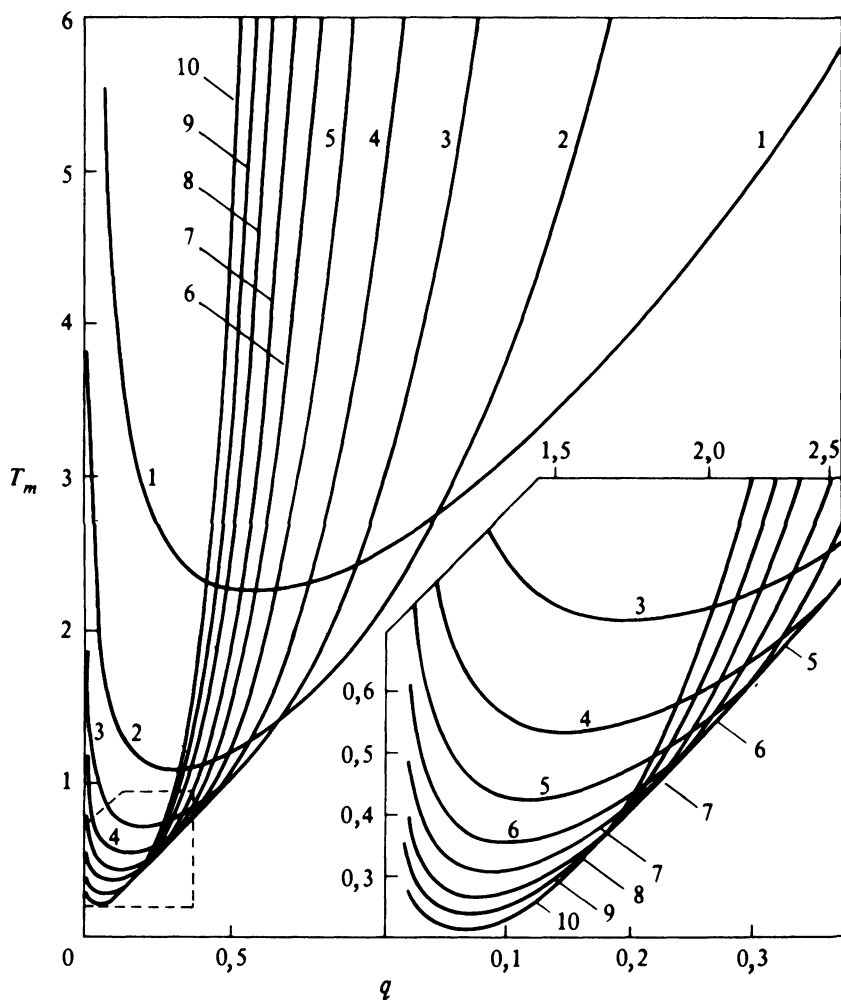


Рис. 6.7.

Функции $T_m(q) = (F_m(q))^{-1}$, рассчитанные по формуле (6.103). Числа на кривых указывают значение m . Часть рисунка, обведенная пунктирной линией, дана в четырехкратном увеличении [76].

на рис. 6.6, б, дипольный момент которой, очевидно, равен нулю, а поле вдали совпадает с полем квадруполья.

Функции $T_m(q)$, вычисленные Гайлитисом для $m = 1, 2, \dots, 10$, воспроизведены на рис. 6.7. Для $z_0/c > 1,16$ наименьшее $T_m(z_0/c)$ (соответствующее наиболее легко возбуждаемой моде магнитного поля) отвечает $m = 1$. С уменьшением z_0/c величина m , соответствующая

наиболее легко возбуждаемой моде, увеличивается. С физической точки зрения это возможно, когда кольца приближаются друг к другу и каждое становится более чувствительным к детальной структуре поля в другом кольце. Разумеется, подобное рассмотрение не годится, когда z_0 уменьшается до величины a .

Проведенный выше анализ является приближенным, поскольку мы везде пренебрегали членами порядка a/c и a/z_0 . Чтобы получить строгое доказательство возможности динамо, необходимо построить точный формальный метод разложения по этим параметрам и получить точные верхние пределы величины отброшенных Гайлитисом членов. Однако не приходится сомневаться в том, что такой метод (подобный методу, развитому Герценбергом) подтвердит справедливость представленного выше анализа, выполненного в "нулевом приближении".

Можно думать, что динамо Гайлитиса ближе к физической реальности, чем динамо Герценберга, поскольку хорошо известно, что в отличие от сферических роторов вихревые кольца в почти невязких жидкостях представляют собой динамически реализуемое явление. Возможно, в этом есть некоторая доля истины; однако следует признать, что поле скорости $\mathbf{u}_1(\mathbf{x})$, описываемое выражением (6.87), не похоже на реальный кольцевой вихрь, в котором поток вихря по \mathcal{J}_1 (включающий возможный поверхностный вклад) равен нулю, а если бы он не был равен нулю (как в реальном вихревом кольце), то к вихрю с необходимостью добавилось бы безвихревое течение вне \mathcal{J}_1 . Два реальных вихря, ориентированных так, как это показано на рис. 6.6, были бы разделены и сжаты этим безвихревым течением (случай *a*) или приблизились бы друг к другу и расширились (случай *b*). О поддержании *стационарного* магнитного поля нестационарным движением какого-либо вида не может быть и речи.

6.11. Формализм Булларда – Геплмана

Предположим теперь, V представляет собой сферу $r < R$, а $\mathbf{u}(\mathbf{x})$ – заданное стационарное соленоидальное поле скорости, удовлетворяющее на поверхности сферы $r = R$ соотношению $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$. Удобно использовать в качестве единицы длины R , в качестве единицы скорости ¹⁾ $u_m = \max |\mathbf{u}|$, в качестве единицы времени R^2/λ и определить $R_m = u_m R/\lambda$. Тогда задача (6.4) записывается в безразмерной форме:

$$\begin{aligned} \partial \mathbf{V} / \partial t &= R_m \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{V}) + \Delta \mathbf{V} & \text{для } r < 1, \\ \operatorname{rot} \mathbf{V} &= 0 & \text{для } r > 1, \\ [\mathbf{V}] &= 0 & \text{на } r = 1, \end{aligned} \quad (6.107)$$

¹⁾ Разные авторы используют различные единицы, поэтому при детальных сравнениях необходима осторожность.

Как и в разд. 2.7, допустимы решения вида

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) e^{p t}, \quad (6.108)$$

где

$$\begin{aligned} (p - \Delta)\mathbf{V} &= R_m \operatorname{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{V}) && \text{для } r < 1, \\ \operatorname{rot} \mathbf{V} &= 0 && \text{для } r > 1, \\ [\mathbf{V}] &= 0 && \text{на } r = 1. \end{aligned} \quad (6.109)$$

Эту систему можно рассматривать как задачу на собственные значения параметра p , причем собственные значения p_1, p_2, \dots являются функциями R_m (а также, конечно, зависят от структурных свойств поля \mathbf{u}). Если $R_m = 0$, то p_α совпадают с собственными значениями свободно затухающих мод (разд. 2.7), которые все действительны и отрицательны. Если R_m начинает возрастать от нуля (при заданном поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$), то можно ожидать, что каждое из собственных значений должно изменяться непрерывным образом и может стать комплексным. Если $\operatorname{Re} p_\alpha$ становится положительной для некоторого конечного значения R_m , то соответствующее поле $\mathbf{V}^{(\alpha)}(\mathbf{x})$ начинает экспоненциально нарастать (6.108), т.е. мы имеем динамо. Если все $\operatorname{Re} p_\alpha$ остаются отрицательными (как будет, например, для чисто тороидального поля скорости), то динамо невозможно для любого значения R_m .

Естественный способ решения задачи (6.109) представляет собой непосредственное обобщение метода, развитого в разд. 2.7 (при $R_m = 0$). Пусть P и T — определяющие скаляры полей \mathbf{V}_P и \mathbf{V}_T , и пусть

$$P(r, \theta, \varphi) = \sum_{n, m} (P_n^m(r) \cos m\varphi + P_n^m(r) \sin m\varphi) P_n^m(\cos \theta). \quad (6.110)$$

Аналогичное разложение справедливо и для T . Тогда, как и в разд. 2.7, условия при $r \geq 1$ можно заменить следующими граничными условиями:

$$T_n^m(r) = 0, \quad \partial P_n^m / \partial r + (n+1) P_n^m = 0 \quad \text{на } r = 1, \quad (6.111)$$

где $T_n^m(r)$ означает $T_n^{m c}(r)$ или $T_n^{m s}(r)$; такой же смысл имеет и $P_n^m(r)$. Уравнения для $T_n^m(r)$ и $P_n^m(r)$ в области $r < 1$ принимают вид

$$\left(p - \frac{1}{r^2} \frac{d}{dr} r^2 \frac{d}{dr} + \frac{n(n+1)}{r^2} \right) \begin{Bmatrix} T_n^{m s/c} \\ P_n^{m s/c} \end{Bmatrix} = R_m \begin{Bmatrix} I_n^{m s/c} \\ J_n^{m s/c} \end{Bmatrix}, \quad (6.112)$$

где $I_n^m(r), J_n^m(r)$ — члены, которые появляются благодаря взаимодействию полей \mathbf{u} и \mathbf{V} . Определение этих членов требует детализации

поля скорости и обычно является довольно сложным делом. Однако ясно, что в силу линейности (по \mathbf{V}) уравнения индукции каждый из членов I_n^m , J_n^m (для заданного \mathbf{u}) может быть записан как сумма членов, линейных по T_n^m , P_n^m ; причем диапазон изменения величин m , n зависит от конкретного выбора \mathbf{u} . Тем самым мы получаем в общем случае бесконечный набор связанных между собой обыкновенных линейных дифференциальных уравнений второго порядка для функций T_n^m и P_n^m .

С чисто аналитической точки зрения здесь мало что остается делать, и для дальнейшего успеха нужно обратиться к численным методам. Численная задача также весьма сложна. В обычно используемом методе рассматривают укороченную систему (6.112), в которой пренебрегают всеми гармониками с $n > N$, где N – некоторое фиксированное целое число (число m , разумеется, заключено в интервале $0 \leq m \leq n$). Затем область $0 < r < 1$ делят на M сегментов и радиальные производные заменяют конечными разностями¹⁾. Тогда определение p сводится к численному поиску корней дискриминанта получающегося набора линейных алгебраических уравнений. Главный интерес представляет значение p_1 , имеющее наибольшую действительную часть. Это значение зависит от N и M , и метод можно считать правильным только тогда, когда N и M достаточно велики и дальнейшее их увеличение не изменяет существенно p_1 . Действительно [86], более чувствительной к изменению N и M по сравнению с собственным значением p_1 оказывается собственная функция $\mathbf{V}^{(1)}(\mathbf{x})$, и более убедительный критерий сходимости метода должен заключаться в требовании, чтобы при увеличении N и M можно было пренебречь изменениями собственной функции.

Поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x})$, как и \mathbf{V} , выражают в виде суммы полоидальной и тороидальной компонент, каждую из которых можно разложить в ряд по сферическим гармоникам. Для детального исследования Буллард и Геллман [39] выбрали движение вида

$$\mathbf{u} = \epsilon \operatorname{rot}(\chi Q_T(r) P_1(\cos \theta)) + \operatorname{rot} \operatorname{rot}(\chi Q_P(r) P_2^2(\cos \theta) \cos 2\varphi), \quad (6.113)$$

где Q_P и Q_T – простые функции вида, например

$$Q_P \propto r^3(1-r)^2, \quad Q_T \propto r^2(1-r). \quad (6.114)$$

¹⁾ Имеются и другие возможности, например функции от r можно разложить в ряды по сферическим функциям Бесселя (свободно затухающие моды), сохранив m членов, как это предложил Эльзассер [71]. Такой метод был применен в работе [167].

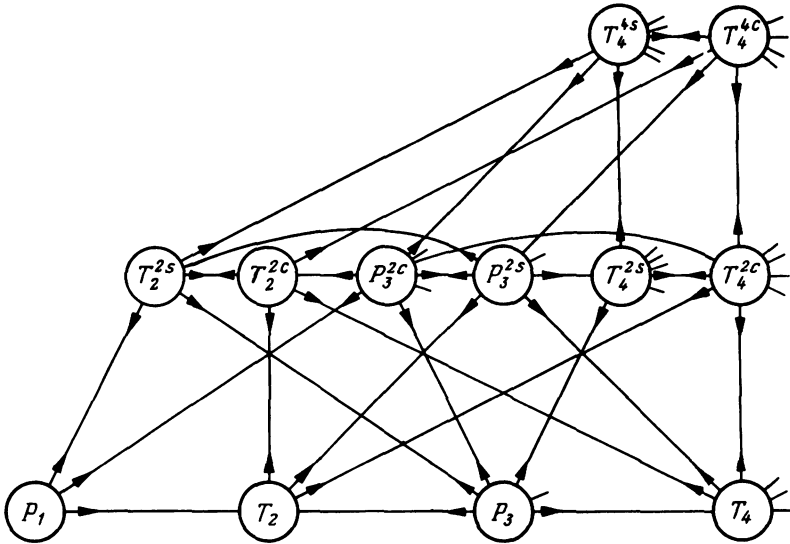


Рис. 6.8.

Схематическое представление взаимодействия гармоник скорости и магнитного поля для случая, когда поле скорости имеет составляющие T_1 и P_2^{2c} . Каждый кружок показывает возбужденную магнитную моду. Связь вдоль рядов обеспечивается T_1 -движением, а связь между рядами – P_2^{2c} -движением [39].

Для удобства мы можем использовать вместо (6.113) сокращенное обозначение $\mathbf{u} = \{\epsilon T_1 + P_2^{2c}\}$. Характер взаимодействия полей \mathbf{u} и \mathbf{B} для этого движения ясен из рис. 6.8, на котором кружки изображают возбужденные магнитные моды. T_1 -движение устанавливает связь вдоль рядов: например взаимодействие T_1 -движения с P_1 -полем генерирует T_2 -поле (точно так же, как дифференциальное вращение генерирует тороидальное поле, разд. 3.11). Аналогично P_2^{2c} -движение устанавливает связь между рядами: например, взаимодействие P_2^{2c} -движения с P_1 -полем генерирует $\{T_2^{2s} + P_3^{2c}\}$ -поле. Гармоники с $n \geq 5$ не учитываются, но даже в таком простом приближении сложность взаимодействия впечатляет! Конкретная форма диаграммы взаимодействия полностью определяется выбором \mathbf{u} : каждому возможному полю скорости \mathbf{u} соответствует одна и только одна такая диаграмма.

Как показали Гибсон и Робертс [79], в действительности поле скорости Булларда – Геллмана (6.113) не может дать динамо, поскольку для него описанный выше метод не сходится при увеличении M . Подобное же отсутствие сходимости было продемонстрировано [86]

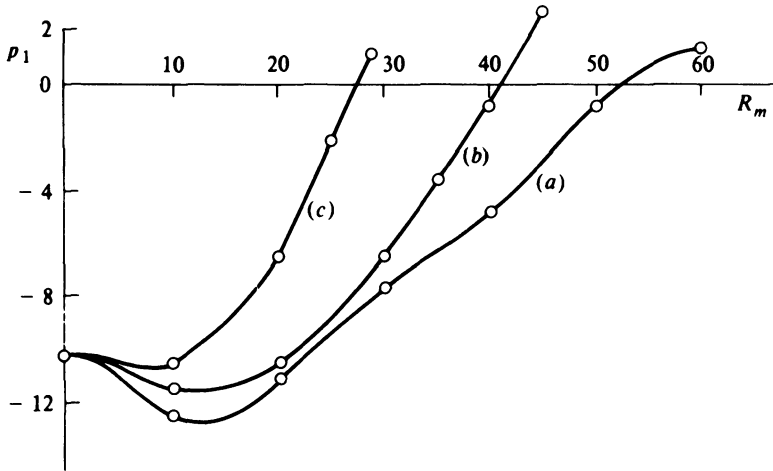


Рис. 6.9.

Зависимость скорости роста p_1 от R_m для движения вида $T_n + \epsilon P_n$; (a) $n = 2$, $\epsilon = 1/10$; (b) $n = 4$, $\epsilon = 1/30$; (c) $n = 6$, $\epsilon = 1/30$ (кривые взяты из работы [86]). Можно показать (Габбинс, частное сообщение), что $dp_1/dR_m = 0$ при $R_m = 0$.

и в отношении более сложного движения $\{T_1 + P_2^{2c} + P_2^{2s}\}$, представленного в работе [126] в качестве модели динамо. Однако для осесимметричных полей скорости вида $\epsilon P_n + T_n$ с $n = 6, 4, 2$ и соответственно $\epsilon = 1/30, 1/30, 1/10$ были получены положительные результаты [86]. Такое движение в силу теоремы Каулинга не может поддерживать поле, осесимметричное относительно той же оси, но может, понятно, поддерживать неосесимметричное поле (ср. обсуждавшееся в разд. 6.9 динамо Гайлитиса). Зависимость R_m от p_1 , численно найденная в работе [86] для трех случаев, приведена на рис. 6.9. В каждом случае p_1 остается действительным при увеличении R_m и изменяет знак при $R_m = R_{mc}$ ($R_{mc} = 27, 41, 53$ для этих трех случаев). Следует отметить, что во всех трех случаях, прежде чем начать расти, p_1 сначала уменьшается с ростом R_m (что говорит об ускорении процесса затухания поля). Причина такого поведения p_1 пока не ясна.

Положительные результаты получены также в работе [167], где изучалось кинематическое динамо, связанное с полями скорости, удовлетворяющими условию "максимальной спиральности" $\text{rot } \mathbf{u} = k\mathbf{u}$ в сфере $r < 1$. Такие движения интересны, поскольку их можно выбрать таким образом, чтобы они удовлетворяли уравнениям механики невязкой несжимаемой жидкости (уравнениям Эйлера) и условию $\mathbf{u} \cdot \mathbf{n} = 0$ на $r = 1$ [141, 166]. В таком случае определяющие скаляры как для полой, так и для тороидальной составляющих поля скорости пропор-

циональны $r^{\frac{1}{2}} J_{n+\frac{1}{2}}(kr) S_n(\theta, \varphi)$, где k удовлетворяет равенству $J_{n+\frac{1}{2}}(k) = 0$ (см. табл. 2.1). Конкретно был исследован случай $n = 2$ [166] при $S_n(\theta, \varphi) \propto \sin^2 \theta \cos 2\varphi$ и было показано, что для каждого $k = x_{2q}$ ($q = 1, 2, \dots, 20$; обозначения см. в табл. 2.1) существует динамо. Соответствующие магнитные числа Рейнольдса R_m уменьшаются с ростом q (т.е. с увеличением радиального масштаба поля скорости) от 99,2 (при $q = 1$) до 26,9 при $q = 6$ и 26,4 при $q = 20$. Значения M и N , которые использовались в численном расчете, были равны $N = 10$, $M = 100$.

Результаты работы [166] получили независимое подтверждение в работе [117], где также изучалась численно сходимость собственных значений и собственных функций для ряда движений вида $\{T_1 + \epsilon_1 P_2 + \epsilon_2 P_2^{2c} + \epsilon_3 P_2^{2s}\}$. Плотность спиральности $\mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u}$ для таких движений антисимметрична относительно экваториальной плоскости (в отличие от случая движений, исследованных в работе [166]), и в этом смысле они имеют большее отношение к геофизике¹⁾, см. ниже обсуждение в разд. 9.5.

6.12. Динамо Бэкаса с "выключением" поля скорости

Как отмечалось выше, обычно трудно обосновать корректность отбрасывания высоких сферических гармоник в разложении \mathbf{V} , а в результате такого отбрасывания можно прийти к ошибочным выводам. Однако имеется два случая, когда обрезание ряда (того или иного вида) *может быть* строго обосновано. Первый — это роторное динамо Герценберга, рассмотренное в разд. 6.9, в котором радиус каждого ротора мал по сравнению с расстоянием между ними. В этом случае пространственное ослабление высоких гармоник поля, индуцированного каждым ротором, позволяет наложить строгий верхний предел на влияние этих высоких гармоник и, следовательно, получить строгое обоснование процесса (без должного соблюдения строгости доказательства!), описанного в разд. 6.9.

Второй пример, в котором, не нарушая математической строгости, можно опустить "нежелательные" высокие гармоники, был сформулирован Бэкасом [15] и связан с рассмотрением не пространственного, а временного ослабления высоких гармоник. Из теории свободно затухающих мод известно, что если $\mathbf{u} \equiv 0$, то более высокие гармоники

¹⁾ См. работу [40], где вычислены собственные значения и собственные функции для других полей скорости, обладающих осевой симметрией и похожих на поле скорости, которое поддерживает тепловую конвекцию во вращающейся сфере [222]. Магнитные поля, которые поддерживаются этими движениями, разумеется, неосесимметричны.

(которые в обозначениях разд. 2,7 соответствуют большим значениям n и q) затухают быстрее первых гармоник и что основная гармоника (которая соответствует нижайшим из имеющихся значений n и q) существует дольше остальных гармоник и в конце полного периода свободного затухания станет преобладающей. Предположим в таком случае, что в некоторый начальный момент времени мы имеем полоидальное поле $\mathbf{V}_{P_{11}}$, где индекс 11 указывает, что присутствует только основная ("дипольная") гармоника $n = q = 1$. Пусть это поле подвергается влиянию поля скорости (введенного и обоснованного скорее из математической целесообразности, чем физической реализуемости), зависимость которого от времени имеет вид: 1) короткий период интенсивного дифференциального вращения \mathbf{u}_T , генерирующего сильное тороидальное магнитное поле механизмом, изученным в разд. 3.11; 2) период "выключения" ($\mathbf{u} \equiv 0$), в течение которого все гармоники, за исключением основной гармоники тороидального поля $\mathbf{V}_{T_{11}}$, затухнут; 3) короткий период интенсивного неосесимметричного полоидального движения \mathbf{u}_P , генерирующего полоидальное поле $\mathbf{V}_P^{\#}$ из \mathbf{V}_T с помощью механизма, описанного (по крайней мере частично) формулой (6.39); 4) второй период "выключения", в течение которого затухнут все гар-

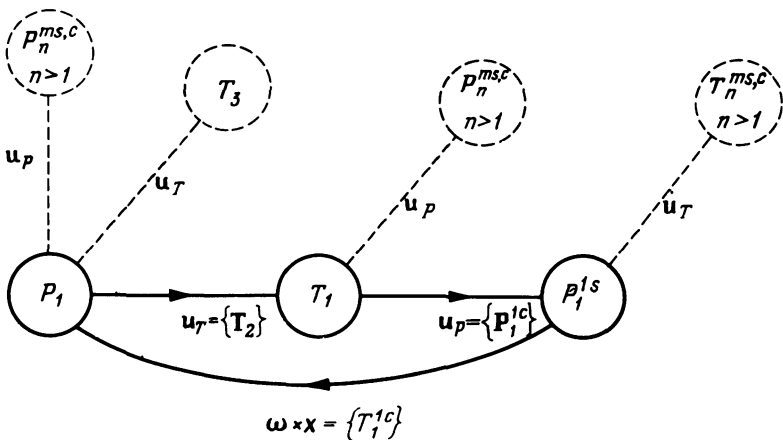


Рис. 6.10.

Диаграмма взаимодействия для динамо Бэкаса [15]. Рассматривалось движение вида $\mathbf{u} = \{T_2 + P_1^c + T_1^c\}$ (обозначения см. в разд. 6.11) с периодом выключения между отдельными фазами действия этих трех составляющих. Пунктирными линиями и кружками показаны возбуждения, относительно быстро затухающие в периоды выключения. Составляющие поля, обозначенные буквами P_1 , T_1 и P_1^s дают основной вклад в замкнутый динамо-цикл.

моники \mathbf{V}_P , кроме фундаментальной \mathbf{V}_{P11}^* ; 5) быстрое твердотельное вращение $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$, ориентирующее \mathbf{V}_{P11}^* (плюс то, что остается от \mathbf{V}_{P11}) вдоль первоначального направления \mathbf{V}_{P11} . При подходящем выборе \mathbf{u}_T , \mathbf{u}_P , $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$ и продолжительностей t_1, t_2, \dots, t_5 фаз (1–5) можно добиться, что поле (геометрия которого изменяется сколь угодно мало) будет усиливаться. Диаграмма взаимодействия, соответствующая конкретным полям скорости \mathbf{u}_T , \mathbf{u}_P и $\boldsymbol{\omega} \times \mathbf{x}$, выбранным в работе [15] и реализующим описанную схему генерации, показана на рис. 6.10, на котором бесконечно малые (и слабые) высокие гармоники, относительно подавленные в периоды "выключения", обозначены пунктирными линиями.

Динамо Бэкаса, как и динамо Герценберга, не претендует на динамическую (в противоположность чисто кинематической) реализуемость. Искусственно (с чисто динамической точки зрения) поддерживаемый интерес к моделям динамо, включающим в себя пространственное или временное затухание (прототипами этих моделей служат модели Герценберга и Бэкаса), связано с желанием, используя какой-нибудь метод, строго доказать существование полей скорости, способных дать динамо в том смысле, как это определено в разд. 6.1. В этом отношении примеры Герценберга и Бэкаса благодаря положительным результатам являются краеугольным камнем теории динамо и могут служить как тестом, так и основой для дальнейших исследований, в которых изучение математических моделей должно с необходимостью уступить дорогу насущным требованиям физической реальности.

**СРЕДНЯЯ
ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА,
ГЕНЕРИРУЕМАЯ
СЛУЧАЙНЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ**

7.1. Турбулентность и случайные волны

До сих пор мы считали поле скорости $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ известной функцией координат и времени¹⁾. В этой главе мы рассмотрим случай более интересный для солнечной физики и геофизики, когда $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ включает в себя случайную составляющую, статистические (т.е. средние) свойства которой предполагаются известными; однако детальные (не усредненные) свойства слишком сложны, чтобы их можно было описать аналитически или определить из наблюдений. Такое поле скоростей генерирует случайные возмущения электрического тока и магнитного поля, и наша цель определить, как ведут себя во времени статистические свойства магнитного поля (и, в частности, его локальное среднее значение), исходя из "заданных" статистических характеристик \mathbf{U} -поля.

Случайное поле скорости может представлять собой турбулентное поле скорости в обычном понимании этого термина или состоять из случайных суперпозиций взаимодействующих волновых движений. Легко понять, чем различаются эти движения, на примере температурно-стратифицированной среды. Если стратификация неустойчива (например, температура резко падает с высотой), то в результате возникнет тепловая конвекция, причем суммарный перенос тепла вверх будет в основном осуществляться турбулентными движениями. Если стратификация устойчива (т.е. если температура с высотой возрастает или падает со скоростью, меньшей адиабатической), то турбулентность не возникает; однако в среде или на ее границах могут существовать внутренние гравитационные волны, скорости которых могут превышать другие имеющиеся случайные скорости. Например, если внешнее ядро Земли устойчиво стратифицировано (как это утверждается в работе [98], см. разд. 4.4), то случайные инерционные вол-

¹⁾ Начиная с этого момента мы будем обозначать полное поле скоростей буквой \mathbf{U} , сохранив обозначение \mathbf{u} для случайной компоненты скорости.

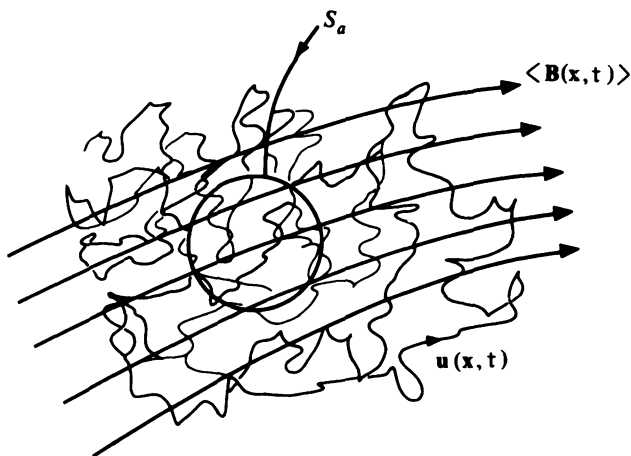


Рис. 7.1.

Схематическое изображение случайного поля скорости $u(x, t)$, изменяющегося в малом масштабе l_0 , и усредненного магнитного поля, изменяющегося в большом масштабе L . Усреднение проводится по сфере S_a с радиусом a , определяемым неравенством $l_0 \ll a \ll L$.

ны могут быть возбуждены при осаждении на поверхность раздела ядро — мантия освобождающегося вещества мантии, обогащенного железом, или благодаря всплыванию легких соединений (обогащенных кремнием или серой), освобождающихся при химическом разделении на поверхности раздела внутреннего и внешнего ядер, или, возможно, благодаря сдвиговой неустойчивости в пограничных и сдвиговых слоях, образующихся в результате медленной прецессии вектора угловой скорости Земли. В таких процессах могут возникать радиальные возмущения скорости, амплитуды которых ограничены стабилизирующим влиянием сил плавучести. Поле скорости в таком случае будет подобно скорее искусственно созданному полю слабо взаимодействующих внутренних волн, чем сильной нелинейной турбулентности "обычного" типа.

В этой главе мы всюду будем предполагать, что случайная составляющая движения обладает характеристической длиной l_0 , которая мала по сравнению с "глобальным" масштабом L изменения усредненных величин (рис. 7.1). Обычно масштаб L будет по порядку величины совпадать с линейным размером области, занимаемой проводящей средой, например $L = O(R)$, если жидкость заключена в сфере радиуса R .

В случае турбулентности l_0 может совпадать с масштабом энергосодержащих вихрей (см., например, [20]). Аналогично, для случайных волн l_0 можно отождествить по порядку величины с длиной волны, характеризующей избранную группу волн с максимальной энергией. В любом промежуточном масштабе a , удовлетворяющем неравенствам

$$l_0 \ll a \ll L, \quad (7.1)$$

можно полагать, что глобальные переменные (например, средняя скорость и среднее магнитное поле) почти однородны. Термин "средний", для обозначения которого будут использоваться угловые скобки, здесь уместно определить как усреднение по сфере промежуточного радиуса a , т.е. для любой функции $\psi(\mathbf{x}, t)$:

$$\langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle_a = \frac{3}{4\pi a^3} \int_{|\boldsymbol{\xi}| < a} \psi(\mathbf{x} + \boldsymbol{\xi}, t) d^3 \boldsymbol{\xi}, \quad (7.2)$$

в предположении, что это усреднение не чувствительно к точному значению a , ограниченному лишь неравенствами (7.1). В масштабе a статистические (т.е. средние) свойства \mathbf{U} -поля изменяются слабо, поэтому для расчетов в таких промежуточных масштабах можно применять методы теории однородной турбулентности [20].

При определении средних величин мы могли с равным правом воспользоваться не пространственными масштабами, а временными промежутками. Если T — характерное время изменения глобальных полей, а t_0 — время, характеризующее флуктуирующую часть \mathbf{U} -поля, то мы должны, будучи последовательными, потребовать, чтобы T было велико по сравнению с t_0 . Если же в результате анализа какой-либо конкретной задачи обнаружится, что T и t_0 сравнимы, то общий подход (в применении к данному случаю) следует считать сомнительным. При $T \gg t_0$ для любого промежутка времени τ , удовлетворяющего неравенству

$$t_0 \ll \tau \ll T, \quad (7.3)$$

мы можем определить среднее

$$\langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle_\tau = \frac{1}{2\tau} \int_{-t}^t \psi(\mathbf{x}, t + \tau') d\tau', \quad (7.4)$$

предполагая, как и прежде, что это определение не чувствительно к выбору τ . Мы будем использовать $\langle \psi(\mathbf{x}, t) \rangle$ без индекса a или τ для обозначения среднего (7.2) или (7.4). С чисто математической точки зрения оба эти определения можно отождествить с усреднением по "ансамблю" (в асимптотических пределах $l_0/L \rightarrow 0$ и $t_0/T \rightarrow 0$ соответственно).

Определив таким образом среднее, мы можем выделить у поля скорости и магнитного поля средние и флуктуационные составляющие

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{U}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{u}(\mathbf{x}, t), \quad \langle \mathbf{u} \rangle = 0, \quad (7.5)$$

$$\mathbf{V}(\mathbf{x}, t) = \mathbf{V}_0(\mathbf{x}, t) + \mathbf{b}(\mathbf{x}, t), \quad \langle \mathbf{b} \rangle = 0. \quad (7.6)$$

Уравнение индукции (4.10) также можно разделить на уравнения для среднего и для флуктуационного полей:

$$\partial \mathbf{V}_0 / \partial t = \text{rot}(\mathbf{U}_0 \times \mathbf{V}_0) + \text{rot} \mathcal{E} + \lambda \Delta \mathbf{V}_0, \quad (7.7)$$

$$\partial \mathbf{b} / \partial t = \text{rot}(\mathbf{U}_0 \times \mathbf{b}) + \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{V}_0) + \text{rot} \mathbf{G} + \lambda \Delta \mathbf{b}, \quad (7.8)$$

где

$$\mathcal{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle, \quad \mathbf{G} = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle. \quad (7.9)$$

Отметим далее, что в уравнении (7.7) появился член, определяемый произведением случайных флуктуаций. Главную роль в теории играет средняя электродвижущая сила \mathcal{E} . Ясно, что наша цель — выразить \mathcal{E} как функцию средних полей \mathbf{U}_0 и \mathbf{V}_0 таким образом, что, задавшись полем \mathbf{U}_0 , можно было решить уравнение (7.7).

Разумеется, идея усреднения уравнений, содержащих случайные флуктуации, хорошо известна из обычной теории турбулентности: усреднение уравнений Навье — Стокса также приводит к появлению важного квадратичного среднего $-\langle u_i u_j \rangle$ (тензор напряжений Рейнольдса), который в данном случае аналогичен члену $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$. Не существует пока удовлетворительной теории турбулентности, в которой удалось бы выразить тензор напряжений $\langle u_i u_j \rangle$ через среднее поле \mathbf{U}_0 . А вот достаточно удовлетворительная теория определения \mathcal{E} в настоящее время *имеется*. Причина такого сравнительного успеха связана с линейностью (по \mathbf{V}) уравнения индукции. Аналог этой линейности в динамике турбулентности отсутствует.

Двухмасштабный подход к уравнению индукции был впервые введен Штейнбеком, Краузе и Рёдлером [202], и многие идеи, представленные в настоящей главе, уходят корнями в эту первую работу или серию последующих статей тех же авторов, первоначально опубликованных на немецком языке, а затем переведенных на английский [191].

7.2. Зависимость \mathcal{E} от \mathbf{V}_0 в линейном приближении

Член $\text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{V}_0)$ в уравнении (7.8) играет роль источника, генерирующего флуктуационное поле \mathbf{b} . Если мы предположим, что $\mathbf{b} = 0$ в некоторый начальный момент времени $t = 0$, то линейность уравнения (7.8) гарантирует линейную связь между полями \mathbf{b} и \mathbf{V}_0 . Отсюда

следует, что поля $\mathcal{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$ и \mathbf{V}_0 также связаны линейно, а поскольку, согласно нашему предположению, пространственный масштаб \mathbf{V}_0 велик [по сравнению с масштабом, фигурирующим в детальном решении уравнения (7.8)], то разумно ожидать, что правую часть этого соотношения можно разложить в быстро сходящиеся ряды вида ¹⁾

$$\mathcal{E}_i = \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} \frac{\partial B_{0j}}{\partial x_k} + \gamma_{ijkl} \frac{\partial^2 B_{0j}}{\partial x_k \partial x_l} + \dots, \quad (7.10)$$

где коэффициенты α_{ij} , β_{ijk} , ... являются псевдотензорами (так как \mathcal{E} — полярный, а \mathbf{V}_0 — аксиальный векторы). Поскольку решение $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$ зависит от \mathbf{U}_0 , \mathbf{u} и λ , то, очевидно, можно ожидать, что псевдотензоры α_{ij} , β_{ijk} , ... зависят, а фактически полностью определяются 1) средним полем скорости \mathbf{U}_0 , 2) статистическими свойствами случайного поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и 3) величиной параметра λ . В общем случае эти псевдотензоры могут изменяться на "макродлине" L , однако в пределе $L/l_0 \rightarrow \infty$, когда \mathbf{U}_0 становится постоянной, а поле \mathbf{u} приобретает статистически строго однородные свойства, псевдотензоры α_{ij} , β_{ijk} , ... , которые определяют "статистические свойства \mathbf{u} -псля", также будут строго постоянными.

Если \mathbf{U}_0 постоянно, то естественно выбрать систему координат, движущуюся со скоростью \mathbf{U}_0 , и заново определить $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ как случайную скорость в этой системе координат. При таком условии уравнение (7.7) принимает вид

$$\frac{\partial B_{0i}}{\partial t} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_{kl} B_{0l} + \beta_{klm} \frac{\partial B_{0l}}{\partial x_m} + \dots) + \lambda \Delta B_{0i}. \quad (7.11)$$

Непосредственно видно, что если \mathbf{V}_0 также однородно (и если \mathbf{u} статистически однородно, так что α_{kl} , β_{klm} , ... постоянны), то $\partial \mathbf{V}_0 / \partial t = 0$, т.е. если характеристическая длина для \mathbf{V}_0 бесконечна, то бесконечно и характерное время роста поля. Следовательно, можно ожидать, что при $L/l_0 \rightarrow \infty$ в общем случае и $T/t_0 \rightarrow \infty$ (обозначения см. в разд. 7.1), т.е. понятия пространственного и временного усреднения согласуются друг с другом.

Если \mathbf{V}_0 слегка неоднородно, то из (7.11) при $\alpha_{kl} \neq 0$, очевидно, что главным, по-видимому, является первый член в правой части уравнения (содержащий α_{kl}), поскольку он зависит от самых низших производных \mathbf{V}_0 . Потенциально важен также и второй член (содержащий β_{klm})

¹⁾ В выражении для \mathcal{E} могут появиться также члены, содержащие производные $\partial B_{0j} / \partial t$, $\partial^2 B_{0j} / \partial t^2$, Однако, используя уравнение (7.7), такие члены можно всегда заменить пространственными производными.

поскольку в него, как и в диффузионный член $\lambda \Delta \mathbf{V}_0$, входят вторые производные поля \mathbf{V}_0 . Однако последующими членами, указанными в (7.11) многоточием, следует пренебречь, поскольку ряд (7.10) для крупномасштабного поля \mathbf{V}_0 быстро сходится. В следующих двух разделах мы рассмотрим некоторые общие свойства α - и β -членов уравнения (7.11); в последующих разделах этой главы α_{ij} и β_{ijk} будут вычислены точно для некоторых предельных случаев.

7.3. α -эффект

Сосредоточим теперь внимание на главном члене ряда (7.10), а именно

$$\mathcal{E}_i^{(0)} = \alpha_{ij} B_{0j}. \quad (7.12)$$

Псевдотензор α_{ij} (который для статистически однородного \mathbf{u} -поля постоянен) может быть разложен на симметричную и антисимметричную части:

$$\alpha_{ij} = \alpha_{ij}^{(s)} - \epsilon_{ijk} a_k, \quad \text{где } a_k = -\frac{1}{2} \epsilon_{ijk} \alpha_{ij}, \quad (7.13)$$

и соответственно

$$\mathcal{E}_i^{(0)} = \alpha_{ij}^{(s)} B_{0j} + (\mathbf{a} \times \mathbf{V}_0)_i. \quad (7.14)$$

Ясно, что влияние антисимметричной части сводится просто к дополнительному вкладу \mathbf{a} (который, очевидно, является полярным вектором) в "эффективную" среднюю скорость, действующую на среднее магнитное поле. Если \mathbf{U}_0 — действительная средняя скорость, то $\mathbf{U}_0 + \mathbf{a}$ называется *эффективной средней скоростью* (если речь идет о поле \mathbf{V}_0).

Природу симметричной части $\alpha_{ij}^{(s)}$ наиболее просто понять в важном предельном случае, когда \mathbf{u} -поле не только статистически однородно, но и изотропно¹⁾. В этом случае, по определению, все статистические свойства \mathbf{u} -поля инвариантны относительно вращений (а также относительно переноса) системы отсчета; в частности, должен быть изотропным псевдотензор α_{ij} , т.е.

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad (7.15)$$

и при этом, разумеется, $\mathbf{a} = 0$.

¹⁾ Мы будем использовать термин "изотропный" в смысле "инвариантный относительно поворотов системы отсчета, но не обязательно инвариантный относительно отражений".

Параметр α является *псевдоскаляром* (ср. со средней спиральностью $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$) и, следовательно, должен изменять свой знак при любом преобразовании от правосторонней к левосторонней системе отсчета ("преобразование четности"). Очевидно, α как статистическая характеристика \mathbf{u} -поля может быть отличным от нуля только тогда, когда само \mathbf{u} -поле не является *статистически инвариантным* относительно такого преобразования. Простейшее преобразование такого рода — это отражение относительно начала координат $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$, и мы будем говорить, что \mathbf{u} -поле обладает *отражательной симметрией*, если все его статистические свойства инвариантны относительно этого преобразования¹⁾. В противном случае мы будем говорить, что \mathbf{u} -поле *не обладает отражательной симметрией*. Только в этом последнем случае α может быть отличным от нуля.

Комбинируя (7.12) и (7.15), получаем очень простое соотношение:

$$\mathcal{E}^{(0)} = \alpha \mathbf{V}_0. \quad (7.16)$$

Соответствующий вклад в среднюю плотность *тока* можно найти, воспользовавшись законом Ома (2.117):

$$\mathbf{J}^0 = \sigma \mathcal{E}^{(0)} = \sigma \alpha \mathbf{V}_0. \quad (7.17)$$

Возможность появления тока, параллельного локальному среднему полю \mathbf{V}_0 , находится в разительном противоречии с обычной картиной, когда индуцированный ток $\sigma \mathbf{u} \times \mathbf{V}$ перпендикулярен полю \mathbf{V} . Может показаться парадоксальным, что два поля \mathbf{V} и $\mathbf{u} \times \mathbf{V}$, которые везде перпендикулярны друг другу, тем не менее могут иметь усредненные части, которые не перпендикулярны (и могут быть даже параллельными друг другу). Чтобы уверенно продемонстрировать, что это на самом деле реальная возможность, необходимо получить точное выражение для параметра α и показать, что он действительно отличен от

¹⁾ Альтернативно можно выбрать преобразование четности вида $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$, $y' = y$, $z' = z$, описывающее зеркальное отражение в плоскости $x = 0$, и определить понятие "зеркальной симметрии" (этот термин часто используется в ряде статей). Однако здесь необходима осторожность, поскольку зеркальное отражение можно рассматривать как суперпозицию отражения относительно начала координат и последующего вращения; \mathbf{u} -поле, которое обладает отражательной симметрией, но анизотропно, не будет, вообще говоря, зеркально-симметричным, поскольку его статистические свойства будут инвариантны при отражениях относительно начала координат, но не инвариантны относительно последующего вращения.

нуля (разд. 7.8). Возникновение электродвижущей силы типа (7.16) названо Штейнбеком и Краузе [203] " α -эффектом". Несмотря на свою произвольность, этот термин довольно прочно укоренился, а α -эффект составляет суть всей современной теории динамо¹⁾. Основная причина популярности α -эффекта связана с тем, что он позволяет очевидным образом замкнуть "динамо-цикл" $\mathbf{V}_R \neq \mathbf{V}_T$. Мы уже убедились, что тороидальное поле \mathbf{V}_T можно довольно легко генерировать из полоидального поля \mathbf{V}_R с помощью дифференциального вращения. Если исходить далее из усредненных полей, то равенство (7.17) показывает, что α -эффект будет генерировать тороидальный ток (и, следовательно, полоидальное поле) из тороидального поля. Именно этот последний шаг $\mathbf{V}_T \rightarrow \mathbf{V}_R$ так трудно описать в теории ламинарного динамо; а в турбулентном случае (или в случае случайных волн) он делается на столь же простом уровне, что и более элементарный процесс $\mathbf{V}_R \rightarrow \mathbf{V}_T$. К *средним* полям теорема антидинамо Каулинга не применима, а потому исследование эволюции осесимметричных *усредненных* полей является не только возможным, но и обещающим делом (см. гл. 9).

Как отмечалось выше, псевдоскаляр α может быть отличным от нуля только тогда, когда \mathbf{u} -поле не обладает отражательной симметрией. Средняя спиральность $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$ в этом случае будет, вообще говоря, тоже отлична от нуля. Чтобы понять физическую природу α -эффекта, обратимся к рис. 7.2 (идея принадлежит Паркеру [155]). Следуя Паркеру, мы определим "циклон" как поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, которое локализовано в пространстве и времени и имеет отличную от нуля спиральность $I = \int (\mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u}) dV$. Предположим для определенности, что в правосторонней системе отсчета $I > 0$. Циклон искажает силовую линию начального поля \mathbf{V}_0 так, как это указано на рис. 7.2, причем такому искажению в большей или меньшей степени препятствует диффузия. Нормаль \mathbf{n} к возникшей петле поля имеет компоненту, параллельную \mathbf{V}_0 . Величина $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_0$ отрицательна или положительна в зависимости от суммарного угла закручивания петли, причем первая возможность, несомненно, более вероятна, если сильна диффузия или циклоны существуют в течение очень короткого промежутка времени.

Предположим теперь, что циклоны с $I > 0$ распределены случайно в пространстве и времени (возможная идеализация турбулентного поля скорости с положительной средней спиральностью). Каждую генерируемую петлю поля можно связать с элементарным возмущающим током, направленным вдоль \mathbf{n} ; среднее по пространству от этих эле-

¹⁾ В действительности впервые этот эффект обнаружил Паркер [155], который ввел из физических соображений параметр Γ , почти совпадающий с параметром α Штейнбека и Краузе [203].

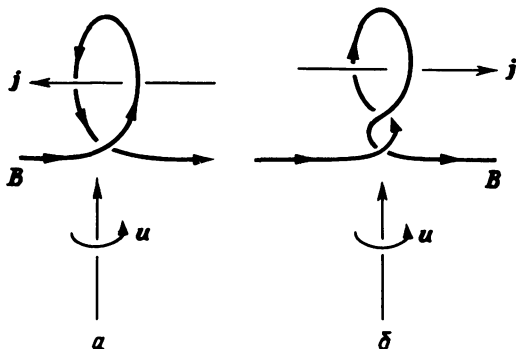


Рис. 7.2.

Искажение поля локализованным спиралевидным возмущением ("циклоном" по терминологии Паркера [157]). В случае а петля закручена на угол $\pi/2$ и соответствующий ток антипараллелен \mathbf{B} ; в случае б петля закручена на угол $3\pi/2$ и ток параллелен \mathbf{B} .

ментарных токов будет иметь вид $\mathbf{J}^{(0)} = \sigma \alpha \mathbf{V}_0$, где (если преобладают петли с $\mathbf{n} \cdot \mathbf{V}_0 < 0$) α — отрицательный коэффициент. Ниже мы покажем, что, когда преобладает диффузия, из этой картины вытекает неравенство $\alpha < \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} < 0$.

Если \mathbf{u} -поле не изотропно, то простое соотношение (7.15), разумеется, не справедливо. Однако симметричный псевдотензор $\alpha_{ij}^{(s)}$ можно привести к главным осям

$$\alpha_{ij}^{(s)} = \begin{pmatrix} \alpha^{(1)} & \cdot & \cdot \\ \cdot & \alpha^{(2)} & \cdot \\ \cdot & \cdot & \alpha^{(3)} \end{pmatrix}, \quad (7.18)$$

и соответствующий вклад в $\mathfrak{E}^{(0)}$ из (7.14) равен

$$\mathfrak{E}^{(0s)} = (\alpha^{(1)} B_{01}, \alpha^{(2)} B_{02}, \alpha^{(3)} B_{03}). \quad (7.19)$$

В этом случае $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$ и $\alpha^{(3)}$ должны изменять знаки при отражении $\mathbf{x}' = -\mathbf{x}$. Таким образом, если \mathbf{u} -поле обладает отражательной симметрией, то в общем случае $\alpha_{ij}^{(s)}$ обращается в нуль.

7.4. Эффекты, связанные с коэффициентом β_{ijk}

Рассмотрим теперь второй член ряда (7.10), а именно

$$\mathfrak{E}_i^{(1)} = \beta_{ijk} \partial B_{0j} / \partial x_k. \quad (7.20)$$

В простейшем случае, когда \mathbf{u} -поле изотропно, β_{ijk} также изотропно

и, таким образом,

$$\beta_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}, \quad (7.21)$$

где β — истинный скаляр. Тогда уравнение (7.20) принимает вид

$$\mathfrak{G}^{(1)} = -\beta \operatorname{rot} \mathbf{v}_0 = -\beta \mu_0 \mathbf{J}_0, \quad (7.22)$$

где \mathbf{J}_0 — средний ток. Отсюда следует также (если β постоянно), что

$$\operatorname{rot} \mathfrak{G}^{(1)} = \beta \Delta \mathbf{v}_0. \quad (7.23)$$

Поэтому суммарное влияние э.д.с. $\mathfrak{G}^{(1)}$ сводится, очевидно, просто к изменению величины эффективного коэффициента диффузии магнитного поля, т.е. λ переходит в $\lambda + \beta$. Мы покажем, что почти во всех случаях, когда коэффициент β можно вычислить точно, он оказывается положительным и с ним связано простое физическое понятие "турбулентной диффузии". Следует ожидать, что случайное перемешивание (создаваемое \mathbf{u} -полем) должно не ослаблять, а усиливать процесс молекулярной диффузии, при котором λ положительно. Однако общего доказательства того, что коэффициент β должен неизбежно и при всех условиях быть положительным, не существует. Более того, имеются некоторые указания (см. разд. 7.11), что в действительности при некоторых экстремальных условиях β может стать отрицательным. Разумеется, случай $\beta < -\lambda$ имел бы огромное значение при рассмотрении решений уравнения (7.7).

Если \mathbf{u} -поле не изотропно, следует ожидать отклонений от простого соотношения (7.21). Предположим, например, что \mathbf{u} -поле статистически инвариантно относительно вращений вокруг оси, определяемой единичным полярным вектором \mathbf{e} , но не инвариантно относительно произвольных вращений, т.е. вектор \mathbf{e} определяет "предпочтительное направление". Турбулентность, обладающая этим свойством, называется осесимметричной относительно направления \mathbf{e} . (Такая ситуация реализуется при рассмотрении потенциально важного случая турбулентности в системе координат, вращающейся с угловой скоростью Ω ; здесь $\mathbf{e} = \pm \Omega / \Omega$. На такую турбулентность сильное влияние оказывают кориолисовы силы.) Псевдотензор β_{ijk} , который в этом случае также симметричен относительно направления \mathbf{e} , можно записать в виде

$$\begin{aligned} \beta_{ijk} = & \beta_0 \epsilon_{ijk} + \tilde{\beta}_1 e_i \delta_{jk} + \tilde{\beta}_2 e_j \delta_{ki} + \tilde{\beta}_3 (e_k \delta_{ij} - e_j \delta_{ki}) + \\ & + \tilde{\beta}_0 e_i e_j e_k + \beta_1 \epsilon_{mjk} e_m e_i + \beta_2 \epsilon_{imk} e_m e_j + \beta_3 \epsilon_{ijm} e_m e_k, \quad (7.24) \end{aligned}$$

где β_0, \dots, β_3 — истинные скаляры, а $\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_3$ — псевдоскаляры, которые могут быть отличными от нуля только тогда, когда \mathbf{u} -поле не обладает отражательной симметрией. Из (7.20) можно получить соответствующее выражение для

$$\begin{aligned} \mathcal{E}^{(1)} = & -\beta_0 \operatorname{rot} \mathbf{V}_0 + \beta_1 \mathbf{e} \operatorname{div} (\mathbf{e} \times \mathbf{V}_0) + \beta_2 (\mathbf{e} \times \nabla)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{V}_0) - \\ & - \beta_3 (\mathbf{e} \cdot \nabla)(\mathbf{e} \times \mathbf{V}_0) + \tilde{\beta}_0 \mathbf{e} (\mathbf{e} \cdot \nabla)(\mathbf{e} \cdot \mathbf{V}_0) + \tilde{\beta}_2 \nabla(\mathbf{e} \cdot \mathbf{V}_0) + \\ & + \tilde{\beta}_3 (\mathbf{e} \times \operatorname{rot} \mathbf{V}_0). \end{aligned} \quad (7.25)$$

Стоит обратить внимание на сложность выражения такого типа по сравнению с простым соотношением (7.22) для изотропного случая (нетрудно видеть, что если отказаться от предположения об осевой симметрии и ввести *два* предпочтительных направления $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$, то соответствующее выражение для $\mathcal{E}^{(1)}$ становится еще более сложным, число скалярных и псевдоскалярных коэффициентов в нем существенно увеличивается).

По-видимому, коэффициенты β_1 , β_2 и β_3 , стоящие перед членами в правой части равенства (7.25), можно интерпретировать как коэффициенты анизотропной турбулентной диффузии среднего магнитного поля. Однако эти члены пока не были детально изучены, и, может быть, в них скрыты еще более интересные эффекты.

Что касается членов, содержащих псевдоскаляры $\tilde{\beta}_0$, $\tilde{\beta}_2$ и $\tilde{\beta}_3$, то член с $\tilde{\beta}_3$ был подробно исследован Редлером [178, 179]. Этот член описывает среднюю э.д.с., перпендикулярную среднему току $\mathbf{J}_0 = \mu_0^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{V}_0$, и вновь особенно интересен в связи с проблемой замыкания динамо-цикла. Благодаря этому эффекту (эффект Редлера) полоидальный ток порождает тороидальную э.д.с. (и, следовательно, тороидальный ток), или, что эквивалентно, тороидальное поле порождает полоидальное. Включив дополнительно дифференциальное вращение, можно говорить о замкнутом динамо-цикле, что фактически и было продемонстрировано Редлером [179].

Однако следует подчеркнуть, что псевдоскаляр $\tilde{\beta}_3$ отличен от нуля только для \mathbf{u} -поля, не обладающего отражательной симметрией¹⁾, но тогда, вообще говоря, будет отличен от нуля и псевдотензор α_{ij} . А поскольку главный член ряда (7.10) пропорционален α_{ij} , то кажется почти неизбежным, что всякий раз, когда можно говорить об эффекте Редлера, преобладающим будет α -эффект.

¹⁾ Этот вывод противоречит утверждению Редлера [178], который вместо полярного вектора \mathbf{e} повсюду использовал аксиальный вектор Ω , что трудно обосновать с чисто кинематической точки зрения.

7.5. Сглаживание первого порядка ¹⁾

Перейдем теперь к детальному решению уравнения (7.8) и последующему выводу выражения для $\mathbf{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle$. В оставшейся части этой главы мы предположим, что \mathbf{u} -поле является статистически однородным и $\mathbf{U}_0 = 0$. Эффекты, связанные с $\mathbf{U}_0 \neq 0$ (в частности, с сильным дифференциальным вращением в задачах со сферической геометрией), будут описаны в гл. 8. Трудность при решении уравнения (7.8) обычно возникает из-за члена $\text{rot } \mathbf{G}$, включающего в себя взаимодействие флуктуационных полей \mathbf{u} и \mathbf{b} , и естественно вначале рассмотреть случаи, когда этим неудобным членом можно пренебречь. Такое пренебрежение (*приближение сглаживания первого порядка*), по-видимому, может быть обосновано в двух отчетливо выраженных случаях. Оценим по порядку величины все члены (при $\mathbf{U}_0 = 0$) уравнения (7.8):

$$\frac{\partial \mathbf{b}}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \text{rot } \mathbf{G} + \lambda \Delta \mathbf{b}$$

$$O(b_0/t_0) \quad O(B_0 u_0/l_0) \quad O(u_0 b_0/l_0) \quad O(\lambda b_0/l_0^2). \quad (7.26)$$

Здесь, как обычно, l_0 и t_0 — характеристическая длина и характерное время для \mathbf{u} -поля, а под u_0 и b_0 можно понимать, скажем, среднеквадратичные значения \mathbf{u} и \mathbf{b} :

$$u_0 = \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2}, \quad b_0 = \langle \mathbf{b}^2 \rangle^{1/2}. \quad (7.27)$$

Здесь мы должны выделить два случая:

$$\text{обычная турбулентность } u_0 t_0/l_0 = O(1), \quad (7.28)$$

$$\text{случайные волны } u_0 t_0/l_0 \ll 1. \quad (7.29)$$

Если справедливо соотношение (7.29), то из (7.26) немедленно следует, что $|\text{rot } \mathbf{G}| \ll |\partial \mathbf{b}/\partial t|$ и в первом приближении

$$\partial \mathbf{b}/\partial t = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}_0) + \lambda \Delta \mathbf{b}. \quad (7.30)$$

Это уравнение (с постоянным вектором \mathbf{B}_0 и случайным полем \mathbf{u}) впервые исследовано Липманом [124].

С другой стороны, если справедливо (7.28), то $|\partial \mathbf{b}/\partial t|$ и $|\text{rot } \mathbf{G}|$ одинаковы по порядку величины и малы по сравнению с членом $|\lambda \Delta \mathbf{b}|$ при условии, что

$$R_m = u_0 l_0/\lambda = O(l_0^2/\lambda t_0) \ll 1. \quad (7.31)$$

¹⁾ Описываемое в данном разделе приближение сглаживания первого порядка аналогично борновскому приближению в теории рассеяния; некоторые авторы предпочитают использовать альтернативные названия, например "квазилинейное приближение" [112].

В этом предположении (малость турбулентного магнитного числа Рейнольдса) правильное первое приближение имеет вид

$$\mathbf{0} = \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{V}_0) + \lambda \Delta \mathbf{b}. \quad (7.32)$$

Хотя физические процессы, описываемые уравнениями (7.30) и (7.32), сильно отличаются друг от друга, по существу оба уравнения говорят об одном и том же: взаимодействие поля скорости \mathbf{u} с локальным средним полем \mathbf{V}_0 генерирует флуктуационное поле $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$. Согласно (7.32), преобладающее влияние диффузии делает это взаимодействие мгновенным, в то время как $\mathbf{b}(\mathbf{x}, t)$, определяемое уравнением (7.30), очевидно, может зависеть от предыдущей истории поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, т.е. от $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t')$ для всех $t' \leq t$. Можно ожидать, что при выполнении условия (7.31) решения уравнения (7.30) будут приближаться к решениям уравнения (7.32). Поэтому мы сосредоточим свое внимание на изучении более общего уравнения (7.30), имея в виду, что результаты такого исследования будут применимы к турбулентному случаю (в противоположность полю случайных волн) лишь при выполнении дополнительного условия (7.31).

7.6. Спектральный тензор стационарного случайного векторного поля

Прежде чем рассматривать следствия, вытекающие из уравнения (7.30), мы должны сделать краткое отступление и напомнить некоторые основные свойства случайного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, статистически однородного поля \mathbf{x} и стационарного по t . Мы можем определить (в классе обобщенных функций; см., например, [125]) фурье-преобразование ($d\mathbf{x} \equiv d^3\mathbf{x}$)

$$\tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint \mathbf{u}(\mathbf{x}, t) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{x} dt, \quad (7.33)$$

для которого справедливо обратное соотношение:

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = \iint \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)} d\mathbf{k} d\omega. \quad (7.34)$$

Поскольку \mathbf{u} действительно, то для всех \mathbf{k} и ω мы имеем

$$\tilde{\mathbf{u}}(-\mathbf{k}, -\omega) = \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, \omega), \quad (7.35)$$

где звездочкой обозначено комплексное сопряжение. Кроме того, если \mathbf{u} удовлетворяет соотношению $\text{div} \mathbf{u} = 0$, то

$$\mathbf{k} \cdot \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega) = 0 \quad \text{для всех } \mathbf{k}. \quad (7.36)$$

Рассмотрим теперь среднее

$$\langle \tilde{u}_i^*(\mathbf{k}, \omega) \tilde{u}_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \frac{1}{(2\pi)^8} \iiint \langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t') \rangle e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \mathbf{k}' \cdot \mathbf{x}' - \omega t + \omega' t')} d\mathbf{x} d\mathbf{x}' dt dt'. \quad (7.37)$$

В предположении однородности и стационарности можно определить корреляционный тензор поля

$$\langle u_i(\mathbf{x}, t) u_j(\mathbf{x}', t') \rangle = R_{ij}(\mathbf{r}, \tau), \quad (7.38)$$

где

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{r}, \quad t' = t + \tau. \quad (7.39)$$

Если воспользоваться основным свойством δ -функции

$$\iint e^{-i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x}} e^{i(\omega - \omega')t} d\mathbf{x} dt = (2\pi)^4 \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'), \quad (7.40)$$

то равенство (7.37) примет вид

$$\langle \tilde{u}_i^*(\mathbf{k}, \omega) \tilde{u}_j(\mathbf{k}', \omega') \rangle = \Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \delta(\omega - \omega'), \quad (7.41)$$

где

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{1}{(2\pi)^4} \iint R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) e^{-i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega\tau)} d\mathbf{r} d\tau. \quad (7.42)$$

Обратив соотношение (7.42), получим

$$R_{ij}(\mathbf{r}, \tau) = \iint \Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{r} - \omega\tau)} d\mathbf{k} d\omega. \quad (7.43)$$

Тензор $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, играющий фундаментальную роль в последующей теории, называется *спектральным тензором* поля $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$. Из (7.35) следует, что он эрмитов, т.е.

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \Phi_{ji}^*(-\mathbf{k}, -\omega) = \Phi_{ji}^*(\mathbf{k}, \omega), \quad (7.44)$$

а если $\text{div } \mathbf{u} = 0$, то, согласно (7.36), для всех \mathbf{k}

$$k_j \Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0, \quad k_i \Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = 0. \quad (7.45)$$

Энергетическая спектральная функция $E(k, \omega)$ определяется интегралом

$$E(k, \omega) = \frac{1}{2} \int \Phi_{ii}(\mathbf{k}, \omega) dS, \quad (7.46)$$

где интегрирование проводится в \mathbf{k} -пространстве по сфере S_k радиуса k . Заметим, что

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \frac{1}{2} R_{ii}(0, 0) = \frac{1}{2} \iint \Phi_{ii}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega = \iint E(k, \omega) dk d\omega, \quad (7.47)$$

где интегрирование по $k = |\mathbf{k}|$ естественно выполняется от 0 до ∞ .

Следовательно, величина $\rho E(\mathbf{k}, \omega) dk d\omega$ представляет собой плотность кинетической энергии, заключенной в интервале волновых чисел $(k, k + dk)$ и интервале частот $(\omega, \omega + d\omega)$. Заметим, что скалярная величина $\Phi_{ii}(\mathbf{k}, \omega)$ не отрицательна для всех \mathbf{k} и ω . [Если бы она была отрицательной, то, выполнив интегрирование в (7.41) по бесконечно малой окрестности (\mathbf{k}, ω) , мы пришли бы к противоречию.] Поэтому и

$$E(k, \omega) \geq 0 \text{ для всех } k \text{ и } \omega. \quad (7.48)$$

Преобразование Фурье вихревого поля $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$, очевидно, равно $\tilde{\omega} = i\mathbf{k} \times \tilde{\mathbf{u}}$, а его спектральный тензор имеет вид

$$\Omega_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \epsilon_{imn} \epsilon_{ipq} k_m k_p \Phi_{nq}(\mathbf{k}, \omega). \quad (7.49)$$

В частности, воспользовавшись (7.45), имеем отсюда

$$\Omega_{ii}(\mathbf{k}, \omega) = k^2 \Phi_{ii}(\mathbf{k}, \omega). \quad (7.50)$$

Непосредственным следствием (7.50) является соотношение

$$\frac{1}{2} \langle \omega^2 \rangle = \iint k^2 E(k, \omega) dk d\omega. \quad (7.51)$$

По аналогии с определением $E(k, \omega)$ определим *спектральную функцию спиральности*

$$F(k, \omega) = i \int_{S_k} \epsilon_{ikl} k_k \Phi_{il}(\mathbf{k}, \omega) dS. \quad (7.52)$$

Таким образом, для $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$

$$\langle \mathbf{u} \cdot \omega \rangle = i \epsilon_{ikl} \iint k_k \Phi_{il}(\mathbf{k}, \omega) dk d\omega = \iint F(k, \omega) dk d\omega. \quad (7.53)$$

Функция $F(k, \omega)$, в силу (7.44), действительна и является псевдоскаляром, и если \mathbf{u} -поле обладает отражательной симметрией, то она обращается в нуль. Однако, как мы показали в предыдущих разделах, отсутствие отражательной симметрии играет в теории динамо, по-видимому, решающую роль; поэтому важно рассмотреть случай, когда $F(k, \omega)$ может быть отличной от нуля. Простейшей (хотя отнюдь не единственной) мерой отсутствия отражательной симметрии случайно \mathbf{u} -поля является средняя спиральность $\langle \mathbf{u} \cdot \omega \rangle$.

В отличие от $E(k, \omega)$ функция $F(k, \omega)$ может быть как положительной, так и отрицательной. Однако она ограничена по величине. Действительно, из неравенства Шварца, записанного в виде

$$\left| \int_{S_k} \langle \tilde{\mathbf{u}} \cdot \tilde{\omega}^* + \tilde{\mathbf{u}}^* \cdot \tilde{\omega} \rangle dS \right|^2 \leq 4 \int_{S_k} \langle |\tilde{\mathbf{u}}|^2 \rangle dS \int_{S_k} \langle |\tilde{\omega}|^2 \rangle dS, \quad (7.54)$$

и равенств (7.47), (7.50) и (7.53) можно получить, что ¹⁾

$$|F(k, \omega)| \leq 2kE(k, \omega) \text{ для всех } k \text{ и } \omega. \quad (7.55)$$

¹⁾ Результаты (7.48) и (7.55) представляют собой частные следствия того факта, что $X_i X_j^* \Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) \geq 0$ для произвольных комплексных векторов \mathbf{X} (теорема Крамера). В изотропном случае, когда $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ описывается выражением (7.56), выбрав \mathbf{X} действительным, получим (7.48), а положив $\mathbf{X} = \mathbf{p} + i\mathbf{q}$, где \mathbf{p} и \mathbf{q} — единичные ортогональные векторы, перпендикулярные \mathbf{k} , получим (7.55).

Если \mathbf{u} -поле не только однородно, но и статистически изотропно¹⁾, то для полного определения $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$ достаточно функций $E(k, \omega)$ и $F(k, \omega)$. Действительно, наиболее общая форма изотропной функции $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, удовлетворяющей равенствам (7.45) – (7.46) и (7.52), имеет вид

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = \frac{E(k, \omega)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) + \frac{iF(k, \omega)}{8\pi k^4} \varepsilon_{ijk} k_k. \quad (7.56)$$

В математическом отношении предположение об изотропии может привести к существенным упрощениям. Однако турбулентность (или поле случайных влн), не обладающая отражательной симметрией, может возникать естественным путем только во вращающейся системе, в которой с необходимостью имеется предпочтительное направление (направление вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$) и, по-видимому, не стоит уделять слишком много внимания изотропному случаю. Тем не менее существуют "неестественные" способы генерации изотропной отражательно-несимметричной турбулентности, и, может быть, полезно описать один такой "мысленный эксперимент", остановившись лишь на его идее. Предположим, что имеется большая сфера, заполненная жидкостью, и на поверхности этой сферы пробуравлено большое число случайно расположенных маленьких дырок. Пусть в центре каждой дырки укреплен крошечный правосторонний пропеллер, а жидкость с большой скоростью впрыскивается через случайно выбранную подсистему дырок, причем равное количество жидкости выливается через остальные дырки. Турбулентность, возникающая вблизи центра сферы вследствие взаимодействия втекающих завихренных струй, будет приблизительно однородна и изотропна (ясно, что в центре нет выделенного направления). С другой стороны, турбулентность, несомненно, не обладает отражательной симметрией, поскольку каждая входящая в сферу частица описывает на старте своей траектории спираль правовинтового типа, так что (предположительно) величина $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$ будет положительна во всей сфере. Заметим, что суммарный момент импульса жидкости будет равен нулю, поскольку закручивающие усилия, действующие на жидкость со стороны пропеллеров, расположенных на противоположных концах диаметра, имеют тенденцию компенсировать друг друга; эта компенсация будет полной, если инжекция статистически однородна по поверхности сферы.

Если \mathbf{u} -поле неизотропно, но тем не менее в статистическом смысле осесимметрично относительно направления единичного вектора \mathbf{e} , то наиболее общее выражение для функции $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega)$, удовлетворяющей соотношениям (7.44), (7.45) при $\mathbf{k} \cdot \mathbf{e} = k_\mu$, имеет вид

¹⁾ См. сноску на стр. 155.

$$\begin{aligned} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = & \varphi_1 (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) + \varphi_2 (k e_i e_j + k \mu^2 \delta_{ij} - \mu k_i e_j - \mu k_j e_i) + \\ & + i \tilde{\varphi}_3 \varepsilon_{ijk} k_k + i \tilde{\varphi}_4 \varepsilon_{ijk} e_k + \tilde{\varphi}_5 (\mathbf{k} \times \mathbf{e})_i k_j + \\ & + \tilde{\varphi}_5^* (\mathbf{k} \times \mathbf{e})_j k_i + \tilde{\varphi}_6 (\mathbf{k} \times \mathbf{e})_i e_j + \tilde{\varphi}_6^* (\mathbf{k} \times \mathbf{e})_j e_i, \end{aligned} \quad (7.57)$$

где

$$i \tilde{\varphi}_4 + k^2 \tilde{\varphi}_5 + \mu k \tilde{\varphi}_6 = 0. \quad (7.58)$$

Здесь, как обычно, звездочка обозначает комплексное сопряжение, а тильда — псевдоскаляр, $\varphi_1, \dots, \tilde{\varphi}_6$ — функции k, μ и ω , причем $\varphi_1, \tilde{\varphi}_2, \tilde{\varphi}_3$ и $\tilde{\varphi}_4$ действительны, в то время как $\tilde{\varphi}_5$ и $\tilde{\varphi}_6$ комплексны. Энергетическая и спиральная спектральные функции, определяемые равенствами (7.46) и (7.52), связаны с этими функциями соотношениями

$$E(k, \omega) = \pi \int_0^1 (2k^4 \varphi_1 + k^3(1 + \mu^2) \varphi_2) d\mu, \quad (7.59)$$

$$F(k, \omega) = 4\pi \int_0^1 (k^4 \tilde{\varphi}_3 + k^3 \mu \tilde{\varphi}_4 + k^4 (\mu^2 - 1) \text{Im} \tilde{\varphi}_6) d\mu. \quad (7.60)$$

Может, конечно, случиться, что \mathbf{u} -поле обладает не одним, а несколькими предпочтительными направлениями. Например, если в жидкости действуют наряду с силами Кориолиса и архимедовы силы, то при статистическом рассмотрении любой возникающей в такой среде турбулентности необходимо учитывать два предпочтительных направления: направление вектора угловой скорости $\boldsymbol{\Omega}$ и направление ускорения силы тяжести \mathbf{g} . Легко получить общие формулы для Φ_{ij} , E и F , соответствующие (7.57) — (7.60), и снова (как и следует ожидать) в функцию E будет вносить вклад только та часть Φ_{ij} , которая содержит истинные скалярные функции, в то время как в F будет вносить вклад только та часть Φ_{ij} , которая содержит псевдоскалярные функции. С конкретными примерами мы встретимся в последующих главах (см., в частности, разд. 10.3).

7.7. Определение α_{ij} для спирального волнового движения

Поскольку разложение (7.10) справедливо для *любого* достаточно крупномасштабного распределения поля \mathbf{V}_0 , мы можем вычислить α_{ij} в предположении, что \mathbf{V}_0 однородно (и, следовательно, не зависит от времени). Ограничимся изучением движений несжимаемой среды, для которых $\text{div} \mathbf{u} = 0$ и уравнение (7.30) принимает вид

$$\partial \mathbf{b} / \partial t - \lambda \Delta \mathbf{b} = (\mathbf{V}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u}. \quad (7.61)$$

Прежде чем обратиться к общему случайному полю скорости, поучительно вначале рассмотреть влияние отдельной "спиральной волны"

$$\mathbf{u}(\mathbf{x}, t) = u_0 (\sin(kz - \omega t), \cos(kz - \omega t), 0) = \operatorname{Re} u_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (7.62)$$

где

$$\mathbf{u}_0 = u_0 (-i, 1, 0), \quad \mathbf{k} = (0, 0, k), \quad (7.63)$$

и где мы положим для определенности $k > 0$, $\omega > 0$. Заметим, что для этого движения

$$\operatorname{rot} \mathbf{u} = k \mathbf{u}, \quad \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot} \mathbf{u} = k u_0^2 \quad (7.64)$$

и

$$i \mathbf{u}_0 \times \mathbf{u}_0^* = 2 u_0^2 (0, 0, 1).$$

Очевидно, плотность спиральности постоянна и положительна. При таком выборе \mathbf{u} соответствующее периодическое решение уравнения (7.61) имеет вид

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = \operatorname{Re} \mathbf{b}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (7.65)$$

где

$$\mathbf{b}_0 = \frac{i \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}}{-i\omega + \lambda k^2} \mathbf{u}_0. \quad (7.66)$$

Отсюда

$$\mathbf{b} = \frac{\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}}{\omega^2 + \lambda^2 k^4} (-\omega \mathbf{u} + \lambda k^2 \mathbf{v}), \quad (7.67)$$

где

$$\mathbf{v} = u_0 (\cos(kz - \omega t), -\sin(kz - \omega t), 0) = \operatorname{Re} i \mathbf{u}_0 e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)}, \quad (7.68)$$

и мы можем немедленно получить

$$\mathfrak{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle = \frac{\lambda (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) k^2}{\omega^2 + \lambda^2 k^4} \langle \mathbf{u} \times \mathbf{v} \rangle = -\frac{\lambda u_0^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) k^2}{\omega^2 + \lambda^2 k^4} (0, 0, 1). \quad (7.69)$$

Следовательно, в этом случае $\mathfrak{E}_j = \alpha_{ij} B_{0j}$, где

$$\alpha_{ij} = \alpha^{(3)} \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad \alpha^{(3)} = -\frac{\lambda u_0^2 k^3}{\omega^2 + \lambda^2 k^4}. \quad (7.70)$$

Ясно, что α -эффект не изотропен, поскольку в поле скорости (7.62) есть предпочтительное направление $(0, 0, 1)$. Более существенно отметить, что $\alpha_{ij} \rightarrow 0$ при $\lambda \rightarrow 0$, т.е. для создания α -эффекта необходима некоторая диффузия. Роль диффузии, очевидно [см. (7.67)], сводится к сдвигу фазы поля \mathbf{b} относительно фазы поля \mathbf{u} , т.е. к операции, имеющей решающее значение для создания отличной от нуля э.д.с. \mathcal{E} .

Заметим далее, что в рассмотренном выше случае величина $\mathbf{u} \times \mathbf{b}$ в действительности постоянна, так что $\mathbf{G} = \mathbf{u} \times \mathbf{b} - \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle \equiv 0$. Это означает, что приближение сглаживания первого порядка [когда в уравнении (7.26) пренебрегают членом \mathbf{G}] является точным, если волновое поле состоит только из одной фурье-компоненты типа (7.62). Если имеется более чем одна компонента Фурье, то \mathbf{G} не обращается в нуль. Однако мы можем несколько точнее сформулировать условие справедливости приближения сглаживания первого порядка. Предположим, что спектр волнового поля (дискретный или непрерывный) имеет острый максимум на частоте ω_0 и волновом числе k_0 и что $u_0 = \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2}$. Тогда, согласно (7.29) и (7.31), влиянием \mathbf{G} -члена в уравнении (7.26) можно пренебречь, если

$$u_0 / \lambda k_0 \ll 1 \quad \text{или} \quad u_0 k_0 / \omega_0 \ll 1. \quad (7.71)$$

Обратно, если $\lambda \ll u_0 / k_0$, то сглаживание первого порядка следует считать некорректным приближением для всех пар (\mathbf{k}, ω) из волнового спектра, для которых $|\omega| \leq u_0 k^{(1)}$.

Отметим, наконец, что решение (7.65), разумеется, не удовлетворяет начальному условию $\mathbf{b}(\mathbf{x}, 0) = 0$. Если мы хотим, чтобы это условие выполнялось, то в уравнении (7.65) надо просто добавить член

$$\mathbf{b}_1 = -\text{Re } \mathbf{b}_0 e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} e^{-\lambda k^2 t}. \quad (7.72)$$

Это дает дополнительный вклад в \mathcal{E} , который, однако, обращается в нуль за время $\sim (\lambda k^2)^{-1}$. Проблемы возникают в предельном случае $\lambda \rightarrow 0$, когда влияние начальных условий "забывается" только за время $t \gtrsim 0 (\lambda k^2)^{-1}$, и, следовательно, полученный результат для \mathcal{E} зависит от того, в каком порядке совершаются предельные переходы $\lambda \rightarrow 0$ и $t \rightarrow \infty$ (ср. с проблемой, обсуждавшейся в разд. 3.8). Если сначала $t \rightarrow \infty$ (при $\lambda > 0$), так что промежуточный эффект (7.72) обращается в нуль, то мы приходим к (7.69). С другой стороны, если вначале

¹⁾ См., однако, работу Вайнштейна (ЖЭТФ, **62**, 1376, 1972), в которой рассматриваются не случайные волны, а случайный процесс с малым временем корреляции. Такое приближение соответствует марковскому процессу и является строго обоснованным. — *Прим. ред.*

$\lambda \rightarrow 0$, то мы получим (при $\mathbf{b}(\mathbf{x}, 0) = 0$)

$$\mathbf{b}(\mathbf{x}, t) = -\omega^{-1} u_0 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) (\sin(kz - \omega t) - \sin kz, \cos(kz - \omega t) - \cos kz, 0), \quad (7.73)$$

и, таким образом,

$$\mathfrak{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle = -\omega^{-1} u_0^2 (\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \sin \omega t (0, 0, 1), \quad (7.74)$$

т.е. э.д.с. не стремится ни к какому стационарному значению при $t \rightarrow \infty$.

7.8. Определение α_{ij} для случайного поля скорости \mathbf{u} в приближении сглаживания первого порядка

Предположим теперь, что \mathbf{u} — стационарная случайная функция \mathbf{x} и t , имеющая фурье-преобразование (7.33). Совершив фурье-преобразование над уравнением (7.61)

$$(-i\omega + \lambda k^2) \tilde{\mathbf{b}} = i(\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}) \tilde{\mathbf{u}}, \quad (7.75)$$

мы можем немедленно вычислить

$$\begin{aligned} \mathfrak{E} = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle &= \iiint \frac{\langle \tilde{\mathbf{u}}^*(\mathbf{k}, \omega) \times \tilde{\mathbf{u}}(\mathbf{k}', \omega') \rangle i \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{k}}{-i\omega + \lambda k^2} \times \\ &\times \exp \{ i(\mathbf{k} - \mathbf{k}') \cdot \mathbf{x} - i(\omega - \omega') t \} d\mathbf{k} d\mathbf{k}' d\omega d\omega'. \end{aligned} \quad (7.76)$$

Воспользовавшись равенством (7.41) и замечая, что в силу (7.44) $i \varepsilon_{ikl} \Phi_{kl}(\mathbf{k}, \omega)$ действительно, а мнимая часть (7.76) должна обращаться в нуль (поскольку \mathfrak{E} действительно), получим $\mathfrak{E}_i = \alpha_{ij} B_{0j}$, где

$$\alpha_{ij} = i \lambda \varepsilon_{ikl} \iint (\omega^2 + \lambda^2 k^4)^{-1} k^2 k_j \Phi_{kl}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega, \quad (7.77)$$

т.е., по существу, это супперпозиция членов типа (7.70). Заметим, что если определить $\alpha = \frac{1}{3} \alpha_{ii}$ (что совместимо с определением $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$ для изотропного случая), то из (7.52) и (7.77) получим

$$\alpha = -\frac{1}{3} \lambda \iint \frac{k^2 F(k, \omega)}{\omega^2 + \lambda^2 k^4} d\mathbf{k} d\omega. \quad (7.78)$$

Этот результат справедлив независимо от того, изотропно или анизотропно \mathbf{u} -поле. Именно здесь наиболее отчетливо просматривается связь между α и спиральностью: α представляет собой просто взвешенный интеграл от спектральной функции спиральности. Как отмечалось ранее, $F(k, \omega)$ может принимать положительные или отрицательные значения. Однако, если для всех k, ω функция $F(k, \omega)$ неотрицательна (и не тождественно равна нулю, так что $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle > 0$), то

из (7.78), очевидно, следует, что $\alpha < 0$. Точно так же если $F(k, \omega) \leq 0$ для всех k, ω (но не равна тождественно нулю), то $\alpha > 0$.

В случае турбулентности приближение сглаживания первого порядка справедливо только тогда, когда $\lambda k^2 \gg |\omega|$ для всех (\mathbf{k}, ω) , на которых имеется значимый вклад в интеграл (7.77). Следовательно, в этом случае множитель $(\omega^2 + \lambda^2 k^4)^{-1}$ можно заменить на $\lambda^{-2} k^{-4}$, и мы имеем

$$\alpha_{ij} \approx i \lambda^{-1} \epsilon_{ikl} \int k^{-2} k_j \Phi_{kl}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}, \quad (7.79)$$

где

$$\Phi_{kl}(\mathbf{k}) = \int \Phi_{kl}(\mathbf{k}, \omega) d\omega = \frac{1}{(2\pi)^3} \int R_{kl}(\mathbf{r}, 0) e^{-i\mathbf{k} \cdot \mathbf{r}} d\mathbf{r}. \quad (7.80)$$

Соответственно выражение (7.78) принимает вид

$$\alpha \approx -\frac{1}{3\lambda} \int k^{-2} F(k) dk, \quad F(k) = \int F(k, \omega) d\omega. \quad (7.81)$$

$\Phi_{kl}(\mathbf{k})$ представляет собой обычный мгновенный спектральный тензор однородной турбулентности (см., например, [20]). Результаты (7.79) и (7.81) проще всего получить прямо из уравнения (7.32) [142].

Для случайных волн необходимо рассматривать полное выражение (7.77). Отметим, что здесь также имеет место уже упоминавшееся свойство: если в волновом спектре отсутствует "нулевая частота" или, более точно, если

$$\Phi_{kl}(\mathbf{k}, \omega) = O(\omega^2) \quad \text{при} \quad \omega \rightarrow 0, \quad (7.82)$$

то

$$\alpha_{ij} = O(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 0, \quad (7.83)$$

С другой стороны, если $\Phi_{kl}(\mathbf{k}, 0) \neq 0$, то из (7.77), в силу

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega}{\omega^2 + \lambda^2 k^4} = \frac{\pi}{\lambda k^2}, \quad (7.84)$$

формально следует, что

$$\alpha_{ij} \sim \pi i \epsilon_{ikl} \int k_j \Phi_{kl}(\mathbf{k}, 0) d\mathbf{k} \quad \text{при} \quad \lambda \rightarrow 0. \quad (7.85)$$

Однако здесь мы должны принять во внимание ограничения приближения сглаживания первого порядка. Как указано в замечании, сделанном после того, как были сформулированы условия (7.71), это приближение некорректно, если λ мало и $|\omega| \lesssim u_0 k$. Поскольку асимптотическое выражение (7.85) полностью определяется спектральной плотностью в точке $\omega = 0$, то предельный переход, который дает (7.85),

действительно несовместим с приближением сглаживания первого порядка. Следовательно, справедливость асимптотической формулы (7.85) вызывает сомнения¹⁾.

Если \mathbf{u} -поле изотропно, то из (7.56) имеем

$$i \epsilon_{ikl} \Phi_{kl}(\mathbf{k}, \omega) = -(4\pi k^4)^{-1} k_i F(k, \omega), \quad (7.86)$$

и, таким образом, (7.77) сводится просто к выражению $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$, где α описывается формулой (7.78).

Если \mathbf{u} -поле статистически осесимметрично, т.е. обладает более слабой симметрией, то (7.57) дает

$$i \epsilon_{ikl} \Phi_{kl}(\mathbf{k}, \omega) = -2[k_i \tilde{\varphi}_3 + e_i \tilde{\varphi}_4 + (k^2 e_i - k_\mu k_i) \text{Im} \tilde{\varphi}_5 + \\ + (k_\mu e_i - k_i) \text{Im} \tilde{\varphi}_6], \quad (7.87)$$

а псевдотензор (7.77) становится осесимметричным:

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij} + \alpha_1 (\delta_{ij} - 3 e_i e_j), \quad (7.88)$$

где $\alpha = \frac{1}{3} \alpha_{ii}$ еще описывается формулой (7.78), а

$$\alpha_1 = \frac{1}{2} \alpha + \lambda \iiint \frac{k^3 \mu}{\omega^2 + \lambda^2 k^4} (k_\mu \tilde{\varphi}_3 + \tilde{\varphi}_4 + k^2 (1 - \mu^2) \text{Im} \tilde{\varphi}_5) dk d\mu d\omega. \quad (7.89)$$

Здесь уместно отметить, что α -эффект был зарегистрирован в очень простом лабораторном эксперименте [201]. Поле скорости, обладавшее искусственно созданной отрицательной средней спиральностью, генерировалось в жидком натрии, протекавшем через два связанных медных канала (рис. 7.3, а). Эффективное магнитное число Рейнольдса было мало, поэтому уместно рассматривать формулу (7.81). Линии тока имели левостороннюю закрутку, поэтому в предположении максимальной спиральности $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle \approx -u_0^2/l_0$. Воспользовавшись формулой (7.81) [или (7.70) при $\omega = 0$, $\mathbf{k} = l_0^{-1} \mathbf{r}$], мы можем получить следующую оценку:

$$\alpha \sim l_0 u_0^2 / \lambda, \quad (7.90)$$

где u_0 — средняя скорость в каждом канале. Тогда полная разность потенциалов между электродами в точках X и Y равна

$$\Delta\varphi \sim (n l_0 u_0^2 / \lambda) B_0, \quad (7.91)$$

где n — число секций канала, заключенных между точками X и Y (в эксперименте $n = 28$), а B_0 — поле, приложенное (с помощью внешних обмоток) параллельно "оси" XU . При изменениях u_0 и B_0 измеренные

¹⁾ См. сноску на стр. 168. — *Прим. ред.*

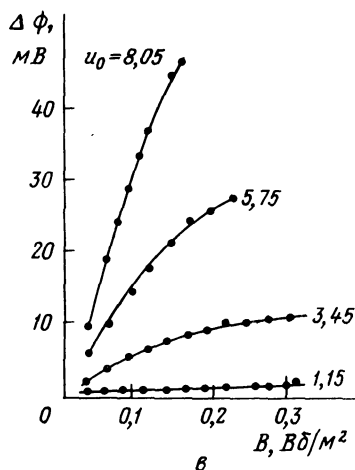
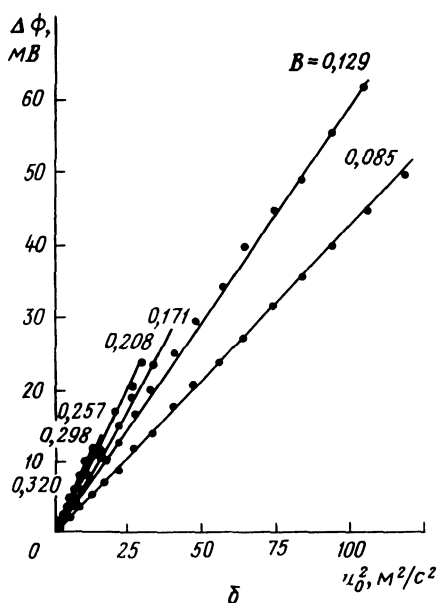
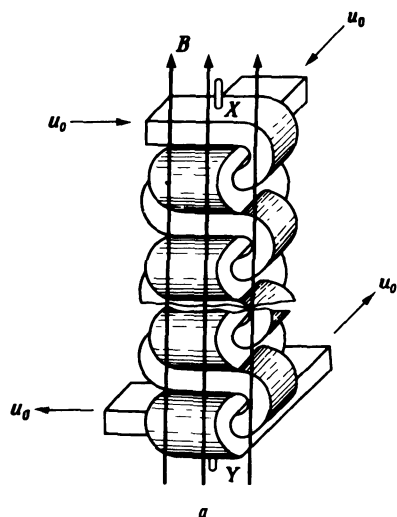


Рис. 7.3.

Экспериментальная проверка α -эффекта. а — конфигурация канала; б — разность потенциалов $\Delta\phi$, измеренная между электродами X и Y, как функция u_0^2 для различных значений приложенного поля B; в — $\Delta\phi$ как функция B для различных значений u_0 [201].

значения $\Delta\phi$ изменялись в интервале от нуля до 60 мВ. Зависимость $\Delta\phi$ от u_0^2 и B_0 показана на рис. 7.3, б и 7.3, в. Эти эксперименты убедительно подтвердили линейную связь между $\Delta\phi$ и u_0^2 . С другой стороны, линейное соотношение между $\Delta\phi$ и B_0 , очевидно, справедливо лишь для слабых B_0 ($\leq 0,1$ Вб \cdot м $^{-2}$). Причины нелинейной зависимости $\Delta\phi$ от B_0 для сильных B_0 , несомненно, следует искать в динамическом влиянии сил Лоренца на (турбулентное) распределение скорости в каналах.

7.9. Определение β_{ijk}

в приближении сглаживания первого порядка

Чтобы определить β_{ijk} , предположим далее, что поле $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$, фигурирующее в разложении (7.10), обладает постоянным градиентом $\partial B_{0j}/\partial x_k$ и имеет вид

$$B_{0j}(\mathbf{x}) = x_k (\partial B_{0j}/\partial x_k). \quad (7.92)$$

Тогда уравнение (7.30) и его фурье-образ принимают вид

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \lambda\Delta\right) b_i = x_k \frac{\partial B_{0j}}{\partial x_k} \frac{\partial u_i}{\partial x_j} - u_j \frac{\partial B_{0i}}{\partial x_j}, \quad (7.93)$$

$$(-i\omega + \lambda k^2) \tilde{b}_i = - \frac{\partial}{\partial k_k} (k_j \tilde{u}_i) \frac{\partial B_{0j}}{\partial x_k} - \tilde{u}_j \frac{\partial B_{0i}}{\partial x_j}. \quad (7.94)$$

Вычислив затем э.д.с. $\langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_i$, мы придем к выражению вида $\beta_{ijk} \partial B_{0j}/\partial x_k$, где (после некоторого преобразования)

$$\beta_{ijk} = \text{Re} \epsilon_{iml} \iint \frac{i\omega + \lambda k^2}{\omega^2 + \lambda^2 k^4} \left\{ \frac{\partial}{\partial k_k} k_j \Phi_{lm}(\mathbf{k}, \omega) - \Phi_{lk}(\mathbf{k}, \omega) \delta_{mj} \right\} d\mathbf{k} d\omega. \quad (7.95)$$

Отметим появление в этом выражении градиента спектрального тензора в \mathbf{k} -пространстве. В турбулентном случае (7.95) снова надо заметить на

$$\beta_{ijk} \approx \text{Re} \epsilon_{iml} \int \lambda^{-1} k^{-2} \left\{ \frac{\partial}{\partial k_k} k_j \Phi_{lm}(\mathbf{k}) + \Phi_{lk}(\mathbf{k}) \delta_{mj} \right\} d\mathbf{k}. \quad (7.96)$$

Величина $\epsilon_{iml} \Phi_{lm}(\mathbf{k})$ чисто мнимая (в силу эрмитовости спектрального тензора Φ_{lm}), и поэтому (7.96) сводится к

$$\beta_{ijk} \approx - \text{Re} \epsilon_{ijl} \int \lambda^{-1} k^{-2} \Phi_{lk}(\mathbf{k}) d\mathbf{k}. \quad (7.97)$$

В случае изотропного \mathbf{u} -поля со спектральным тензором (7.56) ненулевой вклад в интеграл (7.95) снова дает только второй член, и мы

находим $\beta_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}$, где

$$\beta = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \beta_{ijk} = \frac{2}{3} \lambda \iint \frac{k^2 E(k, \omega)}{\omega^2 + \lambda^2 k^4} dk d\omega, \quad (7.98)$$

причем соответствующее выражение для случая турбулентности имеет вид

$$\beta \approx \frac{2}{3} \lambda^{-1} \int_0^{\infty} k^{-2} E(k) dk. \quad (7.99)$$

Аналогично, когда поле скорости инвариантно относительно поворотов вокруг направления \mathbf{e} , подстановка (7.57) в (7.96) приводит к точным выражениям для коэффициентов, определяющих β_{ijk} в осесимметричном случае (7.24). Вычисление этих коэффициентов трудоемко, и мы не приводим здесь их выражения. Достаточно заметить, что скалярные коэффициенты β_0, \dots, β_3 оказываются линейными функциями $\varphi_1(k, \mu, \omega)$ и $\varphi_2(k, \mu, \omega)$, в то время как псевдоскалярные коэффициенты $\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_3$ [подобно α и α_1 в (7.78) и (7.89)] будут линейными функционалами от $\tilde{\varphi}_3, \dots, \tilde{\varphi}_6$; как указывалось ранее, если $\tilde{\beta}_0, \dots, \tilde{\beta}_3$ не равны нулю, то α и α_1 , вообще говоря, также отличны от нуля.

7.10. Лагранжев подход в пределе слабой диффузии

Описанное в предыдущем разделе приближение сглаживания первого порядка, конечно, неприменимо для случая турбулентного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ при $u_0 t_0 / l_0 = O(1)$ и в пределе слабой диффузии $R_m = u_0 l_0 / \lambda \gg 1$. Как мы показали, даже для случайных волн, где $u_0 t_0 / l_0 \ll 1$, указанное приближение не годится в пределе $\lambda \rightarrow 0$, если спектральная плотность волн не обращается в нуль при $\omega = 0$. Поэтому желательнее найти альтернативный метод, в котором в уравнении (7.8) удерживается член $\text{rot } \mathbf{G}$, описывающий взаимодействие флуктуационных полей. Подход, которому мы будем следовать [146, 158], аналогичен традиционному рассмотрению турбулентной диффузии пассивного скалярного поля в пределе нулевой молекулярной вязкости [212].

Отправным пунктом в этом подходе служит лагранжево решение уравнения индукции, а именно

$$B_i(\mathbf{x}, t) = B_j(\mathbf{a}, 0) dx_i / da_j, \quad (7.100)$$

точное в пределе $\lambda = 0$ (обозначения см. в разд. 2.5). Отсюда мы немедленно получаем

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{x}, t) = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_i = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{B} \rangle_i = \epsilon_{ijk} \langle u_j^L(\mathbf{a}, t) B_l(\mathbf{a}, 0) dx_k / da_l \rangle. \quad (7.101)$$

Вычисление α_{ij}

Как и в разд. 7.8, мы можем наиболее просто получить выражение для α_{ij} в предположении однородности (а следовательно, и постоянства) \mathbf{V}_0 . Если $\mathbf{b}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$, то $\mathbf{V}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{V}_0$ и в таком случае равенство (7.101) имеет ожидаемый вид $\xi_i = \alpha_{il} V_{0l}$; однако α_{il} является функцией t :

$$\alpha_{il}(t) = \varepsilon_{ijk} \langle u_j^L(\mathbf{a}, t) \partial x_k(\mathbf{a}, t) / \partial a_l \rangle. \quad (7.102)$$

Далее, смещение жидкой частицы определяется просто интегралом по времени от лагранжевой скорости, т. е.

$$\mathbf{x}(\mathbf{a}, t) - \mathbf{a} = \int_0^t \mathbf{u}^L(\mathbf{a}, \tau) d\tau. \quad (7.103)$$

Следовательно (поскольку $\langle \mathbf{u}^L(\mathbf{a}, t) \rangle = \mathbf{0}$), равенство (7.102) принимает вид

$$\alpha_{il}(t) = \varepsilon_{ijk} \int_0^t \langle u_j^L(\mathbf{a}, t) \partial u_k^L(\mathbf{a}, \tau) / \partial a_l \rangle d\tau. \quad (7.104)$$

Зависимость α_{il} от времени, конечно, соответствует начальному условию $\mathbf{b}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{0}$, из которого тривиально следует, что $\alpha_{il} = 0$ при $t = 0$. Можно ожидать, что при $t \gg t_1$, где t_1 — характерное корреляционное время турбулентности, влияние начальных условий должно "забываться"; иначе говоря, следует ожидать, что асимптотически $\alpha_{il}(t)$ стремится к постоянному значению

$$\alpha_{il} = \varepsilon_{ijk} \int_0^{\infty} \langle u_j^L(\mathbf{a}, t) \partial u_k^L(\mathbf{a}, \tau) / \partial a_l \rangle d\tau. \quad (7.105)$$

Однако имеются некоторые сомнения относительно сходимости интеграла (7.104) при $t \rightarrow \infty$ для случая общего стационарного случайного турбулентного поля скорости, и мы не знаем до конца ответа на щекотливый вопрос: забывается ли когда-либо (при $\lambda = 0$) влияние начальных условий¹⁾.

¹⁾ Недавно Крейчнан [113] провел численные расчеты с целью оценки интегралов (7.115) и (7.116), выписанных ниже, для случая статистически изотропного поля с гауссовым распределением. В результате он показал, что при $t \rightarrow \infty$ интегралы для $\alpha(t)$ и $\beta(t)$ всегда должны стремиться соответственно к значениям u_0 и $u_0 l_0$. Пока неясно, справедлив ли этот результат для негауссова распределения.

Некоторый свет на этот вопрос проливает сравнение (7.104) с выражением для тензора диффузии пассивного скалярного поля [212]

$$D_{ij}(t) = \int_0^t \langle u_i^L(\mathbf{a}, t) u_j^L(\mathbf{a}, \tau) \rangle d\tau. \quad (7.106)$$

Для статистически стационарного турбулентного поля скорости подынтегральное выражение (тензор корреляции в лагранжевой форме) в (7.106) является функцией только разности $t - \tau$:

$$\langle u_i^L(\mathbf{a}, t) u_j^L(\mathbf{a}, \tau) \rangle = R_{ij}^{(L)}(t - \tau). \quad (7.107)$$

Если просто предположить, что

$$t^{1+\mu} R_{ij}^{(L)}(t) \rightarrow 0 \quad \text{при } t \rightarrow \infty \quad \text{для некоторого } \mu > 0, \quad (7.108)$$

то для $t \gg t_1$ из (7.106) имеем

$$D_{ij} \sim \int_0^\infty R_{ij}^{(L)}(t) dt. \quad (7.109)$$

Условие (7.108) не накладывает серьезных ограничений на статистические свойства турбулентности.

Однако между (7.106) и (7.104) имеется решающее отличие в том, что в последнее равенство входит производная нового типа:

$$\partial u_k^L / \partial a_l = (\partial u_k / \partial x_m) (\partial x_m / \partial a_l). \quad (7.110)$$

Хотя производная $\partial u_k / \partial x_m$ статистически стационарна во времени, $\partial x_m / \partial a_l$ в общем случае не обладает этим свойством, поскольку две любые первоначально близкие частицы (\mathbf{a} , $\mathbf{a} + \delta \mathbf{a}$) стремятся отойти друг от друга все дальше и дальше; асимптотически $|\delta \mathbf{x}| / |\delta \mathbf{a}| \sim t^{1/2}$ при $t \rightarrow \infty$. Отсюда следует, что в общем случае производная $\partial u_k^L / \partial a_l$ статистически нестационарна во времени и, таким образом, подынтегральное выражение в (7.104) зависит от t и τ в отдельности, а не просто от разности $t - \tau$.

Как и в случае, обсуждавшемся после формулы (7.85), ясно, что возможная расходимость интеграла (7.104) связана с существованием спектральных компонент поля скорости вблизи $\omega = 0$. При любом периодическом во времени движении с нулевой средней скоростью две любые первоначально близкие частицы не расходятся, а постоянно близки друг к другу. За относительное расхождение частиц в турбулентном течении ответственны спектральные компоненты с частотами, близкими к $\omega = 0$, и именно из-за них трудно обосновать переход от равенства (7.104) к равенству (7.105)¹⁾.

¹⁾ См. сноску на стр. 168. — *Прим. ред.*

Вычисление β_{ijk}

Предположим теперь, что в момент $t = 0$ средний градиент поля $\partial B_{0i} / \partial x_j$ постоянен. Из (7.11) имеем

$$\frac{\partial}{\partial t} \frac{\partial B_{0i}}{\partial x_p} = \varepsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\alpha_{kl} \frac{\partial B_{0l}}{\partial x_p} + \beta_{klm} \frac{\partial^2 B_{0l}}{\partial x_m \partial x_p} + \dots \right) + \lambda \Delta \frac{\partial B_{0i}}{\partial x_p}, \quad (7.111)$$

и, таким образом (при не зависящих от пространственных координат α_{kl} , β_{klm}), $\partial B_{0i} / \partial x_p$ остается постоянным во времени. Поэтому мы можем проинтегрировать уравнение (7.111):

$$B_{0i}(\mathbf{x}, t) = B_{0i}(\mathbf{x}, 0) + \varepsilon_{ijk} \frac{\partial B_{0l}}{\partial x_j} \int_0^t \alpha_{kl}(\tau) d\tau. \quad (7.112)$$

Из (7.101) мы получаем далее

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{x}, t) = \varepsilon_{ijk} < u_j^L(\mathbf{a}, t) \partial x_k / \partial a_l (B_{0l}(\mathbf{x}, 0) - (\mathbf{x} - \mathbf{a})_m \partial B_{0l} / \partial x_m) >. \quad (7.113)$$

С учетом (7.112) это выражение принимает вид

$$\mathcal{E}_i(\mathbf{x}, t) = \alpha_{il}(t) B_{0l}(\mathbf{x}, t) + \beta_{ilm}(t) \partial B_{0l} / \partial x_m.$$

Здесь $\alpha_{il}(t)$ описывается формулой (7.104), а

$$\beta_{ilm}(t) = -\varepsilon_{ijl} D_{jm}(t) - \varepsilon_{ijk} \int_0^t \int_0^t < u_j^L(\mathbf{a}, \tau_1) \frac{\partial u_k^L(\mathbf{a}, \tau_1)}{\partial a_l} \times \\ \times u_m^L(\mathbf{a}, \tau_2) > d\tau_1 d\tau_2 - \varepsilon_{pmk} \int_0^t \alpha_{kl}(\tau) \alpha_{ip}(t) d\tau, \quad (7.114)$$

где $D_{jm}(t)$ определяется равенством (7.106). В это выражение входит теперь двойной интеграл от тройной корреляции в лагранжевых переменных. [Сходимость этого интеграла при $t \rightarrow \infty$, как и интеграла (7.104), пока не установлена.] Более того, в случае турбулентности, не обладающей отражательной симметрией, для которой $\alpha_{ij}(t) \neq \Omega$, последний член в (7.114), несомненно, расходитсся при $t \rightarrow \infty$, если

при этом $\alpha_{ij}(t)$ стремится к постоянному ненулевому значению¹⁾. Результат, конечно, связан с тем, что мы полностью пренебрегли влиянием молекулярной диффузии. Возможно, что включение слабых диффузионных эффектов (т.е. малого, но отличного от нуля λ) обеспечит сходимость $\alpha_{ij}(t)$ и $\beta_{ijk}(t)$ к постоянным значениям при $t \rightarrow \infty$; однако это утверждение пока никем не доказано.

Изотропный случай

Согласно (7.104),

$$\alpha(t) = \frac{1}{3} \alpha_{ii}(t) = -\frac{1}{3} \int_0^t \langle \mathbf{u}^L(\mathbf{a}, t) \cdot \nabla_{\mathbf{a}} \times \mathbf{u}^L(\mathbf{a}, \tau) \rangle d\tau, \quad (7.115)$$

и если поле $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ изотропно, то $\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}$. Оператор $\nabla_{\mathbf{a}}$ означает дифференцирование по \mathbf{a} . В подынтегральное выражение входит в лагранжевой форме корреляция спиральности. Отметим, что в определении α снова появился знак минус.

Аналогично, в изотропном случае $\beta_{ijk} = \beta(t) \epsilon_{ijk}$, где, согласно (7.114),

¹⁾ Из того факта, что численные расчеты Крейчнана [113] дают при $t \rightarrow \infty$ конечное значение $\beta(t) = \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \beta_{ijk}(t)$ (см. сноску на стр. 175), вытекает, что эта расходимость должна компенсироваться одновременной расходимостью второго члена (7.114), содержащего двойной интеграл. Поскольку рассматриваемые два члена сильно отличаются по своему строению, этот случайный факт вряд ли справедлив в общем случае и вполне может быть связан со специальной формой гауссова распределения, использованного Крейчнаном при численной спецификации поля скорости. Можно заметить, что если второй и третий члены в правой части (7.116) *компенсируют* друг друга, то $\beta(t) = \frac{1}{3} D_{ii}(t)$, т.е. коэффициент турбулентной диффузии магнитного поля равен коэффициенту диффузии скалярной примеси. Паркер [159] утверждал, что это точный результат, однако его доказательство было подвергнуто сомнению в работе [146]. Результаты Крейчнана [112, 113] показывают, что, хотя $\beta(t)$ и $D(t) = \frac{1}{3} D_{ii}(t)$ при $t \rightarrow \infty$ одинаковы по порядку величины, они, вообще говоря, *не равны* тождественно друг другу.

$$\begin{aligned} \beta(t) = & \frac{1}{6} \epsilon_{ijk} \beta_{ijk} = \frac{1}{3} \int_0^t \langle \dot{\mathbf{u}}^L(t) \cdot \mathbf{u}^L(\tau) \rangle d\tau + \int_0^t \alpha(t) \alpha(\tau) d\tau + \\ & + \frac{1}{6} \int_0^t \int_0^t \langle \mathbf{u}^L(t) \cdot \mathbf{u}^L(\tau_2) \nabla_{\mathbf{a}} \cdot \mathbf{u}^L(\tau_1) - \\ & - (\mathbf{u}^L(t) \cdot \nabla_{\mathbf{a}} \mathbf{u}^L(\tau_1)) \cdot \mathbf{u}^L(\tau_2) \rangle d\tau_1 d\tau_2 \end{aligned} \quad (7.116)$$

и где везде подразумевается, что \mathbf{u}^L зависит от \mathbf{a} . Здесь первый член представляет собой эффективную вязкость скалярного поля; второй и третий члены описывают эффекты, связанные исключительно с векторным характером поля \mathbf{V} . Структура второго члена, содержащего произведение значений α в различные моменты времени, позволяет высказать предположение, что *флуктуации* спиральности могут оказывать существенное влияние на эффективную диффузию магнитного поля. Это предположение, выдвинутое Крейчнаном [112], будет дополнительно рассмотрено в следующем разделе.

7.11. Влияние флуктуаций спиральности на эффективный коэффициент турбулентной диффузии

Если $\alpha_{kl} = \alpha \delta_{kl}$ и $\beta_{klm} = \beta \epsilon_{klm}$, то уравнение (7.11) принимает вид

$$\partial \mathbf{B}_0 / \partial t = \text{rot}(\alpha \mathbf{V}_0) + \lambda_1 \Delta \mathbf{B}_0, \quad (7.117)$$

где предполагается, что $\lambda_1 = \lambda + \beta$ и β постоянно. Рассмотрим теперь (следуя Крейчнану [112]) влияние на λ пространственных и временных флуктуаций α в масштабах l_α , t_α , определяемых неравенствами

$$l_0 \ll l_\alpha \ll L, \quad t_0 \ll t_\alpha \ll T. \quad (7.118)$$

Для решения поставленной задачи нам необходимо прежде всего определить понятие двойного среднего по масштабам a_1 и a_2 , удовлетворяющим неравенствам

$$l_0 \ll a_1 \ll l_\alpha \ll a_2 \ll L. \quad (7.119)$$

Предварительное усреднение по масштабу a_1 дает, как это описано в предыдущем разделе, уравнение (7.117). Далее мы считаем $\alpha(\mathbf{x}, t)$ случайной функцией и посмотрим, к чему приведет усреднение (7.117) по масштабу a_2 . (Процесс усреднения можно интерпретировать также исходя из представления об "ансамбле ансамблей": α постоянно в каждом из ансамблей, но изменяется случайным образом при переходе от одного подансамбля к другому.) Для обозначения усреднения по

масштабу a_2 величин, уже усредненных по масштабу a_1 , мы будем использовать двойные угловые скобки. Кроме того, мы предположим, что \mathbf{u} -поле обладает глобальной отражательной симметрией, так что, в частности $\langle \alpha \rangle = 0$.

Пространственные флуктуации α будут, вероятно, возникать при наличии соответствующих флуктуаций фоновой спиральности $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$. Легко представить себе кинематически возможное случайное поле скорости с такими флуктуациями. На рис. 2.1, а изображена пара вихревых колец с положительной спиральностью; обращение направления одной из стрелок дает похожий "элемент тока" с отрицательной спиральностью. Мы можем представить себе, что такие элементы распределены в пространстве случайным образом, так что результирующее поле скорости однородно, изотропно и обладает отражательной симметрией, если элементы с противоположной четностью встречаются с равной вероятностью. Однако группирование правосторонних и левосторонних элементов приводит к пространственным флуктуациям с характерным масштабом, по порядку величины равным размеру групп.

С динамической точки зрения рассмотрение до некоторой степени произвольных моделей такого типа кажется малооправданным. Причина, по которой мы это делаем, заключается в следующем. Когда α постоянно, уравнение (7.117) имеет решения, которые, если рассматриваются достаточно большие масштабы, экспоненциально нарастают во времени (подробнее см. разд. 9.2). В отражательно-симметричной турбулентности $\alpha = 0$, и кажется, что в соответствии с уравнением (7.117) рост \mathbf{V}_0 невозможен. Однако, когда не годится приближение сглаживания первого порядка, мы сталкиваемся с серьезными трудностями при вычислении β (и, следовательно, λ_1), и трудно исключить возможность, что эффективный коэффициент диффузии может при некоторых условиях оказаться даже отрицательным. Именно с целью прояснить этот вопрос и предпринял свое исследование Крейчнан [112].

Разложим (следуя тому же методу, который был применен к уравнению индукции в разд. 7.1) уравнение (7.117) на уравнения для среднего и флуктуационного полей. Определив

$$\mathbf{V}_0 = \langle \mathbf{V} \rangle + \mathbf{b}_1(\mathbf{x}, t) \quad \text{при} \quad \langle \mathbf{b}_1 \rangle = 0, \quad (7.120)$$

мы получим

$$\partial \langle \mathbf{V} \rangle / \partial t = \text{rot} \langle \alpha \mathbf{b}_1 \rangle + \lambda_1 \Delta \langle \mathbf{V} \rangle \quad (7.121)$$

и

$$\partial \mathbf{b}_1 / \partial t = -\langle \mathbf{V} \rangle \times \nabla \alpha + \alpha \text{rot} \langle \mathbf{V} \rangle + \text{rot} \mathbf{G}_1 + \lambda_1 \Delta \mathbf{b}_1, \quad (7.122)$$

где

$$\mathbf{G}_1 = \alpha \mathbf{b}_1 - \langle \alpha \mathbf{b}_1 \rangle. \quad (7.123)$$

Будем решать теперь уравнение (7.122) в приближении сглаживания первого порядка. Членом $\text{rot } \mathbf{G}_1$ можно пренебречь, если

$$\alpha_0 t_\alpha / l_\alpha \ll 1 \quad \text{или} \quad \alpha_0 l_\alpha / \lambda_1 \ll 1, \quad (7.124)$$

где $\alpha_0^2 = \langle \alpha^2 \rangle$ — средний квадрат флуктуационного поля $\alpha(\mathbf{x}, t)$. Выпишем фурье-преобразование (7.122), считая $\langle \mathbf{V} \rangle$ и $\text{rot } \langle \mathbf{V} \rangle$ постоянными,

$$(-i\omega + \lambda_1 k^2) \tilde{\mathbf{b}}_1 = -i \langle \mathbf{V} \rangle \times \mathbf{k} \tilde{\alpha} + \tilde{\alpha} \text{rot } \langle \mathbf{V} \rangle. \quad (7.125)$$

Откуда легко получаем

$$\langle \alpha \mathbf{b}_1 \rangle = - \langle \mathbf{V} \rangle \times \mathbf{Y} + X \text{rot } \langle \mathbf{V} \rangle, \quad (7.126)$$

где

$$X = \iint \frac{\lambda_1 k^2 \Phi_\alpha(\mathbf{k}, \omega)}{\omega^2 + \lambda_1^2 k^4} d\mathbf{k} d\omega, \quad \mathbf{Y} = - \iint \frac{\omega \mathbf{k} \Phi_\alpha(\mathbf{k}, \omega)}{\omega^2 + \lambda_1^2 k^4} d\mathbf{k} d\omega. \quad (7.127)$$

Здесь $\Phi_\alpha(\mathbf{k}, \omega)$ — спектральная функция поля $\alpha(\mathbf{x}, t)$. Подставляя далее (7.127) в уравнение (7.121), получаем

$$\frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{V} \rangle = \text{rot}(\mathbf{Y} \times \langle \mathbf{V} \rangle) + (\lambda_1 - X) \Delta \langle \mathbf{V} \rangle. \quad (7.128)$$

Член, содержащий \mathbf{Y} , не представляет большого интереса: он означает, что имеется постоянная эффективная скорость переноса поля $\langle \mathbf{V} \rangle$ относительно среды. Если α -поле статистически изотропно, то, разумеется, $\mathbf{Y} = 0$, поскольку в изотропном поле нет предпочтительного направления¹⁾.

Большой потенциальный интерес представляет член, содержащий X . Из (7.127а) очевидно, что $X > 0$, поэтому флуктуации спиральности в действительности должны вносить отрицательный вклад в новый эффективный коэффициент диффузии $\lambda_2 = \lambda_1 - X$. Оценим X для случая, когда l_α достаточно велико, так что справедливы следующие неравенства:

$$\epsilon_1 = \alpha_0 t_\alpha / l_\alpha \ll 1, \quad \epsilon_2 = \lambda_1 t_\alpha / l_\alpha^2 \ll 1. \quad (7.129)$$

Первое неравенство оправдывает использование приближения сглаживания первого порядка. Второе позволяет получить асимптотическую

1) Крейчнан [112] получает в (7.126) только X -член, фактически ограничиваясь рассмотрением α -полей, которые хотя и могут быть анизотропными, но должны тогда обладать специальными статистическими свойствами для того, чтобы интеграл (7.127б) обращался в нуль.

оценку (7.127а) [ср. метод, с помощью которого получена формула (7.85)] в виде

$$X \sim \pi \int \Phi_{\alpha}(\mathbf{k}, 0) d\mathbf{k} = O(\alpha_0^2 \epsilon_{\alpha}). \quad (7.130)$$

Отсюда

$$X/\lambda_1 = O(\alpha_0^2 \epsilon_{\alpha}/\lambda_1) = O(\epsilon_1^2/\epsilon_2), \quad (7.131)$$

и, таким образом, если $\epsilon_1^2 \geq \epsilon_2$ или ϵ_{α} (а также l_{α}) достаточно велико, то, очевидно, X может по порядку величины стать таким же, как λ_1 , или больше.

Приведенное доказательство, основанное на оценках по порядку величины, нельзя считать убедительным, но оно, несомненно, выглядит многообещающим, а метод двойного усреднения заслуживает дальнейшего тщательного изучения. Появление в (7.128) отрицательного коэффициента диффузии $\lambda_2 = \lambda_1 - X$ означает, с одной стороны, что все фурье-компоненты поля $\ll \mathbf{V} \gg$ экспоненциально растут по величине, а с другой стороны, что характеристический масштаб поля L будет *уменьшаться* во времени (в противоположность тому, что происходит при обычном процессе диффузии с положительным коэффициентом). В свете такого результата необходимо вернуться к первоначальному допущению (7.118а), касающемуся разделения масштабов. Если благодаря отрицательной диффузии L уменьшится до $O(l_{\alpha})$, то теория, основанная на пространственных усреднениях, окажется не применимой.

Наконец, можно заметить, что (7.128) в общем похоже на первоначальное уравнение индукции (3.10). Это означает, что если еще на один шаг продолжить доказательство Крейчана [112] и рассмотреть случайные изменения $\mathbf{Y}(\mathbf{x}, t)$ на характеристической длине l_Y , удовлетворяющей неравенствам $L \gg l_Y \gg l_{\alpha} \gg l_0$ (или иначе "ансамбль ансамблей ансамблей"!), то мы точно вернемся к первоначальной задаче, но на значительно большем масштабе и не выявим при таком рассмотрении никакого нового физического явления.

ТЕОРИЯ БРАГИНСКОГО ДЛЯ СЛАБОАСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ

8.1. Введение

Согласно общим результатам разд. 7.1 и 7.2, влияние поля скорости, состоящего из стационарной средней скорости $\mathbf{U}_0(\mathbf{x})$ и флуктуационной части $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, на среднее магнитное поле описывается уравнением

$$\frac{\partial \mathbf{V}_0}{\partial t} = \text{rot}(\mathbf{U}_0 \times \mathbf{V}_0) + \text{rot} \mathbf{\xi} + \lambda \Delta \mathbf{V}_0, \quad (8.1)$$

где

$$\xi_i = \alpha_{ij} B_{0j} + \beta_{ijk} \partial B_{0j} / \partial x_k + \dots \quad (8.2)$$

В разд. 7.5 – 7.10, предполагая, что $\mathbf{U}_0 = \mathbf{0}$ (или const) и статистические свойства \mathbf{u} -поля однородны в пространстве и времени, мы получили точные выражения для α_{ij} и β_{ijk} в виде квадратичных функционалов от \mathbf{u} -поля. Применялся двухмасштабный метод, включающий в себя усреднения по малым пространственным (или временным) масштабам.

Очень похожий метод был развит Брагинским [26, 27], исследовавшим слабые отклонения от осевой симметрии в сферической динамической системе. Поводом к исследованию послужила следующая идея. Хотя теорема Каулинга исключает возможность осесимметричного динамо, но если диффузионные эффекты слабы (т.е. λ мало), то слабые отклонения поля скорости (и, следовательно, магнитного поля) от осевой симметрии могут дать восстанавливающую электродвижущую силу, требуемую для компенсации омического затухания.

В этом случае естественно вводить средние поля путем усреднения по азимутальному углу φ . Поэтому мы определили *азимутальное среднее* для произвольного скаляра $\psi(s, \varphi, z)$ как

$$\Psi_0(s, z) = \langle \psi(s, \varphi, z) \rangle_{\varphi} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \psi(s, \varphi, z) d\varphi. \quad (8.3)$$

Аналогично определяется среднее для любого вектора $\mathbf{f}(s, \varphi, z)$:

$$\mathbf{f}_0(s, z) = \langle \mathbf{f} \rangle_{az} = \langle f_s \rangle \mathbf{i}_s + \langle f_\varphi \rangle \mathbf{i}_\varphi + \langle f_z \rangle \mathbf{i}_z . \quad (8.4)$$

Мы будем использовать такое обозначение

$$\mathbf{f}_M = \mathbf{f} - (\mathbf{f} \cdot \mathbf{i}_\varphi) \mathbf{i}_\varphi = f_s \mathbf{i}_s + f_z \mathbf{i}_z \quad (8.5)$$

для меридиональной проекции \mathbf{f} . Разумеется, если \mathbf{f} осесимметрично, то $\mathbf{f}_0 = \mathbf{f}$; если вектор \mathbf{f} вдобавок соленоидален, то $\mathbf{f}_M = \mathbf{f}_P$, где \mathbf{f}_P — полоидальная составляющая \mathbf{f} .

Рассмотрим теперь поле скорости вида

$$\mathbf{U}_0(s, z) + \epsilon \mathbf{u}'(s, \varphi, z, t), \quad (8.6)$$

где $\epsilon \ll 1$ и $\langle \mathbf{u}' \rangle_{az} = 0$. Любое магнитное поле, которое переносится и искажается этим полем скорости, должно по меньшей мере в той же степени проявлять асимметрию относительно оси z ; поэтому будет последовательным, если мы ограничимся рассмотрением магнитных полей вида

$$\mathbf{B}_0(s, z) + \epsilon \mathbf{b}'(s, \varphi, z, t), \quad \langle \mathbf{b}' \rangle_{az} = 0. \quad (8.7)$$

[В обозначениях (8.6) и (8.7) подразумевается, что при $\epsilon \rightarrow 0$ \mathbf{u}' и \mathbf{b}' имеют порядок $O(1)$]. Азимутальное среднее от уравнения индукции совпадает в таком случае с уравнением (8.1), где

$$\mathcal{E}(s, z) = \epsilon^2 \langle \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' \rangle_{az}. \quad (8.8)$$

Если мы выделим в (8.1) тороидальную и полоидальную части

$$\mathbf{B}_0 = B(s, z) \mathbf{i}_\varphi + \mathbf{B}_P(s, z), \quad \mathbf{U}_0 = U(s, z) \mathbf{i}_\varphi + \mathbf{U}_P(s, z), \quad (8.9)$$

то для тороидальной части имеем [ср. (3.43)]

$$\frac{\partial B}{\partial t} + s(\mathbf{U}_P \cdot \nabla) \frac{B}{s} = s(\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \frac{U}{s} + (\text{rot } \mathcal{E})_\varphi + \lambda(\Delta - \frac{1}{s^2}) B. \quad (8.10)$$

Записав, как и в разд. 3.6, $\mathbf{B}_P = \text{rot}(A(s, z) \mathbf{i}_\varphi)$ и применив операцию, обратную ротору, получим уравнение для векторного потенциала полоидального поля

$$\frac{\partial A}{\partial t} + \frac{1}{s} (\mathbf{U}_P \cdot \nabla) sA = \mathcal{E}_\varphi + \lambda(\Delta - \frac{1}{s^2}) A. \quad (8.11)$$

Как мы показали в разд. 3.11, член $s(\mathbf{B}_P \cdot \nabla)(U/s)$ в уравнении (8.10) может генерировать тороидальное поле благодаря дифференциальному вращению. Рассмотрим далее случай, когда член \mathcal{E}_φ в уравнении (8.11) действует в качестве дополнительного источника генерации полоидального поля \mathbf{B}_P , определяемого векторным потенциалом $A \mathbf{i}_\varphi$. Если скорость генерации тороидального поля достаточна для компенсации

омического затухания, то простое сравнение членов в правой части уравнения (8.11) подсказывает, что λ должно быть не больше чем $O(\epsilon^2)$, и в последующих разделах мы будем предполагать, что реализуется именно этот случай, т.е. положим

$$\lambda = \lambda_0 \epsilon^2 \quad (8.12)$$

и предположим, что $\lambda_0 = O(1)$ в пределе при $\epsilon \rightarrow 0$. Эквивалентно, если U_0 — характерный порядок величины скорости $U(s, z)$, а L — общая характеристическая длина, то

$$R_m^{-1} = \lambda / U_0 L = O(\epsilon^2), \quad (8.13)$$

или эквивалентно $\epsilon = O(R_m^{-1/2})$.

Метод Брагинского основан также на предположении, что главный вклад в среднюю скорость U_0 вносит тороидальная составляющая U_i^φ или, более определенно, что

$$\mathbf{U}_P = \epsilon^2 \mathbf{u}_P, \quad \mathbf{u}_P = O(1). \quad (8.14)$$

Это означает, что магнитное число Рейнольдса, вычисленное, например, с $|\mathbf{U}_P|_{\max}$ будет иметь порядок $O(1)$. Полоидальная скорость в таком случае будет перераспределять тороидальное и полоидальное поля, но она будет *недостаточно* интенсивна, чтобы вытолкнуть полоидальное поле из областей с замкнутыми \mathbf{U}_P -линиями.

Поскольку генерируемое с помощью дифференциального вращения тороидальное поле в $O(R_m)$ раз превышает полоидальное поле, то естественно ввести и в \mathbf{V}_P дополнительный [как и в (8.14)] масштабный множитель

$$\mathbf{V}_P = \epsilon^2 \mathbf{b}_P, \quad \mathbf{b}_P = O(1), \quad (8.15)$$

причем подразумевается, что $|\mathbf{b}_P|$ и V при $\epsilon \rightarrow 0$ будут одинаковы по порядку величины.

Поскольку полное поле скорости имеет вид

$$U i_\varphi + \epsilon \mathbf{u}' + \epsilon^2 \mathbf{u}_P, \quad (8.16)$$

то ясно, что любая жидкая частица движется вокруг оси z по почти круговой орбите. При этих условиях естественно ожидать, что $\mathcal{E} = -\epsilon^2 < \mathbf{u}' \times \mathbf{b}' >_{az}$ будет определяться *локальными* значениями $V(s, z)$, $U(s, z)$ и усредненными по азимуту характеристиками поля \mathbf{u} .

Это очень похоже на двухмасштабный подход, описанный в гл. 7, причем меньший масштаб l_0 характеризует в данном случае среднее отклонение траектории жидкой частицы, движущейся вокруг оси z , от круговой орбиты. Поэтому следует ожидать, что применимо локальное

разложение типа (8.2), однако в данном случае $\mathcal{E}(s, z)$, $\mathbf{B}_0(s, z)$ осесимметричны по определению. Особенностью, отличающей метод Брагинского от двухмасштабного подхода, является то, что в нем рассматриваются течения преимущественно азимутального типа $U(s, z) \mathbf{i}_\varphi$ и нельзя исключить возможное влияние локального сдвига $s \nabla(U/s)$ на \mathcal{E} . Однако, как показано в последующих разделах, оказывается, что влияние течения $U \mathbf{i}_\varphi$ на \mathcal{E} очень просто учитывается путем замены полей \mathbf{u}_P и \mathbf{b}_P на эффективные поля \mathbf{u}_{eP} и \mathbf{b}_{eP} , причем в остальном уравнения (8.10) и (8.11) сохраняют свой вид. После учета этого эффекта, оставшуюся электродвижущую силу (которая имеет чисто диффузионное происхождение) с хорошей точностью можно отождествить с э.д.с., полученной в приближении сглаживания первого порядка (разд. 7.8).

Излагаемую ниже теорию (несмотря на то, что она была развита [26, 27] до создания электродинамики усредненных полей [202]) лучше всего рассматривать как область электродинамики усредненных полей, в которой учитываются пространственная неоднородность средней скорости и усредненные свойства флуктуационной составляющей поля скорости. Тесная связь между этими теориями была подчеркнута Соурдом [198], подходу которого мы будем следовать в последующих разделах.

8.2. Лагранжево преобразование уравнения индукции при $\lambda = 0$

Подход Соурда [198] основан на простом свойстве инвариантности уравнения индукции в предельном случае отсутствия диффузии. По причинам, которые станут ясны позже, полезно несколько изменить обозначения. Пусть $\tilde{\mathbf{B}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$, $\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ – поле и скорость в точке $(\tilde{\mathbf{x}}, t)$. Тогда при $\lambda = 0$ мы имеем

$$\partial \tilde{\mathbf{B}} / \partial t = \tilde{\mathbf{rot}}(\tilde{\mathbf{U}} \times \tilde{\mathbf{B}}). \quad (8.17)$$

Из разд. 2.5 нам известно (при $\tilde{\text{div}} \mathbf{U} = 0$) лагранжево решение этого уравнения

$$\tilde{B}_i(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \tilde{B}_j(\mathbf{a}, 0) d\tilde{x}_i / da_j, \quad (8.18)$$

где $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t)$ – координата жидкой частицы, находившейся первоначально в точке $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, 0) = \mathbf{a}$. Эквивалентно можно воспользоваться лагранжевой формой уравнения (8.17):

$$\frac{D}{Dt} \left(\tilde{B}_i(\tilde{\mathbf{x}}, t) \frac{\partial a_j}{\partial \tilde{x}_i} \right) = 0, \quad (8.19)$$

где D/Dt означает дифференцирование при постоянном \mathbf{a} .

Рассмотрим теперь изменение переменной

$$\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}, t) = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{a}, t), t) = \mathbf{X}(\mathbf{a}, t), \quad (8.20)$$

сохраняющее объем. Детерминант такого преобразования $|\partial x_i / \partial \tilde{x}_j|$ равен единице, т.е.

$$\varepsilon_{ijk} \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_p} \frac{\partial x_j}{\partial \tilde{x}_q} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_r} = \varepsilon_{pqr}. \quad (8.21)$$

Уравнение (8.19) немедленно превращается в уравнение

$$\frac{D}{Dt} (B_k(\mathbf{x}, t) \frac{\partial a_j}{\partial x_k}) = 0, \quad (8.22)$$

где

$$B_k(\mathbf{x}, t) = \tilde{B}_i(\tilde{\mathbf{x}}, t) \partial x_k / \partial \tilde{x}_i. \quad (8.23)$$

Обратив процедуру перехода от (8.17) к (8.19), мы получим эквивалентное (8.22) уравнение в эйлеровой форме:

$$\partial \mathbf{v} / \partial t = \text{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{v}), \quad (8.24)$$

где

$$U_k(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial X_k}{\partial t} \right)_{\mathbf{a}} = \frac{\partial x_k}{\partial t} + \tilde{U}_i \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i}. \quad (8.25)$$

Следовательно, уравнение (8.17) инвариантно относительно преобразований, определяемых формулами (8.20), (8.23) и (8.25). С физической точки зрения $\mathbf{v}(\mathbf{x}, t)$ представляет собой поле, получающееся из $\tilde{\mathbf{v}}(\tilde{\mathbf{x}}, t)$ в результате мгновенного возмущения среды, определяемого выражением (8.20) и сохраняющего замороженность поля; $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$ представляет собой поле скорости для несжимаемой среды, связанное с (гипотетическим) лагранжевым смещением $\mathbf{X}(\mathbf{a}, t)$.

В свете проведенного в разд. 8.1 обсуждения особенно интересно рассмотреть влияние преобразования $\mathbf{x} \leftrightarrow \tilde{\mathbf{x}}$, которое является почти тождественным. Можно полагать, что такое преобразование порождается стационарным эйлеровым полем скорости $\mathbf{v}(\mathbf{x})$, приложенным в течение короткого промежутка времени, скажем $\varepsilon \tau_0$. Тогда траектория частицы $\tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, \tau)$ определяется соотношениями

$$d\tilde{\mathbf{x}}/d\tau = \mathbf{v}(\tilde{\mathbf{x}}), \quad \tilde{\mathbf{x}}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{x}, \quad (8.26)$$

а суммарное смещение $\tilde{\mathbf{x}}$ в момент $\tau = \varepsilon \tau_0$ имеет вид

$$\tilde{\mathbf{x}} = \mathbf{x} + \varepsilon \boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) + \frac{1}{2} \varepsilon^2 (\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \boldsymbol{\eta} + \frac{1}{3!} \varepsilon^3 (\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla)^2 \boldsymbol{\eta} + \dots, \quad (8.27)$$

где $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}) = \tau_0 \mathbf{v}(\mathbf{x})$. Если $\mathbf{v}(\mathbf{x})$ удовлетворяет условию несжимаемости,

то $\operatorname{div} \boldsymbol{\eta} = 0$, а при этом условии смещение (8.27) должно автоматически удовлетворять равенству (8.21) во всех порядках по ϵ .

Если \mathbf{x} и $\tilde{\mathbf{x}}$ связаны зависимостью (8.27), то соотношение между $\mathbf{V}(\mathbf{x})$ и $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$ в данный момент времени может быть получено следующим образом. Пусть $\tilde{\mathbf{V}}_{\tau}(\mathbf{x})$ определяется уравнениями

$$\partial \tilde{\mathbf{V}}_{\tau} / \partial \tau = \operatorname{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \tilde{\mathbf{V}}_{\tau}), \quad \tilde{\mathbf{V}}_0(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}), \quad (8.28)$$

так что, очевидно, $\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \tilde{\mathbf{V}}_{\epsilon \tau_0}(\mathbf{x})$. Мы можем записать (8.28) в эквивалентной интегральной форме

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \int_0^{\tau} \operatorname{rot}(\mathbf{v}(\mathbf{x}) \times \tilde{\mathbf{V}}_{\tau'}(\mathbf{x})) d\tau' \quad (8.29)$$

и решить его с помощью итераций

$$\tilde{\mathbf{V}}_{\tau}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \tau \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{V}) + \frac{1}{2} \tau^2 \operatorname{rot}[\mathbf{v} \times \operatorname{rot}(\mathbf{v} \times \mathbf{V})] + \dots \quad (8.30)$$

Полагая $\tau = \epsilon \tau_0$ и $\mathbf{v} = \boldsymbol{\eta} / \tau_0$, получаем

$$\tilde{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) = \mathbf{V}(\mathbf{x}) + \epsilon \operatorname{rot}(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{V}) + \frac{1}{2} \epsilon^2 \operatorname{rot}[\boldsymbol{\eta} \times \operatorname{rot}(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{V})] + \dots, \quad (8.31)$$

что представляет собой эйлеров эквивалент лагранжева выражения

$$\tilde{V}_i(\tilde{\mathbf{x}}) = V_k(\mathbf{x})(\delta_{ik} + \epsilon \frac{\partial \eta_i}{\partial x_k} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \frac{\partial}{\partial x_k} (\boldsymbol{\eta} \cdot \nabla) \eta_i + \dots). \quad (8.32)$$

Поскольку эти соотношения выражают мгновенную связь между входящими в них величинами, они остаются справедливыми и тогда, когда $\boldsymbol{\eta}$, $\tilde{\mathbf{V}}$ и \mathbf{V} зависят не только от t , но и от \mathbf{x} .

В силу (8.25), соответствующая связь между $\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x})$ и $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ в компактных обозначениях имеет вид

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\epsilon^n}{n!} (\operatorname{rot} \boldsymbol{\eta} \times)^n (\mathbf{U}(\mathbf{x}) - \frac{\partial \mathbf{x}}{\partial t}). \quad (8.33)$$

Здесь, как и в (8.25), $\partial \mathbf{x} / \partial t$ вычисляется при постоянном $\tilde{\mathbf{x}}$. Следовательно, согласно (8.27),

$$\frac{\partial x_i}{\partial t} = -\epsilon \frac{\partial \eta_i}{\partial t} + \frac{1}{2} \epsilon^2 \left(\frac{\partial \eta_j}{\partial t} \frac{\partial \eta_i}{\partial x_j} - \eta_j \frac{\partial^2 \eta_i}{\partial x_j \partial t} \right) + O(\epsilon^3). \quad (8.34)$$

8.3. Эффективные переменные в декартовых координатах

Чтобы упростить анализ, мы вместо цилиндрических координат (s, φ, z) временно воспользуемся декартовыми координатами $(x, y, z) \equiv$

$\equiv (x_1, x_2, x_3)$. Следуя разд. 8.1, рассмотрим поля скорости и магнитные поля вида

$$\begin{aligned}\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}, t) &= U(x, z)\mathbf{i}_y + \epsilon \mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) + \epsilon^2 \mathbf{u}_P(x, z), \\ \tilde{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t) &= B(x, z)\mathbf{i}_y + \epsilon \mathbf{b}'(\mathbf{x}, t) + \epsilon^2 \mathbf{b}_P(x, z).\end{aligned}\quad (8.35)$$

Здесь $U\mathbf{i}_y$, $B\mathbf{i}_y$ — преобладающие тороидальные поля, \mathbf{u}_P и \mathbf{b}_P — полоидальные поля (так что $\mathbf{i}_y \cdot \mathbf{b}_P = \mathbf{i}_y \cdot \mathbf{u}_P = 0$) и $\langle \mathbf{u}' \rangle = \langle \mathbf{b}' \rangle = 0$, где угловые скобки теперь означают усреднение по координате y . Суть метода Соурда [198] заключается теперь в том, чтобы путем выбора функции $\eta(\mathbf{x}, t)$ "перестроить" члены, имеющие порядок $O(\epsilon)$, таким образом, чтобы преобразованные поля \mathbf{U} , \mathbf{B} приняли вид

$$\begin{aligned}\mathbf{U}(\mathbf{x}, t) &= U(x, z)(1 + O(\epsilon^2))\mathbf{i}_y + \epsilon^2 \mathbf{u}_{eP}(x, z) + \epsilon^2 \mathbf{u}''(\mathbf{x}, t), \\ \mathbf{B}(\mathbf{x}, t) &= B(x, z)(1 + O(\epsilon^2))\mathbf{i}_y + \epsilon^2 \mathbf{b}_{eP}(x, z) + \epsilon^2 \mathbf{b}''(\mathbf{x}, t),\end{aligned}\quad (8.36)$$

где $\langle \mathbf{u}'' \rangle = \langle \mathbf{b}'' \rangle = 0$ и определены эффективные поля \mathbf{u}_{eP} , \mathbf{b}_{eP} (или, как назвал их Брагинский [26], "эффективные переменные"). Подстановка вторых уравнений (8.35) и (8.36) в (8.31) и приравнивание членов порядка ϵ немедленно дает

$$\mathbf{b}'(\mathbf{x}, t) = \text{rot}(\eta(\mathbf{x}, t) \times B(x, z)\mathbf{i}_y) = B \frac{\partial \eta}{\partial y} - (\eta \cdot \nabla) B \mathbf{i}_y. \quad (8.37)$$

Аналогично получаем уравнение

$$\mathbf{u}'(\mathbf{x}, t) = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial y} \right) \eta - (\eta \cdot \nabla) U \mathbf{i}_y, \quad (8.38)$$

которое в принципе служит для определения η , если заданы \mathbf{u} и U . Действительно, далее проще считать заданной $\eta(\mathbf{x}, t)$, и тогда из уравнения (8.38) можно найти флуктуационную составляющую поля скорости.

Аналогично, из равенства (8.31) в приближении $O(\epsilon^2)$ находим полоидальную составляющую

$$\mathbf{b}_P(x, z) = \mathbf{b}_{eP}(x, z) + \frac{1}{2} \text{rot} \left\{ \langle \eta \times \frac{\partial \eta}{\partial y} \rangle_y B \mathbf{i}_y \right\}. \quad (8.39)$$

Альтернативно определив векторные потенциалы $a\mathbf{i}_y$ и $a_e\mathbf{i}_y$

$$\mathbf{b}_P = \text{rot}(a\mathbf{i}_y), \quad \mathbf{b}_{eP} = \text{rot}(a_e\mathbf{i}_y), \quad (8.40)$$

находим очевидное соотношение между

$$a_e = a + \tilde{\omega} B, \quad \text{где} \quad \tilde{\omega} = -\frac{1}{2} \langle \eta \times \partial \eta / \partial y \rangle_y. \quad (8.41)$$

Величина $\tilde{\omega}$ представляет собой псевдоскаляр (имеющий размерность

длины). Следовательно, он отличен от нуля только тогда, когда статистические (т.е. усредненные по y) свойства функции $\eta(\mathbf{x}, t)$ не обладают отражательной инвариантностью.

Соотношение между \mathbf{u}_{eP} и \mathbf{u}_P аналогично (8.39), но снова с тем отличием, что $V\partial/\partial y$ заменено на $\partial/\partial t + U\partial/\partial y$, т.е.

$$\mathbf{u}_{eP} = \mathbf{u}_P - \frac{1}{2} \text{rot} \left\{ \langle \eta \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial y} \right) \eta \rangle_y \mathbf{i}_y \right\}. \quad (8.42)$$

Если функция смещения η зависит только от \mathbf{x} (это соответствует стационарному полю возмущения), то аналогия между (8.39) и (8.42) становится точной.

Тот факт, что возмущающие поля в (8.36) имеют порядок $O(\epsilon^2)$, означает, что если $\lambda = 0$, то соответствующие уравнения, описывающие эволюцию $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ в главном порядке, совпадают с двумерными уравнениями, выведенными в разд. 3.6, но выраженными теперь в терминах эффективных полоидальных полей, а именно

$$\begin{aligned} \partial B / \partial t + \mathbf{U}_{eP} \cdot \nabla B &= \mathbf{V}_{eP} \cdot \nabla U, \\ \partial A_e / \partial t + \mathbf{U}_{eP} \cdot \nabla A_e &= 0, \end{aligned} \quad (8.43)$$

где $\mathbf{U}_{eP} = \epsilon^2 \mathbf{u}_{eP}$, $A_e = \epsilon^2 a_e$. Это справедливо в силу фундаментальной инвариантности уравнения индукции (8.17) относительно преобразования (8.20), сохраняющего в замороженности поля. Из (8.43) очевидно, что различие между \mathbf{V}_P и \mathbf{V}_{eP} будет существенным только тогда, когда $\nabla U \neq 0$, т.е. если усредненное течение обладает сдвигом. Аналогично, из (8.42) очевидно, что \mathbf{u}_{eP} отличается от \mathbf{u}_P , если $\nabla U \neq 0$ или η статистически однородна в плоскости (x, z) . Следовательно, именно пространственная однородность усредненных по y (или эквивалентно — по азимуту) характеристик течения приводит к естественному появлению эффективных переменных. Этот аспект теории Брагинского не имеет явного аналога в электродинамике усредненных полей, описанной в гл. 7.

8.4. Лагранжево преобразование, включающее слабые диффузионные эффекты

Применим теперь к уравнению индукции, записанному в виде

$$(\partial \tilde{\mathbf{V}} / \partial t - \tilde{\text{rot}} (\tilde{\mathbf{U}} \times \tilde{\mathbf{V}}))_i = -\lambda (\tilde{\text{rot}} \tilde{\text{rot}} \tilde{\mathbf{V}})_i, \quad (8.44)$$

преобразования (8.20), (8.23), (8.25). После умножения на $\partial x_k / \partial \tilde{x}_i$ левая сторона уравнения преобразуется, согласно разд. 8.2, к виду

$$(\partial \mathbf{V} / \partial t - \text{rot} (\mathbf{U} \times \mathbf{V}))_k. \quad (8.45)$$

А правая сторона после использования (8.21) — к виду

$$-\lambda \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_i} \epsilon_{ijm} \frac{\partial x_p}{\partial \tilde{x}_j} \frac{\partial}{\partial x_p} (\text{rot } \tilde{\mathbf{B}})_m = -\lambda \epsilon_{kpq} \frac{\partial \tilde{x}_m}{\partial x_q} \frac{\partial}{\partial x_p} (\text{rot } \tilde{\mathbf{B}})_m, \quad (8.46)$$

тогда

$$(\text{rot } \tilde{\mathbf{B}})_m = \epsilon_{mrs} \frac{\partial \tilde{B}_s}{\partial \tilde{x}_r} = \epsilon_{mrs} \frac{\partial}{\partial x_i} (B_j \frac{\partial \tilde{x}_s}{\partial x_j}) \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_r}. \quad (8.47)$$

Следовательно, в силу тождеств

$$\epsilon_{kpq} \frac{\partial^2 \tilde{x}_m}{\partial x_p \partial x_q} = 0, \quad \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial \tilde{x}_s}{\partial x_i} \frac{\partial x_i}{\partial \tilde{x}_r} \right) = \frac{\partial}{\partial x_j} \delta_{rs} = 0, \quad (8.48)$$

(8.46) сводится к выражению

$$(\text{rot } \mathcal{E}')_k + \lambda (\Delta \mathbf{B})_k, \quad (8.49)$$

где

$$\mathcal{E}'_i(\mathbf{x}, t) = \alpha'_{ij} B_j + \beta'_{ijk} \partial B_j / \partial x_k \quad (8.50)$$

и

$$\alpha'_{ij} = \lambda \epsilon_{ikl} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_p} \frac{\partial}{\partial x_j} \left(\frac{\partial x_l}{\partial \tilde{x}_p} \right),$$

$$\beta'_{ijk} = \lambda \epsilon_{ijp} \left(\frac{\partial x_p}{\partial \tilde{x}_r} \frac{\partial x_k}{\partial \tilde{x}_r} - \delta_{pk} \right). \quad (8.51)$$

Поэтому уравнение (8.44) принимает вид

$$\partial \mathbf{B} / \partial t - \text{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) = \text{rot } \mathcal{E}' + \lambda \Delta \mathbf{B}. \quad (8.52)$$

Уравнение (8.52) и выражение (8.50) для \mathcal{E}' сильно напоминают уравнения для средних полей, с которыми мы имели дело в гл. 7. Однако заметим, что в данном случае член $\text{rot } \mathcal{E}'$ имеет *чисто диффузионное происхождение*. Как и в случае случайных волн, описанном в разд. 7.8, α'_{ij} и β'_{ijk} при $\lambda \rightarrow 0$ имеют порядок $O(\lambda)$. Ранее мы отмечали, что хотя диффузия приводит к естественному затуханию поля, именно от нее решающим образом зависит возможность возбуждения поля. В теории Брагинского, как и в разд. 7.7, именно диффузия сдвигает фазу возмущений поля относительно возмущений скорости, приводя к появлению средней тороидальной электродвижущей силы (пропорциональной λ), которая обеспечивает замыкание динамо-цикла.

8.5. Уравнения динамо для почти прямолинейного движения

Как и в разд. 8.3, мы снова ограничимся рассмотрением почти двумерного случая. Тогда среднее от \mathfrak{E}' по y равно

$$\bar{\mathfrak{E}}_i(x, z) = \alpha_{ij} B_j + \beta_{ijk} \partial B_j / \partial x_k, \quad (8.53)$$

где в главном порядке по ϵ

$$\alpha_{ij} = \langle \alpha'_{ij} \rangle = \lambda \epsilon^2 \epsilon_{ikl} \langle \eta_{k,m} \eta_{l,mj} \rangle, \quad (8.54)$$

$$\beta_{ijk} = \langle \beta'_{ijk} \rangle = \lambda \epsilon^2 \epsilon_{ijp} \langle \eta_{p,r} \eta_{k,r} \rangle. \quad (8.55)$$

При $\lambda = O(\epsilon^2)$ оба эти псевдотензора имеют порядок $O(\epsilon^4)$. Для \mathbf{B} , описываемого формулой (8.36), мы имеем в главном порядке

$$\bar{\mathfrak{E}}_y \sim \alpha_{22} B = O(\epsilon^4). \quad (8.56)$$

Отметим, что в этом порядке можно пренебречь в (8.53) членом с β_{ijk} . Поэтому обобщение второго уравнения (8.43) на случай, в котором учтены диффузионные эффекты, имеет вид ($\alpha_{22} = \alpha$)

$$\partial A_e / \partial t + \mathbf{U}_{eP} \cdot \nabla A_e = \alpha B + \lambda \Delta A_e. \quad (8.57)$$

Заметим, что все три члена, изменяющие $\partial A_e / \partial t$, имеют порядок $O(\epsilon^4)$.

Аналогично, в общем случае ($\text{rot } \bar{\mathfrak{E}}_y = O(\epsilon^4)$), и в усредненном по y -компоненте уравнении (8.52) этот член пренебрежимо мал по сравнению с диффузионным членом $\lambda \Delta \mathbf{B}$. Следовательно, обобщение первого уравнения (8.43) имеет простой вид:

$$\partial B / \partial t + \mathbf{U}_{eP} \cdot \nabla B = \mathbf{V}_{eP} \cdot \nabla U + \lambda \Delta B. \quad (8.58)$$

В этом уравнении все три члена, изменяющие $\partial B / \partial t$, имеют порядок $O(\epsilon^2)$.

Если не учитывать появления эффективных переменных, то уравнения (8.57), (8.58) в точности совпадают с выведенными в гл. 7 уравнениями электродинамики усредненных полей при условии, что в "тороидальном" уравнении (8.58) генерация тороидального поля членом $\mathbf{V}_{eP} \cdot \nabla U$ преобладает над возможной генерацией этого поля α -эффектом. В противоположность этому член αB в (8.57) — единственный источник генерации поля A_e и, следовательно, полоидального поля \mathbf{V}_{eP} , и поэтому он играет важнейшую роль.

Выражение (8.54) для α_{ij} тесно связано с выражением (7.77), полученным в рамках приближения сглаживания первого порядка. Чтобы показать это, предположим временно, что усредненные по y характеристики поля скорости не зависят от x и z (или зависят так слабо,

что их можно считать постоянными). В этом случае из (8.38) имеем

$$\mathbf{u}' = \left(\frac{\partial}{\partial t} + U \frac{\partial}{\partial y} \right) \boldsymbol{\eta} , \quad (8.59)$$

а соответствующие фурье-преобразования этих величин связаны соотношением (обозначения см. в разд. 7.8)

$$\tilde{\mathbf{u}}' = (-i\omega + iUk_2) \tilde{\boldsymbol{\eta}} . \quad (8.60)$$

Поскольку фурье-преобразования $\eta_{k,m}$, $\eta_{l,mj}$ равны соответственно $ik_m \tilde{\eta}_k$ и $-k_m k_j \tilde{\eta}_l$, то (8.54) можно выразить через спектральные характеристики

$$\alpha_{ij} = i\lambda \varepsilon_{ikl} \iint \frac{k^2 k_j \Phi_{kl}(\mathbf{k}, \omega) d\mathbf{k} d\omega}{(\omega - Uk_2)^2} , \quad (8.61)$$

где $\Phi_{kl}(\mathbf{k}, \omega)$ – спектральный тензор возмущенного поля скорости \mathbf{u}' . В пределе слабой диффузии $\lambda k^2 \ll \omega$ (для всех \mathbf{k} , ω , для которых спектральный тензор не обращается в нуль), и при естественной замене ω^2 на $(\omega - Uk_2)^2$, учитывающей средний перенос со скоростью U в направлении y , это выражение согласуется с (7.77). Отметим, что в этой важной области перекрытия теории Брагинского и электродинамики усредненных полей в теории Брагинского при $\lambda \rightarrow 0$, бесспорно, $\alpha_{ij} \rightarrow 0$. Мы уже отмечали, что этот результат справедлив [см. (7.83)], когда в спектре скорости отсутствуют компоненты с нулевыми частотами (или, на языке настоящей главы, компоненты с волновой скоростью ω/k_2 , равной компоненте средней скорости U). Если спектр скорости *содержит* такие компоненты, то $\boldsymbol{\eta}(\mathbf{x}, t)$ может расходиться при $t \rightarrow \infty$, и метод Брагинского, основанный на предположении $|\boldsymbol{\eta}| = O(1)$, станет некорректным.

Разумеется, в общем случае, когда U сильно зависит от x и y (как это должно быть, если существен член $\mathbf{B}_p \cdot \nabla U$, генерирующий y -компоненту поля), то усредненные величины типа $\langle \eta_{k,m} \eta_{l,mj} \rangle$ благодаря взаимодействию средних и возмущенных полей также будут изменяться при изменении x и z . Следовательно, в общем случае α_{ij} , описываемое формулой (8.54), также является функцией x и z .

8.6. Соответствующие результаты для почти осесимметричных течений

Вернемся теперь к обозначениям разд. 8.1, где использовались цилиндрические координаты (s, φ, z) . Соотношение между \mathbf{b}' и $\boldsymbol{\eta}$ принимает теперь вид [ср. (8.37)]

$$\mathbf{b}' = \text{rot}(\boldsymbol{\eta} \times \mathbf{i}_\varphi B). \quad (8.62)$$

Спроецируем это уравнение на меридиональную плоскость [см. (8.5)]

$$\mathbf{b}'_M = \frac{B}{s} \frac{\partial_1}{\partial \varphi} \eta_M, \quad (8.63)$$

где оператор $\partial_1/\partial\varphi$ для любого вектора \mathbf{f} определен равенством

$$\frac{\partial_1 \mathbf{f}}{\partial \varphi} = \mathbf{i}_s \frac{\partial f_s}{\partial \varphi} + \mathbf{i}_\varphi \frac{\partial f_\varphi}{\partial \varphi} + \mathbf{i}_z \frac{\partial f_z}{\partial \varphi} = \frac{\partial \mathbf{f}}{\partial \varphi} - \mathbf{i}_z \times \mathbf{f}. \quad (8.64)$$

Аналогичное соотношение имеется между \mathbf{u}'_M и η_M :

$$\mathbf{u}'_M = \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{s} \frac{\partial_1}{\partial \varphi} \right) \eta_M, \quad (8.65)$$

откуда в принципе при заданных \mathbf{u}'_M и U определяется η_M .

Эффективные переменные определяются в данном случае формулами, очень похожими на (8.39) и (8.42), а именно

$$\mathbf{b}_{eP} = \mathbf{b}_P + \text{rot}(\omega B \mathbf{i}_\varphi), \quad \mathbf{u}_{eP} = \mathbf{u}_P + \text{rot}(\tilde{\omega}_1 U \mathbf{i}_\varphi), \quad (8.66)$$

где теперь

$$\tilde{\omega} = -\frac{1}{2} \langle \boldsymbol{\eta} \times \frac{1}{s} \frac{\partial_1 \boldsymbol{\eta}}{\partial \varphi} \rangle_{az},$$

$$\tilde{\omega}_1 = -\frac{1}{2U} \langle \boldsymbol{\eta} \times \left(\frac{\partial}{\partial t} + \frac{U}{s} \frac{\partial_1}{\partial \varphi} \right) \boldsymbol{\eta} \rangle_{az}. \quad (8.67)$$

Эволюционные уравнения для $B(s, z, t)$ и $A_e(s, z, t)$ аналогично уравнениям (8.58) и (8.57) имеют вид

$$\frac{\partial B}{\partial t} + s(\mathbf{U}_{eP} \cdot \nabla) \frac{B}{s} = s(\mathbf{B}_{eP} \cdot \nabla) \frac{U}{s} + \lambda \left(\Delta - \frac{1}{s^2} \right) B, \quad (8.68)$$

$$\frac{\partial A_e}{\partial t} + \frac{1}{s}(\mathbf{U}_{eP} \cdot \nabla) s A_e = \alpha B + \lambda \left(\Delta - \frac{1}{s^2} \right) A_e, \quad (8.69)$$

а выражение для α , аналогичное (8.54) [198], дается формулой

$$\begin{aligned} \frac{\alpha}{\lambda \epsilon^2} = & \frac{2}{s} \langle \eta_{z,s} \eta_{s,s\varphi} + \frac{1}{s^2} \eta_{z,\varphi} \eta_{s,\varphi\varphi} + \eta_{zz} \eta_{s,z\varphi} \rangle + \\ & + \frac{2}{s^2} \langle s^{-1} \eta_{s,\varphi} \eta_{z,\varphi} + \eta_{z,z} \eta_{z,\varphi} \rangle. \end{aligned} \quad (8.70)$$

Здесь первая группа членов абсолютно аналогична группе членов, имеющих в (8.54). Вторая группа членов появляется из-за криволинейности цилиндрической системы координат и может быть получена прежде всего путем преобразования члена $\alpha_{ij} B_j$ в (8.53) к этой системе координат.

Уравнения (8.68) и (8.69) правильно описывают эволюцию полей $\epsilon^{-2} A_e$ и B с точностью до ϵ^2 . Уравнения были получены в этом виде Брагинским [26, 27], который использовал метод прямого разложения без обращения к свойству лагранжевой инвариантности. Однако этот метод требует большого труда, а псевдолагранжев подход Соуорда [198] может рассматриваться как важное и эффективное упрощение. В работе [215] (см. также [216]) разложение Брагинского было продолжено до членов порядка $O(\epsilon^3)$ и показано, что вид уравнений не изменяется, однако $\tilde{\omega}$, $\tilde{\omega}_1$ и α , описываемые формулами (8.67) и (8.70), несколько изменяются; поправки к $\tilde{\omega}$ и $\tilde{\omega}_1$ можно получить, учтя члены порядка ϵ^3 в разложениях (8.31) и (8.33). Аналогично можно получить поправку к α ($=\alpha_{22}$) путем учета в (8.51) членов порядка $O(\epsilon^3)$. Очевидно, что эта процедура приведет к выражению вида

$$\alpha / \lambda \epsilon^2 = \Gamma_0 + \epsilon \Gamma_1, \quad (8.71)$$

где Γ_0 — правая часть уравнения (8.70), а Γ_1 содержит усредненное выражение, пропорциональное η^1 .

Если учесть члены порядка ϵ^4 [198], то вид уравнений (8.68) и (8.69) изменяется, во-первых, из-за появления в дополнение к α_{22} других компонент α и, во-вторых, из-за β -членов, появляющихся в этом приближении в (8.53).

8.7. Ограниченность псевдолагранжева подхода

Рассмотрение Соуорда [198] проводится в столь общем виде, что большей частью не нуждается в требовании малости функций смещения. Предполагается, что магнитное число Рейнольдса велико и рассматриваемые поля скорости²⁾ $\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{x}})$ обладают тем свойством, что существует такое непрерывное $(1-1)$ преобразование $\tilde{\mathbf{x}} \rightarrow \mathbf{x}$, что соответствующее поле скорости $\mathbf{U}(\mathbf{x})$, описываемое формулой (8.25), имеет вид

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}) = U(s, z) \mathbf{i}_\varphi + R_m^{-1} \mathbf{u}_M(s, z) + R_m^{-1} \mathbf{u}''(\mathbf{x}), \quad (8.72)$$

¹⁾ Аналогичная поправка к результату (7.77), выведенному в приближении сглаживания первого порядка, может быть получена путем систематического разложения по степеням амплитуды флуктуации скорости. Эта поправка также содержит кубический функционал от поля скорости (взвешенный интеграл в \mathbf{k} -пространстве от фурье-преобразования тройной корреляции скорости).

²⁾ Для простоты ограничимся обсуждением случая стационарных полей скорости, хотя общая теория Соуорда применима также к нестационарным полям.

где $\langle \mathbf{u}'' \rangle_{az} = 0$. Широкий выбор преобразований означает, что существует соответственно большое семейство полей скорости $\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{x}})$, обладающих этим свойством. Тем не менее такие поля скорости представляют собой особый класс полей по следующей причине.

Легко убедиться [с помощью (8.21)], что при мгновенном преобразовании

$$U_k(\mathbf{x}) = \tilde{U}_i(\tilde{\mathbf{x}}) \partial x_k / \partial \tilde{x}_i \quad (8.73)$$

получим

$$(d\mathbf{x} \times \mathbf{U}(\mathbf{x}))_i = (d\tilde{\mathbf{x}} \times \tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{x}}))_i \partial \tilde{x}_j / \partial \tilde{x}_i \quad (8.74)$$

Отсюда следует, что линии тока $\tilde{\mathbf{U}}$ -поля переходят в линии тока \mathbf{U} -поля. Пусть \mathbf{A} и $\tilde{\mathbf{A}}$ – векторные потенциалы \mathbf{U} и $\tilde{\mathbf{U}}$, и пусть

$$\mathcal{K} = \int \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} dV = \int \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} dV \quad (8.75)$$

– интеграл по объему V , на (фиксированной) поверхности S которого $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = \mathbf{n} \cdot \tilde{\mathbf{U}} = 0$. Равенство двух интегралов в (8.75) вытекает из того, что \mathcal{K} является топологической мерой \mathbf{U} - или $\tilde{\mathbf{U}}$ -поля (ср. обсуждение в разд. 2.1), т.е. величиной, которая, очевидно, инвариантна относительно непрерывного преобразования $\mathbf{x} \rightarrow \tilde{\mathbf{x}}$, сохраняющего тождественность линий тока. Далее векторный потенциал поля $U(s, z)\mathbf{i}_\varphi$, очевидно, полоидален, а потому, в силу (8.72), имеем

$$\int \mathbf{U} \cdot \mathbf{A} dV = O(R_m^{-1}). \quad (8.76)$$

Следовательно, и $\int \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} dV = O(R_m^{-1})$. Обратно, если мы рассмотрим поле скорости $\tilde{\mathbf{U}}(\tilde{\mathbf{x}})$ с $\int \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} dV = O^m(1)$ при $R_m \rightarrow \infty$, то не существует непрерывного преобразования $\mathbf{x} = \mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}})$, для которого соответствующая скорость $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ описывается формулой (8.72).

Говоря проще и менее точно, в пределе $R_m \rightarrow \infty$ степень зацепления линий тока поля скорости (8.72) крайне мала, и только к полям скорости с такой же малой степенью зацепления можно применять лагранжев подход Соурда.

Если

$$\tilde{\mathbf{U}}(\mathbf{x}) = U(s, z)\mathbf{i}_\varphi + \epsilon \mathbf{u}'(\mathbf{x}) + \epsilon^2 \mathbf{u}_P(s, z), \quad (8.77)$$

где, как это предполагалось в предыдущих разделах $\langle \mathbf{u}' \rangle_{az} = 0$ и $\epsilon = O(R_m^{-1/2})$, то

$$\int \tilde{\mathbf{U}} \cdot \tilde{\mathbf{A}} dV = O(\epsilon^3) = O(R_m^{-1}) \quad (8.78)$$

и, следовательно, не исключено существование преобразующей функции $\mathbf{x}(\tilde{\mathbf{x}})$.

8.8. Условия сшивания и внешнее поле

Рассмотрим земное магнитное поле и предположим, что поверхность раздела ядро — мантия S представляет собой сферу $r = R_C$, а среда во внешней области \hat{V} ($r > R_C$) является изолятором (влияние слабой проводимости мантии можно учесть в улучшенной теории). Тогда поле $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}, t)$ в области \hat{V} потенциально и непрерывным образом сшивается во всех порядках по ϵ с полным полем $\hat{\mathbf{B}}(\hat{\mathbf{x}}, t)$ во внутренней области V . В главном порядке внутреннее поле $B(s, z) \mathbf{i}_\varphi$ в теории Брагинского чисто тороидально, а поскольку внешнее поле чисто полоидально (ср. разд. 6.11), то B должно удовлетворять условию

$$B(s, z) = 0 \quad \text{на} \quad r^2 = s^2 + z^2 = R_C^2. \quad (8.79)$$

Среднее поле во внешней области, назовем его $\hat{\mathbf{B}}_P(s, z)$, находится из равенств

$$\hat{\mathbf{B}}_P(s, z) = \nabla \Psi(s, z), \quad \Delta \Psi = 0 \quad (8.80)$$

и удовлетворяет граничному условию

$$\hat{\mathbf{B}}_P = \epsilon^2 \mathbf{b}_P(s, z) = \epsilon^2 \text{rot}(a \mathbf{i}_\varphi) \quad \text{на} \quad r = R_C. \quad (8.81)$$

Далее, на поверхности S функция смещения $\eta(\mathbf{x}, t)$ удовлетворяет условию $\mathbf{n} \cdot \boldsymbol{\eta} = 0$ (а также если учесть вязкие эффекты, $\mathbf{n} \times \boldsymbol{\eta} = 0$); таким образом, псевдоскаляр $\tilde{\omega}$, определяемый формулой (8.67), обращается в нуль на S . Кроме того,

$$(\mathbf{n} \cdot \nabla) \tilde{\omega} B = \tilde{\omega} (\mathbf{n} \cdot \nabla) B + B (\mathbf{n} \cdot \nabla) \tilde{\omega} = 0 \quad \text{на} \quad S. \quad (8.82)$$

Отсюда следует, что

$$a_e = a \quad \text{и} \quad (\mathbf{n} \cdot \nabla) a_e = (\mathbf{n} \cdot \nabla) a \quad \text{на} \quad S, \quad (8.83)$$

где $a_e = a + \tilde{\omega} B$; таким образом, (8.81) принимает вид

$$\hat{\mathbf{B}}_P = \epsilon^2 \text{rot}(a_e \mathbf{i}_\varphi) \quad \text{на} \quad r = R_C. \quad (8.84)$$

Следовательно, внешнее поле непрерывным образом сшивается с внутренним *эффективным* полем, а его отношение к внутреннему тороидальному полю пропорционально $O(\epsilon^2)$.

Интерес представляет также и флуктуационная составляющая внешнего поля $\hat{\mathbf{B}}$, поскольку именно эта составляющая дает наблюдаемые вековые вариации и медленный сдвиг дипольного момента $\boldsymbol{\mu}^{(1)}(t)$ относительно оси вращения. Тот факт, что ось вращения и магнитная ось почти совпадают (см. разд. 4.3), свидетельствует о том, что кориолисовы силы, возникающие вследствие вращения, играют определяющую роль в динамике движений в ядре. Некоторое несовпадение направлений осей говорит о том, что систематические отклонения от

точной осевой симметрии могут быть существенны в теории земного динамо. Внутренне флуктуационное поле имеет порядок $O(\epsilon)$ и может проникать во внешнюю область только под влиянием диффузии; при $\lambda = O(\epsilon^2)$ это дает вклад в $\hat{\mathbf{B}}$ порядка ϵ^3 . Другой вклад также порядка $O(\epsilon^3)$ возникает из-за искажения полем скорости $\epsilon \mathbf{u}'$ среднего полоидального поля $\epsilon^2 \mathbf{b}_p$. Брагинский [26] показал, что если поле скорости $\epsilon \mathbf{u}'$ стационарно или во всяком случае не изменяется за характерное время R_C/U_0 для среднего тороидального течения, то подходящее граничное условие для определения $\hat{\mathbf{B}}$ представляет собой суперпозицию этих двух эффектов¹⁾:

$$\hat{B}'_r = 2\epsilon \frac{\lambda}{U} \frac{\partial B}{\partial r} \frac{\partial \eta_r}{\partial r} + \epsilon^3 \left(b_r \frac{\partial \eta_r}{\partial r} - \frac{\eta_\theta}{r} \frac{\partial b_r}{\partial \theta} \right) \text{ на } r = R_C, \quad (8.85)$$

где b_r — радиальная составляющая \mathbf{b}_p . Если нестационарная функция $\eta(\mathbf{x}, t)$ может быть разложена по "азимутальным волнам" $\exp m(\phi - \omega t)$, то [27] каждая такая фурье-компонента вносит в \hat{B}'_r вклад вида (8.85), где U заменено на $U - \omega s$ тороидальную составляющую средней скорости относительно системы отсчета, которая вращается с фазовой угловой скоростью ω рассматриваемой компоненты.

Граничное условие (8.85) однозначно определяет внешнее флуктуационное поле $\hat{\mathbf{B}}' = \nabla \Psi'$ (разумеется, при дополнительном условии $\Psi' = O(r^{-2})$ на бесконечности). Из линейности соотношения между $\hat{\mathbf{B}}$ и η вытекает, что каждая фурье-компонента $\sim e^{im\phi}$ в η генерирует соответствующую фурье-компоненту в $\hat{\mathbf{B}}'$. В частности, если $m = 1$, то генерируется потенциал Ψ' вида

$$A_1 \epsilon^3 r^{-2} P_1^1(\cos \theta) \cos(\phi - \omega t), \quad (8.86)$$

т.е. диполь, момент которого вращается в экваториальной плоскости с угловой скоростью ω . Объединив его с осесимметричным диполем, имеющим потенциал

$$A_0 \epsilon^2 r^{-2} P_1(\cos \theta), \quad (8.87)$$

мы получаем (исходя из представлений о движениях в ядре) возможное объяснение наклона суммарного вектора дипольного момента Земли и способа его дрейфа относительно оси вращения. Наблюдаемый угол наклона ($\sim 11^\circ$), разумеется, не бесконечно мал, он соответст-

¹⁾ Если жидкость вязкая и $U = 0$ на поверхности $r = R_C$, то кажется, что в первом члене (8.85) появляется сингулярность. Однако в отсутствие проскальзывания на $r = R_C$ и $\partial \eta_r / \partial r = 0$. Соответствующее изменение условия (8.85) требует детального исследования вязкого пограничного слоя на $r = R_C$.

вует отношению $A_1 \epsilon^3 / A_0 \epsilon^4 = A_1 \epsilon / A_0$ (цифры взяты из табл. 4.2), т.е. $R_m \sim \epsilon^{-2} \sim 25$. Эта величина (как признавал Брагинский), по-видимому, недостаточно высока для применимости разложений "по большим R_m ", хотя эти разложения, возможно, полезны в качестве первого шага в правильном направлении.

СТРУКТУРА И РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ ДИНАМО

9.1. Модели динамо типа α^2 и $\alpha\omega$

В предыдущих двух главах было показано, что в большинстве случаев среднее поле, которое теперь будет обозначаться $\mathbf{V}(\mathbf{x}, t)$ (причем под средним в зависимости от контекста будет пониматься поле, усредненное по времени или по декартовой координате, или по азимутальному углу), удовлетворяет уравнению вида

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = \text{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{V}) + \text{rot} \mathfrak{E} + \lambda \Delta \mathbf{V}, \quad (9.1)$$

где

$$\mathfrak{E}_i = \alpha_{ij} V_j + \beta_{ijk} \partial V_j / \partial x_k \quad (9.2)$$

и где α_{ij} и β_{ijk} определяются средней скоростью $\mathbf{U}(\mathbf{x}, t)$, статистическими свойствами флуктуационного поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и параметром λ . В методе усредненного поля гл. 7 полезно рассматривать идеализированный изотропный случай, когда

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad \beta_{ijk} = \beta \epsilon_{ijk}, \quad \mathfrak{E} = \alpha \mathbf{V} - \beta \text{rot} \mathbf{V}. \quad (9.3)$$

Однако следует признать, что эти выражения вряд ли реалистичны, если фоновая турбулентность (или поле случайных волн) сильно анизотропны. Ясно, например, что анизотропия появится, если преобладающую роль в определении статистических свойств \mathbf{u} -поля будут играть кориолисовы силы.

В модели Брагинского, рассмотренной в гл. 8, в силу предположения, что главной составляющей поля скорости является сильное тороидальное течение $U(s, z) \mathbf{i}_\phi$, вводится сильная анизотропия с самого начала. В этой теории "локальное" выражение для \mathfrak{E} типа (9.2) получается не потому, что мал масштаб флуктуаций скорости (например, флуктуации, пропорциональные $e^{i\Phi}$, изменяются на характеристической длине, по порядку величины равной глобальному масштабу L), а скорее потому, что отклонение жидкой частицы от ее усредненного по ϕ положения мало по сравнению с L . Существенная часть генерируемой э.д.с. \mathfrak{E} в силу использования эффективных переменных оказывается "скрытой"; "явная" часть э.д.с. может быть описана

в цилиндрических координатах (s, φ, z) формулами

$$\mathfrak{E} = \mathfrak{E}_\varphi \mathbf{i}_\varphi, \quad \mathfrak{E}_\varphi = \alpha B_\varphi. \quad (9.4)$$

Таким образом, в теории Брагинского *эффективные* выражения для α_{ij} и β_{ijk} в главном порядке по малому параметру $\lambda^{1/2}$ имеют вид

$$\alpha_{ij} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad \beta_{ijk} = 0 \quad (9.5)$$

относительно локальных декартовых координат (x, y, z) , ориентированных соответственно вдоль направлений увеличения координат (s, φ, z) .

Если \mathbf{U} , \mathbf{V} и \mathfrak{E} осесимметричны, то, как мы показали, (9.1) можно заменить двумя скалярными уравнениями. Записав

$$\mathbf{U} = s\omega(s, z) \mathbf{i}_\varphi + \mathbf{U}_P, \quad \mathbf{V} = B(s, z) \mathbf{i}_\varphi + \mathbf{V}_P, \quad \mathfrak{E} = \mathfrak{E}_\varphi \mathbf{i}_\varphi + \mathfrak{E}_P \quad (9.6)$$

и полагая $\mathbf{V}_P = \text{rot } A(s, z) \mathbf{i}_\varphi$, имеем

$$\partial B / \partial t + s(\mathbf{U}_P \cdot \nabla)(s^{-1}B) = s(\mathbf{V}_P \cdot \nabla)\omega + (\text{rot } \mathfrak{E}_P)_\varphi + \lambda(\Delta - s^{-2})B \quad (9.7)$$

и

$$\partial A / \partial t + s^{-1}(\mathbf{U}_P \cdot \nabla)(sA) = \mathfrak{E}_\varphi + \lambda(\Delta - s^{-2})A. \quad (9.8)$$

Если \mathfrak{E} описывается выражением (9.3), то уравнения (9.7), (9.8) принимают вид

$$\begin{aligned} \partial B / \partial t + s(\mathbf{U}_P \cdot \nabla)(s^{-1}B) &= s(\mathbf{V}_P \cdot \nabla)\omega + [\text{rot } (\alpha \mathbf{V}_P)] \cdot \mathbf{i}_\varphi + \\ &+ \lambda_e(\Delta - s^{-2})B, \end{aligned} \quad (9.9)$$

$$\partial A / \partial t + s^{-1}(\mathbf{U}_P \cdot \nabla)(sA) = \alpha B + \lambda_e(\Delta - s^{-2})A, \quad (9.10)$$

где $\lambda_e = \lambda + \beta$ — эффективный коэффициент диффузии для среднего магнитного поля; причем в (9.9) и (9.10) мы предположили для простоты, что β (а потому и λ_e) постоянно.

В правой части уравнения (9.9) имеются два члена, содержащие \mathbf{V}_P , и в зависимости от того, какой из них преобладает, мы получаем два типа динамо. По порядку величины отношение этих двух членов равно

$$\frac{|s(\mathbf{V}_P \cdot \nabla)\omega|}{|\text{rot } (\alpha \mathbf{V}_P)|} = O\left(\frac{L^2 \omega'_0}{\alpha_0}\right), \quad (9.11)$$

где α_0 и ω'_0 — типичные значения α и $|\nabla\omega|$. Если $|\alpha_0| \gg |L^2 \omega'_0|$, то в (9.9) можно пренебречь членом с дифференциальным вращением,

и мы имеем просто

$$\partial B / \partial t + s (\mathbf{U}_P \cdot \nabla) (s^{-1} B) = [\text{rot} (\alpha \mathbf{B}_P)] \cdot \mathbf{i}_\varphi + \lambda_e (\Delta - s^{-2}) B. \quad (9.12)$$

Здесь α -эффект действует в качестве источника полоидального поля [благодаря члену αB в уравнении (9.10)] и в качестве источника тороидального поля [член $\text{rot} (\alpha \mathbf{B}_P)$ в уравнении (9.12)]. Динамо, которые определяются двукратным действием α -эффекта, называются " α^2 -динамо".

С другой стороны, если $|\alpha_0| \ll |L^2 \omega'_0|$, то в уравнении (9.9) преобладает член с дифференциальным вращением, и, таким образом,

$$\partial B / \partial t + s (\mathbf{U}_P \cdot \nabla) s^{-1} B = s (\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega + \lambda_e (\Delta - s^{-2}) R. \quad (9.13)$$

Теперь тороидальное поле генерируется дифференциальным вращением, а полоидальное — α -эффектом. Динамо, которые функционируют таким образом, называются " $\alpha\omega$ -динамо". Следует отметить, что если не обращать внимание на различие между действительными и эффективными переменными, то (9.10) и (9.13) в точности совпадают с уравнениями (8.68) и (8.69), полученными Брагинским, где подразумевается, что предположение $|\alpha_0| \ll |L^2 \omega'_0|$ выполнено. Действительно, из выражения (8.61) следует, что $|\alpha_0| \sim \lambda u_0^2 / LU_0^2 \sim R_m^{-2} U_0$, и таким образом, при $L^2 |\omega'_0| \sim U_0$ в модели Брагинского с $R_m \gg 1$

$$|\alpha_0 / L^2 \omega'_0| \sim R_m^{-2} \ll 1. \quad (9.14)$$

9.2. α^2 -динамо в безграничном пространстве

Чтобы рассмотреть действие динамо в простейшей форме, предположим, что среда занимает неограниченный объем V , $U \equiv 0$, а э.д.с. \mathcal{E} определяется выражением (9.3) с постоянными во времени и не зависящими от координат коэффициентами α и β . Тогда уравнение (9.1) принимает вид

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \alpha \text{rot } \mathbf{B} + \lambda_e \Delta \mathbf{B}. \quad (9.15)$$

Пусть теперь $\hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$ — произвольное "бессиловое" поле

$$\text{rot } \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) = K \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}), \quad (9.16)$$

где K — постоянная. Примеры таких полей приведены в разд. 2.4. Для бессилового поля

$$\Delta \hat{\mathbf{B}} = -\text{rot } \text{rot } \hat{\mathbf{B}} = -K^2 \hat{\mathbf{B}}, \quad (9.17)$$

и если $\mathbf{B}(\mathbf{x}, 0) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x})$, то, как это следует из (9.15),

$$\mathbf{B}(\mathbf{x}, t) = \hat{\mathbf{B}}(\mathbf{x}) e^{pt}, \quad (9.18)$$

где

$$p = \alpha K - \lambda_e K^2. \quad (9.19)$$

Следовательно, напряженность поля экспоненциально нарастает (сохраняя бессиловую структуру), если

$$\alpha K > \lambda_e K^2, \quad (9.20)$$

т.е. когда начальный масштаб изменения поля $L = |K|^{-1}$ достаточно велик.

Предположим для определенности, что $\alpha > 0$, так что условие роста принимает вид

$$0 < K < K_c = \alpha / \lambda_e. \quad (9.21)$$

При $K = \frac{1}{2} K_c$ скорость роста p_m максимальна и равна

$$p_m = \alpha^2 / 4\lambda_e. \quad (9.22)$$

Для обеспечения непротиворечивости двухмасштабного подхода, развитого в гл. 7, мы потребуем, чтобы величина $K_c l (= l/L)$ была малой. Это условие, конечно, выполнено для случая турбулентности с $R_m \ll 1$. Тогда, как это следует из (7.90) и (7.99)

$$\alpha \sim l u_0^2 / \lambda, \quad \beta \sim (l u_0)^2 / \lambda \quad (\ll \lambda), \quad (9.23)$$

и поэтому

$$K_c l \sim (l u_0 / \lambda)^2 = R_m^2 \ll 1. \quad (9.24)$$

Аналогично, в случае волнового поля, у которого отсутствуют компоненты с нулевой частотой и имеется спектральный пик на частоте $\omega_0 (= \tau_0^{-1})$ и волновом числе $k_0 (= l^{-1})$, которые удовлетворяют соотношению

$$\omega_0 \gg \lambda k_0^2, \quad (9.25)$$

выражения (7.78) и (7.98) приводят к оценкам

$$\alpha \sim \lambda \tau_0^2 l^{-3} u_0^2, \quad \beta \sim \lambda (u_0 \tau_0 / l)^2 \ll \lambda. \quad (9.26)$$

Таким образом [при выполнении условия (7.29)],

$$K_c l \sim (u_0 \tau_0 / l)^2 \ll 1. \quad (9.27)$$

Однако, если (что отнюдь не очевидно) α и β стремятся при $\lambda \rightarrow 0$ к конечным пределам и в волновом спектре *присутствуют* компоненты с нулевой частотой, имеется потенциальное противоречие. В этом случае из соображений размерности ясно, что

$$\alpha \sim u_0, \quad \beta \sim u_0 l \quad (> \lambda), \quad (9.28)$$

и поэтому

$$K_c / l = \alpha l / \lambda_e = O(1). \quad (9.29)$$

При выполнении последнего условия среда в действительности была бы наиболее неустойчива относительно роста возмущений магнитного поля, характеристический масштаб которых по порядку величины совпадает с масштабом фонового \mathbf{u} -поля. Но этот вывод не совместим с двухмасштабным подходом, который привел к уравнению (9.15). Еще раз подчеркнем, что следует с осторожностью относиться к выводам, основанным на оценках (9.28).

Конечно, оценка $\alpha \sim u_0$ справедлива только тогда, когда \mathbf{u} -поле *сильно спирально* в том смысле, что

$$|\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle| \sim l^{-1} \langle \mathbf{u}^2 \rangle. \quad (9.30)$$

В случае *слабо спирального* поля скорости, когда

$$|\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle| = \epsilon l^{-1} \langle \mathbf{u}^2 \rangle, \quad \epsilon \ll 1, \quad (9.31)$$

оценка для α должна быть изменена, в то время как β остается неизменным:

$$\alpha \sim \epsilon u_0, \quad \beta \sim u_0 l. \quad (9.32)$$

Теперь мы имеем

$$K_c l = O(\epsilon) \ll 1, \quad (9.33)$$

и выводы теории снова оказываются совместимыми с предположениями, лежащими в ее основе.

С этой точки зрения, по-видимому, полезно кратко исследовать влияние на скорость роста поля следующих членов разложения \mathcal{E} (7.10) по производным от \mathbf{V} . В изотропном случае это может быть лишь разложение вида

$$\mathcal{E} = \alpha \mathbf{V} - \beta \operatorname{rot} \mathbf{V} + \gamma \operatorname{rot} (\operatorname{rot} \mathbf{V}) - \dots, \quad (9.34)$$

где γ (как и α) — псевдоскаляр, а (9.15) заменяется на уравнение

$$\partial \mathbf{V} / \partial t = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{V} - \lambda_e \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V} + \gamma \operatorname{rot} \operatorname{rot} \operatorname{rot} \mathbf{V} - \dots. \quad (9.35)$$

Бессилловые моды все еще являются собственными функциями этого уравнения, а (9.19) заменяется на

$$p = \alpha K - \lambda_e K^2 + \gamma K^3 - \dots. \quad (9.36)$$

При $\gamma > 0$ последний член может оказывать дестабилизирующее влияние, если

$$K > \lambda_e / \gamma. \quad (9.37)$$

Однако оба коэффициента λ_e и γ определяются статистическими свойствами \mathbf{u} -поля, поэтому из соображений размерности следует ожидать, что $\lambda_e/\gamma \sim l^{-1}$ (по крайней мере). В таком случае условие (9.37) оказывается несовместимым с условием $Kl \ll 1$, и отсюда можно сделать вывод, что в рамках двухмасштабного подхода возникновение неустойчивостей типа динамо, связанных с третьим и последующими членами разложения (9.34), маловероятно.

9.3. Решения в безграничном пространстве с анизотропным α_{ij}

Предположим теперь, что псевдотензор α_{ij} однороден, но не изотропен, а его главные значения равны $\alpha^{(1)}$, $\alpha^{(2)}$, $\alpha^{(3)}$. Ограничимся рассмотрением случая, когда вклад члена с β_{ijk} в \mathfrak{E} пренебрежимо мал [ср. (9.23) или (9.26)]. Тогда, при $\mathbf{U} = 0$ уравнение (9.1) принимает вид

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \epsilon_{ijk} \alpha_{km} \frac{\partial B_m}{\partial x_j} + \lambda \Delta B_i \quad (9.38)$$

У этого уравнения имеются решения в виде плоских волн

$$\mathbf{B} = \hat{\mathbf{B}} e^{p t} e^{i \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}}, \quad \mathbf{K} \cdot \hat{\mathbf{B}} = 0, \quad (9.39)$$

подстановка которых в (9.38) дает

$$(p + \lambda K^2) \hat{B}_i = i \epsilon_{ijk} \alpha_{km} K_j \hat{B}_m. \quad (9.40)$$

В главных осях псевдотензора α_{km} первая компонента уравнения (9.40) принимает вид

$$(p + \lambda K^2) \hat{B}_1 = i (\alpha^{(3)} K_2 \hat{B}_3 - \alpha^{(2)} K_3 \hat{B}_2), \quad (9.41)$$

а две другие компоненты получаются отсюда после циклической перестановки индексов. Для существования нетривиального решения (\hat{B}_1 , \hat{B}_2 , \hat{B}_3) детерминант, составленный из коэффициентов уравнения (9.41) должен обращаться в нуль. Это приводит к кубическому уравнению для p со следующими корнями:

$$p_0 = -\lambda K^2, \quad p_1 = -\lambda K^2 + Q, \quad p_2 = -\lambda K^2 - Q, \quad (9.42)$$

где

$$Q^2 = \alpha^{(2)} \alpha^{(3)} K_1^2 + \alpha^{(3)} \alpha^{(1)} K_2^2 + \alpha^{(1)} \alpha^{(2)} K_3^2. \quad (9.43)$$

Мы интересуемся здесь только возможностью экспоненциального роста \mathbf{B} , т.е. $\text{Re } p > 0$. Условие такого роста, очевидно, имеет вид $Q^2 > \lambda^2 K^4$.

$$(9.44)$$

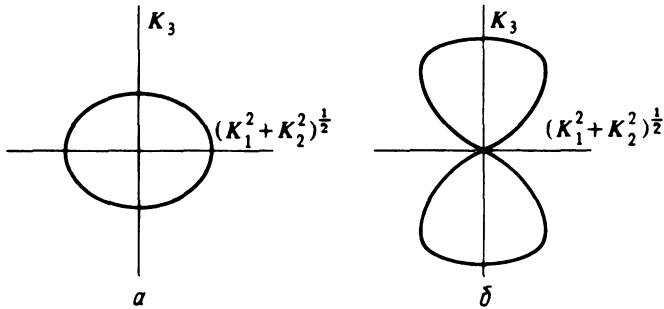


Рис. 9.1.

Эскиз поверхности $Q^2 = \lambda^2 K^4$, где Q^2 описывается формулой (9.43) и $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$. Усиление имеет место, если вектор \mathbf{K} попадает внутрь этой поверхности. а — $\alpha^{(1)} \alpha^{(3)} > 0$, б — $\alpha^{(1)} \alpha^{(3)} < 0$.

Поверхность $Q^2 = \lambda^2 K^4$ изображена на рис. 9.1 в осесимметричном случае $\alpha^{(1)} = \alpha^{(2)}$ (в этом случае она представляет собой поверхность вращения вокруг оси K_3 для двух существенно различающихся возможностей $\alpha^{(1)} \alpha^{(3)} > 0$ и < 0). Как и следовало ожидать, усиление в данном случае зависит от величины и направления волнового вектора \mathbf{K} . Если $\alpha^{(1)} \alpha^{(3)} > 0$ и $|\mathbf{K}|$ достаточно мало (как в изотропном случае), то усиление происходит во всех направлениях. Однако, если $\alpha^{(1)} \alpha^{(3)} < 0$, то усиление может иметь место только для волновых векторов, заключенных в конусе $Q^2 > 0$ (и притом лишь для достаточно малых $|\mathbf{K}|$).

Выполнение условия $\alpha^{(1)} \alpha^{(3)} < 0$ в обычной турбулентности — случай достаточно патологический. Возможно, оно справедливо, когда $\langle u_1 \omega_1 \rangle$ и $\langle u_3 \omega_3 \rangle$ имеют противоположные знаки, где \mathbf{u} и $\boldsymbol{\omega}$, — как обычно, возмущения случайной скорости и вихря. Хотя можно представить себе, что такая турбулентность возбуждена искусственными способами (ср. обсуждение в разд. 7.6), трудно понять, как она может возникнуть без искусственного внесения спиральности.

Обсуждаемая в данном разделе возможность анизотропного усиления поля возникает при рассмотрении динамо, создаваемого статистическими или строго периодическими в пространстве полями скоростей [52, 182, 183]. Методы электродинамики усредненного поля, конечно, с равным правом применимы и к этому довольно специальному случаю, с тем отличием, что спектральный тензор скорости (который может быть определен с помощью усреднения по пространству) здесь не непрерывен, а дискретен. В общем случае, когда в поле скорости имеются предпочтительные направления, этот спектральный тензор (и аналогично α_{ij}) будет анизотропным. Например, если

$$\mathbf{u} = u_0 (\sin kz, \cos kz, 0), \quad (9.45)$$

то ясно, что ось z выделена и, как мы показали в разд. 7.7,

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad \text{где } \alpha = -u_0^2/\lambda k. \quad (9.46)$$

Однако, если мы выберем пространственно-периодическое поле скорости с кубической симметрией (т.е. инвариантное относительно группы вращений куба), например [52]

$$\mathbf{u} = u_0 (\sin kz + \cos ky, \sin kx + \cos kz, \sin ky + \cos kx), \quad (9.47)$$

то

$$\langle u_1 \omega_1 \rangle = \langle u_2 \omega_2 \rangle = \langle u_3 \omega_3 \rangle = k u_0^2, \quad (9.48)$$

и, как легко показать, воспользовавшись методом, изложенным в разд. 7.7, при $u_0/k\lambda \ll 1$

$$\alpha_{ij} = \alpha \delta_{ij}, \quad \text{где } \alpha = -u_0^2/\lambda k. \quad (9.49)$$

Следовательно, несмотря на то что в поле скорости (9.47) имеется *три* предпочтительных направления, тем не менее псевдотензор α_{ij} изотропен¹⁾. В более общем случае, поле скорости

$$\mathbf{u} = u_0 (\sin k_3 z + \cos k_2 y, \sin k_1 x + \cos k_3 z, \sin k_2 y + \cos k_1 x), \quad (9.50)$$

для которого

$$\frac{\langle u_1 \omega_1 \rangle}{k_2 + k_3} = \frac{\langle u_2 \omega_2 \rangle}{k_3 + k_1} = \frac{\langle u_3 \omega_3 \rangle}{k_1 + k_2} = \frac{1}{2} u_0^2, \quad (9.51)$$

дает неизотропный псевдотензор

$$\alpha_{ij} = \alpha^{(1)} \delta_{i1} \delta_{j1} + \alpha^{(2)} \delta_{i2} \delta_{j2} + \alpha^{(3)} \delta_{i3} \delta_{j3}, \quad (9.52)$$

где

$$\alpha^{(1)} k_1 = \alpha^{(2)} k_2 = \alpha^{(3)} k_3 = -u_0^2/\lambda. \quad (9.53)$$

Здесь k_1, k_2 и k_3 могут быть как положительными, так и отрицательными, поэтому в принципе возможны все комбинации знаков.

9.4. α^2 -динамо в сферической геометрии

Предположим теперь, что функция α однородна и постоянна в сфере $r < R$, причем внешняя область является изолятором. При $\mathbf{U} = 0$ поле в сфере будет определяться уравнением (9.15), а на границе

¹⁾ Можно сравнить это с другими известными примерами; в частности, если распределение массы обладает кубической симметрией, то этого достаточно, чтобы тензор инерции был изотропен.

$r = R$ поле \mathbf{V} должно сшиваться с потенциальным полем. Эта задача была впервые рассмотрена Краузе и Штейнбеком [115], которые определили возможные статистические конфигурации поля. Нижеследующее изложение носит несколько более общий характер.

Рассмотрим вместо \mathbf{V} среднее распределение тока $\mathbf{J}(\mathbf{x}, t) = \mu_0^{-1} \text{rot} \mathbf{V}$, которое, согласно (9.15), удовлетворяет в области $r < R$ уравнению

$$\partial \mathbf{J} / \partial t = \alpha \text{rot} \mathbf{J} - \lambda_e \text{rot} \text{rot} \mathbf{J} \quad (9.54)$$

и граничному условию $\mathbf{n} \cdot \mathbf{J} = 0$ на $r = R$. В свете результатов разд. 9.2 полезно рассмотреть здесь эволюцию токовых конфигураций¹⁾, для которых

$$\text{rot} \mathbf{J} = K \mathbf{J}, \quad \mathbf{J} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad r = R. \quad (9.55)$$

В силу (9.54), такое распределение тока, сохраняя конфигурацию (9.55), удовлетворяет уравнению

$$\partial \mathbf{J} / \partial t = (\alpha K - \lambda_e K^2) \mathbf{J} \quad \text{при} \quad r < R. \quad (9.56)$$

Как и в разд. 9.2, мы получаем, что \mathbf{J} (и, следовательно, \mathbf{V}) экспоненциально растет для любых возможных значений K , удовлетворяющих условию

$$\alpha K > \lambda_e K^2. \quad (9.57)$$

Кроме того, та мода, для которой величина $(\alpha K - \lambda_e K^2)$ принимает наибольшее значение, будет иметь максимальную скорость роста.

Конфигурации поля, удовлетворяющие уравнению (9.55), можно легко найти с помощью метода, изложенного в разд. 2.4 (который теперь надо применять не к \mathbf{V} , а к \mathbf{J}). Положив

$$\mathbf{J} = \text{rot} \text{rot} (\mathbf{x} S) + K \text{rot} (\mathbf{x} S), \quad (9.58)$$

мы получим, что (9.55) удовлетворено, если

$$(\Delta + K^2) S = 0, \quad S = 0 \quad \text{на} \quad r = R. \quad (9.59)$$

Решения имеют вид

$$S = A_n r^{-1/2} J_{n+1/2} (|K| r) S_n(\theta, \varphi) \quad (n = 1, 2, \dots), \quad (9.60)$$

где возможные значения K определяются уравнением

$$J_{n+1/2} (|K| R) = 0. \quad (9.61)$$

¹⁾ Отметим, что соответствующие поля *не являются* бессиловыми. Из разд. 2.4 мы знаем, что не существует бессиловых полей, которые были бы везде непрерывны и на бесконечности убывали как $O(r^{-3})$. Однако эта теорема не применима к \mathbf{J} , который имеет разрыв на поверхности $r = R$.

Если каждый корень этого уравнения удовлетворяет (9.57), то соответствующая конфигурация тока, определяемая соотношениями (9.55) и (9.60), экспоненциально нарастает во времени. Заметим, что если α отрицательно, то для получения растущей токовой моды K в равнестве (9.58) необходимо выбрать также отрицательным.

Легко определить поле, соответствующее току (9.58). Применив к (9.55) операцию, обратную взятию ротора, в области $r < R$ мы получим

$$\text{rot } \mathbf{B} = K \mathbf{B} + K \nabla \psi \quad (9.62)$$

для некоторой функции ψ , удовлетворяющей уравнению

$$\Delta \psi = 0. \quad (9.63)$$

Тороидальная составляющая \mathbf{B} [ср. (2.34)] просто равна

$$\mathbf{B}_T = \text{rot}(\mathbf{x} S) = -\mathbf{x} \text{rot} \nabla S, \quad (9.64)$$

а полоидальная составляющая в соответствии с (9.62) определяется равенством

$$\mathbf{B}_P = K^{-1} \text{rot } \mathbf{B}_T - \nabla \psi. \quad (9.65)$$

Пусть $\mathbf{B}_P = -\nabla \hat{\psi}$ при $r > R$, где $\Delta \hat{\psi} = 0$. Гармонические функции ψ и $\hat{\psi}$ должны быть выбраны таким образом, чтобы \mathbf{B}_P была непрерывна при переходе через поверхность $r = R$.

Если S описывается формулой (9.60), то, очевидно, мы имеем

$$\psi = C_n (r/R)^n S_n(\theta, \varphi), \quad \hat{\psi} = D_n (R/r)^{n+1} S_n(\theta, \varphi), \quad (9.66)$$

причем постоянные C_n и D_n выбраны так, чтобы $\mathbf{n} \cdot \mathbf{B}_P$ и $\mathbf{n} \times \mathbf{B}_P$ были непрерывными при переходе через поверхность $r = R$. Эти условия дают

$$C_n = D_n = -\frac{A_n}{2n+1} |K| R \frac{d}{dR} (R^{-1/2} J_{n+1/2}(|K|R)), \quad (9.67)$$

что завершает процедуру определения конфигураций поля. Очевидно, при $n = 1$ вне сферы мы имеем дипольное поле, при $n = 2$ – квадрупольное и т.д.

Корни уравнения (9.61) определяются равенством $|K|R = x_{nq}$, где величина x_{nq} протабулирована на стр. 49. Обозначая соответствующие конфигурации тока посредством $\mathbf{J}^{(nq)}$, из уравнения (9.56) имеем

$$\partial \mathbf{J}^{(nq)} / \partial t = -\lambda_e R^{-2} x_{nq} (x_{nq} - R_\alpha) \mathbf{J}^{(nq)}, \quad (9.68)$$

где

$$R_\alpha = |\alpha| R / \lambda_e. \quad (9.69)$$

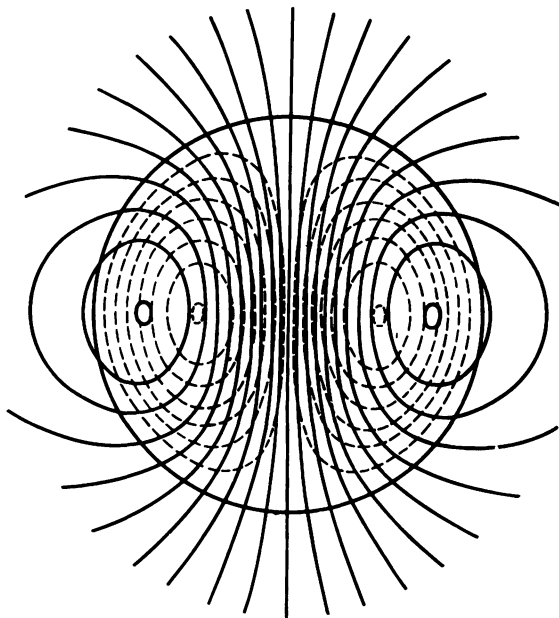


Рис. 9.2.

Силловые линии полоидального поля (сплошные) и линии постоянного торoidalного поля (пунктирные) для α^2 -динамо с $\alpha = \text{const}$ в области $r < R$ и $n = q = 1$ [115].

Эту величину можно считать магнитным числом Рейнольдса, определяемым интенсивностью α -эффекта. Наименьшее значение R_α , для которого возможно динамо, очевидно, равно

$$R_\alpha = x_{11} \approx 4,49, \quad (9.70)$$

причем при $r > R$ соответствующая мода совпадает с дипольным полем (рис. 9.2). Если $x_{11} < R_\alpha < x_{21}$, то будет возбуждаться только мода $J^{(1)}$. При $x_{21} < R < x_{31}$ будет возбуждаться также квадрупольная мода ($n = 2, q = 1$). Отметим также, что если $R_\alpha > x_{11} + x_{21}$, то квадрупольная мода будет более интенсивна, чем дипольная. Аналогично, в общем случае, если $R_\alpha > x_{nq} + x_{n',q'}$ и $x_{n',q'} > x_{nq}$, то более высокая мода (n', q') имеет более высокую скорость роста. Это означает, что при $R_\alpha \gg 1$ (как будет, например, в случае, когда $|\alpha| \sim u_0$, $|\lambda_e| \sim u_0 l$ и $l \ll R$) легче всего будут возбуждаться более высокие моды, соответствующие большим значениям n и (или) q , характеристическая длина L которых мала по сравнению с R . Как и в разд. 9.2, полученные результаты имеют смысл только тогда, когда характери-

стическая длина L остается большой по сравнению с характеристическим масштабом l фоновых случайных движений.

9.5. α^2 -динамо с антисимметричным α

Если ограничиться исследованием возможности существования стационарного динамо в сфере, в которой действует α -эффект и средняя скорость обращается в нуль, то мы придем к следующей задаче о собственных значениях:

$$\begin{aligned} \Delta \mathbf{V} + \text{rot} (\alpha / \lambda_e) \mathbf{V} &= 0 & (r < R), \\ \text{rot } \mathbf{V} &= 0 & (r > R), \\ [\mathbf{V}] &= 0 & \text{на } r = R, \\ \mathbf{V} &= O(r^{-3}) & \text{при } r \rightarrow \infty. \end{aligned} \quad (9.71)$$

Решение этой задачи для частного случая постоянного α получено в предыдущем разделе. Однако в более реалистической теории, построенной с учетом кориолисовых сил, действующих на вращающемся теле и каким-то образом влияющих на α , мы должны получить, что α будет изменяться в масштабах, превышающих характеристический масштаб фоновой турбулентности l . В частности, следует ожидать, что функция $\alpha(\mathbf{x})$ будет обладать той же асимметрией относительно экваториальной плоскости, что и вертикальная компонента $\Omega \cos \theta$ угловой скорости вращения, где θ — полярный угол. В приложении к геофизике имеется возможный механизм, проясняющий с физической точки зрения эту связь [155]. Предположим, что в северной полусфере происходит типичное "событие", представляющее собой подъем сгустка жидкости, вызванный тем, что плотность в сгустке меньше плотности окружающей среды. Жидкость должна втекать с боков, и в силу сохранения момента импульса (в жидкости, которая вращается как целое) сгусток приобретает положительную спиральность. Пусть далее эти события протекают во всем объеме жидкости случайным образом, причем восходящие движения сгустков компенсируются нисходящими течениями между сгустками (отметим необходимость топологической асимметрии между восходящим и нисходящим потоками — ср. обсуждение в разд. 3.12). Тогда генерируется усредненное распределение спиральности, положительное в северной полусфере и (из тех же самых соображений) отрицательное в южной. В пределе сильной диффузии (или слабой случайной волны, см. разд. 7.5) соответствующее значение α должно быть в общем случае отрицательно в северной полу-

сфере и положительно в южной. Простейшая функция, учитывающая эту асимметрию, имеет вид

$$\alpha(\mathbf{x}) = -\alpha_0 \hat{\alpha}(\hat{r}) \cos \theta, \quad (9.72)$$

где $\hat{r} = r/R$, а $\hat{\alpha}$ — безразмерная функция¹⁾.

К сожалению, для произвольной функции вида (9.72) задачу о собственных значениях (9.71) исследовать уже не просто и необходимо обращаться к численным методам. Эта задача изучалась в работе [185, 203, 205], где использовалось разложение \mathbf{V} в ряды и рассматривалось несколько первых членов. Робертс [185] нашел, что достаточно сохранить шесть членов, чтобы получить собственные значения с точностью 0,1%.

Как и в случае, рассмотренном в разд. 9.4, α -эффект здесь ответствен за генерацию тороидального поля из полоидального и полоидального из тороидального. По существу, задача сводится к нахождению собственных значений безразмерного параметра $R_\alpha = |\alpha_0| R/\lambda_e$. В табл. 9.1 приведены собственные значения для различных функций $\hat{\alpha}(\hat{r})$, соответствующих полям дипольной и квадрупольной симметрии относительно экваториальной плоскости [185]. Наиболее поразительная особенность этих решений заключается в том, что собственные значения для полей дипольной и квадрупольной симметрии почти неотличимы. Этому факту можно дать интерпретацию [205], обратившись к конфигурациям поля, соответствующим вычисленным собственным функциям. На рис. 9.3 изображены линии полоидального поля и изотопы (т.е. кривые постоянных тороидальных полей) для случая $\hat{\alpha}(\hat{r}) = \hat{r}(3\hat{r} - 2)$. Тороидальный ток (создающий полоидальное поле) концентрируется к высоким широтам ($|\theta|, |\pi - \theta| \lesssim \pi/10$), и взаиминдукция (т.е. связь) этих тороидальных токовых петель очень мала. Поэтому направление тороидального поля в одной полусфере можно изменить на противоположное, не изменяя существенно условий в другой полусфере. Эта операция переводит поле дипольной симметрии в поле квадрупольной симметрии и обратно.

Заметим, что в областях, где $\alpha \neq 0$, у полоидальных полей, изображенных на рис. 9.3, имеются нейтральные точки только O-типа; сле-

¹⁾ Можно утверждать, что в то время как поднимающийся сгусток вблизи дна конвективного слоя будет сжиматься (приобретая тем самым положительную спиральность в северной полусфере), он должен расширяться у вершины этого слоя, приобретая тем самым отрицательную спиральность (вновь в северной полусфере). Следовательно, имеется достаточная причина для рассмотрения моделей, в которых $\hat{\alpha}(\hat{r})$ в (9.72) изменяет знак при некотором промежуточном значении \hat{r} , как это было сделано в работе [229].

Таблица 9.1

Собственные значения R_α ,
полученные Робертсом [185] в модели α^2 -динамо Штейнбека
и Краузе [203, 205].

Численные множители в $\hat{\alpha}(\hat{r})$ выбраны так, что $\hat{\alpha}_{\max} = 1$.

Приведенные цифры в первых трех строках вычислены в предположении,
что в разложении \mathbf{V} по сферическим гармоникам

удерживались члены с $n \leq 5$,

в последней строке удерживались гармоники до $n = 4$;

разностная аппроксимация получающихся дифференциальных уравнений
включала в себя разбиение радиального интервала на 30 отрезков

$\hat{\alpha}(\hat{r})$	R_α для мод с дипольной симметрией	R_α для мод с квадруполь- ной симметрией
1	7,64	7,81
$\hat{r}(3\hat{r} - 2)$	24,95	24,93
$7,37\hat{r}^2(1 - \hat{r})(5\hat{r} - 3)$	14,10	14,10
$45,56\hat{r}^8(1 - \hat{r}^2)^2$	13,04	13,11

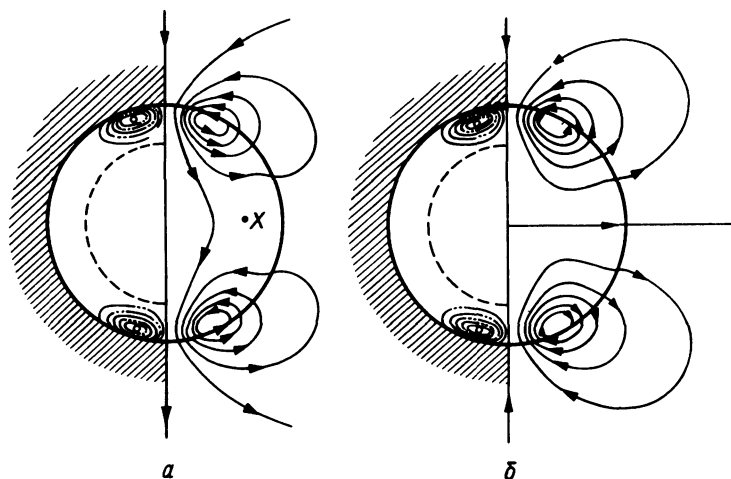


Рис. 9.3.

Поля, которые возбуждаются в α^2 -динамо при $\alpha = \alpha_0 R^{-2} r(3r - 2R) \cos \theta$
[205]; а — дипольная мода; б — квадрупольная мода. Силовые линии полоидаль-
ного поля показаны на каждом рисунке справа, а изоэри — слева. Отметим,
что в случае а нейтральная точка полоидального поля \mathbf{V}_p на экваториальной
плоскости является точкой X-типа (а не O-типа), поэтому хотя в этой точке
 $\alpha = 0$, теорема антидинамо Каулинга не применима [224].

довательно, в окрестности этих точек поля могут поддерживаться α -эффектом. В каждом из случаев a и b на экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$, где $\alpha = 0$, имеется также нейтральная точка, но Х-типа [седловая точка силовой функции $\chi(s, z)$], поэтому аргумент Каулинга, связанный с нейтральными точками (разд. 6.5) в данном случае не применим [224].

Штейнбек и Краузе [205] рассмотрели также функцию $\hat{a}(\hat{r})$, которая обращается в нуль для значений \hat{r} , меньших некоторой величины \hat{r}_I , заключенной между 0 и 1, с целью оценить влияние твердотельного земного ядра ($\hat{r}_I \approx 0,19$). Линии полоидального поля и изотопы были вычислены для $\hat{r}_I = 0,5$ (они воспроизведены в работе [190]). Собственные значения при этом не превышают собственных значений, полученных для уменьшенного объема, в котором действует α -эффект.

9.6. $\alpha\omega$ -динамо в неограниченном пространстве

$\alpha\omega$ -динамо, обсуждавшееся в разд. 9.1, описывается уравнениями (9.10) и (9.13). Рассмотрим сначала эти уравнения в декартовых координатах¹⁾:

$$\partial A / \partial t + \mathbf{U}_P \cdot \nabla A = \alpha B + \lambda \Delta A, \quad (9.73)$$

$$\partial B / \partial t + \mathbf{U}_P \cdot \nabla B = \mathbf{V}_P \cdot \nabla U + \lambda \Delta B, \quad (9.74)$$

причем средняя скорость и среднее магнитное поле равны соответственно $U \mathbf{i}_y + \mathbf{U}_P$ и $B \mathbf{i}_y + \mathbf{V}_P$, где $\mathbf{V}_P = \text{rot}(A \mathbf{i}_y)$. Эти уравнения имеют локальные решения вида [155]:

$$(A, B) = (\hat{A}, \hat{B}) \exp(pt + \mathbf{i} \mathbf{K} \cdot \mathbf{x}), \quad \mathbf{K} = (K_x, 0, K_z), \quad (9.75)$$

в областях конечного размера, в которых \mathbf{U}_P , α и ∇U можно считать постоянными. Подстановка этих решений в уравнения дает

$$\tilde{p} \tilde{\hat{A}} = \alpha \tilde{\hat{B}}, \quad \tilde{p} \tilde{\hat{B}} = -i (\mathbf{K} \times \nabla U)_y \tilde{\hat{A}}, \quad (9.76)$$

где

$$\tilde{p} = p + \lambda K^2 + i \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{K}.$$

Исключая \hat{A} , \hat{B} , мы получаем дисперсионное соотношение

$$\tilde{p}^2 = 2i\gamma, \quad \text{где} \quad \gamma = -\frac{1}{2} \alpha (\mathbf{K} \times \nabla U)_y. \quad (9.77)$$

Характер решений в значительной степени определяется знаком γ .

1. *Случай* $\gamma > 0$. В этом случае $\tilde{p} = \pm(1 + i)\gamma^{1/2}$ и поэтому

$$p = -\lambda K^2 \pm \gamma^{1/2} + i(\pm \gamma^{1/2} - \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{K}). \quad (9.78)$$

¹⁾ Здесь и далее предполагается, что λ включает в себя коэффициент турбулентной диффузии, если последняя имеет место.

Решения (9.75) не затухают, если $\operatorname{Re} p \geq 0$, а из (9.78) следует, что это выполнено (когда выбран верхний знак) при $\gamma \geq \lambda^2 K^4$, т.е. когда

$$-\alpha(\mathbf{K} \times \nabla U)_y \geq 2\lambda^2 K^4. \quad (9.79)$$

Эта волна с нарастающей (или по крайней мере не убывающей) амплитудой имеет фазовый множитель

$$\exp \{ i\mathbf{K} \cdot \mathbf{x} + i(\gamma^{1/2} - \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{K})t \} \quad (9.80)$$

и распространяется в направлении $\pm \mathbf{K}$ в зависимости от того

$$\gamma^{1/2} - \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{K} < 0 \quad \text{или} \quad > 0. \quad (9.81)$$

При $\mathbf{U}_P = 0$ поле с необходимостью осциллирует (в противоположность обсуждавшимся в разд. 9.2 статическим модам α^2 -динамо в безграничном пространстве) и волна распространяется в направлении $-\mathbf{K}$.

2. *Случай* $\gamma < 0$. В этом случае $\tilde{r} = \pm(1 - i)|\gamma|^{1/2}$, и поэтому

$$p = -\lambda K^2 \pm |\gamma|^{1/2} + i(\mp |\gamma|^{1/2} - \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{K}), \quad (9.82)$$

а при $\mathbf{U}_P = 0$ растущее поле распространяется в направлении $+\mathbf{K}$.

Эти результаты заманчиво применить, как сделал Паркер [155], для объяснения смещения солнечных пятен по направлению к экваториальной плоскости (см. разд. 5.3). Пусть xuz — локальная декартова система координат во внешнем конвективном слое Солнца в северной полусфере, причем ось x направлена на юг, y — к востоку и z — вертикально вверх (рис. 9.4); предположим, что в тороидальном течении преобладает вертикальный сдвиг, так что

$$\gamma = \frac{1}{2} K_x \alpha \partial U / \partial z. \quad (9.83)$$

Если магнитные возмущения можно представить в виде простых волн смещения описанного выше типа, то направление смещения (к или от экваториальной плоскости) будет определяться знаком произведения $\alpha \partial U / \partial z$, имеющим критическое значение (в южной полусфере знак изменяется на противоположный; в сферической системе координат $\alpha \partial U / \partial z$ превращается в $\alpha \partial \omega / \partial r$). Если солнечные пятна образованы путем деформации, вызванной всплыванием некоторого подфотосферного тороидального поля, то экваториальное смещение солнечных пятен отражает смещение к экватору картины тороидального поля. Такое смещение поля к экватору, вызванное " $\alpha \omega$ -эффектом", т.е. совместным действием α -эффекта и дифференциального вращения (подходящего знака), подтверждается численными расчетами решений, в которых учтена сферическая геометрия задачи и пространственное изменение α и $\nabla \omega$ (см. ниже разд. 9.12).

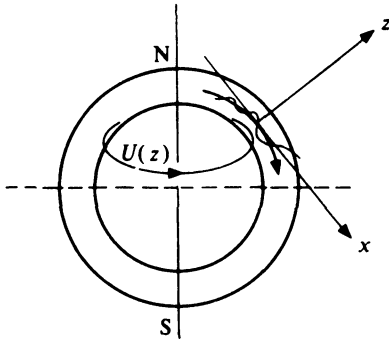


Рис. 9.4.

Динамо-волна Паркера [158], которая при $\alpha \partial U / \partial z < 0$ распространяется по направлению к экваториальной плоскости с возрастающей амплитудой.

Если в (9.78) или в (9.82) $\mathbf{U}_P \neq 0$, то фазовая скорость динамо-волн (9.75) изменяется. Если $|\gamma|^{1/2} = \mathbf{U}_P \cdot \mathbf{K}$, то стационарна волна (9.78) (с верхним знаком), тогда как при $|\gamma|^{1/2} = -\mathbf{U}_P \cdot \mathbf{K}$ стационарна волна (9.82) (с верхним знаком). Отсюда следует, что подходящим выбором полоидальной средней скорости можно перевести осциллирующее $\alpha \omega$ -динамо $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{x}) e^{i\omega t}$ в статическое $\hat{\mathbf{V}}(\mathbf{x})$. Значение меридиональной циркуляции \mathbf{U}_P для определения того, будет ли главная мода возбуждения магнитного поля носить статический или осциллирующий характер, впервые понял Брагинский [27].

Как и в случае мод в безграничном пространстве (разд. 9.2), для обеспечения непротиворечивости желательно, чтобы масштаб наиболее неустойчивой моды превышал масштаб фоновых случайных движений. Записав $(\mathbf{K} \times \nabla U)_y = KG$, где G — характерная мера среднего сдвига скорости, мы получаем, что критическое волновое число, определяемое неравенством (9.79), имеет величину $K_c = (|\alpha G| / 2\lambda^2)^{1/2}$ и максимальная скорость роста [т.е. максимальное значение $\text{Re } p$, определяемое формулой (9.78)] достигается при $K = 2^{-1/2} K_c$. Следовательно, масштаб наиболее неустойчивых мод по порядку величины равен

$$L \sim K_c^{-1} \sim (\lambda^2 / |\alpha G|)^{1/2}, \quad (9.84)$$

и условие непротиворечивости $L \gg l$ принимает вид

$$\lambda^2 / l^3 |\alpha G| \gg 1. \quad (9.85)$$

Если допустить, что в пределе слабой диффузии справедливы оценки

$$|\alpha| \sim u_0, \quad \lambda = u_0 l, \quad (9.86)$$

то (9.85) превращается просто в неравенство

$$u_0 / l \gg |G|. \quad (9.87)$$

Таким образом, проводимое рассмотрение справедливо, если "случайный сдвиг" (u_0 / l) велик по сравнению со средним сдвигом. Это усло-

вие, по-видимому, выполнено в случае обычной турбулентности. Заметим, однако, что α -модель годится только тогда, когда $|\alpha| \ll L|G|$ (см. разд. 9.1), поэтому при $|\alpha| \sim u_0$ мы требуем также

$$u_0/l \ll |G|L/l. \quad (9.88)$$

9.7. Генерация поля локализованными α и $\partial U/\partial z$

Чтобы выяснить свойства уравнений (9.73) – (9.74), рассмотрим случай, когда $\mathbf{U}_p = \mathbf{0}$, а $\alpha = \alpha(z)$, $U = U(z)$, где

$$\alpha(z) = \Delta_0 \delta(z), \quad \partial U/\partial z = U_0 \delta(z - z_0), \quad (9.89)$$

так что α -эффект и сдвиг локализованы в двух параллельных слоях, отстоящих друг от друга на расстояние z_0 (рис. 9.5). Единственным достоинством этого идеализированного примера является то, что удается довольно просто получить аналитическое решение уравнений генерации для неоднородных α и ∇U . Более реалистические зависимости α и U от координат, которые используются в геофизике и физике Солнца, обычно требуют обращения к ЭВМ. Для сравнения с численными решениями полезно иметь несколько твердых аналитических результатов. В духе той же идеализации пренебрежем вначале влиянием границ (подобно тому, как в разд. 9.6), или, эквивалентно, рассмотрим неограниченную среду.

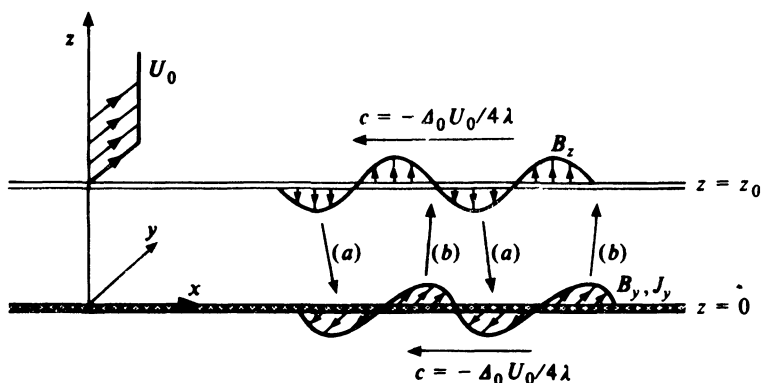


Рис. 9.5.

Осцилляторное динамо с локализованным α -эффектом ($z = 0$) и сдвигом ($z = z_0$): а – сдвиг поля B_z порождает компоненту B_y , которая с помощью α -эффекта дает ток J_y ; б – этот ток является источником полоидального поля ($B_x, 0, B_z$). Полная картина поля распространяется в направлении оси x с фазовой скоростью $c = -\Delta_0 U_0/4\lambda$, и если выполнены условия (9.101), то амплитуда волны экспоненциально нарастает.

Если справедливы предположения (9.89), то уравнения (9.73) и (9.74) принимают вид

$$\partial A / \partial t = \lambda \Delta A, \quad \partial B / \partial t = \lambda \Delta B \quad (z \neq 0, z_0). \quad (9.90)$$

Сингулярные функции (9.89), очевидно, приводят к разрыву $\partial A / \partial z$ в точке $z = 0$ и $\partial B / \partial z$ в точке $z = z_0$, однако A и B при переходе через оба слоя остаются непрерывными. Интегрирование уравнений (9.73) – (9.74) в слоях дает условия на скачках

$$[\partial B / \partial z] = 0, \quad \lambda [\partial A / \partial z] = -\Delta_0 B \quad \text{в } z = 0, \quad (9.91)$$

$$[\partial A / \partial z] = 0, \quad \lambda [\partial B / \partial z] = -U_0 \partial A / \partial x \quad \text{в } z = z_0. \quad (9.92)$$

Предположим далее, что

$$A, B \rightarrow 0 \quad \text{при } |z| \rightarrow \infty, \quad (9.93)$$

и будем искать решения вида

$$(A, B) = (\hat{A}(z), \hat{B}(z)) e^{pt + iKx}, \quad (9.94)$$

где K действительно, но может быть как положительным, так и отрицательным. В силу (9.90), зависимость от z может входить в \hat{A} и \hat{B} только в виде множителей $e^{\pm mz}$, где

$$\lambda m^2 = p + \lambda K^2 \quad (9.95)$$

и где можно полагать, что $\text{Re } m > 0$. Из условий непрерывности и условий на бесконечности следует

$$\hat{A}(z) = \begin{cases} A_1 e^{mz} & (z < 0), \\ A_1 e^{-mz} & (0 < z < z_0), \\ A_1 e^{-mz} & (z > z_0). \end{cases}$$

$$\hat{B}(z) = \begin{cases} B_1 e^{m(z-z_0)} & (z < 0), \\ B_1 e^{m(z-z_0)} & (0 < z < z_0), \\ B_1 e^{-m(z-z_0)} & (z > z_0). \end{cases} \quad (9.96)$$

После чего условия (9.91) и (9.92) дают

$$2\lambda mA_1 = \Delta_0 B_1 e^{-mz_0}, \quad 2\lambda mB_1 = U_0 iKA_1 e^{-mz_0}, \quad (9.97)$$

и исключение отношения $A_1 : B_1$ приводит к уравнению

$$i\Delta_0 U_0 K e^{-2mz_0} = 4\lambda^2 m^2. \quad (9.98)$$

В совокупности с (9.95) оно определяет возможные значения p для

заданных K, z_0, Δ_0, U_0 . В безразмерной форме мы имеем соотношение вида

$$p/\lambda K^2 = F(X, Kz_0), \quad X = \Delta_0 U_0 / 4\lambda^2 K. \quad (9.99)$$

Прежде всего отметим, что если $z_0 = 0$, т.е. если два разрыва совпадают, то m^2 чисто мнимо и поэтому из (9.95) следует, что $\text{Re } p < 0$, т.е. динамо невозможно. Пусть теперь $|Kz_0| \ll 1$. Тогда, если p таково, что выполнено неравенство $|mz_0| \ll 1$, то величину e^{-2mz_0} в (9.98) можно заменить на $1 - 2mz_0$ и решить получающееся квадратное уравнение для m . Если пренебречь членами порядка $X^{1/2}(Kz_0)$, то это дает два значения

$$p = -\lambda K^2 (1 - iX \pm 2^{1/2} Kz_0 X^{3/2}). \quad (9.100)$$

Условие $|mz_0| \ll 1$ удовлетворяется, если $X(Kz_0)^2 \ll 1$. Очевидно, динамо будет иметь место ($\text{Re } p > 0$), когда

$$X > 0 \quad \text{и} \quad 2^{1/2} X^{3/2} > |Kz_0|^{-1} \gg 1. \quad (9.101)$$

Условие $X > 0$ означает, что динамо-механизм выбирает волны, для которых K имеет тот же знак, что и $\Delta_0 U_0$. Если $\Delta_0 U_0 > 0$, то при выполнении условий (9.101) динамо получается при выборе нижнего знака в (9.100). При $\Delta_0 U_0 < 0$ надо выбирать верхний знак. Из условий (9.101) следует, что динамо всегда возможно, если $z_0 \neq 0$, $\Delta_0 U_0 \neq 0$ и K достаточно мало, т.е. если длина волны возмущения в направлении оси x достаточно велика.

Как и в разд. 9.6, мы имеем здесь решения уравнений динамо (9.73) – (9.74), которые представляют собой динамо-волны, смещающиеся с фазовой скоростью

$$-\text{Im } p/K = -\lambda KX = -\Delta_0 U_0 / 4\lambda. \quad (9.102)$$

Физический характер динамо-процесса проиллюстрирован на рис. 9.5. Сдвиговое искажение компоненты поля B_z в слое $z = z_0$ генерирует "тороидальное" поле B_{iy} , которое диффундирует (с фазовой задержкой) к окрестности слоя $z = 0$. Здесь α -эффект генерирует тороидальный ток J_{iy} и связанное с ним полоидальное поле диффундирует (снова с задержкой по фазе) назад к слою $z = z_0$. Суммарный эффект дает максимальную восстанавливаемость поля при фазовой скорости (9.102). Конечно, стационарной делает картину поля скорость $\Delta_0 U_0 / 4\lambda$, которая постоянна и направлена вдоль оси x .

9.8. Симметричное $U(z)$ и антисимметричное $\alpha(z)$

Для геофизики и астрофизики более интересен случай, когда $U(z)$ симметрично, а $\alpha(z)$ антисимметрично относительно экватори-

альной плоскости $z = 0$. При $U_p = 0$ и $U = U(z)$, $\alpha = \alpha(z)$ уравнения (9.73) (9.74) обладают решениями вида (9.94), где

$$\begin{aligned} (p + \lambda K^2) \hat{A} &= \alpha(z) \hat{B} + \lambda \hat{A}''(z), \\ (p + \lambda K^2) \hat{B} &= iKG(z) \hat{A} + \lambda \hat{B}''(z) \end{aligned} \quad (9.103)$$

и $G = dU/dz$. Если мы предположим, что

$$\alpha(z) = -\alpha(-z), \quad G(z) = -G(-z), \quad (9.104)$$

то уравнениям (9.103) будут удовлетворять решения с дипольной симметрией

$$\hat{A}(z) = \hat{A}(-z), \quad \hat{B}(z) = -\hat{B}(-z) \quad (9.105)$$

или квадрупольной симметрией

$$\hat{A}(z) = -\hat{A}(-z), \quad \hat{B}(z) = \hat{B}(-z). \quad (9.106)$$

В силу линейности уравнений (9.73) – (9.74) возможна, конечно, и суперпозиция решений с различной симметрией, каждое из которых характеризуется соответствующими значениями p и K .

Рассмотрим пример, аналогичный приведенному в разд. 9.7, положив

$$\begin{aligned} \alpha(z) &= \Delta_0 \delta(z - z_0) - \Delta_0 \delta(z + z_0), \\ G(z) &= U_0 \delta(z - z_1) - U_0 \delta(z + z_1). \end{aligned} \quad (9.107)$$

Решения с дипольной симметрией имеют вид (и для $z > 0$)

$$\begin{aligned} \hat{A}(z) &= \begin{cases} A_1 \frac{\text{ch } mz}{\text{ch } mz_0} & (z < z_0), \\ A_1 e^{-m(z - z_0)} & (z > z_0), \end{cases} \\ \hat{B}(z) &= \begin{cases} B_1 \frac{\text{sh } mz}{\text{sh } mz_1} & (z < z_1), \\ B_1 e^{-m(z - z_1)} & (z > z_1). \end{cases} \end{aligned} \quad (9.108)$$

Условия (9.91) и (9.92) применимы теперь на разрывах $z = z_0$ и $z = z_1$, соответственно и дают два линейных соотношения между A_1 и B_1 , из которых мы получаем дисперсионное соотношение (справедливое для $z_1 > z_0$ или $z_1 < z_0$):

$$\Delta_0 U_0 iK (e^{-2m|z_1 - z_0|} - e^{-2m(z_0 + z_1)}) = 4\lambda^2 m^2. \quad (9.109)$$

То же самое дисперсионное соотношение получается и для квадрупольных мод:

$$\hat{A}(z) = \begin{cases} A_1 \frac{\text{sh } mz}{\text{sh } mz_0} & (z < z_0), \\ A_1 e^{-m(z - z_0)} & (z > z_0), \end{cases} \quad (9.110)$$

$$\hat{B}(z) = \begin{cases} B_1 \frac{\text{ch } mz}{\text{ch } mz_1} & (z < z_1), \\ B_1 e^{-m(z - z_1)} & (z > z_1), \end{cases}$$

показывая, что для каждой неустойчивой дипольной моды имеется соответствующая квадрупольная мода с той же самой (комплексной) скоростью роста¹⁾.

Если $z_0 + z_1 \gg |z_1 - z_0|$, то (9.109) превращается в уравнение

$$\Delta_0 U_0 iK e^{-2m|z_1 - z_0|} \approx 4\lambda^2 m^2, \quad (9.111)$$

и мы по существу возвращаемся к примеру, рассмотренному в разд. 9.7, с тем отличием, что в данном случае имеются два слабо взаимодействующих друг с другом двойных слоя (z_0, z_1) и $(-z_0, -z_1)$. Однако если z_0 и z_1 по порядку величины равны друг другу, то ситуация, по-видимому, полностью отличается от случая, рассмотренного в разд. 9.7. Пусть K таково, что $|m||z_1 - z_0| \ll 1$ и $|m||z_0 + z_1| \ll 1$. Тогда, разложив левую часть уравнения (9.109) по степеням m^2 , получим

$$m/K = 4iXKz_m(1 - 4iX \cdot Kz_0 \cdot Kz_1 + \dots), \quad (9.112)$$

где z_m — меньшая из величин z_0 и z_1 , а X определяется формулой (9.99). Заметим, что, как и требуется, условие $\text{Re } m > 0$ выполнено. В силу (9.112), $\text{Re } (m/K)^2 < 0$ и, следовательно, $\text{Re } p < 0$, т.е. динамо невозможно. Это доказательство, конечно, не исключает возможности динамо для мод, у которых $|m||z_1 - z_0|$ и $|m||z_0 + z_1|$ по порядку величины равны единице.

Если фиксировать $|z_1 - z_0|$ и K и уменьшать $z_1 + z_0$ от больших значений к меньшим при условии $K|z_1 - z_0|X^{1/2} \gg 1$, то благодаря ослабляющей интерференции двух двойных слоев моды, которые были

¹⁾ Недавно Проктор [176] рассмотрел более общие условия, при которых возможно такого рода соответствие между модами дипольной и квадрупольной симметрии.

неустойчивы при $z_1 + z_0 \gg |z_1 - z_0|$, должны затухать, если $z_1 + z_0 \sim |z_1 - z_0|$.

9.9. Модель галактического динамо

Галактическое магнитное поле, как предположил Паркер¹⁾ [158, 162], может поддерживаться при комбинированном действии тороидального сдвига (созданного дифференциальным вращением галактического диска) и циклонической турбулентности. Хотя модель такого типа не является общепринятой (см., например, [169, 170]), она тем не менее полезна для выяснения структуры уравнений динамо (9.73) – (9.74), и, в частности, интересна тем, что представляет собой пример динамо, в котором почти с одинаковой легкостью возбуждаются статические и колебательные динамо-моды. Описанная ниже модель более идеализирована по сравнению с моделью Паркера [158], однако, сохраняя те же главные физические особенности системы, она допускает более простое математическое рассмотрение.

Выберем начало O локальной декартовой системы координат (рис. 9.6) в точке, расположенной на плоскости симметрии галактического диска, направим ось z по нормали к диску, ось x – радиально

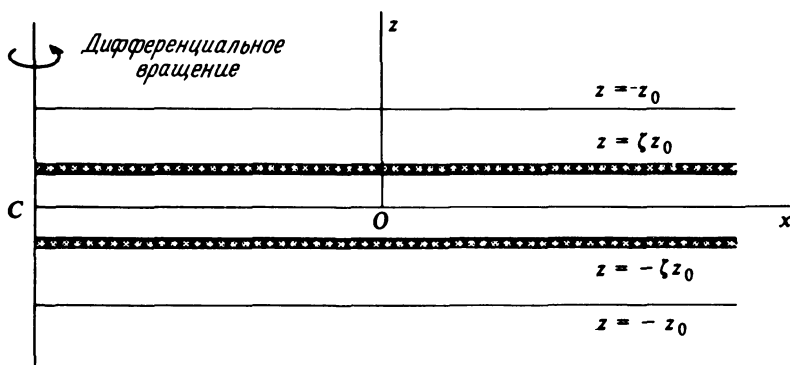


Рис. 9.6.

Идеализированная модель галактического динамо. C – центр галактики, O – точка в плоскости симметрии галактического диска, Ox является радиальным продолжением CO , а Oz – нормаль к галактическому диску. Диск ограничен плоскостями $z = \pm z_0$; предполагается, что α -эффект сконцентрирован в окрестности плоскостей $z = \pm \zeta z_0$ ($\zeta < 1$). Дифференциальное вращение галактики определяет среднее поле скорости, которое в окрестности O имеет вид $(0, U(x), 0)$ с $dU/dx = G(\text{const})$.

¹⁾ Одновременно и независимо это было сделано в работе Вайнштейна и Рузмайкина (Астрон. ж., 48, 902, 1971). – Прим. ред.

наружу в плоскости диска и ось y — в азимутальном направлении. Пусть тороидальная скорость зависит только от x , причем $G = dU/dx$ локально постоянна и $U_P = 0$. Тогда уравнения (9.73) — (9.74) принимают вид

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \alpha B + \lambda \Delta A, \quad (9.113)$$

$$\frac{\partial B}{\partial t} = -G \frac{\partial A}{\partial z} + \lambda \Delta B. \quad (9.114)$$

По тем же причинам, которые обсуждались в разд. 9.5 в связи с приложениями к геофизике и физике Солнца, уместно ограничиться рассмотрением случая, когда $\alpha(z)$ является заданной *нечетной* функцией z . Паркер выбрал ступенчатую функцию ¹⁾

$$\alpha(z) = \begin{cases} \alpha_0 & (0 < z < z_0), \\ -\alpha_0 & (-z_0 < z < 0) \end{cases} \quad (9.115)$$

и сшил получающиеся решения уравнений (9.113) — (9.114) с вакуумными полями во "внегалактической" области $|z| > z_0$, получив при этом уравнение (в общем случае комплексное) для определения скорости роста p мод поля. Несмотря на то что уравнения (9.113) и (9.114) выглядят очень простыми, дисперсионное соотношение в действительности оказывается очень сложным и для его решения потребовалось прибегнуть к асимптотическим методам.

Чтобы избежать трудностей, мы упростим задачу, предположив, что вместо (9.115) $\alpha(z)$ (как и в разд. 9.8) описывается выражением

$$\alpha(z) = \alpha_0 \delta(\hat{z} - \zeta) - \alpha_0 \delta(\hat{z} + \zeta), \quad (9.116)$$

где $\hat{z} = z/z_0$ — безразмерная координата и $0 < \zeta < 1$, т.е. предполагается, что α -эффект сконцентрирован в двух слоях $z = \pm \zeta z_0$, причем среднее значение $\alpha(z)$ по любой половине диска равно $\pm \alpha_0$ [как и для (9.115)]. Конечно, функция (9.116), как и (9.115), идеализирована, однако, сохраняя главное свойство $\alpha(z)$ — ее асимметрию, будем надеяться, что мы не изменим качественно поведение системы (9.113) — (9.114). Мы увидим, что эти надежды исполнятся лишь частично.

Как и в предыдущих разделах, мы исследуем далее решения уравнений (9.113) — (9.114) вида

$$A = \hat{A}(\hat{z}) e^{pt + iKx}, \quad B = \frac{Gz_0}{\lambda} \hat{B}(\hat{z}) e^{pt + iKx}, \quad (9.117)$$

¹⁾ Строго говоря, рассмотрение таких функций в рамках только α - ω -динамо не вполне корректно хотя бы потому, что в уравнении (9.114) теперь нельзя отбрасывать член, связанный с α . — *Прим. перев.*

причем коэффициент Gz_0/λ введен просто для удобства. При $|\hat{z}| < 1$, $|\hat{z}| \neq \zeta$ (9.113) – (9.114) принимают вид

$$\frac{d^2 \hat{A}}{d\hat{z}^2} - q^2 \hat{A} = 0, \quad (9.118)$$

$$\frac{d^2 \hat{B}}{d\hat{z}^2} - q^2 \hat{B} = \frac{d\hat{A}}{d\hat{z}}, \quad (9.119)$$

где

$$q^2 = (p + \lambda K^2) z_0^2 / \lambda. \quad (9.120)$$

Воспользовавшись (9.116), мы получаем условия на скачке $z = \zeta$:

$$[d\hat{A}/d\hat{z}] = -X\hat{B}, \quad (9.121)$$

$$[d\hat{B}/d\hat{z}] = 0, \quad (9.122)$$

где

$$X = \alpha_0 G z_0^3 / \lambda^2 \quad (9.123)$$

(и аналогично на $\hat{z} = -\zeta$). Безразмерное число X , названное Паркером "динамо-числом", очевидно, представляет собой меру совместного влияния α -эффекта и сдвига G в слое; далее мы главным образом будем искать p как функцию X (и других параметров задачи) и в частности определим, может ли для заданного X быть положительным $\text{Re } p$.

Имеются, конечно, и дополнительные граничные условия, которым должны удовлетворять решения системы (9.113) – (9.114). Во-первых, в вакуумной области¹⁾ $\hat{z} > 1$ тороидальное поле B должно обращаться в нуль, а A должна быть гармонической функцией, т.е. $\hat{A}(\hat{z}) \propto e^{-1Kz_0|\hat{z}}$. Непрерывность \hat{A} , \hat{B} и $d\hat{A}/d\hat{z}$ на границах дает

$$\hat{B} = 0, \quad d\hat{A}/d\hat{z} \pm |Kz_0| \hat{A} = 0 \quad \text{при} \quad \hat{z} = \pm 1. \quad (9.124)$$

При $|Kz_0| \ll 1$ эти условия принимают вид

$$\hat{B}(\hat{z}) = 0, \quad d\hat{A}/d\hat{z} = 0 \quad \text{при} \quad \hat{z} = \pm 1. \quad (9.125)$$

Мы воспользуемся условиями (9.125), дав им ретроспективное обоснование [см. обсуждение после формулы (9.133)].

Ясно, что при $\alpha(z) = -\alpha(-z)$ уравнения (9.113) и (9.114) обладают решениями с дипольной и квадрупольной симметрией [ср. (9.105) и (9.106)]. В точке $\hat{z} = 0$ эти моды удовлетворяют условиям симметрии

$$\hat{B} = d\hat{A}/d\hat{z} = 0 \quad (9.126)$$

¹⁾ Следует отметить, что вне реальной Галактики справедливы скорее не вакуумные, а бессильные условия. — *Прим. ред.*

для "дипольных" мод и

$$\hat{A} = d\hat{B}/d\hat{z} = 0 \quad (9.127)$$

для "квадрупольных" мод. Если воспользоваться этими условиями [в предположении, что выполнены условия (9.105) и (9.106)], то достаточно ограничиться рассмотрением области $\hat{z} > 0$.

Дипольные моды

Нетрудно показать, что решения уравнений (9.118) и (9.119), удовлетворяющие условиям (9.125) и (9.126), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= A_1 \frac{\text{ch } q \hat{z}}{\text{ch } q \zeta}, \\ \hat{B} &= \frac{1}{2} \hat{z} \hat{A}(\hat{z}) - \frac{1}{2} A_1 \zeta \frac{\text{sh } q \hat{z}}{\text{sh } q \zeta} + B_1 \frac{\text{sh } q \hat{z}}{\text{sh } q \zeta} \end{aligned} \right\} (\hat{z} < \zeta),$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= A_1 \frac{\text{ch } q (\hat{z} - 1)}{\text{ch } q (\zeta - 1)}, \\ \hat{B} &= \frac{1}{2} (\hat{z} - 1) \hat{A}(\hat{z}) - \frac{1}{2} A_1 (\zeta - 1) \frac{\text{sh } q (\hat{z} - 1)}{\text{sh } q (\zeta - 1)} + \\ &+ B_1 \frac{\text{sh } q (\hat{z} - 1)}{\text{sh } q (\zeta - 1)} \end{aligned} \right\} (\zeta < \hat{z} < 1), \quad (9.128)$$

где A_1 и B_1 — постоянные и, очевидно, можно положить $\text{Re } q \geq 0$. Применение условий на скачке (9.121) и исключение A_1 и B_1 после некоторого упрощения дает

$$\begin{aligned} \frac{4q \text{sh}^2 q}{X} &= 2\zeta \text{sh } q \text{ch } q (2\zeta - 1) - \text{sh } 2q \zeta = \\ &= (\zeta - 1) \text{sh } 2q \zeta - \zeta \text{sh } 2q (\zeta - 1) = f(q, \zeta), \end{aligned} \quad (9.129)$$

откуда в принципе определяется $q(X, \zeta)$ [а следовательно, в силу (9.120), и p]. Если $|q| > 0$ и $|\arg q| < \pi/4$, то $\text{Re } p$, определяемая формулой (9.120) при достаточно малом $|Kz_0|$, будет положительной и мы получим динамо.

Рассмотрим вначале возможность существования неосциллирующих мод, для которых величина q действительна и положительна. Функция $f(q, \zeta)$, определяемая выражением (9.129), обращается в нуль в точках $\zeta = 0, 1/2, 1$ и удовлетворяет неравенствам

$$f(q, \zeta) \begin{cases} > 0 & \text{для } 0 < \zeta < \frac{1}{2}, \\ < 0 & \text{для } \frac{1}{2} < \zeta < 1. \end{cases} \quad (9.130)$$

Кроме того, из (9.129) легко показать, что при $\zeta = 0$

$$X^{-1} \begin{cases} -\frac{1}{3} \zeta (1 - \zeta)(2\zeta - 1) & \text{при } q \rightarrow 0, \\ \frac{1}{2q} [\zeta e^{-2q\zeta} - (1 - \zeta) e^{-2q(1-\zeta)}] & \text{при } q \rightarrow \infty. \end{cases} \quad (9.131)$$

Кривые X^{-1} как функции q (для ζ меньших и больших $1/2$) приведены на рис. 9.7, а. Очевидно, для рассматриваемой модели моды с дипольной симметрией могут быть возбуждены, только если

$$-\frac{3}{\zeta(1-\zeta)} < X(2\zeta - 1) < 0 \quad (9.132)$$

и для каждой пары (X, ζ) , удовлетворяющей этому условию, имеется единственное действительное положительное значение q , определяемое из рис. 9.7, а.

Скорость роста описывается в общем случае формулой

$$pz_0^2/\lambda = - (Kz_0)^2 + (q(X, \zeta, |Kz_0|))^2, \quad (9.133)$$

а формула (9.129) действительно определяет $q(X, \zeta, 0)$. Однако ясно, что q должна быть непрерывной функцией $|Kz_0|$ и если $q(X, \zeta, 0) > 0$, то существует также область (малых) значений $|Kz_0|$, для которых $pz_0^2/\lambda > 0$. Следовательно, если выполнено условие (9.132), то моды

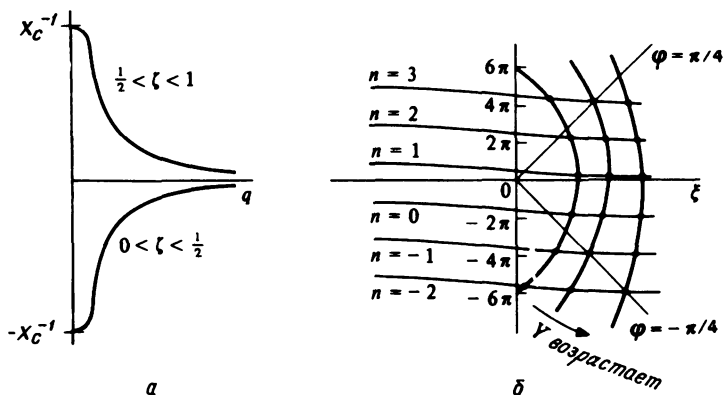


Рис. 9.7.

а — характер зависимости X^{-1} от q для значений ζ , меньших и больших $1/2$; б — геометрическое построение решений уравнения $Qe^Q = Y$ при $Q = \xi + i\eta$; решения помечены черными кружочками, расположенными на пересечениях; кружочки, попадающие в интервал углов $|\varphi| < \pi/4$, отвечают модели вида (9.117) с экспоненциально растущей амплитудой.

дипольной симметрии возбуждаются при достаточно малых значениях $|Kz_0|$, т.е. если достаточно велик масштаб магнитного возмущения K^{-1} в направлении оси x .

Рассмотрим теперь возможность существования осцилляторных динамо-мод, для которых $\text{Re } q > 0$, $\text{Im } \dot{q} \neq 0$ и $|\arg q| < \pi/4$. Если $|q|$ мало, то (9.129) переходит в (9.131), и ясно, что в этом пределе (который эквивалентен предельному переходу $X \rightarrow X_c$, $X_c \approx 31$) имеется только действительное решение. Однако при больших $|q|$, по-

$$Q = 2q\zeta, Y = 3^2 X \quad (0 < \zeta = 1/2),$$

$$Q = 2q(1 - \zeta), Y = -(1 - \zeta)^2 X \quad (1/2 < \zeta < 0), \quad (9.134)$$

мы получим уравнение (для $\zeta < 0$ или $> 1/2$).

$$Qe^Q = -X(1 - \zeta)^2 = Y, \quad (9.135)$$

которое обладает комплексными решениями $Q(Y)$. Чтобы найти их, положим

$$Q = \xi + i\eta = \rho e^{i\varphi}, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (9.136)$$

Тогда, в силу (9.135),

$$\rho e^\xi = |Y|, \quad \varphi + \eta = \begin{cases} 2n\pi & \text{при } Y > 0, \\ (2n + 1)\pi & \text{при } Y < 0, \end{cases} \quad (9.137)$$

где n — целое число. Кривые, определяемые формулами (9.137), для случая $Y > 0$ изображены на рис. 9.7, б, и ясно, что если величина $|Y|$ достаточно велика, то действительно должны существовать комплексные корни Q с $|\arg Q| < \pi/4$. Фактически при $Y \rightarrow \infty$ эти корни имеют вид

$$Q \sim Q_0 + 2n\pi i \quad (n = 1, 2, \dots, n_0), \quad (9.138)$$

где n_0 — целая часть $Q_0/2\pi$, а Q_0 — единственное действительное решение уравнения $Q_0 e^{Q_0} = Y$, удовлетворяющее асимптотическому условию

$$Q_0 \sim \ln Y \quad \text{при } Y \rightarrow \infty. \quad (9.139)$$

Скорость роста таких осцилляторных мод несколько меньше, чем скорость роста неосцилляторных мод (для которых $\eta = 0$), причем с ростом Y различие становится все менее и менее значимым.

Квадрупольные моды

Аналогично, решения уравнений (9.118) и (9.119), удовлетворяющие условиям (9.125) и (9.127), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= A_1 \frac{\text{sh } q \hat{z}}{\text{sh } q \zeta}, \\ \hat{B} &= -\frac{1}{2} \hat{z} \hat{A}(\hat{z}) - \frac{1}{2} A_1 \zeta \frac{\text{ch } q \hat{z}}{\text{ch } q \zeta} + B_1 \frac{\text{ch } q \hat{z}}{\text{ch } q \zeta} \end{aligned} \right\} (\hat{z} < \zeta), \quad (9.140)$$

$$\left. \begin{aligned} \hat{A} &= A_1 \frac{\text{ch } q (\hat{z} - 1)}{\text{ch } q (\zeta - 1)}, \\ \hat{B} &= \frac{1}{2} (\hat{z} - 1) \hat{A}(\hat{z}) - \frac{1}{2} A_1 (\zeta - 1) \frac{\text{sh } q (\hat{z} - 1)}{\text{sh } q (\zeta - 1)} + \\ &+ B_1 \frac{\text{sh } q (\hat{z} - 1)}{\text{sh } q (\zeta - 1)} \end{aligned} \right\} (\zeta < z < 1),$$

а соотношения между q , X и ζ , соответствующие (9.129), выглядят следующим образом:

$$\begin{aligned} \frac{4q \text{ch}^2 q}{X} &= 2\zeta \text{ch } q \text{sh } q (2\zeta - 1) - \text{sh } 2q\zeta = \\ &= g(q, \zeta) = \zeta \text{sh } q (\zeta - 1) + (\zeta - 1) \text{sh } 2q\zeta. \end{aligned} \quad (9.141)$$

Функция $g(q, \zeta)$ обращается в нуль в точках $\zeta = 0, 1$ и удовлетворяет неравенству

$$g(q, \zeta) < 0 \quad \text{для } 0 < \zeta < 1. \quad (9.142)$$

Из (9.141) можно получить асимптотические зависимости X^{-1} от q :

$$X^{-1} \sim -\zeta(1 - \zeta) \left(1 - \frac{2}{3} q^2 \zeta (1 + \zeta - \zeta^2) + O(q^4) \right) \quad \text{при } q \rightarrow 0, \quad (9.143)$$

$$X^{-1} \sim -\frac{1}{2q} [\zeta e^{-2q\zeta} + (1 - \zeta) e^{-2q(1 - \zeta)}] \quad \text{при } q \rightarrow \infty. \quad (9.144)$$

Типичная кривая $X^{-1}(q)$ изображена на рис. 9.8. Очевидно, необходимое и достаточное условие возбуждения динамо-мод с квадрупольной симметрией (в пределе $|Kz_0| \rightarrow 0$) дается неравенством

$$X < -\zeta^{-1} (1 - \zeta)^{-1}. \quad (9.145)$$

Наиболее легко такие моды возбуждаются при $\zeta \approx 1/2$.

Области на плоскости (X, ζ) , для которых, согласно критериям (9.132) и (9.145), возможно возбуждение неосциллирующих дипольных и квадрупольных мод, показаны на рис. 9.9, а, где учтены также малые члены, содержащие $|Kz_0|$, которыми мы пренебрегали выше.

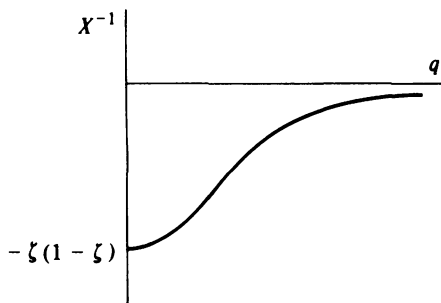


Рис. 9.8.
Характерная зависимость X^{-1} от q ,
описываемая формулой (9.141).

Особенно поражает поведение системы при изменении ζ (т.е. изменении положения функции $\alpha(z)$). Можно ожидать, что этот эффект сохранится и при другом выборе функции $\alpha(z)$ ¹⁾ Для функции (9.115) Паркер нашел²⁾, что в системе возбуждаются неосциллирующие квадрупольные моды, если X положительно и заключено в полосах

$$(4n - 3) \pi / \sqrt{3} \leq X \leq (4n - 1) \pi / \sqrt{3}, \quad (9.146)$$

и неосциллирующие дипольные моды, если X отрицательно и заключено в полосах

$$-(4n + 1) \pi / \sqrt{3} \leq X + 2 \pi / 3 \sqrt{3} \leq -(4n - 1) \pi / \sqrt{3}. \quad (9.147)$$

Вне этих полос все неосциллирующие моды с необходимостью затухают. Если говорить строго, то n в (9.146) и (9.147) — большое положительное число (выражения получены асимптотическими методами), однако результаты остаются приблизительно правильными, даже если n принимает малые значения 1, 2, 3, ... Замечательный контраст между поведением решений в обоих случаях (рис. 9.9, а и рис. 9.9, б), видимо, должен служить предупреждением, что поведение α -системы (т.е. системы, в которой действуют совместно α -эффект и средний сдвиг) может количественно и качественно зависеть от точного вида задаваемых функций α и G .

Что касается возможности возбуждения осциллирующих мод ($\text{Re } p > 0, \text{Im } p \neq 0$) квадрупольной симметрии, заметим, что изменение переменных

$$Q = 2q\zeta, \quad Y = -X\zeta^2 \quad (0 < \zeta \leq \frac{1}{2}),$$

¹⁾ Зависимость решений дискового α -динамо от вида функции $\alpha(z)$ подробно обсуждается в работе Зельдовича и др. (Дисковое динамо, препринт ИПМ АН СССР им. М.В. Келдыша, 1979). — *Прим. ред.*

²⁾ Результаты (9.146) и (9.147) можно получить из уравнений (55) и (71) указанной статьи Паркера.

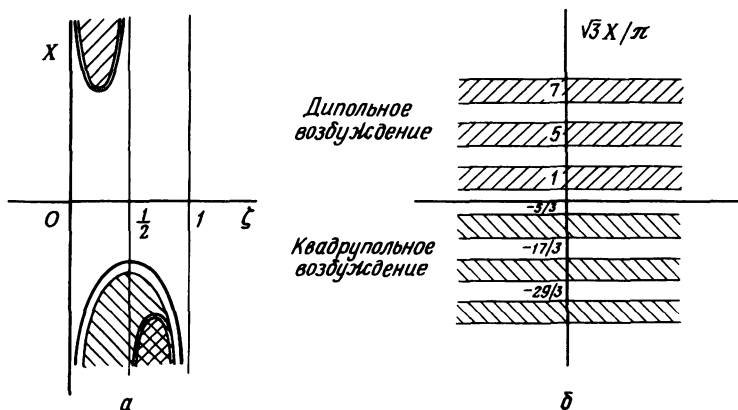


рис. 9.9.

а — область в плоскости (X, ζ) , в которой возбуждены неколебательные моды с дипольной ($//$) и квадрупольной ($\backslash \backslash$) симметрией [см. (9.132) и (9.145)]; б — полосы, в которых возбуждены моды в модели Паркера [158] [см. формулы (9.146) и (9.147)].

или

$$Q = 2q(1 - \zeta), \quad Y = -\frac{1}{2}(2\zeta - 1)(1 - \zeta)X \quad \left(\frac{1}{2} < \zeta < 1\right),$$

позволяет всегда в асимптотическом пределе перейти от (9.144) к уравнению

$$Qe^{\rho} \sim Y \quad (|Q| \gg 1),$$

которое, как показано выше, имеет комплексные решения $Q(Y)$. Замена X на $-X$ при $0 < \zeta < 1/2$, очевидно, переводит равенство (9.131) в (9.141), поэтому если, например, для $X = X_0$ существует осциллирующая дипольная мода, то для $X = -X_0$ имеется осциллирующая квадрупольная мода с той же самой (комплексной) скоростью роста ρ . Аналогичное свойство отмечено Паркером [158] для случая, когда $\alpha(z)$ описывается формулой (9.115). Однако при $1/2 < \zeta < 1$ равенства (9.131) и (9.144) совпадают. Это означает, что если X велико и отрицательно, то возбуждаются с одинаковой комплексной скоростью роста ρ как дипольные, так и квадрупольные моды. В более общей постановке свойства симметрии такого рода изучались в работе [176].

В заключение мы хотим отметить, что Стикс [210] рассмотрел улучшенную модель галактического динамо, записав уравнения динамо (9.9) и (9.10) в сферических координатах и определив (численно) критическое значение X [оно было введено аналогично (9.123)], при

котором $\text{Re } p = 0$ для галактики, граница которой считалась сильно сплюснутым сфероидом ¹⁾. Стикс в этой работе нашел, что при $\text{Re } p = 0$ и $\text{Im } p = 0$, и сделал вывод, что неосциллирующие моды возбуждаются более легко в согласии с приведенным выше обсуждением (в котором определенно указано, что если $|X|$ достаточно мало, то при малом $|Kz_0|$ осциллирующие моды не возбуждаются).

9.10. Генерация полоидальных полей α -эффектом

Если ограничиться рассмотрением случая $\mathbf{U}_P = 0$, то уравнения, определяющие модели $\alpha\omega$ -динамо [см. уравнения (9.10) и (9.13)], в сферической геометрии имеют вид

$$\partial A / \partial t = \alpha B + \lambda (\Delta - s^{-2}) A, \quad (9.148)$$

$$\partial B / \partial t = s(\mathbf{B}_P \cdot \nabla) \omega + \lambda (\Delta - s^{-2}) B \quad (9.149)$$

(где по-прежнему предполагается, что любой эффект, связанный с турбулентной диффузией, включен в определение параметра λ). В разд. 3.11 мы рассмотрели процесс генерации тороидального поля $B i_\phi$ из заданного полоидального поля \mathbf{B}_P . Естественно теперь рассмотреть дополняющий его процесс генерации полоидального поля $\mathbf{B}_P = \text{rot}(A i_\phi)$ из заданного тороидального поля $B i_\phi$ с помощью α -эффекта. В свете результатов разд. 3.11 и сходства уравнений (9.148) и (9.149) эта задача допускает прямое решение.

Пусть $B(r, \theta) i_\phi$ — заданное стационарное тороидальное поле, такое, что величина B/s везде ограничена. (Такое условие естественно наложить, если конечен полоидальный ток, связанный с $B i_\phi$.) Предположим далее, что $\alpha(r, \theta)$ — заданная функция r и θ и в момент $t = 0$ потенциал $A = 0$. Тогда для $t \ll L^2/\lambda$, где L — характеристический масштаб генерационного члена αB в уравнении (9.148), мы имеем просто

$$A(r, \theta, t) = \alpha(r, \theta) B(r, \theta) t. \quad (9.150)$$

При $t \sim L^2/\lambda$ и больших временах становится существенной диффузия полоидального поля, генерированного таким образом, а при $t \gg L^2/\lambda$ достигается стационарное состояние, когда внутри проводящей области

$$(\Delta - s^{-2}) A = -\lambda^{-1} \alpha B. \quad (9.151)$$

¹⁾ Вычисленные Стиксом динамо-числа неверны, их следует умножить на величину a/b , где a и b — большая и малая полуоси сфероида (Astron. Astrophys., **42**, 85–89, 1975). Эта поправка не меняет сделанных выше качественных выводов.

Предположим, как обычно, что это область $r < R$, а снаружи ($r > R$) вещество является непроводящим и, следовательно,

$$(\Delta - s^{-2})A = 0 \quad (r > R). \quad (9.152)$$

Очевидно (см. разд. 3.11), что если величина $\alpha B/\lambda$ может быть разложена в ряд

$$\alpha B/\lambda = \sum_1^{\infty} F_n(r) dP_n(\cos \theta) / d\theta, \quad (9.153)$$

то решение уравнений (9.151) и (9.152) имеет вид

$$A(r, \theta) = \sum_1^{\infty} G_n(r) dP_n(\cos \theta) / d\theta, \quad (9.154)$$

где

$$r^{-2} (r^2 G_n')' - r^{-2} n(n+1) G_n = F_n(r) \quad (9.155)$$

и где мы предположили, что $F_n(r) \equiv 0$ для $r > R$. Из непрерывности V_p на границе $r = R$ следует

$$[G_n] = [G_n'] = 0 \quad \text{при} \quad r = R. \quad (9.156)$$

Решение представляется в виде [ср. (3.105)]

$$G_n(r) = - \frac{1}{2n+1} \left\{ \frac{1}{r^{n+1}} \int_0^r x^{n+2} F_n(x) dx + r^n \int_r^{\infty} \frac{F_n(x)}{x^{n-1}} dx \right\}. \quad (9.157)$$

Пусть, например, для $r < R$

$$B(r, \theta) = B_0 (r/R) \cos \theta \sin \theta, \quad \alpha(r, \theta) = \alpha_0 \cos \theta. \quad (9.158)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \frac{\alpha B}{\lambda} &= \frac{\alpha_0 B_0 r}{\lambda R} \cos^2 \theta \sin \theta = - \frac{\alpha_0 B_0 r}{\lambda R} \frac{d}{d\theta} \left[\frac{2}{15} P_3(\cos \theta) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{1}{5} P_1(\cos \theta) \right]. \end{aligned} \quad (9.159)$$

Следовательно, для $r < R$,

$$F_1(r) = -\alpha_0 B_0 / 5\lambda R, \quad F_3(r) = -2\alpha_0 B_0 r / 15\lambda R \quad (9.160)$$

и $F_n(r) \equiv 0$ ($n \neq 1$ или 3). Далее, из (9.144) следует, что

$$G_1(r) = \alpha_0 B_0 R^4 / 75 r^2 \lambda, \quad G_3(r) = 2\alpha_0 B_0 R^6 / 735 r^4 \lambda, \quad (9.161)$$

и тогда из (9.154) мы получаем, что в области $r > R$

$$A(r, \theta) = \frac{\alpha_0 B_0 R^2}{15\lambda} \left[\frac{1}{5} \left(\frac{R}{r}\right)^2 \sin \theta + \frac{3}{49} \left(\frac{R}{r}\right)^4 (5 \cos^2 \theta - 1) \sin \theta \right]. \quad (9.162)$$

Соответствующее полоидальное поле $\mathbf{V}_P = \text{rot } A \mathbf{i}_\varphi$ имеет дипольную симметрию относительно экваториальной плоскости $\theta = \pi/2$, однако обладает как дипольной, так и октупольной компонентами. В частности, радиальная составляющая \mathbf{V}_P описывается формулой (для $r > R$)

$$V_r = \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \theta} (A \sin \theta) = \frac{\alpha_0 B_0 R^2}{15\lambda} \left[\frac{2}{5} \left(\frac{R}{r}\right)^3 \cos \theta + \frac{6}{49} \left(\frac{R}{r}\right)^5 (5 \cos \theta \cos 2\theta - \cos \theta) \right]. \quad (9.163)$$

9.11. α ω -динамо с фазами выключения

Чтобы продемонстрировать, что α -эффект совместно с дифференциальным вращением может создать динамо, полезно воспользоваться искусственным "выключением", описанным в разд. 6.12. Пусть вначале имеется чисто полоидальное поле $\mathbf{V}_{P_0} = \text{rot} (A_0 \mathbf{i}_\varphi)$ с

$$A_0 = C_0 r^{-1/2} J_{3/2}(kr) \sin \theta \quad (r < R), \quad (9.164)$$

где kR — первый нуль ($=\pi$) функции $J_{3/2}(kR)$, т.е. мы имеем фундаментальную дипольную моду с минимальной характерной скоростью затухания (разд. 2.7). Для $r > R$ поле, конечно, является гармоническим и непрерывно сшивается с внутренним полем. Подействуем теперь на это поле в течение короткого времени t_1 сильным дифференциальным вращением $\omega(r)$. Если процесс протекает достаточно быстро, то диффузией можно пренебречь, и тогда, согласно уравнению (3.96), в области $r < R$ генерируется тороидальное поле, которое в момент $t = t_1$ равно

$$\begin{aligned} \mathbf{V}_T &= B \mathbf{i}_\varphi = r \sin \theta B_r \omega'(r) t_1 \mathbf{i}_\varphi = \\ &= 2 C_0 r^{-1/2} J_{3/2}(kr) \omega'(r) t_1 \sin \theta \cos \theta \mathbf{i}_\varphi. \end{aligned} \quad (9.165)$$

Выключим далее дифференциальное вращение и в течение второго короткого интервала времени t_2 , когда снова можно пренебречь диффузией, включим интенсивный α -эффект с $\alpha = \alpha_0(r) \cos \theta$. Согласно (9.150), в момент $t = t_1 + t_2$ будет создано дополнительное полоидальное поле $\mathbf{V}_P = \text{rot} (A \mathbf{i}_\varphi)$, где

$$A = 5f(r) \sin \theta \cos^2 \theta = -f(r) \frac{d}{d\theta} \left[P_1(\cos \theta) + \frac{2}{3} P_3(\cos \theta) \right] \quad (9.166)$$

при

$$f(r) = \frac{2C_0}{5r^{3/2}} J_{3/2}(kr) \omega'(r) \alpha_0(r) t_1 t_2. \quad (9.167)$$

Наконец, начинается период t_3 выключения (т.е. чисто омического затухания), так что после продолжительного времени "выживает" наиболее медленно затухающая составляющая поля (9.166). Функцию $f(r)$ можно представить в виде бесконечной суммы радиальных функций

$$f(r) = \sum_{q=1}^{\infty} C_{nq} f_{nq}(r) \quad (9.168)$$

соответственно с $n = 1$ или 3 (n и q — те же индексы, которые были использованы в разд. 2.7). Низжайшей затухающей модой будет та, для которой $n = q = 1$, т.е. в точности мода (9.164), с которой мы начали. Подождав достаточно долго, мы можем гарантировать, что влиянием высоких гармоник можно пренебречь, а путем увеличения $|\omega'(r)\alpha_0(r)|$ (не изменяя остального) мы можем сделать так, что поле, выжившее ко времени $t = t_1 + t_2 + t_3$, будет сильнее первоначального поля (9.164). Повторяя этот процесс неограниченное число раз, мы получаем непрерывный процесс динамо.

В зависимости от знака неравенства $C_{11}/C_0 \lesseqgtr 0$ динамо может быть осциллирующим или неосциллирующим. Отношение C_{11}/C_0 определяется точной радиальной зависимостью произведения $\omega(r)\alpha_0(r)$. При обращении знака этого произведения неосциллирующее динамо переходит в осциллирующее и обратно.

9.12. Численные исследования $\alpha\omega$ -динамо

Был выполнен ряд численных исследований уравнений (9.10) и (9.13) в сферической геометрии для различных заданных осесимметричных функций $\alpha(\mathbf{x})$, $\omega(\mathbf{x})$ и $U_p(\mathbf{x})$. Главная цель этих исследований заключалась большей частью в построении вероятных моделей возможных динамо-процессов, протекающих в жидком ядре Земли или в конвективной оболочке Солнца. Приведем несколько выводов, полученных в результате численных исследований. Мы ограничимся рассмотрением случая, когда $\alpha(\mathbf{x})$ и $U_z(\mathbf{x})$ являются нечетными функциями координаты z , нормальной к экваториальной плоскости, а $\omega(\mathbf{x})$ и $U_s(\mathbf{x})$ являются четными функциями z . В этом случае уравнения (9.10) и (9.13) обладают решениями с дипольной (A — четная, B — нечетная функции z) или квадрупольной (A — нечетная, B — четная функции z) симметрией. Во всех случаях поле, конечно, должно сшиваться на сферической границе $r = R$ с внешним безвихревым полем.

Поведение системы характеризуется (см. разд. 9.9) безразмерным динамо-числом [ср. (9.99), (9.123)]

$$X = \alpha_0 \omega_0' R^4 / \lambda^2, \quad (9.169)$$

где α_0 и ω_0' — характерные значения α и $\partial\omega/\partial r$. Воспользуемся для конкретности условными обозначениями Робертса [185]. Тогда α_0 представляет собой значение α в той точке северной полусферы, где $|\alpha|$ достигает максимума (так что α_0 может быть положительным или отрицательным), а ω_0' — значение $\partial\omega/\partial r$ в точке максимума $|\partial\omega/\partial r|$. При этом X может быть как положительным, так и отрицательным.

Решения уравнений (9.10) и (9.13) можно искать в виде, пропорциональном e^{pt} , и задача (как и для теорий ламинарного динамо, обсуждавшихся в разд. 6.11), по существу, сводится к определению возможных значений p как функции X (и любого другого безразмерного параметра, характеризующего поле скорости). Основным интересом представляет то значение X , для которого $\text{Re } p$ при непрерывном увеличении $|X|$ от нуля впервые становится положительной. Соответствующая конфигурация поля может иметь дипольную или квадрупольную симметрию, и мы говорим в таком случае, что *предпочтительной* модой возбуждения является дипольная (или квадрупольная) мода. Кроме того, если $\text{Im } p = 0$ при $\text{Re } p = 0$, то эта предпочтительная мода будет неосциллирующей, тогда как при $\text{Re } p = 0$ и $\text{Im } p \neq 0$ мода будет осциллирующей.

Робертс [186] изучил ряд моделей (с меридиональной циркуляцией \mathbf{U}_p и в отсутствие последней) для различных гладких функций $\alpha(\mathbf{x})$ и $\omega(\mathbf{x})$, удовлетворяющих указанным выше условиям симметрии, и сделал следующие выводы:

1. Если $X > 0$ и $\mathbf{U}_p = 0$, то первой возбуждается осциллирующая квадрупольная мода, но в зависимости от вида функций α и ω критическое динамо-число заключено в интервале от 76 до 212. Однако после введения малой меридиональной циркуляции предпочтительной может оказаться дипольная неосциллирующая мода, причем критическое значение X уменьшается при этом в два (или более) раза. На довольно значительное влияние меридиональной скорости впервые указал Брагинский [27]. Это, по-видимому, можно интерпретировать как воздействие \mathbf{U}_p на динамо-волны в том смысле, что X противоположно по знаку характерной фазовой скорости волн (ср. обсуждение в конце разд. 9.6). Однако, к сожалению, оказывается [186], что *знак* меридиональной циркуляции (т.е. направлено ли течение на поверхности $r = R$ от полюса к экватору или наоборот), который ведет к уменьшению критического значения X , зависит от модели [т.е. от конкретного

выбора $\alpha(\mathbf{x})$ и $\omega(\mathbf{x})$], поэтому простая физическая интерпретация влияния \mathbf{U}_P , по-видимому, невозможна.

2. При $X < 0$ мы приходим к противоположным выводам, т.е. если $\mathbf{U}_P = 0$, то предпочтительной модой будет колебательная дипольная мода; для изученных моделей критическое динамо-число заключено в интервале от -74 до -206 , и при введении подходящей меридиональной скорости \mathbf{U}_P (знак которой снова зависит от модели) критическое значение $|X|$ существенно уменьшается и первой возбуждается неосциллирующая квадрупольная мода.

Осцилляторный характер мод с $\mathbf{U}_P = 0$ был подтвержден в работе [105]¹⁾, в которой выполнено прямое численное интегрирование уравнений (9.10) и (9.13) с заданными простыми функциями $\alpha(\mathbf{x})$ и $\omega(\mathbf{x})$ и с $|X|$, несколько превышавшими критическое динамо-число X_c , полученное из задачи о собственных значениях. В начальный момент $t = 0$ было выбрано чисто полоидальное поле, которое является основной гармоникой задачи о собственных значениях для поля в сфере (разд. 2.7). В ходе последующей эволюции происходило быстрое установление стационарного осциллирующего во времени режима поля (модулированного для сверхкритического X медленным усилением).

В случае $X < 0$ и $\mathbf{U}_P = 0$ характерной особенностью периодических решений является то, что как полоидальная, так и тороидальная составляющие поля появляются вначале в полярных областях и затем усиливаются, перемещаясь к экваториальной плоскости, где тороидальные поля противоположных знаков из двух полусфер уничтожаются диффузией. Поведение такого типа ясно прослеживается на рис. 9.10 [185], где приведены картины полоидального и тороидального полей за половину периода в модели

$$\alpha = \frac{729}{16} \alpha_0 \hat{r}^8 (1 - \hat{r}^2)^2 \cos \theta, \quad \omega = -\frac{19683}{40960} \omega'_0 (1 - \hat{r}^2)^5, \quad (9.170)$$

где $\hat{r} = r/R$, причем коэффициенты выбраны так, что $|\alpha_0|$ и $|\omega'_0|$ представляют собой максимальные значения $|\alpha|$ и $|\partial\omega/\partial r|$. Это видимое распространение полей от полюса к экватору, конечно, совместимо с поведением обсуждавшихся в разд. 9.6 плоских волн, в этом случае необходимым условием распространения поля к экватору также было неравенство $\alpha(\partial\omega/\partial r) < 0$.

В предположении, что солнечные пятна образуются путем извержения вещества при достижении подфотосферным тороидальным полем

¹⁾ См. также работы Ивановой и Рузмайкина (Астрон. ж., **53**, 398, 1976, и **54**, 846, 1977), в которых рассмотрены более реалистические модели солнечного динамо. — *Прим. ред.*

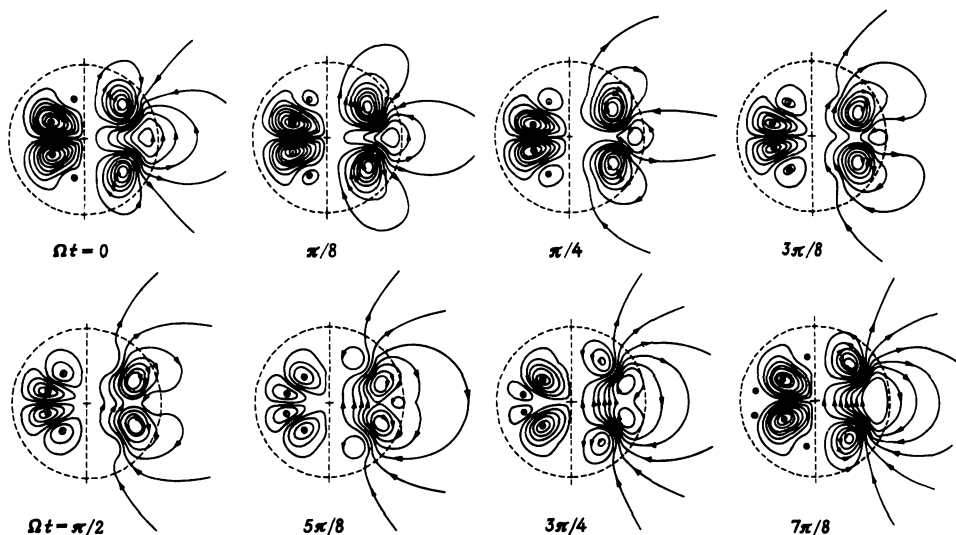


Рис. 9.10.

Эволюция дипольного колебания вблизи порога возбуждения в α ω -динамо, определяемом формулами (9.170) с $X = -206,1$, $\Omega = \lambda^{-1} R^2 \text{Im } p = 47,44$. Показаны меридиональные сечения, пунктиром помечена ось симметрии. В p -линии ($\chi = \text{const}$) показаны справа от этой оси, а линии постоянного тороидального поля ($B_\Phi = \text{const}$) — слева соответственно через равные интервалы χ и B_Φ . B_Φ положительно в областях, помеченных значком \odot , и отрицательно в областях, помеченных значком \otimes . Заметно перемещение картины от полюсов к экватору, происходящее за полуцикл [183].

некоторого критического значения (см. разд. 10.7), ряд авторов, взяв за основу периодические во времени решения уравнений динамо, типа изображенных на рис. 9.10, построили диаграммы Маундера (разд. 5.3), которые можно определить в данном случае как семейство кривых $B(r, \theta, t) = k B_{\max}(r)$ (9.171)

в плоскости переменных θ и t для характерного фиксированного значения r . Здесь B_{\max} представляет собой просто максимальное значение $B(r, \theta, t)$ для $0 \leq \theta \leq \pi$, $0 \leq t \leq 2\pi / \text{Im } p$, и k — постоянная, заключенная между 0 и 1. Если утверждать, что солнечные пятна будут образовываться в любой области, где достигается $|B| > k |B_{\max}|$ (для некоторого k), то эти диаграммы можно непосредственно сравнивать с диаграммой Маундера (см. рис. 5.3), построенной (также в плоскости θ, t) по наблюдаемым солнечным пятнам. На рис. 9.11 приведена диаграмма, полученная Штейнбеком и Краузе [204] при ¹⁾

¹⁾ Функции α и ω были выбраны таким образом, чтобы получить модель, в которой два источника генерации поля пространственно разнесены, что, разумеется, не обязательно.

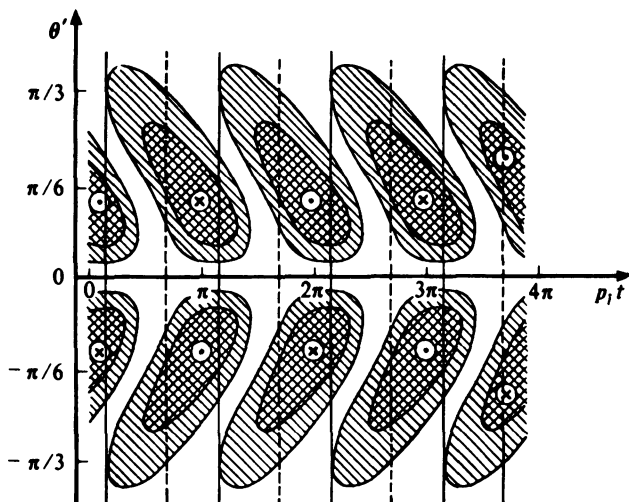


Рис. 9.11.

Диаграмма Маундера, соответствующая $\alpha\omega$ -динамо, которое определяется формулами (9.172); область $|B_\phi| > (1/3) B_{\max}$ заштрихована, а область $|B_\phi| > (2/3) B_{\max}$ покрыта поперечной штриховкой. Сплошные линии отмечают моменты времени, в которых изменяется полярность поля на полюсах; пунктирными линиями отмечены те моменты, когда изменяется знак дипольного момента. Фаза $(\text{Im } p) t = 0$ соответствует максимальному значению тороидального поля [204].

$$\alpha = \frac{1}{2} \alpha_0 \left(1 + \text{erf} \frac{\hat{r} - 0,9}{0,075} \right) \cos \theta, \quad \omega = \frac{1}{2} \omega_0 \left(1 - \text{erf} \frac{\hat{r} - 0,7}{0,075} \right). \quad (9.172)$$

Качественное сходство этой диаграммы с рис. 5.3 впечатляет. Количественное сравнение, конечно, требует, чтобы период теоретического решения $T = 2\pi / \text{Im } p$ был сравним с периодом солнечного цикла, т.е. с 22 годами. Различные численные решения (см., например, [185]) дают

$$\text{Im } p \approx 100 \lambda / R^2, \quad T \approx 2\pi R^2 / 100 \lambda,$$

и при $R \approx 7 \cdot 10^5$ км и коэффициенте турбулентной диффузии ¹⁾ $\lambda \approx u_0 l \approx 10^2$ км²/с мы получаем, что оцениваемый период $T \approx 10$ лет имеет правильный порядок величины.

¹⁾ Если вместо этого воспользоваться грануляционным масштабом (см. гл. 5), то $\lambda \approx 10^3$ км²/с, и мы получим $T \approx 1$ год, т.е. величину, на порядок меньшую наблюдаемого периода.

Чтобы получить распространение картины поля к экватору (и отсюда диаграммы Маундера с правильными качественными характеристиками), необходимо выполнение условия $\alpha_0 \omega'_0 < 0$, т.е. возникают две возможности

$$\alpha_0 > 0, \quad \omega'_0 < 0 \quad \text{или} \quad \alpha_0 < 0, \quad \omega'_0 > 0. \quad (9.173)$$

(Вспомним, что α_0 представляет собой экстремальное значение $\alpha(x)$ в северной полусфере.) Однако Стикс [211] указал, что в линейное соотношение между полями A и B (и, следовательно, между \mathbf{B}_P и B) входит не произведение α и $\partial\omega/\partial r$, а отдельно α или $\partial\omega/\partial r$ [ср. уравнения (9.76)] и что наблюдаемое фазовое соотношение между радиальной и тороидальной компонентами общего поля Солнца (как это следует из анализа диаграммы Маундера и наблюдений радиального поля) в действительности несовместимо со второй возможностью, указанной в (9.173). Следовательно, если на Солнце действует α ω -динамо, то это указывает на то, что α в северной полусфере преимущественно положительно (и отрицательно в южной) и что $\omega(r, \theta)$ возрастает с ростом глубины.

Имеются независимые аргументы [202], основанные на динамических соображениях, из которых также следует, что $\alpha > 0$ в северной полусфере. Мы уже указывали (разд. 9.5) на один физический механизм (вязкое втекание), который может создать положительную спиральность и, таким образом, *отрицательное* α в северной полусфере, если сгусток горячей жидкости поднимается под действием архимедовых сил плавучести. Однако в конвективной оболочке Солнца имеется второй механизм, который вызывает противоположный эффект, а именно сжимаемость. Сгусток жидкости, поднимаясь на несколько шкал высот, будет расширяться и стремиться вращаться в направлении, противоположном среднему солнечному вращению (чтобы сохранить свой абсолютный момент импульса). Это ведет к генерации отрицательной спиральности и, следовательно, положительного α в северной полусфере, причем кажется вероятным, что в солнечной конвективной зоне будет преобладать именно этот эффект. Подробные динамические расчеты, выполненные ниже в разд. 10.7, в которых вычислена величина α , обусловленная неустойчивостями, вызванными силами плавучести, показывают, что истинная картина может быть гораздо сложнее, чем это следует из простых соображений.

Наивно по аналогии полагать, что рост ω с глубиной обязан сохранению момента импульса; с учетом меридиональной циркуляции можно ожидать, что в конвективной зоне это приведет к зависимости $\omega \ll r^{-2}$. Однако из тех же соображений следует, что на поверхности

Солнца вращательная скорость в полярных областях должна быть выше, чем в экваториальной зоне, в то время как наблюдения указывают на полностью противоположную зависимость. Динамическая теория дифференциального вращения Солнца (см., например, [68]) — это отдельная область науки, которая выходит за рамки данной книги. Однако ясно, что модели динамо могут помочь исключить те зависимости $\omega(r, \theta)$, которые полностью не совместимы с наблюдаемой магнитной активностью Солнца. Например, Стикс [211] указал, что модели с $\omega = \omega(s)$, где $s = r \sin \theta$ с учетом наблюдаемого распределения ω по поверхности Солнца, должны иметь $\partial \omega / \partial r > 0$ и, следовательно, как упомянуто выше, несовместимы с наблюдаемым соотношением фаз A и B на поверхности $r = R$. Отсюда разумно сделать вывод, что в конвективной зоне ω не может быть постоянной на цилиндрических поверхностях $s = s_0$.

Предпочтительные моды обсуждавшихся до сих пор моделей (в частности, моделей Робертса [185]) в силу условия $\mathbf{U}_P = 0$ являются осциллирующими. Однако известны примеры, для которых это утверждение не справедливо. В работе [64] исследовано динамо с локализованными источниками генерации поля

$$\partial \omega / \partial r = \omega'_0 \delta (\hat{r}_1 - \hat{r}_2), \quad \alpha = \alpha_0 \delta (\hat{r}_1 - \hat{r}_2) \cos \theta, \quad (9.175)$$

где $\hat{r} = r/R$ и $0 < \hat{r}_1, \hat{r}_2 < 1$. Оказывается, что если \hat{r}_1 и \hat{r}_2 достаточно разделены, то предпочтительные моды будут неосциллирующими. На рис. 9.12 приведены характеристики предпочтительной моды для

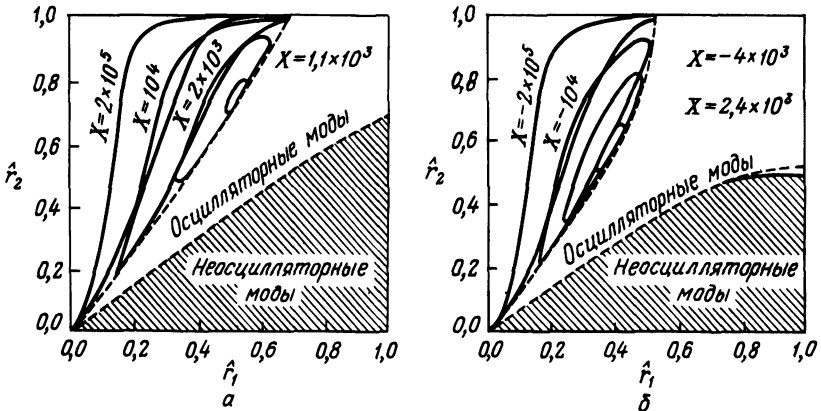


Рис. 9.12.

Области на плоскости $\hat{r}_1 - \hat{r}_2$, в которых возбуждены осцилляционные или неосцилляционные моды в $\alpha \omega$ -динамо, определяемом формулами (9.175). Как моды с дипольной симметрией a , так и моды с квадрупольной симметрией b симметричны относительно линии $\hat{r}_1 = \hat{r}_2$. Изменения критического динамо-числа X для различных значений \hat{r}_1 и \hat{r}_2 показаны сплошными кривыми [64].

возможных значений \hat{r}_1 и \hat{r}_2 . Здесь снова (как в обсуждавшемся в разд. 6.9 динамо Герценберга для двух сфер) пространственное разделение областей генерации поля способствует существованию неосцилляторного динамо благодаря отфильтровыванию "нежелательных" гармоник основного поля. Для функций α и ω вида (9.175) этот эффект легче всего проанализировать в экстремальном случае $\hat{r}_1 \ll \hat{r}_2 \ll 1$, когда только главные гармоники поля, генерированного в одном из слоев, оказывают существенное влияние на другой слой.

Похожий случай был изучен Леви [122], а именно

$$\partial\omega/\partial r = \omega'_0 \delta(\hat{r} - \hat{r}_1),$$

$$\alpha = \alpha_0 \delta(\hat{r} - \hat{r}_2) (\delta(\cos \theta - \cos \theta_0) - \delta(\cos \theta + \cos \theta_0)). \quad (9.176)$$

Здесь предполагается, что α -эффект локализован в двух "кольцах циклонической активности", расположенных на поверхности $\hat{r} = \hat{r}_2$ в $\theta = \theta_0$ и $\theta = \pi - \theta_0$. Тот же случай позже рассматривался в работе Стикса [209]. Из этих работ следует, что при $X > 0$ предпочтительной модой будет неосциллирующая дипольная мода, в то время как при $X < 0$ первой генерируется неосциллирующая квадрупольная мода, если $|90^\circ - \theta| \lesssim 54^\circ$, и осциллирующая дипольная для θ_0 , не попадающих в этот интервал. Может быть, после рассмотрения модели с δ -образной функцией α разд. 9.9 и не кажется удивительным, что предпочтительная мода может крайне чувствительно зависеть от того, где локализован α -эффект. Истинное распределение $\alpha(\mathbf{x})$ (и связанное с ним распределение плотности спиральности) в значительной степени определяется динамикой случайных фоновых движений, которая будет рассмотрена в последующих главах.

Наконец, стоит отметить, что в работе [191] численно исследован переход от осцилляторного режима в $\alpha\omega$ -динамо к неосцилляторному в α^2 -динамо. Следует ожидать, что если увеличивать $|\alpha_0/\omega'_0 R^2|$ от малых значений, то, когда этот параметр по порядку величины будет равен единице, $\alpha\omega$ -режим должен смениться α^2 -режимом. В цитированной работе Робертса и Стикса для конкретной модели было показано, что этот переход происходит фактически при $|\alpha_0/\omega'_0 R^2| \approx 0,1$. Их рассмотрение основывалось на изотропном α -эффекте. По-видимому, стоит упомянуть, что в присутствии сильного дифференциального вращения предположение об изотропии фоновой турбулентности (или случайного волнового движения) является в действительности непоследовательным. Более вероятным кажется неизотропный α -эффект вида

$$\vec{\mathcal{E}} = \alpha \mathbf{V}_T + \alpha' \mathbf{V}_P, \quad |\alpha'| \ll |\alpha|, \quad (9.177)$$

Более того, он получается в методе Брагинского, развитом в гл. 8.

Несмотря на то что результаты обсуждавшихся выше моделей и, в частности, их способность воспроизводить диаграммы Маундера качественно правильной формы в применении к Солнцу кажутся привлекательными, тем не менее пока их следует воспринимать с осторожностью. Необходимо получить правильную величину коэффициента турбулентной диффузии ($\sim 100 \text{ км}^2/\text{с}$). Как отмечено в гл. 5, требуемая интенсивность турбулентности соответствует магнитным числам Рейнольдса $\sim 10^4$; тогда надо ожидать, что турбулентное флуктуационное поле по порядку величины будет сильнее самого среднего поля. Хотя наблюдаемое поверхностное поле Солнца присутствует во всех масштабах вплоть до $\sim 100 \text{ км}$, соответствующие наблюдаемые флуктуации не носят полностью случайный характер, как это требуется в теории, и отсутствуют прямые доказательства наличия флуктуации поля или скорости в масштабах, меньших $\sim 100 \text{ км}$. Тонкая структура сильно маскирует среднее поле, и, как показал анализ Альтшулера и др. [5], в действительности экваториальные дипольные и квадрупольные компоненты поля являются столь же сильными, если не более сильными, чем аксиальные составляющие, которые наиболее естественно появляются в теории α -динамо, поскольку они могут объяснить солнечный цикл. Как подчеркнул недавно Каулинг [61], хотя электродинамика усредненного поля привлекательна в силу своей относительной простоты, необходимо разрешить определенные противоречия, прежде чем она будет окончательно принята как теория, правильно описывающая генерацию магнитного поля Солнца.

ВЛИЯНИЕ СИЛ КОРИОЛИСА,
ЛОРЕНЦЕВЫХ СИЛ
И ПЛАВУЧЕСТИ НА ВОЛНЫ
СПИРАЛЬНОЙ ФОРМЫ

10.1. Уравнение импульса
и некоторые его элементарные следствия

До сих пор считалось, что поле скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ задано. В этой главе мы обратимся к изучению эффектов, в которых скорость определяется уравнением Навье – Стокса:

$$\rho(\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u}) = -\nabla p + \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \rho\nu \Delta \mathbf{u} + \rho \mathbf{F}. \quad (10.1)$$

Здесь $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ – сила Лоренца, ν – кинематическая вязкость среды (предполагаемая постоянной), а \mathbf{F} – представляет собой любое дополнительное поле сил, воздействующих на среду. Ограничимся рассмотрением течений несжимаемой жидкости, для которых

$$D\rho/Dt = 0 \quad \text{и} \quad \text{div } \mathbf{u} = 0. \quad (10.2)$$

Поэтому в уравнении (10.1) опущены члены, связанные с объемной вязкостью. Хотя мы будем иметь дело главным образом с движениями во вращающейся системе отсчета, рассмотрим временно инерциальную систему отсчета, ускорение в которой адекватным образом описывается левой частью уравнения (10.1).

Представим (10.1) в эквивалентной интегральной форме

$$\frac{d}{dt} \int_V \rho u_i dV = \int_S (\sigma_{ij} + T_{ij}) n_j dS + \int_V \rho F_i dV, \quad (10.3)$$

где S – замкнутая поверхность, движущаяся со средой, V – заключенный в ней объем, σ_{ij} – тензор напряжений, определяемый соотношением Ньютона

$$\sigma_{ij} = -p \delta_{ij} + \rho\nu (\partial u_i / \partial x_j + \partial u_j / \partial x_i), \quad (10.4)$$

и T_{ij} – максвелловский тензор напряжений:

$$T_{ij} = \mu_0^{-1} (B_i B_j - \frac{1}{2} \mathbf{B}^2 \delta_{ij}). \quad (10.5)$$

Ясно, что с равенством (10.3) мы должны связать условие скачка величины

$$[(\sigma_{ij} + T_{ij})n_j] = 0 \quad (10.6)$$

на любой поверхности разрыва физических свойств системы; это может быть или неподвижная граница среды, на которой $\mathbf{n} \cdot \mathbf{u} = 0$, или внутренняя поверхность разрыва, движущаяся со средой.

Если плотность однородна, то удобно ввести нозую переменную

$$\mathbf{h} = (\mu_0 \rho)^{-1/2} \mathbf{V}, \quad (10.7)$$

при использовании которой

$$\mathbf{J} \times \mathbf{V} = \mu_0^{-1} (\text{rot } \mathbf{V}) \times \mathbf{V} = \rho (\mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} - \frac{1}{2} \nabla h^2), \quad (10.8)$$

и уравнение (10.1) принимает вид

$$\frac{\partial \mathbf{u}}{\partial t} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} = -\nabla P + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (10.9)$$

где $P = p/\rho + h^2/2$. Уравнение индукции для переменной h принимает вид

$$\partial \mathbf{h} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{h}. \quad (10.10)$$

Очевидно, \mathbf{h} имеет размерность скорости. Симметричность нелинейных членов в уравнениях (10.9) и (10.10) в предельном случае $\lambda = \nu = 0$ и $\mathbf{F} = 0$ приводит к некоторым простым и важным следствиям. Легко проверить, что уравнениям (10.9) и (10.10) в отдельности и совместно удовлетворяют решения вида

$$\mathbf{u} = \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{h}_0 t), \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_0 - \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{h}_0 t), \quad (10.11)$$

или

$$\mathbf{u} = \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}_0 t), \quad \mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}_0 t), \quad (10.12)$$

где \mathbf{f} и \mathbf{g} — произвольные функции своих аргументов, а \mathbf{h}_0 — постоянная. Если \mathbf{f} и \mathbf{g} — локализованные (например, квадратично-интегрируемые) функции, то эти решения представляют собой волны, которые, не изменяя своей формы, распространяются в направлениях $\pm \mathbf{h}_0$. Они называются альвеновскими волнами [4], а $\mathbf{h}_0 = (\mu_0 \rho)^{-1/2} \mathbf{V}_0$, где \mathbf{V}_0 — однородное поле, называется альвеновской скоростью. В силу нелинейности уравнений (10.9) и (10.10) линейная суперпозиция волн (10.11) и (10.12), вообще говоря, *не удовлетворяет* этим уравнениям. Однако если $|\mathbf{f}| \ll h_0$, $|\mathbf{g}| \ll h_0$ и можно пренебречь квадратами и произведениями \mathbf{f} и \mathbf{g} , то

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{h}_0 t) + \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}_0 t), \\ \mathbf{h} &= \mathbf{h}_0 - \mathbf{f}(\mathbf{x} - \mathbf{h}_0 t) + \mathbf{g}(\mathbf{x} + \mathbf{h}_0 t) \end{aligned} \right\} \quad (10.13)$$

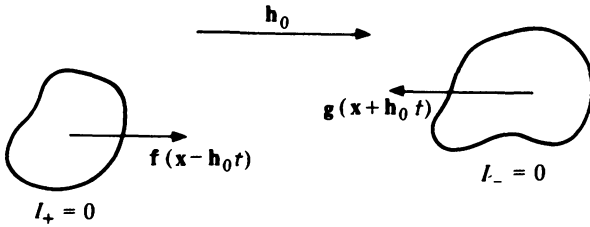


Рис. 10.1.

Возмущения, определяемые функциями $f(x - h_0 t)$ и $g(x + h_0 t)$, взаимодействуют только тогда, когда они перекрываются в x -пространстве. Очевидно, что характерное время взаимодействия возмущений масштаба L не превышает L/h_0 .

являются решениями линеаризованных уравнений. В общем случае, когда функции f и g перекрываются (рис. 10.1), решения (10.11) и (10.12) будут взаимодействовать друг с другом нелинейным образом. Полагая $h = h_0 + h_1$ [где $h_1 = -f(x - h_0 t)$ в (10.11) и $g(x + h_0 t)$ в (10.12)], мы видим, что решения (10.11) и (10.12) обладают свойствами $u \pm h_1 = 0$ соответственно. Определим интегралы

$$I_{\pm} = \frac{1}{2} \int (u \pm h_1)^2 dV, \quad (10.14)$$

полагая, что возмущения достаточно локализованы, так что эти интегралы существуют. Представим себе также, что среда простирается во все стороны до бесконечности и интегралы берутся по всему пространству. Тогда $I_+ = 0$ для решения (10.11), а $I_- = 0$ для решения (10.12).

В действительности при $\nu = \lambda = 0$ интегралы I_{\pm} являются инвариантами системы уравнений (10.9) и (10.10). Вычислим

$$\begin{aligned} \frac{dI_+}{dt} &= \int (u + h_1) \cdot \frac{D}{Dt} (u + h_1) dV = \\ &= \int (u + h_1) \cdot (-\nabla P + (h_0 + h_1) \cdot \nabla (u + h_1)) dV = \\ &= \int \operatorname{div} \left\{ -P(u + h_1) + \frac{1}{2} (h_0 + h_1)(u + h_1)^2 \right\} dV, \end{aligned} \quad (10.15)$$

где мы воспользовались уравнениями $\operatorname{div} u = 0$, $\operatorname{div} h_1 = 0$. Если преобразовать интеграл от дивергенции по объему к поверхностному и учесть, что на бесконечности величина $u + h_1$ обращается в нуль [ясно, что здесь достаточно иметь $u + h_1 = O(r^{-2})$], то получим, что $dI_+/dt = 0$ и, следовательно, $I_+ = \text{const}$. Аналогично, $I_- = \text{const}$. Отметим, что величина

$$I_E = \frac{1}{2} (I_+ + I_-) = \frac{1}{2} \int (u^2 + h_1^2) dV \quad (10.16)$$

с точностью до множителя ρ^{-1} совпадает с полной энергией системы кинетической + магнитной). Мы имеем также родственный инвариант [226]

$$C = \frac{1}{2} (I_+ - I_-) = \int \mathbf{u} \cdot \mathbf{h}_1 dV. \quad (10.17)$$

Инвариантность этого интеграла допускает топологическую интерпретацию [ср. с магнитной спиральностью (2.8)]. Фактически I_C является мерой степени сцепления вихревых линий \mathbf{u} -поля с силовыми линиями \mathbf{h}_1 -поля. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим особый случай, когда $\mathbf{h}_1 = 0$ отлична от нуля только в отдельной силовой трубке бесконечно малого сечения, расположенной в окрестности замкнутой кривой C , и пусть Φ_1 – поток поля \mathbf{h}_1 в трубке. Тогда, согласно (10.17),

$$I_C = \Phi_1 \int_C \mathbf{u} \cdot d\mathbf{x} = \Phi_1 K, \quad (10.18)$$

где K – циркуляция по контуру C или, эквивалентно, поток вихря через поверхность S , накрывающую C . Следовательно, I_C не обращается в нуль только тогда, когда в области силовых линий поля \mathbf{h}_1 имеется не равный нулю суммарный поток вихря. Интеграл I_C называется *взаимной спиральностью* полей \mathbf{u} и \mathbf{h} .

Инвариантность I_+ и I_- дает некоторое указание на характер взаимодействия двух альвенских волн типа (10.11) и (10.12). Если обе функции \mathbf{f} и \mathbf{g} локализованы в области размером L , то продолжительность взаимодействия (которое можно представлять себе как столкновение двух "сгустков", описываемых функциями \mathbf{f} и \mathbf{g}) не будет превышать величины L/h_0 . Выбрав начало отсчета на том интервале времени, в течение которого происходит взаимодействие, получим, что для $t \ll -L/h_0$ (т.е. до взаимодействия) решение имеет вид (10.13), в то время как для $t \gg L/h_0$ (т.е. после взаимодействия) мы должны иметь

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= \mathbf{f}_1(\mathbf{x} - \mathbf{h}_0 t) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}_0 t) \\ \mathbf{h} &= \mathbf{h}_0 - \mathbf{f}_1(\mathbf{x} - \mathbf{h}_0 t) + \mathbf{g}_1(\mathbf{x} + \mathbf{h}_0 t) \end{aligned} \right\}, \quad (10.19)$$

где \mathbf{f}_1 и \mathbf{g}_1 связаны некоторым образом с \mathbf{f} и \mathbf{g} . Инвариантность I_+ и I_- подсказывает нам, что

$$\int \mathbf{f}_1^2 dV = \int \mathbf{f}^2 dV, \quad \int \mathbf{g}_1^2 dV = \int \mathbf{g}^2 dV, \quad (10.20)$$

т.е. перенос энергии между возмущениями в процессе взаимодействия невозможен. Однако пространственная форма возмущения, по-видимому, изменится под влиянием взаимодействия. Интригующая проблема,

которая до сих пор не исследована, заключается в том, каков характер этого изменения.

10.2. Магнитострофические волны

Скорость и магнитное поле во вращающейся среде, например в жидком ядре Земли или в конвективной зоне Солнца, удобно рассматривать в системе отсчета, вращающейся со средой. Если Ω – угловая скорость этой системы отсчета, то при постоянной плотности ρ уравнение движения принимает вид

$$\frac{d\mathbf{u}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = -\nabla P + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} + \nu \Delta \mathbf{u} + \mathbf{F}, \quad (10.21)$$

где в данном случае P включает в себя центробежный потенциал $-\frac{1}{2}(\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x})^2$ и член, связанный с магнитным давлением $(1/2)\mathbf{h}^2$. Однако уравнение индукции сохраняет свой вид

$$\frac{d\mathbf{h}}{dt} + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{h} = \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{h}, \quad (10.22)$$

где теперь $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ и $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ измерены относительно вращающейся системы отсчета. С физической точки зрения инвариантность очевидна, поскольку при твердотельном вращении магнитное поле просто поворачивается без искажения. Следовательно, изменения $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ во вращающейся системе отсчета вызываются только движением относительно этой системы и обычным процессом омической диффузии¹⁾.

Предположим далее, что

$$\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1, \quad \mathbf{u} = \mathbf{u}_0 + \mathbf{u}_1, \quad (10.23)$$

где \mathbf{h}_0 и \mathbf{u}_0 – однородные поля, а \mathbf{h}_1 и \mathbf{u}_1 – малые возмущения. Пренебрегая квадратами и произведениями \mathbf{u}_1 и \mathbf{h}_1 и полагая $\mathbf{F} = 0$, мы получаем уравнения (10.21) и (10.22) в линеаризованной форме

$$\frac{d\mathbf{u}_1}{dt} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + 2\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u}_1 = -\nabla P_1 + \mathbf{h}_0 \cdot \nabla \mathbf{h}_1 + \nu \Delta \mathbf{u}_1, \quad (10.24)$$

$$\frac{d\mathbf{h}_1}{dt} + \mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{h}_1 = \mathbf{h}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1 + \lambda \Delta \mathbf{h}_1, \quad (10.25)$$

где P_1 – соответствующее возмущение P . Решения этих уравнений можно искать в виде волн [120]

$$(\mathbf{u}_1, \mathbf{h}_1, P_1) = \text{Re}(\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{h}}, \hat{P}) \exp i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - (\omega + \mathbf{u}_0 \cdot \mathbf{k})t), \quad (10.26)$$

¹⁾ Отметим, что это простое утверждение становится неприменимым для областей, расположенных от оси вращения на расстояниях c/Ω , где c – скорость света. На таких расстояниях нельзя пренебрегать токами смещения и поле неизбежно увлекается вращающейся системой отсчета.

причем соленоидальность \mathbf{u}_1 и \mathbf{h}_1 означает, что

$$\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{h}} = 0, \quad (10.27)$$

т.е. эти волны являются поперечными. Подставляя (10.26) снова в (10.25), получаем соотношение между $\hat{\mathbf{h}}$ и $\hat{\mathbf{u}}$

$$\hat{\mathbf{h}} = -(\omega + i\lambda k^2)^{-1} (\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_0) \hat{\mathbf{u}}, \quad (10.28)$$

с которым мы уже имели дело в гл. 7 (7.75). А подстановка (10.26) в (10.24) после перегруппировки членов дает

$$-i\sigma \hat{\mathbf{u}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} = -i\mathbf{k}\hat{P}, \quad (10.29)$$

где

$$\sigma = (\omega + i\nu k^2) - (\omega + i\lambda k^2)^{-1} (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2. \quad (10.30)$$

Влияние магнитного поля в (10.29) полностью учитывается коэффициентом σ . Это приводит к важному видоизменению дисперсионного соотношения между ω и \mathbf{k} , однако присутствие \mathbf{h}_0 не влияет на пространственную структуру поля скорости.

Для получения дисперсионного соотношения мы прежде всего умножим (10.29) векторно на \mathbf{k} . В силу $\mathbf{k} \cdot \hat{\mathbf{u}} = 0$, это дает

$$-i\sigma \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}} - 2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \hat{\mathbf{u}} = 0. \quad (10.31)$$

Умножая это равенство еще раз векторно на \mathbf{k} , получим

$$i\sigma k^2 \hat{\mathbf{u}} - 2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}} = 0. \quad (10.32)$$

Исключение $\hat{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}$ из (10.31) и (10.32) дает

$$\sigma^2 = 4(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2 / k^2 \quad \text{или} \quad \sigma = \mp 2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) / k, \quad (10.33)$$

и из (10.31) или (10.32) мы имеем соответствующее простое соотношение между $\hat{\mathbf{u}}$ и $\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}$:

$$i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}} = \pm k \hat{\mathbf{u}}. \quad (10.34)$$

Поскольку $\hat{\boldsymbol{\omega}} = i\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}$ равно преобразованию Фурье вихря $\boldsymbol{\omega} = \text{rot } \mathbf{u}$, связанного с волной, то, как это ясно из (10.34), каждая фурье-компонента волны обладает максимальной спиральностью, т.е. для каждой волны

$$\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle = \pm k |\hat{\mathbf{u}}|^2 e^{-2|\omega_i|t}, \quad (10.35)$$

где $\omega = \omega_r + i\omega_i$. Затухание волн ($\omega_i \neq 0$) связано, конечно, с вязкой и омической диффузией. Такие движения особенно эффективно генерируют α -эффект и, следовательно, представляют особый интерес для теории динамо.

Легко представить себе, какую форму имеет движение, удовлетворяющее условию (10.34), выбрав оси XYZ таким образом, чтобы ось X была параллельна \mathbf{k} , т.е. $\mathbf{k} = (k, 0, 0)$. Тогда $\hat{\mathbf{u}} = (0, \hat{v}, \hat{w})$ и из (10.34) имеем $\hat{w} = \pm i \hat{v}$. Принимая во внимание множитель $e^{i\mathbf{k} \cdot \mathbf{x}} = e^{ikX}$ (10.26) получим компоненты поля скорости, характеризующие пространственную форму движения:

$$\mathbf{u}_1 \sim (0, \cos(kX + \psi), \pm \sin(kX + \psi)), \quad (10.36)$$

где фаза ψ зависит от времени. Это — поляризованное по кругу волновое движение (рис. 10.2), причем вектор скорости \mathbf{u}_1 постоянен по величине, но изменяет свое направление при увеличении X . В зависимости от того, положительна или отрицательна соответствующая спиральность $\mathbf{u}_1 \cdot \boldsymbol{\omega}$, вращение вектора \mathbf{u}_1 будет лево- или правовинтовым.

Если $\mathbf{h}_0 = 0$ и вязкими эффектами можно пренебречь, то из равенств (10.30) и (10.33) следует дисперсионное соотношение для чисто инерциальных волн во вращающейся среде (см., например, [84]):

$$\omega = \mp 2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})/k. \quad (10.37)$$

Групповая скорость таких волн определяется формулой

$$\mathbf{c}_g = \nabla_{\mathbf{k}} \omega = \mp 2k^{-3}(k^2 \boldsymbol{\Omega} - \mathbf{k}(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})). \quad (10.38)$$

Поскольку $\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{k} = 0$, то $\mathbf{c}_g \cdot \mathbf{k}$ перпендикулярно фазовой скорости $\omega \mathbf{k}/k^2$. Кроме того, поскольку

$$\mathbf{c}_g \cdot \boldsymbol{\Omega} = \mp 2k^{-1} \Omega^2 \sin^2 \theta, \quad (10.39)$$

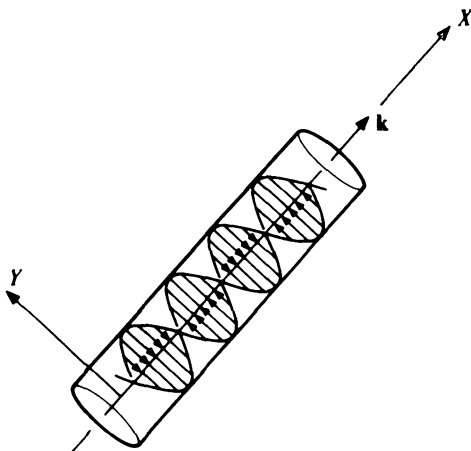


Рис. 10.2.

Форма движения, определяемого формулой (10.36). Показан случай, когда вектор скорости вращается с увеличением X в направлении правого винта, что соответствует нижнему знаку в (10.36) с $k > 0$. Спиральность этого движения описывается выражением (10.35) и, таким образом, отрицательна.

где θ — угол между \mathbf{k} и Ω , величина $\mathbf{e}_g \cdot \Omega$ отрицательна или положительна в зависимости от того, положительна или отрицательна спиральность группы волн. Проще говоря, мы можем утверждать, что спиральность отрицательного знака связана с распространением вверх (относительно положительного направления вектора Ω), а спиральность положительного знака — с распространением вниз. Если взять суперпозицию таких волн в равных пропорциях, то суммарная спиральность обратится в нуль; однако любой механизм, в котором предпочтительнее возбуждение волн, распространяющихся вверх или вниз, дает соответственно отрицательную или положительную суммарную спиральность.

Пусть теперь $\mathbf{h}_0 \neq 0$, однако кориолисова сила еще является преобладающей в том смысле, что

$$|\sigma| = 2k^{-1} |\Omega \cdot \mathbf{k}| \gg |\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|. \quad (10.40)$$

(Конечно, если \mathbf{h}_0 не параллельно Ω , то всегда найдутся некоторые волновые векторы, перпендикулярные или почти перпендикулярные Ω , для которых неравенство (10.40) не справедливо.) Тогда если диффузионные эффекты, определяемые коэффициентами ν и λ , слабы, то два корня уравнения (10.30) (которое можно считать квадратным уравнением относительно ω) имеют вид

$$\omega + i\nu k^2 \approx \sigma + \frac{(\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{\sigma + i(\lambda - \nu)k^2} \quad (10.41)$$

и

$$\omega + i\lambda k^2 \approx -\sigma^{-1} (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2, \quad (10.42)$$

где σ еще описывается выражением (10.33). Очевидно, соотношение (10.41) все еще определяет инерциальную волну, частота которой слегка изменена магнитным полем и которая слабо затухает из-за вязкости и омических потерь. Фактически из (10.41) мы имеем $\omega = \omega_r + i\omega_i$, где (при условии $|\lambda - \nu|k^2 \ll |\sigma|$)

$$\omega_r \approx \sigma + \sigma^{-1} (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2, \quad \omega_i \approx -\nu k^2 - (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2 (\lambda - \nu) k^2 \sigma^{-2}. \quad (10.43)$$

С другой стороны, соотношение (10.42) определяет волну, не имеющую аналога при $\mathbf{h}_0 = 0$. В этой волне $\hat{\mathbf{h}}$ и $\hat{\mathbf{u}}$, в силу (10.28), связаны соотношением

$$\hat{\mathbf{h}} = \sigma (\mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_0)^{-1} \hat{\mathbf{u}}. \quad (10.44)$$

Поэтому, в силу неравенства (10.40), $|\hat{\mathbf{h}}| \gg |\hat{\mathbf{u}}|$, т.е. возмущение скорости значительно слабее магнитного возмущения. Дисперсионное

соотношение (10.42) можно получить, пренебрегая в (10.24) членом $(\partial/\partial t - \nu\Delta)\mathbf{u}_1$ (или, эквивалентно, пренебрегая в (10.30) членом $\omega + i\nu k^2$). Следовательно, если отвлечься от тривиального эффекта переноса с постоянной скоростью \mathbf{u}_0 , баланс сил в этой волне выражается соотношением

$$2\Omega \times \mathbf{u}_1 \approx -\nabla P_1 + \mathbf{h}_0 \cdot \nabla \mathbf{h}_1. \quad (10.45)$$

Иными словами, кориолисова сила уравновешена градиентом давления и силой Лоренца. Такой баланс сил называется *магнитострофическим* (по аналогии с термином *геострофический*, используемым в метеорологии для описания баланса лишь между силой Кориолиса и градиентом давления). Мы будем называть волны, относящиеся к этой второй категории с дисперсионным соотношением (10.42), *магнитострофическими волнами*. Другие авторы (см., например, [1]) используют термин "гидромагнитные инерционные волны".

10.3. Модификация α -эффекта под действием силы Лоренца

Ниже мы рассмотрим довольно идеализированную модель, которая дает некоторое представление о природе обратного влияния силы Лоренца на α -эффект, ответственный (по крайней мере частично) за генерацию магнитного поля. Введем в правую часть уравнения (10.24) объемную силу $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ (случайную или периодическую) и предположим, что эта сила задана (детально или статистически) и не зависит от магнитного поля \mathbf{h}_0 . Отклик $(\mathbf{u}_1, \mathbf{h}_1, P_1)$ должен зависеть от поля \mathbf{h}_0 , а также от Ω , λ и ν . Предположим, что диссипативные эффекты, определяемые коэффициентами λ и ν , слабы. Влияние \mathbf{u}_0 тривиально, и для простоты положим $\mathbf{u}_0 = 0$.

Для применимости линеаризованных уравнений силовое поле \mathbf{F} , конечно, должно быть достаточно слабым. Мы можем положить¹⁾ $\text{div } \mathbf{F} = 0$ и дополнительно предположить, что поле \mathbf{F} обладает отражательной симметрией, в частности $\langle \mathbf{F} \cdot \text{rot } \mathbf{F} \rangle = 0$. В таком случае любое нарушение отражательной симметрии \mathbf{u}_1 -поля обязано влиянию вращения.

Рассмотрим вначале действие отдельной фурье-компоненты \mathbf{F} вида $\text{Re}(\hat{\mathbf{f}} e^{i(\mathbf{k} \cdot \mathbf{x} - \omega t)})$, где \mathbf{k} и ω действительны. Решение (10.28), которое остается справедливым, вносит в $\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{h}_1 \rangle$ следующий вклад:

$$\frac{1}{2} \text{Re} \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{h}}^* = \frac{\lambda k^2}{2(\omega^2 + \lambda^2 k^2)} (i \hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}}^*) \mathbf{k} \cdot \mathbf{h}_0. \quad (10.46)$$

¹⁾ Силовое поле \mathbf{F} общего вида можно разложить на соленоидальную и безвихревую составляющие, причем вклад последней можно включить в давление (при $\text{div } \mathbf{u} = 0$).

До сих пор все делалось так же, как в разд. 7.7. Однако теперь мы не можем считать $\hat{\mathbf{u}}$ "заданной" скоростью, а должны найти ее как функцию $\hat{\mathbf{f}}$ из уравнения

$$-i\sigma\hat{\mathbf{u}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} = -i\mathbf{k}\hat{P} + \hat{\mathbf{f}}, \quad (10.47)$$

где σ по-прежнему определяется формулой (10.30). Если диффузионные эффекты слабы, то $\sigma = \sigma_r + i\sigma_i$, где

$$\sigma_r \approx \omega - \omega^{-1} (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2, \quad \sigma_i \approx k^2 (\nu + \lambda\omega^{-2} (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2). \quad (10.48)$$

Умножив (10.47) дважды векторно на \mathbf{k} и разрешив это уравнение относительно $\hat{\mathbf{u}}$, получим

$$\hat{\mathbf{u}} = D^{-1} (2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})\mathbf{k} \times \hat{\mathbf{f}} + i\sigma k^2 \hat{\mathbf{f}}), \quad (10.49)$$

где

$$D = \sigma^2 k^2 - 4(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2. \quad (10.50)$$

Отметим, что при малых ν и λ имеется резонансный отклик (т.е. $|D|$ имеет резкий максимум), если

$$\sigma_r^2 k^2 = 4(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2, \quad (10.51)$$

т.е. когда сила возбуждает волну на собственной частоте (или скорее на комбинации частота – волновой вектор) незатухающей системы.

Теперь мы можем из (10.49) вычислить величину $i\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}}^*$. Воспользовавшись равенством $i\hat{\mathbf{f}} \times \hat{\mathbf{f}}^* = 0$ (которое есть следствие отражательной симметрии поля \mathbf{F}), получаем

$$i\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}}^* = -4 |D|^{-2} \kappa \sigma_r k^2 |\hat{\mathbf{f}}|^2 (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}). \quad (10.52)$$

Подставив это в (10.46), мы находим затем соответствующий вклад в тензор α_{ij} в виде

$$\hat{\alpha}_{ij}(\mathbf{k}, \omega) = -2 |D|^{-2} \sigma_r (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \frac{\lambda k^4}{\omega^2 + \lambda^2 k^4} |\hat{\mathbf{f}}|^2 k_i k_j, \quad (10.53)$$

где, согласно (10.50),

$$|D|^2 \approx (\sigma_r^2 k^2 - 4(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})^2)^2 + 4\sigma_r^2 k^4 (\nu + \lambda\omega^{-2} (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2)^2. \quad (10.54)$$

Нас особенно интересует поведение $\hat{\alpha}_{ij}$ при увеличении $|\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|$ от малых значений. Прежде всего, если $\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k} \approx 0$, то $\sigma_r = \omega$ и выражение для $i\hat{\mathbf{u}} \times \hat{\mathbf{u}}^*$ (связанное со спиральностью вынужденной волны) отлично от нуля только при

$$\omega(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}) \neq 0.$$

Это условие означает, что вынужденная волна должна распространяться "вверх" или "вниз" относительно направления $\boldsymbol{\Omega}$, как мы и

полагали в разд. 10.2, причем поле скорости не будет обладать отражательной симметрией только тогда, когда силовое воздействие, возбуждающее волну, приведет к появлению суммарного потока энергии, направленного вверх или вниз.

Изменение $\hat{\alpha}_{ij}$ при увеличении $|\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|$ от нулевого значения определяется поведением скалярного коэффициента $|D|^{-2} \sigma_r$ в (10.53), где σ_r описывается выражением (10.48). Пусть для определенности $\omega > 0$ и $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0$. Условие резонанса (10.51) можно записать в виде

$$\omega^{-1} |\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|^2 = \omega - 2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})/k, \quad (10.55)$$

и, следовательно, поведение системы зависит от того, больше или меньше ω по сравнению с величиной $2\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}/k$. 1) Если $\omega < 2\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}/k$, то резонанс невозможен для любого \mathbf{h}_0 ; σ_r изменяет знак при переходе величины $\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}$ через ω (причем \mathbf{h}_0 представляет собой альвеновскую скорость волн, определяемых волновым вектором \mathbf{k} и частотой ω), а для больших значений $|\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|$ величина $\sigma_r |D|^{-2}$ асимптотически пропорциональна $|\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|^{-6}$. 2) Если $\omega > 2\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}/k$, то при выполнении условия (10.55) имеет место резонанс. Для соответствующего значения $|\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|$

$$\sigma_r |D|^{-2} = [4\sigma_r k^4 (\nu + \lambda\omega^{-2}(\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2)^2]^{-1}, \quad (10.56)$$

откуда ясен характер резонанса при $\lambda, \nu \rightarrow 0$. Если $|\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|$ превысит резонансное значение, то мы возвращаемся к случаю (1). На рис. 10.3 представлена полная качественная зависимость $\hat{\alpha} = \frac{1}{3}\hat{\alpha}_{ii}$ от $|\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|$.

Псевдотензор вида (10.53), обладающий только одним отличным от нуля главным значением, сам по себе не способен дать самовозбуждающееся динамо α^2 -типа (см. разд. 9.3), однако легко видеть, что суперпозиция вынужденных волн (с различными значениями \mathbf{k} и ω) даст псевдотензор α_{ij} , который в точности представляет собой сумму (или интеграл) вкладов вида (10.53):

$$\alpha_{ij} = \sum_{\mathbf{k}, \omega} \quad \text{или} \quad \iint d^3\mathbf{k} d\omega \hat{\alpha}_{ij}(\mathbf{k}, \omega).$$

Ясно, что этот псевдотензор не обращается в общем случае в нуль, если $|\hat{\mathbf{f}}(k_1, k_2, k_3, \omega)|^2 \neq |\hat{\mathbf{f}}(k_1, k_2, -k_3, \omega)|^2$, где $k_3 = (\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})/k$, а это как раз и есть условие отсутствия симметрии усредненных (или спектральных) свойств силового поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ относительно произвольной плоскости, перпендикулярной вектору $\boldsymbol{\Omega}$.

Из приведенного выше анализа можно сделать два общих вывода. Во-первых, ясно, что если для каждой пары (ω, \mathbf{k}) в спектре $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ выполнено условие

$$\omega > 2(\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega})/k \quad (10.57)$$

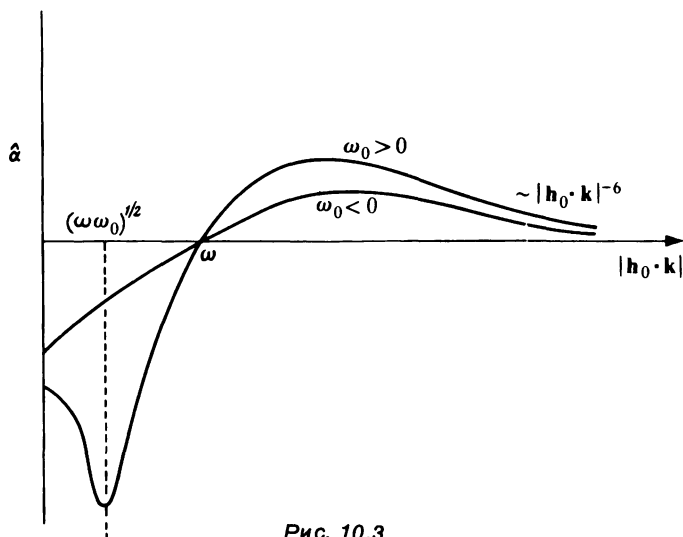


Рис. 10.3.

Качественный вид зависимости $\hat{\alpha} = (1/3)\hat{\alpha}_{ij}$ от $|\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}|$, описываемой формулой (10.53) с $\omega > 0$, $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0$, для положительных и отрицательных значений параметра $\omega_0 = \omega - 2\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}/k$. В первом случае в точке $|\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}| = (\omega\omega_0)^{1/2}$ имеется резонанс, характер резонанса (при малых λ и ν) определяется выражением (10.56).

и благодаря действию динамо локально однородное поле нарастает от первоначально малого значения, то по мере роста поля к своему "резонансному" значению [определяемому формулой (10.55)] для любой пары (ω, \mathbf{k}) α -эффект будет всегда усиливаться. Это усиление α -эффекта связано с тем, что в резонансе амплитуды отклика $\hat{\mathbf{u}}(\mathbf{k}, \omega)$ велики. Вращение само по себе удерживает этот отклик на низкой амплитуде и таким образом ограничивает движение. Нарастающее магнитное поле может, достигнув подходящего значения, ликвидировать это ограничение и, как мы показали, инициировать большие флуктуации скорости, которые соответственно внесут большой вклад в $\hat{\alpha}_{ij}$. Ситуация может показаться парадоксальной. Однако из исследования устойчивости гидродинамических систем, подвергнутых одновременно воздействию кориолисовых и лоренцевых сил (см., например, [50], гл. 5), хорошо известен аналогичный режим: в то время как действующие порознь вращение и магнитное поле оказывают стабилизирующее влияние, совместное действие этих эффектов может привести к тому, что течение, которое было устойчивым под действием только вращения, становится неустойчивым при включении магнитного поля. Такое поведение систем в приложении к задаче динамо отмечалось также в работе [47].

Второй вывод, возможно, является менее неожиданным: независимо от спектральных свойств $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$ с ростом $|\mathbf{h}_0|$ все компоненты α_{ij} уменьшаются асимптотически и обращаются в нуль, если (благодаря действию некоторого внешнего агента) $|\mathbf{h}_0|$ стремится к бесконечности¹⁾. Если определить $\alpha = \alpha_{ii}/3$, то в асимптотическом пределе $|\alpha|$, несомненно, является уменьшающейся функцией локальной плотности энергии $M = \frac{1}{2} h_0^2$ среднего поля. Точная функциональная

зависимость $|\alpha|$ от M довольно сложным образом определяется спектральными свойствами $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, а именно если $|\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, \omega)|^2$ отлична от нуля только при $\omega < 2\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega}/k$, то упомянутое выше явление резонанса невозможно и, как это очевидно из рис. 10.3,

$$|\alpha| \sim M^{-3} \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty. \quad (10.58)$$

С другой стороны, если резонанс возможен и фурье-амплитуды $\hat{\mathbf{f}}(\mathbf{k}, \omega)$ изотропно распределены в полупространстве $\mathbf{k} \cdot \boldsymbol{\Omega} > 0$, то обычно резонанс возможен [для *некоторых* (\mathbf{k}, ω)], даже если \mathbf{h}_0 становится очень большим [144]. В этом случае $|\alpha|$ уменьшается с ростом M при $M \rightarrow \infty$ менее быстро. Фактически как показывает детальный расчет,

$$|\alpha| \sim M^{-\frac{1}{2}} \quad \text{при} \quad M \rightarrow \infty. \quad (10.59)$$

В любом из этих случаев важно следующее. Если благодаря α -эффекту \mathbf{h}_0 нарастает в большом масштабе, то в конечном итоге интенсивность α -эффекта (определяемая просто $|\alpha|$) должна уменьшаться и ясно, что (как и в случае простого дискового динамо, обсуждавшегося в гл. 1) будет достигаться равновесное состояние.

Аналогичное влияние магнитного поля в турбулентной среде (в отличие от случайных волн), приводящее к ослаблению α -эффекта, обсуждалось с других точек зрения в обзоре Вайнштейна и Зельдовича [219] и работе Пуке и др. [171]. Рассмотрение этого более сложного случая мы отложим до следующей главы.

10.4. Динамическое равновесие, устанавливающееся вследствие ослабления α -эффекта

В силу выделенности направлений $\boldsymbol{\Omega}$ и \mathbf{h}_0 , α -эффект, связанный с обсуждавшимся в разд. 10.2 и 10.3 типом волн, будет в общем случае анизотропным. Тем не менее качественный характер процесса

¹⁾ Волновые векторы \mathbf{k} , для которых $\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k} \approx 0$, приводят к расходимости выражений типа (10.56) при $|\mathbf{h}_0| \rightarrow \infty$. Однако такие \mathbf{k} не представляют интереса, поскольку их вклад в $\langle \mathbf{u}_i \times \mathbf{h}_1 \rangle$ [см. (10.46)] ничтожно мал.

равновесия (т.е. ограничения роста магнитной энергии) наиболее просто оценивается в предположении, что $\alpha_{ij} = \alpha(M) \delta_{ij}$, где $M = (1/2) \times \times h_0^2$ – локальная плотность энергии крупномасштабного магнитного поля. Согласно аргументам, приведенным в предыдущем разделе, $|\alpha(M)| \rightarrow 0$ при $M \rightarrow \infty$; более того, значение $\alpha(0)$ связано с чисто инерциальными волнами, на которые не действуют лоренцевы силы.

Если пренебречь влиянием границ среды, то свободные моды α^2 -динамо (разд. 9.2) имеют следующую характерную форму:

$$h_0 = h_{00}(t)(\sin Kz, \cos Kz, 0). \quad (10.60)$$

Магнитная энергия таких мод однородна: $M(t) = (1/2) h_{00}^2(t)$, и если рассмотреть одну из мод (причем естественно выбрать моду, которая в кинематической постановке имеет максимальную скорость роста), то с ростом этой моды функция α остается пространственно однородной. Уравнение, описывающее эволюцию h_0 , имеет в этом случае вид $\partial h_0 / \partial t = \alpha(M) \operatorname{rot} h_0 + \lambda \Delta h_0 = \alpha(M) K h_0 - \lambda K^2 h_0$.

$$(10.61)$$

Откуда ясно, что $M(t)$ удовлетворяет уравнению

$$\frac{1}{2} \frac{dM}{dt} = K \alpha(M) M - \lambda K^2 M. \quad (10.62)$$

Как и в разд. 9.2, мы имеем динамо, если

$$K \alpha(0) > \lambda K^2. \quad (10.63)$$

Если играют важную роль резонансные эффекты, типа обсуждавшихся в разд. 10.3, то $|\alpha(M)|$ может сначала возрастать по мере роста $M(t)$, однако в конечном итоге $|\alpha(M)|$ должно уменьшаться, и магнитная энергия должна установиться на уровне M_c , определяемом из уравнения

$$K \alpha(M_c) = \lambda K^2. \quad (10.64)$$

В конкретной модели Моффата [144] (в которой учтена анизотропия α_{ij}) равновесная плотность магнитной энергии, определенная так, как это указано выше, оказалась равной

$$M_c^{3/2} = \frac{a l^2 L}{\lambda} \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right)^{1/2} < \mathbf{F}^2 >, \quad (10.65)$$

где l – характеристический масштаб силового поля $\mathbf{F}(\mathbf{x}, t)$, ω_0 – характерная частота спектра этого поля (которая считается малой по сравнению с Ω), L – характеристическая длина, связанная с крупномасштабным полем h_0 (так что $L \gg l$) и a – постоянная, по порядку величины равная единице. Для той же модели (с $v \gg \lambda$) вычислена

и равновесная плотность кинетической энергии вынужденных волн

$$E_c = \frac{bl^3}{(\lambda v)^{1/2} M_c^{1/2}} \left(\frac{\omega_0}{\Omega} \right) \langle F^2 \rangle, \quad (10.66)$$

где b – вторая постоянная, по порядку величины равная единице. Вязкость в этом выражении появилась в сущности потому, что резонансное воздействие волн, для которых $\mathbf{h}_0; \mathbf{k} \approx 0$, генерирует волны, амплитуды которых определяются только диссипацией, вызванной вязкостью. Эти волны вносят пренебрежимо малый вклад в α -эффект (см. сноску на стр. 255), но большой вклад в плотность кинетической энергии волнового поля. Заслуживает внимания также факт уменьшения E_c с увеличением M_c . По существу это происходит из-за общей тенденции сильного магнитного поля подавлять отклик на силовое воздействие. В пределе $|\mathbf{h}_0| \rightarrow \infty$ среда приобретает неограниченную жесткость и не реагирует на силовое воздействие конечной интенсивности.

Стоит также обратить внимание на нелинейный характер соотношений (10.65) и (10.66). В полностью линейной теории E_c должно быть пропорционально $\langle F^2 \rangle$; здесь же после исключения M_c из (10.65) и (10.66) мы имеем $E_c \sim \langle F^2 \rangle^{2/3}$.

Отношение M_c к E_c определяется формулой

$$\frac{M_c}{E_c} = C \left(\frac{\Omega}{\omega_0} \right)^{1/2} \left(\frac{v}{\lambda} \right)^{1/2} \frac{L}{l}, \quad (10.67)$$

где $C = a/b$. При $\omega_0 \ll \Omega$ и $v \ll \lambda$ множители $(\Omega/\omega_0)^{1/2}$ и $(v/\lambda)^{1/2}$ стремятся компенсировать друг друга. Во всяком случае очевидно, что если L/l достаточно велико (т.е. для роста магнитных мод имеется достаточное пространство), то можно ожидать, что плотность магнитной энергии достигнет величины, превышающей плотность кинетической энергии любого волнового движения. Этот вывод не зависит от модели. Действительно, в силу (10.64), очевидно, можно полагать, что в общем случае M_c является возрастающей функцией L ($\sim K^{-1}$), в то время как E_c или не зависит от L , или является падающей функцией L [благодаря эффекту подавления движений магнитным полем, описываемому формулой типа (10.66)].

Альтернативные способы инжекции энергии в среду были рассмотрены Соурдом [200]. В модели Соурда предполагается, что высокопроводящая невязкая среда заключена между двумя параллельными плоскостями $z = 0$ и $z = z_0$, перпендикулярными вектору угловой скорости Ω ; энергия впрыскивалась через плоскость $z = 0$ с помощью случайного

механического возбуждения и поглощалась (без отражения) на плоскости $z = z_0$. В отсутствие магнитного поля средняя спиральность (усреднение проводилось по плоскостям $z = \text{const}$) не зависит от z , но имеется соответствующий α -эффект, также не зависящий от z . Если z_0 достаточно велико, то эта система неустойчива относительно роста возмущений магнитного поля вида (10.60). Однако, как только они достигнут достаточной величины, вмешивается слабая омическая диссипация, которая ведет к *пространственному затуханию* волновых групп, распространяющихся от $z = 0$ к $z = z_0$, и, следовательно, с ростом z интенсивность α -эффекта падает. Равновесное значение магнитного поля всегда определяется локальным значением псевдотензора α_{ij} , и поэтому равновесная плотность магнитной энергии $M = 1/2 < h_0^2 >$ также уменьшается с ростом z . Характеристический масштаб этого пространственного затухания оказывается равным

$$L = l \text{Ro}^{-2}, \quad \text{Ro} = U_0 / l \omega_0, \quad (10.68)$$

где U_0 и l — среднеквадратичная скорость и характеристический масштаб возбуждения на плоскости $z = 0$, а ω_0 — частота, характеризующая возбужденные волны (предполагается, что ω мала по сравнению с Ω). Рассмотрение основано на предположении о малости числа Россби Ro , поэтому, как и в других масштабных методах, $L \gg l$. На рис. 10.4 приведены решения, полученные Соурдом для двух компонент среднего горизонтального поля в равновесном состоянии при $z_0/L = 16,6$. Примечательной особенностью этого решения является тот факт, что поле вращается вокруг направления Ω с угловой скоростью, примерно равной $0,2 (\text{Ro}^4/Q)\Omega$, где $Q = \Omega l^2/\lambda (\gg 1)$.

Довольно любопытен предельный случай $z_0/L \rightarrow \infty$ (когда среда заполняет полупространство $z > 0$). Соурд утверждает, что в силу ослабления α -эффекта с высотой магнитное поле для $z \gg L$ должно экспоненциально затухать (интенсивность α -эффекта оказывается недостаточной для поддержания поля), и тогда в области $z \gg L$ должен свободно распространяться отличный от нуля поток волновой энергии, "несмотря на то что интенсивность α -эффекта остается постоянной". С этим утверждением трудно согласиться, поскольку отличный от нуля α -эффект всегда ведет к росту возмущений магнитного поля, если имеется достаточное пространство, а в рассматриваемой задаче имеется бесконечное полупространство. Единственная альтернатива заключается в том, что α -эффект обращается в нуль для больших z или, эквивалентно, что *вся* волновая энергия диссипирует в слое $z = O(L)$, в котором происходит генерация поля, и *ничто* не распространяется к $z = \infty$.

Соурд обратил внимание на дополнительное усложнение, которое

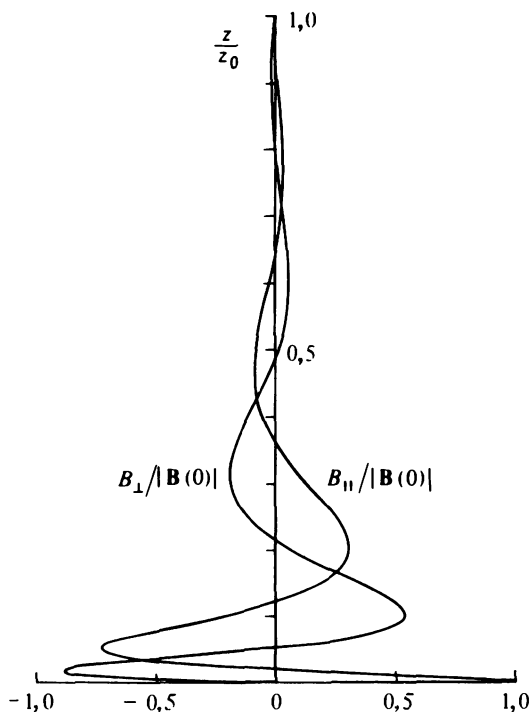


Рис. 10.4.

Компоненты поля, параллельные и перпендикулярные полю на границе $z = 0$, связаны со случайным возбуждением в $z = 0$; граница $z = z_0$ является идеально поглощающей; жидкость вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω , а магнитное поле вращается относительно жидкости с угловой скоростью $0,2 (Ro^4/Q)\Omega$, где Ro и Q определены в тексте [200].

обычно необходимо учитывать при рассмотрении медленной эволюции усредненного крупномасштабного магнитного поля. Оно заключается в том, что в течение большого времени эволюции нелинейное взаимодействие волн, составляющих фон, может вызвать также систематическое изменение волнового спектра. Это означает, что как бы ни были малы возмущения \mathbf{u}_1 и \mathbf{h}_1 , при рассмотрении больших временных интервалов не обосновано отбрасывание нелинейных членов в уравнениях (10.24) и (10.25), описывающих динамо, поддерживаемое средней электродвижущей силой $\langle \mathbf{u}_1 \times \mathbf{h}_1 \rangle$, которая сама квадратична по малым величинам.

Функция α , падающая с ростом $|\mathbf{B}|$, была использована в численных исследованиях $\alpha\omega$ -динамо, частично обсуждавшихся в разд. 9.12

(см., например, [31, 105, 208])¹⁾. Стикс [208] воспользовался простой ступенчатой функцией

$$\alpha = \begin{cases} \alpha_0 & (|B| < B_c) \\ 0 & (|B| > B_c) \end{cases} \quad (10.69)$$

и исследовал ее влияние на осциллирующую дипольную моду, возбужденную в плоском слое [ср. разд. 9.9, но с $U = U(z)$]. При принятых им условиях критическое динамо-число для этой моды было равно $X_c = -89,0$, а период колебаний $0,993 R^2/\lambda$, где R – размер слоя в поперечном направлении (то же R было использовано и в определении X). При $X = aX_c$, $a > 1$ в линейной кинематической теории получается осциллирующая мода с экспоненциально растущей амплитудой. Введение ступенчатой функции (10.69) ограничивает амплитуду до значения, по порядку величины совпадающего с B_c , а также несколько укорачивает период колебаний. Стикс нашел, например, что при $a = 7$ максимальная амплитуда заключена между $2B_c$ и $3B_c$, а период приблизительно равен $1,7 R^2/\lambda$. Кроме того, хотя поле остается периодическим, оно совсем не похоже на синусоидальное: α -эффект при $|B| < B_c$ дает всплески полоидального поля, которые сопровождаются менее выраженными всплесками тороидального поля (по величине превышающими B_c), генерируемого с помощью сдвига поля скорости. Получающиеся "заострения" поля (в функции времени) были отмечены также в работе [105], в которой выполнены аналогичные вычисления с целым рядом ступенчатых функций для случая сферической области.

10.5. Генерация спиральности в результате взаимодействия архимедовых и кориолисовых сил

Мы уже отмечали в ряде случаев, что отсутствие симметрии относительно плоскостей, перпендикулярных вектору угловой скорости Ω , с необходимостью приводит к нарушению отражательной симметрии случайных движений, играющих главную роль в создании α -эффекта. Как указали впервые Штейнбек и др. [202], такая симметрия отсутствует в случае, когда на жидкие элементы, плотность которых отличается на величину ρ' от локальной плотности ρ_0 окружающей среды, действуют архимедовы силы $\rho \mathbf{g}$ (с $\mathbf{g} \cdot \Omega \neq 0$).

¹⁾ См. также работу Ивановой и Рузмайкина (Астроном. ж., 54, 846, 1977). – *Прим. ред.*

Простое и поучительное рассмотрение взаимной роли архимедовых и кориолисовых сил в генерации спиральности было проведено Хайдом [94]. Предположим, что условия являются геострофическими и справедливо приближение Буссинеска (в котором флуктуации плотности учитываются в уравнении движения только для архимедовой силы и не учитываются в инерционном члене). Уравнение движения в этом приближении имеет вид

$$2\rho_0\Omega \times \mathbf{u} = -\nabla p + \rho'\mathbf{g}, \quad (10.70)$$

где мы временно пренебрегли силой Лоренца. Применив к этому уравнению операцию ротора и учитывая, что $\mathbf{g} \times \nabla\rho_0 = 0$, получим

$$2\rho_0 \operatorname{rot}(\Omega \times \mathbf{u}) = -\mathbf{g} \times \nabla\rho' \quad (10.71)$$

и, следовательно,

$$2\rho_0(\Omega \times \mathbf{u}) \cdot \operatorname{rot}(\Omega \times \mathbf{u}) = -(\Omega \times \mathbf{u}) \cdot (\mathbf{g} \times \nabla\rho') = -\Omega \cdot \mathbf{u} \times (\mathbf{g} \times \nabla\rho'). \quad (10.72)$$

Вводя $\mathbf{u}_\perp = \mathbf{u} - (\mathbf{u} \cdot \Omega)\Omega/\Omega^2$ — проекцию скорости на плоскость, перпендикулярную Ω , легко проверить, что уравнение (10.72) можно записать в виде

$$2\rho_0\Omega^2(\mathbf{u}_\perp \cdot \operatorname{rot}\mathbf{u}_\perp) = -\Omega \cdot \mathbf{u} \times (\mathbf{g} \times \nabla\rho'), \quad (10.73)$$

или, усреднив по горизонтальным плоскостям, в виде

$$2\rho_0\Omega^2 \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \operatorname{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle = -(\Omega \cdot \mathbf{g}) \langle \mathbf{u} \cdot \nabla\rho' \rangle + \mathbf{g} \cdot \langle \mathbf{u} \nabla\rho' \rangle \cdot \Omega. \quad (10.74)$$

В частном случае, когда \mathbf{g} параллельно Ω и средние величины однородны в горизонтальных плоскостях, мы можем, воспользовавшись уравнением

$$\operatorname{div}\mathbf{u} = \nabla_\perp \cdot \mathbf{u}_\perp + \partial w/\partial z = 0, \quad (10.75)$$

где w — вертикальная компонента скорости, получить из (10.74) формулу

$$2\rho_0\Omega^2 \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \operatorname{rot}\mathbf{u}_\perp \rangle = -(\Omega \cdot \mathbf{g}) \langle \rho' \partial w/\partial z \rangle, \quad (10.76)$$

устанавливающую непосредственную связь между псевдоскаляром $\Omega \cdot \mathbf{g}$ и по крайней мере частью полной средней спиральности $\langle \mathbf{u} \cdot \operatorname{rot}\mathbf{u} \rangle$. Очевидно, важную роль в определении величины и знака этой части играет фазовое соотношение между ρ' и $\partial w/\partial z$.

Положив $\mathbf{u} = \mathbf{u}_\perp + \mathbf{u}_{\parallel}$, усреднив по плоскостям $z = \text{const}$ и воспользовавшись однородностью относительно x и y , мы найдем полную

спиральность

$$\langle \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \text{rot } \mathbf{u}_\perp \rangle + \langle \mathbf{u}_{||} \cdot \text{rot } \mathbf{u}_\perp \rangle + \\ + \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \text{rot } \mathbf{u}_{||} \rangle = \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \text{rot } \mathbf{u}_\perp \rangle + 2 \langle \mathbf{u}_{||} \cdot \text{rot } \mathbf{u}_\perp \rangle. \quad (10.77)$$

Откуда

$$\langle \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \rangle = \langle \mathbf{u}_\perp \cdot \text{rot } \mathbf{u}_\perp \rangle + 2 \langle \omega_z \rangle, \quad (10.78)$$

где ω_z — компонента вихря, параллельная Ω . Величина $2 \langle \omega_z \rangle$ (как функция ρ') не определяется из приведенного выше доказательства. Хайд [94] утверждает, что если Ω достаточно велика, то эта составляющая должна быть пренебрежимо мала по сравнению с $\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \text{rot } \mathbf{u}_\perp \rangle$. Однако оценка членов (10.77) по порядку величины показывает, что

$$\frac{\langle \mathbf{u}_{||} \cdot \text{rot } \mathbf{u}_\perp \rangle}{\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \text{rot } \mathbf{u}_\perp \rangle} = O \left(\frac{U_{||}/L_\perp}{U_\perp/L_{||}} \right) = O \left(\frac{L_{||}^2}{L_\perp^2} \right), \quad (10.79)$$

где $U_{||}$, U_\perp , $L_{||}$ и L_\perp — скорости и характеристические длины, параллельные и перпендикулярные Ω , которые (в силу равенства $\text{div } \mathbf{u} = 0$) связаны соотношением $U_{||}/L_{||} = O(U_\perp/L_\perp)$. Поскольку в быстровращающейся системе $L_{||}/L_\perp$ обычно велико, то вполне возможно, что второй член в (10.78) может быть существенно больше, чем первый. Однако оценки типа (10.79) решающим образом зависят от фазовых соотношений между компонентами скорости, и установить необходимую формулу можно лишь в рамках более конкретных моделей, которые мы рассмотрим в следующем разделе.

10.6. Возбуждение магнитострофических волн в неустойчиво стратифицированной среде

Следующая идеализированная задача (рис. 10.5), которая широко исследовалась с различных сторон [28, 30, 31, 72, 73, 188, 189], является основой для детального рассмотрения эффектов, возникающих при наличии неустойчивой стратификации плотности. Предположим, что рассматриваемая среда заключена между двумя горизонтальными плоскостями $z = \pm z_0$, на которых соответственно заданы температуры $\Theta = \Theta_0 \pm \beta z_0$. Тогда в невозмущенном состоянии вертикальный градиент температуры равен $-\beta (< 0)$, и если β достаточно велико, так чтобы скорость освобождения потенциальной энергии, вызванного опусканием "перемешивающейся" жидкости, превышала скорость диссипации энергии, вызванной вязкой и/или омической диффузией, то следует ожидать появления неустойчивостей. Температура определяется уравнением теплопроводности (см. разд. 3.3)

$$\partial \Theta / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \Theta = \kappa \Delta \Theta, \quad (10.80)$$

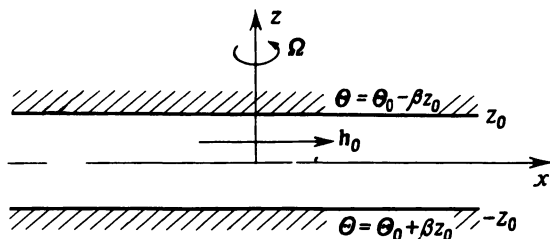


Рис. 10.5.

Конфигурация, рассмотренная в разд. 10.6. Жидкость заключена между плоскостями $z = \pm z_0$, причем на нижней плоскости поддерживается более высокая температура, чем на верхней плоскости. Система вращается вокруг оси z с угловой скоростью Ω и предполагается, что задано однородное магнитное поле $(\mu_0 \rho)^{1/2} \mathbf{h}_0$, параллельное оси x . Если приложенная разность температур достаточно велика, то система является неустойчивой.

где κ — коэффициент температуропроводности среды. Записав температуру в виде $\Theta = \Theta_0 - \beta z + \theta(\mathbf{x}, t)$, где θ — малое возмущение, и считая скорость $\mathbf{u} = (u, v, w)$ также малой, находим линеаризованную форму уравнения (10.80)

$$\partial \theta / \partial t - \beta w = \kappa \Delta \theta. \quad (10.81)$$

Возмущение θ создает возмущение плотности $\rho' = \alpha \theta \rho_0$, где α — коэффициент теплового расширения, и уравнение движения в приближении Буссинеска имеет вид

$$\partial \mathbf{u} / \partial t + \mathbf{u} \cdot \nabla \mathbf{u} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = - \nabla P + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} - \alpha \theta \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{u}, \quad (10.82)$$

где в P включен вклад невозмущенного градиента плотности. Ограничимся рассмотрением неустойчивых мод, скорость роста которых мала по сравнению с Ω . В разд. 10.2 мы показали, что при $\nu / \lambda \ll 1$ правильным приближением к (10.82) является магнитоэстрофическое уравнение

$$2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = - \nabla P + \mathbf{h} \cdot \nabla \mathbf{h} - \alpha \theta \mathbf{g}. \quad (10.83)$$

Предположим, что в невозмущенном состоянии поле \mathbf{h}_0 однородно и направлено по горизонтали. Полагая $\mathbf{h} = \mathbf{h}_0 + \mathbf{h}_1$, где $|\mathbf{h}_1| \ll \mathbf{h}_0$, получим уравнение (10.83) в линеаризованной форме

$$2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{u} = - \nabla p + \mathbf{h}_0 \cdot \nabla \mathbf{h}_1 - \alpha \theta \mathbf{g}, \quad (10.84)$$

где p — возмущение P , а линеаризованное уравнение индукции имеет вид

$$\partial \mathbf{h}_1 / \partial t = \mathbf{h}_0 \cdot \nabla \mathbf{u} + \lambda \Delta \mathbf{h}_1. \quad (10.85)$$

Уравнения (10.81), (10.84) и (10.85) совместно с уравнениями $\text{div } \mathbf{u} = \text{div } \mathbf{h}_1 = 0$ определяют эволюцию малых возмущений $(\mathbf{u}, \mathbf{h}_1, \theta, p)$.

Разумеется, в точках $z = \pm z_0$ необходимо наложить граничные условия. Во-первых, мы имеем при $z = \pm z_0$

$$\theta = 0, \quad u_z = 0. \quad (10.86)$$

Во-вторых, пренебрежение всеми вязкими эффектами соответствует условию отсутствия напряжений на границах $z = \pm z_0$:

$$\partial u_x / \partial z = 0, \quad \partial u_y / \partial z = 0. \quad (10.87)$$

Наконец, простейшие условия для \mathbf{h}_1 вытекают из предположения, что области $|z| > z_0$ являются идеально проводящими, и как магнитное, так и электрическое поля заключены в области $|z| < z_0$. Отсюда следует, что [ср. (3.117) и (3.118)] при $z = \pm z_0$

$$h_{1z} = 0, \quad \partial h_{1x} / \partial z = 0, \quad \partial h_{1y} / \partial z = 0. \quad (10.88)$$

Решения приведенных выше уравнений с граничными условиями (10.86) – (10.88) ищем в виде

$$(u, v, h_{1x}, h_{1y}, p) = (\hat{u}, \hat{v}, \hat{h}_{1x}, \hat{h}_{1y}, \hat{p}) \cos nz e^{i(lx + my - \omega t)},$$

$$(w, h_{1z}, \theta) = (\hat{w}, \hat{h}_{1z}, \theta) \sin nz e^{i(lx + my - \omega t)}, \quad (10.89)$$

где nz_0/π – целое число. Подставляя их в уравнения (10.81), (10.84) и (10.85) и исключая $\hat{\mathbf{h}}_1$, получаем $[\mathbf{k} = (l, m, n)]$

$$-i\sigma \hat{\mathbf{u}} + 2\boldsymbol{\Omega} \times \hat{\mathbf{u}} = -i(l, m, in) \hat{p} - \alpha \hat{\boldsymbol{\theta}} \mathbf{g}, \quad (10.90)$$

$$-(i\omega + \kappa k^2) \hat{\boldsymbol{\theta}} - \beta \hat{w} = 0, \quad (10.91)$$

а из уравнения $\text{div } \mathbf{u} = 0$ мы имеем

$$il\hat{u} + im\hat{v} + n\hat{w} = 0. \quad (10.92)$$

Здесь $\sigma = -(\omega + i\lambda k^2)^{-1} (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2$ [ср. с выражением (10.30) в магнитострофическом пределе]. Мы можем разрешить уравнения (10.90) и (10.91) относительно компонент скорости как функций \hat{p} :

$$\frac{\hat{u}}{-l\sigma - 2i\Omega m} = \frac{\hat{v}}{-m\sigma + 2i\Omega l} = \frac{\hat{w}(\alpha\beta g + \sigma(\omega + i\kappa k^2))}{in(\omega + i\kappa k^2)(4\Omega^2 - \sigma^2)} =$$

$$= \frac{\hat{p}}{4\Omega^2 - \sigma^2}, \quad (10.93)$$

после чего из равенства (10.92) следует дисперсионное соотношение для ω , которое можно упростить, приведя к виду

$$Y^2(-i\omega + \lambda k^2)^2(-i\omega + \kappa k^2) + (-i\omega + \kappa k^2) - Z(-i\omega + \lambda k^2) = 0, \quad (10.94)$$

где

$$Y = 2n\Omega/h_0^2 m^2 k, \quad Z = \alpha\beta g(l^2 + m^2)/m^2 k^2 h_0^2. \quad (10.95)$$

Нас интересует возможность существования неустойчивых мод, для которых $\omega = \omega_r + i\omega_i$ при $\omega_i > 0$. Если $\omega_r = 0$, то эти моды являются неосциллирующими, в то время как при $\omega_r \neq 0$ они имеют характер распространяющихся магнитострофических волн с увеличивающейся амплитудой. Пренебрежем вначале диссипативными эффектами в (10.94), т.е. положим $\lambda = \kappa = 0$. Это как раз тот идеализированный случай, рассмотрением которого ограничился Брагинский [28, 30]. Корни кубического уравнения (10.94) равны в этом случае $\omega = 0$ и

$$\omega = \pm i(Z - 1)^{1/2}/Y; \quad (10.96)$$

ясно, что мода, соответствующая верхнему знаку в (10.96), неустойчива для таких k , для которых $Z > 1$ и $0 < Y < \infty$. В приложениях к геофизике или физике Солнца удобно (как и в разд. 9.6) считать, что ось y направлена к востоку. Тогда в силу условия периодичности по широте достаточно рассматривать дискретный набор возможных значений m , а именно Nm_1 ($N = 0, \pm 1, \pm 2, \dots$). "Осесимметричная" мода, соответствующая $N = 0$, не представляет интереса, поскольку для нее $Y = \infty$ и $\omega = 0$. Легче всего возбуждается мода, для которой $N = \pm 1$, поскольку (при прочих равных условиях) Z для нее максимально. В соответствующих сферических координатах эта мода зависит от азимутального угла φ как $e^{\pm i\varphi}$. Отметим, что в рассматриваемом магнитострофическом приближении можно обнаружить только низкочастотные моды ($|\omega| \ll \Omega$). Для мод с большими частотами приближение несправедливо.

По причинам, указанным в работе [188], пренебрежение диссипативными эффектами в этой задаче является опасным упрощением. Если $g\alpha\beta/h_0^2$ превышает m_1^2 на любую сколь угодно малую величину, то, как следует из (10.96), по-видимому, возбуждается бесконечное число мод (соответствующих большим значениям l), поскольку $Z \sim \alpha\beta g/h_0^2 m_1^2 > 1$ при $l \rightarrow \infty$. Однако это утверждение неверно, поскольку при $l \rightarrow \infty$ также и $Y \rightarrow 0$ (m и n фиксированы) и, следовательно, при очень большом l не выполнено условие $|\omega| \ll \Omega$, т.е. при больших l в уравнении движения надо обязательно учитывать член Du/Dt . Очевидно также, что диффузионные эффекты должны играть важную роль при рассмотрении возмущений с большими волновыми числами, где, вероятно, они оказывают стабилизирующее влияние.

Включение слабой диффузии вызывает также сдвиг вырожденного корня $\omega = 0$ уравнения (10.94) от начала координат комплексной плоскости ω . Действительно, линеаризуя уравнение (10.94) по величинам λ , κ и ω (т.е. считая их малыми), мы получаем следующее выраже-

ние для этого корня:

$$\omega = -i\lambda k^2 (Z - q)/(Z - 1), \quad q = \kappa/\lambda. \quad (10.97)$$

Если

$$0 < q < Z < 1, \quad (10.98)$$

то моды с частотами (10.96) устойчивы, в то время как мода с частотой (10.97) неустойчива. Ясно, что скорость роста этой моды, определяемая диффузионными эффектами, мала. Стоит обратить внимание, как входит в критерий (10.98) отношение малых коэффициентов λ и κ .

Поведение корней уравнения (10.94) для различных значений k , $q = \kappa/\lambda$, Y и Z было исследовано в работе [72], результаты которой суммированы в § 3 работы [188]. Особый интерес представляет ответ на вопрос: является ли главная неустойчивая мода (для которой ω_i максимально) осциллирующей ($\omega_r \neq 0$) или неосциллирующей ($\omega_r = 0$) для заданных значений q , Q и R_α , где

$$Q = 2\Omega\lambda/h_0^2, \quad R_\alpha = g\alpha\beta z_0^2/\Omega\kappa. \quad (10.99)$$

На рис. 10.6 [188] показаны области плоскости (q , Q), в которых первыми возбуждаются осциллирующие моды. Видно также, что неустойчивые неосциллирующие моды всегда возбуждаются первыми, если $q < 2$ или $Q \geq 3,273$, (10.100)

причем этот результат не зависит от величины R_α .

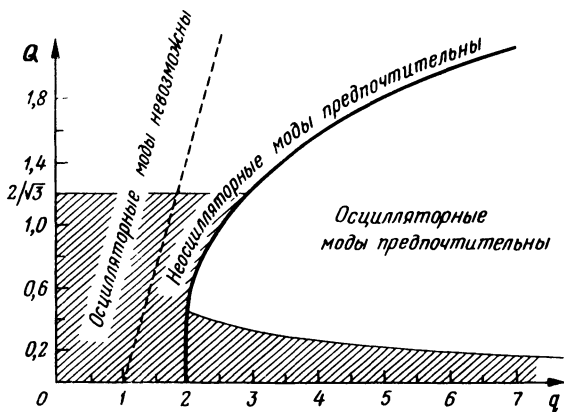


Рис. 10.6.

Области на плоскости $Q - q$, в которых в первую очередь возможно возбуждение осциллирующих мод. В затененных областях основные моды наклонены к приложенному полю [т.е. в (10.101) $m \neq 0$], в то время как в светлых областях основные моды перпендикулярны B_0 (т.е. $m = 0$) [189].

Рассмотрим теперь спиральность, связанную с неустойчивыми возмущениями. Воспользовавшись выражением

$$\mathbf{u} = \text{Re} (\hat{u} \cos nz, \hat{v} \cos nz, \hat{w} \sin nz) e^{i(lx + my - \omega t)}, \quad (10.101)$$

можно непосредственно показать, что

$$\langle \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \rangle = \text{Re} [\hat{w}^* (i l \hat{v} - i m \hat{u})] \cos nz \sin n z e^{2\omega_i t}, \quad (10.102)$$

причем усреднение проводится по горизонтальным плоскостям. [В этом случае вклад величины $\langle \mathbf{u}_\perp \cdot \text{rot } \mathbf{u}_\perp \rangle$ (см. разд. 10.5) в полную спиральность случайным образом равен нулю!] Далее, если возмущение является неосциллирующим, то ω и σ будут чисто мнимыми и, полагая $\omega = i\omega_i$, $\sigma = i\sigma_i$, $\sigma_i = (\omega_i + \lambda k^2)^{-1} (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2$,

$$(10.103)$$

из (10.93) и (10.102) мы имеем

$$\langle \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \rangle = \frac{n\Omega(m^2 + l^2)(\omega_i + \kappa k^2) |\hat{p}|^2}{(4\Omega^2 + \sigma_i^2)[\alpha\beta g - \sigma_i(\omega_i + \kappa k^2)]} \sin 2nz e^{2\omega_i t}. \quad (10.104)$$

Эта величина антисимметрична относительно центральной плоскости $z = 0$. В случае, когда $nz_0 = \pi$, спиральность неустойчивых мод ($\omega_i > 0$) в области $0 < z < \frac{1}{2} z_0$ положительна или отрицательна в зависимости от знака неравенства

$$\alpha\beta g(\omega_i + \lambda k^2) \gtrless (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2(\omega_i + \kappa k^2). \quad (10.105)$$

[Заметим, что эта неустойчивая мода является второй гармоникой в области $-z_0, z$, но первой в интервале $0, z_0$.] В критическом для устойчивости случае ($\omega_i = 0$) определяющую роль вновь играет отношение $q = \kappa/\lambda$.

Дальнейшее подробное рассмотрение этой задачи, при котором учтены различные ориентации векторов Ω и \mathbf{h}_0 относительно границ и другие граничные условия, можно найти в работе [73].

10.7. Неустойчивость, связанная с магнитной плавучестью

Понятие *магнитной плавучести* было введено Паркером [154], который рассматривал процесс образования солнечных пятен в результате неустойчивости подфотосферного солнечного тороидального

^η Утверждение Моффата [147] об обращении в этом случае спиральности в нуль является ошибочным.

магнитного поля. Существенным элементом неустойчивости этого типа, тесно связанной с неустойчивостью, возникающей в стратифицированной атмосфере с (отрицательным) сверхадиабатическим градиентом температуры, является сжимаемость.

Предположим, что мы имеем равновесные распределения плотности $\rho_0(z)$ и магнитного поля $\mathbf{B}_0 = (0, B_0(z), 0)$ в поле силы тяжести, определяемом ускорением $\mathbf{g} = (0, 0, -g)$ (рис. 10.7). Уравнение магнитостатического равновесия имеет вид

$$0 = -\frac{d}{dz} (p_0(z) + \frac{1}{2\mu_0} B_0^2) - \rho_0(z) g, \quad (10.106)$$

где $p_0(z)$ – распределение давления, которое можно считать монотонно возрастающей функцией плотности $f(\rho_0)$ (в частном случае изотермической "атмосферы" $p_0(z) = c^2 \rho_0(z)$, где c^2 – постоянная).

Предположим далее, что силовая трубка с площадью поперечного сечения A_1 на высоте $z = z_1$, где $B_0(z_1) = B_1$ и $\rho(z_1) = \rho_1$, смещена вверх до высоты $z = z_2$ и что можно пренебречь омической диффузией. Тогда A_1 , B_1 и ρ_1 перейдут, скажем, в \tilde{A}_1 , \tilde{B}_1 и $\tilde{\rho}_1$, а из условия сохранения массы и магнитного потока следует, что

$$\rho_1 A_1 = \tilde{\rho}_1 \tilde{A}_1, \quad B_1 A_1 = \tilde{B}_1 \tilde{A}_1 \quad (10.107)$$

и, в частности,

$$\tilde{B}_1 / \tilde{\rho}_1 = B_1 / \rho_1. \quad (10.108)$$

По мере смещения трубки она будет стремиться расширяться (если $d\rho_1/dz < 0$) таким образом, чтобы давление внутри трубки уравнивалось давлением окружающей среды. Если смещение происходит достаточно медленно, то мы можем полагать, что это равновесие

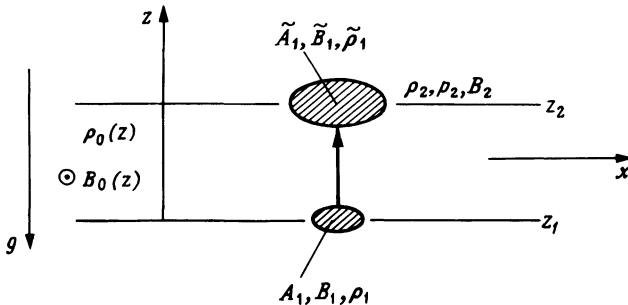


Рис. 10.7.

Рисунок, иллюстрирующий простейшую неустойчивость, создаваемую магнитной плавучестью. Заштрихованная силовая трубка смещается от плоскости $z = z_1$ к плоскости $z = z_2$; она будет продолжать подниматься, если ее новая плотность $\tilde{\rho}_1$ меньше окружающей плотности ρ_2 .

поддерживается, т. е.

$$\tilde{p}_1 + \frac{1}{2\mu_0} \tilde{B}_1^2 = p_2 + \frac{1}{2\mu_0} B_2^2, \quad (10.109)$$

где

$$\tilde{p}_1 = f(\tilde{\rho}_1), \quad p_2 = p(z_2), \quad B_2 = B_0(z_2).$$

Трубка будет оставаться в равновесии в смещенном состоянии только при $\tilde{\rho}_1 = \rho_2$. Ясно, что при $\tilde{\rho}_1 < \rho_2$ она будет продолжать расширяться, в то время как при $\tilde{\rho}_1 > \rho_2$ трубка стремится вернуться в первоначальное положение. Условие безразличного равновесия $\tilde{\rho}_1 = \rho_2$ означает, что $\tilde{p}_1 = p_2$ и, в силу (10.109), $\tilde{B}_1 = B_2$. Следовательно, при выполнении условий безразличного равновесия

$$B_1/\rho_1 = B_2/\rho_2. \quad (10.110)$$

Поскольку это равенство должно быть справедливым для любой пары горизонтальных плоскостей (z_1, z_2), то условие безразличного равновесия можно записать в виде $d(B_0/\rho_0)/dz = 0$. Откуда ясно, что атмосфера будет устойчивой или неустойчивой относительно возмущений рассматриваемого типа в зависимости от того

$$\frac{d}{dz} \left(\frac{B_0}{\rho_0} \right) > 0 \quad \text{или} \quad < 0. \quad (10.111)$$

Если ввести шкалы высот

$$L_B = -B_0/(dB_0/dz), \quad L_\rho = -\rho_0/(d\rho_0/dz), \quad (10.112)$$

то условию неустойчивости можно придать другой, эквивалентный вид

$$L_B < L_\rho. \quad (10.113)$$

В приведенном доказательстве не учитывается возможное искажение силовых линий, а просто показано, что если напряженность магнитного поля достаточно быстро убывает с высотой, то в среде развивается неустойчивость. Однако для проблемы образования солнечных пятен (разд. 5.3) искажение силовых линий имеет решающее значение, поэтому важно рассмотреть возмущения, которые вызывают искривление силовых линий и на которые при учете вращения действуют силы Кориолиса. Различные модели неустойчивостей изучались Гилманом [81] и Паркером [163, 164]. Паркер исследовал неустойчивые моды, для которых можно пренебречь возмущением давления δp , т. е. моды, характерные времена которых *малы* по сравнению

со временем прохождения через систему акустических волн. В противоположность этому Гилман полагал, что теплопроводность (связанная с излучением или другими эффектами) очень велика, и ограничивался рассмотрением медленных неустойчивых мод, для которых давление и плотность связаны условием изотермического равновесия ($\delta p = c^2 \delta \rho$); в этом случае возмущением полного давления (жидкости плюс магнитного) можно пренебречь, как это сделано в приведенном выше качественном обсуждении. Мы будем следовать здесь подходу Гилмана, включив эффекты вращения, но сделав дополнительное упрощающее предположение, что скорости роста неустойчивостей достаточно малы, чтобы было применимым магнитострофическое приближение (т.е. можно было пренебречь в уравнении движения членом Du/Dt). Это сильно упрощает дисперсионное соотношение и позволяет сделать некоторые простые выводы.

Модель Гилмана

Запишем уравнения, определяющие малые магнитострофические возмущения относительно равновесного состояния (рис. 10.7), в виде

$$\begin{aligned} 2\rho_0\Omega \times \mathbf{u} &= -\nabla\chi + \mu_0^{-1}\mathbf{B}_0 \cdot \nabla\mathbf{b} + \mu_0^{-1}\mathbf{b} \cdot \nabla\mathbf{B}_0 - \rho g\mathbf{i}_z, \\ \partial\mathbf{b}/\partial t &= -\mathbf{u} \cdot \nabla\mathbf{B}_0 + \mathbf{B}_0 \cdot \nabla\mathbf{u} - \mathbf{B}_0(\operatorname{div}\mathbf{u}), \\ \partial\rho/\partial t &= -\mathbf{u} \cdot \nabla\rho_0 - \rho_0\operatorname{div}\mathbf{u}, \\ \operatorname{div}\mathbf{b} &= 0, \quad \chi = p + \mu_0^{-1}\mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b}, \end{aligned} \quad (10.114)$$

и, следуя Гилману [81], предположим, что возмущения давления p и плотности ρ связаны соотношением

$$p = c^2\rho, \quad (10.115)$$

где c — изотермическая скорость звука. Это справедливо в случае, когда эффективный коэффициент теплопроводности (определяемой радиативным переносом) велик. Мы пренебрегли в уравнениях (10.114) эффектами, связанными с вязким и омическим затуханием, и опустили член $\partial\mathbf{u}/\partial t$ ¹⁾, ограничиваясь тем самым рассмотрением

¹⁾ В этом отношении мы отклоняемся от работы Гилмана [81], где получено более общее по сравнению с (10.120) дисперсионное соотношение, описывающее как быстрые, так и медленные моды неустойчивости. Гилман нашел неустойчивые моды для случая, когда $\Omega = 0$ и $|B_0(z)|$ — убывающая функция z . Такие моды не имеют спирального характера, однако при учете вращения спиральность, несомненно, появляется.

мод, скорости роста которых малы по сравнению с Ω . Исходя из разумного предположения (в применении к физике Солнца), что гравитационное ускорение существенно превышает центробежное, мы пренебрегли в χ вкладом, связанным с вращением. Если считать, что оси x, y, z направлены соответственно на юг, восток и вертикально вверх, а начало координат расположено в конвективной зоне на широте θ , то компоненты вектора Ω имеют вид

$$\Omega = (-\Omega \sin \theta, 0, \Omega \cos \theta). \quad (10.116)$$

Решения уравнений (10.114) и (10.115) можно искать в виде $e^{i(lx + my - \omega t)}$. Анализ сильно упростится, если мы ограничимся рассмотрением возмущений, для которых $|l| \gg |m|$ и которые представляют особый интерес для физики Солнца, поскольку долгое расстояние между двумя членами типичной пары солнечных пятен является мерой пространственного изменения в направлении оси y . Магнитное поле \mathbf{B}_0 не влияет на вариации вдоль оси x , поэтому характеристические масштабы изменения возмущений в этом направлении могут быть малыми по сравнению с этим долготным расстоянием. Если в фурье-преобразованиях уравнений (10.114) формально положить $l \rightarrow \infty$, то x -компонента уравнений движения вырождается в равенство $\hat{\chi} = 0$. Следовательно, для мод $|l| \gg |m|$ мы имеем эквивалентно

$$\chi = p + \mu_0^{-1} \mathbf{B}_0 \cdot \mathbf{b} \approx 0. \quad (10.117)$$

Полагая $\mathbf{u} = (u, v, w)$ и $\mathbf{b} = (b_x, b_y, b_z)$, мы можем легко получить из (10.114) – (10.117) линейные уравнения, связывающие w, v и b_y , а именно

$$\begin{pmatrix} 0 & \omega q - m h_0^2 K_B & -i m h_0^2 c^2 \\ \omega q & -i m^2 h_0^2 & g h_0^2 \\ -i m & K_\rho - K_B & -i(c^2 + h_0^2) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} v \\ w \\ \omega b_y / B_0 c^2 \end{pmatrix} = 0, \quad (10.118)$$

где ¹⁾ $q = 2\Omega \sin \theta$, $h_0 = (\mu_0 \rho_0)^{-1/2} B_0$ – локальная альвеновская скорость и

$$K_\rho = -\rho_0' / \rho_0 = L_\rho^{-1}, \quad K_B = -B_0' / B_0 = L_B^{-1}. \quad (10.119)$$

Равенство нулю детерминанта, составленного из коэффициентов уравнений (10.118), дает дисперсионное соотношение

$$\omega^2 q^2 (h_0^2 + c^2) - \omega q m h_0^2 (g + h_0^2 K_B + c^2 K_\rho) + m^2 h_0^4 (g K_B - m^2 c^2) = 0. \quad (10.120)$$

¹⁾ Отметим, что на возмущения с $|l| \gg |m|$ влияет только компонента Ω , перпендикулярная \mathbf{g} .

Если корни этого уравнения комплексны, то очевидно, что условием возникновения неустойчивости будет неравенство

$$(g + h_0^2 K_B + c^2 K_\rho)^2 < 4(h_0^2 + c^2)(gK_B - m^2 c^2). \quad (10.121)$$

Поскольку (в случае изотермической атмосферы с $c^2 = \text{const}$) условие равновесия (10.106) можно записать в виде

$$g = h_0^2 K_B + c^2 K_\rho, \quad (10.122)$$

то из (10.121) можно сделать вывод, что среда неустойчива относительно возмущений, волновое число которых в направлении оси y (или, что то же самое, в азимутальном направлении) удовлетворяет неравенству

$$m < m_c = [g(K_B - K_\rho)(h_0^2 + c^2)^{-1}]^{1/2}. \quad (10.123)$$

Как отмечалось в начале настоящего раздела, необходимое условие неустойчивости этого типа определяется неравенством $K_B > K_\rho$ (или эквивалентно $L_B < L_\rho$). Если последнее условие выполнено, то из (10.123) можно найти тот минимальный масштаб $2\pi/m_c$, в котором будут расти возмущения. Интересно, что этот масштаб не зависит от параметра q , характеризующего вращение [хотя скорости роста, определяемые соотношением (10.120), пропорциональны q^{-1}].

Полагая $\omega = \omega_r + i\omega_i$, мы получим, что для неустойчивой моды ($\omega_i > 0$) с $m < m_c$, в силу (10.120) – (10.123),

$$\omega_r q = gmh_0^2 (h_0^2 + c^2)^{-1}, \quad (10.124)$$

$$\omega_i q = h_0^2 (h_0^2 + c^2)^{-1/2} |m| c (m_c^2 - m^2)^{1/2}. \quad (10.125)$$

Поскольку $\omega_r, m > 0$, то эти неустойчивые волны распространяются в направлении роста y , т.е. к востоку.

Распределение спиральности $\langle \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \rangle$, связанное с неустойчивостью этого типа, определяется (для больших l) выражением

$$\mathcal{H} \sim \frac{1}{2} \text{Re } il (v w^* - v^* w), \quad (10.126)$$

причем отношение v/w находится из уравнений (10.118). Прямой расчет с учетом равенства (10.125) дает ¹⁾

$$v/w = -(h_0^2 + c^2)^{1/2} (m_c^2 - m^2)^{1/2} / c |m|,$$

¹⁾ Автор благодарен д-рам Акесону и Гиббонсу, которые устранили ряд ошибок данного раздела и в частности доказали, что в главном порядке спиральность обращается в нуль.

и поскольку это отношение действительно, его вклад в спиральность (10.126) в главном порядке равен нулю. Чтобы получить правильное выражение для \mathcal{K} , надо везде сохранить члены порядка m/l . Однако α -эффект, связанный с неустойчивостью рассматриваемого типа, можно определить и более прямым образом. Записывая

$$(\mathbf{u} \times \mathbf{b})_y = \frac{1}{2} \operatorname{Re} (ub_z^* - wb_x^*) = -(m/2l) \operatorname{Re} (vb_z^* - wb_y^*) = \alpha B_0,$$

мы получаем коэффициент α в виде

$$\alpha = - \frac{m |m| (m_c^2 - m^2)^{1/2} h_0^2 [(h_0^2 - c^2) K_B + c^2 K_p] |w|^2}{2 l q c (h_0^2 + c^2)^{1/2}}. \quad (10.127)$$

Тот факт, что в общем случае этот коэффициент не обращается в нуль, указывает на отсутствие отражательной симметрии движения.

10.8. Генерация спиральности течением вблизи неровной поверхности

В качестве последнего примера механизма генерации спиральности (и связанного с ней α -эффекта) рассмотрим конфигурацию, изображенную на рис. 10.8, где показана неровная поверхность $z = \eta(x)$, отделяющая проводящую жидкость от непроводящей твердой среды. Как и в разд. 10.6, предположим, что $\boldsymbol{\Omega} = (0, 0, \Omega)$ и $\mathbf{B}_0 = (B_0, 0, 0)$. Кроме того, предположим, что жидкость обтекает выпуклости и вогнутости поверхности и при $z \rightarrow -\infty$ скорость течения приближается к постоянной. Можно рассматривать это как грубую модель течения вблизи поверхности раздела ядро – мантия Земли. Грубость состоит в том, что 1) вместо сферической геометрии рассматривается ее декртов "эквивалент"; 2) тангенциальное магнитное поле Земли обра-

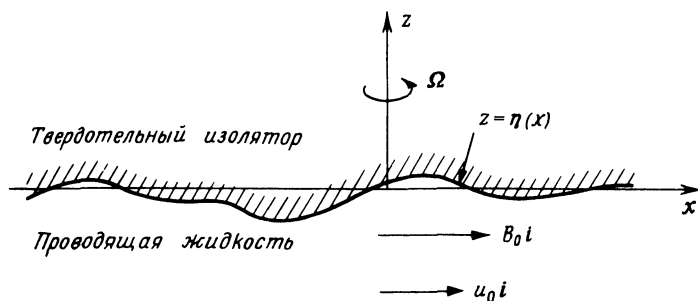


Рис. 10.8.

Схема конфигурации, рассмотренной в разд. 10.8. Она представляет собой грубую модель генерации магнитных флуктуаций вблизи границы ядро – мантия Земли.

щается в нуль на поверхности раздела ядро — мантия из-за низкой проводимости мантии, в то время как здесь мы считаем поле однородным и 3) выпуклости считаются двумерными, хотя в действительности они, несомненно, трехмерны. Модель в этой грубой форме рассматривалась с различных точек зрения в работах [9] и [148]. Эти работы связаны с изучением 1) переноса тангенциального напряжения (или эквивалентно момента импульса) от ядра к мантии и 2) наблюдаемой корреляции между флуктуациями гравитационного и магнитного полей Земли на ее поверхности [92, 95]. Здесь мы просто ограничимся рассмотрением формы движения, индуцированного в жидкости, и связанного с ним распределения спиральности, что представляет наибольший интерес для задачи крупномасштабного динамо. Если пренебречь всеми эффектами, связанными с сжимаемостью, и предположить $|\eta'(x)| \ll 1$, так что все возмущения малы, то генерируемые стационарные возмущения определяются уравнениями (10.24), (10.25) (при $\partial \mathbf{u}_1 / \partial t = \partial \mathbf{h}_1 / \partial t = 0$) и уравнениями $\text{div } \mathbf{u}_1 = \text{div } \mathbf{h}_1 = 0$. Мы также воспользуемся магнитострофическим приближением, которое в данном случае позволяет пренебречь в уравнении (10.24) членом $\mathbf{u}_0 \cdot \nabla \mathbf{u}_1$, связанным с переносным ускорением, и вязким членом $\nu \Delta \mathbf{u}_1$. [Учет вязкого члена приводит к появлению на поверхности экмановского слоя и связанного с ним небольшого изменения эффективного граничного условия (10.134), см. ниже.] Решения этих уравнений можно искать в виде

$$\mathbf{u}_1, \mathbf{h}_1, p_1 = 2 \text{Re} \int_0^{\infty} (\hat{\mathbf{u}}, \hat{\mathbf{h}}, \hat{p}) e^{i \mathbf{m} \cdot \mathbf{x}} dk, \quad (10.128)$$

где $\mathbf{m} = k(1, 0, \gamma)$ и необходимо определить возможные значения γ , которые должны удовлетворять неравенству $\text{Im } \gamma < 0$, поскольку при $z \rightarrow -\infty$ возмущения должны обратиться в нуль. Подстановка (10.128) в уравнения и прямое исключение амплитуд $\hat{\mathbf{h}}, \hat{\mathbf{u}}, \hat{p}$ приводит к кубическому уравнению для γ^2 :

$$(1 + \gamma^2) + \gamma^2 [Q(1 + \gamma^2) + 2iA\kappa^{-1}]^2 = 0, \quad (10.129)$$

где

$$Q = 2\Omega\lambda/h_0^2, \quad A = U_0/h_0, \quad \kappa = h_0 k / \Omega. \quad (10.130)$$

Кроме того, обозначив через γ_n ($n = 1, 2, 3$) три решения уравнения (10.129), удовлетворяющие неравенству $\text{Im } \gamma < 0$, мы находим компоненты скорости и магнитного поля для соответствующих мод

$$\hat{\mathbf{u}}_n = a_n(k)(1, -\sigma_n^{-1}, -\gamma_n^{-1}), \quad \hat{\mathbf{h}}_n = (i\sigma_n/\kappa)\hat{\mathbf{u}}_n, \quad (10.131)$$

где

$$\sigma_n^2 = -4\gamma_n^2 (1 + \gamma_n^2)^{-1}. \quad (10.132)$$

В области твердотельного изолятора \mathbf{B} — гармоническая функция, т.е. $\mathbf{B} - \mathbf{B}_0 = (\mu_0 \rho_m)^{1/2} \nabla \Psi$, где ρ_m — плотность в твердотельной мантии, а потенциальная функция Ψ раскладывается в интеграл Фурье

$$\Psi(x, y) = 2 \operatorname{Re} \int_0^{\infty} \hat{\Psi}_0(k) e^{-kz} e^{ikx} dk. \quad (10.133)$$

Применив линеаризованные граничные условия

$$u_z = u_0 \partial \eta / \partial x, \quad \mathbf{h} = -(\rho_m / \rho)^{1/2} \nabla \Psi \quad \text{при } z = 0, \quad (10.134)$$

мы можем выразить амплитуды $a_n(k)$, $\hat{\Psi}_0(k)$ через фурье-образ $\hat{\eta}(k)$ функции $\eta(x)$. Первое из условий (10.134) отражает тот факт, что нормальная компонента скорости на поверхности $z = \eta(x)$ обращается в нуль; второе означает непрерывность нормальной и тангенциальной компонент поля \mathbf{B} .

Последовательный детальный анализ сложного кубического уравнения (10.129) — задача довольно трудная. Однако в приложении к геофизике обе величины Q и A малы, и можно применить асимптотические методы. Если $Q \ll 1$ и $A k^{-1} \ll Q$, то в главном порядке три интересующие нас корня уравнения (10.129) имеют вид

$$\gamma_1 \sim -i, \quad \gamma_2 \sim -\frac{1}{2} (1+i) Q^{-1/2}, \quad \gamma_3 \sim \frac{1}{2} (1-i) Q^{-1/2}. \quad (10.135)$$

Это означает, что мода, соответствующая $n = 1$, имеет пространственную зависимость $e^{kz + ikx}$; отвечающие ей возмущения скорости и магнитного поля являются (в главном порядке) безвихревыми и проникают в жидкость на расстояние $O(k^{-1})$. Спиральность, вычисленная для этой моды, обращается в нуль. В противоположность этому моды, соответствующие $n = 2, 3$, имеют характер полей в пограничном слое, проникающем в жидкость на глубину $\delta_B = O(k^{-1} Q^{1/2})$. Кроме того, эти моды являются сильно спиральными, связанная с ними спиральность \mathcal{H}_n ($n = 2, 3$) определяется формулой [148]

$$\mathcal{H}_n(k) = \operatorname{Re} (\hat{\mathbf{u}}_n^* \cdot i \mathbf{k} \times \hat{\mathbf{u}}_n) = 2k |\hat{\mathbf{u}}_n|^2 \operatorname{Re} (i \gamma_n / \sigma_n) = \frac{1}{2} k |\hat{\mathbf{u}}_n|^2 Q^{-1/2}. \quad (10.136)$$

Поскольку в (10.128) принято, что $k > 0$, то спиральность положительна для обеих мод. Этот факт можно было предсказать, исходя из рассуждений, приведенных в разд. 10.2, поскольку в данном случае,

очевидно, имеется поток энергии, *направленный вниз* от границы (в жидкость), и потому соответствующая спиральность положительна. Кажущееся противоречие между формулой (10.136) и неравенством $|F(k)| \ll 2kE(k)$, ограничивающим спектральную функцию спиральности (разд. 7.6), объясняется тем, что в данном случае мы имеем дело с сильно анизотропной картиной и сильным затуханием в направлении оси z , и доказательство, приведшие к неравенству (7.55), просто не применимо. Амплитуда $|\hat{u}_n|^2$ в формуле (10.136) пропорциональна $|\hat{\eta}|^2$ и также затухает пропорционально $e^{kz/Q}$ при $z \rightarrow -\infty$.

В работе [6] было продемонстрировано, что в отсутствие затухания ($\nu = \lambda = \kappa = 0$) характерные для безграничного пространства волны, на которые действуют архимедовы, кориолисовы и лоренцевы силы, могут аналогичным образом захватываться твердой плоской границей, если она наклонена к горизонтали и основное поле \mathbf{V}_0 параллельно стенке. Захваченные моды отсутствуют, если \mathbf{V}_0 имеет составляющую, перпендикулярную стенке. Можно полагать, что и в рассмотренном выше случае компонента \mathbf{V}_0 , перпендикулярная стенке, также может оказать сильное влияние на структуру этих трех мод.

ТУРБУЛЕНТНОСТЬ СО СПИРАЛЬНОСТЬЮ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ДИНАМО

11.1. Влияние спиральности на однородную турбулентность

Мы показали в гл. 7 и 8, что отсутствие отражательной симметрии случайного "фоновое" поля скорости $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ и, в частности, отличие от нуля средней спиральности $\langle \mathbf{u} \cdot \text{rot } \mathbf{u} \rangle$, по-видимому, оказывает решающее влияние на эволюцию крупномасштабного магнитного поля. Поэтому естественно рассмотреть с более общих позиций динамику турбулентного поля скорости, имеющего отличную от нуля среднюю спиральность. Прежде всего следует констатировать, что турбулентность, не обладающая отражательной симметрией, редко была предметом прямого экспериментального исследования в лаборатории. Почти все традиционные исследования турбулентности (например, сеточная турбулентность, турбулентность в пограничном слое, в следах и струях, в каналах и трубках и т.д.) проводились в условиях, обеспечивающих отражательную симметрию турбулентной статистики. Чтобы изучить турбулентность со спиральностью, необходимо умышленно нарушить отражательную симметрию путем соответствующего контроля источника энергии течения. Как указано в разд. 10.2, это можно сделать естественным образом, если генерировать турбулентность во вращающейся среде такими способами, которые чувствуют различие в направлениях $\pm \Omega$, где Ω – вектор угловой скорости. Например, если быстро протаскивать через вращающуюся жидкость сетку в направлении Ω , то можно ожидать, что получающееся случайное поле скорости не будет обладать отражательной симметрией. Этот эксперимент был проведен в лаборатории Иббетсоном и Триттоном [101], которые измерили скорость затухания средних квадратов трех компонент скорости. Однако до сих пор не было предложено метода прямого измерения средней спиральности¹⁾.

Энергетический каскад в неспиральной турбулентности

Прежде чем рассматривать влияние спиральности на динамику турбулентности, напомним основные свойства турбулентности с боль-

¹⁾ Возможный метод проведения такого измерения предложен в приложении АЗ к работе [121].

шим числом Рейнольдса в той форме, в которой их сформулировал Колмогоров [108] и изложил Бэтчелор [20]. Рассмотрим статистически стационарное состояние, в котором в масштабе l_0 со скоростью ϵ генерируется кинетическая энергия на единицу массы. Пусть $u_0 = \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2}$ и предположим, что число Рейнольдса $R_e = u_0 l_0 / \nu$ велико. Тогда благодаря динамической неустойчивости энергия каскадным образом переносится вдоль последовательно уменьшающихся масштабов длины

$$l_n \ll l_{n-1} \quad (n = 1, 2, \dots),$$

до тех пор пока она не достигает, скажем, масштаба l_ν , в котором скорость диссипации энергии благодаря вязкости будет равна ϵ . Этот масштаб по порядку величины определяется ϵ и ν и, следовательно, (согласно соображениям размерности) равен

$$l_\nu \sim (\nu^3 / \epsilon)^{1/4}. \quad (11.1)$$

Более того, в этой картине энергия $\frac{1}{2} u_0^2$ зависит от скорости, поступающей в систему энергии ϵ и l_0 , но не от ν , поэтому снова из соображений размерности имеем

$$u_0^2 \sim (\epsilon l_0)^{2/3}. \quad (11.2)$$

Исключение ϵ из (11.1) и (11.2) дает

$$l_\nu \sim l_0 R_e^{-3/4}. \quad (11.3)$$

Равным образом мы можем определить характеристические волновые числа $k_0 = l_0^{-1}$, $k_\nu = l_\nu^{-1}$ с

$$k_\nu \sim k_0 R_e^{3/4}. \quad (11.4)$$

В области волновых чисел $k_0 \ll k \ll k_\nu$ (называемой "инерционной областью") спектральный энергетический тензор $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ (разд. 7.8) статистически не связан с источником энергии (ограниченного волновыми числами k_0); следовательно, можно ожидать, что он будет изотропным и определяется только параметром ϵ , представляющим собой скорость течения энергии, независящую от волнового числа k в инерциальной области. В отсутствие спиральности $\Phi_{ij}(\mathbf{k})$ имеет вид

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}) = \frac{E(k)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j), \quad (11.5)$$

и, как снова следует из соображений размерности, энергетическая спектральная функция $E(k)$ описывается формулой

$$E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{-5/3} \quad (k_0 \ll k \ll k_\nu), \quad (11.6)$$

где C – безразмерная постоянная порядка единицы. Соответствующая спектральная функция вихря имеет вид

$$\Omega(k) = k^2 E(k) = C \epsilon^{2/3} k^{1/3} (k_0 \ll k \ll k_v). \quad (11.7)$$

При $k \geq k_v$ обе функции $E(k)$ и $\Omega(k)$ испытывают резкий (квазиэкспоненциальный) скачок, вызванный вязкой диссипацией. Ясно, что сред-

ний квадрат вихря $\langle \omega^2 \rangle = \int_0^\infty \Omega(k) dk$ определяется в основном

вкладом $\Omega(k)$ на волновых числах в окрестностях скачка $k = k_v$ и возрастает с уменьшением ν . Фактически, поскольку скорость диссипации энергии равна $\nu \langle \omega^2 \rangle$, мы имеем точный результат

$$\langle \omega^2 \rangle = \epsilon / 2\nu. \quad (11.8)$$

Из равенств (11.2) и (11.8) следует

$$\langle \omega^2 \rangle \sim R_e (u_0 / l_0)^2 \quad (11.9)$$

или эквивалентно

$$l_c = u_0 / \langle \omega^2 \rangle^{1/2} \sim R_e^{-1/2} l_0. \quad (11.10)$$

Здесь l_c – промежуточный масштаб, удовлетворяющий неравенству $l_0 \gg l_c \gg l_v$. (11.11)

Одна из интерпретаций длины l_c (тейлоровский микромасштаб) заключается в том, что она является мерой среднего радиуса кривизны мгновенной линии тока.

Влияние спиральности на энергетический каскад

Предположим далее, что источник энергии, действующий в масштабе l_0 , таков, что он сообщает генерируемому полю скорости отличную от нуля спиральность $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$. Соответствующий "мысленный эксперимент" описан в § 7.6. В такой ситуации мы можем наряду с представлением о "впрыскивании энергии" говорить также о "впрыскивании спиральности" на волновых числах k_0 [34]. Однако величина генерируемой спиральности ограничена неравенством Шварца. Действительно, определив

$$K_0 = \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle / \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} \langle \omega^2 \rangle^{1/2}, \quad (11.12)$$

мы, очевидно, должны иметь

$$|K_0| \leq 1. \quad (11.13)$$

Мы уже отмечали в разд. 3.2 тот факт, что полная спиральность локализованного возмущения в невязкой жидкости является (подобно полной энергии) сохраняющейся величиной. Аналогичный результат (как установлено в работе [23]) справедлив и для однородной турбулентности, а именно, плотность спиральности $\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}$ удовлетворяет уравнению [ср. (3.7)]

$$\frac{D}{Dt} (\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega}) = - \nabla \cdot \boldsymbol{\omega} \left(\frac{p}{\rho} - \frac{1}{2} \mathbf{u}^2 \right), \quad (11.14)$$

усреднив которое по пространству и воспользовавшись однородностью, мы немедленно получаем

$$d \langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle / dt = 0. \quad (11.15)$$

Поэтому спектральная функция спиральности $F(k)$, описываемая формулой [ср. (7.52)]

$$F(k) = i \int_{S_k} \epsilon_{ikl} k_k \Phi_{il}(\mathbf{k}) dS, \quad (11.16)$$

вероятно, определяется процессом переноса спиральности от "источника", действующего на волновых числах k_0 , к вязкому "стоку" на волновых числах k_v и далее. Инжектирование спиральности можно представлять себе как появление крупномасштабных зацеплений вихревых линий рассматриваемого течения. Эти зацепления выживают в каскадном (по существу невязком) процессе в инерционной области, но уничтожаются вязкостью в масштабах $l_v = k_v^{-1}$.

Как мы показали (7.55), $F(k)$ для всех k должна удовлетворять условию "реализуемости"

$$|F(k)| \leq 2kE(k). \quad (11.17)$$

Это условие, вообще говоря, значительно сильнее условия (11.13). Фактически оба условия совпадают только в случае, если в спектральном тензоре скоростей имеется единственное волновое число. В нормальной турбулентности, когда энергия распределена в широком интервале масштабов, из условия (11.17) следует, что $|K_0| \ll 1$. Чтобы показать это, предположим, что при каждом волновом числе мы имеем максимальную положительную спиральность, т.е. $F(k) = 2kE(k)$, и что для $E(k)$ в инерционной области справедлив колмогоровский спектр (11.6). Тогда в инерционной области $F(k) \sim k^{-3/2}$, и, следовательно, главный вклад в интеграл $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle = \int_0^\infty F(k) dk$ вносят k из окрестности k_v . Это означает, что $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$ определяется ϵ и ν ; таким образом, из соображений размерности мы имеем

$$\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle \sim \epsilon^{3/4} \nu^{-7/4}, \quad (11.18)$$

откуда

$$|\mathcal{H}_0| = |\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle| / \langle \mathbf{u}^2 \rangle^{1/2} \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle^{1/2} \sim R_e^{-1/4} \quad (11.19)$$

Даже оценка (11.19) для любой реальной турбулентности является завышенной. Пусть, например, в момент $t = 0$ мы импульсным образом создали в масштабе $l_0 = k_0^{-1}$ случайное поле скорости с максимальной спиральностью, т.е. $|\mathcal{H}_0| = O(1)$, и пусть это поле изменяется далее в соответствии с уравнениями Навье – Стокса. До тех пор пока $\langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle$ не увеличилась (под действием случайных растяжений) в $O(R_e)$ раз, вязкостью можно пренебречь, при этом $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$ и $\langle \mathbf{u}^2 \rangle$ по существу остаются постоянными. Следовательно, $|\mathcal{H}_0|$ уменьшается в $O(R_e^{-1/2})$ раз, т.е. на этой стадии

$$|\mathcal{H}_0| = O(R_e^{-1/2}) \quad (11.20)$$

и, по-видимому, будет по порядку величины сохранять (в лучшем случае) это значение в последующем процессе затухания.

Различие между (11.19) и (11.20) указывает, что в действительности состояние максимальной спиральности $F(k) = 2kE(k)$ не совместимо с характерной эволюцией случайного поля скорости, описываемой уравнениями Навье – Стокса. Крейчнан [111] дал следующее простое и прямое доказательство этого утверждения. Пусть в момент $t = 0$ имеется поле скорости, состоящее из двух чисто "спиральных мод", $\mathbf{u} = \mathbf{u}_1 + \mathbf{u}_2$, где

$$\begin{aligned} \mathbf{u}_1 &= (\hat{\mathbf{u}}_1 + i\hat{\mathbf{k}}_1 \times \hat{\mathbf{u}}_1) e^{i\hat{\mathbf{k}}_1 \cdot \mathbf{x}} + \text{к.с.}, \\ \mathbf{u}_2 &= (\hat{\mathbf{u}}_2 + i\hat{\mathbf{k}}_2 \times \hat{\mathbf{u}}_2) e^{i\hat{\mathbf{k}}_2 \cdot \mathbf{x}} + \text{к.с.}, \end{aligned} \quad (11.21)$$

где к.с. означает комплексно-сопряженную величину, а $\hat{\mathbf{k}}_n = \mathbf{k}_n/k_n$ ($n = 1, 2$). Эти моды удовлетворяют соотношениям

$$\boldsymbol{\omega}_1 = \text{rot } \mathbf{u}_1 = k_1 \mathbf{u}_1, \quad \boldsymbol{\omega}_2 = \text{rot } \mathbf{u}_2 = \pm k_2 \mathbf{u}_2 \quad (11.22)$$

Два знака в \mathbf{u}_2 (соответствующие правой или левой круговой поляризации) сохранены для того, чтобы прояснить характер взаимодействия между спиральными модами с одинаковыми или противоположными поляризациями. Если записать уравнение Навье – Стокса в виде

$$\left(\frac{\partial}{\partial t} - \nu \Delta\right) \mathbf{u} = -\nabla \tilde{p} + \mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}, \quad (11.23)$$

где $\tilde{p} = p/\rho + \frac{1}{2} \mathbf{u}^2$, то очевидно, что интенсивность взаимодействия

определяется нелинейным членом

$$\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega} = \mathbf{u}_1 \times \boldsymbol{\omega}_2 + \mathbf{u}_2 \times \boldsymbol{\omega}_1 = (k_1 \mp k_2) \mathbf{u}_2 \times \mathbf{u}_1. \quad (11.24)$$

Поскольку $k_1 + k_2 > |k_1 - k_2|$, то сразу ясно, что моды с противоположной полярностью должны взаимодействовать сильнее, чем моды с одинаковой полярностью. В действительности если моды при $k_1 = k_2$ имеют одинаковую полярность, то \mathbf{u} параллельно $\boldsymbol{\omega}$ ($K_0 = 1$) и нелинейное взаимодействие вообще отсутствует!

Чтобы показать, что максимальная спиральность не сохраняется, необходимо вычислить из уравнения (11.23) величину $(\partial \mathbf{u} / \partial t)$, $t = 0$, а это требует исключения \tilde{p} с помощью уравнения $\text{div } \mathbf{u} = 0$. Сначала взаимодействие генерирует моды с волновыми векторами $\mathbf{k}_1 \pm \mathbf{k}_2$. Положим $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$ и выберем оси (рис. 11.1) следующим образом:

$$\mathbf{k}_1 = k_1 (\sin \gamma, 0, -\cos \gamma),$$

$$\mathbf{k}_2 = k_2 (-\sin \beta, 0, -\cos \beta),$$

$$\hat{\mathbf{u}}_1 = u_0 (0, \frac{1}{2}, 0),$$

$$\hat{\mathbf{u}}_2 = u_0 (0, \frac{1}{2}, 0), \quad (11.25)$$

где $k_1 \sin \gamma - k_2 \sin \beta = 0$. Тогда, как показал Крейчнан [111], первоначально возбуждаемая мода $\mathbf{u}(\mathbf{k}) e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}$ определяется (в пренебрежении вязкими эффектами) формулой

$$\frac{\partial \mathbf{u}(\mathbf{k})}{\partial t} = -\frac{1}{4} k u_0^2 [\pm i \sin(\beta - \gamma), -\sin \gamma \pm \sin \beta, 0]. \quad (11.26)$$

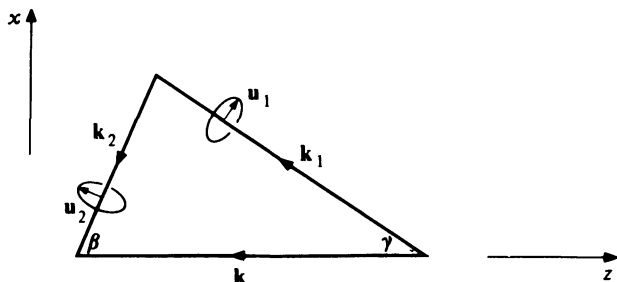


Рис. 11.1.

Взаимодействие двух спиральных мод; моды с волновыми векторами \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 поляризованы по кругу (см. рис. 10.2) и обладают максимальной положительной спиральностью; их взаимодействие порождает моду с волновым вектором $\mathbf{k} = \mathbf{k}_1 + \mathbf{k}_2$, которая не обладает максимальной спиральностью [111].

Таким образом, как и ожидалось, $|\dot{\mathbf{u}}(\mathbf{k})|_{t=0}$ больше для взаимодействующих волн с противоположной полярностью, чем для волн, обладающих одинаковыми полярностями. Кроме того, поскольку $i\mathbf{k} \times \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{k}) \neq \mp \gamma \dot{\mathbf{u}}(\mathbf{k})$ при $\gamma \neq \beta$, то максимальная спиральность не сохраняется в нелинейных взаимодействиях.

Отсюда можно сделать вывод, что независимо от величины спиральности, инжектированной на волновых числах $\sim k_0$, относительная величина спиральности, определяемая безразмерным отношением $F(k)/2kE(k)$, с увеличением k должна последовательно уменьшаться; можно полагать [34], что при достаточно большом k/k_0 влиянием спиральности на динамику можно будет пренебречь, и она будет переноситься и диффундировать почти так же, как динамически пассивная скалярная примесь [22]. Пусть скорость инжектирования спиральности (псевдоскаляра) на волновых числах $\sim k_0$ равна η . Поскольку невозможно инжектировать спиральность без одновременного инжектирования энергии, то, очевидно, она ограничена неравенством вида $|\eta| \leq k_0 \epsilon$. Если спиральность инжектируется с максимальной скоростью, то $|\eta| \sim k_0 \epsilon \sim u_0^3 / l_0^2$.

$$|\eta| \sim k_0 \epsilon \sim u_0^3 / l_0^2 \quad (11.27)$$

Спектр спиральности $F(k)$ должен быть пропорционален η (в силу псевдоскалярного характера обеих величин), и единственными дополнительными параметрами, определяющими $F(k)$ в инерционной области $k_0 \ll k \ll k_v$, могут быть лишь ϵ и k : Следовательно, из соображений размерности¹⁾

$$F(k) = C_H \eta \epsilon^{-1/2} k^{-5/2} \quad (k_0 \ll k \ll k_v), \quad (11.28)$$

где C_H — универсальная постоянная, аналогичная колмогоровской постоянной C , фигурирующей в формуле (11.6). Спиральность не изменяет $E(k)$ в инерционной области, и она по-прежнему описывается выражением (11.6). Отметим, что из равенств (11.27), (11.6) и (11.28) вытекает

$$|F(k)| \ll 2kE(k) \quad (k_0 \ll k \ll k_v) \quad (11.29)$$

в согласии с рассмотрением, проведенным в предыдущих разделах. С точки зрения теории динамо, наиболее существенно в приведенном выше обсуждении возможно то, что средняя спиральность турбулентного поля скорости описывается не формулой (11.19), а формулой (11.20). Иными словами, она является свойством "энергосодержащих

¹⁾ В работе [34] этот результат считался лишь одной из двух возможностей. Другая возможность связывалась с "каскадом одной спиральности" без энергетического каскада. Позже было показано [7], что вторая возможность несовместима с динамическими соотношениями и должна быть отброшена.

вихрей" течения [масштаба $O(l_0)$]. Следовательно, независимо от числа Рейнольдса турбулентности можно дать грубую максимальную оценку спиральности: $|\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle| \sim u_0^2 / l_0$. В самом деле, мы уже использовали в предыдущих разделах эту оценку [см., например, доказательство, которое привело к оценке (7.90) для α], но теперь она получила некоторое ретроспективное динамическое обоснование.

Второй общий вывод, который можно сделать из проведенного рассмотрения, заключается в том, что, как можно ожидать, присутствие спиральности оказывает слабое влияние на каскадный перенос энергии, во всяком случае на волновых числах $\sim k_0$, где относительная величина спиральности $|F(k)| / 2kE(k)$ может быть довольно большой. Изучение взаимодействующих спиральных мод [111] показывает, что нелинейные взаимодействия оказываются более слабыми, если взаимодействующие моды имеют одинаковую полярность. Если все моды, присутствовавшие в начальный момент, обладали одинаковой спиральностью (соответствующей максимальной спиральности для каждого значения волнового числа), то можно ожидать, что суммарный перенос энергии к более высоким волновым числам будет заторможен и, таким образом, затянется процесс затухания турбулентности. В силу равенства

$$(\mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega})^2 + (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})^2 = u^2 \omega^2 \quad (11.30)$$

ясно, что максимизация $|\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle|$, по-видимому, связана с минимизацией $\langle (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega})^2 \rangle$ и, таким образом, с ослаблением (в среднем) нелинейных эффектов, описываемых в уравнении (11.23) членом $\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}$ [75].

Наконец отметим, что в работе [7] на базе замыкания бесконечной системы уравнений, что позволяет выразить скорость изменения корреляция n -го порядка через корреляции до $n + 1$ порядка [20], численно изучено поведение спектров энергии и спиральности. Принятая там конкретная схема замыкания представляет собой вариант "квазинормального марковского замыкания с учетом затухания вихрей" (сокращенно EDQNM) [152, 153], в котором корреляции 4-го порядка выражены через корреляции 2-го порядка таким образом, что условия реализуемости $E(k, t) \geq 0$, $|F(k, t)| \leq 2kE(k, t)$ справедливы все время. Численное интегрирование получающихся уравнений показывает, что 1) как для $E(k, t)$, так и для $F(k, t)$ в инерционных областях справедлив закон $k^{-3/2}$; 2) если в начальный момент задана достаточно большая спиральность, то процесс затухания энергии замедляется. Хотя эти результаты не являются до конца убедительными (поскольку они основаны до некоторой степени на произвольной схеме замыкания), они подтверждают общее описание динамики турбулентности со спиральностью, представленное в этом разделе.

11.2. Влияние сохраняющейся магнитной спиральности на процессы переноса энергии

Предположим теперь, что в турбулентной среде присутствует также турбулизированное магнитное поле $(\mu_0 \rho)^{1/2} \mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$, причем среднее значение \mathbf{h} равно нулю. Что можно сказать о совместном поведении спектров \mathbf{u} и \mathbf{h} ? В последующем обсуждении мы будем полагать, что диссипативные эффекты (как вязкие, так и омические) слабы или, эквивалентно, что велико число Рейнольдса $R_e = u_0 l_0 / \nu$ и магнитное число Рейнольдса $R_m = u_0 l_0 / \lambda$.

Рассмотрим вначале те новые квадратичные инварианты, которые существуют в отсутствие затухания $\lambda = \nu = 0$. Это полная энергия E_T , магнитная спиральность I_M и взаимная спиральность¹⁾ I_C :

$$E_T = \frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 + \mathbf{h}^2 \rangle, \quad I_M = \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} \rangle, \quad I_C = \langle \mathbf{u} \cdot \mathbf{h} \rangle \quad (11.31)$$

(см. разд. 3.1 и 10.1). Здесь \mathbf{a} – векторный потенциал поля \mathbf{h} , т.е. $\mathbf{h} = \text{rot } \mathbf{a}$. Отметим, что величина I_M не зависит от калибровки \mathbf{a} . В присутствии магнитного поля кинетическая спиральность $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle$ не является инвариантом, поскольку под влиянием лоренцевой силы, имеющей вихревой характер, вмерзженность вихревых линий в жидкости нарушается.

Уравнения магнитной гидродинамики (10.9) и (10.10) инвариантны относительно преобразования $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t) \rightarrow -\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ [т.е. каждому решению $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ соответствует решение $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$, $-\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$]. Следовательно, если в некоторый начальный момент времени $t = 0$ статистические свойства полей (\mathbf{u}, \mathbf{h}) инвариантны относительно изменения знака \mathbf{h} , они останутся инвариантными для всех $t > 0$ (это утверждение справедливо для произвольных значений λ и ν , а также если в уравнении движения присутствует произвольная сила²⁾. При выполнении этого условия, которое мы можем назвать условием *инвариантности знака магнитного поля*, любая статистическая функция полей \mathbf{u} и \mathbf{h} , которая изменяет знак при замене \mathbf{h} на $-\mathbf{h}$, в действительности должна неизменно обращаться в нуль. В частности, при выполнении условия инвариантности знака магнитного поля

$$I_C = 0, \quad (11.32)$$

¹⁾ В выражениях (11.31) для простоты опущены коэффициенты, зависящие от (однородной) плотности ρ и постоянной μ_0 . Термин "взаимная спиральность" введен в работе Фриша и др. [75], см. также [141].

²⁾ Это условие отмечено в работе [171].

и аналогично при всех t должны обращаться в нуль все моменты вида $\langle u_i u_j \dots h_\alpha h_\beta \dots \rangle$, содержащие нечетное число множителей \mathbf{h} . Если не оговорено противное, то условие инвариантности знака магнитного поля выполнено.

Рассмотрим далее для простоты идеализированный случай, когда поля \mathbf{u} и \mathbf{h} статистически инвариантны относительно вращений (но не обязательно инвариантны относительно точечных отражений). Тогда спектральные тензоры $\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t)$, $\Gamma_{ij}(\mathbf{k}, t)$ полей \mathbf{u} и \mathbf{h} описываются формулами:

$$\Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{E(k, t)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) + \frac{i F(k, t)}{8\pi k^4} \varepsilon_{ijk} k_k, \quad (11.33)$$

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{M(k, t)}{4\pi k^4} (k^2 \delta_{ij} - k_i k_j) + \frac{i N(k, t)}{8\pi k^2} \varepsilon_{ijk} k_k, \quad (11.34)$$

где

$$\frac{1}{2} \langle \mathbf{u}^2 \rangle = \int_0^\infty E(k, t) dk, \quad \frac{1}{2} \langle \mathbf{h}^2 \rangle = \int_0^\infty M(k, t) dk, \quad (11.35)$$

$$\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle = \int_0^\infty F(k, t) dk, \quad \langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} \rangle = \int_0^\infty N(k, t) dk. \quad (11.36)$$

Заметим, что спектральный тензор поля \mathbf{a} (в изотропном случае) равен $k^{-2} \Gamma_{ij}(\mathbf{u}, t)$ и что функция $N(k, t)$ определена относительно инварианта $\langle \mathbf{a} \cdot \mathbf{h} \rangle$ (а не $\langle \mathbf{h} \cdot \text{rot } \mathbf{h} \rangle$). Это дает в антисимметричном члене формулы (11.34) коэффициент k^{-2} , в отличие от коэффициента k^{-4} в соответствующем члене формулы (11.33). Нетрудно выписать условия реализуемости $\Gamma_{ij}(\mathbf{k}, t)$:

$$M(k, t) \geq 0, \quad |N(k, t)| \leq 2k^{-1} M(k, t). \quad (11.37)$$

Рассмотрим теперь качественно, как будет вести себя система, если на волновых числах $\sim k_0$ в нее инжектированы кинетическая энергия и кинетическая спиральность (в рамках схемы замыкания EDQNM. Это изучено в работе [171]). Пусть в начальный момент задано слабое магнитное поле, имеющее, в частности, составляющие масштабов, превышающих k_0^{-1} . Предположим, что в масштабе k_0^{-1} эти составляющие дают почти однородное поле \mathbf{h}_0 . Спиралевидные движения в масштабах $\ll k_0^{-1}$ будут генерировать возмущенное поле, магнитная спиральность которого связана с кинетической спиральностью. Если характеризовать движения в масштабе $\ll k_0^{-1}$ с помощью коэффициента турбулентной диффузии λ_e , то флуктуации магнитного поля в масштабах $\sim k_0^{-1}$ будут определяться уравнением

$$\lambda_e \Delta \mathbf{h} \approx -(\mathbf{h}_0 \cdot \nabla) \mathbf{u} \quad (11.38)$$

или его фурье-образом

$$\lambda_e k^2 \tilde{\mathbf{h}} \approx i (\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k}) \tilde{\mathbf{u}}. \quad (11.39)$$

Соответствующее соотношение между спектрами \mathbf{h} и \mathbf{u} имеет вид

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}, t) = \frac{(\mathbf{h}_0 \cdot \mathbf{k})^2}{\lambda_e^2 k^4} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t) \quad (k \approx k_0). \quad (11.40)$$

(этот результат был получен Голдцым [82] при рассмотрении похожей задачи). В силу выделенности направления \mathbf{h}_0 тензор Γ_{ij} , как это видно из (11.40), является анизотропным, хотя тензор Φ_{ij} изотропен. Однако если принять во внимание, что крупномасштабное поле \mathbf{h}_0 неоднородно, причем все направления равновероятны, то можно усреднить по этим направлениям и получить соотношение между тензорами, коэффициент в котором изотропен,

$$\Gamma_{ij}(\mathbf{k}, t) \approx \frac{\langle \mathbf{h}_0^2 \rangle}{3 \lambda_e^2 k^2} \Phi_{ij}(\mathbf{k}, t), \quad (11.41)$$

и, следовательно, согласно (11.33) и (11.34),

$$M(k, t) \approx \frac{\langle \mathbf{h}_0^2 \rangle}{3 \lambda_e^2 k^2} E(k, t),$$

$$N(k, t) \approx \frac{\langle \mathbf{h}_0^2 \rangle}{3 \lambda_e^2 k^4} F(k, t). \quad (11.42)$$

Отсюда вытекает, что магнитная спиральность, генерированная на волновых числах k_0 , имеет тот же знак, что и кинетическая.

Исследуем далее поведение крупномасштабного поля \mathbf{h}_0 . Из общего рассмотрения, приведенного в гл. 7, мы знаем, что положительная кинетическая спиральность порождает отрицательный α -эффект. Если спектр $\mathbf{h}(\mathbf{x}, t)$ непрерывен, то у нас, конечно, отсутствует *априорное* обоснование двухмасштабного подхода, однако *если принять* его, то мы получим для \mathbf{h}_0 следующее уравнение:

$$\partial \mathbf{h}_0 / \partial t = \alpha \operatorname{rot} \mathbf{h}_0 + \lambda \Delta \mathbf{h}_0. \quad (11.43)$$

Записав $\mathbf{h}_0 = \operatorname{rot} \mathbf{a}_0$, мы найдем эквивалентное уравнение

$$\frac{\partial \mathbf{a}_0}{\partial t} = \alpha \mathbf{h}_0 - \nabla \Phi_0 + \lambda \Delta \mathbf{a}_0 \quad (11.44)$$

для некоторого скаляра Φ_0 . В силу (11.43) и (11.44), поведение во времени крупномасштабной магнитной спиральности с учетом одно-

родности определяется уравнением

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial t} \langle \mathbf{a}_0 \cdot \mathbf{h}_0 \rangle &= \alpha \langle \mathbf{a}_0 \cdot \text{rot } \mathbf{h}_0 \rangle + \alpha \langle \mathbf{h}_0^2 \rangle + \lambda \langle \mathbf{a}_0 \cdot \Delta \mathbf{h}_0 \rangle + \\ &+ \mathbf{h}_0 \cdot \Delta \mathbf{a}_0 \rangle = 2\alpha \langle \mathbf{h}_0^2 \rangle - 2\lambda \langle (\partial a_{0j} / \partial x_i) \times \\ &\times (\partial h_{0j} / \partial x_i) \rangle. \end{aligned} \quad (11.45)$$

Если предположить, что $\langle \mathbf{u} \cdot \boldsymbol{\omega} \rangle > 0$, а значит, $\alpha < 0$, то очевидно, что генерируемая α -эффектом крупномасштабная магнитная спиральность будет отрицательной (предположим, что диффузионные эффекты слабы).

Кроме того, из результатов разд. 9.2 мы знаем, что в пренебрежении диссипацией характерное время роста фурье-компонент магнитного поля масштаба k^{-1} , вызванного α -эффектом, порядка $(|\alpha| k)^{-1}$. Следовательно, если путем "инъекции" на волновых числах k_0 поддерживать величину спиральности, то можно ожидать, что с ростом t магнитная энергия (и соответствующая магнитная спиральность) будет проявляться во все возрастающих масштабах $\sim |\alpha| t$ [или, эквивалентно, на волновых числах $\sim (|\alpha| t)^{-1}$].

Эти качественные рассуждения получили серьезное подтверждение в работе [171], где были численно проинтегрированы четыре уравнения, описывающие эволюцию функций $E(k, t)$, $F(k, t)$, $M(k, t)$, $N(k, t)$ и замкнутые с помощью схемы EDQNM. На рис. 11.2 показано поведение во времени функций $M(k, t)$, $N(k, t)$ для $t = 120, 240$ [единицей времени является величина $(k_0 u_0)^{-1}$]. Система возбуждается путем инъекции кинетической энергии и спиральности на волновых числах k_0 . Из рисунков видно, что 1) с ростом t магнитная энергия возбуждается во все возрастающих масштабах; 2) магнитная спиральность имеет тот же знак, что и инжектированная кинетическая спиральность при $k/k_0 = O(1)$, и противоположный знак при $k/k_0 \ll 1$. Из рисунков очевидна также двухмасштабная структура спектра магнитного поля, причем с ростом t два спектральных пика все более отделяются друг от друга. Следует подчеркнуть, что эти результаты получены в полностью динамической модели, в которой полностью учтено обратное влияние силы Лоренца на поле скорости.

Пуке и др. [171] назвали рассмотренное выше возбуждение магнитных мод во все возрастающих масштабах "обратным каскадом" магнитной энергии и магнитной спиральности. Может быть, это вопрос чисто семантический, однако такая терминология в данном случае способна ввести в некоторое заблуждение. Под словом "каскад" подразумевается "последовательное возбуждение", вызванное взаимодействием нелинейных мод, а "обратный каскад" означает после-

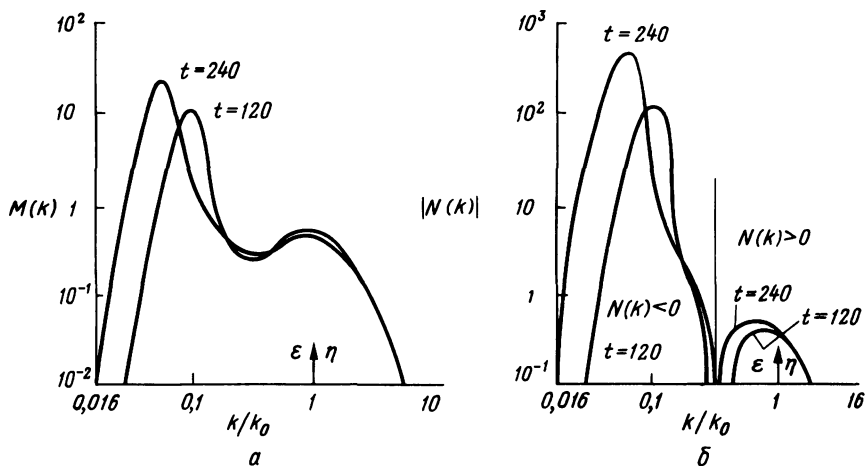


Рис. 11.2.

Вычисленные на основе замыкания типа EDQNM кривые, характеризующие зависимость от времени a — спектра магнитной энергии и b — спектра магнитной спиральности. Кинетическая энергия и спиральность инжектируются со скоростями ϵ и η ; инжектированные спектры имеют вид $F_\epsilon(\kappa) = \kappa^{-1} F_\eta(\kappa) = C \epsilon \kappa^4 e^{-2\kappa^2}$, причем C выбрано так, что $\int_0^\infty F_\epsilon(\kappa) d\kappa = \epsilon$ и $\kappa = k/k_0$.

В момент $t = 0$ (нормированные) спектры кинетической и магнитной энергии и спиральности заданы в виде

$$E(\kappa) = 10M(\kappa) = C\kappa^4 e^{-2\kappa^2}, \quad F(\kappa) = N(\kappa) = 0.$$

Вычисления проводились для интервала волновых чисел от $\kappa_{\min} = 2^{-6}$ до $\kappa_{\max} = 2^4$. Число Рейнольдса, вычисленное по начальной среднеквадратичной скорости и масштабу k_0^{-1} , было равно 30, а магнитное число Прандтля ν/λ было равно единице [171].

довательные возбуждения, которые схематически представляются в виде

$$k_0 \rightarrow 2^{-1}k_0 \rightarrow 2^{-2}k_0 \rightarrow \dots \rightarrow 2^{-n}k_0 \rightarrow \dots \quad (11.46)$$

Действительно, в данном случае взаимодействие флуктуаций \mathbf{u} и \mathbf{h} в масштабе k_0^{-1} одновременно генерирует фурье-компоненты во всех масштабах $k_0^{-1} \gg k_0^{-1}$. Это не ступенчатый, а скорее дальнедействующий спектральный процесс. Тот факт, что для возбуждения больших масштабов требуется большее время, сам по себе не оправдывает использование термина "каскад".

Дополнительное численное исследование, которое имеет прямое отношение к рассматриваемому вопросу, было выполнено в работе [172]. В ней прямым способом численно проинтегрированы подходя-

щим образом укороченные фурье-образы связанных между собой уравнений импульса и индукции, причем начальные условия для фурье-компонент \mathbf{u} и \mathbf{h} выбирались из гауссовых распределений случайных чисел. Никаких усреднений по реализациям турбулентного поля не проводилось и фактически показано, что спектры (определенные путем усреднения по пространству волновых чисел) существенно изменяются при переходе от одной реализации к другой. Тем не менее был обнаружен значительный суммарный перенос энергии от кинетических к магнитным модам. Авторы интерпретируют этот перенос следующим образом: 1) каскад кинетической энергии к более высоким волновым числам вызван обычными нелинейными взаимодействиями; 2) распределение энергии между кинетическими и магнитными модами в малых масштабах происходит благодаря возбуждению альвеновских волн, распространяющихся по крупномасштабному магнитному полю; 3) усиление крупномасштабного поля в результате протекания процесса, снова названного "обратным каскадом" магнитной энергии и наиболее заметного в численных решениях, когда первоначально имеется не кинетическая, а магнитная спиральность. Эти расчеты (и расчеты [171], в которых использована схема EDQNM) выполнены для случая, когда магнитное число Прандтля ν/λ равно единице. С большим интересом следует ожидать дальнейших расчетов для $\nu/\lambda > 1$ (или даже $\gg 1$), которые, по-видимому, будут иметь более непосредственное приложение к физике Солнца.

11.3. Изменение инерционной области под влиянием крупномасштабного магнитного поля

Присутствие сильного крупномасштабного магнитного поля, как указал Крейчнан [110], глубоко видоизменяет процесс переноса энергии в малых масштабах и, в частности, в инерционной области. Полное содержание энергии в инерционной области мало по сравнению с полной энергией в масштабах $\gtrsim k_0^{-1}$, а диссипативными процессами можно пренебречь. Крупномасштабное поле скоростей \mathbf{u}_0 просто переносит вихри в масштабе k^{-1} (где $k \gg k_0$), существенно не искажая их, и оно может быть "исключено" с помощью преобразования Галилея. Крупномасштабное магнитное поле \mathbf{h}_0 нельзя исключить преобразованием Галилея; посредством обсуждавшегося в разд. 10.1 механизма, связанного с альвеновской волной, оно обеспечивает важную связь между полями \mathbf{u} и \mathbf{h} в масштабах $k^{-1} \ll k_0^{-1}$. Инерционную область можно представить себе в виде случайного моря возмущений, локализованных в масштабах k^{-1} ($k \gg k_0$) и распространяющихся вдоль локального среднего поля \mathbf{h}_0 со скоростью $\pm \mathbf{h}_0$, причем пере-

нос энергии к меньшим масштабам происходит благодаря столкновению возмущений, движущихся в противоположных направлениях. В каждом таком возмущении магнитная энергия равна кинетической; следовательно, в инерционной области $E(k) = M(k)$. Перенос энергии будет максимальным, когда возмущений, движущихся в направлении $+h_0$, будет столько же, сколько возмущений, движущихся в противоположную сторону $-h_0$, т.е. когда будет равна нулю взаимная спиральность I_C . Здесь уместно отметить, что численные эксперименты [172] показали, что для $I_C \neq 0$ перенос энергии к малым масштабам уменьшается.

Характерное время взаимодействия сгустков размером k^{-1} равно $t_k = O(h_0 k)^{-1}$, и, как утверждал Крейчнан [110], можно ожидать, что скорость переноса энергии ϵ через инерционную область пропорциональна t_k . Поскольку в инерционной области нет диссипации, то ϵ не должно зависеть от k ; более того, если энергетический каскад локализован в k -пространстве, ϵ может зависеть лишь от параметра $E(k)$ и самого k . Соображения размерности показывают, что

$$\epsilon \sim h_0^{-1} (E(k))^2 k^3, \quad (11.47)$$

или, эквивалентно,

$$E(k) = M(k) = A (\epsilon h_0)^{1/2} k^{-3/2} (k_0 \ll k \ll k_d), \quad (11.48)$$

где A — универсальная постоянная, по порядку величины равная единице, а k_d — максимальное волновое число в инерционной области, на котором становятся важными диссипативные эффекты (омические и/или вязкие). По-видимому, это пороговое волновое число можно определить (по порядку величины), приравняв характерное время взаимодействия сгустков $(h_0 k)^{-1}$ характерному времени омической или вязкой диссипации $(\lambda k^2)^{-1}$ или $(\nu k^2)^{-1}$ в зависимости от того, какое из них меньше. Если, как это обычно бывает, $\lambda \gg \nu$, то очевидно $k_d \sim h_0/\lambda$.

Величину h_0 , входящую в равенства (11.48) и (11.49), следует понимать как $\langle h^2 \rangle^{1/2}$, а условием существования инерционной области вида (11.48) является $k_0 \gg k_d$, или

$$\langle h^2 \rangle^{1/2} / k_0 \lambda \gg 1. \quad (11.50)$$

11.4. Неспиральное турбулентное динамо

Обсуждавшаяся в разд. 11.2 генерация магнитных полей в масштабах $\sim k_0^{-1}$ и больше непосредственно связана с наличием спираль-

ности мелкомасштабных полей скорости и (или) магнитного поля. Обсудим теперь кратко проблему генерации магнитных полей в случае, когда оба поля обладают отражательной симметрией, так что α -эффект, вызывающий генерацию крупномасштабных полей, отсутствует.

Уже давно было понятно, что если пренебречь омической диссипацией, то случайное растяжение магнитных силовых линий ведет к экспоненциальному росту плотности магнитной энергии. Однако это случайное растяжение связано с систематическим уменьшением масштаба магнитного поля (как в задаче о дифференциальном вращении, рассмотренной в разд. 3.8), хотя в конечном счете необходимо учитывать омическую диффузию. В таком случае встает вопрос: может ли тем не менее генерация магнитного поля, вызванная случайным растяжением, пересилить омическую диссипацию магнитной энергии?

Бэтчелор [18] обратился к аналогии между уравнением для вихря в непроводящей среде

$$\frac{\partial \boldsymbol{\omega}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{u} \times \boldsymbol{\omega}) + \nu \Delta \boldsymbol{\omega} \quad (11.51)$$

и уравнением индукции в проводящей среде

$$\frac{\partial \mathbf{h}}{\partial t} = \text{rot} (\mathbf{u} \times \mathbf{h}) + \lambda \Delta \mathbf{h} \quad (11.52)$$

(см. разд. 3.2). Если в каждом из этих случаев $\mathbf{u}(\mathbf{x}, t)$ представляет собой однородное турбулентное поле скорости, то мы можем вывести уравнение для $\langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle$ и $\langle \mathbf{h}^2 \rangle$:

$$\frac{d}{dt} \langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle = \langle \omega_i \omega_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle - \nu \langle \left(\frac{\partial \omega_i}{\partial x_j} \right)^2 \rangle, \quad (11.53)$$

$$\frac{d}{dt} \langle \mathbf{h}^2 \rangle = \langle h_i h_j \frac{\partial u_i}{\partial x_j} \rangle - \lambda \langle \left(\frac{\partial h_i}{\partial x_j} \right)^2 \rangle. \quad (11.54)$$

Далее Бэтчелор утверждал, что $\langle \boldsymbol{\omega}^2 \rangle$, будучи "мелкомасштабным" свойством турбулентности, является статистически равновесной величиной на любом интервале времени (например, l_0/u_0), связанном с энергосодержащими вихрями. Кроме того, можно ожидать, что случайное растяжение магнитных силовых линий породит статистическую структуру \mathbf{h} -поля, сходную с той, которая создается у $\boldsymbol{\omega}$ -поля путем растяжения вихревых линий. Отсюда можно ожидать, что при $\lambda = \nu$ величина $\langle \mathbf{h}^2 \rangle$ будет также статистически равновесной и, следовательно, останется постоянной на временных интервалах $\sim l_0/u_0$. Если $\lambda < \nu$, то можно ожидать, что $\langle \mathbf{h}^2 \rangle$ будет расти (и Бэтчелор

утверждал, что этот рост будет продолжаться до тех пор, пока не будет приостановлен обратным воздействием лоренцевых сил), а если $\lambda > \nu$, то можно ожидать, что $\langle \mathbf{h}^2 \rangle$ будет затухать.

Как было указано в разд. 3.2, аналогия с вихрем, конечно, неполна. Особая трудность в приложении этой аналогии к проблеме турбулентности динамо связана с тем, что в действительности нас интересует возможность поддержания магнитного поля на временных интервалах, по крайней мере превышающих характерное время омического затухания l_0^2/λ , а при $R_m = u_0 l_0/\lambda \gg 1$ это время *велико* по сравнению с l_0/u_0 . В отсутствие "источников случайного размешивания" $\langle \omega^2 \rangle$ затухает за время l_0/u_0 , а если $\lambda = \nu$, то можно ожидать, что и $\langle \mathbf{h}^2 \rangle$ затухнет за то же время, т.е. у нас нет динамо в обычном смысле. При $\lambda < \nu$ величина $\langle \mathbf{h}^2 \rangle$ может вначале увеличиться примерно в ν/λ раз [как это произойдет и с $\langle \omega^2 \rangle$, если ν в уравнении (11.53) мгновенно уменьшить до величины $\nu_1 = \lambda < \nu$], но, как снова можно ожидать, затухнет за время $\sim l_0/u_0$. Мы можем, конечно, предотвратить долгопериодическое затухание $\langle \omega^2 \rangle$ в (11.53), включив в уравнение (11.51) случайный момент сил. Однако, чтобы сохранить аналогию, мы должны в таком случае ввести в уравнение (11.52) ротор случайной электродвижущей силы, но тогда это будет уже не задача о самовозбуждающемся динамо.

Хотя из приведенных рассуждений вытекает невозможность существования длительного динамо в отражательно-симметричной турбулентности, надо иметь в виду (и это лучше выражено в случае турбулентности со спиральностью), что поскольку для магнитного поля \mathbf{h} нет ограничения вида $\omega = \text{rot } \mathbf{u}$, то могут возбуждаться такие моды \mathbf{h} , которые просто не свойственны ω , и, таким образом, $\langle \mathbf{h}^2 \rangle$ может расти (до тех пор, пока не вмешаются лоренцевы силы), даже если $\lambda > \nu$.

По-видимому, поднятые здесь вопросы могут быть полностью разрешены лишь с помощью численных экспериментов, аналогичных проведенным в работе [172]. Однако возможности вычислительной техники пока не достаточны для того, чтобы получить надежные асимптотические законы путем интегрирований в течение продолжительных времен. К счастью, как это упомянуто во вводной главе, задачу о генерации магнитных полей в отражательно-симметричной турбулентности можно, несмотря на ее проблемный характер, в значительной степени обойти в приложениях к геофизике и астрофизике благодаря тому, что обычно турбулентность, генерируемая во вращающихся системах, не является отражательно-симметричной, хотя отсутствие отражательной симметрии является самым существенным из всех турбулентных эффектов, необходимых для генерации магнитного поля.

ДИНАМИЧЕСКИ НЕПРОТИВОРЕЧИВЫЕ ДИНАМО

12.1. Ограничение Тейлора и крутильные колебания

Рассмотрим теперь некоторые общие аспекты динамики вращающейся жидкости, заключенной в сферический объем и подвергнутой комбинированному воздействию лоренцевых, кориолисовых и архимедовых сил. В приближении Буссинеска уравнение движения жидкости имеет вид

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} = - \nabla P + \rho^{-1} \mathbf{J} \times \mathbf{B} - \alpha \Theta \mathbf{g} + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (12.1)$$

где ρ – средняя плотность, \mathbf{g} – направленное по радиусу гравитационное ускорение, Θ – температурное поле, поведение которого описывается уравнением (10.80). Скорость \mathbf{U} соленоидальна и обращается в нуль на сфере $r = R$.

Выпишем глобальные оценки по порядку величины отношений членов $\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}$ и $\nu \Delta \mathbf{U}$, входящих в уравнение (12.1), к члену $2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}$

$$\frac{|\mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U}|}{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}|} = O\left(\frac{U}{\Omega L}\right), \quad \frac{|\nu \Delta \mathbf{U}|}{|\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U}|} = O\left(\frac{\nu}{\Omega L^2}\right), \quad (12.2)$$

где $L = O(R)$ – масштаб изменения \mathbf{U} . Предположим, что

$$R_o = U / \Omega L \ll 1 \text{ и } E = \nu / \Omega L^2 \ll 1, \quad (12.3)$$

и пренебрежем в (12.1) переносным ускорением и вязким членом. Тогда граничное условие для \mathbf{U} имеет простой вид:

$$\mathbf{U} \cdot \mathbf{n} = 0 \quad \text{на} \quad r = R, \quad (12.4)$$

причем благодаря возникновению экмановского слоя, толщина которого на поверхности порядка $O(E^{1/2})$ (см., например, [84]), выполняется также условие отсутствия скольжения. Уравнение (12.1) можно теперь переписать в виде

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} = - \nabla P + \mathbf{F}, \quad (12.5)$$

где

$$\mathbf{F} = \rho^{-1} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \alpha \Theta \mathbf{g}. \quad (12.6)$$

Необходимое условие существования стационарного решения $\mathbf{U}(\mathbf{x})$

Выпишем φ -компоненту уравнения (12.5) в цилиндрических координатах (s, φ, z) :

$$\partial U_{\varphi} / \partial t + 2\Omega U_s = -\partial P / \partial \varphi + F_{\varphi}. \quad (12.7)$$

Тот факт, что P должно быть однозначным, накладывает важное ограничение [213] на те функции $F_{\varphi}(s, \varphi, z)$, для которых существуют стационарные соленоидальные решения уравнения (12.5). Пусть $C(s_0)$ — цилиндрическая поверхность $s = s_0$, $|z| < (R^2 - s^2)^{1/2}$ (рис. 12.1). Поскольку $\operatorname{div} \mathbf{U} = 0$ и $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = 0$ при $r = R$, то очевидно, что поток поля \mathbf{U} через поверхность $C(s_0)$ для всех s_0 должен обращаться в нуль, т.е.

$$\iint_{C(s_0)} U_s(s, \varphi, z) s d\varphi dz = 0. \quad (12.8)$$

Следовательно, непосредственно из уравнения (12.7) мы получаем, что при $\partial U_{\varphi} / \partial t = 0$

$$\mathcal{J}(s_0) \equiv \iint_{C(s_0)} F_{\varphi}(s, \varphi, z) s d\varphi dz = 0 \text{ для всех } s_0. \quad (12.9)$$

Величина $\rho \mathcal{J}(s_0) \delta s_0$, очевидно, представляет собой тормозящий момент, создаваемый силой Лоренца $\mathbf{J} \times \mathbf{B}$ и действующий на кольцеобразный жидкий цилиндр $s_0 < s < s_0 + \delta s_0$. Если этот момент не обращается в нуль, то должно возникать угловое ускорение. Поскольку $\boldsymbol{\xi}_{\varphi} = 0$, то условие (12.9) можно с равным правом (в стационарном случае $\partial \mathbf{U} / \partial t = 0$) записать в виде

$$\mathcal{J}(s_0) \equiv \rho^{-1} \iint_{C(s_0)} (\mathbf{J} \times \mathbf{B})_{\varphi} s d\varphi dz \equiv 0. \quad (12.10)$$

В этом виде условие обычно называют *ограничением Тейлора*.

*Достаточность ограничения Тейлора
для существования стационарного решения $\mathbf{U}(\mathbf{x})$*

Несколько труднее установить, что условие $\mathcal{J}(s) \equiv 0$ является также и достаточным условием существования стационарного решения (12.5). Дальнейшее рассмотрение основано на работе Тейлора [213], хотя и отличается от нее в деталях. Применив к уравнению (12.5) операцию ротора (при $\partial \mathbf{U} / \partial t = 0$), сразу получим

$$\partial \mathbf{U} / \partial z = -(2\Omega)^{-1} \operatorname{rot} \mathbf{F} = \mathbf{A}(\mathbf{x}). \quad (12.11)$$

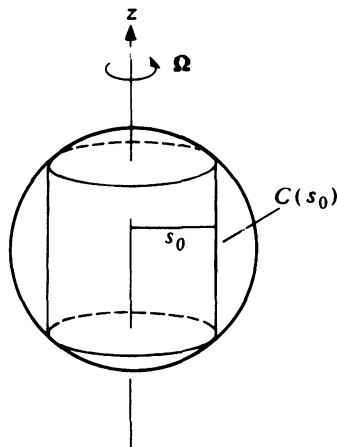


Рис. 12.1.

Поверхность $C(s_0): s = s_0, |z| < (R^2 - s^2)^{1/2}$.

Тут же отметим, что, согласно определению $\mathcal{J}(s)$,

$$\iint_{C(s)} A_z s d\varphi dz = \frac{1}{2\Omega s} \frac{\partial}{\partial s} (s \mathcal{J}(s)). \quad (12.12)$$

Следовательно, если $\mathcal{J}(s) \equiv 0$, то и

$$\iint_{C(s)} A_z s d\varphi dz \equiv 0. \quad (12.13)$$

Предположим далее, что $\mathbf{A}(\mathbf{x})$ — заданная соленоидальная функция, удовлетворяющая условию (12.13), и попытаемся решить уравнение (12.11) относительно $\mathbf{U}(\mathbf{x})$. Пусть $z^- = -(R^2 - s^2)^{1/2}$, $z^+ = +(R^2 - s^2)^{1/2}$, и пусть для произвольной функции $\psi(s, \varphi, z)$

$$\bar{\Psi}(s, \varphi) = \frac{1}{z^+ - z^-} \int_{z^-}^{z^+} \psi(s, \varphi, z) dz. \quad (12.14)$$

Пусть также

$$\mathbf{U}_0(s, \varphi, z) = \int_{z^-}^{z^+} \mathbf{A}(s, \varphi, \zeta) d\zeta. \quad (12.15)$$

Тогда интегрирование уравнения (12.11) дает

$$\mathbf{U}(s, \varphi, z) = \mathbf{U}_0(s, \varphi, z) + \mathbf{V}(s, \varphi), \quad (12.16)$$

где \mathbf{V} — искомая функция. Интегрируя (12.16) по z , легко получим

$$\mathbf{V}(s, \varphi) = \bar{\mathbf{U}}(s, \varphi) - \bar{\mathbf{U}}_0(s, \varphi). \quad (12.17)$$

s - и z -компоненты \mathbf{V} можно найти, потребовав выполнение условия $\mathbf{n} \cdot \mathbf{U} = 0$ при $r = R$, т.е. при $z = z^-, z^+$;

$$s V_s + z V_z = 0 \quad \text{при} \quad z = z^-,$$

$$s(V_s + U_{0_s}) + z(V_z + U_{0_z}) = 0 \quad \text{при} \quad z = z^+. \quad (12.18)$$

Эти равенства позволяют однозначно выразить $V_s(s, \varphi)$ и $V_z(s, \varphi)$ через известную функцию U_0 . Следовательно, остается определить $V_\varphi(s, \varphi)$. Согласно уравнению $\text{div } \mathbf{U} = 0$,

$$\frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s U_s) + \frac{1}{s} \frac{\partial U_\varphi}{\partial \varphi} = - \frac{\partial U_z}{\partial z} = - A_z \quad \text{с учетом (12.11)} \quad (12.19)$$

и, таким образом,

$$\frac{1}{s} \frac{\partial \bar{U}_\varphi}{\partial \varphi} = - \bar{A}_z - \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} (s \bar{U}_s). \quad (12.20)$$

Отсюда

$$\bar{U}_\varphi(s, \varphi) = - \int_0^\varphi (\bar{A}_z + \frac{1}{s} \frac{\partial}{\partial s} s \bar{U}_s) s d\varphi + v(s), \quad (12.21)$$

где $v(s)$ – произвольная функция интегрирования. В силу (12.8) и (12.13), функция, определяемая выражением (12.21), является однозначной и поэтому $V_\varphi(s, \varphi)$ (12.17) также однозначна. Это завершает доказательство того, что условие $\mathcal{J}(s) \equiv 0$ является достаточным для существования стационарных решений $\mathbf{U}(\mathbf{x})$ уравнения (12.11)

*Крутильные колебания,
возникающие при нарушении ограничения Тейлора*

Если $\mathcal{J}(s) \neq 0$, то интегрирование уравнения (12.7) по цилиндру $C(s)$ дает

$$\frac{\partial}{\partial t} \iint_{C(s)} U_\varphi(s, \varphi, z) s d\varphi dz = \mathcal{J}(s), \quad (12.22)$$

т.е. неизбежно появляется угловое ускорение. Если определить

$$U_G(s) = \frac{1}{A(s)} \iint_{C(s)} U_\varphi(s, \varphi, z) s d\varphi dz, \quad (12.23)$$

где $A(s) = 4\pi s(R^2 - s^2)^{1/2}$ – площадь цилиндра $C(s)$, то (12.22) принимает вид

$$\frac{\partial}{\partial t} A(s) U_G(s, t) = \mathcal{J}(s, t), \quad (12.24)$$

где мы теперь явно учли временную зависимость. $U_G(s, t)$ представляет собой геострофическую составляющую полного поля скорости, на которую не влияет вращение. Ясно, что определение U_G эквивалентно определению v (12.21).

Снова следуя Тейлору [213], мы можем путем дифференцирования (12.10) по t и использования уравнения индукции получить следующее уравнение:

$$\frac{\partial \mathcal{F}(s, t)}{\partial t} = \frac{1}{\mu_0 \rho} \iint_{C(s)} \{ \text{rot} [\text{rot} (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B}] \times \mathbf{B} + \text{rot} \mathbf{B} \times [\text{rot} (\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B}] \}_{\varphi} s d\varphi dz. \quad (12.25)$$

Положим в этом сложном интеграле

$$\mathbf{U} = \mathbf{U}_1(s, \varphi, z, t) + U_G(s, t) \mathbf{i}_{\varphi} \quad (12.26)$$

и будем рассматривать $U_G(s, t)$ как неизвестную функцию. Из разд 3.11 мы знаем, что когда \mathbf{B} осесимметрично, то

$$\text{rot}(U_G \mathbf{i}_{\varphi} \times \mathbf{B}) = s B_s \partial(U_G/s) / \partial s \mathbf{i}_{\varphi} \quad (12.27)$$

и, таким образом,

$$\{ \text{rot} [\text{rot}(U_G \mathbf{i}_{\varphi} \times \mathbf{B})] \times \mathbf{B} \}_{\varphi} = s^{-1} B_s \frac{\partial}{\partial s} (s^2 B_s \frac{\partial}{\partial s} \frac{U_G}{s}). \quad (12.28)$$

Следовательно, в этом случае (12.25) сводится к уравнению

$$\frac{\partial \mathcal{F}(s, t)}{\partial t} = a(s) \frac{\partial^2}{\partial s^2} \left(\frac{U_G}{s} \right) + b(s) \frac{\partial}{\partial s} \left(\frac{U_G}{s} \right) + c(s), \quad (12.29)$$

где

$$a(s) = \frac{1}{\mu_0 \rho} \iint_{C(s)} s^2 B_s^2 d\varphi dz,$$

$$b(s) = \frac{1}{\mu_0 \rho} \iint_{C(s)} B_s \frac{\partial}{\partial s} (s^2 B_s) d\varphi dz, \quad (12.30)$$

и в $c(s)$ включены все те члены из (12.25), которые не содержат U_G .

Уравнения (12.24) и (12.29), очевидно, образуют гиперболическую систему, которая, как можно ожидать, обладает решениями, имеющими характер колебаний относительно стационарного состояния $\mathcal{F} \equiv 0$. В таких колебательных решениях каждый жидкий цилиндр $C(s)$ вращается вокруг своей оси, причем связь между цилиндрами обеспечивается радиальным полем B_s через коэффициенты $a(s)$ и $b(s)$. Такие крутильные колебания изучались Брагинским [31]; затухание

колебаний, вызванное влиянием экмановского слоя на $r = R^-$, обсуждалось в работе [187] (§ 3). Характерный период колебаний определяется главным образом средним значением $h_s^2 = B_s^2 / \mu_0 \rho$ и, следовательно, равен $R / \langle h_s^2 \rangle^{1/2}$, т.е. времени, за которое альвеновская волна распространяется вдоль радиального поля на расстояние, по порядку величины равное радиусу сферы.

В случае когда благодаря действию динамо (связанному, скажем, с α -эффектом) на очень большом временном интервале $t_\lambda = O(R^2/\lambda)$ генерируется полоидальное поле \mathbf{V}_p и время затухания рассмотренных выше крутильных колебаний t_d мало по сравнению с t_λ , то можно ожидать, что крутильные колебания будут существовать в течение всего периода роста полоидального поля. Заметим, что уравнение (12.29) остается справедливым для неосесимметричного поля B , однако в выражении для $b(s)$ появятся дополнительные члены.

12.2. Влияние усредненного течения на динамо

Мы показали в разд. 9.5, что динамо в сфере может работать при наличии только одного α -эффекта, и если, например,

$$\alpha = -\alpha_0 \cos \theta, \quad (12.31)$$

то полученное численно критическое значение α_0 , при котором возбуждаются дипольные моды, равно

$$R_\alpha = |\alpha_0| R/\lambda = R_{\alpha c}, \quad (12.32)$$

где

$$R_{\alpha c} = 7,64. \quad (12.33)$$

Если $R_\alpha > R_{\alpha c}$, то моды с дипольной симметрией будут экспоненциально расти до тех пор, пока не станет существенным влияние сил Лоренца. Мы показали в разд. 10.3, что одним из проявлений возрастающего влияния лоренцевой силы будет итоговое уменьшение интенсивности α -эффекта. Однако имеется и другой механизм установления равновесия, который может остановить рост поля на более ранней стадии, если R_α несколько больше чем $R_{\alpha c}$, а именно на рост поля начнет влиять средняя скорость, возникающая под действием крупномасштабного поля сил Лоренца. Эта средняя скорость будет изменять форму нарастающего \mathbf{V} -поля, и можно ожидать, что в общем случае это приведет к возрастанию скорости омической диссипации. В этом случае можно ожидать, что полная энергия \mathbf{V} -поля установится на более низком уровне и будет стремиться к нулю при $R_\alpha - R_{\alpha c} \rightarrow 0$.

В работе [136] был развит формализм для решения этой задачи, суть которого заключается в том, что все поля раскладываются в ряды по степеням $(R_\alpha - R_{\alpha c})$ и ищутся условия существования стационарных распределений магнитного поля с конечной амплитудой. В этой работе предполагается, что α -эффект *задан* формулой типа (12.31) и не изменяется под влиянием магнитного поля. Внимание акцентируется на изучении поведения крупномасштабного "макрополя", а все обычные трудности, связанные с мелкомасштабной турбулентной динамикой, обходятся. Исследовались уравнения

$$\partial \mathbf{U} / \partial t + \mathbf{U} \cdot \nabla \mathbf{U} + 2 \boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{U} = - \nabla P + \rho^{-1} \mathbf{J} \times \mathbf{B} + \nu \Delta \mathbf{U}, \quad (12.34)$$

$$\partial \mathbf{B} / \partial t = \text{rot}(\alpha \mathbf{B}) + \text{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B} \quad (12.35)$$

с заданной функцией $\alpha(\mathbf{x})$ и начальными условиями

$$\mathbf{U}(\mathbf{x}, 0) = 0, \quad \mathbf{B}(\mathbf{x}, 0) = \mathbf{B}_0(\mathbf{x}), \quad (12.36)$$

где $\mathbf{B}_0(\mathbf{x})$ — собственная функция кинематической задачи (12.35) с $\mathbf{U} = 0$ и $R_\alpha = R_{\alpha c}$, обсуждавшейся в разд. 9.5. Поле \mathbf{B} , разумеется, обычным образом сшивается с безвихревым дипольным полем, отсутствующим в области $r > R$.

Если $R_\alpha = R_{\alpha c} (1 + \epsilon)$, где $0 < \epsilon \ll 1$, то магнитное поле вначале растет экспоненциально и лоренцева сила (которая согласно общему выводу разд. 2.4, конечно, не обращается в нуль) генерирует поле скорости, изменяющееся в соответствии с уравнением (12.34). Это поле скорости будет продолжать расти до тех пор, пока его влияние в уравнении (12.35) не станет существенным. Из сравнения членов $\text{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{B})$ и $\lambda \Delta \mathbf{B}$ ясно, что на этой стадии¹⁾ соответствующее характерное значение \mathbf{U} равно $U_0 = \lambda / R$.

Задача характеризуется тремя безразмерными числами:

$$E = \nu / \Omega R^2, \quad E_m = \lambda / \Omega R^2 = U_0 / \Omega R, \quad R_\alpha = |\alpha|_{\max} R / \lambda, \quad (12.37)$$

и рассматривается случай, интересный с геофизической точки зрения:

$$E \ll 1, \quad E_m \ll 1. \quad (12.38)$$

Заметим, что E_m ("магнитное число Экмана") фактически играет здесь роль числа Россби, т.е. является мерой относительной важности силы инерции и кориолисовой силы, которые входят в уравнение (12.34). В пределе (12.38) установившийся уровень магнитной энергии определяется магнитоэстрофическим балансом, при котором

¹⁾ Точнее, $U_0 = (\lambda / R) f(\epsilon)$, где $f(\epsilon) \rightarrow 0$ при $\epsilon \rightarrow 0$.

лоренцевы и кориолисовы силы одинаковы по порядку величины, т.е. \mathbf{V} по порядку величины равно B_0 , где

$$(\mu_0 \rho)^{-1} B_0^2 = \Omega U_0 R = \Omega \lambda, \quad (12.39)$$

и можно ожидать, что асимптотическое значение магнитной энергии равно $\Omega \lambda$ (эту величину снова надо умножить на функцию ϵ , стремящуюся к нулю при $\epsilon \rightarrow 0$).

Решения сформулированной выше задачи были получены численно Проктором [175] для частного случая α , заданного формулой (12.31) и значений R_α , заключенных в интервале от критического значения 7,64 до 10,0. В каждом из исследованных случаев было найдено, что среднее течение останавливает рост магнитной энергии и величина равновесной магнитной энергии увеличивается с ростом $R_\alpha - R_{\alpha c}$. На рис. 12.2 показан конечный уровень магнитной энергии, связанной с тороидальным полем, для двух особенно интересных случаев: 1) $E_m = 0,04$, $E = 0,01$ и 2) $E_m = 0,0025$, $E = 0,005$. В случае (1) магнитная

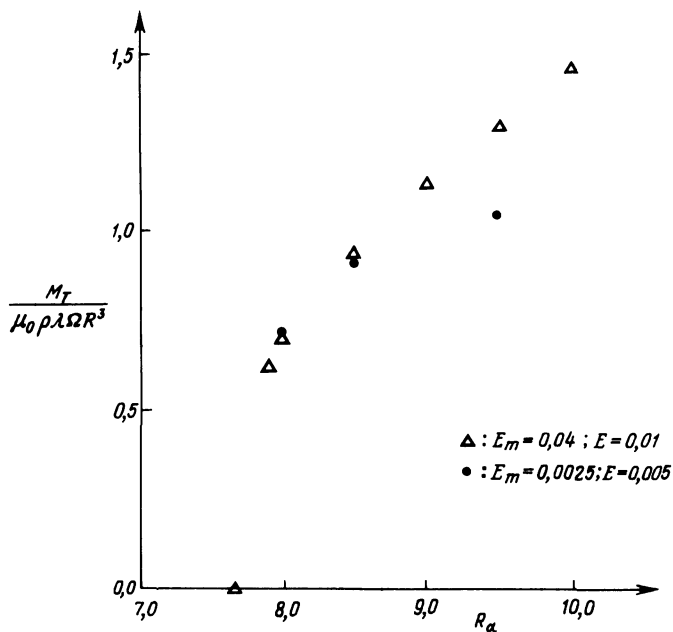


Рис. 12.2.

Равновесное значение магнитной энергии M_T тороидального поля как функция R_α для двух значений (E_m, E). Отметим, что с уменьшением вязкости (т.е. с уменьшением E) равновесное значение энергии уменьшается, поскольку сила Лоренца с большей легкостью создает усредненное течение, останавливающее равновесие [175].

энергия приближается к установившемуся значению после нескольких демпфирующих колебаний относительно конечного значения. В случае (2), который был выбран настолько близким к геострофическому пределу ($E_m = 0$, $E = 0$), насколько позволяла численная схема, вновь присутствуют колебания с малой амплитудой относительно конечного среднего уровня магнитной энергии, и эти колебания не стремятся затухнуть в ходе времени. Частота колебаний равна $O(\Omega E_m^{1/2}) = O((\Omega \lambda)^{1/2}/R)$, и Проктор отождествил их с крутильными колебаниями, описанными в разд. 12.1. Мы полагаем, что при достаточно малых E_m и E стационарное состояние, для которого применимо ограничение Тейлора, в действительности недостижимо и крутильные колебания относительно этого состояния неизбежно возникают. Дальнейшее изучение этого явления при различных значениях E_m и E представляло бы большой интерес.

Было бы интересно также обобщить этот метод на случай α -динамо. Здесь было бы необходимо задать не только распределение $\alpha(s, z)$, но и функцию $\omega(s, z)$. А поскольку сила Лоренца стремится изменить тороидальную (так же как и полоидальную) скорость, то единственный непротиворечивый способ такого рассмотрения α -динамо заключается во введении заданного тороидального силового поля $F_\phi(s, z)$, на которое не действуют лоренцевы силы.

В работе [85] изучена нелинейная задача о собственных значениях непосредственно в магнитогеострофическом пределе $E = E_m = 0$, а именно предполагалось, что $U = v(s) \mathbf{i}_\phi$, $\alpha(s, z)$ задано, тогда

$$\text{rot}(\mathbf{U} \times \mathbf{B}) + \text{rot}(\alpha \mathbf{B}) + \lambda \Delta \mathbf{B} = 0 \quad (r < R), \quad (12.40)$$

и, наконец,

$$\mathcal{J}(s) = (\mu_0 \rho)^{-1} \iint_{C(s)} \{(\text{rot } \mathbf{B}) \times \mathbf{B}\}_\phi s d\phi dz = 0 \quad (r < R). \quad (12.41)$$

На границе $r = R$ подразумевалось выполнение условий сшивания с бессильным полем, присутствующим в области $r > R$. Задача заключается в определении значений параметра $|\alpha|_{\max} R/\lambda$, для которого существуют решения $\{\mathbf{B}(\mathbf{x}), v(s)\}$, и в определении вида этих решений. Найдено [85] формальное решение задачи в виде бесконечных рядов для случая, когда $\alpha(s, z)$ отлично от нуля только в тонком слое вблизи поверхности $(s^2 + z^2)^{1/2} = R^-$. Физический смысл и значение этого решения пока не ясны.

Задачу решал также Брагинский [32] в формулировке, близкой к работе [136]. Однако он выдвинул гипотезу, что в жидком ядре Земли $|B_s|$ может быть значительно слабее $|B_z|$ и вследствие этого связь между цилиндрическими оболочками, "наназанными на нитки" поля B_s , может быть столь слабой, что функция Тейлора $\mathcal{J}(s)$,

будучи малой, не обращается тождественно в нуль в стационарном состоянии. Решения, основанные на этом предположении, пока еще детально не разработаны, и мы пока не знаем, даст ли этот подход класс решений, действительно отличающихся от решений, рассмотренных в работе [136].

12.3. Динамо, создаваемые архимедовыми силами

Как мы знаем из разд. 4.4, вопрос, устойчиво или неустойчиво стратифицированное жидкое ядро Земли, пока не решен окончательно: одним из наиболее вероятных источников энергии движений в ядре являются архимедовы силы, имеющие тепловое или нетепловое происхождение. В разд. 10.6 мы рассмотрели задачу об устойчивости плоского вращающегося слоя, подогреваемого снизу, и показали, что если система неустойчива, то можно ожидать, вообще говоря, что получающиеся в результате движения обладают отличной от нуля спиральностью и, следовательно, по крайней мере потенциально способны дать динамо. Если такое динамо работает, то ключевой вопрос в том, до какой величины вырастет магнитная энергия.

Если число Рэлея R_a [см. ниже (12.42)], описывающее состояние системы, слегка превышает критическое значение R_{ac} , при котором начинается ячейчатая конвекция, то, исходя из общих соображений, можно ожидать, что в отсутствие магнитного поля амплитуда установившихся движений по порядку величины будет равна $\epsilon = (R_a - R_{ac})^{1/2}$ [137]. Если спиральность движения велика, то возникает соответствующий α -эффект, который в общем случае под влиянием вращения будет сильно анизотропным, но $\alpha_0 = O(\epsilon^2)$, где α_0 — типичная компонента псевдотензора α_{ij} . Далее, если система обладает достаточной протяженностью (по крайней мере в одном измерении), чтобы стал возможным рост крупномасштабного магнитного поля (главным образом благодаря α^2 -динамо), то, как показало обсуждение в разд. 10.3, можно ожидать, что этот рост будет продолжаться до тех пор, пока сила Лоренца не изменит картину ячейчатой конвекции таким образом, что α -эффект ослабнет. При уменьшении ϵ (причем все остальные параметры фиксированы) мы должны достичь критического значения, допустим ϵ_1 , при котором *начнет* работать динамо. Если теперь ϵ слегка превышает ϵ_1 [т.е. $\eta = (\epsilon - \epsilon_1)/\epsilon_1 \ll 1$], то вблизи первоначального состояния стационарной конвекции *может* существовать устойчивое состояние с типичной амплитудой поля B_0 порядка η (или пропорциональной некоторой положительной степени η , которая зависит от детального механизма установления равновесия); если η достаточно мало, то магнитная энергия в этом новом установившемся состоянии

будет мала по сравнению с кинетической энергией ячеистого движения. В этом случае теория возмущений позволяет определить равновесную форму и амплитуду поля. Однако *априорной* уверенности в том, что такое близкое равновесное состояние существует, нет, поскольку, как указано в начале разд. 10.3, всегда можно путем подходящей ориентации магнитного поля избавиться от ограничения, налагаемого сильным вращением. Конвекция усилится, поле, выйдя из-под контроля, вырастет до большой величины, и сила Лоренца станет по крайней мере сравнимой с кориолисовой, т.е. можно ожидать, что установится состояние магнитострофического равновесия.

Теория возмущений, основанная на изложенной выше идее о равновесии со слабой напряженностью поля, была развита Соурдом [199] (см. также [53]) для задачи о плоском вращающемся слое и Буссе [46] для кольцеобразной геометрии. Подробный анализ этих статей сложен, да и нет смысла приводить здесь детали. Достаточно описать принятые там существенные приближения и охарактеризовать выводы, полученные в этих случаях.

Конвективное динамо Соурда

Соурд [199] рассмотрел¹⁾ конфигурацию, изображенную на рис. 12.3, а. Предполагается, что на идеально проводящих и изотермических плоскостях $z = 0$ и $z = z_0$ напряжения отсутствуют, что (как и в разд. 10.6) приводит к простейшей комбинации граничных условий, удобных для аналитического решения задачи на устойчивость. (Если условие равенства нулю напряжений заменить условием отсутствия проскальзывания, то, как отметил Соурд, в долгопериодическом поведении конечной амплитуды конвективных ячеек важную роль могут играть экмановские слои, возникающие на этих двух границах; можно ожидать, что система будет одинаково чувствительна к электрическим и тепловым граничным условиям.) В отсутствие магнитного поля система характеризуется числами Экмана, Рэлея и Прандтля

$$E = \nu / \Omega z_0^2, \quad R_a = \alpha g z_0^3 \Delta \Theta / \nu \kappa, \quad \sigma = \nu / \kappa, \quad (12.42)$$

где $\Delta \Theta$ – разность температур между плоскостями, κ – коэффициент теплопроводности, и предполагается, что

$$E \ll 1, \quad \sigma = O(1). \quad (12.43)$$

Критическое число Рэлея [50] для этого случая равно

$$R_{ac} = O(E^{-4/3}), \quad (12.44)$$

¹⁾ В интересах сохранения единства обозначений в разных главах книги мы несколько отступим в этом разделе от обозначений, принятых Соурдом.

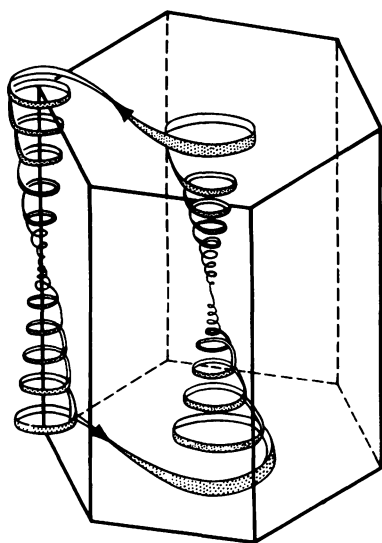
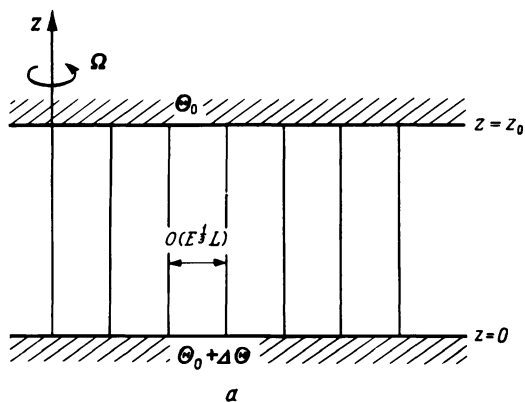


Рис. 12.3.

а — эскиз конфигурации, исследованной Соуордом [199]; вертикальными линиями показаны границы конвективных ячеек для случая, когда число Рэлея превышает критическое значение. Если $E \ll 1$, то, как указано, горизонтальный масштаб равен $O(E^{1/3} z_0)$; б — изображение в перспективе траектории жидкой частицы, которая проходит через центр ячейки, имеющей в плане шестиугольную форму. Очевидно, что спиральность, связанная с этим типом движения, антисимметрична относительно центральной плоскости $z = (1/2)z_0$, и α -эффект [описываемый формулами (12.51) и (12.52)] также антисимметричен относительно $z = (1/2)z_0$.

а горизонтальное волновое число, для которого R_{ac} минимально, равно

$$k_c = O(E^{-1/2}) z_0^{-1}. \quad (12.45)$$

Соурд предполагает, что слой слегка неустойчив в том смысле, что

$$\frac{R_a - R_{ac}}{R_{ac}} = O(E^{1/2}), \quad (12.46)$$

поэтому возбуждены только моды с такими горизонтальными волновыми числами $\mathbf{k} = (k_1, k_2, 0)$, для которых $|\mathbf{k}| \approx k_c$. Кроме того, он полагает, что $\sigma > 1$, а при выполнении этого условия [50] движение, возникающее у порога возбуждения конвекции, является непериодическим. При выполнении условия (12.46) амплитуда скорости в возбужденных конвективных ячейках по порядку величины равна [137]

$$u_0 = O(E^{1/2}) v / z_0. \quad (12.47)$$

Это показывает, что разложение всех средних и флуктуирующих полевых переменных по степеням малого параметра $E^{1/2}$, составляющее основу развитой Соурдом теории возмущений, оправдано.

Периодические по x и y движения однозначно определяются вертикальным распределением скорости

$$w(\mathbf{x}, t) = \text{Re} \sum_{\mathbf{k}} \hat{w}(\mathbf{k}, t) \sin \frac{\pi z}{z_0} e^{i \mathbf{k} \cdot \mathbf{x}}. \quad (12.48)$$

Тот факт, что горизонтальный масштаб $l = O(E^{1/2}) z_0$ мал по сравнению с z_0 , позволяет в данном случае воспользоваться методами электродинамики усредненных полей, причем усреднение проводится по горизонтальной плоскости. Вычисленное с помощью u_0 и l магнитное число Рейнольдса

$$u_0 l / \lambda = O(E^{1/2}) v / \lambda \quad (12.49)$$

мало при ¹⁾ $v / \lambda \ll O(1)$. Следовательно, при вычислении псевдотензора α_{ij} (ср. разд. 7.8) возмущение магнитного поля \mathbf{b} эффективно определяется (в главном порядке по $E^{1/2}$) уравнением

$$\lambda \Delta \mathbf{b} = -\mathbf{V} \cdot \nabla \mathbf{u}, \quad (12.50)$$

и непосредственное вычисление величины

$$\mathcal{E}_i = \langle \mathbf{u} \times \mathbf{b} \rangle_i = \alpha_{ij} B_j \quad (12.51)$$

¹⁾ Соурд полагает $v / \lambda = O(1)$; однако, чтобы теория была применима к геофизике, надо при разложении учесть тот факт, что в ядре Земли $v / \lambda \ll 1$.

дает

$$\alpha_{ij} = \frac{\pi}{E^{1/2} \lambda z_0} \sum_{\mathbf{k}} \frac{k_i k_j}{k^6} q(\mathbf{k}, t) \sin\left(\frac{2\pi z}{z_0}\right), \quad (12.52)$$

где $q(\mathbf{k}, t) = |\hat{w}(\mathbf{k}, t)|^2$. При выполнении этого расчета необходимо, конечно, знать фазовые соотношения между горизонтальной и вертикальной компонентами скорости, которые находятся из решения линейной задачи на устойчивость. Среднее поле $\mathbf{V}(z, t)$, входящее в выражение (12.51), с необходимостью горизонтально, и его изменение описывается хорошо известным теперь уравнением

$$\frac{\partial B_i}{\partial t} = \epsilon_{ijk} \frac{\partial}{\partial x_j} (\alpha_{kl}(z, t) B_l) + \lambda \frac{\partial^2 B_i}{\partial z^2}. \quad (12.53)$$

На следующей стадии расчета необходимо вывести уравнения для величины $q(\mathbf{k}, t)$, появившейся в (12.52), продолжив разложения до порядка $O(E^{1/2})$, когда сила Лоренца начнет существенно влиять на динамику. Эти уравнения для случая, когда все волновые векторы в спектре скорости имеют одинаковую величину, выведены Соурдом:

$$\begin{aligned} \frac{\partial q(\mathbf{k}, t)}{\partial t} + 2 \sum_{\mathbf{k}'} A(\mathbf{k}, \mathbf{k}') q(\mathbf{k}', t) q(\mathbf{k}, t) - \\ - [m(\mathbf{k}, t) - \frac{1}{2} \sum_{\mathbf{k}'} m(\mathbf{k}', t) q(\mathbf{k}', t)] q(\mathbf{k}, t) = 0. \end{aligned} \quad (12.54)$$

Здесь $A(\mathbf{k}, \mathbf{k}')$ — коэффициент связи, отвечающий нелинейным взаимодействиям между неустойчивыми модами, $m(\mathbf{k}, t)$ — взвешенное среднее от $(\mathbf{V} \cdot \mathbf{k})^2$ по $0 < z < z_0$, а члены, содержащие m , описывают влияние среднего магнитного поля на мелкомасштабные движения.

Чтобы проинтегрировать уравнения (12.53) и (12.54), необходимо выбрать начальные условия и, в частности, задать горизонтальную форму ячеистой картины конвекции в момент $t = 0$. Если имеется только один волновой вектор \mathbf{k}_1 [т.е. $q(\mathbf{k}, 0) \neq 0$ только при $\mathbf{k} = \pm \mathbf{k}_1$], то движение имеет форму цилиндрических роликов, оси которых перпендикулярны \mathbf{k}_1 . Почти очевидно, что такое движение является слишком простым, чтобы дать динамо, способное поддерживать \mathbf{V} . Если имеется два равных по величине волновых вектора \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 [$q(\mathbf{k}_1, 0) = q(\mathbf{k}_2, 0)$ при $|\mathbf{k}_1| = |\mathbf{k}_2|$ и $\mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2 = 0$] и если амплитуды различных мод равны, то конвективные ячейки имеют квадратные границы¹⁾.

¹⁾ Ср. поле скорости (3.114) из разд. 3.12, хотя в том случае имелось четыре горизонтальных волновых вектора, а именно

$(k_1, 0, 0)$, $(0, k_1, 0)$, $2^{-1/2}(k_1, k_1, 0)$, $2^{-1/2}(k_1, -k_1, 0)$ при $k_1 = \pi/z_0$.

Если имеется три волновых вектора равной величины

$$\begin{aligned} |\mathbf{k}_1|^2 = |\mathbf{k}_2|^2 = |\mathbf{k}_3|^2 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{k}_2 \cdot \mathbf{k}_3 = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{k}_3 \cdot \mathbf{k}_1 = \\ = -\frac{\sqrt{3}}{2} \mathbf{k}_1 \cdot \mathbf{k}_2, \end{aligned} \quad (12.55)$$

то границы ячеек имеют форму правильных шестиугольников; типичная траектория частицы в этом случае изображена на рис. 12.3, б [220]

Численное интегрирование уравнений (12.53) и (12.54) для случая квадратных границ ячеек показывает, что как для магнитной энергии

$$M(t) = \frac{1}{2\mu_0} \int_0^L \mathbf{B}^2 dz, \quad (12.56)$$

так и для величины $v(t) = q(\mathbf{k}_1, t) - q(\mathbf{k}_2, t)$ при больших $\lambda t/L^2$ установившимся состоянием является периодический режим. Отношение средней магнитной энергии к средней кинетической в этом асимптотически периодическом состоянии порядка $E^{1/3}$ (т.е. мало, как это и тре-

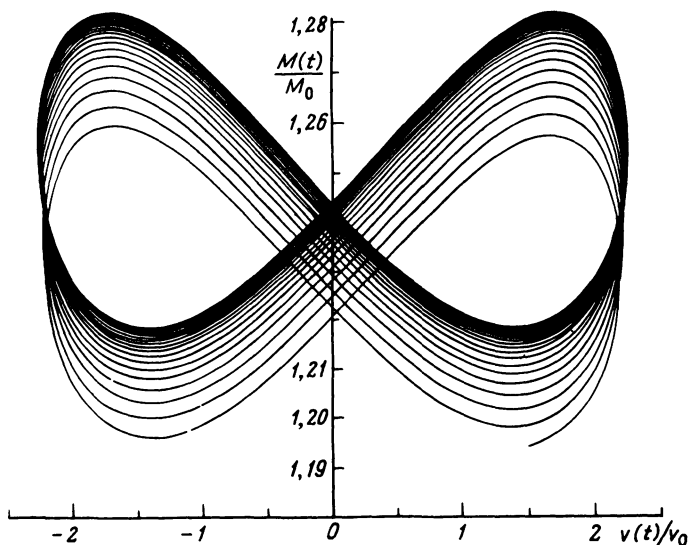


Рис. 12.4.

Эволюция магнитной энергии $M(t)$ и величины $v(t)$, которая равна удвоенной разности кинетической энергии мод, соответствующих волновым векторам \mathbf{k}_1 и \mathbf{k}_2 , в фазовой плоскости. Нормировочные постоянные M_0 и v_0 зависят от точных начальных условий задачи. На рисунке показано периодическое изменение во времени величин $M(t)$ и $v(t)$ при приближении к предельному циклу. Расчет проведен для 16 000 временных шагов [199].

буется для справедливости метода "слабого поля"), и флуктуации магнитной энергии относительно среднего значения составляют приблизительно $\pm 3\%$. Эти результаты можно получить, рассматривая переход к предельному циклу в плоскости переменных $v(t)$, $M(t)$ (рис. 12.4).

Естественно, что результаты для шестиугольных ячеек более сложны, поскольку кинетическая энергия в данном случае распределена не между двумя, а между тремя модами. Тем не менее численное интегрирование, выполненное Соуродом, вновь указывает на существование слабых флуктуаций магнитной энергии относительно конечного среднего уровня, в то время как кинетическая энергия (или довольно существенная доля ее), по-видимому, циклически "перемещается" между тремя рассматриваемыми модами.

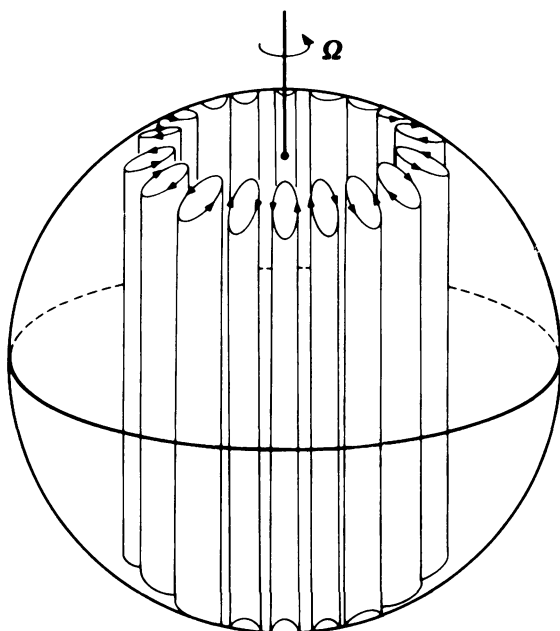
Характерной особенностью этих динамо является нестационарное распределение скорости и магнитного поля (хотя в конечном итоге устанавливается периодический во времени режим с периодом z_0^2/λ).

Модель геодинамо Буссе [46]

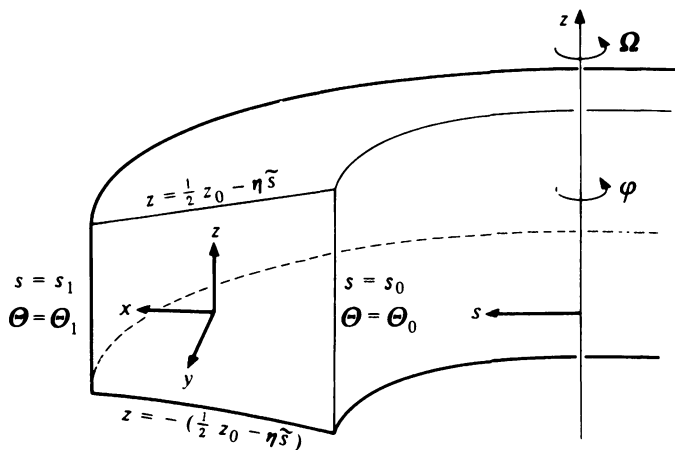
Одна из трудностей при анализе проблемы тепловой конвекции во вращающемся сферическом кольце (модели конвекции, возникающей между твердым внутренним ядром Земли и мантией) связана с тем, что угол между направленным по радиусу вектором ускорения силы тяжести \mathbf{g} и вектором угловой скорости $\mathbf{\Omega}$ не постоянен. Однако конвекция при малом числе Экмана (если силы Лоренца достаточно слабы) характеризуется длинными тонкими конвективными ячейками, вытянутыми вдоль направления $\mathbf{\Omega}$ (рис. 12.5, а). Тепловые неустойчивости такого вида были исследованы Буссе [46]. Для ячеек такой формы эффективна только компонента ускорения силы тяжести $g \sin \theta$, перпендикулярная $\mathbf{\Omega}$. Поскольку центробежная сила $\Omega^2 r \sin \theta$ имеет ту же зависимость от угла θ , влияние радиального градиента силы тяжести можно заменить в лабораторных экспериментах центробежной силой в сферическом кольце, вращающемся вокруг вертикальной оси. В таких экспериментах неустойчивая стратификация создается путем нагрева внешней сферы и охлаждения внутренней (процесс умышленно обращен, поскольку центробежная сила направлена наружу, в то время как на Земле ускорение силы тяжести направлено внутрь). Эксперименты [48] подтвердили появление конвективных столбиков во внешней области цилиндра $C(s_0)$, где s_0 — радиус внутренней сферы.

Эти результаты позволили Буссе [46] рассмотреть для простейшей цилиндрической геометрии (рис. 12.5, б) динамо в среде с тепловой конвекцией. Цилиндрическое кольцо

$$s_0 < s < s_1, \quad |z| < \frac{1}{2} z_0 - \eta \tilde{s}, \quad \tilde{s} = s - \frac{1}{2} (s_0 + s_1) \quad (12.57)$$



a



б

Рис. 12.5.

а — схема неустойчивых конвективных движений, развивающихся у порога устойчивости в сфере быстро вращающейся жидкости с однородным распределением тепловых источников [43]. б — сегмент цилиндрической конфигурации, моделирующей основные особенности сферической системы. Внешний цилиндр нагрет до температуры $\Theta_1 > \Theta_0$. Использованы (как уже указано) локальные декартовы координаты $Oxyz$ [46].

имеет приблизительно ту же форму, что и область, занятая конвективными ячейками на рис. 12.5, *a*. Параметр η характеризует наклон верхней и нижней поверхностей кольца, и в теории предполагается, что он мал ¹⁾. Кроме того, предполагается, что $z_0 \ll s_1 - s_0 \ll s_1$, и, таким образом (как и в предыдущих исследованиях), цилиндрические координаты можно заменить декартовыми (x, y, z) . Эти предположения, конечно, *не характерны* для задачи о сферическом кольце, однако можно надеяться, что качественное поведение этой системы адекватно описывается в квазидекартовой модели.

Ясно, что простые движения, представленные на рис. 12.5, *a*, обладают нулевой спиральностью и сами по себе не могут создать α -эффекта. Необходимо внутри каждой ячейки задать движение, которое, грубо говоря, вытянуто вдоль оси ячейки и скоррелировано по знаку с угловой скоростью ячейки. Эта составляющая движения в теории Буссе создается с помощью эффекта экмановского всасывания [85], связанного с экмановскими слоями на верхней и нижней границах; ее отношение к главному движению в ячейке имеет порядок $\sim E^{1/2}$, и она дает среднюю линейную и антисимметричную по z спиральность, отношение которой к средней кинетической энергии порядка $\sim E^{1/2} z_0^{-1}$. Как было показано в более ранней работе Буссе [44], для создания динамо необходимо иметь составляющую течения, параллельную двумерным конвективным ячейкам.

Расчет Буссе разбит на три стадии. 1) На первой стадии находят условия критической устойчивости в отсутствие магнитного поля, форму критически устойчивых возмущений и их амплитуду в условиях, слегка превышающих критические. Сюда включается процедура Малкуса и Верониса [137], но с учетом дополнительной особенности, связанной с тем, что малый наклон верхней и нижней поверхностей генерирует слабые нестационарности в неустойчивых модах, которые медленно распространяются в азимутальном направлении. 2) Вторая стадия включает в себя решение кинематической задачи динамо с полем скоростей, определенным на первой стадии. Здесь, как и в работе Соурда [199], применимы методы электродинамики усредненных полей, причем усреднение проводится по переменным x и y . Снова получается динамо α^2 -типа, причем эффективная величина α линейна по z (как и обсуждавшаяся выше спиральность). Как и во всех таких динамо, тороидальное и полоидальное магнитные поля по порядку величины одинаковы. Буссе ограничивается рассмотрением полей, обладающих

¹⁾ В используемой теории возмущений также требуется, чтобы $E^{1/4} \ll \eta \ll z_0 / (s_1 - s_0)$. Отличие от нуля параметра η имеет решающее значение при исследовании устойчивости системы.

дипольной симметрией¹⁾ относительно плоскости $z = 0$, и получает критерий роста такого поля. Поскольку интенсивность α -эффекта пропорциональна $E^{1/2} u_0^2$, где $u_0^2 = \langle \mathbf{u}^2 \rangle$, то, если имеет место динамо, этот критерий действительно накладывает нижний предел на величину $E^{1/2} u_0^2$, выраженную через другие безразмерные параметры задачи. 3) На третьей стадии Буссе вычисляет те небольшие изменения в картине конвекции, которые вызываются возбужденным полем (если величина $E^{1/2} u_0^2$ достаточно велика), найденным на стадии 2. Амплитуда поля B_0 пока остается неопределенной и предполагается малой. Амплитуда измененного движения u_0 и амплитуда поля B_0 определяются одновременно из условия, что при α^2 -динамо, создаваемом слегка модифицированными конвективными ячейками, скорость роста основной магнитной моды должна обращаться в нуль. Поскольку увеличение B_0 ведет к уменьшению u_0 (причем все остальное остается неизменным), то установится равновесие, при котором плотность магнитной энергии будет мала по сравнению с плотностью кинетической.

В этом последнем свойстве — главное отличие динамо Буссе и Соурда от динамо, сформулированного в работе [136], для которого характерен магнитоэрозионный баланс сил и соответственно плотность магнитной энергии более близка к той, которая имеется в жидком ядре Земли. Как подчеркнуто в работе [53], обобщения моделей Буссе и Соурда на более интересный случай сильного поля, без сомнения, возможны и крайне желательны. Буссе [47] уже сделал первый шаг в этом направлении.

12.4. Моделирование обращений полярности земного поля с помощью связанных дисковых динамо

В работе [180] предложена простая модель, объясняющая обращение магнитного поля Земли, которая изучалась в дальнейшем в работах [3, 56]. Она (рис. 12.6, а) представляет собой комбинацию двух го-

¹⁾ Буссе в действительности не сшивает поле с полем в области внешней по отношению к кольцу, где токи отсутствуют. Он утверждает, что условие дипольной симметрии "позволяет продолжить меридиональное поле до бесконечности таким образом, что оно будет убывать по крайней мере столь же быстро, как и дипольное поле". Возможно, это утверждение и верно, однако желательно сделать и настоящее сшивание, поскольку в задаче динамо следует с особой осторожностью исключить "источник на бесконечности", который также может генерировать поле, обладающее *дипольной симметрией* относительно плоскости $z = 0$.

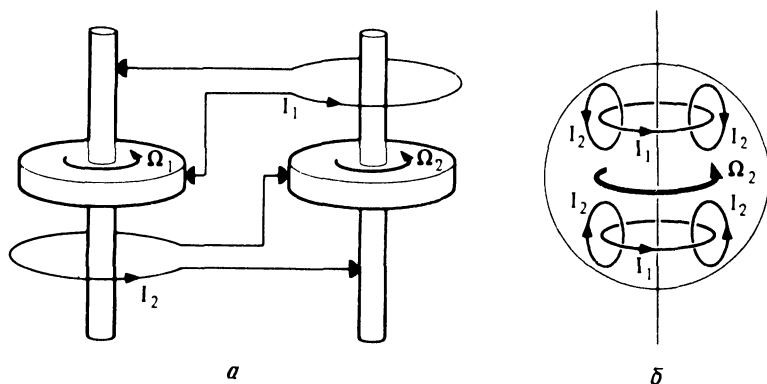


Рис. 12.6.

a — связанные дисковые динамо [180], диски вращаются (под действием приложенных крутящих моментов) с угловыми скоростями $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$ и создают токи $I_1(t)$ и $I_2(t)$ в проволоках, которые с помощью скользящего контакта соединены с краем и с осями дисков, как это показано на рисунке; *b* — соответствующие крупномасштабные токи и вращение внутри Земли (в ядре); скорость Ω_1 (не показанная на рисунке) связана с α -эффектом [см. (12.61)], а Ω_2 — с дифференциальным вращением [см. (12.60)] относительно оси среднего вращения.

мополярных дисковых динамо, обсуждавшихся в гл. 1. Для связанной системы имеется две механические степени свободы, характеризующиеся угловыми скоростями дисков $\Omega_1(t)$ и $\Omega_2(t)$, и две "электрические степени свободы", характеризующиеся токами $I_1(t)$ и $I_2(t)$, протекающими в проволоках, которые должны быть закручены вокруг осей вращения одинаковым образом, чтобы поле восстанавливалось. Если условия симметричны и к каждому диску приложен крутящий момент G , то уравнения, описывающие эволюцию системы, имеют вид

$$Ldl_1/dt + RI_1 = M\Omega_1 I_2, \quad (12.58a)$$

$$Ldl_2/dt + RI_2 = M\Omega_2 I_1, \quad (12.58б)$$

$$Cd\Omega_1/dt = G - MI_1 I_2, \quad (12.58в)$$

$$Cd\Omega_2/dt = G - MI_1 I_2, \quad (12.58г)$$

где L и R — самоиндукция и сопротивление каждой цепи, C — момент инерции каждого диска относительно его оси и $2\pi M$ — взаимоиндукция цепей. Члены $M\Omega_1 I_2$ и $M\Omega_2 I_1$ представляют собой электродвижущие силы, возникающие благодаря вращениям дисков с угловыми скоростями Ω_1 и Ω_2 , в то время как член $-MI_1 I_2$ представляет собой тормозящий момент, связанный с распределением силы Лоренца в каждом диске.

В каком смысле простую систему (12.58) можно считать (без преувеличения) моделью бесконечно более сложной ситуации, имеющей место в жидком ядре Земли? Прежде всего (рис. 12.6, б) мы можем рассматривать $I_1(t)$ и $I_2(t)$ как меры полного тороидального тока (проинтегрированного по меридиональной плоскости) и "полного меридионального тока", который можно определить формулой

$$I_2(t) = \frac{1}{2} \max_z \iint_{z = \text{const}} |J_z(x, y, z, t)| dx dy. \quad (12.59)$$

В таком случае $I_1(t)$ связано со средним полоидальным полем, а $I_2(t)$ — со средним тороидальным полем (причем усреднение проводится по азимутальному углу ϕ). Тогда в уравнении (12.58б) э.д.с. $M\Omega_2 I_1$ генерирует тороидальное поле, а $\Omega_2(t)$ лучше всего интерпретировать как меру среднего дифференциального вращения в ядре, допустим

$$\Omega_2(t) = \frac{R_C}{V_C} \iiint_{\text{ядро}} |\nabla \omega| dV, \quad (12.60)$$

где V_C — объем жидкого ядра, а R_C — радиус ядра. Аналогично, э.д.с. $M\Omega_1 I_2$ генерирует полоидальное поле, а $\Omega_1(t)$ лучше всего интерпретировать как меру средней интенсивности α -эффекта, скажем

$$\Omega_1(t) = \frac{1}{R_C V_C} \iiint_{\text{ядро}} |\alpha| dV. \quad (12.61)$$

Член $-MI_1 I_2$ в уравнении (12.58в) характеризует описанное в разд. 10.3 ослабление α -эффекта, тогда как в уравнении (12.58г) он характеризует описанное в разд. 12.2 изменение распределения средней скорости (которая в этом идеализированном случае чисто тороидальна). Член G в уравнениях (12.58в, г), с одной стороны, определяет движущие силы (теплового или иного происхождения), которые создают α -эффект, а с другой стороны, он является источником дифференциального вращения (которое создается переносом момента импульса мелкомасштабным перемешиванием, связанным с α -эффектом).

Хорошо бы, конечно, дать *формальный вывод* системы обыкновенных дифференциальных уравнений, аналогичной (12.58), путем подходящего усреднения полной системы уравнений магнитной гидродинамики, однако нелинейность этих уравнений делает задачу трудной (если не невозможной)¹⁾; в настоящее время мы можем сказать только, что

¹⁾ В работе [181] применен подход, основанный на ограничении числа уравнений для моментов, которые выводятся из уравнений (12.34) и (12.35).

уравнения (12.58) представляют собой возможную модель, поведение которой выглядит по крайней мере подходящим для приложений к геофизике. Модель, конечно, можно изменять (например, вводя различные константы связи M_1, M_2 , различные коэффициенты инерции C_1 и C_2 и различные крутящие моменты G_1, G_2 или увеличивая число степеней свободы введением дополнительных дисков); однако простая система (12.58) уже содержит достаточное число параметров, так что возможна широкая область режимов, и поэтому мы ограничимся далее рассмотрением этой системы, почти следуя изложению, принятому в работе [56].

Если определить безразмерные переменные

$$\tau = (GM/CL)^{1/2} t, \quad X, Y = (M/G)^{1/2} I_{1,2}, \\ Z, V = (CM/GL)^{1/2} \Omega_{1,2}, \quad (12.62)$$

то уравнения (12.58) примут более простой вид:

$$\dot{X} + \mu X = ZY, \\ \dot{Y} + \mu Y = VX, \\ \dot{Z} = \dot{V} = 1 - XY, \quad (12.63)$$

где $\mu = (C/GLM)^{1/2} R$. Эти уравнения имеют тривиальный первый интеграл $Z - V = A$,

где A — постоянная, которую можно считать неотрицательной. Заметим также, что уравнение

$$\frac{d}{d\tau} (X^2 + Y^2 + Z^2 + V^2) = (Z + V) - \mu(X^2 + Y^2) \quad (12.65)$$

определяет баланс энергии в системе: первый член в скобках представляет собой работу в единицу времени, выполняемую приложенными моментами сил, в то время как второй член описывает омическую диссипацию в двух цепях; в стационарных условиях эти члены компенсируют друг друга. Нелинейные члены в уравнениях (12.63) не вносят вклада в полную энергию и соответствуют просто переносу энергии между магнитным и кинетическим "резервуарами".

Стационарные решения системы (12.63) удовлетворяют условиям $XY = 1, \quad ZV = \mu^2$.

Если ввести постоянную $K \geq 1$ таким образом, чтобы

$$A = \mu(K^2 - K^{-2}), \quad (12.67)$$

то эти стационарные решения можно записать в виде

$$X = \pm K, \quad Y = \pm K^{-1}, \quad Z = \mu K^2, \quad V = \mu K^{-2}. \quad (12.68)$$

В этих двух состояниях, которые могут быть (произвольно) названы нормальным S_+ и обращенным S_- состояниями, токи или оба положительны (как на рис. 12.6, а), или оба отрицательны. Существование дополнительных состояний такого рода не кажется удивительным; ранее (в разд. 11.2) мы упоминали об общей инвариантности уравнений магнитной гидродинамики относительно изменения знака \mathbf{B} ; этим свойством обладает и система (12.63), а именно она инвариантна при преобразовании $(X, Y) \rightarrow (-X, -Y)$. Далее, интересующий нас вопрос состоит в том: возможен ли переход из окрестности одного стационарного состояния в окрестность другого, ответ на который естественно может быть получен после изучения устойчивости этих двух состояний.

Чтобы исследовать устойчивость состояния S_+ (исследование устойчивости состояния S_- проводится совершенно аналогично), положим

$$X = K + \xi, \quad Y = K^{-1} + \eta, \quad Z - \mu K^2 = V - \mu K^{-2} = \zeta; \quad (12.69)$$

подставим это в (12.63) и линеаризуем по (ξ, η, ζ) . Это даст для (ξ, η, ζ) три линейных однородных уравнения, решения которых можно искать в виде $e^{p\tau}$, причем p находят из условия обращения в нуль детерминанта размерности 3×3 . Для p получим кубическое уравнение, три корня которого можно записать в виде

$$p_1 = -2\mu, \quad p_2 = i(K^2 + K^{-2})^{1/2}, \quad p_3 = -i(K^2 + K^{-2})^{1/2}. \quad (12.70)$$

Чисто мнимые значения p_2 и p_3 отвечают безразличному равновесию. Однако нелинейные по ξ, η и ζ члены могут оказывать в данном случае долгопериодическое дестабилизирующее влияние. Эта возможность исследована в работе [56], где использован метод Ляпунова [123] и показано, что при $K > 1$ как следствие кумулятивного влияния этих нелинейных членов за время τ , превышающее $|K^2 + K^{-2}|^{-1/2}$, состояние S_+ действительно неустойчиво (так же как и S_-).

Решение системы (12.63) можно изобразить в виде движения точки $P(\tau)$ с декартовыми координатами $X(\tau), Y(\tau), Z(\tau)$. Орбита в этом фазовом пространстве естественно зависит от начального положения $P(0)$. В каждой точке фазового пространства можно определить "поле скорости"

$$\mathbf{u} = (\dot{X}, \dot{Y}, \dot{Z}) = (-\mu X + ZY, -\mu Y + (Z - A)X, 1 - XY), \quad (12.71)$$

для которого

$$\operatorname{div} \mathbf{u} = \frac{\partial u_1}{\partial X} + \frac{\partial u_2}{\partial Y} + \frac{\partial u_3}{\partial Z} = -2\mu. \quad (12.72)$$

Соответствующее "поле плотности" $\rho(X, Y, Z)$ удовлетворяет уравне-

нию неразрывности (в лагранжевой форме)

$$\frac{D\rho}{D\tau} = -\rho \operatorname{div} \mathbf{u} = 2\mu\rho, \quad (12.73)$$

лагранжево решение которого имеет вид

$$\rho = \rho_0 e^{2\mu\tau}. \quad (12.74)$$

Иными словами, объем dV , занимаемый произвольным элементом "фазовой жидкости", обращается в нуль за время, по порядку величины равное μ^{-1} . Это означает, что почти для всех возможных начальных положений $P(0)$ траектория $P(\tau)$ в конце концов произвольно близко подойдет к предельной поверхности $F(X, Y, Z) = 0$, обладающей тем свойством, что

$$(-\mu X + ZY) \frac{\partial F}{\partial X} + [\mu Y + (Z - A)X] \frac{\partial F}{\partial Y} + (\dot{1} - XY) \frac{\partial F}{\partial Z} = 0. \quad (12.75)$$

Численно рассчитанная траектория (12.71) и исследование топологического характера предельных поверхностей для конкретных значений параметров μ и A [56] подтверждают сказанное. На рис. 12.7 показано типичное поведение во времени $X(\tau)$ и проекция типичной траектории на плоскость (Y, Z) для случая $\mu = 1$, $K = 2$. Стационарные состояния S_{\pm} описываются в этом случае решениями

$$X = \pm 2, \quad Y = \pm \frac{1}{2}, \quad Z = 4, \quad V = \frac{1}{4}. \quad (12.76)$$

На обеих частях рисунка виден переход от окрестностей S_+ к окрестности S_- , хотя больше впечатляет тот факт, что, как правило, имеются колебания с большой амплитудой относительно этих состояний.

Даже если $P(0)$ очень близко к S_+ или S_- , точка $P(\tau)$ в конечном итоге движется по траектории, которая обращается попеременно вокруг S_+ и S_- , не приближаясь *вновь очень близко* ни к одному из этих состояний.

Такой режим по крайней мере качественно сравним с поведением проекции дипольного момента Земли $\mu_z^{(1)}(t)$ на ось север – юг за характерное время порядка миллионов лет (см. разд. 4.3). Существование двух характерных времен (одно из которых определяет среднее время между обращениями, а другое – продолжительность обращений), короткопериодические колебания относительно современного "нормального" состояния и случайные "взрывные" появления одного состояния между значительно более продолжительными периодами существования другого – все это отражено в поведении кривой на рис. 12.7, а. Это дает значительное указание на то, что обращения полярности земного поля

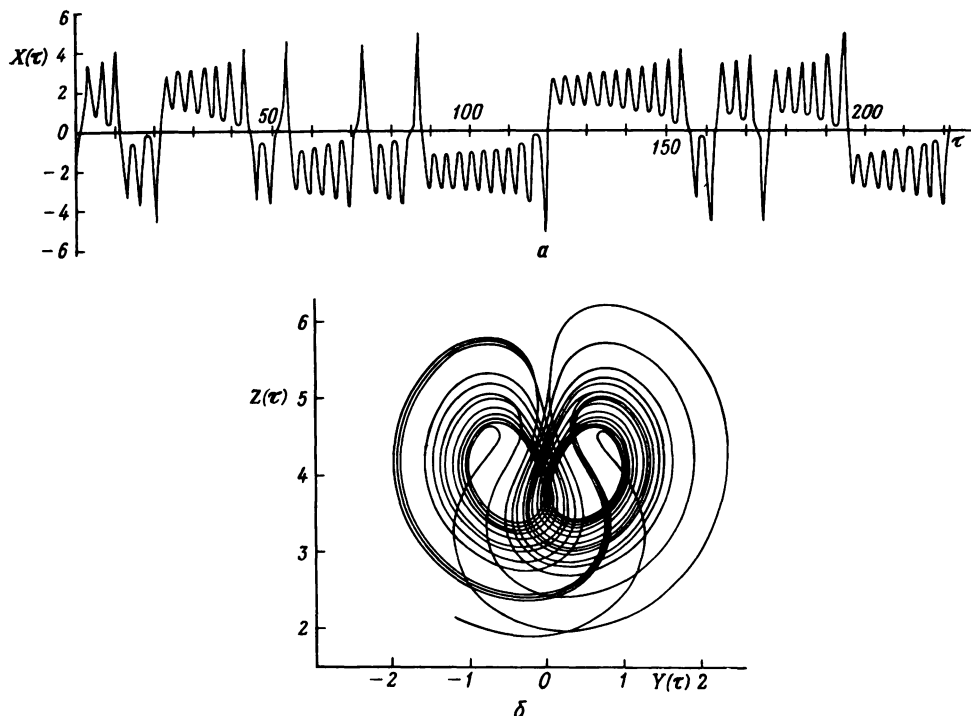


Рис. 12.7.

Численное решение системы (12.63) с $\mu = 1$, $K = 2$. а — обратите внимание, что $X(\tau)$ совершает колебания с большой амплитудой относительно стационарного состояния ± 2 и изменяет свой знак нерегулярным образом; б — проекция типичной траектории в фазовом пространстве на плоскость (Y, Z) . Отметим, что $Y(\tau)$ [подобно $X(\tau)$] изменяет знак нерегулярным образом, в то время как $Z(\tau)$ всегда положительна [56].

действительно являются результатом связанных нелинейных динамических и магнитных колебаний. В работах [175, 199], описанных в разд. 12.2 и 12.3, показано, что в некоторых моделях динамо, даже если существует статическое динамически равновесное состояние, система может "предпочесть" состояние, в котором магнитная энергия испытывает колебания с конечной амплитудой. Могут ли такие модели, выведенные систематическим образом из уравнений магнитной гидродинамики во вращающейся среде, действительно объяснить обращение полярности поля в сферической конфигурации, пока неизвестно. Эта проблема продолжает оставаться одной из волнующих и интересных проблем математической геофизики.

ЛИТЕРАТУРА

1. *Acheson D.J., Hide R.* Hydromagnetics of rotating fluids, *Rep. Prog. Phys.*, **36**, 159 – 211, 1973.
2. *Acuna M.H., Ness N.F.* The main magnetic field of Jupiter, *J. Geophys. Res.*, **81**, 2917 – 22, 1976.
3. *Allan D.W.* On the behaviour of systems of coupled dynamos, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **58**, 671 – 93, 1962.
4. *Alfvén H.* On the existence of electromagnetic-hydrodynamic waves, *Arkiv. f. Mat. Astron. Fysik*, **29 B**, no. 2 (7 pp), 1942.
5. *Altschuler M.D., Trotter D.E., Newkirk G.Jr., Howard R.* The large-scale solar magnetic field, *Solar Phys.*, **39**, 3 – 17, 1974.
6. *Andrews D.G., Hide R.* Hydromagnetic edge waves in a rotating stratified fluid, *J. Fluid Mech.*, **72**, 593 – 603, 1975.
7. *André J.D., Lesieur M.* Evolution of high Reynolds number isotropic three-dimensional turbulence; influence of helicity, *J. Fluid Mech.*, **81**, 187 – 208, 1977.
8. *Angel J.R.P.* Strong magnetic fields in White Dwarfs, *Ann. New York Acad. Sci.*, **257**, 80 – 1, 1975.
9. *Ануфриев А.П., Брагинский С.И.* О влиянии магнитного поля на поток вращающейся жидкости около неровной поверхности. Магнитная гидродинамика, **4**, 62 – 8, 1975.
10. *Vabcock H.D.* The Sun's polar magnetic field, *Astrophys. J.*, **130**, 364 – 80, 1959.
11. *Vabcock H.W.* Zeeman effect in stellar spectra, *Astrophys. J.*, **105**, 105 – 19, 1947.
12. *Vabcock H.W., Vabcock H.D.* Mapping the magnetic fields of the Sun, *In The Sun*, ed. Kuiper G.R., Univ. of Chicago Press, pp. 704 – 10, 1953. [имеется перевод: Койпер Дж. Солнце. – М.: ИЛ, 1959.]
13. *Vabcock H.W., Vabcock H.D.* The Sun's magnetic field 1952 – 1954, *Astrophys. J.*, **121**, 349 – 66, 1955.
14. *Vackus G.E.* The axisymmetric self-excited fluid dynamo, *Astrophys. J.*, **125**, 500 – 24, 1957.

15. *Backus G.E.* A class of self-sustaining dissipative spherical dynamos, *Ann. Phys.*, **4**, 372 – 447, 1958.
16. *Backus G.E., Chandrasekhar S.* On Cowling's theorem on the impossibility of self-maintained axisymmetric homogeneous dynamos, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **42**, 105 – 9, 1956.
17. *Barracough D.R., Harwood J.M., Leaton B.R., Malin S.C.R.* A model of the geomagnetic field at epoch 1975, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **43**, 645 – 59, 1975.
18. *Batchelor G.K.* On the spontaneous magnetic field in a conducting liquid in turbulent motion, *Proc. Roy. Soc.*, **A201**, 405 – 16, 1950.
19. *Batchelor G.K.* The effect of homogeneous turbulence on material lines and surfaces, *Proc. Roy. Soc.*, **A213**, 349 – 66, 1952.
20. *Batchelor G.K.* The theory of homogeneous turbulence, Cambridge Univ. Press, 1953.
21. *Batchelor G.K.* Steady laminar flow with closed streamlines at large Reynolds numbers, *J. Fluid Mech.*, **1**, 177 – 90, 1956.
22. *Batchelor G.K.* Small-scale variation of convected quantities like temperature in turbulent fluid, 1. General discussion and the case of small conductivity, *J. Fluid Mech.*, **5**, 113 – 33, 1959.
23. *Betchov R.* Semi-isotropic turbulence and helicoidal flows, *Phys. Fluids*, **4**, 925 – 6, 1961.
24. *Bolt B.A., Qamar A.* Upper bound to the density jump at the boundary of the earth's inner core, *Nature*, **228**, 148 – 50 (1970).
25. *Bondi H., Gold T.* On the generation of magnetism by fluid motion, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **110**, 607 – 11, 1950.
26. *Брагинский С.И.* Самовозбуждение магнитного поля при движении высокопроводящей жидкости, *ЖЭТФ*, **48**, 1084, 1964.
27. *Брагинский С.И.* Теория гидромагнитного динамо, *ЖЭТФ*, **48**, 2178, 1964.
28. *Брагинский С.И.* Кинематические модели земного магнитного динамо, *Геомагн. аэрон.*, **4**, 572 – 83, 1964.
29. *Брагинский С.И.* Магнитогидродинамика земного ядра, *Геомагн. аэрон.* **4**, 698 – 711, 1964.
30. *Брагинский С.И.* Магнитные волны в земном ядре, *Геомагн. аэрон.* **7**, 851 – 9, 1967.
31. *Брагинский С.И.* Крутильные магнитогидродинамические колебания в земном ядре и изменения длины суток, *Геомагн. аэрон.*, **10**, 1 – 8, 1970.
32. *Брагинский С.И.* Почти аксиально-симметричная модель гидромагнитного динамо Земли, I., *Геомагн. аэрон.*, **15**, 149 – 56, 1975.
33. *Брагинский С.И., Николайчик В.В.* Estimation of the electrical conductivity of the Earth's lower mantle from the lag of an electromagnetic signal, *Phys. Solid Earth*, **9**, 601 – 2, 1973.

34. *Brissaud A., Frisch U., Léorat J., Lesieur M., Mazure A.* Helicity cascades in fully developed isotropic turbulence, *Phys. Fluids*, **16**, 1366 – 7, 1973.
35. *Brown L.W.* Saturn radio emission near 1 MHz, *Astrophys. J.*, **198**, L89 – 92, 1975.
36. *Bullard E. C.* The stability of a homopolar dynamo, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **51**, 744 – 60, 1955.
37. *Bullard E.C.* Reversals of the Earth's magnetic field, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 263**, 481 – 524, 1968.
38. *Bullard E.C., Freedman C., Gellman H., Nixon J.* The westward drift of the Earth's magnetic field, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 243**, 67 – 92, 1950.
39. *Bullard E.C., Gellman H.* Homogeneous dynamos and terrestrial magnetism, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 247**, 213 – 78, 1954.
40. *Bullard E.C., Gubbins D.* Generation of magnetic fields by fluid motions of global scale, *Geophys. Fluid Dyn.*, **8**, 43 – 56, 1977.
41. *Bumba V., Kleczek J.* Proceedings of the IAU Symposium 71, Basic Mechanisms of Solar Activity, Prague, 1976.
42. *Busse F.H.* Steady fluid flow in a precessing spheroidal shell, *J. Fluid Mech.*, **33**, 739 – 51, 1968.
43. *Busse F.H.* Thermal instabilities in rapidly rotating systems, *J. Fluid Mech.*, **44**, 441 – 50, 1970.
44. *Busse F.H.* Generation of magnetic fields by convection, *J. Fluid Mech.*, **57**, 529 – 44, 1973.
45. *Busse F.H.* A necessary condition for the geodynamo, *J. Geophys. Res.* **80**, 278 – 80, 1975.
46. *Busse F.H.* A model of the geodynamo, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **42**, 437 – 459, 1975.
47. *Busse F.H.* Generation of planetary magnetism by convection, *Phys. Earth Planet Inter.*, **12**, 350 – 8, 1976.
48. *Busse F.H., Carrigan C.R.* Convection induced by centrifugal buoyancy, *J. Fluid Mech.*, **62**, 579 – 92, 1974.
49. *Chandrasekhar S.* On force-free magnetic fields, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **42**, 1 – 5, 1956.
50. *Chandrasekhar S.* Hydrodynamic and hydromagnetic stability, Clarendon Press, Oxford, 1961.
51. *Chapman S., Bartels J.* Geomagnetism: vol. I, Geomagnetic and related phenomena; vol. II, Analysis of the data and physical theories, Clarendon Press, Oxford, 1940.
52. *Childress S.* New solutions of the kinematic dynamo problem, *J. Math. Phys.*, **11**, 3063 – 76, 1970.

53. *Childress S., Soward A.M.* Convection-driven hydromagnetic dynamo, *Phys. Rev. Lett.*, **29**, 837 – 9, 1972.
54. *Clarke A.Jr.* Production and dissipation of magnetic energy by differential fluid motion, *Phys. Fluids*, **7**, 1299 – 305, 1964.
55. *Clarke A.Jr.* Some exact solutions in magnetohydrodynamics with astrophysical applications, *Phys. Fluids*, **8**, 644 – 9, 1965.
56. *Cook A.E., Roberts P.H.* The Rikitake two-disc dynamo system, *Proc. Camb. Phil. Soc.*, **68**, 547 – 69, 1970.
57. *Cowling T.G.* The magnetic field of sunspots, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **94**, 39 – 48, 1934.
58. *Cowling T.G.* Magnetohydrodynamics, Interscience, New York, 1957. (Имеется перевод: *Каулин Т.* Магнитная гидродинамика. – М.: ИЛ, 1959.)
59. *Cowling T.G.* The dynamo maintenance of steady magnetic fields, *Q.J. Mech. Appl. Math.*, **10**, 129 – 36, 1957.
60. *Cowling T.G.* Magnetohydrodynamics, Adam Hilger Ltd., 1975.
61. *Cowling T.G.* Sunspots and the solar cycle, *Nature*, **255**, 189 – 90, 1975.
62. *Cox A.* Geomagnetic reversals, *Science*, **163**, 237 – 245, 1969.
63. *Cox A.* Geomagnetic reversals: characteristic time constants and stochastic processes, *In Report on Int. Cong. on Core-Mantle interface*, *Trans. Am. Geophys. Un.*, **53**, 613, 1972.
64. *Deinzer W., von Kusserow H.U., Stix M.* Steady and oscillatory $\alpha\omega$ -dynamoes, *Astron. Astrophys.*, **36**, 69 – 78, 1974.
65. *Долминов Ш.Ш., Ерошенко Е.Г., Жузгов Л.Н.* Magnetic field in the very close neighbourhood of Mars according to data from the Mars 2 and Mars 3 spacecraft, *J. Geophys. Res.*, **78**, 4779 – 86. (1973).
66. *Дробышевский Э.М., Юферев В.С.* Topological pumping of magnetic flux by three-dimensional convection, *J. Fluid Mech.*, **65**, 33 – 44, 1974.
67. *Durney B.R.* On the Sun's differential rotation: its maintenance by large-scale meridional motions in the convective zone, *Astrophys. J.*, **190**, 211 – 21, 1974.
68. *Durney B.R.* On theories of solar rotation, *Proc. IAU Symp. 71, Basic Mechanisms of Solar Activity*, ed. Bumba V., Kleczek J., Prague, 1976. Имеется перевод: Проблемы солнечной активности/Под ред. Бумбы В., Клечка И. – М.: Мир, 1979.]
69. *Eddy J.A.* The Maunder minimum, *Science*, **192**, 1189 – 202, 1976.
70. *Eddy J.A., Gilman P.A., Trotter D.E.* Solar radiation during the Maunder minimum, *Solar Phys.*, **46**, 3 – 14, 1976.

71. *Elsasser W.M.* Induction effects in terrestrial magnetism, I. Theory, *Phys. Rev.*, **69**, 106 – 16, 1946.
72. *Eltayeb I.A.* Hydromagnetic convection in a rapidly rotating fluid layer, *Proc. Roy. Soc.*, **A 326**, 229 – 54, 1972.
73. *Eltayeb I.A.* Overstable hydromagnetic convection in a rotating fluid layer, *J. Fluid. Mech.*, **71**, 161 – 79, 1975.
74. *Ferraro V.C.A.* The non-uniform rotation of the Sun and its magnetic field, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **97**, 458 – 72, 1973.
75. *Frisch U., Pouquet A., Léorat J., Mazure A.* Possibility of an inverse cascade of magnetic helicity in magnetohydrodynamic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **68**, 769 – 78, 1975.
76. *Гайлитис А.* Самовозбуждение магнитного поля парой кольцевых вихрей, *Магнитная гидродинамика*, **6**, 19 – 22, 1970.
77. *Gibson R.D.* The Herzenberg dynamo, I., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **21**, 243 – 55, 1968.
78. *Gibson R.D.* The Herzenberg dynamo, II., *Q. J. Mech. Appl. Math.*, **21**, 257 – 87, 1968.
79. *Gibson R.D., Roberts P.H.* Some comments on the theory of homogeneous dynamos, *In Magnetism and the Cosmos*, ed. *Hindmarsh W. R., Lowes F.J., Roberts P.R., Runcorn S.K.* Oliver and Boyd Ltd., Edinburgh, pp. 108 – 20, 1967.
80. *Gibson R.D., Roberts P.H.* The Bullard – Gellman dynamo, *In The Application of Modern Physics to the Earth and Planetary Interiors*, ed. *Runcorn S.K.*, Wiley, Interscience, pp. 577 – 601, 1969.
81. *Gilman P.A.* Instability of magnetohydrostatic stellar interiors from magnetic buoyancy, I., *Astrophys. J.*, **162**, 1019 – 29, 1970.
82. *Голыцын Г.С.* Флуктуации магнитного поля и плотности тока в турбулентном потоке слабо проводящей жидкости, *ДАН СССР*, **132**, 315 – 8, 1960.
83. *Gough D.O., Weiss N.O.* The calibration of stellar convection theories, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **176**, 589 – 607, 1976.
84. *Greenspan H.* The theory of rotating fluids, Cambridge Univ. Press, 1968. [Имеется перевод: Гринспен Г., Теория вращающихся жидкостей. – М.: Мир, 1969.]
85. *Greenspan H.* On α -dynamos, *Studies in Appl. Math.*, **13**, 35 – 43, 1974.
86. *Gubbins D.* Numerical solutions of the kinematic dynamo problem, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 274**, 493 – 521, 1973.
87. *Hale G.E.* On the probable existence of a magnetic field in sunspots, *Astrophys. J.*, **28**, 315 – 43, 1908.
88. *Herzenberg A., Lowes F.J.* Electromagnetic induction in rotating conductors, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 249**, 507 – 84, 1957.

89. *Herzenberg A.* Geomagnetic dynamos, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **250**, 543 – 85, 1958.
90. *Hide R.* The hydrodynamics of the Earth's core, *In Physics and Chemistry of the Earth 1*, ed. Ahrens L.H., Rankama K., Runcorn S.K., Pergamon Press, London, pp. 94 – 137, 1956.
91. *Hide R.* Interaction between the Earth's liquid core and solid mantle, *Nature*, **222**, 1055 – 6, 1969.
92. *Hide R.* On the Earth's core-mantle interface, *Q. J. Roy. Met. Soc.* **96**, 579 – 90, 1970.
93. *Hide R.* Jupiter and Saturn, *Proc. Roy. Soc. A* **336**, 63 – 84 (1974).
94. *Hide R.*, A note on helicity, *Geophys. Fluid Dyn.*, **7**, 157 – 61, 1976.
95. *Hide R., Malin S.R.C.* Novel correlations between global features of the Earth's gravitational and magnetic fields, *Nature*, **225**, 605 – 9, 1970.
96. *Hide R., Malin S.R.C.* Novel correlations between global features of the Earth's gravitational and magnetic fields: further statistical considerations, *Nature*, **230**, 63, 1971.
97. *Hide R., Roberts P.H.* The origin of the main geomagnetic field, *In Physics and Chemistry of the Earth 4*, ed. Ahrens L. H., Rankama K., Runcorn S.K., Pergamon Press, London., pp. 25 – 98, 1961.
98. *Higgins G.H., Kennedy G.C.* The adiabatic gradient and the melting point gradient in the core of the Earth, *J. Geophys. Res.*, **76**, 1870 – 8, 1971.
99. *Howard R.* Studies of solar magnetic fields, I. The average field strengths, *Solar Phys.*, **38**, 283 – 99, 1974.
100. *Howard R., Harvey J.* Spectroscopic determinations of solar rotation, *Solar Phys.*, **12**, 23 – 51, 1970.
101. *Ibbetson A., Tritton D.J.* Experiments on turbulence in a rotating fluid, *J. Fluid Mech.*, **68**, 639 – 72, 1975.
102. *Irving E.* Paleomagnetism, Wiley, New York, 1964.
103. *Jacobs J.A.* The Earth's core, Academic Press, 1975. (Имеется перевод: *Джекобс Дж.* Земное ядро. – М.: Мир, 1979.)
104. *Jacobs J.A.* Reversals of the Earth's magnetic field, *Phys. Rep. (Sec. C of Phys. Letters)* **26**, 183 – 225, 1976.
105. *Jepps S.A.* Numerical models of hydromagnetic dynamos, *J. Fluid Mech.*, **67**, 625 – 46, 1975.
106. *Kennedy G.C., Higgins G.H.* The core paradox, *J. Geophys. Res.*, **78**, 900 – 4, 1973.
107. *Khan M.A.* Correlation function in geophysics, *Nature*, **230**, 57 – 61, 1971.
108. *Колмогоров А.Н.* Локальная структура турбулентности в несжимаемой вязкой жидкости для очень больших чисел Рейнольдса, *ДАН СССР*, **30**, 299 – 303, 1941.

109. *Kovasznay L.S.G.* Plasma turbulence, *Rev. Mod. Phys.*, **32**, 815 – 22, 1960.
110. *Kraichnan R.H.* Inertial-range spectrum of hydromagnetic turbulence, *Phys. Fluids*, **8**, 1385 – 87, 1965.
111. *Kraichnan R.H.* Helical turbulence and absolute equilibrium, *J. Fluid Mech.*, **59**, 745 – 52, 1973.
112. *Kraichnan R.H.* Diffusion of weak magnetic fields by isotropic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **75**, 657 – 76, 1976.
113. *Kraichnan R.H.* Diffusion of passive-scalar and magnetic fields by helical turbulence, *J. Fluid Mech.*, **77**, 753 – 68, 1976.
114. *Kraichnan R.H.*, *Nagarajan S.* Growth of turbulent magnetic fields, *Phys. Fluids*, **10**, 859 – 70, 1967.
115. *Krause F.*, *Steenbeck M.* Some simple models of magnetic field regeneration by non-mirror-symmetric turbulence, *Z. Naturforsch.* **22 a**, 671 – 5 (1967), См. перевод на англ. яз. Roberts and Stix pp. 81 – 95. 1971.
116. *Kuiper G.P.* (ed.) *The Sun*, Univ. of Chicago Press, Chicago, Illinois, 1953. [Имеется перевод: Солнце/Под ред. Койпера Дж. – М.: ИЛ, 1959.]
117. *Kumar S.*, *Roberts P.H.* A three-dimensional kinematic dynamo, *Proc. Roy. Soc.*, A **344**, 235 – 58, 1975.
118. *Landstreet J.D.*, *Angel J.R.P.* The polarisation spectrum and magnetic field strength of the White Dwarf Grw +70°8247, *Astrophys. J.*, **196**, 819 – 25, 1974.
119. *Larmor J.* How could a rotating body such as the Sun become a magnet? *Rep. Brit. Assoc. Adv. Sci.*, 1919, 159 – 60, 1919.
120. *Lehnert B.* Magnetohydrodynamic waves under the action of the Coriolis force, *Astrophys. J.*, **119**, 647 – 54, 1954.
121. *Léorat J.* La turbulence magnétohydrodynamique hélicitaire et la génération des champs magnétiques a grande échelle, Thèse doctoral, Univ. de Paris VII, 1975.
122. *Levy E.H.* Effectiveness of cyclonic convection for producing the geomagnetic field, *Astrophys. J.*, **171**, 621 – 33, 1972.
123. *Ляпунов А.М.* Problème generale de la stabilité du mouvement, *Ann. Math. Studies*, **17**, Princeton Univ. Press, 1974.
124. *Liepmann H.* Aspects of the turbulence problem, *Zeit. Ang. Math. Phys.*, **3**, 321 – 42, 1952.
125. *Lighthill M.J.* Introduction to Fourier analysis and generalised functions, Cambridge Univ. Press, 1959.
126. *Lilley F.E.M.* On kinematic dynamos, *Proc. Roy. Soc.*, A **316**, 153–67, 1970.
127. *Loper D.E.* Torque balance and energy budget for the precessionally driven dynamo, *Phys. Earth Planet. Inter.* **11**, 43 – 60, 1975.

128. *Lortz D.* Impossibility of steady dynamos with certain symmetries, *Phys. Fluids*, **11**, 913 – 15, 1968.
129. *Lowes F.J.* Significance of the correlation between spherical harmonic fields, *Nature*, **230**, 61 – 2, 1971.
130. *Lowes F.J.* Spatial power spectrum of the main geomagnetic field, and extrapolation to the core, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* **36**, 717 – 30, 1974.
131. *Lowes F.J., Wilkinson I.* Geomagnetic dynamo: a laboratory model, *Nature*, **198**, 1158 – 60, 1963.
132. *Lowes F.J., Wilkinson I.* Geomagnetic dynamo: an improved laboratory model, *Nature*, **219**, 717 – 718, 1968.
133. *Lüst R., Schlüter A.* Kraftfreie Magnetfelder, *Z. Astrophys.* **34**, 263 – 82, 1954.
134. *Malkus W.V.R.* Precessional torques as the cause of geomagnetism, *J. Geophys. Res.*, **68**, 2871 – 86, 1963.
135. *Malkus W.V.R.* Precession of the Earth as the cause of geomagnetism, *Science*, **160**, 259 – 64, 1968.
136. *Malkus W.V.R., Proctor M.R.E.* The macrodynamics of α -effect dynamos in rotating fluids, *J. Fluid Mech.*, **67**, 417 – 44, 1975.
137. *Malkus W.V.R., Veronis G.* Finite amplitude convection, *J. Fluid Mech.*, **4**, 225 – 60, 1958.
138. *Maunder E.W.* Note on the distribution of sunspots in heliographic latitude, 1874 – 1902, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **64**, 747 – 61, 1904.
139. *Maunder E.W.* Distribution of sunspots in heliographic latitude, 1874 – 1913, *Mon. Not. Roy. Astr. Soc.*, **74**, 112 – 16, 1913.
140. *Mestel L.* Stellar magnetism, *In Plasma Astrophysics*, ed. Sturrock P., Acad. Press, London, pp. 185 – 228, 1967.
141. *Moffatt H.K.* The degree of knottedness of tangled vortex lines, *J. Fluid Mech.*, **35**, 117 – 29, 1969.
142. *Moffatt H.K.* Turbulent dynamo action at low magnetic Reynolds number, *J. Fluid Mech.*, **41**, 435 – 52, 1970.
143. *Moffatt H.K.* Dynamo action associated with random inertial waves in a rotating conducting fluid, *J. Fluid Mech.*, **44**, 705 – 19, 1970.
144. *Moffatt H.K.* An approach to a dynamic theory of dynamo action in a rotating conducting fluid, *J. Fluid Mech.*, **53**, 385 – 99, 1972.
145. *Moffatt H.K.* (ed). Report on the Nato Advanced Study Institute on magnetohydrodynamic phenomena in rotating fluids, *J. Fluid Mech.*, **57**, 625 – 49, 1973.
146. *Moffatt H.K.* The mean electromotive force generated by turbulence in the limit of perfect conductivity, *J. Fluid Mech.*, **65**, 1 – 10, 1974.
147. *Moffatt H.K.* Generation of magnetic fields by fluid motion, *Adv. Appl. Mech.*, **16**, 119 – 81, 1976.

148. *Moffatt H.K., Dillon R.F.* The correlation between gravitational and geomagnetic fields caused by interaction of the core fluid motion with a bumpy core-mantle interface, *Phys. Earth Planet. Inter.* **13**, 67 – 78, 1976.
149. *Munk W H., MacDonald G.J.F.* The rotation of the Earth, Cambridge Univ. Press, 1960.
150. *Murthy V.R., Hall H.T.* The chemical composition of the Earth's core: possibility of sulphur in the core, *Phys. Earth Planet. Inter.* **2**, 276 – 82, 1970.
151. *Ness N.F., Behannon K.W., Lepping R.P., Whang Y.C.*, The magnetic field of Mercury, I., *J. Geophys. Res.*, **80**, 2708 – 16, 1975.
152. *Orszag S.A.* Analytical theories of turbulence, *J. Fluid Mech.*, **41**, 363 – 86, 1970.
153. *Orszag S.A.* Lectures on the statistical theory of turbulence, *In Fluid Dynamics*, Les Houches 1973, ed. Balian R., Peube J.L., Gordon and Breach, pp. 235 – 374, 1977.
154. *Parker E.N.* The formation of sunspots from the solar toroidal field, *Astrophys. J.*, **121**, 491 – 507, 1955.
155. *Parker E.N.* Hydromagnetic dynamo models, *Astrophys. J.*, **122**, 293 – 314, 1955.
156. *Parker E.N.* Kinematical hydromagnetic theory and its applications to the low solar photosphere, *Astrophys. J.*, **138**, 552 – 575, 1963.
157. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, I. The dynamo equations, *Astrophys. J.*, **162**, 665 – 73, 1970.
158. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, II. The galactic field, *Astrophys. J.*, **163**, 255 – 78, 1971.
159. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, III. Turbulent diffusion of fields and efficient dynamos, *Astrophys. J.*, **163**, 279 – 85, 1971.
160. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, IV. The solar and terrestrial dynamos, *Astrophys. J.*, **164**, 491 – 509, 1971.
161. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, V. Behaviour at large dynamo numbers, *Astrophys. J.*, **165**, 139 – 46, 1971.
162. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, VI. Periodic modes of the galactic field, *Astrophys. J.*, **166**, 295 – 300, 1971.
163. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, VIII. Dynamical considerations, *Astrophys. J.*, **168**, 239 – 49, 1971.

164. *Parker E.N.* The generation of magnetic fields in astrophysical bodies, X. Magnetic buoyancy and the solar dynamo, *Astrophys. J.*, **198**, 205 – 9, 1975.
165. *Parker R.L.* Reconnection of lines of force in rotating spheres and cylinders, *Proc. Roy. Soc. A* **291**, 60 – 72, 1966.
166. *Peckeris C.L.* Stationary spherical vortices in a perfect fluid, *Proc. Nat. Acad. Sci.*, **69**, 2460 – 2, 1972.
167. *Peckeris C.L.*, *Accad Y.*, *Shkoller B.* Kinematic dynamos and the Earth's magnetic field, *Phil. Trans. Roy. Soc. A* **275**, 425 – 461, 1973.
168. *Пичахчи Л.Д.* Теория гидромагнитного динамо, *ЖЭТФ*, **50**, 818 – 20, 1966.
169. *Piddington J.H.* The origin and form of the galactic magnetic field, I. Parker's dynamo model, *Cosmic Electrodynamics*, **3**, 60 – 70, 1972.
170. *Piddington J.H.* The origin and form of the galactic magnetic field, II. The primordial-field model, *Cosmic Electrodynamics*, **3**, 129 – 46, 1972.
171. *Pouquet A.*, *Frisch U.*, *Léorat J.* Strong MHD turbulence and the nonlinear dynamo effect, *J. Fluid Mech.*, **77**, 321 – 54, 1976.
172. *Pouquet A.*, *Patterson G.S.* Numerical simulation of helical magnetohydrodynamic turbulence, *J. Fluid Mech.*, **85**, 305 – 23, 1978.
173. *Preston G.W.* Studies of stellar magnetism – past, present and future, *In Proc. AAS – NASA Symp. The Magnetic and Related Stars*, ed. Cameron R.C., Mono Book Corp., Baltimore Md., pp. 3 – 28, 1967.
174. *Proctor M.R.E.* Non-linear mean field dynamo models and related topics, Ph. D. Thesis, Cambridge University, 1975.
175. *Proctor M.R.E.* Numerical solutions of the nonlinear α -effect dynamo equations, *J. Fluid Mech.*, **80**, 769 – 784, 1977.
176. *Proctor M.R.E.* On the eigenvalues of kinematic α -effect dynamos, *Astron. Nachrichten*, **298**, 19 – 25, 1977.
177. *Proctor M.R.E.* The role of mean circulation in parity selection by planetary magnetic fields, *Geophys. Astrophys. Fluid Dyn.* **8**, 311 – 324, 1977.
178. *Rädler K.-H.* On the electrodynamics of turbulent fluids under the influence of Coriolis forces, *Monats. Dt. Acad. Wiss.* **11**, 194 – 201, 1969.
179. *Rädler K.-H.* A new turbulent dynamo, I. *Monats. Dt. Acad. Wiss.*, **11**, 272 – 9, 1969.
180. *Rikitake T.* Oscillations of a system of disk dynamos, *Proc. Camb. Phil. Soc.* **54**, 89 – 105, 1958.
181. *Robbins K.A.* A moment equation description of magnetic reversals in the Earth, *Proc. Nat. Acad. Sci., USA*, **73**, 4297 – 4301, 1976.
182. *Roberts G.O.* Spatially periodic dynamos, *Phil. Trans. Roy. Soc., A* **266**, 535 – 58, 1970.

183. *Roberts G.O.* Dynamo action of fluid motions with two-dimensional periodicity, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 271**, 411–54, 1972.
184. *Roberts P.H.* Dynamo theory, *In Mathematical problems in the Geophysical Sciences*, ed. Reid W.H., Am. Math. Soc. Prov., R.I., pp. 129 – 206, 1971.
185. *Roberts P.H.* Kinematic dynamo models, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 272**, 663 – 98, 1972.
186. *Roberts P.H.* Electromagnetic core-mantle coupling, *J. Geomagnetic Geoelectr.* **24**, 231 – 59, 1972.
187. *Roberts P.H.*, *Soward A.M.* Magneto-hydrodynamics of the Earth's core, *Ann. Rev. Fluid Mech.*, **4**, 117 – 54, 1972.
188. *Roberts P.H.*, *Stewartson K.* On finite amplitude convection in a rotating magnetic system. *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 277**, 287 – 315, 1974.
189. *Roberts P.H.*, *Stewartson K.* On double roll convection in a rotating magnetic system, *J. Fluid Mech.*, **68**, 447 – 66, 1975.
190. *Roberts P.H.*, *Stix M.* The turbulent dynamo: a translation of a series of papers by F. Krause, K. – H. Rädler and M. Steenbeck, *Tech. Note 60*, NCAR, Boulder, Colorado, 1971.
191. *Roberts P.H.*, *Stix M.* α -effect dynamos, by the Bullard – Gellman formalism, *Astron. Astrophys.*, **18**, 453 – 66, 1972.
192. *Rochester M.G.* Geomagnetic core-mantle coupling, *J. Geophys. Res.*, **67**, 4833 – 6, 1962.
193. *Rochester M.G.*, *Jacobs J.A.*, *Smylie D.E.*, *Chong K.F.* Can precession power the geomagnetic dynamo? *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **43**, 661 – 78, 1975.
194. *Saffman P.G.* On the fine-scale structure of vector fields convected by a turbulent fluid, *J. Fluid Mech.*, **16**, 545 – 72, 1963.
195. *Schlüter A.*, *Biermann L.* Interstellare Magnetfelder, *Z. Naturforsch.*, **5a**, 237 – 51, 1950.
196. *Smith E.*, *Davis L.*, *Jones D.E.*, *Colburn D.S.*, *Colemann P.J.*, *Dyal P.L.*, *Sonnett C.P.* Magnetic field of Jupiter and its interaction with the solar wind, *Science*, **183**, 305 – 6, 1974.
197. *Smoluchowski R.* Metallic interiors and magnetic fields of Jupiter and Saturn, *Astrophys. J.*, **166**, 435 – 9, 1971.
198. *Soward A.M.* A kinematic theory of large magnetic Reynolds number dynamos, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 272**, 431 – 62, 1972.
199. *Soward A.M.* A convection-driven dynamo I. The weak field case, *Phil. Trans. Roy. Soc.*, **A 275**, 611 – 51, 1974.
200. *Soward A.M.* Random waves and dynamo action, *J. Fluid Mech.*, **69**, 145 – 77, 1975.

201. *Steenbeck M., Kirko I.M., Gailitis A., Klawina A.P., Krause F., Laumanis I.J., Lielausis O.A.* An experimental verification of the α -effect, *Monats. Dt. Acad. Wiss.* **9**, 716 – 9, 1967.
202. *Steenbeck M., Krause F., Rädler K.-H.* A calculation of the mean electromotive force in an electrically conducting fluid in turbulent motion, under the influence of Coriolis forces, *Z. Naturforsch.*, **21 a**, 369 – 76, 1966.
203. *Steenbeck M., Krause F.* The generation of stellar and planetary magnetic fields by turbulent dynamo action, *Z. Naturforsch.*, **21 a**, 1285 – 96, 1966.
204. *Steenbeck M., Krause F.* On the dynamo theory of stellar and planetary magnetic fields, I. A.C. dynamos of solar type, *Astron. Nachr.*, **291**, 49 – 84, 1969.
205. *Steenbeck M., Krause F.* On the dynamo theory of stellar and planetary magnetic fields, II. D.C. dynamos of planetary type, *Astron. Nachr.*, **291**, 271 – 86, 1969.
206. *Stenflo J.O.* Small-scale solar magnetic fields, *Proc. IAU Symp. 71, Basic Mechanisms of Solar Activity*, ed. Bumba V., Kleczek J., Prague, 1976. (Имеется перевод; см. [68].)
207. *Stewartson K., Roberts P.H.* On the motion of a liquid in a spheroidal cavity of a precessing rigid body, *J. Fluid Mech.*, **17**, 1 – 20, 1963.
208. *Stix M.* Non-linear dynamo waves, *Astron. Astrophys.*, **20**, 9 – 12, 1972.
209. *Stix M.* Spherical $\alpha\omega$ -dynamos, by a variational method, *Astron. Astrophys.*, **24**, 275 – 81, 1973.
210. *Stix M.* The galactic dynamo, *Astron. Astrophys.*, **42**, 85 – 9, 1975.
211. *Stix M.* Differential rotation and the solar dynamo, *Astron. Astrophys.*, **47**, 243 – 54, 1976.
212. *Taylor G.I.* Diffusion by continuous movements, *Proc. Lond. Math. Soc.*, **A 20**, 196 – 211, 1921. (Collected papers, vol. II, ed. Batchelor G.K., Cambridge Univ. Press, 1960, pp. 172 – 184).
213. *Taylor J.B.* The magnetohydrodynamics of a rotating fluid and the Earth's dynamo problem, *Proc. Roy. Soc. A* **274**, 274 – 283, 1963.
214. *Toomre A.* On the coupling of the Earth's core and mantle during the 26000-year precession, *In The Earth – Moon system*, ed. Marsden B.G., Cameron A.G.W., Plenum, New York, pp. 33 – 45, 1966.
215. *Tough J.G.* Nearly symmetric dynamos, *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.* **13**, 393 – 6, 1967. См. также *Geophys. J. Roy. Astr. Soc.*, **15**, 343, 1967, где исправлены ошибки, содержащиеся в первой статье.
216. *Tough J.G., Gibson R.D.* The Braginskii dynamo, *In The application of modern physics to the Earth and planetary interiors*, ed.

- Runcorn S.K., Wiley-Interscience, London, New York, pp. 555 – 569, 1969.
217. *Townsend A.A.* Turbulent shear flow (2nd edn.), Cambridge Univ. Press, 1975.
218. *Urey H.C.* The Planets, Yale Univ. Press, 1952.
219. *Вайнштейн С.И., Зельдович Я.Б.*, Происхождение магнитных полей в астрофизике, УФН, **106**, 431 – 44, 1972.
220. *Veronis G.* Cellular convection with finite amplitude in a rotating fluid, J. Fluid Mech., **5**, 401 – 35, 1959.
221. *Warwick J.* Dynamic spectra of Jupiter's decametric emission, Astrophys. J., **137**, 41 – 60, 1963.
222. *Weir A.D.* Axisymmetric convection in a rotating sphere, I. Stress-free surface, J. Fluid Mech., **75**, 49 – 79, 1976.
223. *Weiss N.O.* The expulsion of magnetic flux by eddies, Proc. Roy. Soc., A **293**, 310 – 28, 1966.
224. *Weiss N.O.* The dynamo problem, Q. J. Roy. Astr. Soc., **12**, 432 – 46, 1971.
225. *Weiss N.O.* The pattern of convection in the Sun, Proc. IAU Symp. 71, Basic Mechanisms of Solar Activity, ed. Bumba V., Kleczek J., Prague, 1976 (см. [68]).
226. *Woltjer L.* A theorem on force-free magnetic fields, Proc. Nat. Acad. Sci., **44**, 489 – 91, 1958.
227. *Woltjer L.* Astrophysical evidence for strong magnetic fields, Ann. New York Acad. Sci., **257**, 76 – 9, 1975.
228. *Wrubel M.H.* On the decay of a primeval stellar magnetic field, Astrophys. J., **116**, 291 – 8, 1952.
229. *Yoshimura H.* A model of the solar cycle driven by the dynamo action of the global convection in the solar convective zone, Astrophys. J. Suppl., **29**, 467, 1975.
230. *Зельдович Я.Б.* Магнитное поле при двумерном движении проводящей турбулентной жидкости, ЖЭТФ, **31**, 154 – 156, 1956.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Альвена волны 244
нелинейное взаимодействие 246
- Ампера закон 33
- "Антидинамо" теорема 16
невозможность осесимметричного динамо 119 – 124
динамо для плоского двумерного движения 127 – 128
для чисто тороидального движения 124 – 127
- α^2 -динамо 202
в безграничном пространстве 202 – 205
в случае анизотропного α_{ij} 205 – 207
в сферической геометрии 207 – 211
с антисимметричным α 211 – 214
с постоянным α и β 202 – 211
создаваемое архимедовыми силами 303 – 312
численные методы исследования 212 – 214
- α_∞ -динамо 202
в неограниченном пространстве 214 – 217
переход в α^2 -динамо 241
с локализованными α и $\partial U/\partial z$ 217 – 219
с фазами выключения 233 – 234
численные исследования 234 – 242
- α -эффект 155 – 158
в лабораторном эксперименте 171 – 173
в пределе слабой диффузии 175 – 178
в пространственно-периодическом поле скорости 206 – 207
в случае неизотропного поля 158
в теории Брагинского 192 – 194
генерация полоидального поля 157, 231 – 233
для случайного поля скорости 169 – 173
для спирального волнового движения 166
модификация под действием силы Лоренца 251 – 255
роль диффузии 168
связь со спиральностью 157, 169

- Безразмерные числа
динамо-число 224, 235
Пекле число 58
Прандтля магнитное число
96, 290, 304
Рейнольдса магнитное число
57
Рэлея число 304
Экмана число 304
Бесселя функции 48 – 50
Бессилые поля 37 – 41, 202
Булларда – Геллмана формализм
17, 142 – 147
Буссинеска приближение 261,
263, 294
- Взаимная спиральность** 246, 291
Волны 247 – 251, 262 – 267
Выталкивание потока 67
 для горизонтального ряда
 вихрей 72
 меридиональной циркуляцией
 72 – 73
 скин-эффект 68
 тонкая структура солнечного
 поля 111
Вязкость 96, 103
- Галактическое динамо 14
 модель 222 – 231
Галилеева инвариантность 44
Геомагнитные элементы 88 – 90
- Диаграмма взаимодействия 145,
148
Динамическое равновесие 255 –
260, 299 – 303
Динамо 115, 118, 122, 126, 147 –
149
 создаваемые архимедовыми
 силами 303 – 312
- Дипольная симметрия 220, 221,
224, 234
Дипольный момент 35
 диффузное увеличение 51, 118
 осесимметричного поля 36
 поведение 50
 скорость изменения 117
Дисковое динамо 14, 312
Дифференциальное вращение 15,
63 – 70
Диффузии эффект 51, 75
Диффузия магнитная 45, 95, 103
- Земля**
 внутреннее строение 84, 93 – 96
 всплывание и осаждение в
 ядре 95, 150 – 151
 прецессия вектора угловой
 скорости 98 – 100
 продолжительность суток 95
 распределение плотности
 и температуры 93 – 94
 связь ядро – мантия 99, 273 –
 276
Земное магнитное поле 13, 81
 археомагнитные исследования
 92
 вековые вариации 91, 197
 корреляция с гравитационным
 полем 97 – 98, 274
 обращения полярности 23, 92,
 136, 312 – 318
 разложение по сферическим
 гармоникам 88 – 91
 "шатание" диполя 92
- Индукции уравнение 45
 лагранжево преобразование
 186 – 188
 полоидальная и тороидальная
 составляющие 60

- Инерционная область 278
 Каскад энергии 277 – 284
 Каулинга теорема 18, 119, 121 – 123, 146, 157, 183, 213
 Квадрупольная симметрия 221, 224, 235
 Квадрупольный момент 35, 36
 Клебша переменные 27
 Кориолиса сила 260 – 262
 Коши решение уравнения вихря 56
 Крамера теорема 164
 Лагранжевы переменные 41 – 45
 Магнитная плавучесть 104, 267 – 273
 Гилмана модель 270
 Магнитное поле
 бессиловое 37 – 41
 в нейтронных звездах 113
 осесимметричное 36
 планет 84 – 88
 представление 28 – 33
 разложение по мультиполям 34 – 36
 структурные свойства 24 – 88
 Магнитные звезды 112 – 113
 Магнитный поток 25
 вмороженность 53
 геометрическая накачка 83
 изменение 43
 сохранение жгута 58 – 60
 топологическая накачка 79 – 83
 Магнитострофический баланс сил 251, 270, 274, 300, 312
 Маундера диаграмма 107, 237 – 238
 Меридиональная циркуляция 72, 120, 216, 235
 Оператор количества движения 29 – 30
 Осесимметричные поля 31 – 32
 Отражательная симметрия 16, 19, 28, 156, 164, 273
 Периоды покоя ("выключения" поля) 21, 147 – 149, 233 – 234
 Рёдлера эффект 160
 Роторные динамо 20, 128 – 136
 Свободно затухающие моды 46 – 52
 Сглаживание первого порядка 161
 ограничения 170
 при определении α_{ij} 169 – 173
 β_{ijk} 173 – 174
 условие справедливости 161, 168
 Силовая функция 32, 62
 Силовые линии 25
 растягивание 54
 сцепления 26, 38, 41
 узлы 27, 41
 Солнечные пятна 16, 101, 103 – 107, 237
 Солнце 13
 грануляция 102
 дифференциальное вращение 102, 240
 магнитное поле 101 – 113, 239
 Спиральность 26 – 28
 в магнитострофических волнах 267
 генерация 260 – 262
 максимальная 248
 сохранение 54 – 55
 Средняя электродвижущая сила 150

- для почти прямолинейного движения 192
для слабых осесимметричных систем 184
зависимость от среднего поля 153 – 155
Стокса оператор 62
Схема замыкания EDQNM 284, 288
- Топологическая накачка** 79 – 83
Турбулентность 150 – 153
 изотропная 155
 осесимметричная 159
 спиральная спектральная функция 166
 энергетическая спектральная функция 163, 166
- Фарадея закон индукции** 43
- Циклоническая турбулентность** 20, 157 – 158
- Электропроводность среды** 44
 ядра и нижней мантии Земли 95
- Эффективные переменные**
 в декартовых координатах 188 – 190
 для почти осесимметричных течений 194
 сшивание с внешним полем 197
- Юпитер** 13
 внутреннее строение 85 – 87
 магнитное поле 84

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ К РУССКОМУ ПЕРЕВОДУ	5
ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА К РУССКОМУ ИЗДАНИЮ	9
ПРЕДИСЛОВИЕ	11
Глава 1 ВВЕДЕНИЕ И ИСТОРИЯ ПРОБЛЕМЫ	13
Глава 2 ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ МАГНИТНОЙ КИНЕМАТИКИ	24
2.1. Структурные свойства \mathbf{B} -поля	24
2.2. Представления магнитного поля	28
2.3. Соотношения между электрическим током и магнитным полем	33
2.4. Бессиловые поля	37
2.5. Лагранжевы переменные и эволюция магнитного поля	41
2.6. Кинематически возможные поля скоростей	45
2.7. Свободно затухающие моды	46
Глава 3 ПЕРЕНОС, ИСКРИВЛЕНИЕ И ДИФФУЗИЯ МАГНИТНОГО ПОЛЯ	53
3.1. Теорема Альвена и ее следствия	53
3.2. Аналогия с вихрем	56
3.3. Аналогия со скалярным переносом	58
3.4. Сохранение жгута магнитных силовых линий при течении с постоянной скоростью деформации	58
3.5. Пример ускоренной омической диффузии	60
3.6. Уравнение для векторного потенциала и силовой функции при наличии симметрии	60
3.7. Искажение поля дифференциальным вращением	63
3.8. Влияние дифференциального вращения, зависящего от одной координаты, на первоначально однородное поле	64
3.9. Выталкивание силовых линий обычными течениями с замкнутыми линиями тока	71

3.10. Выталкивание полоидальных полей меридиональной циркуляцией	72
3.11. Генерация тороидального поля дифференциальным вращением	73
3.12. Топологическая накачка магнитных силовых линий	79
Глава 4 МАГНИТНОЕ ПОЛЕ ЗЕМЛИ	84
4.1. Магнитные поля планет	84
4.2. Разложение магнитного поля Земли по сферическим гармоникам	88
4.3. Долгопериодические вариации дипольного поля	91
4.4. Параметры и физическое состояние нижней мантии и ядра	93
4.5. Необходимость теории динамо для объяснения магнитного поля Земли	96
4.6. Поверхность раздела ядро — мантия	97
4.7. Прецессия вектора угловой скорости Земли	98
Глава 5 СОЛНЕЧНОЕ МАГНИТНОЕ ПОЛЕ	101
5.1. Введение	101
5.2. Наблюдаемые поля скоростей	102
5.3. Солнечные пятна и солнечный цикл	103
5.4. Общее полоидальное магнитное поле Солнца	107
5.5. Магнитные звезды	112
Глава 6 ТЕОРИЯ ЛАМИНАРНОГО ДИНАМО	114
6.1. Формальная постановка кинематической задачи динамо	114
6.2. Ограничение на скорость деформации как критерий динамо	116
6.3. Скорость изменения дипольного момента	117
6.4. Невозможность осесимметричного динамо	119
6.5. Доказательство Каулинга, в котором используется понятие нейтральной точки	121
6.6. Некоторые замечания к случаю $\mathbf{V} \cdot \text{rot} \cdot \mathbf{V} \equiv 0$	123
6.7. Невозможность динамо для чисто тороидального движения	124
6.8. Невозможность динамо для плоского двумерного движения	127
6.9. Роторные динамо	128
6.10. Динамо, связанное с парой кольцевых вихрей	136
6.11. Формализм Булларда — Геллмана	142
6.12. Динамо Бэкаса с "выключением" поля скорости	147
Глава 7 СРЕДНЯЯ ЭЛЕКТРОДВИЖУЩАЯ СИЛА, ГЕНЕРИРУЕМАЯ СЛУЧАЙНЫМИ ДВИЖЕНИЯМИ	150
7.1. Турбулентность и случайные волны	150
7.2. Зависимость \mathcal{E} от \mathbf{V}_0 в линейном приближении	153
7.3. α -эффект	155
7.4. Эффекты, связанные с коэффициентом β_{ijk}	158
7.5. Сглаживание первого порядка	161
7.6. Спектральный тензор стационарного случайного векторного поля	162

7.7. Определение α_{ij} для спирального волнового движения	166
7.8. Определение α_{ij} для случайного поля скорости \mathbf{v} в приближении сглаживания первого порядка	169
7.9. Определение β_{ijk} в приближении сглаживания первого порядка	173
7.10. Лагранжев подход в пределе слабой диффузии	174
7.11. Влияние флуктуаций спиральности на эффективный коэффициент турбулентной диффузии	179
Глава 8 ТЕОРИЯ БРАГИНСКОГО	
ДЛЯ СЛАБОАСИММЕТРИЧНЫХ СИСТЕМ	183
8.1. Введение	183
8.2. Лагранжево преобразование уравнения индукции при $\lambda = 0$	186
8.3. Эффективные переменные в декартовых координатах	188
8.4. Лагранжево преобразование, включающее слабые диффузионные эффекты	190
8.5. Уравнения динамо для почти прямолинейного движения	192
8.6. Соответствующие результаты для почти осесимметричных течений	193
8.7. Ограниченность псевдолагранжева подхода	195
8.8. Условия сшивания и внешнее поле	197
Глава 9 СТРУКТУРА И РЕШЕНИЯ	
УРАВНЕНИЙ ДИНАМО	200
9.1. Модели динамо типа α^2 и $\alpha\omega$	200
9.2. α^2 -динамо в безграничном пространстве	202
9.3. Решения в безграничном пространстве с анизотропным α_{ij}	205
9.4. α^2 -динамо в сферической геометрии	207
9.5. α^2 -динамо с антисимметричным α	211
9.6. $\alpha\omega$ -динамо в неограниченном пространстве	214
9.7. Генерация поля локализованными α и $\partial U/\partial z$	217
9.8. Симметричное $U(z)$ и антисимметричное $\alpha(z)$	219
9.9. Модель галактического динамо	222
9.10. Генерация полоидальных полей α -эффектом	231
9.11. $\alpha\omega$ -динамо с фазами выключения	233
9.12. Численные исследования $\alpha\omega$ -динамо	234
Глава 10 ВЛИЯНИЕ СИЛ КОРИОЛИСА, ЛОРЕНЦЕВЫХ СИЛ	
И ПЛАВУЧЕСТИ НА ВОЛНЫ СПИРАЛЬНОЙ ФОРМЫ	243
10.1. Уравнение импульса и некоторые его элементарные следствия	243
10.2. Магнитострофические волны	247
10.3. Модификация α -эффекта под действием силы Лоренца	251
10.4. Динамическое равновесие, устанавливающееся вследствие ослабления α -эффекта	255

10.5. Генерация спиральности в результате взаимодействия архимедовых и кориолисовых сил	260
10.6. Возбуждение магнитострофических волн в неустойчиво стратифицированной среде	262
10.7. Неустойчивость, связанная с магнитной плавучестью	267
10.8. Генерация спиральности течением вблизи неровной поверхности	273
Глава 11 ТУРБУЛЕНТНОСТЬ СО СПИРАЛЬНОСТЬЮ И ТУРБУЛЕНТНОЕ ДИНАМО	277
11.1. Влияние спиральности на однородную турбулентность	277
11.2. Влияние сохраняющейся магнитной спиральности на процессы переноса энергии	285
11.3. Изменение инерционной области под влиянием крупномасштабного магнитного поля	290
11.4. Неспиральное турбулентное динамо	291
Глава 12 ДИНАМИЧЕСКИ НЕПРОТИВОРЕЧИВЫЕ ДИНАМО	294
12.1. Ограничение Тейлора и крутильные колебания	294
12.2. Влияние усредненного течения на динамо	299
12.3. Динамо, создаваемые архимедовыми силами	303
12.4. Моделирование обращений полярности земного поля с помощью связанных дисковых динамо	312
ЛИТЕРАТУРА	319
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ	332

Г. Моффат

**ВОЗБУЖДЕНИЕ
МАГНИТНОГО ПОЛЯ
В ПРОВОДЯЩЕЙ СРЕДЕ**

Научный редактор Э.А. Медушевская
Младший редактор Г.Д. Леонтьева
Художник И.И. Каледин
Художественный редактор Г.В. Шотина
Технические редакторы Е.В. Ящук, Л.М. Бронзберг
Ст. корректор И.П. Максимова

ИБ № 1911

Подписано к печати 04.02.80. Формат 60 × 90^{1/16}.

Бумага офсетная № 1. Печать офсетная.

Объем 10,75 бум. л. Усл. печ. л. 21,50.

Уч.-изд. л. 19,97. Изд. № 27/0388. Тираж 1800 экз.

Зак. ~~172~~ Цена 3 р. 30 к.

ИЗДАТЕЛЬСТВО "МИР"

Москва, 1-й Рижский пер., 2.

Тульская типография Союзполиграфпрома
при Государственном комитете СССР
по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
г. Тула, проспект им. В.И. Ленина, 109

ИМЕЕТСЯ В ПРОДАЖЕ

книга издательства «Мир»

Мельхиор П. ФИЗИКА И ДИНАМИКА ПЛАНЕТ

Ч. II. Пер. с франц. — 483 стр. Цена 2 р. 22 к.

Обширное руководство известного бельгийского геофизика П. Мельхиора содержит изложение на высоком научном уровне новейших данных и теорий по динамике и физике Земли и планет.

Содержание

От редактора перевода

Притяжение однородным эллипсоидом внутренней точки

Вычисление с приближением Радо

Закон плотности Буллена

Изотропная упругость

Упругие деформации однородной Земли

Числа Лява

Однородная несжимаемая Земля

Реология Земли

Влияние приливов на скорость вращения Земли. Вековое замедление и периодические неравномерности

Теория прецессии — нутации и потенциал приливообразующих сил

Колебания вращающейся эллипсоидальной оболочки

Собственные колебания Земли

Введение в изучение жидкого ядра

Вращение Луны и приливы на Луне

Отличительная особенность книги Мельхиора — органическое сочетание теоретических аспектов физики Земли с детальным обсуждением конкретных экспериментальных результатов. Она послужит хорошим руководством для студентов астрономов, геодезистов, геофизиков, а также научных работников и преподавателей указанных специальностей.

Заказы на указанную книгу направляйте по адресам:

121019 Москва, проспект Калинина 26, ц/я 42, магазин № 200, фирменная секция издательства "Мир".

191040 Ленинград, Пушкинская ул., 2, магазин № 5 "Техническая книга", фирменная секция издательства "Мир".

Книгу можно также заказать в магазинах, торгующих научно-технической литературой. Книга будет выслана наложенным платежом.

ИМЕЕТСЯ В ПРОДАЖЕ

книга издательства «Мир»

Ф. Роч, Дж. Гордон
СВЕЧЕНИЕ НОЧНОГО НЕБА

Пер. с англ. — 150 стр. — Цена 1 р. 06 к.

Свечение ночного неба — одно из самых удивительных явлений природы. Оно возникает в атмосфере Земли, в межпланетном пространстве, порождается фоном неразрешаемых звезд, рассеянием на межзвездной пыли в нашей Галактике, приходит из глубин Вселенной. Исследование отдельных составляющих этого свечения дает нам сведения о верхней атмосфере Земли, о строении Галактики, об эволюции Вселенной.

Книга написана доступно и увлекательно, предназначена в первую очередь студентам — геофизикам, физикам, астрономам. Но ее с удовольствием прочтут и все те, кого привлекает красота ночного неба.

Содержание

Предисловие

1. День, сумерки, ночь
 2. Звездные подсчеты и звездная составляющая
 3. Зодиакальный свет и противосияние
 4. Ночное свечение атмосферы
 5. Рассеянный пылью свет звезд — диффузное галактическое свечение
 6. Пыль межпланетная и межзвездная
 7. Внегалактическое свечение и космология
- Эпилог

Заказы на книгу следует направлять по адресу: 191040, Ленинград, Пушкинская ул., 2, магазин № 5 "Техническая книга". Заказанная книга будет выслана наложенным платежом.