TOPOLOGICAL METHODS IN THE THEORY OF FUNCTIONS OF A COMPLEX VARIABLE

By

MARSTON MORSE

PRINCETON

1947

М. МОРС

ТОПОЛОГИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ КОМПЛЕКСНОГО ПЕРЕМЕННОГО

Перевод с английского
В. В. ПОКОРНОГО

Под редакцией
А. И. МАРКУШЕВИЧ

1951
ИЗДАТЕЛЬСТВО
ИНОСТРАННОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
Москва

АННОТАЦИЯ

Автор книги М. Морс известен многолетними исследованиями в области приложения топологических методов к вопросам математического анализа. В последние годы он стал работать над приложением топологических методов к теории функций комплексного переменного и к теории гармонических функций двух переменных. Аннотируемая книга содержит важнейшие результаты его исследований в этой области. Изложение иллюстрируется примерами.

Книга рассчитана на широкий круг математиков — научных работников, преподавателей и аспирантов, занимающихся топологией, математическим анализом и теорией функций.

ПРЕДИСЛОВИЕ РЕДАКТОРА

Небольшая монография М. Морса посвящена изложению нового раздела теории функций комплексного переменного, разрабатываемого в течение последнего десятилетия и представленного только в периодической математической литературе. В оригинале изложение доводится до изучения классов деформаций мероморфных функций, задача и результаты которого лишь намечаются в последнем параграфе V главы. Вследствие интереса, представляемого этой теорией, мы решили заменить указанный параграф полным переводом статьи М. Морса и М. Гейнса „Классы деформаций мероморфных функций и их распространение на внутренние преобразования", напечатанной в журнале „Acta Mathematica" за 1947 г. Эту статью мы поместили в качестве приложения. В некоторых местах мы добавили рисунки, иллюстрирующие изложение. В остальном перевод книги М. Морса выполнен без отступлений от подлинника, за исключением введения в текст некоторых литературных ссылок на книги, имеющиеся на русском языке.

От читателя предлагаемой книги требуется знакомство с основным университетским курсом теории аналитических функций и первоначальными сведениями по

топологии (в объеме, например, книги П. С. Александрова и В. А. Ефремовича „Очерк основных понятий топологии“, М.—Л., 1936, или даже только одной шестой главы книги Д. Гильберта и С. Кон-Фоссена „Наглядная геометрия“, М. — Л., 1936).

Большую и весьма компетентную помощь в редактировании этой книги мне оказал Б. В. Шабат, которому я выражаю здесь искреннюю благодарность.

А. Маркушевич.

ПРЕДИСЛОВИЕ АВТОРА

В настоящей книге содержится материал цикла лекций, прочитанных в Принстонском университете (Нью-Джерси) в течение осени 1945 г.

Основная часть изложенного здесь материала появилась в результате совместных исследований автора и доктора Мориса Гейнса. Первая глава, посвященная псевдогармоническим функциям, в большей своей части заимствована из статьи автора „Топология псевдогармонических функций“ (Morse [I]). В четвертой главе, посвященной общей теореме о порядке, содержится впервые публикуемое доказательство приведенной там теоремы. В отличие от изложения, которому следовали авторы статей (Morse M. и Heins M. [I, II, III]), где основное внимание сосредоточено на методах теории мероморфных функций, в настоящей книге доказательства проводятся методами, распространяющимися и на внутренние преобразования. Авторами первых работ о внутренних преобразованиях являются Стоилов [I] и Вибурн (в терминологии Вибурна эти преобразования называются „открытыми“). Отправным пунктом в этой книге являются псевдогармонические функции и внутренние преобразования. Некоторые из сформулированных для них теорем имеют силу также для гармонических функций и мероморфных преобразований.

Плодотворное использование аппарата современного анализа и, в частности, теории интеграла является характерной чертой современной теории функций. Возможно, что успехи, достигнутые на этом пути, отвлекли внимание исследователей от некоторых более элементарных и геометрических аспектов теории функций. Исторически геометрическая концепция Римана и Шварца предшествовала более арифметической концепции Вейерштрасса и современной школы [1]). В нашей книге мы стремились подчеркнуть положительные стороны геометрических методов, полезно дополняющих другие методы.

При изучении граничных значений с метрической точки зрения обычно оставались вне рассмотрения некоторые важные топологические свойства образов границ, рассматриваемых в целом, и далеко не всегда использовались подходящие геометрические методы, допускающие обобщения. Кроме того, арифметические методы не могут обнаружить теоретико-группового и топологического характера связи между непрерывными граничными значениями гармонической в жордановой области функции и ее критическими точками, если последних бесконечно много (см. Morse и Heins [I, II]). Обращаясь к другому направлению теории, отметим, что топологическое развитие теории псевдогармонических функций на основе топологической характеристики контурных линий позволяет, как указал Стефан Бергман, изучать проблемы уравнений в частных производных, недоступные другим методам.

Развитие теории внутренних преобразований приводит к новым глубоким проблемам. Одна из таких проблем состоит в определении свойств классов деформаций мероморфных функций, обладающих заданными

[1]) Исключение составляют замечательные работы Л. Альфорса.

нулями, полюсами и точками ветвления (см. Morse и Heins [2]). Обнаруживается родство между топологически-гомотопической теорией и классическим применением теории нормальных семейств, или теоремами покрытия типа теоремы Пикара.

Настоящие лекции представляют собой только начало изучения в этом направлении. Надеемся, что они найдут отклики среди тех, кто склонен к геометрическим исследованиям.

М. Морс.

Глава I

ПСЕВДОГАРМОНИЧЕСКИЕ ФУНКЦИИ

§ 1. Введение

Мы будем рассматривать мероморфные функции $F(z)$ в (открытой) области G, ограниченной ν жордановыми кривыми

$$(B_1, B_2, \ldots, B_\nu) = (B). \tag{1.1}$$

Будем предполагать, что $F(z)$ определена в $\overline{G}$ (замыкание G), аналитична в G, исключая конечное число полюсов, и непрерывна в точках (B).

Мы будем наряду с мероморфными функциями $F(z)$ рассматривать также их обобщение — функции, реализующие так называемые *внутренние* отображения $w=f(z)$ области G в w-сферу. Начнем с определения отображения, внутреннего в окрестности некоторой точки z_0 из области G.

Пусть $F(t)$ — непостоянная аналитическая функция, определенная в некоторой окрестности N точки t_0. Подвергнем N гомеоморфному и сохраняющему ориентацию преобразованию

$$t = \Phi(z), \quad (t_0 = \Phi(z_0)), \tag{1.2}$$

отображающему N в некоторую окрестность N_1 точки z_0. Мы будем говорить, что сложная функция

$$F[\Phi(z)] = f(z), \tag{1.3}$$

определенная в N_1, реализует *внутреннее отображение* $w=f(z)$ *окрестности* N_1 точки z_0.

Будем далее говорить, что функция $w=f(z)$, определенная в G, реализует *внутреннее отображение области* G, если она реализует внутреннее отображение некоторой окрестности каждой точки G. Пусть $F(t)$ аналитична в некоторой окрестности точки t_0 всюду, кроме самой t_0, где она имеет полюс. Мы будем тогда говорить, что функция или отображение (1.3) имеет *полюс* в точке z_0.

В дальнейшем мы будем рассматривать только такие внутренние отображения, которые определены в $\overline{G}$, непрерывны на границе (B) области G и обладают в G не более, чем конечным числом полюсов. Это не означает, вообще, что рассматриваемое отображение является внутренним и на границе (B), хотя в некоторых случаях оно может быть доопределено так, что окажется внутренним отображением и в некоторой окрестности каждой граничной точки.

Приведем пример внутреннего преобразования. Пусть $F(t)$—произвольный многочлен от t. Полагая $z=x+iy$, произведем замену t в выражении $F(t)$ на

$$t=2x+iy=\Phi(z).$$

Сложная функция $F[\Phi(z)]=f(z)$ не является аналитической, но реализует внутреннее преобразование.

Внутренние преобразования не являются основным предметом нашего исследования. Мы ввели их с самого начала лишь потому, что они представляют удобный материал для иллюстрации новых топологических методов. Изучение распределения и характера нулей, полюсов и точек ветвления занимает весьма важное место в классической теории функции. Каковы, однако, количественные соотношения между числами таких точек при заданных граничных значениях? В какой мере позволяют они определить мероморфную функ-

цию при известных граничных условиях или без учета их?

Некоторые теоремы, связанные с поставленными вопросами, были получены Радо, Стоиловым, Уолшем, Бэкклангом, Люком и другими. Простейшей из относящихся сюда теорем является следующая теорема Люка:

Если $P(z)$ — произвольный многочлен от z, то все нули $P'(z)$ расположены в наименьшей выпуклой области, содержащей все нули $P(z)$.

Многие из упомянутых теорем допускают обобщения и на внутренние преобразования.

Мы упоминали о точках ветвления. Необходимо придать смысл этому термину и для внутренних преобразований. Как известно, отличная от постоянной мероморфная функция $f(z)$, ограниченная в достаточно малой окрестности точки z_0, принимает каждое значение w из достаточно малой окрестности точки $w_0=f(z_0)$ (исключая само w_0) некоторое целое число m раз. Если $m>1$, то говорят, что обратная к $f(z)$ функция имеет в точке w_0 *точку ветвления порядка* $m-1$.

Совокупность указанной выше окрестности точки z_0 и $f(z)$ определяет мероморфный элемент. Любое внутреннее отображение, полученное из мероморфного элемента гомеоморфной заменой независимой переменной, назовем *внутренним элементом* (множество значений w остается при этом неизменным). Окрестность точки w_0 покрыта внутренним элементом то же самое число m раз, какое покрывает ее определяющий мероморфный элемент. В соответствии с этим говорят, что внутренний элемент определяет в w_0 *точку ветвления порядка* $m-1$ всякий раз, когда $m>1$. Ясно, что этот порядок точки ветвления зависит только от дан-

ного внутреннего элемента и не изменяется при изменении мероморфного элемента, использованного в определении.

Порядки нулей и полюсов внутреннего элемента определяются соответственно как порядки нулей и полюсов порождающего мероморфного элемента.

Методы. Определение внутреннего элемента таково, что производная $f'(z)$, вообще говоря, не существует. Поэтому использование логарифмического вычета

$$\frac{1}{2\pi i}\int_C \frac{f'(z)}{f(z)}\,dz$$

для нахождения разности между числом нулей и полюсов $f(z)$ внутри C, вообще говоря, невозможно. Точно так же при отыскании точек ветвления нельзя пользоваться нулями $f'(z)$. В классической теории существует связь между направлениями вектора $f(z)$ для точек z, принадлежащих C, и нулями или полюсами $f'(z)$ внутри C. Таким образом, векторные методы могут быть использованы для определения расположения нулей $f'(z)$, подобно тому, как это делается в одном из доказательств основной теоремы алгебры. Но в общей теории и эти векторные методы утрачивают силу, по крайней мере в том случае, когда не существует эффективной замены независимой переменной, переводящей функцию, реализующую внутреннее отображение, в мероморфную функцию.

Тем более важную роль приобретают топологические методы. Классическое исследование граничных значений с помощью интеграла, вообще, не учитывает экстремальные свойства граничных значений, такие, например, как экстремум $|f(z)|$ на границе. Образы g_i граничных кривых B_i при отображении $w=f(z)$, если они являются локально простыми, обладают важными

топологическими свойствами, которые вполне возмещают отсутствие производных. (Замкнутая кривая g называется локально простой, если она является непрерывным и локально взаимно однозначным образом единичной окружности.)

В последнем параграфе мы введем теорию деформаций внутренних отображений. Рассмотрим однопараметрическое семейство внутренних отображений

$$w=F(z,\ t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

для любого t, определенных в области G, и таких, что функция $w=F(z,\ t)$ непрерывно зависит как от z, так и от t (в смысле метрики на сфере w). Такое однопараметрическое семейство внутренних отображений мы будем называть *деформацией* $F(z,\ 0)$ в $F(z,\ 1)$. Мы будем считать допустимыми деформации, при которых нули, полюсы и точки ветвления остаются неподвижными; функции $f(z)$, которые могут быть переведены одна в другую с помощью допустимых деформаций, мы объединяем в один класс *ограниченных деформаций*. Допустимыми будем считать также и деформации, при которых остается неизменным число (но не положение) нулей, полюсов и точек ветвления. Оказывается возможным определить топологические инварианты допустимых деформаций, характеризующие классы ограниченных и неограниченных деформаций. Чрезвычайно интересным является вопрос — тождественны ли классы деформаций, определенные для отображений, реализуемых мероморфными функциями, с классами деформаций, определенными для более общих внутренних отображений. Детали доказательств мы не приводим (см. Morse и Heins [2])*).

*) Эта работа приводится здесь в качестве приложения. (*Прим. ред.*)

Среди основных теорем о мероморфных функциях есть такие, которые не распространяются на функции, реализующие внутренние отображения. Одной из таких теорем является, например, теорема Лиувилля о том, что функция, аналитическая в конечной z-плоскости и ограниченная по модулю, постоянна. Эта теорема не верна для внутренних преобразований. Действительно, конечную z-плоскость можно гомеоморфно отобразить внутрь единичного круга $|w|<1$ посредством функции $w=\frac{z}{1+|z|}$, определенной для любого z (ясно, что эта функция непостоянна). С другой стороны, мы увидим, что многие теоремы теории мероморфных функций справедливы и для функций, реализующих внутренние преобразования.

§ 2. Псевдогармонические функции

Изучение конформных отображений естественно приводит к гармоническим функциям. Точно так же изучение внутренних отображений приводит к функциям, которые мы назовем псевдогармоническими и которые сейчас определим.

Начнем с рассмотрения функции

$$U(x, y)=\ln|f(z)| \tag{2.1}$$

для мероморфной $f(z)$. Как известно, эта функция является действительной частью $\ln f(z)$ и поэтому гармонична всюду, где непрерывные ветви $\ln f(z)$ являются аналитическими. Таким образом, $U(x, y)$ гармонична в каждой точке $z=x+iy$, не являющейся нулем или полюсом $f(z)$. Пусть $z=a$ — нуль или полюс $f(z)$, тогда $f(z)$ допускает представление

$$f(z)=(z-a)^m A(z) \quad (A(a)\neq 0),$$

где $A(z)$ аналитична в точке $z=a$ и m — целое число, положительное или отрицательное. В окрестности точки $z=a$, функция U, таким образом, имеет вид

$$m \ln |z-a| + \omega(x, y),$$

где $\omega(x, y)$ — гармоническая в точке a функция. Функция U имеет в точке $z=a$ *логарифмический полюс*. Мы будем рассматривать также более общий случай функций вида

$$k \ln |z-a| + \omega(x, y) \quad (k \neq 0),$$

где k — действительное, но не обязательно целое число.

Критическими точками функции U вида (2.1) (в обычном смысле) называются точки, в которых $U_x = U_y = 0$. Если $f(z) \neq 0$, то в силу дифференциальных уравнений Коши — Римана каждая такая критическая точка является нулем

$$\frac{d}{dz} \ln f(z) = \frac{f'(z)}{f(z)},$$

т. е. нулем производной $f'(z)$. Таким образом, если нули и полюсы $f(z)$ являются логарифмическими полюсами функции $U(x, y)$, то нули $f'(z)$ — критическими точками U.

Прежде чем перейти к определению псевдогармонических функций, дадим описание дуг уровня непостоянной гармонической функции U в окрестности некоторой точки (x_0, y_0). Рассмотрим множество точек, удовлетворяющих в окрестности (x_0, y_0) уравнению

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = 0. \tag{2.2}$$

Будем считать, что гармоническая функция U является действительной частью аналитической функции $f(z)$.

Тогда в точке $z_0 = x_0 + iy_0$ функция $f(z) - f(z_0)$ обращается в нуль, т. е. представляется в виде

$$f(z) - f(z_0) = (z - z_0)^m A(z) \quad (A(z_0) \neq 0), \tag{2.3}$$

где $A(z)$ аналитична в точке a и m — целое положительное число. Произведем конформное отображение окрестности точки z_0, переводящее интересующую нас линию уровня в прямолинейные отрезки. Для этого воспользуемся преобразованием вида

$$w = (z - z_0) A^{\frac{1}{m}}(z), \tag{2.4}$$

где $A^{\frac{1}{m}}(z)$ означает любую непрерывную однозначную ветвь корня m-й степени из $A(z)$. Преобразование (2.4) локально взаимнооднозначно и конформно в окрестности точки z_0, так как в точке z_0

$$\frac{dw}{dz} = A^{\frac{1}{m}}(z_0) \neq 0.$$

Из (2.3) и (2.4) получаем

$$f(z) - f(z_0) = w^m.$$

Если $w = u + iv$, то интересующая нас линия уровня является линией уровня выражения

$$R(u + iv)^m \quad (R \text{ — действительная часть}),$$

проходящей через начало координат (например, если $m = 2$, то этой линией является $u^2 - v^2 = 0$). Если (r, θ) — полярные координаты в w-плоскости, то

$$w^m = r^m (\cos m\theta + i \sin m\theta).$$

Переходя от (x, y) к (u, v) и далее к (r, θ), получим

$$U(x, y) - U(x_0, y_0) = r^m \cos m\theta. \tag{2.5}$$

В (u, v)-плоскости рассматриваемой линии уровня соответствует совокупность лучей, вдоль которых $\cos m\theta=0$. Существует $2m$ таких лучей, причем каждый из них образует с соседними угол $\frac{\pi}{m}$. Например, если $m=1$, то этими лучами будут $\theta=-\frac{\pi}{2}, \frac{3\pi}{2}$; при $m=2$ $\theta=\frac{\pi}{4}, \frac{3\pi}{4}, \frac{5\pi}{4}, \frac{7\pi}{4}$, т. е. линия уровня представляет совокупность прямых с угловыми коэффициентами ± 1. Из конформности преобразования (x, y)-плоскости в (u, v)-плоскость вытекает, что линия уровня U, проходящая через точку (x_0, y_0), состоит из m не имеющих особенностей кривых, каждая из которых образует с соседней угол $\frac{\pi}{m}$. Проведенное рассуждение позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема[1]) 2.1. *Если $U(x, y)$ — непостоянная гармоническая в точке (x_0, y_0) функция, то существует такой гомеоморфизм достаточно малой окрестности точки (x_0, y_0) на круг, при котором (x_0, y_0) соответствует центру круга, а множество точек, удовлетворяющих уравнению*

$$U(x, y)-U(x_0, y_0)=0, \tag{2.6}$$

соответствует совокупности $2m$ радиусов круга, ограничивающих секторы с центральными углами $\frac{\pi}{m}$. При переходе переменной точки (x, y) через прообраз каждого такого радиуса разность (2.6) *меняет знак.*

Первое утверждение теоремы получается непосредственно из рассмотрения вышеуказанного отображения (x, y)-плоскости в (u, v)-плоскость. Необходимо только

[1]) Теорему 2. 1, сформулированную для псевдогармонических функций, назовем теоремой 2.1.а.

радиус круга $r \leqslant r_0$ в (u, v)-плоскости выбрать настолько малым, чтобы отображение (x, y)-плоскости в (u, v)-плоскость было взаимнооднозначным и конформным для $r \leqslant r_0$. Второе утверждение теоремы следует из (2.5), так как $\cos m\theta$ при возрастании θ меняет знак, проходя через значение нуль. Для непостоянной гармонической функции U наименьшее значение m в теореме равно 1; в этом случае линия уровня состоит лишь из одной неособой кривой, проходящей через точку (x_0, y_0).

В частности, из доказанной теоремы вытекает, что U не может допускать максимума или минимума в тех точках (x_0, y_0), в которых она гармонична. Действительно, разность $U(x, y) - U(x_0, y_0)$ принимает как положительные, так и отрицательные значения в любой окрестности точки (x_0, y_0).

Определение псевдогармонических функций. Пусть $u(x, y)$ — гармоническая функция, отличная от тождественной постоянной в некоторой окрестности N точки (x_0, y_0). Пусть далее точки N подвергаются произвольному, сохраняющему ориентацию гомеоморфизму T, который преобразует окрестность N в некоторую другую окрестность N' точки (x_0', y_0'), причем точке (x, y) из N соответствует точка $(x', y') \in N'$. Удобно предположить, что точка (x_0, y_0) соответствует при этом самой себе, так что $x_0' = x_0$, $y_0' = y_0$. Положим

$$u(x, y) = U(x', y'). \tag{2.7}$$

Функция $U(x', y')$ называется *псевдогармонической* в N'.

Распространим это определение на случай, когда $u(x, y)$ имеет в точке (x_0, y_0) логарифмический полюс. В этом случае

$$u(x, y) = k \ln |z - z_0| + \omega(x, y) \quad (k \neq 0),$$

где $\omega(x, y)$ гармонична в окрестности (x_0, y_0). Будем считать, что при вышеуказанном гомеоморфизме T соотношение (2.7) определяет *псевдогармоническую функцию с логарифмическим полюсом* в точке (x_0, y_0).

В дальнейшем мы будем рассматривать функции $U(x, y)$ псевдогармонические всюду в области G, кроме конечного числа точек, где они имеют логарифмические полюсы и непрерывные на границе G.

Ясно, что при определении, принятом выше, линии уровня функции U, псевдогармонической в окрестности (x_0, y_0), таковы, что теорема 2.1.а (т. е. теорема 2.1 с заменой всюду термина „гармоническая функция" термином „псевдогармоническая функция") остается справедливой. Отсюда следует, что псевдогармоническая функция также не допускает конечного максимума или минимума ни в одной точке области G.

§ 3. Критические точки U в области G

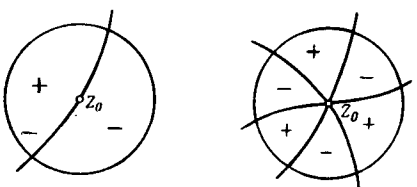
Условимся говорить, что точка области G расположена ниже (выше) уровня c относительно псевдогармонической в G функции U, если в этой точке $U < c$ (соответственно $U > c$).

Пусть (x_0, y_0) — точка G, не являющаяся логарифмическим полюсом U, и

$$U(x_0, y_0) = c.$$

Обратимся к теореме 2.1.а. Эта теорема дает каноническое представление линий уровня $U = c$ в окрестности (x_0, y_0). Окрестность N точки (x_0, y_0) теоремы 2.1.а мы будем называть *канонической окрестностью*. Каждую открытую связную подобласть N, ограниченную двумя соседними дугами уровня c и отрезком границы N, назовем *сектором*. Имеется m секторов, расположенных ниже c, и m секторов, расположенных выше c.

При $m=1$ точка (x_0, y_0) называется *обыкновенной*, в противном случае — *критической* (рис. 1). При $m>1$ число $m-1$ называется *кратностью* критической точки (x_0, y_0). Для нашей цели — топологической характеристики точек — важно существование двух или большего числа секторов канонической окрестности, расположенных ниже $U(x_0, y_0)$.



Обыкновенная точка *Седловая точка (m=2)*

Рис. 1

Мы убедимся в том, что проведенное разделение точек на обыкновенные и критические можно распространить также и на граничные точки. Критические точки, в окрестности которых имеется не менее двух секторов, расположенных ниже $U(x_0, y_0)$, будут называться *седловыми точками* в отличие от критических точек других типов, например точек относительного минимума U на (B).

Для того чтобы точка (x_0, y_0) была критической точкой гармонической функции U, необходимо и достаточно, чтобы в этой точке

$$U_x = U_y = 0.$$

В самом деле, если U является действительной частью аналитической функции $f(z)$ и $f(z)-f(z_0)$ имеет в z_0 нуль m-го порядка, то имеется точно $2m$ радиусов уровня $u(x_0, y_0)$, сходящихся к (x_0, y_0). Таким образом, порядок $m-1$ нуля производной $f'(z)$ равен крат-

ности $m-1$ точки (x_0, y_0), рассматриваемой как критическая точка u.

Частные производные U_x, U_y гармонической в G функции, вообще говоря, не существуют в граничных точках области G. Для псевдогармонических функций это обстоятельство имеет место и во всех точках G. Таким образом, классические методы недостаточны как для характеристики граничных критических точек гармонической в области G функции, так и для характеристики критических точек псевдогармонической в G функции.

§ 4. Критические точки U на границе (B) области G

Так как мы имеем дело с псевдогармоническими функциями, то, не ограничивая общности, мы можем подвергнуть область G гомеоморфизму T, переводящему граничные жордановы кривые в окружности. В силу определения псевдогармонической функции при этом мы должны лишь считать, что в точках, соответствующих друг другу при гомеоморфизме T, функция U принимает одинаковые значения. Таким образом, мы можем предполагать, что каждая граничная кривая является окружностью.

Пусть B_i — граничная окружность и U^i — функция, определенная значениями $U(x, y)$ на B_i.

Граничное условие[1]) *A. Функция U^i имеет не более, чем конечное число точек относительного экстремума на B_i ($i=1,2, \ldots, \nu$).*

Между этими точками экстремума U_i на B_i является монотонно возрастающей или монотонно убывающей функцией. Как мы покажем в ближайшем параграфе,

[1]) Различие граничных условий A и других будет объяснено ниже.

отсюда следует, что ориентированная дуга уровня U является или замкнутой, или, будучи продолженной, оканчивается в точке границы B. В § 5 будет доказано, что число дуг уровня, оканчивающихся в каждой граничной точке, конечно и что число граничных точек, в которых оканчивается более одной дуги уровня, также конечно.

Примеры. Настоящий параграф мы продолжим некоторым числом примеров, иллюстрирующих различные возможности, которые могут представиться при рассмотрении граничных критических точек.

Пример 1. Пусть G — область, принадлежащая полуплоскости $y>0$ и ограниченная окружностью, касающейся оси в начале координат. Пусть U — действительная часть функции $w=z^3$, т. е.

$$U(x, y)=x(x^2-3y^2)$$

(рис. 2). Линия уровня U, проходящая через начало координат, состоит из оси y и прямых $x=\pm\sqrt{3}y$. Та-

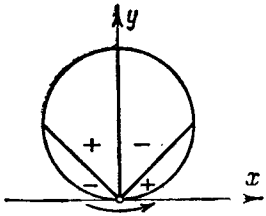


Рис. 2

ким образом, отрицательная полуось x расположена в секторе, в котором $U<0$, а положительная полуось x — в секторе, в котором $U>0$. Непосредственно видно, что U возрастает на граничной окружности B, если точка (x, y) проходит начало координат в направлении возрастающих x. Начало координат не является, таким образом, точкой экстремума граничных значений U.

В относительной окрестности точки $z=0$ (состоящей из внутренних точек G, достаточно близких к $z=0$) множество точек G, расположенных ниже уровня 0, лежит в двух различных компонентах (секторах). Следовательно, начало координат является *седловой точкой* кратности 1. Этот пример показывает, что седловой точкой может быть граничная точка, не являющаяся точкой экстремума U_i.

Пример 2. Граничные точки, в которых U допускает относительный минимум, будут рассматриваться как критические точки. Для иллюстрации такой точки возьмем в качестве G область примера 1 и $U \equiv y$. Функция U всюду положительна в G и имеет минимум 0 в начале координат. Мы рассматриваем начало координат как критическую точку U (рис. 3).

Если, однако, $U \equiv -y$, то в начале координат U допускает относительный максимум, и мы уже не от-

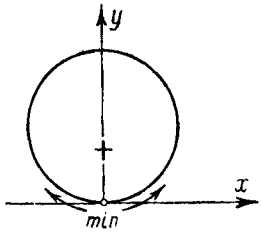


Рис. 3

носим эту точку к критическим точкам U. Такое различие между точками максимума и минимума на (B) объясняется следующими причинами. Пусть U_c — множество точек, в которых $U \leqslant c$. Когда величина c, возрастая, проходит через минимальное значение U, число связных компонент U_c возрастает не менее чем на 1. Если же c, возрастая, проходит через максимальное

значение U, то U_c не испытывает никакого топологического изменения. В окрестности граничной точки (x_0, y_0) относительного максимума множество U_c с возрастанием c расширяется до $U(x_0, y_0)$ и при $c \geqslant U(x_0, y_0)$ в окрестности (x_0, y_0) далее не изменяется. Строгий анализ всего этого будет проведен в следующем параграфе.

Пример 3. Граничная точка может быть седловой для функции $-U$, но не быть ею для функции U.

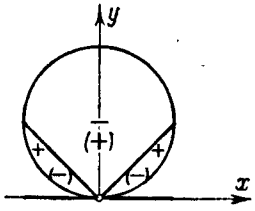


Рис. 4

Пусть функция $U = x^2 - y^2$ рассматривается в области G примера 1 (рис. 4 *)). На окружности B (границе области G) функция U имеет, очевидно, относительный минимум в точке $z=0$, но эта точка не является точкой относительного минимума функции U в области G. В G имеется две дуги линии уровня, оканчивающиеся в точке $z=0$. В каждой достаточно малой относительной окрестности точки $z=0$ подмножество точек, расположенных ниже уровня 0, состоит из одной компоненты. В соответствии с данным выше определением граничных критических точек, точка $z=0$ является для функции U обыкновенной точкой. Заметим, что в классическом смысле функция U имеет критическую точку

*) На рисунке знаки, стоящие в скобках, относятся к функции $-U$. (*Прим. ред.*)

в начале координат. В той же самой области в произвольно малой относительной окрестности точки $z=0$ для функции $-U$ существует два сектора, расположенных ниже уровня 0. Следовательно, начало координат является седловой точкой функции $-U$.

Этот пример показывает, что топологическое понятие критической точки является „относительным", зависящим как от функции U, так и от области G.

Впредь мы будем называть критическими точками внутренние и граничные седловые точки и точки относительного минимума U (на границе). До § 12 мы будем предполагать, что рассматриваемые функции U не имеют логарифмических полюсов. Полностью изучив этот случай, мы в этом параграфе без труда сведем к нему случай функций с логарифмическими полюсами.

Чтобы отличить критические точки, определенные здесь, от критических точек, определяемых обращением в нуль первых частных производных, условимся последние называть *дифференциальными критическими точками*, в то время как первые будем называть *топологическими критическими точками*. В этой книге прилагательное „топологический" будет обычно опускаться.

§ 5. Линии уровня, ведущие к граничным точкам, не являющимся точками экстремума

В этом параграфе речь будет идти о структуре линии уровня U в окрестности граничной точки z_0, не являющейся точкой экстремума. Введем понятие простой окрестности точки z_0. Предположим, что z_0 принадлежит граничной окружности B_i. Положим

$$U(x_0, y_0)=c \quad (z_0=x_0+iy_0). \tag{5.1}$$

Пусть D — пересечение G с открытым кругом, центр которого совпадает с z_0, и таким, что: 1) *$\overline{D}$ не пересекает граничных окружностей* (B), *отличных от* B_i, 2) *в части* ω *границы* D, *принадлежащей* B_i, *равенство* $U=c$ *имеет место лишь в точке* z_0.

Последнее условие для D может быть удовлетворено, так как в силу ранее сделанного допущения (граничное условие A) функция U^i имеет на B_i самое большее конечное число точек экстремума.

Каждая точка D, расположенная на уровне c, обладает канонической окрестностью N в смысле теоремы 2.1.а. Под *поперечником* такой окрестности будет пониматься дуга уровня c в окрестности N, соответствующая сумме диаметрально противоположных радиусов из теоремы 2.1.а. В случае обыкновенной точки $z \in D$ окрестность N имеет единственный поперечник. Если же z является седловой точкой кратности μ, то имеется $\mu+1$ таких поперечников.

Заметим, что в области D линия уровня c необходимо является простой. В противном случае она ограничивала бы одну или более областей R, принадлежащих D. В каждой такой области R функция U непостоянна (это противоречило бы определению псевдогармонической функции) и, следовательно, допускает экстремальное значение в некоторой внутренней точке R, что, как мы видели, невозможно.

Нас будет интересовать „продолжение" дуги уровня c.

Максимальные дуги уровня c. Множество точек, удовлетворяющих уравнению $U=c$, расположенное в произвольной замкнутой подобласти области D, может быть покрыто конечным числом канонических окрестностей типа окрестностей из теоремы 2.1.а. Следовательно, все множество точек $U=c$, расположенное в D,

может быть покрыто счетным множеством таких канонических окрестностей

$$N_n \quad (n=1,2,\ldots)$$

точек $P_n \in D$, обладающих следующими свойствами: 1) все точки P_n различны; 2) множества N_n содержатся в D; 3) каждая данная замкнутая подобласть области D пересекается не более, чем с конечным числом окрестностей N_n; 4) диаметр окрестности N_n стремится к нулю, когда P_n стремится к границе D.

Открытую простую дугу g уровня c в области D, являющуюся суммой поперечников подмножества окрестностей N_n и не имеющую ни первого, ни последнего поперечника, мы назовем *максимальной дугой уровня* c. Существование такой максимальной дуги, содержащей наперед заданный поперечник, следует из того, что концевые точки каждого поперечника k расположены на некотором другом поперечнике (данного множества), пересекающемся с k по простой дуге. Процесс расширения простой дуги, являющейся суммой конечного числа поперечников, может быть продолжен на счетное число шагов и приводит к открытой простой дуге g, которая окажется максимальной в вышеуказанном смысле. Такая открытая дуга g может быть представлена в виде взаимно однозначного и непрерывного образа интервала (0,1) оси t:

$$z=a(t) \quad (0<t<1). \tag{5.2}$$

Максимальные дуги g уровня c обладают следующими основными свойствами (мы обозначаем через ω часть границы D, принадлежащую окружности B_l, и через ω_1 — остальную часть границы):

а) *При t, стремящемся к* 0 *или* 1, *расстояние между точкой $a(t)$ и суммой $\omega+\omega_1$ стремится к нулю.*

Это следует непосредственно из того, что g есть простая дуга и состоит из поперечников. Поэтому она никогда не входит дважды в одну и ту же окрестность N_m, но в каждой бесконечной последовательности окрестностей N_m расстояние между N_m и $\omega + \omega_1$ стремится к нулю при неограниченном возрастании m.

б) *При t, стремящемся к 1, $a(t)$ стремится либо только к ω, либо только к ω_1* (но не к обеим вместе); *при этом в случае, когда $a(t)$ стремится к ω, существует предел $a(t)$, равный z_0. Аналогичное предложение справедливо и при t, стремящемся к* 0.

Действительно, каждая точка ω, предельная для точек g, должна лежать на уровне c и, следовательно, совпадать с z_0. Точки ω_1, расположенные на уровне c, не могут быть соединены с точкой z_0 (уровня c) посредством точек замыкания $\omega + \omega_1$, так как тогда имелась бы целая частичная дуга ω, расположенная на уровне c. Если при t, стремящемся к 1, точка $a(t)$ стремится к ω, то она не может стремиться также к ω_1 и поэтому стремится к z_0.

в) *Если точка $a(t)$ стремится к z_0 при t, стремящемся к* 1, *то $a(t)$ стремится к ω_1 при t, стремящемся к* 0. *То же имеет место при перемене* 1 *и* 0.

Действительно, если бы предложение не имело места, то g была бы замкнутой, так как обе ее концевые предельные точки совпадали бы с z_0. Тогда g ограничивала бы некоторую область в D, что невозможно.

По этой же причине никакие две максимальные дуги g, выходящие из точки z_0, не могут пересекаться ни в какой другой точке D.

г) *Имеется самое большее конечное число максимальных дуг g с концевой точкой в z_0.*

Пусть K — пересечение D и окружности с центром в точке z_0 и радиусом, меньшим максимума расстояний от z_0 до точек D. Если $a(t)$ стремится к z_0 при t, стремящемся к 1 (или 0), то из в) следует, что $a(t)$ стремится к ω_1 при t, стремящемся к 0 (или 1), так что g пересекает K. Точки уровня c, расположенные на K, образуют замкнутое множество S, ибо на уровне c не имеется точек пересечения K и B. Точки S могут быть покрыты конечным числом канонических окрестностей N_n в D, обладающих конечным числом поперечников. Так как максимальные дуги в D являются простыми, то число таких дуг, пересекающих K, не больше, чем число поперечников, и поэтому конечно.

д) *Существует по крайней мере одна максимальная дуга g в D с концевой точкой в z_0.*

Точка z_0 не является изолированной точкой уровня c, так как по предположению z_0 не есть точка экстремума U. Значит, существует последовательность z_n точек уровня c в D, сходящаяся к z_0. Если на одной из максимальных дуг уровня c лежит бесконечное множество точек последовательности z_n, то эта дуга необходимо оканчивается в точке z_0. Покажем, что эта возможность является единственной. Действительно, в противном случае имелось бы бесконечно много максимальных дуг g_n с точками, как угодно близкими к z_0. Эти дуги стремились бы к ω_1 при t, стремящемся к 0 или 1, и пересекали бы K. Но мы уже видели, что существует не более, чем конечное число максимальных дуг, пересекающих K, откуда и следует справедливость д).

е) *Точки уровня c, не расположенные на максимальных дугах, сходящихся в точке z_0, отстоят от z_0 на ограниченном снизу положительном расстоянии.*

Доказательство этого утверждения содержится в доказательстве д).

§ 6. Канонические окрестности граничной точки z_0, не являющейся точкой экстремума U

В качестве положительного направления плоской жордановой кривой g, мы примем такое направление, при котором порядок внутренних по отношению к g равен 1 *).

Лемма 6.1. *Пусть T — произвольный сохраняющий ориентацию гомеоморфизм жордановой кривой g_1 в другую жорданову кривую g_2. Существует гомеоморфизм замкнутой области S_1, ограниченной g_1, на замкнутую область S_2, ограниченную g_2, совпадающий с T на g_1.*

Известно, что существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм S_1 в S_2. Чтобы убедиться в возможности продолжения этого гомеоморфизма на границу области с сохранением ориентации границы, заметим, что лемма верна для случая, когда области S_1 и S_2 сводятся к одному и тому же кругу H. Действительно, если r и θ — полярные координаты с полюсом в центре H, то гомеоморфизм T может быть задан непрерывной и возрастающей функцией $F(\theta)$, для которой $F(\theta+2\pi)=F(\theta)$; этот гомеоморфизм определяется формулами

$$\theta'=F(\theta), \quad r'=r. \tag{6.1}$$

В общем случае мы отобразим сначала гомеоморфно S_1 и S_2 на круг H, а затем — круг на себя с заданным соответствием границ. Искомое отображение S_1 на S_2 получится из этих отображений.

---

*) *Порядком* точки z_0 относительно кривой g называется деленное на 2π полное изменение какой-либо однозначной и непрерывной ветви $\operatorname{Arg}(z-z_0)$ при обходе точкой z этой кривой. (*Прим. ред.*)

Чтобы возвратиться к основной задаче, снова рассмотрим окрестность D точки z_0, описанную в предыдущем параграфе (рис. 5).

Пусть

$$h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n \tag{6.2}$$

— максимальные дуги, лежащие в D и оканчивающиеся в точке z_0. Напомним, что эти дуги не пересекаются

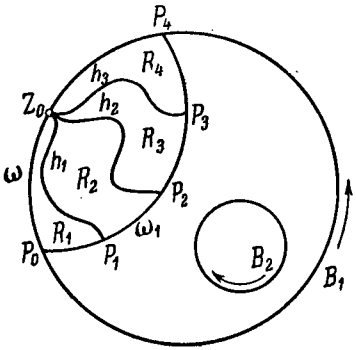


Рис. 5

в точках D, отличных от их общего конца z_0. Пусть

$$P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n \tag{6.3}$$

— концевые точки этих дуг, расположенные на границе ω_1 области D (напомним, что ω_1 — дуга окружности, центр которой совпадает с точкой z_0). Если переменная точка перемещается вдоль дуги h_j, то при подходе к ω_1 она приближается к вполне определенной точке P_j границы ω_1. Действительно, точки ω_1, расположенные на том же уровне c, что и z_0, могут быть покрыты конечным числом канонических окрестностей N_n, каждая из которых содержит конечное число поперечников.

Пусть P_0 и P_{n+1} — концевые точки ω_1 на границе B_i области G; допустим, что нумерация произведена так, чтобы точки

$$P_0,\ P_1,\ \ldots,\ P_n,\ P_{n+1} \tag{6.4}$$

на границе D были расположены в порядке, определенном положительным направлением границы.

Из предыдущей леммы следует, что существует *гомеоморфизм* T области D на полукруг H:

$$(r \leqslant 1, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant \pi), \tag{6.5}$$

при котором z_0 соответствует центру $r=0$ полукруга, дуга границы D, расположенная на B_i, — диаметру и дуга h_j — радиусу, для которого

$$\theta = \frac{j\pi}{n+1} \quad (j=1,2,\ldots, n). \tag{6.6}$$

В самом деле, дуги h_j разделяют D на ряд областей

$$R_1, R_2, \ldots, R_{n+1},$$

содержащих точки z_0, P_{j-1} и P_j на своих границах. Чтобы построить искомый гомеоморфизм T, отобразим сначала каждую дугу h_j гомеоморфно на соответствующий радиус (6.6). Затем в соответствии с доказанным в лемме 6.1 отобразим гомеоморфно $\bar{R}_j$ на j-й сектор из тех, на которые полукруг H разделен радиусами (6.6).

В представлении области $\bar{D}$ через H (с помощью гомеоморфизма T) точки уровня c, не лежащие на радиусах (6.6), отстоят от $r=0$ на ограниченном снизу положительном расстоянии. Иными словами, можно указать такой содержащийся в H полукруг S с центром $r=0$ и радиуса $r \leqslant r_1 \leqslant 1$, который не содержит точек $\bar{D}$, расположенных на уровне c и не лежащих на дугах с концом в z_0. Таким образом, имеет место следующая важная теорема:

Теорема 6. 1. *Пусть z_0 — точка (B), не являющаяся изолированной среди точек ее уровня c. Тогда*

существует каноническая относительная окрестность N точки z_0, замыкание которой допускает гомеоморфное отображение на полукруг H, такое, что точка z_0 соответствует центру O полукруга, пересечение $\bar{N}$ и (B) — диаметру и совокупность точек N, лежащих на уровне c, — совокупности n радиусов ($n > 0$). Прообразы этих радиусов делят N на $n+1$ областей (секторов), в которых знаки $U-c$ перемежаются. Точки радиусов, отличные от O, соответствуют обыкновенным точкам множества $U=c$.

Граничную точку z_0, не являющуюся изолированной среди точек ее уровня c, мы будем называть *обыкновенной*, если в ее канонической окрестности N имеется не более одного сектора, расположенного ниже c. В противном случае, если число секторов N, расположенных ниже c, равно $m > 1$, то будем называть z_0 *критической* или *седловой точкой* кратности $m-1$.

Внутреннюю точку P области G, лежащую на уровне c, будем называть *кратной*, если существует более одной дуги множества $U=c$, проходящей *через эту точку*. Внутренняя точка является кратной тогда и только тогда, когда она является седловой.

Это утверждение, однако, не имеет места для граничных точек. Действительно, условимся называть граничную точку P *кратной*, если существует более одной дуги множества $U=c$, оканчивающейся в P; тогда, как мы видели на примерах, кратная граничная точка может и не быть седловой. Однако, наоборот, каждая седловая граничная точка является кратной. Непосредственно видно, что любая кратная граничная точка P является седловой точкой U или $-U$ и, если число секторов канонической окрестности точки P превосходит три, — то обеих функций сразу.

§ 7. Кратные точки

В этом параграфе основной теоремой является следующая:

Теорема 7.1. *Множество кратных точек совокупности линий уровня является изолированным.*

Каждая внутренняя кратная точка P является изолированной. Действительно, если в окрестности этой точки выбраны координаты, в которых функция U гармонична, то кратные точки U становятся дифференциальными критическими точками. Подмножество кратных точек каждого фиксированного уровня также является изолированным в силу свойства множества $U=c$ в канонической окрестности граничной точки. Таким образом, граничная точка z_0 уровня c может быть предельной лишь для кратных точек, не лежащих на уровне c. Мы можем ограничиться случаем, когда точка z_0 является предельной для кратных точек, расположенных ниже c.

Прежде чем продолжать наши рассмотрения, введем понятие U-траектории. Под *U-траекторией* мы будем понимать любую простую дугу, вдоль которой U является возрастающей или убывающей функцией. Существование U-траектории, проходящей через каждую обыкновенную внутреннюю точку P области G, проверяется непосредственно. Действительно, выберем в окрестности точки P координаты (x, y), в которых функция U гармонична. Условимся для конкретности, что в точке $P=(x_0, y_0)$ производная $U_x \neq 0$, тогда ясно, что проходящая через точку (x_0, y_0) дуга, на которой $y=y_0$, и является U-траекторией. Если же P принадлежит границе, то U-траекторией будет любая достаточно короткая дуга границы (B), оканчивающаяся в P. Докажем еще одну лемму:

Лемма 7.1. *Кратные точки совокупности линий уровня отстоят на ограниченном снизу положитель-*

ном расстоянии от любой граничной точки z_0, не являющейся точкой экстремума U.

Для доказательства этого рассмотрим сектор R канонической окрестности z_0. Такой сектор может быть одного из двух типов: 1) обычного типа, когда имеется две дуги границы R, расположенные на том же уровне c, что и точка z_0, и оканчивающиеся в z_0, и 2) граничного типа, когда имеется лишь *одна* такая дуга границы R. Рассмотрим отдельно эти случаи.

Случай I. Сектор R обычного типа. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что сектор R расположен ниже уровня c, на котором лежит точка z_0. Докажем, что точка z_0 не является предельной для кратных точек, расположенных в R ниже уровня c. Обозначим через h_1 и h_2 дуги уровня c, оканчивающиеся в точке z_0 и принадлежащие границе R. Соединим в R внутреннюю точку P_1 дуги h_1 с внутренней точкой P_2 дуги h_2 простой дугой k, в окрестностях P_1 и P_2 являющейся U-траекторией. Дуга k делит R на две области, одна из которых R_1 содержит точку z_0. Если ε — достаточно малая положительная константа, то на уровне $c-\varepsilon$ имеется точно две точки Q_1 и Q_2 границы R_1, лежащие на частях дуги k соответственно в окрестностях P_1 и P_2. Отсюда следует, что в R_1 на уровне $c-\varepsilon$ имеется лишь одна простая максимальная дуга. Действительно, концевые точки любой такой дуги должны совпадать с Q_1 и Q_2, и если бы в R_1 существовали две такие дуги, то в R_1 существовала бы область, ограниченная дугами уровня $c-\varepsilon$, что невозможно. Поэтому в R_1 на уровне $c-\varepsilon$ не может лежать ни одной кратной точки, ибо из существования такой кратной точки вытекало бы существование двух или большего числа максимальных дуг уровня $c-\varepsilon$.

Таким образом, в случае I точка z_0 не может являться предельной для кратных точек, расположенных в R.

Случай II. Сектор R граничного типа. Предположим, как и в случае I, что сектор R расположен ниже уровня c. Пусть h_1 — граничная дуга R, расположенная на уровне c и ведущая в точку z_0, а P_1 — внутренняя точка дуги h_1. Соединим P_1 с какой-нибудь граничной точкой R, расположенной ниже c, простой дугой k, лежащей в R и в окрестности P_1 являющейся U-траекторией. Дуга k попрежнему делит R на две области, одна из которых R_1 содержит точку z_0. Если ε — достаточно малая положительная константа, то попрежнему на уровне $c-\varepsilon$ будет иметься точно две точки Q_1 и Q_2 границы R_1, и доказательство заканчивается так же, как в случае I.

Лемма 7. 1 доказана.

Чтобы доказать теорему 7.1, остается еще рассмотреть окрестности граничных точек z_0, являющихся точками относительного экстремума U. Достаточно рассмотреть случай, когда z_0 является точкой относительного максимума U.

Каждая достаточно малая относительная окрестность N точки z_0 и ее замыкание $\bar{N}$, исключая z_0, расположены ниже c. Если ε — достаточно малая положительная постоянная, то множество точек уровня $c-\varepsilon$, принадлежащих границе N, будет состоять только из двух точек на (B). Как и в доказательстве леммы 7.1, отсюда следует, что кратные точки линий уровня не сгущаются у z_0. Таким образом, мы получили предложение, дополняющее предыдущую лемму:

Лемма 7.2. *Кратные точки линий уровня U отстоят на ограниченном снизу положительном расстоянии от граничной точки относительного экстремума U.*

Теорема 7.1 непосредственно следует из лемм 7.1 и 7.2. Доказательство двух предыдущих лемм позволяет установить еще следующее необходимое для дальнейшего предложение:

Теорема 7.2. *Пусть z_0 — точка относительного экстремума, принадлежащая (B). Существует каноническая окрестность N точки z_0, замыкание которой допускает такое гомеоморфное отображение на полукруг, при котором z_0 соответствует центру полукруга, а граница N, расположенная на (B), — его диаметру; граница N, расположенная в G, находится на некотором уровне $c_1 \neq c$, тогда как все точки N, за исключением z_0, лежат между уровнями c_1 и c.*

Так как кратные точки линий уровня U являются изолированными, то их число конечно. Следовательно, конечно также и число седловых точек U (и $-U$). Каждая такая седловая точка называется критической точкой U. Точки относительного минимума (но не относительного максимума) также называются критическими точками U. Таким образом, число критических точек U конечно. Функция $-U$ обладает теми же самыми внутренними критическими точками, что и U. На границе (B) критические точки $-U$ могут не совпадать с критическими точками U.

Мы будем предполагать, что диаметр канонической окрестности N точки z_0 выбран так, что в N, за исключением z_0, не имеется критических точек U или $-U$.

§ 8. Множества U_c и их максимальные граничные дуги w, расположенные на уровне c

Обозначим через U_c замкнутое множество точек, в которых U не превосходит c. Граничными точками этого множества являются точки, в которых $U=c$ (мно-

жество таких точек обозначим через $[U=c]$, а также точки граничных дуг (B) области G, расположенные ниже уровня c.

Введем определение *максимальной граничной дуги* w множества U_c, расположенной на уровне c. Каждая простая граничная дуга уровня c, принадлежащая множеству U_c, очевидно, может быть продолжена до

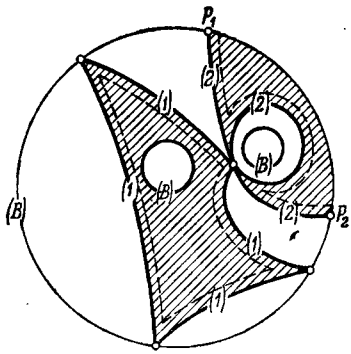


Рис. 6

тех пор, пока она не войдет в каноническую окрестность N граничной или седловой точки P[1]) области G. В любом из этих случаев дуга входит в N на уровне c по границе h сектора S, расположенного ниже c. Если P — граничная точка, а S — сектор граничного типа (§ 6), то мы считаем, что дуга w оканчивается в P. Во всех других случаях мы продолжаем дугу w по второй граничной дуге сектора S, расположенной на уровне c. Продолженная таким образом дуга или окажется циклом, или будет иметь концевые точки на (B)*).

---

[1]) Мы предполагаем, что P расположена на уровне c.

*) См. рис. 6; на нем изображены две максимальные граничные дуги, из которых (1) — цикл, а (2) имеет концы на (B), заштриховано множество U_c. (*Прим. ред.*)

Максимальная граничная дуга может иметь кратные точки в седловых точках U. В каждой такой точке две или больше локально простые ветви w имеют общие точки, не пересекаясь между собой. Характер продолжения, определяющий w, отличается от того, который был использован для определения максимальных простых дуг окрестности D. Две различные максимальные граничные дуги w могут иметь конечное число общих (седловых) точек, в которых эти дуги не пересекаются между собой.

Каждая из дуг w может быть задана в виде локально взаимно однозначного непрерывного образа действительного сегмента $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, если w имеет концевые точки, или окружности единичной длины, если w представляет собой цикл. В последнем случае величина t может рассматриваться как длина дуги окружности.

В случае, когда w касается самой себя в кратных точках, удобно ввести понятие *покрытия* w^* дуги w как множества, в котором каждая такая кратная точка берется столько раз, сколько раз она встречается при прохождении w. Иначе говоря, вместо функции $P(t)$ рассматривается пара $[t, P(t)]$, представляющая w^* взаимно однозначно и непрерывно. Такое покрытие w^* представляет собой гомеоморфный образ интервала $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ или единичной окружности, смотря по тому, имеет w концевые точки или не имеет их. Множество U_c мы также заменим его покрытием U_c^*, граница которого состоит из различных покрытий w^* его граничных дуг уровня c. Точнее, два сектора S_1 и S_2 окрестности седловой точки P_0, принадлежащие U_c и пересекающиеся в P_0 в покрытии U_c^*, будут рассматриваться как непересекающиеся.

В следующих параграфах придется ссылаться на следующую лемму:

Лемма 8.1. *Максимум расстояний точек, лежащих на уровне $c \pm \varepsilon$, до множества точек уровня c стремится к нулю при ε, стремящемся к нулю.*

Если бы эта лемма была неверна, то существовала бы последовательность точек z_n, сходящаяся к точке z_0 уровня, отличного от c, но таких, что их уровни стремятся к c при неограниченном возрастании n. Это противоречит непрерывности U в точке z_0, что и доказывает лемму.

§ 9. Эйлерова характеристика E_c

Эйлерова характеристика двумерного комплекса определяется выражением

$$a_0 - a_1 + a_2,$$

где a_i есть число i-мерных симплексов в комплексе ($i=0, 1, 2$). Множество U_c может содержать конечное число изолированных точек относительного минимума U, расположенных на уровне c. Остальные точки U_c могут быть разбиты на конечное число двумерных симплексов с ограничивающими их одномерными и нульмерными симплексами. В качестве двумерных симплексов мы будем допускать гомеоморфные образы некоторых выпуклых многоугольников, рассматривая образы их вершин и сторон соответственно как нульмерные и одномерные симплексы. Пусть K_c — комплекс, представляющий U_c, и E — эйлерова характеристика K_c.

Доказательство существования комплекса K_c, представляющего U_c, для любого c мы установим ниже, заставляя c пробегать, возрастая, различные критические значения U. В частности, из теоремы 7.2 следует, что, когда c, возрастая, проходит значение относительного минимума U, то к K_c добавляется некоторое число изолированных двумерных симплексов (столько, сколько

существует граничных точек, в которых U допускает относительный минимум c). Будет показано также, что при достаточно малом $\varepsilon>0$ комплекс K_c, соответствующий U_c, может быть получен из комплекса $K_{c-\varepsilon}$, соответствующего $U_{c-\varepsilon}$, добавлением конечного числа симплексов. Иначе говоря, если ε достаточно мало, то при данном K_c тем же способом можно получить $K_{c+\varepsilon}$.

При подразделениях одномерных симплексов характеристика E остается неизменной, так как добавление нульмерного симплекса (внутренней точки одномерного симплекса) компенсируется заменой одного одномерного симплекса двумя. Заметим также, что одномерный комплекс, соответствующий простой замкнутой кривой, имеет одинаковое число нульмерных и одномерных симплексов и, таким образом, ничего не вносит в эйлерову характеристику. Поэтому, если c, возрастая, проходит через значение относительного минимума U и к K_c прибавляется двумерный симплекс A_2, не связанный с другими симплексами комплекса, то характеристика E_c возрастает на 1.

В ближайшем параграфе мы покажем, что если c, возрастая, проходит ряд значений U, то характеристика E_c может лишь возрастать. Возрастание характеристики вызывается как присоединением двумерных комплексов, соответствующих точкам относительного минимума U, так и переходом от U_c^* к U_c в случае, когда c есть уровень седловой точки. Пусть K_c^* — комплекс, представляющий U_c^* и отличающийся от K_c лишь тем, что в него входит столько нульмерных симплексов, покрывающих каждую седловую точку P уровня c, сколько имеется секторов канонической окрестности P, расположенных ниже c и имеющих вершину в P. Таким образом, для перехода к K_c от K_c^* следует заменить все нульмерные симплексы K_c^*, покрывающие P, одним

нульмерным симплексом и соответствующим образом изменить соотношения инцидентности. Общее уменьшение E_c^* за счет седловых точек при переходе к E_c равно сумме кратностей седловых точек на уровне c.

Если U_c пусто, то значение E_c равно нулю. Если U_c совпадает со всей областью $\bar{G}$, то E равно $2-\nu$, где ν — число граничных кривых области G. Это конечное значение $2-\nu$ величины E_c должно быть равным алгебраической сумме изменений в E_c, когда c, возрастая, проходит через все значения U. Мы покажем в дальнейшем, что

$$2-\nu=m-S-s, \tag{9.1}$$

где m — число точек относительного минимума U,
S — „ седловых точек U в G,
s — „ „ „ U на (B).

(Седловые точки считаются столько раз, какова их кратность.) При этом до § 12 мы предполагаем, что в области G нет логарифмических полюсов.

Для доказательства (9.1) необходимо установить, что изменение в E_c происходит только при добавлении изолированных элементов, соответствующих точкам относительного минимума U, и при переходе от K_c^* к K_c — в случае, когда на уровне c имеются седловые точки.

Всем этим вопросам и посвящены ближайшие два параграфа.

§ 10. Переход от $K_{c-\varepsilon}$ к K_c^*

При данном c подчиним ε следующим четырем условиям. Первое условие состоит в том, что ни U, ни $-U$ не имеют критических значений в полуинтервале

$$c-\varepsilon \leqslant U < c \quad (\varepsilon > 0).$$

Пусть w^*—произвольная максимальная дуга K_c^* уровня c. Таких дуг w^* на уровне c может быть несколько; по определению они не пересекаются, хотя их проекции на K_c и могут пересекаться в седловых точках уровня c. Для каждой дуги w^* определим $H_w(\varepsilon)$ — подмножество точек U_c^*, которые могут быть связаны с w^* линиями, состоящими из точек U_c^*, на которых

$$c-\varepsilon \leqslant U \leqslant c.$$

Мы предполагаем ε настолько малым, что никакое из множеств $H_w(\varepsilon)$ не связано более, чем с одной из дуг w^*, — в этом состоит второе условие.

В качестве третьего условия, налагаемого на ε, мы требуем, чтобы все точки границы (B), покрываемые множеством $H_w(\varepsilon)$, являлись седловыми точками уровня c[1]) в случае, когда w^* — цикл, а когда w^* не цикл, множество таких точек должно состоять из седловой точки уровня c и двух не связанных между собой U-траекторий T_1 и T_2, принадлежащих U_c и оканчивающихся в концевых точках P_1 и P_2 дуги w^* *).

Согласно четвертому и последнему условию ε берется настолько малым, что граница каждого множества $H_w(\varepsilon)$, расположенная на уровне $c-\varepsilon$, состоит из единственной дуги. Возможность удовлетворить этому условию доказывается с помощью построения, использованного в § 7 для доказательства изолированного характера кратных точек. Действительно, пусть P — произвольная точка w^*, N — каноническая окрестность P и S — сектор расположенный ниже c и имеющий граничную дугу на w^*. Пусть далее h_1 и h_2 — две U-траектории в S,

---

[1]) Для функции U или $-U$.

*) См. рис. 6, на котором множества $H_w(\varepsilon)$ заключены между дугами w и пунктирными линиями. (*Прим. ред.*)

выходящие из точек w^*. Если ε достаточно мало, то в S имеется только одна дуга уровня $c-\varepsilon$, соединяющая точку h_1 с точкой h_2. Дуга w^* может быть покрыта конечным числом последовательно перекрывающихся секторов S вышеуказанного типа. Распределим U-траектории вида h_1 и h_2 таким образом, чтобы последовательные U-траектории принадлежали одному и тому же сектору S. По лемме 7.1 можно взять ε настолько малым, что каждая дуга уровня $c-\varepsilon$, встречающая одну из этих U-траекторий, будет встречать и все U-траектории в том порядке, в котором встречаются они при движении по w^*. Таким образом, четвертое условие для ε действительно может быть удовлетворено.

Пусть ε_1 — такое положительное постоянное число, что при

$$0<\varepsilon<\varepsilon_1 \tag{10.1}$$

ε удовлетворяет всем четырем условиям для каждой граничной дуги w^*.

Пусть далее $g(\varepsilon)$ — граница $H_w(\varepsilon)$, расположенная на уровне $c-\varepsilon$. Кривая $g(\varepsilon)$ является простой. Если $g(\varepsilon)$ — не цикл, то она имеет концевые точки P_1 и P_2 на (B); тогда множество $H_w(\varepsilon)$ ограничено жордановой кривой, образованной из $g(\varepsilon)$, T_1, w^* и T_2. Множество $H_w(\varepsilon)$ представимо, следовательно, как двумерный симплекс. Вершинами этого двумерного симплекса будут точки P_1, P_2, точки w^*, покрывающие седловые точки, и все вершины $K_{c-\varepsilon}$, расположенные на $g(\varepsilon)$. Добавление такого двумерного симплекса с дугой $g(\varepsilon)$ к $K_{c-\varepsilon}$ не вызывает изменения эйлеровой характеристики последней.

В случае, когда $g(\varepsilon)$ является циклом, w^* и $g(\varepsilon)$ ограничивают топологическое кольцо на U_c^*. Это кольцо может быть разбито на двумерные симплексы. Его нуль-

мерными симплексами будут точки w^*, покрывающие седловые точки, и нульмерные симплексы $K_{c-\varepsilon}$, расположенные на $g(\varepsilon)$. Добавление к $K_{c-\varepsilon}$ такого кольца вместе с $g(\varepsilon)$ не влечет за собой изменения в эйлеровой характеристике.

Для получения K_c^* из $K_{c-\varepsilon}$ надо прибавить к последнему соответственно каждой точке относительного максимума U на уровне c двумерный симплекс, на котором

$$c-\varepsilon \leqslant U \leqslant c.$$

Добавление этого двумерного симплекса вместе с одной дугой $K_{c-\varepsilon}$ не изменяет эйлеровой характеристики.

Если имеется m_c точек относительного минимума U, расположенных на уровне c, то ясно, что для получения E_c^* нужно увеличить $E_{c-\varepsilon}$ на m_c единиц. Остается доказать следующую лемму:

Лемма 10.1. *Множество U_c^* может быть представлено в виде суммы следующих множеств: $U_{c-\varepsilon}$, множества точек относительного минимума U, расположенных на уровне c, множеств $H_w(\varepsilon)$, соответствующих различным максимальным граничным дугам w^* множества U_c $(\varepsilon < \varepsilon_1)$, и двумерных симплексов, соответствующих точкам максимума U, расположенным на уровне c.*

Пусть H — множество точек U_c^*, не принадлежащих сумме, указанной в лемме. Предположим, что H не пусто. На H

$$c-\varepsilon < U < c. \tag{10.2}$$

Множество H одновременно замкнуто и открыто относительно множества $C=U_c^*-U_{c-\varepsilon}$, так как этим свойством обладает $C-H$. Так как C содержит все свои предельные точки, не расположенные на уровне $c-\varepsilon$, то H содержит точку P, в которой U достигает макси-

мального на H значения. Из того, что H открыто относительно G, и из соотношения (10.2) следует, что H открыто относительно $\bar{G}$; следовательно, точка P является точкой относительного максимума U не только на H, но и на $\bar{G}$. Существование точки максимума противоречит первому условию, наложенному на ε. Следовательно, H пусто и лемма верна.

Таким образом, мы имеем следующую теорему:

Теорема 10.1. *Если ε — достаточно малое положительное постоянное число, то*

$$E_c^* = E_{c-\varepsilon} + m_c,$$

где m_c — число точек относительного минимума U, расположенных на уровне c.

§ 11. Изменение E_c при возрастании c

Теорема последнего параграфа может быть дополнена следующей теоремой:

Теорема 11.1. *Если ε — достаточно малое положительное постоянное число, то*

$$E_c = E_{c+\varepsilon}. \tag{11.1}$$

Максимальные граничные дуги, использованные в предыдущем параграфе, не годятся для доказательства этой теоремы. Мы заменим их максимальными граничными дугами w_* множества U_c, „продолженными“ через седловые точки вдоль границ секторов, расположенных *выше* c (последние здесь удобнее рассматривать, чем секторы, расположенные ниже c). Как и раньше, сектор S с вершиной в точке P границы (B), расположенный выше c, назовем сектором *граничного типа*, если S имеет единственную граничную дугу уровня c, ведущую в точку P. Дуга w_*, входящая в сектор S

граничного типа, расположенный выше c, будет заканчиваться в вершине P этого сектора.

Рассмотрим далее множества $H_{w_*}(\varepsilon)$, для которых

$$c \leqslant U \leqslant c + \varepsilon \tag{11.2}$$

и которые связаны с соответствующими дугами w_* при ограничениях предыдущего параграфа, наложенных на ε. Поэтому множества $H_{w_*}(\varepsilon)$ можно представить как двумерные симплексы или как топологические кольца, обладающие граничной дугой уровня c, общей с K_c, и, следовательно, при добавлении этих множеств к K_c не происходит изменения эйлеровой характеристики. Каждая точка P относительного минимума U, расположенная на уровне c, входит в U_c в качестве изолированного нульмерного симплекса, а при достаточно малом ε $U_{c+\varepsilon}$ содержит двумерный симплекс, который является замыканием канонической окрестности P и принадлежит (11.2). Следовательно, переход от U_c к $U_{c+\varepsilon}$ также не изменяет эйлеровой характеристики, откуда и следует теорема 11.1.

Таким образом, при возрастании c от значения a, для которого U_a пусто, до значения b, для которого $U_b = \overline{G}$, эйлерова характеристика претерпевает изменение только при прохождении c через критические значения U.

В теореме 10.1 установлено, что при достаточно малом ε

$$E_c^* = E_{c-\varepsilon} + m_c,$$

где m_c — число точек относительного минимума, расположенных на уровне c. Если s_c — число седловых точек U, расположенных на уровне c, причем каждая считается столько раз, какова ее кратность, то

$$E_c = E_c^* - s_c,$$

так как U_c получается из U_c^* отождествлением s_c нульмерных симплексов с другими нульмерными симплексами. Следовательно,

$$E_c = E_{c-\varepsilon} + m_c - s_c.$$

В теореме 11.1 было установлено, что $E_{c+\varepsilon} = E_c$ для любого достаточно малого ε. Следовательно, полное алгебраическое изменение E_c при возрастании c от минимального значения U до максимального равно $m - S - s$, где S, s и m определены в § 9.

Таким образом, мы получили следующую основную теорему:

Теорема 11.2. *Если функция U, не имеющая логарифмических полюсов, имеет S седловых точек*[1]) *в G, s седловых точек на (B) и m точек относительного минимума, то*

$$2 - \nu = m - S - s,$$

где ν — число граничных кривых области G.

§ 12. Основная теорема при граничных условиях A

Будем теперь включать логарифмические полюсы в число внутренних точек области G и начнем наши рассмотрения со следующей леммы:

Лемма 12.1. *Если z_0 — полюс $U(x, y)$, то существуют координаты (u, v), допустимо представляющие окрестность N точки z_0, такие, что в плоскости (u, v) кривые уровня U являются окружностями с центром z_0.*

Ради простоты предположим, что $z_0 = 0$. Окрестности z_0 можно отнести координаты (x_1, y_1), в которых U представляется в виде

$$k \ln |z_1| + kR\,[F(z_1)], \tag{12.1}$$

[1]) Седловые точки всегда считаются с их кратностями.

где $z_1=x_1+iy_1$, k — действительное, не равное нулю постоянное число и $F(z)$ — аналитическая в точке $z_1=0$ функция от z_1. Функцию (12.1) можно записать в виде

$$k \ln \left| z_1 e^{F(z_1)} \right|. \tag{12.2}$$

Преобразование

$$w=u+iv=z_1 e^{F(z_1)}$$

является взаимно однозначным и конформным в окрестности начала координат. После этого преобразования данная псевдогармоническая функция U в достаточно малой окрестности точки $w=0$ окажется представленной в виде

$$k \ln |w|, \tag{12.3}$$

и ее линиями уровня будут окружности $|w|=\text{const}$.

Лемма доказана.

Основная теорема может быть сформулирована следующим образом:

Теорема 12.1. *Пусть U — функция псевдогармоническая всюду в конечной области G, ограниченной ν жордановыми кривыми, за исключением логарифмических полюсов, и непрерывна в граничных точках (B) области G. Если функция, определенная значениями U на (B), имеет не более, чем конечное число точек относительного экстремума, то*

$$M+m-S-s=2-\nu, \tag{12.4}$$

где M есть число логарифмических полюсов U в G, m — число точек относительного минимума U, а S и s — соответственно числа внутренних и граничных седловых точек U, каждая из которых считается с ее кратностью.

Для доказательства теоремы заменим G областью G_1, которая получается из G исключением окрестностей полюсов P, ограниченных новыми кривыми $B(P)$. Чтобы

определить $B(P)$, введем в окрестности точки P координаты (u, v), указанные в лемме 12.1, в которых линиями уровня вблизи P являются окружности с центром в P. В каждой такой окрестности возьмем в качестве $B(P)$ границу содержащего P круга малого радиуса и с центром, отличным от P. Новые кривые $B(P)$ можно взять не пересекающимися между собой и не пересекающими старой границы области. Пусть U_1 будет функция, определенная функцией U в области G_1. Числа m и s, относящиеся к U в области G, мы заменим числами m_1 и s_1, относящимися к U_1 в области G_1.

Покажем, что

$$m - s = m_1 - s_1. \tag{12.5}$$

Если P — полюс, то необходимо различать два случая, в соответствии с тем, возрастает или убывает при возрастании U вблизи P модуль функции w, введенной в лемме 12.1.

Если $|w|$ возрастает одновременно с U, то непосредственно видно, что U_1 на границе $B(P)$ имеет точку минимума относительно $\overline{G_1}$ и седловую точку относительно $\overline{G_1}$ кратности 1 в точке $B(P)$, в которой значение $|w|$ максимально. В этом легко убедиться рассмотрением линий $|w| = \text{const}$. Таким образом, привзнос $m_1 - s_1$ от такого полюса равен $1 - 1 = 0$. Точно так же непосредственно видно, что при убывании $|w|$ с возрастанием U в окрестности P функция U_1 не имеет на $B(P)$ критических точек. Следовательно, доказано, что (12.5) имеет место.

Число S одинаково и для функции U_1 в области G_1 и для функции U в области G. Если обозначить ν_1 — число граничных кривых области G_1, то в соответствии с теоремой § 11, будем иметь

$$2 - \nu_1 = m_1 - s_1 - S = m - s - S. \tag{12.6}$$

Теперь формула (12.4) вытекает из (12.6) и очевидного соотношения $\nu_1 = \nu + M$.

Следствие. *В условиях теоремы* 12.1

$$S - M \leqslant \nu - 2 + m.$$

В частности, если имеется только одна граничная кривая и функция не имеет полюсов, то

$$S \leqslant m - 1. \tag{12.7}$$

Примеры. Приведем два примера, первый из которых покажет, что при любом положительном m в (12.7) может достигаться знак равенства, а второй — что при любом таком m может быть $S=0$.

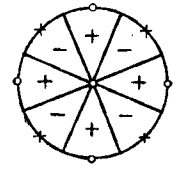


Рис. 7

В первом примере положим в круге $r \leqslant 1$

$$U = R\left(z^m\right) = r^m \cos m\theta.$$

Граничная функция $\cos m\theta$ имеет m точек минимума, расположенных на уровне -1, и m точек максимума, расположенных на уровне 1*). Эти точки максимума $\cos m\theta$ являются точками максимума функции U. Начало координат представляет собой седловую точку кратности $m-1$.

Таким образом,

$$S = m - 1.$$

В нашем втором примере мы предположим, что $U \equiv y$. Область G определения функции U зададим в виде

$$f_1(x) \leqslant y \leqslant f_2(x) \quad (0 \leqslant x \leqslant (n+1)\pi),$$

где

$$f_1(x) = -\sin^2 x,$$

$$f_2(x) = \sin^2 \frac{x}{n+1}$$

*) См. рис. 7; на нем $\times$ отмечены точки минимума и $\circ$ — точки максимума на границе. (*Прим. ред.*)

(рис. 8, где $n=2$). На границе области U допускает абсолютный максимум в точке

$$x_0=\frac{(n+1)\pi}{2}, \quad y_0=f_2(x_0)=1.$$

На кривой $y=f_1(x)$ функция U имеет n относительных максимумов и $n+1$ относительных минимумов в открытом интервале $(0, (n+1)\pi)$. Линиями уровня U являются кривые $y=\text{const}$, и непосредственно видно, что каждая кривая из точек максимума функции

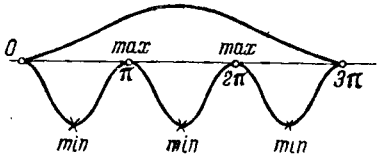


Рис. 8

$y=f_1(x)$ представляет собой седловую точку относительно $\bar{G}$. Таким образом,

$$S=0, \quad m=n+1, \quad s=n, \quad \nu=1.$$

Получим еще одно следствие из формулы (12.4), сравнивая функции U и $-U$. Пусть S, M, m и s обозначают обычные величины, отнесенные к функции U; для функции $-U$ числа S и M будут теми же самыми, а соответствующие числа s и m мы обозначим s^- и m^-. Из сравнения формул (12.4), записанных для функций U и $-U$, мы получим

$$s^- - m^- = s - m.$$

Вообще говоря, граничные седловые точки функций U и $-U$ образуют различные множества, и кратности их также различны. M, S, m и s неотрицательны, число ν всегда целое и $\geqslant 1$. Далее, если функция U не имеет

логарифмического полюса, в котором она обращается в $-\infty$, то $m \geqslant 1$, следовательно, всегда $\max(M, m) \geqslant 1$. Кроме того, должно удовлетворяться соотношение теоремы 12.1. Других соотношений между этими числами не существует. Это можно показать построением гармонической функции, для которой реализуется произвольная совокупность целых чисел, удовлетворяющих вышеуказанным соотношениям.

§ 13. Случай постоянных граничных значений

Во многих важных приложениях рассматриваемая гармоническая функция постоянна на одной или больше граничной кривой (такова, например, функция Грина). Чтобы видоизменить предыдущие результаты для этого случая, перепишем основное соотношение (12.4) в виде

$$M - S = 2 - \nu + I, \tag{13.1}$$

где величину I назовем *граничным индексом*. В граничных условиях A величина I равна $s - m$, или подробнее

$$I = \Sigma(s_i - m_i) \qquad (i = 1, 2, \ldots, \nu),$$

где m_i — число точек минимума U на B_i и s_i — число седловых точек U на B_i. Величину $s_i - m_i = I_i$ можно назвать *привзносом* граничного индекса от B_i. В следующей теореме мы продолжим оценку I:

Теорема 13.1. *Если граничные условия A удовлетворяются на части граничных кривых (B) и если на каждой из оставшихся граничных кривых C_i функция U равна постоянному относительному экстремальному значению, то граничный индекс I в* (13.1) *равен сумме привзносов $s_j - m_j$ от граничных кривых, удовлетворяющих условиям A (без учета привзносов от кривых C_i).*

Чтобы установить эту теорему, рассмотрим, как это было сделано в § 11, изменение эйлеровой характеристики E_c с изменением величины c и покажем, что в данном случае при прохождении c через уровень c_i границы C_i не происходит никакого изменения E_c.

Допустим, в частности, что c_i является относительным максимумом U. Пусть N_i — некоторая относительная окрестность C_i в форме топологического кольца, настолько близкая к C_i, что $\overline{N}_i$ не содержит ни полюсов U, ни граничных кривых, отличных от C_i. Если ε — достаточно малое положительное постоянное число, то множество точек, удовлетворяющих уравнению $U=c_i-\varepsilon$, содержит замкнутую кривую C_i^ε, расположенную в N_i. Кривая C_i^ε не может ограничивать в N_i никакой области, так как U не имеет там экстремума. Следовательно, C_i^ε должна быть простой и вместе с C_i ограничивать топологическое кольцо R_i в $\overline{N}_i$. При переходе от комплекса $K_{c-\varepsilon}$ к K_c, как и в § 11, не происходит никакого изменения эйлеровой характеристики. В случае, когда c_i является относительным минимумом, анализ проводится аналогично, с учетом того, что эйлерова характеристика кольца равна нулю.

Теорема доказана.

Напомним, что функция Грина области G имеет постоянное максимальное значение нуль в каждой граничной точке и логарифмический полюс в заданной точке в области G, в которой U обращается в отрицательную бесконечность. Таким образом, мы имеем следствие из теоремы 13.1:

Следствие 13.1. *Функция Грина области G имеет $\nu-1$ седловых точек (считая с их кратностями).*

Действительно, в этом случае $M=1$, $I=0$, так что $S=M+\nu-2-I=\nu-1$, как и утверждалось.

Граничные кривые C, на которых функция U постоянна, но не равна относительному экстремуму, сообщают величине I привзнос, к подсчету которого мы сейчас приступаем. Предположим в этом случае, что U псевдогармонична в окрестности C (относительно (x, y)-плоскости). На C имеется не более, чем конечное число точек Q, к которым сходятся из G дуги уровня c, причем число 2σ этих дуг четно. Мы назовем целое число σ *индексом* C относительно G. При подсчете числа дуг, сходящихся к C из G, мы будем считать различными дуги, ведущие к разным точкам C или ведущие к одной точке Q, но являющиеся разными радиусами канонической окрестности Q.

Выясним структуру дуг уровня U в окрестности такой кривой C. Будем представлять относительную окрестность C в виде совокупности секторов, принадлежащих окрестности C и заключенных между последовательными дугами уровня, ведущими к C. Эти секторы могут быть двух типов: 1) сектор типа V, расположенный между дугами уровня, ведущими к одной точке C, и 2) сектор типа R, расположенный между двумя дугами уровня h и h', стремящимися к различным точкам Q и Q' кривой C. Сектор первого типа и его дуги уровня можно описать без труда, переходя с помощью надлежащего гомеоморфизма окрестности Q к гармонической функции, обладающей в Q седловой точкой. Таким образом, сектор, имеющийся у гармонической функции с седловой точкой в Q, вообще может служить моделью секторов типа V.

В качестве модели сектора типа R мы используем прямоугольник H, в котором прямые линии, параллельные основанию, являются представителями дуг уровня U.

Более подробно: пусть h и h' — две дуги уровня U в области G, ведущие к точкам Q и Q' кривой C, между которыми лежит дуга $k \subset C$. Пусть $\overline{G}$ разрезана вдоль кривых h и h' так, что образовалась область K. Мы предполагаем h и h' выбранными таким образом, что в K не имеется дуг уровня U, отличных от h и h' и ведущих к k*). Тогда существует произвольно малая окрестность N дуги k (относительно K), замыкание которой $\overline{N}$ гомеоморфно прямоугольнику H. Гомеоморфизм может быть выбран так, чтобы дугам уровня U в $\overline{N}$ соответствовали в H прямые, параллельные основанию H. Основание H соответствует совокупности k и двух отрезков дуг h и h'. Стороны H соответствуют U-траекториям, выходящим соответственно из h и h'.

Основная теорема состоит в следующем:

Теорема 13.2. *Пусть U в области, содержащей $\overline{G}$ внутри, является псевдогармонической функцией, исключая логарифмические полюсы, расположенные в G. Если на части граничных кривых удовлетворяются граничные условия A и если на каждой из остальных граничных кривых C_i функция U равна постоянной c_i, то граничный индекс I выражения* (13.1) *равен*

$$\Sigma(s_j - m_j) + \Sigma\sigma_i, \tag{13.2}$$

где $s_j - m_j$ суммируются по граничным кривым, на которых имеют место условия A, а индексы σ_i суммируются по граничным кривым C_i, на которых U постоянна.

Заменим каждую граничную кривую C_i близкой простой замкнутой кривой C'_i, такой, что на C'_i относительно измененной области $\overline{G}'$ удовлетворяются условия A.

*) Напомним, что на k функция U постоянна. *(Прим. ред.)*

С этой целью проведем кривую C_i' так, чтобы на ней функция U_i (мы обозначим через U_i значения U на C_i') была монотонно возрастающей или убывающей всюду, кроме конечного числа точек: по одной точке относительного максимума в каждом секторе выше C_i и по одной точке относительно минимума в каждом секторе ниже C_i. Учитывая расположение C_i' по отношению к дугам уровня U, ясное из рассмотрения соответствующих моделей секторов, можно утверждать, что точки относительного максимума U_i на C_i' являются седловыми точками U относительно $\overline{G}'$ кратности 1, тогда как точки относительного минимума U_i на C_i' являются обыкновенными.

Секторы, расположенные выше c_i, чередуются с секторами, расположенными ниже c_i, и число секторов, расположенных выше c_i, равно σ.

Теорема следует из результатов, установленных ранее для граничных условий A.

Пример. Рассмотрим гармоническую функцию

$$U=\ln\left|\frac{1+3z^2}{z(3+z^2)}\right| \quad (|z|\leqslant 1);$$

на окружности $|z|=1$ функция U равна 0; кроме того, в § 21 мы увидим, что для круга $|z|<1$ $M=3$ и $S=0$. Множество дуг уровня 0, ведущих к окружности $|z|=1$ из области $|z|<1$, состоит из двух дуг, ведущих к $z=1$, и двух дуг, ведущих к $z=-1$.

Таким образом, $I=\sigma=2$ и соотношение

$$M-S=1+I=3$$

удовлетворено.

Глава II

РАЗЛИЧНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ

§ 14. Граничные условия A, B, C

Эти условия определены следующим образом:

Граничные условия A требуют, чтобы граничные значения U обладали конечным числом точек экстремума. Допустимыми граничными кривыми являются произвольные жордановы кривые.

Граничные условия B требуют, чтобы в (x, y)-плоскости существовала окрестность N границы (B), в которой функция U может быть доопределена так, чтобы она принадлежала классу C' и была простой. Граничные кривые предполагаются регулярными.

Граничные условия C требуют, чтобы удовлетворялись граничные условия A и B[1]).

Напомним, что функция U принадлежит классу C' в области R, если в R существуют и непрерывны частные производные U_x и U_y. Функция класса C' является *простой* в R, если $U_x^2+U_y^2$ не обращается в R в нуль.

---

[1]) Условия B или C могут быть заменены условием, чтобы некоторая окрестность N границы (B) обладала координатами, относительно которых имеют место условия B или C и в которых граница регулярна. Мы будем ссылаться на эти новые условия, как на *обобщенные* условия B или C. Допустимыми будут только такие системы координат, которые получаются из (x, y) преобразованиями, сохраняющими ориентацию.

Дуга называется *регулярной*, если она представима в виде

$$x=x(t), \quad y=y(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b),$$

где $x(t)$ и $y(t)$ принадлежат классу C' и

$$t'^2(t)+y'^2(t) \neq 0.$$

Замкнутая кривая называется регулярной, если регулярна каждая часть этой кривой. Для регулярной дуги в качестве параметра можно принять длину дуги.

При граничных условиях B функция U имеет отличный от нуля градиент g в каждой точке границы области. Этот градиент является вектором, компоненты которого равны U_x и U_y. Точка P границы будет называться *точкой входа*, если g входит в G, или, точнее, если g может быть получен вращением касательной на положительный угол, меньший π. Напомним, что внешняя граничная кривая обычно бывает ориентирована так, что ее порядок по отношению к внутренним точкам области равен 1, в то время как остальные граничные кривые ориентированы так, что порядок каждой из них по отношению к внутренним точкам области равен -1. Граничная точка P, в которой градиент не лежит на касательной и которая не является точкой входа, называется *точкой выхода*.

Как видно из соотношения

$$U_x dx+U_y dy=0,$$

имеющего место вдоль кривой уровня, в точке P, в которой U принадлежит классу C' и является простой, градиент ортогонален кривой уровня. При граничных условиях B или C граничные значения будут обычно представляться в виде функции длины дуги s рассматриваемой границы. При таком представлении

граничных значений необходимым и достаточным условием перпендикулярности градиента к границе в точке P является обращение в нуль в этой точке производной по s граничной функции. Под этим подразумевается обращение в нуль касательной компоненты градиента. Каждая граничная точка P, в которой градиент не перпендикулярен к границе, является обыкновенной в смысле предыдущих параграфов. В расширенной окрестности *) такой точки P имеется единственная дуга уровня, проходящая через точку P и образующая в этой точке отличный от нуля угол с касательной к граничной кривой. Но тогда и в области G имеется единственная дуга уровня, ведущая в точку P, и, следовательно, точка P не является ни точкой экстремума, ни седловой точкой.

Остается рассмотреть граничные точки, в которых производная по s от граничной функции U^i обращается в нуль. Вначале мы будем иметь дело с такими точками, предполагая выполненными граничные условия C. Установим следующую лемму:

Лемма 14.1. *При граничных условиях C*[1]) *точками минимума U могут быть только точки входа относительного минимума U^i, а седловыми точками — только точки входа относительного максимума U^i. Каждая седловая точка обладает кратностью, равной* 1.

Для доказательства леммы перенумеруем различные возможные случаи и, с другой стороны, выпишем воз-

---

*) Имеется в виду окрестность N, введенная в граничных условиях B. (*Прим. ред.*)

[1]) Распространение этой леммы на обобщенные условия C очевидно. Понятие входящего и выходящего градиентов является тогда относительным к использованной системе координат.

можные типы точек (обыкновенная, точка минимума, седловая точка относительно $\overline{G}$).

Случаи	Тип точки относительно $\overline{G}$
а) Входящий максимум U^i	Седловая точка U
б) Выходящий максимум U^i	Максимум U
в) Входящий минимум U^i	Минимум U
г) Выходящий минимум U^i	Обыкновенная точка U
д) Обыкновенная точка U^i	Обыкновенная точка U

Идея доказательства состоит в том, что в расширенной окрестности граничной точки P имеется только одна проходящая через P дуга уровня C, на которой лежит точка P. Эта дуга уровня вблизи точки P имеет с границей B_i лишь одну общую точку P. В окрестности точки P (относительно G) имеется соответственно две, одна или ни одной дуги уровня*), ведущих к точке P. Единственно возможные седловые точки обладают кратностью, равной 1.

Рассмотрим отдельно перечисленные выше случаи**):

Случай а). Две граничные дуги, ведущие в точку P, расположены ниже c, тогда как внутренняя нормаль в окрестности P расположена выше c. Следовательно, имеется два сектора с вершиной в P, расположенных ниже c, и P является седловой точкой U относительно $\overline{G}$.

---

*) Точка P, не принадлежащая относительной окрестности, может разбивать единственную дугу, о которой только что говорилось, на две. Далее, эта единственная дуга может оканчиваться в P. Наконец, дуга, принадлежащая расширенной окрестности, может вовсе не принадлежать относительной окрестности. (*Прим. ред.*)

**) Мы иллюстрируем эти случаи рисунками: на них заштриховано дополнение к области, тонкими линиями отмечены линии уровня U, знаками $+$ ($-$) секторы, лежащие выше (ниже) уровня c, $g = \operatorname{grad} U$. (*Прим. ред.*)

Случай б). Функция U подходит под случай а) относительно дополнения области G. Следовательно, имеется только один сектор в окрестности P, и этот сектор расположен ниже c.

Случай в). Функция $-U$ подходит под случай б) относительно G, т. е. $-U$ обладает максимумом в P, а U — минимумом.

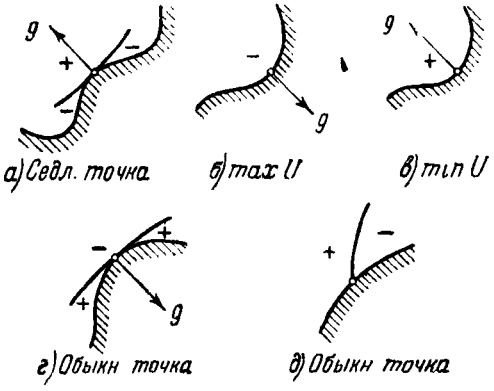


Рис. 9

Случай г). Функция $-U$ подходит под случай а) относительно G, т. е. относительно U имеется только один сектор с вершиной в P, расположенный ниже c.

Случай д). В окрестности P одна дуга границы расположена ниже c и одна—выше c. Тогда должно быть четное число секторов в G с вершиной в P. Так как это число секторов не превосходит трех и не равно нулю, то оно должно быть равным двум. Таким образом, P является обыкновенной точкой.

Лемма доказана и приводит к новой теореме:

Теорема 14.1. *При граничных условиях C числа m и s в соотношении*

$$M - S = 2 - \nu + s - m$$

могут быть подсчитаны соответственно как числа входящих точек минимума и максимума граничной функции.

Эта теорема имеет место также и для обобщенных условий C с термином „входящий", интерпретируемым в используемой системе координат.

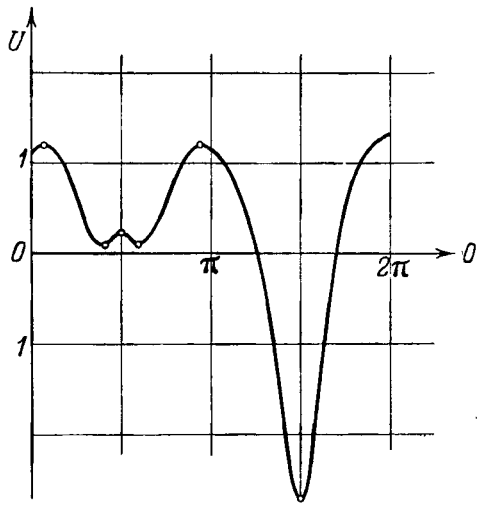


Рис. 10

Использование теоремы 14.1 для вычислений. В частности, теорема 14.1 просто применяется для определения числа и положения нулей $F'(z)$, если $F(z)$ — аналитическая функция, обладающая самое большее логарифмическими особенностями. Иллюстрируем это следующим примером. Пусть

$$F(z)=\frac{z^4}{4}+z^2-iz+\ln z.$$

Требуется найти число нулей $F'(z)$, принадлежащих области $|z|<1$.

Используем полярные координаты (r, θ) и положим

$$R[F(z)]=u(r, \theta).$$

Граничные значения u могут быть определены из равенства

$$u=\frac{r\cos 4\theta}{4}+r^2\cos 2\theta+r\sin\theta+\ln r,$$

если положить в нем $r=1$. Начертив график $u(1, \theta)$, как показано на рис. 10, найдем, что $u_\theta(1, \theta)=0$ при шести значениях θ:

$$0<a_1<a_2<\ldots<a_6<2\pi.$$

Чтобы найти, какие из этих значений θ являются выходящими (если таковые имеются), вычислим

$$u_r=r^3\cos 4\theta+2r\cos 2\theta+\sin\theta+\frac{1}{r}$$

при $r=1$. Мы увидим, что $u_r(1, a_i)<0$ только в a_6, т. е. только граничная точка $r=1$, $\theta=a_6$ является точкой входа. В этой точке достигается минимум U. Таким образом, в теореме 14.1 $m=1$, $s=0$ и $M=1$. Соотношение

$$M-S=1-m+s$$

приводит к результату $S=1$. Следовательно, $F'(z)$ обращается в нуль в $|z|<1$ только один раз.

Вычисления вышеуказанного вида занимают не более 15 минут. Используя другие окружности $r=r_0$, можно с любой степенью точности локализовать значение r, представляющее корень $F'=0$.

§ 15. Граничные условия B

Наше фундаментальное соотношение было записано в виде

$$M-S=2-\nu+I, \tag{15.1}$$

где I при граничных условиях A представляло собой

разность $s-m$ между числом граничных седловых точек и числом точек относительного минимума U, а при граничных условиях C — разность $s-m$ между числом входящих точек относительного максимума и числом входящих точек относительного минимума граничных значений. Величину I, определенную соотношением (15.1), мы называем *граничным индексом* U. Найдем метод вычисления I при граничных условиях B, подобный установленному выше для граничных условий A.

При рассмотрении этого случая нам потребуется понятие линейного элемента, определенного точкой (x, y) и парой направляющих косинусов (α, β),

$$\alpha^2+\beta^2=1.$$

Линейный элемент будет представляться точкой

$$(x, y, \alpha, \beta) \tag{15.2}$$

четырехмерного эвклидова пространства. Расстояние между двумя линейными элементами будет обычным расстоянием между точками, представляющими линейные элементы в четырехмерном пространстве.

Нам потребуется также расстояние в смысле Фреше́ между двумя кривыми (см. Фреше́ [1]). Мы рассматриваем случай дуги [1]) g_1

$$x_1(t), \quad y_1(t) \quad (a \leqslant t \leqslant b), \tag{15.3}$$

заданной как непрерывный, но не необходимо взаимно однозначный, образ линейного сегмента. Пусть g_2 — другая дуга с параметром u, изменяющимся в интервале (c, d). Пусть, далее, T — какой-нибудь гомеоморфизм между интервалами (a, b) и (c, d), относящий точке a точку c и точке b — точку d. Существует максимум расстояния $D(T)$ между соответствующими при T

[1]) Случай замкнутой кривой аналогичен.

точками кривых g_1 и g_2. *Расстояние в смысле Фреше́* (коротко: *расстояние Фреше́*) между кривыми g_1 и g_2 равно нижней грани $F(T)$ величин $D(T)$, соответствующих всевозможным гомеоморфизмам между интервалами (a, b) и (c, d). Это число будет называться ***расстоянием нулевого порядка***, в отличие от расстояния первого порядка, определение которого будет приведено ниже.

Предположим, что g_1 и g_2 регулярны, так что в качестве t и u могут быть взяты длины дуг. Тогда

$$\left[x_1(t),\quad y_1(t),\quad x_1'(t),\quad y_1'(t)\right] \tag{15.3.1}$$

и

$$\left[x_2(u),\quad y_2(u),\quad x_2'(u),\quad y_2'(u)\right] \tag{15.3.2}$$

определяют кривые в четырехмерном эвклидовом пространстве, образованные линейными элементами, касательными соответственно к g_1 и g_2. Расстояние Фреше́ между двумя кривыми (15.3.1) и (15.3.2) в четырехмерном пространстве будет называться расстоянием Фреше́ первого порядка между g_1 и g_2.

Мы будем рассматривать преобразования координат окрестности точки (x_0, y_0), допускающие представление в виде

$$\begin{aligned} u &= u(x, y), \\ v &= v(x, y), \end{aligned} \tag{15.4}$$

где функции $u(x, y)$ и $v(x, y)$ являются функциями класса C' в окрестности (x_0, y_0) и якобиан

$$J = u_x v_y - u_y v_x$$

отличен от нуля. Ограничимся преобразованием такой круговой окрестности N точки (x_0, y_0), в замыкании которой преобразование взаимно однозначно и имеет отличный от нуля якобиан.

Пусть s — длина дуги в (x, y)-плоскости и s_1 — длина дуги в (u, v)-плоскости. Если dx и dy — дифференциалы вдоль регулярной кривой g в (x, y)-плоскости, то вдоль образа g

$$ds_1^2 = Edx^2 + 2Fdxdy + Gdy^2, \tag{15.5}$$

где

$$E = u_x^2 + v_x^2, \quad F = u_x u_y + v_x v_y, \quad G = u_y^2 + v_y^2.$$

Правая часть (15.5) является положительно определенной формой, так как

$$EG - F^2 = I^2 > 0.$$

Если (dx, dy) — направляющие косинусы, т. е. если $dx^2 + dy^2 = 1$, то правая часть (15.5) имеет положительную нижнюю грань. Линейный элемент вида

$$(x, y, dx, dy) \quad (dx^2 + dy^2 = 1), \tag{15.6}$$

выходящий в N из точки (x, y), преобразуется в линейный элемент

$$\left(u, v, \frac{du}{ds_1}, \frac{dv}{ds_1}\right), \tag{15.7}$$

непрерывно изменяющийся при непрерывном изменении элемента (15.6) точки $(x, y) \in N$. Здесь du, dv, ds_1^2 рассматриваются как многочлены от направляющих косинусов (dx, dy) с коэффициентами, зависящими от (x, y). Многочлен ds_1^2 как функция элемента (15.6) для точки (x, y), расположенной в N, имеет положительную нижнюю грань.

Предположим выполненными граничные условия B. Пусть $P = (x_0, y_0)$ — произвольная точка границы области G. Произведем преобразование $T(P)$ окрестности точки P вида

$$u = U(x, y), \quad v = h(x - x_0) + k(y - y_0), \tag{15.8}$$

где

$$h = -U_y(x_0, y_0), \quad k = U_x(x_0, y_0).$$

При таком выборе h и k имеем

$$J=U_x^2(x_0, y_0)+U_y^2(x_0, y_0)\neq 0.$$

Таким образом, J равно квадрату длины градиента U в точке P. По предположению, функция U является простой в каждой точке границы, так что $J\neq 0$ в P.

Преобразования $T(P)$ образуют, таким образом, семейство преобразований, непрерывно изменяющихся при непрерывном изменении точки P на (B). В начальной точке P для каждого преобразования $J\neq 0$. Область (B) изменения точки P замкнута и J изменяется непрерывно при непрерывном изменении (x, y) и P. Поэтому существует постоянное число r_0, столь малое, что 1) преобразование $T(P)$ является взаимно однозначным в замыкании круговой окрестности $N(P)$ радиуса r_0, 2) преобразование $T(P)$ имеет ограниченный, не обращающийся в нуль якобиан для точки (x, y), принадлежащей $N(P)$, и точки P, расположенной на (B), и 3) преобразование $T(P)$ и обратное ему производят преобразование линейных элементов, непрерывное и однозначное относительно параметра P, изменяющегося на (B).

Пусть, в частности, B' — граничная кривая множества (B). Докажем следующую лемму:

Лемма 15.1. *Если выполнены граничные условия B, то на расстоянии Фреше первого порядка от данной граничной кривой B' множества (B), меньшем, чем произвольно заданное положительное число ε, существует такая регулярная кривая B'', на которой выполнены граничные условия A.*

Пусть r^* — какое-нибудь положительное число, меньшее, чем радиус r_0 окрестности $N(P)$. Пусть далее

$$P_1, P_2, \ldots, P_n \tag{15.9}$$

— циклическая последовательность точек B', выбранных

таким образом, что длина части дуги B', заключенной между двумя последовательными точками P_i и P_{i+1}, не превосходит r^*. Если $U(P)=U(Q)$ для каких-нибудь двух последовательных точек P, Q последовательности (15.9), то, произведя небольшое перемещение P и Q, мы добьемся того, чтобы $U(P) \neq U(Q)$. Соединим теперь P_i со следующей за ней точкой дугой h_i, являющейся отрезком прямой в пространстве (u, v), определенном преобразованием $T(P_i)$. Линиями уровня U в пространстве (u, v) являются параллельные прямые линии, на которых u постоянно; поэтому U строго монотонна на каждой дуге h_j. Совокупность дуг h_i циклической последовательности определит кривую B^*. Округлим углы на B^* в точках P_i малыми дугами, являющимися дугами окружностей в системе координат (u, v), определенной посредством $T(P)$; это сделать чрезвычайно просто, так как дуги h_i в системе координат (u, v) являются прямолинейными. Получившуюся регулярную кривую обозначим через B''.

Кривые B' и B'' могут быть поставлены во взаимно однозначное соответствие — для этого достаточно установить соответствие между концевыми точками дуг h_i и дуг B', заменяющих h_i, и дополнить его вдоль h_i линейной интерполяцией относительно длины дуги на B' и B^*. Гомеоморфизм между B^* и B'' может быть установлен аналогично и определит гомеоморфизм между B' и B''.

Кривая B'' зависит от выбора r^*, первоначального сдвига (если он производился) точек P_i, от положения их на B_i и от округления углов B^*. Если r^* взято достаточно малым и расстояния между последовательными точками надлежаще малы, то получившаяся кривая B'' окажется отстоящей от B' на расстоянии Фреше́

первого порядка, не большем наперед заданного числа. Во всяком случае, это ясно для соответствующих частей дуг B' и B'' в локальной координатной системе (u, v); в (x, y)-плоскости это следует из способа преобразования линейных элементов, осуществляемого $T(P_i)$.

§ 16. Вектор-индекс I граничных значений

Мы предполагаем выполненными граничные условия B. *Вектор-индекс* I_i будет определен для каждой граничной кривой B_i. Вектор-индекс I всей границы понимается как сумма индексов I_i по всем граничным кривым.

Под *входящим покрытием*[1]) w кривой B_i будет пониматься конечное множество таких замкнутых частей дуги B_i, которые: 1) не содержат точек B_i с нормально выходящим градиентом g функции U, 2) содержат все точки B_i, в которых градиент g является нормально входящим, и 3) внутренние точки различных частей w не связаны.

Некоторые из граничных кривых B_i могут целиком входить в w. Множество w может быть пустым, если, например, не имеется входящих нормальных градиентов. При условиях B основания входящих нормальных градиентов образуют замкнутое множество, отстоящее на положительном расстоянии от множества оснований выходящих нормальных градиентов. Отсюда следует, что при граничных условиях B всегда существует входящее покрытие w кривой B_i.

---

[1]) Чтобы позаботиться о частном случае, когда каждый градиент является входящим на границе B_i, мы должны допустить все B_i в качестве возможных дуг w.

Пусть g — градиент U в точке s, принадлежащей B_i. Обозначим через g_s вектор-проекцию g на касательную к B_i в точке s. Пусть h — какая-нибудь дуга входящего покрытия w. Концевую точку s дуги h мы назовем *тангенциально входящей относительно* h, если g_s направлен внутрь h; в противном случае s назовем *тангенциально выходящей относительно* h. Заметим, что при граничных условиях B вектор g_s никогда не обращается в нуль в концевой точке дуги h, принадлежащей w, так как в такой точке градиент никогда не перпендикулярен к B_i.

Вектор-индекс[1]) I_i функции U на B_i мы определим как разность между числом тангенциально входящих концевых точек дуг w и числом дуг w, обладающих концевыми точками. Если же дуга w совпадает с B_i, то мы полагаем I_i равным нулю.

Докажем сначала лемму:

Лемма 16.1. *Вектор-индекс I_i функции U на B_i не зависит от выбора входящего покрытия B_i.*

Пусть будут w_1 и w_2 — два каких-либо входящих покрытия кривой B_i. Через w мы обозначим входящее покрытие, множество точек которого совпадает с $w_1 + w_2$, а множество нульмерных симплексов (т. е. концевых точек дуг) является суммой нульмерных симплексов w_1 и w_2. Тогда w_1 или w_2 может быть получено из w конечным числом следующих операций:

1) устранением дуги w, не содержащей нормального входящего градиента;

2) устранением двух совпадающих концевых точек.

Операция 1) не изменяет вектор-индекса кривой B_i, так как (если дуга отлична от B_i) одна из концевых

[1]) Обобщение этого вектор-индекса, называемое *альтернативной характеристикой*, было определено Морсом для n-мерных векторных полей. (См. Morse [3].)

точек является тангенциально-входящей, а другая — тангенциально-выходящей. Вектор-индекс устраняемой дуги равен, таким образом, $1-1=0$. Устранение из w целой дуги B_i также не вызывает изменения*) I_i. Операция 2) не изменяет вектор-индекса кривой B_i, так как удаляемая концевая точка обязательно является тангенциально-входящей относительно одной из примыкающих частей дуги и тангенциально-выходящей относительно другой из них.

Этим заканчивается доказательство леммы.

Лемма 16.2. *Вектор-индекс I_i граничной дуги B_i равен вектор-индексу каждой простой регулярной кривой B_i', отстоящей от B_i на достаточно малом положительном расстоянии Фреше́* первого *порядка* ε *и заменяющей B_i в качестве граничной кривой.*

Пусть T — такой гомеоморфизм между B_i и B_i', при котором соответствующие элементы удалены не более чем на 2ε. Если ε достаточно мало, то образ входящего покрытия B_i определит на B_i' входящее покрытие, в котором сохраняется тангенциально-входящий или тангенциально-выходящий характер концевых точек дуг.

Тогда лемма непосредственно следует из определения вектор-индекса граничной кривой.

Лемма 16.3. *При граничных условиях* C[1])

$$I_i=s_i-m_i,$$

где I_i — вектор-индекс B_i, s_i — число входящих точек относительного максимума U_i и m_i — число входящих точек относительного минимума U_i.

---

*) Ибо по определению вектор-индекс такой дуги равен 0. (*Прим. ред.*)

[1]) Или обобщенных граничных условиях C.

Пусть h — дуга входящего покрытия B_i. Если h имеет концевые точки, то возможны следующие три случая *):

Случай а). Обе концевые точки являются тангенциально-входящими относительно h.

Случай б). Обе концевые точки являются тангенциально-выходящими относительно h.

Случай в). Одна из концевых точек является тангенциально-входящей, а другая тангенциально-выходящей относительно h.

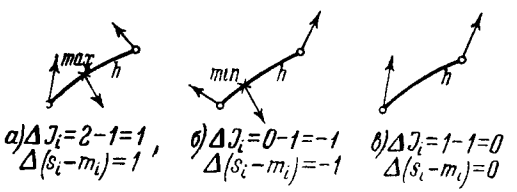


Рис. 11

В случае а) I_i получает привзнос, равный 2, от концевых точек h и —1 от самой кривой h. Итоговый привзнос равен 1. В этом случае U_i возрастает при входе в h с каждого из ее концов. Следовательно, число точек относительного максимума U^i на B_i превосходит число точек относительного минимума на 1. Все эти экстремальные точки являются входящими **). Следовательно, ясно, что привзнос h в $s_i - m_i$ равен 1, т. е. равен привзносу h в I_i. В случае б) h сообщает привзнос, равный —1 как в $s_i - m_i$, так и в I_i. В случае в) h дает привзнос 0 как в $s_i - m_i$, так и в I_i.

*) Мы иллюстрируем их рис. 11. На нем изображены дуги h, стрелки изображают градиенты, × отмечены экстремальные точки (они берутся в минимально возможном числе). ΔI_i и $\Delta(s_i - m_i)$ обозначают привзносы соответствующих величин от дуги h. (*Прим. ред.*)

**) Так как по определению дуга входящего покрытия не содержит нормально выходящих градиентов. (*Прим. ред.*)

В частном случае, когда h совпадает с B_i, каждая точка экстремума U является входящей*) и $s_i - m_i = I_i = 0$.

Теперь можно доказать основную теорему этого параграфа:

Теорема 16.1. *Если окрестность границы* (B) *допускает координаты* (u', v'), *в которых удовлетворяются граничные условия* B, *и если* I *есть вектор-индекс границы, определенный в этих координатах, то*

$$M - S = 2 - \nu + I.$$

Заменим каждую граничную кривую B_i граничной кривой B_i', лежащей настолько близко от B_i в смысле расстояния Фреше[1]) первого порядка, что вектор-индекс B_i равен вектор-индексу B_i'**). В соответствии с леммой 15.1 кривая B_i' может быть взята таким образом, что на B_i' будут выполнены граничные условия C. Выберем, наконец, B_i' настолько близкой к B_i, что все полюсы и седловые точки U окажутся расположенными внутри области, ограниченной кривыми B_i'. Из леммы 16.3 следует, что на B_i'

$$s_i - m_i = I_i \quad (i = 1, 2, \ldots, \nu). \tag{16.1}$$

Но в соответствии с теоремой 14.1

$$M - S = 2 - \nu + \sum_{i=1}^{\nu} (s_i - m_i). \tag{16.2}$$

Теорема 16.1 вытекает из (16.1) и (16.2).

---

*) По определению входящего покрытия; кроме того, число точек минимума и максимума совпадает, ибо B_i — замкнутая дуга. (*Прим. ред.*)

[1]) Расстояние, вектор-индексы и граничные условия (см. дальше) берутся относительно пространства координат (u', v').

**) См. лемму 16.2. (*Прим. ред.*)

Пример. Рассмотрим функцию

$$U(x, y)=x^2-y^2$$

в круге $|z| \leqslant 1$. В граничных точках $(\pm 1,0)$ градиенты являются нормально выходящими, а в граничных точках $(0, \pm 1)$ — нормально входящими. Мы введем входящее покрытие границы, включающее все граничные точки,

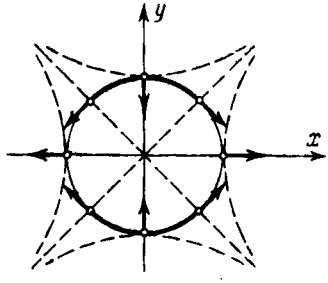


Рис. 12

в которых $y^2 \geqslant x^2$, и состоящее из двух дуг. Их концевые точки являются тангенциально-выходящими, так что вектор-индекс границы равен -2 *).

Таким образом,

$$-S=2-\nu+I=1-2=-1.$$

§ 17. Вектор-индекс I как степень отображения на окружность

Докажем следующую теорему:

Теорема 17.1. *Если B_i — регулярная граничная кривая, в окрестности которой удовлетворяются граничные условия B, то при прохождении точкой s кривой B_i в положительном направлении каждая*

*) На рис. 12 пунктиром изображены линии уровня U, стрелками — градиенты, жирными линиями — дуги, составляющие входящее покрытие. (*Прим. ред.*)

непрерывная ветвь угла $\theta(s)$, *образованного в точке* s *внутренней нормалью с градиентом, возрастает на* $2\pi I_i$, *где* I_i *есть вектор-индекс* B_i.

Замечание. Это изменение $\theta(s)$ называется *степенью отображения* B_i на единичную окружность, которое реализует функция $\theta(s)$. Мы не использовали это понятие для определения I по следующим причинам. Во-первых, как было видно в предыдущем параграфе, величина I, определенная как *вектор-индекс*, непосредственно связывает привзнос экстремальных точек граничных значений с прежними численными выражениями I. Во-вторых, обобщение вектор-индекса на n-мерный вектор привзносов не может быть непосредственно сведено к степени отображения так, как это сделано в теореме 17.1 для $n=2$. Наконец, что наиболее важно, вектор-индекс, определенный как в предыдущем параграфе, может быть определен в относительных терминах, если не существует нормали и градиента к B_i. Предположение, что функция U проста, заменяется при этом предположением, что кривые уровня, будучи продолженными через границу, не самопересекаются вблизи границы.

Концепция входящих и выходящих градиентов может быть целесообразно выражена в терминах возрастания или убывания U или U_i с соответствующим дополнительным ограничением, наложенным на границу области. Обобщенный вектор-индекс получает тогда вид интеграла.

Доказательство теоремы. Ни степень отображения, определенная посредством $\theta(s)$, ни I_i не изменяются, если заменить кривую B_i, как это сделано в § 15, достаточно близкой к B_i в смысле расстояния Фреше́ первого порядка регулярной кривой B_i', на кото-

рой удовлетворяются как условия B, так и условия A *). На построенной таким образом B_i' градиент совпадает с внутренней нормалью только во входящих точках экстремума $U_i(s)$ **). В этих точках соответствующая ветвь $\theta(s)$ меняет знак. Мы можем выбрать $s=0$ таким образом, что $\theta(0) \not\equiv 0 \pmod{2\pi}$. При возрастании s, $\theta(s) \equiv 0 \pmod{2\pi}$ только в конечном числе точек B_i'. В дальнейшем доказательстве теоремы используется следующая лемма:

Лемма 17.1. *Пусть k — произвольная дуга входящего покрытия B_i и точка s проходит k в положительном направлении. Разность между числом точек, в которых $\theta(s)$ проходит через 0 возрастая, и числом точек, в которых $\theta(s)$ проходит через 0 убывая, совпадает с привзносом в I_i от дуги k. При этом значения сравниваются по модулю 2π и считается $-\pi < \theta \leqslant \pi$.*

Если $k=B_i'$, то ее привзнос в I_i равен нулю ***), и лемма, очевидно, верна. В других случаях лемма вытекает из следующих утверждений ****):

1) На дуге k никогда $\theta(s) \equiv \pi \pmod{2\pi}$.

2) Если начальная точка k является тангенциально-входящей, то $\theta(s)$ заключена между 0 и $-\pi \pmod{2\pi}$.

3) Если конечная точка h является тангенциально-входящей, то $\theta(s)$ заключена между 0 и $\pi \pmod{2\pi}$.

---

*) См. лемму 15.1. (*Прим. ред.*)

**) Действительно, если в некоторой точке B' градиент U совпадает с нормалью, то в ней B' касается линии уровня U и эта точка является точкой экстремума (входящего, ибо нормаль — внутренняя). В силу условия A таких точек может быть лишь конечное число. (*Прим. ред.*)

***) Но и разность между числом точек, упомянутых в лемме, также равна 0. (*Прим. ред.*)

****) Утверждение 1) следует из определения входящих дуг, остальные утверждения мы иллюстрируем рис. 13. (*Прим. ред.*)

4) Если начальная точка k является тангенциально-выходящей, то $\theta(s)$ заключена между 0 и $\pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

5) Если конечная точка k является тангенциально-выходящей, то $\theta(s)$ заключена между 0 и $-\pi(\mathrm{mod}\ 2\pi)$.

Могут встретиться случаи, в которых сочетаются условия следующих утверждений: 2) и 3), 2) и 5), 3) и 4), 4) и 5).

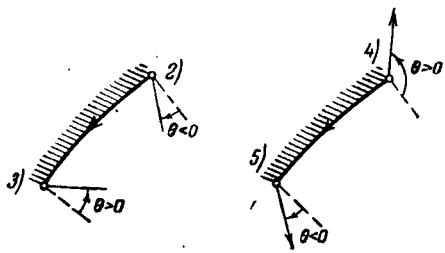


Рис. 13

Если, например, имеет место 2) и 3), то $\theta(s)$ должна, возрастая, проходить через $0(\mathrm{mod}\ 2\pi)$, когда s возрастает вдоль k. С другой стороны, дуга k и ее концевые точки дают в этом случае привзнос в I_l, равный $2-1=$ $=1$. Таким образом, в этом случае лемма имеет место.

Другие случаи аналогичны этому. Лемма и теорема доказаны.

Пусть g: $u=u(s)$, $v=v(s)$ — регулярная, ориентированная замкнутая кривая (u, v)-плоскости, не проходящая через начало координат; параметр s — длина дуги вдоль $g\,(0 \leqslant s \leqslant \sigma)$. Пусть далее N — окрестность g, принадлежащая положительной стороне g. Напомним, что положительная сторона g содержит точки, в которые проектируется внутренняя нормаль. Эта нормаль получается вращением положительной касательной на угол 90°. Мы не предполагаем, что кривая g является простой. Если g имеет кратные точки, то ясно, что N

надо рассматривать в виде римановой поверхности, прилегающей к g. С этой целью точки g и соответствующие точки N будут рассматриваться как различные, если они связаны с различными значениями параметра s $(0 \leqslant s \leqslant \sigma)$. Рассмотрим функцию

$$u^2 + v^2 = U(u, v).$$

Пусть I — вектор-индекс g относительно заданной в $\bar{N}$ функции $U(u, v)$, определенный с помощью входящих покрытий g.

Имеет место

Лемма 17.2. *Пусть N — окрестность регулярной замкнутой кривой g, расположенная с положительной*[1]) *стороны g. Если I — вектор-индекс функции $u^2 + v^2$, вычисленный на g относительно $\bar{N}$, q — порядок g относительно начала координат и p — угловой*[2]) *порядок g, то $I = q - p$.*

Здесь применимо доказательство теоремы 17.1. Направление градиента $u^2 + v^2$ совпадает с направлением радиус-вектора, ведущего из начала координат к кривой g, так что градиент при обходе его основанием кривой g производит q круговых оборотов. Касательная к g имеет то же самое число оборотов, что и внутренняя (или внешняя) нормаль. Лемма следует из теоремы 17.1, распространенной на настоящий случай.

---

[1]) Мы обращаем внимание на этот факт потому, что внутреннее преобразование f, являющееся локально взаимно однозначным в окрестности (B), переводит положительную сторону границы B_i в положительную же сторону каждого регулярного образа g_i кривой B_i. Это следует из того, что ориентация образа g_i кривой B_i при отображении f совпадает с ориентацией B_i.

[2]) См. § 18 — определения.

Глава III

ВНУТРЕННИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ

§ 18. Локально простые кривые

Мы будем допускать теперь в качестве образов границы непрерывные и локально простые образы окружности g, координаты точек которых

$$x(t), \quad y(t) \tag{18.1}$$

— функции углового параметра t. Условие локальной простоты означает существование столь малой положительной постоянной ε, что каждая частичная дуга h дуги g является простой, если для нее $|\Delta t| < \varepsilon$. Пусть $d(\varepsilon)$ — минимум диаметров множества частичных дуг g, для которых $|\Delta t| \geqslant \varepsilon$. Ясно, что $d(\varepsilon)$ является положительным числом. Следовательно, для каждой частичной дуги h кривой g, диаметр которой меньше $d(\varepsilon)$, будет $|\Delta t| < \varepsilon$, так что h является простой. Назовем *нормой локальной простоты* кривой g всякое такое постоянное положительное число ε_1, что каждая частичная дуга дуги g диаметра, меньшего ε_1, является простой.

Множество локально простых кривых, допускающих одну и ту же норму ε_1, будет называться *равномерно локально простым.*

Положим

$$z = x(t) + iy(t).$$

Пусть $D(t)$ — непрерывная положительная функция[1]) t,

---

[1]) Мы предполагаем, что $D(t)$, $x(t)$ и $y(t)$ обладают периодом 2π относительно t.

не превосходящая $\frac{\pi}{2}$ и такая, что каждая частичная дуга кривой g, для которой

$$t_0 \geqslant t \geqslant t_0 - D(t_0),$$

является простой. При возрастании t от 0 до 2π каждая непрерывная ветвь многозначной функции

$$\operatorname{Arg}\{z(t) - z[t - D(t)]\} \tag{18.2}$$

изменится на величину $2p\pi$, где p — целое число. При этом предполагается, что при возрастании t кривая g проходится в положительном направлении.

Ясно, что вышеуказанное целое число p не зависит от того, как определена функция $D(t)$, если только она удовлетворяет ранее высказанному условию. Действительно, если заданы две функции $D_0(t)$ и $D_1(t)$, то можно ввести деформацию

$$D(u, t) = uD_1(t) + (1-u)D_0(t), \quad (0 \leqslant u \leqslant 1)$$

где величина u возрастает от 0 до 1. Имеем

$$D(0, t) = D_0(t), \quad D(1, t) = D_1(t).$$

Для промежуточных значений u $D(u, t)$ лежит между $D_0(t)$ и $D_1(t)$ и также является допустимой, если допустимы $D_0(t)$ и $D_1(t)$. Если в (18.2) $D(t)$ заменить функцией $D(u, t)$, то величина угла в (18.2), выбранная соответствующим образом, становится непрерывной функцией переменных t и u. Отсюда следует, что целое число p не зависит от u и, таким образом, не зависит от функций $D(t)$, подчиненных прежним условиям.

Число p мы назовем *угловым порядком* кривой g. Если кривая g регулярна, то $2\pi p$ равно углу поворота

касательной при обходе g в положительном направлении.

Семейство замкнутых локально простых кривых

$$z=f(t, a)=x(t, a)+iy(t, a)$$
$$(0 \leqslant t \leqslant 2\pi, \quad a_1 \leqslant a \leqslant a_2) . \tag{18.3}$$

будет называться *допустимой деформацией*, если $f(t, a)$ есть непрерывная функция переменных (t, a), а кривые семейства являются равномерно локально простыми.

Кривая $z=f(t, a_1)$ посредством этой деформации допустимо деформируется в кривую $z=f(t, a_2)$. При достаточно малом положительном ε можно положить $D(t) \equiv \varepsilon$ для всех кривых семейства. Тогда угол (18.2) будет непрерывно зависеть от параметра a и, следовательно, угловой порядок p при деформации будет оставаться постоянным.

Угловой порядок p положительно ориентированной жордановой кривой равен 1. Для той же кривой, проходимой n раз в положительном направлении, $p=n$ и при ее n-кратном обходе в отрицательном направлении $p=-n$. Кривая, имеющая вид восьмерки, обладает угловым порядком 0 при обходе в любом направлении. Вскоре мы увидим, что любые две локально простые кривые, обладающие равными угловыми порядками, могут быть допустимо деформированы одна в другую.

Установим для этого следующую лемму:

Лемма 18.1. *Каждая кривая множества S равномерно локально простых кривых, достаточно близкая (в смысле Фреше́) к жордановой кривой g, является простой.*

Если бы лемма была неверна, то существовала последовательность g_n кривых из S, сходящаяся в смысле Фреше́ к g и такая, что кратная точка P_n кривой g_n при

неограниченном возрастании n стремилась бы к точке P, принадлежащей g. Допустим, что каждая частичная дуга кривой из S, диаметр которой не превосходит ε, является простой. Пусть h — дуга кривой g диаметра, меньшего $\frac{\varepsilon}{2}$, для которой P есть внутренняя точка. Тогда для каждого достаточно большого n имелась бы частичная дуга h_n кривой g_n диаметра, меньшего ε, настолько близкая к h в смысле Фреше́, что дуга $g_n - h_n$ отстояла бы от P на положительном расстоянии. Такая дуга h_n является простой и для достаточно больших n содержит точку P_n, так как в противном случае предельная точка последовательности P_n была бы отличной от точки P. Но при достаточно больших n P_n не может быть кратной точкой g_n, принадлежащей h_n, так как для точки n дуга h_n проста и $g_n - h_n$ отстоит от P на положительном расстоянии. Полученное противоречие доказывает лемму.

§ 19. Внутренние преобразования

Мы будем рассматривать преобразования $w=f(z)$, отображающие область $\bar{G}$ в w-плоскость. Эти преобразования будут внутренними (исключая полюсы) в окрестности каждой точки G и непрерывными в точках (B). Образ граничной кривой B_i обозначим через g_i. Будем допускать еще, что кривые g_i не проходят через точку $w=0$.

Введем два рода граничных условий*):

I. *При граничном условии* I *преобразование* $f(z)$ *является взаимно однозначным в некоторой окрестности (относительно* $\bar{G}$*) каждой точки* (B).

Точку z_0, образ которой w_0 является точкой ветвления, мы будем называть прообразом точки ветвления.

*) Граничное условие II см. в § 22. (*Прим. ред.*)

Такая точка называется *первичной*, если она не является ни нулем, ни полюсом для $f(z)$. Прообразы точек ветвления, являющиеся нулями или полюсами $f(z)$, называются *вторичными*.

Мы будем изучать $f(z)$, исследуя псевдогармоническую функцию

$$U=\ln|f(z)|.$$

Нули и полюсы функции $f(z)$ являются логарифмическими полюсами функции U. Функция U непрерывна в точках (B), так как $f(z)$ не обращается в нуль и бесконечность на границе. Мы будем пользоваться следующими обозначениями:

$n(0)$ — число нулей $f(z)$ в G;
$n(\infty)$ — число полюсов $f(z)$ в G;
μ — число прообразов точек ветвления $f(z)$ в G;
M — число логарифмических полюсов U в G;
S — число седловых точек U в G.

Полюсы, нули, прообразы точек ветвления и седловые точки будем считать столько раз, какова их кратность, а логарифмические полюсы считаются без учета кратностей.

Лемма 19.1.

$$n(0)+n(\infty)-\mu=M-S.$$

Очевидно, число M равно числу нулей и полюсов $f(z)$, каждый из которых считается один раз, а S — числу первичных прообразов точек ветвления, считаемых с их кратностью. Число R вторичных прообразов точек ветвления, считаемых их кратностью, равно сумме порядков нулей и полюсов, уменьшенной на 1 для каждого нуля и полюса, т. е. уменьшенной в целом на M. Таким образом,

$$R=n(0)+n(\infty)-M.$$

Общее число прообразов точек ветвления равно тогда

$$R+S=n(0)+n(\infty)-M+S.$$

Так как это число по определению равно μ, то лемма доказана.

Следующая лемма будет доказана в § 28.

Лемма 19.2. *Пусть k — произвольная замкнутая локально простая кривая. Существует сходящаяся к k в смысле Фреше́ последовательность регулярных, замкнутых, равномерно локально простых кривых k_n, обладающих тем же угловым порядком, что и k.*

Теперь докажем основную теорему:

Теорема 19.1. *Если $w=f(z)$ — внутреннее преобразование, удовлетворяющее граничному условию* I, *то*

$$n(0)+n(\infty)-\mu=2-\nu+q-p,$$

где q и p — соответственно сумма порядков по отношению к $w=0$ и сумма угловых порядков образов граничных кривых при этом отображении.

Доказательство проводится чрезвычайно просто в случае, когда образы g_i кривых B_i являются регулярными. Кривые g_i лежат в плоскости (u, v). В терминах координат (u, v) имеем

$$U(x, y)=\ln|w|=\frac{1}{2}\ln(u^2+v^2)=V(u, v),$$

где функция V определена этим равенством. Таким образом, U удовлетворяет обобщенным граничным условиям B (см. § 14) и, значит, локально $V(u, v)$ является простой функцией класса C', а границы g_i — регулярными. Пусть I — сумма вектор-индексов $V(u, v)$ по всем образам границы g_i. Из теоремы 16.1 и леммы 17.2 следует, что

$$M-S=2-\nu+I=2-\nu+q-p.$$

При этом несущественно, имеют ли кривые g_i кратные точки, или не имеют их. Вообще говоря, образы границы не являются регулярными, но граничные кривые B_i могут быть допустимо деформированы так, чтобы это условие регулярности имело место.

Упростим сначала задачу, предположив, что кривые B_i являются окружностями. Это не вызовет потери общности, так как гомеоморфное отображение G на область, ограниченную окружностями, не изменит ни свойства $f(z)$ быть внутренним преобразованием, ни значений целых чисел, встречающихся в теореме. Теорема будет оставаться верной или неверной и при замене каждой граничной окружности B_i концентрической с ней окружностью B^i, принадлежащей G и достаточно близкой к B_i. С этой целью окружности B^i должны быть взяты настолько близкими к B_i, чтобы:

а) новые граничные кривые B^i не пересекались;

б) подобласть G^* области G, ограниченная окружностями B^i, содержала все нули, полюсы и прообразы точек ветвления $f(z)$;

в) преобразование $f(z)$ являлось взаимно однозначным в некоторой окрестности (относительно $\overline{G}$) каждой точки $\overline{G}$, расположенной на B^i или между B^i и B_i.

Если B^i удовлетворяют этим условиям, то деформации B_i в B^i по концентрическим окружностям соответствует с помощью отображения $w=f(z)$ „допустимая“ деформация образа g_i кривой B_i в образ g^i кривой B^i. Кривая g^i будет обладать тем же порядком и угловым порядком, что и кривая g_i. Таким образом, характеристические целые числа, участвующие в теореме, не изменяются. В соответствии с этим достаточно доказать теорему для измененной области G^*.

В силу леммы 19.2 в плоскости координат (u, v) существует регулярная замкнутая кривая g_i', как угодно близкая в смысле Фреше́ к кривой g^i, угловой порядок которой совпадает с угловым порядком g^i и норма локальной простоты ε которой не зависит от близости кривой g_i' к g^i. Кривая g_i' может быть взята так, чтобы кривая B_i' — ее прообраз — обладала независящей от близости к B_i нормой локальной простоты, если только B_i' расположена в замыкании окрестности B_i, в которой преобразование $w=f(z)$ является локально взаимно однозначным.

В соответствии с леммой 18.1, кривая B_i' должна быть простой, если она достаточно близка к B_i. Поэтому, предполагая кривые B_i' достаточно близкими к B_i, мы можем считать выполненными на B_i' условия а), б) и в) (исключая, конечно, условие, что кривые G_i' являются окружностями). В новой области, ограниченной кривыми B_i', характеристические целые числа теоремы будут тогда теми же самыми, что и в первоначальной. Но мы видели, что теорема имеет место для регулярных граничных образов. Следовательно, теорема верна и вообще.

§ 20. Первые приложения и дальнейшее развитие результатов

Пример 1. Основное соотношение

$$n(0)+n(\infty)-\mu=2-\nu+q-p \qquad (20.1)$$

при граничных условиях I просто иллюстрируется на примере функции z^m $(m>1)$, определенной в круге $|z|\leqslant 1$. В этом случае целые числа соотношения (20.1) дают

$$m+0-(m-1)=2-1+m-m.$$

Пример 2. Богатый материал для примеров, иллюстрирующих соотношение (20.1), дают односвязные области R римановой поверхности S, расположенной над w-плоскостью, с простой (на S) граничной кривой g. Область $\bar{R}$ может быть отображена взаимно однозначно и непрерывно на единичный круг $|z| \leqslant 1$ посредством внутреннего отображения $w=f(z)$. Если кривая g не проходит через точку ветвления поверхности S, то ее проекция g_1 на w-плоскость является локально простой кривой, так как отображение f является локально взаимно однозначным в окрестности границы $|z|=1$.

В качестве примера рассмотрим двулистную риманову поверхность с точками ветвления $w=0$ и $w=2$. Предположим, что S получена обычным соединением листов S_1 и S_2, разрезанных вдоль действительной оси от точки $w=0$ до точки $w=2$. Бесконечно удаленная точка обладает однолистной окрестностью как на S_1, так и на S_2. Пространство S односвязно, так как S_1 и S_2 гомеоморфны полусферам с круговыми границами, соответствующими разрезам. Две такие полусферы, соединенные вдоль круговой границы, дают, очевидно, сферу, гомеоморфную S.

Каждая замкнутая кривая g на S делит S на две области, гомеоморфные кругу. Возьмем в качестве g кривую, проекцией которой на плоскость w является восьмерка с узлом в точке $w=1$ и петлями, окружающими соответственно точки $w=0$ и $w=2$ (рис. 14, на котором S_1 и S_2 изображены раздельно).

Область R, ограниченную кривой g, можно выбрать двумя способами. Мы выбрали область, заштрихованную на рис. 14. На листе S_1 она содержит часть плоскости S_1, расположенную вне петли, а на листе S_2 — внутренность петли. Область R однолистна всюду, кроме внутренней части петли, окружающей $w=0$; в частности,

R — однолистна в окрестности бесконечно удаленной точки. Если $w=f(z)$ отображает $|z|\leqslant 1$ на R, то целые числа соотношения (20.1) приводят к соотношению

$$n(0)+n(\infty)-\mu=1+q-p;$$

$$2+1-1=1+1-0.$$

Пример 3. Разделим поверхность S предыдущего примера на две области окружностью, принадлежащей S_1,

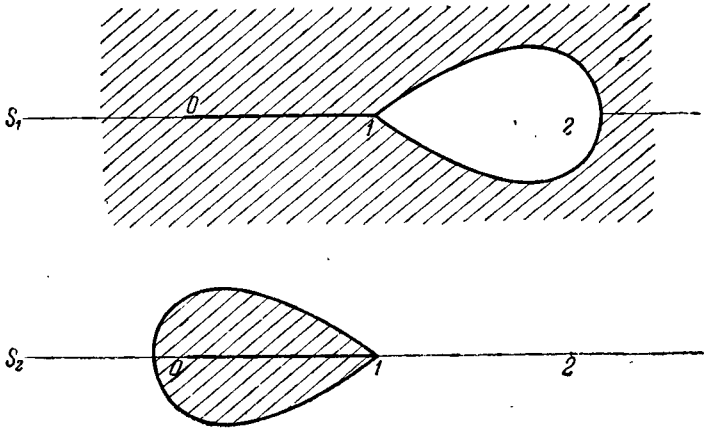


Рис. 14

центр которой находится в начале координат и радиус равен 3.

Пусть в качестве R взята область, содержащая точку $w=0$ на S_1. Тогда R содержит всю плоскость S_2 и подстановка значений в (20.1) приводит к равенству

$$2+1-2=1+1-1.$$

Пусть a — произвольная точка, не принадлежащая образу (g) границы (B). Обозначим через $g(a)$ общий порядок точки a относительно (g). Тогда соотношение (20.1) может быть обобщено следующим образом:

Теорема 20.1. *Если выполнены граничные условия* I, *то для произвольных точек* a *и* b, *не принадлежащих образу* (g) *границы* (B), *имеем*

$$n(a)+n(b)-\mu=2-\nu+q(a)+q(b)-p. \quad (20.2)$$

В частности, точка a *может совпадать с точкой* b. *Если одна из точек* a *и* b *или обе точки оказываются бесконечно удаленными, то соотношение* (20.2) *имеет место при условии, что* $q(\infty)$ *равно* 0.

Так как каждая конечная точка $w=a$, не принадлежащая (g), может быть взята в качестве начала координат, то из (20.1) следует, что

$$n(a)+n(\infty)-\mu=2-\nu+q(a)-p. \quad (20.3)$$

При достаточно большом значении $|a|$

$$n(a)=n(\infty), \quad q(a)=0.$$

Следовательно, из (20.3) вытекает соотношение

$$2n(\infty)-\mu=2-\nu-p. \quad (20.4)$$

Умножая соотношение (20.3) на 2 и вычитая из полученного результата (20.4), находим

$$2n(a)=\mu+(2-\nu)+2q(a)-p \quad (20.5)$$

для каждой точки a, не принадлежащей (g). Если сложить соотношение (20.5) с таким же соотношением, записанным для точки b вместо a, получим (20.2).

Теорема доказана.

Если в соотношении (20.2) положить $a=b$, оно переходит в соотношение (20.5), если же положить в нем $a=b=\infty$, получим (20.4). Вычитая соотношение (20.5), написанное для a из выражения (20.5), написанного для b, получим так называемое *соотношение порядка*:

$$n(a)-n(b)=q(a)-q(b), \quad (20.6)$$

для $b=\infty$ обращающееся в

$$n(a)-n(\infty)=q(a). \tag{20.7}$$

Уравнение (20.2) содержит каждое из установленных соотношений в качестве частного случая.

Соотношение порядка (20.6) было установлено при граничных условиях I. Оно может быть непосредственно обобщено следующим образом:

Теорема 20.2. *Соотношение порядка*

$$n(a)-n(b)=q(a)-q(b) \tag{20.8}$$

остается в силе, если граничное условие I *заменено условием непрерывности* $f(z)$ *на границе* (B) *и если точки* $w=a$ *и* $w=b$ *не принадлежат* (g). *В качестве граничных кривых могут быть взяты жордановы кривые.*

При доказательстве теоремы мы можем предположить, что граничные кривые (B) являются окружностями. Заменим каждую из окружностей B_i близкой к ней концентрической окружностью B^i, не содержащей внутри ограниченной ею области точек ветвления. Эта замена всегда возможна, так как точки ветвления являются изолированными точками G.

Обозначая через G^* область, ограниченную кривыми B^i, мы будем также предполагать, что точки $w=a$ и $w=b$ принадлежат области G^*. Это всегда будет иметь место, если кривые B^i взяты достаточно близкими к B_i.

Теорема 20.2, записанная для области G^*, в которой выполнено граничное условие I, имеет вид

$$n(a)-n(b)=q_1(a)-q_1(b), \tag{20.9}$$

где q_1 есть общий порядок относительно образов g^i измененной границы. Но

$$q_1(a)=q(a), \quad q_1(b)=q(b), \tag{20.10}$$

так как новые граничные окружности B^i с помощью семейства концентрических окружностей могут быть деформированы в первоначальные граничные кривые B_i, а образы g^i окружностей B^i будут при этом непрерывно деформироваться в образы g_i кривых B_i, не проходя через точки $w=a$ и $w=b$.

Соотношение порядка известно в теории мероморфных функций. В частном случае, когда нет полюсов, соотношение (20.2) обращается в равенство $n(a)=n(b)$ (о соотношениях порядка в более общих условиях см. Куратовский, стр. 358). Соотношение порядка позволяет получить обобщение известной теоремы Руше*):

Теорема Руше. *Если $f(z)$ и $g(z)$ аналитичны внутри замкнутой области, ограниченной замкнутым контуром C и на C*

$$0<|g(z)|<|f(z)|, \tag{20.11}$$

то $f(z)$ и $f(z)+g(z)$ имеют внутри области одно и то же число нулей.

В приведенной ниже теореме 20.3, обобщающей эту теорему, функции предполагаются только непрерывными на границе и реализующими внутреннее отображение области. Условие (20.11), требующее, чтобы $g(z)$ была более близкой к началу координат $w=0$, чем $f(z)$, не является безусловно необходимым. Например, z и iz имеют одно и то же число нулей внутри окружности $|z|=1$, но не удовлетворяют (20.11).

*) См. А. И. Маркушевич, Теория аналитических функций, М. — Л., 1950, стр. 317. (*Прим. ред.*)

Приведем теорему, представляющую собой обобщение теоремы Руше́.

Теорема 20.3. *Если для каждого действительного* $\lambda\,(0 \leqslant \lambda \leqslant 1)$ *функция* $f(z)+\lambda g(z)$ *реализует внутреннее преобразование* G, *непрерывное на* (B), *и если на* (B)

$$f(z)+\lambda g(z) \neq 0, \tag{20.12}$$

то разность $n(0)-n(\infty)$ *будет одной и той же для* $f(z)$ *и для* $f(z)+g(z)$.

Условие (20.12) выполняется, если выполнено (20.11); действительно, из (20.11) следует

$$|\lambda g(z)| \leqslant |g(z)|+|f(z)|,$$

что совпадает с (20.12).

При изменении λ от 0 до 1 образы границ при отображении $w=f+\lambda g$ непрерывно изменяются, никогда не пересекая точку $w=0$. Следовательно, порядок $q(0)$ границы не зависит от λ. Таким образом,

$$n(0)-n(\infty)=q(0)$$

как для $f(z)$, так и для $f(z)+g(z)$. Теорема Руше́ вытекает из этого соотношения в случае, если $n(\infty)=0$ и $\nu=1$. Как известно, основная теорема алгебры является тривиальным следствием теоремы Руше́.

Нам придется пользоваться следующей теоремой существования:

Теорема 20.4[1]). *Пусть* g — *произвольная ориентированная регулярная аналитическая замкнутая кривая (вообще, не простая). Существует функция* $f(z)$, *мероморфная в области* $G=[|z| \leqslant 1]$ *и непрерывная на ее границе* $B=[|z|=1]$, *отображающая* B *на* g, *так что на* B $f'(z) \neq 0$.

---

[1]) Эта теорема представляет собой неопубликованный результат Морса и Гейнса.

Пусть g задана в виде функции ее длины дуги s. Не уменьшая общности, можно предположить, что вся длина дуги равна 2π. Кривая g может быть представлена в виде

$$w=u(s)+iv(s)=F(s) \quad (F'(s)\neq 0),$$

где $u(s)$ и $v(s)$ — действительные аналитические функции действительного переменного s, обладающие периодом 2π. Функция w может быть аналитически продолжена на некоторую окрестность сегмента $(0\leqslant s\leqslant 2\pi)$ действительной оси плоскости комплексного переменного s.

Произведя преобразование $\eta=e^{is}$, положим

$$F(s)=H(\eta).$$

Полученная таким образом функция $H(\eta)$ является аналитической функцией от η в каждой точке окружности $|\eta|=1$ и локально взаимно однозначно отображает эту окружность на g. Функция $H(\eta)$ может быть представлена рядом Лорана

$$H(\eta)=\sum_{-\infty}^{\infty} a_n\eta^n$$

в кольце, содержащем окружность $|\eta|=1$ внутри. Положим

$$H_m(\eta)=\sum_{-m}^{m} a_n\eta^n.$$

Если m превосходит достаточно большое целое число N, то кривой g, принадлежащей w-плоскости, при отображении

$$w=H_m(\eta)$$

в η-плоскости будет соответствовать некоторая регулярная простая аналитическая кривая B_m. Пусть $\eta_m(z)$ $(m>N)$ производит конформное отображение внутрен-

ности B во внутренность кривой B_m. Это отображение может быть конформно (без особенностей) продолжено на границу B круга $|z| \leqslant 1$. В результате между точками B_m и B будет установлено взаимно однозначное и непрерывное соответствие. При любом $m > N$ функция

$$w = H_m[\eta_m(z)]$$

отображает кривую B, принадлежащую z-плоскости, в кривую g, расположенную в w-плоскости, и удовлетворяет условиям, наложенным на искомую функцию.

В доказательстве предыдущей теоремы не делалось попытки учитывать числа нулей и полюсов указанного в ней преобразования f. Соотношения (20.4) и (20.5) являются, конечно, необходимыми для каждой точки a, не принадлежащей g. Числа $n(a)$, $n(\infty)$ и μ никогда не являются отрицательными, и это налагает дальнейшие условия на целые числа, удовлетворяющие (20.4) и (20.5). Проблема определения степени произвола в задании g и μ с сохранением в силе теоремы представляет значительный интерес.

Топологический инвариант. Пусть g — произвольная локально простая кривая, расположенная в конечной w-плоскости. Предположим, что w-сфера подвергнута сохраняющему ориентацию гомеоморфизму T, переводящему g в другую кривую g' конечной w-плоскости. Пусть далее a—произвольная точка w-сферы, не расположенная на g, a' — образ a при гомеоморфизме T, $q(a)$ и $q'(a')$ — соответственно порядки a и a' относительно g и g' и p и p' — угловые порядки g и g'. Тогда имеет место теорема:

Теорема 20.5. *При гомеоморфизме T w-сферы, преобразующем g в кривую g', расположенную в конечной плоскости,*

$$2q(a) - p = 2q'(a') - p', \tag{20.13}$$

где a' — образ a при этом гомеоморфизме, порядки (p, q) взяты по отношению к g, а порядки (p', q') — по отношению к g'.

Вскоре мы докажем (см. § 18), что каждая локально простая кривая g может быть допустимо деформирована в регулярную аналитическую кривую, так что при этой деформации промежуточные кривые являются произвольно близкими в смысле Фреше́ к кривой g. В течение такой деформации порядки, участвующие в (20.13), остаются неизменными при условии, конечно, что деформация производится в окрестности g, не содержащей точки a. Поэтому достаточно доказать теорему для регулярных аналитических кривых g.

В силу теоремы 20.4 каждой такой регулярной аналитической кривой g можно отнести мероморфную в $\overline{G}=[|z|\leqslant 1]$ и непрерывную на границе $B=[|z|=1]$ функцию, отображающую B на g. Пусть T имеет вид $w'=F(w)$. При отображении T функция $f(z)$ переходит в функцию $F[f(z)]$, снова реализующую внутреннее отображение области G. Если числа n' и μ' отнесены к функции $F[f(z)]$, то

$$n'(a')=n(a), \quad \mu'=\mu. \tag{20.14}$$

Соотношение (20.5), написанное для функции $F[f(z)]$, примет вид

$$2n'(a')=\mu'+1+2q'(a')-p'. \tag{20.15}$$

Равенство (20.15) вместе с (20.14) и (20.5) приводит к (20.13).

Таким образом, целое число $2q(a)-p$ является топологическим инвариантом локально простой кривой g при гомеоморфизме T w-сферы. Нетрудно дать прямое доказательство этого факта, не зависящее от теории внутренних преобразований.

Соотношение (20.13) в некоторых случаях может быть видоизменено. В частности, пусть c — прообраз ∞ при гомеоморфизме T. Заменяя в (20.13) a на c, замечаем, что

$$q'(c')=q'(\infty)=0$$

и (20.13) принимает тогда вид

$$p=p'+2q(c). \tag{20.16}$$

Соотношение (20.16) вместе с (20.13) дает следующее предложение:

Следствие. *Если $T(c)=\infty$ и a — произвольная точка, не расположенная на g, то*

$$p=p'+2q(c), \quad q(a)=q'(a')+q(c)^{*)}. \tag{20.17}$$

Соотношение (20.17) представляет собой линейное преобразование пары (p, q) в пару (p', q') с коэффициентами преобразования, зависящими только от T. Наконец, для получения еще одного частного случая допустим, что гомеоморфизм T преобразует конечную плоскость в конечную плоскость. Тогда $c=\infty$ и $q(c)=0$, так что (20.17) принимает вид

$$p=p', \quad q=q'.$$

Пример. Возьмем в качестве T преобразование $w'=\frac{1}{w}$ и в качестве g—положительно ориентированную единичную окружность $|z|=1$. Обозначая через g' такую же отрицательно ориентированную окружность, получим

$$p=1, \quad p'=-1, \quad c=0, \quad q(c)=1.$$

Если $a=0$, то $a'=\infty$ и $q'(a')=0$, $q(a)=1$. Соотношение (20.17) удовлетворяется.

*) Для получения второго соотношения (20.17) найдем из (20.13) $q(a)=q'(a')+\frac{p-p'}{2}$ и подставим сюда $p-p'$ из (20.16). (*Прим. ред.*)

Глава IV

ОБЩАЯ ТЕОРЕМА О ПОРЯДКАХ

§ 21. Пример

Соотношение

$$2n(a)-\mu=2-\nu+2q(a)-p \tag{21.1}$$

было установлено при условиях, что внутреннее преобразование f является локально взаимно однозначным в окрестности[1]) каждой точки границы (B) и что точка a не принадлежит образу (g) границы. В этом параграфе предположение, что f является локально взаимно однозначным в окрестности каждой точки (B), будет заменено предположением, что образы границы являются локально простыми. В связи с этой заменой для величины μ в (21.1) должна быть дана новая интерпретация.

Соотношение (21.1) было найдено автором. Стоиловым [2] было установлено соотношение подобного рода в частном случае единственной граничной кривой B, причем в качестве образа B допускалась замкнутая жорданова кривая g, взаимно однозначно соответствующая B при отображении f, и f предполагалось внутренним в $\overline{G}$. Стоилов установил, что

$$n(0)+n(\infty)-\mu=1. \tag{21.2}$$

Как показывает доказательство Стоилова, он, повидимому, предполагает и другие условия, наложенные на

---

[1]) Относительно $\overline{G}$.

поведение f вблизи границы. Без таких дополнительных условий, как мы увидим на примере, теорема может оказаться неверной. Первое впечатление таково, что μ можно считать равным числу прообразов точек ветвления, расположенных на B и сосчитанных в обычном порядке. Как мы вскоре убедимся, это, однако, неверно. Более серьезное возражение в случае функции, мероморфной в G и непрерывной в $\overline{G}$, состоит в том, что термин „точка ветвления" для границы B или утрачивает смысл, или нуждается в широком предварительном анализе.

Предположение Стоилова о том, что g является взаимно однозначным и непрерывным образом B при отображении f, может быть заменено предположением, что g является локально простым образом B (это будет показано в дальнейшем), для которого

$$q(0)=p.$$

Соотношение (21.2) остается тогда в силе, если только величина μ интерпретирована соответствующим образом.

Контрпример. Рассмотрим преобразование

$$f(z)=\frac{1+3z^2}{z(3+z^2)} \quad (|z|<1). \tag{21.3}$$

Внутри единичного круга f обращается в нуль только в двух точках

$$z=\pm\frac{1}{\sqrt{3}}$$

и имеет полюс только в точке $z=0$. Пусть $\overline{z}$ — точка, сопряженная z.

Если $|z|=1$, то $z\overline{z}=1$ и

$$|f|=|\overline{z}^2 f|=\left|\frac{\overline{z}^2+3}{z^2+3}\right|=1,$$

так что образ окружности $|z|=1$ принадлежит окружности $|w|=1$. Остается доказать, что окружность $|w|=1$ является взаимно однозначным образом окружности $|z|=1$. С этой целью заметим, что

$$f'(z)=\frac{3(1-z^2)^2}{z^2(3+z^2)^2}.$$

Таким образом, f' имеет двойной нуль как в точке $z=1$, так и в точке $z=-1$. Но $z=-1$ и $z=1$ — неподвижные точки f. Следовательно, открытые полуокружности $|z|=1$, для которых y соответственно положительно или отрицательно, являются или взаимно однозначными образами самих себя, или каждая из них является взаимно однозначным образом другой. Но точки $z=\pm i$ являются неподвижными точками f, т. е. отображение окружности $|z|=1$ на окружность $|w|=1$ взаимно однозначно.

Таким образом, преобразование f является внутренним в $[|z|\leqslant 1]$ и отображает взаимно однозначно окружность $|z|=1$ на окружность $|w|=1$. Для точек z, принадлежащих кругу $|z|<1$,

$$n(0)=2,\ n(\infty)=1,\ \mu=0$$

и соотношение (21.2) не удовлетворено. Для точек z, принадлежащих $|z|\leqslant 1$, при обычной интерпретации μ

$$n(0)=2,\ n(\infty)=1,\ \mu=4,$$

и соотношение (21.2) снова не удовлетворяется.

§ 22. Локально простые образы границы

Пусть f — допустимое преобразование $\overline{G}$, непрерывное в $\overline{G}$ и внутреннее в G. Пусть далее B_t — жорданова кривая, ограничивающая G, — задана как гомеоморфный образ окружности C с угловым параметром t.

Введем

Граничное условие II. *Образ g_i кривой B_i при отображении f является непрерывным и локально взаимно однозначным образом окружности C.*

При этом недостаточно, чтобы g_i „покрывала" локально простую кривую. Граничное условие II требует, чтобы соответствие, устанавливаемое f между каждой частичной дугой дуги B_i, для которой $|\Delta t|$ достаточно мало, и ее образом — дугой, принадлежащей g_i, было взаимно однозначным. Граничное условие II не было бы выполнено, если бы при возрастании t на некотором интервале образ точки t, принадлежащий дуге g_i, оставался неподвижным, или если бы этот образ точки t перемещался по некоторой дуге вначале в одном направлении, а затем, начиная с некоторого момента, проходил бы эту дугу в противоположном направлении. Например, g_i может совпадать с окружностью, проходимой один или большее число раз в одном и том же или в различных направлениях, и все же не удовлетворять граничному условию II.

Граничное условие I (§ 19) требует, чтобы каждая точка P границы (B) обладала окрестностью N относительно $\overline{G}$, w-образ которой при отображении f взаимно однозначно соответствует N; иначе оно требует, чтобы функция f являлась локально взаимно однозначной в каждой граничной точке P. Граничное условие I касается окрестности P относительно $\overline{G}$, тогда как граничное условие II касается окрестности P относительно (B). Как граничное условие I, так и граничное условие II требуют, чтобы функция $w=f(z)$ была взаимно однозначной в окрестности, к которой они относятся. Граничное условие I содержит граничное условие II, обратное же неверно.

Здесь мы введем два определения, которые будут

использованы в следующем параграфе. Напомним, что областью Жордана называется область, ограниченная жордановой кривой g. Положительным направлением кривой g в w-плоскости называется такое направление, относительно которого порядок каждой внутренней точки равен 1. О простой ориентированной дуге b, принадлежащей жордановой кривой g, будем говорить, что она имеет жорданову область *слева* или *справа* от себя соответственно тому, совпадает или не совпадает направление дуги b с положительным направлением g.

Пусть W — $(m+1)$-кратно разветвленный элемент, каждый лист которого покрывает жорданову окрестность N точки w_0, принадлежащей w-плоскости. Пусть, далее, b — простая ориентированная дуга, проходящая через w_0 и разбивающая N на две области, одна из которых N_1 лежит справа от b. Связную подобласть W, полученную из W удалением однолистно покрытого экземпляра N_1, назовем ***неполным разветвленным элементом кратности m***. В качестве значения m допускается и 0 — полукруг, рассматриваемый как окрестность точки w_0, совпадающей с серединой его диаметра, является неполным разветвленным элементом кратности 0. При преобразовании

$$w - w_0 = re^{i\theta} \tag{22.1}$$

непрерывный образ множества пар (r, θ), для которых

$$0 \leqslant \theta \leqslant (2m+1)\pi \quad (0 \leqslant r \leqslant r_0,\ r_0 > 0), \tag{22.2}$$

представляется как неполный разветвленный элемент E_m кратности m. Ясно, что любые два неполных разветвленных элемента с точкой ветвления w_0 и кратности m допускают гомеоморфизм, при котором w_0 соответствует

самой себе, и точки, покрывающие одну и ту же точку w, соответствуют точкам, обладающим тем же свойством. Фактически можно было бы определить неполный разветвленный элемент кратности m как непрерывный образ E_m при гомеоморфизме, переводящем различные листы в различные листы и точки, покрывающие одну и ту же точку,— в точки такого же характера.

В некоторых случаях кратности неполных разветвленных элементов могут быть определены формально. Допустим, что $f(z)$ аналитична в точке z_0, принадлежащей (B), и что z_0 является нулем n-го порядка для $f(z)-f(z_0)$. Если две регулярные дуги (B), пересекающиеся в z_0, образуют в z_0 угол A и если

$$2\pi m < nA < 2\pi(m+1),$$

то m является кратностью неполно разветвленного элемента в точке $f(z_0)$. Если граница регулярна в z_0 и $n=2r+1$, то $m=r$. Вообще же кратность m не может быть определена таким формальным процессом и является a priori характеристикой внутреннего преобразования.

Пример. В примере предыдущего параграфа точки $z=\pm 1$ соответствуют неполным разветвленным элементам кратности 1. Порядок нулей $f(z)-f(z_0)$ в точках $z=\pm 1$ равен двум.

§ 23. Существование неполных разветвленных элементов

Мы покажем, что предположение, согласно которому образы границы g_i являются простыми, содержит в себе условие „локальной взаимной однозначности“ (см. § 22) в каждой точке (B), с возможным исключением конечного числа точек P границы (B) и что при

отображении f образ некоторой окрестности относительно $\overline{G}$ каждой из таких исключительных точек представляет собой *неполный разветвленный элемент.* Справедливость или ложность этой теоремы, очевидно, не зависит от некоторого гомеоморфизма F w-сферы, сохраняющего ориентацию и оставляющего неподвижной точку ∞, ибо с ним $f(z)$ составляет новое внутреннее преобразование $F[f(z)]$. Возможность использования таких дополнительных гомеоморфизмов и дает преимущество топологическим методам доказательства перед другими методами.

Следующая лемма указывает специальный вид гомеоморфизмов:

Лемма 23.1. *Для каждой простой дуги k существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм F w-сферы, оставляющий неподвижной бесконечно удаленную точку и отображающий k в прямолинейный отрезок.*

Для получения гомеоморфизма F соединим концевые точки k простой дугой таким образом, чтобы получилась жорданова кривая g, ограничивающая жорданову область R. Пусть замыкание $\overline{R}$ отображено посредством гомеоморфизма[1]) H на прямоугольник Q так, что k переходит в сторону k_2 прямоугольника.

Пусть дополнение CR области R на w-сфере отображено посредством гомеоморфизма H' на $\overline{CQ}$ таким образом, что H и H' совпадают на g (см. лемму 6.1). Предположим, кроме того, что H' оставляет точку ∞ неподвижной. Соединение отображений H и H' определяет гомеоморфизм F, существование которого утверждается в лемме.

В этом параграфе в w-плоскости будут использо-

---

[1]) Сохраняющего ориентацию.

ваны полярные координаты (r, θ) с полюсом в точке $w=0$. Допустим, что образы границы g_i при отображении $w=f(z)$ локально просты. Рассмотрим (замкнутую) дугу h границы B столь малого диаметра, что ее образом при отображении f является простая дуга h^f, взаимно однозначно соответствующая h. Воспользуемся предыдущей леммой, согласно которой h^f можно предположить прямолинейным отрезком.

Анализ будет упрощен, если предположить, что h^f расположена на луче $\theta=\theta_0$ и не проходит через $w=0$.

Начнем с доказательства следующей леммы:

Лемма 23.2. *Прообразы точек ветвления функции f^{-1}, принадлежащие области G, не могут иметь предельными внутренние точки граничной дуги h; точки h, в которых отображение f не является локально взаимно однозначным, образуют изолированное множество.*

Образ h^f дуги h при отображении f принадлежит лучу $\theta=\theta_0$, ибо псевдогармоническая функция

$$U(x, y)=\ln|f(z)|=\ln r$$

не может иметь экстремума во внутренних точках h. В силу леммы 7.1 седловые точки U в $\overline{G}$ не могут накапливаться у какой-нибудь внутренней точки h. Следовательно, прообразы точек ветвления f^{-1} в области G не могут накапливаться у внутренней точки h. Остается доказать, что точки h, в которых f не является локально взаимно однозначным, изолированы.

Пусть P — любая внутренняя точка h, в которой оканчивается только одна кривая уровня X (рис. 15). Точки h, не относящиеся к этому типу, изолированы в h (см. § 7).

Докажем, что f локально взаимно однозначна в P.

Положим $U(P)=c$. Дуга X предполагается столь малой, чтобы каждая ее точка была обыкновенной точкой функции U. Пусть далее Y есть U-траектория, проходящая через концевую точку X, не расположен-

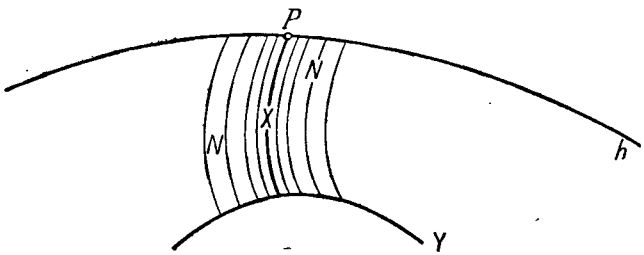


Рис. 15

ную на h, и такая, что значения U на X принадлежат интервалу

$$c-\varepsilon<U<c+\varepsilon \quad (\varepsilon>0).$$

Если ε достаточно мало, то, как мы видели в § 7, через каждую точку Y проходит единственная кривая уровня (на ней постоянно r), ведущая в некоторую точку h. Множество таких кривых уровня покрывает достаточно малую окрестность N точки P относительно G таким образом, что через каждую точку $\overline{N}$ проходит единственная кривая множества. На каждой такой кривой уровня преобразование f является взаимно однозначным. Следовательно, в $\overline{N}$ не может существовать первичных прообразов точек ветвления.

Отображение f является взаимно однозначным во всех точках z, принадлежащих $\overline{N}$. Действительно, каждой дуге уровня из $\overline{N}$ в w-плоскости соответствует дуга окружности, на которой r постоянно, причем дуги в $\overline{N}$,

выходящие из различных точек Y, расположены на разных уровнях и также соответствуют дугам окружностей различных радиусов r. Как было замечено ранее, соответствие между отдельной дугой уровня, расположенной в $\overline{N}$, и ее образом является взаимно однозначным. Таким образом, f взаимно однозначно в $\overline{N}$.

Лемма доказана.

Функция, обратная $w=f(z)$, непрерывна в точках образа N.

Это следует из хорошо известной теоремы, утверждающей, что преобразование, обратное к взаимно однозначному и непрерывному преобразованию замкнутого ограниченного плоского множества, является непрерывным *).

Внутренние точки P дуги h по отношению к функции U, определенной в $\overline{G}$, являются или обыкновенными, или седловыми. В первом случае, как мы это только что видели, $f(z)$ является локально взаимно однозначным в P. Следующая лемма дополняет анализ „в малом“:

Лемма 23.3. *Каждая седловая точка U в $\overline{G}$, внутренняя к h, обладает окрестностью (относительно $\overline{G}$), римановым образом которой является неполный разветвленный элемент.*

Рассмотрим случай седловой точки P функции U. Пусть $U=c$ в P и пусть S — (открытый) сектор канонической окрестности P относительно U. Соображение, использованное в доказательстве леммы 23.2, достаточно для того, чтобы доказать существование окрестности V точки P относительно $\overline{S}$, точки которой, не расположенные на уровне c, покрыты множеством дуг уровня так, что через каждую точку S из V проходит

*) См. Ф. Хаусдорф, Теория множеств, М.—Л., 1937 ,гл. VI, теорема XVIII. (*Прим. ред.*)

только одна дуга уровня и различные дуги принадлежат различным уровням U. Пусть тогда V^f — образ V при отображении f. Рассмотрим отдельно случай, когда S — сектор граничного типа, и случай, когда S — обычного типа (§ 7). Положим $(r, \theta)=(r_0, \theta_0)$ в P.

Случай A. Сектор S обычного типа. Допустим, что S расположен ниже c или, в терминах r, — ниже r_0. В случае A имеется две дуги a и b границы S, расположенные на уровне r_0, с концевыми точками в P. При движении z к P по дуге a и далее от P по дуге b $f(z)$ пробегает дугу окружности $|w|=r_0$, приближаясь к $f(P)$ с одной стороны и удаляясь от $f(P)$ в другую сторону. Точка $f(z)$ не может приближаться к точке P и удаляться от нее по одной и той же дуге окружности $|w|=r_0$, ибо тогда непрерывная ветвь

$$\theta(z)=\operatorname{Arg} f(z),$$

рассматриваемая как функция z, на дуге (a, b) достигает экстремума в точке P. В этом случае принадлежащие V дуги уровня, в которых r достаточно близко к r_0, но которые расположены ниже r_0, тоже обладали бы подобным экстремумом θ, т. е. соответствие между этими кривыми уровня, принадлежащими V и расположенными ниже r_0, и их образами не было бы взаимно однозначным для всех r, достаточно близких к r_0. Это противоречит тому, что U не имеет критических точек в S, и, следовательно, тому, что отображение f локально взаимно однозначно в S.

Таким образом, свойство кривых уровня, принадлежащих V и расположенных ниже r_0 — находиться во взаимно однозначном соответствии с их образами,— распространяется и на кривую уровня r_0, принадлежащую границе V. Следовательно, существует окрестность V

точки P относительно $\overline{S}$, образ которой V^f представим в виде

$$\begin{gathered} r_0 \geqslant r > r_0 - \varepsilon, \\ \theta_0 + \varepsilon > \theta > \theta_0 - \varepsilon. \end{gathered} \tag{23.1}$$

При достаточно малом положительном ε f устанавливает гомеоморфизм между $\overline{V}$ и $\overline{V}^f$.

С другой стороны, сектор S может оказаться расположенным выше r_0. Тогда V^f представим в виде

$$\begin{gathered} r_0 + \varepsilon > r \geqslant r_0, \\ \theta_0 + \varepsilon > \theta > \theta_0 - \varepsilon \end{gathered} \tag{23.2}$$

и f осуществляет гомеоморфизм между $\overline{V}$ и $\overline{V}^f$.

Случай Б. Сектор S граничного типа. Напомним, что образ дуги h при отображении f — дуга h^f принадлежит лучу $\theta = \theta_0$. Пусть на h^f установлено положительное направление, соответствующее положительному направлению h. Пусть k_1 и k_2 — две дуги h^f, на которые h^f разделяется точкой $f(P)$, и k_1 предшествует k_2 при положительном обходе h^f.

Случай Б распадается на следующие четыре подслучая:

I	S расположен	выше r_0, k_1	принадлежит	$\overline{S}^f$;
II	S „	ниже r_0, k_1	„	$\overline{S}^f$;
III	S „	выше r_0, k_2	„	$\overline{S}^f$;
IV	S „	ниже r_0, k_2	„	$\overline{S}^f$.

Анализ, подобный тому, который был проведен в случае A, приводит к следующему результату: для достаточно малого положительного постоянного ε образ V^f окрестности V точки P относительно $\overline{S}$ может быть представлен соответственно в виде

I $$r_0+\varepsilon>r\geqslant r_0,\quad \theta_0\geqslant\varepsilon>\theta_0-\varepsilon;$$

II $$r_0\geqslant r>r_0-\varepsilon,\quad \theta_0+\varepsilon>\theta\geqslant\theta_0;$$

III $$r_0+\varepsilon>r\geqslant r_0,\quad \theta_0+\varepsilon>\theta\geqslant\theta_0;$$

IV $$r_0\geqslant r>r_0-\varepsilon,\quad \theta_0\geqslant\theta>\theta_0-\varepsilon.$$

Очевидно, что в случаях I и IV $\theta_0\geqslant\theta$, тогда как в случаях II и III $\theta_0\leqslant\theta$. Рассмотрим, например, типичный случай I. В этом случае на границе V^f дуга k_1 следует за дугой k', на которой $r=r_0$. Так как отображение f сохраняет ориентацию и дуга h имеет V слева от себя, то и дуга k_1, взятая в положительном направлении, имеет V^f слева от себя (см. § 22). Так как в точках V^f $r\geqslant r_0$, то k' будет иметь V^f слева от себя, если только θ убывает вдоль k' от θ_0. Следовательно, в представлении V^f для случая I имеет место неравенство $\theta_0\geqslant\theta$.

Если соединить последовательно по движению часовой стрелки окрестности V точки P относительно замкнутых секторов S, составляющих каноническую окрестность P, то получится окрестность N точки P относительно $\overline{G}$. Точно такое же объединение образов V^f этих окрестностей V даст образ N^f окрестности N при отображении f. В таком объединении каждая окрестность V^f, кроме последней, может быть соединена со следующей за ней по дуге окружности $|w|=r_0$ с концевой точкой в $f(P)$. Образы V^f последовательных окрестностей V располагаются на противоположных сторонах окружности $|w|=r_0$; образы V^f первой и по-

следней окрестностей V окажутся также расположенными на противоположных сторонах этой окружности, так как h^f — прямолинейный отрезок, проходящий через $f(P)$ и расположенный на луче $\theta=\theta_0$. Угол в точке $f(P)$ образа V^f в случае A равен π и в случае $Б$ равен $\pi/2$. Общий угол N^f в точке $f(P)$ равен $(2m+1)\pi$, т. е. образ N^f окрестности N можно рассматривать как неполный разветвленный элемент кратности m.

Лемма доказана.

§ 24. Теорема о порядке и угловом порядке

Леммы предыдущего параграфа приложимы к каждой дуге h границы (B), если только диаметр h настолько мал, что образом h при отображении f является простая дуга h^f, взаимно однозначно соответствующая h. Вся граница (B) может быть покрыта конечным числом дуг h таким образом, чтобы каждая точка (B) оказалась внутренней к одной из дуг покрытия. Это позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема 24.1. *Если образы (g) граничных кривых (B) при внутреннем преобразовании f являются локально простыми, то f локально взаимно однозначно относительно $\overline{G}$ во всех точках границы (B), за исключением конечного числа, и каждая исключительная точка (B) обладает окрестностью относительно $\overline{G}$, римановым образом которой при отображении f является неполный разветвленный элемент.*

Пусть $F(w)$ — сохраняющий ориентацию гомеоморфизм w-сферы с неподвижной точкой $w=\infty$. Назовем функцию $f_1(z)=F[f(z)]$ *w-эквивалентной* f. Если f определена в G и образы граничных кривых при отображении f локально просты, то образы граничных

кривых при отображении f_1, определенном в G, также являются локально простыми. Общий угловой порядок p этих образов, как мы видели в (20.18), будет одинаковым для f и f_1. Мы воспользуемся этим результатом для доказательства следующей важной теоремы *):

Теорема 24.2. *Если образы* (g) *границы локально просты и не проходят через точку* $w=a$, *то*

$$2n(a)=2-\nu+\mu+2q(a)-p, \tag{24.1}$$

где величины $n(a)$, $q(a)$, ν *и* p *сохраняют прежний смысл, а величина* μ *равна сумме кратностей элементов ветвления функции* f^{-1}, *вычисленных в случае неполных разветвленных элементов так же, как это сделано в* § 22.

Пусть P_k $(k=1,2,\ldots,n)$ — прообразы на (B) граничных точек ветвления, кратности которых m_k положительны. Преобразование f является локально взаимно однозначным относительно $\overline{G}$ в каждой точке границы (B), отличной от P_k. Пусть μ' равно сумме кратностей принадлежащих G первичных прообразов точек ветвления. Заменим каждую кривую B_i из (B) новой жордановой кривой, ориентированной так же, как B_i, которая составлена из частей B_i, не содержащих точек P_k и дуг h_k, расположенных в G и представляющих собой обходные пути около точек P_k.

Обходный путь h_k является простой дугой в $\overline{G}$, заменяющей дугу из (B), которая содержит P_k. Уточним построение h_k. Пусть P_k — данная точка и $f_k(z)$ — внутреннее преобразование, w-эквивалентное f, при котором в w-плоскости образом произвольно малой про-

*) Теорема была впервые изложена в лекциях, которые послужили основой этой книги. *(Прим. ред.)*

стой граничной дуги B, проходящей через P_k, является прямолинейный отрезок b_k. Существование f_k следует из леммы 23.1. Существует окрестность N_k точки P_k относительно $\overline{G}$, риманов образ которой при отображении f_k представляет собой неполный разветвленный элемент кратности m_k. Положим $w_k = f_k(P_k)$. Возьмем обходный путь h_k около P_k в G так, чтобы его образом была окружность с центром в w_k, стягивающая угол в w_k, равный $(2m_k+1)\pi$. При этом отсчет угла начинается от точки b_k, предшествующей w_k, и заканчивается в точке b_k, следующей за w_k.

Обходные пути h_k могут быть взяты настолько близкими к P_k, что в области G^*, ограниченной новыми кривыми, числа $n(a)$, $q(a)$ и μ будут для функции f теми же, что и в области G. Функция f на новых граничных кривых удовлетворяет граничному условию I. Пусть p' — общий угловой порядок образа новых граничных кривых при отображении f. Так как f подчинена в $\overline{G}^*$ граничному условию I, то

$$2n(a) = 2 - \nu + \mu' + 2q(a) - p'. \tag{24.2}$$

Докажем, что

$$p = p' + \mu - \mu'. \tag{24.3}$$

Это равносильно доказательству того, что

$$p = p' + \sum m_k. \tag{24.4}$$

Из вида образа h_k при отображении f_k следует, что при замене границы B обходными путями h_k угловой порядок граничных кривых уменьшится на m_k; из инвариантного характера углового порядка при нашем w-гомеоморфизме, как показывает (20.17), очевидно,

вытекает, что угловой порядок граничных образов при отображении f уменьшится точно таким же образом. Границы B можно изменить последовательным введением обходных путей h_k. Суммируя изменение угловых порядков, получим (24.4). Следовательно, (24.3) имеет место и (24.1) получается сложением (24.2) и (24.3).

Доказательство теоремы закончено.

Пример. Функция $f(z)$, данная выражением (21.3), имеет две граничные точки ветвления с прообразами $z=\pm 1$. Кратности соответствующих неполных элементов ветвления равны 1; соотношение

$$n(0)+n(\infty)-\mu=1$$

в этом случае перепишется в виде

$$2+1-2=1,$$

т. е. оказывается выполненным.

§ 25. Обобщение теоремы Радо

Теорема Радо утверждает, что не существует $(1, m)$-значного конформного отображения $w=f(z)$ области G в себя, если $m>1$ и число граничных кривых $\nu>1$. Точки ветвления не исключены. При таком отображении, если бы оно существовало, для каждой точки $w=a$ области G было бы $n(a)=m$. В предположении существования такой функции f, следуя Радо, легко доказать возможность продолжения f на границу (B), при котором f окажется непрерывной функцией на (B), отображающей каждую кривую B_i на некоторую кривую B_j из (B), покрытую m раз. Угловой порядок m раз покрытой внешней граничной кривой G равен m. Остальные граничные кривые покрыты m раз, но в противоположном относительно их внутренности направлении; следовательно, угловые порядки этих кривых, рассма-

триваемых как образы (g) граничных кривых, все равны между собой и равны $-m$. Таким образом, общий угловой порядок (g) равен $(2-\nu)m$. Наше обобщение теоремы Радо ограничивается случаем, когда $\nu > 2$, и состоит в следующем:

Теорема 25.1. *Если число граничных кривых превосходит* 2, $n(\infty)=0$ *и образы граничных кривых* (g) *локально просты, то при* $m > 1$ *общий угловой порядок образов граничных кривых не может быть равным* $(2-\nu)m$ *ни для какого внутреннего преобразования, определенного в* G.

Здесь не делается предположений относительно величин $n(a)$. Образы граничных кривых могут самопересекаться и каждый из них может пересекать любой другой образ. В случае, когда (B) состоит из окружностей и f аналитична в G, не предполагается, что f аналитична на (B).

Воспользуемся теоремой 24.2, согласно которой

$$2n(a)=\mu+2-\nu+2q(a)-p$$

для точки a, не принадлежащей (g). Полагая $a=\infty$, $p=(2-\nu)m$, получим

$$\mu=(\nu-2)(1-m). \tag{25.1}$$

Но при $\nu > 2$ и $m > 1$ это условие невозможно, так как $\mu \geqslant 0$.

Теорема доказана.

Если $\nu=2$, то из (25.1) вытекает, что $\mu=0$. Для $\nu=2$ и $m > 1$ $(1, m)$-значное внутреннее преобразование кольца в себя, очевидно, возможно. Здесь выступает различие между теорией внутренних преобразований и теорией мероморфных функций, так как Радо доказал, что не существует $(1, m)$-значного конформного преобразования кольца в себя для $m > 1$. Радо

устанавливает это, продолжая преобразование на всю плоскость посредством инверсий относительно граничных окружностей и приходит к тому результату, что единственным $(1, m)$-значным конформным отображением кольца в себя является вращение.

Это показывает, что для $\nu > 2$ теорема Радо является по существу топологической, в то время как для $\nu = 2$ она относится собственно к теории конформных отображений.

Интересную теорему приводит Титчмарш (стр. 122). Кривая, на которой модуль $|f(z)|$ равен положительной константе, называется линией уровня $f(z)$.

Теорема 25.2. *Если f аналитична внутри и на границе области, ограниченной жордановой кривой уровня C, и имеет n нулей внутри C, то f' имеет $n-1$ нулей внутри C и нигде на C не обращается в нуль.*

Доказательство может быть дано с помощью теоремы 24.2, но значительно проще оно получается, если положить

$$U(x, y) = \ln|f(z)| \tag{25.2}$$

и воспользоваться теоремой 13.1. Значение гармонической функции U на C является максимальным, так как U обращается в отрицательную бесконечность в каждом из нулей f. В соотношении

$$M - S = 1 + I,$$

в соответствии с теоремой 13.1, $M = n$ и $I = 0$. Значит, $S = n - 1$. Таким образом, f' имеет $n - 1$ нулей внутри C.

Функция U не может иметь критической точки на линии уровня C, так как из существования такой точки вытекало бы, что функция U принимает максимальное значение на кривых уровня, пересекающих C

и отличных от C, что невозможно. Следовательно, f' нигде на C не обращается в нуль.

Приводимое ниже обобщение теоремы 25.2 носит более глубокий характер и состоит в том, что $f(z)$ предполагается не аналитической, а лишь реализующей внутреннее отображение R. Сильное условие аналитичности f на C заменено условием локальной простоты образа C при отображении f. Вывод о том, что $f' \neq 0$ на C заменен выводом о локальной взаимной однозначности f в каждой точке C. Приведем эту теорему:

Теорема 25.3. *Пусть C — жорданова кривая, ограничивающая конечную область R. Пусть $f(z)$ — внутреннее преобразование R, конечное и непрерывное в $\bar{R}$, для которого C является линией уровня; если образ C при отображении f является локально простым и f имеет в области R n нулей, то $\mu = n - 1$ и f локально взаимно однозначно в каждой точке C.*

Воспользуемся псевдогармонической функцией U, определенной (25.2), и, так же как в доказательстве теоремы 25.2, установим, что f имеет $n - 1$ прообразов точек ветвления внутри C.

Чтобы доказать, что функция f является локально взаимно однозначной в каждой точке C, воспользуемся теоремой 24.2, согласно которой

$$2n(0) = 1 + \mu + 2q(0) - p. \tag{25.3}$$

Здесь $n(0) = n = q(0)$. Образом C является круг $|w| = r$, проходимый n раз в одном и том же направлении, так как этот образ является локально простым. Таким образом, $p = n$, $\mu = n - 1$. Следовательно, не существует неполных элементов ветвления положительной кратности и преобразование f локально взаимно однозначно в каждой точке C.

Глава V

ДЕФОРМАЦИИ ЛОКАЛЬНО ПРОСТЫХ КРИВЫХ И ВНУТРЕННИХ ПРЕОБРАЗОВАНИЙ

§ 26. Предварительные замечания

Предположим, что образ g границы области G при отображении f является локально простой замкнутой кривой.

Мы видели, что порядок q (относительно точки $w=0$) и угловой порядок p кривой g являются важными топологическими инвариантами. В дальнейшем будет показано, что существуют локально простые кривые, для которых величины p и q равны произвольным целым числам.

Смысл p будет выяснен в теореме, утверждающей, что каждая локально простая кривая с угловым порядком p может быть допустимо деформирована (см. § 18) в фигуру, имеющую вид восьмерки при $p=0$ и в p раз проходимую в положительном направлении окружность C, если $p>0$. Никакие две из таких моделей не могут быть допустимо деформированы одна в другую.

Смысл пары (p, q) будет выяснен с помощью так называемых 0-деформаций. 0-*деформации* кривой g представляют собой такие допустимые деформации g, при которых ни сама кривая g, ни ее образы не проходят через начало координат O. Для каждой пары целых чисел (p, q) существует каноническая кривая $g(p, q)$, в которую может быть 0-деформирована кривая с инвариантами (p, q) и никакие две канонические кривые

$g(p, q)$, соответствующие различным парам (p, q), не могут быть 0-деформированы друг в друга.

Смысл инварианта p локально простой замкнутой кривой становится более ясным после определения произведения классов деформаций таких кривых. Доказывается, что группа G таких классов по отношению к умножению изоморфна группе I целых чисел. При этом классу деформаций из G соответствует в I целое число p, равное угловому порядку элементов класса из G. Единичный класс в G образован локально простыми кривыми, допустимо деформируемыми в кривую, имеющую вид восьмерки. Доказывается также, что группа G_0 классов 0-деформаций локально простых кривых, не проходящих через $w=0$, изоморфна аддитивной группе пар (p, q) целых чисел. Единичным классом в G_0 оказывается класс локально простых кривых, 0-деформируемых в кривую вида восьмерки, ни одна из петель которой не окружает начала координат $w=0$.

Изучение классов деформаций локально простых кривых является необходимым введением к изучению классов деформаций внутренних преобразований или мероморфных функций, обладающих заданным числом нулей, полюсов и прообразов точек ветвления в фиксированной области G. Мы еще вернемся к этой проблеме и к получаемым с ее помощью результатам. Достаточно сказать, что она приводит к наиболее существенному в современной теории мероморфных функций, включая „нормальные семейства“ Монтеля и распространение теоремы Пикара (см. Morse и Heins [2] *)). Эта глава, кроме того, содержит дальнейшее развитие теории „гомотопий“ замкнутых локально простых кривых.

---

*) См. приложение. (*Прим. ред.*)

В следующем параграфе вводится понятие μ-длины кривых, которое окажется полезным в представлении деформаций замкнутых кривых. В теоремах этого параграфа доказывается возможность допустимого представления таких деформаций при некоторых легко обозримых и, вообще говоря, реализующихся условиях, которые позволяют избежать деталей описания представлений в каждом отдельном случае.

§ 27. μ-длина кривых

Параметризация кривых посредством длины дуги оказывается непригодной в случае бесконечной длины. Кроме того, и в случае конечной длины, при изменении дуги ее длина может изменяться не непрерывно. Для устранения этого недостатка вводится специальный параметр (см. Morse [2]), который называется μ-длиной и представляет собой некоторое обобщение функции множеств, введенной Уитнеем. Определение Уитнея относится к семейству непересекающихся кривых. Настоящее обобщение свободно от этого ограничения, и в этом содержится бóльшая часть трудности (см. также Fréchet [2]).

Рассматриваемые кривые изображаются в метрическом пространстве M точками p, q, r и т. д. Расстояние между точками p и q мы обозначим через pq. Расстояние $pq=0$ тогда и только тогда, когда $p=q$, и, кроме того,

$$pq \leqslant pr+qr. \tag{27.1}$$

Равенство $pq=qp$ непосредственно следует из (27.1).

Пусть t — точка сегмента

$$(0 \leqslant t \leqslant a) \qquad (a>0)$$

и $f(p, t)$ — однозначная числовая функция переменных p и t, причем p изменяется на M и t — на $[0, a]$. Функция $f(p, t)$ называется *непрерывной* в точке (p_0, t_0), если $f(p, t)$ стремится к $f(p_0, t_0)$, как к пределу, когда p стремится к p_0 на множестве M, а t стремится к t_0[1]) на $[0, a]$. Непрерывность функции точки $\Phi(p, t) \in M$ определяется аналогично.

Непрерывный образ $p(t)$, интервала $(0, a)$ числовой оси t в точку $p(t)$ пространства M называется *кривой* или, более точно, *параметризованной кривой* (p-кривой). Будем допускать только такие p-кривые, для которых $p(t)$ *не равно постоянной ни на каком частичном интервале* $(0, a)$. Будем говорить, что

$$p = q(u) \qquad (0 \leqslant u \leqslant b)$$

определяет ту же самую кривую на M, что и $p = p(t)$, если существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм между интервалами $(0, a)$ и $(0, b)$, при котором

$$q(u) = p(t).$$

Определение μ-длины кривой. Пусть кривая h обладает представлением $p(t)$. Обозначим через T —

$$t_1 \leqslant t_2 \leqslant \ldots \leqslant t_n \leqslant \quad (n > 1) \tag{27.2}$$

— множество значений t на интервале $(0, a)$, и пусть

$$(p_1, p_2, \ldots, p_n) \tag{27.3}$$

— соответствующее допустимое множество точек $p(t)$ на M.

Рассмотрим число

$$\min_i p_i p_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1).$$

---

[1]) Точнее, когда (p, t) стремится к (p_0, t_0).

Изменяя значения t из (27.2) на интервале $(0, a)$, введем число

$$m_n(h) = \max_T \left[\min_i p_i p_{i+1}\right].$$

Следуя Уитнею, положим

$$\mu_h = \frac{m_2(h)}{2} + \frac{m_3(h)}{4} + \frac{m_4(h)}{8} + \ldots$$

Назовем μ_h общей μ-длиной кривой h. Заметим, что сумма численных коэффициентов в выражении μ_h равна 1.

Перечислим некоторые свойства $m_n(h)$ и μ_h. Пусть d — диаметр h. Тогда

а) $$m_n(h) \leqslant d \text{ и } \mu_h \leqslant d;$$

б) $m_n(h)$ *стремится к* 0, *когда* n *неограниченно возрастает*;

в) $$m_n(h) \geqslant m_{n+1}(h).$$

Утверждения а) и б) очевидны. Утверждение в) доказывается следующим образом. Последовательность $(n+1)$ точек p_i на кривой h переходит в последовательность n точек после удаления одной из вершин p_k. Так как $n > 1$, то удаляемую вершину можно выбрать так, чтобы не оказать влияния на значение

$$\min_i p_i p_{i+1} \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{27.4}$$

Отсюда следует, что максимум (27.4) при изменении n значений t_i будет не меньше максимума при соответствующем изменении $(n+1)$ значений t_i, т. е. в) имеет место.

Пусть $\mu(t)$ — μ-длина p-кривой, принадлежащей h и определенной на интервале $(0, t)$, причем $\mu(0) = 0$.

г) μ-длина $\mu(t)$ *является непрерывной функцией* t.

Если $(0, t'')$ — интервал, близкий интервалу $(0, t')$, и t_i' — последовательность n значений на $(0, t')$, то последовательность n значений t_i'' величины t на интервале $(0, t'')$ можно выбрать так, чтобы интервал $(0, t'')$ оказался разделенным точками t_i'' в тех же отношениях, что и $(0, t')$ значениями t_i'.

Таким способом может быть получена каждая допустимая последовательность n значений t_i'' величины t на $(0, t'')$ — ее можно рассматривать, как определенную посредством соответствующей последовательности значений t_i'. Таким образом, ясно, что

$$m_n(t) = \max_T [\min_i p_i p_{i+1}] \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1)$$

будет изменяться непрерывно вместе с t. Непрерывность $\mu(t)$ следует из равномерной сходимости ряда, определяющего $\mu(t)$.

д) *μ-длина является возрастающей функцией* t.

Очевидно, $\mu(t)$ никогда не убывает при возрастании t, так как каждая последовательность n значений t_i' на $(0, t')$ является также последовательностью n значений и на $(0, t'')$ для $t'' > t'$. Для доказательства того, что $\mu(t'') > \mu(t')$, установим прежде всего, что для достаточно больших n

$$m_{n+1}(h'') > m_n(h'), \tag{27.5}$$

где h' и h'' являются p-кривыми $p(t)$, относящимися соответственно к интервалам $(0, t')$ и $(0, t'')$. Не теряя общности, мы можем предположить, что

$$p(t') \neq p(t''). \tag{27.6}$$

Этого можно достичь некоторым уменьшением t'', так как если соотношение (27.5) справедливо для меньшего

значения t'', то оно справедливо и для начального, большего значения t''. Если (27.6) выполнено, то из неравенства треугольника

$$0 < p(t')p(t'') \leqslant p(t)p(t') + p(t)p(t'') \qquad (27.7)$$

следует, что правая часть (27.7), рассматриваемая как функция t на сегменте $(0 \leqslant t \leqslant t')$, имеет положительный минимум $2c$.

Добавляя к допустимому множеству n значений t'_i величины t на $(0, t')$ значение t' в качестве t''_{n+1}, если

$$p_n p(t') \geqslant c$$

и t'' в противном случае, мы получим допустимое множество $(n+1)$ значений t''_i на $(0, t'')$. В последнем случае по определению c

$$p_n p(t'') \geqslant c,$$

и в каждом из этих случаев

$$p_n p_{n+1} \geqslant c.$$

Если n достаточно велико, например $n \geqslant N$, то на h'

$$\max_T [\min_i p_i p_{i+1}] < c \quad (i = 1, 2, \ldots, n-1),$$

так что прибавление новой точки p_{n+1} на h' во всяком случае не приведет к уменьшению $\max\limits_T [\min\limits_i p_i p_{i+1}]$ $(i = 1, 2, \ldots, n > N)$. Следовательно, (27.5) выполнено.

Но для некоторых достаточно больших n

$$m_{n+1}(h') < m_n(h'), \qquad (27.7.1)$$

так как $m_n(h')$ стремится к нулю одновременно с $\frac{1}{n}$.

Сравнение (27.5) и (27.7.1) показывает, что для некоторых достаточно больших n

$$m_{n+1}(h') < m_{n+1}(h''). \tag{27.8}$$

Так как (27.8) с добавлением знака равенства справедливо для всех n, то отсюда следует, что

$$\mu(t') < \mu(t'')$$

и доказательство д) закончено.

Из г) и д) вытекает, что соответствие между допустимым параметром t и μ-длиной $\mu(t)$ является взаимно однозначным и непрерывным. Следовательно, данная кривая h допускает представление

$$p = q(\mu) = p[t(\mu)] \quad [0 \leqslant \mu \leqslant \mu(a)], \tag{27.9}$$

где $t(\mu)$ является функцией, обратной $\mu(t)$. Чтобы показать, что это представление зависит как от кривой h, так и от μ-длины, будем его записывать более подробно в форме

$$p = q(h, \mu) \quad (0 \leqslant \mu \leqslant \mu_h). \tag{27.10}$$

Непосредственно видно, что функция $q(h, \mu)$ и конечное значение μ_h не зависят от индивидуальной p-кривой, использованной для представления h.

Кривая h принадлежит некоторому классу p-кривых H, в котором представление каждой кривой может быть получено из представления другой кривой гомеоморфной заменой ее параметра. Расстояние Фреше́ HK между двумя p-кривыми h и k, соответственно классов H и K, по своему определению не зависит от допустимой замены параметра в H и K. Мы можем поэтому положить $hk = HK$, ибо определение расстояния между двумя кривыми h и k не зависит от допустимых пред-

ставлений кривых h и k соответственно классов H и K. Расстояние hk удовлетворяет соотношению

$$hk \leqslant hr + kr.$$

Кроме того,

$$hk = 0, \quad \text{если} \quad h = k.$$

Пара (h, μ), где μ принадлежит интервалу $(0, \mu_h)$, а h — пространству F с метрикой Фреше́, будет называться *допустимой*. Мы будем рассматривать $q(h, \mu)$ как функцию допустимых пар (h, μ). Первая важная теорема состоит в следующем:

Теорема 27.1. *Если h и k — кривые, для которых $hk < \varepsilon$, то*

$$|\mu_h - \mu_k| < 2\varepsilon \quad (\varepsilon > 0). \tag{27.11}$$

Для последовательности p_i на h существует допустимая последовательность n точек r_i на k такая, что

$$p_i r_i < \varepsilon \quad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Кроме того, каждая допустимая последовательность r_i на k может быть получена таким образом. Из неравенства треугольника следует, что

$$|p_i p_{i+1} - r_i r_{i+1}| < 2\varepsilon$$

и, следовательно,

$$|m_n(h) - m_n(k)| \leqslant 2\varepsilon. \tag{27.12}$$

Сумма численных коэффициентов в рядах, определяющих μ-длину, равна 1. Поэтому соотношение (27.11) вытекает из (27.12).

Следующая теорема является основной:

Теорема 27.2. *Функция точки $q(h, \mu)$ непрерывна относительно ее аргументов в области допустимых пар (h, μ).*

Докажем непрерывность $q(h, \mu)$ в точке (h_0, μ_0). Пусть ε — достаточно малая положительная константа. Установим существование положительной константы d такой, что если пара (h, μ) допустима и

$$hh_0 < d, \quad |\mu - \mu_0| < d, \tag{27.13}$$

то

$$q(h, \mu)\, q(h_0, \mu_0) < \varepsilon. \tag{27.14}$$

С этой целью подчиним величину d двум условиям:

1) Возьмем $d < \frac{\varepsilon}{2}$. Если $hh_0 < d$, то существует гомеоморфизм T_d между μ-параметризациями h и h_0, при котором расстояние между соответствующими точками меньше d. Если точка μ на h соответствует при этом гомеоморфизме точке μ_1 на h_0, то по определению T_d

$$q(h, \mu)\, q(h_0, \mu_1) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27.15}$$

2) Величина d должна быть настолько малой, чтобы для $|\mu_1 - \mu_0| < 3d$

$$q(h_0, \mu_1)\, q(h_0, \mu_0) < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{27.16}$$

Возможность удовлетворения этому условию следует из непрерывности $q(h_0, \mu)$ относительно μ.

Я утверждаю, что при таком выборе d для допустимых пар (h, μ), удовлетворяющих (27.13), имеет место (27.14). Пусть μ удовлетворяет (27.13) и пусть μ_1 на h_0 соответствует μ на h при T_d. Напомним, что

$$q(h, \mu)\, q(h_0, \mu_0) \leqslant \tag{27.17}$$

$$\leqslant q(h, \mu)\, q(h_0, \mu_1) + q(h_0, \mu_1)\, q(h_0, \mu_0).$$

В соответствии с (27.15) первый член правой части

меньше $\frac{\varepsilon}{2}$. Второй член также меньше $\frac{\varepsilon}{2}$, если только выполнено (27.16), т. е. при условии

$$|\mu_1 - \mu_0| < 3d. \tag{27.18}$$

Но в соответствии с теоремой 27.1 при гомеоморфизме T_d точка μ на h соответствует такой точке μ_1 на h_0, что

$$|\mu_1 - \mu| \leqslant 2d.$$

Следовательно, (27.18) выполнено, можно воспользоваться (27.16) и желаемое соотношение (27.14) имеет место.

Из этой теоремы, в частности, следует, что если расстояние Фреше́ $hk=0$, то $h=k$. Из теоремы 27.1 следует, что при $hk=0$, $\mu_h=\mu_k$, так что если пара (h, μ) допустима, то допустима также и пара (k, μ). Из теоремы 27.2 и условия $hk=0$ вытекает, что для каждого допустимого значения μ

$$q(h, \mu)\, q(k, \mu)=0,$$

следовательно,

$$q(h, \mu)=q(k, \mu) \quad (0 \leqslant \mu \leqslant \mu_h).$$

Таким образом, h и k обладают общей допустимой параметризацией и, следовательно, $h=k$.

Следствие. *Необходимое и достаточное условие того, чтобы $hk=0$, состоит в том, что $h=k$.*

Равенство $h=k$ выражает, естественно, совпадение двух классов p-кривых.

§ 28. Допустимые деформации локально простых кривых

Мы должны определить деформации p-кривых независимо от определения деформаций кривых (т. е. некоторых классов p-кривых). Однопараметрическое

семейство замкнутых ориентированных p-кривых вида

$$w=u+iv=f(\theta,\ t)\quad (t_0\leqslant t\leqslant t_1,\ t_0<t_1),\qquad (28.1)$$

где на каждой кривой величина t постоянна, а величина $\theta\,(0\leqslant\theta<2\pi)$ переменна и

$$f(\theta+2\pi,\ t)=f(\theta,\ t),$$

мы назовем *допустимой деформацией* p-кривої $w=f(\theta,\ t_0)$ в p-кривую $w=f(\theta,\ t_1)$, если функция $f(\theta,\ t)$ непрерывна относительно θ и t и множество p-кривых является равномерно локально простым.

Следующая лемма доказывает, что возможность деформации p-кривой класса g_0 в p-кривую класса g_1 не зависит от выбранных параметризаций g_0 и g_1.

Лемма 28.1. *Каждое из двух представлений допустимой кривой g может быть допустимо деформировано в другое.*

Предположим, что

$$w=F(\theta)\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi)\qquad (28.2)$$

— одно представление g и что после гомеоморфизма, для которого

$$\theta'=h(\theta),\quad h(\theta+2\pi)=h(\theta)+2\pi\quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

получается другое представление g:

$$w=F[h(\theta)]=H(\theta).\qquad (28.3)$$

Для каждого значения t на сегменте $0\leqslant t\leqslant 1$ равенство $\theta_1=th(\theta)+(1-t)\theta$ определяет допустимую замену параметра θ на θ_1; θ_1 возрастает вместе с θ и

$$\theta_1(\theta+2\pi)=\theta_1(\theta)+2\pi.$$

Деформация

$$w=F[th(\theta)+(1-t)\theta]$$

является допустимой и преобразует p-кривую (28.2) в p-кривую (28.3).

Поэтому допустимые деформации p-кривых законно рассматривать как допустимые деформации кривых, т. е. классов p-кривых.

Чтобы установить существование допустимой деформации кривой g_0 в кривую g_1, необходимо убедиться в существовании некоторого представления деформации вида (28.1). Предположим, например, что при деформации многоугольника непрерывным движением его вершин множество всех получающихся многоугольников оказывается равномерно локально простым, нижние грани длин сторон — положительными и соседние стороны — пересекающимися только в одной точке. Является ли полученное семейство многоугольников представимым в виде допустимой деформации? Ясно, что движение многоугольника непрерывно в смысле Фреше́. Следует ли отсюда возможность параметризации семейства в виде (28.1)? На эти вопросы отвечает теорема 28.1.

Мы *допускаем* кривые, представимые в виде $p=p(\theta)$, где $p(\theta)$ непостоянна ни на каком частичном интервале. Однопараметрическое семейство g_t таких кривых вообще не представимо в форме (28.1). Допускается возможность того, что g_t не непрерывно зависит от t. При этих условиях имеет место следующая теорема:

Теорема 28.1. *Пусть $g_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ — однопараметрическое семейство допустимых замкнутых ориентированных кривых с постоянным значением t на каждой кривой семейства. Необходимым и достаточным условием того, чтобы семейство кривых g_t допускало представление*

$$w=f(\theta, t) \quad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi, \quad 0 \leqslant t \leqslant 1),$$

в котором $f(\theta, t)$ непрерывна по t и θ и обладает периодом 2π относительно θ, является существова-

ние такой точки Q_t на g_t, что дуга g_t^*, полученная сечением g_t в точке Q, изменяется в смысле Фреше непрерывно с изменением t.

В необходимости условия убеждаемся непосредственно, полагая $Q_t = f(0, t)$.

Для доказательства достаточности условия отнесем каждую дугу g_t^* к ее μ-длине, измеренной от Q_t, и положим

$$\mu = \frac{\theta \mu_t}{2\pi},$$

где μ_t — общая μ-длина кривой g_t^*. В соответствии с теоремой 27.2 окончательное представление $f(\theta, t)$ кривых g_t будет иметь требуемый вид, по крайней мере для $0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi$. Но $f(0, t) \equiv f(2\pi, t)$, и функция $f(\theta, t)$ может быть доопределена таким образом, чтобы она имела период 2π относительно θ.

Теорема доказана.

Под *кусочно-аналитической кривой* будет подразумеваться конечная последовательность аналитических дуг. Аналитическая дуга представима в виде

$$x = x(\theta), \quad y = y(\theta),$$

где $x(\theta)$ и $y(\theta)$ — действительные аналитические функции. Предположим, что две дуги кусочно-аналитической кривой, пересекающиеся в угловой точке P, в некоторой окрестности этой точки более не пересекаются. Две замкнутые аналитические дуги или не пересекаются, или пересекаются в конечном числе точек или по частичной дуге, принадлежащей обеим дугам. Мы увидим, что каждая локально простая замкнутая кривая может быть допустимо деформирована в кусочно-аналитическую или регулярную кривую. Начнем с доказательства леммы:

Лемма 28.2. *Пусть a — простая дуга и b — частичная дуга, с концевыми точками B_1 и B_2 внутри a.*

Существует открытая простая и регулярная аналитическая кривая c с концевыми точками B_1 и B_2, пересекающая a только в точках B_1 и B_2. Если при этом a регулярна и аналитична в B_1 (или B_2), то дугу c можно выбрать регулярной и аналитической в B_1 (или B_2). Существует допустимая деформация b в c, оставляющая точки B_1 и B_2 неподвижными, при которой промежуточные простые дуги пересекают a только в B_1 и B_2. Дуга c и деформация c в b могут быть взяты в произвольно малой окрестности b.

Для доказательства леммы возьмем простую замкнутую кривую g, содержащую a в качестве частичной дуги. Пусть конечная область, ограниченная g, взаимно однозначно и конформно отображена на единичный круг R. Образ дуги b при этом отображении обозначим через b'. Пусть k' — дуга окружности, соединяющая концевые точки b' внутри R, и k — прообраз k' при конформном отображении T. Ясно, что k может служить дугой c, требуемой леммой. Если k' деформируется в b' с помощью семейства окружностей, соединяющих концевые точки b', то прообразы этих круговых дуг при отображении T определяют деформацию вида, требуемого леммой. Если дуга a регулярна и аналитична в B_1 (или B_2), то отображение T является конформным в B_1 (или B_2) с необращающимся в нуль якобианом*). Дуга k является поэтому аналитической в некоторой окрестности точки B_1 (или B_2).

Лемма доказана.

Для доказательства того, что каждая локально простая замкнутая кривая g может быть допустимо деформирована в кусочно-аналитическую кривую, произвольно

*) См. А. И. Маркушевич, стр. 675. (*Прим. ред.*)

близкую g в смысле Фреше́, целесообразно представить g в виде циклической последовательности

$$a_1, a_2, \ldots, a_n \quad (n > 2) \tag{28.4}$$

дуг, в которой каждые три последующие дуги образуют простую частичную дугу g. Такая последовательность будет называться *n-последовательностью*. Минимум расстояния d_n между каждыми двумя последовательными вершинами (концевыми точками дуг последовательности (28.4)) назовем *нормой вершин* последовательности. Норма вершин d_n является нормой локальной простоты g — каждая часть g диаметра, меньшего d_n, является частью некоторых двух последовательных дуг (28.4) и поэтому проста.

Кривая g будет непрерывно деформирована с помощью семейства g^t n-последовательностей, где $0 \leqslant t \leqslant 1$. Это означает, что промежуточными вершинами n-последовательностей при деформации являются вершины g^t. Минимум норм вершин n-последовательностей g^t для $0 \leqslant t \leqslant 1$ будет положительным числом, являющимся нормой локальной простоты кривых деформаций g^t.

Понятие n-последовательности и ее нормы вершин позволяют сформулировать следующую лемму:

Лемма 28.3. *Пусть g — локально простая замкнутая кривая, представленная в виде n-последовательности с нормой вершин 4ε. Норма локальной простоты любого множества локально простых кривых, представленных в виде n-последовательностей с вершинами, отстоящими от соответствующих вершин g менее чем на ε, равна 2ε.*

Лемма следует из того факта, что минимум расстояний между последовательными вершинами данных n-последовательностей превосходит 2ε.

Мы пришли, таким образом, к важной теореме:

Теорема 28.2. *Каждая локально простая замкнутая кривая g может быть допустимо деформирована в своей произвольно малой (в смысле Фреше) окрестности в кусочно-аналитическую кривую g' при помощи семейства кривых, норма локальной простоты которого не зависит от близости семейства к g.*

Пусть g представлена в виде n-последовательности (28.4) с нормой вершин 4ε. Требуемая деформация будет осуществляться посредством n-последовательностей с начальной последовательностью (28.4).

В соответствии с предыдущей леммой семейство имеет норму локальной простоты 2ε при условии, что деформация вершин (28.4) перемещает каждую вершину на расстояние, меньшее чем ε.

В силу леммы (28.2) g может быть допустимо деформирована в кривую g_1 таким образом, что a_1 перейдет в простую дугу a_1', соединяющую концевые точки a_1, аналитическую и регулярную во внутренних точках, тогда как остальная часть g останется неподвижной.

Можно предполагать, что деформация a производилась с помощью дуг, настолько близких a_1, что последовательность

$$a_1', a_2, \ldots, a_n \tag{28.5}$$

является n-последовательностью, как и ее прообразы при деформации g в g_1.

Не изменяя в целом g_1, точнее не изменяя $a_3, a_4, \ldots, a_n$, слегка укоротим дугу a_1', удлинив соответствующим образом a_2, вблизи их общего конца. Пусть a_1'' и a_2' — полученные после этого дуги, заменяющие a_1' и a_2. В соответствии с леммой 28.2 кривую g_1 можно допустимо деформировать в замкнутую кривую g_2 так, что a_2' заменится простой дугой a_2'', регулярной во внут-

ренних точках и начальной точке, остальные дуги g_1 остаются неподвижными. При этом последовательность

$$a_1'', a_2'', a_3, \ldots, a_n \tag{28.6}$$

является n-последовательностью, так же как и ее прообразы при деформации q_1 в q_2.

Произведя с a_2'' и a_3 в (28.6) ту же операцию, которая была произведена с a_1' и a_2 в (28.5), получим новую n-последовательность

$$a_1'', a_2''', a_3'', a_4, \ldots, a_n. \tag{28.7}$$

Повторяя то же для a_3'', a_4 в (28.7) и т. д. до a_n, получим n-последовательность

$$a_1'', a_2''', a_3''', \ldots, a_{n-2}''', a_{n-1}'', a_n.$$

Остается немного продолжить дугу a_n в обе стороны внутрь a_1'' и a_{n-1}'', получив простую регулярную аналитическую дугу a_n''. Окончательная кусочно-аналитическая кривая g' удовлетворяет требованию теоремы при условии, что вышеуказанные деформации производились в достаточно малой в смысле Фреше́ окрестности g и вершины g в (28.4) перемещались на расстояния, меньшие чем ε. Возможность таких деформаций видна из леммы 28.2. В соответствии с леммой 28.3 норма локальной простоты семейства n-последовательностей, с помощью которого деформирована g, равна 2ε. Теорема доказана.

Теорема 28.3. *Каждая допустимая кусочно-аналитическая кривая g может быть допустимо деформирована в регулярную кривую.*

Для доказательства теоремы достаточно с помощью локальной деформации устранить углы g. Пусть A — вершина угла g и h — простая частичная дуга g, содержащая A своей внутренней точкой и не имеющая

других особенностей. Из точки A, как из центра, опишем дугу c окружности столь малого радиуса, чтобы она пересекала h только в двух внутренних точках M и N. Дуги AM и NA вместе с дугой окружности c ограничивают криволинейный треугольник D, внутренность и границу которого можно гомеоморфно отобразить во внутренность и границу равнобедренного треугольника D', конформно во всех внутренних точках и с соответствием вершин D и D'.

Пусть A' — образ A в D', K — окружность, вписанная в D' и k — дуга K, концы которой расположены на сторонах D', ведущих в A', и более близкая к A', чем ее дополнительная дуга. Пусть k_1 — дуга, образованная частями сторон D', содержащими A' и имеющими концевые точки в концах k. Дугу k можно допустимо деформировать в дугу k_1 внутри области, ограниченной k и k_1. При конформном отображении, введенном выше, этой деформации соответствует допустимая деформация h в некоторую регулярную кривую.

Ясно, что такая деформация g может быть произведена в произвольно малой в смысле Фреше́ окрестности g.

Нам потребуется следующая теорема:

Теорема 28.4. *Каждую замкнутую кривую g, имеющую регулярное представление*

$$w=u(\theta)+iv(\theta) \quad (0\leqslant\theta\leqslant 2\pi),$$

можно допустимо деформировать внутри произвольно малой в смысле Фреше́ окрестности g в регулярную аналитическую замкнутую кривую.

Пусть (r, θ) — полярные координаты в плоскости параметра $z=x+iy$. Пусть $U(r, \theta)$ и $V(r, \theta)$ — функции, гармонические в координатах (x, y) для $r<1$, непрерывные для $r\leqslant 1$ и удовлетворяющие условиям:

$$U(1, \theta)=u(\theta), \quad V(1, \theta)=v(\theta).$$

Такие функции можно выразить интегралом Пуассона с граничными значениями, соответственно равными $u(\theta)$ и $v(\theta)$. Так как $u'(\theta)$ и $v'(\theta)$ существуют и непрерывны, то, как известно, существуют и непрерывны $U_\theta(r, \theta)$ и $V_\theta(r, \theta)$ для $r \leqslant 1$. Если $r_0 (r_0 < 1)$ — достаточно близкое к 1 постоянное число, то семейство кривых (r постоянно на каждой из них), для которых

$$w = U(r, \theta) + iV(r, \theta) \quad (r_0 \leqslant r \leqslant 1),$$

является регулярным для $r_0 \leqslant r \leqslant 1$ и аналитическим для $r_0 \leqslant r < 1$. Это семейство допустимо деформирует g в кривую семейства, для которой $r = r_0$ в соответствии с требованием теоремы.

§ 29. Классы деформаций локально простых кривых

Мы видели, что каждую локально простую замкнутую кривую можно допустимо деформировать в регулярную кривую. Доказано также, что две локально простые кривые, которые можно допустимо деформировать одна в другую, должны иметь один и тот же угловой порядок p. Мы установим предложение, обратное этому.

Для частного случая регулярных кривых теорема 29.1 была доказана Грауштейном и Уитнеем (см. Whitney [2]). Здесь будет использован несколько упрощенный интерполяционный процесс Уитнея. В частности, в приводимом доказательстве не выделяются, как различные, случаи $p = 0$ и $p \neq 0$. Доказательство Морса и Гейнса ((1), I) является комбинаторным по характеру и наводит на мысль о возможности его обобщения на случай $n > 2$. Предварительно докажем следующую лемму, необходимую для доказательства теоремы:

Лемма 29.1. *Пусть $m(s)$ — непостоянная комплексная функция действительного переменного s, непрерывная на сегменте $0 \leqslant s \leqslant 1$ и $|m(s)| \equiv 1$. Тогда модуль комплексного числа*

$$K = \int_0^1 m(s)\, ds \tag{29.1}$$

меньше 1.

Лемма верна, если $K=0$. Если $K \neq 0$, пусть $\arg K = \alpha$. Тогда $Ke^{-i\alpha} = K^*$ — действительное число, причем, очевидно,

$$K^* = \int_0^1 \mathrm{R}\left[e^{-i\alpha} m(s)\right] ds.$$

Мы видим, что K^* является средним арифметическим действительной функции, модуль которой непостоянен и не превосходит 1. Следовательно, $|K^*| < 1$ и лемма доказана.

Теорема 29.1. *Каждые две локально простые ориентированные замкнутые кривые, обладающие одним и тем же угловым порядком, можно допустимо деформировать друг в друга.*

В соответствии с результатами предыдущего параграфа теорему достаточно доказать для двух регулярных кривых, имеющих одинаковый угловой порядок p. Очевидно, что непрерывное движение кривой g_1 или g_2 как твердого тела, так же как и непрерывное семейство подобных преобразований являются допустимыми деформациями g_1 или g_2. Мы можем поэтому предположить, что g_1 и g_2 имеют одинаковую общую длину 1 и что в комплексной z-плоскости точка $s=0$ на обеих кривых совпадает с точкой $z=0$, а положительное направление касательных к обеим кривым в $s=0$ совпадает с положительной x-осью. Пусть, следова-

тельно, кривые g_1 и g_2 имеют соответственно представления

$$z=h(s), \quad z=k(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant 1)$$

в виде функций их длин дуги и

$$h(0)=k(0)=h(1)=k(1)=0, \tag{29.2}$$

$$h'(0)=k'(0)=1. \tag{29.3}$$

Комплексные числа $h'(s)$ и $k'(s)$, равные по модулю единице, могут быть представлены как точки окружности C единичного радиуса с центром в начале координат. Пусть C' — бесконечное связное одномерное многообразие, покрывающее C, и H_s — частичная дуга C', ведущая от точки, покрывающей $h'(s)$, к точке, покрывающей $k'(s)$. H_s непрерывно изменяется на C' с изменением s. В точке $s=0$ длина H_s равна нулю. Частичная дуга H_s однозначно определена для каждого значения s. Пусть для каждого значения параметра t в интервале $(0,1)$ $m(t, s)$ — комплексная точка H_s, делящая длину H_s в отношении t к $1-t$. Для любого s

$$m(0, s)=h'(s), \quad m(1, s)=k'(s). \tag{29.4}$$

Не ограничивая общности, мы можем предположить, что для некоторого положительного постоянного ε и для $0<s<\varepsilon$

$$0<\arg h'(s)<2\pi, \quad 0<\arg k'(s)<2\pi^{1)}. \tag{29.5}$$

Так как $h'(0)=k'(0)=1$, то (29.5) будет иметь место, если g_1 и g_2 подвергнуть соответствующей малой допустимой деформации, действующей только на точки, близкие к $s=0$. Соотношения (29.2) и (29.3) остаются при этом в силе.

---

[1]) Ветви аргумента выбраны надлежащим образом.

Собственно, доказательство начинается с этого момента. Деформацию кривой g_1 в кривую g_2 определим с помощью семейства кривых

$$z=f(t,s)=\int_0^s [m(t,\sigma)-K(t)]\,d\sigma, \tag{29.6}$$

где функция

$$K(t)=\int_0^1 m(t,s)\,ds \tag{29.7}$$

определена как среднее арифметическое функции $m(t,s)$ по переменной s. В силу (29.5)

$$0<\arg m(t,s)<2\pi \quad (0<s<\varepsilon),$$

и так как $m(t,0)\equiv 1$, то $m(t,s)$, как функция s, равна тождественной постоянной для непостоянных t на (0,1). Из предыдущей леммы следует, что $|K(t)|<1$.

Кривые g_t семейства замкнуты. Это следует из тождеств

$$f(t,0)\equiv 0, \quad f(t,1)\equiv 0$$

(второе тождество имеет место в силу выбора функции $K(t)$).

Кривые семейства регулярны. Чтобы это обнаружить, заметим, что

$$z_s=m(t,s)-K(t)\neq 0, \tag{29.8}$$

так как $|K|<1$. Производная z_s есть вектор, касающийся g_t в каждой точке g_t, за возможным исключением точек соединения, в которых $s=0$ и 1. В этих точках (29.1) для z_s дает значение 1 как при $s=0$, так и при $s=1$, ибо

$$m(t,0)\equiv m(t,1)\equiv 1, \quad K(0)=K(1)=0. \tag{29.9}$$

Проверим соотношение (29.9). Во-первых, $m(t, 0)=1$, так как при $s=0$ дуга H_s обращается в точку $z=1$. При $s=1$ H_s также обращается в точку 1, потому что, согласно предположению, g_1 и g_2 имеют одинаковый угловой порядок. Следовательно, $m(t, 1)\equiv 1$.

Наконец,

$$K(0)=\int_0^1 m(0, s)\, ds=\int_0^1 h'(s)\, ds=0,$$

так как кривая $h(s)$ является замкнутой. Аналогично $K(1)=0$, так как и кривая $k(s)$ замкнута. Таким образом, (29.9) выполнено и кривые g_t семейства в точках $s=0$ и $s=1$ не образуют угла. Следовательно, кривые g_t регулярны всюду.

Из (29.6) следует, что

$$f(0,s)=h(s), \quad f(1, s)=k(s),$$

так что функция $f(t, s)$ допустимо деформирует g_1 в g_2.

Теорема доказана.

Угловой порядок кривой C^n вида

$$z=e^{in\theta} \quad (n=\pm 1, \pm 2, \ldots, \quad 0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi)$$

равен n. Кривая C^0, данная посредством уравнения

$$z=\sin 2\theta+i \sin \theta,$$

имеет вид восьмерки; ее угловой порядок равен нулю. Справедлива следующая теорема:

Теорема 29.2. *Локально простая ориентированная замкнутая кривая с угловым порядком p тогда и только тогда допустимо деформируема в каноническую кривую C^m, когда $p=m$.*

§ 30. Произведение локально простых кривых

Понятие произведения двух локально простых кривых g_1 и g_2 будет дано при некотором условии A), которое мы точно определим ниже.

Пусть кривые g_1 и g_2 заданы с помощью локально взаимно однозначных функций параметра u с периодом ω относительно u.

Допустим, что g_1 и g_2 пересекаются в точке Q, соответствующей на обеих кривых значению $u=0$. Под *соединением* g кривых g_1 и g_2 в точке $u=0$ подразумевается кривая, которая получается из точек g_1 и g_2, причем сначала проходится g_1 от $u=0$ до $u=\omega$, а затем g_2 от $u=0$ до $u=\omega$; точки $u=\omega$ на g_2 и $u=0$ на g_1 отождествляются.

Для того чтобы соединение g было локально простым, необходимо и достаточно, чтобы существовала простая дуга h_1 кривой g_1, содержащая $u=0$ внутри, и простая дуга h_2 кривой g_2, также содержащая $u=0$ внутри, такие, что обе дуги g, полученные из h и h_2, являются простыми. Допустим, что точка $u=0$ делит h_1 на дуги a' и b', причем a' предшествует точке $u=0$. Аналогично допустим, что $u=0$ делит h_2 на дуги a'' и b'', и дуга a'' предшествует точке $u=0$. Дуги a' и a'' мы назовем *входящими* дугами, а b' и b'' — *выходящими* (рис. 16). Если дуги h_1 и h_2 достаточно малы, то ни одна выходящая дуга не пересекает никакой входящей дуги в точках, отличных от Q. Это справедливо при условии, что кривая g является локально простой.

A) *Мы допускаем, что g_1, g_2 и их соединение g кривых g_1 и g_2 являются локально простыми и что существует простая дуга k, проходящая через точку Q, которая в достаточно малой окрестности Q пе-*

ресекает входящие и выходящие дуги только в Q и отделяет входящие дуги от выходящих.

Условившись обозначать угловой порядок локально простой кривой r через $p(r)$, докажем следующую теорему:

Теорема 30.1. *Если условие A) выполнено, то*

$$p(g)=p(g_1)+p(g_2). \tag{30.1}$$

Если g_1, g_2 и их соединение g локально просты и условие A) не выполнено, то достаточно малые входящие

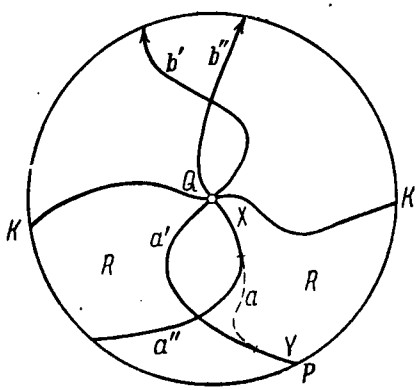


Рис. 16

и выходящие дуги пересекаются только в Q, и входящие дуги разделяют выходящие. Этот случай имеет место, когда кривые g_1 и g_2 касаются в Q и проходят эту точку в противоположных направлениях. Можно доказать, что тогда

$$p(g)=p(g_1)+p(g_2)\pm 1. \tag{30.2}$$

Мы не будем пользоваться этим соотношением и поэтому исключаем такой случай.

Доказательство 30.1. Соотношение (30.1) очевидно для случая двух совпадающих входящих или выходящих дуг. Мы докажем (30.1), установив, что этот частный случай можно получить предварительной

допустимой деформацией g_1, g_2 и g в окрестности точки Q, соответствующей значению $u=0$. В течение этой деформации точка Q будет оставаться неподвижной.

Пусть C — окружность с центром в Q настолько малого радиуса, что входящие и выходящие дуги условия A) пересекают C и что дуга k пересекает C до и после своего прохождения через Q. Не ограничивая общности, можно предположить, что каждая из дуг a', a'', b' и b'' пересекает C в единственной точке и что k есть простая дуга с концами на C и лежащая внутри C (см. рис. 16).

Пусть D — круг, ограниченный C и R — (открытая) подобласть D, ограниченная k и содержащая внутренние точки a' и a''. Пусть, далее, a — простая открытая дуга, принадлежащая R, которая совпадает с a'' вдоль некоторой дуги X, примыкающей к ее концу, и с a' — вдоль некоторой дуги Y, примыкающей к началу a'. Ясно, что a внутри R может быть деформирована в открытую дугу a' с помощью семейства простых в R дуг, каждая из которых имеет Y в качестве начальной частичной дуги и точку Q — в качестве концевой точки. Эту деформацию можно рассматривать, как допустимую деформацию g_1 и g. Дуга Y неподвижна, и это исключает возможность пересечения движущимися дугами их дополнений на g_1, g, что могло бы нарушить условие равномерной локальной простоты. Поэтому мы можем предположить, что входящие дуги на g_1 и g_2 совпадают вдоль некоторой частичной дуги X, оканчивающейся в Q. Аналогично можно предположить, что выходящие дуги совпадают вдоль некоторой частичной дуги, начинающейся в Q. Для этого же случая соотношение 30.1 очевидно.

Теорема доказана.

§ 31. Произведение классов деформаций

Произведение $g_1\ g_2$ двух локально простых ориентированных замкнутых кривых определим при следующих условиях:

1) Параметризованные надлежащим образом кривые g_1 и g_2 пересекаются в точке Q, которая на обеих кривых соответствует значению параметра $u=0$.

2) Соединение g_1 и g_2 в Q является локально простым.

3) Существует простая дуга k, содержащая Q внутри и отделяющая в некоторой своей окрестности достаточно малые простые частичные дуги g_1 и g_2, предшествующие на этих кривых точке Q, от достаточно малых частичных дуг g_1 и g_2, следующих за Q. Как предшествующие Q, так и следующие за ней частичные дуги на g_1 и g_2 пересекают k только в Q.

Если выполнены условия 1), 2) и 3), то соединение g_1 и g_2 называется *произведением* $g_1\ g_2$ этих кривых. Мы видели, что

$$p(g_1\ g_2)=p(g_1)+p(g_2). \tag{31.1}$$

Обозначим через $[h]$ множество всех локально простых замкнутых кривых, которые могут быть допустимо деформированы в локально простую замкнутую кривую h. Условимся называть это множество $[h]$ *классом деформаций*. Все кривые $[h]$ обладают одним и тем же угловым порядком. Определим *произведение* $c_1\ c_2$ двух данных классов деформаций

$$c_1=[h_1], \qquad c_2=[h_2].$$

Пусть g_1 и g_2 — кривые, принадлежащие соответственно $[h_1]$ и $[h_2]$, для которых произведение определено как соединение в некоторой точке Q. Такие кривые g_1 и g_2,

для которых g_1g_2 определено в некоторой точке Q, всегда существуют. В частности, в качестве g_1 и g_2 могут быть взяты регулярные представители $[h_1]$ и $[h_2]$, касающиеся друг друга в положительном направлении в точке пересечения Q. Условия существования g_1g_2 в этом случае удовлетворяются.

Мы определим произведение c_1c_2 как класс деформаций $[g_1g_2]$ и докажем, что этот класс деформаций не зависит от выбора g_1 и g_2 из классов $[h_1]$ и $[h_2]$, для которых определено g_1g_2.

Пусть g_1' и g_2' — две другие кривые соответствующих классов $[h_1]$ и $[h_2]$, для которых определено $g_1'g_2'$. Тогда

$$p(g_1)=p(g_1'), \quad p(g_2)=p(g_2').$$

Из (31.1) следует, что

$$p(g_1g_2)=p(g_1'g_2').$$

Воспользовавшись теоремой о том, что любые две локально простые кривые с одинаковым угловым порядком можно допустимо деформировать друг в друга, заключаем, что

$$[g_1g_2]=[g_1'g_2'].$$

Таким образом, произведение c_1c_2 как класса деформаций однозначно определено.

Обозначим угловой порядок кривых класса деформаций c через $P(c)$. Предыдущие результаты могут быть объединены в следующую лемму:

Лемма 31.1. *Между мультипликативной областью классов деформаций c и целыми числами p имеется взаимно однозначное соответствие, в котором классу c соответствует число $P(c)$ и*

$$P(c_1c_2)=P(c_1)+P(c_2). \tag{31.2}$$

Из этой леммы вытекает следующая теорема:

Теорема 31.1[1]). *Классы деформаций c образуют абелеву группу G, изоморфную аддитивной группе I целых чисел. При этом изоморфизме классу c соответствует число $P(c)$.*

Коммутативность в G. Равенство $c_1c_2=c_2c_1$ следует из того, что в силу леммы (31.1)

$$P(c_1c_2)=P(c_2c_1)$$

и из того, что при заданном p имеется единственный класс c, для которого $P(c)=p$.

Ассоциативность. Равенство

$$c_1(c_2c_3)=(c_1c_2)c_3 \tag{31.3}$$

вытекает из совпадения угловых порядков P обеих частей (31.3).

Единичный элемент e. Определим e в G как класс деформаций e, для которого $P(e)=0$. Равенство

$$ce=ec=c$$

следует тогда из совпадения угловых порядков ce, ec и c.

Обратный элемент c^{-1}. Определим c^{-1} как класс, угловой порядок которого равен $-P(c)$. Тогда равенство

$$cc^{-1}=c^{-1}c=e \tag{31.4}$$

вытекает из совпадения угловых порядков членов в (31.4).

Теорема доказана.

Заметим, что e является классом деформаций фигуры, имеющей вид восьмерки. Если $[g]$ — данный класс деформаций, то его обратным классом будет $[g^{-1}]$, где

---

[1]) Эта теорема представляет собой абстрактное следствие леммы 31.1, не зависящее от интерпретации c как класса деформаций. Приведенное доказательство является, в сущности, доказательством этого абстрактного принципа.

g^{-1} — противоположно ориентированная кривая g. Это следует не из определения gg^{-1}, так как для g и g^{-1} это произведение не определено, а из того, что сумма угловых порядков g и g^{-1} равна нулю.

Отметим некоторые частные случаи. Если g — ориентированная регулярная кривая, то g^n для $n > 0$ определяется как кривая g, n раз проходимая в положительном направлении, и для $n < 0$ — как та же кривая, проходимая n раз в отрицательном направлении g. Пусть g' — зеркальное отражение g относительно касательной к g в точке $u=0$. Произведение gg' обозначается через g^0. Тогда соотношение

$$[g^n]\,[g^m] = [g^{n+m}] \tag{31.5}$$

справедливо для произвольных целых чисел m и n. Это вытекает из совпадения угловых порядков классов, стоящих в обеих частях (31.5).

§ 32. 0-деформации. Кривые порядка 0

Допустимая деформация, при которой ни одна из кривых не проходит через начало координат, называется *0-деформацией.*

Ранее рассмотренные допустимые деформации в w-плоскости сохраняли инвариантным угловой порядок, но допускали, чтобы кривые деформации проходили через точку $w=0$. Поэтому порядок кривой относительно $w=0$ мог изменяться. В случае, когда деформации подвергается внутреннее преобразование $w=f(z)$, появление в течение деформации новых нулей недопустимо. Пусть, например, $f(z)$ определена в области G, которая ограничена единственной жордановой дугой B, имеющей локально простой образ g при отображении $w=f(z)$. Если нужно избежать появления новых нулей

$f(z)$, то деформацию g следует производить так, чтобы движущаяся кривая g_t никогда не проходила через $w=0$. При 0-деформациях это условие выполняется и как p, так и q остаются неизменными.

Поэтому мы будем искать канонические кривые, преобразующиеся при 0-деформациях в локально простые кривые g, не проходящие через точку $w=0$. Первым шагом на пути к решению важной проблемы об отыскании канонических форм внутренних преобразований, обладающих заданным числом фиксированных нулей, полюсов и прообразов точек ветвления, является описание канонических кривых для образов граничных кривых. Деформации, которым будут подвергаться внутренние преобразования, по их отношению к граничным образам будут 0-деформациями. Классификация граничных образов по типам деформаций при 0-деформациях не дает исчерпывающей гомотопической классификации внутренних преобразований. Эта классификация представляет собой лишь начало исследования необходимых условий деления на классы, которые в дальнейших исследованиях должны быть уточнены. Однако канонические кривые при 0-деформациях взаимно однозначно соответствуют парам целых чисел (p, q), рассматриваемых соответственно как угловой порядок и порядок g. Эти канонические кривые выясняют значение пар (p, q).

Начнем с рассмотрения случая, в котором порядок $q=0$. Докажем следующую лемму:

Лемма 32.1. *Пусть g — локально простая регулярная кривая порядка $q=0$, не проходящая через точку $w=0$. Пусть далее R — точка g и E — линейный элемент, касательный к g в R. Тогда существует регулярная 0-деформация в произвольно малой окрестности точки R, оставляющая неизменными R и E.*

Пусть (r, θ) — полярные координаты в w-плоскости. Предположим, что g отнесена к длине дуги s как к параметру и что b — общая длина дуги g. Не ограничивая общности, мы можем предположить, что точка R совпадает с точкой $w=1$. Кривая g допускает представление вида

$$r=r(s), \quad \theta=\theta(s) \quad (0 \leqslant s \leqslant b),$$

в котором $r(s)$ и $\theta(s)$ — непрерывные функции g. Так как для g $q=0$, то $\theta(0)=\theta(b)$. Мы можем предположить, что $s=0$ в R и что $\theta(0)=0$.

Для деформации D, которую мы сейчас определим, переменная величина t будет изменяться от 0 до $1-\varepsilon$, где ε — произвольно малое положительное число. Деформация D переводит точку w кривой g в точку w^{1-t}, где ветвь w^{1-t} определена следующим образом: в полярных координатах w^{1-t} имеет вид

$$[r(s)]^{1-t}, \quad (1-t)\theta(s) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1-\varepsilon),$$

и эта точка считается соответствующей при некотором значении параметра t точке $[r(s), \theta(s)]$ с параметром $t=0$. Точка R с координатами $(r, \theta)=(1, 0)$ при деформации D остается неподвижной. Преобразование w в w^{1-t} при фиксированном t конформно в точке $w=1$, т. е. в R. Использованная нами вблизи $w=1$ ветвь функции переводит направление $\theta=0$ в себя. Из конформности отображения вытекает, что при деформации D направление E в точке R остается неизменным.

Конечный образ кривой g при деформации D, соответствующий значению $t=1-\varepsilon$, состоит из точек, для которых

$$r_1=r^{\varepsilon}(s), \quad \theta_1=\varepsilon\theta(s)$$

и которые при достаточно малом ε находятся в произвольной окрестности точки $r=1$, $\theta=0$.

Лемма доказана.

Теперь мы можем доказать следующую теорему:

Теорема 32.1. *Пусть g — локально простая ориентированная кривая порядка $q=0$, не проходящая через начало координат. Если угловой порядок g равен p, то существует 0-деформация g в каноническую кривую C^p, где C^p при $p \neq 0$ представляет собой положительно ориентированную окружность C, проходимую p раз и не окружающую начала координат, а C^0 — фигуру, имеющую вид восьмерки, ни одна из петель которой не окружает начала координат.*

Не ограничивая общности, можно предположить, что g регулярна. Действительно, существует допустимая деформация g в регулярную кривую. Эту деформацию можно выбрать так, чтобы точки кривой g переходили в настолько близкие к ней, что точка $w=0$ оказывается расположенной вне кривых деформации. Если кривая g регулярна, то в соответствии с предыдущей леммой g может быть 0-деформирована в регулярную кривую g_1, лежащую в произвольно малой окрестности точки R кривой g. Пусть T_1 — допустимая деформация g_1 (см. теорему 29.2) вида, указанного в лемме, переводящая g_1 в каноническую кривую. T_1 может и не быть 0-деформацией. Если же кривую g_1 и ее образ при деформации T_1 предварительно подвергнуть преобразованию сжатия с центром в точке R, то деформация T_2, в которую при этом переходит T_1, будет 0-деформацией. Деформация T_2 и приводит g_2 — образ g_1 при преобразовании сжатия — к требуемой канонической форме. Предварительное сжатие g_1 в g_2 является, конечно, необходимым, причем можно предположить, что g_1 принадлежит столь малой окрестности R, что это сжатие является 0-деформацией.

Теорема доказана.

Замечание. В доказательстве теоремы 33,1 существенно используется, что окончательная деформация T_2 может быть взята так, чтобы точка R кривой g и элемент E, касательный к g в R, оставались неподвижными.

§ 33. 0-деформации. Кривые порядка $q \neq 0$

Пусть g — локально простая кривая, не проходящая через $w=0$. Мы будем заниматься каноническими формами таких кривых при 0-деформациях. Не ограничивая общности, кривую g можно заменить регулярной кривой, в которую g может быть 0-деформирована. Мы предполагаем поэтому, что g *регулярна*.

Пусть (r, θ) — полярные координаты в w-плоскости. В w-плоскости кривая g расположена в некотором кольце

$$r_1 < r < r_2 \quad (r_1 > 0).$$

Это кольцо удобно представлять в виде полоски M в плоскости прямоугольных координат (r, θ), ограниченной прямыми линиями $r=r_1$ и $r=r_2$. Если $w=u+iv$, то

$$u=r\cos\theta, \quad v=r\sin\theta.$$

Пусть g отнесена к своей длине дуги s, как к параметру и b — общая длина g. Обозначим через $R(s)$ точку M, являющуюся образом точки s на g. $R(s)$ определена в $0 \leqslant s \leqslant b$ и непрерывна на этом сегменте. Обозначим через $\theta(s)$ значение θ в точке $R(s)$. Имеем

$$\theta(b) - \theta(0) = 2q\pi,$$

где q — порядок g.

Докажем следующую лемму:

Лемма 33.1. *Если $q \neq 0$, то кривая g может быть 0-деформирована в произведение*

$$C^q X, \tag{33.1}$$

где C — окружность с центром в $w=0$ и X — ориентированная регулярная кривая, касающаяся C^q в точке Q, с которой C^q образует Q-соединение. Порядок X равен 0, а угловой порядок $p-q$.

Предположим вначале, что g регулярна и в полосе M представлена дугой Z, определенной с помощью

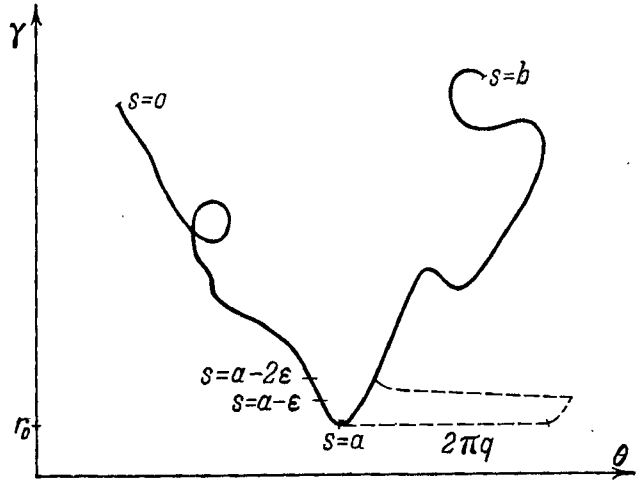


Рис. 17

функции $r(s)$ для $0 \leqslant s \leqslant b$ (рис. 17). На Z существует по крайней мере одна точка, соответствующая значению $s=a$, в которой достигается абсолютный минимум r_0 величины $r(s)$. При подходящем выборе $s=0$ на g точка a будет отличаться от 0 и b. Мы можем предположить, что равенство $r(s)=r_0$ имеет место в единственной точке $s=a$, так как этого можно достичь подходящей 0-деформацией g, сдвигающей точки g, близкие к точке $s=a$. Точнее, мы можем предположить, что для значений s, принадлежащих сегменту

$$a-2\varepsilon \leqslant s \leqslant a+2\varepsilon \quad (0<\varepsilon) \tag{33.2}$$

(где ε — произвольно малая константа), соответствующая часть кривой Z представляется параболической дугой Z' с вершиной в $R(a)$ и вертикальной осью. Пусть Z'' — дополнение Z' на Z. Можно предположить также, что значения, принимаемые $r(s)$ на Z', меньше значений $r(s)$, принимаемых на Z''. Непрерывная кривая рис. 17 иллюстрирует требуемый вид кривой Z.

Предположим далее, что $q>0$. Если $q<0$, то, изменяя ориентацию g на противоположную, мы придем к кривой g', для которой $q>0$. Из справедливости леммы для g' вытекает ее справедливость для g.

Произведем деформацию отрезка

$$a \leqslant s \leqslant a+2\varepsilon \tag{33.3}$$

дуги Z, сохраняющую остальную часть Z неподвижной. Параметр деформации t будет изменяться на сегменте $0 \leqslant t \leqslant 1$. Разрежем кривую Z в точке, соответствующей значению $s=a$, и будем перемещать вправо дугу, соответствующую значениям s

$$a \leqslant s \leqslant a+\varepsilon,$$

со скоростью изменения θ, равной $2\pi q$. Разрыв между точкой $r(a)$ и нижним концом движущейся дуги заполним прямолинейным сегментом, на котором $r=r_0$. Движущаяся дуга Z достигнет конечного положения, отстоящего от ее начального положения на $2\pi q$ единиц. Точки, принадлежащие дуге

$$a+\varepsilon \leqslant s \leqslant a+2\varepsilon, \tag{33.4}$$

переместим вправо на различные расстояния так, чтобы они оставались на постоянном уровне r и чтобы точка $r(a+2\varepsilon)$ была неподвижной, а точка $r(a+\varepsilon)$ перемещалась, как указано выше. Движение дуги (33.4) произведем таким образом, чтобы деформация g была

регулярной. Окончательное положение дуги (33.3) на рис. 17 показано пунктирной линией.

Произведя эту деформацию в плоскости (r, θ), возвратимся в w-плоскость. Горизонтальный отрезок длины $2\pi q$ вправо от точки $s=a$ (рис. 17), на котором $r=r_0$, порождает кривую C^q леммы. Порядок остальной части X полученной кривой равен нулю, так как общий порядок g не изменяется при 0-деформации и так как порядок произведения двух кривых равен сумме порядков сомножителей. Кривая X также является регулярной и касается C^q в точке, представленной вначале значением $s=a$. Угловой порядок X должен быть равен $p-q$ потому, что сумма угловых порядков кривых — сомножителей должна быть равной p.

Доказательство леммы закончено.

Основная теорема состоит в следующем:

Теорема 33.1. *Если g — локально простая кривая порядка $q \neq 0$, то при $p-q \neq 0$ кривая g может быть 0-деформирована в произведение*

$$C^q\, C_1^{p-q} \qquad (p-q \neq 0), \tag{33.5}$$

где C — положительно ориентированная окружность с центром в начале координат и C_1 — окружность, касающаяся[1]) *C, но не окружающая начала координат. Если $p-q \neq 0$, то каноническая кривая может быть взята в виде C^q. При $p-q \neq 0$ C_1 касается кривой C внутренним или внешним образом, смотря по тому, имеют ли числа q и $p-q$ одинаковые или различные знаки.*

В доказательстве этой теоремы мы будем отправляться от произведения $C^q X$ леммы 33.1. Пусть E — линейный элемент, касательный к X в точке R, в кото-

[1]) Как C, так и C_1 ориентированы против часовой стрелки. Направление C^q зависит от знака q. Аналогично — для степени C_1.

рой X образует соединение с C^q. Кривая X может быть 0-деформирована (см. теорему 32.1 и замечание) посредством семейства X_t регулярных кривых с фиксированными R и E в кривую

$$C_1^{p-q} \quad (p-q \neq 0)$$

(требуемого типа) при $p-q \neq 0$ и в кривую, имеющую вид восьмерки, при $p-q=0$. В случае, если $p-q=0$, ни одна из петель восьмерки не может окружать начала координат, так как порядок X_t все время равен нулю.

Легко видеть, что при $q=1$ произведение C и кривой вида восьмерки 0-деформируемо в C. При этой деформации движению подвергается только восьмерка и некоторая малая часть дуги кривой C, принадлежащая окрестности точки соединения.

Та же 0-деформация применима и в случае, когда кривая C заменена кривой C^q. Таким образом, при $p-q=0$ каноническая кривая сводится к C^q.

Теорема доказана.

Следствие 33.1. *Если g_1 и g_2 — две локально простые кривые, обладающие одними и теми же порядком q и угловым порядком p, то g_1 и g_2 взаимно 0-деформируемы друг в друга.*

Это следует из 0-деформируемости g_1 и g_2 в одну и ту же каноническую кривую.

Множество локально простых кривых g в w-плоскости, не проходящих через $w=0$ и 0-деформируемых друг в друга, называется *классом 0-деформаций c* или *0-классом.* Порядок q и угловой порядок p кривых c одинаковы для всех кривых класса и могут быть обозначены соответственно через $Q(c)$ и $P(c)$. Для того чтобы два класса c_1 и c_2 совпадали, необходимо и достаточно (следствие 33.1), чтобы

$$P(c_1)=P(c_2), \quad Q(c_1)=Q(c_2).$$

Вид канонических кривых показывает, что имеется 0-класс с наперед заданными порядками (P, Q).

Поэтому: *между 0-классами и парами целых чисел (P, Q) существует взаимно однозначное соответствие, в котором классу c соответствует пара $[P(c), Q(c)]$.*

Пусть c_1 и c_2 — два 0-класса. Произведение $c_1 c_2$ может быть определено как 0-класс, содержащий произведения $g_1 g_2$ любых двух кривых g_1 и g_2, соответственно классов c_1 и c_2, для которых определено произведение $g_1 g_2$. Если c_1 и c_2 — данные два класса, то произведение $c_1 c_2$ определено единственным образом, так как пара

$$P(c) = P(c_1) + P(c_2),$$
$$Q(c) = Q(c_1) + Q(c_2)$$

вполне определена. Таким образом, для получения порядка $c_1 c_2$ порядки (P, Q) классов c_1 и c_2 складываются подобно векторам. Так же как это сделано в § 31, можно установить следующую теорему:

Теорема 33.2. *Классы 0-деформаций с вышеуказанным определением произведения образуют абелеву группу G, изоморфную аддитивной группе пар целых чисел (P, Q). При этом изоморфизме классу c соответствует пара $[P(c), Q(c)]$. Единичным элементом в G_0 является класс 0-деформаций восьмерки, ни одна из петель которой не окружает начала координат.*

ПРИЛОЖЕНИЕ

КЛАССЫ ДЕФОРМАЦИЙ МЕРОМОРФНЫХ ФУНКЦИЙ И ИХ РАСПРОСТРАНЕНИЕ НА ВНУТРЕННИЕ ПРЕОБРАЗОВАНИЯ *)

§ 1. Введение

Распространение классов деформаций на внутренние преобразования приводит к новым теоремам гомологии и выявляет новые глубокие свойства внутренних отображений, отличающие их от конформных. В соответствии с изложенным ранее, основное свойство теорем теории внутренних преобразований состоит в том, что они остаются справедливыми при произвольном гомеоморфизме z- или w-плоскости. Многие из этих теорем представляют собой соотношения между нулями, полюсами, прообразами точек ветвления и образами граничных кривых при отображении (см. Morse и Heins [1] и Morse [1]) **).

В настоящей статье выясняются некоторые свойства мероморфных функций, которые присущи также и внутренним преобразованиям, и, с другой стороны, выделяются некоторые свойства мероморфных функций, не имеющие места для внутренних преобразований. Если рассматривать преобразования круга $\{|z|<1\}$ в w-сферу, то инварианты, введенные для характеристики классов деформаций функций, обладающих заданными нулями, полюсами и прообразами точек ветвления, не позволяют

---

*) Morse M. и Heins M. [2]. (*Прим. ред.*)

**) См. теорему 19.1 и сл. (*Прим. ред.*)

установить различие[1] между внутренними преобразованиями и мероморфными функциями. Например, покрытие w-плоскости значениями мероморфных функций последовательности $[f_k(z)]$ функций, взятых соответственно из различных классов деформаций, обладает свойствами, аналогичными свойствам мероморфной функции в окрестности существенно особой точки (теорема Пикара), а такое же покрытие значениями внутренних отображений не обладает указанным свойством. Выявление подобных свойств и составляет основное содержание проблемы, которую мы ставим здесь: найти нетопологические требования, которые необходимо наложить на внутренние преобразования для того, чтобы оказалось возможным выделение нетопологических их свойств.

С точки зрения топологии, мы занимаемся гомотопическими классами открытых односвязных римановых поверхностей, обладающих заданными свойствами.

С точки зрения конформных отображений, мы занимаемся вопросами существования деформаций заданного характера над семействами мероморфных функций, выполняемых с помощью внутренних преобразований. Мы намерены сконструировать модели всех классов деформаций при помощи „суперпозиции" гомеоморфизмов круга $\{ |z|<1 \}$ с внутренним преобразованием, обладающим заданными нулями, полюсами и прообразами точек ветвления. Для конформных отображений это возможно только в тривиальных случаях.

Вибурн в самых общих предположениях изучал принадлежащие внутренним отображениям характеристи-

[1]) Для областей, отличных от круга, различие между внутренними и конформными преобразованиями может быть выявлено с помощью этих инвариантов.

ческие множества точек. В этой теории изящно устанавливаются теоремы Стоилова об униформизации (см. также Kerékjártó).

Следующий параграф резюмирует основные результаты без деталей доказательств, изложение которых приведено ниже.

§ 2. Проблема и основные результаты

Пусть $f(z)$ — внутреннее преобразование открытого круга $S\{|z|<1\}$ в комплексную w-плоскость, обладающее конечным числом нулей

$$a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_r \quad (r>0), \tag{2.1}$$

полюсов

$$a_{r+1},\ \ldots,\ a_n \quad (n>1), \tag{2.2}$$

и прообразов точек ветвления

$$b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_\mu \quad (\mu\geqslant 0). \tag{2.3}$$

Впредь до § 14 предполагается, что $n>1$. В основной части исследования мы будем допускать, что нули, полюсы и точки ветвления являются простыми, т. е. порядка 1. Нули, полюсы и прообразы точек ветвления образуют множество точек

$$(\alpha)=(a_0,\ a_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_1,\ \ldots,\ b_\mu),$$

называемое *характеристическим множеством*. Будем говорить, что две точки множества (α) *одного типа*, если обе эти точки являются нулями, а также полюсами, или прообразами точек ветвления. Назовем *допустимой* всякую перестановку точек (α), при которой точки одного и того же типа переходят друг в друга. Мы будем пользоваться только такими перестанов-

ками, при которых a_0 не меняет относительного положения.

Исключительным является случай $\mu=0$, $m=2$[1]).

Допустимые деформации. Будем допускать деформации D функции $f(z)$ вида

$$w=F(z, t) \quad (|z|<1) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

где t — параметр деформации и

$$F(z, 0)\equiv f(z) \quad (|z|<1).$$

При этом мы требуем, чтобы функция F производила непрерывное отображение точек (z, t) в w-сферу и для всякого фиксированного значения t давала внутреннее преобразование S. Если (α^t) — характеристическое множество функции F, соответствующее значению t параметра деформации, то мы требуем также, чтобы при изменении t точки (α^t) изменялись непрерывно, оставаясь простыми и различными, чтобы их число и тип не изменялись и, наконец, чтобы при $t=1$ точки множества (α^1) были характеристическими для f и того же самого типа (но не обязательно совпадающими). Окончательное преобразование $F(z, 1)$ должно обладать тем же характеристическим множеством, что и f, с возможной перестановкой точек.

Деформация называется ограниченной, если (α^t) не зависит от t. При $(\alpha^0)=(\alpha^1)$ деформация называется *финально ограниченной*. Если (α^1) получается из (α^0) допустимой перестановкой, то деформация D называется *полуограниченной*. Обозначим через X какой-нибудь из этих трех видов допустимых деформаций. Внутренние преобразования, допускающие деформацию

[1]) Во всех случаях $m=n+\mu$ будем обозначать общее число нулей и полюсов. Случаи $m=1$ и $m=0$ рассматриваются в § 14.

друг в друга вида X, относятся *к одному и тому же классу X-деформаций и являются X-эквивалентными.*

Инварианты I_i. Мы определим множество (I) n чисел $I_i(f, \alpha)$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, ассоциированных соответственно с парами (a_0, a_i). Числа I_i являются инвариантами относительно любой ограниченной деформации f. Таким образом, множество (I) ассоциируется с упорядоченным множеством (α), в котором первый нуль a_0 играет особую роль. Если F — преобразование с заданным упорядоченным множеством (α), то множества (I) для всех преобразований f, обладающих этим множеством (α), представимы в виде

$$I_i(f, \alpha)=I_i(F, \alpha)+r_i \quad (i=1, 2, \ldots, n), \qquad (2.4)$$

где r_i — произвольные целые числа. Все такие множества реализуемы.

Топологические модели с заданными множествами (α) и I. Рассмотрим внутреннее преобразование F, обладающее заданным упорядоченным множеством (α). Тогда (2.4) определяет систему множеств (I), ассоциированных с (α). Каждое из этих множеств (I) принадлежит некоторому преобразованию f, без труда получаемому из F.

Для построения такого отображения f — „*модели*" (α) и (I) — воспользуемся сохраняющим ориентацию гомеоморфизмом $\eta(z)$ круга $S=\{|z|<1\}$ в себя. Назовем гомеоморфизм η *ограниченным*, если он оставляет (α) точечно инвариантным, и *полуограниченным*, если точки (α) преобразуются в точки (α) того же типа. Положим $n+1=m$. Исключая случай[1]) $m=2$ и $\mu=0$,

---

[1]) Чтобы избежать громоздких формулировок, мы до § 14 исключаем случай $m \leqslant 2$. При $m \leqslant 2$ инварианты (I) не существуют.

можно утверждать, что если задано упорядоченное множество (α) и любое из ассоциированных с ним множеств (I), то существует полуограниченный гомеоморфизм η, зависящий от (α) и (I), и такой, что функция[1]) $F\eta$ имеет (α) своим характеристическим множеством, а I — множеством инвариантов. Случай $m=2$, $\mu=0$ является исключительным.

Мероморфные модели. Рассмотренные выше модели f вообще не являются мероморфными. Тем не менее существует достаточно обозримая характеристика мероморфной функции, обладающей заданным упорядоченным множеством (α) и ассоциированными с ним инвариантами (I).

Классы ограниченных деформаций C. Для того чтобы две функции f_1 и f_2, обладающие одним и тем же упорядоченным множеством (α), принадлежали к одному классу ограниченных деформаций C, необходимо и достаточно, чтобы они имели одинаковые инварианты (I) относительно (α). Если f_1 и f_2 мероморфны, то ограниченная деформация f_1 в f_2, существование которой здесь утверждается, может быть осуществлена посредством мероморфных функций. Это верно также и для классов деформаций C' и C'', к которым мы теперь обращаемся.

Классы C' финально ограниченных деформаций. Здесь необходимы новые инварианты. Будем говорить, что два преобразования f, обладающие одним и тем же упорядоченным множеством (α), относятся к одной *категории*, если суммы

$$I_1+I_2+\ldots+I_n,$$

определенные для этих функций, сравнимы по модулю 2.

---

[1]) Мы пользуемся обозначением $F[\eta(z)]=F\eta$.

Следует различать три важных случая (имея в виду, что до § 14 предполагается $m > 1$):

I $\mu > 0$ или m нечетно;
II $\mu = 0$, $m = 4, 6, 8, \ldots$;
III $\mu = 0$, $m = 2$.

В случае I любые две функции f_1 и f_2, обладающие одним и тем же характеристическим множеством (α), принадлежат одному классу C'. В случае II f_1 и f_2 принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они являются функциями одной категории. В случае III f_1 и f_2 принадлежат одному классу тогда и только тогда, когда они обладают одним и тем же инвариантом I_1 по отношению к (α).

Классы полуограниченных деформаций C''. При $m > 2$ или $\mu > 0$ имеется только один класс C'', обладающий данным множеством (α). Случай $\mu = 0$ и $m = 2$ попрежнему является исключительным.

Другие исключительные случаи. Случай, когда $m < 2$, до § 14 исключается из рассмотрения. В (2.1) мы требовали, чтобы было $r > 0$, исключая тем самым возможность для f иметь полюсы, не имея нулей. Этот исключительный случай приводится к предыдущему заменой функции f функцией $\frac{1}{f}$. Случай отсутствия полюсов допускается.

Случай, когда характеристические точки не являются простыми, по существу может быть изучен так же, как и случай простых точек. Нужно лишь потребовать, чтобы допустимые деформации сохраняли кратность соответствующих характеристических точек. Если допускать изменение кратностей характеристических точек, возникающее при различного рода слияниях таких точек, то мы придем к интересной теории, аналогичной теории, описывающей вырождение эллиптических функций

в функции тригонометрические. К этой проблеме мы предполагаем обратиться в другой статье.

Различие между топологическими и конформными свойствами. Различие между топологическими и конформными свойствами было уже указано. Исключая случай $m=2$ и $\mu=0$, модели всех классов ограниченных деформаций с данным характеристическим множеством (α) можно получить как суперпозицию фиксированной модели F_0, обладающей характеристическим множеством (α), и подходящим образом выбранного полуограниченного гомеоморфизма η области S. Это, однако, невозможно, если иметь дело только с мероморфными функциями.

Укажем еще различие в характере покрытия w-сферы бесконечной последовательностью $[f_k]$ преобразований с заданным множеством (α), которая содержит по крайней мере одного представителя от каждого класса ограниченных деформаций. Последовательность $[f_k]$ мы назовем *модельной последовательностью*. Пусть R — какая-нибудь связная область w-сферы, содержащая точки $w=0$, и $w=\infty$, замыкание которой не покрывает w-сферы. Если не требовать мероморфности функций $f_k(z)$, то модельную последовательность $[f_k]$ можно определить так, чтобы не оказалась покрытой ни одна точка дополнения R и никакая подпоследовательность не сходилась бы равномерно на S к 0 или ∞. Подобной возможности не существует, если f_k мероморфны.

Чтобы более четко сформулировать соответствующее утверждение в случае мероморфных функций, условимся называть точку z_0 области S *покрывающей точкой* $[f_k]$, если множество образов произвольной окрестности N точки z_0 при отображениях $[f_k]$ покрывает конечную w-плоскость (исключая $w=0$) беско-

нечно много раз. Пусть H — какая-нибудь связная окрестность точек

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n) = (a)$$

относительно области S с исключенными точками (a). Каждая модельная последовательность $[f_k]$ мероморфных функций, ни одна последовательность которой не сходится равномерно к 0 или ∞, обладает на H по крайней мере одной покрывающей точкой. Эта теорема непосредственно следует из теоремы Жюлиа о нормальных семействах (см. Монтель, стр. 73) после того, как будут доказаны соответствующие свойства мероморфных моделей. Получены и другие теоремы относительно покрывающих точек последовательности $[f_k]$.

Детальное изложение мы начнем с выяснения гомотопических свойств локально простых дуг k и введения инвариантов $d(k)$, с помощью которых мы сможем дать топологическое определение инвариантов I_i.

Часть I

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

§ 3. Дифференциальный порядок $d(k)$ локально простой кривой k

В этом параграфе каждой локально простой ориентированной кривой k с заданными концами ставится в соответствие число $d(k)$, являющееся инвариантом некоторого класса деформаций k (класс будет определен) и характеризующее k, как представителя ее класса деформаций.

Локальная простота. Мы будем допускать

кривые k, представимые в виде непрерывных и локально взаимно однозначных образов

$$w(t)=u(t)+iv(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0)$$

линейного сегмента $[0, t_0]$. При этом предполагается, что кривые проходят через концевые точки $w(0)$ и $w(t_0)$ только при значениях параметра t, равных 0 и соответственно t_0.

Строго говоря, $w(t)$ является только *представлением* дуги k, но не тождественно с k. Допускается любое другое представление k, получающееся гомеоморфным отображением сегмента $[0, t_0]$ на другой сегмент $[0, t_1]$. Дугу k можно отождествить с классом таких представлений. Свойство локальной простоты дуги k*), очевидно, не зависит от используемого ее представления, так как существование нормы локальной простоты не зависит от этого представления.

Пусть $w=a$ и $w=b$ — концевые точки k.

Допустимые деформации k. Мы будем допускать деформации D дуги k, обладающие следующими свойствами. Дуги D представляются локально взаимно однозначным образом в виде

$$w=H(t, \lambda) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0, \quad 0 \leqslant \lambda \leqslant \lambda_0), \tag{3.1}$$

где H непрерывно отображает прямоугольник плоскости (t, λ) в конечную w-плоскость так, что

$$H(0, \lambda)\equiv a, \quad H(t_0, \lambda)\equiv b.$$

Дуга k представляется в виде $H(t, 0)$. Значению λ параметра деформации соответствует дуга k^λ, в которую деформируется дуга k посредством $H(t, \lambda)$. *Дуги k^λ предполагаются равномерно локально простыми, содержащими точки a и b только как свои концы.*

*) См. § 18 основного текста книги. (*Прим. ред.*)

Если отказаться от требования равномерности локальной простоты дуг деформации D и заменить его требованием локальной простоты каждой из кривых k^λ, то вместо счетного множества классов деформаций дуг, обладающих заданными концевыми точками, мы получим только один класс деформаций [1]).

О любых двух дугах k^λ, участвующих в вышеуказанной деформации D, будем говорить, что они принадлежат *одному и тому же классу деформаций.* По существу деформация является лишь одним из „представлений" k, но совершенно очевидно, что каждое из двух представлений одной дуги может быть допустимо деформировано в другое. Следовательно, свойство дуг принадлежать одному и тому же классу деформаций не зависит от их представлений.

Чтобы предупредить неправильное понимание, подчеркнем следующее обстоятельство. Мы допускаем возможность совпадения концов: $a=b$. Пусть k_a и k_b — некоторые части дуги k, из которых k_a имеет a своей начальной точкой и k_b — точку b — конечной точкой. Дуги k_a и k_b могут пересекаться по бесконечному множеству точек или совпадать. Рис. 1 показывает четыре примера дуг, принадлежащих одному классу деформаций, в случае $a=b$. Фигуры должны быть наложены друг на друга таким образом, чтобы во всех четырех случаях точка $w=a$ совпадала с точкой $w=b$. Правый нижний рисунок показывает, что кривая данного класса деформаций может обладать простой, спирально оканчивающейся дугой. Можно было бы вычертить еще одну фигуру того же класса деформаций, имеющую спиралеобразные простые дуги на обоих концах. Изменение ориентации четырех кривых (рис. 1) привело бы к другому классу деформаций, отличному от этого.

[1]) См. лемму 3.3.

Регулярный случай $a \neq b$. Дуга k по определению называется *регулярной*, если она допускает представление вида $w(t)$, в котором производная $w'(t)$ существует, непрерывна и нигде не обращается в нуль. Для наших целей удобно углы измерять в единицах

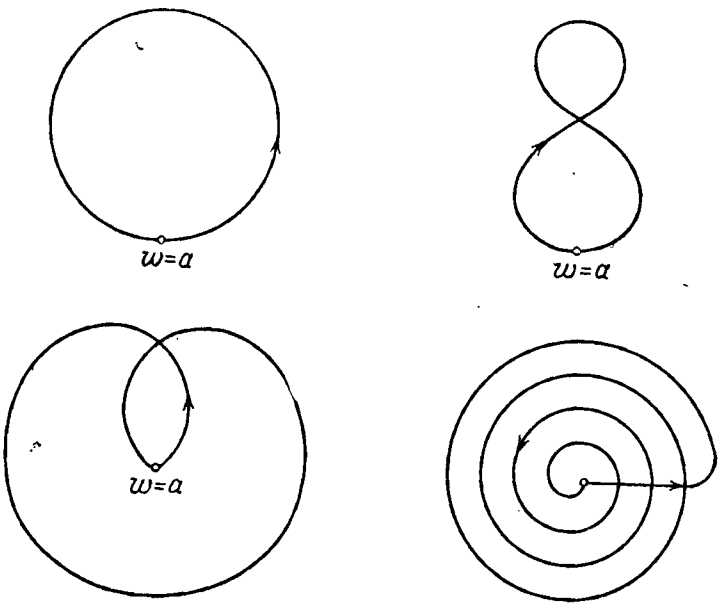


Рис. 1

вращения, т. е. в единицах, равных 2π радианам. Обозначим через $P(k)$ алгебраическое изменение величины

$$\frac{1}{2\pi} \arg w'(t) \quad (0 \leqslant t \leqslant t_0) \tag{3.2}$$

при возрастании t от 0 до t_0 и непрерывном изменении $\arg w'(t)$. Угол P измерен в единицах вращения и представляет полный поворот касательной к k, когда точка касания $w(t)$ проходит дугу k. Пусть c — любая

из двух концевых точек k. Полное алгебраическое изменение выражения

$$\frac{1}{2\pi}\arg[w(t)-c] \quad (0<t<t_0),$$

соответствующее непрерывному изменению угла при возрастании t от 0 до t_0, мы обозначим через $Q_c(k)$.

В регулярном случае, при $a \neq b$ мы определим величину $d(k)$ равенством

$$d(k)=P(k)-Q_a(k)-Q_b(k) \tag{3.3}$$

и покажем, что $d(k)$ является целым числом.

Число $d(k)$ равно целому числу полных оборотов единичного вектора X, который непрерывно изменяется, начиная от вектора

$$\frac{b-a}{|b-a|}, \tag{3.4}$$

и возвращается к нему же следующим образом. Пусть вектор X, в начальный момент равный вектору (3.4), при убывании t от t_0 (включительно) до 0 (исключительно) совпадает с вектором

$$\frac{w(t)-a}{|w(t)-a|} \quad (t_0 \geqslant t > 0). \tag{3.5}$$

После этого пусть t возрастает от 0 до t_0 и вектор X равен

$$\frac{w'(t)}{|w'(t)|} \quad (t_0 \geqslant t \geqslant 0). \tag{3.6}$$

Наконец, пусть t убывает от t_0 до 0 и X совпадает с

$$\frac{b-w(t)}{|b-w(t)|} \quad (t_0 > t \geqslant 0). \tag{3.7}$$

Начальный и конечный векторы при совокупности таких изменений совпадают с (3.4). Полное алгебраическое

изменение $\arg\left(\frac{X}{2\pi}\right)$ складывается из изменений аргументов (3.5), (3.6) и (3.7), соответственно равных

$$-Q_a, \quad P, -Q_b,$$

и, следовательно, совпадает с выражением (3.3). Набранное курсивом утверждение следует из непрерывности описанного изменения X.

Общий случай $a \neq b$. Дуга k более не предполагается регулярной. Часть дуги k определяется интервалом (σ, τ) величины t. Если эта часть является простой, то вектор

$$w(\tau) - w(\sigma) \tag{3.8}$$

имеет вполне определенное направление. Это направление изменяется непрерывно с изменением σ и τ, если только дуга (σ, τ) остается простой и $\sigma < \tau$. Назовем такое изменение *допустимым изменением хорды*. Мы предполагаем, что при этом угол

$$\frac{1}{2\pi} \arg\left[w(\tau) - w(\sigma)\right] \tag{3.9}$$

изменяется непрерывно с изменением σ и τ. Алгебраическое изменение (3.9) при допустимом изменении хорды зависит только от начальной и конечной простых частичных дуг.

Пусть k_a и k_b – соответственно простые частичные дуги, из которых k_a имеет точку a своей начальной точкой и k_b — точку b конечной точкой. Пусть далее хорда, стягивающая k_a, допустимо изменяясь, переходит в хорду, стягивающую k_b. Обозначим через

$$P(k, k_a, k_b)$$

полное алгебраическое изменение величины (3.9), которое при этом происходит. Обозначим далее через $Q_a(k, k_a)$ алгебраическое изменение величины

$$\frac{1}{2\pi}\arg[w(t)-a] \tag{3.10}$$

при возрастании t от конечного значения t_a на k_a до t_0 и через $Q_b(k, k_b)$ — алгебраическое изменение величины

$$\frac{1}{2\pi}\arg[w(t)-b] \tag{3.11}$$

при возрастании t от нуля до начального значения t_b на k_b.

При $a \neq b$ дифференциальный порядок $d(k)$ мы определяем равенством

$$d(k)=P(k, k_a, k_b)-Q_a(k, k_a)-Q_b(k, k_b)\ (a \neq b) \tag{3.12}$$

Лемма 3.1. *Дифференциальный порядок $d(k)$, определенный равенством* (3.12), *где $a \neq b$, является целым числом, не зависящим от выбора k_a и k_b, если только их выбор подчиняется указанным выше ограничениям.*

Доказательство того, что $d(k)$ является целым числом, по существу такое же, как и в регулярном случае. Как и прежде, $d(k)$ измеряет полное угловое изменение единичного вектора, начальное и конечное значение которого совпадает с (3.4). Это изменение можно разложить на изменения, определяющие в (3.12), соответственно $-Q_a$, P и $-Q_b$.

Следует заметить, что каждая из трех компонент углового изменения может быть по своему численному значению произвольно большой и неограниченно возрастать, когда k_a или k_b стремится к a или соответственно к b. Это, несомненно, имело бы место, если бы дуга k имела вид спирали, начинающейся простыми частичными дугами.

Очевидна следующая лемма.

Лемма 3.2. *Если дуга k регулярна, то*

$$d(k)=P-Q_a-Q_b \quad (a\neq b), \tag{3.13}$$

т. е. совпадает с прежним определением (3.3).

Не менее очевидной является также и следующая лемма:

Лемма 3.3. *Дифференциальный порядок $d(k)$ $(a\neq b)$ не зависит от допустимых деформаций k. Следовательно, имеется не меньше классов деформаций, чем различных значений $d(k)$ для допустимых дуг, соединяющих a и b.*

Для каждого целого числа m „модель" дуги K_m, соединяющей a и b, для которой $d(K_m)=m$, может быть определена следующим образом: при $m=0$ в качестве K_0 возьмем прямолинейный сегмент, соединяющий a с b. Пусть c — средняя точка K_0 и C — единичная окружность, касающаяся K_0 в c и расположенная слева от K_0. K_n при $n>0$ определим как дугу, которая получается, если точка перемещается сначала по K_0 от a до c, затем обходит n раз в положительном направлении окружность C и, наконец, движется по K_0 от точки c до b. В качестве K_{-n} мы возьмем зеркальное отражение K_n относительно K_0. Равенство $d(K_m)=m$ следует из (3.13). Из того, что $d(k)$ является инвариантом относительно допустимых деформаций, вытекает, что никакие две модели K_m не принадлежат одному и тому же классу деформаций. Можно показать[1]), что всякая допустимая кривая k, соединяющая точки a и b, для которой $d(k)=m$, является допустимо деформируемой в K_m.

---

[1]) Мы не будем пользоваться этой теоремой и поэтому опускаем ее доказательство.

Случай $b=\infty$. Произведем очевидное распространение предыдущих определений на этот случай, предполагая, что a — конечная точка.

Дуга k предполагается заданной в w-плоскости. Условимся говорить, что дуга k соединяет $w=a$ с $w=\infty$, если ее замыкание k на w-сфере соединяет $w=a$ с $w=\infty$. Она называется локально простой, если k на w-сфере является локально простой. Допустимые деформации определяются на w-сфере подобно тому, как это было сделано выше в случае конечных точек a и b. Если k локально проста, то существует такая величина $\tau\,(0<\tau<t_0)$, что частичная дуга, для точек которой $\tau\leqslant t<t_0$, является простой в конечной w-плоскости. На этой дуге $|w(t)|$ неограниченно возрастает при t, стремящемся к t_0.

Для определения $d(k)$ рассмотрим частичную дугу k^s дуги k, соответствующую интервалу $(0, s)$ для $0<s<t_0$. Дифференциальный порядок $d(k^s)$ дуги k^s вполне определен и, очевидно, не зависит от s, если только $s>\tau$. Поэтому мы будем полагать

$$d(k)=d(k^s)\quad(\tau<s<t_0).$$

Инвариантность $d(k)$ относительно допустимых деформаций вытекает из предыдущих рассуждений.

Дуга k называется регулярной, если регулярно ее замыкание $\bar{k}$ на w-сфере; для регулярных дуг имеет место лемма:

Лемма 3.4. *Если k регулярна на w-сфере, a — конечная точка и $b=\infty$, то*

$$d(k)=P(k)-Q_a(k). \tag{3.14}$$

В случае, когда $\bar{k}$ регулярна на w-сфере, дуга k в конечной w-плоскости имеет определенную *асимптоту*, к которой она приближается при t, стремящемся

к t_0. Частичная дуга k^s дуги k регулярна, и если $w(t)$ — представление k, то

$$d(k^s)=P(k^s)-Q_a(k^s)-Q_{w(s)}(k^s).$$

При s, стремящемся к t_0, последний член этого выражения стремится к нулю, тогда как первые два члена стремятся к соответствующим членам (3.14), что и доказывает лемму.

Случай $a=b$. Мы предполагаем здесь, что a — конечная точка. В этом случае величины

$$Q_a(k, k_a), \quad Q_b(k, k_b)$$

не определены, так как при их определении используется вектор $b-a$. Кроме того, если бы мы попытались определить величину $d(k)$ как некоторый предел при a, стремящемся к b, то мы не получили бы инварианта, которым можно было бы пользоваться. Вместо этого мы поступаем следующим образом.

В случае регулярной дуги положим

$$d(k)=P(k)-Q_a(k). \tag{3.15}$$

В общем случае полагаем величину

$$Q_a(k, k_a, k_b)$$

равной алгебраическому изменению

$$\frac{1}{2\pi}\arg[w(t)-a] \tag{3.16}$$

при монотонном изменении величины t от ее конечного значения t_a на k_a до начального значения t_b на k_b. Тогда $d(k)$ определим равенством

$$d(k)=P(k, k_a, k_b)-$$
$$-Q_a(k, k_a, k_b) \quad (a=b). \tag{3.17}$$

Докажем следующую лемму:

Лемма 3.5. *При $a=b$ значение величины $d(k)$ сравнимо с $\frac{1}{2}$ по модулю 1. Величина $d(k)$ не зависит от выбора простых частичных дуг k_a и k_b, если только этот выбор подчиняется прежним ограничениям. Она является инвариантом допустимых деформаций k.*

Угловое изменение, определяющее $d(k)$, равно изменению вектора Y, начальное положение которого совпадает с $w(t)-a$ и конечное направление противоположно начальному. Действительно, вначале будем допустимо изменять Y как хорду от ее начального положения до положения вектора $b-w(t_b)$, стягивающего k_b; это изменение дает величину P в выражении (3.17). Затем будем изменять Y так же, как изменяется величина

$$b-w(t)$$

при убывании t от t_b до t_a. Угловое изменение этой величины равно Q_a в (3.17). Но направление конечного положения вектора Y противоположно его начальному направлению, что и доказывает сравнимость с $\frac{1}{2}$ по модулю 1 величины $d(k)$ (измеренной в единицах вращения).

Независимость величины $d(k)$ от выбора k_a и k_b, так же как и ее инвариантность относительно допустимых деформаций, очевидна.

Отметим далее следующую лемму:

Лемма 3.6. *Если дуга k регулярна и $a=b\neq\infty$, или если a — конечная точка, а $b=\infty$, то*

$$d(k)=P(k)-Q_a(k). \tag{3.18}$$

Модели различных классов деформаций при $b=\infty$ получаются из моделей этих классов для случая, когда $b=b_1\neq\infty$ с помощью конформного преобразования w-сферы, оставляющего точку a неподвижной и переводящего точку b_1 в ∞.

В случае $a=b\neq\infty$ значениями $d(k)$ будут числа

$$\ldots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots$$

Положительно ориентированная окружность C, проходящая через a, имеет дифференциальный порядок $\frac{1}{2}$. Изменение ориентации всегда меняет знак дифференциального порядка. Чтобы получить кривую k_r с дифференциальным порядком $n=\frac{2r+1}{2}$ и $r>0$, присоединим к окружности C внутри нее малую положительно ориентированную окружность C_1 так, чтобы C_1 касалась C в некоторой точке c, отличной от $a=b$; тогда модель k_r определим как получающуюся при движении по C до точки c, с последующим r кратным обходом C_1 в положительном направлении и движением по C до точки a. Для получения кривой с дифференциальным порядком $-n$ можно изменить ориентацию k_n или, более симметрично, отразить k_n относительно касательной к C в точке a.

Можно доказать, что эти модели исчерпывают все возможные классы деформаций кривых в случае $a=b$. Мы, однако, не будем пользоваться этим обстоятельством.

§ 4. Три леммы о деформациях

Пусть h — простая дуга, соединяющая две различные точки z_1 и z_2 конечной z-плоскости. „Допустимые“ деформации такой дуги оставляют точки z_1 и z_2 неподвижными. Если, кроме того, мы будем пользоваться

в качестве дуг деформации только простыми дугами, то деформацию h будем называть *изотопной*. Первая лемма формулируется следующим образом:

Лемма 4.1. *Каждую простую дугу h, соединяющую z_1 и z_2 ($z_1 \neq z_2$) в конечной z-плоскости, в произвольной окрестности N можно изотопно деформировать в простую регулярную аналитическую дугу, соединяющую z_1 и z_2.*

Начнем с доказательства утверждения.

а) *Дугу h можно изотопно деформировать в N в простую дугу h^* с прямолинейными участками вблизи концов.*

Ради простоты возьмем $z_1=0$. Выберем ε таким образом, чтобы $0<2\varepsilon<|z_2|$. Пусть C—окружность $|z|=\varepsilon$ и E — открытый круг $\{|z|<\varepsilon\}$. Обозначим через h_1 максимальную связную частичную дугу дуги h, расположенную в E и имеющую $z=0$ своей начальной точкой. Пусть h_2 — лежащая в E простая открытая дуга, замыкание которой соединяет диаметрально противоположные точки C и которая содержит h_1 в качестве своей частичной дуги. Существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм T круга $\bar{E}$, оставляющий $z=0$ и C точечно неподвижными и отображающий $\bar{h}_2$ в диаметр $\bar{E}$. Из теоремы Титца (см. Tietze) следует, что T может быть получен изотопной деформацией Δ круга E, оставляющей C и $z=0$ точечно неподвижными.

Если ε достаточно мало, то Δ деформирует пересечение h и E внутри N так, что h переходит в дугу с прямолинейным участком вблизи $z_1=0$, лежащим в N. Эта деформация h является изотопной. Аналогичную деформацию h можно произвести и в окрестности точки z_2, и тогда утверждение а) будет полностью доказано.

Чтобы закончить доказательство леммы, возьмем замкнутую жорданову кривую g, содержащую дугу h^*

утверждения а) в качестве частичной дуги, аналитическую и регулярную в окрестности точек z_1 и z_2. Пусть R — жорданова область, ограниченная кривой g. Произведем гомеоморфное отображение $\bar{R}$ в круг, конформное во внутренних точках R. Рассмотрим пучок окружностей, проходящих в круге через образы точек z_1 и z_2. Прообразы этих окружностей в R образуют семейство кривых, позволяющих деформировать h в окрестности N в простую регулярную аналитическую дугу, соединяющую z_1 и z_2.

Лемма доказана.

Мы не утратим общности доказательства теорем относительно деформаций дуги h, соединяющей в S точки z_1 и z_2 ($z_1 \neq z_2$), если предположим, что

$$z_1 = -a, \quad z_2 = a \quad (a \neq 0),$$

где a—действительное положительное число, меньшее 1. Это следует из возможности конформного отображения S на себя, при котором точки z_1 и z_2 переходят соответственно в a и $-a$.

Неособые преобразования координат. Пусть в z-плоскости введены полярные координаты (r, θ). Определим преобразование полярных координат (ρ, φ) в полярные координаты (r, θ) по формулам

$$r = \frac{1 - a^2 b^2}{1 - \rho^2 b^2} \rho, \quad \theta = \varphi \quad (0 \leqslant \rho^2 b^2 < 1), \tag{4.1}$$

где b — произвольное, но фиксированное постоянное число из полуинтервала $(0 \leqslant b < 1)$ и a — ранее определенное число.

При $b = 0$ уравнения (4.1) сводятся к тождествам. При $b \neq 0$ между полуинтервалом $0 \leqslant r < \infty$ и полуинтервалом

$$0 \leqslant \rho < \frac{1}{b} \tag{4.2}$$

устанавливается взаимно однозначное соответствие. Окружность $\rho=a$ соответствует окружности $r=a$. Ортогональное преобразование координат, определенное (4.1), где ρ подчинено условию (4.2), является взаимно однозначным, аналитическим и неособым. Окружность $\rho=1$ соответствует окружности

$$r=\frac{1-a^2b^2}{1-b^2}. \tag{4.3}$$

Мы воспользуемся преобразованием (4.1) при доказательстве следующей леммы:

Лемма 4.2. *Простую регулярную аналитическую дугу h, соединяющую в S точки $-a$ и a, можно изотопно деформировать в S посредством семейства регулярных аналитических дуг h^t в дугу окружности, соединяющую в S точки $-a$ и a. При этой деформации точка дуги h, соответствующая значению параметра s, переводится в точку*

$$z=z(s,\ t)\quad (0\leqslant t\leqslant 1,\quad 0\leqslant s\leqslant s_0), \tag{4.4}$$

где t — параметр деформации, $z(s,\ t)$ — аналитическая функция действительных переменных $(s,\ t)$ и $z_s\neq 0$.

Чтобы определить деформацию (4.4), возьмем в S жорданову кривую g, содержащую h в качестве частичной дуги, аналитическую и регулярную в окрестности точек $-a$ и a. Пусть R — жорданова область, ограниченная g и принадлежащая S. Обозначим через C окружность, принадлежащую R, и через R_1 — подобласть области R, внешнюю к C. Область R_1 можно взаимно однозначно и конформно отобразить на некоторое кольцо A, причем это отображение допускает продолжение на C и h с сохранением взаимной однозначности и конформности. Предположим, что образ k дуги h

лежит на внешней граничной окружности A. Чтобы деформировать k в области A в заданную дугу k_1, принадлежащую внутренней граничной окружности области A, воспользуемся концентрическими круговыми дугами $k_t (0 \leqslant t \leqslant 1)$. Такая деформация непосредственно определяется в полярных координатах кольца и обладает регулярным аналитическим представлением относительно t и длины дуги k. Прообраз h_t в R_1 дуги k_t деформирует $h = h_0$ в частичную дугу h_1 окружности C.

В течение деформации h_t дуги h концевые точки дуги h_t перемещаются. Чтобы устранить этот недостаток, произведем линейное преобразование $az + b$ дуги h_t в дугу H_t, соединяющую точки $-a$ и a. Заметим, что $H_0 = h_0 = h$ и что H_1 принадлежит S, если только дуга k_1 выбрана достаточно короткой. Мы предполагаем, что это последнее условие выполнено.

Деформация H_t удовлетворяет условиям леммы, за исключением того, что промежуточные кривые деформации H_t могут выходить из области S, хотя начальная и конечная кривые семейства H_t и расположены в S. Видоизменим H_t следующим образом. Пусть $r(t)$ — максимальное значение r на дуге H_t. Заметим, что $r(0)$ и $r(1) < 1$. Пусть $[t]$ — множество значений t, для которых $r(t) \geqslant 1$. Пусть далее $b(t)$ — действительная аналитическая функция t для $0 \leqslant t \leqslant 1$, такая, что

$$0 \leqslant b(t) < 1, \quad b(0) = b(1) = 0, \tag{4.5}$$

и значения которой на множестве $[t]$ настолько близки к 1, что

$$r(t) < \frac{1 - a^2 b^2(t)}{1 - b^2(t)} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{4.6}$$

После того как $b(t)$ выбрана таким образом, произведем преобразование $T_t(r, \theta)$ координат z-плоскости, обратное преобразованию 4.1, полагая $b = b(t)$. Пусть h^t —

образ H_t при отображении $T_t H_t$. Из (4.6) и свойств функции $b(t)$ следует, что $\rho < 1$ на h^t. Следовательно, h^t расположена в S. Более того, $h^0 = h$, и для каждого t концевыми точками дуги h^t являются точки $-a$ и a. Дуга h' совпадает с дугой окружности H_1.

Деформация h^t, представленная соответствующим образом, удовлетворяет условиям леммы. Представление h^t определяется окончательно требованием, чтобы $z(s, t)$ для любого значения переменной t представляла на h^t точку, в которую деформируется точка s дуги h. Условие $z_s \neq 0$, очевидно, удовлетворено.

Лемма доказана.

б) *В условиях предыдущей леммы, через любую точку S, не лежащую на h, проходит не более конечного числа дуг h^t.*

Чтобы убедиться в справедливости б), рассмотрим точку z_0, принадлежащую S и не лежащую на h. Множество пар (s, t), принадлежащих прямоугольнику (s, t) и удовлетворяющих условию $z(s, t) = z_0$, или пусто, или состоит из конечного числа пар, или же содержит по крайней мере одну аналитическую дугу $s = s(t)$. В последнем случае условие $z_s(s, t) \neq 0$ означает, что дуга $s(t)$ может быть аналитически продолжена в любом направлении и, в частности, в направлении уменьшения t, до встречи с граничной точкой (s^*, t_0) прямоугольника (s, t). Но тогда $z(s^*, t_0)$ является точкой h, следовательно и z_0 есть точка h, что противоречит предположению. Справедливость б) установлена.

Следующая лемма является следствием леммы 4.2 и б).

Лемма 4.3. *Каждая из двух простых регулярных аналитических дуг h_1 и h_2, соединяющих в S точки $-a$ и a $(a \neq 0)$, может быть в S изотопно деформирована в другую посредством семейства простых*

регулярных аналитических дуг. При этом через каждую точку S, не лежащую на h_1 и h_2, проходит не более, чем конечное число дуг семейства.

Дуга $h_i (i=1,2)$ способом, указанным в лемме 4.1, может быть деформирована в дугу окружности k_i, соединяющую $-a$ и a. Но k_1 с помощью пучка окружностей, расположенных в S и соединяющих $-a$ с a, может быть деформирована в k_2. Отсюда и следует лемма 4.3.

§ 5. Инварианты I_i

Рассмотрим внутреннее преобразование f области $S=\{|z|<1\}$ в w-сферу, обладающее характеристическим множеством

$$(\alpha)=(a_0, a_1, \ldots, a_n, b_1, b_2, \ldots, b_\mu) \quad (m=n+1).$$

Пусть h_i — простая кривая, соединяющая a_0 с a_i в S, где $i>0$. Будем говорить, что две кривые h_i принадлежат *одному топологическому типу*, если каждая из них может быть в S изотопно деформирована в другую так, чтобы в процессе деформации ни одна из кривых деформации не проходила через точки множества (α), отличные от концевых точек a_0 и a_i дуги h_i. Обозначим через h_i^f образ h_i при отображении f. Кривая h_i^f на w-сфере соединяет $f(a_0)$ с $f(a_1)$ и является локально простой. Если h_i для $0 \leqslant t \leqslant 1$ деформируется изотопно с помощью семейства кривых одного топологического типа, то h_i^f будет допустимо деформироваться в смысле § 3 с помощью равномерно локально простого семейства дуг, соединяющих $f(a_0)$ с $f(a_i)$ и содержащих $f(a_0)$ и $f(a_i)$ только как концевые точки. Поэтому дифференциальный порядок $d\left(h_i^f\right)$ является инвариантом таких преобразований.

Однако $d\left(h_i^f\right)$ будет, вообще говоря, меняться при изменении топологического типа h_i. Можно определить другую функцию $V(h_i)$ от h_i, которая будет изменяться в зависимости от типа h_i в точности так же как $d\left(h_i^f\right)$. С этой целью положим:

$$A(z, \alpha)=(z-a_0)(z-a_1)\ldots(z-a_n), \tag{5.1}$$

$$B(z, \alpha)=(z-b_1)(z-b_2)\ldots(z-b_\mu), \quad (\mu>0)$$

$$B(z, \alpha)\equiv 1, \quad (\mu=0);$$

$$C_i(z, \alpha)=\frac{(z-a_0)(z-a_i)B(z, \alpha)}{A(z, \alpha)}, \quad (i>0). \tag{5.2}$$

Функция в правой части равенства (5.2) имеет устранимые особенности в точках $z=a_0$ и $z=a_i$. Мы предполагаем, что $C_i(z, \alpha)$ принимает свои предельные значения в точках a_0 и a_i, так что

$$C_i(a_0, \alpha)=\frac{(a_0-a_i)B(a_0, \alpha)}{A'(a_0, \alpha)}, \quad (i>0), \tag{5.3}$$

$$C_i(a_i, \alpha)=\frac{(a_i-a_0)B(a_i, \alpha)}{A'(a_i, \alpha)}, \quad (i>0). \tag{5.4}$$

Предполагая, что z непрерывно изменяется вдоль h_i, положим

$$V(h_i)=\frac{1}{2\pi}\left[\arg C_i(z, \alpha)\right]_{z=a_0}^{z=a_i}. \tag{5.5}$$

Независимо от того, какие ветви функций $\arg C_i(z, \alpha)$ используются, имеем

$$V(h_i)\equiv\frac{1}{2\pi}\left[\arg C_i(a_i, \alpha)-\arg C_i(a_0, \alpha)\right] \pmod 1. \tag{5.6}$$

Докажем теперь следующую теорему:

Теорема 5.1. *Величина разности*

$$d(h_i^f) - V(h_i)\ (i=1,2,\ \ldots\ ,n) \tag{5.7}$$

в классе простых кривых, соединяющих a_0 с a_i и не проходящих через другие точки характеристического множества (α), *не зависит от* h_i.

Ясно, что величина разности (5.7) не зависит от изотопных деформаций, осуществляемых с помощью кривых одного топологического типа, так как это справедливо для каждого члена в (5.7). В соответствии с леммой 4.1 мы можем ограничиться рассмотрением регулярных и аналитических дуг h_i. Докажем, что если h_i^0 и h_i' — две такие кривые, то (5.7) имеет одно и то же значение как для h_i^0, так и для h_i^1.

В силу леммы 4.3 существует изотопная деформация h_i^0 в h_i^1, осуществляемая с помощью семейства простых регулярных аналитических дуг $h_i^t (0 \leqslant t \leqslant 1)$, таких, что кривые семейства h_i^t проходят через точки множества $(\alpha) - (a_0, a_i)$ не более, чем для конечного множества значений t_0 параметра деформации t.

Разность

$$d\left(h_i^{tf}\right) - V\left(h_i^t\right) \tag{5.8}$$

изменяется лишь когда t проходит через такие значения t_0. Предположим, что $h_i^{t_0}$ проходит только через одну точку $z=c$ множества $(\alpha) - (a_0, a_i)$. В случае, когда на $h_i^{t_0}$ имеется несколько точек $z=c$, доказательство вполне аналогично. Покажем, что (5.8) не изменяется при изменении знака $t - t_0$.

Пусть h', h'' и h^0 — дуги h_i^t, для которых соответственно $t=t_0-\varepsilon$, $t_0+\varepsilon$ и t_0. При достаточно малом ε_1 и $0<\varepsilon<\varepsilon_1$ кривые h' и h'' проходят только через точки a_0 и a_i множества (α). Предположим, что $\varepsilon<\varepsilon_1$

Не ограничивая общности, можно предположить, что h' обходит[1]) точку $z=c$ справа от h^0. Если h'' также обходит точку $z=c$ справа от h^0, то h' можно деформировать в h'' таким образом, чтобы ни одна кривая семейства деформации не проходила через точку $z=c$. Достаточно сдвинуть каждую точку h' по нормали[2]) к h^0 до встречи с h''. В этом случае (5.7) на h' имеет то же самое значение, что и на h''.

Предположим теперь, что h'' обходит точку $z=c$ слева от h^0. Не меняя топологического типа h', можно произвести деформацию точек h' вдоль нормалей к h^0 таким образом, чтобы h' совпала с h^0 всюду, кроме короткой открытой дуги k', расположенной в окрестности $z=c$ справа от h^0. Аналогично можно деформировать дугу h'' таким образом, чтобы она совпала с h^0 всюду, кроме короткой открытой дуги k'', расположенной в окрестности точки $z=c$ слева от h^0. Мы можем также предположить, что концевые точки дуг k' и k'', расположенные на h_0, совпадают с точками P и Q (рис. 2).

Пусть M и N — концевые точки дуги (MN) кривой h_0, содержащей внутри себя дугу (P, Q). Соединим точки M и N слева от h'' настолько близкой к h'' простой открытой дугой β, чтобы жорданова область, ограниченная кривой

$$B''=\beta(MP)\,k''(QN),$$

не содержала точек множества (α). Обратимся к частичным дугам MP и NQ дуги h_0. Замкнутая кривая

$$B'=\beta(MP)\,k'(QN)$$

---

[1]) Точнее, мы предполагаем, что h' пересекает нормаль к h^0, проведенную в точке $z-c$, справа от h^0.

[2]) При условии, что ε_j достаточно мало.

является простой и ограничивает область, не содержащую точек (α), отличных от $z=c$. B' и B'' ориентированы в положительном направлении относительно ограниченных ими областей. Обозначим через G' область, ограниченную кривой B', и через G'' область, ограниченную кривой B''. Применим теорему 19.1 *) к функции f, определенной в $\overline{G'}$, а также к функции f, определенной в $\overline{G''}$.

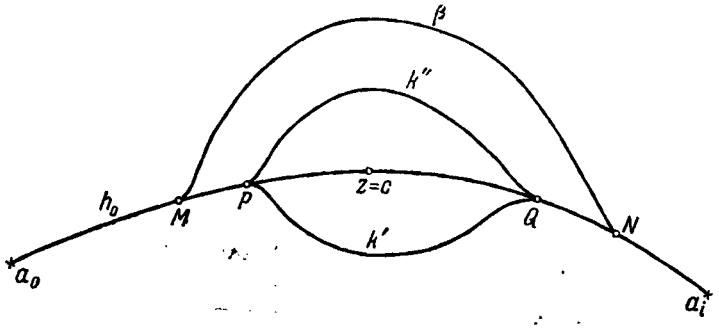


Рис. 2

Случай I. f определена в G'. Пусть g' — образ B' при отображении f. Точка $z=c$ в G' является нулем, полюсом или прообразом точки ветвления. Числа $n(0)$, $n(\infty)$ и μ отнесены к точке $z=c$, и хотя бы одно из этих чисел отлично от нуля. В соответствии с теоремой 19.1

$$n(0)+n(\infty)-\mu=1+q(g')-p(g'). \qquad (5.9)$$

Случай II. f определена в G''. Пусть g''—образ B'' при отображении f. Так как в G'' не имеется нулей, полюсов и прообразов точек ветвления, то

$$0=1+q(g'')-p(g''). \qquad (5.10)$$

*) Основного текста книги. (*Прим. ред.*)

Из (5.9) и (5.10) получаем соотношение

$$n(0)+n(\infty)-\mu=[p(g'')-q(g'')]-$$
$$-[p(g')-q(g')] \qquad (5.11)$$

Соотношение (5.11) и приведет нас к основному равенству.

В соответствии с определением дифференциального порядка d, правая часть (5.11) равна величине

$$d(h''^f)-d(h'^f), \qquad (5.12)$$

так как B' совпадает с B'' всюду, кроме точек дуг k' и k'' и точно так же (измененная) дуга h' совпадает с (измененной) дугой h'' всюду, кроме точек дуг k' и k''.

С другой стороны, разность $V(h')-V(h'')$ равна изменению $\arg C_i$ вдоль замкнутой кривой k' k'', т. е. равна разности между числом нулей и числом полюсов C_i, расположенных внутри этой кривой. Следовательно,

$$V(h')-V(h'')=\mu-n(0)-n(\infty) \qquad (5.13)$$

в соответствии с определением C_i. Из (5.11) имеем тогда

$$d(h''^f)-d(h'^f)=V(h'')-V(h'). \qquad (5.14)$$

Таким образом, выражение (5.7) не изменяется, когда t проходит через значение t_0, и теорема доказана.

Инварианты I_i. *Принимая во внимание теорему* 5.1, *полагаем*

$$I_i(f,\alpha)=d\left(h_i^f\right)-V(h_i)\,(i=1,2,\ldots,n) \qquad (5.15)$$

для каждой простой дуги h_i, соединяющей a_0 с a_i и не проходящей через точки множества $(\alpha)-(a_0, a_i)$.

Числа I_i не зависят ни от выбора h_i среди допустимых кривых, ни от ограниченных деформаций f.

В соответствии с этим необходимым условием того, чтобы два внутренних преобразования, обладающие одним и тем же характеристическим множеством, принадлежали одному классу ограниченных деформаций, является равенство их соответствующих инвариантов. В § 12 будет доказано, что это условие является также и достаточным.

Если (β) получено из (α) допустимой перестановкой, то, вообще говоря,

$$I_i(f, \alpha) \neq I_i(f, \beta),$$

когда это необходимо, мы будем говорить об $I_i(f, \alpha)$, как об i-м *инварианте I_i относительно* (α).

Величина $V(h_i)$ не зависит от f, но зависит от (α). Величины $d\left(h_i^f\right)$, получаемые при изменении f, отличаются друг от друга на целые числа. Поэтому все значения инвариантов I_i относительно (α) можно включить в множество

$$I_i = I_i(f^0, \alpha) + m_i, \tag{5.16}$$

где m_i — целое число и f^0 — внутреннее преобразование, обладающее характеристическим множеством (α). Таким образом, мы имеем теорему:

Теорема 5.2. *Инварианты $I_i(f, \alpha)$ для данного i, соответствующие двум различным преобразованиям f с одним и тем же характеристическим множеством (α), отличаются друг от друга на целое число m_i.*

В дальнейшем мы увидим, что существуют функции, обладающие заданным характеристическим множеством (α) и имеющие заданные значения целых чисел m_i.

Множества (I), задаваемые равенством (5.16), где m_i — произвольные целые числа, мы будем называть множествами (I), *ассоциированными с* (α).

§ 6. Существование внутреннего преобразования f с заданным характеристическим множеством (α)

В этом параграфе мы установим существование по крайней мере одной функции f, обладающей характеристическим множеством (α), строя риманов образ S относительно f. В следующем параграфе будет доказано, что, исключая случай $\mu=0$ и $m=2$, преобразование f можно объединить с надлежащим образом выбранными полуограниченными гомеоморфизмами так, что получающиеся при этом сложные функции $f\eta$ будут иметь инварианты $I_i(f, \alpha)+r_i$, где r_i — произвольные целые числа. Получаемые таким образом модели являются мероморфными только в особых случаях. Мероморфные модели будут описаны в § 10.

В дальнейшем мы воспользуемся леммой:

Лемма 6.1. *Существует сохраняющий ориентацию гомеоморфизм T области S на себя, при котором произвольное точечное множество*

$$z_1, z_2, \ldots, z_s, \tag{6.1}$$

состоящее из s различных точек S, переводится в заданное множество

$$w_1, w_2, \ldots, w_s, \tag{6.2}$$

состоящее из s различных точек S.

Пусть g — простая дуга, соединяющая две точки границы S, расположенная в S и проходящая через точки (6.1) в том порядке, в каком записаны эти точки. Пусть далее k — простая дуга, проходящая через точки (6.2). Замкнутые области, на которые g делит $\bar{S}$ с помощью сохраняющих ориентацию гомеоморфизмов T_1 и T_2, можно перевести в соответствующие области, на которые k делит $\bar{S}$, а эти гомеоморфизмы можно

видоизменить, чтобы g преобразовывалась в k и, в частности, чтобы точки z_i переводились в соответствующие точки w_i.

Лемма доказана.

Теорема 6.1. *Существует, по крайней мере, одно внутреннее преобразование f области S, обладающее заданным характеристическим множеством.*

Мы предполагаем, что (α) задано как упорядоченное множество, состоящее из r нулей, s полюсов и μ прообразов точек ветвления.

Функция f, существование которой утверждается, будет определена описанием риманова образа H области S относительно f, расположенного над w-сферой Σ.

Определенная таким образом область H будет гомеоморфным образом S, покрывающим точку $w=0$ сферы Σ r раз, точку $w=\infty$ — S раз и будет иметь μ простых точек ветвления, покрывающих точки Σ, отличные от $w=0$ и $w=\infty$. Мы будем отправляться от произвольного ограниченного окружностью куска k сферы Σ, который не покрывает точек $w=0$ и $w=\infty$. Затем расширяем k над Σ присоединением $r+S$ узких открытых криволинейных полосок („языков"), покрывающих точку $w=0$ S раз и точку $w=\infty$ S раз. Полученная таким расширением поверхность не имеет точек ветвления и является односвязной. К границе расширенной области k присоединим μ двулистных элементов ветвления, производя каждое присоединение элемента ветвления вдоль короткой граничной дуги таким образом, чтобы эти элементы не покрывали точек $w=0$ и $w=\infty$. Можно предполагать, что граница полученной открытой поверхности Римана не покрывает точек $w=0$ и $w=\infty$.

Построенную поверхность Римана H можно гомеоморфно с сохранением ориентации отобразить на S и притом в силу предыдущей леммы так, чтобы r точек H,

покрывающих $w=0$, S точек, покрывающих $w=\infty$, и μ точек ветвления H переходили соответственно в заданные нули, полюсы и прообразы точек ветвления множества (α).

Теорема доказана.

Случай $\mu=0$, $m=2$. Во всех случаях, за исключением этого, суперпозиция фиксированного преобразования f, обладающего заданным характеристическим множеством, с надлежаще выбранным гомеоморфизмом η области S будет приводить (см. ниже, § 8) к преобразованию $f\eta$, обладающему заданным характеристическим множеством и инвариантами I_i, отличающимися от инвариантов f на произвольные целые числа.

Этот метод объединения преобразований утрачивает силу в случае, когда $\mu=0$ и $m=2$. В этом случае имеется только одна функция $C_i(z, \alpha)$, именно $C_1\equiv 1$, такая, что величина $V(h_i)$, заданная с помощью (5.6), обращается в нуль. Имеется только один инвариант I_i, именно I_1, и

$$I_1=d\left(h_1^f\right). \tag{6.3}$$

Множество (α) сводится к (a_0, a_1), и имеется два случая в соответствии с тем, является a_1 нулем или полюсом. В случае, если a_0 и a_1 — нули, единственно возможными значениями I_1 являются числа

$$\ldots, -\frac{3}{2}, -\frac{1}{2}, \frac{1}{2}, \frac{3}{2}, \ldots, \tag{6.4}$$

а в случае, когда a_0 — нуль, a_1 — полюс, числа

$$\ldots, -2, -1, 0, 1, 2, \ldots \tag{6.5}$$

Установим следующую теорему:

Теорема 6.2. В случае $\mu=0$ и $m=2$ *существует внутреннее преобразование f области S, обладающее заданным характеристическим множеством* (a_0, a_1)

и инвариантом I_1, произвольно выбранным среди значений (6.4), *когда a_1 является нулем, и среди значений* (6.5), *когда a_1 является полюсом.*

Доказательство теоремы может быть проведено с помощью построения римановой поверхности для функции, обратной к функции требуемого типа. Однако эта теорема устанавливается также с помощью формулы § 10, что позволяет избежать более топологического доказательства.

§ 7. Изменение $I_i(f, \alpha)$ при изменении (α).

Пусть f — внутреннее преобразование S, обладающее характеристическим множеством (α). Пусть далее f^t — допустимая деформация f с характеристическим множеством (α^t), отвечающим значению t параметра деформации $(0 \leqslant t \leqslant 1)$.

Напомним, что по определению

$$I_i(f, \alpha) = d(h_i^f) - V(h_i). \tag{7.1}$$

При деформации f $d(h_i^f)$ остается неизменным, а величина $V(h_i)$ зависит от (α) и не зависит от f. Таким образом, мы имеем следующий важный результат:

Алгебраическое изменение

$$\Delta I_i = I_i(f^1, \alpha^1) - I_i(f^0, \alpha^0) \tag{7.2}$$

инвариантов I_i при допустимой деформации f^t зависит только от траектории (α^t) и не зависит от f.

Нам потребуется более удобная формула для I и ΔI_i. С этой целью положим

$$d(h_i^f) \equiv u_i \pmod 1 \tag{7.3}$$

и напомним, что величина u_i может быть взята равной $^1/_2$, когда a_i есть нуль, и равной нулю, когда a_i — по-

люс. Пусть e_i равно 1 или -1, в зависимости от того, будет ли a_i нулем или полюсом. Тогда

$$u_i - \frac{1}{2\pi} \arg e_i \equiv \frac{1}{2} \pmod 1. \tag{7.4}$$

Чтобы формула для I_i стала более определенной, воспользуемся ветвью $\overline{\arg}\ X$ аргумента, для которой

$$0 \leqslant \overline{\arg}\ X < 2\pi,$$

отмечая эту ветвь чертой сверху. В соответствии с определением C_i в (5.4) и (5.3)

$$C_i(a_i, \alpha) = \frac{B(a_i, \alpha)}{A'(a_i, \alpha)} (a_i - a_0) \quad (i \neq 0),$$

$$C_i(a_0, \alpha) = \frac{B(a_0, \alpha)}{A'(a_0, \alpha)} (a_0 - a_i).$$

Воспользовавшись формулой (5.7) для $V(h_i)$ и соотношениями (7.1), (7.3) и (7.4), найдем, что

$$I_i(f, \alpha) = \frac{1}{2\pi} \overline{\arg} \left[\frac{e_i A'(a_i, \alpha)}{B(a_i, \alpha)}\right] -$$

$$- \frac{1}{2\pi} \overline{\arg} \left[\frac{A'(a_0, \alpha)}{B(a_0, \alpha)}\right] + J_i \quad (i = 1, \ldots, n), \tag{7.5}$$

где J_i есть целое число, а $e_i = 1$, когда a_i — нуль, и -1, когда a_i — полюс.

Целые числа $J_i(f, \alpha)$ являются инвариантами относительно ограниченных деформаций f и однозначно определяются только функцией f и множеством α. Эти инварианты являются основными в теории мероморфных функций.

Из (7.5) и непрерывности $I(f^t, \alpha^t)$ вытекает следующий результат:

Лемма 7.1. *Если $f^t (0 \leqslant t \leqslant 1)$ является допустимой деформацией преобразования f, обладающего*

характеристическим множеством (α), и (α^t) — *характеристическое множество* f^t, *то разность*

$$\Delta I_i = I_i(f^1, \alpha^1) - I_i(f^0, \alpha^0) \quad (i=1, 2, \ldots, n) \tag{7.6}$$

задается с помощью равенства

$$0_i(\lambda) = \left[\sum_k \frac{1}{2\pi} \arg\left(\frac{a_i^t - a_k^t}{a_0^t - a_k^t}\right) - \right.$$

$$\left. - \sum_j \frac{1}{2\pi} \arg\left(\frac{a_i^t - b_j^t}{a_0^t - b_j^t}\right)\right]_{t=0}^{t=1}, \tag{7.7}$$

$$k=1, 2, \ldots, i-1, i+1, \ldots, n; \quad j=1, 2, \ldots, \mu,$$

где λ *представляет собой траекторию* (α^t) *и под* arg в (7.7) *понимается любая непрерывно изменяющаяся с изменением* t *ветвь.*

Назовем α-*циклом* траекторию α^t $(0 \leqslant i \leqslant 1)$, ведущую от множества (β) и возвращающуюся к тому же множеству (β). Мы будем пользоваться также траекториями λ, для которых (α^1) получается допустимой перестановкой множества $(\alpha^0)=(\beta)$. Такую траекторию мы назовем *допустимым* α-*циклом по модулю* β. Как и прежде, допустимость трактории λ требует, чтобы было $a_0' = a_0^0$.

Вместо разности ΔI_i в (7.6) мы будем рассматривать разность

$$\delta I_i = I_i(f^1, \beta) - I_i(f^0, \beta) \quad (i=1, 2, \ldots, n),$$

поскольку необходимо сравнивать величины I_i, относящиеся к одному и тому же множеству (β). Если λ — допустимый α-цикл, то

$$\delta I_i = \Delta I_i$$

и δI_i зависят только от λ, но не зависят от начального и конечного множества (I). Если λ является допустимым α-циклом (mod β), но не является α-циклом, то последнее утверждение, как мы увидим в дальнейшем, не имеет места.

Группа Ω I-векторов сдвига. Пусть $\{I, \beta\}$ означает множество инвариантов (I), реализуемых как инварианты внутренних преобразований с характеристическим множеством (β). Мы вскоре обнаружим, что множество $\{I, \beta\}$ совпадает с полным множеством (I), „ассоциированным" с (β) в (5.16).

Если (α^t) $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ представляет α-цикл λ, ведущий от (β) к (β), то разности ΔI_i, определяемые равенством (7.7), являются целыми числами r_i. Если положить

$$I_i = I_i\,(f^0, \beta), \quad T_\lambda(I_i) = I_i\,(f^1, \beta),$$

то обнаружится, что α-цикл λ индуцирует преобразование

$$T_\lambda(I) = (I) + (r)$$

множества $\{I, \beta\}$ на себя, именно — сдвиг. Мы называем (r) *I-вектором сдвига*, индуцируемым λ. I-векторы сдвига, индуцируемые α-циклами, ведущими от β к β, образуют *аддитивную абелеву группу* Ω. Группа Ω является подгруппой аддитивной группы G всех целочисленных векторов (r); Ω может совпадать с G, быть собственной подгруппой G и даже сводиться к одному нулевому элементу.

Найдем множество элементов, порождающих Ω.

С этой целью рассмотрим произвольную пару различных точек z_p и z_q множества (β). Определим α-цикл $G(z_p, z_q)$, ведущий от (β) к (β), в котором все точки β), исключая пару (z_p, z_q), остаются неподвижными,

тогда как пути z_p^t, z_q^t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ таковы, что $z_p^t - z_q^t$ поворачивается на угол -2π. Предположим, кроме того, что эти пути лежат в топологическом круге, внутреннем к S, который не пересекается с множеством $(\beta) - (z_p, z_q)$. Существование таких путей очевидно. Если в (7.7) воспользоваться этим α-циклом, то единственными членами, которые дадут не нулевое приращение, являются члены, содержащие $z_p^t - z_q^t$ или $z_q^t - z_p^t$.

Случай $\mu > 0$. В этом случае мы вводим α-цикл,

$$\lambda_k = G(a_k, b_1) \quad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и получаем следующую лемму:

Лемма 7.2. *Если $\mu > 0$, то существуют α-циклы λ_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$, для которых соответствующие I-векторы сдвига равны δ_i^k*[1] *$(i = 1, 2, \ldots, n)$. Эти векторы порождают группу Ω, как полную группу целочисленных векторов (r).*

Случай $\mu = 0$, $m > 2$. В этом случае вводятся α-циклы

$$\lambda_{rs} = G(a_k, a_s) \quad (r < s).$$

Справедлива следующая лемма:

Лемма 7.3. *Если $\mu = 0$ и $m > 2$, то существуют α-циклы λ_{rs} $(r, s = 1, 2, \ldots, n, r < s)$, для которых соответствующие I-векторы сдвига D_{rs} обладают компонентами*

$$-\delta_i^r - \delta_i^s \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{7.8}$$

при $rs \neq 0$, а при $r = 0$ все компоненты равны единице, исключая s-ой, которая равна нулю.

---

[1]) Символ Кронекера δ_i^k дает i-ю компоненту вектора.

Векторы D_{rs} порождают группу Ω. Если m — нечетное число, то Ω совпадает с группой G всех целочисленных векторов (r). Если $m=4, 6, 8, \ldots$, то Ω есть подгруппа группы G векторов (r), для которых $\sum r_i$ есть четное число.

Компонентами D_{rs}, очевидно, являются числа (7.7).

Если m нечетно, то матрица, столбцы которой образованы компонентами векторов

$$D_{12}, D_{23}, \ldots, D_{n-1,\,n}, D_{01} \quad (m=n+1), \tag{7.9}$$

имеет определитель $\omega=-1$. Например, в случае $m=5$

$$\omega=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 1 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 0 \\ -1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{vmatrix}=-1. \tag{7.10}$$

При m нечетном соответствующие векторы порождают G и, следовательно, Ω.

Для того чтобы рассмотреть случай $m=4, 6, 8, \ldots$, условимся называть вектор (r), для которого $\sum r_i$ четно, вектором *четной категории* и в противном случае — вектором *нечетной категории*. Если m — четное число, то каждый вектор D_{rs} является вектором четной категории, и, следовательно, векторы, порождаемые векторами D_{rs}, также являются векторами четной категории.

Векторы D_{rs} порождают группу Ω.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим произвольный допустимый α-цикл. При возрастании t от 0 до 1 вектор $a_r^t - a_s^t$ $(r<s)$ поворачивается на $2\pi m_{rs}$, где m_{rs} — некоторое целое (может быть, равное нулю) число. Из (7.7) следует, что I-вектор сдвига, индуцируемый λ, имеет вид

$$-\sum m_{rs} \; D_{rs},$$

где суммирование распространяется на пары (r, s), для которых $r < s$. Таким образом, векторы D_{rs} порождают Ω.

Остается установить, что каждый вектор (r) четной категории содержится в Ω. С этой целью введем вектор E, компоненты которого равны δ_i^1. Матрица, столбцы которой составлены из компонент векторов

$$D_{12}, \quad D_{23}, \ldots, \quad D_{n-1,\,n}, \quad E, \tag{7.11}$$

имеет нечетный порядок n и ее определитель равен 1, так что векторы (7.11) порождают G.

Таким образом, (r) имеет вид

$$(r)=sE+D, \tag{7.12}$$

где s — целое число и D принадлежит Ω. Заметим, что

$$D_{12}-D_{23}+D_{34}-\ldots-D_{n-1,\,n}+D_{1n}=-2E,$$

так что s в равенстве (7.12) можно взять равным 0 или 1. Вектор D является вектором четной категории, и если (r) также четной категории, то s в (17.12) не может равняться 1. Таким образом, вектор (r) принадлежит Ω, если он является вектором четной категории. Это завершает доказательство в случае $m=2$, 4, 6, 8, ...

Случай $\mu=0$, $m=2$. В этом случае в выражении (7.7) имеется только одно значение i и $\Delta I_1=0$. Следовательно, Ω сводится к вектору $(r)=0$.

§ 8. Построение внутренних преобразований композицией f с ограниченными гомеоморфизмами η

В § 6 мы видели, что существует, по крайней мере, одно внутреннее преобразование f, обладающее задан-

ным характеристическим множеством (β). Мы увидим вскоре, в какой мере возможен такой выбор ограниченных гомеоморфизмов S на себя, при котором инвариантами (I) функции $f\eta$ являются произвольно выбранные инварианты из множества, ассоциированного с (β).

С этой целью мы установим связь между ограниченными гомеоморфизмами η, оставляющими (β) неподвижным, и α-циклами, ведущими от (β) к (β).

Любой сохраняющий ориентацию гомеоморфизм η области S может быть получен как результат изотопной деформации η^t области S, начинающейся с тождественного преобразования. Иначе говоря, существует однопараметрическое семейство η^t гомеоморфизмов S на себя вида

$$\eta^t \equiv \varphi(z, t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{8.1}$$

где φ — непрерывная функция z и t,

$$z \equiv \varphi(z, 0)$$

и

$$\eta(z) \equiv \varphi(z, 1).$$

Пусть (α^t) — прообраз (β) при гомеоморфизме η^t. Если η есть ограниченный гомеоморфизм, оставляющий множество (β) неподвижным, то (α^t) определяет α-цикл λ, начинающийся от (β) и заканчивающийся множеством (β). Условимся говорить в таком случае, что η *индуцирует* этот α-цикл. Если f — внутреннее преобразование, обладающее характеристическим множеством (β), то сложная функция $z \; f\eta^t$ допускает финально ограниченную деформацию f^t функции f, для которой (α^t) является характеристическим множеством, соответствующим значению t параметра деформации.

Формула (7.6) применима к деформации $f^t = f\eta^t$ с ассоциированным с нею α-циклом (α^t) $(0 \leqslant t \leqslant 1)$ и приводит к равенству

$$I_i(f\eta, \beta) - I_i(f, \beta) = r_i \quad (i = 1, 2, \ldots, n), \qquad (8.2)$$

где (r) есть I-вектор сдвига, определяемый (α^t). Этот вектор сдвига не зависит от выбора α-циклов λ, индуцированных η, так как при одних и тех же f, (β) и η в (8.2) иной выбор λ, индуцированного η, не может изменить (r). Вектор (r) является I-вектором сдвига $D_1(\eta)$, *определенным* η в группе Ω. Если $D_2(\lambda)$ есть вектор в Ω, *определенный* α-циклом λ, то

$$D_1(\eta) = D_2(\lambda),$$

если только λ индуцируется η.

Можно показать, что любой α-цикл (α^t) $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, ведущий от (β) к (β), индуцируется *некоторым* ограниченным гомеоморфизмом S, оставляющим неподвижным множество (β); для того чтобы убедиться в этом, нужно показать, что существует изотопная деформация η^t области S, начинающаяся тождественным преобразованием, при которой α^t есть прообраз β, соответствующий значению t параметра деформации, и η' есть ограниченный гомеоморфизм, сохраняющий неизменным множество (β). Нет необходимости приводить детали этого доказательства. Достаточно напомнить читателю, что гомеоморфизм η^t можно определить с помощью последовательности деформаций, в каждой из которых перемещается только одна точка (β) от начального положения z_0 до близкого положения z_1. Можно воспользоваться деформацией Δ, начинающейся с преобразования, тождественного в малой круговой окрестности N точки z_0 и остающейся в N все время тождественным преобразованием.

Резюмируем сказанное следующим образом:

Лемма 8.1. *Каждый ограниченный гомеоморфизм* η *области* S, *оставляющий неподвижным множество* (β), *индуцирует класс* α-*циклов, ведущих от* (β) *к* (β), *и каждый* α-*цикл, ведущий от* (β) *к* (β), *индуцируется классом ограниченных гомеоморфизмов* η, *оставляющих множество* (β) *неподвижным. Если* η *индуцирует* λ *и* (r) *есть* I-*вектор сдвига, определяемый в* (7.6) *посредством* λ, *то* (8.2) *сохраняет силу для каждого внутреннего преобразования, имеющего* (β) *своим характеристическим множеством. Вектор* (r) *зависит только от* η *и не зависит от выбора* α-*цикла* λ, *индуцированного* η.

Соотношение взаимности между ограниченными гомеоморфизмами η и индуцированными ими α-циклами, а также теоремы, характеризующие природу группы Ω I-векторов сдвига, индуцируемых α-циклами, позволяют сформулировать следующую теорему:

Теорема 8.1. *Если* f^0 *есть внутреннее преобразование* S, *обладающее характеристическим множеством* (β) *и инвариантами* (I), *то надлежащим образом выбранные ограниченные гомеоморфизмы* η *области* S, *оставляющие* (β) *неподвижным, определяют внутренние преобразования* $f^0\eta$, *обладающие инвариантами* $(I^0)+(r)$, *где*:

1) (r) — *произвольный целочисленный вектор при* $\mu>0$ *и при* $\mu=0$, *но нечетном* m;

2) (r) — *произвольный целочисленный вектор четной категории при* $\mu=0$ *и* $m=4, 6, 8, \ldots$;

3) $(r)=0$ *тогда и только тогда, когда* $\mu=0$ *и* $m=2$.

Никакие другие значения (I) *не могут быть получены композицией* $f^0\eta$ *функции* f^0 *с ограниченным гомеоморфизмом* η.

§ 9. α-циклы (mod β) и полуограниченные гомеоморфизмы η области S*)

Мы резюмируем теорию допустимых α-циклов (mod β), начатую в § 7. Как и в § 7, будем рассматривать допустимые деформации f^t $(0 \leqslant t \leqslant 1)$, для которых (α^t) есть характеристическое множество, соответствующее значению t параметра деформации. Предположим, что (α^1) получается допустимой перестановкой множеств (α^0). В частности, $a_0^1 = a_0^0$.

Эта перестановка определяет перестановку π индексов $(1, 2, \ldots, n)$, в результате которой i переходит в $\pi(i)$ и

$$a_i^1 = a_{\pi(i)}^0 \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.1}$$

Для любого внутреннего преобразования f, обладающего характеристическим множеством (α^0), в соответствии с определением I,

$$I_i(f, \alpha^1) = I_{\pi(i)}(f, \alpha^0) \quad (i = 1, 2, \ldots, n). \tag{9.2}$$

Если $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ — произвольное множество n символов, то мы будем писать

$$(x_{\pi(1)}, x_{\pi(2)}, \ldots, x_{\pi(n)}) = \pi(x).$$

Таким образом, (9.2) принимает вид

$$[I(f, \alpha^1)] = \pi[I(f, \alpha^0)].$$

Из (7.7) следует, что

$$I_i(f^1, \alpha^1) = I_i(f^0, \alpha^0) + \theta_i(\lambda) \quad (\lambda = \alpha(t)). \tag{9.3}$$

Из (9.2) и (9.3) заключаем:

$$I_{\pi(i)}(f^1, \beta) = I_i(f^0, \beta) + \theta_i(\lambda) \quad (\beta) = (\alpha^0). \tag{9.4}$$

---

*) Настоящий параграф может быть пропущен читателем, желающим ознакомиться лишь с основным содержанием теории. (*Прим. ред.*)

Равенства (9.4) могут быть записаны в векторной форме

$$\pi\,[I(f^1, \beta)] = [I(f^0, \beta)] + [\theta], \tag{9.5}$$

$$[I(f^1, \beta)] = \pi^{-1}\,\{I(f^0, \beta) + [\theta]\}. \tag{9.6}$$

Таким образом, мы имеем следующую лемму:

Лемма 9.1. *Любой допустимый* α*-цикл* (mod β) *вида* $\lambda = \{(a^t),\ 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, *в котором*

$$\left(a_1^1, a_2^1, \ldots, a_n^1\right) = \pi\left(a_1^0, a_2^0, \ldots, a_n^0\right),$$

индуцирует такое преобразование $\{I, \beta\}$

$$T_\lambda(I) = \pi^{-1}\{(I) + (\theta(\lambda))\}, \tag{9.7}$$

что для любой допустимой деформации f^t *внутреннего отображения с характеристическим множеством* (α^t) *инварианты* (I^1) *отображения* f^1 *относительно* (β) *получаются при помощи преобразований* $T_\lambda(I^0)$ *инвариантов* (I^0) *отображения* f^0 *относительно* (β).

Преобразование T_λ множества $\{I, \beta\}$ составляется из переноса $(I) + (\theta)$ и перестановки π^{-1} компонент перенесенного вектора. Оно является переносом только в том случае, когда π сводится к тождественной перестановке. Если π не является тождественной перестановкой, то числа $\theta_i(\lambda)$, вообще говоря, не являются целыми, так что $(I) + (\theta)$ вообще не содержится в $\{I, \beta\}$.

Из (9.4) следует, что

$$\sum_i \left[I_i(f^1, \beta) - I_i(f^0, \beta)\right] = \sum \theta_i = q(\lambda). \tag{9.8}$$

Здесь q, в зависимости только от λ, является четным или нечетным числом. Преобразования T_λ называются преобразованиями *четной* или *нечетной* категории

в соответствии с тем, является число q четным или нечетным.

Если $\mu=0$ и $m=4, 6, 8, \ldots$, то, как мы видели, все переносы $\{I, \beta\}$, индуцируемые α-циклами, являются преобразованиями четной категории. Докажем теперь следующую лемму:

Лемма 9.2. *Если $\mu=0$ и m — четное число, то для того, чтобы допустимый α-цикл λ (mod β) индуцировал преобразование U_λ множества $\{I, \beta\}$ нечетной категории, необходимо и достаточно, чтобы множество (α^1) получалось допустимой нечетной перестановкой множества (α^0).*

Для доказательства леммы вычислим $q(\lambda)$ в (9.8). При $\mu=0$ суммирование правых частей (7.7) дает

$$q(\lambda)=\left[\frac{1}{2\pi}\arg\prod_{ij}\left(a_i^t-a_j^t\right)-\frac{n-1}{2\pi}\arg\prod_k\left(a_0^t-a_k^t\right)\right]_{t=0}^{t=1}, \quad (9.9)$$

где $i, j, k=1, 2, \ldots, n$ и $i<j$. Так как $a_0^1=a_0^0$ и $n-1$ четно, то последний член в (9.9) дает четное число. Заметим, что

$$\prod_{ij}\left(a_i^1-a_j^1\right)=\pm\prod_{ij}\left(a_i^0-a_j^0\right), \quad (9.10)$$

так как (α^1) получается в результате четной или нечетной перестановки (α^0). В зависимости от вида перестановки $q(\lambda)$ является четным или нечетным числом.

Лемма доказана.

Из этой леммы вытекает, что при $\mu=0$ и $m=4, 6, 8, \ldots$ существует преобразование U_λ множества $\{I, \beta\}$ нечетной категории. Так как по меньшей мере две из трех точек a_1, a_2, a_3 принадлежат одному типу (т. е. являются нулями или полюсами), то существует допустимый α-цикл (mod β), переставляющий между собой эти две точки и составляющий остальные точки (β) неподвижными.

Теперь мы можем доказать следующую лемму:

Лемма 9.3. *Пусть* (I^0) — *произвольное множество элементов из* $\{I, \beta\}$ *и* (r) — *произвольное множество* n *целых чисел. Если* $\mu=0$ *и* $m=4, 6, 8, \ldots$, *то существует преобразование* T_λ *множества* $\{I, \beta\}$, *индуцируемое допустимым* α-*циклом* $\lambda \pmod{\beta}$, *такое, что соотношение*

$$T_\lambda(I)=(I)+(r) \tag{9.11}$$

имеет место для $(I)=(I^0)$ *и данного множества* (r).

Эта лемма следует из леммы 7.2 в случае, когда (r) — четной категории. Тогда существует такое преобразование T, что (9.11) справедливо для любого (I) из $\{I, \beta\}$.

Предположим теперь, что (r) — нечетной категории. Из предыдущей леммы вытекает, что при $\mu=0$ и $m=4, 6, 8, \ldots$ существует преобразование U множества $\{I, \beta\}$ нечетной категории, индуцируемое допустимым α-циклом $(\mathrm{mod}\,\beta)$, которое заменяет (β) множеством (β'), получающимся допустимой перестановкой (β). Положим

$$U(I^0)-(I^0)=(s). \tag{9.12}$$

Множество (s) является множеством нечетной категории, и, следовательно, $(r)-(s)$ — множество четной категории. В соответствии с леммой 7.2 существует сдвиг V множества $\{I, \beta'\}$ четной категории, индуцируемый α-циклом, ведущим от (β) к (β), и такой, что

$$V[I^0+(s)]=[I^0+(s)]+(r)-(s).$$

Воспользовавшись (9.12), обнаружим, что

$$VU(I^0)=(I^0)+(r).$$

Следовательно, преобразование $T=VU$ удовлетворяет условию леммы.

Случай $\mu=0$, $m=2$. В этом случае существует только один инвариант I, имеющий вид

$$I(f, \alpha)=I_1(f, a_0, a_1)=d\left(h_1^f\right),$$

где h_1 — простая кривая, соединяющая в S точки a_0 и a_1. Член $V(h_1)=0$, так как в этом случае $C_1(z)\equiv 1$. Если a_0 является нулем, а a_1 — полюсом, то мы не допускаем никаких относительных α-циклов, переставляющих a_0 и a_1.

Если же a_0 и a_1 одновременно являются нулями, то мы будем допускать относительные α-циклы, переводящие (a_0, a_1) в (a_1, a_0). При $\mu=0$ и $m=2$ правая часть (7.7) обращается в нуль, так что

$$I_1(f^1, a_1, a_0)=I_1(f^0, a_0, a_1), \tag{9.13}$$

если $\left(\alpha^t\right)$ в процессе деформации f^t переводит (a_0, a_1) в (a_1, a_0).

Укажем на один простой, но показательный пример. Пусть f — внутреннее преобразование S с $\mu=0$, $m=2$ и нулями в действительных точках a и $-a$ $(0<a<1)$. Положим $F(z)=f(-z)$. Не существует допустимой деформации f, которая возвращала бы каждый нуль в его первоначальное положение. Это следует из того, что у нас

$$I_1(F, a_0, a_1)=-I_1(f, a_0, a_1)\neq 0, \tag{9.13'}$$

в то время как из существования деформации вытекало бы равенство

$$I_1(F, a_0, a_1)=I_1(f, a_0, a_1),$$

которое противоречит (9.13′).

Обозначим через k_1 противоположно ориентированную дугу h_1. Тогда в соответствии с определением I_1 имеем

$$I_1(f, a_0, a_1)=d\left(h_1^f\right)=-d\left(k_1^f\right)=-I_1(f, a_1, a_0). \tag{9.14}$$

Из (9.13) и (9.14) следует, что если (α^t) при деформации f^t переводит (a_0, a_1) в (a_1, a_0), то

$$I_1(f^1, a_0, a_1) = -I_1(f^0, a_0, a_1). \tag{9.15}$$

Мы можем, таким образом, сформулировать лемму:

Лемма 9.4. *При $\mu=0$ и $m=2$ допустимые деформации f^t с характеристическим множеством $(\alpha^t)(0 \leqslant t \leqslant 1)$ могут переводить (a_0, a_1) в (a_1, a_0) только в том случае, когда a_0 и a_1 одновременно являются нулями; если же a_0 является нулем, а a_1 — полюсом, то эти деформации необходимо возвращают точки a_0 и a_1 в их первоначальное положение. В любом случае*

$$I_1(f^1, a_0, a_1) = \pm I_1(f^0, a_0, a_1), \tag{9.16}$$

где знак минус имеет место тогда и только тогда, когда (α^t) переставляет два нуля.

Сравним этот результат с тем, что в случае четной допустимой функции, обладающей двумя нулями в S и не имеющей там полюсов, возможна ограниченная деформация функции $f(z)$ в функцию $f(-z)$, а именно, тождественное преобразование. Причиной этого является наличие прообраза точки ветвления в начале координат, так что $\mu > 0$.

Полуограниченные гомеоморфизмы η. Рассуждения § 8 обнаружили соотношение взаимности между α-циклами (α^t) и индуцирующими их ограниченными гомеоморфизмами η. Аналогично этому мы рассмотрим здесь соотношение между допустимыми α-циклами (mod β) и полуограниченными гомеоморфизмами η, допустимо переставляющими (β). Пусть η^t есть изотопная деформация S, порождающая η, и (α^t) — прообраз (β) при преобразовании η^t. Мы будем говорить, что η *индуцирует* α-цикл $\lambda = \{(\alpha^t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$.

Деформация $f^t = f\eta^t$ обладает характеристическим множеством (α^t) и вместе с λ удовлетворяет условиям леммы 9.1, так что для преобразования T_λ множества $\{I, \beta\}$, заданного равенством (9.7) и индуцированного λ, имеем

$$[I(f\eta, \beta)] = T_\lambda [I(f, \beta)]. \tag{9.17}$$

Так же как и в § 8, мы заключаем, что каждый такой относительный α-цикл „индуцируется" некоторым полуограниченным гомеоморфизмом η. Следовательно, если λ — произвольный допустимый α-цикл (mod β), то существует полуограниченный гомеоморфизм η, допустимо переставляющий (β) и такой, что соотношение (9.17) справедливо для каждой функции f с характеристическим множеством (β).

Результаты настоящего параграфа, относящиеся к преобразованиям T_λ множеств $\{I, \beta\}$, индуцируемым α-циклами λ, и результаты предыдущего параграфа, относящиеся к смещениям в группе Ω, позволяют сформулировать следующую теорему:

Теорема 9.1. *Пусть f — внутреннее преобразование S, обладающее характеристическим множеством (β), и (r) — произвольное множество n целых чисел. Исключая случай $\mu=0$ и $m=2$, существует полуограниченный гомеоморфизм η области S, допустимо переставляющий (β), но оставляющий неподвижной точку a_0 и такой, что*

$$I_i(f\eta, \beta) = I_i(f, \beta) + r_i \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{9.18}$$

Если $\mu=0$, $m=2$ и η — произвольный гомеоморфизм, оставляющий неподвижными точки a_0 и a_1 или переводящий (a_0, a_1) в (a_1, a_0) в случае, когда точки a_0 и a_1 одновременно являются нулями, то

$$I_1(f\eta, a_0, a_1) = \pm I_1(f, a_0, a_1),$$

где знак минус имеет место только тогда, когда в результате гомеоморфизма переставляются точки a_0 и a_1.

Интересно отметить, что если в (9.18) η является ограниченным гомеоморфизмом, а (r) фиксировано, то (9.18) справедливо для всех преобразований f, обладающих характеристическим множеством (β), если это соотношение справедливо для одного такого f. Это, однако, не имеет места в общем случае, когда η — полуограниченный гомеоморфизм.

Часть II

МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

§ 10. Функция вычетов $\varphi(z)$ и канонические функции $F(z, \alpha, r)$

Предположим, что функция f мероморфна в S и обладает характеристическим множеством[1] (α). Функция $\varphi(z)$, определяемая равенством

$$\frac{f'(z)}{f(z)} = \varphi(z)\,\frac{B(z, \alpha)}{A(z, \alpha)}, \tag{10.1}$$

аналитична в S, исключая устранимые особенности, и нигде не обращается в нуль. Будем называть φ *функцией вычетов* f.

Мы вскоре увидим, что алгебраическое изменение $\arg\varphi$ вдоль любой регулярной простой кривой h_i, соединяющей a_0 и a_i в S, равно $2\pi I_i(f, \alpha)$. Для доказательства этого факта нам потребуется лемма.

Пусть параметром кривой h_i является длина дуги s, измеряемая от точки $z = a_0$. Предположим, что общая

[1]) До сих пор мы предполагали, что $m > 1$. Результаты настоящего параграфа справедливы для $m = 1$ и также (с очевидной интерпретацией) для $m = 0$.

длина h_i равняется σ и ε—постоянное число, удовлетворяющее условию $0<\varepsilon<\sigma$. Обозначим через $z(s)$ и $z_1(s)$ функции s, из которых $z(s)$ представляет точку s на h_i и $z_1(s)$ — точку $s+\Delta s$ на h_i, где $\Delta s=\varepsilon$. Параметр s будет изменяться на сегменте

$$0 \leqslant s \leqslant \sigma-\varepsilon. \tag{10.2}$$

Определив таким образом $z(s)$ и $z_1(s)$, положим

$$\Delta z=z_1(s)-z(s). \tag{10.3}$$

Рассмотрим приращение угла, определяемое равенством

$$U(h_i, \varepsilon)=\left[\arg \frac{\Delta z}{(z_1(s)-a_0)(z(s)-a_i)}\right]_{s=0}^{s=\sigma-\varepsilon}. \tag{10.4}$$

Лемма 10.1. *Величина $U(h_i, \varepsilon)$ равна нулю.*

Пользуясь определением (3.12) дифференциального порядка, устанавливаем, что величина

$$2\pi d(h_i)=U(h_i, \varepsilon)$$

не зависит от выбора $\varepsilon<\sigma$. Устремляя ε к σ, находим, что

$$U(h_i, \varepsilon)=0.$$

Следующая теорема устанавливает связь между теорией внутренних преобразований и теорией мероморфных функций:

Теорема 10.1. *Алгебраическое приращение $E(h_i)$ аргумента функции вычетов f при перемещении z вдоль простой регулярной дуги h_i, соединяющей a_0 и a_i в S, равно $2\pi I_i(f, \alpha)$.*

Значение величины $E(h_i)$ не зависит от выбора h_i среди регулярных дуг, соединяющих a_0 с a_i, так как в S $\varphi\neq 0$. Следовательно, не уменьшая общности, мы можем предположить, что h_i не проходит ни через

одну из точек множества $(\alpha)-(a_0, a_i)$. Мы предполагаем, что h_i выбрана именно таким образом.

Воспользуемся обозначениями леммы 10.1 и положим

$$\Delta f=f[z_1(s)]-f[z(s)] \quad (0\leqslant s\leqslant\sigma-\varepsilon).$$

Из выражения функции φ:

$$\varphi=\frac{f'}{f}\frac{A}{B}$$

вытекает, что $E(h_i)$ есть предел при $\varepsilon\to 0$ выражения

$$\left[\arg\frac{\Delta f}{\Delta z}-\arg f-\arg\frac{B}{A}\right]_{s=0}^{s=\sigma-\varepsilon},$$

где $z=z(s)$ в f, B и A[1]). Напомним, что

$$\frac{B}{A}=\frac{C_i(z, \alpha)}{(z-a_0)(z-a_i)}.$$

Таким образом, оказывается, что величина $E(h_i)$ равняется пределу выражения

$$[\arg\Delta f-\arg f-\arg C_i-U(h_i, \varepsilon)]_{s=0}^{s=\sigma-\varepsilon}. \qquad (10.5)$$

Но в силу предыдущей леммы $U(h_i, \varepsilon)=0$ и

$$V(h_i)=\frac{1}{2\pi}\arg C_i\Big]_{s=0}^{s=\sigma}.$$

Используя обозначения § 3, получим

$$E(h_i)=2\pi\left\{P\left(h_i^f\right)-Q_0\left(h_i^f\right)-V(h_i)\right\}.$$

В силу леммы 3.6

$$d\left(h_i^f\right)=P\left(h_i^f\right)-Q_0\left(h_i^f\right),$$

---

[1]) Строго говоря, $\arg f$ и $\arg\frac{B}{A}$ не определены для $s=0$, но предельные значения этих аргументов существуют.

следовательно,

$$E\left(h_i^f\right)=2\pi\left[d\left(h_i^f\right)-V\left(h_i\right)\right]=2\pi I_i(z,\ \alpha).$$

Теорема доказана.

Умножая обе части равенства (10.1) на $z-a_j$ и устремляя z к a_j как к пределу, получаем

$$\varphi\left(a_j\right)=e_j\frac{A'\left(a_j,\alpha\right)}{B\left(a_j,\alpha\right)}\quad (j=0,\ 1,\ \ldots,\ n),\qquad (10.6)$$

где $e_j=1$, если a_j — нуль, и -1, если a_j — полюс.

Следующая лемма является фундаментальной:

Лемма 10.2. *Для произвольного допустимого множества* (α) *и произвольной функции* $\psi(z)$, *которая аналитична в* S, *не обращается в этой области в нуль и в точках множества* (α) *удовлетворяет условию* (10.6), *существует мероморфная в* S *функция* $F(z)$, *обладающая характеристическим множеством* (α), *функцией вычетов которой является* $\psi(z)$.

Такая функция получается интегрированием (10.1) и имеет вид

$$F=ce^{\int\frac{\psi B}{A}dz}\quad (c=\text{const}\neq 0),\qquad (10.7)$$

где интеграл берется по пути, не содержащему нулей и полюсов (α). Особенности в нулях и полюсах (α) являются устранимыми. Обратно, любая функция F, обладающая функцией вычетов ψ и характеристическим множеством (α), имеет такой вид. Так как функция $\psi(z)$ удовлетворяет условию (10.6), вычет функции $\frac{\psi B}{A}$ в точке a_j равен e_j, т. е. a_j является нулем или полюсом функции F. Кроме того,

$$\frac{F'}{F}=\psi\frac{B}{A}$$

и, так как $\psi \neq 0$, то $F'=0$ только в нулях B. Таким образом, F обладает характеристическим множеством (α) и функцией вычетов $\psi(z)$.

Чтобы упростить обозначения, положим

$$e_j \frac{A'(a_j, \alpha)}{B(a_j, \alpha)} = g_j(\alpha) \quad (j=0, 1, \ldots, n), \tag{10.8}$$

где $e_j=1$, если a_j является нулем, и -1, если a_j — полюс $F(z)$. Функции g_j, являющиеся функциями (α), можно предполагать заданными, не предрешая вопроса о существовании функции f, порождающей эти функции. Среди значений аргументов этих функций мы будем выбирать такое значение аргумента, для которого

$$0 \leqslant \overline{\arg} X < 2\pi, \tag{10.9}$$

отмечая этот выбор чертой сверху. Аналогично мы будем писать

$$\overline{\ln} X = \ln|X| + i\,\overline{\arg} X. \tag{10.10}$$

Пользуясь этими обозначениями, мы записываем равенство (7.5) *в виде* (*основная формула*)

$$I_i(f, \alpha) = \frac{\overline{\arg} g_i(\alpha)}{2\pi} - \frac{\overline{\arg} g_0(\alpha)}{2\pi} + J_i(f, \alpha), \tag{10.11}$$

где J_i — целые числа. При заданном (α) *числа* (J) *однозначно определяют* (I) *и обратно.*

Можно сформулировать следующую фундаментальную теорему существования для мероморфных функций:

Теорема 10.2. *Для произвольного допустимого характеристического множества* (α) *и произвольного множества* (r) *целых чисел существует функция* $F(z, \alpha, r)$, *мероморфная в S относительно z, обладающая характеристическим множеством* (α) *и инвариантами* $[J(F, \alpha)] = (r)$.

Присоединяя к множеству (r) целых чисел число $r_0=0$, положим

$$c_j(\alpha, r)=\overline{\ln} g_j(\alpha)+i2\pi r_j \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n). \tag{10.12}$$

Пользуясь интерполяционной формулой Лагранжа, построим полином $P(z)$*), для которого

$$P(a_j)=c_j \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Покажем, что при фиксированных (α) и (r) функция

$$\psi(z)=e^{P(z)} \tag{10.13}$$

может служить в качестве функции вычетов и приводит к функции F, решающей нашу задачу. Действительно,

$$\psi(a_j)=e^{P(a_j)}=e^{c_j}=g_j=e_j\frac{A'(a_j, \alpha)}{B(a_j, \alpha)} \quad (j=0, 1, 2, \ldots, n),$$

так что условия (10.6), которым подчинена функция вычетов, выполнены. Заметим, что $\psi(z)$ аналитична в S и в этой области не обращается в нуль. Таким образом, применима лемма 10.2, и $\psi(z)$ является функцией вычетов $F(z)$, обладающей заданным характеристическим множеством (α).

Остается доказать, что $J_i(E, \alpha)=r_i$. Из того, что в S $\psi\neq 0$, вытекает существование однозначной и непрерывной в S ветви $\arg\psi(z)$. Для любой такой ветви в соответствии с теоремой 10.1 имеем

$$2\pi I_i(F, \alpha)=\arg\psi(a_i)-\arg\psi(a_0). \tag{10.14}$$

Обозначим теперь через $\hat{X}$ коэффициент при i в выражении X. Тогда в силу (10.13) $\hat{P}(z)$ есть непрерывная ветвь $\arg\psi$.

*) Более подробно нужно было бы писать $P=P(z, \alpha, r)$, так же как $\psi=\psi(z, \alpha, r)$ для (10.13). (*Прим. ред.*)

Полагая $\arg\psi=\hat{P}(z)$ в (10.14), находим, что

$$2\pi I_i(F,\ \alpha)=\hat{P}(a_i)-\hat{P}(a_0)=\hat{c}_i-\hat{c}_0.$$

Из определения c_i следует, что

$$I_i(F,\ \alpha)=\left(\frac{\overline{\arg}\, g_i}{2\pi}+r_i\right)-\frac{\overline{\arg}\, g_0}{2\pi}.$$

Пользуясь (10.11), получаем

$$J_i(F,\ \alpha)=r_i \qquad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Таким образом, (α) является характеристическим множеством F, а ее инварианты (J) относительно (α) равны (r).

Теорема доказана.

Полиномы $P(z)$ берутся в точности в форме Лагранжа

$$P(z,\ c)=A\left[\frac{c_0}{(z-a_0)A_0'}+\ldots+\frac{c_n}{(z-a_n)A_n'}\right], \quad (10.15)$$

где

$$A=(z-z_0)(z-a_1)\ \ldots\ (z-a_n)$$

и A_j' равно значению производной A' в точке $z=a_j$. Для заданной равенством (10.13) функции $\psi(z)$ мы построим канонические функции

$$F(z,\ \alpha,\ r)=ce^{\int\frac{\psi B}{A}dz}, \qquad (10.16)$$

где константа c определяется из условия

$$F_z(a_0,\ \alpha,\ r)=1.$$

В соотношении (10.16)

$$A=A(z,\ \alpha), \qquad B=B(z,\ \alpha), \qquad \psi=\psi(z,\ \alpha,\ r).$$

§ 11. Моногенное продолжение функций $F(z, \alpha, r)$ относительно (α)

Отправляясь от некоторого фиксированного характеристического множества (α), точки z и множества (r), можно продолжить $F(z, \alpha, r)$, рассматриваемую, как функция (α), в моногенную функцию $M(z, \alpha)$ множества (α). Мы увидим в дальнейшем, что $M(z, \alpha)$ может быть как однозначной функцией множества (α), например в случае $\mu=0$ и $m=2$, так и бесконечно значной функцией (α). Ветви $M(z, \alpha)$ образуют подмножества функций $F(z, \alpha, r)$, которые могут содержать как все функции $F(z, \alpha, r)$, так и только одну из них. Никакие две функции $F(z, \alpha, r)$, соответствующие различным множествам (r), не могут быть тождественными относительно z. Действительно, из совпадения двух таких функций вытекало бы тождество их инвариантов (I), а в силу (10.11) также и тождество их инвариантов $(J)=(r)$.

Метод продолжения станет понятным, если заметить, что $M(z, \alpha)$ являются функциями (α), определенными равенством (10.16), правая часть которого содержит c_j. Величины c_j входят в полиномы $P(z, c)$ равенства (10.15). Наконец, c_j задаются как функции

$$c_j(\alpha, r)=\overline{\ln}\, g_j+i\,2\pi r_j \qquad (r_0=0). \tag{11.1}$$

Для каждого множества целых чисел $(r)=(r_1, \ldots, r_n)$ равенство (11.1) определяет $[c(\alpha, r)]$ как аналитическую векторную функцию, точнее — ветвь бесконечно значной функции (α). Это, конечно, не означает, что все элементы $[c(\alpha, r)]$ являются ветвями одной и той же моногенной функции (α). При непрерывном прохождении (α) через точку (β) функции $c_j(\alpha, r)$ могут претерпевать скачки вида

$$\Delta c_j=i\,2\pi\sigma_j \qquad (j=0, 1, \ldots, n), \tag{11.2}$$

где $\sigma_j=\pm 1$. Нам потребуется следующая лемма:

Лемма 11.1. *Скачок функций $c_j(\alpha, r)$, при котором все c_j меняются на $2\pi i$ или $-2\pi i$, соответствует случаю, когда функция, определенная равенством* (10.16), *не имеет особенностей.*

Для произвольного изменения величин c_j, при котором Δc_j равно постоянной k, не зависящей от j, положим $c_j'=c_j+k$. Тогда

$$P(z, c)+k=P(z, c').$$

Если, в частности, $k=\pm 2\pi i$, то функция вычетов, соответствующая значениям c', равна

$$\psi(z, c')=e^{P(z, c)\pm 2\pi i}=\psi(z, c).$$

Таким образом, правая часть равенства (10.16) не испытывает никаких изменений.

Всякое продолжение элемента $[c(\alpha, r)]$, непосредственное или с помощью других элементов $[c(\alpha, s)]$, допускающее в качестве особенностей только конечное число скачков типа леммы 11.1, будет называться *эффективно-аналитическим*: такое продолжение не вносит особенностей в правую часть выражения (10.16). Множество элементов $[c(\alpha, r)]$, определенное с помощью (11.1), вообще говоря, не содержит всех аналитических продолжений относительно (α), так как мы положили $r_0=0$. Однако множество элементов $[c(\alpha, r)]$ допускает эффективное аналитическое продолжение любого данного элемента $[c(\alpha, s)]$. Непрерывное изменение множества (α), при котором функции $c_j(\alpha, s)$ претерпевают скачки (11.2) в точке (β), соответствует отсутствию особенностей в продолжении $M(z, \alpha)$, при котором в точке (β) $[c(\alpha, s)]$ заменяют через $[c(\alpha, r)]$, где в (10.12)

$$r_i=s_i-\sigma_i+\sigma_0.$$

Следствием этого результата является следующая теорема:

Теорема 11.1. *Любая моногенная функция* (α), *полученная аналитическим* α-*продолжением фиксированного элемента* $F(z, \alpha, s)$, *составлена из однозначных ветвей, образующих подмножество моногенных функций* $F(z, \alpha, r)$.

Остается еще определить, каким образом комбинируются функции $F(z, \alpha, r)$ при построении моногенных функций $M(z, \alpha)$. Необходимое и достаточное условие возможности непрерывного продолжения относительно (α) функции $F(z, \alpha, r)$ в функцию $F(z, \alpha, s)$ состоит в существовании α-цикла $\lambda=\{(a^t), 0 \leqslant t \leqslant 1\}$, ведущего от (β) к (β), и функции $M(z, \alpha)$, моногенной относительно (α) и такой, что семейство функций

$$f^t=M(z, \alpha^t), \tag{11.3}$$

полученное аналитическим α-продолжением ветви

$$M(z, \beta)=F(z, \beta, r),$$

оканчивается ветвью

$$M(z, \beta)=F(z, \beta, s).$$

Это возможно тогда и только тогда, когда существует α-цикл, ведущий от (β) к (β), для которого индуцируемый I-вектор сдвига в Ω равен

$$\Delta I=\Delta J=(s)-(r). \tag{11.4}$$

Необходимость этого условия очевидна, так как f^t представляет собой частный случай более общих ограниченных f-деформаций, рассмотренных в § 7. Существование такого α-цикла $\lambda=(\alpha^t)$ является также и достаточным. Действительно, для этого α-цикла возможно продолжение $F(z, \alpha, r)$ вдоль пути (α^t) с помощью семейства (11.3). Тогда соотношение (11.4) будет сохра-

няться и, следовательно, инварианты (J) конечной канонической функции относительно (β) должны быть равны (s).

Леммы § 7 относительно группы Ω приводят к следующей теореме:

Теорема 11. 2. *Канонические функции $F(z, \alpha, r)$ объединяются в ветви функций $M(z, \alpha)$, моногенных относительно (α), следующим образом:*

1) *Если $\mu > 0$ или $\mu = 0$ и m нечетно, то все канонические функции F являются ветвями единственной моногенной функции $M(z, \alpha)$:*

2) *Если $\mu = 0$ и $m = 4, 6, 8, \ldots$, то все канонические функции $F(z, \alpha, r)$, для которых (r) четной категории, являются ветвями моногенной функции (α), тогда как функции, для которых (r) нечетной категории, являются ветвями другой моногенной функции (α).*

3) *При $\mu = 0$ и $m = 2$ каждая каноническая функция $F(z, \alpha, r)$ сама является моногенной функцией относительно (α).*

§ 12. Эквивалентность мероморфных функций

Ограниченная, финально ограниченная и полуограниченная эквивалентности двух внутренних преобразований f_1 и f_2 области S были определены § 2 в терминах допустимых деформаций f. Будем говорить о *мероморфном типе* эквивалентности, если деформируемыми функциями и семействами, с помощью которых производятся деформации, являются мероморфные функции и соответственно семейства мероморфных функций. Сформулируем первую теорему об эквивалентности:

Теорема 12.1. *Необходимое и достаточное условие того, что мероморфные функции f_1 и f_2, обла-*

дающие одним и тем же характеристическим множеством (α), *являются ограниченно и мероморфно эквивалентными, состоит в том, что*

$$I_i(f_1, \alpha) = I_i(f_2, \alpha) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{12.1}$$

Необходимость этого условия уже была установлена. Докажем достаточность условия, исходя из справедливости (12.1).

Пусть φ_1 и φ_2 — функции вычетов, соответственно, функций f_1 и f_2. Положим

$$\psi(z, t) = e^{(1-t)\ln\varphi_1 + t\ln\varphi_2}, \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{12.2}$$

где берутся непрерывные ветви функций $\ln\varphi_1$ и $\ln\varphi_2$, удовлетворяющие равенству

$$\ln\varphi_1(a_0) = \ln\varphi_2(a_0). \tag{12.3}$$

Условие (12.3) может быть удовлетворено, так как в соответствии с (10.6)

$$\varphi_1(a_0) = \varphi_2(a_0).$$

Покажем, что функция $\psi(z, t)$ удовлетворяет условиям, которым подчинена функция вычетов в лемме 10.2, независимо от значения величины t.

Прежде всего из аналитичности и необращения в нуль в S функций φ_1 и φ_2 вытекает аналитичность и необращение в нуль $\psi(z, t)$ в S при $0 \leqslant t \leqslant 1$. Покажем, что $\psi(z, t)$ удовлетворяет условиям (10.6).

Проверим вначале соотношение

$$\ln\varphi_1\Big|_{a_0}^{a_i} = \ln\varphi_2\Big|_{a_0}^{a_i} \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{12.4}$$

Действительные части логарифмов в точках a_1 и a_i равны, так как φ_1 и φ_2 подчинены (10.6).

Условие (12.1), записанное в виде

$$\arg \varphi_1 \Big|_{a_0}^{a_i} = \arg \varphi_2 \Big|_{a_0}^{a_i},$$

обеспечивает справедливость (12.4). Из (12.4) следует, что для ветвей логарифма, для которых справедливо (12.3), имеет место

$$\ln \varphi_1(a_i) = \ln \varphi_2(a_i) \quad (i=1, 2, \ldots, n). \tag{12.5}$$

Используя (12.5) в равенстве (12.2), находим, что

$$\psi(a_i, t) = e^{\ln \varphi_1(a_i)} = \varphi_1(a_i) \quad (i=1, 2, \ldots, n).$$

Таким образом, функция $\psi(z, t)$ удовлетворяет условиям (10.6).

В соответствии с леммой 10.2 $\psi(z, t)$ является функцией вычетов мероморфной относительно z функции

$$f(z, t) = e^{\int \frac{\psi B}{A} dz}, \tag{12.6}$$

обладающей характеристическим множеством (α).

Из (12.6) следует, что

$$f(z, 0) = c_1 f_1(z) \quad (c_1 \neq 0),$$
$$f(z, 1) = c_2 f_2(z) \quad (c_2 \neq 0),$$

где c_1 и c_2—постоянные. Функция

$$\frac{f(z, t)}{c_1^{1-t} \quad c_2^t} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{12.7}$$

определяет требуемую деформацию функции f_1 в f_2.

Каноническая (α)-проекция преобразования f. Условимся называть функцию $F(z, \alpha, J)$ (α)-*проекцией* внутреннего преобразования f, если f обладает характеристическим множеством (α) и целочисленными инвариантами (J) относительно (α). Мы видели,

что в случае, когда функция f мероморфна, она допускает ограниченную деформацию мероморфного типа в ее (α)-проекцию.

Если множество (α^1) получается допустимой перестановкой множества (α), то, как мы сейчас покажем, (α)- и (α^1)-проекции f, рассматриваемые как функции z, тождественно совпадают. Если (J') — множество целочисленных инвариантов f относительно (α^1), то это утверждение может быть записано в виде следующего тождества относительно z:

$$F(z, \alpha, J) \equiv F(z, \alpha^1, J^1). \tag{12.8}$$

Напомним, что при определении канонической функции использовались как функции g_i и c_i от (α), так и J_i Если

$$\left(a_1^1, \ldots, a_n^1\right) = \pi\left(a_1, \ldots, a_n\right),$$

то легко проверить, что при переходе от (α)- к (α^1)-проекции f имеет место аналогичная перестановка π функций g_i, c_i и величин $J_i\,(i=1, 2, \ldots, n)$, тогда как g_0 и c_0 сохраняют свое значение. Полином Лагранжа $P(z, c)$ является, таким образом, инвариантом этой замены, что и доказывает (12.8).

Если f допустимо деформируется с помощью семейства $f^t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$ внутренних преобразований и (α^t)— характеристическое множество f^t, то (α^t)-проекция F^t функции f^t производит деформацию (α)-проекции F^0 с помощью семейства канонических функций. Если $M(z, \alpha)$ есть моногенная функция относительно (α), ветвью которой является функция F^0, то

$$F^t = M(z, \alpha^t) \qquad (0 \leqslant t \leqslant 1),$$

при условии, что для каждого t выбираются соответствующие ветви $M(z, \alpha^t)$. Введенная деформация F^t

называется *канонической*. В этих терминах можно утверждать: необходимое и достаточное условие того, чтобы две мероморфные функции f_1 и f_2, обладающие одним и тем же характеристическим множеством (β), были финально ограниченными и мероморфно эквивалентными, состоит в том, что их (β)-проекции допускают каноническую деформацию друг в друга. Последнее условие является условием того, что две (β)-проекции являются ветвями одной и той же функции $M(z, \alpha)$, моногенной относительно (α). Таким образом, теорема 11.2 позволяет сформулировать следующую теорему:

Теорема 12.2. *Необходимое и достаточное условие того, чтобы две допустимые мероморфные функции f_1 и f_2, обладающие одним и тем же характеристическим множеством (β), являлись финально ограниченными и мероморфно эквивалентными, состоит в том, что или*

1) $\mu > 0$ *или* $\mu = 0$ *и* m *нечетно, или*

2) $\mu = 0$, $m = 4, 6, 8, \ldots$ *и инварианты* (J^1) *и* (J^2) *функций* f^1 *и* f^2 *относительно* (β) *принадлежат одной и той же категории, или*

3) $\mu = 0$, $m = 2$ *и* $(J^1) = (J^2)$.

В заключение этого параграфа сформулируем следующую теорему:

Теорема 12.3. а) *Любые две допустимые мероморфные функции f^1 и f^2, обладающие одним и тем же характеристическим множеством (β), являются полуограниченно и мероморфно эквивалентными, за исключением случая $\mu = 0$ и $m = 2$.*

б) *В случае $\mu = 0$, $m = 2$ и полюса в a_1, f^1 и f^2 эквивалентны в смысле* а) *тогда и только тогда, когда их инварианты I_1 относительно (a_0, a_1) равны между собой. Если же a_1 — нуль, то f^1 и f^2 эквивалентны*

тогда и только тогда, когда абсолютные величины их инвариантов I_1 относительно (a_0, a_1) равны между собой.

Утверждение а) вытекает из теоремы 12.2, исключая случай, когда $\mu=0$, $m=4, 6, 8, \ldots$ и (J^1) и (J^2) принадлежат противоположным категориям. В последнем случае деформируем сначала f^1 в ее (β)-проекцию F^1. Затем продолжаем F^1 по (α) вдоль любого допустимого пути (α^t), ведущего к множеству (α^1), которое получается из (β) допустимой нечетной перестановкой. В соответствии с леммой 9.2 каноническая функция F^*, в которую таким образом продолжается функция F^1, обладает множеством инвариантов (J^*) относительно (β), имеющим категорию, противоположную категории (J^1), и, следовательно, ту же самую категорию, что и (J^2). Из теоремы 12.2 2) следует, что F может быть финально-ограниченно и мероморфно деформирована в f^2. Тем самым утверждение а) доказано.

Необходимые условия эквивалентности f^1 и f^2, выраженные в б), были уже сформулированы в лемме 9.4.

Перейдем к достаточным условиям. В случае, когда инварианты I_1 относительно (β) равны, ограниченная деформация переводит f^1 в f^2. Остается случай двух нулей, когда инварианты I_1 относительно (β) равны и противоположны по знаку. В этом случае мы будем рассматривать S как гиперболическую плоскость и совершим гиперболическое вращение вокруг гиперболической середины отрезка, соединяющего a_0 и a_1, переводящее a_0 в a_1. Пусть η^t—аналитическая изотопная деформация S, определенная таким образом для $t\,(0 \leqslant t \leqslant 1)$. Сложная функция $f^1\,\eta^t$ деформирует f^1 в функцию f^*, обладающую в соответствии с (9.15)

тем же инвариантом I_1 относительно (β), что и f^2. Следовательно, f^* может быть ограниченно деформирована в f^2, что и доказывает утверждение б).

§ 13. Эквивалентность внутренних преобразований

Пусть f — внутреннее преобразование S, обладающее характеристическим множеством (α). В силу теоремы Стоилова (см.) существует такой гомеоморфизм ζ односвязной области R z-плоскости в S, что сложная функция $f\zeta$ является мероморфной в R. Если граница R содержит более одной точки, то R может быть конформно отображена на S. В этом случае мы можем предполагать, что ζ является гомеоморфизмом, переводящим S в себя, и будем говорить, что f относится *к случаю А*.

Случай, когда граница R состоит из одной точки, сводится к случаю A предварительной ограниченной деформацией на S функции f. С этой целью рассмотрим столь малое положительное постоянное ε, что все точки (β) лежат в круге $\{|z|<1-2\varepsilon\}$.

Пусть ζ^t — изотопная деформация S в $S'=\{|z|<1-\varepsilon\}$, оставляющая неподвижными точки S, для которых $|z|\leqslant 1-2\varepsilon$. Таким образом, ζ' есть гомеоморфизм S в S'. Сложная функция $f\zeta^t$ деформирует f в функцию f_1, также определенную в S. Функция f_1 относится к случаю A, так как риманов образ S при отображении $w=f_1(s)$ покрывает риманов образ S при отображении $w=f_1(z)$. Этот риманов образ конформно эквивалентен подобласти R, граница которой содержит более одной точки.

Таким образом, относительно допустимых внутренних преобразований S можно сформулировать следующую лемму:

Лемма 13.1. *Всякое допустимое внутреннее преобразование f^* области S допускает ограниченную деформацию в функцию f, для которой существует такой гомеоморфизм ζ области S, что функция $f\zeta$ мероморфна в S.*

Воспользуемся каноническими функциями $M(z, \alpha)$, моногенными относительно (α), которые рассмотрены в предыдущем параграфе.

Пусть η^t — изотопная деформация S, начинающаяся тождественным преобразованием, и (α^t)—образ (β) при отображении η^t. Характеристическое множество функции

$$M(\eta^t, \alpha^t) \quad (0 \leqslant t \leqslant 1) \tag{13.1}$$

остается все время равным (β). Пусть, например, a_i есть нуль (β); тогда $\eta^t(a_i) = a_i^t$ и

$$M\left(a_i^t, \alpha^t\right) = 0,$$

так как (α^t) есть характеристическое множество

$$M(z, \alpha^t).$$

Сформулируем фундаментальную теорему:

Теорема 13.1. *Всякое внутреннее преобразование f, обладающее характеристическим множеством (β), допускает ограниченную деформацию в свою каноническую (β)-проекцию.*

В силу леммы 13.1 можно предполагать, что существует такой гомеоморфизм ζ области S, что функция $f\zeta$ мероморфна в S.

С цѐлью упрощения доказательства определим следующие вспомогательные функции:

$\zeta(z)$ — гомеоморфизм S, относительно которого функция $f\zeta$ мероморфна в S;

$\eta(z)$ — преобразование S, обратное ζ;

$\lambda(z)$ — мероморфная функция $f\zeta$; характеристическим множеством функции $\lambda(z)$ является образ (β) при отображении η;

η^t — изотопная деформация S, порождающая η и начинающаяся тождественным преобразованием $(0 \leqslant t \leqslant 1)$;

(α^t) — образ (β) при отображении η^t, отвечающем значению t-параметра деформации;

F_1 — (α^1)-проекция $F(z, \alpha^1, r)$ функции λ;

λ^t — ограниченная деформация мероморфного типа функции λ в F_1 $(0 \leqslant t \leqslant 1)$;

$M(z, \alpha)$ — моногенная относительно (α) функция, ветвью которой является $F(z, \alpha, r)$.

Искомая деформация f определится с помощью двух деформаций, сохраняющих неизменным характеристическое множество (β).

Первая деформация определяется сложной функцией

$$\lambda^t \eta \quad (0 \leqslant t \leqslant 1). \tag{13.2}$$

При $t=0$ эта функция приводится к f и при $t=1$ становится равной функции $F_1\eta$. Характеристическое множество функции $\lambda^t\eta$ совпадает с характеристическим множеством функции $\lambda\eta$ и является множеством (β).

Вторая деформация определяется с помощью функций

$$M[\eta^t(z), \alpha^t] \quad (0 \leqslant t \leqslant 1), \tag{13.3}$$

где t уменьшается от 1 до 0. Как уже замечено в связи с (13.1), в течение этой деформации характеристическое множество остается неизменным и равным (β).

При $t=1$ мы отправляемся от ветви

$$M(z, \alpha) = F(z, \alpha, r),$$

соответствующей множеству (α^1). Когда $t=1$, функция (13.3) приводится к

$$M(\eta, \alpha^1)=F_1\eta.$$

При $t=0$ функция (13.3) становится равной $M(z, \beta)$, являющейся (β)-проекцией функции f. Характеристическим множеством этой функции является множество (β), а инвариантами — инварианты (J) функции f. Последнее утверждение следует из того, что функция (13.3) получена из функции f с помощью ограниченной деформации.

В результате последовательного применения деформации (13.2) и деформации (13.3) (последняя — при убывающем t) функция f деформируется в свою (β)-проекцию, т. е. мы пришли к желаемому результату.

Классы деформаций, на которые можно разделить мероморфные функции в смысле нижеприведенной теоремы, не нарушаются в результате включения или исключения внутренних преобразований, не являющихся мероморфными функциями.

Теорема 13.2. *Две мероморфные функции f_1 и f_2, обладающие одним и тем же характеристическим множеством (β), являются ограниченно, финально ограниченно или полуограниченно эквивалентными в том и только в том случае, когда они мероморфно эквивалентны в том же смысле.*

Пусть F_1 и F_2 — соответственно (β)-проекции функций f_1 и f_2. Функции f_1 и f_2 ограниченно и мероморфно деформируемы в функции F_1 и F_2. Всякой допустимой деформации f^t функции f_1 в f_2, при которой характеристическим множеством f^t является множество (α^t), соответствует деформация F^t функции F_1 в F_2 с помощью (α^t)-проекции функции f^t. Деформация F^t будет ограниченной, финально ограниченной или полуограни-

ченной в том же смысле, что и деформация f^t. Кроме того, F^t является деформацией мероморфного типа, что и доказывает теорему.

Следствие 13.1. *Условия, накладываемые на инварианты* (I) *двух внутренних преобразований* f_1 *и* f_2 *с одним и тем же характеристическим множеством, совместно с необходимыми и достаточными условиями эквивалентности* f_1 *и* f_2 *в любом смысле, упомянутом в теореме, в точности совпадают с данными в* § 12 *условиями эквивалентности мероморфных функций в том же смысле.*

Функции f_1 и f_2 и их (β)-проекции F_1 и F_2 обладают одним и тем же характеристическим множеством (β), одними и теми же целыми числами μ и m и, наконец, одними и теми же инвариантами (I^1) и (I^2) относительно (β). В соответствии с теоремой (13.2) эквивалентность f_1 и f_2 в определенном смысле влечет за собой мероморфную эквивалентность F_1 и F_2 в том же смысле и вытекает из последней. Условия для мероморфной эквивалентности в терминах μ, m, (I^1) и (I^2) являются, таким образом, и условиями для эквивалентности f_1 и f_2 в определенном смысле.

Теорема доказана.

§ 14. Частные случаи $m=0$ и $m=1$

Как и прежде, допускается μ прообразов точек ветвления. В случае $m=0$ или 1 не существует инвариантов I_i. Построение функции, обладающей заданным характеристическим множеством, данное в § 6, остается в силе и в этом случае. При $m=1$ мы предполагаем, что a_0 является нулем. Случай полюса сводится к предыдущему рассмотрением функции $\frac{1}{f}$.

В мероморфном случае функция вычетов φ определяется равенством

$$\frac{f'}{f}=\frac{\varphi B}{(z-a_0)^m}$$

как в случае $m=0$, так и в случае $m=1$. Каноническая функция, обладающая заданным характеристическим множеством, может быть представлена в виде

$$F_m(z, \alpha)=e^{\int \frac{B(z)\,dz}{B(a_0)(z-a_0)^m}} \quad (m=0 \text{ или } 1).$$

Функция вычетов должна удовлетворять условию

$$\varphi(a_0)=\frac{1}{B(a_0)} \quad (m=1),$$

быть аналитической и не обращаться на S в нуль.

Если f_1 и f_2 — две мероморфные функции, обладающие одним характеристическим множеством (α) и функциями вычетов соответственно φ_1 и φ_2, то семейство функций

$$e^{\int \frac{\varphi_1^{1-t}\varphi_2^t B\,dz}{(z-z_0)^m}} \quad (0 \leqslant t \leqslant 1)$$

производит ограниченную и мероморфную деформацию функции cf_1 в функцию cf_2, где c — константа. Отсюда следует, что f_1 и f_2 ограниченно и мероморфно эквивалентны. Следуя рассуждениям, проведенным в доказательстве теоремы 13.1, покажем, что любое внутреннее преобразование f, обладающее характеристическим множеством (α), может быть ограниченно деформировано в свою (α)-проекцию $F_m(z, \alpha)$.

Резюмируем получаемые таким образом существенные результаты.

Теорема 14.1. *При $m=0$ или 1 всякое внутреннее преобразование f с характеристическим множест-*

вом (α) *может быть ограниченно деформировано в свою* (α)*-проекцию* $F_m(z, \alpha)$. *Эта деформация будет мероморфной, если* f — *мероморфная функция.*

В частном случае $m=0$ и $\mu=0$ характеристическое множество (α) пусто. В качестве $B(z)$ можно взять 1, а в качестве канонической функции, в которую можно допустимо деформировать всякое внутреннее преобразование, обладающее пустым характеристическим множеством, — функцию e^z.

§ 15. Свойства покрытий последовательностей мероморфных преобразований S

Мы будем рассматривать бесконечные последовательности $[f_k]$ мероморфных преобразований S, обладающих одним и тем же характеристическим множеством (α). Число m нулей и полюсов в множестве

$$(a_0, a_1, \ldots, a_n)=(a) \tag{15.1}$$

предполагается большим или равным 2. Последовательность $[f_k]$, каждая функция которой является мероморфной и в которой никакие две функции f_k не принадлежат одному и тому же классу ограниченных деформаций, будем называть *модельной последовательностью*. Нас будет интересовать множество W точек w-сферы, являющихся значениями функций $w=f_k(z)$ модельной последовательности для $z \in S$. Мы увидим, что множество W покрывает каждую точку w-сферы бесконечно много раз, если (15.1) содержит как нули, так и полюсы. Если же (15.1) состоит только из нулей, то множество W будет покрывать каждую точку (исключая $w=\infty$) w-сферы бесконечно много раз, при условии, что f_k не сходится равномерно к нулю на компактном подмножестве области S.

Мы будем пользоваться следующим определением Каратеодори:

Последовательность $[F_n]$ мероморфных в области R функций от z *равномерно сходится внутри* R к функции F, если $[F_n]$ равномерно сходится к F в смысле метрики w-сферы на каждом замкнутом подмножестве R. Функция F является или мероморфной в R, или сводится к $F \equiv \infty$.

Предположим, что каждая функция F_n является мероморфной в S и обладает характеристическим множеством (α). Если $[F_n]$ равномерно сходится к F внутри S, то или F тождественно равна нулю или ∞, или же F обладает характеристическим множеством (α). Если $[F_n]$ равномерно сходится внутри $S-(\alpha)$ к функции $F \not\equiv 0, \infty$, то $[F_n]$ равномерно сходится внутри всей области S. Если функции F_n не имеют полюсов, то это утверждение остается в силе при условии, что $F \not\equiv 0$. Эти результаты следуют из классических теорем.

Основные результаты этого параграфа непосредственно вытекают из теорем о нормальных семействах функций. Семейство M мероморфных в области R z-плоскости функций называется *нормальным*, если для произвольной последовательности $[F_n]$ функций семейства существует подпоследовательность, которая равномерно сходится внутри R к функции F или ∞. Согласно теореме Жюлиа необходимым и достаточным условием того, чтобы M было нормальным семейством в R, является нормальность M в некоторой окрестности каждой точки R (см. Монтель, стр. 37). Следующее свойство связывает теорию нормальных семейств с теоремой Пикара. Если семейство M не является нормальным в R, то каждая точка w-сферы, исключая, может быть, две точки, оказывается покрытой бесконечно много раз значениями функций $f(z)$ семейства, опреде-

ленного в R. В частности, если M не является нормальным в R, то в R существует по крайней мере одна точка, ни в какой окрестности которой семейство не является нормальным. Такая точка называется точкой J, и образы произвольной окрестности точки J покрывают w-сферу, исключая самое большее две точки, бесконечно много раз.

Пусть R — подобласть S. Модельная последовательность $[f_k]$, ни одна подпоследовательность которой не сходится равномерно к 0 или ∞, называется *собственной* в R.

Докажем следующую лемму:

Лемма 15.1. *Модельная последовательность, собственная в $S-(\alpha)$, не является нормальным семейством в $S-(\alpha)$.*

Предположим, что лемма несправедлива и что подпоследовательность $[F_n]$ данной модельной последовательности равномерно сходится внутри $S-(\alpha)$ к функции F. Функция F аналитична в $S-(\alpha)$ и нигде не обращается в нуль в этой области. Из определения функции вычетов вытекает, что последовательность $[\varphi_n]$ функций вычетов, соответствующих функциями F_n, равномерно сходится внутри $S-(\alpha)$ к функции φ, удовлетворяющей соотношению

$$\frac{F'}{F}=\varphi\frac{B}{A}, \tag{15.2}$$

аналитической в $S-(\alpha)$ и нигде в $S-(\alpha)$ не обращающейся в нуль. Следовательно, функции φ_n всюду в S сходятся к функции φ, которая является аналитической в S и ни в одной точке этой области не обращается в нуль. Тогда в соответствии с теоремой 10.1 последовательности инвариантов I_i^n функций F_n должны также сходиться. Так как инварианты I_i^n, соответствующие

различным n, отличаются на целые числа, то отсюда следует, что для всех n, превосходящих некоторое число n_0, инварианты I_i^n не зависят от n.

Это, однако, противоречит сделанному предположению, согласно которому члены последовательности $[f_n]$ принадлежат различным классам ограниченных деформаций.

Лемма доказана.

Сформулируем лемму относительно квазинормальных последовательностей (см. Монтель, стр. 61).

Лемма 15.2. *Пусть $[F_n]$ — последовательность мероморфных в окрестности N точки z_0, аналитических и не обращающихся в нуль в $N - z_0$ функций. Если $[F_n]$ равномерно сходится внутри $N - z_0$ к ∞ (0), но не сходится равномерно внутри N, то для достаточно больших n функция F_n принимает любое наперед заданное значение, исключая ∞, 0, в некоторой точке z из N.*

Два случая, упоминаемые в этой лемме, сводятся один к другому с помощью замены функций F_n функциями $\frac{1}{F_n}$. Случай, когда $F \equiv \infty$, рассматривается в цитированной выше работе.

Точка z_0 называется *покрывающей точкой* относительно модельной последовательности $[f_n]$, если все w-образы точек z произвольной окрестности z_0, даваемые функциями f_k ($k=1,2, \ldots,$) модельной последовательности $[f_k]$, покрывают точки w-сферы, исключая самое большее две точки 0 и ∞, бесконечно много раз. Отсюда следует первая теорема покрытия:

Теорема 15.1. *Пусть $[f_k]$ — модельная последовательность мероморфных функций.*

I. *Если $[f_k]$ является собственной в $S - (\alpha)$, то*

в $S-(\alpha)$ существует по крайней мере одна покрывающая точка относительно $[f_k]$.

II. *Если некоторая подпоследовательность $[f_k]$ равномерно сходится внутри в $S-(\alpha)$ к $\infty(0)$, то покрывающей точкой относительно $[f_k]$ является каждый нуль (полюс) множества (α).*

Один из случаев I или II всегда имеет место.

В случае I семейство $[f_k]$ не является нормальным в $S-(\alpha)$, в соответствии с леммой 15.1. Но тогда в $S-(\alpha)$ существует точка z_0 типа J. В любой окрестности точки z_0 относительно $S-(\alpha)$ функции последовательности $[f_k]$ не принимают значений $w=0$ и $w=\infty$. Следовательно, всякое другое значение принимается этими функциями бесконечно много раз. Таким образом, точка z_0 является покрывающей точкой относительно $[f_k]$. В случае II теорема следует из леммы 15.2.

Следствие. *Если $[f_k]$ — модельная последовательность, то в S существует по крайней мере одна покрывающая точка, исключая единственный случай, когда (α) не имеет полюсов и $[f_k]$ в S равномерно сходится к нулю.*

Напомним, что мы исключили из рассмотрения случай, когда множество (α) не содержит нулей. Рассмотрение этого случая приводит к результатам, аналогичным случаю отсутствия полюсов в множестве (α).

Если данная модельная последовательность не является собственной, то можно перейти к собственной последовательности, заменяя каждую функцию f_k функцией $c_k f_k$, где постоянные c_k выбраны надлежащим образом. В частности, достаточно постоянные c_k выбрать так, чтобы в некоторой точке S, отличной от точек (α), нижняя грань $|c_k f_k|$ была положительной.

Следующая теорема является следствием теоремы Блоха *):

Теорема 15.2. *Если ни одна подпоследовательность модельной последовательности* $[f_k]$ *не сходится в* S *к* 0 *и если характеристическое множество* (α) *не содержит полюсов, то для любой как угодно большой положительной константы* r *можно найти функцию* $f_{k(r)}$ *последовательности и в* w*-плоскости — круговую область* D_r *радиуса* r *такие, что* D_r *является взаимно однозначным образом некоторой подобласти* S *при отображении* $f_{k(r)}$.

Эта теорема следует из теоремы Блоха при условии, что значения

$$|f_k'| \quad (k=1,2,\ldots,) \tag{15.3}$$

не ограничены на некотором компактном подмножестве области S.

Пусть S_c — круг радиуса $c<1$, концентрический с S. Если для каждого c значения (15.3) ограничены в S_c числом M_c, то $|f_k|$ ограничены независимо от k в каждой. области S_c, и семейство $[f_k]$ является нормальным в S. Но последовательность $[f_k]$ является собственной, так как, по предположению, никакая ее подпоследовательность не сходится равномерно к нулю. Это, однако, противоречит лемме 15.1. Таким образом, для некоторого $c<1$ значения (15.3) не ограничены в S. Следовательно, в S_c существуют точки z и значения k, для которых $|f_k'|$ произвольно велико.

Теорема доказана.

Предыдущая теорема может быть обобщена следующим образом:

---

*) См. Привалов, гл. VIII. (*Прим. ред.*)

Положим I_0 равным 0. Назовем последовательность $[f_k]$ мероморфных функций, обладающих заданным характеристическим множеством, *модельной последовательностью относительно двух точек* (a_r, a_s) множества (α), если никакие две пары (I_r, I_s) и (I_r^*, I_s^*), относящиеся к различным функциям последовательности $[f_k]$, не удовлетворяют условию

$$I_s^* - I_r^* = I_s - I_r. \tag{15.4}$$

Если a_r и a_s не являются одновременно полюсами, то мы можем предполагать, что a_r есть нуль, и изменить обозначение таким образом, чтобы $a_r = a_0$. Условие (15.4) примет тогда вид

$$I_s^* = I_s. \tag{15.5}$$

Если же обе точки a_r и a_s являются полюсами, то каждую функцию f_k можно заменить функцией $\frac{1}{f_k}$, имея в виду, что их функции вычетов равны по величине и противоположны по знаку.

Лемма 15.1 может быть теперь заменена следующей леммой:

Лемма 15.3. *Последовательность* $[f_k]$, *модельная относительно* a_r *и* a_s, *собственная в* $N - (a_r, a_s)$, *где* N — *любая связная окрестность точек* a_r *и* a_s, *не является нормальным семейством в* $N - (a_r, a_s)$.

Доказательство этой леммы проводится по существу так же, как и доказательство леммы 15.1, если принять a_r за a_0. Лемма 15.2 остается без изменения. Теорему 15.1 можно тогда сформулировать следующим образом:

Теорема 15.3. *Пусть* $[f_k]$ — *модельная относительно* a_r *и* a_s *последовательность и* N — *любая связная окрестность точек* a_r *и* a_s.

I. *Если последовательность* $[f_k]$ *является собственной в* $N-(a_r, a_s)$, *то в* $N-(a_r, a_s)$ *существует по крайней мере одна покрывающая точка относительно* $[f_k]$.

II. *Если внутри* $N-(a_r, a_s)$ *некоторая подпоследовательность* $[f_k]$ *равномерно сходится к* ∞ (0), *то каждый нуль (полюс) пары* (a_r, a_s) *является покрывающей точкой относительно* $[f_k]$. *Один из случаев I или II непременно имеет место.*

В силу определения точек типа J множество точек J относительно модельной последовательности $[f_k]$ замкнуто в S.

Сформулируем следующую теорему:

Теорема 15.4. *Если модельная последовательность* $[f_k]$ *является собственной в каждой подобласти* R, *то множество* E *точек* J *в* R *совершенно (возможно пусто) относительно* R. *Каждая непустая компонента* E_1 *множества* E *содержит по крайней мере один нуль и один полюс множества* (α) *или же имеет предельную точку на границе* R.

Никакая точка z_0 множества E не может быть изолированной. Для доказательства этого рассмотрим такую окрестность N точки z_0, которая не содержит точек множества (α). Из равномерной сходимости подпоследовательности $[F_n]$ из $[f_k]$ внутри $N-z_0$ к функции F вытекает аналитичность функции F в $N-z_0$ и необращение ее в нуль, так как $[f_k]$ последовательность собственная в $N-z_0$ и ни одна из функций f_k не имеет нулей и полюсов в $N-z_0$. Отсюда следует, что $[F_n]$ равномерно сходится внутри N, так что z_0 не может быть точкой типа J. Таким образом, z_0 не является изолированной точкой E и E совершенно относительно R.

Предположим, что $\overline{E}_1$ принадлежит R. Покажем, что E_1 содержит по крайней мере один нуль и один

полюс (α). Предположим, в частности, что E_1 не содержит полюсов множества (α). Тогда E_1 можно было бы отделить в R от полюсов (α) и границы R конечным множеством (g) регулярных жордановых кривых, не проходящих через точки множества E и множества (α) и ограничивающих подобласть R_1 области R, содержащую E_1. Последовательность $[f_k]$ будет тогда нормальным семейством в окрестности N множества (g). Тогда подпоследовательность $[F_n]$ последовательности $[f_k]$ сходилась бы внутри N равномерно к функции F, аналитической и не обращающейся в нуль в $N-(\alpha)$. Отсюда следовало бы, что $[F_n]$ равномерно сходится внутри R_1, т. е. что множество E_1 является пустым.

Предположение, что $\bar{E}_1$ принадлежит R и не содержит нулей множества (α), также приводит к заключению, что E_1 пусто.

Теорема доказана.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Маркушевич А. И., Теория аналитических функций, М.—Л., 1950.

Привалов И. И., Введение в теорию функций комплексного переменного, 7-е изд., М.—Л., 1945.

Каратеодори К., Конформное отображение, перевод с английского М. В. Келдыша, М.—Л., 1934.

Монтель П., Нормальные семейства аналитических функций, перевод с французского В. М. Шепелева, М. — Л., 1936.

Хаусдорф Ф., Теория множеств, перевод с немецкого Н. Б. Веденисова под редакцией и с дополнениями П. С. Александрова и А. Н. Колмогорова, М.—Л., 1937.

Fréchet M. 1. Sur quelques points du calcul fonctionel, Rendiconti, *Circolo matematico di Palermo*, 22, 1—74 (1905).

2. Sur une représentation paramètrique intriséque de la courbe continue la plus générale, *Journ. de Math.*, Sér. 9, 4, 281—297 (1925).

Kerékjártó, Vorlesungen über Topologie, т. 1, Berlin, Springer, 1923.

Kiang, Tsai-Han, Critical points of harmonic functions and Creens functions in plane regions, *Science Quarterly, National University of Peking* 3, 113—123.

Kuratowski C., Théorémes sur l'homotopic des fonctions continues de variable complexe et leur rapports à la Théorie des fonctions analytiques, *Fund. Math.*, 33, 316—367 (1945).

Morse M. 1. The topology of pseudo-harmonic functions. *Duke Math. Jour.*, 13, 21—42 (1946).

2. A special parametrization of curves, *Bull. Amer. Math. Soc.*, 42, 915—922 (1936).

3. Singular points of vector fields under general boundary conditions, *Amer. Jour. of Math.*, 51, 165—178 (1929).

Morse M. and Heins M. 1. Topological methods in the theory of functions of a single complex variable:
I. Deformation types of locally simple curves, *Annals of Math.*, 46, 600—624 (1945).
II. Boundary values and integral characteristics of interior transformations and pseudo-harmonic functions, *там же*, 625—666.
III. Causal isomorphisms in the theory of pseudo-harmonic functions, *там же*, 47, 233—274 (1946).
2. Deformations classes of meromorphic functions and their extensions to interior transformations, *Acta Mathematica*, 79, 51—103 (1947).

Osgood W. F., Lehrbuch der Funktionentheorie, т. I. Berlin, Teubner, 1928.

Radò T., Zur Theorie der mehrdeutigen konformen Abbildungen, Szeged Univ. *Acta litt. ac. Scient.* 1. 55—64 (1922).

Stoilow. 1. Leçons sur les principes topologiques de la theorie de fonctions analytiques. *Paris, Cauthler-Villars*, 1938.
2. Du caractère topologique d'un theorème sur les fonctions metomorphes, *C. R. Acad. Sci de Paris*, 190, 251—253 (1930).

Tietze H., Sur les représentations continues des surfaces sur elles mêmes, *Comptes Rendus*, 157, 509—512.

Titchmarsh E. C., The theory of functions, Oxford, 1932.

Walsh I. L., The location of the critical points of harmonic functions, *Proc., Nat. Acad. of Sci.*, 20, 551—544 (1934).

Whitney H. 1. Regular families of curves, *Annals of Math.*, 34, 244—270 (1933).
2. On regular closed curves in the plane, *Compositio Mathematica*, 4, 276—284 (1937).

Whyburn G. T., Analitic topology, *Amer. Math. Soc., Coll. Lect. New York*, 1942.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА III

Внутренние преобразования

ГЛАВА IV

Общая теорема о порядках

ГЛАВА V

Деформации локально простых кривых и внутренних преобразований

ПРИЛОЖЕНИЕ

Классы деформаций мероморфных функций и их распространение на внутренние преобразования

Часть I

ТОПОЛОГИЧЕСКАЯ ТЕОРИЯ

Часть II

МЕРОМОРФНЫЕ ФУНКЦИИ

Редактор *Б. В. Шабат*

Технический редактор *А. Н. Никифорова* Корректор *Г. А. Скуратова*

Сдано в производство 22/IX 1950 г. Подписано к печати 8/I 1951 г. А 00518.
Бумага $84 \times 108^1/_{32} = 3{,}9$ бум. л. 12,8 печ. л. Уч.-издат. л. 9,9. Изд. № 1/917.
Цена 10 р. 15 к. Зак. 3333

Типография № 2 Управления издательств и полиграфии Исполкома Ленгорсовета. Ленинград, Социалистическая, 14.