D. Morhukhai-Boltovskoi

Д. Мордухай-Болтовской.

Dimetrii Morduchai-I

ob integrirovanii

ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ

In Integration

v konechnom vide

ВЪ КОНЕЧНОМЪ ВИДѢ

in Finite Form

linei̋nykh differentsial'nykh

ЛИНЕЙНЫХЪ ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ

of Linear Differential

уравненій.

uravnenii

Equations

Varshava

ВАРШАВА.

Tipografiia Varshavskago uchebnago okruga

ТИПОГРАФІЯ ВАРШАВСКАГО УЧЕБНАГО ОКРУГА.

Краковское Предмѣстье № 3.

1910.

Печатано по опредѣленію Совѣта Императорскаго Варшавскаго Университета.

Ректоръ проф. *Е. Ѳ. Карскій.*

ОГЛАВЛЕНІЕ.

I Часть. Формы рѣшеній выражаемыхъ въ конечномъ видѣ.

I Глава. Свойства основныхъ трансцендентныхъ.

II Глава. Неосновныя рѣшенія.

ВВЕДЕНІЕ.

Въ настоящее время Теорія обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій сводится главнымъ образомъ къ аналитическому изслѣдованію функцій, опредѣляемыхъ этими уравненіями. Математиковъ преимущественно интересуетъ, для какихъ значеній перемѣннаго x функція y, опредѣляемая уравненіемъ

$$f(x, y, y' \dots y^{(n)}) = 0$$

при опредѣленныхъ начальныхъ значеніяхъ $y, y' \dots y^{(n)}$ представляетъ голоморфную функцію отъ x (Коши, Липшицъ, Бріо-Букэ), имѣетъ ли y особенныя точки и какія изъ этихъ точекъ зависятъ отъ произвольныхъ постоянныхъ и какія независимы (Фуксъ Пуанкарэ, Пенлевэ), каковы сходящіяся разложенія, опредѣляющія y около существенно особенныхъ точекъ (Фуксъ, Пуанкарэ, Пикаръ) и каковы ассимптотическія выраженія y около тѣхъ точекъ, для которыхъ является невозможнымъ изслѣдованіе y съ помощью сходящихся разложеній (Пуанкарэ, Горнъ, Ляпуновъ, Брайцевъ)?

Понятіе объ интегрированіи дифференціальнаго уравненія, подвергаясь извѣстнаго рода эволюціи, находится теперь въ стадіи, характеризуемой взглядомъ: *„проинтегрировать данное дифференціальное уравненіе это значитъ—изучить аналитическія свойства функціи опредѣляемой дифференціальнымъ уравненіемъ"*; мы прибавляемъ „аналитическія" для того, чтобы подчеркнуть, что здѣсь конечно, имѣются въ виду не всѣ свойства, а, именно, только тѣ, которыя служатъ предметомъ аналитической теоріи функціи. Свойство функціи, состоящее въ томъ, что ее можно выразить въ тригонометрическихъ функціяхъ, не принадлежитъ уже къ этой категоріи свойствъ и оно при этой формулировкѣ не имѣется, въ виду.

Приведенный выше взглядъ главнымъ образомъ въ виду требованій, предъявляемыхъ прикладными математическими науками дополняется слѣдующимъ образомъ: къ требованіямъ изученія аналитическихъ свойствъ присоединяется *требованіе возможности приближеннаго вычисленія у при данномъ х съ опредѣленіемъ степени точности*, задачи при соблюденіи полной математической строгости болѣе трудный, чѣмъ вышеупомянутая.

Подобное пониманіе интегрированія даже при этомъ дополненіи рѣзко отличается отъ того, которое имѣли математики въ прежніе годы до появленія знаменитыхъ трудовъ Фукса, которые безспорно главнымъ образомъ способствовали подобнаго рода эволюціи, хотя происхожденіе этихъ взглядовъ слѣдуетъ искать еще у Коши.

А, именно прежде интегрированіе понималось исключительно въ смыслѣ интегрированія въ конечномъ видѣ т. е. въ смыслѣ построенія интеграловъ дифференціальныхъ уравненій съ помощью извѣстныхъ намъ функцій или съ помощью квадратуръ.

Едвали можно согласиться съ крайностями современныхъ взглядовъ и совершенно отрѣшится отъ разсмотрѣнія тѣхъ задачъ, которыя являлись наиболѣе близкими сердцамъ прежнихъ математиковъ.

Аналитическія свойства не суть *всѣ* свойства функцій. Изученіе ихъ даетъ только *характеръ измѣненія функціи*, но не даетъ ея строенія. Каждая функція опредѣляется нѣкоторыми операціями, изученіе аналитическихъ свойствъ функціи даетъ характеръ, получаемыхъ при помощи этихъ операцій результатовъ, но ничего не даетъ относительно самыхъ этихъ операцій, остается неизвѣстнымъ, сводятся ли онѣ къ другимъ болѣе простымъ, намъ уже извѣстнымъ?

Посмотримъ, въ какомъ положеніи находится проблемма интегрированія въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій.

Изслѣдующая мысль проходитъ черезъ три стадіи.

Сперва—стадія *наивности*. Нѣтъ строгой критики ни для рѣшенія, ни для самой постановки вопроса.

Въ слѣдующей стадіи критика распространяется, какъ это не представляется можетъ быть на первый взглядъ страннымъ, не на постановку проблеммы, а только на ея *рѣшеніе*. Рѣшеніе въ достаточной степени строго, но дѣло въ томъ, что постановка вопроса является не достаточно продуманной, различные авторы подъ одной и той же проблеммой понимаютъ весьма различное, даже, болѣе того, у одного и того же автора колеблется пониманіе тѣхъ требованій, которыя предъявляетъ ему изслѣдуемая проблемма.

Грубое, основанное на опытѣ или на несовершенномъ соображеніи геометрическое опредѣленіе длины окружности въ радіусѣ относится къ первой эпохѣ.

Изысканіе квадратуры круга греческими математиками ко 2-й эпохѣ.

Третья стадія характеризуется критическимъ отношеніемъ, какъ къ рѣшенію такъ и къ постановкѣ вопроса.

Тщетныя попытки съ огромной затратой энергіи наводятъ на мысль о неразрѣшимости проблеммъ не вслѣдствіе безсилія рѣшающаго, а вслѣдствіе того, что въ постановкѣ самой проблеммы содержится извѣстное противорѣчіе. Въ такую эпоху вступила теорія геометрическихъ построеній, когда была поставлена задача о возможности трисекціи для произвольно взятаго угла, причемъ, какъ извѣстно, вопросъ о возможности трисекціи былъ рѣшенъ въ отрицательномъ смыслѣ.

Къ такой эпохѣ относятся теоремы Эрмита—Линдемана о трансцендентности π и вытекающей отсюда невозможности квадратуры съ помощью циркуля и линейки.

Такую эпоху создалъ Абель для теоріи рѣшеній алгебраическихъ уравненій въ радикалахъ и для интегрированія въ конечномъ видѣ алгебраическихъ дифференціаловъ. Только въ эту, третью эпоху создается вполнѣ критическое отношеніе къ постановкѣ проблеммы.

Требованія, предъявляемыя проблеммой должны вполнѣ сознаться для того, чтобы можно было произвести вполнѣ строгую научную критику ихъ, для того, чтобы можно было вскрыть тѣ противорѣчія которыя въ большинствѣ случаевъ очень глубоко въ нихъ скрываются.

Задача объ интегрированіи въ конечномъ видѣ алгебраическихъ дифференціаловъ со времени Абеля изслѣдована уже очень глубоко, причемъ, преимущественно, русскими математиками.

Обычный элементарный курсъ интегрированія функцій рѣзко отличается отъ тѣхъ изслѣдованій, которыя начаты Льювилемъ и Абелемъ и продолжены Чебышевымъ и другими русскими математиками. Обычный элементарный курсъ не даетъ вполнѣ строгой формулировки понятія объ интегрированіи въ конечномъ видѣ.

Минуя ее, онъ начинаетъ прямо съ методы интегрированія; иногда, указывая, что интегрированіе совершается съ помощью логариѳмическихъ, показательныхъ тригонометрическихъ и круговыхъ (иначе: элементарныхъ трансцендентныхъ) функцій. Но, конечно, выраженіе „съ помощью и т. д." не настолько ясно, насколько это представляется на первый взглядъ. Если интегралъ разложенъ въ тригонометрическій рядъ, то можно сказать, что интегралъ выражается съ помощью тригонометрическихъ функціи, хотя пониманіе выражаемости съ помощью и будетъ совершенно иное, чѣмъ то, которое подразумѣвается въ первомъ случаѣ.

Строгой и вполнѣ ясной формулировкой той проблеммы, которая обыкновенно, *молча*, признается за проблемму интегрированія въ конечномъ видѣ и которая вмѣстѣ съ тѣмъ является наиболѣе естественнымъ признавать за такую проблемму, начинается послѣдняя „критическая" эпоха, относящаяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ алгебраическихъ дифференціаловъ.

Элементарные курсы интегрированія функцій представляютъ изслѣдованія этой проблеммы въ той формѣ, въ какой можно найти эти изслѣдованія у прежнихъ математиковъ до изслѣдованій Льювиля и Абеля и у тѣхъ современныхъ математиковъ, которые ведутъ свои изслѣдованія, *обходя* работы послѣднихъ.

Задача ставится не такъ, какъ ее слѣдуетъ ставить при строго критическомъ отношеніи къ проблеммѣ:

Данъ дифференціалъ

$$f(x)\,dx$$

Возможно ли найти $\int f(x)\,dx$ въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ (причемъ послѣднее понятіе вполнѣ строго опредѣляется), и, если возможно то найти выраженіе этого интеграла черезъ элементарныя трансцендентныя?

Все сводится въ этихъ изслѣдованіяхъ къ опредѣленію различныхъ методъ, при помощи которыхъ интегрируется въ конечномъ видѣ дифференціалы болѣе или менѣе общихъ типовъ. Относительно тѣхъ дифференціаловъ, которые не принадлежатъ къ тѣмъ типамъ, которые *удалось* проинтегрировать, не ставится вовсе вопроса объ интегрированіи въ конечномъ видѣ. Такимъ образомъ рѣшеніе задачи объ опредѣленіи $\int f(x)\,dx$ всецѣло зависитъ отъ случайности, отъ того соблюдены ли случайно для $\int f(x)\,dx$ *достаточныя* условія выражаемости его въ конечномъ видѣ. Если $f(x)\,dx$ эллиптическій дифференціалъ, то проблемма объ опредѣленіи интеграла $\int f(x)\,dx$ въ конечномъ видѣ можетъ рѣшится только въ томъ счастливомъ случаѣ, когда $\int f(x)\,dx$ окажется подходящимъ подъ случайно изслѣдованный типъ *псевдо-эллиптическихъ интеграловъ*.

Совершенно въ такомъ же видѣ находится въ до-Абель-Льювиллевскую эпоху и проблемма интегрированія дифференціальныхъ уравненій. Когда Ньютонъ пишетъ, что онъ можетъ проинтегрировать всѣ дифференціальныя уравненія, то конечно онъ понимаетъ „интегрированіе" только въ смыслѣ разложенія интеграла въ рядъ Тайлора, а не въ томъ смыслѣ въ какомъ это потомъ *обычно* понимали и не въ томъ смыслѣ, въ какомъ это наиболѣе *естественно* понимать.

Неизмѣннымъ въ различныхъ взглядахъ на проблемму на интегрированія въ конечномъ видѣ остается у всѣхъ авторовъ то, что ее существенно отличаетъ отъ новѣйшаго взгляда интегрированіе. Интегрированіе всегда понимается въ смыслѣ *построенія интеграла* дифференціальнаго уравненія съ помощью тѣхъ или иныхъ символовъ, съ помощью тѣхъ или иныхъ функцій. Но какія функціи принимаются за основныя, съ помощью которыхъ выражаются интегралы взглядъ на это подвергается колебаніямъ.

Почти всѣ авторы вводятъ въ число основныхъ операціи символъ $\int$ т. е. квадратуры. Интегрированіе въ конечномъ видѣ такимъ образомъ представляетъ интегрированіе въ квадратурахъ. Но конечно, когда Эйлеръ *интегрируетъ* уравненіе

$$\frac{dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{dy}{\sqrt{R(y)}},$$

выражая y въ алгебр. функціи отъ x, то онъ понимаетъ интегрированіе иначе, въ томъ смыслѣ, какъ оно понимается въ упомянутой выше проблеммѣ, которая представляетъ ничто иное, какъ проблемму интегрированія уравненія

$$y'=f(x),$$

Лейбницъ, знакомя съ отдѣленіемъ перемѣнныхъ, И. Бернулли, указывая интегрированіе однородныхъ уравненій, Я. Бернулли, интегрируя уравненіе, носящее его имя, понимаетъ подъ интегрированіемъ — интегрированіе съ помощью квадратуръ.

Методъ Лапласа интегрированія съ помощью опредѣленныхъ интеграловъ даетъ рѣшеніе иной задачи, чѣмъ та, которая изслѣдовалась этими математиками; интегрированіе въ конечномъ видѣ здѣсь понимается иначе.

Какимъ образомъ отъ интегрируемыхъ весьма различными методами различныхъ типовъ дифференціальныхъ уравненій подняться до рѣшенія проблеммы интегрированія въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій (съ помощью квадратуръ и съ помощью элем. трансц.)?

Какимъ образомъ объяснить себѣ *тщетность* попытокъ интегрированія другихъ болѣе многочисленныхъ типовъ дифференціальныхъ уравненій и изслѣдовать, не лежитъ ли причина неудачъ не въ насъ, а въ томъ фактѣ, что существуютъ неинтегрируемыя въ конечномъ видѣ уравненія?

Здѣсь открываются два пути.

Первый—это изслѣдованіе тѣхъ методъ, при помощи которыхъ удалось проинтегрировать изслѣдованные типы уравненій, изслѣдованіе того общаго принципа, который лежитъ въ основѣ всѣхъ методъ и созданіе на основаніи его общей методы интегрированія, при помощи которой возможно было бы интегрировать всѣ тѣ типы уравненіи, которыя были проинтегрированы разнообразными случайными методами. Тогда сразу опредѣлятся всѣ тѣ типы дифференц. уравненій, которыя *поддаются* интегрированію. Конечно еще нельзя считать *доказаннымъ*, что это и суть тѣ уравненія, которыя *могутъ быть проинтегрированы*, но при этомъ становится *весьма вѣроятнымъ*, что это такъ.

Мы не будемъ распространяться подробно о геніальныхъ изслѣдованіяхъ Софуса Ли, такъ какъ послѣднія не имѣли никакого вліянія на нашу работу, но укажемъ, что Софусъ Ли, не изслѣдовавъ проблеммы о необходимыхъ и достаточныхъ условіяхъ интегрируемости съ помощью квадратуръ тѣмъ не менѣе имѣетъ огромное значеніе въ подобнаго рода изслѣдованіяхъ, и, если онъ относится еще ко второй эпохѣ, то его ближащій ученикъ Вессіо долженъ быть отнесено къ третьей, такъ, какъ мы будемъ говорить ниже, Вессіо пользуясь теоріей непрерывныхъ группъ, изслѣдуетъ проблемму интегрированія въ квадратурахъ.

Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ тѣ типы уравненій, которыя поддаются общимъ методамъ Софуса Ли весьма вѣроятно вмѣстѣ съ тѣмъ единственные типы интегрируемыхъ уравненій, то въ изслѣдованіяхъ Софуса Ли, мы находимъ формулировку положеній безъ доказательствъ, но съ многимъ, что послужитъ для построенія этихъ послѣднихъ.

Другой путь—начиная съ строго-критической постановки проблеммы, отвлекаясь отъ всѣхъ извѣстныхъ методъ интегрированія изыскивается возможная форма интеграла дифференціальнаго уравненія въ случаѣ его выражаемости въ конечномъ видѣ; 2) изыскиваются условія при которыхъ возможенъ интегралъ этой формы; 3) изыскиваются методы для опредѣленія интеграла данной формы, если таковой интегралъ существуетъ. Здѣсь уже первая изъ этихъ задачъ открываетъ третью изъ вышеупомянутыхъ эпохъ.

Это тотъ путь который былъ выбранъ Льювилемъ и Абелемъ при изслѣдованіи дифференціальнаго уравненія

$$y' = f(x)$$

Къ сожалѣнію для случая уравненія болѣе общаго случая проблемма очень мало изслѣдована.

Форма частнаго интеграла выражаемаго въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ найдена Льювилемъ для случая уравненія $y'' = Py$, гдѣ P цѣлая функція (о его работахъ мы будемъ подробно говорить) форма общаго интеграла уравненія перваго порядка

$$f(x, y, y') = 0$$

опредѣлена нами, дальнѣйшія обобщенія относящіяся къ системѣ уравненій принадлежатъ М. Н. Лагутинскому.

Форма интеграловъ ур. 1-го порядка выражаемаго съ помощью квадратуръ изслѣдована Максимовичемъ (но работа его содержать ошибку, какъ будетъ ниже показана). Изслѣдованія его продолжены Старковымъ на случай уравненій линейныхъ высшаго порядка.

Наша постоянная работа относится къ интегрированію въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненіи, преимущественно алгебраическихъ, въ виду этого мы подробно остановимся только на тѣхъ работахъ которыя относятся къ этому типу дифференціальныхъ уравненій.

Начнемъ съ тѣхъ работъ, которыя стоятъ совершенно въ сторонѣ отъ настоящей работы, не оказывая на нее никакого вліянія.

Изслѣдованія В. П. Максимовича.

Въ работѣ В. П. Максимовича:

Разысканіе общихъ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка, интегрирующихся въ конечномъ видѣ и доказательство невозможности такого интегрированія для общаго уравненія второго порядка. Казань 1885.

Постановка понятія объ интегрированіи въ конечномъ видѣ отличается отъ Льювиллевской, которую мы принимаемъ въ настоящей работѣ и которая по нашему мнѣнію является наиболѣе естественной. Пониманіе В. П. Максимовича общнѣе; если уравненіе интегрируется въ Льювиллевскомъ смыслѣ, то оно интегрируется и въ смыслѣ Максимовича и потому результаты Максимовича, если они были вѣрны имѣли бы большое значеніе для изслѣдуемой нами проблеммы.

Подъ рѣшеніемъ уравненія

$$y' = f(x, y),$$

выражаемомъ въ конечномъ видѣ, Максимовичъ разумѣетъ рѣшеніе, которое можетъ быть представлено въ видѣ

$$y = F(S_1^{(m)}, S_2^{(m)} \dots S_1^{(n-1)} \dots . S_1^{(1)} \dots)$$

гдѣ $S^{(m)}_i, S^{(m-1)}_i \ldots$ квадратуры, F обозначаетъ *алгебраическую* функцію а вообще *опредѣленное* выраженіе т. е. не содержитъ какихъ либо произвольныхъ постоянныхъ явно т. е. всѣ эти постоянныя входятъ въ $S^{(m)}_i, S^{(m-1)}_i \ldots$.

$$S^{(1)} = \int \varphi(x)\,dx + const$$

$$S^{(2)} = \int \psi\left(S^{(1)}_1, S^{(1)}_2 \ldots\right) dx + const$$

$$S^{(3)} = \int \omega\left(S^{(2)}_1, S^{(2)}_2 \ldots S^{(1)}_1, S^{(1)}_1 \ldots\right) dx + const$$

. . . .

$$S^{(m)} = \int \vartheta\left(S^{(m-1)}_1, S^{(m-1)}_2 \ldots\ldots\right) dx + const$$

гдѣ $\varphi, \psi, \omega \ldots \vartheta$ представляютъ не алгебраическія, а опять опредѣленныя функціи т. е. не содержащія явно произвольно постоянныя.

Вотъ причины, которыя заставляютъ насъ считать эту постановку понятія о выражаемости въ конечномъ видѣ неестественной.

Предположимъ, что, интегрируя какое либо уравненіе перваго порядка мы получимъ

$$y = e^x \omega(x) + \int e^{\sin \omega(x)} dx + C \quad (*)$$

гдѣ $\omega(x)$ функція вполнѣ опредѣленная (по Максимовичу), которая опредѣляется слѣдующимъ образомъ:

Это функція, опредѣляемая уравненіемъ

$$x^2 y'' + (1 + 2x) y' - 5y = 0 \quad (**)$$

и условіемъ: при

$$x = 1 : y = 2, y' = 3$$

уравненіе же (**) не интегрируется въ квадратурахъ. Можно ли сказать, что рѣшеніе (*) выражается въ конечномъ видѣ?

Результатъ Максимовича очень интересенъ. Нѣтъ уравненій, интегрируемыхъ въ конечномъ видѣ, кромѣ линейнаго

$$y' = M(x)y + N(x)$$

или его преобразованій

$$[\varphi(x, y)]' = M(x)\varphi(x, y) + N(x)$$

гдѣ $\varphi(x, y), M(x), N(x)$ не алгебраическіе функціи, а функціи „опредѣленныя".

Такъ какъ уравненіе 2-го порядка приводится къ уравненію Рикатти общаго типа, то изслѣдованіе этого послѣдняго даетъ возможность изслѣдовать линейное уравненіе 2-го порядка и доказать неинтегрируемость въ конечномъ видѣ линейнаго уравненія 2-го порядка общаго типа.

Разсужденія В. П. Максимовича мѣстами очень темныя и часто не вполнѣ убѣдительныя, съ нѣсколько непостоянной терминологіей содержать роковую ошибку, имѣющую смертельную силу для наиболѣе труднаго и важнаго пункта доказательства.

На стр. 5 своей работы В. П. Максимовичъ утверждаетъ, что всѣ постоянныя, входящія въ тѣ квадратуры, опредѣленной функціей которыхъ является y должны сливаться въ одну произвольно постоянную, такъ что

$$u_0 = \theta(a_0, a_1, a_2 \ldots a_k)$$

гдѣ u_0 произвольная постоянная, θ опредѣленная функція.

Но это утвержденіе ошибочно. Вообще мы можемъ сказать только то, что

$$u_0 = \theta(a_0, a_1, a_2 \ldots . a_k, b_0, b_0 \ldots b_l) \quad (***)$$

гдѣ $a_0, a_1 \ldots a_k$ произвольно постоянныя квадратуръ

$$S_1^{(m)}, S_2^{(m)} \ldots S_1^{(1)}, S_2^{(1)} \ldots$$

$b_0, b_1 \ldots b_l$ произвольныя постоянныя входящія въ нѣкоторыя квадратуры явно въ y не входящія, а входящія въ составъ

$$S_1^{(m)} S_2^{(m)} \ldots S_1^{(1)}, S_2^{(1)} \ldots$$

Если, напримѣръ

$$S^{(2)} = \int \frac{x + \int \sqrt{1-x^4}\, dx + b_1}{x^3 - \sqrt{1-x^3}}$$

то въ уравненіе (***) могутъ входить, какъ a_1, такъ и b_1.

На нашъ взглядъ даже при наличности ошибки, обезцѣнивающей выводы работы, работа Максимовича не должна быть подвергнута окончательному забвенію. Въ ней есть одна весьма цѣнная мысль: методъ выведенія формы интеграла изъ условія нераздѣльности произвольныхъ постоянныхъ. Эта мысль нашла примѣненіе въ нашей работѣ, относящейся къ интегрированію въ конечномъ видѣ дифференціальнаго уравненія перваго порядка.

Изслѣдованія Вессіо.

Если Максимовичъ понимаетъ проблемму интегрированія въ конечномъ видѣ слишкомъ широко, то, наоборотъ, Вессіо въ своей работѣ:

E. Vessiot. Sur l'intégration des équations différentielles lineaires. Annalles de l'Ecole Normale. 1891. и Пикаръ въ *E. Picard. Traité d'Analyse t. III. Ch. XVII* понимаютъ ее слишкомъ узко.

Согласно Вессіо (и Пикару) только тѣ дифференціальныя уравненія *интегрируемы въ квадратурахъ*, интегралы которыхъ представляются въ слѣдующемъ видѣ:

$$y = F(S_1^{(m)}, S_2^{(m)} \ldots S_1^{(m-1)} \ldots S_1^{(1)} \ldots)$$

$$S_1^{(m)} = \int \vartheta \left(S_1^{(m-1)}, S_2^{(m-1)} \ldots\right) dx \text{ и т. д.}$$

гдѣ $F, \vartheta \ldots$ *не алгебраическія, а раціональныя* функціи отъ коэффиціентовъ линейныхъ уравненій. Но болѣе естественнымъ является считать интегрированіе выполненнымъ и тогда, когда $F, \vartheta \ldots$ только алгебраическія, подводя алгебраическое интегрированіе, какъ частный случай, подъ интегрированіе въ квадратурахъ.

При этомъ пониманіи пришлось бы признать, что уравненіе

$$y' + py = P,$$

имѣющее интегралъ

$$y = e^{-\int p dx} \left(c + \int e^{\int p dx} P\, dx\right)$$

въ общемъ случаѣ неинтегрируемо въ квадратурахъ, такъ какъ это выраженіе конечно не подходитъ подъ упонянутый типъ.

Приходится или вводить вмѣстѣ съ $S_1^{(m)}$ въ y еще выраженія опредѣляемыя слѣдующимъ образомъ:

$$T_1^{(m)} = e^{\int \vartheta \left(S_1^{(m-1)}, S_2^{(m-1)} \ldots T_1^{(m-1)} \ldots T_2^{(m-1)} \ldots S_1^{(1)} \ldots T_1^{(1)} \ldots\right) dx}$$

и т. д. или опредѣлить $S_1^{(m)}$ уравненіями 1-го порядка общаго типа

$$\frac{dS_1^{(m)}}{dx} + \vartheta_1 \left(S_1^{(m-1)}, S_2^{(m-1)} \ldots\right) S_1^{(m)} = \Theta\left(S_1^{(m-1)}, S_2^{(m-1)} \ldots\right)$$

Въ сущности говоря; хотя изъ формулировокъ Вессіо и Пикара вытекаетъ приведенное выше узкое пониманіе интегрируемости, но ихъ разсужденія относятся къ этому болѣе общему пониманію.

Слѣдуетъ замѣтить, что и при этомъ дополненіи существуетъ еще различіе между пониманіемъ интегрируемости у Вессіо и у Льювилля (которое подробно будетъ изложено въ нашей работѣ).

При Льювиллевскомъ пониманіи за $S_1^{(m)}, S_2^{(m)} \ldots$ можно брать, какъ частные такъ и общіе интегралы дифференціальныхъ уравненій ихъ опредѣляющихъ, при пониманіи Вессіо только *общіе*.

При Льювиллевскомъ пониманіи интегралъ

$$\int\left[lg\left(\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}+1\right)\sqrt{x^5+\int\frac{e^x\,dx}{x}}\right]dx$$

выражается въ конечномъ видѣ въ квадратурахъ. При (исправленномъ) пониманіи Вессіо этотъ интегралъ выражается въ квадратурахъ, если онъ продолжаетъ основаться интегралами предложеннаго линейнаго уравненія по замѣнѣ

$$lg\left(\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}+1\right) \quad \text{на} \quad c'+lg\left(\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^3}}+1\right)$$

$$e^x \qquad \text{на} \qquad c^4 e^x$$

гдѣ c' и c'' произвольныя постоянныя.

Для того, чтобы совпаденіе обоихъ пониманій было установлено, необходимо доказать возможность подобной замѣны, что Льювиллевской методой удается доказать.

Изслѣдованія Вессіо указываютъ на интересную аналогію существующую между двумя проблеммами: проблеммой рѣшенія алгебраическихъ уравненій въ радикалахъ проблеммой интегрированія линейныхъ уравненій въ квадратурахъ.

Изслѣдованія Вессіо основываются на теоріи непрерывныхъ группъ, творцомъ которой является Софусъ Ли.

Устанавливая понятіе о группѣ преобразованіи G отвѣчающей линейному уравненію, обладающей свойствами, что всякая раціональная функція x и част. интегр: $y_1, y_2 \ldots y_n$ и ихъ производныхъ, выражаемая раціонально въ p_i, остается неизмѣнной при перестановкахъ группы G и обратно всякая функція, остающаяся неизмѣнной при перестановкахъ группъ G приводится къ раціональной функціи, Вессіо изслѣдуетъ приведеніе группы G черезъ присоединеніе къ области раціон.

функціей p_i квадратуръ или, что тоже, интеграловъ уравненій

$$\frac{dr}{dx}=b \quad \text{или, общнѣе,} \quad \frac{dr}{dx}=br+c$$

гдѣ b, c принадлежатъ къ области къ которой присоединены всѣ предыдущіе квадратуры.

Въ случаѣ интегрируемости съ помощью квадратуръ получается рядъ группъ

$$G, G' .. G'' ... G^{(s)},$$

изъ которыхъ каждая представляетъ инваріантную группу для предыдущей и разности чиселъ параметровъ двухъ другъ за другомъ слѣдующихъ группъ равна 1, послѣдняя группа зависитъ только отъ одного параметра.

Если линейное уравненіе интегрируемо съ помощью квадратуръ, то группа преобразованій *интегрируема.*

Для насъ наиболѣе важнымъ изъ результатовъ Vessio является теорема о существованіи въ случаѣ интегрируемости въ квадратурахъ интеграла съ раціональной логариѳмической производной

$$e^{\int \xi\, dx}$$

(по нашей терминологіи основного интеграла).

При Льювиллевской постановкѣ проблеммы результатъ этотъ, конечно, слѣдуетъ исправить слѣдующимъ образомъ: необходимо существованіе интеграла не съ раціональной, а съ алгебраической вообще логариѳмической производной.

Изслѣдованія Vessio имѣютъ огромную цѣну, но необходимо ихъ переработать, расширивъ его слишкомъ узкое пониманіе интегрированія въ конечномъ видѣ съ помощью квадратуръ и въ зависимости отъ этого измѣнивъ ходъ его доказательствъ, что, по нашему мнѣнію, не представляетъ непреодолимыхъ затрудненій.

Этимъ методомъ можетъ быть получено все, что относится въ нашей работѣ къ формамъ интеграловъ, выражаемыхъ въ квадратурахъ.

Что касается до выраженія въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ, то здѣсь методъ Bessio едва ли явится приложимымъ.

Перейдемъ теперь къ подробному разбору тѣхъ работъ, которыя въ большей или меньшей мѣрѣ оказали вліяніе на настоящее сочиненіе.

Изслѣдованія Льювилля.

Настоящая работа является прямымъ продолженіемъ работъ Льювилля.

Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équations différentielles du sécond ordre en quantités finies explicites.

Journal de Mathématiques pures et appliquées t. IV 1839.

Основываясь на классификаціи трансцендентныхъ, изложенной имъ въ II и III томахъ того же журнала и пользуясь тѣми же самыми методами, которыя имъ были приложены для вывода общей формы для Абелевыхъ интеграловъ, выражаемыхъ въ конечномъ видѣ, Льювилль, разсматривая уравненіе 2-го порядка

$$y'' = Py \quad (*)$$

при алгебраическомъ P, выводитъ, что это уравненіе въ случаѣ интегрируемости въ конечномъ видѣ имѣетъ интегралъ типа

$$y = e^{\int \xi\, dx}$$

ξ алгебраическая функція.

Если P цѣлая функція, то ξ раціонально. При этомъ задачу объ интегрированіи уравненія (*) въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ Льювилль сводить къ задачѣ о разысканіи цѣлаго раціональнаго рѣшенія нѣкотораго линейнаго уравненія 2-го порядка.

Пусть $P = Q^2 + R$, гдѣ Q полиномъ ν-ой, R полиномъ $\overline{\nu-1}$-ой степени,

$$y = Ye^{\lambda}$$

$\lambda = \pm \int Q dx$, Y цѣлая функція, опредѣляемая нѣкоторымъ линейнымъ уравненіемъ 2-го порядка съ раціональными коэффиціентами.

Необходимыя условія существованія у этого послѣдняго уравненія цѣлыхъ рѣшеній будутъ вмѣстѣ съ тѣмъ и необходимыми условіями интегрируемости уравненія (*).

Если a коэффиціентъ при старшей степени x въ P, a' такой же коэффиціентъ въ R, то согласно Льювилю должно быть выполнено одно изъ слѣдующихъ условій

$$\frac{a' - \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

$$-\frac{a' + \nu\sqrt{a}}{2\sqrt{a}}$$

представляетъ цѣлое число: нуль или положительное.

Имѣя въ виду, что общій интегралъ выражается формулой

$$y = AYe^{\lambda} + BYe^{\lambda}\int \frac{e^{-2\lambda}\,dx}{Y^2},$$

гдѣ A, B постоянныя, Льювиль заключаетъ, что y не выражается въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ даже въ томъ случаѣ когда, существуетъ частный интегралъ, выражаемый въ конечномъ видѣ.

Въ концѣ своей статьи Льювиль отмѣчаетъ, что всѣ разсужденія его, которыя велись для случая элементарныхъ трансцендентныхъ остаются въ силѣ при присоединеніи къ этимъ трансценд. функцій, опредѣляемыхъ квадратурами.

Ходъ разсужденій Льювилля не можетъ быть непосредственно перенесенъ на случай линейныхъ дифференціальныхъ уравненій высшихъ порядковъ. Мѣстами, гдѣ онъ основывается на особенныхъ свойствахъ присущихъ частнымъ интеграламъ линейныхъ уравненій второго, порядка онъ подвергается коренному измѣненію. Льювилля интересуетъ частный интегралъ съ наименьшимъ числомъ трансцендентныхъ (основной показательный интегралъ), такъ какъ его интересуетъ главнымъ образомъ доказательство неинтегрируемости, которое сводится къ доказательству несуществованія основного интеграла. Формы общаго рѣшенія онъ не даетъ для общаго уравненія 2-го порядка.

Невыражаемость въ конечномъ видѣ общаго рѣшенія онъ доказываетъ, основываясь на невыражаемости въ конечномъ видѣ интеграла $\int \frac{e^{-2\lambda}\,dx}{Y^2}$, доказанной имъ въ особой статьѣ.

Въ другой своей работѣ:

Rémarques nouvelles sur l'équation de Ricatti. Journal de Mathématiques. t. VI. 1841 г.

Льювиль примѣняетъ свою методу къ случаѣ, когда P дробная функція.

Сведя уравненіе Рикатти $y' + ay^2 = bx^m$ къ уравненію типа

$$y'' = Py,$$

гдѣ $P = A + \frac{B}{x^2}$ Льювилль доказываетъ:

1) что уравненіе это не имѣетъ алгебраическаго интеграла,

2) что въ случаѣ интегрируемости въ конечномъ видѣ, оно имѣетъ интегралъ типа

$$y = e^{\pm x\sqrt{A}}\, x^{-\beta}\, Y,$$

гдѣ $\beta(\beta-1)=B$, Y полиномъ опредѣляемый нѣкоторымъ линейнымъ уравненіемъ 2-го порядка. Изслѣдуя условія, когда это послѣднее уравненіе имѣетъ цѣлое рѣшеніе, Льювиль выводитъ условія необходимыя и достаточныя интегрируемости въ конечномъ видѣ уравненія Рикатти

$$m=-\frac{4i}{2i\pm 1}$$

i цѣлое число равное нулю или положительное. Къ сожалѣнію съ 1841 г. по настоящее время математики или совершенно не интересовались мемуарами Льювиля, какъ вообще проблеммой интегрированія въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій, или же, не вникая глубоко въ его методы, брали только готовые результаты и неинтегрируемость въ конечномъ видѣ иныхъ, чѣмъ уравненіе Рикатти, уравненій доказывали, сводя рядомъ преобразованій эти уравненія къ уравненію Рикатти.

Такъ Мальмстенъ, напримѣръ, изслѣдуетъ условія интегрируемости уравненія

$$y''+\frac{y'}{x}+Ax^m y=0$$

Malmsten. De l'équation différentielle etc. Journal de Crelle B. 39. 1850 г.

Этими работами и ограничивается вся литература, относящаяся къ изслѣдованію интегрированія въ конечномъ видѣ, но этими работами не ограничивается литература, которая имѣла вліяніе на настоящую работу.

Выше мы указали, что метода Льювиля сводитъ проблемму интегрированія въ конечномъ видѣ къ тремъ проблеммамъ. Ни въ одномъ изъ произведеній, кромѣ перечисленныхъ, нѣтъ изслѣдованій, относящихся къ формѣ выражаемаго въ конечномъ видѣ интеграла.

Но вторая проблемма: изысканіе условій выражаемости интеграла въ данной формѣ, и третья: изысканіе интеграла данной формы въ случаѣ его существованія, имѣютъ богатую литературу.

Вполнѣ понятно, что эта литература имѣетъ огромное значеніе для изслѣдуемой нами проблеммы.

Алгебраическое интегрированіе.

Изслѣдованы проблеммы 2 и 3-я для слѣдующихъ формъ интеграла линейнаго уравненія съ раціональными коэффиціентами:

1) y цѣлая функція,

2) раціональная функція,

3) $[\chi]^{\lambda}$ гдѣ χ раціональная функція,

4) алгебраическая функція опредѣляемая уравненіемъ данной степени,

5) алгебраическая функція безъ упомянутаго ограниченія

6) формы $e^{\int \xi\, dx}$ гдѣ ξ раціональная функція.

Упомянутыя выше изслѣдованія Льювиля находятся въ тѣсной связи съ его изслѣдованіями, относящимися къ изысканію цѣлыхъ и раціональныхъ интеграловъ и интеграловъ формы $[\chi]^{\lambda}$ и съ его изслѣдованіями относящимися къ 4-ой изъ намѣченыхъ выше проблеммъ. Мы не будемъ разбирать классическія изслѣдованія Фукса, Шварца и Клейна, относящіяся къ алгебраическому интегрированію линейныхъ уравненій 2-го порядка, остроумнѣйшимъ образомъ связующія алгебраическое интегрированіе уравненій съ теоріей инваріантовъ и коваріантовъ. Историческія и библіографическія данныя, относящіяся къ этого рода изслѣдованіямъ можно найти въ работахъ:

С. Е. Савича: О линейныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ правильными интегралами. 1892 г.

Д. М. Синцова. Раціональные интегралы линейныхъ уравненій. 1898 г.

Н. М. Гюнтеръ. О приложеніяхъ алгебраическихъ формъ къ интегрированію линейныхъ дифференц. уравненій. 1903 г.

Для нашихъ изслѣдованій имѣютъ значенія кромѣ Льювилевскихъ изслѣдованій, относящихся къ раціональнымъ интеграламъ только изслѣдованія Жордана и Пенлевэ.

Первыя, потому что содержатъ результатъ дающій возможность смотрѣть на проблемму алгебраическаго интегрированія, какъ на проблемму болѣе простую, чѣмъ изслѣдуемая нами, считать ее въ нѣкоторыхъ случаяхъ рѣшенной и сводить нашу болѣе общую проблемму къ проблеммѣ алгебраическаго интегрированія. Вторыя, потому что въ нихъ мы почерпали тѣ идеи, которыя легли въ основаніи нашихъ методъ, излагаемыхъ во второй части нашего сочиненія. Результатъ Жордана, полученный имъ при помощи изслѣдованія конечныхъ линейныхъ группъ можетъ быть формулированъ въ слѣдующей (болѣе общей формѣ, чѣмъ его излагаетъ Жорданъ).

Если линейное уравненіе

$$y^{(n)} + p_1(x, u)\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots p_{n-1}(x, u)\, y' + p_n(x, u)\, y = 0$$

алгебраически интегрируемо, то оно имѣетъ частный интегралъ формы

$$\bar{y} = e^{\int \xi\, dx},$$

гдѣ ξ опредѣляется уравненіемъ

$$\varphi_0(x, u)\, \xi^{\sigma} + \varphi_1(x, u)\, \xi^{\sigma-1} + \ldots \varphi_{\sigma-1}(x, u)\, \xi + \varphi_\sigma(x, u) = 0$$

гдѣ $\varphi_i(x, u)$ раціональныя функціи отъ (x, u) для степени σ всегда существуетъ высшая граница въ зависимости отъ n.

При этомъ конечно

$$\xi = \frac{1}{\lambda}\, lg\, \chi$$

гдѣ χ алгебр. функція, λ цѣлое число.

Для случая $n=1$ очевидно

$$\sigma=1$$

Для $n=2$ Жорданъ находитъ, что

$$\sigma \leqq 5$$

для $n=3$ $\sigma \leqq 9$

Въ краткой замѣткѣ Пенлевэ указываетъ для случая, когда p_i раціональныя функціи отъ x, какимъ образомъ можетъ быть построено рѣшеніе $\overline{y}$, когда высшая граница σ задана и такимъ образомъ задачу алгебраическаго интегрированія сводитъ къ приведенію Абелева интеграла

$$\int \xi \, dx$$

къ одному логариѳму, задачѣ изслѣдованной Абелемъ, Чебышевымъ Золотаревымъ, Пташицкимъ, Долбней и т. д.

Замѣтимъ, что изъ изслѣдованій Жордана для случая $n=2$ можно вывести при $\sigma > 2$ и высшую границу для λ, а при этихъ условіяхъ, какъ извѣстно, при настоящемъ состояніи науки приведеніе $\int \xi dx$ къ одному логариѳму совершается при помощи конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій. Къ сожалѣнію въ этомъ направленій, имѣются только работы Жордана и Пенлевэ. Къ изысканіямъ интеграловъ линейныхъ уравненій въ трансцендентныхъ формахъ относятся:

Изслѣдованія Кенигсбергера,

Обнародованныя имъ въ нѣсколькихъ работахъ, и собранныя ва сочиненіи:

Allgemeine Untersuchungen aus der Théorie der Différentialgleichungen. Leipzig. 1882.

изслѣдованія Кенигсбергера касаются болѣе общаго вопроса, чѣмъ изысканіе интеграловъ опредѣленныхъ формъ. Кенигсбергеръ занимается въ нѣкоторомъ смыслѣ и первой проблеммой, значительно ее съузывая.

Во всѣхъ своихъ многочисленныхъ изслѣдованіяхъ Кенигсбергеръ ограничивается изысканіемъ формъ интеграловъ дифференціальныхъ уравненій, выражаемыхъ алгебраическими функціями отъ основныхъ трансцендентныхъ 1-го класса, принимая за основныя трансцендентныя, какъ элементарныя трансцендентныя такъ и функціи, выражаемыя Абелевыми интегралами. Онъ такимъ образомъ разсматриваетъ вездѣ не проблемму интегрированія въ конечномъ видѣ въ Льювилевскомъ смыслѣ: а *проблемму опредѣленія интеграловъ въ формѣ трансцендентной перваго класса.*

Мы сказали, что Кенигсбергеръ за основныя трансцендентныя принимаетъ или элементарныя трансцендентныя (по нашей терминологіи [*elm*]) или Абелевы интегралы ([*ab*]).

Но слѣдуетъ прибавить, что его обшая теорема, являющаяся главной основой его доказательства, содержитъ въ себѣ результатъ, относящійся къ наиболѣе общему случаю, когда за основныя трансцендентныя приняты рѣшенія другихъ алгебраическихъ дифференціальныхъ уравненій т. е. къ проблеммѣ о выражаемости рѣшенія одного алгебраическаго дифференціальнаго уравненія въ алгебраической функціи отъ рѣшеній другихъ дифференціальныхъ уравненій.

Кенигсбергеръ доказываетъ, что, если существуетъ между частнымъ интеграломъ какого либо алгебр. дифф. уравненія, рядомъ ея производныхъ и частнымъ интеграломъ неприводимаго дифференціальнаго уравненія и его производными алгебраическое соотношеніе, то оно остается въ силѣ, если вмѣсто интеграла неприводимаго дифференціальнаго уравненія поставить другой произвольный, замѣняя при этомъ интегралъ другого уравненія нѣкоторымъ другимъ, надлежаще выбраннымъ.

Изслѣдованія Кенигсбергера относятся

1) къ алгебраическимъ и алгебраическо-логариѳмическимъ интеграламъ неоднороднаго линейнаго уравненія

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\ldots p_n y=Z.$$

Кенигсбергеръ доказываетъ, что

α) въ томъ случаѣ когда приведенное уравненіе

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\ldots p_n y=0$$

не имѣетъ алгебраическаго интеграла или имѣетъ раціональный, то неоднор. уравненіе имѣетъ обязательно частный интегралъ, раціонально выражаемый въ

$$p_1 p_2 \ldots p_n, Z.$$

β) въ томъ случаѣ, когда приведенное уравненіе не имѣетъ интеграла, равнаго lgv (логариѳму алгебр. функціи) или имѣетъ интеграла lgv, при условіи, что v раціональная функція, то неоднор. уравненіе обязательно имѣетъ интегралъ послѣдняго типа.

γ) Кенигсбергеръ изслѣдуетъ въ какой формѣ долженъ приводиться интегралъ неоднороднаго ур. типа:

$$y=f(x, lgv_1, lgv_2 \ldots lgv_p)$$

гдѣ f алгебраическая функція, v_i алгебр. фун. отъ x и находитъ, что въ томъ случаѣ, когда приведенное уравненіе не имѣетъ интеграловъ этого типа, то форма его должна быть

$$Z=\sum u_i lgv_i+u$$

гдѣ u, u_i, v_i, и алгебр. функціи отъ x.

Наибольшее значеніе имѣютъ изслѣдованія Кенигсбергера, относящіяся къ дальнѣйшихъ упрощеніемъ этой формы, въ томъ случаѣ когда u, u_i раціональныя функціи. А именно въ этомъ случаѣ устанавливается существованіе интеграла типа

$$y=\overline{u}+\sum \overline{u}_i lg\overline{v}_i$$

гдѣ $\overline{u}, \overline{u}_i, \overline{v}_i$ раціональныя функціи и обобщеніе этой теоремы на случай расширенія области основныхъ трансцендентныхъ введеніемъ Абелевыхъ интеграловъ.

Всѣ эти изслѣдованія имѣли большое вліяніе на изслѣдованія II главы II части нашего сочиненія.

Къ сожалѣнію Кенигсбергера преимущественно интересуютъ не общія задачи, а задачи очень узко поставленныя. Его преимущественно интересуетъ формы интеграловъ при различныхъ ограниченіяхъ, налагаемыхъ на z. Объ этихъ изслѣдованіяхъ, не имѣющихъ вліянія на нашу работу мы не будемъ говорить.

Методы и главные результаты настоящей работы.

Укажемъ теперь схему нашего изслѣдованія:

A) *Изысканіе формъ, въ которыхъ представляется интегралъ линейнаго дифференціальнаго уравненія въ томъ случаѣ, когда онъ выражается въ конечномъ видѣ*, причемъ проблемма эта понимается въ смыслѣ изысканія выраженія y съ помощью нѣкоторыхъ трансцендентныхъ.

При этомъ мы изслѣдуемъ:

1) интегрированіе съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ,

2) интегрированіе съ помощью элем. трансцендентныхъ и функцій, выражаемыхъ Абелевыми интегралами

3) интегрированіе въ квадратурахъ.

Затѣмъ нами изслѣдуются *подробно* случаи I) алгебраическихъ линейныхъ уравненіи

1) однородныхъ (II Глава I части),

2) неоднородныхъ (III глава I части),

II) трансцендентныхъ съ алгебраическими коэффиціентами и съ послѣднимъ членомъ, равнымъ трансцендентной особаго типа, а, именно, цѣлой функціи отъ показательныхъ и логариѳмическихъ функцій съ алгебраическими коэффиціентами (III главы B) I части).

Вкратцѣ мы останавливаемся на трансцендентныхъ уравненіяхъ болѣе общаго типа.

Главные результаты нами полученные:

1) доказано существованіе, такъ называемаго, основного интеграла однород. уравненія въ случаѣ выражаемости y въ квадратурахъ:

$$e^{\int \xi\, dx} \tag{1}$$

гдѣ ξ алгебраическая функція (док. въ § 30); въ случаѣ выражаемости y въ конечномъ видѣ съ помощью элемент. трансцендентныхъ (§ 32)

$$e^{\omega}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}\cdots[\chi_n]^{\lambda_n} \tag{2}$$

ω, χ_i алгебраическія функцій, λ_0 раціональное λ_i ирраціональныя числа.

Подобный же результатъ полученъ и для случая Абелевыхъ интеграловъ.

2) Выведена форма интеграла y однороднаго уравненія

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{3}$$

выражаемаго въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ. Эта форма слѣдующая (§ 37)

$$y = \sum e^{\omega}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}\dots[\chi_r]^{\lambda_r}[lg\vartheta_1]^{\nu_1}[lg\vartheta_2]^{\nu_2}\dots[lg\vartheta_p]^{\nu_p} \tag{4}$$

гдѣ $\omega, \chi_i, \vartheta_j$ алгебраическія функціи отъ x, λ_0 раціональное, λ_j ирраціональныя, ν_i цѣлыя положительныя числа $\leqslant n-1$.

Формула эта обобщается на случай выражаемости y съ помощью Абелевыхъ интеграловъ.

3) Выведена форма интеграла Y неоднороднаго уравненія

$$Y^{(n)}+p_1 Y^{(n-1)}+\ldots p_{n-1} Y'+p_n Y=P \qquad (5)$$

гдѣ p_i, P алгебраическія функціи, выражаемаго въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ,

4) доказано существованіе простѣйшаго частнаго рѣшенія неоднороднаго уравненія типа (§ 45):

$$Y=\sum\rho\,[lg\vartheta_1]^{\pi_1}[lg\vartheta_2]^{\pi_2}\ldots[lg\vartheta_p]^{\pi_p}+$$

$$+\Theta+\sum_{i=1}^{i=k}\psi_i\,lg\,\Theta_i \qquad (6)$$

гдѣ $\rho, \vartheta_i, \Theta, \Theta_i$ алгебраическія функціи отъ x Выводъ этихъ главныхъ теоремъ потребовалъ длинную цѣпь разсужденій, въ основѣ коихъ лежатъ нѣкоторыя свойства трансцендентныхъ, выражаемыхъ въ конечномъ видѣ изученію которыхъ мы посвящаемъ I главу I части постояннаго сочиненія.

Какъ при изложеніи основныхъ свойствъ трансцендентныхъ, такъ и при выводѣ формъ y и Y мы пользовались методами Льювиля, но, какъ не трудно видѣть, пришлось при этомъ преодолѣть многіе трудности, которыя являются при переходѣ отъ весьма частнаго случая къ общему.

Найденныя формы содержатъ еще много неопредѣленности.

Мы должны точнѣе опредѣлить эти формы. Такъ, напр. если

$$e^{\int\xi\,dx}$$

интегралъ уравненія

$$y^{(n)}+p_1(x,u)\,y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1}(x,u)\,y'+p_n(x,u)\,y=0 \qquad (3)$$

гдѣ $p_i(x,u)$ раціональныя функціи x и u, опредѣляемаго алгебр. уравненіемъ

$$\varphi(x, u) = 0,$$

то слѣдуетъ поставить задачу объ опредѣленіи степени уравненія (или высшей границы ея) опредѣляющаго ξ въ (x, u).

Такъ если

$$Y = \Theta + \sum \phi_i \, lg \, \Theta_i$$

интегралъ неоднороднаго уравненія, слѣдуетъ поставить задачу о степени уравненія опредѣляющаго Θ, Θ_i и т. д.

Согласно терминологіи работы: „О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ" мы должны перейти отъ „схемы къ формѣ". Это

B) Дальнѣйшее опредѣленіе формъ y и Y представляетъ труднѣйшій моментъ изслѣдованія.

Здѣсь впервые обнаруживается на первый взглядъ странный фактъ. При рѣшеніи вопроса объ интегрированіи дифференціальныхъ уравненій мы должны разсматривать всегда особо 2 случая:

1) алгебраическій,

2) трансцендентный интегралъ.

Первый случай вообще труднѣе изслѣдуется, чѣмъ второй и требуетъ совершенно особыхъ методъ.

Переходъ отъ схемы къ формѣ т. е. опредѣленіе высшей границы для степени уравненія представляетъ въ этомъ случаѣ большія трудности.

Случай алгебраическаго интегрированія подробно мы не разсматриваемъ; цѣлью нашей работы является или *сведеніе интегрированія въ конечномъ видѣ къ алгебраическому интегрированію или его выполненіе.*

Мы ссылаемся, не возпроизводя ихъ, на изслѣдованія Жордана доказавшаго существованіе въ случаѣ алгебраической интегрируемости однороднаго уравненія, высшей границы въ функціи отъ n для степени ур., опредѣляющаго ξ и нашедшаго для случая $n = 2$ эту границу равной 5, для $n = 3$ равной 9.

Вотъ результаты нами полученныя дополняющія результаты Жордана:

1) Каждое основное рѣшеніе уравненія (*), не представляющая алгебраическую функцію равно произведенію $y_1 y_2$ гдѣ y_2 алгебр. функція y_1 трансцендентная вида $e^{\int \xi_1 dx}$, гдѣ ξ, опредѣляется уравненіемъ степени не выше n (§ 64)

2) Мы указываемъ случаи, когда можно опредѣлить эту границу на основаніи нѣкоторыхъ данныхъ, напр. числа регулярныхъ интеграловъ (т. е. интеграловъ, содержащихъ логариѳмы и т. д.);

3) Выводимъ для случая неоднороднаго алгебраическаго уравненія теорему, аналогичную извѣстной теоремѣ Абеля, относящейся къ диффер. уравненію

$$y' = p(x, u),$$

а именно доказываемъ (§ 83) существованіе простѣйшаго интеграла типа

$$\sum\sum e^{\omega(x, u\, t)} [\chi_0(x, u, t)]^{\lambda_0} \ldots [\chi_n(x, u, t)]^{\lambda_m}$$

$$[lg\vartheta_1(x, u, t)]^{\mu_1} \ldots [lg\vartheta_i(x, u, t)]^{\mu_i+1} \ldots [lg\vartheta_q(x, u, t)]^{\mu_q}$$

$$+ \rho_0(x, u, t) + \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i(x, u\, t)\, lg\, \Theta_i(x, u, t)$$

если интегралъ приведеннаго уравненія типа (4).

Эту теорему обобщаемъ на случай интегрированія съ помощью Абелевыхъ интеграловъ и на случай трансцендентнаго уравненія съ послѣднимъ членомъ особаго типа.

C) Методы интегрированія, вытекающія изъ этихъ изслѣдованій.

Получивъ формы для интеграловъ, выражаемыхъ въ конечномъ видѣ, мы сводимъ задачу объ интегрированіи въ конечномъ видѣ къ задачѣ о разысканіи интеграловъ опредѣленной формы. Если задача послѣдняго рода невозможна т. е. невозможно существованіе интеграла простѣйшей формы (напр. основного въ случаѣ интегрированія въ квадратурахъ), то получается *доказательство неинтегрируемости въ конечномъ видѣ.*

Основная идея лежащая въ основѣ этихъ изслѣдованіи состоитъ въ слѣдующемъ: Изъ формы y вытекаютъ нѣкоторыя аналитическія свойства этой функціи напр. отсутствіе особенныхъ точекъ опредѣленнаго рода.

Но изслѣдованіе общими методами интеграла линейнаго уравненія устанавливаетъ необходимое присутствіе такихъ точекъ, откуда выводится заключеніе о невозможности существованіе y этой формы т. е. y, выражаемаго въ конечномъ видѣ.

Положимъ для примѣра, что одно изъ рѣшеній заданнаго линейнаго уравненія въ случаѣ интегрируемости въ конечномъ видѣ имѣетъ обязательно рѣшеніе типа

$$[\chi(x)]^{\lambda}$$

$\chi(x)$ рац. функція, λ постоянное.

Положимъ далѣе, что мы убѣдились что линейное уравненіе не можетъ имѣть регулярныхъ рѣшеній. Ясно, что отсюда будетъ вытекать, что данное уравненіе неинтегрируемо въ конечномъ видѣ.

Такихъ примѣровъ доказательствъ неинтегрируемости въ работѣ много. Въ числѣ примѣровъ находится уравненіе 2-го порядка, къ которому приводится уравненіе Рикатти.

Такимъ путемъ достигаются *отрицательные* результаты.

Но та же метода даетъ и положительныя результаты, въ большинствѣ случаевъ мы можемъ или убѣдиться, что интегрированіе въ конечномъ видѣ невозможно или найти рѣшеніе въ окончательномъ видѣ.

Аналитическая Теорія дифференціальныхъ уравненій даетъ возможность *упрощать* форму интеграла.

Такъ, убѣждаясь, что рѣшеніе $y = e^{\int \xi \, dx}$, гдѣ ξ раціональная функція отъ x не имѣетъ существенно особенной точки мы приводимъ его къ виду

$$y = [\chi]^{\lambda},$$

гдѣ χ раціонально и задача интегрированія въ конечномъ видѣ сводится къ извѣстной задачѣ изслѣдованной Льювилемъ.

Задача интегрированія въ конечномъ видѣ (съ помощью квадратуръ, элем. трансцендентныхъ и Абелевыхъ интеграловъ) не рѣшается *вполнѣ, а лишь сводится къ болѣе простой—къ задачѣ алгебраическаго интегрированія.*

Послѣдняя задача для $n = 2, 3$ только въ исключительныхъ случаяхъ не можетъ рѣшиться съ помощью конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій. Когда коэффиціенты однороднаго линейнаго дифференціальнаго уравненія раціональныя функціи отъ x, то въ большинствѣ случаевъ мы имѣемъ простѣйшій случай алгебраическаго интегрированія случай, когда интегралъ раціоналенъ (эта задача рѣшена еще Льювилемъ).

Вотъ основные результаты нами полученные:

1) Задача о рѣшеніи въ конечномъ видѣ ур. (3) съ помощью квадратуръ всегда можетъ быть разрѣшена съ помощью конечнаго числа алгебраическихъ операцій или сведена къ разысканій алгебраическихъ рѣшеній.

2) Задачи объ интегрированіи съ помощью элементар. трансцендентныхъ ур. (3) сводится съ помощью конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствіи или къ интегрированію въ конечномъ видѣ алгебраическихъ дифференціаловъ или къ разысканію алгебраическихъ дифференціаловъ или къ разысканію алгебраическихъ дифференціаловъ ур. (3).

3) Къ этимъ же проблеммамъ сводится и задача объ интегрированіи неоднороднаго линейнаго уравненія.

Здѣсь слѣдуетъ замѣтить, что задача объ алгебраическомъ интегрированіи однороднаго уравненія (3) сводится къ двумъ:

1) Разысканію ξ для основного алгебраическаго рѣшенія $e^{\int \xi \, dx}$,

2) Къ приведенію Абелева интеграла $\int \xi\, dx$ къ логариему $\frac{1}{\lambda} lg\chi(x, v)$.

Главная трудность при рѣшеніи первой задачи въ разысканіи высшей границы N для степени σ уравненія опредѣляющаго ξ, число N извѣстно только для $n = 1, 2, 3$. Для $n > 3$ доказано существованіе N въ функціи отъ n.

Главная трудность 2-ой задачи; разысканіе высшей границы L для цѣлаго числа λ. Эта задача рѣшена только когда кривая

$$\varphi(x, v) = 0$$

нулеваго и перваго рода.

Но слѣдуетъ замѣтить, что въ томъ случаѣ, когда $e^{\int \xi\, dx}$ алгебраическій интегралъ однороднаго линейнаго уравненія зная N мы можемъ въ большинствѣ случаевъ опредѣлить и L.

Въ этомъ послѣднемъ случаѣ, какъ извѣстно, задача о выраженіи $\int \xi\, dx$ черезъ $\frac{1}{\lambda} lg\chi(x, v)$ рѣшается конечнымъ числомъ алгебраическихъ дѣйствій

Настоящая работа напечатана на средства Варшавскаго Императорскаго Университета, за что приношу Совѣту Университета мою глубочайшую благодарность.

Пользуюсь также случаемъ выразить свою искреннюю признательность своимъ глубокоуважаемымъ коллегамъ Д. М. Синцову и С. Е. Савичу за присылку ихъ интересныхъ работъ, оказавшись весьма полезными для настоящаго труда, и А. А. Волкову за его особенную любезность, благодаря которой, находясь въ городѣ, лишенномъ серьезной научной библіотеки, я имѣлъ возможность получить нѣкоторыя, весьма необходимыя для меня, мемуары.

Bibliografiia

Библіографія.

I) Статьи, спеціально посвященныя интегрированію въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій.

a) Направленіе Максимовича.

1) *В. П. Максимовичъ.* Разысканіе общихъ дифференціальныхъ уравненій 1-го порядка, интегрируемыхъ въ конечномъ видѣ и т. д. Казань. 1885.

2) — „ — Conditions pour que les constantes abritraires d'une expression générale soient distinctes entre elles. Journal de Liouville. t. VI. 1880 г.

3) — „ — Mémoire sur les équations différentielles du 1 ordre qui s'intégèrent au moyen d'un nombre fini de quadratures C. R. 1880 г.

4) *Старковъ.* О невозможности интегрированія общаго линейнаго уравненія порядка выше второго съ помощью конечнаго числа квадратуръ. Прот. Каз. Общ. Ест. т. III стр. 256.

b) Направленіе Vessiot.

5) *E. Vessiot.* Sur l'intégration des équations différentieles linéaires. These. Paris, 1892. Ann. de l'Ec. Norm. 1891.

6) *E. Picard.* Traité d'Analyse t. III ch. XVII.

c) Направленіе Льювилля.

7) *Liouville.* Mémoire sur l'intégration d'une classe d'équa ions différentielles du second ordre en quantités finies explicites. Journal de Liouville-t. IV (1839 г.) p. 423.

8) *Liouville.* Remarques nouvelles sur l'équation de Riccati. Journal de Liouville t. VI (1841).

9) *Фельдблюмъ.* Объ уравненіи Рикатти. Варшав. Унив. Извѣстія за 1897 г.

II) *Статьи, относящіяся къ интегрированію нелинейныхъ дифференціальныхъ уравненій и алгебраическихъ дифференціаловъ, находящіяся въ связи съ настоящей работой.*

9) *Liouville.* Mémoire sur la classification des transcendantes et sur l'imposibilité d'exprimer les racines de certaines équations en fonction finie explicite des coéfficients. Journal de Liouville t. II. 1837. p. 53 t. II. 1838. p. 523.

10) *Liouville.* Intégrales dont la valeur est algébrique. Journal de Crelle B. X. 1833 u. 342.

11) *Liouville.* Sur la determination des intégrales dont la valeur est algébrique. Journal de l'Ecole Polytechnique. t. XIV ch. 22. 1833. p. 124.

12) *Abel.* Précis d'une théorie des fonctions élliptiques. Journal de Crelle B. IV 1829 или Oeuvres. t. I. p. 545.

13) *Д. Мордухай-Болтовской.* Общія изслѣдованія, относящіяся къ интегрированію въ конечномъ видѣ дифференціальныхъ уравненій перваго порядка. Статьи I и II. Сообщенія Харьковскаго Матем. Общества за 1907 и 1909 года.

13)ₐ — „ — Объ одномъ приложеніи изслѣдованій Бріо и Букэ, относящихся по дифференціанальнымъ уравненіямъ перваго порядка. Извѣстія Варшав. Полит. Инст. за 1908 г.

14) *М. Лагутинскій.* О формѣ интеграла алгебраической системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій, выраженнаго въ конечномъ видѣ. Извѣстія Харьковскаго Технологическаго Института за 1907 годъ.

III) *Статьи, относящіяся къ приведенію Абелевыхъ интеграловъ находящіяся въ связи съ настоящей работой (интегрированіе съ помощью основныхъ функцій [ab]).*

15) *Königsberger.* Uber die Reduction Abelscher Integrale, auf niedere Integral formen, specielle auf elliptische Integrale. Crelles. Journal B. 89. 1880. s. 89.

16) *Д. Мордухай-Болтовской.* О приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ. Извѣстія Варшавскаго Политехническаго Института за 1905 годъ.

IV) Статьи, относящіяся къ алгебраическому интегрированію.

17)a *Jordan.* Mémoire sur les équations différentielles linéaires à l'intégrale algébrique. Journal de Crelle t. 84 p. 89.

17)b — „ — Dètermination des groupes formés d'une nombre fini de Substitutions Comptes Rendus LXXXIV p. 1446:

18) *Jordan.* Cours d'Analyse t. III.

19) *Jordan.* Sur la détermination des groupes d'ordre fini contenus dans la groupe linéaire. Atti della reale Academia di Neapoli. Vol. VIII. 1878 г.

20) *Painlevé.* Sur les équations différentielles linéaires à coèfficients algébrques. Comptes Rendus t. 106. p. 535 и t. 105 p. 58.

21) *С. Е. Савичъ.* О линейныхъ обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненіяхъ съ правильными интегралами. 1892.

22) *Д.* М. *Синцовъ.* Раціональные интегралы линейныхъ уравненій. Казань. 1898 г.

Работы, не имѣвшіе вліянія не указаны.

Подробную библіографію по алгебраическому интегрированію можно найти въ диссертаціи Гюнтера. О приложеніяхъ теоріи алгебраическихъ формъ къ интегрированію линейныхъ диф. урав. Спб. 1903 г.

V) Статьи по изысканію рѣшеній дифференціальныхъ уравненій опредѣленныхъ трансцендентныхъ формъ.

23) *Köenigsberger.* Ueber algebr.—logarithmischen Integrale nicht homogener linearer Differentialgleichungen. Gött. Nachr. 1880. 453—455.

24) Ueber algebraiche Beziehungen zwischen Integralen verschiedener Deifferentialgleichungen und deren Differential quotienten. Crelle's Journal. B. 91. (1881). s. 199—214.

25) Ueber algebraich—logaritbmische Integrale nich homo-

gener linearer Differentialgleichungen. Crelle's. Journal. B. 90 (1881) s. 267—280.

26) Eingenschaften der algebraisch-logarithmischen Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Crelle's Journal. B. 94 (1883). s. 291—311.

27) Ueber Eingenschaften der durch Quadraturen algebraicher Functionen darstellbaren Integrale linearer nicht homogener Differentialgleichungen. Crelle's Journal. B. 99. (1886) s. 10—87.

28) Allgemeine Untersuchungen aus der Théorie der Differentialgleichungen. Leipzig. 1882.

29) Lehrbuch der Theorie der Differentialgleichungen. Leipzig. 1889.

30) *A. Markoff.* Sur les équations différentielles linéaires. Comptes Rendus v. 113 (1891).

ДОПОЛНЕНІЕ.

Интегрированіе въ конечномъ видѣ въ настоящее время такъ мало интересуетъ заграничныхъ математиковъ, что въ извѣстной:

„Encyklopädie der Mathematischen Wissenschaften" Bd. II, Heft. 1. (W. Wirtinger. Algebraische Functionen und Ihre Integralen.) почти нѣтъ библіографическихъ указаній относящихся къ этого рода изслѣдованіямъ. Въ Россіи интересъ къ этимъ вопросамъ за послѣдніе годы тоже сильно пониженъ. Считая, тѣмъ не менѣе, что проблемма интегрированія въ конечномъ видѣ не должна быть окончательно обойдена русскими математиками, какъ проблемма, намъ завѣщанная П. Л. Чебышевымъ, основателемъ Петербургской математической школы и что именно въ этой еще мало изслѣдованной области молодые математики могутъ найти больше всего темъ для самостоятельной работы, я въ дополненіе къ вышеизложенному привожу насколько возможно полную литературу, относящуюся къ интегрированію въ конечномъ видѣ алгебр. дифференціаловъ, пополняя такимъ образомъ пробѣлъ той книги, которая въ настоящее время служитъ справочной книгой для всякаго ведущаго самостоятельныя изслѣдованія.

Литература по интегрированію въ конечномъ видѣ алгебраическихъ дифференціаловъ.

A) Примѣры интеграловъ, выражаемыхъ въ конечномъ видѣ.

1) *Leibnitz.* Mathem. Schriften B. 5.

2) *I. Bernoulli.* Opera t. I.

3) *Euleri.* Institutiones Calculi Integralis t. IV (1776).

4) *Hospitalii.* Calculus Infinitesimalis. pars II seu Calculus Integralis. 1764.

5) *Legendre.* Traité des fonctions élliptiques. t. I. ch. XXVI

6) *Fuss.* Письмо въ Bulletin de Darboux за 1879 p. 226.

7) *Clausen.* Ueber ein Integral in Legendre's Traité. Astron. Nach. № 442. Arch. Mathem. und Physik B. III s. 335.

6) *Realis.* Questions proposées au n° 102. Mathesis II p. 40.

7) *Gunther* Sur l'évolution de certaines integrales pseudo-elliptiques. Bull. de la Sc. Mat de France. 1882.

8) *Mallet.* Two theorems in integration. Annali di Mathematica pura ed applicada. t. V p. 252.

9) *Буняковскій.* О нѣкоторыхъ частныхъ случаяхъ интегрируемости. Приложеніе къ III тому Записокъ Академ. Наукъ 1864 г.

10) *Hermite.* Sur une formule d'Euler. Journal de Liouville (1880). S. 3. t. VI.

11) *Goursat.* Note sur quelques intégrales pseudo-elliptiques. Bulletin de la Societé Math. de France t. XV (1884).

12) *Raffy.* Sur les transformations invariantes des differentelles élliptiques. Bull. de la Soc. Math. t. XII (1884) p. 51.

13) *И. Долбня.* О логариѳмическомъ выраженіи интеграла

$\int \frac{dx}{\sqrt[4]{x^4+px^2+q}}$. Мат. Сб. XVIII ст. 118—121. Darboux. Bulletin (2) XIX стр. 76—84.

14) — „ — Изслѣдованія про теоріи Абелевыхъ интеграловъ. Диссертація пред. въ Горный Институтъ. 1890 г.

15) — „ — Sur le deceloppement de $\sqrt{R}$ en fonction vontinue Nouv. Ann. (3). X. p. 134.

16) Sur les intégrales pseudo-elliptiques qui dependent d'une racine cubique d'un polynôme du troisième degrè. Bull. de Darboux. XVII (1893) p. 125—138.

17) — „ — Sur les intégrales pseudo-elliptiques qui dependent des racines radicaux du 4—6 degré. Bull. de Darboux. XVII (1893) p. 288—292.

18) *Burnside* Note on pseudo-ellipt. integrals. The Messenger of Mathematics. London. 1892.

19) *Greenhill.* Pseudo-elliptic. integrals. London. Mess 1894.

20) *А. Марковъ.* О псевдоэллиптическихъ интегралахъ вида $\int \frac{x dx}{(x^3+c)\sqrt{x^3+d}}$. Спб. 1894.

21) *Д. Мордухай-Болтовской.* Объ инваріантныхъ преобразованіяхъ ультраэллиптическихъ интеграловъ. Сообщенія Харьк. Мат. Общества за 1903 годъ.

В) Изысканіе формы, въ которой выражается Абелевъ интегралъ, выражаемый въ конечномъ видѣ.

1) *Liouville.* Mémoire sur classification и т. д. Journal de Liouville t. II 1837 p. 53 t. II 1738 p. 52.

2) *Liouville.* Mémoire sur l'intégration d'une classe de fonctions transcendantes. Journal de Crelle. XIII p. 93.

3) *Liouville.* Sur la determination des integrales dont la veleur est algébrique Journal de l'Ecole Polytechnique t. XIV ch. 22.

4) — „ — Note sur la détermination des intégrales dont la valeur algébrique. Journal de Crelle t. X p. 347.

5) *Liouville.* Transcendantes élliptiques de premier et de second espéce, considérées, comme fonctions de leur amplitude. Journ. de Liouville t. V.

6) *Abel.* Précis des fonctions élliptiques. Oeuvres t. I p. 578. Journal de Crelle t. IV. 1829.

7) *I. Сомовъ.* Разсужденія объ интегрированіи алгебраическихъ ирраціональныхъ дифференціаловъ съ одной перемѣнной. Москва, 1841 г. стр. 88.

8) *Piuma.* Sulla determinazione della parte algebraica nell' integrazione in funzione finita explicite. Annali di Mathematica pura ed applicada. p. 157—170. t. IV. Anno 1861.

9) Proprieta di una classe d'integrali di irrazionali algebrici possibili cen soli logaritmi. Annali di Matematica pura ed applicada. T. IV. Anno 1861. p. 5—21.

10) *H. Laurent.* Traité d'Analyse t. IV. Calcul Intégral Ch. V p. 145.

C) Изысканіе условій, необходимыхъ и достаточныхъ интегрируемости въ конечномъ видѣ.

1) *Abel.* Sur l'intégration de la formule différentielle $\frac{\rho\, dx}{\sqrt{R}}$, R et ρ étant fonctions entières. Oeuvres t. I p. 104. Journal de Crelle Bd. I. 1826.

2) *Abel.* Théorie des transcendentes élliptiques. Oeuvres t. II.

3) *П. Чебышевъ.* Sur l'intégration des différentielles irrationnelles. Journal de Liouville 1 s. t. XVIII. 1853 p. 87—11 Сочиненія т. I стр. 145.

4) — „ — Sur l'intégration de la différentielle $\frac{x+A}{\sqrt{x^4+\alpha x^3+\beta x^2+\gamma x+\delta}}$. Bull. de l'Ac. de Sciences. de S. Ptr: t. III (1861) p. 1—12 Сочиненія т. I стр. 515.

5) — „ — Объ интегрированіи дифференціаловъ, содержащихъ кубическій корень. Приложеніе къ VII тому Записокъ Ак. наукъ. Сочиненія т. I стр. 561.

6) — „ — Sur l'intégration des différentieles qui contiennent une racine carrée d'un polynome du 3 et 4-me degre. Journal de Liouville 25. t. II 1857.

7) *Weierstrass.* Sur l'intégration par les logarithmes des différentielles algébriques. Monatsberichte der Berlin. Ak. 1857.

8) *E. Золотаревъ.* Sur la méthode d'intégration de M. Tchébycheff. Journal de Liouville 2 Série. t. 19.

9) — „ — Теорія цѣлыхъ комплексныхъ чиселъ Спб. 1879.

10) *Koenigsberger.* Ueber die Reduction hyperelliptischer

Integrale auf algebraisch logarithm. Functionen. Math. Ann. XI (1877) s. 119—144.

11) — „ — Vorlesungen. ueber hyperelleptisch. Integralen.

12) *Ptasczycki.* Extrait d'une lettre à M. C. Neumann. Math. Ann. XVI (1879).

13) *Pick und Ungar.* Grundzüge einer Thèorie ron einer Classe Abelscher Integrale. Wien. Ber. 1880. б. 891.

14) *И. Пташицкій.* Объ интегрированіи въ конечномъ видѣ ирраціональныхъ дифференціаловъ. Спб. 1881.

15) — „ — Sur l'intègration des diffèrentielles algèbriques. Acta Math. XI. p. 395.

16) — „ — Объ интегрированіи эллиптическихъ дифференціаловъ. Спб. 1888.

17) *I. Schacht.* Reductilbarkeit ellipt. und hyperellipt. Integrale auf Logar. nach der Methode von. Abel. Programmabhandlung der Pr. Kgl. Mariengymnasium. Posen 4° 1886.

18) *Halphen.* Sur les intégrales pseudoelliptiques. Comptes Rendus. CVI. (1888).

19) — „ — Traité des fonctions élliptiques. II p. ch XIV.

20) *Guichard.* Sur les intégrales $\int \frac{G(x)\,dx}{\sqrt{(x)}}$ Ann. de l'Ec. Norm. (1888) S. 3 t. V.

21) *Raffy.* Sur les quadratures algébriques et logaritmiques Ann. de l'Ec. Norm. S. 3 t. II (1885).

22) *И. Долбня.* Новое доказательство теоремы Абеля и т. д. Протоколы Каз. Общ. Естеств. за 1888.

23) — „ — О псевдо-эллиптическихъ интегралахъ Абеля. Прот. Каз. Об. Ест. за 1890 г.

24) *Pick* Ueber die Integration hyperellipt. Differentiale durch Logarithmen. Wienerberichte. B. LXXXIII (1881).

25) *Goursat.* Sur les intégralés qui s'expriment par des logarithmes. Comptes Rendus CXVIII (1894).

26) *Appell et Goursat.* Théorie des fonctions algébriques et de leurs intégrales. Paris 1895 ch. VII p. 354.

27) *И. Пташицкій.* Общія предложенія объ интегрированіи въ конечномъ видѣ Абелевыхъ интеграловъ. Мат. Сб. т. 21 стр. 387—430.

28) — „ — Sur la réduction d'un probleme algébrique. C. R. CXXX p. 105. Prac. mat. fis. 11.

29) *К. Поссе.* О функціяхъ ϑ отъ двухъ аргументовъ и о задачѣ Якоби. Прибавленіе стр. 50.

30) *Д. Мордухай-Болтовской.* Объ опредѣленіи въ конечномъ видѣ Абелевыхъ интеграловъ. Мат. Сб. т. XXVI (1906).

I ГЛАВА

Свойства основныхъ трансцендентныхъ

а) Предварительныя свѣдѣнія.

1) Постановка проблемы объ интегрированіи въ конечномъ видѣ.

Интегрированіемъ дифференціальнаго уравненія называется нахожденіе его наиболѣе общаго рѣшенія.

Таково обычное опредѣленіе интегрированія. Но опредѣленіе это въ силу присущей ему неопредѣленности требуетъ разъясненій.

Вѣдь нахожденіе рѣшенія можно понимать въ нѣсколько различныхъ смыслахъ.

I) Можно ставить своей цѣлью нахожденіе такого выраженія для общаго рѣшенія y даннаго дифференціальнаго уравненія

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, y^{(n-2)}, \dots y', y, x) = o$$

которое бы давало возможность вычислять y, когда даны значенія $y, y', y'' \dots y^{(n-1)}$ для частнаго значенія $x = a$. Тогда цѣль можетъ считать достигнутой, рѣшеніе можно считать найденнымъ, уравненіе проинтегрированнымъ даже тогда, когда для y найдено разложеніе

$$y = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots\ldots$$

въ безконечный рядъ.

Такъ, если намъ удалось представить рѣшеніе линейнаго уравненія второго порядка:

$$y'' = xy$$

въ видѣ разложенія

$$y = c_1\left[1 + \frac{x^3}{3!} + \frac{1.4\,x^6}{6!} + \ldots\ldots\right] + c_2\left[x + \frac{x^4}{4!}2 + \frac{2.5.x^7}{7!} + \ldots\right]$$

то интегрированіе мы считаемъ совершеннымъ. Единственныя требованія которыя могутъ быть выставлены съ точки зрѣнія математической строгости, для того, чтобы задача могла считаться вполнѣ завершенной состоятъ:

1) въ строгомъ доказательствѣ сходимости разложенія,

2) въ опредѣленіи степени погрѣшности при взятіи опредѣленнаго числа членовъ въ приближенномъ выраженіи y.

$$a_0 + a_1 x + a_2 x + \ldots a_m x_m$$

Выполненіе этихъ требованій представляетъ серьезныя затрудненія.

Это точка зрѣнія *приближеннаго вычисленія.*

II) Другая точка зрѣнія состоитъ въ слѣдующемъ.

Рѣшеніе считается найденнымъ, уравненіе проинтегрированнымъ, если рѣшеніе нами построено съ помощью конечнаго числа напередъ заданныхъ, намъ извѣстныхъ операцій.

Напримѣръ, если рѣшеніе y мы въ состояніи выразить въ x при помощи сложенія, вычитанія умноженія, дѣленія, возведенія въ степень и извлеченія корня, то интегрированіе считаемъ завершеннымъ. Мы можемъ считать его также завершеннымъ, если къ упомянутымъ заданнымъ операціямъ прибавили имъ другія: рѣшеніе алгебраическаго уравненія, операціи, означаемыя символами

$$sin, cs, tg, ctg \text{ и т. д.}$$

наконецъ

$$\text{операцію} \int$$

Интегрированіе уравненій, понимаемое въ этомъ смыслѣ даетъ не только средство вычисленія, но также опредѣляетъ свойства функціи y, связь ея съ уже изслѣдованными функціями.

Интегрированіе уравненія такимъ образомъ состоитъ въ построеніи при помощи конечнаго числа операцій общаго рѣшенія дифференціальнаго уравненія:

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)} \dots y', y, x) = o$$

Въ отличіе отъ интегрированія въ I случаѣ мы будемъ называть его *интегрированіемъ въ конечномъ видѣ.*

Задачу объ интегрированіи въ конечномъ видѣ дифференціальнаго уравненія можно формулировать еще слѣдующимъ образомъ:

Даны опредѣленнаго типа функціи:

$$\varphi_0 (u_1, u_2, u_3 \dots\dots\dots)$$

$$\varphi_1 (u_1, u_2, u_3 \dots\dots\dots)$$

$$\varphi_2 (u_1, u_2, u_3 \dots\dots\dots)$$

$$\dots\dots\dots\dots\dots$$

Эти функціи могутъ быть опредѣляемы весьма различно, начиная съ вполнѣ точнаго опредѣленія $[\varphi_i = sin\, u]$ и кончая указаніемъ только весьма общаго свойства φ_i $[\varphi_i = \int u\, dx]$ или весьма общей категоріи, къ которой φ_i принадлежитъ [φ_i алгебраическая функція] функціи φ_i будетъ называть *основными функціями.*

Обозначая φ основную функцію вообще, безъ указанія, къ какому изъ типовъ φ_i она принадлежитъ, беремъ

$$\varphi(x, x, x \ldots\ldots)$$

это будетъ *построеніе I-го класса.*

Функція

$$\varphi[\varphi(x, x, x\ldots), \varphi(x, x, x\ldots\ldots), \varphi(x, x, x\ldots\ldots)\ldots\ldots]$$

будетъ *построеніемъ второго класса*

$$\varphi\}\varphi[\varphi(x, x, x.)\ldots.], \varphi[\varphi(x, x, x\ldots)\ldots]\ldots.\}$$

построеніе третьяго класса и т. д.

Интегрировать данное уравненіе это значитъ найти одно изъ построеній выражающихъ y, общее рѣшеніе этого уравненія. Рѣшеніе уравненія перваго порядка:

$$x^2 + xy + y^2 = x^2 y'$$

если

$$y = x\, tg\, [lg\, Cx]$$

Оно выражается въ конечномъ видѣ, если принять за основныя функціи:

1) алгебраическія,
2) тригонометрическія,
3) логариѳмическія,

φ_0 алгебр. ф.
$\varphi_1 = sin u$
$\varphi_2 = lg u$ и т. д.

$$y = \varphi_0[\varphi_0(x), \varphi_1\{\varphi_2[\varphi_0(x)]\}]$$

или отбрасывая значки, какъ выше, имѣемъ построены 4-го класса

$$y = \varphi[\varphi(x), \varphi\{\varphi[\varphi(x)]\}]$$

Конечно, разъ основныя функціи φ неопредѣлены, не можетъ быть рѣчи о проблеммѣ интегрированія въ конечномъ видѣ.

Мы ограничиваемся случаемъ, наиболѣе простымъ, когда всѣ основныя функціи кромѣ алгебраической $\varphi_0[u_0, u_1, u_2 \ldots\ldots]$

т. е. всѣ *основныя трансцендентныя* представляютъ функціи отъ одного аргумента. Ниже будетъ поставлено нѣсколько проблемъ относящихся къ различнаго рода основнымъ трансцендентнымъ, но изслѣдовать будемъ только тотъ, наиболѣе интересовавшій и вмѣстѣ съ тѣмъ наиболѣе поддающійся изслѣдованію случай, когда основными трансцендентными являются:

I) 1) показательныя и къ нимъ приводящіяся тригонометрическія функціи,

2) логариѳмическія и къ нимъ приводящіяся круговыя функціи.

Этого рода трансцендентныя будемъ называть *элементарными трансцендентными.*

II) 3) функціи выражаемыя Абелевыми интегралами,

III) 4) функціи, опредѣляемыя операціей $\int$ (это случай интегрированія въ квадратурахъ).

§ 2. *Различіе между понятіемъ интегралъ и рѣшеніе.*

Слово: *интегралъ* понимаютъ въ двухъ различныхъ смыслахъ.

Общее рѣшеніе уравненія

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)}, \ldots\ldots y', y, x) = 0 \tag{1}$$

называютъ часто интеграломъ.

Въ виду того, что общимъ интеграломъ называютъ также конечное уравненіе

$$F(x, y, C_1, C_2 \ldots\ldots C_n) = 0 \tag{2}$$

опредѣляющее y въ $x, C_1, C_2 \ldots C_n$ мы будемъ избѣгать называть y общимъ интеграломъ оставивъ это названіе за ур. (2).

Мы оставимъ терминъ интегрировать только въ заголовкѣ работы и въ веденіи. Въ изложеніи же мы предпочитаемъ нѣсколько непривычный терминъ: *рѣшить*, *рѣшеніе* и вотъ по какой причинѣ:

Интегрированіе въ конечномъ видѣ можно было бы понимать еще въ слѣдующемъ смыслѣ болѣе общимъ, чѣмъ въ § 1.

Интегрированіе уравненія (1) можно считать завершеннымъ въ конечномъ видѣ, если только намъ удалось построить функцію

$$F(x, y, C_1, C_2 \ldots)$$

лѣвую часть уравненія (1) при помощи конечнаго числа напередъ заданныхъ ооновныхъ функцій.

Такъ можно считать интегрированіе ур.

$$y + (2y - x)y' = 0$$

завершеннымъ, получивъ уравненіе

$$y^2 e^{\frac{x}{y}} = C$$

хотя изъ этого послѣдняго уравненія мы не можемъ найти выраженіе для y въ элементарныхъ трансцендентныхъ.

Таково также уравненія

$$(y-x)\sqrt{1+x^2}\, y' = 3(1+y^2)\sqrt{1+y^2}$$

дающее

$$arctg y - \frac{3}{\sqrt{5}} arctg \frac{6(y-x) - 4 + xy}{\sqrt{7+4xy}} = C$$

Уравненіе

$$(xy + y^6 x) y' + xy + yx^6 = 0$$

интегр. множитель котораго $\frac{1}{xy}$, даетъ по умноженіе на этотъ множитель уравненіе, въ которомъ перемѣнныя отдѣляются и интегралъ, его будетъ слѣдующій

$$\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^5}} = \int \frac{dy}{\sqrt{1+x^5}} + C \tag{3}$$

Можно считать заданное уравненіе проинтегрированнымъ въ квадратурахъ, хотя можно доказать, что уравненіе (3), какъ вообще обобщенное дифференціальное уравненіе Эйлера (кромѣ особыхъ исключительныхъ случаевъ)

$$\frac{f(x)\,dx}{\sqrt{R(x)}}=\frac{f(y)\,dy}{\sqrt{R(y)}}$$

не разрѣшается относительно y, не только въ элементарныхъ трансцендентныхъ, но и съ помощью квадратуръ. Льювиль въ своемъ изслѣдованіи, относящемся къ уравненію Рикатти, подъ интегрированіемъ въ конечномъ видѣ разумѣетъ *выраженіе y въ x въ конечномъ видѣ.* Вопросы объ интегрированіи въ смыслѣ выражаемости F въ конечномъ видѣ черезъ (y, x) онъ оставляетъ открытымъ.

Такимъ образомъ при нашей терминологіи Льювиль изслѣдовалъ не интегралъ, а рѣшеніе, не интегрируемость въ конечномъ видѣ уравненія Рикатти, а его *разрѣшимость*. Что касается до интегрированія въ конечномъ видѣ ур. (1) то это задача для уравненіи высшаго порядка въ частномъ случаѣ для линейнаго, болѣе трудная, чѣмъ задача о разрѣшимости въ конечномъ видѣ.

Для уравненія 1-го порядка эта задача весьма легко поддается изслѣдованію, результаты получаются простыя и интересные, которыя мы начали обнародывать въ Сообщеніяхъ Харьковскаго Математическаго Общества.

в) Элементарныя трансцендентныя.

§ 3. *Основныя элементарныя трансцендентныя.*

Обычно за основныя трансцендентныя принимаютъ элементарныя трансцендентныя.

Такъ какъ функціи тригонометрическія и круговыя выражаются алгебраически черезъ показательныя и логариѳмическія по формуламъ:

$$arctgx = \frac{1}{2i} lg \frac{1+xi}{1-xi}$$

$$arcsinx = \frac{1}{i} lg(xi + \sqrt{1-x^2})$$

$$sinx = \frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i} \quad csx = \frac{e^{xi} + e^{-xi}}{2}$$

то всякая функція, выражаемая въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ выражается съ помощью только:

1) логариѳмическихъ
2) показательныхъ функцій.

Такъ, напримѣръ, функція

$$\frac{sin\sqrt{1+x^2}}{arcsinx} + \sqrt{1+ex^2}\; lg\; [1 + arcsinx]$$

можетъ быть представлена въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{e^{\sqrt{1+x^2}\,i} - e^{-\sqrt{1+x^2}\,i}}{lg\frac{1+xi}{1-xi}} + \sqrt{1+e^{x^2}}\; lg\left[1 + \frac{1}{i} lg(xi + \sqrt{1-x^2})\right]$$

куда входитъ уже только логариѳмическія и показательныя функціи.

Основными трансцендентными будутъ

$$lgu \quad e^u$$

Число основныхъ функцій мы можемъ по нашему произволу увеличивать, прибавляя къ нимъ

1) функціи алгебраич. lgu, e^u и болѣе того

2) всякую функцію выражающуюся въ конечномъ видѣ черезъ lgu, e^u.

Мы можемъ взять за основныя функціи

$$lgu \quad e^u \quad e^u + lg(1+e^u)$$

Вмѣсто того, чтобы брать за основныя функціи

1) логариѳмическую: lgu

2) показательную: e^u,

какъ это дѣлаетъ Льювиль, мы въ виду нѣкоторыхъ удобствъ дальнѣйшихъ изслѣдованій беремъ за основныя трансцендентныя: lgu, e^u и еще

3) степенную функцію: $[u]^\lambda$

гдѣ λ число ирраціональное.

Эти три типа основныхъ функцій будемъ обозначать символами:

$$[lg]\ [ex]\ [dg]$$

Такимъ образомъ функціи

$$3^{\sqrt{3}\, lg(1+\sqrt{sinx})}\, arctgx^{\sqrt{3}}$$

мы представляемъ себѣ въ формѣ

$$\frac{1}{2i}\left(1+\sqrt{\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}}\right)^{\sqrt{3}\, lg3} lg\frac{1+x^{\sqrt{3}}\, i}{1-x^{\sqrt{3}}\, i}$$

въ которую входятъ функціи:

$[lg]$ $$lg\frac{1+x^{\sqrt{3}}\, i}{1-x^{\sqrt{3}}\, i}$$

$[ex]$ $$e^{xi}\quad e^{-xi}$$

$[dg]$ $$\left(1+\sqrt{\frac{e^{xi}-e^{-xi}}{2i}}\right)^{\sqrt{3}\, lg\, 3},\ x^{\sqrt{3}}$$

Основныя функціи $[lg]$ $[ex]$ $[dg]$ функціи трансцендентныя, не приводящіяся къ алгебраической функціи $[alg]$, такъ какъ $[lg]$ $[dg]$ имѣютъ безконечно множество значеніи, когда $[alg]$ имѣетъ конечное ихъ число, $[ex]$ обладаетъ существенно особенной точкой, которой лишена функція $[alg]$.

§ 4. *Классификація элементарныхъ трансцендентныхъ.*

Теперь необходимо ввести въ наши изслѣдованія *классификацію трансцендентныхъ* подобную той которой пользовался

Льювиль въ своихъ изслѣдованіяхъ по интегрированіи въ конечномъ видѣ.

Основными трансцендентными *I-го класса* мы называемъ функціи

$$[lg_i^{(1)}] = lg\,\alpha_i^{(1)}(x) \quad [ex_i^{(1)}] = e^{\beta_i^{(1)}(x)} \quad [dg_i^{(1)}] = [\gamma_i^{(1)}(x)]^{\lambda_i^{(1)}}$$

гдѣ

$$\alpha_i^{(1)}(x),\ \beta_i^{(1)}(x),\ \gamma_i^{(1)}(x)$$

алгебраическія функціи

Алгебраическую функцію

$$[lg_i^{(1)}]\ [ex_i^{(1)}]\ [dg_i^{(1)}]$$

мы называемъ *трансцендентной 1-го класса* въ томъ случаѣ, если она не можетъ выразиться алгебраически.

Такъ, напримѣръ, слѣдующія функціи:

$$[lg^{(1)}_i] = lg(x + \sqrt{1+x})$$

$$[ex^{(1)}] = e^{x^2} \quad [dg^{(1)}] = (1+x^2)^{\sqrt{2}}$$

основныя элементарныя трансцендентныя 1-го класса, алгебраическая же ихъ функція

$$y = 3[lg^{(1)}]^2 + 2[ex^{(2)}][dg^{(1)}] = 3[lg(x+\sqrt{1+x})]^2 + 2e^{x^2}(1+x^2)^{\sqrt{2}}$$

должна считаться трансцендентной 1-го класса,

если при этомъ доказать, что y не приводятся къ алгебраической функціи отъ x.

Алгебраическая функція отъ эл. осн. трансц.

$$[lg_i^{(1)}] = lg(\sqrt{2+x^2}+x)$$

$$[lg_i^{(1)}] = lg(\sqrt{2+x^2}-x)$$

$$y = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{[lg_i^{(1)}]+[lg_2^{(1)}]} = \frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{lg(\sqrt{2+x^2}+x) + lg(\sqrt{2+x^2}-x)}$$

не представляетъ трансцендентной 1-го класса, такъ какъ она приводится къ алгебраической функціи.

$$\frac{\sqrt{1+\sqrt{x}}}{lg\,2}$$

Называя функціи

$$[lg_i^{(2)}] = lg\,\alpha_i^{(2)}(x) \quad [ex_i^{(2)}] = e^{\beta_i^{(2)}(x)} \quad [dg_i^{(2)}] = [\gamma_i^{(2)}(x)]^{\lambda_i^{(2)}}$$

гдѣ $\alpha_i^{(2)}(x), \beta_i^{(2)}(x), \gamma_i^{(2)}(x)$ трансцендентныя перваго класса, *основными трансцендентными 2-го класса*, при томъ непремѣнномъ условіи, чтобы онѣ не приводились къ трансцендентнымъ 1-го класса или къ алгебраическимъ функціямъ, мы будемъ считать всякую алгебраическую функцію основныхъ трансцендентныхъ 2-го класса за *трансцендентную 2-го класса*, опять при условіи, что эта функція не приводится ни къ трансцендентный 1-го класса, ни къ алгебраической функціи.

Слѣдующія функціи

$$lg\,\{3\,[lg\,(x+\sqrt{1+x})\,]^2 + 2e^{x^2}(1+x^2)^{\sqrt{2}}\}$$

$$e^{\sqrt{e^{x^3}+5\,lg x}}$$

трансцендентныя 2-го класса и ихъ алгебраическая функція

$$\sqrt[3]{e^{\sqrt{e^{x^3}+5 lg x}}\,x^2\sqrt{1-x}+5\,lg\,\{3\,[lg\,(x+\sqrt{1+x})]\}^2+2e^{x^2}(1+x^2)^{\sqrt{2}}\}}\,(3)$$

трансцендентная 2-го класса.

Функція

$$lg\,e^{\sqrt{1+\sqrt{x}}}$$

не представляетъ трансцендентной 2-го класса потому что она приводится къ алгебраической функціи.

Равнымъ образомъ функція

$$(1+x^2)^{\sqrt{1+\sqrt{2}}} \quad e^{lg\,(1+x^2)}$$

не представляетъ трансцендентной 2-го класса ибо она приводится къ трансцендентной 1-го класса

$$(1+x^2)^{1+\sqrt{1+\sqrt{2}}}$$

Совершенно такимъ же образомъ переходимъ отъ трансцендентныхъ 2-го класса къ трансцендентнымъ 3-го класса и такъ далѣе вообще къ трансцендентнымъ q-го класса, которыя будутъ слѣдующей формы

$$y = \Pi[\varphi_1 \varphi_2 \ldots \varphi_n] \tag{4}$$

гдѣ π означаетъ алгебраическую функцію элементарныхъ основныхъ функцій q-го класса и нисшихъ классовъ причемъ предполагается, что y не приводится къ трансцендентной низшаго класса.

Такъ функція

$$\sqrt{x^2+xe^{\sqrt{1+lg(1+e^x)}}+lg\{1+[e^{e^{x^2}}+1]^{\sqrt{3}}\}}, \tag{5}$$

для которой $q=4$ можетъ представиться въ слѣдующей формѣ:

$$\sqrt{x^2+x\,\varphi_1+\varphi_1} = \pi(\varphi_2)$$

гдѣ

$$\varphi_2 = lg\{1+[e^{e^{x^2}}+1]^{\sqrt{3}}\}$$

основныя трансцендентныя 4-го класса, а

$$\varphi_1 = e^{\sqrt{1+lg(1+e^x)}}$$

трансцендентная низшаго 3-го класса.

§ 5. *Свойства приготовленнаго выраженія элементарной трансцендентной.*

Подъ *областью основныхъ трансцендентныхъ* (θ) мы разумѣемъ совокупность всѣхъ трансцендентныхъ, при помощи которыхъ построена данная трансцендентная.

Такъ функціи (3) имѣетъ слѣдующую область (Θ): дѣляющуюся на

область $\theta^{(2)}$ (трансц. II класса)

— $\theta^{(1)}$ (трансц. I класса)

$\theta^{(2)}$:

$$[lg^{(2)}]=lg\{3[lg(x+\sqrt{1+x})\}$$

$$[ex^{(1)}]=e^{\sqrt{e^{x^2}+5\,lgx}}$$

$$\theta^{(1)}:\quad [lg^{(1)}]=lgx$$

$$[ex^{(1)}]=e^{x^2}$$

$$[dg^{(1)}]=(1+x^2)^{\sqrt{2}}$$

функція (5) имѣетъ область

$$\theta^{(4)}:\quad [lg^{(4)}]=lg\{1+[e^{e^{x^2}}+1]^{\sqrt{3}}\}$$

$$\theta^{(3)}:\quad [ex^{(3)}]=e^{\sqrt{1+lg(1+e^x)}}[dg^{(3)}]=[e^{e^{x^2}}+1]^{\sqrt{3}}$$

$$\theta^{(2)}:\quad [lg^{(2)}]=lg(1+e^x)$$

$$[ex^{(2)}]=e^{e^{x^2}}$$

$$\theta^{(1)}:\quad [ex^{(1)}]=e^x$$

$$[ex^{(1)}_2]=e^{x^2}$$

Если трансцендентная z построена при помощи тѣхъ же основныхъ трансцендентныхъ, что y, то будемъ говорить, что z построено въ той же области (θ). Такъ трансцендентная

$$\sqrt{(e^{e^{x^2}}+1)^{\frac{\sqrt{3}}{2}}+e^{x^2}lg(1+x)}$$

построена въ той же области (Θ), что трансц. (5).

Но того же нельзя сказать про функцію

$$\sqrt{e^{\sqrt{1+lg(1+e^x)}}(e^{e^{x^2}}+5e^x)^{\sqrt{3}}}$$

въ выраженіе которой входитъ новая основная трансцендентная

$$[dg^{(3)}]=(e^{e^{x^2}}+5e^{x})^{\sqrt{3}}$$

Вообще можно дать одной трансцендентной безконечное множество выраженій, но мы отмѣчаемъ, то которое содержитъ наименьшее число трансцендентныхъ q-го класса: $\varphi_1, \varphi_2 \ldots$ т. е. иначе говоря для котораго область $(\theta^{(q)})$ содержали бы наименьшее, число функцій.

Изъ этихъ выраженій мы выдѣляемъ тѣ, которыя содержатъ наименьшее число основныхъ трансцендентныхъ q—1-го класса т. е. такихъ что область $\theta^{(q-1)}$ содержитъ менѣе всего функцій и такимъ образомъ дальше, пока не дойдемъ до выраженія въ которомъ числа трансцендентныхъ q-го и низшихъ классовъ не будутъ доведены до минимума.

Подобнаго рода выраженіе и область (θ) къ нему относящуюся мы называемъ *приготовленными.*

Мы имѣемъ, напримѣръ, для трансцендентной (5)

$$y=\sqrt{x^2+x\varphi_1+\varphi_2}=\sqrt{x^2+x\varphi_1+\varphi_{21}\varphi_{22}}$$

гдѣ

$$\varphi_{21}=lg\left\{1+[e^{e^{x^2}}+1]^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$$

$$\varphi_{22}=lg\left\{1-[e^{e^{x^2}}+1]^{\frac{\sqrt{3}}{2}}\right\}$$

Кромѣ того

$$y=\sqrt{x^2+x\varphi_1+\varphi_{21}\varphi_{22}\varphi_{23}}$$

$$\varphi_{21}=lg\left\{1+[e^{e^{x^2}}+1]^{\sqrt{3}}\right\}$$

$$\varphi_{22}=e^{e^{x^2}} \qquad \varphi_{23}=e^{-e^{x^2}}$$

$$y=\sqrt{x^2+x\psi_{11}\psi_{12}+\psi_2}$$

$$\psi_{11}=e^{\frac{3}{2}\sqrt{1+lg(1+e^x)}}$$

$$\psi_{12}=e^{-\frac{1}{2}\sqrt{1+lg(1+e^x)}}$$

$$\psi_2 = lg\left\{1+[e^{e^{x^2}}+1]^{\frac{3\sqrt{3}}{2}}[e^{e^{x^2}}+1]^{-\sqrt{\frac{3}{2}}}\right\}$$

Выраженія съ наименьшимъ числомъ трансцендентныхъ 4-го класса слѣдующія:

$$\sqrt{x^2+x\varphi_1+\varphi_2}$$

и

$$\sqrt{x^2+x\psi_{11}\,\psi_{12}+\psi_2}$$

Эти выраженія содержатъ только одну основную трансцендентную 4-го класса:

$$\varphi_2 \text{ или } \psi_2$$

$$\sqrt{x^2+x\psi_{11}\,\psi_{12}+\psi_2}$$

не представляетъ приготовленнаго выраженія потому что содержитъ 4 функціи 3-го класса въ то время, какъ

$$\sqrt{x^2+x\varphi_1+\varphi_2}$$

содержитъ только два.

Ясно что, если выраженіе (4)

$$y=\pi\,(\varphi_{11}\,\varphi_{21}\,\varphi_3\ldots\varphi_n) \tag{4}$$

приготовлено, то не можетъ существовать между $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3 \ldots \varphi_m$ трансцендентными q-го класса, входящими въ y и трансцендентными низшихъ классовъ алгебраическаго уравненія

$$N[\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_m]=0 \tag{6}$$

не приводящагося относительно φ_i къ тожеству.

Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ мы могли бы, опредѣляя изъ уравненія (6): φ_i въ алгебраической функціи отъ $\varphi_{11}\,\varphi_2 \ldots \varphi_{i-1}\,\varphi_{i+1}\ldots\varphi_m$ привести выраженіе y къ выраженію

$$y=\pi_1\,(\varphi_1, \varphi_2 \ldots \varphi_{i-1}, \varphi_{i+1}\ldots\varphi_m)$$

уже не содержащаго φ_i и выраженіе (4) противно условію оказалось бы не приготовленнымъ.

Такимъ образомъ *всякое алгебраическое уравненіе (6) между основными трансцендентными q-го класса входящими въ y и трансцендентными низшихъ классовъ приводится къ тожеству.*

Отсюда слѣдуетъ, что *это уравненіе остается въ силѣ послѣ замѣны трансцендентныхъ φ_i какими угодно функціями они x.*

Въ частномъ случаѣ можно замѣнить φ_i постоянными μ_i или $\varphi_i+\mu_i$, или наконецъ $\varphi_i\mu_i$, гдѣ μ_i произвольныя постоянныя. Если выраженіе y приготовлено, то и число трансцендентныхъ q—1-го, q—2-го и т. д. классовъ доведено до минимума. Поэтому и всякое алгебраическое уравненіе между трансцендентными низшихъ классовъ будетъ обладать тѣмъ же свойствомъ т. е. будемъ удовлетворяться по замѣнѣ ихъ какими угодно функціями отъ x.

Уравненіе (6) тождественно не только относительно высшихъ трансцендентныхъ въ него входящихъ, но относительно всякой трансцендентной безразлично какого класса r, входящей въ N алгебраически.

Въ самомъ дѣлѣ иначе послѣ замѣны въ уравненіи (6) трансцендентныхъ q-го класса какими угодно постоянными мы получили бы уравненіе между трансцендентными q — 1-го класса и низшихъ классовъ, гдѣ можно опять замѣнить высшія трансцендентныя постоянными. Продолжая такимъ образомъ получаемъ алгебраическое уравненіе между трансцендентными r-го класса и низшихъ классовъ, дальше возможность уменьшить въ выраженіи для y число трансцендентныхъ r-го класса.

Закончимъ этотъ параграфъ введеніемъ новаго понятія о *верхнихъ основныхъ трансцендентныхъ.* Основныя трансцендентныя различныхъ классовъ могутъ входить въ выраженіе трансцендентныхъ непосредственно алгебраически и при помощи трансцендентныхъ высшихъ классовъ.

Такъ въ выраженіе

$$y=\sqrt{e^x\,lg\,(1+e^x)}+2e^{5e^x}+e^{2x}$$

e^x входитъ непосредственно алгебраически и при посредствѣ основныхъ трансцендентныхъ второго класса: $lg(1+e^x), e^{e^x}$. Мы можемъ положить

$$y = \sqrt{\varphi_3\varphi_1} + 2\varphi_2^5 + \varphi_3^2$$

Здѣсь $\varphi_1, \varphi_2, \varphi_3$, Трансцендентныя различныхъ классовъ: 1-го и 2-го, но всѣ онѣ обладаютъ однимъ свойствомъ: *онѣ входятъ алгебраически въ y.*

Такія трансцендентныя мы называемъ *верхними* въ отличіе отъ *высшихъ* о которыхъ выше говорили.

§ 6. *Свойства частной производной элементарной трансцендентной по основнымъ трансцендентнымъ въ нее входящимъ.*

Будемъ обозначать черезъ

$$\left.\begin{array}{lll} \theta_i^{(q)} & \text{трансценд.} & q\text{-го} \\ \theta_i^{(q-1)} & \ldots & q\text{—1-го} \\ \ldots & \ldots & \\ \theta_i^{(j)}, & \ldots & j\text{-ого} \end{array}\right\} \text{классовъ}$$

Мы можемъ написать, что

$$y = \pi[\theta_1^{(q)}, \theta_2^{(q)}, \ldots \theta_1^{(q-1)}, \theta_2^{(q-1)} \ldots\ldots\ldots \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)} \ldots \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)} \ldots x]$$

гдѣ π означаетъ алгебраическую функцію.

Въ дальнѣйшемъ будемъ употреблять слѣдующее обозначеніе

$$y = \pi(\theta)$$

означая этимъ, что y алгебраическая функція отъ $\theta = \theta_1^{(q)}$ и другихъ трансцендентныхъ q-го и низшихъ классовъ.

$\frac{\partial\pi}{\partial\theta}$ это частная производная по θ, взятая въ предположеніи, что $\theta_2^{(q)}, \theta_3^{(q)} \ldots \theta_1^{(1)}, \theta_2^{(1)}, x$ считаемъ за постоянныя.

Такъ если

$$y = \theta_1^{(1)}\theta_1^{(2)} + \theta_2^{(2)} x^2$$

$$\theta_1^{(1)} = e^x \quad \theta = \theta_1^{(2)} = lg[lgx + 2e^x] \quad \theta_2^{(2)} = (e^x+1)^{\sqrt{2}}$$

то

$$\frac{\partial y}{\partial \theta} = \theta_1^{(1)}$$

Подъ $\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right)$ будемъ разумѣть производную по x, взятую въ предположеніи, что

$$\theta = \theta_1^{(1)}$$

считаемъ за постоянную, такъ что

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right) = \frac{\partial \pi}{\partial x} + \sum_{i=2}^{i=m_q} \frac{\partial \pi}{\partial \theta_i^{(q)}} \frac{d\theta_i^{(q)}}{dx} + \sum_{j=1}^{j=q-1} \sum_{i=1}^{i=m_j} \frac{\partial \pi}{\partial \theta_i^{(j)}} \frac{d\theta_i^{(j)}}{dx}. \tag{7}$$

Такъ въ предыдущемъ примѣрѣ

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right) = \theta_1^{(2)} \frac{d\theta_1^{(1)}}{dx} + x^2 \frac{d\theta_2^{(2)}}{dx} + 2x\theta_2^{(2)} = \theta_1^{(2)} e^x + \frac{\sqrt{2}\, x^2 \theta_1^{(1)}}{\theta_1^{(1)}+1} \theta_2^{(2)} + 2x\theta_2^{(2)}$$

Ясно, что $\frac{\partial \pi}{\partial \theta}$, *если* θ *основная трансцендентная высшаго класса будетъ алгебраическая функція тѣхъ же трансц., что* π *т. е. будетъ построена въ одной области* (θ) *вмѣстѣ съ* π.

Указанное свойство $\frac{\partial \pi}{\partial \theta}$ имѣетъ мѣсто и въ томъ случаѣ, когда θ не только высшая, но вообще верхняя трансцендентная.

Подъ $\left(\frac{\partial \pi}{\partial \theta}\right)$, гдѣ $\theta = \theta_i^{(j)}$ трансцендентная низшаго q класса будемъ разумѣть производную взятую въ предположеніи, что мы считаемъ x и всѣ производныя одного и низшихъ, гдѣ θ классовъ за постоянныя, но трансцендентныя $\theta_i^{(j+1)}$, $\theta_i^{(j+2)}$.... считаемъ за вполнѣ опредѣленныя функціи отъ θ.

Если

$$y=\theta_1^{(1)}\,\theta_1^{(2)}+\theta_2^{(2)}x^2$$

то при

$$\theta=\theta_1^{(1)}$$

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial y}{\partial \theta_1^{(1)}}+\frac{\partial y}{\partial \theta_1^{(2)}}\frac{\partial \theta_1^{(2)}}{\partial \theta_1^{(1)}}+\frac{\partial y}{\partial \theta_2^{(2)}}\frac{\partial \theta_2^{(2)}}{\partial \theta_1^{(1)}}$$

$$\frac{\partial y}{\partial \theta_1^{(1)}}=\theta_1^{(2)}\quad \frac{\partial y}{\partial \theta_1^{(2)}}=\theta_1^{(1)}\quad \frac{\partial y}{\partial \theta_2^{(2)}}=x^2$$

$$\frac{\partial \theta_1^{(2)}}{\partial \theta_1^{(1)}}=\frac{2}{lgx+2\theta_1^{(1)}}\quad \frac{\partial \theta_2^{(2)}}{\partial \theta_1^{(1)}}=\frac{\sqrt{2}\,\theta_1^{(1)}}{\theta_1^{(1)}+1}\,\theta_2^{(2}$$

такъ что

$$\left(\frac{\partial y}{\partial \theta}\right)=\theta_1^{(2)}+\frac{2\theta_1^{(1)}}{lgx+2\theta_1^{(1)}}+\frac{\sqrt{2}\,x^2\,\theta_1^{(1)}}{\theta_1^{(1)}+1}\,\theta_2^{(2}$$

Вообще для $\theta=\theta_1^{(q-1)}$

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial \theta}\right)=\frac{\partial \pi}{\partial \theta_1^{(q-1)}}+\sum_{i=1}^{i=m_q}\frac{\partial \pi}{\partial \theta_i^{(q)}}\frac{\partial \theta_i^{(q)}}{\partial \theta_1^{(q-1)}} \tag{8}$$

Легко видѣть, что $\dfrac{\partial \theta_i^{(q)}}{\partial \theta^{(q-1)}}$ алгебраическія функціи $\theta_i^{(q)}$, $\theta_i^{(q-1)}$ т. е. что онѣ построены въ области (θ).

Въ самомъ дѣлѣ, имѣя въ виду, что $\theta_1^{(q)}$ имѣетъ одно изъ слѣдующихъ значеній

$$[lg^{(q)}]=lg\,\alpha^{(q-1)}(x)\quad [ex^{(q)}]=e^{\beta^{(q-1)}(x)}\quad [dg^{(q)}]=[\gamma^{(q-1)}(x)]^{\lambda^{(q)}}$$

$\alpha^{(q-1)}(x), \beta^{(q-1)}(x), \gamma^{(q-1)}(x)$ трансцендентныя $q-1$ класса причемъ

$$\frac{d\,[lg^{(q)}]}{d\theta}=\frac{1}{\alpha^{(q-1)}(x)}\frac{\partial \alpha^{(q-1)}}{\partial \theta^{(q-1)}}\qquad \frac{\partial\,[ex^{(q)}]}{\partial \theta}=[ex^{(q)}]\frac{\partial \beta^{(q-1)}}{\partial \theta^{(q-1)}}$$

$$\frac{\partial\,[dg^{(q)}]}{\partial \theta}=\frac{\lambda^{(q)}\,[dg^{(q)}]}{\gamma^{(q-1)}(x)}\frac{\partial \gamma^{(q-1)}}{\partial \theta^{(q-1)}}$$

мы получаемъ $\frac{\partial\theta_i^{(q)}}{\partial\theta^{(q-1)}}$ въ алгебраическихъ функціяхъ отъ $\theta_i^{(q)}$, $\theta_i^{(q-1)}$.... а слѣдовательно въ томъ же видѣ имѣемъ на осн. ур. (8) и $\left(\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right)$

Итакъ *частная производная* $\left(\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right)$ *трансцендентной q-го класса по основной трансцендентной $q—1$-го класса построена въ той же области* (θ), *что сама функція* π.

Функція

$$y=\theta_1^{(1)}\theta_1^{(2)}+\theta_2^{(2)}x^2$$

построена въ области:

$$(\theta):\quad \theta_1^{(2)},\ \theta_1^{(2)},\ \theta_2^{(2)}$$

$$\theta_1^{(1)}:\ \theta_1^{(1)},\ \theta_2^{(1)}=lgx$$

тоже очевидно относится и къ функціи:

$$\left(\frac{dy}{\partial\theta}\right)=\theta_1^{(2)}+\frac{2\theta_1^{(1)}}{\theta_1^{(1)}+2\theta_1^{(1)}}+\frac{\sqrt{2}\,x^2\,\theta_1^{(1)}\,\theta_2^{(2)}}{\theta_1^{(1)}+1}.$$

§ 7. *Свойство производной трансцендентной по независимому перемѣнному.*

Замѣтимъ еще, что $\frac{d\pi}{dx}$, *какъ* $\frac{\partial\pi}{\partial\theta}$ *построена въ той же области трансцендентныхъ, что* π.

Для случая когда

$$y=\pi\,[\theta_1,\theta_2\ldots,x]$$

трансцендентная перваго класса

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial\pi}{\partial x}+\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial\pi}{\partial\theta_i}\frac{\partial\theta_i}{dx}$$

вслѣдствіе того, что $\frac{d\theta_i}{dx}$ выражаются алгебраически черезъ θ_i, теорема очевидна.

Мы докажемъ, что, если она имѣетъ мѣсто для трансцендентныхъ $1.2.3\ldots q-1$ классовъ, то она вѣрна и для трансцендентной q-го класса

Въ этомъ случаѣ мы имѣемъ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{\partial\pi}{\partial x}+\sum_{j=1}^{j=q}\sum_{i=1}^{i=m_j}\frac{\partial\pi}{\partial\theta_i^{(j)}}\frac{d\theta_i^{(j)}}{dx} \tag{9}$$

Замѣчаемъ что $\frac{\partial\pi}{\partial x}$, $\frac{\partial\pi}{\partial\theta_i^{(j)}}$ построены въ той же области (θ), что π и замѣчаемъ, что $\frac{d\theta_i^{(j)}}{dx}$ имѣетъ одно изъ слѣдующихъ значеній:

$$\frac{1}{\alpha^{(q-1)}(x)}\frac{d\alpha^{(q-1)}}{dx}\qquad [ex^{(q)}]\frac{d\beta^{(q-1)}}{dx}\qquad \frac{\lambda^{(q)}[dg^{(q)}]}{\gamma^{(q-1)}}\frac{d\gamma^{(q-1)}}{dx}$$

гдѣ $\alpha^{(q-1)}, \beta^{(q-1)}, \gamma^{(q-1)}$ трансцендентныя $q-1$-го класса. На основаніи нашего предположенія $\frac{d\alpha^{(q-1)}}{dx}$, $\frac{d\beta^{(q-1)}}{dx}$, $\frac{d\gamma^{(q-1)}}{dx}$, а равнымъ образомъ

$$\frac{d\theta_i^{(j)}}{dx}\quad j\leq q-1$$

построены въ области (θ), поэтому въ той же области построена и $\frac{dy}{dx}=\frac{d\pi}{dx}$, опредѣляемая уравненіемъ (q).

Дифференцированіе уравненія (5) даетъ

$$\frac{dy}{dx}=\frac{2x[ex^{(3)}]+\frac{x[ex^{(3)}][ex_1^{(1)}]}{2(1+[ex_1^{(1)}])\sqrt{1+[lg^{(2)}]}}+\frac{2\sqrt{3}[dg^{(3)}][ex^{(2)}][ex_2^{(1)}]x}{\{1+[ex^{(2)}]\}\{1+[dg^{(3)}]\}}}{2\sqrt{x^2+x[ex^{(3)}]+[lg^{(4)}]}}$$

т. е. выраженіе построенное въ той же области:

$$\theta:\ [lg^{(4)}][ex^{(3)}][dg^{(3)}][lg^{(2)}][ex^{(3)}][ex_1^{(1)}][ex_2^{(1)}],\ \text{что } y.$$

c) Расширеніе области трансцендентныхъ.

§ 8. *Функціи* $[ab]$.

Слово *область трансцендентныхъ* мы будемъ понимать еще въ нѣсколько иномъ смыслѣ, чѣмъ въ § 5. Мы будемъ называть областью трансцендентныхъ [безъ прибавленія (θ)] совокупность типовъ тѣхъ основныхъ трансцендентныхъ при помощи которыхъ мы выражаемъ заданную трансцендентную y. Въ этомъ смыслѣ можемъ сказать, что область элементарныхъ трансцендентныхъ: $[elm]$:

$$[lg]\ [ex]\ [dg]$$

Указанная въ § 4 классификація конечно распространяется и на случай иныхъ, чѣмъ $[elm]$ основныхъ трансцендентныхъ, на случай когда къ области $[elm]$ прибавимъ еще новыя основныя трансцендентныя.

Въ случаѣ невозможности рѣшить дифференціальное уравненіе:

$$f(y^{(n)}, y^{(n-1)} \ldots y, y, x) = o \quad (1)$$

въ конечномъ видѣ съ помощью трансцендентныхъ $[elm]$ ставятъ вопросъ о рѣшеніи его съ помощью болѣе общаго типа функціи т. е. *расширя область* $[elm]$ *присоединеніемъ новыхъ трансцендентныхъ.*

I). Первое расширеніе области основныхъ трансцендентныхъ $[elm]$ достигается присоединеніемъ функцій, выражаемыхъ *Абелевыми интегралами.*

Такимъ образомъ основной трансцендентной перваго класса будетъ

$$\int F_i(\xi_i, \eta_i)\, d\xi_i$$

$$\varphi_i(\xi_i, \eta_i) = o$$

ξ_i алгебраическая функція отъ x.

Эту функцію означимъ черезъ $[\underline{ab}^{(1)}_{i}]$

Основная трансцендентная второго класса

$$[\underline{ab}^{(2)}_{i}] = \int F_i(\xi^{(1)}_{1}\eta^{(1)}_{i})\, d\xi^{(1)}_{i} \tag{10}$$

$$\mathcal{F}[\xi^{(1)}_{i}, \eta^{(1)}_{i}]$$

$\xi^{(1)}_{i}$ алгебраическая функція отъ осн. трансц. 1-го класса т. е. трансцендентная 1-го класса.

Функція логариѳмическая является частнымъ случаемъ подобнаго рода функціи.

Въ самомъ дѣлѣ

$$[lg] = \int \frac{d\xi}{\xi} \tag{11}$$

При присоединеніи къ области $[elm]$ Абелевыхъ интеграловъ, очень удобно разсматривать функцію

$$[\overline{ab}] = e^{\underline{[ab]}} = e^{\int F_i(\xi, \eta)\, d\xi}$$

какъ основную, а не какъ трансцендентную высшемъ чѣмъ $[ab]$ класса.

Частнымъ случаемъ этой функціи являются функціи $[ex]$ $[dg]$.

Въ самомъ дѣлѣ:

$$[ex] = e^{\xi} = e^{\int d\xi} \tag{13}$$

$$[dg] = [\xi]^{\lambda} = e^{\lambda lg \xi} = e^{\lambda \int \frac{d\xi}{\xi}} \tag{14}$$

При введеніи Абелева интеграла

$$\int F(\xi, \eta)\, d\xi$$

$$\mathcal{F}(\xi, \eta) = o$$

въ область основныхъ трансцендентныхъ

1) Задается, какъ раціональная функція, такъ и кривая $\mathcal{F}(\xi, \eta) = o$

2) задается только кривая $\mathcal{F}(\xi, \eta) = o$

3) задается только высшій предѣлъ для рода этой кривой наконецъ

4) относительно функціи $[ab]$ можетъ быть извѣстно, только то, что это Абелевъ интегралъ.

Функція

$$y = e^{\int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}} \int \frac{e^{x^2} x \, dx}{\sqrt{1+e^{4x^2}}}$$

выражается черезъ эллиптическіе интегралы т. е. черезъ Абелевы интегралы перваго порядка.

А именно, если

$$[\underline{a}b^{(3)}] = \int \frac{d\xi^{(1)}}{\sqrt{1+\xi^{(1)^4}}} = \int \frac{d\xi^{(1)}}{\eta^{(1)}} \quad \eta^{(1)^2} = 1+\xi^{(1)^4}$$

причемъ

$$\xi^{(1)} = e^{x^2}, \ a$$

$$[\underline{a}b^{(1)}] = \int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^4}} = \int \frac{d\xi}{\eta} \quad \eta^2 = 1+\xi^4$$

примемъ

$$\xi = x, \text{ то}$$

$$y = \frac{1}{2} [\underline{a}b^{(1)}] [\underline{a}b^{(2)}]$$

Функція

$$y = \int \frac{dx}{x\sqrt{1+(lgx)^7}}$$

выражается черезъ Абелевы интегралы вообще

$$y = \int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^7}}$$

гдѣ

$$\xi = lgx$$

т. е.

$$y = [ab^{(1)}]$$

функція

$$y = \int \frac{e^x}{x} dx$$

какъ это будетъ слѣдовать изъ дальнѣйшихъ изслѣдованій не выражается ни въ элементарныхъ функціяхъ, ни въ Абелевыхъ интегралахъ опредѣленныхъ типовъ, ни въ Абелевыхъ интегралахъ вообще.

§ 9. *Функціи* $[qv]$.

I_2) Слѣдующимъ естественнымъ расширеніемъ области трансцендентныхъ является присоединеніе къ этой области *квадратуры* $[qv]$.

Основная функція перваго класса

$$[\underline{qv}_i^{(1)}]=\int F_i(x)\,dx \qquad (15_1)$$

гдѣ $F(x)$ алгебраическая функція $[\underline{qv}^{(1)}]$ такимъ образомъ тоже, что Абелевъ интегралъ $[\underline{ab}^{(1)}]$ общаго типа.

Другая основная трансцендентная

$$[\overline{qv}_i^{(1)}]=e^{[\underline{qv}_i^{(1)}]}=\int F_i(x)\,dx \qquad (16_1)$$

Основная трансцендентная второго класса

$$[\underline{qv}_i^{(2)}]=\int F_i(x,\theta_1,\theta_2\ldots)\,dx \qquad (15_2)$$

$$[\overline{qv}_i^{(2)}]=e^{[\underline{qv}_i^{(2)}]}=e^{\int F_i(x,\theta_1,\theta_2\ldots)\,dx} \qquad (16_2)$$

гдѣ F_i алгебраическія функція x и осн. трансц. 1-го класса: $\theta_1,\theta_2\ldots.$

Такимъ же образомъ устанавливается понятіе и объ основныхъ трансцендентныхъ высшихъ классовъ.

Функція

$$y=e^{x^2}\int e^{\int\frac{e^x}{x}dx}\sqrt{1+lgx}\,dx+\sqrt{lg(1+x^2)\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}}$$

выражается съ помощью

$$[qv]\ [ab]\ [elm]$$

а именно

$$y = [ex^{(1)}][\underline{qv}^{(3)}] + \sqrt{[lg^{(1)}][ab^{(1)}]}$$

гдѣ

$$[ex^{(1)}] = e^{x^2} \quad [lg^{(1)}] = lg\,(1+x^2) \quad [ab^{(1)}] = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

$$[\underline{qv}^{(3)}] = \int [\overline{qv}^{(2)}] \sqrt{1+[lg^{(1)}]}\, dx \quad [\overline{qv}^{(2)}] = e^{\int \frac{1}{x}[ex]\, dx}$$

функціи $[ab]$ и вслѣдствіе этого и $[elm]$ являются частными случаями $[qv]$.

Въ самомъ дѣлѣ

$$[\underline{ab}_i^{(j)}] = \int F_i(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})\, d\xi^{(j)}$$

$$\frac{d[\underline{ab}_i^{(j)}]}{dx} = F_i(\xi^{(j)}, \eta^{(j)}) \frac{d\xi^{(j)}}{dx}$$

$\frac{d\xi^{(j)}}{dx}$, какъ выше было доказано для $[elm]$, и, какъ это будетъ ниже обобщено для $[ab]$ $[qv]$ построено въ той же области (θ), что $\xi^{(j)}$, поэтому

$$F_i(\xi^{(j)}, \eta^{(j)}) \frac{d\xi^{(j)}}{dx} = F_i(x, \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)} \ldots)$$

$$[\underline{ab}_i^{(j)}] = [\underline{qv}_i^{(j)}] = \int F_i(x, \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)} \ldots)\, dx$$

Отсюда слѣдуетъ что

$$[\overline{ab}^{(j)}] = [\overline{qv}^{(j)}] = e^{\int F_i(x, \theta_1^{(j)}, \theta_2^{(j)} \ldots)\, dx}$$

Такъ

$$[\underline{ab}^{(2)}] = \int \frac{d\xi}{\sqrt{1+\xi^4}} \text{ гдѣ } \xi = e^{x^2}$$

равенъ

$$[\underline{qv}^{(2)}] = 2\int \frac{e^{x^2} x\, dx}{\sqrt{1+e^{4x^2}}}$$

т. е. выражается нѣкоторой квадратурой $[qv]$.

§ 10. *Дальнѣйшія обобщенія.*

П$_1$) Основное свойство функцій

$$[\underline{a}b^{(j)}_i] \text{ и } [\overline{ab}^{(j)}_i]$$

состоитъ въ слѣдующемъ:

$$\frac{d[\underline{a}b^{(j)}_i]}{d\xi^{(j)}_i} = F_i(\xi^{(j-1)}_i, \eta^{(j-1)}_i) \tag{17}$$

$$\frac{d[\overline{ab}^{(j)}_i]}{d\xi^{(j)}_i} = [\overline{ab}^{(j)}_i]\, F_i(\xi^{(j-1)}_i, \eta^{(j-1)}_i) \tag{18}$$

гдѣ $F_i(\xi^{(j)}, \eta^{(j)})$ трансцендентная низшаго класса.

Дальнѣйшее обобщеніе состоитъ въ присоединеніи къ области основныхъ трансцендентныхъ функцій, опредѣляемыхъ линейными дифференціальными уравненіями

$$\frac{d^m [ab^{(j)}_i]_m}{d\xi^{(j)m}_i} + F_i(\xi^{(j-1)}_i, \eta^{(j-1)}_i)\frac{d^{m-1}[ab^{(j)}_i]_m}{d\xi^{(j)m-1}_i} + \dots\dots F_{im}[\xi^{(j-1)}_i, \eta^{(j-1)}_i]\,[ab^{(j)}_i]_m$$

$$= F_i(\xi^{(j-1)}_i, \eta^{(j-1)}_i) \tag{19}$$

$$\phi(\xi^{(j-1)}_i, \eta^{(j-1)}_i) = 0 \tag{20}$$

$F_{ij}(\xi^{(j-1)}_i, \eta^{(j-1)}_i)$ алгебраическія функціи отъ $\xi^{(j-1)}_i$ трансценд. j—1-го класса или что тоже раціональныя функціи $\xi^{(j-1)}_i$, $\eta^{(j-1)}_i$ связанныхъ уравненіемъ (20).

Въ частности $[ab^{(j)}_i]_m$ могутъ быть гипергеометрическими функціями, опредѣляемыми уравненіями 2-го порядка.

$[ab^{(j)}_i]_m$ дѣлятся на 2 типа:

$$[\underline{a}b^{(j)}_i]\,[\overline{ab}^{(j)}_i]$$

сообразно тому равна ли или отлична отъ нуля $F_i(\xi^{(j-1)}_i, \eta^{(j-1)}_i)$ $[ab]$ и $[elm]$ входятъ какъ частныя случаи подъ понятіе $[ab]_m$

II$_2$) Въ этомъ же направленіи возможно обощеніе функцій $[qv]$.

Уравненія

$$\frac{d[qv^{(j)}_i]}{dx} = F_i(x) \tag{21}$$

$$\frac{d\,[\overline{qv}_i^{(j)}]}{dx} = [\overline{qv}_i^{(j)}]\,F_i(x) \tag{22}$$

гдѣ $F_i(x)$ трансцендентныя нисшаго класса, вытекающія изъ опредѣленій (15) (16) функцій $[qv]$ и выражающее основное свойство этихъ функцій, можемъ замѣнить линейнымъ уравненіемъ

$$\frac{d^m\,[qv_i^{(j)}]_m}{dx^m} + F_{i_1}(x)\,\frac{d^{m-1}\,[qv_i^{(j)}]_m}{dx^{m-1}} + \ldots F_{im}(x)\,[qv_i^{(j)}]_m = F_i(x) \tag{23}$$

гдѣ $F_{ij}(x)$ трансцендентныя низшихъ классовъ.

Легко видѣть, что не только

$$[qv],\ \text{но}\ [ab]_m, [ab]\ \text{и}\ [elm]$$

представляютъ частныя случаи этихъ функцій. При дальнѣйшихъ расширеніяхъ области трансцендентныхъ линейныя уравненія (19) (23) замѣняются нелинейными нѣкоторой степени

$$\varphi\left[\frac{d^m\,[ab_i^{(j)}]_{m.e}}{d\xi^m}, \frac{d^m\,[ab_i^{(j)}]_{m.e}}{d\xi^{m-1}} \ldots\ldots\right] = 0 \tag{24}$$

$$\varphi\left[\frac{d^m\,[qv_i^{(j)}]_{m.e}}{dx^m}, \frac{d^m\,[qv^{(j)}]_{m.e}}{dx^{m-1}} \ldots\ldots\right] = 0 \tag{25}$$

опредѣленныхъ степени e и порядка m или только опредѣленнаго порядка m.

Частнымъ случаемъ этой задачи является приведеніе даннаго дифференціальнаго уравненія къ ряду дифференціальныхъ уравненій болѣе низкаго порядка.

Въ настоящей работѣ мы будемъ заниматься интегрированіемъ въ конечномъ видѣ линейныхъ дифференціальныхъ уравненій при помощи элементарныхъ функцій $[elm]$, Абелевыхъ интеграловъ $[ab]$ и квадратуръ $[qv]$.

Вопросъ объ интегрированіи въ конечномъ видѣ при дальнѣйшемъ расширеніи области трансцендентныхъ изслѣдуется той же методой, что примѣняется для частнаго случая функцій

$$[elm]\ [ab] \text{ и } [qv]$$

причемъ получаются результаты представляющія прямыя обобщенія получаемыхъ въ настоящей работѣ. Мы возьмемъ частный случай въ виду того, что изслѣдованія въ общемъ случаѣ требуютъ еще болѣе сложныхъ обозначеній и доказательствъ, могущихъ затемнить довольно простыя основныя идеи.

Примѣчаніе.

Сущность интегрированія (рѣшенія) дифференціальныхъ уравненій съ помощью *опредѣленныхъ интеграловъ* состоитъ въ присоединеніи къ области основныхъ трансцендентныхъ функцій.

1-го класса

$$[\underline{in}_i^{(1)}]_{a_i}^{b_i} = \int_{a_i}^{b_i} F_i(x, \alpha)\, d\alpha$$

$$[\overline{in}_i^{(1)}]_{a_i}^{b_i} = e^{\int_{a_i}^{b_i} F_i(x, \alpha)\, d\alpha}$$

F_i алгебраическія функціи x, α, a_i, b_i постоянныя

2-го класса

$$[\underline{in}_i^{(2)}]_{a_i}^{b_i} = \int_{a_i}^{b_i} F_i(x, \theta_1, \theta_2 \ldots . \alpha)\, d\alpha$$

$$[\overline{in}_i^{(2)}]_{a_i}^{b_i} = e^{\int_{a_i}^{b_i} F_i(\theta_1, \theta_2 \ldots \alpha)\, d\alpha}$$

F_i трансцендентныя 1-го класса и т. д.

Можно $[in_i^{(j)}]$ замѣнить частнымъ значеніемъ функціи, $[in_i^{(j)}]_m$ удовлетворяющей линейному уравненію

$$\frac{d^m [\underset{m}{in}{}^{(j)}_i]}{d\alpha^m} + F_1(x,\alpha)\frac{d^{m-1}[\underset{m}{in}{}^{(j)}_i]}{d\alpha^{m-1}} + \dots F_m(x,\alpha)[\underset{m}{in}{}^{(j)}_i] = F(x,\alpha)$$

при условіи что

$$\left[\frac{d^g [\underset{m}{in}{}^{(j)}_i]}{d\alpha^g}\right]_{x=a_i} = A_g, \text{ гдѣ } A_g \text{ заданы}$$

$$g=0,1,2..m-1$$

Изслѣдованія интегрированія при этомъ расширеніи области трансцендентныхъ требуетъ особыхъ методъ.

§ 11. *Основныя трансцендентныя 1-го класса.*

Основныя трансцендентныя

$$[\underline{ab}^{(1)}]\ [\overline{ab}^{(1)}]$$

мы предполагаемъ не приводящимися къ алгебраическимъ функціямъ. Какъ извѣстно, такія функціи $[\underline{ab}^{(1)}]$ $[\overline{ab}^{(1)}]$ въ дѣйствительности существуютъ. Такъ какъ $[\underline{ab}^{(1)}]$ $[\overline{ab}^{(1)}]$ представляютъ частные случаи $[\underline{qv}^{(1)}]$ и $[\overline{qv}^{(1)}]$, то тоже относится и къ послѣднимъ.

Разсмотримъ разложенія $[\underline{ab}^{(1)}]=[\underline{qv}^{(1)}]$ и $[\overline{ab}^{(1)}]=[\overline{qv}^{(1)}]$ для различныхъ точекъ Римановской поверхности. Вслѣдствіе извѣстныхъ свойствъ Абелевыхъ интеграловъ возможны разложенія только слѣдующаго вида:

$$[\underline{ab}^{(1)}] = \sum_{j=-\mu}^{j=-1} a_j \xi^j + a \lg \xi + \sum_{j=0}^{j=\infty} a_j \xi^j \tag{26}$$

гдѣ a_j, a постоянныя

$$\xi = (x-\alpha_0)^{\frac{1}{v}} \tag{27}$$

или

$$\xi = \frac{1}{x^{\frac{1}{v}}} \tag{28}$$

$$[\overline{a}b^{(1)}] = e^{\frac{[ab^{(1)}]}{}} = e^{\sum\limits_{j=-\mu}^{j=-1} a_j \xi^j} \xi^a \sum_{j=o}^{j=\infty} b_j \xi^j \tag{29}$$

гдѣ b_j постоянныя.

Когда $a \gtreqless o$ мы называемъ $[ab]$ *трансцендентной логариѳмическаго типа.*

Если $[\underline{a}b^{(1)}]$ имѣетъ хоть одинъ только, то сумма

$$\sum_{j=-\mu}^{j=-1} a_j \xi^j$$

хоть для одной точки не равна нулю и поэтому эта точка существенно-особенная точка функціи $[\overline{a}b^{(1)}]$.

Въ противномъ случаѣ для всѣхъ точекъ $[\overline{a}b^{(1)}]$ имѣетъ *регулярную* форму

$$[\dot{\overline{a}b}^{(1)}] = \xi^a \sum_{j=0}^{j=\infty} b_j \xi^j \tag{30}$$

Какъ извѣстно всякій интегралъ $[\underline{a}b^{(1)}] = \int F(\alpha, \beta)\, d\alpha$ можетъ быть разложенъ на сумму остальныхъ интеграловъ 3-го родовъ:

$$[\underline{a}b^{(1)}] = \sum_{k=1}^{k=p} A_k^{(1)} I_k\,(\alpha, \beta) + \sum_{k=1}^{k=q} \sum_{j=1}^{j=\mu} \frac{A_k^{(2j)}}{j-1!}\, Z_k^{(j-1)}\,(\alpha, \beta; \gamma_k, \delta_k)$$

$$+ \sum_{k=1}^{k=r} A_k^{(3)} \Big| \overline{} \Big| \begin{bmatrix} \alpha\ ,\ \beta \\ \alpha_k\ ,\ \beta_k \\ \alpha_0\ ,\ \beta_0 \end{bmatrix} \tag{31}$$

1) $I(\alpha, \beta)$ интегралъ конечный на всей Римановской поверхности.

2) $Z^{(j-i)}(\alpha, \beta : \gamma, \delta)$ имѣютъ полюсъ порядка j съ главной частью

$$\frac{1 . 2 \ldots . (j-i)}{(\alpha - \gamma)^j} + \tag{32}$$

3) $\sqcap \begin{bmatrix} \alpha_k, \beta_k \end{bmatrix}_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta}$ имѣетъ 2 логариѳмическія точки съ разложеніями имъ отвѣчающими

$$\begin{aligned} & lg(\alpha - \alpha_k)^{\frac{1}{\delta}} + \text{голом. ф.} \\ & - lg(\alpha - \alpha_0)^{\frac{1}{\delta}} + \text{голом. ф.} \end{aligned} \tag{33}$$

Относительно періодовъ имѣютъ мѣсто слѣдующія условія:

1) Всѣ періоды $I_k(\alpha, \beta)$ относительно одной группы купюръ A_k кромѣ одной купюры A_k равны нулю, періодъ относительно A_k равенъ $2\pi i$.

2) Періоды $Z^{(j)}(\alpha, \beta; \gamma, \delta)$ относительно одной группы купюръ A_k всѣ равны нулю.

3) Періоды $\sqcap \begin{bmatrix} \alpha_k, \beta_k \end{bmatrix}_{\alpha_0, \beta_0}^{\alpha, \beta}$ относительно купюръ A_k нули относительно купюры, относящейся къ логариѳмическимъ точкамъ равны $2\pi i$.

Обозначая черезъ $\{\underline{ab}^{(1)}\}$ сумму интеграловъ второго рода, а черезъ $(\underline{ab}^{(1)})$ сумму интеграловъ перваго и третьяго рода можемъ написать

$$[\underline{ab}^{(1)}] = \{\underline{ab}^{(1)}\} + (\underline{ab}^{(1)}) \tag{34}$$

$$[\overline{ab}^{(1)}] = \{\overline{ab}^{(1)}\} (\overline{ab}^{(1)}) \tag{35}$$

$(\overline{ab}^{(1)})$ множитель для всѣхъ точекъ регулярнаго типа.

Когда

$$[ab^{(1)}] = [lg^{(1)}], \text{ то}$$

$$[\underline{ab}^{(1)}] = 0 \quad (\underline{ab}^{(1)}) = lg\,\xi$$

Когда

$$[\overline{ab}^{(1)}] = [ex^{(1)}], \text{то } \{\overline{ab}^{(1)}\} = e^{\xi} \; (\overline{ab}^{(1)} = 1$$

$$[\overline{ab}^{(1)}] = [dg^{(1)}], \text{то } \{\overline{ab}^{(1)}\} = 1 \;\; (\overline{ab}^{(1)}) = e^{\lambda\, lg\,\xi}$$

Если $[\underline{ab}^{(1)}]\,[\overline{ab}^{(1)}]$, не сводясь къ $[lg]\,[ex]\,[dg]$ выражаются въ конечномъ видѣ черезъ эти послѣднія, то, какъ извѣстно (и какъ мы будемъ имѣть еще случай доказать):

$$[\underline{ab}^{(1)}] = \omega(\alpha, \beta) + \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \chi_i(\alpha, \beta), \tag{36}$$

гдѣ λ_i постоянныя, ω, χ_i раціональныя функціи отъ (α, β).

Поэтому въ этомъ случаѣ:

$$\{\underline{ab}^{(1)}\} = \omega(\alpha, \beta) = [alg] \quad (\underline{ab}^{(1)}) = \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i \, [lg_i^{(1)}] \tag{37}$$

$$\{\overline{ab}^{(1)}\} = [ex^{(1)}] \quad (\overline{ab}^{(1)}) = \prod_{i=1}^{i=m} [dg_i^{(1)}] \tag{38}$$

Когда мы имѣемъ нѣсколько Абелевыхъ интеграловъ вполнѣ опредѣленныхъ

$$[\underline{ab}_i^{(1)}] = \int F_i(\alpha_i \beta_i)\, dx = \int \Phi_i(x, u_i)\, dx$$

гдѣ

$$\Phi(\alpha_i, \beta_i) = 0 \quad \text{или} \quad f_i(x, u_i) = 0,$$

то можемъ всѣ эти Абелевы интегралы опредѣлить одной кривой или, какъ будемъ говорить, *отнести къ одной кривой.*

Въ самомъ дѣлѣ, полагая

$$\sum_{i=1}^{i=m} \alpha_i u_i = u$$

гдѣ α_i надлежаще выбранныя постоянныя, можемъ выразить u_i въ раціональной функціи отъ u и написать

$$[\underline{ab}_i^{(1)}] = \int \Omega_i(x, u)\, dx$$

$$f(x, u) = 0$$

§ *12. О суммахъ и произведеніяхъ* $[ab]$ и $[qv]$.

Раньше чѣмъ перейти къ болѣе детальному изученію свойствъ $[ab]$ и $[qv]$ мы отмѣтимъ одно свойство, дающее возможность упрощать выраженія построенныя съ помощью $[ab]\,[qv]$.

На основаніи опредѣленія (15, 16) qv

$$\sum_{\substack{i=1 \\ j_i \geqq j}}^{i=m} \lambda_i\,[\underline{qv}^{(j_i)}_{\ i}] = [\underline{qv}^{(j)}] \tag{39}$$

$$\prod_{\substack{i=1 \\ j_i \geqq j}}^{i=m} [\overline{qv}^{(j_i)}_{\ i}]^{\lambda_i} = [\overline{qv}^{(j)}] \tag{40}$$

Того же нельзя сказать относительно $[\underline{ab}^{(j)}_{\ i}]$ $[\overline{ab}^{(j)}_{\ i}]$, если Абелевъ интегралъ какъ либо опредѣленъ относительно раціональной функціи F или относительно кривой ея опредѣляющей.

Мы можемъ сказать, что всегда

$$\sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i\,[\underline{ab}^{(j_i)}_{\ i}] = [\underline{qv}^{(j)}] \tag{41}$$

$$\prod_{\substack{i=1 \\ j_i \geqq j}}^{i=m} [\overline{ab}^{(j_i)}_{\ i}]^{\lambda_i} = [\overline{qv}^{(j)}], \tag{42}$$

но только въ весьма частныхъ случаяхъ:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i\,[\underline{ab}^{(j_i)}_{\ i}] = [\underline{ab}^{(j)}] \tag{43}$$

$$\prod_{\substack{i=1 \\ j_i \geqq j}}^{i=m} [\overline{ab}^{(j_i)}_{\ i}]^{\lambda_i} = [\overline{ab}^{(j)}] \tag{44}$$

Такіе частные случаи имѣютъ между прочимъ мѣсто для функцій $(elm]$:

$[lg]$:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \lambda_i [lg^{(j_i)}_i] = [lg^{(j)}] \qquad (45)$$

λ_i раціонально

$[dg]$:

$$\prod_{i=1}^{i=m} [dg^{(j_i)}_i]^{\lambda_i} = [dg^{(j)}] \qquad (46)$$

λ_i раціонально

$[ex]$:

$$\prod_{i=1}^{i=m} [ex^{(j_i)}_i]^{\lambda_i} = [ex^{(j)}] \qquad (47)$$

λ_i постоянное.

Сумму

$$\sum_{i=1}^{i=m} k_i [lg^{(j)}_i] \qquad (48)$$

и

произведеніе

$$\prod_{i=m}^{i=h} [dg^{(j)}_i]^{h_i} = e^{\sum\limits_{i=1}^{i=n} h_i [lg^{(j)}_i]}$$

гдѣ h_i ирраціональныя числа возможно всегда упростить, приведя къ меньшему числу основныхъ трансцендентныхъ въ томъ случаѣ, когда

$$\sum_{i=1}^{i=h} a_i h_i = a \qquad (49)$$

гдѣ a_i, a раціональныя числа.

Въ самомъ дѣлѣ изъ уравненія (49) опредѣляемъ

$$h_{p+1} = \sum_{g=1}^{g=p} b_g h_g$$

подставляемъ въ выраженіе (48), что даетъ

$$\sum_{g=1}^{g=p} h_g \sum_{i=1}^{i=m} \lambda_{gi} [lg^{(j)}_i] = \sum_{g=1}^{g=p} h_g [lg^{(j)}_g]$$

на основаніи ур. (45).

Выраженіе

$$e^{\int \sqrt{1+x^3}\,dx}\,[e^{x^2}+2\,lg\,x]^{\sqrt{2}}+3\int x^3 \sin e^x\,dx+2\int\frac{\sin x}{x}\,dx$$

приводится къ

$$[\overline{qv^{(2)}}]+[\underline{qv^{(3)}}]$$

Выраженіе:

$$5\,lg\,x+3\,lg\,(x+1)+\frac{2}{5}\,lg\,(e^x+x^3)$$

приводится къ

$$[lg_1^{(2)}]$$

$$e^{x^3}\,e^{\sqrt{1+x^3}}\,e^{e^x}=[ex^{(2)}]\qquad \text{и т. д.}$$

§ 13. *Отличительныя свойства функцій* $[ab]$ *и* $[qv]$.

При расширеніи области основныхъ элементарныхъ трансцендентныхъ остаются въ силѣ не только классификація трансцендентныхъ и свойства приготовленнаго выраженія, но свойство производной трансцендентной по независимому перемѣнному.

Въ самомъ все доказательство § 7 основано на единственномъ свойствѣ $\frac{d\theta_i^{(j)}}{dx}$:

$\frac{d\theta_i^{(j)}}{dx}$ алгебраическая функція $\theta_i^{(j)}$ и другихъ трасцендентныхъ съ помощью которыхъ $\theta_i^{(j)}$ построена. А это свойство имѣетъ мѣсто, какъ для $[ab]$, такъ и для $[qv]$.

Такимъ образомъ $\frac{d\pi}{dx}$ *построена въ области тѣхъ трасцендентныхъ* (θ), *что* π.

Если θ основная трансцендентная высшаго класса, то въ той же области построена и $\frac{\partial\pi}{\partial\theta}$.

Что касается до $\left(\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right)$ производной по трансцендентной нисшаго класса $\theta=\theta^{(q-1)}$, то свойство присущее элементарнымъ функціямъ остается только за $[ab]$, но отнюдь не за $[qv]$.

Въ самомъ дѣлѣ на основ. ур. (10) (12) и т. д.

$$\frac{\partial\,[\underline{ab}^{(j)}]}{\partial\,\theta}=\frac{\partial\,[\underline{ab}^{(j)}]}{\partial\,\xi^{(j-1)}}\frac{d\xi^{(j-1)}}{\partial\theta}=F(\xi^{(j-1)},\eta^{(j-1)})\,\frac{\partial\xi^{(j-1)}}{\partial\theta}$$

$$\frac{\partial\,[\overline{a}\overline{b}^{(j)}]}{\partial\,\theta}=[\overline{ab}^{(j)}]\,F\,(\xi^{(j-1)},\eta^{(j-1)})\,\frac{\partial\,\xi^{(j-1)}}{\partial\theta}.$$

Откуда, какъ въ § 6 заключаемъ, что $\frac{\partial[\underline{ab}^{(j)}]}{\partial\theta}$, $\frac{\partial\,[\overline{a}\overline{b}^{(j)}]}{\partial\theta}$, а затѣмъ и вообще $\left(\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right)$ представляютъ алгебраическую функцію тѣхъ основныхъ трансцендентныхъ, съ помощью которыхъ построена π.

Такъ напримѣръ, если

$$y=e^{\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}}\int\sqrt{1+\xi^3}\,d\xi$$

гдѣ

$$\xi=lg\,x+2e^{\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}}$$

или

$$y=\theta\,\theta_1^{(2)}$$

$$\theta=\theta_1^{(1)}=e^{\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}}\qquad\theta_2^{(1)}=lg\,x=\int\frac{dx}{x}$$

то

$$\frac{\partial y}{\partial\theta}=\theta_1^{(2)}+\theta\frac{\partial\,\theta_1^{(2)}}{\partial\theta}\;\Bigg|\;\frac{\partial\,\theta_1^{(2)}}{\partial\theta}=\sqrt{1+\xi^3}\frac{d\xi}{\partial\theta}=2\sqrt{1+(\theta_2^{(1)}+2\theta)^3}$$

откуда

$$\frac{\partial y}{\partial\theta}=\theta_1^{(2)}+2\theta\sqrt{1+(\theta_2^{(1)}+2\theta)^3}$$

Для $[\underline{qv}]$ это свойство $\left(\frac{\partial\pi}{\partial\theta}\right)$ не имѣетъ мѣста.

Получимъ

$$[qv^{(J)}] = \int F(x, \theta)\, dx$$

$$\frac{\partial [qv^{(J)}]}{\partial \theta} = \int \frac{\partial F(x, \theta)}{\partial \theta}\, dx$$

и эта квадратура вообще представляетъ основную трансцендентную совершенно новую, не входящую въ область (θ). Можетъ даже случиться, что

$$\frac{\partial\, [qv^{(J)}]}{\partial \theta} = [qv_i^{(k)}]$$

окажется трансцендентной нисшаго класса, чѣмъ $[qv^{(J)}]$.

Возьмемъ для примѣра

$$[\underline{q}v^{(4)}] = \int \frac{e^{e^x \sin x}\, dx}{\sin x} = \int e^{e^x\left(\frac{e^{xi} - e^{-xi}}{2i}\right)} \frac{2i\, dx}{e^{xi} - e^{-xi}} =$$

$$= \int e^{\theta\left[\frac{\theta_2^{(1)} - \theta_3^{(1)}}{2i}\right]} \frac{2i\, dx}{\theta_2^{(1)} - \theta_3^{(1)}}$$

$$\frac{\partial\, [\underline{q}v^{(4)}]}{\partial \theta} = \int e^{\theta\left[\frac{\theta_2^{(1)} - \theta_3^{(3)}}{2i}\right]} dx = \int e^{e^x \sin x}\, dx = [qv_1^{(4)}]$$

основная трансцендентная того же класса, что $[qv^{(4)}]$ и того же типа, но не принадлежащая къ области (θ).

d) Свойства основныхъ трансцендентныхъ.

§ 14. *Классификація трансцендентныхъ по типамъ.*

Трансцендентныя $[ab]$ $[\underline{qv}]$ можно дѣлить по типамъ:

I типъ. Основное свойство трансцендентной I-го типа ξ:

$$\frac{d\zeta}{dx} = F(x) \tag{50}$$

гдѣ $F(x)$ трансцендентная нисшаго, чѣмъ ζ класса. Этимъ свойствомъ обладаютъ:

$$[\underline{qv}],\ [a\overset{\smile}{b}],\ [\underline{lg}]$$

II типъ. Основное свойство трансцендентной II-го типа η:

$$\frac{d\eta}{dx} = \eta F(x) \tag{51}$$

гдѣ $F(x)$ трансцендентная нисшаго класса. Этимъ свойствомъ обладаютъ:

$$[\overline{qv}]\ [\overline{ab}]\ [ex]$$

Мы укажемъ прежде всего характерныя свойства $\frac{\partial \pi}{dx}$ относительно каждой изъ трансцендентныхъ ζ, η.

Принимая, что

$$y = \pi(\zeta_1,\ \zeta_2 \ldots \eta_1,\ \eta_2 \ldots x)$$

согласно принятому еще въ § 6 обозначенію можемъ написать

$$y = \pi(\zeta),$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dx} = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi}{\partial \zeta}F(x) = \pi_1(\zeta)$$

π_1 алгебр. функція ζ и другихъ трансцендентныхъ при помощи которыхъ построена y.

Замѣнимъ ζ на $\zeta + \mu$

Если

$$\left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right) = \pi^{(1)}(\zeta)$$

то по этой замѣнѣ мы получимъ

$$\pi^{(1)}(\zeta + \mu) = \left(\frac{\partial \pi(\zeta + \mu)}{\partial x}\right)$$

Такимъ же образомъ вмѣсто $\frac{\partial \pi}{\partial \zeta}$ получимъ

$$\frac{\partial \pi[\zeta + \mu]}{\partial \zeta} = \frac{\partial \pi(\zeta + \mu)}{\partial(\zeta + \mu)},$$

Имѣя же въ виду, что

$$\frac{d\zeta}{dx} = \frac{d(\zeta+\mu)}{dx} = F(x)$$

мы можемъ написать

$$\pi_1(\zeta+\mu) = \left(\frac{\partial\pi(\zeta+\mu)}{\partial x}\right) + \frac{\partial\pi(\zeta+\mu)}{\partial(\zeta+\mu)} F(x)$$

или

$$\pi_1(\zeta+\mu) = \left(\frac{\partial\pi(\zeta+\mu)}{\partial x}\right) + \frac{\partial\pi(\zeta+\mu)}{\partial(\zeta+\mu)} \frac{\partial(\zeta+\mu)}{dx}$$

Замѣчая же, что правая часть послѣдняго уравненія равна $\frac{d\pi(\zeta+\mu)}{dx}$, имѣемъ

$$\pi_1(\zeta+\mu) = \frac{d\pi(\zeta+\mu)}{dx}$$

Взявъ затѣмъ случай трансцендентной второго типа η имѣемъ

$$y = \pi(\eta)$$

$$\frac{dy}{dx} = \left(\frac{\partial\pi}{\partial\eta}\right) + \frac{\partial\pi}{\partial\eta}\frac{d\eta}{dx} = \left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\right) + \frac{\partial\pi}{\partial\eta}\eta F(x) = \pi_1(\eta)$$

Замѣняемъ η на $\eta\mu$, тогда

$$\pi_1(\eta\mu) = \left(\frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial x}\right) + \frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial\eta}\eta F(x)$$

Замѣчая, что $\frac{d(\eta\mu)}{dx} = \mu\eta F(x)$, можемъ написать:

$$\pi_1(\eta\mu) = \left(\frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial x}\right) + \frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial(\eta\mu)}\eta\mu F(x) = \left(\frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial x}\right) +$$

$$+ \frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial(\eta\mu)}\frac{d(\eta\mu)}{dx} = \frac{d\pi(\eta\mu)}{dx}.$$

Итакъ *если* $\pi_1(\theta) = \frac{d\pi(\theta)}{dx}$, *то* $\pi_1(\theta_\mu) = \frac{d\pi(\theta_\mu)}{dx}$ *если обозначить черезъ* μ *произвольное и положить*

$$\theta_\mu = \zeta+\mu, \quad \text{если} \quad \theta = \zeta$$

$$\theta_\mu = \eta_\mu, \quad \text{если} \quad \theta = \eta$$

Положимъ

$$y = \frac{e^{x^2} lg x}{x-1} = \frac{\zeta\eta}{x-1},$$

тогда

$$\frac{dy}{dx} = -\frac{\zeta\eta}{(x-1)^2} + \frac{1}{x-1}\left[\zeta\frac{d\eta}{dx} + \eta\frac{d\zeta}{dx}\right]$$

$$\frac{d\eta}{dx} = 2xe^{x^2} = 2x\eta \quad \frac{d\zeta}{dx} = \frac{1}{x}$$

$$y_\mu = \frac{(\zeta+\mu)\eta}{x-1} \quad \frac{dy_\mu}{dx} = -\frac{(\zeta+\mu)\eta}{(x-1)^2} + \frac{1}{(x-1)^2}\left[(\zeta+\mu)\frac{d\eta}{dx} + \frac{\eta}{x}\right]$$

и, какъ легко видѣть тотъ же результатъ получаемъ по замѣнѣ въ выраженіи $\frac{dy}{dx}$, ζ на $\zeta+\mu$.

§ 15. Основное свойство простѣйшаго уравненія между трансцендентными I и II типов.

Между трансцендентными двухъ типовъ ζ_i, η_i одного класса возможны уравненія

$$N[\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m, \eta_1 \eta_2 \ldots \eta_n] = 0 \tag{52}$$

тожественныя относительно x, но не тожественныя относительно ζ_i, η_i.

N алгебраическая функція ζ_i, η_i и низшихъ трансцендентныхъ.

Таковы напримѣръ уравненія:

1)

$$\zeta_1(\eta_1^2 \eta_3 - \eta_2^2) + \zeta_1 - 2\zeta_3 = 0 \tag{53}$$

гдѣ

$$\eta_1 = e^{-x} \quad \eta_2 = e^{\int\sqrt{1+x^3}\,dx} \quad \eta_3 = e^{\int\frac{2(1+x^3+\sqrt{1+x^6})}{\sqrt{1+x^3}}\,dx}$$

$$\zeta_1 = lg(3+2x) \quad \zeta_2 = lg(x^{-2}+2+x^2)$$

$$\zeta_3 = lg(x^{-1}+x)$$

$$2)\ \eta_1(\zeta_1+\zeta_2-[\underline{q}v_1^{(3)}])+\zeta_3-\frac{1}{2}\zeta_4=-\frac{1}{2}\left[\frac{1}{[\underline{q}v_1^{(3)}]^2}+\frac{1}{[\underline{q}v_1^{(2)}]}\right][\overline{q}\overline{v}_1^{(3)}] \qquad (54)$$

гдѣ

$$\zeta_1=\int\frac{e^x\sin^2(1+\int\frac{e^x}{x}dx)}{x(1+\int\frac{e^x}{x}dx)}dx \quad \zeta_2=\int\frac{e^x\cos^2(1+\int\frac{e^x}{x}dx)\,dx}{x(1+\int\frac{e^x}{x}dx)}$$

$$\eta_1=e^{\int(\frac{1}{x}\int e^{x^2}dx)\,dx} \qquad \zeta_3=\int\frac{e^{\int\frac{e^x}{x}dx+x}}{x\left(\int\frac{e^x}{x}dx\right)^3}dx$$

$$\zeta_4=\int\frac{e^{\int\frac{e^x}{x}dx+x}\,dx}{x\int\frac{e^x}{x}dx}$$

Уравненіе (52) называемъ *простѣйшимъ относительно* ζ_1, если не существуетъ уравненія содержащаго ζ_1 и число трансцендентныхъ ζ_i меньшее, чѣмъ (52) и если кромѣ того не существуетъ уравненія, не содержащаго $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m$ и число функцій η_i меньшее чѣмъ (52).

Такимъ же образомъ опредѣляется уравненіе (52), простѣйшее относительно η_i.

Рѣшимъ уравненіе (52) относительно ζ_1

$$\zeta_1=P[\zeta_2,\zeta_3\ldots\zeta_m,\eta_1,\eta_2\ldots\eta_n] \qquad (55)$$

Всякое уравненіе

$$S(\zeta_2,\zeta_3\ldots\zeta_p,\eta_1,\eta_2\ldots\ldots\eta_n)=0 \qquad (56)$$

между меньшимъ числомъ функціи ζ_i, функціями η_i и низшими трансцендентными приводится къ тожеству относительно ζ_i, ибо иначе опредѣляя изъ этого уравненія ζ_2 въ функціи отъ $\zeta_3\ldots\zeta_m,\eta_1,\eta_2\ldots\eta_n$ и низшихъ трансцендентныхъ мы получили бы выраженіе ζ, въ $\zeta_3,\zeta_4\ldots\zeta_m,\eta_1,\eta_2\ldots\eta_n$ Уравненіе (56) должно приводиться къ тожеству и относительно η_i, ибо замѣняя ζ_i какимъ угодно постоянными a_i мы имѣли бы уравненіе

$$S(a_1, a_2 \ldots a_p, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n) = 0$$

между η_i и имѣли бы возможность въ уравненіяхъ (55) и (52) исключить одну функцію η_i.

Если уравненіе (52) простѣйшее относительно η_1 то уравненія (55) и (56) должны замѣнить слѣдующими

$$\eta_1 = Q[\eta_2, \eta_3 \ldots \eta_n, \zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m] \tag{57}$$

$$T(\eta_2, \eta_3 \ldots \eta_p, \zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m) = 0 \tag{58}$$

Имѣя все это въ виду докажемъ теперь *первую*

Основную теорему.

Простѣйшее уравненіе между основными трансцендентными содержитъ трансцендентныя только одного типа, при этомъ:

1) простѣйшее относительно ζ можетъ быть только слѣдующаго типа:

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_i \zeta_i = A \tag{59}$$

гдѣ C_i постоянныя, A трансцендентная низшаго класса.

3) простѣйшее относительно η_i типа

$$\prod_{i=1}^{i=m} \eta_i^{C_i} = A \tag{60}$$

I) *Уравненіе простѣйшее относительно ζ.*

Для доказательства дифференцируемъ уравненіе (55)

$$\frac{d\zeta_1}{dx} = \frac{\partial P}{\partial x} + \sum_{i=2}^{i=m} \frac{\partial P}{\partial \zeta_i}\frac{d\zeta_i}{dx} + \sum_{i=1}^{i=n} \frac{\partial P}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dx} = P_1(\zeta_2) \tag{61}$$

$\frac{d\zeta_1}{dx}=\frac{dP_1}{dx}$ согласно § 6, 13 построена въ той же области трансцендентныхъ (θ), что и P. P_1 означаетъ алгебраическую функцію отъ ζ_2, одной изъ функцій ζ_i и другихъ трансцендентныхъ ζ_i, η_i и тран. низшихъ классовъ.

На основаніи свойства ζ_i имѣемъ

$$F_1(x)=P_1(\zeta_2) \tag{61}\zeta$$

гдѣ $F_1(x)$ трансцендентная низшаго класса.

Уравненіе (61), какъ уравненіе типа (56) между $m-1$ трансценд. ζ_i и трансценд. η_i тождественно относительно ζ_2 и остается слѣдовательно въ силѣ по замѣнѣ ζ_2 на $\zeta_2+\mu_2$, произвольное постоянное.

$$F_i(x)=P_1(\zeta_2+\mu_2) \tag{62}\zeta$$

$$P_1(\zeta_2)=\frac{dP(\zeta_2)}{dx}$$

на основаніи же доказаннаго въ § 14:

$$P_1(\zeta_2+\mu_2)=\frac{dP(\zeta_2+\mu_2)}{dx}$$

поэтому на основаніи уравненій (61) и (62) имѣемъ:

$$\frac{dP(\zeta_2+\mu_2)}{dx}=\frac{dP(\zeta_2)}{dx}$$

откуда

$$P(\zeta_2+\mu_2)=P(\zeta_2)+C_2 \tag{63}$$

гдѣ C_2 постоянное.

Для того, чтобы опредѣлить постоянное C_2, полагаемъ

$$x=a=const$$

тогда

$$\zeta_2=b_2=const$$

(причемъ b не зависитъ отъ μ_2)

$$C_2=P(b_2+\mu_2)-P(b_2)$$

Уравненіе (63) принимаетъ видъ

$$P(\zeta_2+\mu_2)=P(\zeta_2)+P(b_2+\mu_2)-P(b_2)$$

Взявъ частную производную по μ_2 имѣемъ

$$\frac{\partial P(\zeta_2+\mu_2)}{\partial\mu_2}=\frac{\partial P(b_2+\mu_2)}{\partial\mu_2}=D_2 \tag{64}$$

гдѣ D_2 постоянное.

Взявъ же частную производную по ζ_2 получаемъ

$$\frac{\partial P(\zeta_2+\mu_2)}{\partial\zeta_2}=\frac{\partial P(\zeta_2)}{\partial\zeta_2}$$

Замѣчая же, что

$$\frac{\partial P(\zeta_2+\mu_2)}{\partial\mu_2}=\frac{\partial P(\zeta_2+\mu_2)}{\partial\zeta_2}=\frac{\partial P(\zeta_2+\mu_2)}{\partial(\zeta_2+\mu_2)}$$

и сравнивая съ уравненіемъ (64) имѣемъ

$$\frac{\partial P(\zeta_2+\mu_2)}{\partial\zeta_2}=D_2$$

при

$$\mu_2=0$$

$$\frac{\partial P(\zeta_2)}{\partial\zeta_2}=D_{02} \qquad (65)_2$$

Такимъ образомъ $P(\zeta_2)$ алгебраическая функція отъ ζ_2, удовлетворяющая уравненіе $(65)_2$.

Легко видѣть, что такая алгебраическая должна быть линейной функціей ζ_2. Дѣйствительно интегрированіе уравненія $(65)_2$ даетъ

$$P(\zeta_2)=D_{02}\,\zeta_2+E_2 \tag{66}$$

гдѣ D_{02} постоянныя E_2 не зависитъ отъ ζ_2.

Производя тоже изслѣдованіе для ζ_3 получаемъ

$$\frac{\partial P(\zeta_3)}{\partial\zeta_3}=\frac{\partial E_2}{\partial\zeta_3}=D_{03}$$

откуда

$$E_2=D_{03}\,\zeta_3+E_3$$

гдѣ D_{03} постоянное, E_3 не зависитъ ни отъ ζ_2, или отъ ζ_3.

Продолжая такимъ образомъ дальше получаемъ

$$\zeta_1 = \sum_{i=2}^{i=p} D_{0i}\,\zeta_i + E \tag{67)$_1$}$$

гдѣ D_{0i} постоянныя, E не зависитъ отъ ζ_i, а только отъ η_i

Уравненіе (61) или что тоже

$$F_i(x) = P_1(\eta_1) \tag{61)$_\eta$}$$

должно быть также тожественно и относительно $\eta_1, \eta_2 \ldots$

Оно остается въ силѣ по замѣнѣ η_1 на $\eta_1 \mu_1$ гдѣ μ_1 произвольное постоянное: $F_1(x) = P_1(\eta_1 \mu_1)$ (62)$_\eta$

Такъ какъ

$$P_1(\eta_1) = \frac{dP(\eta_1)}{dx}$$

то согласно § 14

$$P_1(\eta_1 \mu_1) = \frac{dP(\eta_1 \mu_1)}{dx}$$

поэтому

$$\frac{dP(\eta_1 \mu_1)}{dx} = \frac{dP(\eta_1)}{dx}$$

что даетъ

$$P(\eta_1 \mu_1) = P(\eta_1) + C_1 \tag{63)$_\eta$}$$

или

$$P(\eta_1 \mu_1) = P(\eta_1) + P(b_2 \mu_2) - P(b_2)$$

если положить

$$[\eta_1]_{x=a} = b_1$$

Дифференцируя получаемъ

$$\frac{\partial P(\eta_1 \mu_1)}{\partial \eta_1} = \frac{\partial P(\eta_1)}{\partial \eta_1} \tag{68}$$

$$\frac{\partial P(\eta_1 \mu_1)}{\partial \mu_1} = \frac{\partial P(b_1 \mu_1)}{\partial \mu_1} = F_1 \tag{69}$$

гдѣ F_1 постоянное

Но легко видѣть, что

$$\frac{1}{\mu_1}\frac{\partial P(\eta_1 \mu_1)}{\partial \eta_1}=\frac{1}{\eta_1}\frac{\partial P(\eta_1 \mu_1)}{\partial \mu_1}=\frac{\partial P(\eta_1 \mu_1)}{\partial(\eta_1 \mu_1)}$$

вслѣдствіе чего уравненія (68) (69) даютъ

$$\frac{\eta_1}{\mu_1}\frac{\partial P(\eta_1 \mu_1)}{\partial \eta_1}=F_1$$

полагая же $\mu_1=1$

$$\frac{dP(\eta_1)}{\partial \eta_1}=\frac{F_{01}}{\eta_1} \tag{70$_1$}$$

$P(\eta_1)$ должна быть алгебраической функціи η_1 удовлетворяющей (при всякомъ значеніи η_1) уравненію $(70)_1$. Но такой алгебраической функціи не существуетъ, если только эта функція не сводится къ постоянному (т. е. не зависитъ отъ η_1). Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (70) даетъ

$$P(\eta_1)=F_{01}\, lg\, \eta_1+q$$

гдѣ q не зависитъ отъ η_1.

Необходимо чтобы $F_{01=0}$, ибо въ противномъ случаѣ $lg\eta_1$ представился бы алгебраической функціей.

Итакъ функціи η_i въ P совсѣмъ не входятъ ζ_i входятъ только линейно съ постоянными коэффиціентами. Такимъ образомъ единственно возможный типъ уравненія это (59)-ый.

II) Уравненіе простѣйшее относительно η.

Уравненіе (57)

$$\eta_1=Q(\eta_2,\eta_3\ldots\eta_n,\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_m) \tag{57}$$

въ этомъ случаѣ даетъ

$$\frac{d\eta_1}{dx}=\frac{\partial Q}{dx}+\sum_{i=2}^{i=n}\frac{\partial Q}{\partial \eta_i}\frac{d\eta_i}{dx}+\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial Q d\zeta_i}{\partial \zeta_i\, dx}=Q_1(\eta_2)$$

или

$$\eta_1 F_1(x)=Q_1(\eta_2)$$

раздѣляя почленно на

$$\eta_1 = Q(\eta_2)$$

имѣемъ

$$F_1(x) = \frac{Q_1(\eta_2)}{Q(\eta_2)} \qquad (72)_\eta$$

Это уравненіе типа (58) и остается въ силѣ по замѣнѣ η_2 на $\eta_2 \mu_2$, такъ что

$$F_1(x) = \frac{Q_1(\eta_2 \mu_2)}{Q(\eta_2 \mu_2)} \qquad (73)_\eta$$

Но

$$Q_1(\eta_2) = \frac{dQ(\eta_2)}{dx}$$

поэтому

$$Q_1(\eta_2 \mu_2) = \frac{dQ(\eta_2 \mu_2)}{dx}$$

и уравненія $(72)_\eta$ и $(73)_\eta$ намъ даетъ

$$\frac{1}{Q(\eta_2)} \frac{dQ(\eta_2)}{dx} = \frac{1}{Q(\eta_2 \mu_2)} \frac{dQ(\eta_2 \mu_2)}{dx}$$

откуда

$$Q(\eta_2 \mu_2) = CQ(\eta_2)$$

или

$$[\eta_2]_{x=a} = b_2$$

полагая

$$Q(\eta_2 \mu_2) = \frac{Q(b_2 \mu_2)}{Q(b_2)} Q(\eta_2)$$

полагая же

$$lg\, Q(\eta_2) = P(\eta_2)$$

имѣемъ

$$P(\eta_2 \mu_2) = P(\eta_2) + P(b_2 \mu_2) - P(b_2)$$

откуда, какъ выше получаемъ что $P(\eta_2)$ удовлетворяетъ уравненію

$$\frac{\partial P(\eta_2)}{\partial \eta_2} = \frac{F_{02}}{\eta_2} \qquad (70)_2$$

а $Q(\eta_2)$ уравненію

$$\frac{1}{Q(\eta_2)} \frac{\partial Q(\eta_2)}{\partial \eta_2} = \frac{F_{02}}{\eta_2} \qquad (74)$$

Отсюда

$$Q(\eta_2) = H\eta_2^{F_{02}}$$

гдѣ F_{02} постоянное, H не зависитъ отъ η_2, при этомъ необходимо, для того, чтобы $Q(\eta_2)$ была алгебраической, чтобы F_{02} были раціональны. Производя тѣ же изслѣдованія для $\eta_3, \eta_4 \ldots \eta_m$ убѣждаемся, что

$$\eta_1 = g\, \eta_2^{F_{02}}\, \eta_3^{F_{03}} \ldots \eta_n^{F_{0n}} \tag{75}$$

гдѣ F_{0i} постоянная, g трансцендентная независящая отъ η_i, а только отъ ζ_i.

Но легко видѣть, что Q совсѣмъ не зависитъ отъ ζ_i и η_i такимъ образомъ сводится къ трансцендентный низшаго класса.

Въ самомъ дѣлѣ уравненія $(72)_\eta$ $(73)_\eta$ въ случаѣ трансцендентныхъ ζ_1 замѣняются слѣдующими:

$$F_1(x) = \frac{Q_1(\zeta_1)}{Q(\zeta_1)} \tag*{$(72)_\zeta$}$$

$$F_1(x) = \frac{Q_1(\zeta_1+\mu_1)}{Q(\zeta_1+\mu_1)} \tag*{$(73)_\zeta$}$$

дающими

$$\frac{1}{Q(\zeta_1)}\frac{dQ(\zeta_1)}{dx} = \frac{1}{Q(\zeta_1+\mu_1)}\frac{dQ(\zeta_1+\mu_1)}{dx}$$

откуда получаемъ

$$P(\zeta_1+\mu_1) = P(\zeta_1) + P(b_1+\mu_1) - P(b_1)$$

$$P(\zeta_1) = lgQ(\zeta_1) \quad b_1 = [\zeta_1]_{x=a}$$

затѣмъ дифференціальныя уравненія: для $P(\zeta_1)$

$$\frac{\partial P(\zeta_1)}{\partial \zeta_1} = D_{01} \tag*{(65_1)}$$

гдѣ D_{01} постоянное, для $Q(\zeta_1)$

$$\frac{1}{Q(\zeta_1)}\frac{\partial Q(\zeta_1)}{\partial \zeta_1} = D_{01} \tag{76}$$

Но это послѣднее уравненіе даетъ

$$Q(\zeta_1) = I_1 \, e^{D_{01} \zeta_1} \tag{77}$$

гдѣ I не зависитъ отъ ζ_1.

Такъ какъ $e^{D_{01}\zeta_1}$ при $D_{01} \gtrless 0$ не можетъ быть алгебраической функціей отъ ζ_1, то необходимо, чтобы $D_{01} = 0$ т. е. чтобы $Q(\zeta_1)$ не зависимо отъ ζ_1.

§ 16. *Форма простѣйшаго уравненія въ случаѣ функцій* $[qv]$.

Посмотримъ къ чему сводятся уравненія (59) и (60) въ случаѣ функцій $[qv]$ т. е. когда

$$\zeta_i = [\underline{q}v_i^{(j)}]$$

$$\eta_i = [\overline{qv}_i^{(j)}]$$

На основаніи ур. (39) и (40) § 12 онѣ сводятся къ

$$[\underline{q}v^{(j)}] = A \tag{78}$$

$$[\overline{qv}^{(j)}] = A \tag{79}$$

т. е. къ тому *что нѣкоторая квадратура приводилась къ трансцендентной низшаго класса.*

Если $j = 1$, то *необходимо, чтобы нѣкоторый Абелевъ интегралъ сводился бы къ алгебраической функціи.*

Такимъ образомъ мы обладаемъ весьма простыми средствами судить о томъ, приготовлено ли выраженіе функціи данное въ трансц. $[qv]$. Такъ легко видѣть, что выраженіе

$$y = [\underline{q}v_1^{(1)}] \sqrt{1 + [\overline{qv}_1^{(1)}]} + 2 [\underline{q}v_2^{(1)}] \, [\overline{qv}_2^{(1)}]$$

гдѣ

$$[\underline{q}v_1^{(1)}] = \int \frac{x^2 - 1}{\sqrt{1 + x^3}} \, dx \qquad [\underline{q}v_2^{(1)}] = \int \frac{2 \, dx}{\sqrt{1 + x^3}}$$

$$[\overline{qv}_1^{(1)}] = e^{x^2} \qquad [\underline{q}v_2^{(1)}] = e^{-x}$$

не приготовлено, такъ какъ .

$$[\underline{qv}^{(1)}] = C_1 [\underline{qv}^{(1)}_1] + C_2 [\underline{qv}^{(1)}_2]$$

при $C_1 = 1$ $C_2 = \frac{1}{2}$ сводится къ алгебр. функцiи $\frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}$

Выраженiе y приводимъ къ

$$y = \frac{2}{3}\sqrt{1+x^3}\,[\underline{qv}^{(1)}_1] - [\underline{qv}^{(1)}_2]\;[\tfrac{1}{2}\sqrt{1+[\underline{qv}^{(1)}_1]} - 2\,[\overline{qv}^{(1)}_2]$$

Это выраженiе уже приготовлено, такъ какъ алгебраическое уравненiе возможно только между $[\underline{qv}^{(1)}_1]$ и $[\underline{qv}^{(1)}_2]$ и только формы

$$e^{[\underline{qv}^{(1)}]} = A$$

$A = [alg]$ $[qv^{(1)}] = C_1 x^2 + C_2 x$, что не возможно.

§ 17. *Форма простѣйшаго уравненiя въ случаѣ функцiй* $[ab]$.

Мы ограничимся случаемъ трансцендентныхъ 1-го класса. Возьмемъ функцiи $[ab^{(1)}_i]$, предполагая ихъ отн. къ одной кривой. Простѣйшее уравненiе между трансцендентными I-го типа вида:

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_i [\underline{ab}^{(1)}_i] = A \tag{80}$$

гдѣ A алгебраическая функцiя, C_i постоянныя. Къ слѣдующему уравненiю по логариѳм. ур. (80) сводится уравненiе между трансц. II типа:

$$\prod_{i-1}^{i=m} [\underline{ab}^{(i)}]^{C_i} = lg\,A \tag{81}$$

Уравненiе (80) на основанiи ур. (34) (35) § 11 сводится къ

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_i \{\underline{ab}^{(1)}_i\} + \sum_{i=1}^{i=m} C_i (\underline{ab}^{(1)}_i) = \varphi(x)$$

но функцiя выражаемая второй суммой S_2

1) не имѣетъ полюсовъ

2) въ виду того, что $\{\underline{ab}_i^{(1)}\}$ имѣетъ періоды относительно одной группы купюръ нули, то тоже относится и къ S_2

Такимъ образомъ

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_i\,(\underline{ab}_i^{(1)}) = C = const \tag{82}$$

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_i\,\{\underline{ab}_i^{(1)}\} = \phi\,(x) \tag{83}$$

Первое уравненіе ($\underline{82}$), когда $(\underline{ab}_i^{(1)})$ вполнѣ опредѣлены непосредственно провѣряется.

Второе предполагаетъ равенство нулю періодовъ относительно второй группы купюръ, это предполагаетъ рядъ алгебраическихъ уравненій между $A_k^{(2j)}$.

На выводѣ и изслѣдованіи этихъ условій мы не останавливаемся, относя читателя къ спеціальнымъ изслѣдованіямъ, относящимся къ извѣстной теоремѣ Римана-Роха.

Уравненіе (81) даетъ

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_i\,(\underline{ab}_i^{(1)}) = lg\,\phi\,(x) \tag{$\overline{82}$}$$

$$\sum_{i=1}^{1=m} C_i\,\{\underline{ab}_i^{(1)}\} = C \tag{$\overline{83}$}$$

Второе уравненіе ($\overline{83}$) непосредственно провѣряется. Первое уравненіе даетъ извѣстную задачу о выраженіи Абелева интеграла черезъ логариѳмъ.

§ 18. *Форма простѣйшаго уравненія въ случаѣ элементарныхъ трансцендентныхъ.*

Въ этомъ случаѣ должны имѣть

$$\sum_{i=1}^{i=n} C_i [lg_i^{(1)}] = C \tag{84}$$

гдѣ C постоянно (частный случай ур. (82)).

На основаніи § 12 это уравненіе приводится къ

$$\sum_{i=1}^{i=n} C_i^{(1)} [lg_{ij}^{(1)}] = C \tag{85}$$

причемъ между $C_i^{(1)}$ не можетъ быть линейныхъ уравненій съ раціональными коэффиціентами

$$\sum_{i=1}^{i=n} a_i C_i^{(1)} = a \tag{86}$$

при этомъ

$$[lg_{ij}^{(1)}] = \sum_{i=1}^{i=m} b_{ji} [lg_i^{(1)}]$$

гдѣ b_{ji} раціональныя числа.

Легко видѣть, что

$$[lg_{ij}^{(1)}] = const = b_j$$

ибо выбравъ одну логариѳмическую точку $[lg_{1i}^{(1)}]$ разлагая лѣвую часть уравненія (85) получили бы

$$\sum_{i=1}^{1=n} C_i^{(1)} lg (x - \alpha_0)^{a_i} + \ldots\ldots = C$$

откуда слѣдовало бы ур. (86). $[lg_{1i}^{(1)}]$ при неимѣніи логариѳмич. точекъ сводятся къ постояннымъ

Итакъ условіе (84) сводится къ условію

$$\sum_{i=1}^{i=m} b_{ji} [lg_i^{(1)}] = b \tag{87}$$

гдѣ b_{ji} раціональныя (или цѣлыя числа)

Если положить $[lg^{(1)}_i]=lg\,\xi_i$ и обозначить порядки нулей α черезъ $\delta_i(\alpha)$, а полюсами черезъ $-\delta(\alpha)$, то должны имѣть

$$\sum_{i=1}^{i=m} b_{\mu i}\,\delta_i(a)=0 \tag{88}$$

При выполненіи этого условія выполнено и (87)

Въ случаѣ

$$[lg^{(1)}_1]=lg\frac{x^5-x^4+4x^3-4x^2+4x-4}{x^2-4x-5}$$

$$[lg^{(1)}_2]=lg\frac{x^6+4x^5-3x^4-16x^3+11x^2+12x-9}{x^5-x^4-20x^3}$$

$$[lg^{(1)}_3]=lg\frac{x-5}{x^4-2x^3+3x^2-4x+2}$$

$$[ab^{(1)}_4]=lg\,\frac{x}{x+3}\qquad [ab^{(1)}_5]=lg\,(x^2-7x+14)$$

Имѣемъ

нули	ξ_1 $1\pm 2i$ (2 кр.)	полюса	ξ_1 $-1, 5, \infty$ (3 кр.)
	ξ_2 $-1, -3$ (2 кр.), 1 (3 кр.)		ξ_2 0 (3 кр.), $5, -4, \infty$
	ξ_3 ∞ (3 кр.), 5,		ξ_3 $\pm 2i$, 1 (2 кр.)
	ξ_4 0,		ξ_4 -3
	ξ_5 $-3, -4$		ξ_5 ∞ (кр.)

Уравненія (88) въ этомъ случаѣ:

$$b_1+3b_2-2b_3=0$$
$$2b_1-b_3=0\quad 2b_1-b_2=0\quad -b_1+b_2=0\quad -b_1-b_2+b_3=0$$
$$-3b_1-b_2+3b_3-2b_5=0\quad -b_1+b_5=0\quad -3b_2+b_4=0$$
$$-b_2+b_5=0$$

и удовлетворяются при

$$b_1=1\ \ b_2=1\ \ b_3=2\ \ b_4=3\ \ b_5=1$$

§ 19. *Объ уравненіяхъ, не принадлежащихъ къ типу простѣйшихъ.*

Предположимъ, что дано уравненіе типа (58)

$$N_{m,n}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n) = 0 \tag{89}$$

причемъ неизвѣстно принадлежитъ ли оно къ типу простѣйшихъ или нѣтъ.

Положимъ, что изъ уравненій, связующихъ функцій ζ_i и η_i получили

$$\begin{aligned} \zeta_{r+1} &= H_1(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_{s_1}) \\ \zeta_{r+2} &= H_2(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_{s_2}) \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \zeta_m &= H_{m-r}(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_{s_{m-r}}) \end{aligned} \tag{90}$$

$$s_j \leqq s$$

для нѣкотораго $j = \imath$ $s_j = s$

Можно предполагать, что каждое изъ этихъ уравненій простѣйшее относительно ζ_{r+j}, и поэтому H_j не содержатъ η

Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ опредѣляя ζ_{r+j} въ функціи отъ остальныхъ ζ_i изъ простѣйшаго уравненія, согласно § 15 не содержащему η_i

$$K(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_{s_j}) = 0$$

мы привели бы уравненія къ простѣйшимъ того же типа:

$$\zeta_{r+j} = H_j^{(1)}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_{s'_j}) \tag{90'}$$

$$j = 1.2 \ldots \eta - r \quad s'_j < s_j$$

Подобныя же (90) уравненія можемъ имѣть и для η_i:

$$\eta_{t+j} = I_i(\eta_1, \eta_2 \ldots \eta_{uj}) \tag{91}$$

$$j = 1.2 \ldots\ldots n - t \quad u_j < u \quad u_i = u$$

не содержанія ζ_i.

На основаніи уравненіи (90) и (91) уравненіе (89) преобразуется въ слѣдующее

$$N_{r,t}[\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_s, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_u] = 0 \tag{92}$$

причемъ

$$N_{r,t}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_s, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_u) = N_{m,n}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_r, H_1, H_2 \ldots H_{m-r}, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_t$$
$$I_1, I_2 \ldots I_{n-r}) \tag{93}$$

Уравненіе (92) является уже простѣйшимъ уравненіемъ какъ относительно ζ_i, такъ и относительно η_i.

Оно можетъ содержать трансцендентныя только одного типа. Поэтому оно тожественно относительно одной изъ группъ трансцендентныхъ

$$\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_r$$

или

$$\eta_1 \eta_2 \ldots \eta_t$$

и остается въ силѣ по замѣнѣ ихъ постоянными

$$a_1, a_2 \ldots a_r$$

$$b_1, b_2 \ldots b_t$$

Поэтому (на основ. ур. (93)):

$$N_{m,n}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_r, H_1(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_s,) \ldots b_1, b_2 \ldots b_t, I_1(b_1, b_2 \ldots b_u) \ldots) = 0$$

или что ниже, если обозначить черезъ b_{r+j} значенія которыя получаетъ η_{r+j} при

$$\eta_j = b_j \ (j = 1 . 2 \ldots r)$$

то

$$N_{m,n}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m, b_1, b_2 \ldots b_n) = 0 \tag{94}$$

т. е. уравненіе (89) остается въ силѣ по замѣнѣ η_i нѣкоторыми, надлежаще выбранными постоянными b_i.

Точно такимъ же образомъ имѣемъ.

$$N_{m,n}(a_1, a_2 \ldots a_m, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n) = 0 \tag{95}$$

Всякое уравненіе между трансцендентными I и II типовъ остается въ силѣ по замѣнѣ трансцендентныхъ одного типа надлежаще выбранными постоянными.

Такъ уравненіе

$$e^{x^2} lgx^2 - 2\, lgx\, e^{(x+1)^2} e^{-(2x+1)} = 0$$

или

$$\eta_1\zeta_1 - 2\zeta_2\eta_2\eta_3 = 0$$

между трансцендентными:

I типа:

$$\zeta_1 = lgx^2 \quad \zeta_2 = lgx$$

II типа:

$$\eta_1 = e^{x^2} \ \eta_2 = e^{(x+1)^2} \ \eta_3 = e^{-(2x+1)}$$

остается въ силѣ по замѣнѣ

$$\zeta_2 \text{ на } a, \ \zeta_1 \text{ на } 2a$$

при этомъ получаемъ очевидное равенство

$$\eta_1 = \eta_2\eta_3$$

Можно положить также

$$\eta_1 = a, \ \eta_2 = b, \ \eta_3 = \frac{a}{b},$$

что даетъ очевидное равенство

$$\zeta_1 = 2\zeta_2$$

§ 20. *О приведеніи къ приготовленному виду цѣлаго полинома функцій I и II типовъ.*

Въ дальнѣйшихъ изслѣдованіяхъ мы будемъ имѣть дѣло главнымъ образомъ съ трансцендентными типа:

$$y = \sum_{i=1}^{i=m} \eta_1^{\lambda_1^{(i)}} \eta_2^{\lambda_2^{(i)}} \ldots\ldots \eta_q^{\lambda_q^{(i)}} P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m) \tag{96}$$

гдѣ $\lambda_j^{(i)}$ постоянныя числа, P_i полиномы $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m$.

Если $\eta_i = [\overline{qv}_i^{(j)}]$, то на основаніи ур. (40) § 12

$$y = \sum_{i=1}^{i=m} \overline{\eta}_i P_i (\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m) \tag{97}$$

гдѣ $\overline{\eta}$, какъ и η_i трансцендентная II типа

$$\overline{\eta}_i = [\overline{q v^{(J)}}]$$

Если $\lambda_j^{(i)}$ числа раціональныя, причемъ уравненіе (96) приготовлено, то тоже относится и къ (97).

Въ самомъ дѣлѣ, если выраженіе (97) не приготовлено, то имѣетъ мѣсто уравненіе.

$$N(\overline{\eta}_1, \overline{\eta}_2 \ldots \overline{\eta}_m, \zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m) = 0 \tag{98}$$

которое согласно основной теоремѣ § 15 предполагаетъ

$$\prod_{i=1}^{i=m} \overline{\eta}_i^{\,C_i} = A \tag{60}$$

гдѣ C_i постоянныя, А трансцендентная низшаго класса. Замѣняя же $\overline{\eta}_i$ на $\eta_1^{\lambda_1^{(i)}} \eta_2^{\lambda_2^{(i)}} \ldots \eta_q^{\lambda_q^{(i)}}$ имѣемъ

$$\prod_{i=1}^{i=m} \eta_j^{\lambda_j} = A \tag{99}$$

гдѣ

$$\lambda_j = \sum_{i=1}^{i=m} C_i \lambda_j^{(i)}$$

Уравненіе же (99) не можетъ имѣть мѣсто, если выраженіе (96) приготовленное. Если выраженіе (96) неприготовленно то, какъ легко видѣть оно можетъ быть приведено къ выраженію той же формы, но приготовленному.

Въ самомъ дѣлѣ въ этомъ случаѣ на основаніи § 15 уравненія, связующій ζ_i η_i обязательно формы (59) и (60):

$$\sum_{i=1}^{i=m} C_i \zeta_i = A \tag{59}$$

$$\prod_{i=1}^{i=m} \eta_i^{C_i} = A \tag{60}$$

гдѣ C_i постоянныя, A трансц. нисшаго класса. Уравненія (59) даютъ $\zeta_{r+1}, \zeta_{r+2} \ldots$ въ линейныхъ функціяхъ $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_r$ и поэтому полиномъ

$$P(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m)$$

преобразуется въ полиномъ же

$$Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_r)$$

Уравненія же (60) даютъ $\eta_{s+1}, \eta_{s+2} \ldots$ въ формѣ

$$B \eta_1^{\alpha_1} \eta_2^{\alpha_2} \ldots \eta_s^{\alpha_s}$$

гдѣ α_i постоянныя, B трансцендентныя нисшаго класса и преобразовываютъ произведеніе

$$\eta_1^{\lambda_1^{(i)}} \eta_2^{\lambda_2^{(i)}} \ldots \eta_q^{\lambda_q^{(i)}}$$

въ

$$D \eta_1^{\mu_1^{(i)}} \eta_2^{\mu_2^{(i)}} \ldots \eta_s^{\mu_s^{(i)}}$$

гдѣ $\mu_j^{(i)}$ постоянныя числа, D трансцендентная нисшаго класса.

Выраженіе y (96) преобразовывается въ выраженіе того же типа

$$\sum_{i=1}^{i=m} \eta_1^{\mu_1^{(i)}} \eta_2^{\mu_2^{(i)}} \ldots \eta_s^{\mu_s^{(i)}} Q_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_r)$$

Возьмемъ для примѣра:

$$y = \frac{\eta_1 \eta_2 \eta_3 \zeta_1}{\sqrt{1+x^2}} + \eta_4 \eta_5 \zeta_2 + x^2 \eta_6 \eta_1 \eta_7 \zeta_3 \zeta_4 \tag{100}$$

гдѣ

$$\eta_1 = e^{x^2} \quad \eta_2 = e^x \quad \eta_3 = x^{\frac{1}{\sqrt{3}-\sqrt{2}}}$$

$$\eta_4=e^{x^2-x}\quad \eta_5=x^{\sqrt{3}}\quad \eta_6=x^{\sqrt{2}}\quad \eta_7=e^{-x}$$

$$\zeta_1=lgx\quad \zeta_2=lg(x^2+2x+1)\quad \zeta_3=\int\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$$

$$\zeta_4=lg(x+1)$$

Легко видѣть, что

$$\eta_1=\eta_4\,\eta_2\quad \eta_3=\eta_5\,\eta_6\quad \eta_7=\eta_2^{-1}$$

$$\zeta_2=2\zeta_4,$$

вслѣдствіе чего имѣемъ

$$y=\frac{\eta_4\,\eta_5\,\eta_6\,\eta_2{}^2\,\zeta_1}{\sqrt{1+x^5}}+2\eta_4\,\eta_5\,\zeta_1+x^2\,\eta_6\,\eta_4\,\zeta_3\,\zeta_4 \tag{101}$$

выраженіе приготовленное того же вида, что (100), но уже не содержащее:

$$\eta_1\,,\eta_2\,,\eta_3\,,\zeta_2$$

Можно выраженіе (101) привести къ виду (97)

$$y=\overline{\eta}_1\frac{\zeta_1}{\sqrt{1+x^5}}+\overline{\eta}_2\,\zeta_1+\overline{\eta}_3\,x^2\,\zeta_3\,\zeta_4$$

здѣсь $\overline{\eta}_1$, $\overline{\eta}_2$, $\overline{\eta}_3$ будутъ функціи $[\overline{qv}^{(1)}]$, выражаемыя въ конечномъ видѣ съ помощью функцій $[ab]$ и $[elm]$.

§ 21. *О линейныхъ уравненіяхъ между трансцендентными II типа.*

Вторая основная теорема состоитъ въ слѣдующемъ: *Всякое линейное уравненіе*

$$P_0+\sum_{i=1}^{i=m}P_i\,\eta_i=P \tag{102}$$

между трансцендентными второго типа съ коэффиціентами равными трансцендентнымъ нисшихъ классовъ предполагаетъ для каждой функціи η_i *условія*

$$\eta_i = \rho_{ij}\,\eta_j \qquad (103)$$

$$i \lesseqgtr j$$

ρ_{ij} *трансцендентная нисшаго класса.*

Для доказательства замѣчаемъ, что простѣйшія уравненія между η_i вида (60) или

$$\eta_{r+j} = \sigma_{r+j} \prod_{i=1}^{i=r} \eta_i^{\alpha_i^{(r+j)}} \qquad (104),$$

$$j = 1.2..n-r$$

гдѣ $\alpha_i^{(r+j)}$ постоянныя раціональныя σ_{r+j}, трансцендентныя, нисшихъ классовъ.

Подставляя въ уравненіе (102) имѣемъ

$$P_0 + \sum_{j=1}^{j=r} P_j \eta_j + \sum_{j=1}^{j=n-r} P_{r+j}\,\sigma_{r+j} \prod_{i=1}^{i=r} \eta_i^{\alpha_i^{(r+j)}} = P \qquad (105)$$

Такъ какъ это алгебраическое соотношеніе между меньшимъ, чѣмъ r числомъ функцій η_i то оно приводится къ тожеству и остается въ силѣ по замѣнѣ η_1, η_2.. какими угодно значеніями.

Замѣняя $\eta_i^{\alpha_i^{(r-j)}}$ черезъ $X_i^{\gamma_i^{(r+j)}}$, гдѣ $X^{\delta_i} = \eta_i$, а δ_i наименьшее знаменателей кратное $\alpha_i^{(r+j)} j = 1.2..n-r$, получаемъ уравненіе (105) въ формѣ

$$P_0 + \sum_{j=1}^{j=r} P_i X_j^{\delta_j} + \sum_{i=1}^{i=n+r} P_{r+j}\,\sigma_{r+j} \prod_{i=1}^{i=r} X_i^{\gamma_i^{(r+j)}} = P \qquad (106)$$

Теперь остается только приравнять коэффиціенты при одинаковыхъ степеняхъ X_i въ лѣвой и правой части.

Такъ какъ въ правой части нѣтъ члена съ произведеніемъ:

$$X_1^{\gamma_1^{(r+j)}} X_2^{\gamma_2^{(r+j)}} \ldots X_r^{\gamma_r^{(r+j)}}$$

то необходимо, чтобы членъ этотъ сокращался съ однимъ или нѣсколькими членами съ приведеніями

$$X_1^{\gamma_1^{(r+i)}} X_2^{\gamma_2^{(r+i)}} \ldots X_r^{\gamma_r^{(r+i)}}$$

Необходимо, чтобы

$$\gamma_g^{(r+j)} = \gamma_g^{(r+j)}$$

$$g = 1.2 \ldots r$$

т. е. чтобы

$$\frac{\eta_{r+j}}{\sigma_{r+j}} = \frac{\eta_{r+i}}{\sigma_{r+i}}$$

откуда слѣдуетъ уравненіе

$$\eta_{r+j} = \rho_{r+j,\, r+i}\, \eta_i$$

Такимъ же образомъ должны имѣть

$$\delta_i = \delta_j$$

откуда слѣдуетъ

$$\eta_j = \rho_{j,\, i}\, \eta_i$$

Изъ доказанной теоремы, какъ слѣдствіе вытекаетъ

Всякое уравненіе типа

$$P_0(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_m) + \sum_{i=1}^{i=n} \eta_i P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m) = P(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m) \qquad (107)$$

гдѣ P, P_i алгебр. функ. трансцендентныхъ I типа и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ предполагаетъ

$$\eta_j = \rho_{ij}\, \eta_i \qquad (103)$$

гдѣ ρ_{ij} *трансцендентная нисшаго класса*

Чтобы привести этотъ случай къ предыдущему слѣдуетъ только согласно § 19 замѣнить $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m$ постоянными т. е. ур. (107) уравненіямъ

$$\sum_{i=0}^{i=n} \eta_i P_i(a_1, a_2 \ldots a_m) = P(a_1, a_2 \ldots a_m)$$

Уравненіе (102) по сокращеніи подобныхъ членовъ даетъ

$$P_0 = P \tag{108}$$

Это показываетъ, что *уравненіе (102) и (107) остаются въ силѣ по замѣнѣ* η_i *нулями.*

§ 22. *О линейныхъ уравненіяхъ между* $[\overline{qv}^{(1)}]$ $[\overline{ab}^{(1)}]$ $[ex^{(1)}]$ *и* $[dg^{(1)}]$.

Частнымъ случаемъ уравненія (102) являются слѣдующія

$$P_0 + \sum_{i=1}^{i=n} P_i [\overline{qv}] = P \tag{109}$$

$$P_0 + \sum_{i=1}^{i=n} P_i [\overline{ab}_i^{(1)}] = P \tag{110}$$

$$P_0 + \sum_{i=1}^{i=n} P_i [ex_i^{(1)}] = P \tag{111}$$

$$P_0 + \sum_{i=1}^{i=1} P_i [dg_i^{(1)}] = P \tag{112}$$

Уравненія (109) и (110) предполагаютъ

$$[\underline{ab}_j^{(1)}] - [\underline{ab}_i^{(1)}] = lg\, \rho_{ij} \tag{113}$$

т. е. предполагаютъ приведеніе Абелева интеграла

$[\underline{ab}^{(1)}]$ къ логариѳму.

Уравненіе (111) даетъ

$$[alg_j] - [alg_i] = lg\, \rho_{ij}$$

послѣднее возможно только въ томъ случаѣ когда ρ_{ij} сводится къ постоянному.

Поэтому уравненіе (111) предполагаетъ

$$[ex_j^{(1)}] = C_{ij}\,[ex_i^{(1)}] \tag{114}$$

гдѣ C_{ij} постоянное.

Уравненіе (112) предполагаетъ—

$$[dg_j^{(1)}] = \rho_{ij}\,[dg_i^{(1)}]$$

что по логариѳмированіи даетъ

$$\lambda_j\,[lg_j^{(1)}] - \lambda_i\,[lg_i^{(1)}] = lg\,\rho_{ij} \tag{115}$$

гдѣ λ_j, λ_i постоянныя, откуда слѣдуетъ

$$\sum a_i\lambda_i + a_j\lambda_j = a \tag{116}$$

гдѣ a_i, a_j, a раціональныя числа.

Возможно ли линейное уравненіе (110), когда

$$[\underline{ab}_1^{(1)} = \int \frac{x^3+1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \quad . \quad [\overline{ab}_1^{(1)} = e^{[\overline{ab}_1^{(1)}]}$$

$$[\underline{ab}_2^{(1)}] = \int \frac{x^3\,dx}{\sqrt{1+x^3}} \quad [\overline{ab}_2^{(1)}] = e^{[\overline{ab}_2^{(1)}]}$$

$$[\underline{ab}_3^{(1)}] = \int \frac{x^2-1}{\sqrt{1+x^3}}\,dx \quad [\overline{ab}_3^{(1)}] = e^{[\overline{ab}_3^{(1)}]}$$

Въ виду невозможности

$$[\underline{ab}_1^{(1)}] -]\underline{ab}_2^{(1)}]\,,\quad [\underline{ab}_3^{(1)}] - [\underline{ab}_2^{(1)}]$$

интеграламъ 1-го рода имѣть полюсъ очевидно (113) не имѣетъ мѣста.

Возможно ли линейное уравненіе (111)
если

$$[ex_1^{(1)}] = e^{x^2} \quad [ex_2^{(1)}] = e^{3x} \quad [ex_3^{(1)}] = e^{x^2},$$

Очевидно нѣтъ, такъ какъ x^2-3x, x^3-3x не приводятся къ постояннымъ.

е) Дальнѣйшія обобщенія.

§ 23. *О выраженіяхъ приготовленныхъ относительно нѣкоторой области трансцендентныхъ* (Θ).

Въ изслѣдованіяхъ, относящихся къ неоднороднымъ линейнымъ уравненіямъ намъ придется пользоваться нѣсколько инымъ понятіемъ о приготовленномъ выраженіи, чѣмъ то, которое было развито въ § 5.

Положимъ, что

$$(\Theta):\ \Theta_1,\ \Theta_2,\ \Theta_3\ldots$$

опредѣленная область основныхъ трансцендентныхъ и положимъ, что эта область приготовлена въ смыслѣ § 5.

Возьмемъ какую нибудь другую область:

$$(\theta):\ \theta_1,\ \theta_2,\ \theta_3\ldots$$

въ которую могутъ входить трансцендентныя области (Θ): $\Theta_1^{(i)}$

Положимъ, что по исключеніи изъ области (θ) функцій $\Theta^{(i)}$ остаются функціи

$$(\overline{\theta}):\ \overline{\theta_1},\ \overline{\theta_2},\ \overline{\theta_3}\ldots$$

Область трансцендентныхъ (θ) и выраженіе построенное въ ней мы называемъ приготовленными относительно области (Θ), если область (θ) содержитъ наименьшее число $\overline{\theta}^{(q)}$, основныхъ трансцендентныхъ q-го класса $\theta^{(q)}$ иныхъ, чѣмъ (Θ), при наименьшемъ числѣ $\overline{\theta}^{(q)}$ содержитъ наименьшее число трансцендентныхъ $\theta^{(q-1)}$, иныхъ чѣмъ (Θ) и т. д.

Чтобы пояснить возьмемъ примѣръ

Пусть область

$$(\Theta)$$

$$Z_1^{(1)}=lgx\,,\ H_1^{(2)}=e^{e^x},\ H_2^{(2)}=(1+lgx)^{\sqrt{5}}$$

$$H_1^{(1)}=e^x$$

$$y=\frac{\eta_1^{(2)}\left[\zeta_1^{(1)}+\zeta_2^{(1)}\right]}{\eta_2^{(2)}\zeta_1^{(2)}}$$

$$\zeta_1^{(1)}=lgx^2$$

$$\zeta_2^{(1)}=\int\sqrt{1+x+x^5}\;dx\qquad \zeta_1^{(2)}=lg\left(x+x^{\sqrt{3}}\right)$$

$$\eta_1^{(2)}=e^{e^x+x^3}\qquad \eta_1^{(1)}=e^{x^3}$$

$$\eta_2^{(1)}=x^{\sqrt{3}}\qquad \eta_2^{(2)}=(1+lgx)^{\sqrt{5}}$$

въ смыслѣ § 5 т. е. *относительно алгебраической области* выраженіе y является приготовленнымъ. Но относительно области (Θ) это выраженіе отнюдь не приготовлено.

Въ самомъ дѣлѣ

$$\eta_1^{(2)}=\eta_1^{(1)}H_1^{(2)}\qquad \zeta_1^{(1)}=2Z_1^{(1)}$$

$$\eta_2^{(2)}=H_2^{(2)},$$

вслѣдствіе чего выраженіе y приводится къ слѣдующему:

$$y=\frac{\eta_1^{(1)}H_1^{(2)}\left(2Z_1^{(1)}+\zeta_2^{(1)}\right)}{H_2^{(2)}\zeta_1^{(2)}}$$

содержащему уже меньшее число трансцендентныхъ 2 класса, не принадлежащихъ къ области (Θ).

Совершенно также, какъ въ § 5 убѣждаемся, что *всякое алгебраическое уравненіе*

$$N(\varphi_1,\varphi_2,\varphi_3\ldots\Theta_1,\Theta_2\ldots)=0 \tag{117}$$

между трансцендентными φ_i *класса* q, *принадлежащими области* (θ), *трансцендентными* (Θ) *и низшими трансцендентными приводится къ тожеству относительно* φ_i *и остается поэтому въ силѣ по замѣнѣ* φ_i *какими угодно функціями отъ* x.

§ 24. *Классификація трансцендентныхъ въ опредѣленной области трансцендентныхъ* (ϑ).

Другое измѣненіе которое приходится дѣлать въ изслѣдованіяхъ относящихся къ трансцендентнымъ диффенціальнымъ уравненіямъ состоитъ въ принятіи иной, болѣе общей классификаціи по классамъ, чѣмъ та, которая нами была развита въ § 4.

Предположимъ, что

$$(\vartheta):\quad \vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \ldots$$

какая нибудь заданная область основныхъ трансцендентныхъ, которую можемъ предполагать приготовленный въ нѣкоторой области (Θ)

Алгебраическая функція $\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \ldots$

$$\pi(\vartheta_1, \vartheta_2, \vartheta_3 \ldots)$$

функція трансцендентная q-го класса въ смыслѣ § 4 иначе *въ алгебраической области*, по новой классификаціи (*классификаціи въ области* (ϑ)) будетъ *функціей алгебраической въ области трансцендентныхъ* (ϑ).

За *основныя трансцендентныя перваго класса* въ случаѣ элементарныхъ трансцендентныхъ принимаемъ функціи

$$[lg_i^{(1)}] = lg\,\alpha_i^{(1)}(x) \qquad [ex_i^{(1)}] = e^{\beta_i^{(1)}(x)} \qquad [dg_i^{(1)}] = [\gamma_i^{(1)}(x)]^{\lambda_i^{(1)}}$$

гдѣ $\alpha_i^{(1)}(x)$; $\beta_i^{(1)}(x)$, $\gamma_i^{(1)}(x)$ алгебраическія въ области (ϑ).

Алгебраическая функція основныхъ трансцендентныхъ и функцій (ϑ) при условіи, что она приводится къ алгебраической въ об. (ϑ) функціи называется *трансцендентной 1-го класса.* Ясно, какимъ образомъ составляется понятіе и о трансцендентныхъ высшихъ классовъ.

Какъ указано въ § 8 для случая алгебраической области возможно расширеніе области основныхъ элементарныхъ трансцендентныыъ введеніемъ функцій

[ab] [qv]

Пусть область

$$(\vartheta)\quad z_1^{(2)}=lg\left(1+\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^7}}\right)\quad e_1^{(2)}=e^{e^{2x}+e^{-2x}}\quad e_2^{(2)}=e^{(e^x+e^{-x})^2}$$

$$e_3^{(2)}=(1+e^{3x})^{\sqrt{3}}\quad z_1^{(1)}=lgx\quad z_2^{(1)}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^7}}\quad e_1^{(1)}=e^x\quad e_2^{(1)}=e^{3x}$$

эта область сводится къ

$$z_1^{(2)}=lg\left(1+\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^7}}\right)\quad e_2^{(2)}=e^{(e^x+e^{-x})^2}\quad e_3^{(2)}=(1+e^{3x})^{\sqrt{3}}$$

$$z_1^{(1)}=lgx,\quad z_2^{(1)}=\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^7}},$$

если принять во вниманіе алгебраическія уравненія между трансцендентными.

Функція

$$\sqrt[3]{lg\left(1+\int\frac{dx}{\sqrt[3]{1-x^7}}\right)+5e^x\sqrt[5]{1+3x-x^8}}$$

алгебраическая въ вбласти (ϑ).

Но функція

$$\sqrt[3]{\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}+\int e^{e^{2x}+e^{-2x}+2x}\sqrt{1+lg^2x}\;dx}$$

функція 1-го класса.

А именно трансц. $\int\frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$ основная трансцендентная 1-го класса, какъ въ алгебраической области такъ и въ области (ϑ) $\int e^{e^x+e^{-x}+3x}\sqrt{1+lg^2x}\;dx$ третьяго класса въ области алгебр. и 1-го класса въ области (ϑ).

Мы не будемъ останавливаться подробно на доказательствѣ того что *разсужденія §§ 6, 7, 13, 14, 15, 19, 20, 21 обобщаются при переходѣ отъ алгебраической области къ области трансцендентныхъ* (ϑ) *необходимо только въ фор-*

мулировкахъ положеній алгебраическую функцію замѣнить алгебраической функціей въ области (ϑ).

II ГЛАВА

Форма рѣшеній однородныхъ линейныхъ уравненіи

A) Выраженіе черезъ высшія и верхнія трансцендентныя.

§ 25. *Выраженіе черезъ трансцендентныя I-го типа.*

Въ настоящемъ сочиненіи мы намѣрены заниматься исключительно линейными дифференціальными уравненіями

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1} y'+p_n y=0 \tag{117}$$

при этомъ преимущественно при p_i алгебраическихъ функціяхъ отъ x.

Главной цѣлью I части настоящаго сочиненія является *опредѣленіе формы общаго рѣшенія y уравненія (117) въ томъ случаѣ, когда это рѣшеніе выражается въ конечномъ видѣ съ помощью основныхъ функцій:* $[qv]$ $[ab]$ *и* $[elm]$.

Разсмотримъ сперва случай алгебраическаго уравненія (117). Положимъ что y выражается въ конечномъ видѣ трансцендентной q-го класса.

Принимая обозначеніе § 14 можемъ написать, обозначая черезъ ζ высшую трансцендентную I типа:

$$y=\pi(\zeta) \tag{118}$$

гдѣ π алгебраическая функція ζ и другихъ трансцендентныхъ q-го и нисшихъ классовъ.

Найдемъ теперь форму этой функціи π предполагая, что $\pi(\zeta)$ въ приготовленномъ видѣ (§ 4).

Дифференцируя уравненіе получаемъ

$$y'=\left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\pi}{\partial\zeta}\cdot\frac{d\zeta}{dx}=\left(\frac{\partial\pi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\pi}{\partial\zeta}F(x)=\pi_1(\zeta)$$

$$y''=\left(\frac{\partial\pi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial\pi_1}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{dx}=\left(\frac{\partial\pi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial\pi_1}{\partial\zeta}F(x)=\pi_2(\zeta)\qquad(119)$$

. . . .

$$y^{(n)}=\left(\frac{\partial\pi_{(n-1)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial\pi_{(n-1)}}{\partial\zeta}\frac{d\zeta}{dx}=\left(\frac{\partial\pi_{(n-1)}}{\partial x}\right)+\frac{\partial\pi_{(n-1)}}{\partial\zeta}F(x)=\pi_{n\ 1}(\zeta)$$

гдѣ $F(x)$ трансцендентная нисшаго класса, $\pi_i(\zeta)$ алгебраическія функція отъ ζ и другихъ осн. трансцендентныхъ той области (θ) въ которой построено y (§ 5)

Подставляя эти значенія $y, y', y''\,..\,y^{(n)}$ въ уравненіе (117) имѣемъ

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-i}\,\pi_i(\zeta)=0\qquad(120)$$

если считать $p_0=1$, $\pi_0(\zeta)=\pi(\zeta)$. Это послѣднее уравненіе, какъ алгебраическое относительно трансцендентныхъ q-го класса должно приводится къ тожеству (§ 5) и должно оставаться въ силѣ по замѣнѣ ζ какой угодно функціей отъ x въ частности $\zeta+\mu$.

Такимъ образомъ должны имѣть:

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-i}\,\pi_i(\zeta+\mu)=0\qquad(126_\mu)$$

Но согласно доказанному въ § 14, такъ какъ

$$\pi_i(\zeta)=\frac{d^i\pi(\zeta)}{dx^i}=y^{(i)},$$

то

$$\pi_i(\zeta+\mu)=\frac{d^i\pi(\zeta+\mu)}{dx^i}=y_\mu^{(i)}$$

и мы имѣемъ

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-i}\,\pi^{(i)}(\zeta+\mu)=0 \tag{127}$$

или

$$y_\mu^{(n)}+p_1\,y_\mu^{(n-1)}+\dots p_{n-1}\,y'_\mu+p_n\,y_\mu=0 \tag{117$_\mu$}$$

Мы получаемъ весьма важный результатъ

Если уравненіе (117) имѣетъ рѣшеніе

$$y=\pi(\zeta)$$

то оно имѣетъ также рѣшеніе

$$y_\mu=\pi(\zeta+\mu)$$

Диффеpенцируя тожество (относительно $\zeta+\mu$) (127) по μ всего j разъ имѣемъ:

$$\frac{\partial^j\pi(\zeta+\mu)}{\partial\mu^j}+\sum_{i=1}^{i=n} p_{n-i}\frac{\partial^j\pi^{(i)}(\zeta+\mu)}{\partial\mu^j}=0$$

или, мѣняя порядокъ дифференцированія, такъ какъ μ можетъ получать независимыя отъ x значенія:

$$\frac{\partial^j\pi(\zeta+\mu)}{\partial\mu^j}+\sum_{i=1}^{i=n} p_{n-i}\,\frac{\partial^i\left(\dfrac{\partial^j\pi(\zeta+\mu)}{\partial\mu^j}\right)}{\partial x^i}=0$$

Имѣя же въ виду, что

$$\frac{\partial^j\pi(\zeta+\mu)}{\partial\mu^j}=\frac{\partial^j\pi(\zeta+\mu)}{\partial\zeta^j}=\frac{\partial^j\pi(\zeta+\mu)}{\partial(\zeta+\mu)^j}$$

мы должны также имѣть:

$$\frac{\partial^j \pi(\zeta+\mu)}{\partial \zeta^j}+\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-i}\frac{\partial^i}{\partial x^i}\left(\frac{\partial^j \pi(\zeta+\mu)}{\partial \zeta^j}\right)=0$$

Отсюда слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial^j \pi(\zeta+\mu)}{\partial \zeta^j}$$

тоже рѣшеніе уравненія (117) Полагая $\mu=0$ получаемъ результатъ:

Если $y=\pi(\zeta)$ рѣшеніе уравненія (117), то рѣшеніями также будутъ и всѣ частныя производныя y по ζ:

$$\frac{\partial^j \pi(\zeta)}{\partial \zeta^j}$$

Согласно § 13 эти рѣшенія построены въ той же области трансцендентныхъ (θ), что

$$y=\pi(\zeta)$$

Если рѣшенія

$$\frac{\partial y}{\partial \zeta}=\frac{\partial\, \pi(\zeta)}{\partial \zeta}\quad \frac{\partial^2 y}{\partial \zeta^2}=\frac{\partial^2 \pi(\zeta)}{\partial \zeta^2}\cdots\frac{\partial^n y}{\partial \zeta^n}=\frac{\partial^n \pi(\zeta)}{\partial \zeta^n} \tag{118}$$

независимы между собой, то должно имѣть мѣсто уравненіе

$$A_0 y+\sum_{i=1}^{i=n} A_j\frac{\partial^j y}{\partial \zeta^j}=0 \tag{119}$$

гдѣ A_0, A_j постоянныя, такъ какъ y общее рѣшеніе.

Если бы рѣшенія (118) были бы зависимы получимъ опять линейное уравненіе (119), но при этомъ

$$A_0=A_1=\ldots A_q=0,$$

но во всякомъ случаѣ $y=\pi(\zeta)$ удовлетворяетъ линейному дифференціальному уравненію (119) съ постоянными коэффиціентами.

При этомъ $y = \pi(\zeta)$ удовлетворяло бы уравненію (119) при всякихъ значеніяхъ ζ, независимо отъ значеніи x и другихъ трансцендентныхъ, входящихъ въ π, такъ какъ уравненіе (119) алгебраическое относительно ζ и другихъ трансцендентныхъ области (θ) причемъ трансцендентныя, не принадлежащія къ области (θ) въ уравненіе (119) не входятъ.

Намъ остается слѣдовательно только проинтегрировать уравненіе (119) и рѣшить вопросъ о томъ, какую форму имѣетъ общее рѣшеніе уравненія (119) въ томъ случаѣ, когда оно алгебраическое.

Рѣшеніе первой задачи хорошо извѣстно изъ элементарныхъ курсовъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=l} \sum_{j=0}^{j=\mu_i-1} C_{ji} \zeta^j e^{\alpha_i \zeta} \qquad l \leq \overline{n-1} \tag{120}$$

гдѣ C_{ji} не зависитъ отъ ζ, α_i корни уравненія

$$A_0 + \sum_{i=1}^{i=q} A_j \alpha^j = 0 \tag{121}$$

Посмотримъ въ какихъ случаяхъ функція (120) можетъ привестись къ алгебраической функціи отъ ζ.

Мы знаемъ (§ 21), что уравненіе

$$\pi(\zeta) = \sum_{i=1}^{i=s} P_i(\zeta) e^{\alpha_i \zeta} + P_0(\zeta), \quad (\alpha_0 = 0) \tag{122}$$

гдѣ

$$P_i(\zeta) = \sum_{j=0}^{j=\mu_i-1} C_{ji} \zeta^j \tag{123}$$

остается въ силѣ по замѣнѣ основныхъ трансцендентныхъ функціи $\eta_i = e^{\alpha_i \zeta}$ нулями.

Мы получаемъ по этой замѣнѣ

$$\pi(\zeta) = \sum_{j=0}^{j=\mu_0-1} C_{j0}\,\zeta^j \qquad (124_0)$$

Полученный результатъ формулируется такимъ образомъ
Общее рѣшеніе уравненія

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (117)$$

съ алгебраическими коэффиціентами, выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью функцій

$$[qv]\ [ab]\ [elm]$$

трансцендентной q-го класса, представляетъ цѣлый полиномъ степени не выше n—1 отъ каждой трансцендентной I типа, q-го класса.

Легко видѣть, что на ряду съ рѣшеніемъ

$$y = \pi(\zeta)$$

всегда существуетъ частное рѣшеніе, не содержащее ζ и построенное въ той же области трансцендентныхъ (θ).

Въ самомъ дѣлѣ, полагая, что

$$\pi(\zeta) = C_0\zeta^m + C_1\zeta^{m-1} + \dots C_m$$

имѣемъ рѣшеніе

$$\frac{\partial^m \pi(\zeta)}{\partial \zeta^m} = m!\,C_0$$

уже не содержащее ζ.

Если общее рѣшеніе y, представляющее трансцендентную q-го класса содержитъ трансцендентную I типа и q-го класса: ζ, то существуетъ рядомъ съ нимъ рѣшеніе, построенное въ той же области трансцендентныхъ (θ) и не содержащее ζ.

§ 26. *Выраженіе черезъ трансцендентныя II-го типа.*

Переходя отъ трансц. I-го типа къ трансц. II-го типа, полагаемъ

$$y = \pi(\eta) \tag{125}$$

Вмѣсто ур. (119) въ этомъ случаѣ имѣемъ:

$$y' = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dx} = \left(\frac{\partial \pi}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi}{\partial \eta}\eta F(x) = \pi_1(\eta)$$

$$y'' = \left(\frac{\partial \pi_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi_1}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dx} = \left(\frac{\partial \pi_1}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi_1}{\partial \eta}\eta F(x) = \pi_2)\,(\eta)$$

(126)

. . . .

$$y^{(n)} = \left(\frac{\partial \pi_{n-1}}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi_{n-1}}{\partial \eta}\frac{d\eta}{dx} = \left(\frac{\partial \pi_{n-1}}{\partial x}\right) + \frac{\partial \pi_{n-1}}{\partial \eta}\eta F(x) = \pi_n(\eta)$$

гдѣ $F(x)$ трансцендентная нисшаго класса, $\pi_i(\eta)$ алгебраич. функціи η и другихъ трансцендентныхъ области (θ).

Уравненіе (117):

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{117}$$

даетъ

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_{n-1}\pi_i(\eta) = 0 \tag{127}$$

при этомъ это уравненіе остается въ силѣ (§ 5) по замѣнѣ η на $\mu\eta$ гдѣ μ произвольное постоянное, такъ что

$$\sum_{i=1}^{i=n} p_{n-i}\pi_i(\eta\mu) = 0 \tag{127$_\mu$}$$

на основаніи же § 14 если

$$\pi_i(\eta) = \frac{d^i \pi(\eta)}{dx^i},$$

то

$$\pi_i(\eta\mu) = \frac{d^i \pi(\eta\mu)}{dx^i} = \pi^{(i)}(\eta\mu),$$

поэтому уравненіе (127_μ) даетъ

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-i}\, \pi^{(i)}(\eta \mu) = 0 \tag{128}$$

Такимъ образомъ, *если уравненіе (117) имѣетъ рѣшеніе*

$$y = \pi(\eta),$$

то оно имѣетъ также рѣшеніе

$$y_\mu = \pi(\eta \mu)$$

Дифференцируя уравненіе (128) j разъ по μ и мѣняя порядокъ дифференцированія по μ и по x получаемъ:

$$\frac{\partial^j \pi(\eta \mu)}{\partial \mu^j} + \sum_{i=1}^{i=n} p_{n-i} \frac{d^i \left[\dfrac{\partial^j \pi(\eta \mu)}{\partial \mu^j}\right]}{dx^i} = 0 \tag{129}$$

Замѣчая, что

$$\frac{1}{\mu} \frac{\partial \pi(\eta \mu)}{\partial \eta} = \frac{1}{\eta} \frac{\partial \pi(\eta \mu)}{\partial \mu} = \frac{\partial \pi(\eta \mu)}{\partial (\eta \mu)}$$

$$\frac{1}{\mu^j} \frac{\partial^j \pi(\eta \mu)}{\partial \eta^j} = \frac{1}{\eta^j} \frac{\partial^j \pi(\eta \mu)}{\partial \mu^j} = \frac{\partial^j \pi(\eta \mu)}{\partial (\eta \mu)^j}$$

приводимъ уравненіе (129) къ виду:

$$\eta^j \frac{\partial^j \pi(\eta \mu)}{\partial \eta^j} + \sum_{i=1}^{i=n} p_{n-i} \frac{d^i \left[\eta^j \dfrac{\partial^j \pi(\eta \mu)}{\partial \eta^j}\right]}{dx^i} = 0 \tag{130}$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\eta^j \frac{\partial^j \pi(\eta \mu)}{\partial \eta^j}$$

рѣшеніе уравненія (117). Полагаемъ $\mu = 1$.

Если $y = \pi(\eta)$ рѣшеніе уравненія (117), то рѣшеніемъ будутъ также функціи

$$\eta^j \frac{\partial^j \pi(\eta)}{\partial \eta^j}$$

Между этими рѣшеніями необходимо существуетъ линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами.

Такимъ образомъ $y = \pi(\eta)$ удовлетворяетъ уравненію

$$A_0 y + \sum_{j=1}^{j=n} A_j \eta^j \frac{\partial^j y}{\partial \eta^j} = 0 \tag{131}$$

и при этомъ въ виду того, что это уравненіе алгебраическое относительно η и другихъ трансцендентныхъ области (θ) — при всякомъ значеніи η.

Интегрированіе его даетъ

$$y = \sum_{i=1}^{i=l} \sum_{j=0}^{j=\mu_i-1} \eta^{\alpha_i} C_{ji} (lg\eta)^j \tag{132}$$

гдѣ C_{ji} не зависятъ отъ η, α_i постоянныя, j цѣлыя положительныя числа.

При всякомъ η мы имѣемъ

$$\pi(\eta) = \sum_{i=1}^{i=l} \sum_{j=1}^{j=\mu_i-1} C_{ji} \eta^{\alpha_i} (lg\eta)^j \tag{133}$$

Въ правой части равенства содержатся:

1) алгебраическія функціи отъ η:

$$P_i(\eta) = \eta^{\alpha_i}$$

2) трансцендентныя II-го типа отъ η

$$H_i(\eta) = \eta^{\alpha_i}$$

α_i ирраціонально,

3) трансцендентныя I-го типа отъ η

$$Z_i(\eta) = lg\eta$$

Въ алгебраическомъ уравненіи между $H_i(\eta)$ и $Z(\eta)$, согласно § 19 можемъ замѣнить $Z(\eta)$ постояннымъ.

Тогда уравненіе (133) принимаетъ видъ

$$\pi(\eta) = Q_0(\eta) + \sum_{i=1}^{i=r} Q_i(\eta) H_i(\eta) \qquad (134)$$

гдѣ

$$Q_i(\eta) = C_i,$$

$$Q_0(\eta) = \sum_{i=1}^{i=s} C_i \eta^{\alpha_i}$$

алгебраическія функціи отъ η.

Но въ уравненіи (134) можемъ замѣнить $H_i(\eta)$ нулями что даетъ

$$\pi(\eta) = Q_0(\eta)$$

или

$$\pi(\eta) = \sum_{i=1}^{i=r} C_i \eta^{\alpha_i}$$

гдѣ α_i раціональныя числа, C_i не зависятъ отъ η.

Общее рѣшеніе уравненія

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (117)$$

съ алгебраическими коэффиціентами, выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью функцій

$$[qv]\ [ab]\ [elm]$$

трансцендентной q-го класса представляетъ линейную функцію дробныхъ раціональныхъ степеней основной трансцендентной II типа и q-го класса.

§ 27. *О частномъ интегралѣ, простѣйшимъ образомъ выражаемомъ черезъ трансцендентныя II типа.*

Согласно доказанному въ § 26 рядомъ съ рѣшеніемъ

$$y=\sum_{i=1}^{i=l} C_i \eta^{\alpha_i} \tag{135_0}$$

существуютъ другія

$$y^j=\sum_{i=1}^{i=e} C_i \mu_j^{\alpha_i} \eta^{\alpha_i} \tag{135_j}$$

гдѣ μ_j произвольныя постоянныя.

Взявъ $l-1$ уравненій (135_j), рѣшимъ ур. (135) и (135_j) относительно $C_i \eta^{\alpha_i}$

$$C_i \eta_i=\sum_{j=0}^{j=e-1} \frac{\Delta_1^{(i)} \pi [\eta \mu_j]}{\Delta} \tag{$136)_{\mu_0=1}$}$$

$$\Delta=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots\dots & 1 \\ \mu_1^{\alpha_1} & \mu_1^{\alpha_2} & \dots\dots & \mu_1^{\alpha_l} \\ \mu_2^{\alpha_2} & \mu_2^{\alpha_3} & \dots\dots & \mu_2^{\alpha_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{l-1}^{\alpha_1} & \mu_{l-1}^{\alpha_2} & \dots\dots & \mu_{l-1}^{\alpha_l} \end{vmatrix} \tag{137}$$

$$\Delta^{(i)}=\begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 & 1 & \dots & 1 \\ \mu_1^{\alpha_1} & \mu_1^{\alpha_2} & \dots & \mu_1^{\alpha_{i-1}} & \mu_1^{\alpha_{i+1}} & \dots & \mu_1^{\alpha_l} \\ \mu_2^{\alpha_1} & \mu_2^{\alpha_2} & \dots & \mu_2^{\alpha_{i-1}} & \mu_2^{\alpha_{i+1}} & \dots & \mu_2^{\alpha_l} \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_{l-1}^{\alpha_1} & \mu_{l-1}^{\alpha_2} & \dots & \mu_{l-1}^{\alpha_{i-1}} & \mu_{l-1}^{\alpha_{i+1}} & \dots & \mu_{l-1}^{\alpha_l} \end{vmatrix} \tag{138}$$

Эти два опредѣлителя $\Delta, \Delta^{(0)}$ не равны нулю тожественно при всякихъ μ_j

Въ самомъ дѣлѣ всегда можно взять μ_1 такъ, что опредѣлители миноры

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1^{\alpha_i} & \mu_1^{\alpha_k} \end{vmatrix} \tag{139}$$

гдѣ $\alpha_i \gtreqless \alpha_k$, не равны нулю.

Для этого достаточно взять μ_1 отличными отъ корней уравненій.

$$\mu^{\alpha_k} - \mu^{\alpha_i} = 0$$

Далѣе мы имѣемъ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ \mu_1^{\alpha_i} & \mu_1^{\alpha_k} & \mu_1^{\alpha_l} \\ \mu_2^{\alpha_i} & \mu_2^{\alpha_k} & \mu_2^{\alpha_l} \end{vmatrix} = d_1 \mu_2^{\alpha_i} + d_2 \mu_2^{\alpha_k} + d_3 \mu_2^{\alpha_l}$$

гдѣ d_1, d_2, d_3 опредѣлители формы (138), вслѣдствіе чего можемъ предполагать, что d_1, d_2, d_3 не нули.

Беремъ μ_2 отличнымъ отъ корней уравненій

$$d_1 \mu_2^{\alpha_i} + d_2 \mu_2^{\alpha_k} + d_3 \mu_2^{\alpha_l}$$

Такимъ же образомъ изслѣдуемъ

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ \mu_1^{\alpha_i} & \mu_1^{\alpha_k} & \mu_1^{\alpha_l} & \mu_1^{\alpha_m} \\ \mu_2^{\alpha_i} & \mu_2^{\alpha_k} & \mu_2^{\alpha_l} & \mu_2^{\alpha_m} \\ \mu_3^{\alpha_i} & \mu_3^{\alpha_k} & \mu_3^{\alpha_l} & \mu_3^{\alpha_m} \end{vmatrix} \gtreqless 0$$

и такъ далѣе, наконецъ $\Delta \gtreqless 0$

Такъ какъ всѣ функціи

$$\pi(\eta \mu_j)$$

и вмѣстѣ съ тѣмъ и всякая линейная функція съ постоянными коэффиціентами:

$$y=\sum_{j=0}^{j=l-1} D^j \pi(\eta\mu_j)$$

представляетъ рѣшеніе уравненія (117), то тоже согласно уравненію (136) относится и къ

$$Y=C_i\eta^{\alpha_i} \tag{140}$$

Линейное уравненіе (117) вмѣстѣ съ общимъ рѣшеніемъ

$$y=\pi(\eta)$$

имѣетъ еще частное рѣшеніе формы

$$Y=C_i\eta^{\alpha_i} \tag{140}$$

гдѣ C_i не зависитъ отъ η_i, α_i раціональное число.

§ 28. *Выраженіе черезъ совокупность трансцендентныхъ обоихъ типовъ.*

Формулы (124_0) (135) полученныя для y можемъ соединить въ одну.

Обозначая черезъ θ_1 одну изъ трансцендентныхъ q-го класса имѣемъ

$$y=\sum_{i=1}^{i=l^{(1)}} C_i^{(1)}\theta_1^{\alpha_i^{(1)}} \tag{141}$$

гдѣ $\alpha_i^{(1)}=0,1,2\,..\,l^{(1)}-1$ въ случаѣ $\theta_1=\zeta$, и раціональныя числа въ случаѣ $\theta_1=\eta$.

Взявъ другую трансцендентную имѣемъ

$$y=\sum_{i=1}^{i=l^{(r)}} C_i^{(1)}\theta_1^{\alpha_i^{(1)}}=\sum_{i=1}^{i=l^{(r)}} C_i^{(r)}\theta_r^{\alpha_i^{(r)}} \tag{142}$$

гдѣ $C_i^{(r)}$ не содержатъ θ_r, $\alpha_i^{(r)}$ раціональныя числа (цѣлыя для $\theta_r = \zeta_{sr}$)

Равенство (142) должно быть тожествомъ относительно θ_1 и поэтому оставаться въ силѣ по замѣнѣ θ_1 произвольными постояннымъ

Но послѣ этой замѣны $C_i^{(1)}$ не мѣняется, а $C_i^{(r)}$ становится C_{0i}^r причемъ не содержитъ θ_1 и θ_r. Мы имѣемъ тогда

$$\sum_{i=1}^{i=l^{(1)}} C_i^{(1)} \mu_y^{\alpha_i^{(1)}} = \sum_{i=1}^{i=l^{(r)}} C_{0i}^{(r)} \theta_r^{\alpha_i^{(1)}}$$

Опредѣлитель Δ (§ 27) можно предполагать $\gtrless 0$ и мы получаемъ

$$C_i^{(1)} = \sum_{\substack{i_1=1 \\ r=2,3\dots m}}^{i_1=l^{(r)}} C_{i,i_1}^{(r,1)} \;\theta_r^{\alpha_i^{(r)}} \tag{143_1}$$

гдѣ $C_{i\,i_1}^{(r1)}$ не содержитъ θ_1, θ_r.

Такимъ же образомъ изъ уравненія (143_1) получаемъ

$$C_{i\,i_1}^{(21)} = \sum_{\substack{i_2=1 \\ r=3,4\dots m}}^{i_2=l^{(r)}} C_{i,i_1,i_2}^{(r,2,1)} \;\theta_r^{\alpha_i^{(r)}} \tag{143_{21}}$$

$C_{i,i_1,i_2}^{(r,2,1)}$ не содержитъ $\theta_r, \theta_2, \theta_1$ и продолжаемъ такимъ образомъ до выраженія

$$C_{i\,i_1,i_2\dots i_{m-1}}^{(m-1,m-2\dots2.1)} = \sum_{i_{m-1}=1}^{i_{m-1}=l^{(m)}} C_{i,i_1,i_2\dots i_m}^{(m,m-1,\dots2,1)} \quad \theta_m^{\alpha_i^{(m)}} \tag{$143_{m-1\dots2.1}$}$$

$C_{i,i_1,i_2\dots i_m}^{(m,m-1\dots2\,1)}$ не содержитъ $\theta_m, \theta_{m-1} \dots \theta_1$ т. е. содержитъ только трансцендентныя нисшаго q класса.

На основаніи выраженіи (143_1) (143_{21}) ($143_{m-1\dots2.1}$) получаемъ

$$y=\sum C\theta_1^{\alpha^{(1)}}\theta_2^{\alpha^{(2)}}\ldots\theta_m^{\alpha^{(m)}} \tag{144}$$

гдѣ C' трансцендентныя $r<q$ класса

$\sum$ распространяется на всѣ входящіе въ y

произведеніе

$$C\theta_1^{\alpha^{(1)}}\theta_2^{\alpha^{(1)}}..\theta_m^{\alpha^{(m)}}$$

Итакъ, если ввести опять различныя обозначенія для основныхъ трансцендентныхъ функцій I и II типа, то можемъ написать

$$y=\sum_{i=1}^{i=m}\eta_1^{\lambda_1^{(i)}}\eta_2^{\lambda_2^{(i)}}\ldots\eta_r^{\lambda_r^{(i)}}P_i(\zeta_1,\zeta_3\ldots\zeta_p) \tag{96}$$

гдѣ $\lambda_j^{(i)}$ раціональныя числа, P_i полиномы не выше $\overline{n-1}$-ой степени.

Согласно § 20 въ случаѣ основныхъ трансцендентныхъ $[qv]$ мы можемъ y представить въ видѣ

$$y=\sum_{i=0}^{i=m}\underline{\eta_i}P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p) \tag{97}$$

гдѣ для одного изъ членовъ $\underline{\eta_0}=1$, $\underline{\eta_i}=[qv^{(i)}]$

Такимъ образомъ

Общее рѣшеніе линейнаго однороднаго уравненія:

$$y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots p_{n-1}y'+p_ny=0 \tag{117}$$

съ алгебраическими коэффиціентами, выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью $[qv]$, *имѣетъ форму* (97) *или*

$$y=\sum_{i=1}^{i=m}[\overline{qv}_i^{(q)}]P_i[[\underline{qv}_1^{(q)}],[\underline{qv}_2^{(q)}]\ldots[\underline{qv}_p^{(q)}]]$$
$$+P_0[[\underline{qv}_1^{(q)}],[\underline{qv}_2^{(q)}]\ldots[\underline{qv}_p^{(q)}]] \tag{198}$$

т. е. представляетъ линейную функцію $[\overline{qv^{(q)}}]$ *съ коэффиціентами, равными цѣлымъ функціямъ* $[\underline{qv_i^{(q)}}]$ *степени не выше* $\overline{n-1}$*-ой относительно каждой.*

Обозначая $\eta_j^{\frac{1}{\delta_j}}$ гдѣ δ_j наименьшее кратное знаменателей $\lambda_j^{(i)}$ $[i=1.2..m]$ черезъ $\underline{\eta}_j$ причемъ $\underline{\eta}_j$ какъ и η_j трансцендентная второго типа, причемъ, если

$$\eta_j=[\overline{ab}] \text{ то и } \underline{\eta}_j=[\overline{ab}]$$

будемъ имѣть

$$y=\sum_{i=1}^{i=m}\underline{\eta}_1^{\mu_1^{(i)}}\underline{\eta}_2^{\mu_2^{(i)}}\ldots\underline{\eta}_r^{\mu_r^{(i)}}P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p) \tag{146}$$

$\mu_j^{(i)}$ цѣлыя числа.

Общее рѣшеніе линейнаго дифференціальнаго уравненія (117) съ алгебраическими коэффиціентами выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью $[ab]$ *представляетъ цѣлый полиномъ* $[\overline{ab}^{(q)}]$ $[\underline{ab^{(q)}}]$

$$y=\sum P[\overline{ab}_1^{(p)}]^{\mu_1}[\overline{ab}_2^{(q)}]^{\mu_2}\ldots[\overline{ab}_r^{(q)}]^{\mu_r}[\underline{ab_1^{(q)}}]^{\nu_1}[\underline{ab_2^{(q)}}]^{\nu_2}\ldots[\underline{ab_p^{(q)}}]^{\nu_p} \tag{147}$$

P трансцендентная нисшаго класса, μ, ν *цѣлыя числа при чемъ*

$$\nu_j\leqq n-1$$

формула (147) при переходѣ къ *элементарнымъ трансцендентнымъ* обращается въ слѣдующую

$$y=\sum P[ex^{(q)}][dg_1^{(q)}]^{\mu_1}[dg_2^{(q)}]^{\mu_2}\ldots$$

$$[dg_r^{(q)}]^{\mu_r}[lg_1^{(q)}]^{\nu_1}[lg_2^{(q)}]^{\nu_2}\ldots[lg_p^{(q)}]^{\nu_p} \tag{148}$$

и раскрывая значенія символовъ:

$$[ex^{(q)}]\ [dg_j^{(q)}]\ [lg_j^{(q)}]$$

и полагая $P=[\chi_0]^{\lambda_0}$ гдѣ λ_0 раціональное число χ трансц. того же класса, что P:

$$y = \sum e^{\omega} [\chi_0]^{\lambda_0} [\chi_1]^{\lambda_1} \ldots [\chi_r]^{\lambda_r} [lg\vartheta_1]^{\nu_1} [lg\vartheta_2]^{\nu_2} \ldots [lg\vartheta_p]^{\nu_p} \tag{149}$$

гдѣ

1) ω, χ_i, ϑ_j трансцендентныя q класса,

2) λ_i ирраціональныя числа, причемъ между ними не имѣется линейныхъ уравненій

$$\sum_{i=1}^{i=r} a_i \lambda_i = a$$

съ раціональными коэффиціентами a_i, a,

3) ν_i цѣлыя числа, причемъ

$$\nu_i \leqq \overline{n-1}$$

§ 29. *Основное показательное рѣшеніе.*

Разсмотримъ теперь частное рѣшеніе $У_1$ не содержащее трансцендентную перваго типа ζ_1, входящую въ y.

Изъ рѣшенія $У_1$ можемъ получить дифференцированіемъ по ζ_2, какъ показано въ концѣ § 25, рѣшеніе $У_{12}$ не содержащее ни ζ_1, ни ζ_2. Продолжая такимъ образомъ дальше получаемъ рѣшеніе

$$y = \sum_{i=1}^{i=e} C_i^{(1)} \eta_1^{\alpha_i^{(1)}}$$

не содержащее вовсе трансцендентныхъ перваго типа.

Согласно § 27 изъ этого рѣшенія можемъ получить рѣшеніе формулы

$$y = C^{(1)} \eta_1^{\alpha^{(1)}} = \eta_1^{\alpha^{(1)}} \sum_{i=1}^{i=e} C_i \eta_2^{\alpha_i^{(2)}} = \pi(\eta_2) \tag{150}$$

гдѣ $C^{(1)}$ не содержитъ η_1, а C_i η_1, η_2.

Но рядомъ съ рѣшеніемъ (150) еще имѣемъ

$$y_j = \eta_1^{\alpha^{(1)}} \sum_{i=1}^{i=s} C_i \mu_y^{\alpha_i^{(2)}} \eta_2^{\alpha_i^{(2)}} = \pi(\eta_2 \mu_y) \qquad (150_\mu)$$

получаемое замѣной η_2 на $\eta_2 \mu_j$, μ_y произвольное постоянное.

Какъ указано въ § 27 изъ выраженіи (150_μ) выводимъ рѣшеніе уравненія (117):

$$y = C^{(12)} \eta_1^{\alpha^{(1)}} \eta_2^{\alpha^{(2)}} = \eta_1^{\alpha^{(1)}} \sum_{j=0}^{j=l-1} \frac{\Delta^{(j)} \pi(\eta \mu_y)}{\Delta} \qquad (150^{(2)})$$

гдѣ Δ опредѣляются уравненіями (137) (138) § 27. Такимъ же образомъ при помощи уравненія $(150^{(12)})$ получаемъ рѣшеніе формы

$$y = C^{(123)} \eta_1^{\alpha^{(1)}} \eta_2^{\alpha^{(2)}} \eta_3^{\alpha^{(3)}} \qquad (150^{(123)})$$

гдѣ $C^{(123)}$ не содержитъ больше η_1, η_2, η_3 и такъ далѣе до рѣшенія

$$y = C \eta_1^{\alpha^{(1)}} \eta_2^{\alpha^{(2)}} \dots \eta_r^{\alpha^{(r)}} \qquad (150^{(12.3\dots r)})$$

C не содержитъ $\eta_1, \eta_2 .. \eta_r$ т. е. не содержитъ основныхъ трансцендентныхъ q-го класса, иначе, представляетъ трансцендентную нисшаго класса.

Частное рѣшеніе такого типа мы назовемъ *основнымъ показательнымъ рѣшеніемъ.*

Въ случаѣ основныхъ трансц. $[qv]$ (на осн. § 12)

$$y = [\overline{qv}^{(q)}]$$

такъ какъ $C \eta_1^{\alpha^{(1)}} \dots \eta_r^{\alpha^{(r)}} = \underline{\eta}$ функція II типа.

Если линейное однородное уравненіе (117) съ алгебраическими коэффиціентами рѣшается въ конечномъ видѣ, то оно имѣетъ частное рѣшеніе вида:

1) въ случаѣ основныхъ трансц. $[qv]$:

$$\underline{\eta} = [\overline{qv}^{(q)}] = e^{\int \varphi(x)\, dx} \qquad (151)$$

гдѣ $\varphi(x)$ трансцендентная нисшаго класса.

2) *въ случаѣ* $[ab]$:

$$y = P[\overline{ab}_1^{(q)}]^{\mu_1}[\overline{ab}_2^{(q)}]^{\mu_2}\dots[\overline{ab}_r^{(q)}]^{\mu_r} \tag{152}$$

гдѣ P трансцендентная нисшаго класса или, раскрывая значенія символами $[\overline{ab}^{(q)}]$

$$y = P\prod_{i=1}^{i=r} e^{\int F_i(\xi_i, \eta_i)\, d\xi_i} \tag{153}$$

3) въ случаѣ $[elm]$

$$y = P[ex^{(q)}][dg_1^{(q)}]^{\mu_1}[dg_2^{(q)}]^{\mu_2}\dots[dg_r^{(q)}]^{\mu_r} \tag{154}$$

или

$$y = e^{\omega}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}\dots[\chi_u]^{\lambda_r} \tag{155}$$

гдѣ ω, χ_0, χ_i имѣютъ тѣже значенія что въ § 28.

Выводъ нами формы выраженія y относительно *высшихъ* основныхъ трансцендентныхъ основывается на свойствѣ частныхъ производныхъ $\frac{\partial\pi}{\partial\theta}$ относительно этихъ трансцендентныхъ, изложенномъ въ § 6.

Но это свойство присуще не только высшимъ, а вообще *верхнимъ* трансцендентнымъ т. е. тѣмъ основнымъ трансцендентнымъ, относительно которыхъ y представляетъ алгебраическую функцію.

Въ виду этого полученные результаты обобщаются.

Мы доказываемъ, что основное рѣшеніе формы (150) относительно верхнихъ трансцендентныхъ η_i, гдѣ C не содержитъ η_i т. е. алгебраическая функція. Общее же рѣшеніе вида (146), гдѣ P_i полиномъ ζ_i съ алгебраическими коэффиціентами.

B) Выраженіе черезъ нисшія трансцендентныя.

a) *Основныя трансцендентныя* $[qv]$.

§ 30. *Форма основного рѣшенія.*

Мы теперь докажемъ, что основное рѣшеніе уравненія (117):

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{117}$$

выражаемое въ конечномъ видѣ представляетъ трансцендентную перваго класса.

Въ виду отличительныхъ свойствъ $[qv]$ и $[ab]$, указанныхъ въ § 13, дальнѣйшія методы изслѣдованія для $[qv]$ и $[ab]$ должны быть весьма различны.

Разсмотримъ сперва случай основныхъ трансцендентныхъ $[qv]$ т. е. случай рѣшенія уравненія (117) *въ квадратурахъ.*

Изъ предыдущаго § 29 мы знаемъ, что основное рѣшеніе

$$\underline{\eta} = e^{\int \xi \, dx} \tag{156}$$

гдѣ ξ трансцендентная нисшаго класса.

Дифференцируемъ (156):

$$\underline{\eta}' = e^{\int \xi \, dx} \xi$$

$$\underline{\eta}'' = e^{\int \xi \, dx} (\xi' + \xi^2)$$

$$\underline{\eta}''' = e^{\int \xi \, dx} (\xi'' + 3\xi\xi' + \xi^3) \tag{157}$$

. . . .

. . . .

$$\underline{\eta}^{(n)} = e^{\int \xi \, dx} \varphi_n (\xi^{(n-1)}, \xi^{(n-2)} \dots \xi, x)$$

Подставляя въ уравненіе

$$\underline{\eta}^{(n)}+p_1\underline{\eta}^{(n-1)}+\ldots p_{n-1}\underline{\eta}'+p_n\underline{\eta}=0 \tag{158}$$

получаемъ

$$P[\xi^{(n-1)},\xi^{(n-2)}\ldots\xi',x]=0 \tag{159}$$

гдѣ P алгебраическая функція $(\xi^{(n-1)},\xi^{(n-2)}\ldots\xi',x)$

Положимъ, что $\underline{\eta}$ не представляетъ трансцендентной перваго класса, а слѣдовательно ξ не представляетъ алгебраической функціи, тогда

$$\xi=\varphi(\theta) \tag{160}$$

гдѣ φ алгебраическая функція θ (трансценд. $\overline{q-1}$-го класса) и другихъ трансцендентныхъ области (θ) въ который построено $\underline{\eta}$.

Дифференцируя уравненіе (160) имѣемъ:

$$\begin{aligned}
\xi' &= \left(\frac{\partial\varphi}{\partial x}\right)+\frac{\partial\varphi}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dx}=\varphi_1(\theta)\\
\xi'' &= \left(\frac{\partial\varphi_1}{\partial x}\right)+\frac{\partial\varphi_1}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dx}=\varphi_2(\theta)\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\xi^{(n-1)} &= \left(\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial x}\right)+\frac{\partial\varphi_{n-2}}{\partial\theta}\frac{d\theta}{dx}=\varphi_{n-1}(\theta)
\end{aligned} \tag{161}$$

гдѣ $\varphi_i(\theta)$ алгебраическія функціи θ, и другихъ трансцендентныхъ не выше $\overline{q-1}$-го класса области (θ)

Уравненіе (159) даетъ уравненіе

$$P(\varphi_{n-1}(\theta),\varphi_{n-2}(\theta)\ldots\varphi_1(\theta),\varphi(\theta))=0 \tag{162}$$

алгебраическое относительно θ и остающееся поэтому въ силѣ по замѣнѣ θ на θ_μ какою угодно функцію отъ x (см. § 5)

Но мы знаемъ, что, если

$$\varphi_1(\theta)=\frac{d\varphi(\theta)}{dx}$$

$$\varphi_i(\theta) = \frac{d^i \varphi(\theta)}{dx^i}$$

то

$$\varphi_1(\theta_\mu) = \frac{d\varphi(\theta_\mu)}{dx}$$

$$\varphi_i(\theta_\mu) = \frac{d^i \varphi(\theta_\mu)}{dx^i}$$

если при $\theta = \zeta$ положить $\theta_\mu = \zeta + \mu$, а при $\theta = \eta$ положить $\theta_\mu = \eta_\mu$ (см. § 14)

Итакъ слѣдовательно

$$P(\xi_\mu^{(n-1)}, \xi_\mu^{(n-2)} \ldots \xi'_\mu, \xi_\mu, x) = 0 \tag{159$_\mu$}$$

если черезъ ξ_μ обозначить результатъ подстановки въ ξ вмѣсто $\theta - \theta_\mu$

Но

$$e^{\int \xi_\mu dx} P(\xi_\mu^{(n-1)}, \xi_\mu^{(n-2)} \ldots \xi'_\mu, \xi_\mu, x) = \underline{\eta}_\mu^{(n)} + p_1 \underline{\eta}_\mu^{(n-1)} + \ldots p_{n-1} \underline{\eta}'_\mu + p_n \underline{\eta}_\mu$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\underline{\eta}_\mu^{(n)} + p_1 \underline{\eta}_\mu^{(n-1)} + \ldots p_{n-1} \underline{\eta}'_\mu + p_n \underline{\eta}_\mu = 0$$

т. е. *если*

$$\underline{\eta} = e^{\int \varphi(\theta) dx} \tag{156}$$

представляетъ основное рѣшеніе уравненія (117), то основнымъ рѣшеніемъ будетъ также

$$\underline{\eta}_\mu = e^{\int \varphi(\theta_\mu) dx} \tag{156$_\mu$}$$

причемъ въ случаѣ $\theta = \zeta \ldots \theta_\mu = \zeta + \mu$, *въ случаѣ* $\theta = \eta \ldots \theta_\mu = \eta\mu$

Возьмемъ теперь систему независимыхъ рѣшеній

$$y_1, y_2 \ldots \ldots y_n$$

которыя всѣ будутъ формы

$$y_j = \sum_{i=1}^{i=m} \underline{\eta}_i P_i^{(j)} (\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p) \tag{97_j}$$

гдѣ $\underline{\eta}_i$, ζ_i и всѣ коэффиціенты $P_i^{(j)}$ не зависятъ отъ μ. Среди $\underline{\eta}_i$ находится рѣшеніе (156)

Мы будемъ имѣть

$$\underline{\eta}_\mu = \sum_{j=1}^{j=n} C_j \sum_{i=1}^{i=m} \underline{\eta}_i P_i^{(j)} (\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p)$$

Мы можемъ замѣнить всѣ высшія трансцендентныя ζ постоянными причемъ какими угодно такъ какъ въ виду приготовленности выражаенія общаго рѣшенія y между ζ_i не можетъ быть алгебраическихъ уравненій (90).

Мы имѣемъ:

$$\underline{\eta}_\mu = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} C^{(j)} P_i^{(j)} \underline{\eta}_i$$

гдѣ $P_i^{(j)}$ трансцендентныя нисшихъ классовъ. $C^{(j)}$ постоянныя.

Отсюда мы должны имѣть

$$\underline{\eta}_\mu = \rho_i \underline{\eta}_i \tag{164_i}$$

гдѣ ρ_i трансцендентная нисшаго класса, причемъ для одного только значенія i, ибо иначе имѣли бы

$$\underline{\eta}_i = \frac{\rho_j}{\rho_i} \underline{\eta}_j$$

чего не можетъ быть вслѣдствіе приготовленности y.

Итакъ

$$\rho_i \underline{\eta}_i = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=n} C^{(j)} P_i^{(j)} \underline{\eta}_i$$

откуда

$$\rho_i = \sum_{j=1}^{j=n} C^{(j)} P_i^{(j)} \tag{165_i}$$

Слѣдуетъ замѣтить, что $P_i^{(j)}$ относительно каждой изъ верхнихъ трансцендентныхъ представляетъ цѣлый полиномъ степени не выше $\overline{n-1}$-ой. $\underline{\eta}_i$ въ равенствѣ (164_i) есть $\underline{\eta}$ т. е. то основное рѣшеніе, изъ котораго замѣной θ на θ_μ получается $\underline{\eta}_\mu$.

Въ самомъ дѣлѣ полагая въ противномъ случаѣ $\mu = 0$ $(\theta = \zeta)$ или $\mu = 1\,(\theta = \eta)$ получили бы

$$\underline{\eta} = \rho_i^{(0)}\underline{\eta}_i$$

гдѣ $\rho_i^{(0)}$ получается изъ ρ_i при $\mu = 1$ т. е. получили мы равенство не могущее имѣть мѣсто, если y приготовлено.

Такимъ образомъ мы имѣемъ

$$e^{\int \varphi(\theta_\mu)\,dx} = \rho\, e^{\int \varphi(\theta)\,dx} \tag{164}$$

гдѣ ρ трансцендентная нисшаго, чѣмъ y класса причемъ вида

$$\rho = \sum_{j=1}^{j=n} C^{(j)}(\mu)\, P^{(j)}(\theta) \tag{165}$$

гдѣ $C^{(j)}(\mu)$ функціи отъ μ, $P^{(j)}(\theta)$ полиномы степени не выше $\overline{n-1}$-ой отъ θ, если θ входитъ алгебраически въ y и независимы отъ θ въ противномъ случаѣ.

Въ уравненіи (165) мы всегда можемъ предполагать функціи $C^{(j)}(\mu)$ такими, что между ними не существуетъ линейныхъ уравненій

$$\sum_{j=1}^{j=n} a_i^{(j)}\, C^{(j)}(\mu) = 0 \qquad i = 1, 2 \ldots r \tag{166}$$

съ коэффиціентами не зависящими отъ μ.

Ибо, въ противномъ случаѣ, опредѣляя изъ уравненія (166)

$$C^{(i)}(\mu) = \sum_{j=1}^{j=n-r} b_k^{(r+j)} C^{(r+j)}(\mu)$$

и подставляя въ сумму (165) приводимъ ее къ виду

$$\rho = \sum_{j=1}^{j=n-r} C^{(r+j)}(\mu) P_1^{(r+j)}(\theta) \tag{165_1}$$

гдѣ

$$P_1^{(r+j)}(\theta) = P^{(r+j)}(\theta) + \sum_{i=1}^{i=r} b_i^{(r+j)} P^{(i)}(\theta)$$

полиномы отъ θ, какъ $P^{(i)}(\theta)$ не зависящія отъ μ.

Взявъ отъ обѣихъ частей уравненія (164) логариѳмическія производныя имѣемъ алгебраическое уравненіе имѣющее мѣсто при всякомъ значеніи θ:

$$\varphi(\theta_\mu) = \varphi(\theta) + \frac{\rho'}{\rho} \tag{167}$$

гдѣ

$$\psi(\theta) = \frac{\rho'}{\rho}$$

раціональная функція отъ θ (или не зависитъ отъ θ) причемъ

$$\rho = \sum_{i=0}^{i=n-1} A_i \theta^i$$

$$\rho' = \sum_{i=0}^{i=n-1} A_i i \theta^{i-1} \frac{d\theta}{dx} + \sum_{i=0}^{i=n-1} A'_i \theta^i = \sum_{i=0}^{i=n} B_i \theta^i$$

гдѣ согласно § 6 B_i построены въ области трансц. (θ) и не зависятъ отъ θ.

Переписавъ уравненіе (167) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\varphi_\mu(\theta) = \psi(\theta),$$

гдѣ

$$\varphi_\mu(\theta) = \varphi(\theta_\mu) - \varphi(\theta)$$

замѣчаемъ, что каждый полюсъ $\theta = \alpha : \varphi(\theta)$ будетъ полюсомъ $\varphi_\mu(\theta)$.

Въ самомъ дѣлѣ для того, чтобы это было иначе, необходимо, чтобы 1) $\varphi(\theta_\mu)$ тоже имѣло бы полюсомъ $\theta = \alpha$ и чтобы 2) главные части

$$\varphi(\theta) = \frac{A_k}{(\theta - \alpha)^k} + \frac{A_{k-1}}{(\theta - \alpha)^{k-1}} + \dots$$

$$\varphi(\theta_\mu) = \frac{B_k}{(\theta - \alpha)^k} + \frac{B_{k-1}}{(\theta - \alpha)^{k-1}} + \dots$$

$$(\theta - \infty) = \frac{1}{\theta}$$

взаимно сокращались въ выраженіи $\varphi_\mu(\theta)$ т. е. чтобы $A_k = B_k$, $A_{k-1} = B_{k-1} \dots$.

$\varphi(\theta_\mu)$ получается изъ $\varphi(\theta)$ замѣной θ на θ_μ.

Если $\alpha, \alpha', \alpha'' \dots \alpha^{(i)}$ полюса $\varphi(\theta)$, то полюса $\varphi(\theta_\mu)$: α_μ, $\alpha'_\mu, \alpha''_\mu \dots \alpha^{(i)}_\mu \dots$ гдѣ $\alpha^{(i)}_\mu$ получается изъ $\alpha^{(i)}$ какъ θ_μ изъ θ (т. е. при $\theta = \zeta$: $\alpha^{(i)}_\mu = \alpha^{(i)} + \mu$, при $\theta = \eta$: $\alpha^{(i)}_\mu = \alpha^{(i)} \mu$). Мы должны поэтому имѣть

$$\alpha = \alpha^{(j)}_\mu$$

чего быть не можетъ такъ какъ правая часть зависитъ отъ μ въ то время, какъ лѣвая не зависитъ.

Итакъ полюсъ $\theta = \alpha$ функціи $\varphi(\theta)$, является полюсомъ $\varphi_\mu(\theta)$, а слѣдовательно и $\psi(\theta)$.

Мы должны слѣдовательно имѣть

$$\rho(\alpha) = \sum_{i=0}^{i=n-1} A_i \alpha^i = 0,$$

или, имѣя въ виду уравненіе (165), опредѣляющее ρ

$$\sum_{j=1}^{j=n} C_i^{(j)}(\mu)\, P^{(j)}(\alpha) = 0,$$

что, по положеніи $x = a$, даетъ

$$\sum_{j=1}^{j=n} a^{(j)}\, C_i^{(j)}(\mu) = 0 \qquad (166)$$

гдѣ $a^{(j)}$ не зависятъ отъ μ.

Но послѣднее уравненіе не можетъ имѣть мѣсто, если $a_i^{(j)} = [P^{(j)}(\alpha)]_{x=a}$ не равны нулю. Намъ остается слѣдовательно разсмотрѣть случай, когда

$$[P^{(j)}(\alpha)]_{x=a} = 0$$

Полагая въ уравненіи (164) въ случаѣ $\theta = \zeta$: $\mu = 0$ въ случаѣ $\theta = \eta : \mu = 1$ имѣемъ

$$[\rho]_0 = \sum_{j=1}^{j=n} C^{(j0)}\, P^{(j)}(\theta) = 1, \qquad (168)$$

если черезъ $C^{(j0)}$ обозначаетъ значенія $C^{(j)}$ при упомянутыхъ выше значеніяхъ μ.

Такъ какъ a произвольно, то

$$P^{(j)}(\alpha) = 0$$

$$j = 1, 2 \ldots n$$

при всякомъ x. или $P^{(j)}(\theta) = \vartheta^{r_j}\, \omega^{(j)}(\vartheta)$, гдѣ $\vartheta = \theta - \alpha$, r_j цѣлыя числа, не равныя нулю, $\omega^{(j)}(\vartheta)$ цѣлая функція отъ ϑ.

Подставляя полученное выраженіе для $P^{(j)}(\theta)$ въ равенство (168) какъ алгебраическое тожественное относительно θ имѣемъ

$$\vartheta^r\, \omega(\vartheta) = 1,$$

гдѣ r цѣлое число не равное нулю, $\omega(\vartheta)$ цѣлая функція отъ ϑ.

Послѣднее тожество не можетъ имѣть мѣста, такъ какъ приравниваніе коэффиціентовъ при ϑ предполагаетъ

$$0=1.$$

Итакъ алгебраическая функція $\varphi(\theta)$ не имѣетъ полюсовъ, вслѣдствіе чего она сводится къ постоянному (т. е. не зависитъ отъ θ).

$\zeta=\varphi(\theta)$ алгебраическая функція, а η трансцендентная перваго класса.

Однородное линейное уравненіе, разрѣшаемое въ квадратурахъ имѣетъ частный интегралъ типа

$$\eta=e^{\int \xi\, dx} \tag{156}$$

гдѣ ξ алгебраическая функція.

Примѣры:

I) Всякое уравненіе перваго порядка интегрируется въ квадратурахъ

$$y'+p_1 y=0$$

причемъ рѣшеніе его

$$y=Ce^{-\int p_1\, dx}$$

Въ этомъ случаѣ основное рѣшеніе совпадаетъ съ общимъ.

II) Уравненіе второго порядка

$$y''+Py'+\left[\frac{P^2-R^2}{4}+\frac{1}{2}\left(\frac{dP}{dx}-\frac{dR}{dx}\right)\right]y=0$$

тоже интегрируется въ квадратурахъ.

Общее рѣшеніе:

$$y=e^{\frac{1}{2}\int(R-P)\,dx}\left[C_1+C_2\int e^{-\int R\,dx}\,dx\right]$$

Частное основное

$$Y = e^{\frac{1}{2}\int (R-P)\,dx}$$

III Уравненіе

$$2(x^5+1)y^{(\text{IV})}-(6x^5+5x^4+6)y'''+(6x^5+10x^4+6)\,y''-(2x^5+5x^4+2)\,y'=0$$

имѣетъ нѣсколько основныхъ рѣшеній

$$1)\quad \underline{\eta}_1 = C = const$$

$$2)\quad \underline{\eta}_2 = e^x$$

$$3)\quad \underline{\eta}_3 = e^x\, x = e^{\int\left(1+\frac{1}{x}\right)dx}$$

Общее рѣшеніе его:

$$y = C_1 + C_2\, e^x + C_3\, x\, e^x + C_4\, e^x \int\left[e^{-x}\int(e^x\int\sqrt{1+x^5}\,dx)\,dx\right]dx$$

трансцендентная 3-го класса.

§ 31. *Форма общаго рѣшенія.*

Не представляетъ теперь затрудненія вывести общую форму для общаго рѣшенія, выражаемаго съ помощью $[qv]$.

Положимъ, что

$$\underline{\eta} = e^{\int \xi\, dx} \tag{156}$$

основное рѣшеніе уравненія (117)

$$y^{(n)} + p_1\, y^{(n-1)} + p_2\, y^{(n-2)} + \ldots\ldots p_{n-1}\, y' + p_n\, y = 0 \tag{117}$$

Полагая

$$y = e^{\int \xi\, dx}\int y_1\, dx \tag{169}$$

приводимъ его къ уравненію:

$$y_1^{(n-1)} + p_1^{(1)}\, y_1^{(n-2)} + p_2^{(1)}\, y_1^{(n-3)} + \ldots p_{n-2}^{(1)}\, y'_1 + p_{n-1}^{(1)}\, y_1 = 0 \quad (117^{(1)})$$

гдѣ $p_i^{(1)}$ алгебраическая, какъ ξ и p_i, функціи. Одно изъ рѣшеній уравненія ($117^{(1)}$) типа

$$\eta_1 = e^{\int \xi_1 \, dx} \tag{156_1}$$

Полагая

$$y_1 = e^{\int \xi_1 \, dx} \int y_2 \, dx \tag{169_1}$$

приводимъ уравненіе ($117^{(1)}$) къ уравненію:

$$y^{(n-2)} + p_1^{(2)} y^{(n-3)} + p_2^{(2)} y^{(n-4)} + \ldots p_{n-3}^{(2)} y' + p_{n-2}^{(2)} y = 0 \tag{$117^{(2)}$}$$

гдѣ $p_i^{(2)}$ алгебраическія и т. д.

Мы получаемъ такимъ образомъ рядъ частныхъ рѣшеній

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &= \eta = e^{\int \xi \, dx} \\ Y_2 &= e^{\int \xi \, dx} \int e^{\int \xi_1 \, dx} \\ Y_3 &= e^{\int \xi \, dx} \int e^{\int \xi_1 \, dx} \left(\int e^{\int \xi_2 \, dx} dx\right) dx \end{aligned}\right\} \tag{170}$$

. . . .

а по нимъ общее рѣшеніе

$$\begin{aligned} y = C_1 e^{\int \xi \, dx} &+ C_2 e^{\int \xi \, dx} \int e^{\int \xi_1 \, dx} dx + \\ &C_3 e^{\int \xi \, dx} \int e^{\int \xi_1 \, dx} \left(\int e^{\int \xi_2 \, dx} dx\right) dx \\ &+ C_4 e^{\int \xi \, dx} \int e^{\int \xi_1 \, dx} \left[\int e^{\int \xi_2 \, dx} \left(\int e^{\int \xi_3 \, dx} dx\right) dx\right] dx + \ldots \end{aligned} \tag{171}$$

Если предполагать, что ни одна изъ указанныхъ квадратуръ не берется, то результатъ можетъ быть переписанъ въ видѣ

$$y=[\overline{qv^{(1)}}]\{C_1+\sum_{j=2}^{j=n}C_j[\underline{qv^{(j)}}]\} \tag{172}$$

Общее рѣшеніе однороднаго линейнаго уравненія съ алгебраическими коэффиціентами выражаемое въ квадратурахъ должно быть трансцендентной не выше n-го класса, гдѣ n порядокъ уравненія.

Рѣшеніе уравненія прим. III § 30 трансцендентная 3-го класса:

$$q=3<n=4$$

Уравненіе 2-го порядка

$$x^2y''+(6x+1)y'+6y=0 \tag{173}$$

имѣетъ общимъ рѣшеніемъ трансцендентную 2-го класса (какъ мы ниже убѣдимся)

$$y=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)\left[\int e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^2dx+C\right] \tag{174}$$

Зная основное рѣшеніе

$$y=\underline{\eta}=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)=e^{-\int\frac{7x^2+6x+1}{x^2(2x+1)}dx} \tag{175}$$

общее найдемъ приводя, уравненіе (173) подстановкой

$$y=\underline{\eta}\int y_1\,dx$$

къ уравненію перваго порядка, легко интегрируемому въ квадратурахъ.

в) Основныя трансцендентныя $[ab]$ и $[elm]$.

§ 32. *Форма основного рѣшенія.*

Найдя форму основного рѣшенія $\eta=e^{\int\xi\,dx}$ въ случаѣ основныхъ трансцендентныхъ $[qv]$ мы могли бы дальше найти весьма просто форму основного рѣшенія въ случаѣ основныхъ трансцендентныхъ $[ab]$ и $[elm]$, пользуясь извѣстной теоремой Льювиля о формѣ выраженія $\int \xi\, dx$, въ томъ случаѣ, когда онъ выражается съ помощью $[elm]$ и обобщеніемъ этой теоремы (доказаннымъ нами въ магистерской диссертаціи).

Но мы предпочитаемъ вести доказательство независимо отъ этихъ теоремъ, разсчитывая эти послѣднія вывести, какъ слѣдствія изъ нашихъ изслѣдованій.

На основаніи доказаннаго въ § 29 основное рѣшеніе имѣетъ форму

$$\underline{\eta} = e^{\int \xi\, dx} = A\, \eta_1^{\mu_1} \eta_2^{\mu_2} \dots \eta_r^{\mu_r} \tag{174}$$

гдѣ μ_i раціональныя числа

$$\eta_i = [\overline{ab}_i^{(q)}] = e^{\int F_i(\alpha_i, \beta_i)\, dx_i}$$

высшія основныя трансцендентныя. А трансцендентная нисшаго класса. Если $\underline{\eta}$ трансц. q-го класса, $(q > 1)$ въ α_i, β_i должна входить трансцендентная $\overline{q}$—1-го класса: θ.

$$\alpha_i = \alpha_i(\theta)$$

$$\beta_i = \beta_i(\theta)$$

$$F(\alpha_i, \beta_i) \frac{d\alpha_i}{dx} = \psi_i(\theta)$$

Уравненіе (174) даетъ.

$$\xi = \varphi(\theta) = \frac{A'(\theta)}{A(\theta)} + \sum_{i=1}^{i=r} \psi_i(\theta) \tag{176}$$

Производимъ замѣну θ не θ_μ.
Тогда (согласно § 14)

$$\frac{d\alpha_i(\theta)}{dx} \text{ переходитъ въ } \frac{d\alpha_i(\theta_\mu)}{dx}$$

$$F_i[\alpha_i(\theta), \beta_i(\theta)] \frac{d\alpha_i(\theta)}{dx} \text{ въ } F[\alpha_i(\theta_\mu), \beta_i(\theta_\mu)] \frac{d\alpha_i(\theta_\mu)}{dx}$$

$$A' = \frac{dA(\theta)}{d\theta} \text{ въ } \frac{dA(\theta_\mu)}{dx}$$

и уравненіе (176) даетъ

$$\xi_\mu = \varphi(\theta+\mu) = \frac{1}{A(\theta_\mu)} \frac{dA(\theta_\mu)}{dx} + \sum_{i=1}^{i=r} F[\alpha_i(\theta_\mu), \beta_i(\theta_\mu)] \frac{d\alpha_i(\theta_\mu)}{dx} =$$

$$= A_\mu \eta_{1\mu}^{\mu_1} \eta_{2\mu}^{\mu_2} \dots \eta_{r\mu}^{\mu_r}$$

если черезъ $\eta_{j\mu}$ обозначить результатъ подстановки въ η_j вмѣсто θ—θ_μ т. е.

$$\eta_{j\mu} = e^{\int F[\alpha_i(\theta_\mu), \beta_i(\theta_\mu)]\, d\alpha_i(\theta_\mu)} \tag{175$_\mu$}$$

η представляетъ трансцендентную 1-го класса отъ θ. Обозначимъ эту трансцендентную черезъ $\pi(\theta)$, тогда можемъ написать

$$\underline{\eta} = \pi(\theta) \tag{176}$$

$$\underline{\eta_\mu} = \pi(\theta_\mu) \tag{176$_\mu$}$$

Постараемся отыскать трансцендентную π. Совершенно также какъ въ § 25 убѣждаемся, что на ряду съ рѣшеніями (176$_\mu$) уравненіе

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \dots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{117}$$

имѣетъ еще рѣшенія:
для $\theta = \zeta$:

$$\frac{\partial^j \pi(\zeta)}{\partial \zeta^j}$$

для $\theta = \eta$

$$\eta^j \frac{\partial^j \pi(\eta)}{\partial \eta^j}$$

Мы можемъ написать:

$$A_0 \pi\ \zeta) + \sum_{j=1}^{j=n} A_j \frac{\partial^j \pi(\zeta)}{\partial \zeta^j} = 0 \tag{177}$$

$$A_0 \pi(\eta) + \sum_{j=1}^{j=n} A_j \eta^j \frac{\partial^j \pi(\eta)}{\partial \eta^j} = 0 \tag{178}$$

Мы докажемъ, что это уравненіе имѣетъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ ζ, η.

Эти уравненія не алгебраическія, а трансцендентныя относительно ζ, η и поэтому доказательство того, что эти уравненія имѣютъ мѣсто для всякихъ значеній ζ, η должно быть иное, чѣмъ для аналогичныхъ уравненій (119) и (131) §§ 25, 26.

Съ этой цѣлью замѣчаемъ, что, если

$$\pi(\zeta) = e^{\omega(\theta)},$$

то

$$\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} = e^{\omega(\theta)} \frac{\partial \omega(\theta)}{\partial \theta}$$

$$\frac{\partial^2 \pi(\theta)}{\partial \theta^2} = e^{\omega(\theta)} \left[\frac{\partial^2 \omega(\theta)}{\partial \theta^2} + \left(\frac{\partial \omega(\theta)}{\partial \theta} \right)^2 \right] \tag{179}$$

. . . .

$$\frac{\partial^j \pi(\theta)}{\partial \theta^j} = e^{\omega(\theta)} \Omega_j \left[\frac{\partial^j \omega(\theta)}{\partial \theta^j}, \frac{\partial^{j-1} \omega(\theta)}{\partial \theta^{j-1}} \cdots\cdots \frac{\partial \omega(\theta)}{\partial \theta} \right]$$

гдѣ Ω раціональная функція

$$\frac{\partial \omega(\theta)}{\partial \theta}, \frac{\partial^2 \omega(\theta)}{\partial \theta^2} \cdots \frac{\partial^j \omega(\theta)}{\partial \theta^j}$$

Но

$$\omega(\theta)=\sum_{i=1}^{i=r}\mu_i\int F_i(\alpha_i,\beta_i)\,d\,\alpha_i+lg\,A(\theta)$$

откуда

$$\frac{\partial\,\omega(\theta)}{\partial\theta}=\sum_{i=1}^{i=r}\mu_i F_i(\alpha_i\beta_i)\frac{\partial\,\alpha_i}{\partial\theta}+\frac{1}{A(\theta)}\frac{\partial\,A}{\partial\,\theta} \qquad (180)$$

а поэтому

$$\frac{\partial^2\omega}{\partial\theta^2}\cdots\cdots\frac{\partial^j\omega}{\partial\theta^j}$$

алгебраическія функціи отъ θ и другихъ трансцендентныхъ q—1-го и нисшаго классовъ области трансцендентныхъ (θ) Подставляя въ уравненія (177) и (178) вмѣсто $\pi(\theta)$ и ея производныхъ изъ значенія (179) имѣемъ уравненія (177) и (178) въ слѣдующемъ видѣ

$$e^{\omega(\theta)}\mathcal{F}(\theta)=0 \qquad (181)$$

гдѣ $\mathcal{F}$ алгебраическая функція θ и другихъ трансцендентныхъ $\bar{q}$—1-го и нисшихъ классовъ области трансцендентныхъ (θ)

Уравненіе (181) равносильно

$$\mathcal{F}(\theta)=0 \qquad (182)$$

Послѣднее уравненіе тожественно относительно θ и остается въ силѣ по замѣнѣ θ какой угодно функціей отъ x, тоже относится и къ (181) или что тоже (177, 178).

Такимъ образомъ мы можемъ сказать что $y=\pi(\zeta)$ и $\pi(\eta)$ трансцендентныя функціи ζ и η удовлетворяющія (при всякомъ значеніи ζ,η) дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$A_0 y+\sum_{j=1}^{j=n}A_j\frac{\partial^j y}{\partial\zeta^j}=0$$

$$A_0 y+\sum_{j=1}^{j=n}A_j\eta^j\frac{\partial^j y}{\partial\eta^j}=0$$

Общія рѣшенія этихъ уравненій: перваго

$$y=\pi(\zeta)=\sum_{i=1}^{i=l}\sum_{j=0}^{j=\mu_i-1}C_{ji}\zeta^j e^{\alpha_i\zeta} \tag{183}$$

гдѣ C_{ji} не зависятъ отъ ζ т. е. представляютъ алгебраическія функціи трансцендентныхъ q-го класса не содержащихъ ζ, трансцендентныхъ $\bar{q}$—1-го класса иныхъ, чѣмъ ζ и трансцендентныхъ нисшихъ классовъ, второго

$$y=\pi(\eta)=\sum_{i=1}^{i=l}\sum_{j=0}^{j=\mu_i-1}C_{ji}\eta^{\alpha_i}(lg\eta)^j \tag{184}$$

Но полученныя для $\pi(\zeta)$ и $\pi(\eta)$ выраженія (183) и (184) указываютъ, что рѣшеніе y не дано, противно условію, въ приготовленномъ видѣ.

Въ самомъ дѣлѣ

$$e^{\alpha_i\zeta}=e^{\alpha_i}[\underline{ab}^{(q-1)}_1]=[\overline{ab}^{(q-1)}_i]$$

тоже трансцендентная $\bar{q}$—1-го класса.

Такимъ образомъ

$$\pi(\zeta)=\sum_{i=1}^{i=l}\sum_{j=0}^{j=\mu_i-1}C_{ji}[\overline{ab}^{(q-1)}]^j[\overline{ab}^{(q-1)}_i]$$

Мы получаемъ для $\pi(\zeta)$ выраженіе содержащее всѣ основныя трансцендентныя q-го класса, входившія въ $\pi(\zeta)$, кромѣ тѣхъ, которыя содержали ζ,

Замѣчая, что

$$\eta^{\alpha_i}=[\underline{ab}^{(q-1)}]^{\alpha_i}=[\underline{ab}_i^{(q-1)}]$$

$$lg\eta=lg[\overline{ab}^{(q-1)}]=[\underline{ab}^{(q-1)}]$$

получаемъ изъ уравненія (183):

$$y = \sum_{i=1}^{i=l} \sum_{j=0}^{j=\mu_i-1} C_{ij} [\overline{ab}_i^{(q-1)}] [\underline{ab}^{(q-1)}]$$

откуда заключаемъ, что новое выраженіе для y не содержитъ трансцендентныхъ q-го класса, въ которыя входила η.

Такимъ образомъ необходимо, чтобы $q=1$, чтобы $\eta_1, \eta_2 \ldots$ были основными трансцендентными 1-го класса, A алгебраической функціей.

Если линейное однородное уравненіе съ алгебраическими коэффиціентами разрѣшается при помощи основныхъ трансцендентныхъ $[ab]$, *то оно имѣетъ частное рѣшеніе типа:*

$$\underline{\eta} = [alg] [\overline{ab}_1^{(1)}]^{\mu_1} [\overline{ab}_2^{(1)}]^{\mu_2} \ldots [\overline{ab}_r^{(1)}]^{\mu_r} \tag{185}$$

гдѣ

$$[\overline{ab}_j^{(1)}] = e^{\int F_i(\alpha_i \beta_i)\, d\alpha_i}$$

и гдѣ $\int F_i(\alpha_i, \beta_i)\, d\alpha_i$ *Абелевъ интегралъ,* α_i, β_i *алгебраическія функціи отъ* x, μ_i *раціональныя числа.*

Въ случаѣ элементарныхъ трансцендентныхъ имѣемъ

$$\underline{\eta} = [alg] [ex^{(1)}] [dg_1^{(1)}]^{\mu_1} [dg_2^{(1)}]^{\mu_2} \ldots [dg_r^{(1)}]^{\mu_r} \tag{186}$$

или раскрывая значенія символомъ $[ex^{(1)}]$ $[lg_i^{(1)}]$

$$\underline{\eta} = e^{\omega} [\chi_0]^{\lambda_0} [\chi_1]^{\lambda_1} [\chi_2]^{\lambda_2} \ldots [\chi_r]^{\lambda_r} \tag{187}$$

гдѣ ω, χ_0, χ_i *алгебраическія функціи отъ* x, λ_0 *раціональное,* λ_i *ирраціональныя числа.*

Полученный результатъ поясняемъ рядомъ примѣровъ.

I) Уравненіе съ постоянными коэффиціентами

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = 0 \tag{188}$$

имѣетъ основныя рѣшенія типа $\underline{\eta} = e^{\alpha x}$, гдѣ α постоянное или типа

$$\eta = e^{ax} x^k = e^{\int \left(a + \frac{k}{x}\right) dx}$$

II) Уравненіе типа

$$a_0 (ax + b)^n y^{(n)} + a_1 (ax + b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots . a_n y = 0 \qquad (189)$$

имѣетъ основное рѣшеніе типа

$$y = (ax + b)^\alpha,$$

гдѣ α постоянное.

III) Извѣстное уравненіе, изслѣдованное Эйлеромъ и Льювилемъ

$$y'' = \frac{Ay}{(a + 2bx + cx^2)^2} \qquad (190)$$

имѣетъ общее рѣшеніе типа

$$y = C_1 e^{\int \xi_1 dx} + C_2 e^{\int \xi_2 dx} \qquad (191),$$

гдѣ

$$\left.\begin{aligned} \xi_1 &= \frac{b + k + cx}{a + 2bx + cx^2} \\ \xi_2 &= \frac{b - k + cx}{a + 2bx + cx^2} \end{aligned}\right\} \qquad (192)$$

Имѣя въ виду, что

$$\int \xi_i dx = \tfrac{1}{2} lg (a + 2bx + cx^2) \pm \frac{k}{2\sqrt{b^2 - ac}} lg \left(\frac{b + cx + \sqrt{b^2 - ac}}{b + cx - \sqrt{b^2 - ac}}\right)$$

получаемъ основное рѣшеніе:

$$\eta = (a + 2bx + cx^2)^{\frac{1}{2}} \left(\frac{b + cx + \sqrt{b^2 - ac}}{b + cx - \sqrt{b^2 - ac}}\right)^{\pm \frac{k}{2\sqrt{b^2 - ac}}} \qquad (193)$$

§ 33. *Теорема Льювиля и теорема Кенигсбергера.*

Возьмемъ алгебраическое уравненіе перваго порядка:

$$y' - p(x, u)\, y = 0 \tag{194}$$

гдѣ $p(x, u)$ алгебраическая функція отъ x или что тоже раціональное функція x и u функціи отъ x, опредѣляемой уравненіемъ

$$f(x, u) = 0$$

общее рѣшеніе уравненія (194) всегда выражается въ $[qv]$ и равно

$$y = Ce^{\int p(x, u)\, dx}$$

Но нами доказано, что основное рѣшеніе ур. (194) типа (185)

$$\underline{\eta} = [alg]\, [\overline{ab}_1^{(1)}]^{\mu_1} [\overline{ab}_2^{(1)}]^{\mu_2} \ldots [\overline{ab}_r^{(1)}]^{\mu_r}$$

если y выражается въ конечномъ видѣ съ помощью функцій $[ab]$.

Но общее рѣшеніе y получается изъ частного $\underline{\eta}$ черезъ умноженіе послѣдняго на произвольное постоянное, откуда

$$e^{\int p(x, u)\, dx} = C\, [alg]\, [\overline{ab}_1^{(1)}]^{\mu_1} \ldots [\overline{ab}]^{\mu_r}$$

или, логариѳмируя,

$$\int p(x, u)\, dx = [lg^{(1)}] + \sum_{j=1}^{j=r} \mu_j\, [\underline{ab}_j^{(1)}] \tag{194}$$

Предполагая, что нѣкоторыя изъ функцій $[\underline{ab}_j^{(1)}]$ приводятся къ логариѳмамъ имѣемъ слѣдующую формулу для случая, когда Абелевъ интегралъ выражается черезъ логариѳмы и Абелевы интегралы опредѣленнаго типа:

$$\int p(x, u)\, dx = \omega(x) + \sum_{j=1}^{j=q} \lambda_j\, lg\, \chi_j(x) + \sum_{j=1}^{j=r} \mu_j \int F_j(\alpha_j, \beta_j)\, d\alpha_j \tag{195}$$

$\omega, \chi_j, \alpha, \beta_j$ алгебраическія функціи отъ x, λ_j, μ_j постоянныя.

Теорема эта, доказанная Кенигсбергеромъ для случая *алгебраической выражаемости* одного Абелева интеграла черезъ другія можетъ быть названа *теоремой Кенигсбергера.* Въ случаѣ основныхъ трансцендентныхъ $[elm]$ имѣемъ извѣстную *теорему Льювиля*

$$\int p(x, u)\,dx = \omega(x) + \sum_{j=1}^{j=q} \lambda_j \lg \chi_j(x) \tag{196}$$

§ 34. *О канонической формѣ рѣшенія, выражаемаго въ конечномъ видѣ.*

Въ то время, какъ въ случаѣ выражаемости общаго рѣшенія линейнаго уравненія

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots . p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{117}$$

съ алгебраическими коэффиціентами p_i въ конечномъ видѣ черезъ $[q\bar{v}]$ мы можемъ только сказать, что *классъ y не выше n*, въ случаѣ выражаемости y въ конечномъ видѣ черезъ $[ab]$ $[elm]$ мы можемъ утверждать, что не только частное основное, но и *общее рѣшеніе уравненія (117), выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью основныхъ трансцендентныхъ $[ab]$ и $[elm]$ представляетъ трансцендентную перваго класса.*

Раньше, чѣмъ приступить къ доказательству этой основной теоремы интегрированія въ конечномъ видѣ, мы остановимся нѣсколько подробнѣе на разсмотрѣніи выведенной въ § 28 формы для общаго рѣшенія.

Прежде всего мы докажемъ, что *въ случаѣ выражаемости въ конечномъ видѣ съ помощью $[qv]$ $[ab]$ или $[elm]$ общаго рѣшенія линейнаго однороднаго уравненія:*

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots\ldots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{117}$$

ему можно придать форму:

$$y=\sum_{i=0}^{j=m}\underline{\eta_i}\,P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p) \tag{196}$$

гдѣ $\underline{\eta}_i$ *основныя рѣшенія причемъ,* $\underline{\eta}_i$ $i>o$ *трансцендентныя того же класса, что* y *и между ними не существуетъ соотношеній:*

$$\underline{\eta_i}=\rho_{ij}\,\underline{\eta_j} \tag{197}$$

гдѣ ρ_{ij} *трансцендентная нисшаго класса,* $\underline{\eta}_0$ *трансцендентная нисшаго, чѣмъ* y, *класса,* $P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_n)$ *полиномы трансцендентныхъ перваго типа, коэффиціенты которыхъ трансцендентныя нисшихъ классовъ.*

Форму (196) рѣшенія мы называемъ *канонической*. Въ § 28 для случая основныхъ трансцендентныхъ $[qv]$ мы имѣли

$$y=\sum_{i=1}^{i=m}\underline{\eta_i}\,P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)$$

гдѣ

$$\underline{\eta_i}=[\overline{qv}^{(1)}_i]$$

Въ случаѣ основныхъ трансцендентныхъ $[ab]$ $[elm]$

$$y=\sum_{i=1}^{i=m}\eta_1^{\lambda_1^{(i)}}\eta_2^{\lambda_2^{(i)}}\ldots\eta_r^{\lambda_r^{(i)}}P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p) \tag{96}$$

гдѣ

$$\eta_i=[\overline{ab}^{(1)}_i]$$

Но (§ 12)

$$[\overline{ab}^{(1)}_1]^{\lambda_1^{(i)}}[\overline{ab}^{(1)}_2]^{\lambda_2^{(i)}}\ldots[\overline{ab}^{(1)}_r]^{\lambda_r^{(i)}}=[\overline{qv}^{(1)}_i]=\underline{\eta_i}$$

Если мы будемъ предполагать, что всѣ произведенія

$$\eta_1^{\lambda_1^{(i)}}\eta_2^{\lambda_2^{(i)}}\ldots\eta_r^{\lambda_r^{(i)}}$$

различны т. е. ни для какой пары (i,j) не имѣютъ мѣста равенства

$$\lambda_g^{(i)} = \lambda_g^{(j)}$$

$$g = 1, 2 \ldots r,$$

что конечно всегда возможно, ибо иначе два члена суммы (96-ой) мы могли бы соединить въ одинъ, то между η_i нѣтъ соотношенія (191).

Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ имѣли бы

$$\eta_1^{\lambda_1^{(i)}} \eta_2^{\lambda_2^{(i)}} \ldots \eta_r^{\lambda_r^{(i)}} = \rho_{ij} \eta_1^{\lambda_1^{(j)}} \eta_2^{\lambda_2^{(j)}} \ldots \eta_r^{\lambda_r^{(j)}},$$

гдѣ ρ_{ij} трансценд. нисшаго класса, причемъ это уравненіе имѣло бы мѣсто при всякихъ значеніяхъ η_i, такъ какъ выраженіе y (96) приготовлено· Но тогда

$$\rho_{ij} = 1 \quad \lambda_g^{(i)} = \lambda_g^{(j)} \quad g = 1.2 \ldots r$$

Итакъ, какъ въ случаѣ $[qv]$, такъ и $[ab]$ (и конечно $[elm]$) y можно придать форму (196).

Остается только доказать, что $\underline{\eta}_i$ основныя рѣшенія

Прежде всего замѣчаемъ, что, если y выражаемое формулой (196) есть общее рѣшеніе уравненія (177), то

$$y_i = \underline{\eta}_i P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

частное рѣшеніе того же уравненія.

Замѣчая, что

$$y = \sum_{i=1}^{i=m} y_i$$

изъ уравненія (117) получаемъ

$$\sum_{i=0}^{i=m} \left(y_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j} y_i^{(j)}\right) = 0 \qquad (197)$$

Легко видѣть, что полученное уравненіе (197) типа (107) разсмотрѣннаго въ концѣ § 21.

Въ самомъ дѣлѣ по формулѣ Лейбница:

$$y_i^{(k)} = \underline{\eta}_i^{(k)} P_i + k\underline{\eta}_i^{(k-1)} P'_i + \frac{k(k-1)}{1.2} \underline{\eta}_i^{(k-2)} P'' + \ldots k\underline{\eta}'_i P_i^{(k-1)} + \underline{\eta}_i P_i^{(k)}$$

Но

$$\underline{\eta}_i = e^{\int \varphi_i dx}$$

$$\underline{\eta}'_i = e^{\int \varphi_i dx} \varphi_i$$

$$\underline{\eta}_i'' = e^{\int \varphi_i dx} (\varphi_i^2 + \varphi'_i)$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\underline{\eta}_i^{(k)} = e^{\int \varphi_i dx} \Phi_k(\varphi_i^{(k-1)}, \varphi_i^{(k-2)} \ldots \varphi'_i, \varphi_i)$$

гдѣ Φ_i раціональныя функціи $\varphi_i^{(j)}$.

Въ самомъ дѣлѣ это имѣетъ мѣсто для $k = 1, 2$ и будучи вѣрно для k остается вѣрнымъ для $k+1$ такъ какъ

$$\eta_i^{(k-1)} = e^{\int \varphi_i dx} \left(\frac{d\Phi_k}{dx} + \varphi_i \Phi_k \right)$$

$$\frac{d\Phi_k}{dx} = \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varphi_i} \varphi'_i + \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varphi'_i} \varphi''_i + \ldots \frac{\partial \Phi_k}{\partial \varphi_i^{(k-1)}} \varphi_i^{(k)} .$$

Въ виду того что (согласно § 32) φ_i нисшая трансцендентная функція отъ x, Φ_i будутъ также нисшими трансцендентными функціями отъ x.

$P_i P'_i \ldots P_i^{(k)}$ будутъ цѣлыми функціями ζ_i и производныхъ ζ_i, выражающихся черезъ трансцендентныя нисшихъ классовъ области (θ) въ которой строится y.

Лѣвая часть уравненія (197) принимаетъ видъ

$$\sum_{i=1}^{i=m} \underline{\eta}_i Q_i(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_p),$$

гдѣ $Q_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$ цѣлыя функціи ζ_i съ коэффиціентами равными трансценд. нисшихъ классовъ. Согласно § 21 эта сумма можетъ равнятся нулю только въ случаѣ

$$Q_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = 0 \tag{193}$$

такъ какъ иначе между $\underline{\eta}_i$ существовали бы соотношенія (197)

Уравненіе же (193) дастъ

$$\underline{\eta}_i Q_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = 0,$$

имѣя же въ виду, что

$$\underline{\eta}_i Q_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = y_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\, y_i^{(j)}$$

заключаемъ, что y_i частное рѣшеніе ур. (117)

Въ выраженіи

$$y_i = \underline{\eta}_i P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = \underline{\eta}_i \sum_{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p} (\mu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots \mu_p)\, \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_p^{\mu_p} \tag{199}$$

отмѣчаемъ слѣдующій членъ

$$\eta_i(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p)\, \zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \ldots \zeta_p^{\nu_p},$$

который называемъ *старшимъ*.

Изъ членовъ съ $\zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$, входящихъ въ $P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$ мы выбираемъ тѣ, въ которые ζ_1 входитъ въ наивысшей степени $\zeta_1^{\nu_1}$.

Изъ членовъ $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\mu_2} \zeta_2 \ldots \zeta_p^{\mu_p}$ выбираемъ тѣ, въ которыя ζ_2 входитъ въ наивысшей степени: $\zeta_2^{\nu_2}$

Изъ членовъ $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \zeta_3^{\mu_3} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$ выбираемъ $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \zeta^{\nu_3} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$ съ наивысшей степенью ζ_3 и т. д.

Для поясненія укажемъ старшіе члены въ нѣкоторыхъ выраженіяхъ.

Старшій членъ полинома

$$(2,2,4,5)\zeta_1^2\zeta_2^2\zeta_3^4\zeta_4^5+(3,5,1,2)\zeta_1^3\zeta_2^5\zeta_3\zeta_4^2+$$
$$+(3,5,2,2)\zeta_1^3\zeta_2^5\zeta_3^2\zeta_4^2+(3,5,2,3)\zeta_1^3\zeta_2^5\zeta_3^2\zeta_4^3+$$
$$+(3,5,2,4)\zeta_1^3\zeta_2^5\zeta_3^2\zeta_4^4$$

опредѣлится слѣдующимъ образомъ

$$\nu_1=3$$

изъ членовъ съ $\zeta_1^3\zeta_2^5\zeta_3\zeta_4^2, \zeta_1^3\zeta_2^5\zeta_3^2\zeta_4^2, \zeta_1^3\zeta_2^5\zeta_3^2\zeta_4^3, \zeta_1^3\zeta_2^5\zeta_3^2\zeta_4^4$ наивысшую степень ζ_2 имѣетъ первый, третій и четвертый

$$\nu_2=5$$

наименьшую степень ζ_3 третій и четвертый: $\nu_3=2$ и наконецъ наивысшую степень ζ_4: четвертый $\nu_4=4$.

Старшій членъ такимъ образомъ

$$(4,5,2,4)\zeta_1^3\zeta_2^5\zeta_3^2\zeta_4^4$$

Конечно мы будемъ получать вообще различныя старшіе члены смотря по принятому порядку, въ которомъ располагаемъ трансцендентныя перваго типа $\zeta_1, \zeta_2, \zeta_3, \zeta_4$.

Теперь замѣтимъ еще, что въ выраженіи (199) коэфиціентъ при старшемъ членѣ $P_i(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p)$ можно предполагать постояннымъ т. е.

$$(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p)=C=const$$

Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ мы могли бы положить

$$\underline{\eta}_i(\nu_1\nu_2\ldots\nu_p)=\underline{\eta}_i e^{\int\frac{(\nu_1,\nu_2..\nu_p)'}{(\nu_1\nu_2..\nu_p)}dx}=\underline{\underline{\eta}}_i=[\underline{q}v^{(1)}]$$

и привести сумму (199) къ другой

$$y=\underline{\underline{\eta}}_i\underline{P}_i(\zeta_1, \zeta_2..\zeta_p)$$

уже удовлетворяющей этому условію.

Подставляя вмѣсто y значеніе (199) въ уравненіе (117) имѣемъ:

$$\Big(\underline{\eta}_i^{(n)}+\sum_{j=0}^{j=n-1}p_{n-j}\,\underline{\eta}_i^{(j)}\Big)P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)+$$

$$+Q_{ij}(\underline{\eta}_i^{(n-1)}\ldots\underline{\eta}'_i,\underline{\eta}_i,x)\,P_i^{(j)}(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)+\ldots$$

$$\ldots Q_{in}(\eta_i,x)\,P_i^{(n)}(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)=0 \qquad (200)$$

гдѣ $Q_{ij}(\underline{\eta}_i^{(n-j)},\ \underline{\eta}_i^{(n-j-1)}\ldots\underline{\eta}'_i,\underline{\eta}_i,x)$ алгебраическія функціи $\underline{\eta}_i^{(n-j)},\underline{\eta}_i^{(n-j-1)}\ldots\underline{\eta}'_i,\underline{\eta}_i,x$, а въ виду того, что производныя $\underline{\eta}_i$ (см. фор. (157)) выражаются алгебраически черезъ $\underline{\eta}_i$ и x, то алгебраическія функціи $\underline{\eta}_i$ или трансцендентныхъ второго типа.

Это уравненіе тожественно относительно ζ_i, ибо въ противномъ случаѣ оно давало бы алгебраическое уравненіе между одними трансцендентными I типа (§ 5) и выраженіе y не было бы приготовлено.

Коэффиціенты при различныхъ произведеніяхъ

$$\zeta_1^{\mu_1}\zeta_2^{\mu_2}\ldots\zeta_p^{\mu_p}$$

лѣвой части уравненія (200) тожественно равны нулю, въ частности коэффиціентъ

$$[\pi_1,\pi_2\ldots\ldots\pi_p]=0$$

при старшемъ членѣ

$$\zeta_1^{\pi_1}\zeta_2^{\pi_2}\ldots\zeta_p^{\pi_p}$$

Если $\zeta_1^{\nu_1}\zeta_2^{\nu_2}\ldots\zeta_p^{\nu_p}$ старшій членъ $P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)$ то

$$\nu_1=\pi_1.$$

Въ самомъ дѣлѣ $\zeta_1^{\nu_1}$ высшая степень ζ_1 въ P_i, въ производныя $P_i^{(j)}$ ζ_1 входитъ или въ той же или въ нисшей степени и слѣдовательно въ лѣвую часть уравненія (200) ζ_i

не можетъ войти въ степени выше, чѣмъ ν_1-ой. Члены съ $\zeta_1^{\nu_1}$ въ $P^{(j)}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$ получаются дифференцированіемъ членовъ вида

$$(\nu_1, \mu_2, \mu_3 \ldots \mu_p)\, \zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_p^{\mu_p} \tag{201}$$

въ $P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$, такъ какъ

$$\left[(\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_p)\, \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_p^{\mu_p}\right]' = (\mu_1, \mu_2 \ldots \mu_p)'\, \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_p^{\mu_p} +$$

$$\sum_{i=1}^{i=p} \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_i^{\mu_i - 1} \zeta_{i+1}^{\mu_{i+1}} \ldots \zeta_p^{\mu_p} F_i(x) \tag{202}$$

гдѣ $F_i(x)$ трансцендентная нисшаго класса и при дифференцированіи показатели $\zeta_1, \zeta_2 \ldots$ не могутъ возрости.

Члены $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$ съ наивысшей степенью ζ_2 будутъ члены съ

$$\zeta_2^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \zeta_3^{\mu_3} \ldots \zeta_p^{\mu_p} \quad \text{въ} \quad P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

и члены

$$\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\mu_2} \zeta_3^{\mu_3} \ldots \zeta_p^{\mu_p} \quad \text{въ} \quad P_i^{(j)}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

получаемые дифференцированіемъ членовъ

$$(\nu_1, \nu_2, \mu_3 \ldots \mu_p)\, \zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \zeta_3^{\mu_3} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$$

т. е. согласно съ фор. (202) члены опять съ

$$\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \zeta_3^{\mu_3} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$$

Итакъ

$$\nu_1 = \pi_1 \quad \nu_2 = \pi_2$$

Члены $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \zeta_3^{\mu_3} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$ съ наибольшей степенью ζ_3 будутъ члены $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \zeta_3^{\nu_3} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$ въ $P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$ и члены, получаемые дифференцированіемъ ихъ, причемъ наибольшее значеніе μ_3 въ результатѣ равно ν_3 и т. д.

Продолжая такимъ образомъ дальше доказываемъ, что

$$\nu_i = \pi_i \quad i = 1 . 2 . . p$$

Старшимъ членомъ лѣвой части уравненія (199) суммы (200) старшій членъ

$$(\eta_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j} \eta_i^{(j)}) (\nu_1 , \nu_2 \ldots . \nu_p) \zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \ldots \zeta_p^{\nu_p}$$

перваго слагаемаго и члены получаемыя дифференцированіемъ

$$(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p) \zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} . . \zeta_p^{\nu_p}$$

другихъ слагаемыхъ суммъ (200),

Но въ виду того, что

$$(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p) = C$$

уравненіе (202) даетъ

$$\left[(\nu_1 , \nu_2 \ldots \nu_p) \zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} . . \zeta_p^{\nu_p}\right]' = \sum_{i=1}^{i=p} (\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p) \zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} . . \zeta_i^{\nu_i - 1} \zeta_{i+1}^{\nu_{i+1}} \zeta_p^{\nu_p} F_i$$

откуда выводимъ, что въ $P'_i(\zeta_1 . \zeta_2 \ldots \zeta_p)$, а затѣмъ и въ $P_i^{(j)}(\zeta_1 , \zeta_2 \ldots \zeta_p)$ члены съ $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} . . \zeta_p^{\nu_p}$ совсѣмъ исчезаютъ.

Вслѣдствіе этого коэффиціентъ при

$$\zeta_1^{\pi_1} \zeta_2^{\pi_2} \ldots \zeta_p^{\pi_p}$$

въ лѣвой части уравненія (200):

$$[\pi_1 , \pi_2 \ldots \pi_n] = \eta_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j} \eta_i^{(j)}$$

и приравниваніе $[\pi_1, \pi_2 \dots \pi_j]$ нулю указываетъ, что $\underline{\eta}_i$ основное рѣшеніе уравненія (117).

Уравненіе

$$x^3 y''' + 3x^3 y'' + (3x^2 + x) y' + (x^3 + x - 1) y = 0 \tag{203}$$

имѣетъ общее рѣшеніе

$$y = e^{-x} x [C_1 (lgx)^2 + C_2 (lgx) + C_3] = \underline{\eta} P(\zeta) \tag{204}$$

причемъ

$$\underline{\eta} = e^{-x} x$$

представляетъ основное рѣшеніе уравненія (203).

§ 35. *О свойствахъ простѣйшихъ частныхъ рѣшеній.*

Нами было доказано, что если

$$y = \sum_{i=1}^{i=m} \underline{\eta}_i P_i (\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p) \tag{190}$$

общее рѣшеніе уравненія (117), то

$$y_i = \underline{\eta}_i P_i (\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p) \tag{194}$$

представляютъ частныя рѣшенія того же уравненія. Изъ рѣшенія (194) дифференцированіемъ по $\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p$ можно получить новыя рѣшенія:

$$\frac{\partial y_i}{\partial \zeta_1}, \frac{\partial^2 y_i}{\partial \zeta_1^2}, \dots \dots \frac{\partial^{\nu_1} y_i}{\partial \zeta_1^{\nu_1}}, \frac{\partial^{\nu_1+1} y_i}{\partial \zeta_1^{\nu_1} \partial \zeta_2}, \frac{\partial^{\nu_1+2} y_i}{\partial \zeta_1^{\nu_1} \partial \zeta_2^2} \dots \dots \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2} y_i}{\partial \zeta_1^{\nu_1} \partial \zeta_2^{\nu_2}},$$

$$\frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+1} y_i}{\partial \zeta_1^{\nu_1} \partial \zeta_2^{\nu_2} \partial \zeta_3} \dots \dots \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+ \dots \nu_p} y_i}{\partial \zeta_1^{\nu_1} \partial \zeta_2^{\nu_2} \dots \partial \zeta_p^{\nu_p}} \tag{205}$$

Мы докажемъ, что всѣ рѣшенія (201) (194) независимы иначе говоря, что не существуетъ линейныхъ соотношеній съ постоянными коэффиціентами:

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j_1, j_2 \dots j_p} C^{(i)}_{j_1, j_2 \dots j_p} \frac{\partial^{j_1+j_2+\dots j_p} y_i}{\partial \zeta_1^{j_1} \partial \zeta_2^{j_2} \partial \zeta_p^{j_p}} = 0 \tag{206}$$

Въ виду того, что

$$\frac{\partial^{\sum\limits_{g=1}^{g=p} j_g} y_i}{\prod\limits_{g=1}^{g=p} \partial \zeta_i^{j_g}} = \underline{\eta_i} P_i^{(j_1 j_2 \dots j_p)} (\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p)$$

гдѣ $P^{(j_1 j_2 \dots j_p)} (\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p)$ цѣлый полиномъ ζ_i и въ виду того не имѣютъ мѣста соотношенія (197), уравненіе (205) влечетъ за собой уравненіе

$$\underline{\eta_i} \sum C^{(i)}_{j_1, j_2 \dots j_p} P^{(j_1, j_2 \dots j_p)}_i (\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p) = 0 \tag{207}$$

Старшій членъ съ $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \dots \zeta_p^{\nu_p}$ входитъ только въ

$$P^{(0, 0 \dots 0)}_i = [\nu_1, \nu_2 \dots \nu_p] \zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \dots \zeta_p^{\nu_p} + \dots .$$

такъ какъ въ остальныя слагаемыя ζ_1 можетъ входить только въ нисшихъ степеняхъ.

Приравнивая нулю коэффиціентъ при

$$\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \dots \zeta_p^{\nu_p}$$

въ лѣвой части уравненія (207) очевидно тожественнаго (вслѣдствіе приготовленности y) относительно ζ_1, имѣемъ

$$C_i^{(0, 0 \dots 0)} = 0$$

Такимъ образомъ въ лѣвую часть уравненія (206) y_i совсѣмъ не входитъ.

Полагая

$$y_i^{(1)} = \frac{\partial y}{\partial \zeta_i}$$

мы получаемъ рядъ рѣшкній (205) въ формѣ

$$y_i^{(1)}, \frac{\partial y_i^{(1)}}{\partial \zeta_1}, \frac{\partial^2 y_i^{(1)}}{\partial \zeta_1^2} \cdots \cdots \frac{\partial^{\nu_1+\nu_2+\ldots\nu_p-1} y_i^{(1)}}{\partial \zeta_1^{\nu_1-1} \partial \zeta_2^{\nu_2} \ldots \partial \zeta_p^{\nu_p}} \qquad (205')$$

и какъ выше убѣждаемся, что въ лѣвую часть ур. (206) не входитъ $y_i^{(1)}$ т. е.

$$C^{(i)}_{(1.0\ldots0)} = 0$$

Продолжая такимъ же образомъ дальше доказываемъ, что

$$C^{(i)}_{(j_1, j_2 \ldots j_p)}$$

Если обозначить не черезъ $(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p) \zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \ldots \zeta_p^{\nu_p}$ старшій членъ $P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$, а черезъ

$$(\nu^{(i)}_1, \nu^{(i)}_2 \ldots \nu^{(i)}_p) \zeta^{\nu_1^{(i)}} \zeta_2^{\nu_2^{(i)}} \ldots \zeta_p^{\nu_p^{(i)}}$$

то можно сказать, что уравненіе (117) имѣетъ

$$\sum_{i=1}^{i=m} \left\{ \sum_{j=1}^{j=p} \nu_j^{(i)} + 1 \right\} = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=p} \nu_j^{(i)} + m$$

независимыхъ рѣшеній.

Откуда слѣдуетъ, что

$$\sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j=1}^{j=p} \nu_j^{(i)} \leqq n - m \qquad (206)$$

Если обозначить черезъ $\overline{s}_{max}$ наибольшую, а черезъ $\overline{s}_{min}$ наименьшую изъ суммъ

$$\sum_{j=1}^{j=p} \nu_j^{(i)}$$

черезъ $\underline{s}_{max}$ наиб. а черезъ $\underline{s}_{min}$ наименьшую изъ суммъ

$$\sum_{i=1}^{i=m} \nu_j^{(i)}$$

то неравенство (206) дастъ намъ:

$$\overline{s}_{max} \leqq n - m \qquad m\overline{s}_{min} \leqq n - m \tag{207}$$

$$\underline{s}_{max} \leqq n - m \qquad p\,\underline{s}_{min} \leqq n - m \tag{208}$$

Зная частныя рѣшенія (205) легко составить общее рѣшеніе, которое выразится суммой

$$y = \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{j_1, j_2 \dots} C^{(i)}_{j_1, j_2 \dots j_p} \frac{\partial^{j_1 + j_2 + \cdots j_p} y_i}{\partial \zeta_1^{j_1} \partial \zeta_2^{j_2} \dots \partial \zeta_p^{j_p}} \tag{209}$$

если число этихъ рѣшеній равно n.

Уравненіе

$$x^4(1+x)^2(3x+1)y^{(IV)} + x^4(1+x)(9x+1)y''' +$$
$$+ x^2(3x^3 + 8x^2 + 11x + 2)y'' - 2x(6x^2 + 10x + 2)y' +$$
$$+ 2(6x^2 + 10x + 2)y = 0 \tag{210}$$

имѣетъ частное рѣшеніе

$$y_0 = x\,lgx\,lg(x+1) + 3x\,lgx + 5x\,lg(x+1) + x$$

или

$$y_0 = \eta(\zeta_1 \zeta_2 + 3\zeta_1 + 5\zeta_2 + 4)$$

и рѣшенія получаемыя дифференцированіемъ по основнымъ трансцендентнымъ I-го типа

$$\text{отн. } \zeta_1 \qquad y_1 = \underline{\eta}(\zeta_2 + 3) \qquad y_3 = \underline{\eta}$$

$$\text{отн. } \zeta_2 \qquad y_2 = \underline{\eta}(\zeta_1 + 5) \qquad y_3 = \underline{\eta}$$

Легко видѣть, что y_0, y_1, y_2, y_3 независимы и составить общее рѣшеніе:

$$y = C_0 y_0 + C_1 y_1 + C_2 y_2 + C_3 y_3 = C' x lgx\, lg(x+1) +$$
$$+ C'' x\, lgx + C''' x lg(x+1) + C^{(IV)} x$$

Замѣтимъ, что послѣднимъ въ ряду (205) должно быть основное рѣшеніе, а предпослѣднимъ рѣшеніе типа

$$y = \underline{\eta}[\rho + \sum_{i=1}^{i=p} \rho_i \zeta_i] \tag{211}$$

первой степени относительно ζ_i.

§ 36. *О линейномъ частномъ рѣшеніи.*

Рѣшеніе вида (211) мы называемъ *линейнымъ*. Мы сдѣлаемъ относительно него одно замѣчаніе. Въ выраженіи (211) коэффиціенты при ζ

$$y_i = \frac{\partial y}{\partial \zeta_i} = \underline{\eta}\, \rho_i$$

представляютъ основныя рѣшенія.

Предположимъ, что между рѣшеніями y_i существуютъ линейныя соотношенія съ постоянными коэффиціентами

$$\sum_{i=1}^{i=p} C_i^{(j)} y_i = 0$$

$$j = 1 . 2 .. h$$

или что тоже

$$\sum_{i=1}^{i=p} C_i^{(j)} \rho_i = 0 \tag{212}$$

$$j = 1.2..h$$

Опредѣляя изъ этихъ уравненій

$$\rho_g$$

$$j = 1.2..h$$

въ линейныхъ функціяхъ отъ ρ_j $i \geqslant h+1$ имѣемъ

$$\rho_g = \sum_{i=h+1}^{i=p} D_i^{(g)} \rho_i \tag{213}$$

$$g = 1.2..h$$

гдѣ $D_i^{(g)}$ постоянныя.

Тогда выраженіе (211) приводится къ виду

$$y = \underline{\eta}\left[\rho + \sum_{i=1}^{i=p-h} \rho_{h+i} \underline{\zeta}_i\right] \tag{214}$$

гдѣ

$$\underline{\zeta}_i = \zeta_{h+i} + \sum_{g=1}^{g=h} D_{h-i}^{(g)} \zeta_g = \sum_{g=1}^{g=p} E_i^{(g)} \zeta_g \tag{215}$$

гдѣ $E_j^{(g)}$ постоянныя, изъ которыхъ нѣкоторыя равны нулю

Такъ какъ

$$\frac{d\underline{\zeta}_i}{dx} = \sum_{g=1}^{g=p} E_i^{(g)} \frac{d\zeta_g}{dx}$$

а $\frac{d\zeta_g}{dx}$ выражается черезъ нисшія трансцендентныя, то тоже относится и къ $\frac{d\underline{\zeta}_i}{dx}$ т. е. $\underline{\zeta}_i$ представляетъ какъ и ζ_i основную трансцендентную перваго типа.

Между основными рѣшеніями $y_{h+i} = \rho_{h+i}\underline{\eta}$ или тоже, между ρ_{h+i} нѣтъ линейныхъ соотношеній съ постоянными коэффиціентами (212). Предполагаемъ, что

$$y_1 = \rho^{(1)}_1 \underline{\eta}\, y_2 = \rho^{(1)}_2 \underline{\eta} \ldots\ldots y_p = \rho^{(1)}_p \underline{\eta}$$

представляютъ, какъ и

$$y^{(1)}_1 = \rho_1 \underline{\eta}, y^{(1)}_2 + \rho_2 \underline{\eta} \ldots\ldots y^{(1)}_p = \rho_p \underline{\eta}$$

основныя рѣшенія линейнаго однороднаго уравненія, причемъ

$$y_g = \sum_{i=1}^{i=p} C^{(g)}_i y^{(1)}_i \tag{216}$$

гдѣ $C^{(g)}_i$ постоянныя или, что тоже.

$$\rho_g = \sum_{i=1}^{i=p} C^{(g)}_i \rho^{(1)}_i$$

Подставляя эти значенія ρ_g въ выраженіе линейнаго рѣшенія:

$$y = \underline{\eta}\,[\rho + \sum_{i=1}^{i=p} \rho_i \underline{\zeta_i}] \tag{\underline{211}}$$

мы преобразуемъ его къ тому же виду

$$y = \underline{\eta}\,[\rho + \sum_{i=1}^{i=p} \rho^{(1)}_i \underline{\zeta}^{(1)}_i] \tag{\underline{211}^{(1)}}$$

гдѣ $\rho^{(1)}_i$, какъ ρ_i трансцендентныя низшихъ классовъ, $\underline{\zeta}^{(1)}_i$, какъ и $\underline{\zeta_i}$ трансцендентныя I типа.

Итакъ *всякое линейное рѣшеніе можетъ быть представлено въ формѣ*

$$y=\underline{\eta}[\rho+\sum_{i=1}^{i=p}\rho_i\underline{\zeta_i}] \qquad (217)$$

гдѣ $\underline{\eta}\rho_i$ основныя рѣшенія между собой независимыя, $\underline{\zeta_i}$ основныя трансцендентныя I типа, причемъ это рѣшеніе сохраняетъ форму (211) (*которую называемъ нормальной*) *по замѣнѣ $\underline{\eta}\rho_i$ линейными функціями съ постоянными коэффиціентами отъ другихъ какихъ либо основныхъ рѣшеній.*

§ 37. *Форма общаго рѣшенія*

Переходимъ теперь къ доказательству основной теоремы, намѣченной въ началѣ § 34.

Положимъ, что y, а потому и ζ_i трансцендентныя $q>1$ класса.

Такъ какъ согласно § 32 основныя рѣшенія 1-го класса, то въ выраженіе (196) для y не должны входить $\underline{\eta_1}, \underline{\eta_2} \ldots \underline{\eta_m}$, а только $\underline{\eta_0}$

$$y=\underline{\eta_0}P_0(\zeta_1,\zeta_2..\zeta_p)=P(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p) \qquad (218)$$

Изъ этого рѣшенія выводимъ дифференцированіемъ по ζ_i линейное:

$$y=\rho+\sum_{i=1}^{i=p}\rho_i\zeta_i$$

гдѣ ρ, ρ_i трансцендентныя нисшаго, чѣмъ ζ_i, класса.

Мы можемъ положить

$$\zeta_i=\int F[\alpha_i(\theta),\beta_i(\theta)]\,d\alpha_i(\theta) \qquad (220)$$

$$\rho=\rho(\theta) \quad \rho_i=\rho_i(\theta) \qquad (221)$$

гдѣ $\alpha_i, \beta_i, \rho_i$ алгебраическія функціи отъ основной трансцендентной $\overline{q-1}$-го класса$=\theta$ и другихъ трансц. $\overline{q-1}$-го и нисшихъ классовъ области (θ), въ которой построенъ y.

Подставляя въ уравненіе:

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1}y'+p_n y=0 \tag{117}$$

значенія

$$y=\rho+\sum_{i=1}^{i=p}\rho_i\zeta_i=\mathcal{F}_0(\theta)+\sum_{i=1}^{i=p}\rho_i\zeta_i$$

$$y'=\rho'+\sum_{i=1}^{i=p}(\rho'_i\zeta_i+\rho_i\zeta'_i)=\mathcal{F}_1\left(\theta,\frac{d\alpha(\theta)}{dx},\ \frac{d\rho_i(\theta)}{dx}\right)+\sum_{i=1}^{i=p}\rho'_i\zeta_i$$

$$y''=\rho''+\sum_{i=1}^{i=p}(\rho''_i\zeta_i+2\rho'_i\zeta'_i+\rho_i\zeta''_i)=$$

$$=\mathcal{F}_2\left(\theta_1\frac{d\alpha(\theta)}{dx},\ \frac{d^2\alpha(\theta)}{dx},\ \frac{d\rho_i(\theta)}{dx^2},\ \frac{d^2\rho_i(\theta)}{dx^2}\right)+\sum_{i=1}^{i=p}\rho''_i\zeta_i \tag{222}$$

. . . .

$$y^{(n)}=\rho^{(n)}+\sum_{i=1}^{i=p}(\rho^{(n)}\zeta_i+n\rho^{(n-1)}_i\zeta'_i+\ldots\ldots\rho_i\zeta_i^{(n)})=$$

$$=\mathcal{F}_n\left(\theta,\frac{d\alpha(\theta)}{dx},\ \frac{d^2\alpha(\theta)}{dx}\ldots\frac{d^n\rho_i(\theta)}{dx}\right)+\sum_{i=1}^{i=p}\rho^{(n)}_i\zeta_i$$

гдѣ $\mathcal{F}_j$ алгебраическія функціи величинъ заключенныхъ въ скобки и другихъ трансценд. $\overline{q-1}$-го и нисшихъ классовъ области (θ).

Получаемъ

$$\sum_{i=0}^{i=p}\Big[\rho^{(n)}_i+\sum_{j=0}^{j=n-1}p_{n-j}\,\rho^{(j)}_i\Big]\zeta_i+\mathcal{F}_n\left(\theta,\frac{d\alpha(\theta)}{dx}\ldots\frac{d^n\alpha(\theta)}{dx^n},\ \frac{d\rho_i(\theta)}{dx}\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\frac{d^n\rho_i(\theta)}{dx}\right)+\sum_{j=0}^{j=n-1}p_{n-j}\,\mathcal{F}_j\left(\theta,\frac{d\alpha(\theta)}{dx}\ldots\frac{d^n\alpha(\theta)}{dx^n},\ \frac{d\rho_i(\theta)}{dx}\ldots\frac{d^n\rho_i(\theta)}{dx^n}\right)=0 \tag{223}$$

Имѣя въ видѣ, что по § 34

$$\rho_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\,\rho_i^{(j)} = 0 \qquad (224)$$

изъ уравненія (223) выводимъ

$$\varphi_n\left(\theta, \frac{d\alpha(\theta)}{dx} \cdots \frac{d^n\alpha(\theta)}{dx^n} \cdots \frac{d\rho_i(\theta)}{dx} \cdots \frac{d^n\rho_i(\theta)}{dx^n} \cdots\right) +$$

$$+\sum p_{n-j}\,\varphi_j\left(\theta, \frac{d\alpha(\theta)}{dx} \cdots \frac{d^n\alpha(\theta)}{dx^n} \cdots \frac{d\rho_i(\theta)}{dx} \cdots \frac{d^n\rho_i(\theta)}{dx^n} \cdots\right) = 0 \qquad (225)$$

На основаніи же того, что

$$\frac{d^j\alpha(\theta)}{dx^j},\ \frac{d^j\rho_i(\theta)}{dx^j}$$

алгебраическія функціи отъ θ (см. § 6) уравненіе (225) представляется въ слѣдующемъ видѣ

$$\Omega(\theta) = 0 \qquad (226),$$

гдѣ Ω алгебраическая функція θ и другихъ трансцендентныхъ $\overline{q-1}$-го и нисшихъ классовъ области (θ). Влѣдствіе приготовленности y уравненіе (226) тожественно относительно θ, поэтому

$$\Omega(\theta_\mu) = 0 \qquad (226_\mu),$$

гдѣ $\theta_\mu = \theta + \mu$, когда $\theta = \zeta$ и $\theta_\mu = \theta\mu$, когда $\theta = \eta$

Но уравненіе (226_μ) равносильно уравненію

$$\varphi_n\left(\theta_\mu, \frac{d\alpha(\theta_\mu)}{dx} \cdots \frac{d^n\alpha(\theta_\mu)}{dx^n} \cdots \frac{d\rho_i(\theta_\mu)}{dx} \cdots \frac{d^n\rho_i(\theta_\mu)}{dx^n} \cdots\right)$$

$$+\sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\,\varphi_j\left(\theta_\mu, \frac{d\alpha(\theta_\mu)}{dx} \cdots \frac{d^n\alpha(\theta_\mu)}{dx^n} \cdots \frac{d\rho_i(\theta_\mu)}{dx} \cdots \frac{d^n\rho_i(\theta_\mu)}{dx^n} \cdots\right) = 0 \quad (225_\mu)$$

Уравненіе (224), удовлетворяясь значеніемъ

$$\rho_i = \rho_i(\theta)$$

удовлетворяется также значеніемъ

$$\rho_i = \rho_i(\theta_\mu),$$

такъ что

$$\rho_i^{(n)}(\theta_\mu) + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\,\rho_i^{(j)}(\theta_\mu) = 0$$

Прикладывая къ лѣвой части уравненія (225_μ) члены

$$\left[\rho_i^{(n)}(\theta_\mu) + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\,\rho_i^{(j)}(\theta_\mu)\right]\zeta_\mu$$

гдѣ

$$\zeta_\mu = \int F[\alpha_i(\theta_\mu), \beta_i(\theta_\mu)]\, d\,\alpha_i(\theta_\mu) \qquad (220_\mu)$$

имѣемъ

$$y_\mu^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\, y_\mu^{(j)} = 0 \qquad (117_\mu)$$

гдѣ y_μ получается изъ y замѣной θ на θ_μ.

Если

$$y = \pi(\theta)$$

рѣшеніе ур. (117) причемъ $\pi(\theta)$ должна быть трансцендентной перваго класса относительно θ, то уравненіе (117) имѣетъ рѣшеніемъ также

$$y_\mu = \pi(\theta_\mu)$$

Изъ послѣдняго рѣшенія (какъ въ § 25, 26) выводимъ рѣшенія:

при $\theta = \zeta$

$$\frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \zeta},\ \frac{\partial^2 \pi(\zeta)}{\partial \zeta^2} \ldots\ldots \frac{\partial^j \pi(\zeta)}{\partial \zeta^j}$$

при $\theta = \eta$

$$\eta\,\frac{\partial\,\pi(\eta)}{\partial \eta},\ \eta^2\,\frac{\partial^2 \pi(\eta)}{\partial \eta^2} \ldots \eta^j\,\frac{\partial^j \pi(\eta)}{\partial \eta^j}$$

откуда заключаемъ, что (какъ въ § 25, 26)

$$A_0 \pi(\zeta) + \sum_{j=1}^{j=n} A_j \frac{\partial^j \pi(\zeta)}{\partial \zeta^j} = 0 \tag{117}$$

$$A_0 \pi(\eta) + \sum_{j=1}^{j=n} A_j \eta^j \frac{\partial^j \pi(\eta)}{\partial \eta^j} = 0 \tag{118}$$

гдѣ A_0, A_j постоянныя.

Мы теперь докажемъ, что эти уравненія имѣютъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ ζ, η

Замѣчая, что

$$y = \rho + \sum_{i=1}^{i=p} \rho_i \zeta_i = \psi_0(\theta) + \sum_{i=1}^{i=p} \rho_i \zeta_i$$

$$y'_\theta = \frac{\partial \pi(\theta)}{\partial \theta} = \rho'_\theta + \sum_{i=1}^{i=p} (\rho'_{i\theta} \zeta_i + \rho_i \zeta'_{i\theta}) =$$

$$= \psi_1\left(\theta_1 \frac{d\alpha(\theta)}{d\theta}, \ldots \frac{\partial \rho_i(\theta)}{\partial \theta} \ldots\right) + \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial \rho_i(\theta)}{\partial \theta} \zeta_i$$

. . . .

(226)

$$y^{(n)}_\theta = \frac{\partial^n \pi(\theta)}{\partial \theta^n} = \psi_n\left(\theta, \frac{\partial \alpha(\theta)}{\partial \theta}, \ldots \frac{\partial^n \alpha(\theta)}{\partial \theta^n} \ldots \frac{\partial \rho_i(\theta)}{\partial \theta} \ldots \frac{\partial^n \rho_i(\theta)}{\partial \theta^n} \ldots\right) +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=p} \frac{\partial^n \rho_i(\theta)}{\partial \theta^n} \zeta_i$$

гдѣ ψ_j алгебраическія функціи величинъ, заключенныхъ въ скобки и трансц. ф. $\overline{q-1}$-го и низшихъ классовъ области (θ), мы получаемъ уравненія (117) и (118) въ слѣдующей формѣ:

$$\sum_{i=1}^{i=p}\left[A_0\frac{\partial^n \rho_i(\theta)}{\partial\theta^n}+\sum_{j=0}^{j=n-1}A_j\frac{\partial^j \rho_i(\theta)}{\partial\theta^j}\right]\zeta_i+$$

$$A_n\psi_n\left(\theta,\frac{\partial\alpha(\theta)}{\partial\theta}\ldots\frac{\partial^n\alpha(\theta)}{\partial\theta^n}\ldots\frac{\partial\rho_i(\theta)}{\partial\theta}\ldots\frac{\partial^n\rho_i(\theta)}{\partial\theta^n}\ldots\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{j=n-1}A_j\psi_j\left(\theta,\frac{d\alpha(\theta)}{d\theta}\ldots\frac{\partial^j\alpha(\theta)}{\partial\theta^j}\ldots\frac{\partial\rho_i(\theta)}{\partial\theta}\ldots\frac{\partial^j\rho_i(\theta)}{\partial\theta^j}\ldots\right)=0 \qquad (227)$$

ψ_j алгебраическія функціи θ и другихъ трансцендентныхъ $\overline{q-1}$-го и нисшихъ классовъ области (θ).

Въ виду того, что ζ_i q-го класса, ψ_j $\overline{q-1}$-го или нисшаго, необходимо чтобы порознь имѣли

$$A_n\frac{\partial^n\rho(\theta)}{\partial\theta^n}+\sum_{j=0}^{j=n-1}A_j\frac{\partial^j\rho_i(\theta)}{\partial\theta^j}=0 \qquad (228)$$

$$A_n\psi_n\left(\theta,\frac{\partial\alpha(\theta)}{\partial\theta}\ldots\frac{\partial^n\alpha(\theta)}{\partial\theta^n}\ldots\frac{\partial\rho_i(\theta)}{\partial\theta}\ldots\frac{\partial^n\rho_i(\theta)}{\partial\theta^n}\ldots\right)+$$

$$+\sum_{j=0}^{j=n-1}A_j\psi_j\left(\theta,\frac{\partial\alpha(\theta)}{\partial\theta}\ldots\frac{\partial^j\alpha(\theta)}{\partial\theta^j}\ldots\frac{\partial\rho_i(\theta)}{\partial\theta}\ldots\frac{\partial^j\rho_i(\theta)}{\partial\theta^j}\ldots\right)=0 \qquad (229)$$

Но эти уравненія уже алгебраическія относительно θ и имѣютъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ θ.

Тоже относится къ (227) имѣющему мѣсто при какихъ угодно значеніяхъ ζ_i (въ частности при тѣхъ которыя опредѣляются формулой

$$\zeta_i=\int F_i[\alpha_i(\theta),\beta_i(\theta)]\,d\alpha_i(\theta)$$

и наконецъ тоже относится къ (117) и (118) уравненіямъ равносильнымъ (227).

Но интегрированіе этихъ послѣднихъ уравненій даетъ:

$$\pi(\zeta)=\sum_{i=1}^{i=\epsilon}\sum_{j=0}^{j=\mu_i}C_{ji}\zeta^j e^{\alpha_i\zeta}$$

$$\pi(\eta)=\sum_{i=1}^{i=\epsilon}\sum_{j=0}^{j=\mu_i-1}C_{ji}\eta^{\alpha_i}(lg\eta)^j$$

откуда какъ въ § 32 убѣждаемся, что для $y=\pi(\zeta)$ и $y=\pi(\eta)$ можно дать выраженія, содержащія только алгебраически $\theta=\zeta,\eta$ т. е. не содержащія трансцендентныхъ q-го класса въ которыя, по предположенію входитъ θ.

Иначе говоря выраженіе y противно условію не приготовлено.

Итакъ, какъ η_i, такъ ζ_i въ выраженіи y трансцендентныя перваго класса.

Форма общаго рѣшенія уравненія (117), полученная въ § 28 (147) можетъ быть приведена къ виду:
въ случаѣ основныхъ трансц. $[ab]$

$$y=\sum[alg]\,[\overline{ab}_1^{(1)}]^{\mu_1}\ldots[\overline{ab}_r^{(1)}]^{\mu_r}\,[\underline{ab}_1^{(1)}]^{\nu_1}\,[\underline{ab}_2^{(1)}]^{\nu_2}\ldots[\underline{ab}_p^{(1)}]^{\nu_p} \tag{230}$$

гдѣ μ_i,ν_i цѣлыя положительныя числа, причемъ въ случаѣ трансц. $[elm]$.

$$y=\sum[alg]\,[ex^{(1)}]\,[dg_1^{(1)}]^{\mu_1}\ldots[dg_r^{(1)}]^{\mu_r}\,[lg_1^{(1)}]^{\nu_1}\ldots[lg_p^{(1)}]^{\nu_p} \tag{231}$$

Раскрывая въ послѣднемъ случаѣ значенія символовъ

$$[ex_i^{(1)}]\,[dg_i^{(1)}]\,[lg_i^{(1)}],$$

имѣемъ

$$y=\sum e^{\omega}[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}[\chi_2]^{\lambda_2}\ldots[\chi_r]^{\lambda_r}\,[lg\vartheta_1]^{\nu_1}\,[lg\vartheta_2]^{\nu_2}\ldots[lg\vartheta_p]^{\nu_p} \tag{232}$$

гдѣ $\omega,\chi_j,\vartheta_j$ алгебраическія функціи отъ x, λ_0 раціональное число (въ частности $\lambda_0 = 1$) λ_j ирраціональныя, ν_i цѣлыя положительныя числа, причемъ $\nu_j \leqq n-1$

Приведемъ *примѣры линейныхъ уравненій, рѣшаемыхъ въ конечномъ видѣ съ помощью основныхъ элементарныхъ функцій.*

Г) Уравненіе

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots . a_{n-1} y' + a_n y = 0 \quad (233)$$

а постоянными коэффиціентами имѣетъ общее рѣшеніе:

$$y = \sum_{i=1}^{i=m} C_i e^{\omega_i} [\chi_0)]^{\lambda_{0i}} \quad \textbf{(234)}$$

$\omega_i = \alpha_i x$, α_i постоянное, $\lambda_{0i} = 1$, $\chi_{0i} = x^{k_i}$, гдѣ k_i цѣлое положительное число.

II) Уравненіе

$$a_0 (ax+b)^n y^{(n)} + a_1 (ax+b)^{n-1} y^{(n-1)} + \ldots . a_{n-1} (ax+b) y' + a_n y = 0 \quad (235)$$

имѣетъ общее рѣшеніе:

$$y = \sum_{i=1}^{i=m} C [\chi_i]^{\lambda_i} [lg\vartheta]^{\nu_i} \quad \textbf{(236)}$$

$$\chi = ax + b, \quad \vartheta = ax + b$$

III) Уравненіе Гальфена:

$$\sum_{i=1}^{i=m} B_i Q^{h_i} P^{n_i - h_i} \frac{d^{n_i} [P^{h_i} Q^{n-h_i} y]}{dx^{n_i}} = 0 \quad (237)$$

гдѣ $P = ax + b$, $Q = cx + d$, a, b, c, d постоянные, имѣетъ общее рѣшеніе:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i P^{\alpha_i} Q^{1-\alpha_i} = \sum_{i=1}^{i=m} C_i [\chi_1]^{\lambda_{1i}} [\chi_2]^{\lambda_{2i}} \quad (238)$$

IV) Уравненіе:

$$x^3 y'' - 2x(x+3) y' + 18 y = 0$$

общ. рѣш:

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^3 e^{-\frac{6}{x}}$$

V)
$$x^2 (x+1) y'' - (2x+1) x y' + (2x+1) y = 0$$

$$y = C_1 x + C_2 (x lg x + x)$$

VI)
$$x^3 y''' + 3x^3 y'' + (3x^3 + x) y' + (x^3 + x - 1) y = 0$$

$$y = e^{-x} x [C_1 (lg x)^2 + C_2 (lg x) + C_3]$$

Основныя трансц. функціи $[ab]$

Уравненіе

$$(1+x^4) y'' - 2(1 - x^3 + x^4) y' + (1 - 2x^3 + x^4) y = 0$$

разрѣшается съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ функцій и эллиптическихъ интеграловъ.

Общее рѣшеніе его:

$$y = C_1 [\overline{ab}^{(1)}] + C_2 [\overline{ab}^{(1)}] [\underline{ab}^{(1)}]$$

гдѣ

$$[\overline{ab}^{(1)}] = e^x \qquad [\underline{ab}^{(1)}] = \int \frac{dx}{\sqrt{1+x^4}}$$

C) Обобщенія

§ 38. *Форма частнаго рѣшенія выражаемаго въ конечномъ видѣ.*

Наши результаты допускаютъ обобщенія въ слѣдующемъ направленіи:

Не только общее рѣшеніе однороднаго линейнаго уравненія:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (117),$$

но и всякое частное рѣшеніе этого уравненія, выражаемое въ конечномъ видѣ должно имѣть форму (171) въ случаѣ основныхъ функціи [qv] (230) въ случаѣ [ab] и (231) въ случаѣ [elm].

Предположимъ, что существуетъ система $n' < n$, но не больше, независимыхъ рѣшеніи уравненія (117), выражаемыхъ въ конечномъ видѣ: $y_1 y_2 \ldots y_{n'}$.

Всѣ разсужденія §§ 25, 26 останутся въ силѣ, если докажемъ уравненія (119) и (131).

Но въ настоящемъ случаѣ:

$$\pi(\zeta) = \sum_{i=1}^{i=n'} C_i y_i \tag{239}$$

$$\pi(\eta) = \sum_{i=1}^{i=n'} C_i y_i \tag{240}$$

Здѣсь возможны два случая

или

$$\frac{\partial \pi(\zeta)}{\partial \zeta}, \frac{\partial^2 \pi(\zeta)}{\partial \zeta^2} \cdots \cdots \frac{\partial^g \pi(\zeta)}{\partial \zeta^g} \tag{241}$$

зависимы и тогда

$$\sum_{j=1}^{j=g} A_j \frac{\partial^j \pi(\zeta}{\partial \zeta^j} = 0 \tag{242}$$

гдѣ A_j постоянныя

или рѣшенія (241) при $g = n'$ независимы, такъ какъ по условію болѣе n' независимыхъ рѣшеній выражаемыхъ въ конечномъ видѣ уравненіе (117) не можетъ имѣть. Въ этомъ послѣднемъ случаѣ будемъ имѣть

$$\sum_{j=1}^{j=n'} A_j \frac{\partial^j \pi(\zeta)}{\partial \zeta^j} = \sum_{i=1}^{i=n} C_i y_i \tag{243}$$

гдѣ A_j произвольныя постоянныя, C_i постоянныя зависящія отъ этихъ n' произвольныхъ постоянныхъ,

$$y_1, y_2 \ldots y_n$$

система n независимыхъ рѣшеній уравненія (117)

Въ уравненіи (243) n' изъ чиселъ C_i можно считать за произвольныя постоянныя, тогда A_j и $C_i(i > n')$ будутъ функціями ихъ т. е. $C_i(i \leqslant n')$

Уравненіе (243) можемъ тогда переписать на основаніи ур. (239) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\sum_{j=1}^{j=n'} A_j \frac{\partial^j \pi(\zeta)}{\partial \zeta^j} = \pi(\zeta) + \sum_{i=n'+1}^{i=n} C_i y_i$$

откуда слѣдуетъ, что $C_i = 0 \, (i > n')$, ибо въ противномъ случаѣ на ряду съ системой n' рѣшеній: $y_1 y_2 \ldots y_n$, выражаемыхъ въ конечномъ видѣ имѣли бы еще одно рѣшеніе

$$Y = \sum_{i=n'+1}^{i=n} C_i y_i$$

отъ $y_i(i \leqslant n)$ независящее и тоже выражаемое въ конечномъ видѣ.

Итакъ

$$\sum_{j=1}^{j=n'} A_j \frac{\partial^j \pi(\zeta)}{\partial \zeta^j} = \pi(\zeta) \tag{244}$$

Уравненія (242) и (244) указываютъ, что $\pi(\zeta)$ удовлетворяетъ ур. (119) § 25.

Точно такимъ же образомъ докажемъ, что $y = \pi(\zeta)$ удовлетворяетъ уравненію (131) § 26. Выводы §§ 30, 31 не зависятъ отъ того, представляетъ ли y частное или общее рѣшеніе.

Что же касается до §§ 32, 37, то вѣрность ихъ для случая частныхъ рѣшеній устанавливается по доказательствѣ уравненій (177) и (178) совершенно такимъ же способомъ, какимъ были доказаны уравненія (119) и (131) §§ 25, 26 для разбираемаго въ настоящемъ параграфѣ случая

Приведемъ примѣры.

Уравненіе

$$x^2 y'' + (6x+1) y' + 6y = 0$$

имѣетъ общее рѣшеніе

$$y = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)\left[\int e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^2 dx + C\right]$$

выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью функцій $[qv]$, но не $[elm]$.

Но оно имѣетъ частное рѣшеніе

$$y = [alg]\,[ex^{(1)}] = e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right),$$

выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью $[elm]$.

§ 39. *Случай линейнаго уравненія съ трансцендентными коэффиціентами.*

Легко также видѣть, что по замѣнѣ классификаціи трансцендентныхъ въ алгебраической области классификаціей въ области трансцендентныхъ (ϑ) (§ 24) всѣ полученныя нами результаты для уравненія.

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \tag{117}$$

мы можемъ обобщить на случай трансцендентныхъ коэффиціентовъ $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}, p_n$.

Для этого слѣдуетъ за область (ϑ) принять ту область, въ которой построены эти коэффиціенты p_i, которыя мы предполагаемъ въ приготовленной формѣ (въ смыслѣ § 5 т. е. въ алгебраической области.

Мы получаемъ тѣ же формы (171) (230) 231) для рѣшеній, выражаемыхъ въ конечномъ видѣ, но только съ тою разницей, что *въ формѣ (171)* ξ_i, *а въ формѣ (232)* $\omega, \chi_0, \chi_i, \vartheta_i$ *будутъ, не алгебраическими, а алгебраическими въ области трансцендентныхъ* (ϑ), *въ формахъ (230) (231)*

$$[\overline{ab}_i^{(1)}]\,[\underline{ab}_i^{(1)}]\,[ex_i^{(1)}]\,[dg_i^{(1)}]\,[lg_i^{(1)}]$$

будутъ основными трансцендентными перваго класса не въ алгебраической области, а въ области (ϑ).

Вотъ нѣсколько примѣровъ трансцендентныхъ линейныхъ уравненій, рѣшаемыхъ въ конечномъ видѣ:

I) $$y''-(ae^x+2)\,y'+y=0$$

общее рѣшеніе выражается въ $[qv]$

При классификаціи въ области $(\vartheta): e^x$

$$y=[\overline{qv}^{(1)}]\,[C_1+D_2\,[\underline{qv}]]$$

$$[\overline{qv}^{(1)}]=e^{ae^x+x} \qquad [\underline{qv}^{(2)}]=\int e^{-ae^x}dx$$

При классификаціи въ алгебраической области

$$y=[\overline{qv}^{(2)}]\,[C_1+C_2\,[\underline{qv}^{(2)}]]$$

II) Уравненіе

$$y''+\frac{(3x^2-4x)\,h^2+2\,(x-1)+x^2z}{x\,(x-1)\,(h^2-z)}\,y'+\frac{-(x-2)^2\,h^2-x^2\,z+x^3+x-1}{x^3\,(x-1)\,(h^2-z)}=0$$

гдѣ область $(\vartheta): h=e^x, z=lgx$, имѣетъ частное рѣшеніе, выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью $[elm]$:

$$y=[alg]=\frac{h-x}{h^2-z}=\frac{e^x-x}{e^{2x}-lgx}$$

III ГЛАВА

Форма рѣшеній неоднородныхъ линейныхъ уравненіи

A) Послѣдній членъ алгебраическій

а) Выраженіе черезъ высшія трансцендентныя.

§ 40. *α) случай основныхъ трансцендентныхъ* [qv].

Переходимъ теперь отъ однороднаго уравненія

$$y^{(n)}+p_1 y^{(n-1)}+\ldots p_{n-1} y'+p_n y=0 \tag{117}$$

къ неоднородному

$$Y^{(n)}+p_1 Y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1} Y'+p_n Y=P \tag{245}$$

Извѣстная метода Лагранжа *измѣненія произвольныхъ постоянныхъ* даетъ возможность весьма просто рѣшить вопросъ о формѣ общаго рѣшенія y уравненія (271), выражаемаго въ конечномъ видѣ съ помощью [qv].

Если общее рѣшеніе y уравненія (271) выражается въ конечномъ видѣ (съ помощью безразлично какихъ основныхъ трансцендентныхъ), то тоже относится и къ общему рѣшенію y приведеннаго уравненія (117).

Въ самомъ дѣлѣ

$$y=\sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i + Y_0 \tag{246}$$

гдѣ c_i произвольныя постоянныя, Y_0 частное рѣшеніе уравненія (275).

Полагая

$$c_j=0\,(j=1.2..i-1\,,i+1..n)$$

$$c_i=1$$

убѣждаемся, что

$$y_i=Y_1-Y_0,$$

а затѣмъ и

$$y=\sum_{i=1}^{i=n} C_i y_i \tag{247}$$

выражается, какъ y, y_1, y_0 въ конечномъ видѣ.

Метода Лагранжа даетъ

$$Y=\sum_{i=1}^{i=n} C_i y_i \tag{248},$$

гдѣ C_i функціи, опредѣляемыя системой уравненій

$$\sum_{i=1}^{i=n} y_i^{(j)} \frac{d\,C_i}{dx}=0 \tag{249}$$

$$j=0\,,1.2..\overline{n-2}$$

$$\sum_{i=1}^{i=n} y_i^{(n-1)} \frac{d\,C_i}{dx}=P \tag{250}$$

откуда слѣдуетъ, что независимо отъ того алгебраическій или трансцендентный членъ P y берется въ конечномъ видѣ съ помощью основ. трансц. $[qv]$ т. е. въ квадратурахъ.

Когда P алгебраическое, то въ общемъ случаѣ

$$C_i = [\underline{qv}^{(\overset{n+1}{i})}]$$

$$Y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i [\underline{qv}^{(\overset{n+1}{i})}][\overline{qv}^{(1)}] \{ a_1 + \sum_{j=2}^{j=n} a_j [\underline{qv}^{(j)}] \} \qquad (251),$$

гдѣ a_i, a_j постоянныя.

Итакъ y въ общемъ случаѣ трансцендентная $\overline{n+1}$-го класса.

Если приведенное уравненіе (117) разрѣшается въ конечномъ видѣ въ квадратурахъ, то тоже относится и къ уравненію съ послѣднимъ членомъ независимо отъ значенія послѣдняго.

β) Случай основныхъ трансцендентныхъ $[ab]$.

§ 41, *Выраженіе через трансцендентныя I-го типа.*

Предположимъ, что p_i, P алгебраическія функціи.

Предполагаемъ, что y выражается въ конечномъ видѣ и дано въ приготовленномъ видѣ. Полагая

$$Y = \pi(\theta) \qquad (252)$$

гдѣ π алгебраическая функція $\theta = \zeta, \eta$ и другихъ трансцендентныхъ q-го и нисшихъ классовъ мы, какъ въ §§ 25 для случая $P = 0$ убѣждаемся что уравненіе (245) удовлетворяетъ также

$$Y_\mu = \pi(\theta_\mu) \qquad (252_\mu)$$

$y = Y_\mu - Y$ должна быть рѣшеніемъ приведеннаго уравненія, поэтому

$$Y_\mu = Y + \sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i \qquad (253)$$

гдѣ c_i постоянныя.

Положимъ $\theta = \zeta$.

Такъ какъ согласно § 25

$$y=\sum_{i=1}^{i=n} c_i y_i=\sum_{j=0}^{j=s-1} C_j \zeta^j \tag{254}$$

$$s \leqq n$$

гдѣ C_j не зависятъ отъ ζ (въ частномъ случаѣ если y совсѣмъ не зависитъ отъ ζ $C_j=0$ $j \geqslant 1$), то

уравненіе (253) даетъ

$$\pi(\zeta+\mu)=\pi(\zeta)+\sum_{j=0}^{j=s-1} C_j \zeta^j \tag{255}$$

Такимъ же образомъ имѣя въ виду результатъ § 26 (135)

$$y=\sum_{j=1}^{j=r} C_j \eta^{\alpha_j} \tag{256}$$

гдѣ C_j не зависитъ отъ η, α_j раціональныя числа вслѣдствіе чего

$$\pi(\eta\mu)=\pi(\eta)+\sum_{j=1}^{j=r} C_j \eta^{\alpha_j} \tag{257}$$

Дифференцируя уравненіе (255), очевидно тожественное относительно ζ (§ 5) по ζ, имѣемъ:

$$\frac{\partial^s \pi(\zeta+\mu)}{\partial \zeta^s}=\frac{\partial^s \pi(\zeta)}{\partial \zeta^s} \tag{258}$$

Замѣчая же что

$$\frac{\partial^s \pi(\zeta+\mu)}{\partial \zeta^s}=\frac{\partial^s \pi(\zeta+\mu)}{\partial \mu^s}=\frac{\partial^s \pi(\zeta+\mu)}{\partial(\zeta+\mu)^s} \tag{259}$$

имѣемъ

$$\frac{\partial^s \pi(\zeta+\mu)}{\partial \mu^s}=\frac{\partial^s \pi(\zeta)}{\partial \zeta^s}$$

Полагая $\zeta=0$ получаемъ

$$\frac{\partial^s \pi(\mu)}{\partial \mu^s} = \left[\frac{\partial^s \pi(\zeta)}{\partial \zeta^s}\right]_{\zeta=0} = N$$

гдѣ N не зависитъ отъ μ.

Мѣняя обозначеніе (т. е. μ на ζ) имѣемъ

$$\frac{\partial^s \pi(\zeta)}{\partial \zeta^s} = N \qquad (260)$$

гдѣ N не зависитъ отъ ζ

Уравненіе (260) по интегрированіи даетъ

$$\pi(\zeta) = \sum_{j=o}^{j=s} D_j \zeta^j \qquad (261),$$

$$s \leqq n$$

гдѣ D_j не зависитъ отъ ζ

Если $s=1$ т. е. y не зависитъ отъ ζ, то

$$\pi(\zeta) = D_0 + D_1 \zeta \qquad (261)_1$$

Такъ какъ форма (254) имѣетъ мѣсто, какъ для случая общаго, такъ и для случая частнаго рѣшенія, выражаемаго въ конечномъ видѣ, то и получаемая форма (261) годится для обоихъ этихъ случаевъ.

Всякое рѣшеніе уравненія

$$Y^{(n)} + p_1 Y^{(n-1)} + \ldots . p_{n-1} Y' + p_n Y = P \qquad (245)$$

съ алгебраическими коэффиціентами p_i и съ алгебраическимъ послѣднимъ членомъ, выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью [ab] [elm] трансцендентной q-го класса, представляетъ линейную функцію отъ трансцендентной I типа не входящей въ рѣшенія у приведеннаго уравненія:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots . p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (117),$$

тоже выражаемыя въ конечномъ видѣ и цѣлую функцію степени $s \leqq n$ отъ трансцендентной I типа, входящей въ y.

§ 42. *Выраженіе черезъ трансцендентныя II типа.*

Переходя теперь къ случаю трансцендентныхъ II типа т. е. къ случаю уравненіи (257) и диффоренцируя это послѣдне по η и по μ получаемъ

$$\frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial\eta}=\frac{\partial\pi(\eta)}{\partial\eta}+\sum_{j=0}^{j=r}C_j\alpha_j\eta^{\alpha_j-1} \tag{262}$$

$$\frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial\mu}=\sum_{j=0}^{j=r}\frac{\partial C_j}{\partial\mu}\eta^{\alpha_j} \tag{263}$$

Замѣчая, что

$$\left.\begin{aligned}\frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial\eta}&=\frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial(\eta\mu)}\mu\\ \frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial\mu}&=\frac{\partial\pi(\eta\mu)}{\partial(\eta\mu)}\eta\end{aligned}\right\} \tag{264}$$

получаемъ изъ уравненій (262) (263)

$$\eta\frac{\partial\pi(\eta)}{\partial\eta}=\sum_{j=0}^{j=r}E_j\eta^{\alpha_j}, \tag{265}$$

гдѣ

$$E_j=\frac{\partial C_j}{\partial\mu}\mu-C_j\alpha_j$$

Изъ уравненія (265) получаемъ (если получить $\alpha_0=0$ причемъ возможно, что $E_0=0$)

$$\frac{\partial\pi(\eta)}{\partial\eta}=\frac{E_0}{\eta}+\sum_{j=1}^{j=r}E_j\eta^{\alpha_j-1}$$

Интегрируя имѣемъ

$$\pi(\eta)=E_0\,lg\eta+\sum_{j=1}^{j=r}F_j\eta^{\alpha_j}$$

гдѣ

$$F_j = \frac{E_j}{\alpha_j}$$

Если $q > 1$, то η не содержится въ y и тогда

$$E_1 = E_2 = \ldots E_r = 0$$

$$\pi(\eta) = E_0 \, lg\eta$$

чего быть не можетъ, такъ какъ $\pi(\eta)$ алгебраическая функція

При $q = 1$ необходимо, чтобы $E_0 = 0$ (иначе $\pi(\eta)$ не была бы алгебр.) и

$$\pi(\eta) = \sum_{j=1}^{j=r} F_j \, \eta^{\alpha_j} \tag{266}$$

Рѣшеніе неоднороднаго линейнаго уравненія (245) выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью $[ab]$ и $[elm]$ трансцендентной q-го класса при $q > 1$ не содержитъ основныхъ трансцендентныхъ q-го класса и II типа, при $q = 1$ она представляетъ линейную функцію раціональныхъ степеней тѣхъ трансцендентныхъ II типа, которыя входятъ въ рѣшенія y приведеннаго уравненія и совсѣмъ не содержитъ тѣхъ, которыя не входятъ въ y.

§ 43. *Выраженіе черезъ совокупность трансцендентныхъ обоихъ типовъ.*

Изъ полученныхъ нами результатовъ (261) (266) §§ 41, 42 разсужденіями аналогичными изложеннымъ въ § 28 убѣждаемся, что въ случаѣ

$$q > 1$$

при основ. тр. $[ab]$

$$Y = \sum P \left[\underline{ab}^{(q)}_1\right]^{\pi_1} \left[\underline{ab}^{(q)}_2\right]^{\pi_2} \ldots \left[\underline{ab}\right]^{(q)}_p\Big]^{\pi_p} \tag{267}$$

при $[elm]$

$$y = \sum P\left[lg_1^{(q)}\right]^{\pi_1}\left[lg_2^{(q)}\right]^{\pi_2}\ldots\left[lg_p^{(p)}\right]^{\pi_p} \tag{268}$$

причемъ P трансцендентная нисшаго класса

$$\pi_i = 0 \text{ или } 1$$

Когда же $q = 1$

при $[ab]$

$$y = \sum [alg]\left[\overline{ab}_1^{(1)}\right]^{\mu_1}\left[\overline{ab}_2^{(1)}\right]^{\mu_2}\ldots\left[\overline{ab}_r^{(1)}\right]^{\mu_r}\left[\underline{ab}_1^{(1)}\right]^{\pi_1}\ldots\left[\underline{ab}_s^{(1)}\right]^{\pi_s} \tag{269}$$

при $[elm]$

$$y = \sum [alg]\left[ex^{(1)}\right]\left[dg_1^{(1)}\right]^{\mu_1}\ldots\left[dg_r^{(1)}\right]^{\mu_r}\left[lg_1^{(1)}\right]^{\pi_1}\ldots\left[lg_s^{(1)}\right]^{\pi_s} \tag{270}$$

причемъ предполагается, что наиболѣе общее рѣшеніе y приведеннаго уравненія выражается формулами (230) и (231) § 37.

$$\pi_i = \nu_i + 1 \quad i \leqq p$$

$$\pi_i = 0 \text{ или } 1 \quad i > p.$$

b) Выраженіе черезъ нисшія трансцендентныя.

§ 44. *Доказательство того, что рѣшеніе выражаемое въ конечномъ видѣ трансцендентная перваго класса.*

Мы теперь докажемъ, что, какъ въ случаѣ однороднаго линейнаго уравненія, рѣшеніе *неоднороднаго линейнаго уравненія (245) выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью основныхъ трансцендентныхъ* $[ab]$ *и* $[elm]$ *представляетъ трансцендентную перваго класса.*

Прежде всего замѣтимъ, что, если

$$y = \pi(\zeta) \tag{271}$$

представляетъ рѣшеніе уравненія (245), то

$$y_j = \frac{\partial^j \pi(\zeta)}{\partial \zeta^j} \tag{272}$$

будутъ рѣшеніями приведеннаго уравненія (117) Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ беремъ рѣшеніе типа (252_μ) вытекающее изъ (271):

$$Y_\mu = \pi(\zeta + \mu) \tag{271_μ}$$

Дифференцируя уравненіе:

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-1}\pi^{(i)}(\zeta+\mu) = P \tag{273}$$

по μ j-разъ получаемъ

$$\frac{\partial^j \pi(\zeta+\mu)}{\partial \mu^j} + \sum_{i=1}^{i=n} p_{n-i}\frac{\partial^j \pi^{(i)}(\zeta+\mu)}{\partial \mu^j} = 0,$$

откуда, какъ это было сдѣлано въ § 25, выводимъ, что функціи (272) представляютъ рѣшенія ур. (117).

Совершенно такимъ же образомъ убѣждаемся, что, если

$$Y = \pi(\eta) \tag{274}$$

рѣшеніе уравненія (245) то

$$Y_\mu = \eta^j \frac{\partial^j \pi(\eta)}{\partial \eta^j} \tag{275}$$

будутъ рѣшеніемъ (117) (271) (272).

Полагая въ выраженіяхъ (271) (272)

$$\zeta_i = [\underline{ab}^{(\varphi)}] \quad i > p$$

т. е. трансц. не входящей въ y мы будемъ имѣть, что

$$\frac{\partial \pi(\zeta_i)}{\partial \zeta_i} = C_i$$

не зависитъ отъ ζ_i, какъ рѣшеніе приведеннаго уравненія.

$$Y = \pi(\zeta_i) = C^{(1)} + C_i\zeta_i$$

гдѣ $C^{(1)}$ также не зависитъ отъ ζ_i.

Полагая

$$Y = \pi(\zeta_2)$$

находимъ что

$$\frac{\partial\pi(\zeta_2)}{\partial\zeta_2} = \frac{\partial C^{(1)}}{\partial\zeta_2} = C_2$$

не зависитъ отъ ζ_i и $C_2 = C^{(2)} + C_2\zeta_2$. Продолженіе такимъ образомъ получаемъ

$$Y = C_0 + \sum C_i\zeta_i \qquad (276)$$

Y въ видѣ линейной функціи отъ ζ_i, коэффиціенты которой C_0, C_i не зависятъ отъ ζ_i причемъ C_i представляютъ рѣшенія приведеннаго уравненіи (117) такъ что

$$C_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\, C_i^{(j)} = 0 \qquad (277)$$

Предположимъ, что классъ трансцендентной $Y: q > 1$

Тогда

$$\zeta_i = \int F_i[\alpha_i(\theta), \beta_i(\theta)]\, d\alpha_i(\theta) \qquad (270),$$

гдѣ $\alpha_i(\theta), \beta_i(\theta)$ алгебраическія функціи отъ основной трансцендентной $\overline{q-1}$-го класса θ и другихъ трансцендентныхъ того же или нисшаго класса области трансцендентныхъ (θ), въ которой построено y.

Подставляя выраженіе y въ уравненіе

$$Y^{(n)} + p_1 Y^{(n-1)} + \ldots p_{n-1} Y' + p_n Y = P \qquad (205)$$

получаемъ

$$\sum_{i=1}^{i=k} A_i\zeta_i + \sum_{i=1}^{i=k} \Omega_i(C_i, C_i' \ldots C_i^{(n-1)}, \alpha_i'(\theta), \alpha_i''(\theta) \ldots \alpha_i^{(n-1)}(\theta)) = P \quad (278),$$

гдѣ

$$A_i = C_i^{(n)} + \sum_{i=0}^{i=n-1} p_{n-j}\, C_i^{(j)}$$

и гдѣ Ω_i алгебраическія функціи величинъ заключенныхъ въ скобки

На основаніи ур. (277) уравненіе (278) приводится къ

$$\sum_{i=1}^{i=k} \Omega_i\,(C_i, C_i' \ldots . C_i^{(n-1)}, \alpha_i'(\theta), \alpha_i''(\theta) \ldots \alpha_i^{(n-1)}(\theta)) = P \qquad (279)$$

C_i какъ трансцендентная I-го класса, алгебраическая функція θ (если $q-1=1$) или совершенно не содержитъ $\theta\,(q-1>1)$, $C'_i \ldots C_i^{(n-1)}$, $\alpha'_i(\theta) \ldots \alpha_i^{(n-1)}(\theta)$ должны быть тоже алгебраическими функціями θ (§ 7)

Уравненіе (279) принимаетъ форму

$$H(\theta) = 0 \qquad (280)$$

уравненія алгебраическаго θ и потому (§ 7) имѣютъ мѣсто по замѣнѣ θ на θ_μ.

Подобная замѣна возможна и въ равносильномъ ему уравненіи (279), что даетъ

$$\sum_{i=1}^{i=k} \Omega_i\,[C_i(\theta_\mu), C'_i(\theta_\mu) \ldots C_i^{(n-1)}(\theta_\mu), \alpha_i(\theta_\mu), \alpha'_i(\theta_\mu) \ldots \alpha_i^{(n-1)}(\theta_\mu)] = P \qquad (279_\mu)$$

Уравненіе (277) при рѣшеніи

$$C_i = C_i(\theta)$$

имѣетъ еще рѣшеніе

$$C_i = C_i(\theta_\mu)$$

и потому

$$A_i(\theta_\mu) = C_i^{(n)}(\theta_\mu) + \sum_{i=0}^{i=n-1} p_{n-j}\, C_i^{(j)}(\theta_\mu) = 0 \qquad (277_\mu)$$

Прибавляя къ лѣвой части уравненія (279_μ) сумму

$$\sum_{i=1}^{i=n} A_i(\theta_\mu)\,\zeta_i(\theta_\mu),$$

гдѣ

$$\zeta_i(\theta_\mu) = \int F_i[\alpha_i(\theta_\mu), \beta_i(\theta_\mu)]\, d\alpha_i(\theta_\mu) \tag{220_μ}$$

убѣждаемся, что уравненіе (245) вмѣстѣ съ рѣшеніемъ (276) имѣетъ еще рѣшеніе

$$Y_\mu = C_0(\theta_\mu) + \sum_{i=1}^{i=n} C_i(\theta_\mu)\,\zeta_i(\theta_\mu) \tag{276_μ}$$

или если обозначить черезъ $\pi(\theta)$ трансцендентную перваго класса отъ θ, можно сказать, что уравненіе (245) вмѣстѣ съ рѣшеніемъ

$$Y = \pi(\theta) \tag{280}$$

имѣетъ еще рѣшеніе

$$Y_\mu = \pi(\theta_\mu) \tag{280_μ}$$

Изъ рѣшеній (270) и (280_μ) выводимъ рѣшенія приведеннаго уравненія (117)
при $\theta = \zeta$

$$\frac{\partial\,\pi(\zeta)}{\partial\zeta}$$

При $\theta = \eta$

$$\eta\,\frac{\partial\,\pi(\eta)}{\partial\eta}$$

причемъ въ первомъ случаѣ (см. ур. 254, 256)

$$\frac{\partial\,\pi(\zeta)}{\partial\zeta} = \sum_{j=0}^{j=s-1} D_j\,\zeta^j \tag{281}$$

во второмъ

$$\eta\,\frac{\partial\pi(\eta)}{\partial\eta} = \sum_{j=0}^{j=r} D_j\,\eta^{\alpha_j} \tag{282}$$

гдѣ D_j алгебраическія функціи

Уравненіе (281) трансцендентное относительно ζ_1 но легко видѣть, что оно равносильно алгебраическому и потому имѣетъ мѣсто при всякихъ значеніяхъ ζ.

Въ самомъ дѣлѣ ур. (261) можно переписать въ слѣдующемъ видѣ

$$\frac{\partial C_0}{\partial\zeta}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial C_i}{\partial\zeta}\zeta_i+\sum_{i=1}^{i=k}C_i\frac{\partial\zeta_i}{\partial\zeta}=\sum_{j=0}^{j=s-1}D_j\zeta^j \tag{283}$$

Въ виду приготовленности y это уравненіе тождественно относительно ζ_i, поэтому

$$\frac{\partial C_i}{\partial\zeta}=0 \tag{284}$$

Затѣмъ по (220)

$$\frac{\partial\zeta_i}{\partial\zeta}=F[\alpha_i(\zeta),\beta_i(\zeta)]\frac{\partial\alpha_i(\zeta)}{\partial\zeta}=\psi_i(\zeta)$$

$$\frac{\partial C_0}{\partial\zeta}=\frac{\partial C_0(\zeta)}{\partial\zeta}=\phi_0(\zeta)$$

алгебраическія функціи отъ ζ, такъ что уравненіе (283) равносильно слѣдующему

$$\phi_0(\zeta)+\sum_{i=1}^{i=k}C_i\psi_i(\zeta)=0 \tag{285}$$

алгебраическому относительно ζ.

Точно такимъ же образомъ докажемъ вѣрность уравненія (282) для всякихъ значеній η и попутно докажемъ, что

$$\frac{\partial C_i}{\partial\eta}=0$$

Интегрированіе же уравненій (281) и (282) даетъ

$$\pi(\zeta)=D_0+\sum_{j=1}^{j=s}D_j\zeta^j$$

$$\pi(\eta) = F_0 \, lg\eta + \sum_{j=1}^{j=r} F_j \eta^{\alpha_j}$$

гдѣ F_0, F_i не содержатъ ζ, η

Полученныя выраженія на основаніи того, что

$$lg\eta = lg[\overline{ab}^{(q-1)}] = [\underline{ab}^{(q-1)}]$$

не содержатъ уже трансцендентныхъ q-го класса, въ которыя входятъ ζ_i, η, иначе говоря, y не является, противно условію, приготовленнымъ. Такимъ образомъ ζ_i не можетъ быть трансцендентной $q > 1$ класса.

Изъ уравненіи (284) и (276) вытекаетъ весьма важное для послѣдующаго свойство y:

Коэффиціенты при основныхъ трансцендентныхъ I типа ζ_i входящихъ въ y_1, но не входящихъ въ y должны быть алгебраическими функціями отъ x.

Въ самомъ дѣлѣ, C_i не завися ни отъ ζ, ни отъ η, должна приводиться къ алгебраической функціи отъ x

На основаніи всего доказаннаго въ настоящемъ параграфѣ формы (267) и (268) должны быть отброшены формы же (269) и (270) слѣдующимъ образомъ упрощаются:

$$Y = \sum [alg] [\overline{ab}^{(1)}_1]^{\mu_1} \dots [\overline{ab}^{(1)}_r]^{\mu_r} [\underline{ab}^{(1)}_1]^{\pi_1} \dots [\underline{ab}^{(1)}_p]^{\pi_p} +$$

$$+ [alg_0] + \sum_{i=1}^{i=k} [alg_i] [\underline{AB}^{(1)}_i] \qquad (287)$$

если положить

$$[\underline{AB}^{(1)}_i] = [\underline{ab}^{(1)}_{p+i}]$$

$$Y = \sum [alg] [ex^{(1)}] [dg^{(1)}_1]^{\mu_1} \dots [dg^{(1)}_r]^{\mu_r} [lg^{(1)}_1]^{\pi_1} \dots [lg^{(1)}_p]^{\pi_p}$$

$$+ [alg_0] + \sum_{k=1}^{i=k} [alg_1] [LG^{(1)}_i] \qquad (288)$$

Въ виду того, что

$$\frac{\partial Y}{\partial [\overline{ab}_i^{(1)}]} \; [\overline{ab}_i^{(1)}] \; \frac{\partial Y}{\partial [\overline{ab}_i^{(1)}]}$$

рѣшенія приведеннаго уравненія (117), а потому формы:

$$Y = \sum [alg] [\overline{ab}^{(1)}]^{\mu_1} .. [\overline{ab}_r^{(1)}]^{\mu_r} [\underline{ab}_1^{(1)}]^{\nu_1} .. [\underline{ab}_p^{(1)}]^{\nu_p}$$

π_i можетъ имѣть только значенія ν_i и $\nu_i + 1$ причемъ при $\pi_i - \nu_i + 1$, $\pi_j = \nu_j$ $j \gtrless i$

Примѣры:

I) Уравненіе

$$x^2 (x+1)^2 Y'' - (2x+1)(x+1) x Y' + (2x+1)(x+1) Y = x^2 (1-x) \qquad (289)$$

имѣетъ общимъ рѣшеніемъ

$$Y = C_1 [alg] [lg^{(1)}] + [alg_0] + [alg_1] [LG] =$$

$$= C_1 x lg x + x^2 + C_2 x + x lg (x+1) \qquad (290)$$

Общее же рѣшеніе приведеннаго уравненія

$$y = C_1 [alg] [lg^{(1)}] + [alg_0] = C_1 x lg x + x^2 + C_2 x$$

II) Уравненіе

$$4x^2 (x+1) Y'' + 8x^2 Y' + (x+1) Y = 9x^2 \qquad (291)$$

имѣетъ общее рѣшеніе

$$Y = [alg] + C_1 [alg_0] + C_2 [alg_0] [lg^{(1)}] =$$

$$= \frac{\sqrt{x}}{x-1} [x\sqrt{x} + C_1 + C_2 lg x] \qquad (292)$$

§ 45. *Частное рѣшеніе простѣйшаго типа линейнаго неоднороднаго уравненія.*

Замѣчая, что по обобщеніи формулы Тейлора

$$Y=[Y]_0+\sum_i\left[\frac{\partial Y}{\partial\zeta}\right]_0\zeta_i+\frac{1}{1.2}\sum_{i_1,i_2}\left[\frac{\partial^2 Y}{\partial\zeta_{i_1}\partial\zeta_{i_2}}\right]_0\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}$$

$$+\frac{1}{1.2.3}\sum_{i_1,i_2,i_3}\left[\frac{\partial^3 Y}{\partial\zeta_{i_1}\partial\zeta_{i_2}\partial\zeta_{i_3}}\right]_0\zeta_{i_1}\zeta_{i_2}\zeta_{i_3}+\ldots.. \tag{293}$$

обозначая $[\,]_0$ значеніе при $\zeta_1=0\,\zeta_2=0\,\zeta_p=0$ Коэффиціентами въ разложеніи являются рѣшенія приведеннаго уравненія

По замѣнѣ ихъ каноническими выраженіями (196) получаемъ y въ формѣ

$$Y=\sum_{i=1}^{i=m}\eta_i\,Q_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)+Q_0(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p) \tag{294}$$

$$+[Y]_0$$

гдѣ

$$Q_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)\quad\text{и}\quad Q_0(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)$$

цѣлыя полиномы основныхъ трансцендентныхъ перваго типа съ алгебраическими коэффиціентами $[Y]_0$ на основаніи ур. (276) или (277) долженъ имѣть слѣдующій видъ

$$[Y]_0=H_0+\sum_{i=1}^{i=k}H_i Z_i \tag{295}$$

гдѣ H_0, H_i алгебраическія функціи отъ x,

$$Z_i=[\underline{AB}_i^{(1)}]$$

трансцендентная I-го типа, нѐ входящая въ y.

Мы докажемъ теперь, что

$$Y_0=[Y]_0+Q_0(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p) \tag{296}$$

частное рѣшеніе неоднороднаго линейнаго уравненія (245):

$$Y^{(n)}+p_1\,Y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1}\,Y'+p_n\,Y=P \tag{245}$$

Чтобы доказать это мы замѣняемъ въ этомъ уравненіи y выраженіемъ (294) что намъ даетъ

$$[Y_0^{(n)}+\sum_{g=0}^{g=n-1}p_{n-g}\,Y_0^{(g)}]+\sum_{i=1}^{i=m}[\omega_i^{(n)}+\sum_{g=0}^{g=n-1}p_{n-g}\,\omega_i^{(g)}]=P \qquad (297)$$

гдѣ для краткости положено

$$\omega_i=\underline{\eta_i}\,Q_i(\zeta_1,\zeta_2\,..\,\zeta_p) \qquad (298)$$

Дифференцируя послѣднее уравненіе по x имѣемъ

$$\omega'_i=\underline{\eta'_i}\,Q+\underline{\eta_i}\left[\frac{\partial Q}{\partial x}+\sum_{i=1}^{i=n}\frac{\partial Q}{\partial\zeta_i}\zeta'_i\right],$$

а такъ какъ

$$\underline{\eta'_i}=F_{i2}(x)\,\underline{\eta_i}\quad \zeta'_i=F_{i1}(x)$$

гдѣ F_{i1}, F_{i2} алгебраическія функціи отъ x, то

$$\omega'_i=\underline{\eta_i}\left[F_{i2}(x)+Q+\frac{\partial Q}{\partial x}+\sum_{i=1}^{i=p}\frac{\partial Q}{\partial\zeta_i}F_{i1}(x)\right]=$$

$$=\underline{\eta_i}\,Q_{i1}(\zeta_1,\zeta_2\,..\,\zeta_p) \qquad (298_1)$$

гдѣ Q_{i1}, какъ Q_i алгебраическая функція ζ_i

Продолжая такимъ образомъ дальше получаемъ

$$\omega_i^{(g)}=\underline{\eta_i}\,Q_{ig}(\zeta_1,\zeta_2\,..\,\zeta_p) \qquad (298_g)$$

Замѣчаемъ также, что на основаніи ур. (295)

$$[Y_0]'=H_0'+\sum_{j=1}^{j=k}H_j'\,Z_j+\sum_{j=1}^{j=k}H_j\,Z_j'$$

или замѣчая, что Z_j алгебраическая функція отъ x:

$$[Y_0]' = H_{01} + \sum_{j=1}^{j=k} H_{j1} Z_j \qquad (295_1)$$

и такимъ же образомъ:

$$[Y_0]^{(g)} = H_{0g} + \sum_{j=1}^{j=k} H_{jg} Z_g \qquad (295_g),$$

гдѣ H_{0g}, H_{jg} алгебраическія функціи

На основаніи ур. (298_g) и (295_g) мы можемъ привести уравненіе (297) къ виду:

$$I_0 + \sum_{j=1}^{j=k} I_j Z_j + \sum_{i=0}^{i=m} \underline{\eta_i} R_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) + R_0(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = 0 \qquad (299)$$

гдѣ I_0, I_j алгебраическія функціи, а именно

$$I_j = H_{nj} + \sum_{h=0}^{h=n-1} p_{n-h} H_{hj} \qquad (300)$$

а

$$R_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = Q_{in}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) + \sum_{h=0}^{h=n-1} p_{n-h} Q_{ih}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) \qquad (301)$$

представляетъ алгебраическую функцію $(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$

Но уравненіе (299) остается въ силѣ по замѣнѣ всѣхъ трансцендентныхъ $\underline{\eta_i}(i > 0)$ нулями т. е. мы имѣемъ

$$I_0 + \sum_{j=1}^{j=q} I_j Z_j + R_0(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = 0$$

или въ силу уравненіи (300) (295_g) и (296)

$$Y_0^{(n)} + \sum_{g=0}^{g=n-1} p_{n-g} Y_0^{(g)} = 0$$

Такимъ образомъ, *если неоднородное линейное уравненіе*

$$Y^{(n)}+p_1\,Y^{(n-1)}+\ldots p_{n-1}\,Y'+p_n\,Y=P \tag{245}$$

съ алгебраическими коэффиціентами и съ алгебраическимъ послѣднимъ членомъ P *имѣетъ рѣшеніе, выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью* $[ab]$ *и* $[elm]$, *то оно имѣетъ простѣйшее частное рѣшеніе въ случаѣ трансц. ф.* $[ab]$

$$Y_0=\sum[alg]\,[\underline{ab}_1^{(1)}]^{\pi_1}[\underline{ab}_2^{(1)}]^{\pi_2}\ldots[\underline{ab}_p^{(1)}]^{\pi_p}+$$

$$+[alg_0]+\sum_{i=1}^{i=k}[alg_i]\,[\underline{AB}_i^{(1)}] \tag{302}$$

въ случаѣ $[elm]$

$$Y_0=\sum[alg]\,[ex^{(1)}]\,[lg_1^{(1)}]^{\pi_1}\ldots[lg_p^{(1)}]^{\pi_p}$$

$$+[alg_0]+\sum_{i=1}^{i=k}[alg_j]\,[\underline{LG}_i^{(1)}] \tag{303}$$

Раскрывая значеніе символовъ, послѣднюю формулу можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$У_0=\sum\rho\,[lg\vartheta_1]^{\pi_1}[lg\vartheta_2]^{\pi_2}\ldots[lg\vartheta_p]^{\pi_p}+$$

$$+\Theta+\sum_{i=1}^{i=k}\phi_i\,lg\,\Theta_j \tag{304}$$

гдѣ $\rho,\vartheta_i,\Theta,\Theta_i$ алгебраическія функціи отъ x

Въ приведенныхъ выше въ § 44 примѣрахъ (289) (291)

$$Y_0=xlg\,(x+1)$$

$$Y_0=\frac{x^2}{x+1}$$

Такъ какъ

$$\frac{\partial Y_0}{\partial [\underline{AB}_i^{(1)}]}$$

представляетъ рѣшеніе приведеннаго уравненія:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots . p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (117)$$

то $[alg_i]$ въ формѣ (302) и (303) должны быть алгебраическими рѣшеніями этого уравненія.

Отсюда слѣдуетъ, что

1) *Если приведенное уравненіе (117) не имѣетъ алгебраическихъ рѣшеній, форма простѣйшаго рѣшенія (302) выражаемаго въ конечномъ видѣ должна быть слѣдующая*

$$Y_0 = \sum [alg]\,[\underline{ab}_1^{(1)}]^{\pi_1}[\underline{ab}_2^{(1)}]^{\pi_2} \ldots [\underline{ab}_p^{(1)}]^{\pi_p} + [alg_0] \qquad (305)$$

2) *Если приведенное уравненіе имѣетъ только такія алгебраическія рѣшенія, которыя сводятся къ постояннымъ, то*

$$Y_0 = \sum [alg]\,[\underline{ab}_1^{(1)}]^{\pi_1}[\underline{ab}_2^{(1)}]^{\pi_2} \ldots [\underline{ab}_p^{(1)}]^{\pi_p}$$

$$+ [alg] + \sum_{i=1}^{i=k} C_i [\underline{AB}_i^{(1)}] \qquad (306)$$

гдѣ C_i постоянному.

3) *При условіи, что въ y не входятъ основныя трансцендентныя перваго типа форма (302) приводится къ*

$$Y_0 = [alg] + \sum_{i=1}^{i=k} [alg_i]\,[\underline{AB}_i^{(1)}] \qquad (307)$$

Эта форма можетъ быть названа *формой Кенигсбергера*, такъ какъ рѣшенія этой формы были впервые изслѣдованы Кенигсбергеромъ.

4) *При наличности условій (2) и (3) форма (302) приводится къ формѣ Льювиля:*

$$Y_0 = [alg] + \sum_{i=1}^{i=k} C_i [\underline{AB}_i^{(1)}] \tag{808}$$

гдѣ C_i постоянныя.

5) *При наличности условіи (1) и (3)*

$$Y_0 = [alg_0] \tag{309}$$

т. е. простѣйшее рѣшеніе неоднороднаго уравненія алгебраическое.

Послѣдній случай имѣетъ мѣсто для хорошо извѣстнаго изъ элементарнаго курса дифференціальнаго уравненія:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = f(x) \tag{310}$$

гдѣ a_i постоянныя

$$f(x) = x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots b_{m-1} x + b_m$$

цѣлая функція.

Какъ извѣстно

$$Y_0 = x^k [x^m + b_1 x^{m-1} + \ldots b_{m-1} x + b_m] \tag{311}$$

гдѣ k вообще равно нулю при

$$a_n = a_{n-1} = \ldots a_{n-h-1} = 0$$

$$k = h$$

B) Послѣдній членъ трансцендентный.

а) Уравненія съ рѣшеніемъ выражаемымъ трансцендентной перваго класса.

§ 46. Выраженіе черезъ высшія трансцендентныя.

Разсмотрѣнное нами уравненіе (245) съ алгебраическимъ послѣднимъ членомъ P представляетъ частный случай болѣе общаго типа:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots y' + p_n y = P \tag{312}$$

съ алгебраическими коэффиціентами p_i и съ послѣднимъ членомъ P_1 равнымъ трансцендентной 1-го класса причемъ того же вида, какой имѣетъ общее рѣшеніе приведеннаго уравненія выражаемое въ конечномъ видѣ въ случаѣ $[ab]$

$$P = \sum [\overline{alg}] [\overline{ab}_1^{(1)}]^{m_1} \cdots [\overline{ab}_\rho^{(1)}]^{m_\rho} [\underline{ab}_1^{(1)}]^{n_1} [\underline{ab}_2^{(1)}]^{n_2} \cdots [\underline{ab}_\pi^{(1)}]^{n_\pi} \tag{313}$$

(черту ставимъ для отличія отъ подобныхъ же функцій входящихъ въ y) въ случаѣ $[elm]$

$$P = \sum [\overline{alg}] [\overline{ex}^{(1)}] [\overline{dg}_1^{(1)}]^{m_1} \cdots [\overline{dg}_\rho^{(1)}]^{m_\rho} [\underline{lg}_1^{(1)}]^{n_1} \cdots [\underline{lg}_\pi^{(1)}]^{n_\pi} \tag{314}$$

Мы покажемъ, что при послѣднемъ членѣ P этого типа неоднородное уравненіе (312) имѣетъ своимъ рѣшеніемъ, выражаемымъ въ конечномъ видѣ трансцендентную перваго класса.

Ниже мы увидимъ, что при другихъ P — трансцендентныхъ 1-го класса, это рѣшеніе вообще трансцендентная 2-го класса. Обозначая черезъ $(\overline{\theta})$ область основныхъ трансцендентныхъ: $[\overline{ab}]$ $[\underline{ab}]$, въ которой построенъ P мы можемъ предполагать область $(\overline{\theta})$ и слѣдовательно и выраженіе P приготовленными.

Всегда можно опредѣлить, приготовлено ли P?

Въ самомъ дѣлѣ намъ извѣстны простѣйшія уравненія между $[\underline{ab}^{(1)}]$ $[\overline{ab}^{(1)}]$ $[\overline{dg}]$ $[\underline{lg}]$, причемъ всегда можно конечнымъ числомъ алгебраическихъ операцій провѣрить, имѣютъ ли онѣ мѣсто (§§ 17, 18). Въ случаѣ же ихъ наличности можно P привести къ выраженію той же формы (§ 20), но уже удовлетворяющей условію приготовленности.

Теперь, предполагая, что уравненіе (312) имѣетъ рѣшеніе, выражаемое въ конечномъ видѣ, мы беремъ его *приготовленнымъ, но не относительно алгебраической, а относительно области трансцендентныхъ $\overline{\theta}$ (§ 23)*,

Возьмемъ сперва

$$\theta=\zeta=[\overline{ab}],\eta=[\overline{ab}]$$

основныя трансцендентныя, не входящія въ P и докажемъ, что, если

$$У=\pi(\theta) \tag{315}$$

гдѣ π алгебраическая функція θ и другихъ трансцендентныхъ q-го и нисшихъ классовъ представляетъ рѣшеніе уравненія (312), то

$$У=\pi(\theta_\mu) \tag{315_μ}$$

будетъ рѣшеніемъ того же уравненія.

Для того, чтобы убѣдиться въ этомъ слѣдуетъ только воспроизвести доказательство § 25 причемъ уравненіе (126) замѣняется слѣдующимъ:

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-i}\,\pi_i(\theta)=P \tag{316}$$

эти уравненія остаются въ силѣ какъ уравненіе (126) въ силѣ по замѣнѣ θ на θ_μ причемъ P не содержащее θ отъ этой замѣны не имѣется.

Мы имѣемъ сперва

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-i}\,\pi_i(\theta_\mu)=P \tag{316_μ}$$

затѣмъ

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-i}\,\pi^{(i)}(\theta_\mu)=P \tag{317}$$

откуда заключаемъ, что дѣйствительно съ рѣшеніемъ (315) еще имѣется рѣшеніе (315_μ) Совершенно иначе дѣло обстоитъ, когда

$$\theta=\zeta=[\underline{\underline{ab}}],\eta=[\overline{\overline{ab}}]$$

Тогда P уже зависитъ отъ θ:

$$P = P(\theta)$$

Замѣна θ на θ_μ приводитъ уравненіе (316) уже не къ (316_μ), а къ

$$\sum_{i=0}^{i=n} p_{n-i}\, \pi_i(\theta_\mu) = P(\theta_\mu) \qquad (\overline{316}_\mu)$$

Положимъ $\theta = \zeta$

Предполагая, что $\theta = \zeta$ входитъ въ P въ степени $\nu - 1$ диффеfренцируемъ послѣднее уравненіе ($\overline{316}_\mu$) ν разъ по μ.

Мы будемъ имѣть:

$$\frac{\partial^\nu \pi(\zeta+\mu)}{\partial \mu^\nu} + \sum_{j=1}^{j=n} p_{n-j} \frac{\partial^\nu \pi^{(j)}(\zeta+\mu)}{\partial \mu^\nu} = 0$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\frac{\partial^\nu \pi(\zeta+\mu)}{\partial(\zeta+\mu)^\nu}$$

и при $\mu = 0$

$$\frac{\partial^\nu \pi(\zeta)}{\partial \zeta^\nu}$$

будутъ рѣшеніями уравненія:

$$y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \dots p_{n-1} y' + p_n y = 0 \qquad (117)$$

Замѣчая что рѣшенія послѣдняго уравненія формы (124), заключаемъ, что

$$\frac{\partial^\nu \pi(\zeta)}{\partial \zeta^\nu} = \sum_{j=0}^{j=s-1} C_j \zeta^j$$

$$s \leqq n$$

откуда по интегрированіи имѣемъ

$$\pi(\zeta) = \sum_{j=0}^{j=s+\nu} H_j \zeta^j \qquad (318),$$

гдѣ H_j не зависитъ отъ ζ

Въ случаѣ $\theta = \eta$ точно такимъ же образомъ находимъ если предполагать, что m_i въ выраженіи (313) цѣлыя положительныя числа что при надлежаще выбраннымъ $[\overline{ab}]$ всегда возможно),

$$\frac{\partial^\nu \pi(\eta\mu)}{\partial\mu^\nu} + \sum_{j=1}^{j=n} p_{n-j} \frac{\partial^\nu \pi^{(j)}(\eta\mu)}{\partial\mu^\nu} = 0$$

если высшая степень η въ P есть $\eta^{\nu-1}$

Откуда заключаемъ, что

$$\eta^\nu \frac{\partial^\nu \pi(\eta)}{\partial\eta^\nu}$$

рѣшеніе ур. (117), такъ что

$$\eta^\nu \frac{\partial^\nu \pi(\eta)}{\partial\eta^\nu} = \sum_{j=0}^{j=r} C_j \eta^{\alpha_j}$$

откуда интегрируя имѣемъ

$$\pi(\eta) = \sum_{j=1}^{j=r} F_j \eta^{\alpha_j} + F(\eta) F_0 lg\eta + \sum_{j=1}^{j=\nu-1} F_{-j} \eta^j$$

при этомъ цѣлая функція отъ η $F(\eta) = 0$ ибо иначе $\pi(\eta)$ не было бы алгебраическимъ, итакъ

$$\pi(\eta) = \sum F_j \eta^{\beta_j}$$

гдѣ F_j не зависятъ отъ η.

§ 47. *Выраженіе через низшія трансцендентныя.*

Возпроизводя доказательства § 44 доказываемъ что

$$Y = C_0 + \sum_{i=1}^{i=k} C_i \zeta_i \tag{379}$$

гдѣ ζ_i не входятъ ни въ y, ни въ P. При этомъ C_0, C_i не зависятъ отъ ζ_i и C_i представляютъ рѣшенія приведеннаго уравненія совершенно также, какъ въ § 44 доказываемъ также, что

1) въ ζ_i не входятъ трансцендентныя $\overline{q-1}$-го класса, не входящяя въ P

2) C_i зависятъ только отъ тѣхъ трансцендентныхъ, которыя входя въ y, входятъ также въ P.

Для того, чтобы доказать, что y, какъ и въ случаѣ алгебраическаго P трансцендентная 1-го класса остается доказать, что въ ζ_i не входятъ трансцендентныя $\overline{q-1}$-го класса, входящая въ P.

Для этого замѣчаемъ прежде всего, полагая $\theta=\zeta$, что (если степень P относительно $\zeta\ldots\nu-1$)

$$Y_\nu=\frac{\partial^\nu Y}{\partial\zeta^\nu}=\frac{\partial^\nu C_0}{\partial\zeta^\nu}+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial^\nu(C_i\zeta_i)}{\partial\zeta^\nu}=C_{0\nu}+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{\partial^\nu C_i}{\partial\zeta^\nu}\zeta_i$$

гдѣ $C_{0\nu}$, $\frac{\partial^\nu C_i}{\partial\zeta^\nu}$ алгебраическія функціи отъ ζ удовлетворяютъ однородному линейному уравненію (117)

Такъ какъ рѣшеніе послѣдняго не содержитъ ζ_i то

$$\frac{\partial^\nu C_i}{\partial\zeta^\nu}=0$$

и когда ζ не входитъ въ P

$$\frac{\partial C_i}{\partial\zeta}=0,$$

откуда слѣдуетъ, что если ζ не входитъ въ P_1 то не входитъ въ C_i, если же входитъ въ P въ степени $\nu-1$, то

$$C_i=\sum_{j=0}^{j=\nu-1}C_{ji}\zeta^j$$

т. е. въ C_i входитъ въ той же степени. Точно такимъ же образомъ отмѣчаемъ еще рѣшеніе приведеннаго уравненія:

$$Y_\nu = \eta^\nu \frac{\partial^\nu Y}{\partial \eta^\nu} = C_{0\nu} + \sum_{i=1}^{i=k} \eta^\nu \frac{\partial^\nu C_i}{\partial \eta^\nu} \zeta_i$$

откуда заключаемъ, что

$$\frac{\partial^\nu C_i}{\partial \eta^\nu} = 0$$

и дѣлаемъ тоже заключеніе относительно η, какое было сдѣлано относительно ζ. Въ результатѣ, для случая трансцендентнаго послѣдняго члена типа (313) форма (287) должна быть замѣнена слѣдующей (въ которую для краткости вводимъ знаки произведеній):

$$Y = \sum [alg] \prod_{i=1}^{i=r} \left[\overline{ab}_i^{(1)}\right]^{\mu_i} \prod_{i=1}^{i=\rho} \left[\overline{\overline{ab}}_i^{(1)}\right]^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1}^{i=p} \left[\underline{ab}_i^{(1)}\right]^{\pi_i} \prod_{i=1}^{i=\pi} \left[\underline{\underline{ab}}_i^{(1)}\right]^{\bar{\pi}_i} +$$

$$+ \sum [alg_0] \prod_{i=1}^{i=\rho} \left[\overline{\overline{ab}}_i^{(1)}\right]^{\bar{\mu}_{i0}} \prod_{i=1}^{i=\pi} \left[\underline{\underline{ab}}_i^{(1)}\right]^{\bar{\pi}_{i0}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=k} \sum_j [alg_i] \prod_{i=1}^{i=\rho} \left[\overline{\overline{ab}}_i^{(1)}\right]^{\bar{\mu}_{ij}} \prod_{i=1}^{i=\pi} \left[\underline{\underline{ab}}_i^{(1)}\right]^{\bar{\pi}_{ij}} \left[AB_i^{(1)}\right] \qquad (320)$$

$\mu_1, \bar{\mu}_i, \bar{\mu}_{i0}, \bar{\mu}_{ij}$ раціональныя числа, $\pi_i, \bar{\pi}_i, \bar{\pi}_{i0}, \bar{\pi}_{ij}$ цѣлыя положительныя числа, при этомъ если рѣшеніе приведеннаго уравненія

$$y = \sum [alg] \left[\overline{ab}_j^{(1)}\right]^{\mu_1} \dots \left[\overline{ab}_r^{(1)}\right]^{\mu_r} \left[\underline{ab}_1^{(1)}\right]^{\nu_1} \dots \left[\underline{ab}_p^{(1)}\right]^{\nu_p}$$

π_i можетъ имѣть только значенія ν_i и $\nu_i + 1$ причемъ при $\pi_i = \nu_i + 1$ $\pi_j = \nu_j$ $j \gtrless i$ $\bar{\pi}_i$ и $\bar{\pi}_{i0}$ можетъ имѣть значенія ν_i, $\nu_i + 1 \dots \nu_i + n_i + 1$ $\bar{\bar{\pi}}_{ij}$ можетъ равняться только $0, 1, 2 \dots n_i$ Не представляетъ затѣмъ затрудненій пользуясь методами § 45 доказать существованіе частныхъ рѣшеній простѣйшаго типа

$$Y_0 = \sum [alg] \prod_{i=1}^{i=\rho} \left[\overline{\overline{ab}}{}_i^{(1)}\right]^{\bar{\mu}_i} \prod_{i=1}^{i=\rho} \left[\underline{ab}_i^{(1)}\right]^{\pi_i} \prod_{i=1}^{i=\pi} \left[\underline{\underline{ab}}{}_i^{(1)}\right]^{\bar{\pi}_i} +$$

$$+ \sum [alg_0] \prod_{i=1}^{i=\rho} \left[\overline{\overline{ab}}{}_i^{(1)}\right]^{\bar{\mu}_{i0}} \prod_{i=1}^{i=\pi} \left[\underline{\underline{ab}}{}_i^{(1)}\right]^{\bar{\pi}_{i0}} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=k} \sum [alg_{0i}] \prod_{i=1}^{i=\rho} \left[\overline{\overline{ab}}{}_i^{(1)}\right]^{\bar{\mu}_{ij}} \prod_{i=1}^{i=\pi} \left[\underline{\underline{ab}}{}_i^{(1)}\right]^{\bar{\pi}_{ij}} \left[AB_i^{(1)}\right] \tag{321}$$

Отсюда могутъ быть выведены формы рѣшенія уравненія

$$y' = P$$

или формы интеграла

$$\int P\,dx$$

выражаемаго въ конечномъ видѣ, представляющія прямое обобщеніе формулъ Льювиля и Кенигсбергера.

Мы приведемъ только два обширнѣйшихъ типа интеграловъ, обнимающихъ хорошо извѣстныя типы интеграловъ встрѣчаемыхъ въ элементарныхъ курсахъ.

$$\int e^{ax} f(x)\,dx$$

$$\int f(x)\,lg\,\varphi(x)\,dx$$

$$\int e^{\omega} \mathcal{F} [\chi_1]^{\lambda_1} [\chi_2]^{\lambda_2} \ldots [\chi_m]^{\lambda_m} dx =$$

$$= e^{\omega} \vartheta [\chi_1]^{\lambda_1} [\chi_2]^{\lambda_2} \ldots [\chi_m]^{\lambda_m} + C \tag{322}$$

$\omega, \mathcal{F}, \chi_i, \theta$ алгебраическія функціи, λ_i ирраціональныя числа

$$\int F[lg\psi_1, lg\psi_2 \ldots lg\psi_n]\,dx = \mathcal{F}[lg\psi_1, lg\psi_2 \ldots lg\psi_n]$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=k} \chi_i\,lg\,\Theta_i \tag{323}$$

гдѣ ψ_i, χ_i, Θ_i алгебраическія функціи, F, $\mathcal{F}$ цѣлыя функціи $lg\psi_i$, причемъ степень $\mathcal{F}$ на единицу выше степени F.

Простѣйшими примѣрами уравненій типа (312) могутъ служить слѣдующія извѣстныя типы, разрѣшаемыхъ въ конечномъ видѣ уравненіи

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = e^{\alpha x}[\varphi(x) \sin\beta x + \psi(x) cs\,\beta x] \quad (324)$$

$\varphi(x), \psi(x)$ цѣлыя полиномы, a_i, α, β постоянныя, которыя по замѣнѣ тригонометрическихъ функцій показательными приводятся къ виду:

$$y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \ldots a_{n-1} y' + a_n y = e^{(\alpha+\beta i)x} \mathcal{F}(x) + e^{(\alpha-\beta i)x} \psi(x) \quad (325)$$

такъ что

$$P = [\overline{ex}_1^{(1)}][alg_1] + [\overline{ex}_2^{(2)}][alg_2]$$

Простѣйшее рѣшеніе (324) или (325)

$$Y_0 = e^{\alpha x}[A(x) \sin\beta x + B(x) cs\,\beta x]$$

гдѣ $A(x), B(x)$ полиномы т. е.

$$Y_0 = e^{(\alpha+\beta i)x} C(x) + e^{(\alpha-\beta i)x} D(x) = [\overline{ex}_1^{(1)}][alg_1] + [\overline{ex}_2^{(1)}][alg_2]$$

Разсматривая $[\overline{ex}_i^{(1)}]$ какъ частный случай $[\overline{ab}_i^{(1)}]$ имѣемъ

$$Y_0 = \sum_{i=1}^{i=2} [alg_i][\overline{\overline{ab}}_i^{(1)}]$$

это весьма частный случай формы (321).

b) Уравненія съ рѣшеніями, выражаемыми трансцендентными высшихъ классовъ.

§ 48. *Послѣдній членъ трансцендентная перваго класса.*

Въ случаѣ болѣе общемъ, когда

P

представляетъ какую угодно трансцендентную перваго класса необходимы иные методы изслѣдованія, чѣмъ тѣ, которыя развиты въ предыдущихъ параграфахъ.

Мы увидимъ, что *простѣйшее частное рѣшеніе въ случаѣ P— трансцендентной перваго класса въ общемъ случаѣ уже не перваго, а второго класса.*

Замѣтимъ прежде всего, что всякое уравненіе

$$Y^{(n)}+\sum_{i=0}^{i=n-1} p_{n-i}\, Y^{(i)}=P \tag{326}$$

по дифференцированіи даетъ

$$Y^{(n+1)}+\sum_{i=0}^{i=n}(p'_{n-i}+p_{n-i-1})\, Y^{(i)}=P' \tag{327}$$

умножая (326) на P', а (327) на P и вычитая одно изъ другого, получаемъ

$$Y^{(n+1)}+P_1\, Y^{(n)}+\ldots P_{n-1}\, Y'+P_n\, Y=0, \tag{328}$$

гдѣ P_i будутъ уже не алгебраическими функціями, какъ p_i, а трансцендентными построенными въ той же области основныхъ трансцендентныхъ (θ), что $\mathcal{P}$.

Каждое рѣшеніе уравненія (328), выражаемое въ конечномъ видѣ имѣетъ форму

$$Y=\sum_{i=0}^{i=m}\eta_i\, P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p) \tag{329}$$

гдѣ основныя трансцендентныя 1 класса (не въ алгебр. обл.), а въ области трансцендентныхъ $(\overline{\theta})$ (§ 39), $P_i(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)$ полиномы ζ_i съ коэффиціентами, равными алгебраическимъ въ области $(\overline{\theta})$ функціямъ, $\underline{\eta_i}$ основныя рѣшенія представляющія трансцендентныя $\overline{[qv]}$ перваго класса въ области $[\overline{\theta}]$.

Какъ въ § 34 убѣждаемся, подставляя выраженіе (329) для Y въ уравненіе (328), черезъ что это уравненіе обращается въ

$$\sum_{i=0}^{i=m} \underline{\eta_i}\, Q_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = P$$

гдѣ

$$\underline{\eta_i}\, Q_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = Y_i^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\, Y_i^{(j)}$$

$$Y_i = \underline{\eta_i}\, P_i\, \zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

что (§ 21)

$$\eta_0\, Q_0(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = P$$

гдѣ η_0 алгебраическая въ области $(\overline{\theta})$ функція, или

$$Y_0^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\, Y_0^{(j)} = P$$

Такимъ образомъ уравненіе (326) имѣетъ частное рѣшеніе

$$\eta_0\, P_0(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = R(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p),$$

не содержащее трансцендентныхъ II типа иныхъ, чѣмъ тѣ, которыя входятъ въ P.

Переходя теперь отъ классификаціи въ области $(\overline{\theta})$ къ классификаціи въ алгебраической области мы должны признать функціи

$$\zeta_i = \int F(\alpha_i, \beta_i)\, d\alpha_i$$

гдѣ α_i, β_i алгебраическія функціи въ области $(\overline{\theta})$ т. е. въ области основныхъ трансц. 1-го класса за трансцендентныя 2-го класса, а коэффиціенты R за трансцендентныя перваго класса. Итакъ уравненіе (326) имѣетъ частное рѣшеніе 2-го класса, въ который основными трансцендентными высшаго класса являются только трансцендентныя I-го типа ζ_1, причемъ рѣшеніе представляетъ цѣлый полиномъ этихъ послѣднихъ съ коэффиціентами равными алгебраическимъ функціямъ отъ тѣхъ основныхъ функцій которыя входятъ въ P и другихъ основныхъ трансцендентныхъ 1-го класса, не входящихъ въ P.

Можно опредѣлить форму этихъ коэффиціентовъ относительно этой послѣдней категоріи основныхъ трансцендентныхъ ζ, η.

Такъ какъ эти трансцендентныя не входятъ въ α_i, β_i, то онѣ будутъ *верхними* трансцендентными. Разсужденія § 41—45 относительно ζ, η, годныя, какъ для случая верхнихъ, такъ и для случая высшихъ трансцендентныхъ остаются въ силѣ, такъ какъ P не зависитъ отъ ζ, η.

Коэффиціенты полинома $R(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$ должны быть относительно

$$\zeta = [\underline{ab}^{(1)}]$$

$$\eta = [\overline{ab}^{(1)}]$$

вида

$$R = \sum [alg\overline{\theta}]\, [\overline{ab}^{(1)}_1]^{\mu_1} \ldots [\overline{ab}^{(1)}_r]^{\mu_r} [\underline{ab}^{(1)}_1]^{\nu_1} \ldots [\overline{ab}^{(1)}]^{\nu_p}$$

обозначая черезъ $[alg\overline{\theta}]$ алгебраическую функцію въ области $[\overline{\theta}]$ т. е. просто алгебраическую функцію основныхъ трансцендентныхъ 1-го класса входящихъ въ P.

Отсюда слѣдуетъ, что Y_0 имѣетъ форму.

$$Y_0 = \sum [alg\overline{\theta}]\, [\overline{ab}^{(1)}_1]^{\mu_1} [\overline{ab}^{(1)}_2]^{\mu_2} \ldots [\overline{ab}^{(1)}_r]^{\mu_r} [\underline{ab}^{(1)}_1]^{\pi_1} \ldots [\underline{ab}^{(1)}_p]^{\pi_p} [\underline{ab}^{(2)}_1]^{\rho_1}$$

$$\ldots [\underline{ab}^{(2)}_q]^{\rho_q} \qquad (330)$$

гдѣ μ_i раціональныя, а π_i, ρ_i цѣлыя положительныя числа.

Очевидно по пути обобщенія можно идти дальше. Можно предполагать, что p_i не алгебраическія функція, а трансцендентныя построенныя въ нѣкоторой области основныхъ трансцендентныхъ (ϑ), P не трансцендентной 1-го класса въ алгебраической области, а трансцендентной 1-го класса въ области (ϑ) форма (330) остается, тогда въ силѣ, но только съ тою разницей, что классъ $[\overset{\vee}{\overline{ab}}{}^{(1)}][\underline{ab}^{(1)}]$ слѣдуетъ понимать въ смыслѣ § 24 т. е. въ области (ϑ).

ЧАСТЬ II
МЕТОДЫ ИНТЕГРИРОВАНІЯ

I ГЛАВА

Основныя рѣшенія.

А) *Построеніе рѣшеній*

а) Предварительныя свѣдѣнія

ВВЕДЕНІЕ.

Мы ограничиваемся сперва разсмотрѣніемъ алгебраическихъ уравненій.

Всякое однородное линейное алгебраическое уравненіе можетъ быть представлено въ формѣ

$$y^{(n)} + p_1(x, u)\, y^{(n-1)} + \ldots .\, p_{n-1}(x, u)\, y' + p_n(x, u)\, y = 0 \qquad (332)$$

гдѣ $p_i(x, u)$ алгебраическія функціи отъ x и u, опредѣляемаго уравненіемъ

$$f(x, u) = 0 \qquad (333)$$

Уравненіе

$$y^{(n)} + p_1(x)\, y^{(n-1)} + \ldots .\, p_{n-1}(x)\, y' + p_n(x)\, y = 0 \qquad (334)$$

представляютъ частный случай ур. (332), отвѣчающій уравненію (333) формы

$$x = \omega(x) \qquad (335)$$

гдѣ ω раціональная функція отъ x.

Нами было доказано, что всякое уравненіе (332), имѣющее хотя бы одно рѣшеніе выражаемое въ конечномъ видѣ имѣетъ такъ называемое *основное рѣшеніе* т. е. рѣшеніе въ случаѣ основныхъ трансцендентныхъ $[qv]$

$$\eta = e^{\int \xi\, dx} = [qv^{(1)}] \qquad (156)$$

въ случаѣ $[ab]$

$$\eta = [alg][\overline{ab}_1^{(1)}]^{\mu_1}[\overline{ab}_2^{(1)}]^{\mu_2}\ldots[\overline{ab}_r^{(1)}]^{\mu_r} \qquad (185)$$

въ случаѣ $[elm]$

$$\eta = [alg][ex^{(1)}][dg_1^{(1)}]^{\mu_1}[dg_2^{(1)}]^{\mu_2}\ldots[dg_r^{(1)}]^{\mu_r} \qquad (186)$$

Такимъ образомъ для рѣшенія задачи объ интегрируемости даннаго линейнаго однороднаго уравненія и для отысканія рѣшеній послѣдняго, выражаемыхъ въ конечномъ видѣ, слѣдуетъ первымъ дѣломъ рѣшить вопросъ:

1) имѣетъ ли данное уравненіе основное рѣшеніе или нѣтъ?

2) найти это основное рѣшеніе.

Въ случаѣ полученія отрицательнаго отвѣта на первый вопросъ, мы доказываемъ (неинтегрируемость по терминологіи Льювиля) неразрѣшимость въ конечномъ видѣ линейнаго уравненія. Именно такимъ образомъ ведется доказательство неинтегрируемости въ конечномъ видѣ уравненія Рикатти. Къ этому доказательству можно присоединить огромное число другихъ подобныхъ же доказательствъ, относящихся къ болѣе общаго типа уравненіямъ, если пользоваться ниже изложенными методами изслѣдованія основныхъ рѣшеній. При рѣшеніи линейнаго уравненія съ помощью осн. трансц. $[qv]$ достаточно найти одно основное рѣшеніе, чтобы привести заданное уравненіе (332) подстановкой

$$y = e^{\int \xi\, dx} \int y_1\, dx \tag{169}$$

къ другому тоже линейному алгебраическому уравненію

$$y_1^{(n-1)} + p_1^{(1)}(x, u, \xi)\, y_1^{(n-2)} + \ldots p_{n-2}^{(1)}(x, u, \xi)\, y'_1 + p_{n-1}^{(1)}(x, u, \xi)\, y_1 = 0 \tag{336$_1$}$$

гдѣ $p_i^{(1)}(x, u, \xi)$ раціональныя функціи (x, u, ξ) при этомъ, если положить

$$\alpha u + \beta \xi = u_1$$

гдѣ α, β надлежаще выбранныя постоянныя, то u, ξ можно выразить раціонально въ u_1 и уравненіе (336), привести къ виду

$$y_1^{(n-1)} + p_1^{(1)}(x, u_1)\, y_1^{(n-2)} + \ldots p_{n-2}^{(1)}(x, u_1)\, y'_1 + p_{n-1}^{(1)}(x, u)\, y_1 = 0 \tag{332}$$

гдѣ

$$f(x, u_1) = 0 \tag{333$_1$}$$

Найдя основное рѣшеніе

$$\eta = e^{\int \xi_1\, dx} \tag{156$_1$}$$

этого послѣдняго уравненія мы опять понижаемъ его порядокъ приводя его подстановкой

$$y_1 = e^{\int \xi_1\, dx} \int y_2\, dx \tag{169$_1$}$$

къ уравненію:

$$y^{(n-2)}_2 + p_1^{(2)}(x_1\, u_2)\, y^{(n-3)}_2 + \ldots p_{n-3}^{(2)}(x_1\, u_2)\, y_2' + p_{n-2}^{(2)}(x_1\, u_2)\, y_2 = 0 \tag{332$_2$}$$

гдѣ

$$f(x, u_2) = 0 \tag{333$_2$}$$

Продолжая такимъ образомъ дальше до тѣхъ поръ, пока не дойдемъ до уравненія перваго порядка, легко интегрируемаго или до уравненія уже не имѣющаго основного рѣшенія получаемъ наиболѣе общее рѣшеніе выражаемое въ конечномъ видѣ въ квадратурахъ въ формѣ (171) § 31

Какъ только рѣшится задача объ опредѣленіи основныхъ рѣшеній, рѣшится и задача о рѣшеніи линейныхъ уравненіи въ квадратурахъ.

Совершенно иначе обстоитъ дѣло въ случаѣ основныхъ трансцендентныхъ $[ab]$ $[elm]$. Подобный процессъ не даетъ намъ рѣшенія вопроса.

Понижая подстановкой

$$y = \eta \int y_{,} dx$$

порядокъ уравненія мы даемъ для y выраженіе въ квадратурахъ. Намъ приходится рѣшать вопросъ о выражаемости формы (171) черезъ функціи $[ab]$ $[elm]$ т. е. задачу во всякомъ случаѣ не менѣе трудную, чѣмъ задачу о выраженіи рѣшенія ур. (1) въ функціяхъ $[ab]$ и $[elm]$.

Но, впрочемъ, въ большинствѣ случаевъ дѣло обстоитъ такъ, что знаніе основныхъ рѣшеній ур. (332) уже даетъ возможность опредѣлить и наиболѣе общее рѣшеніе уравненіе (332), выражаемое въ конечномъ видѣ.

А именно мы покажемъ, что каноническая форма рѣшенія въ большинствѣ случаевъ сводится къ

$$\sum_{i=n}^{i=m} C_i \eta_i$$

гдѣ C_i постоянныя, η_i основныя рѣшенія и только въ болѣе рѣдкихъ случаяхъ могутъ войти въ эту форму основныя трансцендентныя II типа, для чего необходимо выполненіе нѣкоторыхъ условій, относящихся къ корнямъ опредѣляющихъ уравненій для различныхъ критическихъ точекъ. Эти болѣе рѣдкіе случаи представляютъ, какъ и слѣдуетъ ожидать, вмѣстѣ съ тѣмъ случаями требующія наиболѣе сложныхъ разсужденій. Нашей цѣлью въ настоящей главѣ является изложеніе методъ изысканія основныхъ рѣшеній уравненія (332) на основаніи свойствъ этихъ рѣшеній, которыми мы сейчасъ и займемся.

§ 50. *Классификація основныхъ рѣшеній въ случаѣ основныхъ трансцендентныхъ* $[qv]$

Мы начнемъ съ классификаціи основныхъ рѣшеній.

Мы знаемъ (§ 11 I-ой части), что если положимъ

$$\int \xi\, dx = \int \mathscr{F}(\alpha, \beta)\, dx$$

$$\alpha = x$$

$\mathscr{F}(\alpha, \beta)$ раціональная функція α и β опредѣляемаго уравненіемъ

$$\varphi(\alpha, \beta) = 0 \tag{338}$$

то Абелевъ интегралъ

$$[\underline{ab}^{(1)}] = \int \mathscr{F}(\alpha, \beta)\, dx$$

разбивается на сумму

$$[\underline{ab}^{(1)}] = \{\underline{ab}^{(1)}\} + (\underline{ab}^{(1)}), \tag{34}$$

гдѣ $\{\underline{ab}^{(1)}\}$ сумма нормальныхъ Абелевыхъ интеграловъ 2-го рода, $(\underline{ab}^{(1)})$ сумма интеграловъ 1-го и третьяго рода.

Соотвѣтственно этому

$$[\overline{ab}^{(1)}] = e^{\int \mathscr{F}(\alpha, \beta)\, dx} = \{\overline{ab}^{(1)}\}(\overline{ab}^{(1)}) \tag{35}$$

причемъ $(\overline{ab}^{(1)})$ имѣетъ разложеніе типа (30). Для того, чтобъ не происходило смѣшенія съ основными трансцендентными $[\overline{ab}^{(1)}_{i}]$ и желая подчеркнуть, что кривая (338) до интегрированія остается неизвѣстной мы будемъ обозначать $\{ab^{(1)}\}$ $(ab^{(1)})$ черезъ $\{qv^{(1)}\}$ $(qv^{(1)})$ такъ что

$$[\underline{qv}^{(1)}] = \{\underline{qv}^{(1)}\} + (\underline{qv}^{(1)}) \tag{339}$$

$$[\overline{qv}^{(1)}] = \{\overline{qv}^{(1)}\}(\overline{qv}^{(1)}) \tag{340}$$

Мы должны отмѣтить еще одно разложеніе Абелева интеграла на суммы, которое будетъ имѣть въ послѣдующемъ значеніе

Положимъ

$$(\underline{ab}) = (\underline{ab}| + |\underline{ab}) \tag{341}$$

гдѣ

$$(\underline{ab}| = \sum_{k=1}^{k=s} A_k^{(3)} \sqcap \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \alpha_k\,, \beta \\ \alpha_0\,, \beta_0 \end{pmatrix} \tag{342}$$

$$|\underline{ab}) = \sum_{k=1}^{k=p} A_k^{(1)} I(\alpha\,, \beta) + \sum_{k=s+1}^{k=r} A_k^{(3)} \sqcap \begin{pmatrix} \alpha\,, \beta \\ \alpha_k\,, \beta_k \\ \alpha_0\,, \beta_0 \end{pmatrix} \tag{343}$$

гдѣ

$A_k^{(3)}$ | $k \leqslant s$ числа ирраціональныя
| $k > s$ раціональныя.

Соотвѣтственно этому разложенію будемъ имѣть:

$$(\underline{qv}^{(2)}) = (\underline{qv}^{(1)}| + |\underline{qv}^{(1)}) \tag{344}$$

$$(\overline{qv}^{(\ )}) = (\overline{qv}^{(1)}|\,|\overline{qv}^{(1)}) \tag{345}$$

полагая же

$$\{\underline{qv}^{(1)}| = \{\underline{qv}^{(1)}\} + (\underline{qv}^{(1)}| \tag{346}$$

имѣемъ

$$[\underline{qv}^{(1)}] = \{\underline{qv}^{(1)}| + |\underline{qv}^{(1)}) \tag{347}$$

$$[\overline{qv}^{(1)}] = \{\overline{qv}^{(1)}|\,|\overline{qv}^{(1)}) \tag{348}$$

Если $(\overline{qv}^{(1)})$ сводится къ постоянному, то $[\overline{qv}^{(1)}]$ сводится къ $\{\overline{qv}^{(1)}\}$

Когда $\{\overline{qv}^{(1)}\} = const$, то $[\overline{qv}^{(1)}] = (\overline{qv}^{(1)})$

$|\overline{qv}^{(1)}) = const$ $\qquad [\overline{qv}^{(1)}] = \{\overline{qv}^{(1)}|$

$\{\overline{qv}| = const$ $\qquad [\overline{qv}^{(1)}] = |\overline{qv}^{(1)})$

Случай, когда $\underline{\eta} = (\overline{qv}^{(1)})$ вполнѣ естественно разсматривать, какъ болѣе простой, чѣмъ общій

$$\underline{\eta}=[\overline{qv}^{(1)}]$$

Случай, когда $\underline{\eta}=(\overline{qv}^{(1)})$ естественно разсматривать, какъ болѣе простой, чѣмъ $\underline{\eta}=(qv^{(1)})$

Итакъ основныя рѣшенія мы классифицируемъ по степени ихъ сложности

$$\text{I)}\qquad \underline{\eta}=[\overline{qv}^{(1)}]$$

$$\text{II)}\qquad \underline{\eta}=(\overline{qv}^{(1)})$$

$$\text{III)}\qquad \underline{\eta}=|\overline{qv}^{(1)})$$

§ 51. *Основныя рѣшенія въ случаѣ трансцендентныхъ* $[ab]$ *и* $[elm]$.

Посмотримъ теперь какъ выражаются $\{\overline{qv}^{(1)}\}$ $(qv^{(1)})$ и т. д. черезъ основныя трансцендентныя. При этомъ намъ приходится воспользоваться нѣкоторыми результатами нашей работы: „о приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансцендентнымъ“. *)

Согласно § 32 мы имѣемъ

$$[\overline{qv}^{(1)}]=[alg]\,[\overline{ab}_1^{(1)}]^{\mu_1}[\overline{ab}_2^{(1)}]^{\mu_2}\ldots\ldots[ab_r^{(1)}]^{\mu_r}$$

или, логариѳмируя

$$[\underline{qv}^{(1)}]=[lg^{(1)}]+\sum_{i=1}^{i=r}\mu_i\,[\underline{ab}_i^{(1)}] \tag{349}$$

$$[\underline{ab}_i^{(1)}]=\int\phi_i(\alpha_i,\beta_i)\,d\alpha_i$$

гдѣ β_i опредѣляется уравненіемъ

*) Извѣстія Варшавскаго Политехническаго Института за 1905 годъ.

$$\varphi_i(\alpha_i, \beta_i) = 0$$

Изъ теоріи приведенія Абелевыхъ интеграловъ извѣстно, что уравненіе (349) предполагаетъ слѣдующее

$$[\underline{qv}] = \int\limits_{\alpha = x} \phi(\alpha, \beta)\, dx = [lg^{(1)} \alpha_0] + \frac{\mu_i}{m} \sum_{i=1}^{i=r} \mu_i \sum_{g=1}^{g=a_i} [\underline{ab}_i^{(1)} (\alpha_i^{(g)}, \beta_i^{(g)})] \tag{350}$$

гдѣ для краткости положено

$$[\underline{ab}_i^{(1)} (\alpha_i^{(g)}, \beta_i^{(g)})] = \int \phi_i (\alpha_i^{(g)}, \beta_i^{(g)})\, d\alpha_i^{(g)}$$

и гдѣ $\alpha_i^{(g)}, \beta_i^{(g)}$ опредѣляются уравненіями

$$\begin{gathered} \alpha_i^{a_i} + \varphi_{1i}(\alpha, \beta)\, \alpha_i^{a_i - 1} + \ldots . \varphi_{a_i}(\alpha, \beta) = 0 \\ \beta_i^{(g)} = \Omega_i(\alpha, \beta, \alpha_i^{(g)}) \end{gathered} \tag{351}$$

φ_{ji}, Ω_i означаютъ раціональныя функціи величинъ заключенныхъ въ скобкахъ.

Обозначая

$$\frac{1}{m} \sum_{g=1}^{g=a_i} [\underline{ab}_i^{(1)} (\alpha_i^{(g)}, \beta_i^{(g)})] = [\underline{\Sigma ab}_i^{(1)}] \qquad e^{[\Sigma\, ab_i^{(1)}]} = [\overline{\Sigma\, ab}_i^{(1)}]$$

мы можемъ $[\overline{qv}]$ представить въ формѣ

$$[\overline{qv}_i^{(1)}] = [alg]\, [\overline{\Sigma\, ab}_1^{(1)}]^{\rho_1}\, [\overline{\Sigma\, ab}_2^{(1)}]^{\rho_2} \ldots [\overline{\Sigma\, ab}_r^{(1)}]^{\rho_r} \tag{352}$$

Принимая обозначенія

$$\{\underline{ab}_i^{(1)}\} = \{\underline{ab}_i^{(1)} (\alpha_i, \beta_i)\} \quad (\underline{ab}_i^{(1)}) = (\underline{ab}_i^{(1)} (\alpha_i, \beta_i))$$

можемъ вмѣсто (350) написать

$$\begin{gathered} [\underline{qv}^{(1)}] = [lg^{(1)} \alpha_0] + \frac{1}{m} \sum_{i=1}^{i=r} \mu_i \sum_{h=1}^{h=b_i} \{\underline{ab}_i^{(1)} \alpha_i^{(h)}, \beta_i^{(h)})\} + \\ \sum_{i=1}^{i=r} \mu_i \sum_{k=1}^{k=c_i} (a\bar{b}_i^{(1)} (\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})) \end{gathered} \tag{353}$$

гдѣ $(\alpha_i^{(h)}, \beta_i^{(h)})$ и $(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})$ опредѣляются въ (α, β) уравненіями

$$\alpha_i^{b_i} + \varphi_{1i}(\alpha, \beta)\alpha_i^{b_i - 1} + \ldots \varphi_{b_i i}(\alpha, \beta) = 0$$

$$\beta_i^{(h)} = \Omega_i(\alpha, \beta, \alpha_i^{(h)})$$

$$\alpha_i^{c_i} + \varphi_{1i}(\alpha, \beta)\alpha_i^{c_i - 1} + \ldots . \varphi_{c_i i}(\alpha, \beta) = 0$$

$$\beta_i^{(k)} = \Omega_i(\alpha, \beta, \alpha_i^{(k)})$$

Но изъ теоріи приведенія Абелевыхъ интеграловъ мы также знаемъ, *) что

$$\{\underline{\Sigma\, ab_i^{(1)}}\} = \sum_{h=1}^{i=b_i} \{\underline{ab_i^{(1)}}(\alpha_i^{(h)}, \beta_i^{(h)}\} = \{\underline{qv_i^{(1)}}\} \tag{354}$$

гдѣ

$$\{\underline{qv_i^{(1)}}\} = \int N(\alpha, \beta)\, d\alpha$$

Абелевъ интеграловъ имѣющій только полюса и такимъ же образомъ **)

$$(\underline{\Sigma\, ab_i^{(1)}}) = \sum_{h=1}^{h=c_i} (ab_i^{(1)}(\alpha_i^{(k)}, \beta_i^{(k)})) = (\underline{qv_i^{(1)}}) = \int P(\alpha, \beta)\, d\alpha$$

Абелевъ интегралъ имѣющій только логариѳмическія точки Уравненіе (353) даетъ

$$[\overline{qv}^{(1)}] = [alg]\{\overline{qv}_1^{(1)}\}\{\overline{qv}_2^{(1)}\} \ldots \{\overline{qv}_r^{(1)}\}(\overline{qv}_1^{(1)})(\overline{qv}_2^{(1)}) \ldots (\overline{qv}_r^{(1)})$$

$$[\underline{qv}^{(1)}] = [lg^{(1)}] + \sum_{i=1}^{i=r} \{\underline{qv_i^{(1)}}\} + \sum_{i=1}^{i=r} (\underline{qv_i^{(1)}})$$

---

*) § 29 I части работы: „о приведеніи Абелевыхъ интеграловъ къ нисшимъ трансценд.

**) § 38 I часть той же работы.

Сравнивая это послѣднее уравненіе съ уравненіемъ (339):

$$[\underline{qv}^{(1)}] = \{\underline{qv}^{(1)}\} + (\underline{qv}^{(1)})$$

имѣемъ

$$\{\underline{qv}^{(1)}\} - \sum_{i=1}^{i=r} \{\underline{qv}_i^{(1)}\} = [lg^{(1)}] + \sum_{i=1}^{i=r} (\underline{qv}_i^{(1)}) - (\underline{qv}^{(1)})$$

Въ виду того, что лѣвая часть не можетъ имѣть логариѳм. точекъ тоже относится и къ правой. Такъ какъ правая не имѣетъ полюсовъ, то она конечна на всей Римановской поверхности и слѣдовательно представляетъ интегралъ перваго рода

$$I = \int M(\alpha, \beta)\, d\alpha$$

$$\{\underline{qv}^{(1)}\} = I + \sum_{i=1}^{i=r} \{\underline{qv}_i^{(1)}\}$$

откуда, имѣя въ виду значеніе $\{\underline{qv}_i^{(1)}\}$ изъ уравненія (354) имѣемъ

$$\{\overline{qv}^{(1)}\} = \overline{I}\, \{\overline{\Sigma\, ab}_1^{(1)}\}^{\rho_1} \{\overline{\Sigma\, ab}_2^{(1)}\}^{\rho_2} \ldots \{\overline{\Sigma\, ab}_r^{(1)}\}^{\rho_r} \qquad \{355\}$$

$$\overline{I}\, (\overline{qv}^{(1)}) = (\overline{\Sigma\, ab}_1^{(1)})^{\rho_1} (\overline{\Sigma\, ab}_2^{(1)})^{\rho_2} \ldots (\overline{\Sigma\, ab}_r^{(1)})^{\rho_r} \qquad (356)$$

если положить

$$\overline{I} = e^I = e^{\int M(\alpha, \beta)\, d\alpha}$$

Въ случаѣ элементарныхъ трансцендентныхъ эти формулы (355) и (356) обращаются въ слѣдующія

$$\{\overline{qv}^{(1)}\} = [ex^{(1)}] \qquad \{357\}$$

$$(\overline{qv}^{(1)}) = [alg]\, [dg_1]^{\mu_1} \ldots [dg_q]^{\mu_q} \qquad (358)$$

Въ самомъ дѣлѣ въ этомъ случаѣ

$$[\underline{ab_1^{(1)}}]=\alpha_1 \qquad \{\underline{ab_1^{(1)}}\}=\alpha_1 \qquad (\underline{ab_1^{(1)}})=0$$

$$[\underline{ab_i^{(1)}}]=\lambda_i\int\frac{d\,\alpha_i}{\alpha_i} \qquad \{\underline{ab_i^{(1)}}\}=0 \qquad (\underline{ab_i^{(1)}})=\lambda_i\int\frac{d\,\alpha_i}{\alpha_i}$$

$$i>2$$

при этомъ *)

$$[\underline{\Sigma\,ab_i^{(1)}}]=[\underline{ab_i^{(1)}}]$$

Далѣе

$$\{\overline{ab}_i^{(1)}\}=[\overline{ab}_i^{(1)}]=[ex^{(1)}] \qquad (\overline{ab}_1^{(1)})=1$$

$$\{\overline{ab}_i^{(1)}\}=1 \qquad\qquad [\overline{ab}_i^{(1)})=[dg]^{\mu_{i-1}}$$

Къ формуламъ (355) и (356) можно прибавить еще слѣдующія

$$\{\overline{qv}|=\overline{I}\{\Sigma\overline{ab}_1^{(1)}|^{\rho_1}\ \{\Sigma\overline{ab}_2^{(1)}|^{\rho_2}\ldots\{\Sigma\overline{ab}_r^{(1)}|^{\rho_r} \tag{355}$$

$$\overline{I}|\overline{qv})=[alg]\,|\Sigma\overline{ab}_1^{(1)})^{\rho_1}|\Sigma\overline{ab}_2^{(1)})^{\rho_2}\ldots|\Sigma\overline{ab}_n^{(1)})^{\rho_r} \tag{356}$$

гдѣ

$$\sum_{l=1}^{l=\partial_i}\{\underline{ab_i^{(1)}}\,(\alpha_i^{(l)},\beta_i^{(l)})\}=\{\Sigma\overline{ab}_i^{(1)}|$$

$$\sum_{m=1}^{m=l_i}|\underline{ab_i^{(1)}}\,(\alpha_i^{(m)},\beta_i^{(m)}))=|\Sigma\underline{ab_i^{(1)}})$$

$(\alpha_i^{(l)},\beta_i^{(l)})$ $(\alpha_i^{(m)},\beta_i^{(m)})$ опредѣляются уравненіямъ

$$\alpha_i^{\partial_i}+\varphi_{1i}(\alpha,\beta)\,\alpha_i^{\partial_i-1}+\ldots\varphi_{\partial_i\,i}(\alpha,\beta)=0$$

$$\beta_i^{(l)}=\Omega_i(\alpha,\beta\,\alpha_i^{(l)})$$

$$\alpha_i^{l_i}+\varphi_{1i}(\alpha,\beta)\,\alpha_i^{l_i-1}+\ldots\varphi_{l_i\,i}(\alpha,\beta)=0$$

$$\beta_i^{(m)}=\Omega_i(\alpha,\beta,\alpha_i^{(m)})$$

---

*) Въ этомъ случаѣ I, какъ алгебраическая функція конечная на всей Рим. поверхности приведется къ постоянному.

$$\{\Sigma\overline{ab}_i^{(1)}| = e^{\{\underline{\Sigma\, ab_i^{(1)}}|} \qquad |\Sigma\overline{ab}_i^{(1)}) = e^{|\overline{\Sigma\, ab}_i^{(1)})}$$

Въ случаѣ элементарныхъ трансцендентныхъ функцій имѣемъ:

$$\{\overline{qv}| = [ex^{(1)}]\,[dg_1]^{\mu_1}\,[dg_2]^{\mu_2}\ldots.[dg_r]^{\mu_r} \tag{355}$$

$$|\overline{qv}) = [alg] \tag{356}$$

такъ какъ въ этомъ случаѣ

$$[\underline{ab_i^{(1)}}] = \{\underline{ab_i^{(1)}}|$$

Наконецъ легко вывести формулу:

$$(\overline{qv}^{(1)}| = \overline{I}(\Sigma\overline{ab}_1^{(1)}|^{\rho_1}(\Sigma\overline{ab}_2^{(1)}|^{\rho_2}\ldots(\Sigma\overline{ab}_r^{(1)}|^{\rho_r} \tag{355}$$

въ частномъ случаѣ

$$(\overline{qv}^{(1)}| = [dg_1]^{\mu_1}[dg_2]^{\mu_2}\ldots[dg_r]^{\mu_r} \tag{357}$$

в) Случаи приведенія къ простѣйшимъ формамъ.

§ 52. *Условія приведенія формы* $[\overline{qv}^{(1)}]$ *къ* $(\overline{qv}^{(1)})$.

Мы знаемъ, что

$$[\overline{qv}] = e^{\sum\limits_{j=-\mu}^{j=-1} a_j X^j}\; X^a \sum_{j=0}^{j=\infty} b_j X^j \tag{359}$$

если положить

$$X = (x - \underline{x})^{\frac{1}{\delta}} \quad \text{или} \quad X = \frac{1}{x^{\frac{1}{\delta}}}$$

Для того, чтобы $[\overline{qv}]$ сводилось къ $(\overline{qv})$ необходимо и достаточно, чтобы для всѣхъ значеній $x = a$ $[\overline{qv}]$ имѣло бы регулярное разложеніе т. е. чтобы

$$a_j = 0 \quad -\mu \leqq j \leqq -1$$

Легко видѣть, что, *если уравненіе*

$$y^{(n)} + p_1(x, u)\, y^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(x, u)\, y' + p_n(x, u)\, y = 0 \qquad (360)$$

Фуксовскаго типа для всѣхъ критическихъ точекъ уравненія, то основное рѣшеніе обязательно приводится къ виду $(\overline{qv})$.

При поставленномъ условіи

$$p_i(x, u) = (x - x_0)^{-i} \varphi_i(x)$$

гдѣ $\varphi_i(x)$ голоморфная функція въ точкѣ $(x = x_0, u = u_0)$ Римановской поверхности (u, x)

Если

$$u = \sum_{j=-\nu}^{j=\infty} u_{\frac{j}{d}} (x - x_0)^{\frac{j}{d}} \qquad (362),$$

то

$$p_i(x, u) = (x - x_0)^{-i} \sum_{j=0}^{j=\infty} p_{ij} (x - x_0)^{\frac{j}{\delta}} \qquad (361)'$$

Пусть h наименьшее краткое d, δ.

Полагая

$$(x - x_0)^{\frac{1}{h}} = t \qquad (363)$$

или

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{h}}} = t \qquad (364)$$

мы приводимъ уравненіе (360) къ виду

$$y_t^{(n)} + p_1^{(t)} y_t^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}^{(t)} y'_t + p_n^{(t)} y = 0 \qquad (360^{(t)})$$

При этомъ не трудно убѣдиться, что полученное уравненіе $(360^{(t)})$ будетъ при $t = 0$ фуксовнаго типа, если (360) принадлежитъ къ этому типу для $x = x_0$ (въ случаѣ (363)) или для $x = \infty$ (въ случаѣ (364)).

Уравненіе (363) даетъ

$$x = t^h + x_0 \tag{363$'$}$$

$$x'_t = ht^{h-1}$$

$$y'_x = \frac{y'_t}{x'_t} = \frac{y'_t}{ht^{h-1}}$$

$$y''_x = \frac{y''_t}{h^2\, t^{2(h-1)}} - \frac{(h-1)\,y'_t}{h^2\, t^{2h-1}}$$

$$y'''_x = \frac{y'''_t}{h^3\, t^{3(h-1)}} - \frac{3\,(h-1)\,y''_t}{h^3\, t^{3h-2}} + \frac{2\,h\,(h-1)\,y'_t}{h^3\, t^{3h-1}}$$

. . . .

$$y^{(k)}_x = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{A_j\, y^{(j)}_t}{t^{kh-j}} \tag{365$_k$}$$

Въ вѣрности этой формулы убѣждаемся доказавъ, что вѣрности ея для k она остается вѣрной для $(k+1)$. Дѣйствительно:

$$y^{(k+1)}_x = \frac{y^{(k+1)}_t}{x'_t} = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{A_j\, y^{(j+1)}_t}{t^{kh-j}\, x'_t} - \sum_{j=1}^{j=k} \frac{A_j\, y^{(j)}_t\, (kh-j)}{t^{kh-j+1}\ \ x'_t} =$$

$$= \sum_{j=1}^{j=k} \frac{A_j\, y^{(j+1)}_t}{t^{(k+1)h-(j+1)}} - \sum_{j=1}^{j=k} \frac{A_j\, y^{(j)}_t\, kh-j}{ht^{(k+1)h-j}} = \sum_{j=1}^{j=k+1} \frac{B_j\, y^{(j)}_t}{t^{(k+1)h-j}}$$

B_j, какъ A_j, цѣлыя функціи отъ t.

Уравненіе (365_k) даетъ въ виду того, что на основаніи (361) и (363) (364):

$$p_i(x, u) = t^{-ih}\, \varphi_i(t)$$

$\varphi_i(t)$ голоморфная при $t=0$ функція

$$p_{n-k}(x, u)\, y^{(k)} = t^{-(n-k)h} \sum_{j=1}^{j=k} \frac{A_j\, \varphi_i(t)}{t^{kh-k}}\, y^{(k)}_t$$

а подставляя въ уравненіе (360) и умножая на $t^{(k-1)n}$ получаемъ уравненіе ($360^{(i)}$) въ формѣ

$$y_t^{(n)}+\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{\psi_{n-i}(t)}{t^{n-i}}y_t^{(i)}=0 \tag{366}$$

гдѣ $\psi_{n-i}(t)$ голоморфныя функціи т. е. въ Фуксовской формѣ.

Подстановкой (363) преобразуемъ X въ t^{γ} гдѣ $\gamma=\frac{h}{\delta}$ цѣлое число и разложеніе (359) въ разложеніе

$$[\overline{qv}]=e^{\sum\limits_{j=-\mu}^{j=-1}a_j t^{\gamma j}}\,t^{\alpha\gamma}\,\Omega(t) \tag{367}$$

$\Omega(t)$ голоморфная функція при $t=0$. Отсюда слѣдуетъ, что основное рѣшеніе $[\overline{qv}]$ при обходѣ t вокругъ критической точки возпроизводится съ множителемъ

$$\omega=e^{2\pi k\alpha\gamma}$$

гдѣ k цѣлое число.

$[\overline{qv}]$ принадлежитъ къ такъ называемымъ „основнымъ интеграламъ Фуксовскаго уравненія" (которые мы во избѣжаніе смѣшенія съ основными рѣшеніями въ нашемъ смыслѣ назовемъ *Фуксовскими рѣшеніями*): Но для фуксовскаго уравненія рѣшеніе подобнаго рода можетъ быть только *регулярнымъ* т. е. формы

$$[\overline{qv}]=t^{\alpha\gamma}\sum_{j=0}^{j=\infty}f_j t^j=t^{\alpha\gamma}H(t) \tag{368}$$

гдѣ $H(t)$ голоморфная при $t=$ функція изъ уравненій (367) и (368) выводимъ

$$e^{\sum\limits_{j=-\mu}^{j=-\mu}a_j t^{\gamma j}}=\frac{H(t)}{\Omega(t)} \tag{369}$$

$t=0$ для первой части не представляетъ существенно-особенной точки.

Необходимо, чтобы тоже имѣло мѣсто и для лѣвой. Но это предполагаетъ

$$a_j = 0 - \mu \leqq j \leqq -1$$

Уравненіе

$$y'' - \frac{3x^2-12x+11}{(x-1)(x-2)(x-3)}y' + \frac{(x-2)^2}{(x-1)^2(x-3)^2}y = 0 \qquad (370)$$

Фуксовскаго типа для всѣхъ критическихъ точекъ: $x = 1, 2, 3, \infty$

Если это уравненіе интегрируется съ помощью основныхъ, элементарныхъ функцій то основное его рѣшеніе должно быть типа

$$(\overline{qv}^{(1)}) = [alg]\,[dg_1]^{\mu_1}[dg]^{\mu_2}\dots[dg_r]^{\mu_r} \qquad (355)$$

т. е. типа

$$[\chi_0]^{\lambda_0}[\chi_1]^{\lambda_1}\dots[\chi_r]^{\lambda_r}$$

гдѣ λ_0 раціональное, λ_i ирраціональныя числа, χ_0 χ_i алгебраическія функціи.

§ 53. *Условіе существованія опредѣленнаго числа независимыхъ рѣшеній* $[\overline{qv}]$.

Для того, чтобы уравненіе

$$y^{(n)} + p_1(x,u)\,y^{(n-1)} + \dots . p_{n-1}(x,u)\,y' + p_n(x,u)\,y = 0 \qquad (332)$$

имѣло основное рѣшеніе типа $(\overline{qv})$ нѣтъ необходимости, чтобы оно было Фуксовскаго типа. Необходимо только, чтобы для каждой критической точки оно имѣло бы рѣшеніе съ разложеніемъ типа

$$X^a \sum_{j=0}^{j=\infty} b_j X^j$$

или, что тоже, преобразованное уравненіе $(360^{(i)})$ имѣло бы регулярное рѣшеніе для какой нибудь критической точки

$(\underline{x}, \underline{u})$. Для того, чтобы существовало у уравненія $(360^{(i)})$ по меньшей мѣрѣ $\overline{n-h}$ регулярныхъ рѣшеній необходимо, какъ это извѣстно изъ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій, чтобы уравненіе $(360^{(i)})$ приводилось къ слѣдующему виду

$$y_t^{(n)}+\sum_{i=0}^{i=n-1}\frac{\psi_{n-i}(t)\,y_t^{(i)}}{t^{\rho_{n-i}}}=0 \qquad (371),$$

гдѣ $\psi_{n-i}(t)$ голоморфныя при $t=0$ функціи, а цѣлыя числа ρ_{n-i} обладаютъ слѣдующимъ свойствомъ: Если g_h наибольшее изъ чиселъ въ ряду

$$n,\ \ \rho_1+n-1,\ \ \rho_2+n-2\ldots\ldots\rho_h+n-h \qquad (372_h)$$

то необходимо, чтобы

$$\rho_j+n-j\leqq g_h$$

при

$$j>h$$

Въ частномъ случаѣ условіемъ существованія хотя бы одного регулярнаго рѣшенія будетъ слѣдующее:

Если g наибольшее въ ряду:

$$n,\ \ \rho_1+n-1,\ \ \rho_2+n-2\ldots\ldots\rho_{n-1}+1,$$

то

$$\rho_n\leqq g$$

Мы докажемъ, что уравненіе (332) можемъ представить въ видѣ:

$$y^{(n)}+\sum_{j=0}^{j=n-1}\frac{\varphi_{n-i}(x)}{(x-\underline{x})^{\pi_i}}\,y^{(i)}=0$$

гдѣ рядъ

$$n,\ \ \pi_1+n-1,\ \ \pi_2+n-2\ldots\pi_h+n-h \qquad (374_h)$$

обладаетъ совершенно тѣмъ же свойствомъ что рядъ (372) т. е. если

$$\gamma_h = max\,(\pi_j' + n - j) \quad j \leqq h \tag{375}$$

то

$$\pi_j + n - j \leqq \gamma_h \tag{376}$$

$$j > h$$

Преобразуемъ съ этой цѣлью уравненіе (371) подстановкой

$$t = (x - x_0)^{\frac{1}{h}}$$

или, что тоже двумя послѣдовательными подстановками

$$t = \xi^\chi \quad \chi = \frac{1}{h} \tag{377}$$

$$\xi = (x - x_0) \tag{378}$$

Первая подстановка даетъ

$$y_t^{(k)} = \sum_{j=1}^{j=k} \frac{A_{j,k}\, y_\xi^{(j)}}{\xi^{k\chi - j}},$$

гдѣ $A_{j,k}$ постоянныя.

Замѣчая, что

$$\underline{y}_\xi^{(j)} = y_x^{(j)} = y^{(j)}$$

имѣемъ

$$p_{n-k}^{(t)}\, y_t^{(k)} = (x - x)^{-\rho_{n-k}\chi} \sum_{j=1}^{j=k} \frac{A_{j,k}\, y^{(j)}}{(x - \underline{x})^{k\chi - j}}\, \omega_{n-k}(x)$$

гдѣ $\omega_{n-k}(x)$ голоморфная въ $(\underline{x}, \underline{u})$ функція.

Подставляя въ уравненіе (371) выводимъ уравненіе

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\, y^{(j)} = 0$$

гдѣ

$$p_{n-j} = \sum_{k=n-j}^{k=n} \frac{A_{j,k}}{(x - \underline{x})^{\varepsilon_{kj}}}\, \omega_{n-k}(x) \tag{379}$$

$$\varepsilon_{k.j}=\chi(\rho_{n-k}+k-n)+j \tag{380}$$

$$\text{причемъ } \rho_0=0$$

За π_j слѣдуетъ принять наибольшее изъ чиселъ $\varepsilon_{k.j}$

Пусть наибольшее изъ чиселъ

$$\rho_{n-k}+k \quad k=n-j\,, n-j+1\ldots n$$

есть g_j

Тогда
$$\pi_j=\chi(g_j-n)+j$$

$$\pi_j+n-j=\chi(g_j-n)+n$$

Наибольшее изъ π_j+n-j есть $\gamma_h=\chi(g_h-n)+n$, потому что наибольшее изъ g_j есть g_h.

Но ясно, что, такъ какъ

$$\rho_j+n-j\leqq g_h$$

для $j>h$, то

$$g_j\leqq g_h \quad j>h$$

откуда слѣдуетъ, что

$$\pi_j+n-j=\chi(g_j-n)+n\leqq\gamma_h$$

$$j>h$$

Когда уравненіе ($360^{(i)}$) фуксовскаго типа

$$\rho_{n-k}=n-k$$

и числа $\pi_j=j$ обязательно цѣлыя. Уравненіе (360) также Фуксовскаго типа.

Въ томъ случаѣ, когда ($360^{(i)}$) не принадлежитъ къ Фуксовскому типу указатели π_j будутъ вообще дробными.

Вотъ нѣсколько примѣровъ уравненій не могущихъ имѣть основныя рѣшенія типа ($\overline{qv}^{(1)}$)

I)
$$x^4y''+x^2(3x+2)y'+(5x^2-3x+1)y=0$$

Здѣсь

$$\pi_1 = 2\,,\quad \pi_2 =$$

Рядъ Томэ: 2, 2, 4

Наибольшее изъ чиселъ: 2.2

$$q = 2$$

$$4 > 2$$

поэтому уравненіе не можетъ имѣть рѣшенія типа $(\overline{qv})$

II) Такого же рода уравненіе.

$$x^7 y^{(V)} + (3-x)\,xy^{(IV)} + (4+7x^2)\,xy''' + 2x^3 y'' + xy' - y = 0\,,$$

для котораго рядъ Томэ:

$$5\,,6\,,6\,,5\,,6\,,7$$

Если независимыхъ рѣшеній уравненіе (332) имѣетъ n т. е. если уравненіе (332) разрѣшается въ конечномъ видѣ и общее рѣшеніе его имѣетъ видъ:

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i\,(\overline{qv}_i^{(i)}) \tag{381}$$

гдѣ C_i произвольныя, то уравненіе (332) должно быть Фуксовскаго типа для всѣхъ критическихъ точекъ уравненія. Частнымъ случаемъ $(\overline{qv})$ является алгебраическая функція. А именно, когда $(\overline{qv})$ сводится къ $|qv)$ и когда основныя трансцендентныя функціи $[elm]$.

Линейное однородное уравненіе можетъ быть алгебраически интегрируемо только въ томъ случаѣ, если это уравненіе принадлежитъ къ Фуксовскому типу для всѣхъ критическихъ точекъ уравненія.

Уравненіе $x^2y'' + 3y' - 3yx = 0$, не принадлежа къ Фуксовскому типу при $x = 0$, не можетъ быть алгебраически проинтегрировано.

Черезъ разсмотрѣніе ряда чиселъ Томэ (374) можно опредѣлить высшую границу для числа возможныхъ основныхъ рѣшеніи типа $(\overline{qv})$. Изъ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненіи мы знаемъ, что, если въ рядѣ Томэ

$$n, \quad \rho_1 + n - 1, \rho_2 + n - 2 \ldots\ldots \rho_{n-1}, \rho_n \qquad (372)$$

для преобразованнаго уравненія $(360^{(i)})$ наибольшій членъ имѣетъ значеніе g и если первый членъ равный g есть

$$\rho_h + n - h$$

то уравненіе $(360^{(i)})$ можетъ имѣть число регулярныхъ рѣшеній, не превосходящее $\overline{n-h}$, а слѣдовательно уравненіе (332) число рѣшеній $(\overline{qv})$ не превосходящее $\overline{n-h}$

Но теперь легко видѣть, что, если g наибольшее значеніе членовъ ряда (372) то

$$\gamma = \chi(g-n)+n$$

наибольшее значеніе членовъ ряда

$$n, \quad \pi_1 + n - 1, \pi_2 + n - 2 \ldots\ldots \pi_{n-1} + 1, \pi_n \qquad (374)$$

По условію

$$\rho_j + n - j < g$$

$$j < h$$

поэтому

$$g_j < g$$

$$\chi(g_j - n) + n < \gamma$$

$$j < h$$

т. е. $\pi_h + n - h$ будетъ первымъ членовъ ряда (374) равнымъ γ.

Отсюда вытекаетъ слѣдующее правило для опредѣленія высшей границы числа возложныхъ рѣшеній типа $(\overline{qv}^{(1)})$.

Въ ряду чиселъ Томэ (374) опредѣляютъ первый членъ $\pi_h + n - h$ равный γ, гдѣ γ наибольше значенія членовъ этого ряда. Число рѣшеній типа $(\overline{qv})$ не можетъ быть больше $\overline{n-h}$.

§ 54. *Условія приведенія формы $(\overline{qv})'$ къ $|\overline{qv})$.*

Для вывода условіи дальнѣйшихъ упрощеній т. е. условій приведенія $(\overline{qv})$ къ $|\overline{qv})$ преобразовываемъ уравненіе

$$y^{(n)}+p_1(x,u)\,y^{(n-1)}+\ldots\, p_{n-1}(x,u)\,y'+p_n(x,u)\,y=0 \qquad (332)$$

$$f(x,u)=0$$

подстановкой

$$(x-\underline{x})^{\frac{1}{d}}=z$$

или

$$\frac{1}{x^{\frac{1}{d}}}$$

предполагая, что

$$u=\sum_{j=-\nu}^{j=\infty} u_{\frac{j}{d}}(x-x_0)^{\frac{j}{d}} \qquad (362)$$

причемъ

$$(x-\infty)=\frac{1}{x}$$

Мы получаемъ уравненіе

$$y_z^{(n)}+p_1(z)\,y_z^{(n-1)}+\ldots\, p_{n-1}(z)\,y'_z+p_n(z)\,y=0 \qquad (382)$$

гдѣ $p_i(z)$ однозначныя функціи z.

Можно доказать слѣдующую весьма важную для послѣдующаго теорему:

Если уравненіе (332) имѣетъ рѣшеніе

$$[\overline{qv}]=X^a\sum_{j=0}^{j=\infty} b_j X^j \qquad (383),$$

то вмѣстѣ съ тѣмъ это уравненіе имѣетъ другое рѣшеніе того же типа $(\overline{qv})$

$$[\overline{\overline{qv}}]=z^{al+\frac{s}{f}}\sum_{j=0}^{j=\infty} l_j z^j$$

гдѣ $f=\frac{h}{d}$, h *наименьшее кратное* d *и* δ, s *цѣлое число*, $l=\frac{d}{\delta}$ *раціональное число*.

Возьмемъ опредѣляющее (въ смыслѣ Фукса и Томэ) уравненіе (382), которое назовемъ *опредѣляющимъ уравненіемъ уравненія* (332) [слѣдовательно въ смыслѣ болѣе общемъ. Когда $d=1$ уравненіе (382) имѣетъ опредѣляющимъ уравненіемъ то которое служитъ опредѣляющимъ въ смыслѣ Фукса уравненіемъ для (332)].

Полагая

$$q_i=\lim_{\substack{z=0\\u=b}} z^i p_i(z,u) \tag{385}$$

будемъ имѣть въ случаѣ Фуксовскаго уравненія (382) опредѣляющимъ уравненіемъ слѣдующее

$$\begin{bmatrix} n \\ r \end{bmatrix}+q_1\begin{bmatrix} n-1 \\ r \end{bmatrix}+\ldots\ldots q_{n-1}\begin{bmatrix} 1 \\ r \end{bmatrix}+q_n=0 \tag{386}$$

если положить

$$\begin{bmatrix} m \\ r \end{bmatrix}=r(r-1)(r-2)(r-m+1) \tag{387}$$

Въ общемъ случаѣ, полагая что $z=0$ для $p_i(z,u)$ полюсъ порядка α_i и

$$q_{h+i}=\lim z^{\alpha_h-\alpha_{h+i}+i} p_i(z) \tag{388}$$

если въ ряду Томэ отвѣчающемъ уравненію (382)

$$n,\ \alpha_1+n-1,\ \alpha_2+n-2\ldots\ldots\alpha_{n-1}+1,\alpha_n \tag{389}$$

первое число равное γ наибольшему значенію членовъ (389) есть

$$\alpha_h+n-h$$

Тогда уравненіе (386) замѣняется слѣдующимъ

$$q_h\begin{bmatrix}n-h\\r\end{bmatrix}+q_{h+1}\begin{bmatrix}n-h-1\\r\end{bmatrix}+\dots\dots q_{n-1}\begin{bmatrix}1\\r\end{bmatrix}+q_n=0 \qquad (390)$$

Въ дополненіе къ формулированной выше теоремѣ мы должны имѣя въ виду, что рѣшеніе $(\overline{\overline{qv}})$ регулярнаго типа добавить: *число* $al+\frac{s}{f}$ *представляетъ рѣшеніе опредѣляющаго уравненія (386) или (390).* Для того, чтобы доказать формулированную нами теорему придаемъ разложенію (373), гдѣ

$$X=(x-x_0)^{\frac{1}{\delta}}$$

форму

$$y=z^{al}\sum_{i=0}^{i=f}y_i(z)z^{\frac{i}{f}} \qquad (391)$$

если

$$l=\frac{d}{\delta}\quad h=fd,\quad y_i(z)=\sum_{j=0}^{j=\infty}y_{ji}z^j \qquad (392)$$

Для этого слѣдуетъ только представить y сперва въ видѣ

$$z^{al}\sum^{k=\infty}c_k(x-x)^{\frac{k}{h}}$$

а затѣмъ полагая

$$k=fj+i$$

гдѣ i можетъ только значеніе: $0,1,2..f-1$ приходимъ къ разложенію (391).

Подставляя въ уравненіе (382) и сокращая на z^{al} имѣемъ

$$\sum_{i=0}^{i=f-1}C_i(z)z^{\frac{i}{f}}=0 \qquad (392)$$

гдѣ

$$C_i(z)=\sum_{j=-\mu}^{j=\infty} C_{ji}\, z^j$$

мероморфныя функціи при $z=0$.

Совершая z обходъ около критической точки $z=0$ получаемъ тожественно относительно z на ряду съ ур. (392) еще слѣдующія

$$\sum_{j=0}^{j=f-1} C_i(z)\,\omega^{h_i}\, z^{\frac{i}{f}}=0 \qquad (392_h)$$

гдѣ ω первообразный корень двучленнаго уравненія:

$$\omega^l=1$$

Но эти уравненія по умноженіи на ω^{-hs} и сложеніи даютъ:

$$\sum_{h=0}^{h=f-1}\omega^{h(i-s)}\sum_{i=0}^{i=f-1} C_i(z)\, z^{\frac{i}{f}}=0$$

или, замѣчая, что

$$\sum_{h=0}^{h=f-1}\omega^{h(i-s)}\begin{cases}=0 & i\gtrless s\\ =f & i=s\end{cases}$$

получаемъ

$$fz^{\frac{s}{f}}\, C_s(z)=0$$

или

$$z^{al} fz^{\frac{s}{f}}\, C_s(z)=0 \qquad (393)$$

Замѣтимъ, что

$$\left[z^{al}\sum_{i=0}^{i=f-1} y_i(z)\, z^{\frac{i}{f}}\right]^{(k)}=z^{al-k}\sum_{i=0}^{i=f-1}\Bigg(A_0\, y_i(z)\, z^{\frac{i}{f}}+$$

$$+A_1\, y'_i(z)\, z^{\frac{i}{f}+1}+A_2\, y''_i(z)\, z^{\frac{i}{f}+2}+\ldots\ldots\Bigg)=z^{al-k}\sum_{i=0}^{i=f-1}\overset{k}{y_i}(z)\, z^{\frac{i}{f}}$$

гдѣ A_t постоянныя.

$y_i(z)$ какъ $y_i(z)$ голоморфныя функціи, зависятъ только отъ $y_i(z)$, но не зависятъ отъ $y_j(z)$ $j \gtreqless i$.

Точно такимъ же образомъ получаемъ

$$y^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}(z)\, y_i^{(j)} = z^{al-n} \sum_{i=0}^{i=f-1} C_i(z)\, z^{\frac{i}{f}}$$

гдѣ $C_i(z)$ зависятъ отъ $y_i(z)$

$$j \gtreqless i$$

причемъ по замѣнѣ $y_i(z)$ нулемъ $C_i(z)$ обращается въ нуль.

Для опредѣленія

$$\overline{y}_z^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=a-1} p_{n-j}(z)\, \overline{y}_z^{(j)}$$

гдѣ

$$\overline{y} = y_s(z)\, z^{al+\frac{s}{f}}$$

достаточно замѣнить въ уравненіи (394) $y_i(z)$ $(i \lesseqgtr s)$ нулями. Это даетъ намъ

$$z^{al}\, z^{\frac{s}{f}}\, C_s(x) = \overline{y}_z^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}(z)\, \overline{y}_z^{(j)}$$

если положить

$$\overline{y} = z^{al+\frac{s}{f}}\, y_s(z)$$

т. е. если положить

$$\overline{y} = [\overline{\overline{qv}}]$$

Уравненіе (393) даетъ

$$\overline{y}_z^{(n)} + p_1(z)\, \overline{y}_z^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(z)\, \overline{y}'_z + p_n(z)\, \overline{y} = 0 \qquad (\overline{382})$$

т. е. доказываетъ, что уравненіе (382) имѣетъ рѣшеніе (384).

Отсюда слѣдуетъ, когда рѣшеніе уравненія (332) $(\overline{qv})$ приводится къ $|\overline{qv})$ а именно, *если однородное линейное уравненіе (332):*

$$y^{(n)}+p_1(x,u)\,y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1}(x,u)\,y'+p_n(x,u)\,y=0 \qquad (332)$$

$$f(x,u)=0$$

Фуксовскаго типа для всѣхъ критич. точекъ и если опредѣляющія уравненія для этихъ точекъ имѣютъ только раціональные корни, то основное, рѣшеніе можетъ быть только типа $|\overline{qv})$.

Въ самомъ дѣлѣ изъ условія, что данное уравненіе (332) Фуксовскаго типа вытекаетъ, что рѣшеніе типа $(\overline{qv})$ (§ 52). Изъ условія, что корни опредѣляющаго уравненія раціональны вытекаетъ, что a раціонально для всѣхъ критическихъ точекъ т. е. $(\overline{qv})$ сводится къ $|\overline{qv})$.

Уравненіе Фуксовскаго типа:

$$30x(x-1)\,y''+(46x-15)\,y'+2y=0$$

даетъ слѣдующія корни опредѣляющихъ уравненій при

$$x=0:0,\tfrac{1}{2}$$

$$x=1:0,-\tfrac{1}{30}$$

$$x=\infty:\tfrac{1}{3},\tfrac{1}{15}$$

Основное рѣшеніе можетъ быть только формы $|qv)$.

Въ случаѣ рѣшенія съ помощью основныхъ элементарныхъ функцій (ур, 357 § 51)

$$|\overline{qv})=[alg] \qquad (357)$$

и мы можемъ сказать, что *линейное однородное уравненіе Фуксовскаго типа, съ раціональными корнями опредѣляющихъ уравненій для всѣхъ критическихъ точекъ только* *тогда интегрируется въ конечномъ видѣ, если для него существуетъ хотя бы одно алгебраическое рѣшеніе.*

Отсюда ясно, что доказательство неразрѣшимости въ конечномъ видѣ весьма обширнаго класса уравненій сводится къ доказательству, что уравненіе не имѣетъ алгебраическаго рѣшенія. Это, напримѣръ, относится къ приведенному выше уравненію (394).

§ 55. *Условіе существованія опредѣленнаго числа независимыхъ рѣшеній* $|\overline{qv})$.

Для того, чтобы уравненіе (332) имѣло рѣшеніе $|\overline{qv})$ нѣтъ необходимости, чтобы уравненіе (332) принадлежало къ Фуксовскому типу и чтобы всѣ корни опредѣляющихъ уравненій были бы раціональны.

Если уравненіе имѣетъ по меньшей мѣрѣ $\overline{n-h}$ рѣшеній типа $|\overline{qv})$, то необходимо выполненіе условій § 53, выражаемыхъ неравенствами (375) и (376). Затѣмъ необходимо, чтобы каждое опредѣляющее уравненіе имѣло бы по меньшей мѣрѣ $\overline{n-h}$ раціональныхъ корней.

Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (332) можетъ давать $\overline{n-h}$ независимыхъ рѣшеній типа

$$z^{\omega_i}\varphi_i(z) \qquad i=1,2,3\ldots\overline{n-h}$$

гдѣ $\varphi_i(z)$ голоморфныя при $z=0$ функціи только при условіи, что разности

$$\omega_i-\omega, \qquad i=2,3\ldots\overline{n-h}$$

не равны цѣлымъ числамъ, въ частности нулю т. е. необходимо, чтобы каждое опредѣляющее уравненіе имѣло бы не менѣе $\overline{n-h}$ раціональныхъ корней.

Для этого, чтобы уравненіе имѣло бы полную систему n независимыхъ рѣшеній типа $|\overline{qv})$ т. е. для того, чтобы общее рѣшеніе было типа

$$y = \sum_{i=1}^{i=n} C_i \, |\overline{qv}_i^{(1)})\qquad (395)$$

необходимо, чтобы уравненіе было Фуксовскаго типа и чтобы опредѣляющія уравненія имѣли бы исключительно раціональныя корни.

Въ частномъ случаѣ, когда $|\overline{qv}_i^{(1)}) = [alg]$.

Для того, чтобы линейное однородное уравненіе могло быть алгебраически интегрируемо, необходимо, чтобы для всѣхъ критическихъ точекъ оно принадлежало бы къ Фуксовскому типу и чтобы опредѣляющія уравненія не имѣли бы исключительно ирраціональныя корни.

Уравненіе

$$(2x+1)^2 y'' - 2(2x+1)y' + y = 0 \qquad (396)$$

хотя и Фуксовскаго типа для $x = -\frac{1}{2}$ и $x = \infty$, тѣмъ не менѣе не можетъ быть алгебраически интегрируемо, такъ какъ Фуксовское уравненіе для него (въ точкѣ $x = -\frac{1}{2}$) будетъ:

$$4\alpha^2 - 8\alpha + 1 = 0$$

и корнями его будутъ ирраціональныя числа.

$$\frac{2-\sqrt{3}}{2},\ \frac{2+\sqrt{3}}{2}$$

Для $x = \infty$ получаемъ тоже ирраціональныя корни опредѣляющаго уравненія.

По извѣстной методѣ находимъ обще рѣшеніе уравненія (396):

$$y = C_1(2x+1)^{\frac{2+\sqrt{3}}{2}} + C_2(2x+1)^{\frac{2-\sqrt{3}}{2}} = \sum_{i=1}^{i=2} C_i(\overline{qv}_i^{(1)})$$

основныя рѣшенія типа $(\overline{qv}^{(1)})$.

Такъ какъ каждому рѣшенію $|\overline{qv}^{(1)})$ отличаетъ особый корень опредѣляющаго уравненія, но не каждому корню отвѣчаетъ рѣшеніе $|\overline{qv}^{(1)})$, то высшимъ предѣломъ для числа рѣшеній $\overline{[qv}^{(1)})$ служитъ число раціональныхъ корней любого изъ опредѣляющихъ уравненій.

Обозначая черезъ (a_i, b_i) критическія точки а черезъ $N(a_i, b_i)$ число рац. корней опредѣляющаго уравненія относящагося къ этой точкѣ имѣемъ

$$n-h \leqq N(a_i, b_i)$$

Если черезъ N обозначить наименьшее изъ чиселъ $N(a_i, b_i)$ то будемъ имѣть

$$n-h \leqq N$$

c) Опредѣленіе основныхъ рѣшеній построеніемъ.

§ 56. *Общія принципы построенія.*

Переходимъ теперь къ методамъ изысканія основныхъ рѣшеній различныхъ формъ.

Предположимъ нами ищется рѣшенія

$$\underline{\eta} = [\overline{qv}] = e^{\int \xi\, dx} \tag{397}$$

гдѣ ξ алгебраическая функція.

Рѣшеніе будетъ вполнѣ опредѣлено, какъ только опредѣлятся раціональныя функціи $\varphi_i(x, u)$, служащія коэффиціентами въ уравненіи

$$\xi^\sigma + \varphi_1(x, u)\,\xi^{\sigma-1} + \varphi_2(x, u)\,\xi^{\sigma-2} + \ldots \varphi_{\sigma-1}(x, u)\,\xi + \varphi_\sigma(x, u) = 0 \tag{398}$$

опредѣляющемъ ξ.

Мы будемъ говорить, что *рѣшеніе* $\underline{\eta}$ *нами построено, если мы нашли для* $\underline{\eta}$ *или что же самое для* ξ *конечное число выраженій, причемъ каждое изъ этихъ выраженій содержитъ конечное число параметровъ.*

Мы докажемъ, что для построенія $\underline{\eta}$ достаточно знать:

1) *Высшую границу для* σ:

$$\Sigma$$

2) *Для каждаго значенія* σ *высшую границу для порядка* $f_i^{(\sigma)}$ *раціональной функціи* $\varphi_i(x, u)$

$$\phi_i^{(\sigma)}$$

Въ самомъ дѣлѣ если $\sigma \lesseqgtr \Sigma$, то имѣемъ только σ возможныхъ уравненій:

$$\xi + \varphi_{11}(x, u)$$

$$\xi^2 + \varphi_{12}(x, u)\xi + \varphi_{22}(x, u) = 0$$

$$\cdot \; \cdot$$

$$\xi^{\Sigma} + \varphi_{1\Sigma}(x\ u)\xi^{\Sigma-1} + \ldots \ldots \varphi_{\Sigma-1, \Sigma}(x, u)\xi + \varphi_{\Sigma, \Sigma}(x, u) = 0$$

отвѣчающихъ $\sigma = 1 . 2 . 3 \ldots \Sigma$

При

$$f_i^{(\sigma)} \leqq \phi_i^{(\sigma)}$$

получаемъ для каждаго коэффиціента

$$\varphi_{i\sigma}(x, u)$$

конечное число выраженій съ опредѣленнымъ числомъ параметровъ.

Для этого слѣдуетъ положить

$$f_i^{(\sigma)} = 1, 2 \ldots \phi^{(\sigma)}$$

Для каждаго значенія $f_i^{(\sigma)}$ получаемъ $\varphi_{i\sigma}(x, u)$, какъ раціональную функцію опредѣленнаго порядка.

Такая раціональная функція можетъ быть построена т. е. для нея существуетъ конечное число выраженій, изъ которыхъ каждое содержитъ опредѣленное число параметровъ.

Изъ теоріи алгебраическихъ функцій извѣстно, что раціональная функція порядка f опредѣляется формулой

$$\varphi(x,u)=C+\sum_{i=1}^{i=k}\sum_{j=1}^{j=\nu_i}\frac{A_j^{(i)}}{1.2..(j-1)}Z_i^{(j-1)}(x,u;\underline{x},\underline{u}) \qquad (399)$$

гдѣ $Z_i^{(j-1)}(x,u;\underline{x},\underline{u})$ нормальные интегралы 2-го рода съ полюсомъ $(\underline{x_i},\underline{u_i})$ порядка j $A_j^{(i)}$ здѣсь не произвольны, а удовлетворяютъ условіямъ, чтобы періоды правой части относительно той группы купюръ, относительно которой періоды $Z_i^{(j-1)}$ не равны нулю, обращались въ нуль.

Кромѣ того

$$f=\sum_{i=1}^{i=k}\nu_i \qquad (400)$$

Выраженіе (399) при этихъ условіяхъ допускаетъ столько построеній, на сколько цѣлыхъ положительныхъ слагаемыхъ можно разложить f. Число параметровъ въ каждомъ изъ выраженій опредѣляется по теоремѣ Роха (на этомъ изслѣдованіи не будемъ останавливаться, отсылая читателя къ нашему сочиненію: о приведеніи Абелевыхъ интеграловъ).

Когда уравненіе

$$f(x,u)=0$$

приводится къ $u=\omega(x)$ и уравненіе

$$y^{(n)}+p_1(x,u)\,y^{(n-1)}+\ldots p_{n-1}(x,u)\,y'+p_n(x,u)\,y=0$$

приводится къ уравненію

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0,$$

гдѣ $p_i(x)$ раціональныя функціи отъ x, то формула (399) обращается въ слѣдующую извѣстную изъ элементарныхъ курсовъ:

$$\varphi(x) = C + \sum_{i=1}^{i=k} \sum_{j=1}^{j=\nu_i} \frac{A_j^{(i)}}{12\ldots(j-1)} \frac{1}{(x-\underline{x}_i)^j} \tag{401}$$

Построимъ для примѣра $\underline{\eta}$ при условіяхъ

$$\Sigma = 2 \qquad \begin{array}{l} \phi^{(1)} = 2 \\ \phi_1^{(2)} = \phi_2^{(2)} = 3 \end{array}$$

I група уравненій, опредѣляющихъ $\xi : \sigma = 1$

$$k = 1 \qquad \nu_1 = 2$$

$$k = 2 \qquad \nu_1 = 1 \qquad \nu_2 = 1$$

1) $$\xi + \frac{A_1^{(2)}}{(x-\underline{x}_1)^2} + \frac{A_1^{(1)}}{(x-\underline{x}_1)} = 0$$

2) $$\xi + \frac{A_1}{x-\underline{x}_1} + \frac{A_2}{x-\underline{x}_2} = 0$$

II група : $\sigma = 2$

$$k = 1 \qquad \nu_1 = 3$$

$$k = 2 \qquad \nu_1 = 2 \qquad \nu_2 = 1$$

$$k = 3 \qquad \nu_1 = 1 \qquad \nu_2 = 1 \qquad \nu_3 = 1$$

3) $$\xi^2 + \frac{A_{1.1}}{(x-\underline{x}_{11})^3}\,\xi + \frac{A_{1.2}}{(x-\underline{x}_{12})^2} = 0$$

4) $$\xi^2 + \frac{A_{11}}{(x-\underline{x}_{11})^3}\,\xi + \frac{A_{1.2.2}}{(x-\underline{x}_{12})^2} + \frac{A_{1.1.2}}{(x-\underline{x}_{12})} + \frac{A_{2.1.2}}{(x-\underline{x}_{22})} = 0$$

и такъ далѣе

Каждое изъ этихъ выраженій содержитъ опредѣленное число параметровъ: $A_{1\cdot2}, A_{1\cdot1}, \underline{x}_1$; $A_1, A_2, \underline{x}_1, \underline{x}_2$ и т. д.

§ 57. *Полное и не полное построеніе.*

Ниже будетъ показано, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ, изслѣдуя коэффиціенты уравненія (332) и опредѣляющія уравненія, бываетъ возможно опредѣлить:

3) *нѣкоторыя, а иногда и всѣ полюса* $(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$ *функцій* $\varphi_i(x, u)$.

4) *главныя части разложеній* $\varphi_i(x, u)$, *имъ отвѣчающихъ*:

$$\varphi_i(x, u) = \frac{A_{\frac{p}{d}}}{(x-\underline{x})^{\frac{p}{d}}} + \frac{A_{\frac{p-1}{d}}}{(x-\underline{x})^{\frac{p-1}{d}}} + \ldots\ldots \frac{A_{\frac{1}{d}}}{(x-\underline{x})^{\frac{1}{d}}} + \omega(x, u) \quad (402)$$

гдѣ $\omega(x, u)$ голоморфная въ $(\underline{x}, \underline{u})$ функція. Если всѣ полюса $\varphi_i(x, u)$ извѣстны, то возможно построить раціональную функцію

$$\varphi_i^{(0)}(x, u)$$

обладающую тѣми же полюсами $(\underline{x}, \underline{u})$ и тѣми же главными частями, имъ отвѣчающими, что $\varphi(x, u)$. Тогда

$$\varphi_i(x, u) = \varphi_i^{(0)}(x, u) + C_i$$

гдѣ C_i постоянно. Если это имѣетъ мѣсто для всѣхъ коэффиціентовъ $\varphi_i(x, u)$, то уравненіе (398) представляясь въ формѣ:

$$\xi^\sigma + (\varphi_1^{(0)}(x, u) + C_1)\,\xi^{\sigma-1} + (\varphi_2^{(0)}(x, u) + C_2)\,\xi^{\sigma-2} + \ldots$$

$$(\varphi_\sigma^{(0)}(x, u) + C_\sigma) = 0 \quad (403)$$

будетъ содержать всего σ неизвѣстныхъ параметровъ. Если $\sigma = 1$, то

$$\xi = -\varphi_1^{(0)}(x, u) - C_1$$

$$\underline{\eta} = C' e^{-\int \varphi_1^{(0)}(x, u)\, dx}$$

и мы получаемъ основное рѣшеніе

$$\underline{\eta} = e^{-\int \varphi_1^{(0)}(x, u)\, dx}$$

уже не содержащее неизвѣстныхъ параметровъ.

Такую форму рѣшенія, не содержащую параметровъ будемъ называть *полнымъ построеніемъ рѣшенія*, въ отличіе отъ неполнаго, содержащаго параметры.

Полное построеніе возможно не только для $\sigma = 1$ и для $\sigma > 1$, но для этого необходимы еще данныя, необходимо знать:

5) *тѣ точки, при которыхъ дискриминантъ* $\Delta(x, u)$ *уравненія (398) обращается въ нуль* т. е. тѣ точки $(\overline{x}, \overline{u})$, при которыхъ ξ перестаетъ быть однозначной функціей (x, u) въ Римановской поверхности (u).

Уравненія $\Delta(\overline{x}, \overline{u}) = 0$ могутъ вполнѣ опредѣлить параметры $C_1, C_2 \ldots . C_\sigma$.

§ 58. Провѣрка построенія.

Въ томъ случаѣ, когда построеніе полное, остается только провѣрить удовлетворяетъ ли полученное построеніемъ основное рѣшеніе заданному уравненію или нѣтъ. Въ случаѣ неполнаго построенія, когда въ $\varphi_i(x, u)$ остаются еще неопредѣленные параметры, эти послѣдніе приходится опредѣлять изъ условія, что построенное рѣшеніе удовлетворяетъ заданному линейному уравненію:

$$y^{(n)} + p_1(x, u)\, y^{(n-1)} + \ldots . p_{n-1}(x, u)\, y' + p_n(x, u)\, y = 0 \qquad (332)$$

Если условіе это не можетъ быть выполнено ни при какихъ значеніяхъ параметровъ, то построенное основное рѣшеніе должно быть отброшено.

Опредѣленіе условныхъ уравненій, которымъ должны удовлетворять параметры, можно производить слѣдующимъ образомъ.

Подставляя вмѣсто y въ уравненіе (332)

$$\eta = e^{\int \xi \, dx} \tag{397}$$

получаемъ алгебраическое уравненіе $\overline{n-1}$-го порядка

$$P(\xi^{(n-1)}, \xi^{(n-2)} \ldots \xi', \xi, x, u) = 0 \tag{404}$$

Подставляя въ это уравненіе

$$\xi^{(n-1)}, \xi^{(n-2)} \ldots \xi'$$

изъ уравненія

$$\xi^{\sigma} + \varphi_1(x,u)\xi^{\sigma-1} + \ldots \varphi_{\sigma-1}(x,u)\xi + \varphi_{\sigma}(x,u) = 0 \tag{398}$$

получаемъ уравненіе

$$Q(\xi, x, u) = 0 \tag{405}$$

исключеніе ξ изъ уравненій (398) и (405) даетъ алгебраическое уравненіе между (x, u):

$$\Theta(x, u) = 0 \tag{406}$$

Параметры $\varphi_i(x,u)$ должны удовлетворять условному уравненію, получаемому исключеніемъ и между уравненіемъ (406) и

$$f(x, u) = 0$$

Ему можно дать общую форму

$$A_0 x^p + A_1 x^{p-1} + \ldots A_{p-1} x + A_p = 0 \tag{407}$$

гдѣ A_i алгебраическія функціи параметровъ, а такъ какъ уравненіе (407) имѣетъ мѣсто для всѣхъ значеній x, то

$$A_0 = 0, A_1 = 0 \ldots\ldots A_n = 0$$

это и будутъ условныя уравненія, которымъ должны удовлетворять параметры $\varphi_i(x, u)$.

d) О порядкѣ элементовъ формы основного рѣшенія.

§ 59. *Понятіе о порядкѣ элементовъ.*

Обратимся теперь къ первой изъ поставленныхъ въ § 56 проблеммъ, къ изысканію числа Σ. Къ сожалѣнію задача эта одна изъ труднѣйшихъ задачъ Анализа (опредѣленіе числа Σ для случая алгебраическаго $\sqrt{qv}$) и для $n = 3$ потребовали У Жордана 150 стр. сложнѣйшихъ разсужденій и выкладокъ, едва ли можно подняться на разрѣшеніе этой проблеммы въ ближайшемъ будущемъ для $n = 4$).

Мы конечно не надѣемся рѣшить ее сполна въ настоящей главѣ, но мы укажемъ случаи, когда Σ находится и укажемъ путь, по которому слѣдуетъ его искать въ другихъ случаяхъ. Мы не разъ упоминали и даже вывели въ § 33 какъ частный случай болѣе общей теоремы § 32 теорему Льювиля, дающую для Абелева интеграла

$$[\underline{ab}] = \int F(x, u)\, dx$$

выражаемаго въ конечномъ видѣ съ помощью основныхъ трансцендентныхъ формулъ:

$$[ab] = [alg] + \sum_{j=1}^{j=q} \lambda_j [lg_j^{(1)}]$$

слѣдующей теоремой, открывающей путь къ рѣшенію вопроса объ опредѣленіи въ конечномъ видѣ Абелевыхъ интеграловъ является извѣстная теорема Абеля (которую мы ниже выведемъ, какъ частный случай болѣе общей теоремы III главы).

Эта теорема даетъ при обозначеніяхъ § 51

$$[\underline{ab}(x,u)] = \frac{1}{m}[alg\alpha] + \sum_{j=1}^{j=q}\frac{\lambda_j}{m}[lg_j^{(1)}\alpha_j] \tag{408}$$

гдѣ m цѣлое число alg_α раціональная функція, $[lg_j^{(1)}\alpha_j]$ логариѳмы отъ раціональныхъ функціи (x,u).

Точно такимъ же образомъ формулируется теорема Кенигсбергера (194) § 33

$$[\underline{ab}^{(1)}] = \frac{1}{m}[lg_\alpha^{(1)}] + \sum_{j=1}^{j=q}\frac{\mu_j}{m}\sum_{g=1}^{g=aj}[\underline{ab}_j^{(1)}(\alpha_j^{(g)},\beta_j^{(g)})] \tag{409}$$

гдѣ $(\alpha_j^{(g)},\beta_j^{(g)})$ опредѣляются уравненіями

$$\alpha_j^{a_j} + \varphi_{1j}(x,u)\alpha_j^{a_j-1} + \ldots \varphi_{a_j,j}(x,u) = 0 \tag{410}$$

$$\beta_j^{(g)} = S_j(x,u,\alpha_j^{(g)}) \tag{411}$$

гдѣ φ_{ij}, S_j знаки раціональныхъ функцій.

Эти теоремы получаютъ очень простую формулировку, если ввести понятіе о *порядкѣ элементовъ*: $[lg]$ $[\underline{ab}]$ *и т. д. формы.*

Понятіе это мы устанавливаемъ слѣдующимъ образомъ. *Порядкомъ*

$$[\underline{qv}^{(1)}] = \int \xi\, dx \qquad [\overline{qv}^{(1)}] = e^{\int \xi\, dx} \tag{412}$$

называемъ показатель σ *степени неприводимаго уравненія (398) опредѣляющаго* ξ.

Положимъ $[alg] = \xi^\lambda$ (λ раціонально)

$$[lg^{(1)}] = \frac{1}{\lambda}lg\,\xi \quad [dg^{(1)}] = \xi^\lambda \quad [ex^{(1)}] = e^\xi \tag{413}$$

ξ алгебраическая функція опредѣляемая уравненіемъ (398), λ постоянное.

Степень уравненія (398) будетъ различна смотря по выбору λ.

Такъ, если положить

$$[dg^{(1)}]=\left(\sqrt{1+\sqrt{x}}\right)^{\frac{1}{\sqrt{2}}} \quad \xi=\sqrt{1+\sqrt{x}}$$

ξ будетъ опредѣляться уравненіемъ 4-ой степени

$$\xi^4-2\xi^2+1-x=0$$

и $\sigma=4$

Но можно, придавъ $[dg^{(1)}]$ форму

$$[dg^{(1)}]=(1+\sqrt{x})^{\frac{1}{2\sqrt{2}}}$$

положить $\xi=1+\sqrt{x}$, тогда

$$\xi^2-2\xi+1-x=0$$

и $\sigma=2$.

Среди σ, отвѣчающихъ различнымъ λ существуетъ наименьшее σ.

Порядкомъ $[lg^{(1)}][dg^{(1)}][ex^{(1)}]$ *называемъ степень уравненія, опредѣляющаго алгебраическую функцію* ξ, *входящую въ формулы (413) при условіи, что* λ *выбрано такъ, что эта степень возможно нисшая.*

Полагая

$$\Sigma[\underline{ab}^{(1)}]=\frac{1}{\lambda}\sum_{g=1}^{g=a}[\underline{ab}^{(1)}(\alpha^{(g)},\beta^{(g)})] \tag{114}$$

гдѣ $\alpha^{(g)},\beta^{(g)}$ опредѣляется уравненіемъ

$$\alpha^a+\omega_1(x,u,\xi)\alpha^{a-1}+\ldots\omega_{a-1}(x,u,\xi)\alpha+\omega_a(x,u,\xi)=0$$

$$\beta^{(g)}=S_g(x,u,\xi,\alpha^{(g)})$$

ω_t, S_g знаки раціональныхъ функцій, ξ опредѣляется уравненіемъ (398).

Порядкомъ $\Sigma[\underline{ab}^{(1)}]$ *и* $\Sigma[\overline{ab}^{(1)}]$ *будемъ называть степень уравненія (398) при условіи, что* λ *выбрано такъ, что эта степень возможно низшая.*

Порядокъ будемъ обозначать символомъ

$$\delta[\underline{qv}], \delta\Sigma[\underline{ab}] \text{ и т. д.}$$

Всякую алгебраическую функцію ξ будемъ обозначать черезъ

$$([\underline{qv}])\ (\Sigma[\underline{ab}]) \text{ и т. д.}$$

Дальнѣйшее опредѣленіе выведенныхъ въ §§ 32, 37, 44, 45 и 47 формъ рѣшеній, какъ основныхъ такъ и не основныхъ должно относиться къ опредѣленію порядковъ элементовъ этихъ формъ или къ опредѣленію высшихъ границъ для этихъ порядковъ.

Упомянутая выше теорема Абеля принадлежитъ къ этому типу изслѣдованія.

Краткая ея формулировка при введеніи понятія о порядкѣ будетъ состоять въ слѣдующемъ

$$[\underline{ab}] = [alg| + \sum_{j=1}^{j=q} \lambda_j [lg_j^{(1)}]$$

причемъ

$$\delta[alg] = 1 \qquad \delta[lg_j^{(1)}] = 1$$

Для теоремы Кенигсбергера имѣемъ

$$\delta[\Sigma \underline{ab}_j^{(1)}] = 1$$

Къ этому же типу изслѣдованій принадлежатъ извѣстныя изслѣдованія Жордана, относящіяся къ алгебраическимъ рѣшеніямъ линейныхъ уравненій. Жорданъ доказалъ, что

Если линейное однородное уравненіе

$$y^{(n)}+p_1(x,u)\,y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1}(x,u)\,y'+p_n(x,u)\,y=0 \qquad (332)$$

допускаетъ алгебраическое интегрированіе, то оно имѣетъ систему независимыхъ рѣшеній

$$y=\xi^{\lambda},$$

гдѣ λ *раціональное число,* ξ *опредѣляется алгебраическимъ уравненіемъ*

$$\phi(x,u,t)=0$$

для степени котораго σ *существуетъ опредѣленный высшій предѣлъ* $\omega(n)$ *въ зависимости только отъ* n. *При этомъ Жорданъ находитъ* $\omega(2)=5$, $\omega(3)=9$. При принятой терминологіи теорема эта формулируется слѣдующимъ образомъ: Если уравненіе (332) допускаетъ алгебраическое интегрированіе, то общее рѣшеніе

$$y=\sum_{j=1}^{j=n} C_j\,[alg_j]$$

причемъ

$$\delta\,[alg_j]<\omega\,(n) \qquad (415)$$

§ 60. *Дальнѣйшія обобщенія и основныя свойства порядковъ.*

Порядокъ элемента *e* будемъ понимать въ еще болѣе общемъ смыслѣ, чѣмъ выше было изложено.

1-ое обобщеніе.

Предполагая, что $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m$ рядъ алгебраическихъ функцій уравненіе (398) замѣняемъ слѣдующимъ

$$\xi^{\sigma}+\varphi_1(x, u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)\xi^{\sigma-1}+\ldots\ldots\varphi_\sigma(x, u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)=0 \quad (416)$$

гдѣ $\varphi_i(x, u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$ раціональныя функціи

$$(x, u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$$

Тогда

$$\sigma=\delta(e \mid u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$$

или болѣе кратко $\sigma=\delta e$ порядокъ относительно $\alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_m$

$$\xi=(e \mid u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) \text{ или } \xi=(e)$$

2-ое обобщеніе.

Положимъ $\xi=\chi(x, u, t)$, гдѣ χ раціональная функція (x, u, t) и α_i, t опредѣляется уравненіемъ:

$$t^{\omega}+\phi_1(x, u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)t^{\omega-1}+\ldots\ldots\phi_\omega(x, u, \alpha_1 \alpha_2 \ldots \alpha_n)=0 \quad (417)$$

причемъ очевидно $\omega \geqslant \sigma$, такъ какъ каждому значенію ξ отвѣчаетъ одно или нѣсколько значеній t.

Если мы будемъ искать изъ всѣхъ значеній ω отвѣчающимъ различнымъ χ, λ наименьшее, то получимъ $\omega=\sigma$

Поэтому порядокъ σ можемъ еще опредѣлять, какъ степень уравненія опредѣляющаго t, при условіи, что χ, λ взяты такъ, что эта степень наинисшая

$$\sigma=\delta(e \mid u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$$

или при болѣе краткомъ обозначеніи

$$\sigma=\delta e$$

t будемъ обозначать, какъ ξ, черезъ $(e \mid u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$ или черезъ (e)

При этомъ символъ $(e \mid u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$ будемъ имѣть безконечное число значеній.

Если $(e \mid u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) = \chi(t)$ раціональная функція отъ t, то $(e \mid u, \alpha_1 \ldots \alpha_m) = t$

Если t можно принять за одно изъ значеній $(e \mid u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m)$ то будемъ писать

$$(e \mid u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) \equiv t$$

Такъ, если

$$[\overline{qv}] = e^{x\sqrt{x}} + x^3$$

то

$$([\overline{qv}]) = x\sqrt{x} + x^3, x\sqrt{x}, \sqrt{x}$$

и можно написать

$$([\overline{qv}]) \equiv \sqrt{x}$$

Порядокъ $[\overline{qv}]$ въ настоящемъ случаѣ

$$\delta[\overline{qv}] = 2$$

Возьмемъ нѣсколько элементовъ $e_1, e_2 \ldots e_s$ пусть числа ξ имъ отвѣчающія $\xi_1, \xi_2 \ldots \xi_s$ и пусть

$$\xi_i = \chi_i(x, u, t) \tag{418}$$

гдѣ t опредѣляется уравненіемъ (417), причемъ пусть σ степень этого уравненія при условіи, что $\chi_1, \chi_2 \ldots \chi_s$ выбраны такъ, что эта степень наинисшая. Тогда получаемъ дальнѣйшее обобщеніе введенныхъ выше символовъ

$$\sigma = \delta(e_1, e_2 \ldots e_s \mid u, \eta_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) \tag{419}$$

$$t \equiv (e_1, e_2 \ldots e_s \mid u, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_m) \tag{420}$$

Изъ этихъ опредѣленій весьма просто выводятся слѣдующія *основныя свойства символовъ* (e) *и* δe.

Принимая болѣе краткое обозначеніе можемъ написать

I)

$$(e_1) \equiv (e_1, e_2 \ldots e_s)$$

но при этомъ слѣдуетъ помнить, что не всегда $(e_1)\equiv(e_i, e_{i+1} \ldots e_s)$ и не всегда

$$(e_1, e_2 \ldots e_s)\equiv(e_1)$$

II) Если $(e_1)\equiv(e_2, e_3 \ldots e_s)$,

то

$$(e_1, e_2 \ldots e_s)\equiv(e_2, e_3 \ldots e_s)$$

Вообще если

$$(e_j)\equiv(e_{i+1}, e_{i+2} \ldots e_s)$$

$$j=1, 2 \ldots i$$

то

$$(e_1, e_2 \ldots e_s)=(e_{i+1}, e_{i+2} \ldots e_s)$$

III)

$$(e_1, e_2 \ldots e_s)=\sum_{i=1}^{i=s} A_i\, e_i)$$

гдѣ A_i надлежаще выбранныя постоянныя.

IV) Если мы положимъ

$$\alpha(e_1, e_2 \ldots e_s)+\beta u=[e_1, e_2 \ldots e_s],$$

то при надлежаще выбранныхъ постоянныхъ α, β $(e_1, e_2 \ldots e_s)$ $(e_1)(e_2)\ldots(e_s)$, а также u можно выразить раціонально въ $[e_1, e_2 \ldots e_s]$

V) Если $\delta(e_1 e_2 \ldots)\leqq a$

и

$$\delta(f\,|(e_1), (e_2) \ldots (e_s))\leqq b$$

то

$$\delta f\leqq ab$$

Предположимъ теперь что мы имѣемъ рѣшенія однороднаго уравненія

$$\eta=[\overline{qv}]$$

$$y=\sum \eta_i P_i(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

Мы будемъ имѣть слѣдующія опредѣленія символовъ для η

$$\delta\eta = \delta[\overline{qv}], \quad (\eta) = ([\overline{qv}])$$

Для рѣшенія y опредѣленіе будетъ сложнѣе. Предположимъ, что алгебраическая функція t выбрана такъ, что

$$(\eta_i) = ([\overline{qv_i}]) \equiv t \qquad (\zeta_i) = ([\underline{qv_i}]) \equiv t$$

и предположимъ, что кромѣ того коэффиціенты P_i выражаются раціонально въ (x, u, t), тогда

$$(y) \equiv t$$

δy порядокъ y степень уравненія, опредѣляющаго t при условіи, что это послѣднее выбрано такъ что эта степень наинизшая.

Для уравненія перваго порядка

$$y' + p(x, u)\, y = 0$$

мы имѣемъ

$$y = e^{-\int p(x, u)\, dx}$$

откуда слѣдуетъ что $\delta y = 1$, $(y) = const.$

Въ случаѣ неоднороднаго уравненія мы будемъ опредѣлять аналогичнымъ образомъ символы δy и (y).

Изъ этихъ опредѣленій слѣдуетъ, что

$$(e_1, e_2 \ldots . e_i) \equiv (y) \quad \text{и} \quad (e_i) \equiv (y)$$

если положимъ $\alpha(y) + \beta y = v$, то при надлежаще выбранныхъ постоянныхъ α, β (y), $(e_1, e_2 \ldots e_i)$ и (e_i) выражаются раціонально черезъ (v, x).

При описаніи (x, v) замкнутаго пути по Римановской поверхности, отвѣчающей алгебраической функціи v:

1) Элементы алгебраическія $[\chi]^\lambda$ и трансцендентныя II

типа $[\overline{qv}] = e^{\int \xi\, dx}$ будутъ возпроизводиться съ постоянными множителями ибо Абелевы интегралы $\int \xi\, dx$ будутъ при этомъ вырастать на сумму $\Sigma n_i \Omega_i$, гдѣ Ω_i періоды.

2) трансцендентныя I типа $\zeta_i = [\underline{qv}]$ будутъ переходить по тойже причинѣ въ $\zeta_1 + \mu_i$, гдѣ μ_i постоянныя

3) Коэффиціенты P_i не будутъ мѣняться. При этомъ $\underline{\eta}_i P_i \zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$ будутъ переходить въ $\nu\, \underline{\eta}_i P_i \zeta_1 + \mu_1 \ldots \zeta_p + \mu_p)$ т. е. тоже въ произведенія изъ основного рѣшенія не полиномъ $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p$.

§ 61. *О сопряженныхъ рѣшеніяхъ.*

Сопряженными значеніями элемента е мы называемъ σ значеній этого элемента, отвѣчающихъ различнымъ значеніемъ $(e) = t$ *Сопряженнымъ съ даннымъ выраженіемъ у мы называемъ выраженія, получаемыя изъ даннаго замѣной его элементовъ сопряженными.*

Если

$$\underline{\eta}_1 = [\overline{qv}(\xi_1)] = e^{\int \xi_1\, dx}$$

одно рѣшеніе, причемъ ξ, корень уравненія (398) выраженія

$$\underline{\eta}_i = [\overline{qv}(\xi_i)] = e^{\int \xi_i\, dx}$$

гдѣ ξ_i другія корни того же уравненія будутъ сопряженными выраженіями.

Примѣры сопряженныхъ выраженій:

1) Уравненіе

$$4(1+x)y'' + 2y' - y = 0$$

имѣетъ рѣшеніе

$$\underline{\eta}_1 = e^{\sqrt{1+x}} = [ex^{(1)}]$$

ξ опредѣляется уравненіемъ 2-ой степени:

$$\xi^2 - x - 1 = 0$$

такъ что

$$\delta\,[ex^{(1)}] = 2$$

Выраженіе сопряженное $\underline{\eta}_1$:

$$\underline{\eta}_2 = e^{-\sqrt{1+x}}$$

2) Уравненіе

$$9\,(1+x)\,(1-x-3x^2)\,y'' - (13x+24x^2+9x^3)\,y' +$$

$$+ (13 + 24 + 9x^2)\,y = 0$$

имѣетъ рѣшеніе

$$\eta_1 = e^x \sqrt[3]{1+x} = [alg]\,[ex^{(1)}]$$

при этомъ $\delta\underline{\eta}_1 = \delta\,[alg] = \delta[ex^{(1)}] = 1$ и очевидно сопряженныхъ выраженій не можетъ быть.

3) Если

$$[\overline{qv}^{(1)}] = e^{\int\sqrt{1+\sqrt{x}}\,dx}$$

то сопряженныя ему значенія элемента:

$$e^{\pm\int\sqrt{1\pm\sqrt{x}}\,dx}$$

Мы докажемъ, что *всѣ выраженія, сопряженныя съ выраженіемъ основного рѣшенія линейнаго однороднаго уравненія*

$$y^{(n)}+p_1(x,u)\,y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1}(x,n)\,y'\,p_n(x,u)\,y=0$$

представляютъ тоже основныя рѣшенія этого уравненія

Чтобы убѣдиться въ этомъ замѣтимъ, что можно всегда на Римановской поверхности (u, x) найти замкнутыя пути, по описаніи которыхъ значеніе t_1 переходитъ въ любое намѣченное значеніе t_i опредѣляемое уравненіемъ

$$t^{\omega}+\phi_1(x,u)t^{\omega-1}+\ldots\phi_{\omega}(x,u)=0 \tag{417}$$

Въ самомъ дѣлѣ, въ иномъ случаѣ, если бы только корни:

$$t_1, t_2\ldots t_{\tau}\quad \tau<\omega \tag{421}$$

мѣнялись между собой, мы заключили бы, что всѣ раціональныя симметрическія функціи величинъ (430) остаются неизмѣнными при описаніи (x, u) какихъ угодно замкнутыхъ путей т. е. представляютъ раціональныя функціи (x, u)

$t_i (i \leqq \tau)$ опредѣляются уравненіемъ:

$$t^{\tau}+\chi_1(x,u)\,t^{\tau-1}+\ldots\chi_i(x,u)=0,$$

гдѣ $\chi_i(x, u)$ раціональныя функціи (x, u), иначе говоря, уравненіе (417) противно условію приводимо.

Уравненіе (332) должно удовлетворяться даннымъ значеніемъ $y=\underline{\eta}$, при всякихъ значеніяхъ (x, u).

При описаніи (x, u) замкнутаго пути, надлежаще выбраннаго, коэффиціенты $p_j(x, u)$ остаются неизмѣнными, t_1 переходитъ въ t_i и вмѣстѣ съ тѣмъ $y=\underline{\eta}$, въ $y=\underline{\eta}_i$ и мы слѣдовательно имѣемъ:

$$\underline{\eta}_i^{(n)}+p_1(x,u)\,\underline{\eta}_i^{(n-1)}+\ldots p_{n-1}(x,u)\,\underline{\eta}'_i+p_n(x,u)\,\underline{\eta}_i=0$$

§ 62. *О группахъ основныхъ рѣшеній.*

Всѣ основныя рѣшенія можемъ распредѣлить на *группы*

$$\begin{array}{l} \eta_{11}, \eta_{12}, \eta_{13} \dots \\ \eta_{21}, \eta_{22}, \eta_{23} \dots \\ \dots\dots\dots \\ \eta_{m1}, \eta_{m2}, \eta_{m3} \dots \end{array} \tag{422}$$

такъ, что въ каждой группѣ находятся только рѣшенія, находящіяся въ алгебраическихъ отношеніяхъ, между рѣшеніями же различныхъ группъ отношенія трансцендентныя.

Уравненіе

$$x^3 y^{(IV)} - 6x^2 y''' + x(15-8x^4) y'' - (15-8x^4) y' + 16x^7 y = 0 \tag{423}$$

имѣетъ двѣ группы основныхъ рѣшеній

$$\eta_{11} = e^{x^2} \qquad \eta_{12} = x^2 e^{x^2}$$

$$\eta_{21} = e^{-x^2} \qquad \eta_{22} = x^2 e^{-x^2}$$

Линейное уравненіе съ постоянными коэффиціентами:

$$a_0 y^{(n)} + a_1 y^{(n-1)} + \dots a_{n-1} y' + a_n y = 0$$

при условіи, что уравненіе

$$a_0 \alpha^n + a_1 \alpha^{n-1} + \dots a_{n-1} \alpha + a_n = 0$$

имѣетъ корни α_1— кратности k_1, α_2—крат. $k_2 \dots \alpha_l$— крат. k_l всего l группъ основныхъ рѣшеній.

Рѣшенія

$$\eta_{1i_1}, \eta_{2i_2}, \eta_{3i_3} \dots \eta_{\lambda i_\lambda} \tag{424}$$

взятыя изъ различныхъ группъ между собой независимы.

Въ самомъ дѣлѣ вслѣдствіе основного свойства, присущаго трансцендентнымъ II типа уравненіе

$$\sum_{j=1}^{j=\lambda} C_j \underline{\eta}_{1,i_j} = 0,$$

гдѣ C_j постоянныя влечетъ за собой алгебраическія отношенія между функціями (422).

Отсюда слѣдуетъ, что *число группъ основныхъ рѣшеній не можетъ быть больше n, порядка уравненія, если общее рѣшеніе выражается въ конечномъ видѣ и больше n', если рѣшеніе содержащее $n' < n$ произв. постоянныхъ выражается въ конечномъ видѣ.*

Положивъ

$$\underline{\eta}_{ij} = e^{\int \xi_{ij}\, dx}$$

должны имѣть для одной группы

$$e^{\int \xi_{i\alpha}\, dx - \int \xi_{i\beta}\, dx} = \rho_{i\alpha\beta},$$

гдѣ $\rho_{i\alpha\beta}$ алгебраическая функція, откуда

$$\int \xi_{i\alpha}\, dx - \int \xi_{i\beta}\, dx = lg \rho_{i\alpha\beta} \qquad (425)$$

При обходѣ (x, u) по замкнутой кривой

$$\xi_{i1}\, \xi_{i2} \ldots \xi_{i\alpha} \ldots \xi_{i\beta} \ldots$$

должны или переходить другъ въ друга или всѣ единовременно переходить въ функціи ξ принадлежащія другой группы

$$\xi_{j1}\, \xi_{j2} \ldots \xi_{j\alpha} \ldots \xi_{j\beta} \ldots$$

Въ самомъ дѣлѣ, если бы $\xi_{i\alpha}$ переходило бы въ $\xi_{i\gamma}$ въ то время какъ $\xi_{i\beta}$ въ $\xi_{j\beta}$ мы имѣли бы

$$\int \xi_{i\gamma}\, dx - \int \xi_{j\beta}\, dx = lg \rho,$$

гдѣ ρ алгебраическая функція откуда слѣдовало бы противно условію, что η_ω и η_β принадлежатъ къ одной группѣ.

Мы заключаемъ, что уравненіе:

$$\xi^\sigma + \varphi_1(x, u)\xi^{\sigma-1} + \ldots \varphi_{\sigma-1}(x, u)\xi + \varphi_\sigma(x, u) = 0, \qquad (426)$$

опредѣляющее ξ импримитивно т. е. ξ можетъ опредѣляться двумя уравненіями

$$\xi^\tau + \varphi_1(x, u, \zeta)\xi^{\tau-1} + \ldots \varphi_{\sigma-1}(x, u, \xi)\xi + \varphi_\sigma(x, u, \zeta) = 0 \qquad (427)$$

гдѣ $\varphi_i(x, u, \zeta)$ раціональныя функціи (x, u) и ζ, опредѣляемаго уравненіемъ

$$\zeta^m + \psi_1(x, u)\zeta^{m-1} + \ldots \psi_{m-1}(x, u)\zeta + \psi_m(x, u) = 0 \qquad (428)$$

гдѣ $\psi_i(x, u)$ раціональныя функціи (x, u)

$$m \text{ (число группъ) } \leqq n$$

Отсюда вытекаетъ, что *число основныхъ сопряженныхъ рѣшеній въ каждой группѣ одно и тоже и равно* $\frac{\sigma}{m}$.

§ 63. *Дифференціальное уравненіе, опредѣляющее основныя рѣшенія одной группы.*

Мы докажемъ, что *всѣ основныя рѣшенія одной группы опредѣляются однороднымъ линейнымъ уравненіемъ*

$$y^{(l)} + p_1(x, u, \zeta)y^{(l-1)} + \ldots p_{l-1}(x, u, \zeta)y' + p_l(x, u, \zeta)y = 0 \quad (429)$$

гдѣ $p_i(x, u, \zeta)$ *раціональныя функціи* (x, u, ζ) *и гдѣ*

$$l \leqq \frac{n}{m}$$

Пусть

$$\begin{array}{cccc} \eta_{11} & \eta_{12} & \cdots & \eta_{1 \cdot l_1} \\ \eta_{21} & \eta_{22} & \cdots & \eta_{2 \cdot l_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_{m1} & \eta_{m2} & \cdots & \eta_{m l_m} \end{array} \qquad (430)$$

система

$$\sum_{i=1}^{i=m} l_i$$

независимыхъ основныхъ рѣшеній.

Въ систему n независимыхъ рѣшеній уравненія могутъ входить еще рѣшенія содержащія трансцендентныя I-го типа.

Такъ какъ каждая функція

$$\eta P(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

выражается линейной функціей съ постоянными коэффиціентами отъ

$$\eta_{ij} P(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p),$$

то за систему n независимыхъ рѣшеній (если общее рѣшеніе уравненія (332) выражается въ конечномъ видѣ можно принять рѣшенія (429) и рѣшенія типа

$$\eta_{ij} P_{ij}^{(\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p, \alpha)}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p),$$

гдѣ $P_{ij}^{(\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p, \alpha)}$ означаетъ полиномъ $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p$ со старшимъ членомъ $\zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$, причемъ такихъ полиномовъ одному η_{ij} можетъ отвѣчать нѣсколько

$$\alpha = 1, 2 \ldots.$$

Взявъ одно изъ сопряженныхъ рѣшеній i-ой группы мы можемъ написать

$$\underline{\eta}_{ig}=\sum_{h=1}^{h=m}\sum_{j=1}^{j=l_h} C_{hj}^{(g)}\,\underline{\overline{\eta}}_{hj}+\sum_{h=1}^{h=m}\sum_{j=1}^{j=l_h}\sum_{\mu_1\mu\ \mu_p}\sum_{\alpha=1}^{\alpha=s} C_{hj}^{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_p\alpha)}\,\underline{\eta}_{hj}\,P_{ij}^{(\mu_1\mu_2\ldots\mu_p,\alpha)}(\zeta_1\,\zeta_2\ldots\zeta_p) \tag{431}$$

если черезъ $\overline{\eta}_{ij}$ основныя рѣшенія, входящія въ таблицу (430)

Въ томъ случаѣ, когда частное, а не общее рѣшеніе выражается въ конечномъ видѣ, то къ правой части слѣдуетъ еще прибавить сумму

$$\sum C_i y_i$$

гдѣ y_i рѣшенія не выражаемыя въ конечномъ видѣ. Но разсужденіемъ изложеннымъ въ § 38 убѣждаемся, что $C_i=0$.

Пусть старшій членъ изъ числа

$$\overline{\zeta_1^{\mu_1}\zeta_2^{\mu_2}\ldots\zeta_p^{\mu_p}}$$

есть

$$\zeta_1^{\nu_1}\zeta_2^{\nu_2}\ldots\zeta_p^{\nu_p}$$

Можно доказать, что при надлежащемъ выборѣ системы независимыхъ рѣшеній можно предполагать, что данному $\underline{\overline{\eta}}_{ij}$ отвѣчаетъ только одна функція

$$P_{hj}^{(\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_p,\,\alpha)}(\zeta_1\,\zeta_2\ldots\zeta_p)$$

т. е. $$s=1$$

Въ самомъ дѣлѣ въ противномъ случаѣ рѣшенія

$$\underline{\overline{\eta}}_{hj}\,P_{hj}^{(\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_p,\,\alpha)}(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)$$

между собой независимыя могли бы замѣнить другими тоже независимыми:

$$\overline{\eta}_{hj} P^{(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p, 1)}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

$$\overline{\eta}_{hj}\left[C_{\alpha 1} P^{(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p, 1)}(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_p) - C_{1\alpha} P^{(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p, \alpha)}(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_p)\right]$$

причемъ въ виду того, что коэффиціенты при

$$\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \ldots \zeta_p^{\nu_p}$$

постоянныя, $C_{\alpha 1}$, $C_{1\alpha}$ можно выбрать такъ, чтобы коэффиціенты въ суммахъ (431) при $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \ldots \zeta_p^{\nu_p}$ равнялись нули т. е. старшій членъ былъ бы

$$\zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\nu_2} \ldots \zeta_p^{\mu_p} \qquad \mu_1 < \nu_1$$

Уравненіе (431) на основаніи свойствъ трансцендентныхъ I и II типа остается въ силѣ при всякихъ значеніяхъ ζ_i. Коэффиціентъ при $\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \ldots \zeta_p^{\nu_p}$ долженъ равняться нулю (если всѣ не равны нулю) и мы имѣемъ

$$\sum_{h=1}^{h=m} \sum_{j=1}^{j=l_h} C_{hjg}^{(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p 1)} \overline{\eta}_{hj} = 0$$

Въ виду того что $\overline{\eta}_{hj}$ всѣ независимы:

$$C_{hjg}^{(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_p, 1)} = 0$$

откуда слѣдуетъ, что

$$P^{(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_p, 1)}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

совершенно не входитъ въ правую часть тожества (431). Это тожество даетъ

$$\underline{\eta}_{ig} = \sum_{h=1}^{h=m} \sum_{j=1}^{j=l_h} C_{hj}^{(g)} \bar{\eta}_{hg}$$

Это послѣднее предполагаетъ $C_{hj}^{(g)} = 0$ $h \gtrless i$ ибо, иначе, $\bar{\eta}_{hg}$ и η_{ig} $(h \gtrless i)$ противно условію принадлежали бы къ одной группѣ (въ виду алгебраическаго отношенія между ними).

Итакъ

$$\underline{\eta}_{ig} = \sum_{j=1}^{j=l} C_{ij}^{(g)} \eta_{ig} \tag{432}$$

Возьмемъ выраженіе

$$q_{ih} = (-1)^h \frac{D_h}{D} \qquad (433),$$

гдѣ

$$D = \begin{vmatrix} \eta_{i.1} & \eta_{i.2} & \ldots\ldots\ldots & \eta_{i.l_i} \\ \eta_{i.2}^{(1)} & \eta_{i.2}^{(1)} & \ldots\ldots\ldots & \eta_{i.l_i}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \eta_{i.1}^{(l_i-1)} & \eta_{i.2}^{(l_i-1)} & & \eta_{i.l_i}^{(l_i-1)} \end{vmatrix} \tag{434}$$

$$D_h = \begin{vmatrix} \eta_{i.1} & \eta_{i.1} & \ldots\ldots\ldots & \eta_{i.l_i} \\ \eta_{i.1} & \eta_{i.2} & \ldots\ldots\ldots & \eta_{i.l_i}^{(1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \eta_{i.1}^{(l_i-h-1)} & \eta_{i.2}^{(l_i-h-1} & \ldots\ldots\ldots & \eta_{i.l_i}^{(l_i-h-1)} \\ \eta_{i.1}^{(l_i-h+1)} & \eta_{i.2}^{(l_i-h+1)} & \ldots\ldots\ldots & \eta_{i.l_i}^{(l_i-h+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \eta_{i.1}^{(l_i)} & \eta_{i.2}^{(l_i)} & \ldots\ldots\ldots & \eta_{i.l_i}^{(l_i)} \end{vmatrix} . \tag{435}$$

Прежде всего замѣтимъ, что q_{ih} алгебраическая функція отъ x.

Чтобы убѣдиться въ этомъ преобразуемъ выраженія (434) (435) въ слѣдующія

$$D = \underline{\eta}_{i1}\,\underline{\eta}_{i2} \ldots \underline{\eta}_{il_i}\,\delta$$

$$D_h = \underline{\eta}_{i1}\,\underline{\eta}_{i2} \ldots \underline{\eta}_{il_i}\,\delta_h$$

гдѣ

$$\delta = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ \xi_{i11} & \xi_{i21} & \ldots\ldots\ldots & \xi_{2l_i1} \\ \xi_{i12} & \xi_{i21} & \ldots\ldots\ldots & \xi_{2l_i2} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \xi_{i1l_i-1} & \xi_{i2l_i-1} & \ldots\ldots\ldots & \xi_{il_il_i-1} \end{vmatrix}$$

$$\delta_h = \begin{vmatrix} 1 & 1 & \ldots\ldots\ldots & 1 \\ \xi_{i11} & \xi_{i21} & \ldots\ldots\ldots & \xi_{il_i1} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \xi_{i1(l_i-h-1)} & \xi_{i2(l_i-h-1)} & \ldots\ldots\ldots & \xi_{il_i(l_i-h-1)} \\ \xi_{i1(l_i-h+1)} & \xi_{i2(l_i-h+1)} & \ldots\ldots\ldots & \xi_{il_i(l_i-h+1)} \\ \ldots & \ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \xi_{i1l_i} & \xi_{i2l_i} & \ldots\ldots\ldots & \xi_{il_il_i} \end{vmatrix}$$

гдѣ $\xi_{ijg} = \frac{\eta_{ij}^{(g)}}{\eta_{ij}}$ алгебраическія функціи. Такъ какъ δ, δ_h тогда тоже алгебраическія функціи, то по раздѣленіи D_h на D (согласно ур. 433) получаемъ для q_{ih} алгебраическое уравненіе.

Но можно идти дальше и доказать, что q_{ih} представляютъ раціональныя функціи (x, u, ζ).

Полагая

$$\alpha u + \beta \zeta = v \tag{436}$$

ы при надлежаще выбранныхъ постоянныхъ α, β выража-
мъ u, ζ раціонально въ v и уравненіе (427) приводимъ къ виду

$$\xi^{\tau} + \chi_1(x,v)\,\xi^{\tau-1} + \ldots \chi_{\tau-1}(x,v)\,\xi + \chi_{\tau}(x,v) = 0 \tag{437}$$

гдѣ $\chi_i(x,v)$ раціональныя функціи (x,v). При описаніи (x,v) замкнутыхъ путей на Римановской поверхности корень ξ уравненія (437) переходитъ въ другія корни этого уравненія, отвѣчающіе тому же значенію (x,v). Въ тоже время $\eta_{ij}^{(k)}$ переходятъ въ

$$\underline{\eta}_{ij_h}^{(k)} = \sum_{j=1}^{j=l_i} C_{ij}^{(j_h)}\, \underline{\eta}_{ij}^{(k)}$$

Черезъ эту подстановку выраженія (434) (435) пріобрѣтаютъ только постоянный множитель

$$C_i = \begin{vmatrix} C_{i1}^{(j_1)} & C_{i1}^{(j_2)} & \ldots & C_{i1}^{(j_{l_i})} \\ C_{i2}^{(j_1)} & C_{i2}^{(j_2)} & \ldots & C_{i2}^{(j_{l_i})} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{il_i}^{(j_1)} & C_{il_i}^{(j_2)} & \ldots & C_{il_i}^{(j_{l_i})} \end{vmatrix}$$

и слѣдовательно q_{ih} не мѣняются.

Поэтому

$$q_{ih} = q_{ih}(x,v)$$

раціональная функція (x,v), а на основаніи (436)

$$q_{ih} = p_{ih}(x,u,\zeta)$$

раціональная функція (x,u,ζ).

Такъ какъ извѣстно,

$$\eta_{ij}^{(l_i)} + q_{i1}\,\eta_{ij}^{(l_i-1)} + \ldots q_{i,\,l_i-1}\,\eta'_{ij} + q_{i,\,l_i}\,\eta_{ij} = 0$$

то $y = \eta_{ij}$ представляютъ рѣшенія уравненія

$$y^{(l_i)} + p_{i1}(x, u, \zeta)\, y^{(l_i-1)} + \ldots\ldots p_{i,\,l_i}\, y = 0 \qquad (429_i)$$

Такъ какъ

$$\sum_{i=1}^{i=m} l_i \leqslant n,$$

то по меньшей мѣрѣ одно

$$l_\alpha \leqslant \frac{n}{m}$$

Уравненія (429_i) въ общемъ случаѣ приводимы.

Положимъ, что

$$y^{(\overline{l}_i)} + \overline{p}_{i1}(x, u, \zeta)\, y^{(\overline{l}_i-1)} + \ldots \overline{p}_{i,\,\overline{l}_i}(x, u, \zeta_i)\, y = 0 \qquad (\overline{429_i})$$

неприводимое уравненіе которому удовлетворяетъ $y = \eta_{ij}$, тогда

$$\overline{l}_i \leqslant l_i$$

Уравненіе $(\overline{429_i})$ можетъ предполагаться неприводимымъ (причемъ въ этомъ случаѣ таблица опредѣляемая этимъ уравненіемъ можетъ не содержать всѣхъ основныхъ рѣшеній).

Полагаемъ въ уравненіи

$$y^{(\overline{l}_\alpha)} + \overline{p}_{\alpha 1}(x, u, \zeta_\alpha)\, y^{(\overline{l}_\alpha-1)} + \ldots \overline{p}_{\alpha,\,\overline{l}_\alpha}(x, u, \zeta_\alpha)\, y = 0$$

$$y = e^{\int \xi_\alpha\, dx}$$

$$y' = e^{\int \xi_\alpha\, dx}\, \xi_\alpha$$

$$y'' = e^{\int \xi_\alpha dx} (\xi_\alpha^2 + \xi'_\alpha)$$

. . . .

Въ получаемомъ по сокращенію на $e^{\int \xi_\alpha dx}$ уравненіи

$$P(\xi_\alpha^{(n-1)}, \xi_\alpha^{(n-2)} \ldots \xi'_\alpha, \xi_\alpha, x, u, \zeta_\alpha) = 0$$

подставляемъ значенія $\xi_\alpha^{(j)}$ изъ уравненія

$$\xi_\alpha^\tau + \varphi_1(x, u, \xi_\alpha)\xi_\alpha^{\tau-1} + \ldots \varphi_\tau(x, u, \zeta_\alpha) = 0 \qquad (437_\alpha)$$

которое даетъ

$$\frac{\partial \varPhi_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \varPhi_\alpha}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial \varPhi_\alpha}{\partial \zeta_\alpha}\frac{d\zeta_\alpha}{dx} + \frac{\partial \varPhi_\alpha}{\partial \xi_\alpha}\frac{d\xi_\alpha}{dx} = 0$$

если черезъ $\varPhi_\alpha$ обозначить лѣвую часть уравненія (437_α).

Но изъ уравненій

$$f(x, u) = 0$$

$$\psi_\alpha = \zeta^m + \psi_1(x, u)\zeta^{m-1} + \ldots \psi_m(x, u) = 0$$

дающихъ

$$\frac{\partial f}{\partial x} + \frac{\partial f}{\partial u}\frac{du}{dx} = 0$$

$$\frac{\partial \psi_\alpha}{\partial x} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial u}\frac{du}{dx} + \frac{\partial \psi_\alpha}{\partial \zeta}\frac{d\zeta}{dx} = 0$$

опредѣляемъ $\frac{du}{dx}$ въ раціон. функціи (x, u) $\frac{d\zeta}{dx}$ въ раціональной функціи (x, u, ζ).

Уравненіе (437_α) тогда даетъ

$$\xi'_\alpha = \frac{d\xi_\alpha}{dx}$$

а затѣмъ такимъ же образомъ вообще

$$\xi^{(j)}_\alpha = \omega^{(j)}_\alpha (x, u, \zeta_\alpha, \xi_\alpha)$$

въ раціональныхъ функціяхъ $(x, u, \zeta_\alpha, \xi_\alpha)$.

Уравненіе $(\overline{429_\alpha})$ принимаетъ видъ

$$R(\xi_\alpha, x, u, \zeta_\alpha) = 0 \tag{438$_\alpha$}$$

R раціональная функція $(\xi_\alpha, x, u, \zeta_\alpha)$.

Заставляя (x, u) описывать надлежаще выбранный замкнутый путь мы приводимъ ζ_α къ другому корню уравненія (428) ζ_β, а уравненіе (427_α)

$$\xi^\tau + \varphi_1(x, u, \zeta_\alpha)\xi^{\tau-1} + \ldots . \varphi_\tau(x, u, \zeta_\alpha) = 0 \tag{427$_\alpha$}$$

преобразуется въ уравненіе

$$\xi^\tau + \varphi_1(x, u, \zeta_\beta)\xi^{\tau-1} + \ldots . \varphi_\tau(x, u, \zeta_\beta) = 0 \tag{427$_\beta$}$$

откуда слѣдуетъ, что ξ_α переходитъ въ одинъ изъ корней ξ_β уравненія (427), а уравненіе (438_α) въ уравненіе

$$R(\xi_\beta, x, u, \zeta_\beta) = 0 \tag{438$_\beta$}$$

На основаніи того, что

$$\xi^{(j)}_\beta = \omega^{(j)}_\beta (x, u, \zeta_\beta, \xi_\beta)$$

переходимъ къ

$$P(\xi^{(n-1)}_\beta, \xi^{(n-2)}_\beta \ldots \xi'_\beta, \zeta, x, u, \zeta_\beta) = 0,$$

а по умноженіи на

$$e^{\int \xi_\beta dx}$$

убѣждаемся, что $y = \underline{\eta}_\beta$ удовлетворяетъ уравненію (427_β).

Итакъ уравненію удовлетворяетъ одно изъ рѣшеній β-ой группы. Но тогда ему должны удовлетворяетъ и всѣ остальныя сопряженныя рѣшенія

$$\overline{l}_\beta = \overline{l}_\alpha = l$$

Откуда

$$l_\beta \leqq \frac{n}{m}$$

§ 64. *О порядкѣ трансцендентныхъ элементовъ формы основного рѣшенія.*

Доказанная въ предыдущемъ § теорема даетъ возможность значительно упростить задачу объ опредѣленіи порядка элементовъ формы основныхъ рѣшеній, а порою и вполнѣ ее рѣшить. Вотъ *случай, когда порядокъ основного рѣшенія вполнѣ опредѣляется.*

Если мы для случая линейнаго однороднаго уравненія порядка $l \leqq \frac{n}{m}$ въ состояніи указать высшую границу для $\delta\eta$, то для уравненія (429) мы знаемъ границу для

$$\delta(\underline{\eta}, \zeta) \leqq a$$

Такъ какъ $\delta\zeta \leqq m$, но на основаніи свойства порядковъ, доказаннаго въ § 60

$$\delta\underline{\eta} \leqq ma$$

или въ виду того что

$$m \leqq n$$

$$\delta\underline{\eta} \leqq na$$

Въ частномъ случаѣ, *когда число группъ основныхъ рѣшеній равно $m = n$ (такъ что $l = 1$)*

$$\delta(\eta, \zeta) < 1$$

то

$$\delta_{\eta} \leqq n$$

т. е. порядокъ основного рѣшенія не выше порядка уравненія.

Въ общемъ случаѣ мы не можемъ указать высшей границы для $\delta\eta$ въ зависимости отъ порядка уравненія, но можемъ доказать слѣдующую теорему дающую возможность свести задачу объ опредѣленіи $\delta\eta$ къ задачѣ объ опредѣленіи порядка алгебраическаго основного рѣшенія:

Каждое основное рѣшеніе линейнаго однороднаго уравненіе

$$y^{(n)} + p_1(x, u)\, y^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(x, u)\, y' + p_n(x, u)\, y = 0$$

не представляющее алгебраическую функцію равно произведенію

$$[\overline{qv}] = [transc][alg]$$

двухъ множителей.

1) *трансцендентнаго* $[transc]$
2) *алгебраическаго* $[alg]$

при этомъ порядокъ $[transc] = [\overline{qv_1}] = e^{\int \omega(x, u, \zeta)\, dx}$ *не превосходитъ* n.

Для доказательства возьмемъ всѣ сопряженныя рѣшенія какой нибудь группы.

$$\eta_1 \quad \eta_2 = \eta_1 \rho_2 \quad \eta_3 = \eta_1 \rho_3 \ldots \eta = \eta_1 \rho$$

Возьмемъ изъ ихъ числа l независимыхъ рѣшеніи удовлетворяющихъ линейному уравненіи.

$$y^{(l)} + p_1(x, u, \zeta)\, y^{(l-1)} + \ldots . p_l(x, u, \zeta) = 0$$

Мы должны имѣть

$$\begin{vmatrix} \eta_1 & \eta_1 \rho_2 & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \eta_1 \rho_l \\ \eta_1' & (\eta_1 \rho_2)' & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & (\eta_1 \rho_l)' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \eta_1^{(l-1)} & (\eta_1 \rho_2)^{(l-1)} & & \cdot & \cdot & & (\eta_1 \rho_l)^{(l-1)} \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1(x, u, \zeta)\, dx} \quad (439)$$

гдѣ C постоянное.

Но

$$(\eta_1 \rho_i)^{(k)} = \eta_1^{(k)} + k\eta_1^{(k-1)} \rho_i' + \frac{k(k-1)}{1.2} \eta_1^{(k-2)} \rho''_i + \ldots .$$

$$\ldots k\eta_1 \rho_i^{(k-1)} + \rho_i^{(k)}$$

$$\eta_1^{(k)} = \eta_1 \omega_k$$

гдѣ ω_k алгебраическая функція, откуда $(\eta, \rho_i)^{(k)} = \eta_1 \varepsilon_{ik}$ тоже алгебраическая функція и уравненіе (439) даетъ

$$\eta_1^l \begin{vmatrix} \varepsilon_{1.1} & \varepsilon_{1.2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{1.l} \\ \varepsilon_{2.1} & \varepsilon_{2.2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{2.l} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_{l.1} & \varepsilon_{l.2} & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \varepsilon_{l.l} \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1(x, u, \zeta)\, dx}$$

откуда

$$\eta_1 = e^{-\frac{1}{l}\int p_1(x, u, \zeta)\, dx} \quad [alg]$$

Подобныя же выраженія получаются и для другихъ основныхъ рѣшеній группы

$$\delta\,[transc] = \delta\,p_1\,(x\,, u\,, \zeta) \leqq \partial\zeta \leqq n \tag{440}$$

с) Построеніе основныхъ рѣшеній различныхъ типовъ.

§ 65. *Классификація полюсовъ.*

Теперь мы покажемъ, какимъ образомъ опредѣляются полюса, порядки полюсовъ, главныя части разложеній и другія неизвѣстныя, относящіяся къ коэффиціентамъ $\varphi_i(x\,, u)$ уравненія

$$\xi^\sigma + \varphi_1\,(x\,, u)\,\xi^{\sigma-1} + \ldots\ldots \varphi_{\sigma-1}\,(x\,, u)\,\xi + \varphi_\sigma\,(x\,, u) = 0 \tag{426}$$

необходимыя для построенія основного рѣшенія

$$\eta = [qv] = e^{\int \xi\, dx}$$

Замѣчаемъ прежде всего, что, если ξ опредѣляется уравненіемъ (426), то въ виду того, что

$$\left.\begin{aligned}
\varphi_1\,(x\,, u) &= -\sum_i \xi_i \\
\varphi_2\,(x\,, u) &= \sum_{i_1 i_2} \xi_{i_1}\,\xi_{i_2} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots \\
\varphi_k\,(x\,, u) &= (-1)^k \sum_{i_1\,, i_2 \ldots i_n} \xi_{i_1}\,\xi_{i_2} \ldots \xi_{i_k} \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots
\end{aligned}\right\} \tag{441}$$

всякій полюсъ $\varphi_k(x, u)$ есть вмѣстѣ съ тѣмъ полюсъ одной изъ функціи ξ_{ig}.

Если намъ извѣстны порядки полюсовъ ξ_{ig} и ихъ главныя части разложеніи

$$\xi_{i_g}=\sum_{j=-1}^{j=-\mu}\frac{E_{i_g,\frac{j}{q}}}{(x-\underline{x})^{\frac{j}{q}}}+\sum_{j=o}^{j=\infty}E_{i_g,\frac{j}{q}}(x-\underline{x})^{\frac{j}{q}}$$

то по формуламъ (441) получаемъ порядки полюсовъ $(\underline{x}, \underline{u})$ и нѣкоторыя коэффиціенты главныхъ частей разложеній $\varphi_i(x, u)$.

Дальше замѣтимъ, что, если полюсъ $(\underline{x}, \underline{u})$ ξ порядка выше перваго

$$\xi=E_{\frac{j}{q}}(x-\underline{x})^{\frac{-j}{q}}+\ldots\ldots$$

$$j>q$$

то

$$\int\xi\,dx=\frac{qE_{\frac{j}{q}}}{q-j}(x-\underline{x})^{\frac{q-j}{q}}+\ldots\ldots$$

т. е. $(\underline{x}, \underline{u})$ служитъ вмѣстѣ съ тѣмъ полюсомъ $\int\xi\,dx$, а потому представляетъ существенно особенную точку уравненія

$$y^{(n)}+p_1(x,u)\,y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1}(x,u)\,y'+p_n(x,u)\,y=0 \qquad (332)$$

и потому находится среди полюсовъ

$$p_i(x,u),$$

Обозначимъ этого рода полюса черезъ:

Первый классъ $(\overset{1}{\underline{x}}, \overset{1}{\underline{u}})$

Если $(\underline{x}, \underline{u})$ для ξ перваго порядка, то

$$\int \xi\, dx = a\lg (x-\underline{x})^{\frac{1}{\delta}} + a_0 + a_{\frac{1}{\delta}} (x-\underline{x})^{\frac{1}{\delta}} + \ldots .$$

Предположимъ сперва, что a число ирраціональное.

Мы имѣемъ:

Второй классъ полюсовъ $(\underline{\overset{2}{x}}, \underline{\overset{2}{u}})$

Мы знаемъ (§ 34), что уравненіе (332) должно имѣть рѣшеніе типа

$$[\overline{qv}] = z^b \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j z^j \quad (l_0 \gtreqless 0)$$

гдѣ

$$b = al + \frac{s}{f} = a\frac{d}{\delta} + \frac{s}{f}$$

гдѣ s цѣлое число, $f = \frac{h}{d}$, гдѣ h наименьшее кратное d, δ.

Но это предполагаетъ, что $z = 0$ полюсъ коэффиціентовъ преобразованнаго уравненія

$$y_z^{(n)} + p_1(z)\, y_z^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(z)\, y'_z + p_n(z)\, y = 0 \qquad (382)$$

и слѣдовательно $(\underline{x}, \underline{u})$ полюсъ $p_i(x, u)$.

Третій классъ $(\underline{\overset{3}{x}}, \underline{\overset{3}{u}})$

a число раціональное

Число b, какъ и a раціональное.

Этотъ классъ дѣлимъ на три подкласса:

1) $(\underline{\overset{31}{x}}, \underline{\overset{31}{u}})$ b отрицательно

2) $(\underline{\overset{32}{x}}, \underline{\overset{32}{u}})$ b дробное положительное

3) $(\underline{\overset{33}{x}}, \underline{\overset{33}{u}})$ b цѣлое положительное

$(\underline{\overset{31}{x}}, \underline{\overset{31}{u}})$ $(\underline{\overset{32}{x}}, \underline{\overset{32}{u}})$ отвѣчаютъ критической точкѣ $z = 0$ уравненія

(382), $z=0$ полюсъ $p_i(z)$, $(\underline{x},\underline{u})$ полюсъ $p_i(x,u)$ $(\overset{33}{\underline{x}},\overset{33}{\underline{u}})$ не заключаются среди полюсовъ $p_i(x,u)$. Когда порядокъ $(\underline{x},\underline{u})$ ниже перваго, $(\underline{x},\underline{u})$ уже не будетъ полюсомъ $\int\xi\,dx$.

Мы имѣемъ тогда

Четвертый классъ $(\overset{4}{\underline{x}},\overset{4}{\underline{u}})$

Порядокъ $(\underline{x},\underline{u})$ для ξ необходимо дробный, ξ, а потому и $\int\xi\,dx$ разлагаются по степенямъ $(x-\underline{x})^{\frac{1}{\delta}}$

Согласно § 34 уравненіе (332) имѣетъ рѣшеніе

$$[\overline{qv}]=z^{\frac{s}{f}}\sum_{j=0}^{j=\infty} l_j z^j$$

гдѣ $f=\frac{h}{d}$, h наименьшее кратное d и δ.

Если $f>1$, то $z=0$ полюсъ $p_i(z)$, $(\underline{x},\underline{u})$ полюсъ $p_i(x,u)$.

Эти полюса относимъ къ первому подклассу $(\overset{4}{\underline{\underline{x}}},\overset{4}{\underline{\underline{u}}})$

Если $f=1$, то $(\underline{x},\underline{u})$ не заключаются среди полюсовъ $p_i(x,u)$. Онѣ составляютъ второй подклассъ $(\overset{4}{\underline{\underline{x}}},\overset{4}{\underline{\underline{u}}})$.

Такимъ образомъ для

$$(\overset{1}{\underline{x}},\overset{1}{\underline{u}})\ (\overset{2}{\underline{x}},\overset{2}{\underline{u}})\ (\overset{31}{\underline{x}},\overset{31}{\underline{u}})\ (\overset{32}{\underline{x}},\overset{32}{\underline{u}})\ (\overset{4}{\underline{\underline{x}}},\overset{4}{\underline{\underline{u}}})$$

имѣемъ опредѣленное число возможныхъ значеній.

$$(\overset{33}{\underline{x}},\overset{33}{\underline{u}})\ (\overset{4}{\underline{\underline{x}}},\overset{4}{\underline{\underline{u}}})$$

остаются намъ неизвѣстными.

Задача о построеніи $[qv]$ будетъ рѣшена, если опредѣлимъ порядки или высшія границы для порядковъ изслѣдуемыхъ нами полюсовъ $(\underline{x},\underline{u})$, причемъ въ построенное выраженіе войдутъ $(\overset{33}{\underline{x}}, \overset{33}{\underline{u}})$ $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$, какъ остающіяся неопредѣленными параметры.

§ 66. *Порядки и главныя части разложеній полюсовъ перваго класса.*

Такъ какъ отъ разложенія по степенямъ z легко перейти къ разложенію по степенямъ $(x-\underline{x})$, то, полагая

$$\zeta = \sum l_j z^{\frac{j}{f}}$$

постараемся найти $l_j (-\mu \leqq j \leqq 1$ и число $\mu)$

Полагая

$$\int \zeta\, dz = \int \xi \frac{dx}{dz}\, dz$$

гдѣ

$$\frac{dx}{dz} = dz^{d-1}$$

имѣемъ

$$\zeta = \sum_{g=-\nu}^{g=\infty} k_j z^{\frac{g}{f}} \tag{442}$$

числа l_j, μ найдутся, если найдемъ k_j, ν

Въ уравненіе (382):

$$y^{(n)} + p_1(z)\, y^{(n-1)} + \ldots\ldots p_{n-1}(z)\, y'_z + p_n(z)\, y = 0 \tag{382}$$

полагаемъ

$$y = e^{\int \zeta\, dz}$$

гдѣ ζ опредѣляется уравненіемъ (442).

Тогда

$$y' = e^{\int \zeta\, dz}$$

$$y'' = e^{\int \zeta \, dz} (\zeta^2 + \zeta^1)$$

$$y''' = e^{\int \xi \, dz} (\zeta^3 + 3\zeta\zeta' + \zeta'')$$

$$y^{(\mathrm{IV})} = e^{\int \zeta \, dz} (\zeta^4 + 6\zeta^2\zeta' + 3\zeta'^2 + 3\zeta\zeta'' + \zeta''') \tag{443}$$

. . . .

$$y^{(g)} = e^{\int \zeta \, dz} \sum A_{ij}^{\alpha_g \beta_g} \zeta^{(i)^{\alpha_g}} \zeta^{(j)\beta_g},$$

гдѣ $A_{ij}^{\alpha\beta}$ постоянныя, α_g, β_g удовлетворяютъ условію

$$(i+1)\alpha_g + (j+1)\beta_g = g \tag{444}$$

если положить для краткости

$$\zeta^{(0)} = \zeta$$

На основаніи ур. (443) уравненіе (382) преобразуется въ слѣдующее:

$$P(\zeta^{(n-1)}, \zeta^{(n-2)}, \ldots \zeta', x, u) = 0$$

Если въ это уравненіе подставить вмѣсто ζ его выраженіе (442), то мы имѣемъ право приравнять нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ $z^{\frac{j}{f}}$.

Младшимъ членомъ въ $\zeta^{(i)\alpha_k} \zeta^{(j)\beta_k}$ т. е. членомъ съ нисшей степенью z; будетъ членъ:

$$[\overset{i}{-q}]^{\alpha} [\overset{j}{-q}]^{\alpha} k_{-q}^{\alpha+\beta} z^{-[(q+i)\alpha + (q+j)\beta]}$$

если положить $\frac{\nu}{f} = q$

Положимъ что $q \lesseqgtr 1$ т. е. положимъ, что мы имѣемъ дѣло съ полюсомъ $(\underline{x}, \underline{u})$ перваго или четвертаго класса.

Тогда наибольшимъ изъ чиселъ

$$(q+i)\alpha+(q+j)\beta$$

или, что тоже, на основанiи ур. (444)

$$(q-1)(\alpha+\beta)+g$$

будетъ то, которое отвѣчаетъ наибольшему значенiю $\alpha+\beta=g$ т. е.

$$qg$$

причемъ всѣ остальныя числа будутъ отличены отъ qg.

Такимъ образомъ младшiй членъ $y^{(g)}$

$$k^{g}_{-q}z^{-gp},$$

а младшiй членъ $p_{n-g}(z)y^{(g)}_{i}$ есть

$$p_{n-g\,,-\alpha_{n-g}}k^{g}_{-q}z^{-(kg+\alpha_{n-g})}$$

если положить

$$p_{n-g}(z)=\sum_{j=-\alpha_{n-g}}^{j=\infty}p_{n-g,j}z^{j}$$

Для опредѣленiя младшаго члена въ лѣвой части уравненiя (382) по подстановкѣ вмѣсто $y, y', y'' \dots y^{(n)}$ выраженiй (443) и по сокращенiи на $e^{\int\zeta dx}$ или что тоже младшаго члена въ лѣвой части уравненiя (382) находимъ среди чиселъ $gq+\alpha_{n-g}$ $g=1.2\dots n$ наибольшее G.

Пусть $g_j q+\alpha_{n-g_j}=G$ $j=1.2\dots s$ тогда искомый членъ будетъ

$$\sum_{j=1}^{j=s}p_{n-g_j,-q}k^{g_j}_{-q}z^{-(g_jq+\alpha_{n-g_j})} \qquad (444)$$

Мы должны, слѣдовательно, имѣть

$$\sum_{j=1}^{j=s} p_{n-g_j, -q} k_{-q}^{g_j} = 0 \qquad (445)$$

s должно быть больше единицы, ибо иначе имѣли бы противно условію $k_{-q} = 0$.

Отсюда слѣдуетъ, что число q слѣдуетъ разыскивать слѣдующимъ образомъ:

Въ ряду чиселъ

$$gq + \alpha_{n-g} \qquad (446)$$

$$g = 1, 2 \ldots n$$

ищутъ такую группу, въ которой всѣ числа

$$g_j q + \alpha_{n-g_j} = G \qquad (446')$$

равны между собою и больше всѣхъ остальныхъ членовъ ряда (446)

Если эта группа найдена, то q опредѣляется по формулѣ:

$$q = \frac{\alpha_{n-g_1} - \alpha_{n-g_2}}{g_2 - g_1} = \frac{\alpha_{n-g_2} - \alpha_{n-g_3}}{g_3 - g_2} = \ldots$$

Эта задача рѣшается конечнымъ числомъ пробъ. При большомъ числѣ этихъ величинъ т. е. при высокомъ порядкѣ уравненія эта задача, принадлежащая къ числу довольно извѣстныхъ задачъ Анализа, рѣшается или аналитической методой Лагранжа или геометрической методой параллелограмма Ньютона.

По опредѣленіи q остается опредѣлить

$k - \frac{\nu}{f}, k - \frac{\nu}{f} - 1 \ldots$ k_{-q} опредѣляется изъ уравненія (445).

Полагая

$$y = e^{\int k_{-q} z^{-q}\, dz} y_1$$

въ уравненіи (382) и сокращая на $e^{\int k_{-q} z^{-q}\, dz}$ приводимъ его къ уравненію того же типа:

$$y_{1z}^{(n)} + p_1^{(1)}(z) y_{1z}^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}^{(1)}(z) y'_{1z} + p_n^{(1)}(z) y = 0$$

съ основнымъ рѣшеніемъ

$$\eta_1 = e^{\int \zeta_1 \, dx},$$

гдѣ

$$\zeta_1 = \sum_{j=-1}^{j=\infty} k_j z^{\frac{j}{f}}$$

и тѣмъ же путемъ, какъ опредѣляемъ выше k_{-q} опредѣлимъ
$k_{-q_1} = k - \frac{\nu+1}{f}$

Продолжая такимъ образомъ дальше, находимъ всѣ коэффиціенты главной части разложенія ζ.

Примѣры.

Найдемъ $(\overset{1}{\underline{x}}, \overset{1}{\underline{u}})$ $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$ и главныя части разложеній ξ, имъ отвѣчающія, для уравненія

1) $$x^2 y'' + (6x + 1) y' + 6y = 0 \qquad (447)$$

При $x = \infty$ рѣшеніе регулярное.

Только $x = 0$ существенно особенная точка, $(\overset{1}{\underline{x}}, \overset{1}{\underline{u}})$ можетъ быть только $x = 0$.

Для ясности воспроизведемъ на этомъ частномъ примѣрѣ весь процессъ изложенный выше для общаго случая.

Подстановкой

$$y = e^{\int \xi dx} \quad y' = e^{\int \xi\, dx}(\xi) \quad y'' = e^{\int \xi\, dx}(\xi^2 + \xi')$$

(здѣсь очевидно $\xi = \zeta$, $x = z$ такъ какъ $p_i(x, u)$ всегда разлагаются по цѣлымъ степенямъ x) уравненіе (447) приводимъ къ виду:

$$\xi^2 + \xi' + \frac{6x+1}{x^2}\xi + \frac{6}{x^2} = 0$$

Полагая

$$\xi = \frac{k}{x^q} + \ldots.$$

имѣемъ

$$\frac{k^2}{x^{2q}} + \ldots \frac{k}{x^{q+2}} + \ldots. = 0 \qquad (448)$$

откуда слѣдуетъ, что необходимо

$$2q = q + 2,\, q = 2$$

$k^2 + k = 0$ откуда $k = -1$ (рѣшеніе $k = 0$ конечно отбрасывается) слѣдующій коэффиціентъ можно опредѣлить приравнивая нулю коэффиціентъ при $\frac{1}{x^{2q-1}}$ въ лѣвой части уравненія (448).

Если

$$\xi = \frac{k}{x^q} + \frac{l}{x^{q-1}} + \ldots$$

то

$$\frac{2kl}{x^3} + \ldots. - \frac{2k}{x^3} + \ldots. \frac{l}{x^3} + \ldots = 0$$

и въ виду того, что $k = -1$

$$l = 2$$

Итакъ

$$\xi = -\frac{1}{x^2} + \frac{2}{x} + \ldots.$$

Полюса $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$ здѣсь обязательно представляютъ полюса $p_i(x, u)$ т. е. совпадаютъ съ точкой $x=0$. Въ самомъ дѣлѣ для того, чтобы $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$ было полюсомъ ξ необходимо, чтобы δ было числомъ больше 1. $d=1$, такъ какъ если $p_i(x, u)$ раціональна, то u раціональная функція отъ x

$$f=\frac{h}{d}=\delta \lesseqgtr 1$$

и $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$ принадлежатъ обязательно къ подклассу $(\overset{4}{\underline{\underline{x}}}, \overset{4}{\underline{\underline{u}}})$.

2) Уравненіе

$$x^2 y'' + (1+2x) y' - 5y = 0 \tag{449}$$

имѣетъ существенно особенную точку $x=0$.

Въ этомъ случаѣ уравненія (446′) и (445) будутъ

$$2q-2=q \quad q=2$$

$$k^2+2=0 \quad k_1=2i \quad k_2=-2i$$

3) Уравненіе

$$x^3 y''' + 3x^2 y'' + (3x^2+x) y' + (x^2+x-1) y = 0$$

для $x=0$ Фуксовскаго типа.

При $x=\infty$ существенно особенная точка.

Полагая $x=\frac{1}{z}$, преобразуемъ заданное уравненіе въ слѣдующее

$$y_z''' + \frac{6z-3}{z^2} y_z + \frac{5z^2-6z+3}{z^4} y_z + \frac{z^3-z-1}{z^6} y_z = 0 \quad *$$

По указанной выше методѣ опредѣляемъ главную часть разложенія ζ по степенямъ z, откуда переходимъ къ разложенію ξ по степеняхъ.

Но проще поступать слѣдующимъ образомъ. Полагаемъ

$$y = e^{\int \xi\, dx}$$

$$\xi = kx^q + ..$$

(когда $q = 0$ этотъ членъ замѣняется нулемъ)

$$\xi' = kqx^{q-1} + ..$$

(когда $q=0,1$ этотъ членъ замѣняется нулемъ)

$$\xi'' = kq(q-1)\,x^{q-2} + \ldots.$$

Старшія члены лѣвой части уравненія (*) по подстановкѣ полученныхъ выраженій для $\xi, \xi'\,\xi'', \xi''$ будутъ

$kq(q-1)\,x^{q-2}$	$3k^2\,qx^{2q-1}$	$k^3\,x^{3q}$	$3kqx^{q-1}$
или нуль	или нуль		или нуль

$$3k^2\,x^{2q} \quad 3kx^q$$

Единственно возможный случай

$$3q = 2q = q\colon \; q = 0$$

Тогда

$$k^3 + 3k^2 + 3k + 1 = 0 \quad k_1 = k_2 = k_3 = -1$$

$$\xi = -1 + \text{голом. ф.}$$

$$\int \xi\, dx = -x + \text{голом. фун.}$$

Замѣтимъ, что два основныя рѣшенія, отвѣчающія двумъ различнымъ значеніямъ k_{-q}:

$$k_{-q}^{(1)}, k_{-q}^{(2)}$$

при одномъ q не могутъ принадлежать къ одной группѣ основныхъ рѣшеній, если $z=0$ полюсъ перваго класса.

Въ самомъ дѣлѣ отношеніе такихъ двухъ рѣшеній

$$\int\limits_{e}(k_{-q}^{(1)}-k_{-q}^{(2)})\,z^{q}\,dz+\ldots.$$

не можетъ быть алгебраической функціей, обладая существенно особенной точкой $z=0$. Такимъ же образомъ убѣждаемся, что двумъ различнымъ значеніямъ q:

$$q^{(1)},q^{(2)}$$

отвѣчаютъ основныя рѣшенія различныхъ группъ.

Если теперь черезъ N обозначить число различныхъ системъ рѣшеніи

$$q,k_{-q},k_{-q_1}\,k_{-q_2}\ldots.$$

то число группъ основныхъ рѣшеніи можетъ быть больше N, если нѣкоторыя группы отвѣчаютъ регулярнымъ рѣшеніямъ. Наибольшее число группъ будетъ, если каждому регулярному рѣшенію отвѣчаетъ особая группа. Если число регулярныхъ рѣшеній не больше ε, то

$$m\leqq N+\varepsilon$$

$$\delta[transc]\leqq N+\varepsilon$$

Такъ какъ $N+\varepsilon\leqq n$, то мы можемъ получить границу для $\delta[transc]$ еще ниже, чѣмъ указанная выше въ § 64.

§ 67. *Построеніе* $\{\underline{qv}^{(1)}\}$

Мы знаемъ, что

$$[\overline{qv}]=\{\overline{qv}\}(\overline{qv})$$

Кромѣ того, доказано, что

$$[\overline{qv}] = e^{\int \varphi(x, u, \zeta)\, dx} [alg]$$

Разлагая Абелевъ интегралъ

$$\int \varphi(x, u, \zeta)\, dx = \int \varphi(x, v)\, dx$$

на сумму $\{\underline{ab}\} + (\underline{ab})$ имѣемъ

$$[\underline{qv}] = \{\underline{ab}\} + (\underline{ab}) + [lg^{(1)}] = \{\underline{qv}\} + (\underline{qv})$$

и можемъ принять за $\{\underline{qv}\}$ т. е. часть содержащую только полюса:

$$\{\underline{ab}\}$$

такъ что $$\delta\{\overline{qv}\} = \delta\{\overline{ab}\} \leqslant n$$

Полагая

$$\{\overline{qv}\} = e^{\int \overline{\xi}\, dx}$$

мы получаемъ для $\overline{\xi}$ алгебраическое уравненіе,

$$\overline{\xi}^{\overline{\tau}} + \overline{\varphi}_1(x, u)\overline{\xi}^{\overline{\tau}-1} + \ldots\ldots \overline{\varphi}_{\overline{\tau}}(x, u) = 0$$

при чемъ извѣстны

1) граница для степени $\overline{\tau}$

2) полюса $\overline{\varphi}_1(x, u)$, ихъ порядки и главныя части разложеній, имъ отвѣчающихъ.

При этихъ условіяхъ (см. § 56) $\{\underline{qv}\}$ можетъ быть построено.

Вмѣсто построенія непосредственнаго $[\overline{qv}]$ бываетъ удобнѣе строить его множитель $\{\overline{qv}\}$.

Легко видѣть, что подстановкой

$$[\overline{qv}] = \{\overline{qv}\}\ Y$$

линейное уравненіе (332)

$$y^{(n)} + p_1(x, u)\, y^{(n-1)} + \ldots p_n(x, u) = 0$$

приводится къ уравненію:

$$\overline{y}^{(n)} + p_1(x, u, \overline{\zeta})\, \overline{y}^{(n-1)} + \ldots p_n(x, u, \overline{\zeta}) = 0 \qquad (450)$$

и задача о разысканіи $[\overline{qv}]$ сводится къ разысканію основного рѣшенія уравненія (450) типа $(\overline{qv})$.

Въ томъ случаѣ, когда уравненіе (450) не имѣетъ рѣшенія $(\overline{qv})$, не сводящагося къ постоянному рѣшенію $[\overline{qv}]$ рѣшеніе урав. (382) сводится къ $\{\overline{qv}\}$.

Для того, чтобы $(\overline{qv})$ сводилось къ постоянному необходимо, чтобы

$$\overline{p}_n(x, u, \overline{\zeta}) = 0$$

Если это послѣднее условіе не выполнено, имѣемъ случай *неразрѣшимости въ квадратурахъ линейнаго уравненія (332).*

Примѣръ.

Возьмемъ уравненіе

$$x^2 y'' + (1 + 2x)\, y' - 5y = 0 \qquad (451)$$

Легко убѣдиться, что уравненіе (451) не имѣетъ вовсе регулярныхъ интеграловъ, вслѣдствіе чего $[\overline{qv}]$ не можетъ свестись къ $(\overline{qv})$.

Полагая

$$\delta\{\overline{qv}\} = 1 \qquad \delta\{\overline{qv}\} = 2$$

мы должны разсмотрѣть два случая.

Первый случай не представляетъ никакого затрудненія. Мы видѣли, что для уравненія (451)

$$\xi = \pm \frac{2i}{x^2} + \ldots$$

откуда

$$\bar{\xi} = \pm \frac{2i}{x^2} + \text{гол. ф. } (x, u),$$

такъ какъ въ $\bar{\xi}$ не входятъ члены $\frac{a}{x}$

Такъ какъ $\delta\{\underline{qv}\} = 1$, то $\bar{\xi}$ раціонально

$$\bar{\xi} = \pm \frac{2i}{x^2} + C$$

гдѣ C постоянное, такъ какъ $\bar{\xi}$ не можетъ имѣть полюсовъ порядка выше перваго въ иныхъ точкахъ, чѣмъ существенно—особенная точка $x = 0$.

$$\{\overline{qv}\} = e^{\mp \frac{2i}{x} + Cx}$$

откидывая постоянную.

$C = 0$, ибо иначе $x = \infty$ была бы существенно-особенной точкой.

$$\{\overline{qv}\} = e^{\mp \frac{2i}{x}}$$

Возьмемъ теперь случай

$$\delta\{\overline{qv}\} = 2$$

Такъ какъ

$$\bar{\xi}_1 = \frac{2i}{x^2} + c_1 + d_1 x + \ldots$$

$$\bar{\xi}_2 = -\frac{2i}{x^2} + c_2 + d_2 x + \ldots .$$

то

$$\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 = \text{голоморф. ф. отъ } x$$

и такъ какъ $\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$ не имѣетъ уже полюсовъ, то

$$\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2 = const = \alpha$$

Далѣе

$$\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 = \frac{4}{x^4} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x} + \text{цѣлая ф. отъ } x$$

и такъ $\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2$ не имѣетъ другихъ полюсовъ, кромѣ $x=0$ то

$$\bar{\varphi}_1 \bar{\varphi}_2 = \frac{4}{x^4} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x} + \delta$$

гдѣ β, γ, δ постоянныя $\bar{\xi}$ въ настоящемъ случаѣ опредѣляется уравненіемъ:

$$\bar{\xi}^2 + \alpha\bar{\xi} + \left(\frac{4}{x^4} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x} + \delta\right) = 0$$

которое можно переписать въ видѣ

$$(\bar{\xi} + C)^2 + \left(\frac{4}{x^4} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x} + \delta\right) = 0$$

откуда

$$\bar{\xi} = -C + \sqrt{\frac{4}{x^4} + \frac{\beta}{x^2} + \frac{\gamma}{x} + \delta}$$

Подстановкой

$$y = e^{\pm \frac{2i}{x}} \bar{y}$$

$$y = e^{\pm\int\sqrt{\frac{4}{x^4}+\frac{\beta}{x^2}+\frac{\gamma}{x}+\delta}\,\bar{y}\,dx} \tag{451}$$

мы приводимъ заданное уравненіе къ уравненію второго порядка

$$\bar{y}' + p_1(x)\bar{y} + p_2(x) = 0$$

гдѣ $p_i(x)$ раціональная функція съ рѣшеніями типа $(\overline{qv})$, при этомъ въ $p_i(x)$ будутъ входить остающіяся неопредѣленными параметры α, β, γ, δ, которыя войдутъ и въ построеніе $(\overline{qv})$. Изъ этого довольно простого примѣра мы видимъ, что излагаемая метода построенія $\{\overline{qv}\}$ требуетъ сложныхъ выкладокъ.

Но эти выкладки значительно упрощаются, если при построеніи будемъ пользоваться слѣдующимъ замѣчаніемъ.

Если $\bar{\xi}_1$, $\bar{\xi}_2$ имѣютъ, только одинъ полюсъ m-го порядка для котораго имѣютъ мѣсто разложеніе:

$$\bar{\xi}_i = \frac{\pm a}{(x-\underline{x})^m} + \ldots + a_0^{(i)} + a_1^{(i)}(x-\underline{x}) + \ldots.$$

для $\underline{x} = \infty$

$$\bar{\xi}_i = \pm a x^m + a_0^{(i)} + \frac{a_1^{(i)}}{x} + \ldots$$

то уравненіе

$$\bar{\xi}^2 + \bar{\varphi}_1(x,u)\bar{\xi} + \bar{\varphi}_2(x,u) = 0$$

не можетъ быть неприводимо.

Въ самомъ дѣлѣ тогда функція

$$\bar{\xi}_1 + \bar{\xi}_2$$

не имѣетъ вовсе полюсовъ, а потому сводится къ постоянному. Подставляя въ уравненіе

$$\bar{\xi}_1^2 + \bar{\varphi}_1(x,u)\bar{\xi}_1 + \bar{\varphi}_2(x,u) = 0$$

вмѣсто $\bar{\xi}_1$: $c - \bar{\xi}_2$ имѣемъ

$$\overline{\xi}_2^2+[-\overline{\varphi}_1(x,u)-2c]\overline{\xi}_2+\overline{\xi}_2(x,u)+c\overline{\varphi}_1(x,u)+c_2=0$$

вычитая отсюда

$$\overline{\xi}_2^2+\overline{\varphi}_1(x,u)\overline{\xi}_2+\overline{\varphi}_2(x,u)=0$$

получаемъ уравненіе первой степени относительно $\overline{\xi}_2$, опредѣляющее $\overline{\xi}_2$ въ раціональной функціи отъ (x).

Въ виду этого второй изъ разнообразныхъ случаевъ сводится къ первому т. е.

$$\delta\{\underline{qv}\}=1$$

Полагая

$$y=e^{\frac{2i}{x}}\overline{y}$$

$$y'=e^{\frac{2i}{x}}\left(-\frac{2i}{x^2}\overline{y}+\overline{y}'\right)$$

$$y''=e^{\frac{2i}{x}}\left(\frac{4(1+xi)}{x^4}-\frac{4i}{x^2}\overline{y}'+\overline{y}''\right)$$

мы сводимъ заданное уравненіе къ уравненію

$$\overline{y}''+\frac{1+2x-4i}{x^2}\overline{y}'+\frac{4-2i-5x^2}{x^4}y=0 \qquad (452)$$

Рядъ Томэ: $\alpha_1+1=3$ $\alpha_2+0=4:h=2$ и потому уравненіе (452) не можетъ имѣть рѣшенія типа $(\overline{qv})$, откуда слѣдуетъ, что уравненіе (451)

$$x^2y''+(1+2x)y'-5y=0$$

не рѣшается въ квадратурахъ.

Примѣръ.

Возьмемъ еще уравненіе

$$x^2y''+(6x+1)y'+5y=0 \tag{447}$$

Рѣшимъ задачу: рѣшается ли оно въ квадратурахъ и въ случаѣ разрѣшимости найдемъ его общее рѣшеніе?

Единственно возможный случай

$$\overline{\xi}=-\frac{1}{x^2}+c_1+d_1x+\ldots.$$

Здѣсь $$N=1$$

Уравненіе (447) не имѣетъ регулярнаго рѣшенія такъ какъ рядъ Томэ:

$$\alpha_1=3 \qquad \alpha_2=2$$

Вслѣдствіе этого

$$\delta\{\overline{qv}\}\leqslant 1$$

т. е.

$$\delta\{\overline{qv}\}=1$$

$\overline{\xi}$ раціональная функція

$$\overline{\xi}=-\frac{1}{x^2}+C$$

при этомъ $C=0$, ибо иначе

$$\eta=e^{\frac{1}{x}+cx}(\overline{qv})$$

имѣло бы $x=\infty$ существенно особенной точкой между тѣмъ, какъ ур. (447), какъ легко видѣть, для $x=\infty$ Фуксовскаго типа.

Полагая

$$y=e^{\frac{1}{x}}\overline{y}$$

приходимъ къ уравненію:

$$x^2\bar{y}''+(6x-1)x\bar{y}'+(6x-4)\bar{y}=0$$

Въ виду того что это послѣднее уравненія для котораго рядъ Томэ

$$\alpha_1=3 \qquad \alpha_2=3$$

можетъ имѣть только одно рѣшеніе

$$\bar{y}=(\overline{qv})$$

мы должны имѣть

$$\delta(\overline{qv})=1$$

Нахожденіемъ этого рѣшенія займемся въ одномъ изъ слѣдующихъ параграфовъ.

§ 68. *Уравненіе Рикатти.*

Въ качествѣ примѣра приведемъ еще слѣдующее линейное уравненіе.

$$y''+\frac{m}{m+2}\frac{y'}{x}-y=0 \tag{453}$$

гдѣ m постоянное.

Къ этому уравненію приводится извѣстное уравненіе Рикатти

$$y'+ay^2=bx^m$$

при помощи слѣдующихъ преобразованій:

1) полагая

$$u=e^{\int ay\,dx}$$

получаемъ

$$\frac{d^2u}{dx^2}=Ax^m u$$

2) полагая

$$x^{\frac{m+2}{2}} = kt$$

и подчиняя k условію

$$\frac{k^2 A}{p^2} = \pm 1$$

получаемъ уравненіе

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{m}{m+2} \frac{1}{t} \frac{du}{dt} \pm 1 = 0$$

Такимъ образомъ вопросъ о рѣшеніи уравненія Рикатти сводится къ вопросу о рѣшеніи линейнаго уравненія (453)

Уравненіе (453) имѣетъ иррегулярное рѣшеніе только при $x = \infty$

$$y = e^{\int \zeta \, dx}$$

Полагая

$$\xi = kx^m + \ldots$$

найдемъ k, m по методѣ § 66.

А, именно, уравненіе (453) подстановкой $y = e^{\int \xi \, dx}$ приводимъ къ

$$\xi' + \xi^2 + \frac{b\xi}{x} - 1 = 0$$

$b = \frac{m}{m+2}$, что даетъ

$$k^2 x^{2q} + \ldots \quad bax^{q-1} + \ldots - 1 = 0$$

или

$$k^2 x^{2q} + \ldots\ldots 0 + \ldots\ldots - 1 = 0$$

если $q = 0$

Единственно возможный случай, когда старшіе члены $k^2 x^{2q}, -1$

$$2q = 0 \quad q = 0$$

$$k^2=1 \quad k_1=1, \quad k_2=-1$$

Здѣсь возможны для случая

$$\delta\{\overline{qv}\}=1 \qquad \delta\{\overline{qv}\}=2$$

Но второй долженъ быть отброшенъ, такъ какъ согласно замѣчанію § 67 k имѣетъ именно тѣ значенія при которыхъ уравненіе

$$\bar{\xi}^2+\bar{\varphi}_1(x)\bar{\xi}+\bar{\varphi}_2(x)=0$$

приводимо.

Такимъ образомъ $\bar{\xi}$ раціональная функція безъ полюсовъ (такъ какъ для единственнаго возможнаго полюса $x=\infty$ $q=0$)

$$\xi=c=const=\pm 1$$

Итакъ

$$y=e^{\pm x}(\overline{qv})$$

$\bar{y}=(\overline{qv})$ опредѣляется уравненіемъ

$$\bar{y}''+\left(2+\frac{b}{x}\right)\bar{y}'+\frac{b}{x}\bar{y}=0 \qquad (\overline{453})$$

Если это уравненіе имѣетъ рѣшенія, отвѣчающія какъ $\bar{\xi}_1=+1$, такъ и $\bar{\xi}_2=-1$, то оно имѣетъ 2 группы основныхъ рѣшеній, а это (§ 64) предполагаетъ

$$\delta[\overline{qv}]=1 \qquad \delta(\overline{qv})=1$$

Если рѣшенія отвѣчаютъ только одному изъ значеній $\bar{\xi}_1, \bar{\xi}_2$, то, такъ какъ уравненіе $(\overline{453})$ не можетъ имѣть рѣшеніе типа $(\overline{qv})$ такъ какъ уравненіе $(\overline{453})$ приводится подстановкой $x=\frac{1}{t}$ къ уравненію:

$$y''_t+\frac{m+4}{m+2}\frac{y_t'}{t}-\frac{y}{t^4}=0,$$

для котораго при $x=\infty$ рядъ Томэ

$$\alpha_1+1=2 \qquad \alpha_2=4,$$

то у уравненія (453) должны существовать не основныя рѣшенія. Здѣсь необходимо сдѣлать дополненіе къ изложенному въ §§ 63, 64, имѣющее значеніе и для послѣдующаго. Мы доказали, что порядокъ дифференціальнаго уравненія (429): $l \leqslant \frac{n}{m}$, гдѣ n порядокъ уравненія (332). Но изъ хода доказательства очевидно слѣдуетъ, что $l \leqslant \frac{n'}{m}$ гдѣ $n' = \Sigma l_i$ число независимыхъ основныхъ рѣшеній и далѣе $\delta\eta \leqslant n'$

Въ настоящемъ случаѣ, поэтому имѣемъ:

так҄ъ какъ $$\Sigma l_i = 1$$

$$\delta(\overline{qv}) = 1$$

Мы не будемъ заниматься нахожденіемъ $(\overline{qv})$, но выведемъ необходимое условіе существованіе подобнаго рѣшенія y уравненія $(\overline{453})$, которое вмѣстѣ съ тѣмъ будетъ условіемъ *разрѣшимости въ квадратурахъ уравненія Рикатти.*

Мы имѣемъ:

$$\overline{y} = (\overline{qv}) = e^{\int \varphi(x)\,dx},$$

гдѣ $\varphi(x)$ раціональная функція, причемъ для каждаго полюса $\underline{x}$ имѣемъ

$$\varphi(x) = \frac{a}{x-\underline{x}} + a_0 + d_1(x-\underline{x}_1) + \ldots$$

Согласно § 52

$$\overline{y} = (x-\underline{x})^a\left[c_1 + d_1(x-\underline{x}) + \ldots\right]$$

причемъ въ томъ случаѣ, когда a дробное или отрицательное оно представляетъ корень опредѣляющаго уравненія, относящагося къ линейному уравненію (453)

$$\underline{x}=0 \qquad a_0(a_0-1)+ba_0=0 \text{ откуда } \qquad a_0=1-b$$

$$\underline{x}=\infty \qquad 2a_\infty=b \qquad \text{——} \qquad a_\infty=\frac{b}{2}$$

Такъ какъ сумма вычетовъ $\varphi(x)$ равна нулю или что тоже, сумма положительныхъ равна суммѣ численныхъ значеній отрицательныхъ вычетовъ

$$\sum_{i=1}^{i=k} R_i^{(+)} = \sum_{i=1}^{i=l} R_i^{(-)} \qquad (454)$$

то не всѣ $R_i^{(-)}$ равны нулю, при этомъ $-R_i^{(-1)} \gtreqless 0$ должны заключаться среди: a_0, a_∞ Положимъ, что $a_\infty = -R^{(-)}$, тогда $b < 0$ $a_0 = 1 - b > 0$ т. е. $a_0 = R^{(+)}$

Если же $a_0 = -R^{(-)}$, то $b > 1$ и потому $a_\infty = R^{(+)}$

Уравненіе (454) даетъ

$$R_1^{(-)} = R_1^{(+)} + \sum_{i=2}^{i=k} R_i^{(+)}$$

откуда $R_1^{(-)} = R^{(+)} + M$ гдѣ M цѣлое число и слѣдовательно

$$|a_0 + a_\infty| = \left|1 - \frac{b}{2}\right| = M$$

откуда

$$b = \frac{m}{m+2} = 2k$$

гдѣ k цѣлое число и наконецъ

$$m = \frac{4k}{-2k+1}$$

Это хорошо извѣстное условіе интегрируемости въ квадратурахъ уравненія Рикатти.

§ 69. *О полюсахъ второго и четвертаго класса.*

Полюса второго класса можемъ разбить на два подкласса:

1) отличныя отъ точекъ развѣтленія

$$(\underline{\underline{\overset{2}{x}}}, \underline{\underline{\overset{2}{u}}})$$

2) и совпадающія съ точками развѣтленія

$$(\underline{\underline{\overset{2}{\bar{x}}}}, \underline{\underline{\overset{2}{\bar{u}}}})$$

Для $(\underline{\underline{\overset{2}{x}}}, \underline{\underline{\overset{2}{u}}})$ имѣемъ

$$\xi = \frac{a}{x-\underline{x}} + \sum_{j=-(d-1)}^{j=\infty} k_{\frac{j}{d}} \, (x-\underline{x})^{\frac{j}{d}}$$

и разложеніе

$$\eta = [\overline{qv}] = e^{\int \xi \, dx}$$

будетъ

$$\eta = [\overline{qv}] = z^b \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j z^j$$

если $(x-\underline{x})^{\frac{1}{d}} = z$, $b = a$, число ирраціональное. Но b (согласно § 54) представляетъ корень опредѣляющаго уравненія (386) или (390)

$$\overset{n}{[r]} + q_1 \overset{n-1}{[r]} + \ldots . q_{n-1} \overset{1}{[r]} + q_n = 0 \tag{386}$$

$$q_h \overset{n-h}{[\ r\ ]} + q_{h+1} \overset{n-h-1}{[\ \ r\ \ ]} + \ldots . q_{n-1} \overset{1}{[r]} + q_n = 0 \tag{390}$$

причемъ $z = 0$ корень $p_i(z)$, а $(\underline{x}, \underline{u})$ полюсъ $p_i(x, u)$.

Такимъ образомъ получаемъ опредѣленное число возможныхъ полюсовъ $(\underline{\overset{2}{x}}, \underline{\overset{2}{u}})$ и опредѣленное число возможныхъ значеній ихъ порядковъ $\frac{a}{\delta} = \frac{b}{d}$

Для $(\underline{\underline{\overset{2}{\bar{x}}}}, \underline{\underline{\overset{2}{\bar{u}}}})$ имѣемъ

$$[\overline{qv}] = z^b \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j z^{\frac{j}{f}} \qquad l_0 \gtrless 0 \tag{383}$$

На основаніи доказаннаго въ § 54 можемъ утверждать существованіе основного рѣшенія типа:

$$[\overline{\overline{qv}}] = z^{b+\frac{s}{f}} \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j^{(1)} z^j \tag{384$^{(1)}$}$$

$(\underset{=}{\overset{2}{x}}, \underset{=}{\overset{2}{u}})$ полюсъ $p_i(x,u)$. Такъ какъ можно положить $s=0$, то b корень опредѣляющаго уравненія. Для того, чтобы разложеніе (383) быть по степеняхъ $z^{\frac{1}{f}}$ необходимо, чтобы кромѣ того при s не равномъ кратному f:

$$l_s \gtrless 0$$

т. е. необходимо существованіе рѣшенія $[\overline{\overline{qv}}]$ и при s отличномъ отъ нуля.

Такимъ образомъ въ случаѣ $(\underset{=}{\overset{2}{x}}, \underset{=}{\overset{2}{u}})$ необходимо, чтобы не только b, но и $b+\frac{s}{f}$ представляли корни опредѣляющаго уравненія.

Совершенно такимъ же образомъ изслѣдуются полюса $(\underset{-}{\overset{4}{x}}, \underset{-}{\overset{4}{u}})$

Точки $(\overset{4}{\overline{x}}, \overset{4}{\overline{u}})$

Когда $(\underset{-}{\overset{4}{x}}, \underset{-}{\overset{4}{u}})$ совпадаетъ съ точкой развѣтленія $(\underline{\overline{x}}, \underline{\overline{u}})$, то $(\underset{-}{\overset{4}{x}}, \underset{-}{\overset{4}{u}})$ представляетъ полюсъ $p_i(x,u)$ порядка $\frac{s}{f}$, гдѣ

$f=\frac{h}{d}$ (h наименьшее кратное δ и d) при этомъ $\frac{s}{f}$ представляетъ корень опредѣляющаго уравненія относящагося къ $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$.

Точки $(\overset{4}{\underline{\underline{x}}}, \overset{4}{\underline{\underline{u}}})$

Въ томъ случаѣ, когда $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$ не совпадаетъ съ $(\overline{x}, \overline{u})$ ξ должно разлагаться по дробнымъ степенямъ $(\underline{x}, \underline{u})$, такъ какъ порядокъ $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$ меньше единицы.

Такъ какъ въ $(\overset{4}{\underline{\underline{x}}}, \overset{4}{\underline{\underline{u}}})$ ξ однозначна на Римановской поверхности, относящейся къ функціи u, то необходимо, чтобы u разлагалось по дробнымъ степенямъ $(x-\underline{x})$ т. е. чтобы $(\overset{4}{\underline{\underline{x}}}, \overset{4}{\underline{\underline{u}}})$ представляла точку развѣтленія функціи u. Для $(\overset{4}{\underline{\underline{x}}}, \overset{4}{\underline{\underline{u}}})$ мы имѣемъ тоже конечное опредѣленное число возможныхъ значеній.

Примѣръ.

Уравненіе

$$y''+\frac{xy'}{x^2-1}+\frac{y}{(x^2-1)^2}=0 \tag{455}$$

Фуксовскаго типа для всѣхъ критическихъ точекъ $x=1, -1, \infty$.

Основное рѣшеніе можетъ быть только типа (§ 52)

$$(\overline{qv})=e^{\int \xi\, dx}$$

Полюсами $(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{2}{\underline{u}})$ для ξ могутъ быть только $x=1, -1, \infty$.

Изъ ихъ числа слѣдуетъ выбросить $x=-, \infty$ ибо опредѣляющія уравненія для

$$x=1\quad \alpha^2-\frac{1}{2}\alpha+1=0\qquad \alpha=\frac{1}{4}\pm i\frac{\sqrt{5}}{4}$$

$$x=-1\qquad \alpha\left(\alpha-\frac{1}{2}\right)=0\qquad \alpha=\frac{1}{2}$$

$$x=\infty\quad \alpha^2+2\alpha+1=0\qquad \alpha=-1$$

и только для $x=1$ даютъ ирраціональный корень.

Слѣдовательно $(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{2}{\underline{u}})$: $x=1$

$$a=b=\frac{1}{4}\pm\frac{i\sqrt{5}}{4}$$

§ 70. *Построеніе* $(\overline{qv}^{(1)}|$.

Мы знаемъ, что

$$(\overline{qv})=e^{\int\overline{\varphi}(x,u,\zeta)\,dx}\ [alg]$$

Разлагая

$$\int\overline{\varphi}(x,u,\zeta)\,dx$$

на сумму

$$(\underline{ab}|+|\underline{ab})+[lg^{(1)}]=(\underline{qv})$$

мы можемъ принять за $(\overline{qv}|$ часть $(\underline{ab}|$, которая имѣетъ разложенія $alg(x-\underline{x})$ съ ирраціональными коэффиціентами a, а за $|\overline{qv})$ сумму $|\underline{ab})+[lg^{(1)}]$.

Полагая

$$(\overline{qv}|=e^{\int\underline{\xi}\,dx}$$

мы получаемъ для $\underline{\xi}$ алгебраическое уравненіе

$$\underline{\xi}^{\tau}+\underline{\varphi}_1(x,u)\underline{\xi}^{\tau-1}+\ldots\underline{\varphi}_{\tau}(x,u)=0$$

причемъ для него извѣстны:

1) граница для $\underline{\tau}$

2) возможные полюса $\underline{\varphi}_i(x, u)$, высшія границы для ихъ порядковъ и нѣкоторыя коэффиціенты главныхъ частей разложеній, имъ отвѣчающихъ.

Но при этомъ, какъ показано въ § 56 возможно построеніе $(\overline{qv})$.

Вмѣсто построенія $(\overline{qv})$ бываетъ иногда удобнѣе строить его множитель $(\overline{qv}|$.

Подстановкой

$$(\overline{qv}) = (\overline{qv}|\underline{y}$$

заданное линейное однородное уравненіе

$$y^{(n)} + p_1(x, u) y^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(x, u) y' + p_n(x, u) = 0 \qquad (332)$$

приводимъ къ другому линейному однородному уравненію:

$$\underline{y}^{(n)} + \underline{p}_1(x, u, \underline{\zeta}) y^{(n-1)} + \ldots \underline{p}_{n-1}(x, u, \underline{\zeta}) y' + \underline{p}_n(x, u, \underline{\zeta}) = 0 \quad (\underline{450}$$

и задача объ опредѣленіи $(\overline{qv})$ сводится къ задачѣ объ опредѣленіи рѣшенія $|\overline{qv})$ уравненія (450).

Въ томъ случаѣ, когда уравненіе (450) не имѣетъ рѣшенія $|\overline{qv})$ *отличнаго отъ постояннаго, рѣшеніе* $(\overline{qv})$ *ур. (332) сводится къ* $(\overline{qv}|$

Чтобы *ур. (450) имѣло постоянное рѣшеніе* для этого необходимо,

$$\underline{p}_n(x, u, \zeta) = 0$$

Если это условіе не выполнено, то имѣемъ *случай неразрѣшимости въ квадратурахъ уравненія (332).*

Примѣръ.

Для уравненія

$$y''+\frac{xy'}{x^2-1}+\frac{y}{(x^2-1)^2}=0 \tag{455}$$

найдемъ общее рѣшеніе, выражаемое въ квадратурахъ мы имѣемъ единственный возможный полюсъ

$$\underline{\xi}:\quad x=1$$

Если $\delta(\overline{qv}|=1$, то

$$\underline{\xi}=\frac{k}{x-1}+C$$

причемъ $C=0$, ибо иначе

$$y=e^{Cx}(x-1)^k\,|\overline{qv})$$

имѣло бы существенно особенную точку $x=\infty$.

Если

$$\delta(\overline{qv}|=2,$$

то

$$\underline{\xi_1}=\frac{k_1}{x-1}+c_1+d_1(x-1)+..$$

$$\underline{\xi_2}=\frac{k_2}{x-1}+c_2+d_2(x-1)+..$$

$$\underline{\xi}^2-\left(\frac{k_1+k_2}{x-1}+c\right)\underline{\xi}+\left(\frac{k_1k_2}{(x-1)^2}+\frac{l}{x-1}+c\right)=0$$

гдѣ k_1, k_2 могутъ имѣть только значеніе

$$\frac{1\pm i\sqrt{5}}{4},$$

Ниже (§ 82) будетъ доказано, что это уравненіе обязательно имѣетъ неосновное рѣшеніе, въ виду чего возможенъ только случай:

$$\delta\left(\overline{qv}\right| = 1$$

Полагая

$$y = e^{\frac{k}{x-1}} y$$

уравненіе (455) приводимъ къ уравненію, могущему, имѣть основныя рѣшенія только типа $|\overline{qv})$, которое мы не будемъ выписывать.

Во многихъ случаяхъ невозможность рѣшенія въ конечномъ видѣ весьма просто выводится, какъ простое слѣдствіе уравненія

$$\sum R = 0$$

сумма вычетовъ подинтегральной функціи $\int \xi\, dx = \int \varphi(x, u, \zeta) dx = \int \varphi(x, v)\, dx$ $v = \alpha u + \beta\zeta$, гдѣ α, β постоянныя, равна нулю. Такъ какъ въ настоящемъ случаѣ только одинъ вычетъ $\frac{1 \pm \sqrt{5}}{4}$ ирраціональный, то уравненіе это дало бы $\frac{1 \pm i\sqrt{5}}{4}$ въ видѣ раціональнаго числа.

Отсюда слѣдуетъ, что уравненіе (455) неразрѣшимо въ квадратурахъ.

§ 71. *О полюсахъ третьяго класса.*

Совершенно также, какъ въ случаѣ полюсовъ $(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{2}{\underline{u}})$ заключаемъ, что при b отрицательномъ или дробномъ положительномъ:

$(\overset{3}{\underline{x}}, \overset{3}{\underline{u}})$, а именно $(\overset{31}{\underline{x}}, \overset{31}{\underline{u}})$ и $(\overset{32}{\underline{x}}, \overset{32}{\underline{u}})$ представляютъ полюса $p_i(x, u)$, а b представляютъ корни опредѣляющихъ уравненій.

Но $(\overset{33}{\underline{x}}, \overset{33}{\underline{u}})$ не всегда заключаются среди полюсовъ $p_i(x, u)$.

Этотъ подклассъ можемъ въ свою очередь раздѣлить на два подкласса.

$$b \geqq n \qquad (\overset{331}{\underline{x}}, \overset{331}{\underline{u}})$$

$$b < n \qquad (\overset{332}{\underline{x}}, \overset{332}{\underline{u}})$$

Легко видѣть, что $(\overset{331}{\underline{x}}, \overset{331}{\underline{u}})$ тоже находятся среди полюсовъ $p_i(x, u)$.

Полагая въ уравненіи (450)

$$y_z^{(n)} + p_1(z)\, y^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(z)\, y' + p_n(z)\, y = 0,$$

гдѣ предполагаемъ что $p_i(z)$ не имѣетъ $z = 0$ полюсомъ т. е.

$$p_i(z) = \sum_{j=0}^{j=\infty} p_{ij}\, z^j$$

$$y = z^b \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j\, z^j$$

получаемъ коэффиціентомъ при нисшемъ членѣ z^{b-n} коэффиціентъ l_0 и противно условію $l_0 = 0$. b будетъ корнемъ опредѣляющаго уравненія.

Поэтому въ случаѣ $(\overset{332}{\underline{x}}, \overset{332}{\underline{u}})$ b можетъ имѣть только слѣдующія значенія

$$1, 2 . 3 \ldots \overline{n-1}$$

а a значенія

$$\frac{1}{d}, \frac{2}{d}, \frac{3}{d} \ldots \frac{\overline{n-1}}{d}$$

Если $(\underline{x},\underline{u})$ точка развѣтвленія $(\overset{3}{\underline{x}},\overset{3}{\underline{u}})$, такъ что $[\underline{qv}]$ разлагается по степенямъ $z^{\frac{1}{f}}$, то какъ въ случаѣ $(\overset{2}{\underline{x}},\overset{2}{\underline{u}})$ легко доказываемъ, что въ случаѣ $(\overset{31}{\underline{x}},\overset{31}{\underline{u}})$ $(\overset{32}{\underline{x}},\overset{32}{\underline{u}})$ $(\overset{331}{\underline{x}},\overset{331}{\underline{u}})$ вмѣстѣ съ $b=ad$ и $b+\frac{s}{f}$ будетъ корнемъ опредѣляющаго уравненія.

Въ случаѣ $(\overset{332}{\underline{x}},\overset{332}{\underline{u}})$ опредѣляющее уравненіе имѣетъ корень типа $\frac{s}{f}$.

Тогда мы получаемъ случай, когда $(\overset{332}{\underline{x}},\overset{332}{\underline{u}})$ находятся тоже среди полюсовъ. Выдѣляемъ эти точки въ особую группу $(\overset{332}{\underline{\underline{x}}},\overset{332}{\underline{\underline{u}}})$.

Примѣръ.

Для уравненія

$$x^3\bar{y}''+(6x-1)x\bar{y}'+(6x-4)\bar{y}=0 \tag{456}$$

къ которому мы привели рѣшеніе уравненія

$$x^2y''+(6x+1)y'+5y=0$$

опредѣляющія уравненія

$$\left.\begin{array}{llll} x=0 & \alpha+4=0 & \text{откуда} & \alpha=-4 \\ x=\infty & \alpha(\alpha-1)=0 & \text{——} & \alpha=0,1 \end{array}\right| \quad (\overline{qv})=|\overline{qv})$$

Возможны слѣдовательно только полюса: $(\overset{31}{\underline{x}},\overset{31}{\underline{u}}):x=0$

Въ виду существованія только одного основного рѣшенія (§ 68):

$$\delta(\overline{qv})=\delta|\overline{qv})=1$$

раціонально

$$\overline{|qv)} = e^{\int \varphi(x)\,dx}$$

гдѣ $\varphi(x)$ раціональная функція. Такъ какъ $\int \varphi(x)\,dx$ всегда выражается съ помощью $[elm]$, то тоже относится и къ $\overline{|qv)}$ и мы имѣемъ

$$\overline{|qv)} = [alg]$$

причемъ $[alg] = [\chi]^{\lambda}$, гдѣ χ раціональная функція или

$$[alg] = \left\{ \frac{(x-\overline{x}_1)^{k_1}(x-\overline{x}_2)^{k_2}\ldots(x-\overline{x})_p^{k_p}}{(x-\underline{x}_1)^{l_1}(x-\underline{x}_2)^{l_2}\ldots(x-\underline{x})_q^{l_p}} \right\}^{\lambda}$$

$_{l}\lambda$ и $k_i\lambda$ представляютъ порядки нулей и полюсовъ $\overline{\underline{y}}$.

Мы имѣемъ одинъ полюсъ $\underline{x} = 0$ порядка 4-го

$$l_1\lambda = 4$$

ни одного нуля дробнаго порядка (ибо нѣтъ $(\overset{\text{зз}}{\underline{x}}, \overset{\text{зз}}{\underline{u}})$, такъ что

$$[alg] = \frac{ax^3 + bx^2 + cx + d}{x^4}$$

Подставляя вмѣсто $\overline{\underline{y}}$ это выраженіе въ заданное уравненіе и приравнивая коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x нулю имѣемъ

$$a = b = 0 \qquad 2d - c = 0.$$

откуда (отбрасывая произвольную постоянную)

$$\overline{\underline{y}} = \frac{1+2x}{x^4}$$

Частное основное рѣшеніе уравненія

$$x^2y'' + (6x+1)y' + 6y = 0$$

равно

$$y=e^{\frac{1}{x}}\bar{y}=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)$$

Для нахожденія общаго рѣшенія уравненія (456) мы приводимъ его подстановкой

$$y=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)\int u\,dx$$

или, что тоже уравненіе (456) подстановкой

$$\bar{y}=\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)\int u\,dx$$

къ уравненію перваго порядка

$$u'+\frac{(4x+1)}{(2x+1)\,x^2}=0$$

интегрированіе котораго даетъ

$$u=e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^2$$

откуда

$$y=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)\left[\int e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^2dx+C\right]$$

Такъ выражается общее рѣшеніе уравненія (456) въ квадратурахъ.

При этомъ остается открытымъ вопросъ о томъ, выражается ли интегралъ

$$\int e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^2dx$$

черезъ элементарныя функціи, который будетъ рѣшенъ только во II главѣ этой части работы.

Примѣръ 2.

Рѣшимъ еще для примѣра уравненіе

$$x^3 y''-2x(x+3)y'+18y=0 \tag{457}$$

При $x=0$ существенно особенная точка.
При $x=\infty$ уравненіе Фуксовскаго типа.
Для $x=0$ рядъ Томэ.

$$\alpha_1+1=3 \quad \alpha_2+0=3 \quad h=1 \quad n-h=1$$

уравненіе (457) можетъ имѣть только одно рѣшеніе типа $(\overline{qv})$:

$$\delta(\overline{qv})=1$$

Опредѣляющія уравненія:
При

$$x=0 \qquad 6\alpha-18=0 \qquad \alpha_0=3$$

$$x=\infty \qquad \alpha^2+3\alpha=0 \qquad \alpha_\infty=-3$$

имѣемъ раціональныя корни, поэтому

$$(\overline{qv})=|\overline{qv})$$

На основаніи замѣчая сдѣланнаго въ предыдущемъ примѣрѣ

$$|\overline{qv})=[alg]$$

Такъ какъ корни опредѣляющаго уравненія всѣ цѣлыя, то въ этой формулѣ $\delta[alg]=1$ $k_i\lambda$ и $l_i\lambda$ цѣлыя числа т. е. $[alg]$ раціональная функція причемъ, такъ какъ $x=\infty$ полюсъ 3 порядка, то

$$y = |\overline{qv}) = x^3 + ax^2 + bx + c$$

Подставляя это значеніе въ уравненіе (457) находимъ $a = b = c = 0$ частное основное рѣшеніе $\underline{\eta} = x^3$.

Полагая $y = x^3 \int \overline{y}\, dx$, уравненіе (457) приводимъ къ уравненію перваго порядка

$$x^3\, \overline{y}' + 2x(x-3)\,\overline{y} = 0$$

и при помощи его легко опредѣляемъ общее рѣшеніе предложеннаго уравненія (457)

$$y = C_1 x^3 + C_2 x^3 e^{\frac{6}{x}}$$

§ 72. *Построеніе* $|\overline{qv}^{(1)})$

$|\overline{qv}) = e^{\int \underline{\xi}\, dx}$ можно построить, если указаны:

1) высшая граница для степени уравненія

$$\underline{\xi}^{\overline{\tau}} + \underline{\overline{\varphi}}(x, u)\, \underline{\xi}^{\overline{\tau}-1} + \ldots\ldots \underline{\overline{\varphi}}_{\underline{\overline{\tau}}}(x, u) = 0, \qquad (\overline{\underline{426}})$$

опредѣляющаго $\overline{\underline{\xi}}$,

2) высшая граница для порядковъ $\varphi_i(x, u)$ при данномъ $\overline{\underline{\tau}}$.

Мы укажемъ рѣшеніе второй изъ этихъ задачъ. Изъ выраженій (441) § 65 для $\varphi_i(x, u)$ въ корняхъ $\xi_1, \xi_2 \ldots$ уравненія

$$\xi^\sigma + \varphi_1(x, u)\, \xi^{\sigma-1} + \ldots\ldots \varphi_\sigma(x, u) = 0$$

слѣдуетъ, что, если ξ_i могутъ имѣть только простыя полюса $(\overset{3}{\underline{x}}, \overset{3}{\underline{u}})$ или полюса $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$ порядка ниже перваго, то $\varphi_1(x, u)$ можетъ имѣть $(\overset{3}{\underline{x}}, \overset{3}{\underline{u}})$ только простыми полюсами, а $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$ полюсами порядка ниже перваго, $\varphi_2(x, u)$ можетъ имѣть

$(\overset{3}{\underline{x}}, \overset{3}{\underline{u}})$ полюсами не выше 2-го, а $(\overset{4}{\underline{x}}, \overset{4}{\underline{u}})$ ниже второго порядка и т. д.

Если черезъ N обозначить число различныхъ полюсовъ $(\underline{x}, \underline{u}): \xi_1, \xi_2 .. \xi_\sigma$, то порядокъ $\varphi_i(x, u)$

$$f_i^{(\sigma)} \leqq i N$$

Мы найдемъ высшую границу $\mathcal{F}_i^{(\sigma)}$ для $f_i^{(\sigma)}$, если найдемъ высшую для N т. е. для числа различныхъ полюсовъ $(\underline{x}, \underline{u})$.

Замѣтимъ теперь, что для случая уравненія $(\overline{426})$

$$N = \overset{31}{\underline{N}} + \underline{N} + \overset{4}{\underline{\underline{N}}} + \overset{332}{\underline{\underline{N}}} \tag{458}$$

гдѣ

$$N = \overset{32}{N} + \overset{4}{\underline{\underline{N}}} + \overset{332}{\overline{\underline{\underline{N}}}}$$

принимая слѣдующія обозначенія $\overset{\alpha\beta\gamma}{\overline{N}}, \overset{\alpha\beta\gamma}{\overline{\underline{N}}}, \overset{\alpha\beta\gamma}{\underline{N}}$ числа полюсовъ $\overset{\alpha\beta\gamma}{\underline{x}}, \overset{\alpha\beta\gamma}{\underline{u}})$ и т. д. $\overset{\alpha\beta\gamma}{\overline{b}}, \overset{\alpha\beta\gamma}{\overline{\underline{b}}}, \overset{\alpha\beta\gamma}{\underline{b}}$ числа b имъ отвѣчающія и т. д. Мы будемъ теперь искать высшія границы для членовъ суммы (458)

1) $\overset{31}{\underline{N}}$

Такъ какъ $(\overset{31}{\underline{x}}, \overset{31}{\underline{u}})$ находятся среди полюсовъ $p_i(x, u)$, причемъ $\overset{31}{\underline{b}}$ представляютъ корни опредѣляющаго уравненія и $\overset{31}{\underline{b}} < 0$, то

$$\overset{31}{\underline{N}} \leqq \overset{31}{\underline{A}} \tag{459'}$$

гдѣ $\overset{31}{A}$ *число полюсовъ* $p_i(x, u)$, *для которыхъ опредѣляющее уравненіе имѣетъ отрицательные корни.*

2) $\underline{N}$

$(\overset{32}{\underline{x}}, \overset{32}{\underline{u}})$ $(\overset{4}{\underline{\underline{x}}}, \overset{4}{\underline{\underline{u}}})$ $(\overset{332}{\underline{\underline{x}}}, \overset{332}{\underline{\underline{u}}})$ находится среди полюсовъ $p_i(x, u)$, причемъ $\overset{31}{\underline{b}}$ представляютъ положительныя раціональные корни опредѣляющихъ уравненій.

$$\underline{N} \leqq \underline{A} \tag{459''}$$

гдѣ A число полюсовъ $p_i(x, u)$, для которыхъ опредѣляющее уравненіе имѣетъ раціональные положительные корни

4) $\overset{4}{\underline{\underline{N}}}$

$(\overset{4}{\underline{\underline{x}}}, \overset{4}{\underline{\underline{u}}})$ представляютъ точки развѣтленія на Римановской поверхности функціи u если число этихъ точекъ $\overset{4}{\underline{\underline{A}}}$, то

$$\overset{4}{\underline{\underline{N}}} \leqq \overset{4}{\underline{\underline{A}}} \tag{459'''}$$

Остается найти высшую границу для $\overset{331}{\underline{\underline{N}}}$

Послѣднее достигается уже совершенно иною методой, такъ какъ $(\overset{331}{\overline{\overline{x}}}, \overset{331}{\overline{\overline{u}}})$ могутъ уже не представлять полюсовъ $p_i(x, u)$.

Представимъ $\overline{\underline{\xi}}$, какъ алгебраическую функцію (x, u) въ слѣдующемъ видѣ:

$$\overline{\underline{\xi}} = \overline{\underline{\varphi}}(x, u, t) = \phi(x, v),$$

гдѣ $\overline{\underline{\varphi}}$ раціональная функція (x, u, t). ϕ раціональная функція отъ (x, v), причемъ можно положить

$$v = \alpha u + \beta t,$$

гдѣ α, β надлежаще выбранныя постоянныя. Если u разлагается по степеняхъ $(x - \underline{x})^{\frac{1}{d}}$, а t по степенямъ $(x - \underline{x})^{\frac{1}{\delta}}$, то

$$\underline{\overline{\xi}} = \frac{a}{x - \underline{x}} + k_0 + k_{\frac{1}{h}} (x - \underline{x})^{\frac{1}{h}} + \ldots .$$

гдѣ h наименьшее кратное d, δ

Вычетъ $\underline{\overline{\xi}}$ для $x = \underline{x}$ равенъ $ah = adf = bf$, гдѣ $f = \frac{h}{d}$.

Взявъ раціональную функцію $\mathscr{F}(x, v)$ мы можемъ написать, что сумма вычетовъ, относящихся къ различнымъ значеніямъ $x = \underline{x}$ (отвѣчающимъ полюсамъ) равна нулю.

Если положить

$$\overset{\alpha\beta\gamma}{S} = \sum_i \overset{\alpha\beta\gamma}{\underline{b_i}} \overset{\alpha\beta\gamma}{\underline{f_i}}$$

гдѣ $\sum\limits_i$ распространенія на всѣ точки $(\overset{\alpha\beta\gamma}{\underline{x_i}}, \overset{\alpha\beta\gamma}{\underline{u_i}})$, то

$$\overset{31}{\underline{S}} + \underline{S} + \overset{4}{\underline{\underline{S}}} + \overset{332}{\underline{\underline{S}}} = 0 \qquad (460)_1$$

$$\underline{S} = \overset{32}{\underline{S}} + \overset{4}{\underline{\overline{S}}} + \overset{332}{\underline{\overline{S}}}$$

Уравненіе $(460)_1$ можно переписать въ видѣ

$$\sum_i |\overset{31}{b_i}| \overset{31}{f_i} = S + \overset{332}{\underline{S}} \qquad (460)_2$$

если

$$S = \underline{S} + \overset{4}{\underline{\underline{S}}}$$

Въ виду того что $S > 0$

$$\underset{=}{\overset{332}{S}} \leqslant \sum \overset{31}{|b_i|} \overset{31}{f_i} \tag{460'}$$

Обозначаемъ черезъ $\overset{31}{|B_i|} \overset{31}{F}$ наибольшее изъ возможныхъ значенiй чиселъ $\overset{31}{|b_i|} \overset{31}{f_i}$ которое можно всегда найти.

Замѣтимъ кромѣ того, что по самому опредѣленiю

$(\underset{=}{\overset{332}{x}}, \underset{=}{\overset{332'}{u}}) \overset{332}{f_i} = 1$

Тогда

$$\underset{-}{\overset{332}{S}} = \sum \underset{=}{\overset{332}{b}}$$

а, такъ-какъ наименьшее значенiе $\underset{=}{\overset{332}{b}}$ есть 1, то

$$\underset{-}{\overset{332}{S}} > \underset{-}{\overset{332}{N}}$$

Неравенство (460′) даетъ тогда

$$\underset{-}{\overset{332}{N}} \leqslant \underset{-}{\overset{31}{N}} \overset{31}{|B_i|} \overset{21}{F}$$

или въ виду неравенства (459′)

$$\underset{-}{\overset{332}{N}} \leqslant \underset{-}{\overset{31}{A}} \overset{31}{|B_i|} \overset{31}{F_i} \tag{459''''}$$

Принимая во вниманiе уравненiя (458) и неравенства (459) имѣемъ

$$N \leqslant \underset{-}{\overset{31}{A}}(1 + \overset{31}{|B_i|} \overset{31}{F_i}) + \underset{-}{A} + \underset{=}{\overset{4}{A}}$$

и, слѣдовательно,

$$f_i \leqq i \left\{ \underline{\overset{31}{A}} (1 + |\overset{31}{B_i}| \overset{31}{F_i} + \underline{A} + \underline{\underline{\overset{4}{A}}} \right\} \tag{461}$$

Къ сожалѣнію полученное значеніе для $\varphi_i^{(\sigma)}$ очень высоко и на практикѣ представляетъ еще большія неудобства.

Примѣръ.

Для разобраннаго выше примѣра уравненія

$$x^3 y'' + (6x - 1) xy' + (6x - 4) y = 0 \tag{462}$$

число $\underline{\overset{31}{A}}$ (число полюсовъ, для коихъ корень опред. ур. < 0) равно 1.

Въ виду того, что опредѣляющее уравненіе не имѣетъ дробныхъ рѣшеній $\underline{A} = 0$

$$|\overset{31}{B}| \overset{31}{F} = 4$$

$\underline{\underline{\overset{4}{A}}}$ (въ виду того, что коэфф. рац. функціи x)$=0$

$$N \leqq 5$$

Такъ какъ $\delta |\overline{qv}) = 1$, то приходится, подставляя въ уравненіе (462)

$$y = e^{\int \frac{\varphi(x)\, dx}{x (x-a_1)(x-a_2)(x-a_3)(x-a_4)}}$$

гдѣ $\varphi(x)$ цѣлая функція 5-ой степени опредѣляетъ значенія коэффиціентовъ $\varphi(x)$ и a_i при которыхъ это значеніе y удовлетворяетъ уравненію (462) (при этомъ предполагается возможнымъ дѣленіе $\varphi(x)$ на $(x-a_i)$.

§ 73. *Приведеніе* $|\overline{qv})$ *къ* $[alg]$.

Въ случаѣ основныхъ элементарныхъ трансцендентныхъ функцій

$$|\overline{qv}) = [alg]$$

и задача *о рѣшеніи линейнаго однороднаго уравненія въ элементарныхъ трансцендентныхъ функціяхъ сводится къ алгебраическому интегрированію линейнаго уравненія.*

Въ случаѣ основныхъ трансцендентныхъ $[ab]$ $[qv]$ функція $|\overline{qv})$ вообще отлично отъ $[alg]$.

Вообще же

$$|\overline{qv}) = |\, transc\,)\,[alg]$$

Относительно перваго трансцендентнаго множителя мы знаемъ, что

$$\delta\,|\, transc) \leqq n$$

Этотъ множитель поэтому можетъ быть построенъ, такъ какъ онъ, какъ y, формы $|\overline{qv})$.

Зная его, подстановкой

$$y = |\, transc)\,\underline{\overline{y}}$$

сводимъ линейное уравненіе

$$y^{(n)} + p_1(x, u)\,y^{(n-1)} + \ldots . p_n(x, u) = 0 \qquad (332)$$

къ линейному уравненію

$$\underline{\overline{y}}^{(n)} + \underline{\overline{p}}_1(x, u, \zeta)\,\underline{\overline{y}}^{(n-1)} + \ldots \underline{\overline{p}}_n(x, u, \zeta) = 0 \qquad (\underline{450})$$

гдѣ ζ опредѣляется уравненіемъ не выше той степени, а задачу о разысканіи рѣшенія $|\overline{qv})$ для уравненія (332) къ задачѣ о разысканіи рѣшенія алгебраическаго для уравненія ($\underline{454}$).

При помощи конечнаго числа алгебраическихъ дѣйствій задача объ интегрированіи линейнаго уравненія въ квадратурахъ сводится къ задачѣ алгебраическаго интегрированія нѣкотораго линейнаго уравненія.

§ 74. *Построеніе* $[\underline{qv}^{(1)}]$.

Вмѣсто построенія основного рѣшенія $[\overline{qv}]$ по множителямъ $\{\overline{qv}\}$ $(\overline{qv}|$ и $|\overline{qv})$ можно $[\overline{qv}]$ строить, непосредственно, опредѣляя

1) высшую границу для $\sigma = \delta[\overline{qv}]$,

2) высшую границу для $f_i^{(\sigma)}$, порядковъ $\varphi_i(x, u)$ при данномъ значеніи σ.

Что касается до $\delta[\overline{qv}]$, то въ виду того, что

$$[\overline{qv}] = [tranc][alg]$$

$$\delta[transc] \leqslant n$$

мы можемъ написать

$$\delta[\overline{qv}] \leqslant n\,\delta[alg]$$

и задача сводится къ Жорданской задачѣ съ опредѣленіи $\delta[alg]$ т. е. порядка алгебраическаго рѣшенія линейнаго уравненія.

Что касается до второй задачи, то ея рѣшеніе какъ рѣшеніе аналогичной задачи для $|\overline{qv})$ основывается на неравенствѣ

$$f_i^{(\sigma)} \leqslant i\,N$$

и равенствѣ

$$N = \overset{1}{\underline{N}} + \overset{2}{\underline{N}} + \overset{31}{\underline{N}} + \underline{N} + \overset{4}{\underline{\underline{N}}} + \overset{332}{\underline{\underline{N}}}$$

Въ § 72 указано, какъ находится высшая граница для $\overset{31}{\underline{N}}, \underline{N}, \overset{4}{\underline{\underline{N}}}$

Къ этому слѣдуетъ теперь прибавить:

$$\overset{2}{\underline{N}} \leqslant \overset{2}{\underline{A}}$$

гдѣ $\underline{A}$ число полюсовъ $p_i(x, u)$ для которыхъ корни опредѣляющихъ уравненій ирраціональны.

$$\underline{\overset{1}{N}} \leqq \underline{\overset{1}{A}}$$

гдѣ $\underline{\overset{1}{A}} = \sum \frac{q_i}{d}$, гдѣ $\sum$ распростянется на всѣ полюса $p_i(x, u)$ въ которыхъ рѣшеніе иррегулярно и для которыхъ число q имѣетъ значеніе

$$q = q_i$$

Для $\underline{\underline{\overset{332}{N}}}$ мы получаемъ иную высшую границу, чѣмъ указанная въ § 73.

Уравненіе (459) въ настоящемъ случаѣ замѣняется слѣдующими

$$\underline{\overset{1}{S}} + \underline{\overset{2}{S}} + \underline{\overset{31}{S}} + \underline{S} + \underline{\underline{\overset{4}{S}}} + \underline{\underline{\overset{332}{S}}} = 0$$

уравненіе (460) слѣдующимъ

$$\sum_i |\overset{31}{b}_i| \overset{31}{f}_i + \sum_i |\overset{1}{b}_i| \overset{1}{f}_i + \sum_i |\overset{21}{b}_i| \overset{31}{f}_i = S + \underline{\overset{332}{S}}$$

если положить

$$S = \underline{S} + \underline{\overset{4}{S}} + \underline{\underline{\overset{22}{S}}}$$

и если обозначить черезъ $(\underline{\overset{21}{x}}, \underline{\overset{21}{u}})$ $(\underline{\overset{22}{x}}, \underline{\overset{22}{u}})$ полюса, относящіеся къ $b < 0$ и $b > 0$.

Въ виду этого вмѣсто формулы (461) имѣемъ.

$$f_i^{(\sigma)} \leqslant i\left\{\underline{\overset{31}{A}}[1+|\overset{31}{B}_i|\overset{31}{F}_i]-|\overset{1}{B}_i|F_i+|\overset{21}{B}_i|\overset{21}{F}_i\right\}+$$

$$+\underline{\overset{1}{A}}+\underline{\overset{2}{A}}+\underline{A}+\underline{\underline{\overset{4}{A}}} \tag{463}$$

Какъ было уже упомянуто въ § 57 изслѣдованіе точекъ развѣтленія $(\overline{x}, \overline{u})$ т. е. рѣшеніе уравненія

$$\Delta(x, u) = 0$$

приводить къ опредѣленію нѣкоторыхъ параметровъ, входящихъ въ ξ, а иногда и къ полному построенію $[\overline{qv}]$.

Но мы знаемъ, что, если

$$[\overline{qv}] = e^{\int \xi\, dx}$$

$$\xi = k_0 + \sum k_j z^{\frac{j}{f}} \qquad z = (x - \underline{\overline{x}})^{\frac{1}{d}},$$

такъ что

$$[\overline{qv}] = \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j z^{\frac{j}{f}}$$

то линейное уравненіе имѣетъ еще рѣшеніе

$$[\overline{\overline{qv}}] = z^{\frac{s}{f}} \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j z^j$$

причемъ $z=0$ служитъ полюсомъ $p_i(z)$, а $(\underline{\overline{x}}, \underline{\overline{u}})$ полюсомъ $p_i(x, u)$.

Такимъ образомъ для всѣхъ тѣхъ полюсовъ $p_i(x, u)$, которыя служатъ развѣтленіями $(\underline{\overline{x}}, \underline{\overline{u}})$ должны имѣть

$$\Delta(x, u) = 0$$

§ 75. *Отдѣленіе группъ основныхъ рѣшеній.*

Простѣйшимъ случаемъ построенія $[\overline{qv}]$ будетъ тотъ, когда

$$\delta[\overline{qv}]=1$$

Въ случаѣ линейнаго уравненія типа

$$y^{(n)}+p_1(x)\,y^{(n-1)}+\ldots\ldots p_{n-1}(x)\,y'+p_n(x)\,y=0$$

и въ случаѣ $[\overline{qv}]=(\overline{qv})$

$$[\overline{qv}]=[alg]$$

Конечнымъ числамъ алгебраическихъ дѣйствій можно свести задачу о разысканіи $[\overline{qv}]$ къ двумъ

1) *къ разысканію рѣшенія* $[\overline{qv}]$ *при условіи* $\delta[\overline{qv}]=1$ *нѣкотораго линейнаго уравненія,*

2) *къ разысканію алгебраическихъ рѣшеній нѣкотораго линейнаго уравненія вообще порядка ниже порядка заданнаго уравненія:*

Процессъ этотъ можетъ быть названъ *отдѣленіемъ группъ основныхъ рѣшеній.*

На основаніи § 64 слѣдуетъ, что, какъ только найдено уравненіе (429):

$$y^{(l)}+p_1(x,u,\zeta)\,y^{(l-1)}+\ldots p_{l-1}(x,u,\zeta)\,y'+p_l(x,u,\zeta)\,y=0, \qquad (429)$$

опредѣляющее рѣшенія одной группы, задача о разысканіи основного рѣшенія сводится къ задачѣ о разысканіи алгебраическаго рѣшенія уравненія

$$z^{(l)}+q_2(x,u,\zeta)\,z^{(l-2)}+\ldots\ldots q_l(x,u,\zeta)\,z=0,$$

получаемаго уравненія (429) подстановкой

$$y = e^{-\frac{1}{i}\int \underset{z}{p_1(x, u, \zeta)}\, dx}$$

Такимъ образомъ для приведенія задачи о нахожденіи основныхъ рѣшеній къ задачѣ алгебраическаго интегрированія линейнаго уравненія необходимо рѣшить слѣдующую задачу: *приводимо ли уравненіе*

$$y^{(n)} + p_1(x, u)\, y^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(x, u)\, y' + p_n(x, u)\, y = 0$$

въ области алгебраическихъ функцій опредѣляемыхъ уравненіями

$$\zeta^m + \psi_1(x, u)\, \zeta^{m-1} + \ldots \psi_{m-1}(x, u)\, \zeta + \psi_m(x, u) = 0 \qquad (428)$$

степени не выше n

Эта задача аналогична задачѣ о приводимости въ обычномъ смыслѣ, *и рѣшеніе ея приводится къ нахожденію основного рѣшенія* $[\overline{qv}^{(1)}]$ *при условіи* $\delta[\overline{qv}^{(1)}] = 1$ *нѣкотораго однороднаго линейнаго уравненія.*

Для доказательства замѣчаемъ, что, если

$$y_1, y_2 \ldots y_i$$

независимыя рѣшенія уравненія (429), то

$$D_0 = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_i \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_i \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ y^{(i-1)}_1 & y^{(i-1)}_2 & \ldots & y^{(i-1)}_i \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1(x, u, \zeta)\, dx}$$

$$D_h = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \dots & y_l \\ y'_1 & y'_2 & \dots & y'_l \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(h-1)} & y_2^{(h-1)} & \dots & y_l^{(h-1)} \\ y_1^{(h+1)} & y_2^{(h+1)} & \dots & y_l^{(h+1)} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ y_1^{(l)} & y_2^{(l)} & \dots & y_l^{(l)} \end{vmatrix} = Ce^{-\int p_1(x,u,\zeta)\,dx} p_h(x,u,\zeta)$$

Отсюда слѣдуетъ, что D и D_h представляетъ выраженія типа

$$[\overline{qv}]$$

причемъ

$$\delta\left[[\overline{qv}] : \zeta\right] = 1 \tag{464}$$

Изъ теоріи линейныхъ дифференціальныхъ уравненій знаемъ, что всегда можно составить уравненіе

$$D_h^{(\lambda)} + P_{1h}(x,u,\zeta) D_h^{(\lambda-1)} + \dots P_{\lambda-1.h}(x,u,\zeta) D'_h + P_{\lambda.h}(x,u,\zeta) D_h = 0 \tag{465}$$

гдѣ P_{jh} раціональныя функціи отъ (x,u,ζ), опредѣляющее

Полагая

$$\alpha u + \beta\zeta = v,$$

гдѣ α, β постоянныя, уравненіе (465) можемъ переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$D_h^{(\lambda)} + P_{1h}(x,v) D_h^{(\lambda-1)} + \dots P_{\lambda h}(x,v) D_h = 0 \tag{466}$$

гдѣ P_{1h} раціональныя функціи отъ v. Далѣе, слѣдуетъ искать основныя рѣшенія этихъ уравненій, причемъ такія, что

$$\delta\left[\overline{qv}\right]=1$$

Если среди основныхъ рѣшеній есть такія, что $\frac{D_h}{D_0}$ рац. функція отъ (x, u, s) что всегда можно провѣрить,

$$(-1)^h p_h(x, u\zeta)=\frac{D_h}{D_0}$$

и мы находимъ уравненіе (429).

Обозначая лѣвую часть уравненія (429) черезъ $Q(y)$ и обозначая черезъ

$$\overline{y}=\sum_{i=1}^{i=l} C_i y_i$$

общее рѣшеніе уравненія (429) должны имѣть

$$Q(\overline{y})=\sum_{i=1}^{i=l} C_i Q(y_i)=0$$

и такимъ же образомъ

$$\sum_{i=1}^{i=l} C_i \frac{d^h Q(y_i)}{dx^h}=0$$

Исключеніе C_i даетъ условіе приводимости при данномъ значеніи l

$$\Delta=\left|\begin{array}{cccc} Q(y_1) & Q(y_2) & \ldots & Q(y_l) \\ Q'(y_1) & Q'(y_2) & \ldots & Q'(y_l) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Q^{(l-1)}(y_1) & Q^{(l-1)}(y_2) & \ldots & Q^{(l-1)}(y_l) \end{array}\right|=0$$

Такъ какъ $\frac{\Delta}{D_0}$, какъ легко провѣрить, не мѣняется отъ линейныхъ подстановокъ т. е. отъ замѣны ихъ на $\sum_{j=l}^{j=l} C_{ij} y_i$; то $\frac{\Delta}{D_0}$ представляетъ раціональную функцію (x, u), которую можемъ всегда найти, имѣя въ виду значенія D_0 и D_h. За значеніе l слѣдуетъ послѣдовательно брать множители n

$$l = 1, n_1, n_2 \ldots n_k$$

II ГЛАВА.

Неосновныя рѣшенія.

A) Однородныя уравненія.

§ 76. *Разысканіе линейнаго рѣшенія.*

Переходимъ теперь къ случаю неосновныхъ рѣшеній т. е. къ случаю, когда искомое рѣшеніе линейнаго уравненія

$$y^{(n)} + p_1(x, u) y^{(n-1)} + \ldots . p_{n-1}(x, u) y' + p_n(x, u) y = 0 \quad (332)$$

содержитъ основныя трансцендентныя I-го типа, причемъ сперва ограничимся случаемъ *линейнаго* рѣшенія (§ 36)

$$y = \underline{\eta} \left[\rho_0 + \sum_{i=1}^{i=p} \rho_i \zeta_i \right] \quad (217)$$

Въ этой формулѣ

1) $\underline{\zeta}_i$ представляютъ линейныя функціи съ постоянными коэффиціентами отъ основныхъ трансцендентныхъ ζ_i.

2) $\underline{\eta}\rho_i$ p независимыхъ основныхъ рѣшеній уравненія (332), ρ_i алгебраическія функціи.

Мы разсмотримъ сперва простѣйшій случай, когда

$$y = \underline{\eta}(\underline{\zeta} + \rho) \tag{217'}$$

Полагая $y = \underline{\eta}\int y_1\,dx$, мы приводимъ уравненіе (332) къ другому алгебраическому линейному уравненію порядка на единицу нисшему

$$y_1^{(n-1)} + p_1,(x,u,t)\,y_1^{(n-1)} + \dots p_{1n}(x,u,t)\,y_1 = 0 \tag{332_1}$$

если

$$\underline{\eta}\rho_i = e^{\int \xi_i\,dx}$$

$$\xi_i = \chi(x,u,t)$$

раціональная функція (x,u) и t, опредѣляемаго уравненіемъ

$$t^{\omega} + \phi_1(x,u)\,t^{\omega-1} + \dots \phi_{\omega}(x,u) = 0,$$

такъ что можно положить

$$(\underline{\eta}_i\rho_i) = t \qquad \delta(\underline{\eta}_i\rho_i) = \omega$$

$y_1 = (\underline{\zeta} + \rho)' = \dfrac{d\zeta}{dx} = \dfrac{d\rho}{dx}$ алгебраическая функція.

Для опредѣленія y намъ остается найти наиболѣе общее алгебраическое рѣшеніе уравненія (332_1) и подставить его въ выраженіе y.

Чтобы y выражалось въ конечномъ видѣ при помощи основныхъ трансцендентныхъ необходимо и достаточно, чтобы $\int y_1\,dx = \int\vartheta dx = \int\phi(x,v)\,dx$, гдѣ ϑ алгебраическая функція, а ϕ раціональная функція x и $v = \alpha u + \beta t$, выражался въ конечномъ видѣ.

Итакъ нахожденіе рѣшенія типа 217′ сводится къ

1) разысканію основного рѣшенія $\underline{\eta}$

2) алгебраическаго рѣшенія уравненія $\overline{n-1}$-го порядка и,

3) въ случаѣ $[ab]$ къ приведенію Абелева интеграла къ Абелевымъ интеграломъ опредѣленнаго типа, въ случаѣ $[ab]$ къ выраженію Абелева интеграла въ логариѳмахъ.

Беремъ теперь общій случай линейнаго рѣшенія

$$y=\underline{\eta}\left[\rho_0+\sum_{i=1}^{i=p}\rho_i\underline{\zeta_i}\right]$$

$$\rho_1=1$$

Здѣсь $\underline{\eta}\,\rho_i$ представляютъ независимыя рѣшенія, причемъ какія угодно независимыя рѣшенія данной группы, какъ замѣчено въ § 36.

Полагая

$$y=\underline{\eta}\int y_1\,dx$$

$$\int y_1\,dx=\left[\rho_0+\sum_{i=1}^{i=p}\rho_i\underline{\zeta_i}\right]$$

а слѣдовательно

$$y_1=\left[\rho'_0+\sum_{i=2}^{i=p}\rho'_i\underline{\zeta_i}+\sum_{i=1}^{i=p}\rho_i\underline{\zeta'_i}\right]=$$

$$=\rho_{10}+\sum_{i=2}^{i=p}\rho_{1i}\underline{\zeta_i}\,]$$

$$\rho_{10}=\rho'+\sum_{i=1}^{i=p}\rho_i\zeta'_i \tag{465}$$

$$\rho_{1i}=\rho'_i \tag{466}$$

приводимъ уравненіе къ уравненію

$$y_1^{(n-1)} + p_{1i}(x, u, t)\, y_1^{(n-\cdot)} + \dots p_{n-1}(x, u, t)\, y_1 = 0 \qquad (332_1)$$

имѣющему рѣшеніе типа

$$y_1 = \rho_{10} + \sum_{i=2}^{i=p} \rho_{1i}\underline{\zeta_i} = \rho_{12}\left[\frac{\rho_{10}}{\rho_{12}} + \sum_{i=2}^{i=p} \frac{\rho_{1i}}{\rho_{12}}\underline{\zeta_i}\right]$$

т. е. съ рѣшеніемъ типа линейнаго, но

1) съ алгебраическимъ основнымъ рѣшеніемъ ρ_{12},

2) съ меньшимъ числомъ трансцендентныхъ $\underline{\zeta_i}$.

Если намъ будутъ извѣстны $\rho_{10}; \rho_{1i}$ $\underline{\zeta_2}, \underline{\zeta_3}, \dots \underline{\zeta_{n-1}}$ будемъ знать $\underline{\zeta_1}$ и ρ.

Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (466) даетъ

$$\rho_i = \int \rho_{1i}\, dx$$

Для того, чтобы найти ρ_i, слѣдуетъ рѣшить задачу, *выражается ли Абелевъ интегралъ* $\int \rho_{1i}\, dx$ *алгебраически, и, если выражается, найти это выраженіе.* Эта задача рѣшается конечнымъ числомъ алгебраическихъ дѣйствій. *Разысканіе же* ζ_1 *приводится къ задачамъ 1) о выраженіи Абелева интеграла черезъ Абелевы интегралы опредѣленнаго вида или 2) черезъ логариѳмы.*

Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (465) даетъ

$$\underline{\zeta'_1} + \rho'_1 = (\underline{\zeta_1} + \rho)' = \rho_{10} - \sum_{i=1}^{i=p} \rho_i \zeta'_i = R$$

гдѣ R извѣстная намъ алгебраическая функція, откуда получаемъ

$$\underline{\zeta_1} + \rho = \int R\, dx$$

Основное рѣшеніе $\rho_{12} = \left(\frac{\rho_2}{\rho_1}\right)'$ уравненія (332_1) намъ извѣстно, если извѣстны основныя рѣшенія уравненія (332).

Подстановкой

$$y_1 = \rho_{12} \int y_2 \, dx$$

уравненіе (332_1) приводимъ къ уравненію

$$y_2^{(n-2)} + p_{2i}(x, u, t)\, y_2^{(n-3)} + \ldots p_{2n-2}(x, u, t)\, y_2 = 0 \qquad (332_2)$$

имѣющему рѣшеніе типа

$$y_2 = \rho_{20} + \sum_{i=3}^{i=p} \rho_{2i} \zeta_i$$

и задачу объ опредѣленіи $\rho_{10}, \rho_{1i}, \zeta_2, \zeta_3 \ldots \zeta_p$ сводимъ къ опредѣленію $\rho_{20}, \rho_{2i} \zeta_3 \ldots \zeta_p$. Продолжая такимъ образомъ приходимъ наконецъ къ линейному уравненію

$$y_p^{(n-p)} + p_{p1}(x, u, t)\, y_p^{(n-p-1)} \ldots p_{p, n-p}(x, u, t)\, y_p = 0$$

съ рѣшеніемъ

$$y_p = \zeta_{p.0} + \rho_{p.1} \zeta_p = \rho_{p.1}\left(\zeta_p + \frac{\rho_{p.0}}{\rho_{p.1}}\right)$$

т. е. изслѣдованнаго въ началѣ параграфа типа.

Примѣры.

Уравненіе

$$4x^2(x+1)\, y'' + 8x^2 y' + (x+1)\, y = 0 \qquad (467)$$

Фуксовскаго типа для всѣхъ критическихъ точекъ.

Опредѣляющія уравненія

$x=0 \quad \alpha^2-\alpha+\frac{1}{4}=0 \quad \alpha_1=\alpha_2=\frac{1}{2}$ двойной корень

$x=-1 \quad \alpha^2+\alpha=0 \quad \alpha=-1$

$x=\infty \quad \alpha^2+\alpha+\frac{1}{4}=0 \quad \alpha_1=\alpha_2=-\frac{1}{2}$ двойной корень

Если уравненіе (467) рѣшается въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ, то основное рѣшеніе типа $|\overline{qv})$ причемъ (§ 54) только одно, а поэтому (§ 68)

$$\delta(\overline{qv})=1$$

Найдемъ его.

$$|\overline{qv})=[alg]$$

причемъ

$$[alg]=\left\{\frac{(x-\overline{x}_1)^{k_1}(x-\overline{x}_2)^{k_2}\ldots(x-\overline{x}_p)^{k_p}}{(x-\underline{x}_1)^{l_1}(x-\underline{x}_2)^{l_2}\ldots(x-\underline{x}_p)^{l_p}}\right\}^{\lambda}$$

$b_i\lambda$ должны быть корнями опредѣляющихъ уравненій.

Въ виду того что полюсами могутъ быть только $\underline{x}=-1$ и $\underline{x}=\infty$ имѣемъ

$$[alg]=\frac{\sqrt{x}\,(x^k+a_1x^{k-1}+\ldots a_k)}{(x+1)}$$

причемъ необходимо чтобы

$$k+\tfrac{1}{2}\leqq 1$$

откуда слѣдуетъ единственно возможное значеніе для цѣлаго числа k:

$$k=0$$

Для основного рѣшенія имѣемъ полное построеніе

$$\underline{\eta}=|\overline{qv})=\frac{\sqrt{x}}{x+1}$$

Легко видѣть, что это значеніе y въ дѣйствительности удовлетворяется уравненію (467).

Уравненіе (467) въ случаѣ разрѣшимости имѣетъ тоже неосновное рѣшеніе.

Это неосновное рѣшеніе линейное, ибо иначе уравненіе (467) имѣло болѣе 2-хъ независимыхъ рѣшеній.

Въ формѣ (217) $p=1$, ибо одно только основное рѣшеніе.

Положимъ

$$y=\eta\int y_1\,dx$$

мы получаемъ уравненіе 1-го порядка

$$xy_1'+y_1=0$$

Алгебраическое рѣшеніе этого уравненія

$$y_1=\frac{c_1}{x}$$

$$\int y_1\,dx=C_1 lgx+C_2$$

Откуда слѣдуетъ, что уравненіе (467) разрѣшается въ конечномъ видѣ съ помощью основныхъ элементарныхъ функцій и имѣетъ общее рѣшеніе

$$y=\frac{\sqrt{x}}{x+1}(Clgx+C')$$

Возьмемъ еще уравненіе

$$x^3y'''+3x^3y''+(3x^3+x)y'+(x^3+x-1)y=0 \qquad (468)$$

и найдемъ для него линейное рѣшеніе.

Основное рѣшеніе

$$y=[\overline{qv}]=\{\overline{qv}\}(\overline{qv})$$

гдѣ $\{\overline{qv}\}$ легко найти по методѣ § 67 а именно

$$\{\overline{qv}\} = e^{-x}$$

Полагая $y = e^{-x}\overline{y}$ приходили къ уравненію

$$\overline{y}''' + \frac{\overline{y}'}{x} - \frac{\overline{y}}{x^2} = 0$$

фуксовскаго типа.

Опредѣляющія уравненія:

$$x = 0 \quad (\alpha - 1)^3 = 0 \quad \alpha = 1 \quad \text{тр. корень}$$

$$x = \infty \quad (\alpha + 1)^3 = 0 \quad \alpha = -1 \quad \text{тр. корень}$$

Какъ въ предыдущемъ примѣрѣ убѣждаемся что

$$\overline{y} = (\overline{qv}) = x$$

$$\eta = [\overline{qv}] = e^{-x} x$$

Полагая $y = \eta \int y_1 dx$ или $\overline{y} = x \int y_1 dx$ имѣемъ

$$y_1'' + \frac{3y_1'}{x} + \frac{y_1}{x^2} = 0$$

остается найти алгебраическое рѣшеніе которое, какъ легко видѣть, равно $\frac{1}{x}$.

Линейное рѣшеніе

$$y = e^{-x} x \left[C_1 \int \frac{dx}{x} + C_2 \right] = e^{-x} x \left[C_1 \lg x + C_2 \right]$$

въ этомъ случаѣ не представляетъ еще общаго рѣшенія.

Въ общее рѣшеніе должны входить высшія степени основныхъ трансцендентныхъ 1-го типа.

§ 77. *О преобразованіи канонической формы неосновного рѣшенія.*

Раньше чѣмъ перейти къ рѣшеніямъ не линейнымъ т. е. къ рѣшеніямъ содержащимъ ζ_i въ степени выше первой мы займемся преобразованіемъ формы

$$y = \underline{\eta} P(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

Мы докажемъ, *что эта форма можетъ быть преобразована въ другую подобную же*

$$y = \underline{\eta} \overline{P(\zeta}, \zeta_2 \ldots . \underline{\overline{\zeta}}_p)$$

гдѣ P цѣлый многочленъ съ алгебраическими коэффиціентами отъ нѣкоторыхъ трансцендентныхъ I типа $\underline{\overline{\zeta}}_i$, *которыя мы опредѣлимъ, зная наиболѣе общее линейное рѣшеніе даннаго линейнаго однороднаго уравненія.*

Для доказательства замѣчаемъ, что

$$y = \underline{\eta}(\rho_0 + \sum_{i=1}^{i=p} \rho_i \underline{\zeta}_i) = \sum_{i=1}^{i=r} C_i y_i \qquad (\underline{217})$$

гдѣ C_i произвольныя постоянныя, y_i частныя рѣшенія, уже не содержащія произвольныхъ постоянныхъ.

Полагая

$$C_1 = C_2 = \ldots C_{j-1} = C_{j+1} = \ldots C_r = 0$$

получаемъ

$$y_j = \underline{\eta}[\rho_{0j} + \sum_{i=1}^{i=p} \rho_i \underline{\zeta}_{ij}]$$

гдѣ ζ_{ij}, ρ_{0j} частныя значенія ρ_0, ζ_j, такъ какъ ρ_i можемъ предполагать не зависящими отъ C_j.

Подставляя эти значенія y_j въ уравненіе (217), замѣчаемъ, что можно положить

$$\underline{\zeta}_i = \sum_{j=1}^{j=r} C_{ij} \underline{\zeta}_{ij} \tag{469}$$

$\underline{\zeta}_{ij}$ могутъ быть вообще алгебраическими зависимыми. Эти зависимости должны сводиться (§ 15) къ виду

$$\underline{\zeta}_{ij} = \sum_{g=1}^{g=s} D_{ijg} \underline{\overline{\zeta}}_g + \sigma_{ij} \tag{470}$$

гдѣ σ_{ij} алгебраическія функціи, D_{ijg} постоянныя, а $\underline{\overline{\zeta}}_g$ трансцендентныя I типа.

Подставляя въ уравненіе (469) имѣемъ

$$\underline{\zeta}_i = \sum_{g=1}^{g=s} D_{ig} \underline{\overline{\zeta}}_g + \sigma_i$$

гдѣ σ_i алгебраическія функціи D_{ig} постоянныя и въ результатѣ для y имѣемъ выраженіе

$$y = \underline{\eta} [\overline{\rho}_0 + \sum_{i=1}^{i=s} \overline{\rho}_i \underline{\overline{\zeta}}_i]$$

гдѣ $\overline{\rho}_0$, $\overline{\rho}_i$ алгебраическія функціи вообще содержащія произвольныя постоянныя, $\underline{\overline{\zeta}}_i$ нѣкоторыя трансцендентныя I типа, между которыми не существуетъ алгебраическихъ зависимостей

$\underline{\zeta}_i$ выражаются линейно черезъ ζ_{ig} (ур. 215 § 36) $\underline{\overline{\zeta}}_i$ выражается линейно въ $\underline{\zeta}_i$. Отсюда слѣдуетъ, что

$$\underline{\zeta_i} = \sum_{g=1}^{g=p} \overline{E}_g^{(i)} \zeta_g + \tau_i$$

гдѣ $\overline{E}_g^{(i)}$ постоянныя, τ_i алгебраическая функція.

Отсюда мы можемъ опредѣлить функціи: $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_s$ въ функціяхъ отъ $\underline{\zeta_i}$ и $\zeta_{s+1} \ldots \zeta_p$, а именно

$$\zeta_g = \sum_{g=1}^{g=s} \overline{F}_i^{(g)} \underline{\zeta_i} + \sum_{i=1}^{i=p-s} H_i^{(g)} \zeta_{s+i} + \omega_i$$

гдѣ $\overline{F}_i^{(g)}, H_i^{(g)}$ постоянныя, ω_i алгебраическая функція.

Подставляя въ каноническое выраженіе для рѣшенія y:

$$y = \underline{\eta} P(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

выраженія $\zeta_g (g = 1, 2 \ldots s)$ получаемъ

$$y = \underline{\eta} \overline{P}(\underline{\zeta_1}, \underline{\zeta_2} \ldots \underline{\zeta_s}, \zeta_{s+1} \ldots \zeta_p),$$

гдѣ $\overline{P}$ полиномъ съ алгебраическими коэффиціентами и причемъ той же степени, что P.

Но легко видѣть, что, если послѣднее выраженіе приготовленное, то $\zeta_{s+1}, \zeta_{s+2} . \zeta_p$ должны изъ него совершенно исчезнуть.

Въ самомъ дѣлѣ мы имѣемъ тогда линейное рѣшеніе

$$R + \sum_{i=1}^{i=s} \overline{A}_i \underline{\zeta_i} + \sum_{i=1}^{i=p-s} B_i \zeta_{s+i}$$

гдѣ R, A_i, B_i алгебраическія функціи, содержащее одну изъ трансценд. ζ. Приравнивая его

$$\underline{\eta} [\rho_0 + \sum_{i=1}^{i=p} \overline{\rho_i} \underline{\zeta_i}]$$

при частныхъ рѣшеніяхъ произвольныхъ постоянныхъ получаемъ противно условію алгебраическую зависимость между ζ_{s+1} и $\underline{\overline{\zeta}}_s$.

§ 78. *Приведеніе разысканія неосновныхъ рѣшеній къ разысканію рѣшеній алгебраическихъ.*

Для опредѣленія наиболѣе общаго рѣшенія

$$y = \sum \underline{\eta}_i P_i(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p)$$

однородного линейнаго уравненія

$$y^{(n)} + p_1(x, u) y^{(n-1)} + \dots p_{n-1}(x, u) y' + p_n(x, u) = 0 \qquad (332)$$

выражаемаго въ конечномъ видѣ съ помощью $[ab]$ или $[elm]$, можно опредѣлять отдѣльно частныя рѣшенія формы

$$y = \underline{\eta}_i P_i(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p)$$

и черезъ сложеніе ихъ опредѣлить и общее рѣшеніе (332) что касается же до частнаго рѣшенія

$$y = \underline{\eta} P(\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p)$$

то *на основаніи предыд. § разысканіе его сводится къ разысканію коэффиціентовъ полинома*

$$\overline{P}(\underline{\overline{\zeta}}_1, \underline{\overline{\zeta}}_2 \dots \underline{\overline{\zeta}}_s)$$

при условіи что $\underline{\overline{\zeta}}_s$ *извѣстны, удовлетворяющихъ условію, что*

$$y = \underline{\eta}\, \overline{P}(\underline{\overline{\zeta}}_1, \underline{\overline{\zeta}}_2 .. \underline{\overline{\zeta}}_s)$$

представляетъ рѣшеніе ур, (332).

Для краткости обозначенія, будемъ обозначать $\overline{\zeta_i}$ просто черезъ ζ_i.

Мы знаемъ, что степени ζ_i въ P не могутъ превосходить $\overline{n-1}$. Кромѣ того мы знаемъ высшую границу (§ 35) для степени старшаго члена $P(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p)$

$$\zeta_1^{\nu_1} \zeta_2^{\nu_2} \ldots \zeta_p^{\nu_p}$$

При этихъ условіяхъ число коэффиціентовъ т. е. число функцій, которыя намъ слѣдуетъ опредѣлить не превосходится нѣкотораго опредѣленнаго конечнаго порядка.

Полагая $y = \eta \overline{y}$ получаемъ алгебраическое уравненіе:

$$\overline{y}^{(n)} + \overline{p}_1(x, u, t)\, \overline{y}^{(n-1)} + \ldots . \overline{p}_n(x, u, t)\, \overline{y} = 0$$

или

$$\overline{y}^{(n)} + \overline{p}_1(x, v)\, \overline{y}^{(n-1)} + \ldots \overline{p}_n(x, v)\, \overline{y} = 0 \quad (*)$$

$$v = \alpha u + \beta t,$$

опредѣляющее

$$\overline{y} = P(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p)$$

причемъ

$$(\nu_1, \nu_2 \ldots . \nu_p) = 1,$$

Обозначая какъ въ § 32 черезъ $(\mu_1 \mu_2 .. \mu_p)$ алгебраическія коэффиціенты при $\zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_p^{\mu_p}$ въ полиномѣ

$$P(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

по формулѣ Лейбница имѣемъ

$$\left[(\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p)\, \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} .. \zeta_p^{\mu_p}\right]^{(k)} = (\mu_1 \mu_2 .. \mu_p)^{(k)}\, \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} .. \zeta_p^{\mu_p} +$$

$$+ k\, (\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p)^{(k-1)} \sum_{i=1}^{i=p} \mu_i\, \zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_{i-1}^{\mu_{i-1}} \zeta_i^{\mu_i - 1} \zeta_{i+1}^{\mu_{i+1}} \ldots \zeta_p^{\mu_p} \frac{d\zeta_i}{dx} +$$

$$+\frac{k(k-1)}{1.2.}(\mu_1\,\mu_2\ldots\mu_p)^{(k-2)}\Big\{\sum\mu_{i_1}\mu_{i_2}\zeta_1^{\mu_1}\ldots\zeta_{i_1}^{\mu_{i_1}-1}\ldots$$

$$\ldots\zeta_{i_2}^{\mu_{i_2}-1}\ldots\zeta_p^{\mu_p}\frac{d\zeta_{i_1}}{dx}\frac{d\zeta_{i_2}}{dx}+\ldots\sum_{i=1}^{i=p}\mu_i(\mu_{i}-1)\zeta_1^{\mu_1}\ldots\zeta_i^{\mu_i-1}\ldots\zeta_p\frac{d^2\zeta_i}{dx^2}+\ldots\Big\}+\ldots$$

откуда слѣдуетъ, что, подставляя въ уравненіе (*) вмѣсто $\overline{y}$ его выраженіе и приравнивая нуль коэффиціенты при $\zeta_1^{\mu_1}\zeta_2^{\mu_2}\ldots\zeta_p^{\mu_p}$ получимъ

$$(\mu_1\,\mu_2\ldots\mu_p)^{(n)}+\sum_{j=1}^{j=n}p_{n-j}(x,v)(\mu_1\,\mu_2\ldots\mu_q)^{(j)}=[\mu_1\,\mu_2\ldots\mu_p]$$

гдѣ $[\mu_1\,\mu_2\ldots\mu_p]$ алгебраическая функція, зависящая отъ алгебр. функціи $\frac{d\zeta_i}{dx},\frac{d^2\zeta_i}{dx^2}\ldots$ намъ извѣстныхъ и отъ выраженій

$$(\lambda_1\,\lambda_2\ldots\lambda_p),$$

но при этомъ такихъ, что

$$\lambda_1>\mu_1$$

или при

$$\lambda_1=\mu_1\quad\lambda_2>\mu_2$$

или при

$$\lambda_1=\mu_1\quad\lambda_2=\mu_2\quad\lambda_3>\mu_3$$

и т. д. вообще при

$$\lambda_1=\mu_1\quad\lambda_2=\mu_2\ldots\quad\lambda_j=\mu_j\quad\lambda_{j+1}>\mu_{j+1}$$

Вслѣдствіе этого мы можемъ поступать при опредѣленіи $(\mu_1,\mu_2\ldots\mu_p)$ слѣдующимъ образомъ. Зная $(\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_p)=1$ находимъ $(\nu_1,\nu_2\ldots\nu_p)$ какъ алгебраическое рѣшеніе нѣкотораго неоднороднаго линейнаго уравненія, коэффиціенты и послѣдній членъ котораго извѣстны.

Зная $(\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_{p-1})$ такимъ же образомъ находимъ $(\nu_q,\nu_2\ldots\nu_{p-2})$, такимъ не дойдемъ до $(\nu_1\,\nu_2\ldots\nu_{p-1},\overline{\nu_p})$ гдѣ $\overline{\nu_p}$ наименьшее значеніе μ_p, когда

$$\mu_1 = \nu_1 \quad \mu_2 = \nu_2 \ldots \quad \mu_{p-1} = \nu_{p-1}$$

Въ общемъ случаѣ $\overline{\nu}_p = 0$. Затѣмъ по $(\nu_1, \nu_2 \ldots . \nu_{p-1}, 0)$ находимъ $(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_{p-3}, \nu_{p-1} - 1, 0)$ $(\nu_1, \nu_2 \ldots \nu_{p-1} - 2, 0)$ и т. д. до $(\nu_1 \nu_2 \ldots \nu_{p-2}, 0, 0)$.

Продолжая такимъ образомъ дальше доходимъ наконецъ до опредѣленія послѣдняго свободнаго члена $(0, 0 \ldots 0)$.

Примѣръ.

Для уравненія

$$y''' + \frac{y'}{x^2} - \frac{y}{x^3} = 0 \tag{472}$$

линейное рѣшеніе найдено выше

$$y = x\,[C_1\, lgx + C_2]$$

Здѣсь можно положить $\zeta = \underline{\zeta} = \overline{\underline{\zeta}} = lgx$ Въ общее рѣшеніе входитъ только lgx причемъ въ степени 2-ой:

$$y = x\,[\,(lgx)^2 + \rho_1\, lgx + \rho_2]$$

Подставляя въ уравненіе (472) $y = x\overline{y}$ имѣемъ:

$$\overline{y}''' + \frac{3\overline{y}''}{x} + \frac{\overline{y}'}{x^2} = 0$$

Подставляя

$$\overline{y} = (lgx)^2 + \rho_1\, lgx + \rho_2$$

откуда

$$\left(\rho_1''' + \frac{3}{x}\rho_1'' + \frac{\rho_1'}{x^2}\right) lgx + \ldots\ldots = 0$$

Въ виду того что опредѣляющія уравненія ур.

$$\rho_1''' + \frac{3}{x}\rho_1'' + \frac{\rho_1'}{x^2} = 0$$

имѣютъ корни ирраціональныя или нуль алгебраическое рѣшеніе (т. е. рѣшеніе $\overline{|qv}$) см. § 55) сводится къ алгебраической функціи безъ полюсовъ т. е. къ постоянному $\rho_1 = c_1$, такъ что

$$\bar{y} = (lgx)^2 + C_1\, lgx + \rho_2$$

при этомъ условіи имѣемъ подставляя это выраженіе въ уравненіе (472) получаемъ

$$\rho_2''' + \frac{3}{x}\rho_2'' + \frac{\rho'_2}{x^2} = 0$$

откуда

$$\rho_2 = C_2$$

§ 79. *Нѣкоторыя теоремы относящіяся къ алгеброидамъ.*

Разысканіе, какъ основныхъ такъ, и не основныхъ рѣшеніи обыкновенно значительно упрощается, если предварительно изслѣдовать число такъ называемыхъ *группъ* корней опредѣляющихъ уравненій.

Изслѣдуя группы можно вывести условія отсутствія трансцендентныхъ I типа въ выраженіи рѣшенія, выражаемаго въ конечномъ видѣ т. е. условія чтобы всѣ рѣшенія сводились къ основнымъ и условія необходимаго присутствія трансцендентныхъ I типа.

Это изслѣдованіе мы будемъ вести только при ограниченіи, что эти трансцендентныя *логариѳмическаго вида* (§ 11). Въ случаѣ элементарныхъ трансцендентныхъ это ограниченіе отпадаетъ, такъ какъ трансцендентныя I-го типа будутъ тогда всегда логариѳмическаго вида.

Мы позволяемъ теперь привести безъ доказательства слѣдующую теорему, которая должна лечь въ основѣ этихъ изслѣдованій (формулируя ея въ несравненно болѣе общей формѣ, чѣмъ это требуется для нашей цѣли).

Вмѣсто трансцендентныхъ ζ, η изслѣдованныхъ въ §§ 15 возьмемъ трансцендентныя типа

$$\zeta = \int \xi \, dx$$

$$\eta = e^{\int \xi \, dx},$$

гдѣ ξ не алгебраическая функція, а функція типа

$$\xi = \sum_{j=-\mu}^{j=\infty} a_j (x - \underline{x})^{\frac{j}{\delta}}$$

частнымъ случаемъ который является функція алгебраическая. Такую функцію будемъ называть *алгебридомъ*. Частнымъ случаемъ ζ, η тогда являютъ $\zeta = [\underline{qv}^{(1)}]$ и $\eta = [\overline{qv}^{(1)}]$ § 15.

Вмѣсто *алгебраическаго* соотношенія

$$N(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_m, \eta_1, \eta_2 \ldots \eta_n) = 0$$

гдѣ N цѣлый полиномъ ζ_i, η_i съ *алгебраическими* коэффиціентами, возьмемъ *алгеброидальное* уравненія въ которомъ эти коэффиціенты *алгеброиды*.

Будемъ кромѣ того предполагать, что ζ, η не сводится къ алгеброидамъ.

Намъ придется, какъ легко видѣть, только воспроизвести длинныя доказательства § 15 (примѣнительно къ $[\underline{qv}^{(1)}]$ и $[\overline{qv}^{(1)}]$), чтобы доказать двѣ слѣдующія основныя теоремы:

I) Простѣйшее уравненіе между трансцендентными ζ, η содержитъ трансцендентную только одного типа,

1) простѣйшее относительно ζ можетъ быть только типа

$$\sum C_i \zeta_i = A$$

C_i постоянныя, A алгеброидъ;

2) простѣйшее относительно η типа

$$\prod \eta_i^{C_i} = A$$

II) *Всякое линейное уравненіе*

$$P_0 + \Sigma P_i \eta_i = P$$

гдѣ P_0, P_i, P *алгеброиды предполагаетъ для каждой функціи* η_i *условіе*

$$\eta_i = \rho_{ij} \eta_j$$

$$i \gtreqless j$$

гдѣ ρ_{ij} *алгеброиды.*

Послѣдніе теоремы даютъ возможность между прочимъ сдѣлать слѣдующее заключеніе.

Въ уравненіи

$$P_0(\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p) + \sum \eta_i P_i(\zeta_1, \zeta_2 \dots \zeta_p) = P(\zeta_1 \dots \zeta_2 \dots \zeta_d)$$

гдѣ P_0, P_i, P алгеброидальныя функціи ζ_i возможно замѣнить η_i нулями.

§ 80. *Случай, когда всѣ рѣшенія основныя.*

Мы теперь докажемъ, что *только въ томъ случаѣ въ выраженіе рѣшенія однороднаго линейнаго уравненія Фуксовскаго типа для всѣхъ крит. точекъ могутъ входить трансцендентныя I типа и логариѳмическаго вида, если опредѣляющее уравненіе хотя бы для одной точки* $(\underline{x}, \underline{u})$ *имѣетъ группу корней, содержащую болѣе одного корня т. е. если хотя бы между двумя корнями разность равна цѣлому числу.*

Съ этой цѣлью беремъ линейныя рѣшенія

$$\bar{y} = \underline{\eta}(\rho_0 + \sum \rho_i \underline{\zeta_i}) \tag{217}$$

Разлагая ζ_i около критической точки, имѣемъ

$$\zeta_i = (a_i\, lg\,(x - \underline{x}) + \lambda_i)\, x^{\alpha}\, \nu$$

гдѣ ν, λ_i алгеброиды, α ирраціональное число.

$$\bar{y} = \sum (a_i\, \rho_i lg(x - \underline{x}) + \lambda)\, x^{\alpha} \nu$$

гдѣ λ и $\sum a_i \rho_i$ алгеброиды.

Но, если опредѣляющее уравненіе имѣетъ группы, содержащія только по одному корню, то

$$y = \sum x^{\alpha_i}\, \nu_1$$

гдѣ α_i числа, ν_i алгеброиды причемъ разности $\alpha_i - \alpha_j$ не равны рац. числамъ.

Мы должны имѣть

$$\sum (a_i\, \rho_i)\, lg\,(x - \underline{x}) + \lambda)\, x^{\alpha}\, \nu = \sum x^{\alpha_i}\, \nu_i$$

или

$$\nu \sum a_i\, \rho_i\, lg\,(x - \underline{x}) + \lambda\nu + \sum x^{\alpha_i - \alpha}\, \nu_i = 0$$

откуда слѣдуетъ, что для всѣхъ i, для которыхъ $\alpha_i - \alpha$ не раціональное число

$$\nu_i = 0$$

Далѣе получаемое при этомъ уравненіе

$$\nu\sum a_i\rho_i lg(x-\underline{x})+\lambda\nu-\pi=0$$

гдѣ π алгебраидъ, давало бы $lg(x-\underline{x})$ въ видѣ алгебрида т. е. давало бы для $lg(x-\underline{x})$ конечное число значенiй, если

$$\sum a_i\rho_i \gtreqless 0$$

Поэтому

$$\sum a_i\rho_i=0,$$

но это быть не можетъ (§ 77), если взята форма (217) для линейнаго рѣшенiя. Такимъ образомъ линейное, а потому и наиболѣе общее рѣшенiе y не содержитъ трансцендентныхъ I типа логариѳмическаго вида, въ частности логариѳмовъ.

Примѣръ.

Возвращаемся къ уравненiю:

$$x^2y''+(6x+1)y'+6y=0 \tag{457}$$

нами было уже доказано (§ 71), что это уравненiе разрѣшается въ квадратурахъ и что общее рѣшенiе его слѣдующее

$$y=e^{\frac{1}{x}}\left(\frac{1+2x}{x^4}\right)\left[\int e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^2dx+C\right]$$

при этомъ

$$y_1=\int e^{-\frac{1}{x}}\left(\frac{x}{2x+1}\right)^2dx+C$$

удовлетворяетъ уравненiю

$$x^3y'' + (6x-1)xy' + (6x-4)y = 0,$$

для котораго рядъ чиселъ Томэ:

$$\alpha_1 = 2+1 \quad \alpha_2 = 3$$

Это уравненіе поэтому имѣетъ только одно регулярное рѣшеніе при $x=0$.

Поэтому число корней въ группѣ можетъ быть только 1. y_1 не можетъ содержать логариѳмы. Уравненіе (457) не можетъ имѣть иныхъ рѣшеній, кромѣ основныхъ, A, если это такъ, то уравненіе (457) не можетъ быть разрѣшено въ элементарныхъ трансцендентныхъ въ конечномъ видѣ, такъ какъ доказано (въ § 71) основное рѣшеніе только одно.

§ 81. *О неосновныхъ рѣшеніяхъ, содержащихъ одну трансцендентную I-го типа.*

Большое значеніе въ подобнаго рода изслѣдованіяхъ имѣетъ слѣдующая теорема, представляющая прямое обобщеніе теоремы § 54.

Если линейное однородное уравненіе имѣетъ рѣшеніе типа

$$\overline{y} = X^a \sum\sum b_{jg} X^j (lg\, X)^g$$

$$X = (x-\underline{x})^{\frac{1}{\delta}},$$

то тоже уравненіе имѣетъ рѣшеніе типа

$$\overline{\overline{y}} = z^{al+\frac{s}{f}} \sum_{g=0}^{g=G} \sum_{j=0}^{j=\infty} l_{jg} z^j (lgz)^g \tag{$\overline{458}$}$$

гдѣ $z = (x-\underline{x})^{\frac{1}{d}}$ (предполагая, что u разлагается по степенямъ $(x-\underline{x})^{\frac{1}{d}}$)$f = \frac{h}{\delta}$, h наим. кратное d и δ.

Для доказательства, какъ въ § 54 представляемъ $\bar{y}$ въ слѣдующемъ видѣ

$$\bar{y} = z^{al} \sum_{g=0}^{g=G} \sum_{i=0}^{i=f-1} y_{ig}(z) z^{\frac{i}{f}} (lgz)^g, \tag{458}$$

гдѣ $y_{ig}(z)$ голоморф. при $z=0$ функціи.

Подставляя въ уравненіе

$$y^{(n)} + p_1(x, u) y^{(n-1)} + \ldots . p_{n-1}(x, u) y' + p_n(x, u) y = 0 \tag{332}$$

имѣемъ

$$\sum_{g=0}^{g=G} \sum_{i=0}^{i=f-1} C_{ig}(z) z^{\frac{i}{f}} (lgz)^g = 0$$

гдѣ

$$C_{ig}(z) = \sum_{k=-s_{ig}}^{k=\infty} C_{igk} z^k$$

мероморфныя при $z=0$ функціи.

Коэффиціенты при $(lgz)^g$ должны порознь равняться нулю, иначе получили бы lgz въ формѣ алгеброида.

$$\sum_{g=0}^{g=q} C_{ig}(z) z^{\frac{i}{f}} = 0$$

отсюда совершенно также, какъ въ § 54, выводимъ, что

$$f z^{al + \frac{s}{f}} C_{sg}(z) = 0$$

и наконецъ

$$\sum_{g=0}^{g=G} f z^{al + \frac{s}{f}} C_{sg}(z) (lgz)^g = 0$$

Полагая

$$\sum_{g=0}^{g=G} y_{ig}(z)\,(lgz)^g = y_i(z)$$

находимъ (какъ въ § 54), что

$$\left[z^{al}\sum_{i=0}^{i=f-1} y_i(z)\,z^{\frac{i}{f}}\right]^{(k)} = z^{al}\sum_{i=0}^{i=f-1} \overset{k}{y}_i(z)\,z^{\frac{i}{f}}$$

гдѣ мероморфная функція $\overset{k}{y}_i(z)$ зависитъ отъ $y_i(z)$ и ея производныхъ, но не зависитъ отъ $y_j(z)$ $j \gtreqless i$.

Такимъ же образомъ въ тожествѣ

$$\overline{y}^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}(x,u)\,\overline{y}^{(j)} = z^{al}\sum_{i=0}^{i=f-1} C_i(z)\,z^{\frac{i}{f}}$$

гдѣ

$$C_i(z) = \sum_{g=0}^{g=G} C_{ig}(z)\,(lgz)^g$$

$C_i(z)$ зависитъ отъ $y_i(z)$, не завися отъ $y_j(z)$ $j \gtreqless i$

Полагая $y_i(z) = 0$ получаемъ

$$z^{al+\frac{s}{f}} C_s(z) = z^{al+\frac{s}{f}} \sum_{g=0}^{g=G} C_{sg}(z)\,(lgz)^g = \overline{\overline{y}}^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}\,\overline{\overline{y}}^{(j)}$$

гдѣ $\overline{\overline{y}}$ имѣетъ значеніе получаемое ур. (458) или

$$\overline{y} = z^{al}\sum_{j=0}^{i=f-1} y_i(z)\,z^{\frac{i}{f}}$$

замѣной $y_i(z)$ $i \lesseqgtr s$ на нуль т. е. $\overline{\overline{y}}$ вида $(\overline{458})$. Уравненіе (332) равносильно уравненію

$$\overline{\overline{y}}^{(n)}+p_1(x,u)\overline{\overline{y}}^{(n-1)}+\ldots p_{n-1}(x,u)\overline{\overline{y}}'+p_n(x,u)\overline{\overline{y}}=0\,,$$

откуда слѣдуетъ, что $\overline{\overline{y}}$ рѣшеніе уравненія (332).

Предположимъ теперь, что уравненіе (332) имѣетъ рѣшеніе, содержащее только одну основную трансцендентную перваго типа.

Это должно имѣть мѣсто въ томъ случаѣ, когда существуетъ только одно основное рѣшеніе.

Въ самомъ дѣлѣ, взявъ наиболѣе общее линейное рѣшеніе

$$y=\underline{\eta}\left[\rho_0+\sum\rho_i\zeta_i\right]$$

мы должны имѣть въ немъ только одинъ членъ съ $\underline{\zeta_i}$ отвѣчающій одному рѣшенію ρ_i.

Разсматриваемъ только случай Фуксовскаго уравненія.

Замѣтимъ, что для какого нибудь s $y_{sG}(z)$ отлично отъ нуля, ибо иначе имѣли бы что $\sum\limits_{i=0}^{i=f-1}y_{iG}(z)\,z^{\frac{i}{f}}$ т. е. коэффиціентъ при высшей степени (lgz) равенъ нулю. Такимъ образомъ, какъ $\overline{y}$, такъ и $\overline{\overline{y}}$ можно предполагать одной степени относительно логариѳма.

Всякое рѣшеніе $\underline{\eta}P(\zeta_1,\zeta_2\ldots\zeta_p)=\underline{\eta}P(\zeta)$ съ одной трансцендентной I типа представляется въ формѣ:

$$\overline{y}=\underline{\eta}\sum_{j=0}^{j=G}\rho_j(\zeta)^j$$

причемъ ρ_j алгебраическія функціи, $\rho_G=1$ вслѣдствіе чего коэффиціентъ при ζ_G

$$\underline{\eta}\gtreqless 0$$

Такъ какъ по предположенію уравненіе (332) Фуксовскаго типа, то

$$\eta = (\overline{qv})$$

и разложеніе $\overline{y}$ будетъ для каждой точки (x, u)

$$\overline{y} = X^a \sum \sum b_{jg} X^j (lg X)^g$$

параллельно этому рѣшенію будетъ существовать регулярное рѣшеніе

$$\overline{\overline{y}} = z^{al + \frac{s}{f}} \sum_{g=0}^{g=G} \sum l_{ig} z^j (lgz)^j$$

уравненія (332).

Но какъ извѣстно, наиболѣе общее регулярное рѣшеніе будетъ типа

$$y = z^b \sum_{g=0}^{g=\Gamma-1} \sum_{j=0}^{j=\infty} k_{jg} z^j (lgz)^g$$

Уравненіе $\overline{y} = y$ тожественное относительно (lgz) предполагаетъ, что

$$G \leqq \Gamma - 1$$

Степень рѣшенія y съ одной трансцендентной I типа относительно этой трансцендентной не превосходитъ числа корней въ группѣ корней опредѣляющаго уравненія безъ единицы.

Отсюда получаемъ слѣдующее правило для опредѣленія высшей границы для степеней рѣшенія $\underline{\eta}\, P(\zeta)$ относительно ζ.

Пусть $\Gamma_i(\underline{x}_j, \underline{u}_j)$ *означаетъ число корней въ i-ой группѣ отвѣчающей* $(\underline{x}_j, \underline{u}_j)$. *Изъ чиселъ* $\Gamma_i(x_j, u_j)$ *выбираемъ наибольшее* $\Gamma(\underline{x}_j, \underline{u}_j)$.

Затѣмъ изъ чиселъ, отвѣчающихъ различнымъ $(\underline{x}_j, \underline{u}_j)$ *выбираемъ наибольшее* Γ, *тогда*

$$G \leqq \Gamma - 1$$

Примѣръ.

Уравненіе

$$y''' + \frac{x-6}{x(x-3)} y'' + \frac{x+3}{4x^2(x-3)} y' - \frac{x+3}{4x^3(x-3)} y = 0 \qquad (473)$$

Фуксовскаго типа, какъ можно убѣдиться методами I главы имѣетъ только одно основное рѣшеніе $x^{\frac{1}{2}}$.

Неосновное его рѣшеніе будетъ содержать (въ случаѣ выраженія общаго или частнаго рѣшенія въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ функцій) только одинъ логариѳмъ.

$$y = x^{\frac{1}{2}} [\rho_0 + \rho_1 lg\vartheta + \rho_2 (lg\vartheta)^2]$$

но на основаніи доказаннаго въ настоящемъ § y можно дать еще болѣе простую.

Изслѣдуя опредѣляющее уравненіе, выводимъ

$$G \leqq 2 - 1 = 1$$

Методою § 76 находимъ частное рѣшеніе

$$y = \frac{1}{\sqrt{x}} (1 + x lg x)$$

выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ.

§ 82. *Случай, когда должны существовать неосновныя рѣшенія.*

Указаніе высшей границы для степени старшаго члена полинома $P(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p)$ упрощаетъ нахожденіе не основныхъ рѣшеній.

Черезъ указаніе нисшей границы тоже вводится упрощеніе. Въ самомъ дѣлѣ такое указаніе даетъ намъ высшую границу для порядка основного рѣшенія.

Въ самомъ дѣлѣ, если

$$\zeta_1^{\nu_1}\zeta_2^{\nu_2}\ldots\zeta_p^{\nu_p}$$

старшій членъ, то согласно § 35 уравненіе имѣетъ $\omega = \nu_1 + \nu_2 + \ldots \nu_p$ не основныхъ рѣшеній и согласно § 68

$$\delta\eta < n - \omega$$

Если $\omega \geqslant \Omega$, то

$$\delta\eta < n - \Omega$$

Предполагая уравненіе для всѣхъ точекъ Фуксовскаго типа, предполагая, что общее рѣшеніе выражается въ конечномъ видѣ и что ζ_i логариѳмическаго вида, найдемъ число Ω. Разлагая общее рѣшеніе y въ рядъ, имѣемъ

$$y = \sum_k z^{c_k} \sum_g \sum_i y_{igk}(z)\, z^{\frac{i}{f}}\, (lgz)^g \tag{474}$$

гдѣ $y_{gk}(z)$ голоморфныя (при $z = 0$) функціи отъ z. Но съ другой стороны y, какъ общее рѣшеніе Фуксовскаго уравненія представляется въ формѣ

$$y = \sum z^{b_k} \sum \varphi_{kg}(z)\,(lgz)^g \tag{475}$$

где $\varphi_{kg}(z)$ голоморфныя функціи z.

Приравнивая выраженія (474) и (475) и дѣля на c_1 имѣемъ

$$\sum z^{c_k - c_1} \sum \sum y_{igk}(z) z^{\frac{i}{f}} (lgz)^g =$$

$$= \sum z^{b_k - c_1} \sum \varphi_{pk}(z) (lgz)^g \tag{476}$$

Отсюда по сокращеніи должны быть исключены всѣ члены съ ирраціональными $c_k - c_1$ и $b_k - c_1$ Для того, чтобы lgz не получался въ видѣ алгеброида, необходимо, чтобы уравненіе (476) было тожественно относительно lgz. А это предполагаетъ, что лѣвая и правая часть уравненія (476) одной и той же степени. Возьмемъ число b_1 для котораго $b_1 - c_1$ раціонально и числа $b_2 . b_3 \ldots$ для которыхъ $b_2 - c_1$, $b_3 - c_1 \ldots$ или что тоже $b_2 - b_2, b_3 - b_1 \ldots$ раціональны.

Каждому изъ этихъ чиселъ будетъ отвѣчать значеніе $\Gamma_j(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$ числа корней опредѣляющаго уравненія заключающагося въ группѣ.

Степень правой части уравненія (476) относительно lgz будетъ равна $T(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$, гдѣ $T(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$ наибольшее изъ чиселъ $\Gamma_i(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$.

Степень лѣвой части не больше ω откуда слѣдуетъ, что

$$\omega \geqq T(\underline{x}_i, \underline{u}_i) - 1$$

или, если обозначить черезъ T наименьшее въ ряду чиселъ $T(x_i, u_i)$, то

$$\omega \geqq T - 1$$

Примѣръ.

Уравненіе

$$y'' + \frac{xy'}{x^2 - 1} + \frac{y}{(x^2 - 1)^2} = 0 \tag{455}$$

обязательно имѣетъ неосновное рѣшеніе (что даетъ право въ § 70 положить $\delta(\overline{qv}|=1)$.

Въ самомъ дѣлѣ взявъ за $(\underline{x}_i, \underline{u}_i)$

$$x=1$$

имѣемъ

$$T(\underline{x_i}, \underline{u_i}) - 1 = 1$$

откуда слѣдуетъ, что въ общее рѣшеніе уравненія (455) $lg(x-1)$ долженъ входить въ первой степени.

B. Неоднородныя уравненія

a) Послѣдній членъ алгебраическій

§ 83. *Обобщенная теорема Абеля Кенигсбергера.*

Въ § 45 была выведена простѣйшая форма частнаго рѣшенія неоднороднаго алгебраическаго уравненія

$$Y^{(n)} + p_1(x, u)\, Y^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(x, u)\, Y' + p_n(x, u)\, Y = P(x, u) \quad (477)$$

Мы теперь укажемъ еще болѣе простую форму, а именно докажемъ, что, *если уравненіе (477) имѣетъ рѣшеніе, выражаемое въ конечномъ видѣ съ помощью основныхъ трансценд. [ab] и [elm], то оно имѣетъ простѣйшее частное рѣшеніе типа:*

въ случаѣ [ab]

$$y_0 = Q(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p) + \rho_0 + \sum \rho_i \sum [\underline{AB^{(1)}}] \quad (478)$$

въ случаѣ [elm]

$$y_0 = Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) + \rho_0 + \sum \rho_i [\underline{Lg}] \quad (479)$$

гдѣ $Q(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p)$ *полиномы отъ* ζ_i *съ коэффиціентами раціональными относительно* (x, u) *и* $t = (y)$, ζ_i *трансцендентныя I типа, входящія въ выраженіе рѣшенія у приведеннаго уравненія,* ρ_0, ρ_i *алгебраическія функціи раціональныя функціи* (x, u) *и* $t = (y)$

$$(\Sigma \underline{AB}) \equiv (y) \tag{480}$$

$$(Lg) \equiv (y) \tag{481}$$

если принять обозначенія § 59, 60.

Если раскрыть значеніе символовъ, то для случая элементарныхъ трансцендентныхъ будемъ имѣть.

Если рѣшеніе приведеннаго уравненія

$$y = \sum e^{\omega(x,u,t)} [\chi_0(x,u,t)]^{\lambda_0} [\chi_1(x,u,t)]^{\lambda_1} .. [\chi_m(x,u,t)]^{\lambda_m}$$

$$[lg\vartheta_1(x,u,t)]^{\mu_1} \ldots [lg\vartheta_q(x,u,t)]^{\mu_q}$$

гдѣ $\omega, \chi_i, \vartheta$ раціональныя функціи (x, u) и t, опредѣляемаго алгебраическимъ уравненіемъ

$$\varphi(x,u,t) = 0,$$

то простѣйшее частное рѣшеніе неоднороднаго уравненія вида:

$$y_0 = \sum_{i=1}^{i=q} \sum e^{\omega(x,u,t)} [\chi_0(x,u,t)]^{\lambda_0} .. [\chi_m(x,u,t)]^{\lambda_m}$$

$$[lg\vartheta_1(x,u,t)]^{\mu_1} \ldots [lg\vartheta_i(x,u,t)]^{\mu_i+1} \ldots [lg\vartheta_q(x,u,t)]^{\mu_q}$$

$$+ \rho_0(x,u,t) + \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i(x,u,t)\, lg\, \Theta_i(x,u,t)$$

гдѣ ρ_0, ρ_i, Θ_i раціональныя функціи (x, u, t). Для доказательства, полагая

$$\alpha u + \beta(y) = v$$

при надлежаще выбранныхъ постоянныхъ α, β можемъ выразить $u, (y)$ раціонально въ v и привести предложенное уравненіе (332) къ виду

$$Y^{(n)} + q_1(x, v) Y^{(n-1)} + \ldots q_n(x, v) Y = Q(x, v)$$

гдѣ $q_i(x, v)$, $Q(x, v)$ раціональныя функціи (x, v). При этомъ въ формѣ (302) или

$$Y_0 = \sum [alg] \, [\underline{ab_1}]^{\pi_1} \ldots [\underline{ab}]^{\pi_{q-1}} [\underline{ab}]^{\pi_q}$$

$$+ [alg_0] + \sum [alg_i] \, [\underline{AB_i}]$$

$[alg_i]$, какъ частныя рѣшенія, а $[alg]$, какъ коэффиціенты въ частныхъ рѣшеніяхъ приведеннаго уравненія будутъ таковы, что

$$([alg_i]) \equiv (y)$$

$$([alg]) \equiv (y)$$

иначе говоря, $[alg] = [\chi(x, u, t)]^\lambda$ гдѣ χ раціональная функція (x, u, t), гдѣ $t \equiv (y)$

$$[\underline{ab_i^{(j)}}] = [\underline{ab_i^{(1)}}(\gamma_i, \delta_i)],$$

гдѣ

$$\gamma_i = \gamma_i(x, u, t)$$

раціональная функція (x, u, t). Но $([alg_0])$ и $([\underline{AB_i^{(1)}}])$ вообще нельзя положить $\equiv (y)$. Вообще

$$[alg_0] = \chi_0(x, u, t, w) = \chi_0(x, v, w)$$

$$[\underline{AB}_i^{(1)}] = [\underline{AB}_i^{(1)}(\alpha_i, \beta_i)]$$

гдѣ

$$\alpha_i = \alpha_i(x, v, w)$$

гдѣ χ_0, α_i раціональныя функціи (x, v) и w опредѣляемаго уравненіемъ:

$$w^\tau + \omega_1(x, v) w^{\tau-1} + \ldots \omega_\tau(x, v) = 0 \quad (*)$$

Въ случаѣ элементарныхъ трансцендентныхъ

$$[Lg_i^{(1)}] = Lg\, \alpha_i(x, v, w)$$

Коэффиціенты при различныхъ произведеніяхъ

$$[\underline{ab_1}]^{\pi_1} [\underline{ab_2}]^{\pi_2} \ldots [\underline{ab_p}]^{\pi_p}$$

въ

$$\sum [alg] [\underline{ab_1}]^{\pi_1} [\underline{ab_2}]^{\pi_2} \ldots [\underline{ab_p}]^{\pi_p}$$

согласно обобщеній формулъ Маклорена представляютъ выраженія

$$A \left[\frac{\partial^\pi y_0}{\partial \zeta_1^{\pi_1} \partial \zeta_2^{\pi_2} \ldots \partial \zeta_p^{\pi_p}}\right]_{\substack{\zeta_1 = 0 \\ \zeta_2 = 0 \\ \ldots \\ \zeta_p = 0}}$$

если положить $\zeta_i = [\underline{ab_i}]$.

Такъ какъ $y_1 = \dfrac{\partial^\pi y_0}{\partial \zeta_1^{\pi_1} \partial \zeta_2^{\pi_2} \ldots \partial \zeta_p^{\pi_p}}$ представляетъ рѣшеніе приведеннаго уравненія, то коэффиціенты при $\zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} \ldots \zeta_\varrho^{\mu_p}$ въ y_1 представляютъ раціональныя функціи (x, u) и $t = (y)$ или что тоже (x, v).

Такимъ образомъ первый членъ въ выраженіи Y_0 представляетъ цѣлый полиномъ $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p$ съ коэффиціентами раціональными относительно (x, v).

Заставляя теперь (x, v) описывать замкнутый путь мы приводимъ t къ первоначальному значенію, а w отъ одного корня къ другому любому корню уравненія (*).

Обозначая черезъ Y_{0g} значеніе Y_0, отвѣчающее $w = w_g$ будемъ имѣть тожественно при всякомъ (x, v):

$$Y_{01}^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} q_{n-j}(x, v)\, Y_{01}^{(j)} = Q(x, v)$$

При описаніи (x, v) упомянутаго выше замкнутаго пути имѣемъ

$$Y_{0g}^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} q_{n-j}(x, v)\, Y_{0g}^{(j)} = Q(x, v)$$

откуда слѣдуетъ, что уравненіе (332) имѣетъ рѣшенія Y_{0g} *сопряженныя данному* Y_{01} и кромѣ того рѣшеніе

$$Y_0 = \frac{\sum\limits_{g=1}^{g=\tau} Y_{0g}}{\tau} \tag{482}$$

Представляя Y_{01} въ формѣ

$$Y_{01} = Q_1(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p) + R_{01} + \sum_{i=1}^{i=k} R_{i1} Z_{ig} \tag{483$_1$}$$,

гдѣ

$$Q_1(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_p) = \sum [alg]\,[\underline{ab}_1^{(1)}] .. [\underline{ab}_p^{(1)}]$$

$R_{01} = [alg_0]$ $R_{i1} = [alg_i]$ алгебраическія функціи

$$Z_{i1} = [\underline{AB}_i^{(1)}(\alpha_{i1}, \beta_{i1})]$$

гдѣ

$$\alpha_{i1} = \alpha_i(x, v, w_1)$$

будемъ имѣть

$$Y_{0g} = Q_g(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) + R_{0g} + \sum_{i=1}^{i=k} R_{ig} Z_{ig} \qquad (483_g)$$

гдѣ Q_g, какъ и Q, цѣлый полиномъ $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p$ R_{0g}, R_{ig} алгебраическія функціи получаемыя изъ R_{01}, R_{i1} замѣной w_1 на w_g

$$Z_{ig} = [\underline{AB}_i^{(1)}(\alpha_{ig}, \beta_{ig})]$$

гдѣ

$$\alpha_{ig} = \alpha_i(x, v, w_g)$$

Изъ уравненіи (482) (483_g) имѣемъ

$$Y_0 = \frac{1}{\tau}\sum_{g=1}^{g=\tau} Q_{0g}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) + \frac{1}{\tau}\sum_{g=1}^{g=\tau} R_{0g} +$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=k} R_{i1} \frac{1}{\tau}\sum_{g=1}^{g=\tau} Z_{ig}$$

или, замѣчая, что

$$\frac{1}{\tau}\sum_{g=1}^{g=\tau} Q_{0g}(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) = Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$$

гдѣ Q полиномъ ζ_i причемъ

$$(Q(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_p)) \equiv (Q_{01}(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_p)) \equiv (Q_{02}(\zeta_1 \zeta_2 \ldots \zeta_p)) \equiv \ldots \equiv (y)$$

$$\frac{1}{\tau}\sum_{g=1}^{g=\tau} R_{0g} = R_0,$$

гдѣ ρ_0 какъ симметрическая функція w_g выражается раціонально черезъ (x, v) и слѣдовательно черезъ (x, u) и $t \equiv (y)$

Наконецъ

$$\sum_{g=1}^{g=\tau} Z_{ig} = \sum_{g=1}^{g=\tau} [\underline{AB_i^{(1)}}(\alpha_{ig}, \beta_{ig})] = \sum_{g=1}^{g=a_i} [\underline{AB_i^{(1)}}(\overline{\alpha}_{ig} \overline{\beta}_{ig})]$$

гдѣ α опредѣляется уравненіемъ

$$\overline{\alpha}^{a_i} + \varphi_1 \overline{\alpha}^{a_i - 1} + \ldots \varphi_{a_i - 1} \overline{\alpha} + \varphi_a = 0$$

гдѣ φ_i раціональныя симметрическія функціи α_{ig}, β_{ig} а слѣдовательно раціональныя симметр. функціи w_g и накопецъ раціональныя функціи (x, u) и $t \equiv (y)$.

Согласно терминологіи § 60 можемъ написать что

$$(\Sigma [AB_i^{(1)}]) \equiv (y) \tag{484}$$

Въ случаѣ элементарныхъ трансцендентныхъ

$$\sum_{g=1}^{g=\tau} Z_{ig} = \sum_{g=1}^{g=\tau} [Lg_i^{(1)} \alpha_{ig}] = Lg \prod_{g=1}^{g=\tau} \alpha_{ig} = Lg\, \alpha_i \tag{485}$$

гдѣ α_i раціональная функція (x, v) т. е. (x, u) и $t \equiv (y)$

$$([Lg_i^{(1)}]) \equiv (y)$$

Итакъ мы имѣемъ простѣйшее рѣшеніе неоднороднаго уравненія (477) въ формѣ (478) или (479) причемъ имѣютъ мѣсто условія (484) (485) откуда выводимъ условія (480, 481).

Эта очень общаго характера теорема представляетъ обобщеніе упомянутой въ § теоремы Абеля Кенигсбергера. А именно легко видѣть, что она получается если примѣнимъ выведенную нами форму простѣйшаго рѣшенія къ неоднородному уравненію

$$y' = P(x, u)$$

Такъ какъ приведенное уравненіе

$$y' = 0$$

имѣетъ общимъ рѣшеніемъ

$$y = C,$$

то сумма $Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) + \rho_0$ сводится къ раціональной функціи, ρ_i частныя алгебраическія рѣшенія приведеннаго уравненія сводятся къ постояннымъ.

§ 84. *Случаи дальнѣйшаго упрощенія формы частнаго рѣшенія.*

Въ большинствѣ случаевъ возможно еще дальнѣйшее упрощеніе формы (478) (479).

Въ самомъ дѣлѣ въ общемъ случаѣ

1) приведенное уравненіе или вовсе не имѣетъ алгебраическихъ рѣшеній или

2) имѣетъ только рѣшенія, сводящіяся къ постояннымъ.

Послѣднее предполагаетъ $p_n(x, u) = 0$

Въ этомъ случаѣ

$$Y_0 = \rho_0 + \sum_{i=1}^{i=k} C_i Z_i$$

гдѣ

$$Z_i = \sum_{g=1}^{g=a_i} [\underline{AB}_i^{(1)}(\alpha_{ig}, \beta_{ig})]$$

α_{ig} опредѣляются уравненіями

$$\alpha_{ig}^{a_i} + \varphi_1(x, u, t)\, \alpha_{ig}^{a_i - 1} + \ldots \varphi_{a_i}(x, u, t) = 0$$

t опредѣляется уравненіемъ

$$t^{\omega}+\psi_1(x,u)\,t^{\omega-1}+\ldots\psi_{\omega}(x,u)=0 \qquad (417)$$

Заставляя (x,u) описывать замкнутый путь на Римановской поверхности (u,x) мы заставляемъ переходить t отъ одного корня уравненія (417) $t=t_1$ къ другому $t=t_h$.

Обозначая черезъ Y_{0h} значеніе Y_0 при $t=t_h$ имѣемъ сопряженныя рѣшенія

$$Y_{0h}=\rho_{0h}+\sum_{i=1}^{i=k} C_i Z_{ih}$$

и рѣшеніе

$$Y_0=\frac{1}{\sigma}\sum_{h=1}^{h=\sigma} Y_{0h}=\frac{1}{\sigma}\sum_{h=1}^{h=\sigma}\rho_{0h}+\sum_{i=1}^{i=k}\frac{C_i}{\sigma}\sum_{h=1}^{h=\sigma} Z_{ih},$$

откуда получаемъ

$$Y_0=R_0+\sum_{i=1}^{i=k} D_i\sum_{h=1}^{h=b_i}[\underline{AB}_i^{(1)}(\overline{\alpha}_{ih},\overline{\beta}_{ih})] \qquad (486)$$

гдѣ R_0 раціональная функція, D_i произвольныя постоянныя, $\overline{\alpha}_{ih}$ опредѣляются уравненіями

$$\overline{\alpha}^b+\varphi_1(x,u)\,\alpha^{b-1}+\ldots\varphi_b(x,u)=0$$

гдѣ φ_i раціональныя функціи (x,u).

Въ случаѣ элементарныхъ трансцендентныхъ имѣемъ (раскрывая значеніе символовъ)

$$Y_0=R_0(x,u)+\sum_{i=1}^{i=k} D_i\,lg\,\Theta_i(x,u) \qquad (487)$$

гдѣ $R_0(x,u)$, $\Theta_i(x,u)$ раціональныя функціи (x,u). Полученный результатъ можно формулировать слѣдующимъ образомъ.

Если неоднородное уравненіе имѣетъ рѣшеніе, выражаемое въ конечномъ видѣ, а уравненіе приведенное не имѣетъ алгебраическихъ рѣшеній, не сводящихся къ постояннымъ, то существуетъ у неоднороднаго уравненія рѣшеніе типа (486) или (487), гдѣ R_0 раціональная функція

$$\delta(\Sigma AB] = 1 \tag{488}$$

$$\delta[Lg] = 1, \tag{489}$$

въ томъ же случаѣ, когда приведенное уравненіе вовсе не имѣетъ алгебр. рѣшеній уравненіе неоднородное должно имѣть раціональное рѣшеніе.

§ 85. Опредѣленіе раціональнаго рѣшенія неоднороднаго уравненія.

Отсюда ясно, сколь важное значеніе должна имѣть задача объ опредѣленіи раціональнаго частнаго рѣшенія неоднороднаго уравненія. При разрѣшеніи приведеннаго уравненія въ большинствѣ случаевъ задача о разрѣшеніи въ конечномъ видѣ неоднороднаго уравненія сводится къ этой проблеммѣ.

Раціональное рѣшеніе неоднороднаго уравненія

$$Y^{(n)} + p_1(x, u)\, Y^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(x, u)\, Y' + p_n(x, u)\, Y = P(x, u)$$

строится методами, аналогичными тѣмъ, которыя въ § 56 примѣнялись къ построенію основныхъ рѣшеніи однородныхъ уравненій. Предполагая, что u разлагается по цѣлымъ степенямъ $(x-\underline{x})^{\frac{1}{d}} = z$, будемъ имѣть, имѣя въ виду, что Y_0 раціональная функція (x, u)

$$Y_0 = z^b \sum_{j=0}^{j=\infty} l_j z^j$$

b цѣлое и въ случаѣ полюса $(\underline{x}, \underline{u})$ отрицательное, число. Прежде всего замѣчаемъ, обозначая черезъ $Y_0^{(j)}$ производныя не по x, а по z:

$$Y_0^{(n)} = z^{b-n} \sum_{j=0}^{j=\infty} [b \overset{n}{+} j]\, l_j z^j \tag{490}$$

$$p_{n-i}(z)\, Y_0^{(i)} = z^{b-i+\alpha_{n-i}} \left[\sum_{j=0}^{j=\infty} [b \overset{i}{+} j]\, l_j z^j \right] \left[\sum_{j=0}^{j=\infty} p_{n-i,j} z^j \right] \tag{491}$$

$$p(z) = z^{-\alpha} \sum_{j=0}^{j=\infty} p_j z^j \tag{492}$$

если уравненіе (477) подстановкой

$$(x - \underline{x})^{\frac{1}{d}} = z$$

приводится къ уравненію

$$Y_0^{(n)} + \sum_{i=0}^{i-1=n} p_{n-i}(z)\, Y_0^{(i)} = p(z) \tag{493}$$

Для того чтобы по подстановкѣ въ это уравненіе выраженій $Y_0^{(n)}, p_{n-i}(z)\, Y_0^{(i)}$ (490) и (491) члены съ z^{b-n} взаимно сократились, необходимо, чтобы не всѣ числа α_i, α_0 обращались въ нули, необходимо, чтобы точка $z = 0$ была полюсомъ $p_i(z)$ или $p(z)$, а $(\underline{x}, \underline{u})$ полюсомъ $p_i(x, u)$ или $P(x, u)$.

При этомъ для того, чтобы обѣ части уравненія (493) были одного порядка относительно z необходимо, чтобы наивысшая степень z въ лѣвой части была бы не меньше α.

Если обозначить черезъ g наибольшее число въ ряду Томэ

$$\alpha_i + n - i \quad i = 1, 2 \ldots n$$

то должны имѣть

$$|b| + g \geqq \alpha$$

обозначая черезъ $|b|$ численное значеніе b.

Мы дѣлимъ теперь полюса $(\underline{x}, \underline{u})$ на два класса

$(\overset{1}{\underline{x}}, \overset{1}{\underline{u}})$ для которыхъ

$$|b| + g > \alpha$$

$$(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{2}{\underline{u}}) \quad \ldots \ldots \ldots \quad |b| + g = \alpha$$

Приравнивая въ первомъ случаѣ нулю коэффиціентъ при z^{b-g} получаемъ, что

$$-(|b| + g)$$

представляетъ отрицательный корень опредѣляющаго уравненія (390)

$$q_h[\overset{n-h}{r}] + q_{h+1}[\overset{n-h-1}{r}] + \ldots q_{n-1}[\overset{1}{r}] + q_n = 0 \tag{390}$$

Во второмъ случаѣ мы находимъ

$$\Omega[-(|b| + g)]\, l_0 = p_0$$

$$l_0 = \frac{p_0}{\Omega[-(|b| + g)]}$$

Такимъ образомъ для этого случая опредѣляется не только возможныя значенія $(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{2}{\underline{u}})$, но и значеніе l_0. Замѣтимъ, что для того, чтобы полюсъ былъ втораго класса необходимо чтобы

$$\alpha > g$$

Зная возможныя полюса и порядки ихъ можемъ построить раціональную функцію Y_0 и затѣмъ опредѣлить параметры входящіе въ Y_0 такъ, чтобы Y_0 удовлетворяло бы заданному неоднородному линейному уравненію.

Примѣръ 1.

Найдемъ для примѣра раціональное рѣшеніе уравненія:

$$Y'' - \frac{Y'}{2x} + \frac{Y}{2x^2} = \frac{x^3 + 2x^2 + 2x + 1}{2(x-1)^3 x^2} \tag{495}$$

Полюсами Y_0 могутъ быть только

$$0, \infty, 1$$

Такъ какъ опредѣляющее уравненіе, отвѣчающее $x = 0$ не имѣетъ отрицательныхъ корней и при этомъ $\alpha = g$, то полюсами Y_0 могутъ быть только : ∞ и 1., для $x = \infty$ опредѣляющее уравненіе

$$r^2 + \tfrac{3}{2} r + \tfrac{1}{2} = 0$$

даетъ корни : $-\frac{1}{2}$ и -1

Откуда слѣдуетъ, что для $x = \infty : b = -1$

Полюсъ $x = 1$ можетъ быть только полюсомъ второго класса, такъ какъ опредѣляющее уравненіе

$$r(r-1) = 0$$

не имѣетъ отриц. корней.

Такимъ образомъ

$$Y_0 = \frac{A}{x-1} + Bx$$

Для того, чтобы эта функція удовлетворяла уравненію (495) необходимо и достаточно, чтобы

$$2A = 2 \qquad A = 1$$

B остается произвольнымъ.

Легко найти общее рѣшеніе приведеннаго уравненія:

$$y''-\frac{y'}{2x}+\frac{y}{2x^2}=0$$

выражаемое въ конечномъ видѣ и равное

$$y=C_1x+C_2\sqrt{x}$$

Общее рѣшеніе уравненія (495) равно суммѣ

$$Y=y+Y_0=\frac{1}{x-1}+Dx+E\sqrt{x}$$

гдѣ D и E произвольныя постоянныя.

Примѣръ 2.

Уравненіе

$$4(1+x)y''+2Y'-Y=\frac{5-x}{(1+x)^2} \qquad (497)$$

должно имѣть частное раціональное рѣшеніе въ случаѣ разрѣшимости въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ, такъ какъ приведенное уравненіе

$$4(1+x)y''+2y'-y=0,$$

какъ легко убѣдиться методами I главы имѣетъ общее рѣшеніе

$$y=C_1e^{\sqrt{1+x}}+C_2e^{-\sqrt{1+x}},$$

не зависящее отъ трансценд. I типа и не имѣетъ рѣшеній алгебраическихъ.

Легко видѣть, что здѣсь возможенъ только полюсъ 2-го класса:

$(\overset{2}{\underline{x}},\overset{2}{\underline{u}})$: $x=-1$ причемъ порядокъ его 1.

$$Y_0 = \frac{A}{1+x} \quad A=1$$

$$y = C_1 e^{\sqrt{1+x}} + C_2 e^{-\sqrt{1+x}} + \frac{1}{1+x}$$

Примѣръ 3.

Уравненіе

$$Y' - Y = \frac{1}{x} \tag{498}$$

отвѣчаетъ приведенное $y' - y = 0$ съ рѣшеніемъ $y = Ce^x$, тоже не зависящимъ отъ трансцендентныхъ I типа.

Если Y выражается въ конечномъ видѣ съ помощью $[ab]$ или $[elm]$, то уравненіе (498) имѣетъ раціональное рѣшеніе.

Полюсъ Y_0 только второго класса. $x = \infty$ не можетъ быть полюсомъ, такъ какъ для этого значенія Y иррегулярно $x = 0$ не представляетъ полюса $p_i(x, u)$. Но тогда $|b| + 1 = 1$ откуда $|b| = 0$, иначе говоря, и $x = 0$ не можетъ быть полюсомъ, Y_0 сводится къ постоянному.

Но очевидно уравненію (498) постоянное не удовлетворяетъ. Рѣшеніе уравненія (498) это такъ называемый интегральный логариѳмъ

$$\int \frac{e^x}{x} dx$$

Такимъ образомъ интегральный логариѳмъ не выражается въ конечномъ видѣ съ помощью Абелевыхъ интеграловъ и элементарныхъ трансцендентныхъ.

§ 86. *Разысканіе простѣйшаго частнаго рѣшенія неоднороднаго уравненія, не содержащаго трансцендентныхъ, входящихъ въ рѣшеніе приведеннаго уравненія.*

Разысканіе алгебраическаго рѣшенія неоднороднаго уравненія

$$Y^{(n)}+p_1(x,u)\,Y^{(n-1)}+\ldots p_n(x,u)\,Y=P(x,u) \qquad (477)$$

сводится къ нахожденію алгебраическаго рѣшенія приведеннаго уравненія

$$y^{(n)}+p_1(x,u)\,y^{(n-1)}+\ldots p_n(x,u)\,y=0 \qquad (332)$$

такъ какъ, если послѣднее найдено, то

$$Y=y+Y_0,$$

гдѣ Y_0 раціональное рѣшеніе уравненія (477). Отъ алгебраическихъ рѣшеній уравненія (477) переходимъ къ рѣшеніямъ типа

$$Y=Q(\zeta_1,\zeta_2..\zeta_p)+\rho_0$$

т. е. не содержащимъ основныхъ трансцендентныхъ Z_i, не входящихъ въ выраженіе рѣшенія y приведеннаго уравненія.

Легко видѣть, что $Q(\zeta_1,\zeta_2..\zeta_p)$ можетъ быть построена (въ смыслѣ § 56). По $P_i=\dfrac{\partial Q}{\partial \zeta_i}$ можно найти $Q=Q_0+C$, гдѣ Q_0 извѣстная функція $\zeta_1,\zeta_2..\zeta_p$, C не зависитъ отъ ζ_i и опредѣлится изъ условія, что $Q=0$ при $\zeta_1=0\ \zeta_2=0\ldots\zeta_p=0$ такъ какъ Q не содержитъ свободнаго члена.

Но $P_i(\zeta_1,\zeta_2..\zeta_p)$ частныя рѣшенія не содержащія трансцендентныхъ II типа приведеннаго уравненія (332).

Если наиболѣе общее рѣшеніе приведеннаго уравненія

$$P(\zeta_1,\zeta_2..\zeta_p,C_1,C_2,C_3\ldots C_m),$$

не содержащее трансц. II типа зависитъ отъ m произвольныхъ постоянныхъ, то можно написать

$$P_i(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p) = P(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p, C_1^{(i)} C_2^{(i)} .. C_m^{(i)}),$$

гдѣ $C_1^{(i)}, C_2^{(i)} .. C_m^{(i)}$ нѣкоторыя параметры. Въ $Q(\zeta_1 \zeta_2 . \zeta_p)$ будетъ входить вообще тр. параметровъ.

Подставляя въ уравненіе (477)

$$Y = Q(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p) + \rho$$

получаемъ тожество относительно ζ_i. Приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ $\zeta_1^{\mu_1} \zeta_2^{\mu_2} .. \zeta_p^{\mu_p}$, получаемъ уравненія

$$\Omega(x, u, t) = 0$$

Приводя эти уравненія къ виду

$$\Omega_0(x, u) t^\alpha + \Omega_1(x, u) t + ... \Omega_\alpha(x, u) = 0$$

гдѣ $\alpha \leqslant \sigma$, если t опредѣляется неприводимымъ уравненіемъ

$$t^\sigma + \phi_i(x, u) t^{\sigma-1} + ... \phi_\sigma(x, u) = 0$$

должны имѣть

$$\Omega_i(x, u) = 0$$

Въ свою очередь это уравненіе, приведенное къ виду

$$\Omega_{0i}(x) u^\beta + \Omega_{0i}(x) u^{\beta-1} + ... \Omega_{\beta, i}(x) = 0$$

гдѣ $\beta < m$, если u опредѣляется неприводимымъ уравненіемъ

$$u^m + \varphi_i(x) u^{m-1} + ... \varphi_m(x) = 0$$

предполагаетъ

$$\Omega_{ji}(x) = 0$$

Приравнивая нулю коэффиціенты при различныхъ степеняхъ x получаемъ условныя уравненія для параметровъ, входящихъ въ $Q(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p)$, которыя въ иныхъ случаяхъ могутъ вполнѣ опредѣлиться.

Приравниваніе нулю свободнаго члена даетъ

$$A(x, u, t) + \rho^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j}(x, u)\rho^{(j)} = P(x, u)$$

которое можно переписать въ слѣдующемъ видѣ:

$$\rho^{(n)} + q_1(x, v)\rho^{(n-1)} + \ldots . q_n(x, v)\rho = Q(x, v) \qquad (496)$$

гдѣ $q_i(x, v)$, $Q(x, v)$ раціональныя функціи x и

$$v = \alpha u + \beta t \qquad t \equiv (y)$$

Остается только найти раціональное рѣшеніе этого уравненія.

Для этого, чтобы уравненіе (496) имѣло раціональное рѣшеніе, необходимо выполненіе нѣкоторыхъ условій, выражаемыхъ алгебраическими уравненіями между параметрами входящими въ $q_i(x, v)$ т. е. между $C_1^{(i)}, C_2^{(i)} \ldots C_m^{(i)}$, которыя могутъ послужить къ опредѣленію тѣхъ ихъ нихъ, которыя остались не опредѣленными изъ изслѣдованныхъ выше условій.

§ 87. *Разысканіе простѣйшаго рѣшенія неоднороднаго уравненія въ общемъ случаѣ.*

Возьмемъ теперь общій случай, когда

$$Y = Q(\zeta_1, \zeta_2 .. \zeta_p) + \rho_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i Z_i$$

Построивъ, какъ въ § 86 $Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p)$, полагая

$$Y = Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p) + \rho$$

получаемъ неоднородное линейное уравненіе

$$\rho^{(n)} + q_1(x, v)\rho^{(n-1)} + \ldots q_n(x, v)\rho = Q(x, v)$$

Остается найти рѣшеніе типа

$$\rho = \rho_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i Z_i$$

этого уравненія.

Рѣшеніе ρ мы можемъ представить въ видѣ

$$\rho = \rho_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i \underline{Z}_i \qquad (499)$$

гдѣ $\underline{Z}_i$, какъ и Z_i нѣкоторыя трансцендентныя перваго типа, ρ_i независимыя частныя алгебраическія рѣшенія уравненія приведеннаго, произвольно нами выбранныя.

Дальше слѣдуетъ наступать совершенно также какъ при разысканіи линейныхъ рѣшеній однороднаго уравненія.

Подстановкой

$$\rho = \rho_1 \int y_1 \, dx$$

сводимъ разысканіе рѣшенія (499) уравненія (477) къ разысканію рѣшенія, содержащаго $\overline{k-1}$ трансцендентныхъ $\underline{Z}_i$ уравненія

$$y_1^{(n-1)} + q_1,(x, v)\, y_1^{(n-2)} + \ldots q_{n-1}(x, v)\, y_1 = Q_1(x, v)$$

Полагая

$$y_1 = \rho_{12} \int y_2 \, dx$$

приходимъ къ разысканію рѣшенія, содержащаго $\overline{k-2}$ трансцендентныхъ $\underline{Z}_i$ уравненія $\overline{n-2}$-го порядка и т. д. Такъ поступаемъ пока не дойдемъ до уравненія, имѣющаго алгебраическое рѣшеніе.

Примѣръ.

Возьмемъ задачу объ интегрированіи въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ неоднороднаго алгебраическаго уравненія:

$$x^2(x+1)^2Y''-(2x+1)(x+1)xY'+(2x+1)(x+1)Y=x^2(1-x) \quad (500)$$

Приведенное уравненіе

$$x^2(x+1)y''-(2x+1)xy'+(2x+1)y=0 \quad (501)$$

Опредѣляющія уравненія

$x=0 \qquad \alpha^2-2\alpha+1=0$ два кратныхъ корня

$x=\infty \qquad \alpha^2+2\alpha+1=0$ тоже

$x=-1 \qquad \alpha(\alpha-1)$

Отсюда слѣдуетъ (§ 82) существованіе неосновныхъ рѣшеній.

Основное рѣшеніе $[\overline{qv}^{(1)}]$ сводится къ $|\overline{qv}^{(1)})$ (§ 52 и § 54) а $|\overline{qv}^{(1)})=[alg]$ (§ 51), причемъ (§ 68)

$$\delta|\overline{qv}^{(1)})=1$$

Легко видѣть что при этихъ условіяхъ основное рѣшеніе равно $y=x$

Общее рѣшеніе формы

$$y=x[lg\vartheta+\rho]$$

Полагая $y = x \int y_1 \, dx$ имѣемъ уравненіе

$$y_1' + \frac{y}{x(x+1)} = 0$$

Уравненіе (501) рѣшается въ конечномъ видѣ, если это послѣднее уравненіе имѣетъ алгебраическое рѣшеніе.

Легко видѣть, что $y_1 = \frac{x+1}{x}$

$$\int y_1 \, dx = lgx + x$$

$$y = xlgx + x^2$$

и общее рѣшеніе приведеннаго уравненія

$$y = C_1 x + C_2 (xlgx + x^2)$$

Найдемъ теперь простѣйшее частное рѣшеніе неоднороднаго уравненія (500).

Здѣсь

$$\zeta = lgx \qquad \rho_1 = x$$

$$P(\zeta) = C_1 x + C_2 (xlgx + x^2)$$

$$Q(\zeta) = lgx [C_1 x + C_2 (xlgx + x^2)]$$

$$Y_0 = lgx [C_1 x + C_2 (xlgx + x^2)] + \rho_0 + xZ$$

причемъ, такъ какъ $Y_0 - C_1 (xlgx + x^2)$ есть также частное рѣшеніе уравненія (500) то можемъ положить

$$Y_0 = C_1 x^2 + C_2 (xlgx + x^2) lgx + x \int y_1 \, dx \tag{502}$$

если

$$\rho = \rho_0 + xZ = x \int y_1 \, dx$$

Подставляя въ уравненіе (500) выраженія Y_0 (502) и выраженія Y'_0, Y''_0

$$Y_0' = 2C_1 x + C_2 (xlgx + x^2)' lgx + C_2 (lgx + x) + xy_1 + \int y_1 \, dx$$

$$Y_0'' = 2C_1 + C_2 (xlgx + x^2)'' lgx + C_2 \left(\frac{lgx}{x} + 1 \right) + xy_1' + 2y_1$$

мы получаемъ по сокращеніи

$$\frac{C_1}{x+1} - \frac{C_2 x}{x+1} + \frac{C_2 lgx}{x+1} + xy_1' + \frac{y_1}{x+1} = (1-x) x^2$$

Отсюда слѣдуетъ, что коэффиціентъ при lgx равенъ нулю т. е. $C_2 = 0$ и слѣдовательно y_1 представляетъ алгебраическое (и болѣе того раціональное) рѣшеніе уравненія

$$y_1' + \frac{y_1}{x(x+1)} = \frac{1-x}{x(x+1)^2} - \frac{C_1}{x+1}$$

Здѣсь возможенъ лишь полюсъ второго класса $(\overset{2}{\underline{x}}, \overset{2}{\underline{u}})$ $x = -1$ перваго порядка

$$y_1 = \frac{A}{x+1}$$

Подставляя это значеніе въ уравненіе (500) убѣждаемся, что $A = 1$, $C_1 = 0$.

b) Послѣдній членъ трансцендентный.

§ 88. Сведеніе одного неоднороднаго уравненія къ нѣсколькимъ съ послѣдними членами простѣйшаго типа.

Закончимъ нашу работу разсмотрѣніемъ случая уравненія неоднороднаго съ трансц. послѣднимъ членомъ. Простѣйшее частное рѣшеніе уравненія

$$Y^{(n)} + p_1(x, u) Y^{(n-1)} + \ldots p_{n-1}(x, u) Y' + p_n(x, u) Y = P \qquad (503)$$

гдѣ P можно придать форму:

$$P = \sum \overline{\underline{\eta}}_j P_j(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_{\overline{p}})$$

и гдѣ между $\overline{\underline{\eta}}_j$ не существуетъ алгебраическихъ отношеній причемъ

$$(P) \equiv u$$

можетъ быть представленъ въ видѣ

$$\sum \overline{\underline{\eta}}_j \{ Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p) + \sum \rho_{ij}(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p) Z_i +$$

$$+ \rho_{0i}(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p) \} \qquad (504)$$

гдѣ ζ_i трансцендентныя перваго типа, входящія въ рѣшеніе y приведеннаго уравненія, Z_i трансцендентныя, не входящія ни въ y, ни въ P. Q полиномъ отъ ζ_i, $\overline{\zeta}_i$ безъ свободнаго отъ ζ_i члена, ρ_{ij}, ρ_{0i} полиномы $\overline{\zeta}_i, \overline{\eta}_j$ трансцендентныя II типа. Подставляя выраженіе (504) для Y въ уравненіе (503) будемъ имѣть

$$\sum \overline{\underline{\eta}}_j R_j(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p, Z_1, Z_2 \ldots Z_k) = \sum \overline{\underline{\eta}}_j P_j(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p) \qquad (505)$$

если положить

$$\overline{\underline{\eta}}_g R_g(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p, Z_1, Z_2 \ldots Z_k) =$$

$$= Y_g^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j} Y_g^{(j)},$$

гдѣ

$$Y_g = \overline{\underline{\eta}}_g \{ Q_g(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_{\overline{p}}) + \rho_0(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_{\overline{p}})$$

$$+ \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_{\overline{p}}) Z_i \}$$

Изъ уравненія (505) вытекаетъ, что

$$\overline{\underline{\eta}}_j \text{ и } \overline{\eta}_j$$

находятся въ алгебраическомъ отношеніи, такъ что $\overline{\underline{\eta}}_j$ въ выраженіи (504) можно замѣнить $\overline{\eta}_j$.

Затѣмъ

$$\overline{\underline{\eta}}_g R_g (\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_p \ldots \overline{\zeta}_p, Z_1, Z_2 \ldots Z_k)$$

$$= \overline{\underline{\eta}}_g P_g (\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_{\overline{p}})$$

Если положить

$$P_g = \overline{\underline{\eta}}_g P_p (\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_{\overline{p}}),$$

то можемъ сказать, что

$$Y_g^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} p_{n-j} Y_g^{(j)} = P_g$$

т. е. Y_g рѣшеніе уравненія получаемъ изъ заданнаго замѣной всей суммы P однимъ его слагаемымъ отвѣчающимъ $\overline{\underline{\eta}}_g$.

Разысканіе простѣйшаго рѣшенія Y сводится къ разысканію простѣйшихъ уравненій съ послѣднимъ членомъ, зависящихъ только отъ одной трансцендентной I типа.

Полагая

$$Y = \overline{\underline{\eta}}\, W$$

и сокращая на $\overline{\underline{\eta}}$ мы приводимъ задачу къ разысканію простѣйшихъ рѣшеній, не зависящихъ отъ трансцендентныхъ II типа уравненія.

$$W^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} q_{n-j}(x, u)\, W^{(j)} = Q_g$$

гдѣ $q_{n-j}(x, u)$ раціональныя функціи отъ (x, u), Q_g цѣлый полиномъ $\overline{\zeta_i}$.

Примѣръ.

Если намъ предложено найти въ конечномъ видѣ интегралъ

$$\int P\,dx = \int \Big[\frac{(2-x^2)\,e^x}{x^3} + \frac{e^{2x}\,lg^2 x}{x}(2xlgx+3) + \frac{3x^4+3x^3+2x+1}{x^2+x} +$$

$$+ (lgx)^2 + lgx + \frac{sinx}{\sqrt{1+x^2}} + csx\,lg\big(x+\sqrt{1+x^2}\big) \Big]\,dx$$

или что тоже, рѣшеніе линейнаго дифференціальнаго уравненія

$$y' = P,$$

то задачу можемъ свести къ разысканію въ отдѣльности каждаго изъ слѣдующихъ интеграловъ

1) $I_1 = \int \frac{(2-x^2)\,e^x}{x^3}\,dx$

2) $I_2 = \int \frac{e^{2x}\,lg^2 x}{x}(2xlgx+3)\,dx$

3) $I_3 = \int \Big[\frac{3x^4+3x^3+2x+1}{x^2+x} + (lgx)^2 + lgx \Big]\,dx$

$$4)\quad I_4 = \int \frac{e^{xi}}{2}\left[lg\,(x+\sqrt{1+x^2}) + \frac{1}{i\sqrt{1+x^2}}\right]dx$$

$$5)\quad I_5 = \int \frac{e^{-xi}}{2}\left[lg\,(x+\sqrt{1+x^2} - \frac{1}{i\sqrt{1+x^2}}\right]dx$$

такъ какъ между e^x, e^{2x}, 1, e^{xi}, e^{-xi} не существуетъ алгебраическихъ отношеній.

§ 89. *О разысканіи частнаго рѣшенія неоднороднаго уравненія съ послѣднимъ членомъ линейнымъ относительно трансцендентныхъ I типа.*

Такимъ образомъ намъ остается разсмотрѣть, какъ находятся рѣшенія типа

$$Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p) + \rho_0(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p) +$$

$$+\sum_{i=1}^{i=k} \rho_i(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p)\, Z_i \tag{505}$$

Какъ въ случаѣ алгебраическаго послѣдняго члена функція $Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p)$ можетъ быть построена.

$$Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p) = Q_0(\zeta_1, \zeta_1 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p) + C,$$

гдѣ Q_0 цѣлый полиномъ $\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p$, $R(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p)$ цѣлый полиномъ ζ_i и $\overline{\zeta}_i$, зависящій отъ опредѣленнаго члена параметровъ C опредѣляется изъ условія: $Q = 0$
при

$$\zeta_1 = 0\; \zeta_2 = 0 \ldots \zeta_p = 0$$

Подстановкой

$$Y = Q(\zeta_1, \zeta_2 \ldots \zeta_p, \overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \ldots \overline{\zeta}_p) + \rho$$

и приводимъ заданное уравненіе къ уравненію

$$\rho^{(n)} + q_1(x, v)\rho^{(n-1)} + \dots q_n(x, v) = Q(x, v)$$

съ рѣшеніемъ вида

$$\rho = \rho_0(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \dots \overline{\zeta}_p) + \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i(\overline{\zeta}_1, \overline{\zeta}_2 \dots \overline{\zeta}_p) Z_i$$

$$\rho = 1$$

Разсмотримъ сперва случай, когда

$$Q(x, v) = \overline{\rho}_0 + \sum \overline{\rho}_i \overline{Z}_i$$

$\overline{\rho}_0, \overline{\rho}_i$ алгебраическія функціи.

Тогда

$$\rho = \rho_0 + \sum_{i=1}^{i=k} \rho_i Z_i,$$

гдѣ ρ_0, ρ_i тоже алгебраическія функціи.

Легко видѣть, что если

$$Z_{l+1} = \overline{Z}_1 \quad Z_{l+2} = \overline{Z}_2 \dots \quad Z_k = \overline{Z}_{l+(k-l)}$$

то

$$\rho_{l+1}, \rho_{l+2} \dots \dots \rho_k$$

представляютъ частныя алгебраическія рѣшенія уравненій

$$\rho^{(n)} + q_1(x, v)\rho^{(n-1)} + \dots q_n(x, v)\rho = \rho_{l+i} \tag{506}$$

Подстановкой

$$\rho = w + \sum_{i=1}^{i=l-k} \rho_{l+i} \overline{Z}_{l+i}'$$

гдѣ ρ_{i+i} содержатъ нѣкоторыя остающіеся неопредѣленными параметры приводимъ уравненіе (506) къ уравненію

$$w^{(n)} + q_1(x, v) w^{(n-1)} + \ldots q_n(x, v) w = R(x, v) \tag{507}$$

гдѣ $R(x, v)$ уже алгебраическая функція.

Остается опредѣлить рѣшеніе типа

$$w = \rho_0 + \sum_{i=1}^{i=l} \rho_i Z_i$$

что мы уже умѣемъ дѣлать и опредѣлить изъ условій существованія такого рѣшенія значенія вышеупомянутыхъ параметровъ.

§ 90. Разысканіе простѣйшаго рѣшенія неоднороднаго уравненія въ общемъ случаѣ.

Для приведенія къ этому частному случаю общаго намъ слѣдуетъ поступать совершенно также, какъ въ § при опредѣленіи не линейныхъ рѣшеній однородныхъ линейныхъ уравненій.

Рѣшеніе ρ мы можемъ представить себѣ, какъ полиномъ извѣстныхъ намъ основныхъ трансцендентныхъ I типа: $\bar{\zeta}_1 \bar{\zeta}_1 \ldots \bar{\zeta}_{\bar{p}}$ съ коэффиціентами при

$$\bar{\zeta}_1^{\mu_1} \bar{\zeta}_2^{\mu_2} \ldots \bar{\zeta}_{\bar{p}}^{\mu_{\bar{p}}}$$

равными:

$$(\overline{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p}) = (\overline{\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p})_0 + \sum_{j=1}^{j=k} (\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p)_j Z_j, \tag{508}$$

гдѣ $(\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p)_0, (\mu_1 \mu_2 \ldots \mu_p)_j$ алгебраическія функціи. При этомъ коэффиціентъ при старшемъ членѣ можемъ предполагать равнымъ елиницѣ.

Какъ въ § убѣждаемся что

$$\left(\overline{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}\right)^{(n)} + \sum_{j=0}^{j=n-1} q_{n-j}(x,)\left(\overline{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}\right)^{(j)} = [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p] \qquad (509)$$

гдѣ $[\mu_1, \mu_2 \dots \mu_p]$ представляетъ линейную функцію съ коэффиціентами, равными раціональнымъ функціямъ отъ (x, v) отъ $(\overline{\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p})$ и ея производныхъ, при чемъ

$$\lambda_1 > \mu_1$$

или при

$$\lambda_1 = \mu_1 \quad \lambda_2 > \mu_2$$

при

$$\lambda_1 = \mu_1 \quad \lambda_2 = \mu_2 \quad \lambda_3 > \mu_3$$

и т. д.

$$[\overline{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}] = [\overline{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p}]_0 + \sum [\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p]_j \overline{Z}_j$$

гдѣ $\overline{Z}_j$ нѣкоторыя изъ функціи Z_j, $[\overline{\mu_1 \mu_2 \dots \mu_{p0}}]$ $[\mu_1 \mu_2 \dots \mu_p]_j$ алгебраическія функціи, извѣстныя намъ, когда извѣстны

$$(\lambda_1 \lambda_2 \dots \lambda_p)$$

Остается опредѣлить рѣшеніе уравненія (509) типа (508).

Задача эта изслѣдована въ предыдущемъ § 89. Какъ въ § по $(\overline{\nu_1 \nu_2 \dots \nu_p}) = 1$ находимъ $(\nu_1, \nu_2 \dots \nu_{p-1})$, затѣмъ $(\nu_1, \nu_2 \dots \nu_{p-2})$ и т. д. пока не дойдемъ до опрѣдѣленія члена $(0, 0 \dots 0)$ т. е. свободнаго члена.

Примѣръ.

Найдемъ для примѣра наиб. общее рѣшеніе уравненія

$$Y'' + 3x Y' + (2x^2 + 1) Y = xe^{-x^2} \tag{510}$$

выражаемое въ конечномъ видѣ.

Этому уравненію отвѣчаетъ приведенное уравненіе

$$y'' + 3xy + (2x^2 + 1) y = 0 \tag{511}$$

Методой § 67 убѣждается, что

$$y = e^{-\frac{x^2}{2}} y_1$$

гдѣ $y_1 = (\overline{qv}^{(1)})$ удовлетворяетъ уравненію

$$y_1'' + xy_1' = 0,$$

откуда находимъ что $y_1 = C$.

Для опредѣленія частнаго рѣшенія уравненія (510), выражаемаго въ конечномъ видѣ съ помощью $[elm]$,

замѣчаемъ, что, полагая

$$Y = e^{-x^2} Y_1$$

мы сведемъ уравненіе (510) къ уравненію

$$Y_1'' - x Y_1' - 1 = x$$

съ рѣшеніемъ уже не содержащихъ трансцендентныхъ II типа.

Въ виду того, что послѣдній членъ и рѣшеніе уравненія (511) не содержатъ трансцендентныхъ I типа, рѣшеніе уравненія (510) должно быть типа

$$Y_1 = \rho_0 + \sum_{j=1}^{j=k} \rho_j Z_j .$$

Въ виду того, что уравненіе $y_1'' - xy_1' - 1 = 0$ имѣющее только рѣшеніе

$$e^{x^2} e^{-\frac{x^2}{2}} = e^{\frac{x^2}{2}}$$

выражаемое въ конечномъ видѣ, не имѣетъ алгебраическаго рѣшенія

$$Y_1 = \rho_0$$

представляетъ алгебраическую и на основаніи § 84, раціональную функцію.

Но уравненіе (510) не можетъ имѣть раціональнаго рѣшенія, ибо это рѣшеніе могло бы имѣть полюсомъ только $x = \infty$

$$\rho_0 = a_0 x^m + a_1 x^{m-1} + \ldots.$$

Мы бы имѣли

$$m(m-1) x^{m-2} + \ldots - m x^m + \ldots = x,$$

откуда $m = 1$. Но легко видѣть, что

$$\rho_0 = a_0 x + a_1$$

ни при какихъ a_0, a_1 не удовлетворяетъ ур. (510). Итакъ *уравненіе (510) не имѣетъ рѣшеній, выражаемыхъ въ конечномъ видѣ съ помощью элементарныхъ трансцендентныхъ.*

Опечатки.

страница	строка	напечатано	должно быть
2	16 снизу	$a_0+a_1x+a_2x+..a_mx_m$	$a_0+a_1x+a_2x^2+\ldots.a_mx^m$
47	13 сверху	$F_{01=0}$	$F_{01}=0$
51	4 снизу	$\left\|\overline{\quad}\right\|_{i-1}^{i=m}\left[\underline{a}b^{(j)}\right]^{C_i}=lg\,A$	$\left\|\overline{\quad}\right\|_{i=1}^{i=m}\left[\underline{a}b^{(j)}\right]^{C_i}=A$
56	15 „	ниже	тоже
79	10 сверху	$(136)_{\mu_0=1}$	$\mu_0=1\quad(136)$
93	9 снизу	$\varphi\left(\theta+\frac{\rho'}{\rho}\right.$	$\varphi(\theta)+\frac{\rho'}{\rho}$
94	16 сверху	θ_μ изъ θ	θ изъ θ_μ
	17 „	$\alpha_\mu^{(i)}=\alpha^{(i)}+\mu$	$\alpha_\mu^{(i)}=\alpha^{(i)}-\mu$
		$\alpha_\mu^{(i)}=\alpha^{(i)}\mu$	$\alpha_\mu^{(i)}=\alpha^{(i)}:\mu$
103	12 „	$\overline{q}-1$-го	$\overline{q-1}$-го
113	14 „	(4, 5, 2, 4)	(3, 5, 2, 4)
119	5 сверху	рѣшкній	рѣшеній
174	8 „	$y=\eta\int y\,,dx$	$y=\eta\int y_1\,dx$
207	11 „	подняться	надѣяться