Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

Н. И. МУСХЕЛИШВИЛИ

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ

ГРАНИЧНЫЕ ЗАДАЧИ ТЕОРИИ ФУНКЦИЙ И НЕКОТОРЫЕ ИХ ПРИЛОЖЕНИЯ К МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКЕ

Издание третье, исправленное и дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1968

517.2
М 91
УДК 517.948

Сингулярные интегральные уравнения, изд. 3-е, испр. и дополн. Н. И. Мусхелишвили. Главная редакция физико-математической литературы изд-ва «Наука», 1968.

Систематически излагается математический аппарат интегралов типа Коши и сингулярных интегральных уравнений, в разработке которого автор и его ученики принимали активное участие. Этот аппарат представляет собой эффективное средство для решения различных граничных задач теории аналитических функций. Значительная часть книги посвящена приложениям этого аппарата к решению задач теории потенциала, теории упругости и других основных разделов математической физики.

В третьем издании внесены дополнения, отражающие то новое, что появилось со времени выхода в свет второго издания, а также исправлены замеченные погрешности.

Рис. 26. Библ. 568 назв.

2-2-3
18-БЗ-39-68

ОГЛАВЛЕНИЕ

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ГЛАДКИХ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРОВ И НЕПРЕРЫВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

I. Задача сопряжения в случае гладких замкнутых контуров и непрерывного коэффициента

II. Задача Римана — Гильберта

III. Сингулярные интегральные уравнения в случае гладких замкнутых контуров и непрерывных коэффициентов

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ

I. Задача Дирихле

II. Различные представления голоморфных функций интегралами типа Коши и аналогичными

III. Решение обобщенной задачи Римана — Гильберта—Пуанкаре

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Задача сопряжения в общем случае

II. Задача обращения интегралов типа Коши в общем случае

III. Эффективное решение основных граничных задач теории гармонических функций для некоторых областей

ГЛАВА ПЯТАЯ

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

I. Сингулярные интегральные уравнения в общем случае

II. Приложение к задаче Дирихле и аналогичным задачам

III. Сингулярные интегральные уравнения, содержащие комплексно сопряженные неизвестные

IV. Приложение к некоторым смешанным задачам теории упругости

V. Краткие сведения относительно некоторых других результатов

ГЛАВА ШЕСТАЯ

СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

I. Системы сингулярных интегральных уравнений

II. Задача сопряжения для нескольких неизвестных функций

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

ПРЕДИСЛОВИЕ К ТРЕТЬЕМУ ИЗДАНИЮ

Это издание отличается от предыдущего главным образом добавлением кратких указаний на значительное число работ, опубликованных за последнее время и тесно связанных с результатами, изложенными в настоящей книге. Вследствие многочисленности таких работ я не смог бы справиться с этим без весьма существенной помощи, оказанной мне Б. В. Хведелидзе, тщательно изучившим соответствующую литературу. Выражаю ему глубокую благодарность за эту помощь, потребовавшую от него много времени и кропотливого труда. Сердечно благодарю также Г. Ф. Манджавидзе и Т. Г. Гегелиа за ряд ценных замечаний, касающихся литературы по смежным областям.

Считаю приятным долгом выразить глубокую признательность профессорам Л. Бергу (L. Berg) и Г. Шуберту (H. Schubert) — редакторам недавно вышедшего немецкого перевода этой книги (издание Германской Академии наук, Берлин, 1965 г.), а также переводчикам д-ру И. Хирхе (I. Hirche) и д-ру Р. Риделю (R. Riedel) за указание ряда опечаток и промахов, вкравшихся в русский оригинал.

В конце книги, в виде Добавления VI, помещена не опубликованная еще статья профессора Б. Боярского, любезно предоставленная мне для этой цели автором.

В заключение должен отметить, что далеко не все работы, заслуживающие внимания, могли быть упомянуты в тексте книги.

Не исключено и то, что некоторые весьма существенные работы ускользнули от нашего внимания, за что Б. В. Хведелидзе и я заранее приносим извинения их авторам.

Н. Мусхелишвили

Тбилиси, июль 1967 г.

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

В настоящем издании текст первого издания (1946 г.) подвергся весьма существенной переработке, однако общий характер книги остался прежним. Бо́льшая часть книги фактически написана заново.

Результаты, изложенные в § 26 главы I, почти непосредственно вытекающие из результатов §§ 22—25, имевшихся в главной своей части и в первом издании, позволили придать содержанию глав IV и V значительно бо́льшую общность и цельность, без заметного усложнения изложения. Таким же обобщениям, имеющим целью придать содержанию книги бо́льшую цельность, подверглись многие другие результаты.

Существенной переработке подверглась глава VI, в которой совершенно изменен метод решения граничной задачи сопряжения для систем функций: в первом издании был в основном применен метод И. Племеля, опирающийся на теорию интегральных уравнений Фредгольма, здесь же применяется метод, опирающийся на теорию сингулярных интегральных уравнений, гораздо проще приводящий к цели.

Из настоящего издания изъяты некоторые приложения к плоской теории упругости (отдел IV главы IV первого издания), которые я счел целесообразным перенести в третье издание (1949 г.) другой моей книги «Некоторые основные задачи математической теории упругости» (четвертое издание вышло в 1954 г.). Однако взамен приведены (в отделе IV главы V) некоторые другие приложения к теории упругости менее элементарного характера.

Со времени выхода первого издания настоящей книги и английского ее перевода, выполненного И. Р. М. Радоком (Гронинген, 1953 г.), появилось большое число работ, тесно связанных с изложенными в этой книге результатами. Несмотря на то, что многие из этих работ представляют значительный интерес, они, за редкими исключениями, не повлияли на содержание настоящего издания, так как изложение соответствующих результатов вывело бы нас далеко за намеченные рамки книги и нарушило бы относительно элементарный ее характер.

Однако я постарался привести краткие указания относительно всех более или менее важных новых результатов, полученных другими авторами. Неоценимую для меня помощь в этом направлении оказали мне мои коллеги Н. П. Векуа, Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе, особенно последний, который, кроме того, прочел всю рукопись и сделал ряд ценных замечаний. Приношу названным лицам самую глубокую благодарность.

Н. Мусхелишвили

Тбилиси, апрель 1960 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Эта книга рассчитана на довольно широкий круг читателей, в частности на интересующихся приложениями к теории упругости, гидромеханике и к другим разделам математической физики. Книга доступна для лиц, знакомых с основами теории функций комплексного переменного и теории интегральных уравнений Фредгольма. Для облегчения чтения книги я выделял формулировки предложений, ход доказательства которых не представляет существенного самостоятельного интереса так, чтобы доказательства можно было опускать без ущерба для понимания сущности дела. Кроме того, там, где это было возможно, главы и их отделы, посвященные различным приложениям, сделаны независимыми друг от друга. Изложенные в этой книге методы могут быть, как я надеюсь, эффективно использованы для решения многих задач прикладного характера. Некоторые простейшие приложения к теории потенциала, теории упругости и гидромеханике даны в самой книге.

Толчком к написанию книги послужили мои доклады на семинаре в Тбилисском математическом институте в 1940—1942 гг. Под влиянием ряда результатов, полученных участниками семинара, и главным образом благодаря прекрасным работам И. Н. Векуа круг вопросов, которыми я предполагал заняться, существенно изменился, и я могу с большим и вполне понятным удовлетворением отметить, что бо́льшую часть содержания этой книги следует рассматривать как результат коллективной работы молодых сотрудников Тбилисского математического института Академии наук Грузинской ССР вместе с И. Н. Векуа и со мной.

Н. Мусхелишвили

Тбилиси, осень 1944 г.

ВВЕДЕНИЕ

1°. Теория сингулярных интегральных уравнений приобретает за последние годы все большее значение в прикладных вопросах. В этой книге рассматриваются лишь одномерные [1]) сингулярные уравнения, содержащие главные значения интегралов по Коши [2]).

Начало теории таких уравнений было положено работами А. Пуанкаре и Д. Гильберта почти непосредственно вслед за возникновением классической теории интегральных уравнений Фредгольма. Однако теория сингулярных интегральных уравнений долгое время не обращала на себя должного внимания математиков.

Но за последнее время теория одномерных сингулярных интегральных уравнений значительно продвинулась вперед, и ей теперь можно придать вполне законченный вид.

Теория эта становится особенно эффективной, если привлечь к рассмотрению решение одной граничной задачи, обычно называемой задачей Римана или задачей Гильберта и которую мы называем задачей сопряжения.

Поэтому в нашем изложении теория сингулярных уравнений тесно связана с указанной граничной задачей.

Имея в виду главным образом приложения к различным задачам математической физики, мы налагаем на искомые и задаваемые функции, фигурирующие в изучаемых интегральных уравнениях или в граничных условиях рассматриваемых задач, некоторые ограничения, значительно упрощающие изложение, но не влияющие на законченность теории.

Основным аппаратом исследования и решения являются интегралы типа Коши, элементарная теория которых изложена в главе I, содержащей, кроме того, ряд непосредственных простейших приложений.

Особое внимание читателя я обращаю на результаты §§ 22—26 главы I. Несколько кропотливый труд, требующийся для их доказательства, окупается тем, что они значительно облегчают получение, притом прямым путем, ряда новых результатов, важных с точки зрения приложений.

Результаты §§ 22—26 мы применяем в основном лишь в главах IV и V. В главах же II, III, VI мы этими результатами не пользуемся, если не считать немногих мест, которые могут быть опущены без ущерба для понимания остального. Читателю, впервые знакомящемуся с вопросом, можно рекомендовать, пропустив упомянутые параграфы, ознакомиться

---

[1]) Мы подразумеваем под этим, что область интегрирования — одномерная (линия).

[2]) Некоторые авторы предлагают заменить термин «сингулярные» термином «особые». Я оставляю первый, достаточно уже укоренившийся термин для обозначения интегральных уравнений с ядрами типа Коши (которые только и рассматриваются в настоящей книге); термин же «особые» было бы целесообразно, как мне кажется, применять в более широком смысле, для обозначения интегральных уравнений любых типов, отличных от типа Фредгольма.

сперва с содержанием глав II, III, VI, представляющих довольно самостоятельное целое, а затем уже вернуться к пропущенным местам.

2°. Ряд весьма важных вопросов, которые могли бы быть охвачены заглавием настоящей книги, вовсе в ней не затронут во избежание чрезмерного увеличения объема.

Прежде всего, мы вовсе не касаемся здесь теории многомерных сингулярных уравнений, хотя за последнее время теория эта значительно продвинулась вперед [1]). Далее, мы не рассматриваем также нелинейные уравнения и нелинейные граничные задачи теории функций комплексного переменного, которым за последнее время также посвящено не мало важных работ. Не рассматриваем мы также интегральные уравнения с разностными ядрами, несмотря на значительный практический и теоретический интерес, который они представляют [2]).

Весьма важное значение приобретают за последнее время граничные задачи, связанные с так называемыми обобщенными аналитическими функциями. Этих вопросов мы в настоящей книге также не касаемся, оставаясь в рамках классической теории аналитических функций. Читателей, интересующихся вопросами теории обобщенных аналитических функций и ее приложениями, мы отсылаем к монографии И. Н. Векуа [13], где можно найти и указания на соответствующую, уже довольно обширную, литературу.

Цитированная в настоящей книге литература дана отдельным списком (в алфавитном порядке авторов) в конце книги. При ссылках называются автор и номер его произведения, заключенный в квадратные скобки.

В ряде случаев, при кратком упоминании тех или иных приложений излагаемых в этой книге результатов, ссылки делаются не на первоначальные статьи их авторов, а на вышедшие позднее монографии или обобщающие статьи тех же авторов. Кроме того, некоторые результаты, заслуживающие внимания, вовсе не упоминаются, если они изложены в достаточно распространенных книгах или обобщающих статьях, на которые и делаются ссылки.

3°. За последнее время теория сингулярных интегральных уравнений в том виде, как она изложена в настоящей книге, все чаще находит применения при решении некоторых задач теоретической физики, в частности, задач квантовой теории поля. К сожалению, работы, опубликованные в физических журналах, оказались, до самого последнего времени, вне поля моего зрения. Поэтому я ограничусь указанием на статью Н. Н. Боголюбова, Б. В. Медведева, А. Н. Тавхелидзе [1], в которой дан краткий обзор некоторых работ по квантовой теории поля, связанных методами, изложенными в настоящей книге.

4°. Для понимания основного текста книги достаточно знакомства лишь с элементарной теорией функций комплексного переменного и началами теории интегральных уравнений Фредгольма.

Сказанное не относится к отдельным параграфам, в которых используются (правда, элементарные) понятия функционального анализа, а также к специальным параграфам, в которых даются краткие сведения о некоторых результатах различных авторов. Эти параграфы можно опускать без ущерба для понимания остального текста книги.

---

[1]) Краткие указания относительно литературы по этому вопросу даны в конце книги, в § 138.

[2]) Интересующихся этими вопросами мы отсылаем к статье М. Г. Крейна [1], где они могут найти также указания на соответствующую литературу. См. также книгу В. И. Смирнова [4], т. IV.

ГЛАВА ПЕРВАЯ

ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ИНТЕГРАЛОВ ТИПА КОШИ

I. Некоторые определения и вспомогательные предложения

В этом отделе даются определения некоторых понятий и доказывается ряд простых предложений, которыми мы часто будем пользоваться во всем дальнейшем.

§ 1. Гладкие и кусочно-гладкие линии. Во всем дальнейшем мы будем рассматривать лишь линии, расположенные на плоскости. Под системой координат Oxy на этой плоскости мы всегда будем подразумевать прямолинейную, прямоугольную систему, ориентированную так, что для наблюдателя, смотрящего вдоль оси Ox, ось Oy направлена влево.

В соответствии с этим положительным направлением отсчета углов на плоскости мы будем считать направление, обратное движению часовой стрелки, и, говоря об углах, отсчитываемых от данного направления, мы всегда будем иметь в виду углы, снабженные соответствующим знаком.

Во всем дальнейшем, говоря о *гладких* линиях, мы будем всегда подразумевать, что эти линии — *простые*, т. е. не пересекают сами себя[1]).

1°. *Разомкнутой гладкой дугой* или *разомкнутым гладким контуром*[2]) мы будем называть линию, которую можно представить параметрически следующим образом:

$$x = x(s), \quad y = y(s), \quad s_a \leqslant s \leqslant s_b, \tag{1,1}$$

где s_a и s_b — некоторые конечные постоянные, а $x(s)$, $y(s)$ — непрерывные в указанном интервале функции, удовлетворяющие следующим условиям:

I. Они имеют в интервале (s_a, s_b), включая концы интервала, непрерывные производные $x'(s)$, $y'(s)$, не обращающиеся одновременно в нуль, причем под $x'(s)$, $y'(s)$ на концах интервала следует понимать $x'(s_a+0)$, $y'(s_a+0)$ и $x'(s_b-0)$, $y'(s_b-0)$.

II. Различным значениям параметра s в указанном интервале соответствуют различные точки (x, y).

Первое условие выражает тот факт, что рассматриваемая дуга, которую мы обозначим через L,— *гладкая*, т. е. что направление касательной к ней изменяется непрерывно (см. ниже); второе условие выражает то, что дуга L — *простая и разомкнутая*.

Точки a и b, соответствующие значениям s_a и s_b, представляют собой *концы* дуги. Согласно (1,1) концы a, b причисляются к дуге L; если требуется отметить это явно, мы будем говорить, что L — *закрытая* дуга. Если концы не причисляются к дуге (этот случай будет всегда оговорен особо), то мы будем говорить, что дуга *открытая*.

---

[1]) Точное значение этого термина будет указано ниже.

[2]) Слова «дуга» и «контур» являются у нас синонимами; однако первое мы будем чаще применять к разомкнутым линиям, а второе — к замкнутым.

На каждой рассматриваемой гладкой дуге мы будем выбирать определенное положительное направление, а именно то, которое соответствует возрастанию параметра s. Дугу, имеющую концами a и b, мы будем часто обозначать через ab, выбирая порядок букв так, чтобы положительное направление вело от a к b. Точки a и b будем иногда называть соответственно начальной и конечной точками дуги.

Гладкая дуга L, очевидно, спрямляема; поэтому в качестве параметра s мы можем взять длину дуги, отсчитываемую от некоторой фиксированной точки на L и снабженную определенным знаком в зависимости от направления отсчета. Так мы и будем поступать в дальнейшем. В соответствии с этим мы будем иметь:

$$[x'(s)]^2+[y'(s)]^2=1. \tag{1,2}$$

Параметр s в этом случае мы будем называть дуговой абсциссой, соответствующей точке дуги L.

Точку, соответствующую дуговой абсциссе s, мы будем обозначать через $t(s)$ или просто через t, а точки, соответствующие дуговым абсциссам s_0, s_1, s_2 и т. д.,— через $t(s_0)$, $t(s_1)$, $t(s_2)$ и т. д., или еще через t_0, t_1, t_2 и т. д.

Под касательной к линии L мы всегда будем подразумевать положительную касательную, проведенную в сторону возрастания s. Если θ обозначает угол, составляемый касательной в точке t с осью Ox и отсчитываемый от этой последней, то

$$\cos\theta=x'(s), \qquad \sin\theta=y'(s). \tag{1,3}$$

Эти формулы показывают, что угол, составляемый касательной с каким-либо постоянным направлением, изменяется непрерывно[1]) вместе с s. Очевидно, что и обратно, если θ изменяется непрерывно вместе с s, то $x'(s)$, $y'(s)$ — непрерывные функции от s.

В дальнейшем аффикс точки t мы будем обозначать обычно той же буквой t, в соответствии с чем будем писать: $t = x + iy$, если x и y — координаты точки t. Если s — дуговая абсцисса точки $t = t(s)$, то

$$t'=\frac{dt}{ds}=\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds}=\cos\theta+i\sin\theta=e^{i\theta}, \tag{1,4}$$

где θ обозначает то же, что выше. Очевидно, что

$$|t'|=\left|\frac{dt}{ds}\right|=1. \tag{1,5}$$

2°. Замкнутым гладким контуром или замкнутой гладкой дугой мы будем называть линию L, определяемую так же, как разомкнутая гладкая дуга, с той лишь разницей, что различным значениям параметра s в (1,1) соответствуют различные точки (x, y), кроме значений $s = s_a$, $s = s_b$, которым соответствует одна и та же точка, так что $x(s_b) = x(s_a)$, $y(s_b) = y(s_a)$, причем $x'(s_b - 0) = x'(s_a + 0)$, $y'(s_b - 0) = y'(s_a + 0)$. Первая пара предыдущих равенств выражает, что кривая L замкнутая, а вторая — что направление ее касательной изменяется непрерывно и при переходе точки касания через точку, соответствующую значениям s_a, s_b дуговой абсциссы. Эту последнюю точку можно

---

[1]) Угол θ определен с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, где k — целое число. Однако совершенно ясно, что мы имеем в виду, говоря о непрерывном изменении этого угла.

назвать точкой скачка дуговой абсциссы; она отличается от прочих точек контура L не по существу, а лишь благодаря выбранному параметрическому представлению, и ее, очевидно, можно поместить в любой точке контура L. Так, например, рассматривая какую-либо дугу ab, принадлежащую данному замкнутому контуру, мы будем обычно считать (часто не оговаривая этого особо), что эта точка помещается вне дуги ab или на одном из ее концов.

3°. Гладкой линией (подразумевается: простой) мы будем называть совокупность конечного числа замкнутых или разомкнутых гладких контуров (дуг), не имеющих общих точек (в том числе и концов).

Таким образом, согласно нашему определению, линия (даже гладкая) может состоять из нескольких раздельно лежащих непрерывных частей, тогда как дуга или контур состоит лишь из одной непрерывной части.

4°. Простой кусочно-гладкой дугой (или простым кусочно-гладким контуром) мы будем называть

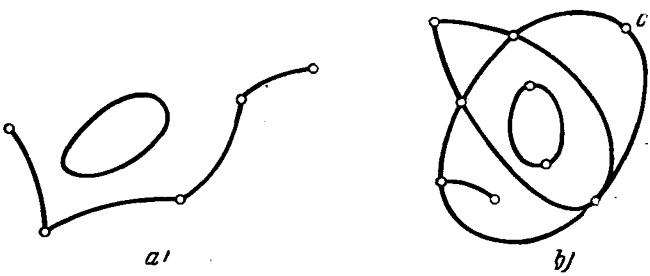

Рис. 1.

линию, состоящую из конечной последовательности гладких разомкнутых дуг $a_1a_2, a_2a_3, \ldots, a_{n-1}a_n$, расположенных так, что конечная точка каждой предыдущей дуги совпадает с начальной точкой последующей; предполагается, что эти дуги не имеют других общих точек, кроме упомянутых и кроме, быть может, начальной точки a_1 первой дуги и конечной точки a_n последней. Если точка a_n не совпадает с a_1, то кусочно-гладкая дуга разомкнута; в противном случае она замкнута.

Простой кусочно-гладкой линией мы будем называть совокупность конечного числа простых кусочно-гладких дуг (контуров), не имеющих общих точек (рис. 1, a). Такая линия отличается от гладкой линии лишь тем, что может иметь угловые точки (в конечном числе).

Наконец, кусочно-гладкой линией (без добавления слова «простая») мы будем называть совокупность конечного числа кусочно-гладких дуг (контуров), которые могут иметь конечное число общих точек.

5°. Мы можем всегда считать, что данная гладкая или кусочно-гладкая линия L (в смысле только что данного определения) состоит лишь из (простых) гладких разомкнутых дуг, не имеющих общих точек, за исключением, быть может, концов. Для этого, очевидно, достаточно, в случае надобности, разбить некоторые из входящих в состав L замкнутых контуров и разомкнутых дуг на несколько частей (рис. 1, b).

Во всем дальнейшем, если противное не оговорено, мы будем всегда считать, что кусочно-гладкая линия представлена именно таким образом. Исключение мы будем обычно делать лишь в случае гладких линий, т. е. линий, состоящих из простых замкнутых или разомкнутых гладких контуров без общих точек.

6°. Точки, которые служат концами одной или нескольких гладких дуг, составляющих кусочно-гладкую линию L, мы будем называть **узлами** линии L. Если данная точка является концом лишь одной дуги, то такую точку мы будем называть также **концом линии** L; таким образом, концы линии L являются, согласно нашему определению, частным случаем узлов. Частным случаем узлов являются также угловые точки, где сходятся по две гладких дуги.

К числу узлов мы можем, по нашему усмотрению, в зависимости от удобства, **относить и любые другие точки линии** L, т. е. точки, расположенные на ее гладких частях, так что линия может быть и гладкой в окрестности данного узла (точка c на рис. 1, b). Введение таких дополнительных узлов очень часто способствует упрощению изложения.

Точки линии L, отличные от узлов, мы будем называть **обыкновенными точками**.

7°. Напомним, наконец, что в соответствии с принятым выше условием (п. 1°), всегда предполагается, что на каждой гладкой дуге (гладком контуре) выбрано определенное положительное направление. Эти положительные направления на отдельных дугах, составляющих L, определяют положительное направление на L.

8°. Условимся, наконец, под **частью** линии L всегда подразумевать часть, состоящую из конечного числа дуг, а не какое-либо иное множество точек линии L.

§ 2. Некоторые свойства гладких линий. Во всем дальнейшем нам придется иметь дело лишь с гладкими или кусочно-гладкими линиями и опираться на следующее свойство гладких линий[1]).

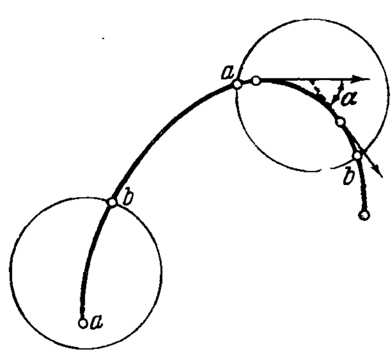

Рис. 2.

Пусть L — заданная гладкая линия, а α_0 — произвольно заданный острый угол, отличный от нуля $\left(\text{т. е. } 0 < \alpha_0 < \frac{\pi}{2}\right)$. Существует положительное число $R_0 = R_0(\alpha_0)$, зависящее от α_0, но не от положения точки t на L, обладающее следующими свойствами:

I. Часть L, содержащаяся в круге Γ любого радиуса $R \leqslant R_0$ с центром в любой точке t на L, состоит из одной-единственной разомкнутой дуги ab (рис. 2).

II. Нетупой угол α между касательными в любых двух точках дуги ab (рис. 2) не превосходит α_0.

Из предыдущего вытекают еще следующие свойства:

III. Нетупой угол между хордой, стягивающей любые две точки дуги ab, и касательной в произвольной точке этой дуги не превосходит α_0. В самом деле, на дуге ab всегда найдется точка, касательная в которой

[1]) Доказательства свойств I и II даны в Добавлении I в конце книги.

параллельна упомянутой хорде, и наше утверждение вытекает из свойства II.

IV. Пусть β_0 — любой угол, такой, что $\alpha_0 < \beta_0 \leqslant \frac{\pi}{2}$, и пусть Δ_a, Δ_b — две параллельные прямые, проходящие через a и b и составляющие с касательной в какой-либо точке t дуги ab нетупой угол $\beta \geqslant \beta_0$. Тогда всякая прямая Δ, параллельная прямым Δ_a, Δ_b и находящаяся между ними, пересекает ab ровно в одной точке (рис. 3).

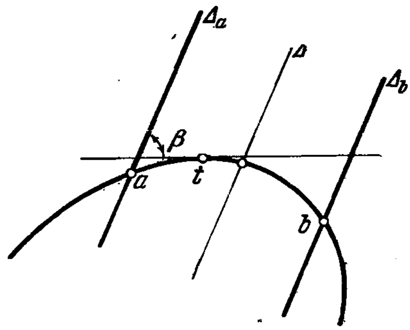

Рис. 3.

Действительно, то, что Δ пересекает ab по крайней мере в одной точке, очевидно; то, что Δ не пересечет ab ни в какой другой точке, следует из свойства III и из условия $\beta \geqslant \beta_0 > \alpha_0$.

V. Пусть Δ — прямая, проходящая через любую точку t на ab, составляющая с касательной в t нетупой угол, не меньший $\beta_0 > \alpha_0$, и пусть t' — любая другая точка на ab. Тогда нетупой угол между Δ и хордой, стягивающей t и t', не меньше $\omega_0 = \beta_0 - \alpha_0 > 0$[1]).

Для сокращения речи мы будем называть $R_0 = R_0(\alpha_0)$ *стандартным радиусом*, соответствующим заданному углу α_0, круг Γ_0 радиуса R_0 — *стандартным кругом*, а дугу ab, вырезаемую из линии L кругом Γ_0, описанным из какой-либо ее точки, как из центра,— *стандартной дугой*.

Пусть $L = ab$ — некоторая стандартная дуга, t_0 — какая-либо постоянная ее точка (которая может совпадать с a или b), t — переменная ее точка, а r — длина хорды, стягивающей t_0 и t. Имеем:

$$\frac{dr}{ds} = \pm \cos \alpha, \tag{2,1}$$

где s — дуговая абсцисса точки t, а α — острый угол между упомянутой хордой и касательной в t; верхний знак берется для части t_0b, а нижний — для части at_0. Так как в силу сказанного выше $0 \leqslant \alpha \leqslant \alpha_0 < \frac{\pi}{2}$, из предыдущей формулы следует, что r — монотонная функция дуговой абсциссы s на каждой из частей at_0, t_0b (убывающая на первой, возрастающая на второй) и что, следовательно, положение t на каждой из этих частей однозначно определяется заданием r.

Из (2,1) следует неравенство, которое мы часто будем применять:

$$|ds| \leqslant K\,|dr|, \tag{2,2}$$

где K — положительная постоянная, не зависящая от положения t_0 на ab.

---

[1]) Если ω — нетупой угол между Δ и хордой, α — нетупой угол между касательной в t и хордой, β — нетупой угол между касательной в t и Δ, то либо $\omega = \beta - \alpha \geqslant \beta_0 - \alpha_0$, либо $\omega = \beta + \alpha$ $\left(\text{это может быть при } \beta + \alpha \leqslant \frac{\pi}{2}\right)$ и тогда $\omega \geqslant \beta_0 > \beta_0 - \alpha_0$, либо $\omega = \pi - \beta - \alpha$ $\left(\text{это может быть при } \beta + \alpha \geqslant \frac{\pi}{2}\right)$ и тогда $\omega \geqslant \frac{\pi}{2} - \alpha \geqslant \beta_0 - \alpha_0$.

Рассматривая одну из дуг at_0, t_0b, интегрируя обе части (2,1) в пределах s_1, s_2 и применяя теорему о среднем значении, получаем для любой пары точек t_1, t_2 на at_0 или на t_0b:

$$|r_2-r_1|=k|s_2-s_1|, \quad 0<k_0\leqslant k\leqslant 1, \tag{2,3}$$

где k_0 — постоянная, а r_1, r_2 — расстояния t_1 и t_2 до t_0.

Взяв t_1 в качестве t_0, получаем еще:

$$r_{12}=k\sigma_{12}, \tag{2,4}$$

где r_{12} — расстояние между точками t_1 и t_2, а $\sigma_{12}=|s_2-s_1|$ — длина части L, заключенной между t_1 и t_2.

Легко видеть, что соотношение вида (2,4) имеет место и в том случае, когда L — произвольный разомкнутый или замкнутый гладкий контур, если в случае замкнутого контура понимать под частью L, заключенной между t_1 и t_2, ту часть, которая имеет меньшую длину.

§ 3. Условие H (условие Гельдера). 1°. Пусть $\varphi(\zeta)$ — функция переменной (вообще комплексной) ζ, заданная на некотором множестве Z значений этой переменной. Мы будем говорить, что $\varphi(\zeta)$ *удовлетворяет условию* H на этом множестве, если для любых двух значений ζ', ζ'' переменной ζ на этом множестве

$$|\varphi(\zeta'')-\varphi(\zeta')|\leqslant A|\zeta''-\zeta'|^{\mu}, \tag{3,1}$$

где A и μ — положительные постоянные. Постоянную A мы будем называть *коэффициентом*, а μ — *показателем* условия H. Если требуется явно указать показатель μ, то мы будем говорить, что $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$; значение постоянной A нас обычно интересовать не будет.

Ясно, что если $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то тому же условию удовлетворяет $|\varphi(\zeta)|$.

Ясно также, что если множество Z ограничено и если функция $\varphi(\zeta)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то она удовлетворяет и условию $H(\nu)$ при всяком $\nu\leqslant\mu$.

Понятие условия H естественно обобщается на случай функций нескольких переменных. Именно, пусть $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ — функция переменных $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$, заданная на некотором множестве Z значений этих переменных. Мы будем говорить, что $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ удовлетворяет условию H, или, подробнее, условию $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, на этом множестве, если для любых двух совокупностей $\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n'$ и $\zeta_1'', \zeta_2'', \ldots, \zeta_n''$ значений переменных $\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n$ из этого множества

$$|\varphi(\zeta_1'', \zeta_2'', \ldots, \zeta_n'')-\varphi(\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n')|\leqslant A_1|\zeta_1''-\zeta_1'|^{\mu_1}+\ldots+A_n|\zeta_n''-\zeta_n'|^{\mu_n}, \tag{3,2}$$

где $A_1, \ldots, A_n$, $\mu_1, \ldots, \mu_n$ — положительные постоянные.

Если множество Z ограничено, то из условия (3,2) вытекает условие более простого вида:

$$|\varphi(\zeta_1'', \zeta_2'', \ldots, \zeta_n'')-\varphi(\zeta_1', \zeta_2', \ldots, \zeta_n')|\leqslant A\{|\zeta_1''-\zeta_1'|^{\mu}+\ldots+|\zeta_n''-\zeta_n'|^{\mu}\}, \tag{3,3}$$

которое получим, заменив в (3,2) показатели $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$ наименьшим из них, а коэффициенты $A_1, A_2, \ldots, A_n$ достаточно большой постоянной A. В этом случае, вместо того чтобы писать $H(\mu, \mu, \ldots, \mu)$, мы будем писать просто $H(\mu)$.

2°. Если функция $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ удовлетворяет условию $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, то, в частности,

$$|\varphi(\zeta_1, \ldots, \zeta_{k-1}, \zeta_k'', \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n) - \varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_{k-1}, \zeta_k', \zeta_{k+1}, \ldots, \zeta_n)| \leqslant$$
$$\leqslant A_k |\zeta_k'' - \zeta_k'|^{\mu_k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

т. е. функция $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ удовлетворяет условию H по каждой переменной в отдельности, именно условию $H(\mu_k)$ по переменной ζ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), притом равномерно относительно остальных переменных; последнее означает, что коэффициент и показатель условия $H(\mu_k)$ не зависят от значений этих переменных. Легко видеть, что и обратно, если функция $\varphi(\zeta_1, \zeta_2, \ldots, \zeta_n)$ удовлетворяет условию H по каждой из переменных в отдельности, а именно условию $H(\mu_k)$ по переменной ζ_k, притом равномерно относительно остальных переменных, то она удовлетворяет условию H, а именно условию $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$, по совокупности переменных, т. е. условию (3,2).

Во всем дальнейшем, говоря, что некоторая функция нескольких переменных удовлетворяет условию H по каждой из переменных в отдельности, мы всегда будем предполагать, что это условие удовлетворяется равномерно относительно остальных переменных, т. е. что функция удовлетворяет условию H по совокупности переменных.

Замечание 1. Отметим следующее почти очевидное предложение. Пусть функция $u = u(\zeta)$, заданная на некотором множестве Z, удовлетворяет условию $H(\mu)$, и пусть функция $f(u)$, заданная на множестве значений, принимаемых $u = u(\zeta)$, удовлетворяет условию $H(\nu)$ по переменной u. Тогда функция $F(\zeta) = f(u(\zeta))$ удовлетворяет условию $H(\mu \cdot \nu)$ по переменной ζ. В частности, если $\nu = 1$, то $F(\zeta)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$. Если, например, $u(\zeta)$ принимает действительные значения и $f(u)$ имеет ограниченную производную по u, то $F(\zeta) = f(u(\zeta))$ удовлетворяет условию $H(\mu)$.

Замечание 2. Условие, названное нами условием H, часто называют условием Гельдера (O. Hölder). В частном случае, когда $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = 1$, условие это обращается в условие Липшица; иногда это последнее название распространяют и на условие Гельдера.

Одним из простейших примеров функций, удовлетворяющих условию $H(1)$, т. е. условию Липшица, являются функции действительного переменного, имеющие ограниченную производную.

§ 4. Функции класса H на гладкой линии. 1°. В дальнейшем нам придется применять понятие условия H главным образом к функциям точки t заданной гладкой или кусочно-гладкой линии.

Через t здесь и в дальнейшем мы будем обозначать, согласно сказанному в § 1 (п. 1°), как саму точку $t(x, y)$, так и ее аффикс, т. е. комплексное число $t = x + iy$.

2°. Мы начнем для простоты с рассмотрения случая, когда заданная линия L — (простая) гладкая дуга, разомкнутая или замкнутая[1]).

---

[1]) О случае кусочно-гладкой линии будет сказано в § 8, п. 2°.

Пусть $\varphi(t)$ — функция точки t линии L, удовлетворяющая условию $H(\mu)$, т. е. такая, что для любых двух точек t_1, t_2 на L

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant A|t_2-t_1|^{\mu}, \tag{4,1}$$

где A и μ — положительные постоянные.

Функция, удовлетворяющая условию H на дуге L, очевидно, непрерывна на L. Легко видеть, что если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (4,1) для любой пары точек t_1, t_2, расстояние r_{12} между которыми не превышает некоторой положительной постоянной δ, то она будет удовлетворять условию $H(\mu)$ и на всей дуге L. Действительно, если (4,1) имеет место всегда, когда $r_{12} \leqslant \delta$, то на всей дуге L мы будем иметь:

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant A' r_{12}^{\mu},$$

где A' — наибольшее из чисел A и $2M/\delta^{\mu}$, а M — верхняя грань $|\varphi(t)|$ на L.

Далее, на основании формулы (2,4) получаем, что условие $H(\mu)$ эквивалентно условию

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant A\sigma_{12}^{\mu}, \tag{4,2}$$

где $\sigma_{12} = |s_2 - s_1|$ обозначает длину части дуги L, заключенной между t_1 и t_2 (в случае, когда L — замкнутый контур, берем ту из двух частей L, которая имеет меньшую длину).

Из сказанного на основании (2,3) вытекает, что условие $H(\mu)$ эквивалентно требованию, чтобы на каждой стандартной дуге ab, принадлежащей L,

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant A|r_2-r_1|^{\mu}, \tag{4,3}$$

где $r_1 = |t_1 - a|$, $r_2 = |t_2 - a|$.

В неравенствах (4,2), (4,3) A обозначает, как и в (4,1), некоторую положительную постоянную; во всех трех упомянутых неравенствах можно понимать под A одну и ту же величину, заменив, в случае надобности, в некоторых из этих неравенств постоянную A большей величиной.

Заметим еще, что при $\mu > 1$ из (4,2) вытекает, что в каждой точке дуги $\frac{d\varphi}{ds} = 0$ и, следовательно, $\varphi = \text{const}$. Так как этот случай интереса не представляет, мы всегда принимаем:

$$0 < \mu \leqslant 1. \tag{4,4}$$

Напомним, что если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то она удовлетворяет и условию $H(\nu)$ при всяком $\nu \leqslant \mu$.

3°. Все сказанное выше естественно обобщается на случай, когда функция $\varphi(t)$ задана на любой гладкой линии, могущей состоять из нескольких раздельно расположенных частей. Ввиду очевидности такого обобщения мы на нем останавливаться не будем.

4°. О функции $\varphi(t)$, заданной на гладкой линии L и удовлетворяющей условию $H(\mu)$, мы будем говорить, что она *принадлежит классу* $H(\mu)$ на L, или, если не требуется указания значения μ,— классу H.

Если же $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H лишь в достаточно малой окрестности данного конца c (включая этот конец), мы будем говорить, что $\varphi(t)$ *принадлежит классу* H в окрестности c.

5°. Понятие функции класса H естественно обобщается на случай функций $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ нескольких точек $t_1, t_2, \ldots, t_n$, принадлежащих данной гладкой линии L. А именно, мы будем говорить, что функция $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ принадлежит классу $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$ на L, если эта функция удовлетворяет условию $H(\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n)$; если не требуется указать значения показателей $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n$, то мы будем говорить просто, что $\varphi(t_1, t_2, \ldots, t_n)$ принадлежит классу H.

В случае, когда $\mu_1 = \mu_2 = \ldots = \mu_n = \mu$, мы будем вместо $H(\mu, \mu, \ldots, \mu)$ писать $H(\mu)$. По той же причине, что и выше, мы будем всегда считать, что

$$0 < \mu_j \leqslant 1, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad 0 < \mu \leqslant 1.$$

§ 5. Простейшие признаки принадлежности классу H функций, заданных на гладких линиях. В этом и двух следующих параграфах мы укажем несколько простейших признаков, позволяющих во многих случаях сразу установить, принадлежит ли рассматриваемая функция, заданная на гладкой линии L, классу H или, что то же, удовлетворяет ли рассматриваемая функция условию H.

Во всем этом параграфе, а также в двух следующих, под L подразумевается гладкая разомкнутая дуга, так как распространение указываемых результатов на случай произвольной гладкой линии никаких затруднений не представляет.

Нам придется воспользоваться ниже двумя известными неравенствами, которые мы здесь напомним. Пусть σ_1 и σ_2 — любые положительные числа и пусть $0 \leqslant \mu \leqslant 1$. Тогда

$$\frac{\sigma_1^\mu + \sigma_2^\mu}{(\sigma_1 + \sigma_2)^\mu} \leqslant 2^{1-\mu}, \tag{5,1}$$

$$\frac{|\sigma_1^\mu - \sigma_2^\mu|}{|\sigma_1 - \sigma_2|^\mu} \leqslant 1 \quad (\sigma_1 \neq \sigma_2). \tag{5,2}$$

Для доказательства этих неравенств можно, не нарушая общности, считать $\sigma_1 \geqslant \sigma_2$; полагая $\sigma = \frac{\sigma_2}{\sigma_1}$, мы придаем предыдущим неравенствам вид

$$\frac{1 + \sigma^\mu}{(1+\sigma)^\mu} \leqslant 2^{1-\mu} \quad (0 \leqslant \sigma \leqslant 1), \qquad \frac{1 - \sigma^\mu}{(1-\sigma)^\mu} \leqslant 1 \quad (0 \leqslant \sigma < 1).$$

Последние же неравенства устанавливаются совершенно элементарно, путем определения максимумов функций от σ, фигурирующих в левых частях.

Переходим теперь к установлению интересующих нас признаков.

1°. Пусть разомкнутая дуга $L = ab$ разбита точкой t_0 на две части: at_0 и t_0b. Если функция $\varphi(t)$ *непрерывна на* L и удовлетворяет условию $H(\mu)$ на каждой из частей at_0 и t_0b в отдельности, то она удовлетворяет условию $H(\mu)$ и на всей дуге L.

Действительно, пусть t_1 и t_2 — две точки дуги L. Если t_1 и t_2 находятся по одну и ту же сторону от t_0, то неравенство (4,2) соблюдено по условию. Если же t_1 и t_2 находятся по разные стороны от t_0, то, обозначая через σ_1 и σ_2 длины дуг t_1t_0 и t_0t_2 и принимая во внимание (5,1), получаем:

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant |\varphi(t_2) - \varphi(t_0)| + |\varphi(t_1) - \varphi(t_0)| \leqslant A(\sigma_1^\mu + \sigma_2^\mu) \leqslant$$
$$\leqslant 2^{1-\mu} A |\sigma_1 + \sigma_2|^\mu = 2^{1-\mu} A \sigma_{12}^\mu,$$

и наше утверждение доказано.

2°. Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ удовлетворяют на L соответственно условиям $H(\mu)$ и $H(\nu)$, то и функции $\varphi(t)+\psi(t)$, $\varphi(t)\cdot\psi(t)$ удовлетворяют на L условию $H(\lambda)$, где λ — наименьшее из чисел μ, ν. Например, для произведения $\varphi(t)\cdot\psi(t)$ имеем:

$$|\varphi(t_2)\psi(t_2)-\varphi(t_1)\psi(t_1)|\leqslant|\varphi(t_2)\psi(t_2)-\varphi(t_2)\psi(t_1)|+$$
$$+|\varphi(t_2)\psi(t_1)-\varphi(t_1)\psi(t_1)|\leqslant M|\psi(t_2)-\psi(t_1)|+N|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|,$$

где M и N — верхние грани $|\varphi(t)|$ и $|\psi(t)|$ на L. Теперь наше утверждение очевидно.

3°. Если $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию $H(\mu)$, причем $\varphi(t)\neq 0$ всюду на L, то $1/\varphi(t)$ также удовлетворяет на L условию $H(\mu)$. Доказательство аналогично предыдущему.

4°. Пусть t и t_0 — соответственно переменная и фиксированная точки на L.

Функция от t

$$r^\mu=|t-t_0|^\mu, \quad 0<\mu\leqslant 1,$$

удовлетворяет на L условию $H(\mu)$. Действительно, в силу (5,2)

$$|r_2^\mu-r_1^\mu|\leqslant|r_2-r_1|^\mu.$$

То же имеет место при фиксированном t и переменном t_0. Следовательно, функция $|t-t_0|^\mu$ двух переменных t и t_0 удовлетворяет на L условию $H(\mu)$.

5°. Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию $H(\mu)$ и пусть $0\leqslant\lambda<\mu\leqslant 1$. Тогда функция от t

$$\psi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|^\lambda},$$

где t_0 — фиксированная точка на L[1]), удовлетворяет на L условию $H(\mu-\lambda)$.

Не нарушая общности, можно, очевидно, считать, что t находится на стандартной дуге ab, вырезаемой из L стандартным кругом с центром в t_0; кроме того, на основании п. 1° можно ограничиться случаем, когда t находится, например, на части t_0b. Будем определять положение t на t_0b величиной $r=|t-t_0|$ (см. § 2) и будем вместо $\varphi(t)$, $\psi(t)$ писать иногда $\varphi(r)$, $\psi(r)$. Имеем, считая $h>0$ (что не нарушает общности) и полагая еще $\varphi(t)-\varphi(t_0)=\omega(r)$:

$$|\psi(r+h)-\psi(r)|=\left|\frac{\omega(r+h)}{(r+h)^\lambda}-\frac{\omega(r)}{r^\lambda}\right|=$$
$$=\left|\frac{\omega(r+h)-\omega(r)}{(r+h)^\lambda}+\omega(r)\left\{\frac{1}{(r+h)^\lambda}-\frac{1}{r^\lambda}\right\}\right|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{|\omega(r+h)-\omega(r)|}{(r+h)^\lambda}+|\omega(r)|\frac{(r+h)^\lambda-r^\lambda}{r^\lambda(r+h)^\lambda}.$$

Принимая теперь во внимание, что

$$|\omega(r+h)-\omega(r)|\leqslant Ah^\mu, \quad |\omega(r)|=|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant Ar^\mu,$$

получаем:

$$|\psi(r+h)-\psi(r)|\leqslant\Delta_1+\Delta_2,$$

---

[1]) Подразумевается, что $\psi(t_0)=\lim\limits_{t\to t_0}\psi(t)=0$.

где

$$\Delta_1 = \frac{Ah^\mu}{(r+h)^\lambda}, \quad \Delta_2 = Ar^{\mu-\lambda}\frac{(r+h)^\lambda - r^\lambda}{(r+h)^\lambda}.$$

Имеем, далее,

$$\Delta_1 = A\left[\frac{h}{r+h}\right]^\lambda \cdot h^{\mu-\lambda} \leqslant Ah^{\mu-\lambda},$$

так что Δ_1 удовлетворяет требуемому условию.

Обратимся к Δ_2 и рассмотрим два возможных случая: $r \leqslant h$ и $r > h$.

В первом случае ($r \leqslant h$), применяя оценку

$$(r+h)^\lambda - r^\lambda \leqslant h^\lambda$$

(см. п. 4°), видим, что

$$\Delta_2 \leqslant A\frac{h^\mu}{(r+h)^\lambda} = A\left[\frac{h}{r+h}\right]^\lambda h^{\mu-\lambda} \leqslant Ah^{\mu-\lambda}.$$

Во втором случае ($r > h$), применяя оценку[1])

$$(r+h)^\lambda - r^\lambda = r^\lambda\left[\left(1+\frac{h}{r}\right)^\lambda - 1\right] \leqslant \lambda h r^{\lambda-1},$$

убеждаемся, что

$$\Delta_2 \leqslant A\lambda h r^{\mu-\lambda-1} = A\lambda\left(\frac{h}{r}\right)^{1-\mu+\lambda} h^{\mu-\lambda} < A\lambda h^{\mu-\lambda},$$

и наше утверждение доказано.

6°. Только что приведенные оценки могут быть, очевидно, произведены независимо от положения t_0 на L; кроме того, можно поменять ролями t и t_0. Поэтому мы можем утверждать, что функция двух переменных t и t_0

$$\psi(t_0, t) = \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{|t - t_0|^\lambda}$$

удовлетворяет на L условию H ($\mu - \lambda$), если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H (μ) и если $0 \leqslant \lambda < \mu$.

7°. Рассмотрим, наконец, функцию $\varphi(t, \tau)$, где t — точка на L, а τ — параметр, пробегающий некоторое множество T значений. Пусть $\varphi(t, \tau)$ удовлетворяет по обеим переменным t и τ условию H (μ), когда $t \in L$, $\tau \in$ T. Покажем, что при этих условиях функция

$$\psi(t_0, t, \tau) = \frac{\varphi(t, \tau) - \varphi(t_0, \tau)}{|t - t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < \mu,$$

где t_0, так же как и t, находится на L, удовлетворяет условию $H(\mu - \lambda)$ по всем трем переменным. Относительно t_0 и t это уже доказано.

Чтобы доказать утверждение относительно τ, положим:

$$\Delta = \psi(t_0, t, \tau+h) - \psi(t_0, t, \tau) = \frac{\varphi(t, \tau+h) - \varphi(t_0, \tau+h)}{|t-t_0|^\lambda} - \frac{\varphi(t, \tau) - \varphi(t_0, \tau)}{|t-t_0|^\lambda} =$$

$$= \frac{\varphi(t, \tau+h) - \varphi(t, \tau)}{|t-t_0|^\lambda} - \frac{\varphi(t_0, \tau+h) - \varphi(t_0, \tau)}{|t-t_0|^\lambda}.$$

---

[1]) При $0 \leqslant \mu \leqslant 1$ и $x \geqslant 0$

$$(1+x)^\mu - 1 \leqslant \mu x;$$

действительно, полагая $f(x) = (1+x)^\mu - \mu x - 1$, имеем:

$$f(0) = 0, \quad f'(x) \leqslant 0.$$

При $|t-t_0|\leqslant|h|$ первое выражение для рассматриваемой разности дает:

$$|\Delta|\leqslant 2A\,|t-t_0|^{\mu-\lambda}\leqslant 2A\,|h|^{\mu-\lambda}.$$

При $|t-t_0|\geqslant|h|$ второе выражение дает:

$$|\Delta|\leqslant\frac{2A\,|h|^{\mu}}{|t-t_0|^{\lambda}}\leqslant 2A\,|h|^{\mu-\lambda},$$

и наше утверждение доказано.

Ясно, что оно непосредственно распространяется на случай, когда вместо одного параметра τ мы имеем несколько параметров.

Ясно также, что утверждение останется в силе, если мы положим $\tau=t_0$. Из предыдущего непосредственно вытекает еще следующее утверждение. Пусть функция $\varphi(t_0, t)$ двух переменных t, t_0 на L удовлетворяет условию $H(\mu)$ по обеим переменным и пусть $\varphi(t_0, t_0)=0$ для всех t_0 на L. Тогда функция

$$\psi(t_0, t)=\frac{\varphi(t_0, t)}{|t-t_0|^{\lambda}},\quad 0\leqslant\lambda<\mu,$$

удовлетворяет условию $H(\mu-\lambda)$ по обеим переменным. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что

$$\varphi(t_0, t)=\varphi(t_0, t)-\varphi(t_0, t_0).$$

§ 6. Продолжение. 1°. Докажем теперь следующее предложение, которое оказывается часто полезным.

Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет на гладкой дуге L условию $H(\mu)$ и пусть $\omega(t)$ — ограниченная на L функция, имеющая производную по t [1]), кроме, быть может, значения $t=t_0$, такую, что

$$\left|\frac{d\omega}{dt}\right|<\frac{C}{|t-t_0|}\qquad(t\neq t_0),\tag{6,1}$$

где C — постоянная, а t_0 — некоторая (фиксированная) точка на L.

Тогда

$$\psi(t)=[\varphi(t)-\varphi(t_0)]\,\omega(t)$$

также удовлетворяет на L условию $H(\mu)$.

Не нарушая общности, мы можем считать, что t находится на стандартной дуге, имеющей одним из концов точку t_0. Тогда условие (6,1) эквивалентно следующему:

$$\left|\frac{d\omega}{ds}\right|<\frac{C_0}{|s-s_0|},\tag{6,1a}$$

---

[1]) Под $\dfrac{d\omega}{dt}$ мы понимаем:

$$\lim_{t_1\to t}\frac{\omega(t_1)-\omega(t)}{t_1-t}\qquad(t_1 \text{ и } t \text{ — точки на } L).$$

Очевидно, что (см. § 1, п. 1°)

$$\frac{d\omega}{dt}=\frac{d\omega}{ds}:\frac{dt}{ds}=\frac{d\omega}{ds}e^{-i\theta},$$

где θ — угол, составляемый касательной к L в точке t с осью Ox, и что поэтому

$$\left|\frac{d\omega}{dt}\right|=\left|\frac{d\omega}{ds}\right|.$$

где C_0 — постоянная, а s и s_0 — дуговые абсциссы, соответствующие t и t_0. Мы можем, далее, считать, что $\omega(t)$ принимает лишь действительные значения (так как в противном случае мы могли бы вести рассуждения отдельно для действительной и мнимой частей). Обозначая $\varphi(t)$, $\psi(t)$, $\omega(t)$ через $\varphi(s)$, $\psi(s)$, $\omega(s)$, имеем:

$$\psi(s+h)-\psi(s)=[\varphi(s+h)-\varphi(s_0)]\,\omega(s+h)-[\varphi(s)-\varphi(s_0)]\,\omega(s)=$$
$$=[\varphi(s+h)-\varphi(s)]\,\omega(s+h)+[\varphi(s)-\varphi(s_0)]\cdot[\omega(s+h)-\omega(s)].$$

Не нарушая общности, можно считать $s-s_0 \geqslant 0$, $h \geqslant 0$. Вследствие ограниченности $\omega(s)$ первое слагаемое в последней строке не превосходит по модулю C_1h^μ, где C_1 — постоянная. То же, очевидно, имеет место для второго слагаемого при $s-s_0 \leqslant h$. При $s-s_0 \geqslant h$ имеем $(0<\theta<1)$:

$$|\varphi(s)-\varphi(s_0)|\cdot|\omega(s+h)-\omega(s)|\leqslant|\varphi(s)-\varphi(s_0)|\cdot\frac{C_0h}{s-s_0+\theta h}\leqslant$$
$$\leqslant\frac{AC_0(s-s_0)^\mu h}{s-s_0+\theta h}\leqslant AC_0\left(\frac{h}{s-s_0}\right)^{1-\mu}h^\mu\leqslant AC_0h^\mu,$$

и предложение доказано.

Применим это предложение к простым примерам.

2°. Пусть t — переменная, а t_0 — фиксированная точки на L. Тогда

$$\psi(t)=|t-t_0|^\mu\ln|t-t_0|,\quad 0<\mu\leqslant 1,$$

удовлетворяет условию $H(\mu-\varepsilon)$ на L, где ε — любое положительное число, меньшее μ. Действительно, к $\psi(t)$ можно применить доказанное выше предложение, если положить:

$$\varphi(t)=|t-t_0|^{\mu-\varepsilon},\quad \omega(t)=|t-t_0|^\varepsilon\ln|t-t_0|.$$

Ясно, что t и t_0 можно поменять ролями и что $|t-t_0|^\mu\ln|t-t_0|$ удовлетворяет условию $H(\mu-\varepsilon)$ по обеим переменным t и t_0.

Более общо, если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ на L, то функция

$$\psi(t)=[\varphi(t)-\varphi(t_0)]\ln|t-t_0|$$

удовлетворяет условию $H(\mu-\varepsilon)$, где ε — любое положительное число, меньшее μ, ибо

$$\psi(t)=\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{|t-t_0|^\varepsilon}\cdot|t-t_0|^\varepsilon\ln|t-t_0|.$$

3°. Пусть t — переменная, а t_0 — фиксированная точки на L. Обозначим через

$$\vartheta=\vartheta(t_0, t)=\arg(t-t_0)+\mathrm{const}$$

угол, составляемый вектором $\overrightarrow{t_0t}$ с каким-либо фиксированным направлением и отсчитываемый от этого последнего. Этот угол определен с точностью до слагаемого вида $2k\pi$, где k — целое число. Условимся изменять $\vartheta(t_0, t)$ непрерывно, пока t перемещается по L, не переходя через точку t_0. При переходе t через t_0 (если t_0 не является концом дуги L) этот угол изменяется скачком, равным нечетному кратному π.

Легко видеть, что ограниченная функция $\omega(t)=\vartheta(t_0, t)$ удовлетворяет условию (6,1) или, что то же, условию (6,1а). Это следует из того, что $\omega(t)$ является мнимой частью функции $\ln(t-t_0)$ и что

$$\frac{d\ln(t-t_0)}{dt}=\frac{1}{t-t_0},\quad\left|\frac{d\ln(t-t_0)}{ds}\right|=\frac{1}{|t-t_0|}.$$

Условию (6,1) удовлетворяет и всякая функция $f(\vartheta)$, обладающая ограниченной производной $f'(\vartheta)$. В частности, этому условию удовлетворяет функция $e^{\gamma\vartheta}$, где γ — любая (вообще комплексная) постоянная.

Поэтому если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то функция

$$\psi(t) = [\varphi(t) - \varphi(t_0)]\, e^{\gamma\vartheta}, \quad \gamma \text{ — любая постоянная,}$$

также удовлетворяет условию $H(\mu)$.

Например, функция

$$\psi(t) = (t-t_0)^{\mu} = |t-t_0|^{\mu} e^{i\mu\vartheta}, \quad 0 < \mu \leqslant 1,$$

где $\vartheta = \vartheta(t_0, t) = \arg(t-t_0)$, удовлетворяет условию $H(\mu)$ на L, так как функция $\varphi(t) = |t-t_0|^{\mu}$ ему удовлетворяет и $\varphi(t_0) = 0$.

Точно так же, функция

$$\psi(t) = |t-t_0|^{\mu} e^{\gamma\vartheta}, \quad 0 < \mu \leqslant 1, \quad \gamma \text{ — любая постоянная,}$$

удовлетворяет условию $H(\mu)$.

Пусть $\gamma = \alpha + i\beta$, где α и β — действительные постоянные. Рассмотрим функцию

$$\psi(t) = (t-t_0)^{\gamma} = e^{\gamma(\ln|t-t_0| + i\vartheta)} = |t-t_0|^{\alpha} e^{i\beta \ln|t-t_0| + i\gamma\vartheta}.$$

Легко видеть, что функция $e^{i\beta\ln|t-t_0|+i\gamma\vartheta}$ ограничена и удовлетворяет условию (6,1). Поэтому, если $0 < \alpha \leqslant 1$, то функция $\psi(t)$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$; при $\alpha \geqslant 1$ она удовлетворяет условию $H(1)$. При $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$ эта функция, т. е. функция

$$\psi(t) = (t-t_0)^{i\beta} = e^{i\beta\ln|t-t_0| - \beta\vartheta} = \\ = e^{-\beta\vartheta}\{\cos(\beta\ln|t-t_0|) + i\sin(\beta\ln|t-t_0|)\}$$

условию H в окрестности точки t_0, очевидно, не удовлетворяет: она даже не непрерывна. Однако функция

$$\psi(t) = |t-t_0|^{\mu}(t-t_0)^{i\beta}, \quad 0 < \mu \leqslant 1,$$

удовлетворяет условию $H(\mu)$.

Ясно, что, так же как и выше, t и t_0 можно поменять ролями во всех предыдущих примерах.

Подобно предыдущему легко проверить, что если функция $\varphi(t_0, t)$ переменных t_0, t на L удовлетворяет условию $H(\mu)$ на L и если $\varphi(t_0, t_0) = 0$, то функция (ср. § 5, п. 7°)

$$\psi(t_0, t) = \frac{\varphi(t_0, t)}{(t-t_0)^{\gamma}}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < \mu,$$

удовлетворяет условию $H(\mu - \alpha)$.

4° Пусть t — переменная и t_0 — фиксированная точки на L. Рассмотрим отношение

$$\omega(t) = \frac{t-t_0}{s-s_0}$$

в окрестности точки t_0.

Легко непосредственно проверить, что $\omega(t)$ и $1/\omega(t)$ удовлетворяют условию (6,1) или, что то же самое, условию (6,1a).

Поэтому мы можем утверждать, что, например,

$$|t-t_0|^{\varepsilon}\frac{t-t_0}{s-s_0}, \quad |s-s_0|^{\varepsilon}\frac{s-s_0}{t-t_0}, \quad 0 < \varepsilon \leqslant 1,$$

удовлетворяют условию $H(\varepsilon)$. Точно так же, легко проверить, что

$$|t-t_0|^\varepsilon \frac{|t-t_0|^\mu}{|s-s_0|^\mu}, \quad |s-s_0|^\varepsilon \frac{|s-s_0|^\mu}{|t-t_0|^\mu}, \quad 0<\varepsilon\leqslant 1,$$

где μ — любая постоянная, удовлетворяют условию $H(\varepsilon)$.

И здесь, конечно, можно поменять ролями t и t_0.

§ 7. Продолжение. 1°. Приведем в заключение еще одно простое предложение. Пусть функция $f(s)$ действительного переменного s, заданная в интервале $s_1\leqslant s\leqslant s_2$, имеет непрерывную в этом интервале n-ю производную $f^{(n)}(s)$. Положим

$$F(s_0, s)=\frac{f(s)-f(s_0)}{s-s_0}, \quad s_1\leqslant s, s_0\leqslant s_2, \tag{7,1}$$

подразумевая, что

$$F(s, s)=\frac{df(s)}{ds}.$$

Тогда существуют частные производные $(n-1)$-го порядка

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0, s)}{\partial s^k\,\partial s_0^l}, \quad k+l=n-1,$$

и эти производные непрерывны при $s_1\leqslant s, s_0\leqslant s_2$. Если, кроме того, $f^{(n)}(s)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то предыдущие частные производные удовлетворяют условию $H(\mu)$ по обеим переменным s, s_0.

Все это следует из формулы

$$f(s)-f(s_0)=\int_{s_0}^{s} f'(\sigma)\,d\sigma=(s-s_0)\int_0^1 f'[s_0+u(s-s_0)]\,du, \tag{7,2}$$

откуда

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0, s)}{\partial s^k\,\partial s_0^l}=\int_0^1 u^k(1-u)^l f^{(n)}[s_0+u(s-s_0)]\,du. \tag{7,3}$$

2°. Относительно частных производных n-го порядка

$$\frac{\partial^{n}F(s_0, s)}{\partial s^k\,\partial s_0^l}, \quad k+l=n,$$

можно утверждать еще следующее. Если $f^{(n)}(s)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то эти частные производные n-го порядка представимы в виде

$$\frac{K(s_0, s)}{|s-s_0|^\lambda}, \tag{7,4}$$

где $1-\mu<\lambda=\text{const}<1$, а $K(s_0, s)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным; при этом λ можно выбрать произвольно в указанном промежутке.

Для доказательства этого утверждения мы воспользуемся формулами, представляющими некоторое видоизменение формулы (7,3)[1]), которые

---

[1]) Мы не можем непосредственно воспользоваться формулой, получаемой из (7,3) заменой n на $n+1$, так как не делается никаких предположений относительно существования производной $f^{(n+1)}(s)$.

получим следующим образом. Считая, что $k \geqslant 1$, напишем в формуле (7,3) $k-1$ вместо k и вернемся к старой переменной интегрирования $\sigma = s_0 + u(s-s_0)$. Это приводит к формуле

$$\frac{\partial^{n-1}F(s_0, s)}{\partial^{k-1}s\,\partial^l s_0} = \frac{1}{(s-s_0)^n}\int_{s_0}^{s}(\sigma-s_0)^{k-1}(s-\sigma)^l f^{(n)}(\sigma)\,d\sigma, \quad k+l=n.$$

Дифференцируя обе части по s, считая, что $l \geqslant 1$, и возвращаясь снова к переменной интегрирования u, легко получим:

$$\frac{\partial^n F(s_0, s)}{\partial^k s\,\partial^l s_0} = \frac{1}{s-s_0}\int_0^1 u^{k-1}(1-u)^{l-1}(nu-k)f^{(n)}[s_0+u(s-s_0)]\,du. \tag{7,5}$$

Аналогичные формулы тем же путем легко получим для случаев, когда одно из чисел k, l равно нулю. А именно, при $k=n$, $l=0$

$$\frac{\partial^n F(s_0, s)}{\partial s^n} = \frac{1}{s-s_0}\left\{f^{(n)}(s) - n\int_0^1 u^{n-1}f^{(n)}[s_0+u(s-s_0)]\,du\right\}; \tag{7,5a}$$

формула для случая $k=0$, $l=n$ отличается от предыдущей лишь обозначениями. Обозначая множитель при $1/(s-s_0)$ в правой части любой из этих формул через $\varphi(s_0, s)$, легко убеждаемся, что если $f^{(n)}(s)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то и $\varphi(s_0, s)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ по обеим переменным, и что $\varphi(s_0, s_0) = 0$ [1]). Следовательно, на основании сказанного в § 5 (п. 7°) эти правые части, которые можно представить так:

$$\frac{\varphi(s_0, s)}{s-s_0} = \pm\frac{\varphi(s_0, s)}{|s-s_0|^{1-\lambda}}\cdot\frac{1}{|s-s_0|^{\lambda}}, \quad 1-\mu<\lambda<1,$$

имеют вид (7,4) и наше утверждение доказано.

3°. Применим предыдущие результаты к некоторым простым, но важным примерам.

Пусть $L = ab$ — гладкая дуга. Предположим, кроме того, что угол $\theta(t)$ касательной к L в точке $t = x+iy$, отсчитываемый от какого-либо постоянного направления, удовлетворяет условию $H(\mu)$.

Линии, обладающие этим свойством, часто встречаются в приложениях. Их называют *линиями, удовлетворяющими условию Ляпунова*, или, короче, *линиями* (дугами, контурами) *Ляпунова*.

Не нарушая общности, мы можем считать, что угол θ отсчитывается от направления оси Ox. Тогда, очевидно, производные координат $x = x(s)$, $y = y(s)$ по дуговой абсциссе s

$$x'(s) = \cos\theta, \quad y'(s) = \sin\theta$$

также удовлетворяют условию $H(\mu)$. Этому же условию удовлетворяет, очевидно, и производная

$$\frac{dt(s)}{ds} = e^{i\theta}.$$

Рассмотрим отношение

$$\frac{t-t_0}{s-s_0} = \frac{t(s)-t(s_0)}{s-s_0},$$

---

[1]) Заметим, что в формуле (7,5)

$$u^{k-1}(1-u)^{l-1}(nu-k)\,du = -d\,[u^k(1-u)^l].$$

где точка $t_0 = t(s_0)$ также принадлежит дуге L. На основании результата п. 1° (для случая $n=1$) предыдущее отношение удовлетворяет условию $H(\mu)$ по обеим переменным s, s_0.

Рассмотрим теперь функцию двух точек t, t_0, принадлежащих L:

$$\vartheta(t_0, t) = \arg(t - t_0) + \text{const},$$

представляющую собой угол, составляемый вектором $\overrightarrow{t_0 t}$ с некоторым постоянным направлением и отсчитываемый от этого последнего, как в примере п. 3° предыдущего параграфа. Как и в названном примере, мы условимся изменять $\vartheta(t_0, t)$ непрерывно, пока точки t и t_0 не встречаются друг с другом. Если же эти точки переходят друг через друга, то $\vartheta(t_0, t)$ изменяется скачком, равным нечетному кратному π.

Покажем, что при указанных условиях функция $\vartheta(t_0, t)$ при фиксированном t_0 и переменном t удовлетворяет условию $H(\mu)$ на каждой из дуг at_0, t_0b в отдельности, и аналогично обстоит дело для случая фиксированного t и переменного t_0.

Не нарушая общности, можно считать, очевидно, что $L = ab$ — стандартная дуга. Направив ось Ox параллельно касательной в одной из точек этой дуги, будем иметь $x'(s) \neq 0$ и $x(s) - x(s_0) \neq 0$ при $s \neq s(s_0)$.

Положим

$$X(s_0, s) = \frac{x(s) - x(s_0)}{s - s_0}, \quad Y(s_0, s) = \frac{y(s) - y(s_0)}{s - s_0}.$$

В силу предложения, доказанного в п. 1°, функции $X(s_0, s)$ и $Y(s_0, s)$ непрерывны на L и удовлетворяют условию $H(\mu)$; кроме того, $X(s_0, s) \neq 0$. Будем понимать под

$$\operatorname{arctg}\frac{Y(s_0, s)}{X(s_0, s)}$$

какую-либо ветвь, непрерывно изменяющуюся на L. Тогда

$$\vartheta(t_0, t) = \operatorname{arctg}\frac{Y(s_0, s)}{X(s_0, s)} + C, \tag{7,6}$$

где C сохраняет постоянное значение, пока точки t и t_0 не встречаются друг с другом, и изменяется скачком (равным нечетному кратному π), лишь когда эти точки переходят друг через друга.

Так как первое слагаемое правой части формулы (7,6) удовлетворяет, очевидно, условию $H(\mu)$, наше утверждение доказано.

Дифференцируя обе части равенства (7,6) по s или по s_0 и применяя к частным производным функций $X(s_0, s)$ и $Y(s_0, s)$ результат п. 2°, легко заключаем далее, что частные производные $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ представимы в виде

$$\frac{K^*(t_0, t)}{|s - s_0|^\lambda},$$

где λ — некоторое действительное число, меньшее единицы, а $K^*(t_0, t)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным. Принимая же во внимание указанное в начале этого пункта свойство отношения $\frac{t - t_0}{s - s_0}$, приходим к заключению, что частные производные $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ представимы и в виде

$$\frac{K(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda}, \quad \lambda < 1,$$

где $K(t_0, t)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным.

Приведем, кстати, явные выражения для $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$ и $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$. А именно, считая для упрощения письма, что углы θ и ϑ отсчитываются от оси Ox, и дифференцируя обе части равенства

$$\ln(t-t_0)=\ln r+i\vartheta,\quad r=|t-t_0|,$$

получим:

$$\frac{1}{r}\frac{\partial r}{\partial s}+i\frac{\partial\vartheta}{\partial s}=\frac{1}{t-t_0}\frac{dt}{ds}=\frac{e^{i\theta}}{re^{i\vartheta}}=\frac{e^{i(\theta-\vartheta)}}{r},$$

откуда, сравнивая мнимые части, выводим:

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s}=\frac{\sin(\theta-\vartheta)}{r}=\frac{\sin\alpha(t_0,t)}{r}, \tag{7,7}$$

где $\alpha(t_0, t)$ обозначает угол, составляемый (положительной) касательной в точке t с вектором $\overrightarrow{t_0t}$, отсчитываемый от этого последнего. Аналогично

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}=-\frac{\sin(\theta_0-\vartheta)}{r}=\frac{\sin\alpha(t,t_0)}{r}, \tag{7,8}$$

где θ_0 — угол, составляемый (положительной) касательной в точке t_0 с осью Ox, а $\alpha(t, t_0)$ — угол, составляемый этой касательной с вектором $\overrightarrow{tt_0}$ и отсчитываемый от этого последнего[1]).

Совершенно аналогично предыдущему и так же просто доказывается следующий общий результат.

Пусть угол $\theta(t)$ имеет непрерывную производную n-го порядка $\frac{d^n\theta}{ds^n}$ или, что то же, пусть координаты $x(s)$, $y(s)$ имеют непрерывные производные $(n+1)$-го порядка. Тогда частные производные n-го порядка

$$\frac{\partial^n\vartheta(t_0,t)}{\partial s^k\,\partial s_0^l},\quad k+l=n, \tag{7,9}$$

непрерывны[2]). Если, кроме того, производная $\frac{d^n\theta}{ds^n}$ удовлетворяет условию $H(\mu)$, то и частные производные n-го порядка (7,9) удовлетворяют условию $H(\mu)$ по обеим переменным, а частные производные $(n+1)$-го порядка

$$\frac{\partial^{n+1}\vartheta(t_0,t)}{\partial s^k\,\partial s_0^l},\quad k+l=n+1, \tag{7,10}$$

представимы в виде

$$\frac{K(t_0,t)}{|t-t_0|^\lambda}, \tag{7,11}$$

где λ — действительная постоянная, меньшая 1, а $K(t_0, t)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным.

В частности, если производная первого порядка $\frac{d\theta}{ds}$ непрерывна, т. е. если линия L обладает непрерывно изменяющейся кривизной

$$\frac{d\theta}{ds}=\frac{1}{\rho},$$

[1]) Формула (7,8) может быть сразу написана на основании формулы (7,7): достаточно поменять ролями t_0 и t, приняв во внимание, что, согласно определению функции $\vartheta(t_0, t)$, имеем $\vartheta(t, t_0)=\vartheta(t_0, t)+\text{const}$, где const обозначает нечетное кратное π.

[2]) См. замечание 1 в конце параграфа.

где ρ — радиус кривизны, снабженный знаком, то частные производные $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$, $\frac{\partial\vartheta}{\partial s_0}$ непрерывны. Если, далее, кривизна удовлетворяет условию $H(\mu)$, то эти частные производные также удовлетворяют условию $H(\mu)$.

Замечание. Выше мы говорили в некоторых случаях о непрерывности (и, следовательно, существовании) частных производных функции $\vartheta(t_0, t)$, разрывной при $t = t_0$. В этих случаях подразумевалось, что рассматриваемые производные существуют при $t \neq t_0$ и стремятся к вполне определенным пределам, когда t и t_0 стремятся к одному и тому же значению.

§ 8. Функции классов H, H_0, H^*, H_ε^*, заданные на кусочно-гладких линиях. Рассмотрим теперь функции, заданные на произвольной кусочно-гладкой линии, и введем некоторые понятия, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

1°. Итак, пусть L — произвольная кусочно-гладкая линия в смысле определения, данного в § 1 (п. 4°).

Узлы (в том числе и концы) линии L мы будем обозначать через c_k $(k = 1, 2, \ldots, n)$ или просто через c, если безразлично, о котором из узлов идет речь. Простые гладкие дуги, составляющие L, мы будем обозначать через L_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$. Точки линии L, отличные от узлов, мы будем по-прежнему называть обыкновенными точками.

2°. Пусть $\varphi(t)$ — некоторая функция точки t на L, однозначно определенная как в обыкновенных точках, так и в узлах. Мы будем говорить, что функция $\varphi(t)$ принадлежит классу H, или, точнее, $H(\mu)$, на L, если эта функция удовлетворяет условию $H(\mu)$ на каждой из (закрытых[1])) дуг L_k, составляющих L.

Если функция $\varphi(t)$ определена и принадлежит классу $H(\mu)$ не на всей линии L, а лишь на ее части, заключенной в достаточно малой окрестности узла c, то мы будем говорить, что $\varphi(t)$ принадлежит классу H, или, точнее, $H(\mu)$, в окрестности точки c[2]).

3°. Чаще предыдущего нам будет встречаться следующий случай. Пусть $\varphi_k(t)$ — функции, однозначно определенные соответственно на (закрытых) дугах L_k $(k = 1, 2, \ldots, p)$, составляющих L, и пусть $\varphi(t)$ — функция, определенная на L следующим образом:

$$\varphi(t) = \varphi_k(t) \quad \text{при} \quad t \in L_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p. \tag{8,1}$$

Таким образом, функция $\varphi(t)$ однозначно определена на всех обыкновенных точках линии L, а также на концах этой линии. В узлах же, где сходятся несколько дуг, ее обычно можно, не изменяя результатов, которые нас будут интересовать, оставлять неопределенной. Однако в дальнейшем, если противное не оговорено особо, говоря о значении

---

[1]) Напомним, что разомкнутая дуга называется закрытой, если концы причисляются к дуге.

[2]) Из определения следует, что функция $\varphi(t)$, принадлежащая классу $H(\mu)$ в окрестности узла c, удовлетворяет условию вида

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant A\,|t_2 - t_1|^\mu, \quad A = \text{const}, \quad \mu = \text{const} > 0,$$

где t_1, t_2 — две произвольные точки, взятые вблизи c на одной из дуг L_k, имеющих концом точку c (случай, когда одна из точек t_1, t_2 совпадает с c, не исключается).

Легко видеть, что неравенство предыдущего вида будет иметь место и в случае, когда точки t_1, t_2 находятся на различных дугах, сходящихся в c, если только эти дуги не касаются друг друга в точке c, а составляют конечный угол; ср. Добавление II (п. 1°) в конце книги.

функции $\varphi(t)$ на каком-нибудь узле c, мы будем считать, что ей приписано одно из значений

$$\varphi(c)=\varphi_k(c), \quad k=k_1,\ k_2,\ \ldots, \tag{8,2}$$

где $k_1, k_2, \ldots$ — номера тех из дуг L_k, которые сходятся в узле c. Иными словами, говоря о значении $\varphi(c)$, мы будем считать, что точка c отнесена к какой-нибудь из дуг L_k, сходящихся в c.

Например, говоря, что функция $\varphi(t)$ отлична от нуля всюду на L, мы будем подразумевать, что $\varphi(t)\neq 0$ во всех обыкновенных точках, а в узлах $\varphi_k(c)\neq 0$, $k=k_1, k_2, \ldots$

Если все функции $\varphi_k(t)$ удовлетворяют условию H на соответствующих (закрытых) дугах L_k, то мы будем говорить, что *функция* $\varphi(t)$ *принадлежит классу* H_0 *на* L. Если функции $\varphi_k(t)$ определены и удовлетворяют условию H лишь на примыкающих к узлу c достаточно малых частях дуг L_k, то мы будем говорить, что $\varphi(t)$ *принадлежит классу* H_0 *в окрестности узла* c.

4°. Если функция $\varphi(t)$, заданная на L, удовлетворяет условию H на каждой закрытой части линии L, не содержащей узлов, а вблизи любого узла c представима в виде

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{|t-c|^{\alpha}}, \quad 0\leqslant\alpha=\text{const}<1, \tag{8,3}$$

где $\varphi^*(t)$ принадлежит классу H_0 в окрестности c [1]), то мы будем говорить, что $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* на L. Если представление (8,3) имеет место лишь вблизи данного узла c, то мы будем говорить, что $\varphi(t)$ *принадлежит классу* H^* *в окрестности* c.

5°. Наконец, если $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* в окрестности узла c при всяком сколь угодно малом α, т. е. если $|t-c|^{\varepsilon}\varphi(t)$ принадлежит классу H при сколь угодно малом $\varepsilon>0$, мы будем говорить, что $\varphi(t)$ *принадлежит классу* H_ε^* в окрестности c.

Если же указанное условие соблюдено для всех узлов и функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H всюду, кроме, быть может, окрестностей узлов, то мы будем говорить, что $\varphi(t)$ *принадлежит классу* H_ε^* на L.

Например (§ 6, п. 3°), функция $(t-c)^{i\beta}$, где β — любое действительное число, принадлежит в окрестности c классу H_ε^*; это пример ограниченной функции класса H_ε^*; пример неограниченной функции класса H_ε^* представляет $\ln(t-c)$.

6°. Введенные выше определения естественно обобщаются на случай функций нескольких переменных точек данной кусочно-гладкой линии L.

Например, мы будем говорить, что функция $\varphi(t_1, t_2)$ точек t_1 и t_2 линии L принадлежит классу H_0, если она принадлежит классу H_0 по переменной t_1 при фиксированном значении t_2, а также по переменной t_2 при фиксированном значении t_1. Точнее, если $L_1, L_2, \ldots, L_p$ — гладкие дуги, составляющие L, то, по определению, $\varphi(t_1, t_2)=\varphi_{ij}(t_1, t_2)$, $i, j=1, 2, \ldots, p$, где $\varphi_{ij}(t_1, t_2)$ — функция точек t_1, t_2, принадлежащих соответственно закрытым дугам L_i и L_j, удовлетворяющая условию H по обеим переменным t_1, t_2.

В случае, когда одна из точек t_1, t_2 совпадает с каким-либо узлом, значение $\varphi(t_1, t_2)$ определяется указанием той из дуг L_k, сходящихся в данном узле, к которой мы относим данную точку. Аналогично обстоит

[1]) Увеличив (сколь угодно мало) число α, можно считать, что $\varphi^*(t)$ принадлежит классу H (и даже обращается в нуль в узлах).

дело в том случае, когда точки t_1, t_2 совпадают с различными узлами. Если точки t_1, t_2 совпадают с одним и тем же узлом, то выражению $\varphi(t_1, t_2)$ можно, аналогично сказанному в п. 3°, приписать несколько значений, или оставить его неопределенным.

Замечание 1. Мы не выиграем в общности, если допустим, что рассматриваемые функции имеют особенности указанного выше типа не только в узлах, но и в конечном числе любых других заданных точек на L. Действительно, эти последние точки мы можем причислить к узлам. Так мы и будем поступать в дальнейшем.

Замечание 2. Ясно, что классы H, H_0 и H_ε^* являются подклассами класса H^*; например, если в (8,3) $\alpha = 0$, то $\varphi(t)$ принадлежит классу H_0.

§ 9. О граничных значениях непрерывных функций. 1°. Пусть L — кусочно-гладкая линия (§ 1).

Около каждой точки t_0, принадлежащей L и не совпадающей с узлами (в число которых включаются и концы линии L), можно, как легко видеть (см. § 2), описать круг настолько малого радиуса, чтобы он разбивался линией L на две части, расположенные соответственно слева и справа от L по отношению к положительному направлению, выбранному на L. В соответствии с этим можно рассматривать левую и правую окрестности точки t_0. Ясно также, ка́к следует понимать левую и правую окрестности любой части линии L, не содержащей узлов.

Левую и правую стороны, а также те или иные символы, относящиеся к левой и правой окрестностям, мы будем соответственно обозначать верхними значками $^+$ и $^-$.

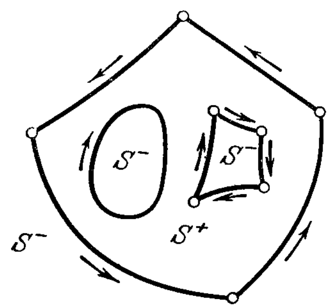

Рис. 4.

Если L — простая гладкая или кусочно-гладкая линия, состоящая из замкнутых контуров, ограничивающих некоторую связную часть плоскости, т. е. некоторую область на плоскости[1]), то мы обычно будем выбирать положительное направление на L так, чтобы эта область оставалась все время слева или все время справа при движении по L (рис. 4); в этом случае часть плоскости, остающуюся слева, мы всегда будем обозначать через S^+, а часть, остающуюся справа,— через S^-.

2°. Пусть $\Phi(z)$ — функция точки $z = x + iy$ плоскости [2]), заданная и непрерывная в окрестности линии L, кроме, быть может, точек самой линии L. Пусть t — точка на L, не совпадающая с ее узлами.

Мы будем говорить, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на точку t слева [или справа], если $\Phi(z)$ стремится к определенному пределу $\Phi^+(t)$ [или $\Phi^-(t)$], когда z стремится к t по любому пути, оставаясь, однако, слева [или справа] от L [3]).

---

[1]) Термин «область» мы будем применять лишь к связным частям плоскости.

[2]) Это значит, что

$$\Phi(z) = U(x, y) + iV(x, y),$$

где $U(x, y)$ и $V(x, y)$ — некоторые действительные функции переменных x, y.

[3]) Иными словами, множество значений, принимаемых z при стремлении к t, ничем не ограничено, кроме условия, что z находится слева [справа] от L.

В этом и только в этом случае мы будем говорить, что функция $\Phi(z)$ принимает в точке t граничное значение слева [или граничное значение справа][1]).

Если функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева [справа] на каждую точку части L' линии L, то мы будем говорить, что $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева [справа] на L'. В этом случае функция $\Phi^+(t)$ [функция $\Phi^-(t)$] необходимо непрерывна на L'. В самом деле, согласно условию существует при любом наперед заданном $\varepsilon > 0$ такое $\delta > 0$, зависящее (при заданном t) лишь от ε, что

$$|\Phi(z)-\Phi^+(t)| < \varepsilon, \tag{*}$$

если только $|z-t| < \delta$ и z находится слева от L. Пусть теперь t' — вторая точка на L' такая, что $|t'-t| < \delta$. Если z, оставаясь слева от L и удовлетворяя условию $|z-t| < \delta$, будет стремиться к t', то $\Phi(z)$ будет стремиться к $\Phi^+(t')$; но тогда из (*) следует, что

$$|\Phi^+(t')-\Phi^+(t)| \leqslant \varepsilon,$$

а это и доказывает наше утверждение [аналогично для $\Phi^-(t)$][2]).

Из сказанного следует, что если S^+ [S^-] обозначает левую [правую] окрестность линии L' и если приписать функции $\Phi(z)$ значения $\Phi^+(t)$ [$\Phi^-(t)$] на L', то функция $\Phi(z)$ будет непрерывна в $S^+ + L'$ [$S^- + L'$].

3°. Отметим еще следующее, почти очевидное обстоятельство, которым мы будем часто пользоваться.

Пусть ab — стандартная дуга на L. Рассмотрим пучок Π параллельных прямых, составляющих с касательными к ab нетупой угол, не меньший некоторого постоянного угла $\beta_0 > \alpha_0$, где α_0 — острый угол, участвующий в определении стандартной дуги (§ 2); тогда, как мы знаем (§ 2), каждая прямая Δ пучка Π, заключенная между двумя прямыми Δ_a, Δ_b пучка, проходящими через a и b, пересекает дугу ab в одной и только в одной точке. Предположим теперь, что $\Phi(z)$ равномерно стремится к $\Phi^+(t)$ [$\Phi^-(t)$], когда $z \to t$ по прямой Δ пучка Π, оставаясь слева [справа] от ab. Тогда функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева [справа] на любую часть дуги ab, не содержащую ее концов.

Действительно, из равномерности стремления к пределу вытекает прежде всего, что функция $\Phi^+(t)$ [$\Phi^-(t)$] непрерывна на ab. Пусть теперь z стремится к точке t дуги ab, не совпадающей с ее концами, по любому пути, оставаясь, скажем, слева от ab. При достаточно малом $|z-t|$ прямая пучка Π, проходящая через z, пересечет дугу ab в некоторой точке t'. При этом величины $|z-t'|$ и $|t'-t|$ будут сколь угодно малы[3]).

[1]) Определение, данное в тексте, эквивалентно следующему: функция $\Phi(z)$ принимает в точке t граничное значение $\Phi^+(t)$ слева, если для каждого сколь угодно малого положительного числа ε можно подобрать такое положительное число δ, что при всяком z, расположенном слева от L и удовлетворяющем условию $|z-t| < \delta$, будем иметь $|\Phi(z)-\Phi^+(t)| < \varepsilon$. Аналогично для граничного значения справа.

[2]) Как видно из самого доказательства, предложение о непрерывности $\Phi^+(t)$ или $\Phi^-(t)$ справедливо даже в том случае, если не считать $\Phi(z)$ непрерывной, а лишь непрерывно продолжимой слева или справа на каждую точку t части L'. Предложение это принадлежит Пенлеве (P. Painlevé); см., например, W. F. Osgood [1], стр. 53.

[3]) Это следует из рассмотрения треугольника ztt'. Вследствие того, что нетупой угол ω между хордой $t't$ и отрезком $t'z$ не меньше некоторого угла $\omega_0 > 0$ (§ 2), будем иметь, очевидно,

$$|t'-t| \leqslant \frac{|t-z|}{\sin\omega} \leqslant \frac{|t-z|}{\sin\omega_0}, \quad |z-t'| \leqslant \frac{|t-z|}{\sin\omega} \leqslant \frac{|t-z|}{\sin\omega_0}.$$

Следовательно, и разность

$$\Phi(z)-\Phi^+(t)=[\Phi(z)-\Phi^+(t')]+[\Phi^+(t')-\Phi^+(t)]$$

будет сколь угодно малой, а это и доказывает наше утверждение.

4°. При рассмотрении граничных значений мы до сих пор исключали узлы линии L. Пусть теперь $t=c$ — один из узлов (в частности, концов).

Гладкие дуги, составляющие линию L и сходящиеся в узле c, разбивают окрестность этой точки на конечное число секторов $\sigma_1, \sigma_2, \ldots, \sigma_n$ с общей вершиной c (рис. 5, *a*). Мы будем говорить, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на узел c из сектора σ_k, если $\Phi(z)$ стремится к определенному пределу, когда z стремится к c по любому пути, оставаясь внутри сектора σ_k. Этот предел мы будем называть граничным значением функции $\Phi(z)$ в точке c из сектора σ_k.

Пусть L' и L'' — гладкие дуги, ограничивающие сектор σ_k (имеющие общим концом узел c), и пусть функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима

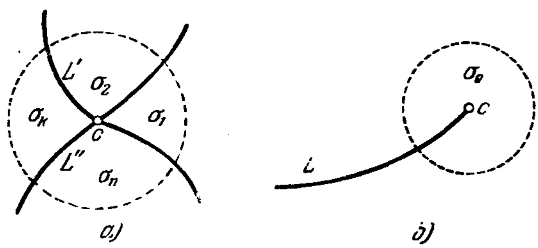

Рис. 5.

из сектора[1]) σ_k на все точки t линий L', L'', расположенные в окрестности узла, а также на узел c. Обозначим граничное значение функции $\Phi(z)$ в точке t (случай, когда $t=c$ не исключается) через $\Phi(t)$. Тогда, как легко видеть, функция $\Phi(t)$ точки t линии $L'+L''$ будет непрерывна в окрестности точки c (включая c); доказательство ничем не отличается от доказательства аналогичного предложения в п. 2°. Если, далее, приписать функции $\Phi(z)$ значения $\Phi(t)$ на $L'+L''$ (в окрестности точки c, включая c), то функция $\Phi(z)$ будет непрерывной в замкнутой области, состоящей из точек сектора σ_k и линии $L'+L''$, заключенных в достаточно малом круге с центром в c.

5°. В частном случае, когда узел c есть конец линии L (рис. 5, *b*), мы имеем лишь один «сектор» σ_0, состоящий из окрестности точки c, разрезанной вдоль L.

Легко видеть, как применить сказанное выше к этому частному случаю. Функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на конец c, если она стремится к определенному пределу, когда z стремится к c по любому пути, не попадая на L. Этот предел, если он существует, есть граничное значение $\Phi(z)$ в точке c; мы будем обозначать его просто через $\Phi(c)$. Если функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева и справа на все точки t линии L, расположенные в окрестности конца c, а также на конец c, то граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ непрерывны на L в окрестности c, причем

$$\lim_{t\to c}\Phi^+(t)=\lim_{t\to c}\Phi^-(t)=\Phi(c).$$

[1]) Значение этого выражения очевидно: продолжимость на точку t линии L' (или L'') из сектора σ_k есть продолжимость слева или справа в зависимости от того, с какой стороны от L' (или от L'') расположен сектор σ_k.

Замечание 1. Во всем дальнейшем основном тексте этой книги, говоря о граничных значениях некоторой функции $\Phi(z)$ и применяя обозначения $\Phi^+(t)$ или $\Phi^-(t)$, мы всегда будем считать, что эти пределы достигаются по любому пути, расположенному соответственно слева или справа от L; при этом предполагается, конечно, что точка t не совпадает с узлами. Вообще, когда речь идет о граничном значении в точке t слева или справа, всегда предполагается, если противное не оговорено, что точка t отлична от узлов.

Замечание 2. Во многих случаях представляет интерес рассмотрение граничных значений функции $\Phi(z)$, достигаемых по некасательным путям, или, точнее, пределы функции $\Phi(z)$, когда z стремится к t слева или справа от L так, что нетупой угол между отрезком tz и касательной к L в точке t остается не меньшим, чем некоторый фиксированный (сколь угодно малый) острый угол. Такие граничные значения называются иногда угловыми. Они могут существовать и тогда, когда не существуют граничные значения по любым путям.

§ 10. Кусочно-голоморфные функции. 1°. Пусть L обозначает то же, что и в предыдущем параграфе, а $\Phi(z)$ — функцию, голоморфную в каждой конечной области на плоскости z, не содержащей точек линии L. Пусть, далее, функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L слева и справа, а вблизи узлов удовлетворяет условию

$$|\Phi(z)| < \frac{C}{|z-c|^{\alpha}}, \tag{10,1}$$

где c — соответствующий узел, C и α — некоторые положительные постоянные, причем, что весьма существенно, $\alpha < 1$.

Такую функцию мы будем называть кусочно-голоморфной функцией с линией скачков L; линию скачков мы будем иногда называть также граничной линией.

Мы не выиграем, по существу, в общности, если при определении понятия кусочно-голоморфной функции допустим, что она может не быть непрерывно продолжимой и на некоторое конечное число заданных точек c, расположенных на гладких дугах, составляющих L, вблизи которых имеет место оценка (10,1); действительно (ср. замечание 1 в конце § 8), мы можем эти точки отнести к числу узлов.

Если в разложении $\Phi(z)$ в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\Phi(z) = \sum_{j=-\infty}^{+\infty} a_j z^j \tag{10,2}$$

имеется лишь конечное число членов, содержащих положительные степени z, то мы будем говорить, что $\Phi(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности.

Если a_k — последний коэффициент в разложении (10,2), отличный от нуля (мы исключаем теперь случай, когда все $a_j = 0$, т. е. когда $\Phi(z) = 0$ в некоторой области, содержащей точку $z = \infty$), то мы будем говорить, что порядок $\Phi(z)$ на бесконечности равен k. При $k > 0$ точка $z = \infty$ есть полюс порядка k функции $\Phi(z)$, а при $k < 0$ — нуль (или корень) порядка (или кратности) $-k$. При $k = 0$, т. е. когда $\Phi(\infty) = a_0$ есть определенная конечная величина, отличная от нуля, мы будем, смотря по удобству, говорить, что $\Phi(z)$ имеет при $z = \infty$ полюс или нуль нулевого порядка. Наконец, при $k \leqslant 0$ мы будем говорить, что $\Phi(z)$

кусочно-голоморфна, включая бесконечно удаленную точку.

Если функция $\Phi(z)$ имеет на бесконечности порядок $k \geqslant 0$, то при достаточно больших $|z|$ будем иметь[1]):

$$\Phi(z) = P_k(z) + O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{10,2a}$$

где $P_k(z)$ — полином степени k. Мы будем называть его **главной частью** полюса функции $\Phi(z)$ на бесконечности.

2°. Напомним теперь одно известное свойство аналитических функций, которым мы будем часто пользоваться.

Пусть S_1 и S_2 — две связные части плоскости, не имеющие общих внутренних точек, но примыкающие друг к другу вдоль некоторой гладкой дуги L, являющейся общей частью их границ; концы L мы не причисляем к L. Пусть, далее, $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ — функции, голоморфные соответственно в S_1 и S_2, непрерывно продолжимые на L соответственно из S_1 и S_2, пусть их граничные значения вдоль L равны друг другу:

$$\Phi_1(t) = \Phi_2(t); \tag{10,3}$$

через t обозначена точка на L, а через $\Phi_1(t)$, $\Phi_2(t)$ — граничные значения функций $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$. Тогда *функция, определенная следующим образом*:

$$\begin{gathered}\Phi(z) = \Phi_1(z) \quad \text{при} \quad z \in S_1, \quad \Phi(z) = \Phi_2(z) \quad \text{при} \quad z \in S_2, \\ \Phi(t) = \Phi_1(t) = \Phi_2(t) \quad \text{при} \quad t \in L,\end{gathered} \tag{10,4}$$

голоморфна в области $S_1 + S_2 + L$.

Для доказательства достаточно, очевидно, установить, что определенная выше функция $\Phi(z)$ голоморфна в окрестности любой точки t_0 дуги L, не совпадающей с ее концами. Опишем из t_0, как из центра, окружность γ настолько малого радиуса, чтобы она пересекла L ровно в двух точках a и b. Пусть σ — круг, ограниченный γ, а σ_1, σ_2 — части этого круга, расположенные соответственно в S_1 и S_2; пусть, далее, γ_1 и γ_2 — границы этих частей, описываемые в положительном направлении; γ_1 и γ_2 имеют общую часть ab, пробегаемую в противоположных направлениях.

На основании теоремы Коши легко непосредственно проверить, что для всех точек z, расположенных внутри любой из областей σ_1, σ_2, имеем:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_1} \frac{\Phi_1(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma_2} \frac{\Phi_2(t)\,dt}{t-z},$$

ибо первый интеграл равен $\Phi_1(z)$ при $z \in \sigma_1$ и нулю при $z \in \sigma_2$, а второй равен $\Phi_2(z)$ при $z \in \sigma_2$ и нулю при $z \in \sigma_1$. Но сумма двух предыдущих интегралов сводится к одному интегралу, взятому по γ, так как части, взятые по дуге ab, сокращаются вследствие условия (10,3), имеющего место на L. Поэтому предыдущую формулу можно переписать так:

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\gamma} \frac{\Phi(t)\,dt}{t-z},$$

[1]) Напомним, что если ξ обозначает (вообще комплексную) переменную, значения которой принадлежат некоторому множеству M, куда входят сколь угодно большие [сколь угодно малые] по модулю значения ξ, то $O(\xi)$ обозначает величину такую, что отношение $\frac{O(\xi)}{\xi}$ остается ограниченным по модулю при всех достаточно больших [достаточно малых] по модулю значениях ξ из M.

после чего наше утверждение становится очевидным, поскольку ясно, что правая часть предыдущей формулы представляет функцию, голоморфную внутри γ.

3°. Из сказанного вытекает следующее заключение, которым мы также будем часто пользоваться.

Пусть, как в п. 1°, L обозначает произвольную кусочно-гладкую линию, а $\Phi(z)$ — кусочно-голоморфную функцию с линией скачков L. Предположим, что на некоторой части L' линии L имеем $\Phi^+(t) = \Phi^-(t)$, где t обозначает любую точку части L', отличную от узлов (в том числе концов). Тогда часть L' линии L может быть удалена и функция $\Phi(z)$ будет кусочно-голоморфной с линией скачков $L - L'$, если ей приписать надлежащие значения в точках, принадлежащих устраненной части L'. Это вытекает из результата п. 2°. Сомнение может вызвать лишь поведение $\Phi(z)$ в окрестностях точек, принадлежавших узлам устраненной части. Но и это сомнение отпадает, если заметить, что в силу (10,1) в этих точках $\Phi(z)$ может иметь лишь устранимые особенности[1]), т. е. что она будет голоморфна в окрестностях этих точек, если приписать ей надлежащие значения в них.

4°. Предыдущий результат приводит еще к следующему заключению. Пусть $\Phi(z)$ — функция, голоморфная в некоторой связной части (области) S плоскости, граница которой содержит (сколь угодно малую) гладкую дугу l, и пусть функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на l, причем ее граничные значения на l равны нулю; тогда $\Phi(z) = 0$ во всей области S. Действительно, присоединим к области S какую-либо область S', примыкающую к l с другой стороны; тогда, положив $\Phi(z) = 0$ в S' и на l, мы получим функцию $\Phi(z)$, голоморфную в $S + S' + l$ и равную нулю в S'; но такая функция необходимо равна нулю во всей области $S + S' + l$, откуда и следует наше утверждение.

II. Интегралы типа Коши

В этом отделе мы изучаем главнейшие свойства интегралов типа Коши, определение которых дается в следующем параграфе.

Результатами этого отдела мы будем постоянно пользоваться в дальнейшем.

§ 11. Определение интеграла типа Коши. 1°. Пусть L обозначает кусочно-гладкую линию и пусть $\varphi(t)$ — функция, заданная на L, за исключением, быть может, конечного числа точек. Мы будем считать, что функция $\varphi(t)$ ограничена всюду на L, за возможным исключением сколь угодно малых окрестностей названных выше точек.

На каждой из гладких дуг L_k ($k = 1, 2, \ldots, p$), составляющих L, функция $\varphi(t)$ является в то же время функцией соответствующей дуговой абсциссы s. Во всем дальнейшем, говоря, что ф у н к ц и я $\varphi(t)$ и н т е г р и р у е м а, мы будем подразумевать, что существуют интегралы

$$\int_{L_k} \varphi(t)\, ds, \qquad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{*}$$

в смысле Римана, если функция $\varphi(t)$ ограничена на L_k, или в смысле «несобственного интеграла», когда эта функция может быть неограничен-

[1]) См., например, И. И. Привалов [6], стр. 221—222. Разложение Лорана функции $\Phi(z)$ в окрестности точки c, где был узел, не может содержать отрицательных степеней $(z - c)$ вследствие условия (10,1), где, напоминаем, $\alpha < 1$.

ной[1]). Мы будем говорить, что функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема на L, если она интегрируема и если, кроме того, существуют интегралы

$$\int_{L_k} |\varphi(t)|\,ds, \qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ p, \tag{**}$$

в только что указанном смысле. Если функция $\varphi(t)$ ограничена, то из ее интегрируемости следует, как известно, также абсолютная интегрируемость. Если же функция $\varphi(t)$ неограниченна, то она может быть интегрируемой, не будучи абсолютно интегрируемой.

Напомним, что если функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема, а $\psi(t)$ обозначает ограниченную интегрируемую функцию, то функция $\varphi(t)\,\psi(t)$ абсолютно интегрируема.

Из этого следует, в частности, что если функция $\varphi(t)$ абсолютно интегрируема по s, то она абсолютно интегрируема и по t, т. е. что существуют интегралы

$$\int_{L_k} \varphi(t)\,dt=\int_{L_k} \varphi(t)\,\frac{dt}{ds}\,ds,$$

а также интегралы

$$\int_{L_k} |\varphi(t)|\cdot|dt|,$$

т. е. те же, что в (**), интегралы

$$\int_{L_k} |\varphi(t)|\left|\frac{dt}{ds}\right|ds=\int_{L_k} |\varphi(t)|\,ds.$$

Обратно, из абсолютной интегрируемости по t следует абсолютная интегрируемость по s.

Разумеется, интеграл по L определяется как сумма интегралов по L_k, т. е.

$$\int_L \varphi(t)\,ds=\sum_{k=1}^{p}\int_{L_k}\varphi(t)\,ds, \qquad \int_L \varphi(t)\,dt=\sum_{k=1}^{p}\int_{L_k}\varphi(t)\,dt.$$

2°. Пусть L обозначает, как в предыдущем пункте, кусочно-гладкую линию, а $\varphi(t)$ — заданную на L, за исключением, быть может, конечного числа точек, абсолютно интегрируемую функцию.

Рассмотрим интеграл

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{11,1}$$

где z — любая точка плоскости; этот интеграл называется интегралом типа Коши. Функцию $\varphi(t)$ мы будем называть иногда плотностью.

Этому интегралу будет ниже (§ 13) приписан в известных случаях вполне определенный смысл и тогда, когда точка z расположена на самой линии L; пока же мы будем считать, что точка z не расположена на L.

[1]) Мы имеем здесь в виду определение «несобственного интеграла», обычно даваемое в курсах анализа; см., например, Г. М. Фихтенгольц [2], т. 2.

Очевидно, что функция $\Phi(z)$ голоморфна во всякой области, не содержащей точек линии L, причем $\Phi(\infty)=0$; точнее, при больших $|z|$ имеем:

$$\Phi(z)=O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{11,2}$$

ибо L имеет конечную длину.

Замечая, что при достаточно больших $|z|$

$$\frac{1}{t-z}=-\frac{1}{z}-\frac{t}{z^2}-\frac{t^2}{z^3}-\ldots$$

будем иметь для достаточно больших $|z|$ разложение:

$$\Phi(z)=\frac{A_1}{z}+\frac{A_2}{z^2}+\frac{A_3}{z^3}+\ldots, \tag{11,2a}$$

где

$$A_k=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L t^{k-1}\varphi(t)\,dt, \quad k=1,\ 2,\ \ldots . \tag{11,2b}$$

Рассмотрим в качестве примера простейший случай, когда $L=ab$ — простая кусочно-гладкая разомкнутая дуга, а $\varphi(t)=1$. Тогда, очевидно,

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-z}{a-z}=\frac{1}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a}, \tag{11,3}$$

где под

$$\ln\frac{z-b}{z-a}=\ln\frac{b-z}{a-z}$$

подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль дуги ab плоскости, исчезающая на бесконечности, ибо, как было сказано, всегда $\Phi(\infty)=0$; а именно, при достаточно больших $|z|$,

$$\ln\frac{z-b}{z-a}=\frac{a-b}{z}+\frac{a^2-b^2}{2z^2}+\frac{a^3-b^3}{3z^3}+\ldots .$$

§ 12. Связь с логарифмическим потенциалом. Понятие интеграла типа Коши тесно связано с понятием логарифмического потенциала простого и двойного слоев, распределенных по линии L; об этой связи мы и скажем здесь несколько слов.

Будем считать для простоты, что L — г л а д к а я л и н и я. Будем считать, далее, что $\varphi(t)$ — действительная функция, ибо общий случай непосредственно сводится к этому.

Положим, считая, что z не находится на L,

$$\Phi(z)=U(x,\ y)+iV(x,\ y)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{12,1}$$

где U и V — действительные функции. Положим, далее,

$$t-z=re^{i\vartheta}, \tag{12,2}$$

где $r=|t-z|$, $\vartheta=\vartheta(z,\ t)=\arg(t-z)$. Логарифмируя предыдущее равенство и дифференцируя по t (при постоянном z), получим:

$$\frac{dt}{t-z}=d\ln r+i\,d\vartheta=\frac{dr}{r}+i\,d\vartheta; \tag{12,3}$$

внося это выражение в (12,1) и отделяя действительную и мнимую части, приходим к формулам:

$$U(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_L \varphi\, d\vartheta = \frac{1}{2\pi}\int_L \varphi \frac{\partial\vartheta}{\partial s}\, ds = -\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi \frac{\partial \ln r}{\partial n}\, ds =$$

$$= \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\varphi \cos(r, n)\, ds}{r}, \quad (12,4)$$

$$V(x, y) = -\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi d \ln r = -\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi \frac{dr}{r}, \quad (12,5)$$

где s — дуговая абсцисса точки t, n — нормаль в этой точке, направленная влево от L, (r, n) — угол между вектором $\overrightarrow{tz}$ и n (рис. 6). Мы воспользовались при преобразовании в (12,4) соотношением

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s} = -\frac{\partial \ln r}{\partial n}, \quad (12,6)$$

которое представляет собой соотношение Коши — Римана, примененное к аналитической функции $\ln(t - z) = \ln r + i\vartheta$ (при постоянном z и переменном t) по отношению к системе осей, состоящей из положительной касательной T и нормали n (эта система ориентирована так же, как система Ox, Oy, т. е. ось n направлена влево от T)[1]).

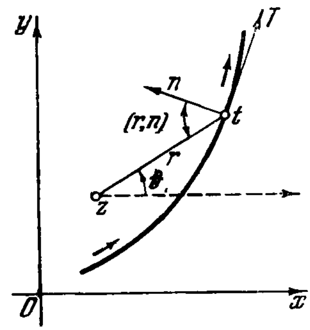

Рис. 6.

Из (12,4) вытекает, что $U(x, y)$ представляет собой потенциал двойного слоя с плотностью $\frac{\varphi}{2\pi}$.

Формулу же (12,5), применяя интегрирование по частям [мы считаем теперь для простоты, что φ имеет интегрируемую производную по дуговой абсциссе s[2])], можно переписать так:

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{d\varphi}{ds} \ln r\, ds + \frac{1}{2\pi}\sum \pm \varphi(c_k) \ln r_k, \quad (12,7)$$

где c_k обозначают концы линии L (если она содержит разомкнутые дуги), а r_k — расстояния точки (x, y) до точек c_k. Если линия L состоит лишь из замкнутых контуров, то

$$V(x, y) = \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{d\varphi}{ds} \ln r\, ds. \quad (12,7\text{a})$$

Последняя формула показывает, что в случае замкнутых контуров $V(x, y)$ представляет собой потенциал простого слоя:

$$V(x, y) = \int_L \mu(s) \ln\frac{1}{r}\, ds = -\int_L \mu(s) \ln r\, ds, \quad (12,8)$$

---

[1]) Вообще, если $f(z) = u + iv$ — аналитическая функция, то на основании соотношений Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial v}{\partial n}, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial v}{\partial s}.$$

[2]) Это предположение можно заменить более общим (например, считать функцию φ лишь непрерывной), если пользоваться интегралами Стилтьеса.

с плотностью

$$\mu(s) = -\frac{1}{2\pi}\frac{d\varphi}{ds}. \tag{12,9}$$

В случае, когда L содержит разомкнутые дуги, к потенциалу (12,7а) присоединяются, согласно формуле (12,7), еще потенциалы «точечных масс», сосредоточенных в концах c_k. Следует, однако, заметить, что хотя, с одной стороны, функция $V(x, y)$, определенная формулой (12,5), представляет собой некоторое обобщение потенциала простого слоя (ибо в упомянутой формуле функция $\varphi(t)$ не предполагается дифференцируемой), она не дает и в случае дифференцируемости $\varphi(t)$ обычного потенциала простого слоя общего вида. А именно, потенциал, определенный формулой (12,5), соответствует тому случаю обычного потенциала простого слоя, когда «массы»

$$m_k = \int_{L_k} \mu(s)\,ds,$$

распределенные на отдельных замкнутых контурах L_k, входящих в состав L, равны нулю; это ясно на основании (12,9). Поэтому в дальнейшем мы будем называть выражение вида (12,5) *видоизмененным потенциалом простого слоя*.

На основании предыдущего ясно, что изучение интегралов типа Коши можно свести к рассмотрению логарифмических потенциалов двойного и простого слоев.

В этом, по существу, направлении проведена работа А. Гарнака (A. Harnack [1]), представляющая собой одно из первых значительных исследований, посвященных интегралам типа Коши (1885 г.).

Однако непосредственное изучение этих интегралов приводит к более общим и легче обозримым результатам, что весьма важно с точки зрения приложений.

Первое существенное исследование в этом направлении, не обратившее, однако, на себя должного внимания, принадлежит Морера (G. Morera [1], 1889 г.).

В дальнейшем мы будем следовать именно этому последнему пути и на связь интегралов типа Коши с потенциалами опираться не будем. Соответствующие литературные указания будут даны ниже.

§ 13. Значение интеграла типа Коши на линии интегрирования. Вернемся к непосредственному изучению интеграла типа Коши и рассмотрим случай, когда в формуле (11,1) точка z, которую мы теперь обозначим через t_0, расположена на L. Напишем пока чисто формально:

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}. \tag{13,1}$$

Интеграл в правой части, вообще говоря, не имеет смысла с обычной точки зрения. Однако для обширного и важного класса функций $\varphi(t)$ этому интегралу можно придать определенный смысл, если ввести понятие *главного значения интеграла по Коши*. Оно заключается в следующем.

Пусть t_0 не совпадает ни с одним из узлов (в том числе концов) линии L. Опишем из t_0, как из центра, окружность настолько малого радиуса ε, чтобы она пересекла линию L ровно в двух точках t' и t'', и рассмотрим интеграл

$$\frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{13,2}$$

где l обозначает дугу $t't''$. Если при $\varepsilon \to 0$ предыдущий интеграл стремится к определенному пределу, то этот предел и называется **главным значением интеграла по Коши**. Очевидно, что если интеграл (13,1) существует в обычном (римановом) смысле[1]), то существует и главное значение (обратное неверно). Поэтому главное значение интеграла мы будем обозначать тем же символом, что и обычный интеграл[2]), подразумевая, что если интеграл не имеет обычного смысла, то рассматривается его главное значение.

Мы не станем заниматься выяснением возможно более общих условий, обеспечивающих существование главного значения, а ограничимся одним важным случаем, когда существование наверное обеспечено.

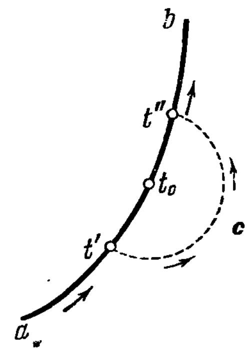

Рис. 7.

Именно, предположим теперь, что **функция $\varphi(t)$ удовлетворяет в окрестности точки t_0 условию H.** Покажем, что в этом случае главное значение существует, и вместе с тем найдем его выражение через интеграл в обычном смысле.

Мы можем, разумеется, ограничиться случаем, когда L состоит из единственной гладкой дуги. Будем сначала считать, что дуга $L = ab$ разомкнута. Имеем:

$$\int_{L-l} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \int_{L-l} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt + \varphi(t_0) \int_{L-l} \frac{dt}{t-t_0}. \tag{13,3}$$

Последний интеграл вычисляется в конечном виде. Для того чтобы точно определить значение логарифмических членов, которые появятся при этом вычислении, поступим следующим образом. Опишем из t_0, как из центра, дугу $t'ct''$ окружности радиуса ε, проходящую через точки t' и t'' и расположенную справа от L (рис. 7). Тогда

$$\int_{L-l} \frac{dt}{t-t_0} = \int_{L^*} \frac{dt}{t-t_0} - \int_{\gamma} \frac{dt}{t-t_0},$$

где L^* обозначает простую дугу $at'ct''b$, а γ — дугу $t'ct''$ окружности. Но согласно (11,3)

$$\int_{L^*} \frac{dt}{t-t_0} = \ln \frac{t_0-b}{t_0-a},$$

где в правой части подразумевается значение, принимаемое в точке t_0 той ветвью функции $\ln \frac{z-b}{z-a}$, которая голоморфна на разрезанной вдоль L^*

[1]) Интеграл (13,1) существует в обычном смысле если интеграл (13,2) стремится к определенному пределу, **какова бы ни была дуга** l, вырезанная около t_0, лишь бы длина этой дуги стремилась к нулю; существенным в определении главного значения является то, что концы t' и t'' дуги l находятся на равных расстояниях от t_0; см. еще замечание 2 в конце параграфа.

[2]) Многие авторы, наоборот, обозначают главное значение интеграла особым знаком, например, снабжают знак интеграла штрихом (′) или ставят перед ним буквы VP («Valeur Principale»).

плоскости и исчезает на бесконечности или, что, очевидно, сводится к тому же, значение, принимаемое слева от L в точке t_0 той ветвью, которая голоморфна на разрезанной вдоль L плоскости и исчезает на бесконечности.

Далее, очевидно, что[1])

$$\int_{\gamma} \frac{dt}{t-t_0} = [\ln (t-t_0)]_{t'}^{t''} = \ln \frac{|t''-t_0|}{|t'-t_0|} + i\theta = i\theta,$$

где θ обозначает изменение аргумента $t-t_0$ при перемещении t из положения t' в положение t'' вдоль дуги γ. Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon \to 0} \theta = \pi.$$

Далее, в силу того, что вблизи t_0

$$|\varphi(t)-\varphi(t_0)| \leqslant A|t-t_0|^{\mu}, \quad A=\mathrm{const}, \quad \mu=\mathrm{const}>0,$$

предел первого интеграла в правой части (13,3) существует и равен интегралу в обычном смысле:

$$\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt.$$

Таким образом, мы видим, что оба слагаемых в правой части (13,3) стремятся к определенным пределам при $\varepsilon \to 0$.

Отсюда следует существование главного значения интеграла (13,1); это главное значение на основании предыдущего дается формулой

$$\Phi(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{t_0-b}{t_0-a} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt, \qquad (13,4)$$

где, напоминаем,

$$\ln\frac{t_0-b}{t_0-a} = \ln\frac{b-t_0}{a-t_0}$$

есть значение, принимаемое слева от L функцией

$$\ln\frac{z-b}{z-a} = \ln\frac{b-z}{a-z},$$

голоморфной на разрезанной вдоль $L=ab$ плоскости и исчезающей на бесконечности.

В частности, при $\varphi(t)=1$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ab} \frac{dt}{t-t_0} = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0} - \frac{1}{2}. \qquad (13,4a)$$

Мы предполагали при выводе формулы (13,4), что L — гладкая разомкнутая дуга. В случае, когда L — произвольная кусочно-гладкая линия, формула (13,4), разумеется, не имеет, вообще говоря, места, но основной результат остается в силе. А именно, из предыдущего, очевидно, следует, что *если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки t_0 на L, отличной от узлов, то существует главное значение интеграла $\Phi(t_0)$.*

З а м е ч а н и е 1. На основании самого определения главного значения интеграла очевидно, что если разбить (кусочно-гладкую) линию

[1]) Напомним, что по условию $|t''-t_0| = |t'-t_0|$.

интегрирования L на несколько (также кусочно-гладких) линий L', L'', . . ., $L^{(k)}$ так, однако, чтобы точка t_0 не совпадала ни с одним узлом этих последних, то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\ldots+\frac{1}{2\pi i}\int_{L^{(k)}} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},$$

если только существует главное значение интеграла левой части.

Замечание 2. Рассмотрим какую-либо достаточно малую гладкую дугу t_1t_2, взятую на линии L и содержащую точку t_0. На основании формулы (13,4а) при принятом в этой формуле значении логарифма

$$I=\int_{t_1t_2}\frac{dt}{t-t_0}=\ln\frac{t_2-t_0}{t_1-t_0}-\pi i=\ln\frac{|t_2-t_0|}{|t_1-t_0|}+\omega i,$$

где ω $(-\pi<\omega<\pi)$ — угол, составляемый направлением t_0t_2 с направлением t_1t_0 и отсчитываемый от этого последнего (рис. 8); для того чтобы в этом убедиться, достаточно проследить за изменением угла

$$\Theta=\arg\frac{z-t_2}{z-t_1}=\arg\frac{t_2-z}{t_1-z},$$

когда z из бесконечно далекой точки (в этой точке $\Theta=0$) приближается к точке t_0 слева от дуги t_1t_2; тогда, очевидно, Θ приближается к $\pi+\omega$.

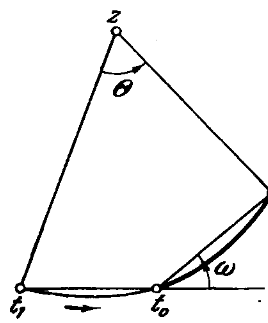

Рис. 8.

Если теперь t_2 и $t_1\to t_0$ то, очевидно, $\omega\to 0$; если, кроме того, $|t_2-t_0|$ и $|t_1-t_0|$ — эквивалентные бесконечно малые, т. е. если

$$\frac{|t_2-t_0|}{|t_1-t_0|}\to 1, \qquad (*)$$

то, очевидно, $I\to 0$. Ясно, что если стремление к пределу в (*) происходит равномерно (по отношению к положению t_0), то $I\to 0$ равномерно.

Замечание 3. Будем по-прежнему считать, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки t_0. Из предыдущих замечаний следует, что, вычисляя главное значение интеграла (13,1) как предел интеграла (13,2), нет надобности считать, что выделенная часть пути интегрирования, обозначенная выше через $l=t't''$, в точности удовлетворяет условию $|t''-t_0|=|t'-t_0|$; достаточно, чтобы отношение

$$\frac{|t''-t_0|}{|t'-t_0|}\to 1; \qquad (**)$$

в частности, можно брать точки t' и t'' так, чтобы длины дуг $t't_0$ и t_0t'' были равны друг другу.

На основании предыдущего ясно, что если стремление к пределу в (**) происходит равномерно (по отношению к t_0), то

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L-l}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}$$

также равномерно стремится при $|t''-t_0|\to 0$, $|t'-t_0|\to 0$ к главному значению

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0};$$

это, например, будет иметь место, когда $|t'-t_0|=|t''-t_0|$ или когда длины дуг $t't_0$ и t_0t'' равны друг другу. Эти заключения, разумеется, можно было бы сделать непосредственно, заменив в рассуждениях, проведенных для доказательства существования главного значения интеграла, условие $|t'-t_0|=|t''-t_0|$ условием (**).

Замечание 4. Для существования главного значения интеграла (13,1) и для справедливости формулы (13,4) нет, очевидно, надобности считать, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки t_0. Достаточно считать, что при данном фиксированном значении t_0 имеет место неравенство вида

$$|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant A|t-t_0|^{\mu},\qquad A=\mathrm{const},\quad \mu=\mathrm{const}>0,$$

которое может не иметь места для других значений t_0. В этом случае можно говорить, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H *в данной точке* t_0.

Замечание 5. Иногда представляется целесообразным заменить путь интегрирования L другим путем интегрирования Λ. Пусть Λ — кусочно-гладкая линия на плоскости такая, что между точками t простых гладких дуг, составляющих L, и точками τ простых гладких дуг, составляющих Λ, можно установить взаимно однозначное соответствие

$$t=t(\tau)$$

такое, что существует производная

$$t'(\tau)=\frac{dt}{d\tau},$$

отличная от нуля и принадлежащая классу H_0 на Λ. Пусть, далее, $\varphi(t)$ в формуле (13,1) удовлетворяет условию H в окрестности точки t_0 (отличной от узлов). Тогда, как легко видеть на основании предыдущего, интеграл типа Коши (13,1) по линии L может быть представлен в виде интеграла типа Коши по линии Λ, непосредственно получаемого подстановкой $t=t(\tau)$ в (13,1),

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\frac{\psi(\tau)\,d\tau}{\tau-\tau_0},$$

где τ_0 — точка линии Λ, соответствующая точке t_0 линии L, а

$$\psi(\tau)=\frac{(\tau-\tau_0)\,t'(\tau)}{t(\tau)-t(\tau_0)}\,\varphi(t(\tau)).\tag{13,5}$$

На основании сказанного в § 7 (п. 1°) $\psi(\tau)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки τ_0 [1]).

Замечание 6. Интеграл (13,1), когда он существует в указанном выше смысле, можно представить в виде, который бывает иногда полезен. Положим (ср. предыдущий параграф)

$$t-t_0=re^{i\vartheta},$$

где $r=r(t_0,t)=|t-t_0|$, $\vartheta=\vartheta(t_0,t)=\arg(t-t_0)$. Логарифмируя и дифференцируя при переменном t и постоянном t_0, получим:

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{dr}{r}+i\,d\vartheta,$$

---

[1]) Для того чтобы применить предложение, доказанное в § 7 (п. 1°), достаточно заметить, что

$$\frac{\tau-\tau_0}{t(\tau)-t(\tau_0)}=\frac{\tau-\tau_0}{\sigma-\sigma_0}:\frac{t(\tau)-t(\tau_0)}{\sigma-\sigma_0},$$

где σ — дуговая абсцисса на Λ. Заметим, что подстановка $t=t(\tau)$ переводит всякую функцию класса H_0 на L или Λ в функцию того же класса на Λ или L.

откуда следует:

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi(t)\,d\vartheta+\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\frac{dr}{r}. \qquad (13,6)$$

Если в качестве переменной интегрирования на каждой из гладких дуг L_k, составляющих L, взять дуговую абсциссу s и заметить, что[1])

$$\frac{\partial r}{\partial s}=\cos\alpha(t_0, t), \quad \frac{\partial\vartheta}{\partial s}=\frac{\sin\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}=\frac{\cos(r, n)}{r(t_0, t)}, \qquad (13,7)$$

где $\alpha(t_0, t)$ обозначает угол, составляемый (положительной) касательной T к L в точке t с вектором $\overrightarrow{t_0t}$ и отсчитываемый от этого последнего (в положительном направлении), а (r, n) — угол, составляемый вектором $\overrightarrow{tt_0}$ с нормалью n в t, направленной влево (рис. 9)[2]), будем иметь искомое представление:

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi}\int_L \varphi(t)\frac{\sin\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\,ds+\frac{1}{2\pi i}\int_L \varphi(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\,ds. \qquad (13,8)$$

Первый интеграл в правой части можно понимать в обычном смысле, если линия L удовлетворяет в окрестности точки t_0 условию Ляпунова, ибо в этом случае (§ 7, п. 3°)

$$\frac{\sin\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}=\frac{\partial\vartheta}{\partial s}=\frac{K(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}, \quad \lambda=\mathrm{const}<1,$$

где $K(t_0, t)$ — непрерывная в окрестности t_0 функция (удовлетворяющая даже условию H); второй же интеграл следует понимать в смысле главного значения по Коши.

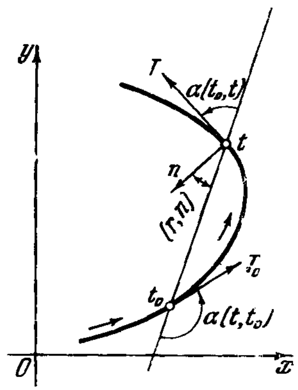

Рис. 9.

§ 14. Касательная производная потенциала простого слоя[3])

В качестве одного из простейших примеров применения понятия главного значения интеграла по Коши мы дадим здесь формулу для касательной производной логарифмического потенциала простого слоя. Эта формула представляет интерес с точки зрения истории развития теории сингулярных интегральных уравнений, так как именно она привела А. Пуанкаре к рассмотрению таких уравнений[4]).

Пусть сначала $L = ab$ — гладкая дуга. Будем, кроме того, считать, что L удовлетворяет условию Ляпунова (§ 7, п. 3°).

Пусть, далее, $\varphi(t)$ — функция, заданная на L и удовлетворяющая условию H. Рассмотрим потенциал простого слоя

$$V(x, y)=\int_L \varphi(t)\ln r\,ds, \qquad (14,1)$$

---

[1]) См. формулу (7,7) и предшествующую ей формулу. Ср. также предыдущий параграф.

[2]) Эти углы перестают быть определенными для точек t, совпадающих с узлами, но стремятся к определенным пределам, когда t стремится к данному узлу по одной из дуг, сходящихся в этом узле. Напомним, что, по условию, точка t_0 отлична от узлов.

[3]) Этот параграф может быть опущен без ущерба для понимания дальнейшего.

[4]) H. Poincaré [1], стр. 252; сам Пуанкаре не дает никакого обоснования законности выводимой ниже формулы (14,3).

где $r=|z-t|$ — расстояние точки $z=x+iy$ до точки $t(s)$. Как известно, функция $V(x, y)$ непрерывна всюду (в конечной части плоскости), включая линию L; ее значение $V(t_0)$ в точке t_0 на L получается непосредственной подстановкой t_0 вместо z в формулу (14,1), так что

$$V(t_0)=\int_L \varphi(t)\ln r\,ds=\int_L \varphi(t)\ln|t-t_0|\,ds. \tag{14,2}$$

Покажем, что *при принятых нами условиях существует производная* $\frac{dV}{ds_0}$ *для всех точек* $t(s_0)$, *не совпадающих с концами* a, b, *и что эта производная дается формулой*

$$\frac{dV}{ds_0}=\int_L \varphi(t)\frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r}\,ds=\int_L \varphi(t)\frac{\partial\ln r}{\partial s_0}\,ds, \tag{14,3}$$

получаемой формальным дифференцированием равенства (14,2); в этой формуле $\alpha(t, t_0)$ обозначает угол, составляемый с вектором $\overrightarrow{tt_0}$ (положительной) касательной T_0 в точке t_0 (см. рис. 9 в предыдущем параграфе), а интегралы понимаются в смысле главного значения по Коши.

Действительно, пусть $a'b'$ — некоторая фиксированная дуга, составляющая часть дуги ab и не имеющая с ней общих концов. Будем считать, что точка t_0 все время находится на $a'b'$. Отложим по L в обе стороны от t_0 дуги $t't_0$ и t_0t'' равной, достаточно малой длины ε и обозначим через l дугу $t't''$, середина которой совпадает с t_0. Положим

$$V_\varepsilon(t_0)=\int_{L-l}\varphi(t)\ln r\,ds=\int_{s_a}^{s_0-\varepsilon}\varphi(t)\ln r\,ds+\int_{s_0+\varepsilon}^{s_b}\varphi(t)\ln r\,ds, \tag{14,4}$$

где s_a и s_b — дуговые абсциссы точек a и b.

Очевидно, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0} V_\varepsilon(t_0)=V(t_0).$$

Дифференцируя обе части (14,4) по s_0, получаем:

$$\frac{dV_\varepsilon}{ds_0}=\int_{L-l}\varphi(t)\frac{\partial\ln r}{\partial s_0}\,ds+\varphi(t')\ln r'-\varphi(t'')\ln r'', \tag{14,5}$$

где $r'=|t'-t_0|$, $r''=|t''-t_0|$.

Принимая во внимание, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H и

$$\varphi(t'')\ln r''-\varphi(t')\ln r'=[\varphi(t'')-\varphi(t')]\ln r''+\varphi(t')\ln\frac{r''}{r'},$$

легко убеждаемся, что предыдущая разность равномерно (относительно t_0) стремится к нулю, когда $\varepsilon\to 0$.

Обратимся теперь к интегралу, фигурирующему в правой части (14,5). В подынтегральном выражении мы можем написать:

$$\frac{\partial\ln r}{\partial s_0}=\frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r}; \tag{14,6}$$

но для того чтобы придать интегралу вид, изученный в предыдущем параграфе, мы поступим сначала несколько иначе. Имеем:

$$r=(t-t_0)e^{-i\vartheta},$$

где ϑ — аргумент разности $t-t_0$. Логарифмируя и дифференцируя по s_0, получим:

$$\frac{\partial \ln r}{\partial s_0} = -\frac{1}{t-t_0}\frac{dt_0}{ds_0} - i\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0} = -\frac{e^{i\theta(t_0)}}{t-t_0} - i\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0},$$

где $\theta(t_0)$ обозначен угол, составляемый с осью Ox касательной к L в точке t_0.

В силу принятых условий (см. § 7, п. 3°)

$$\left|\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}\right| < \frac{\text{const}}{r^\lambda}, \quad \lambda < 1,$$

и поэтому интеграл

$$\int\limits_{L-l} \varphi(t)\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}ds$$

равномерно стремится при $\varepsilon \to 0$ к

$$\int\limits_{L} \varphi(t)\frac{\partial \vartheta}{\partial s_0}ds.$$

Далее, на основании замечания 3 в конце предыдущего параграфа интеграл

$$\int\limits_{L-l} \frac{\varphi(t)\, e^{i\theta(t_0)}}{t-t_0}\,ds = \int\limits_{L-l} \frac{\varphi(t)\, e^{i[\theta(t_0)-\theta(t)]}}{t-t_0}\,dt$$

также равномерно стремится при $\varepsilon \to 0$ к

$$\int\limits_{L} \frac{\varphi(t)\, e^{i[\theta(t_0)-\theta(t)]}}{t-t_0}\,dt = \int\limits_{L} \frac{\varphi(t)\, e^{i\theta(t_0)}}{t-t_0}\,ds,$$

где на этот раз интеграл понимается в смысле главного значения.

Мы видим, таким образом, что

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\frac{dV_\varepsilon}{ds_0} = \int\limits_{L} \varphi(t)\frac{\partial \ln r}{\partial s_0}ds,$$

причем стремление к пределу происходит равномерно.

Отсюда на основании известной теоремы анализа заключаем, что существует производная $\dfrac{dV}{ds_0}$ и что

$$\frac{dV}{ds_0} = \int\limits_{L} \varphi(t)\frac{\partial \ln r}{\partial s_0}ds,$$

откуда и следует на основании (14,6) требуемый результат (14,3).

Очевидно, что полученный результат останется в силе, если L — произвольная кусочно-гладкая линия, удовлетворяющая в окрестности точки t_0, отличной от узлов, условию Ляпунова, а $\varphi(t)$ — абсолютно интегрируемая функция, удовлетворяющая условию H в той же окрестности.

Формула (14,3) была доказана Г. Бертраном (G. Bertrand [2]) при значительно менее общих предположениях гораздо более сложным путем; доказательство Бертрана воспроизведено Э. Пикаром (É. Picard [1]). Изложенное здесь весьма простое доказательство было сообщено мне А. В. Бицадзе и приведено в первом издании этой книги.

Обобщения в различных направлениях даны Л. Г. Магнарадзе [6], С. Г. Михлиным [7], Я. Л. Геронимусом [1], [5], Р. С. Исахановым [4] и Ю. М. Крикуновым [4].

Для случая, когда L — отрезок действительной оси, некоторые аналогичные формулы были получены еще Г. Харди (G. Hardy [3]). О работах этого автора см. еще замечание 1 в конце § 28.

§ 15. Граничные значения интеграла типа Коши. 1°. Перейдем теперь к наиболее существенному для нас вопросу — изучению поведения интеграла типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{15,1}$$

вблизи линии интегрирования L, которую мы, как всегда, считаем кусочно-гладкой.

Следующее простое замечание будет часто способствовать упрощению рассуждений.

Пусть требуется изучить поведение интеграла $\Phi(z)$ вблизи некоторой части L_0 линии L. Если мы разобьем интеграл $\Phi(z)$в на сумму двух интегралов, $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$, один из которых взят по части L_1 линии L, заключающей часть L_0, а другой — по остальной части L_2 линии L, и если эта последня часть L_2 находится на конечном расстоянии от интересующей нас части L_0, то функция $\Phi_2(z)$ будет голоморфна в окрестности части L_0, включая саму эту часть, и вопрос сводится к изучению функции $\Phi_1(z)$.

Основной результат, который будет доказан в этом параграфе, мы формулируем так:

Теорема. *Если плотность $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H на некоторой гладкой части линии L, то функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева и справа на эту часть, за исключением, быть может, ее концов* (если таковые имеются).

Если принять во внимание сделанное выше замечание, станет очевидным, что при доказательстве достаточно ограничиться случаем, когда L — гладкая разомкнутая дуга и $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H на L, включая концы.

Исследуем сначала поведение интеграла

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}\,dt$$

при $z\to t_0$, где t_0 — произвольная точка на L; случай, когда t_0 совпадает с одним из концов L, не исключается. Докажем следующую лемму.

Лемма. *Пусть β_0 — произвольный нетупой угол $\left(т. е.\ 0<\beta_0\leqslant\frac{\pi}{2}\right)$ и пусть z приближается к t_0 так, что нетупой угол β между отрезком t_0z и касательной к L в точке t_0 не меньше β_0. Тогда $\Psi(z)$ равномерно (по отношению к положению t_0 на L) стремится к пределу*

$$\Psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt \tag{15,3}$$

(независимо от того, приближается ли z к t_0 слева или справа от касательной).

Очевидно, достаточно доказать нашу лемму для интеграла

$$\psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}\,dt,$$

где l — определенная стандартная дуга, содержащая t_0 (внутри или на одном из концов), соответствующая стандартному радиусу $R(\alpha_0)$, где $0<\alpha_0<\beta_0$ (см. стр. 17).

Рассмотрим разность

$$\psi(z)-\psi(t_0)=\frac{h}{2\pi i}\int_l \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)(t-z)}\,dt,$$

где $h=z-t_0$. Опишем из t_0, как из центра, окружность γ радиуса ρ; при достаточно малом ρ эта окружность пересечет l в одной или в двух точках, что мы и будем предполагать. Обозначим через t_1t_2 часть l, заключенную внутри γ, а через $l-t_1t_2$ — остальную часть.

Тогда

$$\psi(z)-\psi(t_0)=I_1+I_2,$$

где

$$I_1=\frac{h}{2\pi i}\int_{t_1t_2} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)(t-z)}\,dt,$$

$$I_2=\frac{h}{2\pi i}\int_{l-t_1t_2} \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{(t-t_0)(t-z)}\,dt.$$

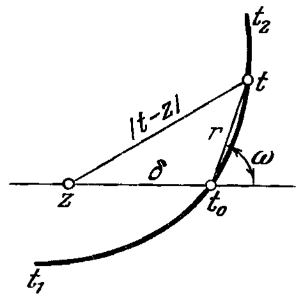

Рис. 10.

Рассмотрим сначала I_1. Используя для значений $\varphi(t)$ на t_1t_2 условие H[1]), т. е. неравенство $|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant A|t-t_0|^\mu$, и вводя обозначение $r=|t-t_0|$, будем иметь, принимая во внимание, что в силу (2,2) $|dt|=|ds|\leqslant K|dr|$,

$$|I_1|\leqslant\frac{\delta\cdot AK}{2\pi}\int_{t_1t_2}\frac{r^{\mu-1}|dr|}{|t-z|},$$

где $\delta=|h|$. Но если ω — нетупой угол между отрезками t_0z и t_0t (рис. 10), то, очевидно,

$$|t-z|\geqslant\delta\sin\omega\geqslant\delta\sin\omega_0,$$

где ω_0 — некоторая постоянная, такая, что $0<\omega_0<\frac{\pi}{2}$ (§ 2). Поэтому

$$|I_1|\leqslant\frac{AK}{2\pi\sin\omega_0}\int_{t_1t_2}r^{\mu-1}|dr|\leqslant\frac{AK}{\pi\sin\omega_0}\int_0^\rho r^{\mu-1}\,dr=\frac{AK\rho^\mu}{\pi\mu\sin\omega_0}.$$

Выберем ρ настолько малым, чтобы $|I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$, где ε — произвольно заданное положительное число; выбор ρ можно, очевидно, сделать независимо от положения t_0 на l и от положения z.

Далее, возьмем $\delta\leqslant\frac{\rho}{2}$. Тогда при t на $l-t_1t_2$, т. е. вне круга γ, имеем $|t-t_0|\geqslant\rho$, $|t-z|\geqslant\frac{\rho}{2}$, и поэтому

$$|I_2|\leqslant\frac{\delta}{\pi\rho^2}\int_{l-t_1t_2}|\varphi(t)-\varphi(t_0)|\,ds\leqslant\frac{\delta\cdot M}{\pi\rho^2},$$

[1]) Обращаем внимание на то, что условием H мы пользуемся лишь для сколь угодно малой части l, содержащей t_0.

где M — некоторая постоянная, не зависящая ни от положения t_0 на L, ни от положения z. Поэтому при достаточно малом δ будем иметь $|I_2| < \frac{\varepsilon}{2}$, и мы можем считать лемму доказанной.

Перейдем теперь к доказательству теоремы, высказанной в начале этого параграфа, и к разысканию граничных значений функции $\Phi(z)$.

Как было сказано, достаточно ограничиться случаем, когда $L = ab$ — гладкий разомкнутый контур, а $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию H (включая концы).

Имеем

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-z}\,dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\int_L \frac{dt}{t-z},$$

или на основании формул (15,2) и (11,3)

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a}, \tag{15,4}$$

где, напоминаем, под логарифмом подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль $L = ab$ плоскости, исчезающая на бесконечности. На основании доказанной леммы $\Psi(z)$ равномерно стремится к определенному пределу $\Psi(t_0)$, когда z стремится к t_0 так, как указано в формулировке леммы. Очевидно, что и второе слагаемое в правой части (15,4) равномерно стремится к определенным пределам, когда z стремится слева или справа к любой точке t_0 на L, находящейся на конечном расстоянии от концов. Но из равномерного стремления к пределам следует (§ 9), что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима слева и справа на любую точку t_0 линии L, отличную от концов.

Таким образом, теорема доказана[1]). Переходя в (15,4) к пределу при $z \to t_0$ слева или справа, получаем соответственно:

$$\begin{aligned}\Phi^+(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{t_0-b}{t_0-a},\\ \Phi^-(t_0) &= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{t_0-b}{t_0-a} - \varphi(t_0),\end{aligned} \tag{15,5}$$

где под $\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}$ подразумевается то же, что в § 13. Первая из формул (15,5) очевидна, если принять во внимание, что по самому определению (§ 13) предыдущее выражение представляет собой граничное значение функции $\ln\frac{z-b}{z-a}$ слева от L. Вторая из формул (15,5) также станет очевидной, если принять во внимание, что граничное значение предыдущего выражения справа от L равно

$$\ln\frac{t_0-b}{t_0-a} - 2\pi i,$$

---

[1]) Я затрудняюсь приписать эту теорему определенному автору, так как она, в той или иной форме и с той или иной степенью строгости доказательства, встречается в ряде работ, опубликованных в прошлом столетии, например, в работах Ю. В. Сохоцкого [1], Г. Морера (G. Morera [1]), А. Гарнака (A. Harnack [1]). Формулы, которые получим из (15,5), если будем считать, что L — замкнутый контур (т. е. что $b = a$), были даны в работе G. Morera [1].

Строгие доказательства теоремы, не представляющие никаких затруднений при современном состоянии анализа, были даны позднее несколькими авторами.

ибо если z переходит с левой стороны L на правую, обходя, скажем, конец a, то $\ln(z-a)$ получает приращение $2\pi i$, а $\ln(z-b)$ возвращается к прежнему значению.

2°. Добавим к сказанному следующее. *Если* $\varphi(t)=0$ *на конце* a [*или конце* b], *то*, как легко показать на основании предыдущего, *функция* $\Phi(z)$ *непрерывно продолжима и на конец* a [*или* b]. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно несколько продолжить дугу $L=ab$ за конец a [или за конец b], добавив к L, например, отрезок касательной в соответствующем конце, положить $\varphi(t)=0$ на добавленной части и применить предыдущие результаты к полученной таким образом новой дуге, для которой точка a [или точка b] не будет уже концом. Формулы (15,5) показывают тогда, что если t_0 находится на добавленной части, включая конец a [или конец b], то

$$\Phi^+(t_0)=\Phi^-(t_0)=\Phi(t_0);$$

отсюда непосредственно вытекает наше утверждение. Если мы обозначим через c любой из концов a, b, на котором $\varphi(t)=0$, то на основании формул (15,5) получим для граничного значения $\Phi(c)$ функции $\Phi(z)$ при $z\to c$ по любому пути выражение

$$\Phi(c)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-c}. \tag{15,6}$$

В случае, когда $\varphi(c)\neq 0$, где c обозначает, как выше, один из концов a, b, поведение $\Phi(z)$ вблизи этого конца также легко выяснить; при этом мы можем считать, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H на L лишь в окрестности точки c, включая эту точку. На основании формулы (15,4) имеем:

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a},$$

где

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\psi(t)\,dt}{t-z},\quad \psi(t)=\varphi(t)-\varphi(c),$$

и где под

$$\ln\frac{z-b}{z-a}=\ln(z-b)-\ln(z-a)$$

следует понимать по-прежнему ветвь, голоморфную на разрезанной вдоль L плоскости, исчезающую на бесконечности.

Будем для определенности считать, что $c=a$. Под $\ln(z-a)$ в окрестности точки a можно понимать произвольную ветвь, голоморфную в этой окрестности на разрезанной вдоль L плоскости; тогда функция $\ln(z-b)$ получит также определенное значение в окрестности точки a и будет голоморфна в этой окрестности уже на неразрезанной плоскости. Так как, далее, $\psi(a)=0$, то функция $\Psi(z)$ будет непрерывно продолжима слева и справа на L в окрестности точки a, а также на точку a. Следовательно, вблизи точки a будем иметь:

$$\Phi(z)=-\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\ln(z-a)+\Phi_0(z), \tag{15,7}$$

где функция $\Phi_0(z)$ голоморфна вблизи a на разрезанной плоскости и непрерывно продолжима на L слева и справа вблизи a, а также на точку a.

Совершенно аналогично вблизи конца b будем иметь:

$$\Phi(z) = +\frac{\varphi(b)}{2\pi i}\ln(z-b) + \Phi_0(z), \tag{15,8}$$

где функция $\Phi_0(z)$ голоморфна вблизи b на разрезанной вдоль L плоскости и непрерывно продолжима на L слева и справа вблизи b, а также на точку b.

Мы видим, таким образом, что если $\varphi(t)$ принадлежит классу H на дуге $L = ab$, то $\Phi(z)$ представляет собой кусочно-голоморфную функцию с линией скачков L, исчезающую на бесконечности. Этим свойством интеграл типа Коши обладает и при более общих предположениях относительно линии L и функции $\varphi(t)$, о чем будет речь в дальнейшем (§ 22, п. 2° и § 26, п. 4°).

Замечание 1. Складывая формулы (15,5) и сравнивая с формулой (13,4), получаем:

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2}[\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)]. \tag{15,9}$$

Для общего случая эта важная формула будет доказана в следующем параграфе.

Замечание 2. Если считать, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H не в окрестности точки t_0 (отличной от концов), а лишь в самой этой точке (§ 13, замечание 4), то из приведенных выше рассуждений следует, как легко видеть, что и в этом случае $\Phi(z)$ стремится к определенным пределам, когда z стремится к t_0 слева или справа по некасательным путям, т. е., точнее, когда нетупой угол между отрезком t_0z и касательной в точке t_0 остается бо́льшим некоторой положительной постоянной (сколь угодно малой; ср. замечание 2 в конце § 9).

Замечание 3. Отметим здесь одну простую оценку, которая бывает иногда полезна. Пусть по-прежнему $\varphi(t)$ принадлежит классу H на гладкой дуге ab и пусть c', c'' — две последовательные точки этой дуги, которые, в частности, могут совпадать соответственно с a и b. Рассмотрим интеграл

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c'c''}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{15,10}$$

и покажем, что для всех точек z плоскости, расположенных на конечном расстоянии, включая точки дуги L (кроме самих точек c', c'', для которых интеграл, вообще говоря, теряет смысл),

$$|\Omega(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c'|^{\varepsilon'}\,|z-c''|^{\varepsilon''}}, \tag{15,11}$$

где ε', ε'' — любые положительные постоянные (сколь угодно малые); если считать, что $\varepsilon' + \varepsilon'' \leqslant 1$, то предыдущее неравенство справедливо, очевидно, и для окрестности бесконечно удаленной точки.

Для доказательства можно поступить, например, так. Продолжим несколько дугу ab в ту и другую сторону, например отрезками касательных $a'a$ и bb' в точках a и b так, чтобы дуга ab оказалась частью гладкой дуги $a'b'$, не имеющей с ней общих концов, введем в рассмотрение функцию $\varphi_0(t)$, определенную так: $\varphi_0(t) = \varphi(c')$ на дуге $a'c'$, $\varphi_0(t) = \varphi(t)$ на дуге $c'c''$, $\varphi_0(t) = \varphi(c'')$ на дуге $c''b'$, и рассмотрим интеграл

$$\Omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a'b'}\frac{\varphi_0(t)\,dt}{t-z},$$

считая пока, что точка z не расположена на дуге $a'b'$.

Так как функция $\varphi_0(t)$ принадлежит, очевидно, классу H на дуге $a'b'$, то функция $\Omega_0(z)$ ограничена в окрестности дуги ab, ибо на основании предыдущего она непрерывно продолжима на эту дугу слева и справа. С другой стороны, имеем:

$$\Omega(z)=\Omega_0(z)-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a'c'}\frac{\varphi(c')\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{c''b'}\frac{\varphi(c'')\,dt}{t-z}=$$
$$=\Omega_0(z)-\frac{\varphi(c')}{2\pi i}\ln\frac{z-c'}{z-a'}-\frac{\varphi(c'')}{2\pi i}\ln\frac{z-b'}{z-c''}$$

(при определенном выборе логарифмов), откуда, учитывая, что точки a' и b' находятся на конечном расстоянии от дуги ab, легко выводим для точек z, достаточно близких к дуге L, оценку:

$$|\Omega(z)|<A+B\left[|\ln(z-c')|+|\ln(z-c'')|\right], \tag{15,12}$$

где A и B — некоторые положительные постоянные. Из (15,12) вытекает и требуемая (несколько более грубая) оценка (15,11). Полученные оценки сохраняют силу и для точек, расположенных на самой дуге $a'b'$ (вблизи дуги ab или на ней самой), как это следует из формулы (15,9).

§ 16. Формулы Сохоцкого — Племеля. Формулы (15,5), дающие граничные значения интеграла типа Коши, неудобны в том отношении, что они непосредственно применимы лишь к случаю, когда L — простая разомкнутая дуга.

Если же ввести в рассмотрение главное значение интеграла по Коши, то эти формулы можно преобразовать к весьма простому виду, притом пригодному для любой кусочно-гладкой линии интегрирования. А именно, если принять во внимание формулу (13,4), ясно, что формулы (15,5), дающие граничные значения интеграла

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{16,1}$$

можно переписать так:

$$\begin{aligned}\Phi^+(t_0)&=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0)=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\\ \Phi^-(t_0)&=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0)=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\end{aligned} \tag{16,2}$$

где в правых частях фигурируют главные значения интеграла.

Легко теперь видеть, что *предыдущие формулы справедливы для случая, когда L — произвольная кусочно-гладкая линия, при условии, что точка t_0 отлична от узлов* (в том числе концов)[1], *а $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности t_0.*

Действительно, для того чтобы в этом убедиться, достаточно представить интеграл $\Phi(z)$ в виде суммы двух интегралов: $\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z)$, первый из которых взят по какой-либо гладкой дуге ab, заключающей точку t_0, а второй — по остальной части L, применить к первому интегралу формулы (16,2) при $L=ab$, а относительно второго заметить, что $\Phi_2^+(t_0)=\Phi_2^-(t_0)=\Phi_2(t_0)$, ибо точка t_0 не находится на линии интегрирования второго интеграла.

---

[1]) Формулы (16,2) легко обобщаются на случай, когда t_0 совпадает с угловой точкой линии L; см. Добавление II в конце книги.

Формулы, эквивалентные формулам (16,2), были впервые даны еще в 1873 г. Ю. В. Сохоцким[1] [1], который, впрочем, при доказательстве ограничился случаем, когда L — прямолинейный отрезок, а z стремится к t_0 по нормали к L. Долгое время спустя формулы (16,2) были вновь найдены И. Племелем (J. Plemelj [1]), который доказал их при тех же примерно предположениях, которые приняты нами здесь.

Эти же формулы, но при более общих предположениях, были позднее получены И. И. Приваловым (см. его работы [2], [4], [7]).

Изложенное выше доказательство формул (16,2) не отличается по идее от доказательства И. Племеля; здесь внесены только некоторые упрощения и уточнения.

Мы будем называть формулы (16,2) **формулами Сохоцкого — Племеля**[2].

Отметим еще две формулы, эквивалентные формулам (16,2), которыми мы будем часто пользоваться:

$$\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)=\varphi(t_0), \tag{16,3}$$

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{16,4}$$

§ 17. Обобщение формулы для разности граничных значений. Формула (16,3)

$$\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)=\varphi(t_0) \tag{17,1}$$

была получена в предположении, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H по крайней мере в окрестности точки t_0 (которая предполагается отличной от узлов, в том числе концов). Однако этой формуле можно приписать определенный смысл и тогда, когда функция $\varphi(t)$ лишь непрерывна.

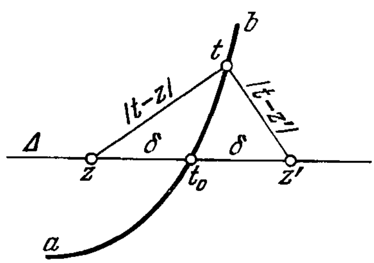

Рис. 11.

Возьмем (рис. 11) на прямой Δ, проходящей через t_0 и не касающейся L в t_0, две точки z и z' соответственно слева и справа от L **на равных расстояниях** от t_0 и условимся под $\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)$ понимать

$$\lim\,[\Phi(z)-\Phi(z')] \quad \text{при} \quad z,\ z'\to t_0. \tag{17,2}$$

Мы покажем, что *если функция $\varphi(t)$ непрерывна в окрестности t_0, то предыдущий предел существует и равен $\varphi(t_0)$*. Далее, предел этот достигается равномерно на всякой гладкой части, на которой $\varphi(t)$ непрерывна, за исключением, быть может, окрестностей концов этой части, если нетупой угол β, составляемый прямой Δ с касательной в точке t_0, не меньше некоторого постоянного угла β_0 (произвольно фиксированного, но отличного от нуля).

При доказательстве мы, очевидно, можем ограничиться случаем, когда L — гладкая замкнутая или разомкнутая дуга.

---

[1]) А именно, Ю. В. Сохоцкий дал первую из формул (16,2) и приводимую ниже формулу (16,3).

[2]) Работа Ю. В. Сохоцкого [1] долгое время оставалась почти неизвестной математикам (так же как и некоторые другие его работы, содержащие результаты первостепенного значения). К сожалению, с этой работой не был знаком и я во время выхода первого издания настоящей книги и поэтому назвал формулы (16,2) формулами Племеля. Приоритет Ю. В. Сохоцкого был восстановлен А. И. Маркушевичем [4].

Положим

$$z = t_0 + h, \quad z' = t_0 - h.$$

Тогда

$$\Phi(z) - \Phi(z') = \frac{1}{2\pi i} \int_L \varphi(t) \left\{ \frac{1}{t - t_0 - h} - \frac{1}{t - t_0 + h} \right\} dt = \frac{h}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{(t - t_0)^2 - h^2},$$

или

$$\Phi(z) - \Phi(z') = \frac{h}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t - t_0)^2 - h^2}\, dt + \frac{h\varphi(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{dt}{(t - t_0)^2 - h^2}. \qquad (*)$$

Последний интеграл вычисляется элементарно, но, чтобы еще больше упростить его выражение, будем считать линию L замкнутым контуром, что, конечно, не повлияет на общность. Считая, что положительное направление на L выбрано так, что конечная часть плоскости, ограниченная L, остается слева, замечая, что точка $t_0 + h = z$ находится в этой части, а точка $t_0 - h = z'$ — вне ее, и применяя теорему о вычетах, сразу заключаем, что второе слагаемое в (*) равно $\varphi(t_0)$ и, следовательно,

$$\Phi(z) - \Phi(z') = \varphi(t_0) + I,$$

где

$$I = \frac{h}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t - t_0)^2 - h^2}\, dt.$$

Остается показать, что $I \to 0$ при $h \to 0$. Опишем из t_0, как из центра, окружность γ достаточно малого радиуса ρ, которая пересечет L в двух точках a и b. Будем считать ρ настолько малым, что $|\varphi(t) - \varphi(t_0)| < \eta$ для всех точек t на ab, где η — заданная положительная величина, и положим $I = I_1 + I_2$, где I_1 берется по ab, а I_2 — по $L - ab$.

Имеем:

$$|I_1| \leqslant \frac{\delta \cdot \eta}{\pi} \int_{ab} \frac{ds}{|t - z| \cdot |t - z'|},$$

где $\delta = |h|$. Полагая $|t - t_0| = r$, на основании (2,2) имеем $ds \leqslant K|dr|$, если только $\rho \leqslant R_0(\alpha_0)$, где α_0 — произвольная положительная величина, меньшая β_0, а $R_0(\alpha_0)$ — радиус соответствующего стандартного круга.

Далее, если ϑ — угол между векторами $\overrightarrow{t_0 z}$ и $\overrightarrow{t_0 t}$, а $\omega = \vartheta$ при $\vartheta \leqslant \frac{\pi}{2}$, $\omega = \pi - \vartheta$ при $\vartheta > \frac{\pi}{2}$, имеем:

$$|t - z|^2 = r^2 + \delta^2 - 2r\delta\cos\vartheta \geqslant r^2 + \delta^2 - 2r\delta\cos\omega \geqslant r^2 + \delta^2 - 2r\delta\cos\omega_0,$$

где $\omega_0 = \beta_0 - \alpha_0 > 0$ — фиксированный острый угол[1]); аналогично

$$|t - z'|^2 \geqslant r^2 + \delta^2 - 2r\delta\cos\omega_0.$$

Следовательно,

$$|t - z| \cdot |t - z'| \geqslant r^2 + \delta^2 - 2r\delta\cos\omega_0 = (r - \delta\cos\omega_0)^2 + \delta^2\sin^2\omega_0,$$

$$|I_1| \leqslant \frac{2K\delta \cdot \eta}{\pi} \int_0^\rho \frac{dr}{(r - \delta\cos\omega_0)^2 + \delta^2\sin^2\omega_0} =$$

$$= \frac{2K\eta}{\pi\sin\omega_0} \left[\operatorname{arctg}\left(\frac{r}{\delta\sin\omega_0} - \operatorname{ctg}\omega_0 \right) \right]_{r=0}^{r=\rho} \leqslant \frac{2K\eta}{\sin\omega_0}.$$

[1]) См. § 2, свойство V.

откуда заключаем, что при достаточно малом ρ будем иметь $|I_1|<\frac{\varepsilon}{2}$, где ε — произвольно малая положительная величина.

Очевидно, далее, что, выбрав (при фиксированном ρ) δ достаточно малым, будем иметь $|I_2|<\frac{\varepsilon}{2}$, откуда и вытекает высказанное предложение.

Отметим одно важное следствие доказанного предложения, почти очевидное, если принять во внимание сказанное в § 9, п. 3°:

Пусть функция $\varphi(t)$ непрерывна на некоторой гладкой части L' линии L (L' может совпадать с L) и пусть функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L' слева [справа]; тогда функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L' также и справа [слева], за возможным исключением концов L'.

Существенная часть предложения, высказанного в начале этого параграфа, содержится (в не совсем четкой формулировке) в упомянутой выше работе Ю. В. Сохоцкого [1].

Результаты, изложенные в настоящем параграфе, в том примерно виде, как они здесь сформулированы, принадлежат И. Племелю (J. Plemelj [1]). Приведенное здесь доказательство представляет собой детализацию его доказательства (ср. также É. Picard [1]).

§ 18. Характер непрерывности граничных значений. 1°. Пусть по-прежнему L обозначает кусочно-гладкую линию и пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H на некоторой гладкой части L' линии L.

Мы видели, что при этих условиях функция

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{18,1}$$

непрерывно продолжима слева и справа на часть L', за исключением, быть может, ее концов. Поэтому (§ 9, п. 2°) граничные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ представляют собой непрерывные функции точки t на L' всюду, кроме, быть может, концов L'. Относительно этих граничных значений можно утверждать еще большее, а именно имеет место следующая важная теорема.

Теорема Племеля — Привалова. *Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ на L', то граничные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ удовлетворяют на L', кроме, быть может, сколь угодно малых окрестностей концов L', условию $H(\mu)$ при $\mu<1$ и условию $H(\mu-\varepsilon)$ при $\mu=1$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная*[1]).

При доказательстве можно, очевидно, ограничиться случаем, когда L состоит из одной-единственной разомкнутой гладкой дуги ab, а L' совпадает с L.

Пусть $L''=a''b''$ — любая часть дуги $L'=L=ab$, концы которой находятся на конечных расстояниях от концов a, b дуги L. Нам надлежит показать, что для любой пары точек t_0, t_1 дуги L''

$$\begin{aligned}|\Phi^+(t_1)-\Phi^+(t_0)|&\leqslant C\,|t_1-t_0|^{\nu},\\ |\Phi^-(t_1)-\Phi^-(t_0)|&\leqslant C\,|t_1-t_0|^{\nu},\end{aligned} \tag{18,2}$$

[1]) Точнее, при $\mu=1$ для любых двух достаточно близких точек t_0, t_1 на L' имеем:

$$|\Phi^{\pm}(t_1)-\Phi^{\pm}(t_0)|\leqslant \mathrm{const}\cdot|t_1-t_0|\ln\frac{1}{|t_1-t_0|}\,.$$

где C — некоторая постоянная, а $\nu=\mu$, если $\mu<1$, и $\nu=1-\varepsilon$, если $\mu=1$; ε обозначает сколь угодно малую положительную постоянную.

На основании формул (16,2) имеем:

$$\Phi^{\pm}(t_0)=\pm\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=$$
$$=\pm\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\int_L\frac{dt}{t-t_0},\qquad(18,3)$$

где одновременно берутся верхние или нижние знаки. Так как первое и третье слагаемые в правой части (18,3), очевидно, удовлетворяют условию $H(\mu)$ на L''[1]), то нам остается показать, что функция

$$\Psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt\qquad(18,4)$$

удовлетворяет условию

$$|\Psi(t_1)-\Psi(t_0)|\leqslant C\,|t_1-t_0|^{\nu}\qquad(18,5)$$

для любой пары точек t_0, t_1 на L'', где C — некоторая постоянная, а ν то же, что и выше.

Будем, как всегда, обозначать через s, s_0, s_1 дуговые абсциссы, соответствующие точкам t, t_0, t_1, и введем еще обозначения

$$t_1-t_0=h,\quad s_1-s_0=\sigma;$$

не нарушая общности, мы можем, очевидно, считать, что $\sigma>0$ и что 2σ не превосходит расстояний точек a'', b'' до точек a, b.

Имеем:

$$\Psi(t_1)-\Psi(t_0)=\Psi(t_0+h)-\Psi(t_0)=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L\left\{\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0+h)}{t-t_0-h}-\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\right\}dt.\qquad(18,6)$$

Отложим вдоль L в ту и другую сторону от t_0 дуги $t't_0$ и t_0t'', равные по длине 2σ, и обозначим через $l=t't''$ совокупность этих двух дуг; остальную часть L обозначим через $L-l$.

В соответствии с этим предыдущий интеграл разобьется на сумму двух интегралов:

$$\Psi(t_0+h)-\Psi(t_0)=I_0+I,$$

где I_0 берется по l, а I — по $L-l$.

Из условия $H(\mu)$ для $\varphi(t)$, т. е. из условия

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|\leqslant A\,|t_2-t_1|^{\mu},$$

где t_1, t_2 — любые две точки на L, следует, что

$$|I_0|\leqslant\frac{A}{2\pi}\int_l|t-t_0-h|^{\mu-1}\,ds+\frac{A}{2\pi}\int_l|t-t_0|^{\mu-1}\,ds.\qquad(18,7)$$

Вспоминая, далее, что для любых двух точек t_1, t_2 на L

$$0<k_0\leqslant\frac{|t_2-t_1|}{|s_2-s_1|}\leqslant1,\qquad(18,8)$$

[1]) См. формулу (13,4а).

где k_0 — постоянная, выводим из (18,7), производя элементарные выкладки:

$$|I_0| \leqslant A_0 \left\{ \int_{s_0-2\sigma}^{s_0+2\sigma} |s-s_0-\sigma|^{\mu-1}\, ds + \int_{s_0-2\sigma}^{s_0+2\sigma} |s-s_0|^{\mu-1}\, ds \right\} \leqslant B_0\sigma^{\mu} \leqslant C_0 |h|^{\mu},$$

где A_0, B_0, C_0 — некоторые постоянные.

Перейдем к интегралу I, который перепишем теперь так:

$$I = I_1 + I_2,$$

где

$$I_1 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t_0) - \varphi(t_0+h)}{t-t_0}\, dt = \frac{1}{2\pi i} [\varphi(t_0) - \varphi(t_0+h)] \left\{ \ln \frac{b-t_0}{a-t_0} - \ln \frac{t''-t_0}{t'-t_0} \right\}$$

(ср. стр. 43),

$$I_2 = \frac{1}{2\pi i} \int_{L-l} [\varphi(t) - \varphi(t_0+h)] \left\{ \frac{1}{t-t_0-h} - \frac{1}{t-t_0} \right\} dt =$$

$$= \frac{h}{2\pi i} \int_{L-l} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0+h)}{(t-t_0-h)(t-t_0)}\, dt.$$

Множитель в фигурных скобках в выражении для I_1, очевидно, ограничен при t_0 на $a''b''$. Поэтому

$$|I_1| \leqslant C_1 |h|^{\mu},$$

где C_1 — постоянная. Остается рассмотреть I_2. Принимая во внимание (18,8) и замечая, что величина $\tau = \dfrac{\sigma}{s-s_0}$ не превосходит по абсолютной величине 1/2, получаем:

$$|I_2| \leqslant A_2 |h| \int_{L-l} \frac{ds}{|s-s_0| \cdot |s-s_0-\sigma|^{1-\mu}} = A_2 |h| \int_{L-l} \frac{ds}{|s-s_0|^{2-\mu} (1-\tau)^{1-\mu}} \leqslant$$

$$\leqslant B_2 |h| \int_{L-l} \frac{ds}{|s-s_0|^{2-\mu}} = B_2 |h| \left\{ \int_{s_a}^{s_0-2\sigma} \frac{ds}{(s_0-s)^{2-\mu}} + \int_{s_0+2\sigma}^{s_b} \frac{ds}{(s-s_0)^{2-\mu}} \right\},$$

где s_a и s_b — дуговые абсциссы, соответствующие концам a и b дуги $L = ab$, а A_2, B_2 — постоянные. Вычисляя интегралы, легко получаем:

$$|I_2| \leqslant C_2 |h|^{\mu} \text{ при } \mu < 1, \quad |I_2| \leqslant C_2 |h| \ln \frac{1}{|h|} \text{ при } \mu = 1,$$

где C_2 — постоянная; в последнем неравенстве подразумевается, конечно, что $|h|$ — достаточно малая величина. Полученные неравенства доказывают высказанную теорему.

Эту теорему легко обобщить на случай, когда L — произвольная простая кусочно-гладкая линия, могущая иметь также точки возврата (см. Добавление II в конце книги).

Доказанная теорема принадлежит И. Племелю (J. Plemelj [1]); этот автор недостаточно четко формулирует условия, которым он подчиняет линию интегрирования; судя по контексту, он имеет в виду гладкую линию. Племель не оговаривает, кроме того, случая $\mu = 1$, по-видимому, подразумевая, что $\mu < 1$. В 1916 г. И. И. Привалов [1] доказал, независимо от Племеля, эту теорему для случая, когда L — окружность[1]). Затем, в заметке [4], он дал доказательство для случая любой простой кусочно-гладкой линии без точек возврата. Приведенное нами доказательство представляет собой, по существу, доказательство, намеченное И. Племелем; здесь внесены только некоторые уточнения; ср. также И. И. Привалов [6], [7].

Отметим еще одно почти очевидное, но важное обстоятельство. Пусть, для простоты, L — гладкая разомкнутая дуга и пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ в окрестности конца c этой дуги, включая этот конец, причем $\varphi(c) = 0$. Тогда $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ удовлетворяют условию $H(\nu)$ также в окрестности конца c, включая c, если под $\Phi^+(c) = \Phi^-(c)$ подразумевать $\Phi(c)$; через ν обозначена постоянная, равная μ при $\mu < 1$ и $1 - \varepsilon$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная, при $\mu = 1$. Высказанное утверждение непосредственно вытекает из предыдущего, если мы продолжим дугу L за рассматриваемый конец (например, отрезком касательной) и положим на добавленной части $\varphi(t) = 0$.

2°. Из теоремы Племеля — Привалова вытекает на основании формул (16,2) или же на основании рассуждений, примененных при доказательстве, что *если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ на гладкой части L' линии L, то функция*

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} \tag{18,9}$$

также удовлетворяет на L', кроме, быть может, окрестностей ее концов, условию $H(\mu)$ при $\mu < 1$ и условию $H(\mu - \varepsilon)$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная, при $\mu = 1$.

3°. Рассмотрим теперь случай, когда плотность зависит еще от некоторого параметра τ, а именно, рассмотрим интеграл

$$\Phi(t_0, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t, \tau)\,dt}{t - t_0} \tag{18,10}$$

и предположим, что $\varphi(t, \tau)$ удовлетворяет условию H по t и по τ, когда t находится на некоторой гладкой части L' линии L, а τ принадлежит некоторому множеству T, и что для остальных значений t на L

$$|\varphi(t, \tau + h) - \varphi(t, \tau)| \leq A(t)\cdot|h|^{\nu}, \quad \nu = \text{const} > 0, \quad \tau \in T, \ \tau + h \in T, \tag{18,11}$$

где $A(t)$ — положительная, интегрируемая на L функция[2]). Пусть, далее, L'' — часть L', не имеющая с L' общих концов.

Докажем, что при этих условиях $\Phi(t_0, \tau)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным t_0, τ при $t_0 \in L''$, $\tau \in T$.

Для этого достаточно показать, что функция $\Phi(t_0, \tau)$ удовлетворяет условию H по переменной τ, так как мы уже знаем, что $\Phi(t_0, \tau)$ удовлетворяет условию H при фиксированном τ и при $t_0 \in L''$.

Вследствие условия (18,11) при доказательстве, очевидно, достаточно считать, что L — гладкая разомкнутая дуга и что L' совпадает с L.

---

[1]) См. также И. И. Привалов [2]. Заметим, что еще в 1906 г. П. Фату (P. Fatou [1]) доказал для случая, когда L — окружность, что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ на L, то $\Phi(t)$ удовлетворяет условию $H\left(\frac{\mu}{\mu+1}\right)$.

[2]) Мы не говорим, что $\varphi(t, \tau)$ удовлетворяет условию H по переменной τ при всех t на L, так как тогда, согласно условию, принятому в § 3 (п. 2°), мы должны были бы считать, что имеет место неравенство вида (18,11) при ограниченном коэффициенте $A(t)$, чего мы здесь не предполагаем.

Имеем при этих условиях:

$$\Phi(t_0, \tau+h)-\Phi(t_0, \tau)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t, \tau)}{t-t_0}\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{[\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t_0, \tau+h)]-[\varphi(t, \tau)-\varphi(t_0, \tau)]}{t-t_0}\,dt+$$

$$+[\varphi(t_0, \tau+h)-\varphi(t_0, \tau)]\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{dt}{t-t_0}.$$

Второе слагаемое, очевидно, не превосходит по модулю $B|h|^\nu$, где ν — показатель условия H для функции $\varphi(t, \tau)$ по переменной τ, а B — постоянная. Остается рассмотреть интеграл

$$I=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{[\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t_0, \tau+h)]-[\varphi(t, \tau)-\varphi(t_0, \tau)]}{t-t_0}\,dt.$$

Пусть l — дуга, равная по длине $\sigma=|h|$, содержащая t_0 посредине; мы считаем $|h|$ настолько малым, что l целиком умещается на L. Разобьем интеграл I на сумму двух интегралов:

$$I=I_1+I_2,$$

где I_1 берется по l, а I_2 — по $L-l$. Имеем, очевидно,

$$|I_1|\leqslant A_1\int\limits_l \frac{ds}{|s-s_0|^{1-\mu}}\leqslant B_1\sigma^\mu,$$

где μ — показатель условия H функции $\varphi(t, \tau)$ по переменной t, а A_1, B_1 — постоянные. Далее,

$$I_2=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t, \tau)}{t-t_0}\,dt-[\varphi(t_0, \tau+h)-\varphi(t_0, \tau)]\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L-l}\frac{dt}{t-t_0}.$$

Второе слагаемое не превосходит по модулю $B'\sigma^\nu$, где B' — постоянная. Первое же слагаемое не превосходит по модулю при достаточно малом σ

$$A_2|h|^\nu\int\limits_{L-l}\frac{ds}{|s-s_0|}\leqslant B_2\sigma^\nu|\ln\sigma|,$$

где A_2, B_2 — постоянные. Таким образом, наше утверждение доказано.

Очевидно, что полученный результат распространяется и на случай, когда вместо одного параметра τ мы имеем несколько параметров.

4°. Рассмотрим, в частности, интеграл

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t, t_0)\,dt}{t-t_0},$$

где L — кусочно-гладкая линия и $\varphi(t, t_0)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным при $t\in L'$, $t_0\in L'$, а при остальных значениях t на L — условию вида

$$|\varphi(t, t_0+h)-\varphi(t, t_0)|\leqslant A(t)\cdot|h|^\nu,\quad \nu=\text{const}>0,\quad t_0\in L',\quad t_0+h\in L',$$

где $A(t)$ — интегрируемая на L положительная функция[1]; L', как выше, обозначает какую-либо гладкую часть линии L.

[1]) Свойства функции $\Phi(t_0)$ при некоторых других предположениях относительно функции $\varphi(t, t_0)$ изучены в работах: А. И. Гусейнов [1] и W. Pogorzelski [2].

Из предыдущего непосредственно вытекает, что $\Phi(t_0)$ удовлетворяет условию H на любой части L, принадлежащей L' и не имеющей с L' общих концов.

§ 19. Об интегралах типа Коши по бесконечной прямой. Во всей этой книге, за немногими исключениями, которые всегда будут оговорены, нам придется иметь дело со случаем, когда граничная линия или линия интегрирования целиком расположена на конечном расстоянии, как во всех предыдущих параграфах. Здесь же мы сделаем несколько замечаний относительно случая, когда линия интегрирования или граничная линия простирается в бесконечность.

1°. Распространение введенных выше понятий и соответствующих предложений на только что упомянутый случай не представляет никаких затруднений. Например, совершенно естественно обобщается на этот случай понятие кусочно-голоморфной функции: определение остается прежним, за исключением того, что на поведение функции в окрестности бесконечно удаленной точки (которая теперь принадлежит граничной линии) следует наложить те или иные условия, в зависимости от характера изучаемого вопроса.

Так же естественно переносятся на рассматриваемый случай понятие интеграла типа Коши, формулы Сохоцкого — Племеля, теорема Племеля — Привалова и др.

Единственное, что дополнительно требуется, это рассмотрение поведения функций (задаваемых или искомых), с которыми приходится оперировать, в окрестности бесконечно удаленной точки, с целью выяснить условия сходимости интегралов, распространенных по бесконечной линии, и с целью сохранить основные предложения, полученные для случая, когда линия эта конечна. Наиболее естественным и простым способом такого рассмотрения является приведение случая, когда линия интегрирования простирается в бесконечность, к случаю конечной линии L путем дробно-линейного преобразования комплексной плоскости, переводящего окрестность бесконечно удаленной точки в окрестность некоторой конечной точки. Пример такого преобразования будет приведен ниже, в п. 3°.

2°. Ввиду почти полной очевидности упомянутых выше обобщений, мы ограничимся здесь рассмотрением простейшего случая (однако важного для практики), когда линия интегрирования, которую мы теперь обозначим через D,— бесконечная прямая.

Не нарушая общности, будем считать, что D — действительная ось, и рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}; \tag{19,1}$$

в данном случае t — действительная переменная, пробегающая все действительные значения, а $\varphi(t)$ — вообще говоря, комплексная функция действительной переменной t, заданная на всей прямой D, кроме, быть может, конечного числа ее точек. Мы будем считать, что функция $\varphi(t)$ ограничена всюду, кроме, быть может, сколь угодно малых окрестностей упомянутых точек, и что она абсолютно интегрируема на всяком конечном отрезке прямой D (ср. § 11, п. 1°).

Будем считать пока, что точка z не расположена на D. Интеграл (19,1) будет, наверное, сходящимся, если при достаточно больших $|t|$ имеет место неравенство

$$|\varphi(t)| < \frac{B}{|t|^{\mu}}, \tag{19,2}$$

где B и μ — положительные постоянные[1]). Но в дальнейшем нам придется иметь дело с более общим случаем, когда $\varphi(t)$ при $|t| \to \infty$ стремится к конечному пределу c, одному и тому же при $t \to +\infty$ и $t \to -\infty$; этот предел мы обозначим через $\varphi(\infty)$.

Будем считать, что при достаточно больших $|t|$ имеем:

$$\varphi(t) = c + O\left(\frac{1}{|t|^{\mu}}\right) = \varphi(\infty) + O\left(\frac{1}{|t|^{\mu}}\right), \quad \mu = \text{const} > 0. \tag{19,3}$$

В этом случае, при $c \neq 0$, интеграл (19,1) будет расходящимся, т. е. выражение

$$\int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}$$

не будет стремиться к пределу, когда N' и N'' стремятся соответственно к $-\infty$ и $+\infty$ независимо друг от друга. Действительно, имеем:

$$\int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \int_{N'}^{N''} \frac{\varphi(t)-c}{t-z}\,dt + c\int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t-z}. \tag{*}$$

Элементарное рассмотрение показывает, что

$$\int_{N'}^{N''} \frac{dt}{t-z} = \pm \alpha i + \ln\frac{r''}{r'},$$

где α $(0 < \alpha < \pi)$ — угол, заключенный между прямолинейными отрезками, соединяющими точку z с точками $t = N'$ и $t = N''$ оси Ox, а r', r'' — расстояния точки z соответственно до N' и N''; при этом знак «плюс» берется, когда z находится в верхней полуплоскости, а «минус»— когда z находится в нижней полуплоскости. Если N' и N'' стремятся независимо друг от друга соответственно к $-\infty$ и $+\infty$, то α стремится к π, но $\ln\frac{r''}{r'}$ не стремится ни к какому пределу. Значит, предыдущий интеграл не стремится ни к какому пределу, и то же можно сказать относительно левой части (*), ибо первый интеграл в правой части — сходящийся на основании условия (19,3).

Однако если увеличивать $-N'$ и N'' не независимо друг от друга, а считать, что всегда $-N' = N''$, то $\ln\frac{r''}{r'}$ стремится к нулю, и на основании предыдущего будем иметь:

$$\lim_{N\to\infty} \int_{-N}^{+N} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)-c}{t-z}\,dt \pm \pi i c. \tag{19,4}$$

Выражение, стоящее в левой части, называется, по Коши, главным значением интеграла

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad \text{или} \quad \int_{D} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z},$$

---

[1]) Условие это достаточно, но, разумеется, не необходимо.

взятого между бесконечными пределами. В дальнейшем, применяя интегралы с бесконечными пределами, мы будем подразумевать главные их значения, если интегралы не существуют в обычном смысле.

Как мы видели, при соблюдении условия (19,3) главное значение существует [1]), причем

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t-z}\,dt\pm\frac{1}{2}\varphi(\infty), \tag{19,5}$$

где в левой части фигурирует главное значение, а в правой — интеграл в обычном смысле; знак «плюс» берется для z в верхней, а знак «минус» — для z в нижней полуплоскости.

Таким образом, термин «главное значение» мы применяем в двух различных, но аналогичных смыслах: когда подынтегральная функция обращается в бесконечность в некоторой точке (как в предыдущих параграфах) и когда пределы интегрирования бесконечны.

Предположим теперь, что точка $z = t_0$ расположена на самой линии интегрирования, т. е. на действительной оси. Тогда под интегралом

$$\int_D\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}$$

мы будем понимать главное значение в обоих указанных смыслах, т. е. будем определять главное значение так:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\lim_{\substack{N\to\infty\\ \varepsilon\to 0}}\left\{\int_{-N}^{t_0-\varepsilon}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\int_{t_0+\varepsilon}^{N}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}\right\}, \tag{19,6}$$

если указанный предел существует. В частности, легко видеть, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{dt}{t-t_0}=0. \tag{**}$$

Ясно, что главное значение (19,6) наверное существует, если соблюдено условие (19,3) и если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности точки t_0.

Легко видеть на основании (**), что главное значение можно представить любой из следующих формул:

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(\infty)}{t-t_0}\,dt, \tag{19,6a}$$

$$\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\int_{-\infty}^{+\infty}\frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt, \tag{19,6b}$$

где в правых частях можно подразумевать главное значение лишь в одном из указанных смыслов.

---

[1]) При определении главного значения нет надобности считать, что в точности $N' = -N''$; достаточно считать, что

$$\lim\frac{-N'}{N''}=1.$$

Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (19,3) и, разумеется, условиям, наложенным с самого начала. Тогда функция $\Phi(z)$, определяемая формулой (19,1), будет, очевидно, голоморфна как в верхней, так и в нижней полуплоскостях, которые мы обозначим, соответственно, через S^+ и S^-; граница D не причисляется ни к S^+, ни к S^-.

Формулы Сохоцкого — Племеля и теоремы о граничных значениях, доказанные в предыдущих параграфах, без всякого труда переносятся на рассматриваемый здесь случай. Именно, если t_0 — точка на D, расположенная на конечном расстоянии, а $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H в окрестности этой точки, то

$$\Phi^+(t_0)=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{19,7}$$

$$\Phi^-(t_0)=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{19,8}$$

Если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H на некотором отрезке прямой D, то $\Phi^+(t_0)$ и $\Phi^-(t_0)$ удовлетворяют условию H на этом отрезке, за исключением, быть может, его концов. Сказанное в § 17 также остается справедливым для нашего случая.

3°. До сих пор, говоря о поведении функции $\Phi(z)$ вблизи точек границы D и о ее граничных значениях, мы имели в виду точки, расположенные на конечном расстоянии.

Изучим теперь поведение функции $\Phi(z)$ и ее граничных значений в окрестности бесконечно удаленной точки, которая в нашем случае является одной из точек границы. Это можно было бы сделать непосредственно, но мы предпочитаем воспользоваться приемом, упомянутым в конце п. 1°, а именно, приведением к случаю конечной границы.

Произведем с этой целью следующую замену переменной:

$$z+i=\frac{-1}{\zeta+i}, \tag{19,9}$$

т. е.

$$z=\frac{-i\zeta}{\zeta+i}, \quad \zeta=\frac{-iz}{z+i}; \tag{19,9a}$$

можно было бы, конечно, воспользоваться любой другой дробно-линейной подстановкой, переводящей прямую D в окружность, но мы останавливаемся на подстановке (19,9), как на одной из наиболее простых и симметричных.

При этой замене действительная ось D плоскости z переходит в окружность L плоскости ζ, касательную к действительной оси в точке $\zeta=0$ и проходящую через точку $\zeta=-i$. Когда точка t плоскости z описывает прямую D в положительном направлении (оставляя верхнюю полуплоскость слева), соответствующая ей точка

$$\tau=\frac{-it}{t+i} \tag{19,10}$$

плоскости ζ описывает окружность L против часовой стрелки (оставляя ограниченный ею круг слева).

Соотношение (19,9) дает конформное отображение верхней полуплоскости плоскости z на круг плоскости ζ, ограниченный окружностью L, и одновременно конформное отображение нижней полуплоскости плоскости z на часть плоскости ζ, внешнюю по отношению к окружности L. При этом бесконечно удаленная точка плоскости z переходит в точку $\zeta = -i$ окружности L.

Произведя в формуле (19,1) замену переменных (19,9), (19,10) и введя обозначения

$$\Phi(z) = \Phi\left(\frac{-i\zeta}{\zeta+i}\right) = \Phi^*(\zeta), \quad \varphi(t) = \varphi\left(\frac{-i\tau}{\tau+i}\right) = \varphi^*(\tau),$$

получим:

$$\Phi(z) = \Phi^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\zeta+i}{\tau+i}\,\frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}, \tag{19,11}$$

или, после очевидного преобразования,

$$\Phi(z) = \Phi^*(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau+i}. \tag{19,12}$$

Интегралы, содержащие в знаменателе подынтегрального выражения $\tau + i$, следует понимать в смысле их главных значений. Легко видеть, что вследствие условия (19,3) эти главные значения существуют[1]).

Второй интеграл в правой части последней формулы — величина постоянная, и поэтому изучение функции $\Phi(z)$ в окрестности точки $z = \infty$ сводится к уже знакомому нам вопросу о поведении первого интеграла правой части вблизи точки $\tau = -i$ границы.

Для того чтобы непосредственно воспользоваться уже известными нам результатами, наложим на функцию $\varphi(t)$ такое условие, чтобы функция $\varphi^*(\tau)$ удовлетворяла условию H в окрестности точки $\tau = -i$, т. е. условию

$$|\varphi^*(\tau_2) - \varphi^*(\tau_1)| \leqslant A\,|\tau_2-\tau_1|^{\mu}, \quad A = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const} > 0;$$

это приводит к следующему условию относительно t:

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant A\left|\frac{it_1}{t_1+i} - \frac{it_2}{t_2+i}\right|^{\mu} = A\left|\frac{1}{t_2+i} - \frac{1}{t_1+i}\right|^{\mu}$$

при достаточно больших $|t_1|$ и $|t_2|$, или, что, очевидно, равносильно, к условию

$$|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant A\left|\frac{1}{t_2} - \frac{1}{t_1}\right|^{\mu}, \quad A = \text{const} > 0, \quad \mu = \text{const} > 0, \tag{19,13}$$

при достаточно больших $|t_1|$ и $|t_2|$.

Условие (19,13) мы будем называть *условием* H или, точнее, *условием* $H(\mu)$ *для окрестности бесконечно удаленной точки*[2]).

Считая, что $\varphi(t)$ удовлетворяет этому условию, покажем, что существуют граничные значения функции $\Phi(z)$, когда z уходит в бесконечность *по любому пути*, оставаясь все время в верхней или нижней

[1]) Вследствие условия (19,3) имеем, как легко видеть, вблизи точки $\tau = -i$ на L

$$|\varphi^*(\tau) - \varphi^*(-i)| \leqslant \text{const}\cdot|\tau+i|^{\mu},$$

т. е. $\varphi^*(\tau)$ удовлетворяет на L условию H в точке $\tau = -i$ (см. § 13, замечание 4).

[2]) В соответствии с этим условие (19,3) можно назвать условием H для точки $t = \infty$.

полуплоскости; эти граничные значения мы будем обозначать соответственно через $\Phi^+(\infty)$ и $\Phi^-(\infty)$. Для того чтобы доказать их существование и вычислить их значения, обратимся к формуле (19,12).

Если $z \to \infty$, оставаясь в верхней или нижней полуплоскости, то $\zeta \to -i$, оставаясь соответственно внутри или вне L. Поэтому, применяя к первому интегралу правой части (19,12) формулу Сохоцкого — Племеля, получим:

$$\Phi^+(\infty) = \Phi^{*+}(-i) = \frac{1}{2}\varphi^*(-i) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau+i} - \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi^*(\tau)\,d\tau}{\tau+i},$$

откуда непосредственно вытекает первая из следующих формул:

$$\Phi^+(\infty) = \frac{1}{2}\varphi(\infty), \quad \Phi^-(\infty) = -\frac{1}{2}\varphi(\infty); \tag{19,14}$$

вторая формула доказывается совершенно аналогично.

4°. Отметим, кстати, еще формулы, выражающие интеграл типа Коши, взятый по окружности L, через интегралы, взятые по прямой D; этими формулами мы воспользуемся в дальнейшем при решении некоторых задач.

Пусть

$$\Phi(\zeta) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}; \tag{19,15}$$

тогда при замене переменных (19,9) и (19,10) будем иметь:

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{z+i}{t+i}\,\frac{\varphi^*(t)\,dt}{t-z}, \tag{19,16}$$

или еще

$$\Phi^*(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi^*(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi^*(t)\,dt}{t+i}, \tag{19,17}$$

где положено

$$\Phi^*(z) = \Phi\left(\frac{-iz}{z+i}\right), \quad \varphi^*(t) = \varphi\left(\frac{-it}{t+i}\right).$$

Формула (19,17) имеет смысл и вытекает из формулы (19,16), если считать, что второй интеграл в правой части (19,17) существует в смысле главного значения по Коши, для чего достаточно, например, предположить, что функция $\varphi^*(t)$ удовлетворяет условию H в точке $t=\infty$, т. е. функция $\varphi(\tau)$ удовлетворяет условию H в точке $\tau = -i$. Если же это не имеет места, то следует пользоваться формулой (19,16).

По указанной причине часто удобно заменять рассмотрение интеграла типа Коши

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z},$$

взятого по бесконечной прямой D, рассмотрением интеграла вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{z+i}{t+i}\,\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \frac{z+i}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)\,dt}{(t+i)(t-z)},$$

который в случае, когда $\varphi(t)$ удовлетворяет условию (19,3), отличается от предыдущего лишь постоянным слагаемым.

§ 20. О поведении производной интеграла типа Коши вблизи линии интегрирования. В дальнейшем нам понадобится одна простая оценка модуля производной интеграла типа Коши вблизи линии интегрирования, представляющая также самостоятельный интерес.

Нам достаточно считать здесь, что линия интегрирования L — гладкая замкнутая или разомкнутая дуга. Мы будем считать, далее, что $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию $H(\mu)$.

Рассмотрим производную интеграла типа Коши:

$$\Phi'(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^2}. \tag{20,1}$$

Пусть t_0 — произвольная точка на L такая, однако, что расстояние t_0 до ближайшего конца линии L, если последняя — разомкнутая дуга, не меньше произвольно зафиксированного числа R.

Обозначим через $R_0 = R_0(\alpha_0)$ стандартный радиус для линии L, соответствующий некоторому, произвольно зафиксированному, острому углу α_0. Пусть, наконец, ρ — любая положительная постоянная, такая, что

$$\rho<R_0, \quad \rho<R; \tag{*}$$

в случае, когда L — замкнутый контур, второе условие отпадает.

Будем в дальнейшем считать, что расстояние δ точки z до t_0 не превосходит ρ:

$$\delta=|z-t_0|\leqslant\rho, \tag{**}$$

и что нетупой угол между отрезком t_0z и касательной к L в t_0 не меньше некоторой фиксированной величины $\beta_0>\alpha_0$.

Тогда *имеет место следующая оценка*:

$$|\Phi'(z)|<C\delta^{\mu-1} \ \textit{при}\ \mu<1, \quad |\Phi'(z)|<C\,|\ln\delta| \ \textit{при}\ \mu=1, \tag{20,2}$$

где C — постоянная[1]).

В самом деле, опишем из t_0, как из центра, окружность Γ_0 радиуса R_0 и обозначим через $l = ab$ часть L, заключенную внутри Γ_0; в соответствии с этим разобьем интеграл (20,1) на два:

$$\Phi'(z)=\Psi_1(z)+\Psi_2(z),$$

первый из которых взят по l, а второй — по $L-l$. Так как в силу условия (**) функция $\Psi_2(z)$, очевидно, ограничена для рассматриваемых значений z, достаточно рассмотреть интеграл

$$\Psi_1(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{\varphi(t)\,dt}{(t-z)^2}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_l \frac{[\varphi(t)-\varphi(t_0)]}{(t-z)^2}\,dt+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\left\{\frac{1}{z-b}-\frac{1}{z-a}\right\}. \tag{20,3}$$

Так как второй член в правой части ограничен (по условию относительно положения z), остается рассмотреть первый член. Полагая $|t-t_0|=r$, вспоминая, что

$$|ds|\leqslant K\,|dr|, \quad |\varphi(t)-\varphi(t_0)|\leqslant A\,|t-t_0|^{\mu},$$
$$|t-z|^2\geqslant(r-\delta\cos\omega_0)^2+\delta^2\sin^2\omega_0,$$

---

[1]) Разумеется, в оценке для случая $\mu=1$ предполагается, что δ — достаточно малая величина.

где $\omega_0 = \beta_0 - \alpha_0$ (см. стр. 57), и вводя обозначение

$$I = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{l} \frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{(t-z)^2} \, dt,$$

будем иметь:

$$|I| \leqslant \frac{AK}{2\pi} \int\limits_{ab} \frac{r^\mu \, |dr|}{(r - \delta\cos\omega_0)^2 + \delta^2 \sin^2\omega_0} \leqslant \frac{AK}{\pi} \int\limits_0^{R_0} \frac{r^\mu \, dr}{(r - \delta\cos\omega_0)^2 + \delta^2\sin^2\omega_0}.$$

При $\mu < 1$, производя подстановку $r = \delta \cdot u$, находим:

$$|I| < \frac{AK}{\pi} \delta^{\mu-1} \int\limits_0^\infty \frac{u^\mu \, du}{(u - \cos\omega_0)^2 + \sin^2\omega_0} = C\delta^{\mu-1},$$

где C — постоянная. При $\mu = 1$ интеграл в правой части предпоследней формулы вычисляется в конечном виде и приводит к оценке: $|I| \leqslant \leqslant C \, |\ln\delta|$. Наше предложение доказано.

Если линия L — разомкнутая дуга и если отбросить условие, что точка t_0 находится на конечном расстоянии от концов, в соответствии с чем должно быть отброшено второе из условий (*), то, как легко видеть на основании формулы (20,3), будем иметь, при сохранении прочих условий относительно положения z,

$$|\Phi'(z)| < C\delta^{-1}, \tag{20,4}$$

где C — постоянная.

Возвращаясь к (20,2), можем сделать еще следующий вывод. Пусть z_1 и z_2 — две точки прямой, проходящей через t_0 и составляющей с касательной в t_0 нетупой угол, не меньший β_0. Предполагая, что z_1 и z_2 находятся по одну и ту же сторону от L, имеем:

$$\Phi(z_2) - \Phi(z_1) = \int\limits_{z_1}^{z_2} \Phi'(z) \, dz,$$

где можно считать, что интеграл берется по прямолинейному отрезку $z_1 z_2$. Применяя теперь оценку (20,2) и считая сначала $\mu < 1$, получаем, обозначая через δ_1 и δ_2 расстояния точек z_1, z_2 до точки t_0:

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant \frac{C}{\mu} |\delta_2^\mu - \delta_1^\mu| \leqslant C_0 |\delta_2 - \delta_1|^\mu = C_0 |z_2 - z_1|^\mu, \tag{20,5}$$

где C_0 — постоянная.

При $\mu = 1$ получаем аналогично

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant C_0 |\delta_2 - \delta_1|^{1-\varepsilon} = C_0 |z_2 - z_1|^{1-\varepsilon}, \tag{20,6}$$

где ε — произвольно зафиксированное положительное число. Обозначая теперь z_2 через z, δ_2 через δ и предполагая, что $z_1 \to t_0$, получаем, считая, что z находится слева от L:

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t_0)| \leqslant C_0 \delta^\mu, \quad \text{если } \mu < 1, \tag{20,7}$$

$$|\Phi(z) - \Phi^+(t_0)| \leqslant C_0 \delta^{1-\varepsilon}, \quad \text{если } \mu = 1. \tag{20,8}$$

Совершенно аналогичные оценки справедливы для z, расположенного справа от L.

§ 21. О поведении интеграла типа Коши вблизи линии интегрирования. Перейдем теперь к более подробному изучению поведения интеграла типа Коши вблизи линии интегрирования L, а именно, докажем теорему:

Теорема. *Пусть L — гладкий замкнутый контур и пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию $H(\mu)$; пусть S^+, S^- — части плоскости, ограниченные L. Тогда в каждой из областей $S^+ + L$, $S^- + L$ функция*

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{21,1}$$

удовлетворяет условию

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant C\,|z_2-z_1|^{\mu} \quad \textit{при } \mu<1 \tag{21,2}$$

или

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)|\leqslant C\,|z_2-z_1|^{1-\varepsilon} \quad \textit{при } \mu=1; \tag{21,2a}$$

ε — любое положительное число, C — постоянная, причем под $\Phi(z)$ при $z\in L$ следует понимать соответствующее граничное значение (Φ^+ или Φ^-).

При доказательстве мы будем считать $\mu<1$, ибо в случае $\mu=1$ мы можем исходить из того, что если функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(1)$, то она тем более удовлетворяет условию $H(1-\varepsilon)$. Под S^+ мы будем подразумевать конечную часть плоскости, а под S^- — бесконечную и будем считать, что положительное направление на L выбрано соответствующим образом.

Пусть t_0 — какая-либо точка контура L, а z — переменная точка области S^+. Рассмотрим любую из ветвей функции от z

$$\Psi(z)=\frac{\Phi(z)-\Phi^+(t_0)}{(z-t_0)^{\nu}},\quad 0\leqslant\nu<\mu, \tag{21,3}$$

однозначную в S^+. Граничное значение этой функции

$$\Psi^+(t)=\frac{\Phi^+(t)-\Phi^+(t_0)}{(t-t_0)^{\nu}} \tag{21,4}$$

удовлетворяет на L условию H в силу теоремы Племеля — Привалова и сказанного в § 6, п. 3°. Для того чтобы применить теорему о максимуме модуля, следует еще убедиться, что функция $\Psi(z)$ непрерывна в $S^+ + L$. Последнее вытекает из следующих соображений. Удалим из области S^+ бесконечно малую ее часть σ, общую с бесконечно малым кругом, описанным из t_0, как из центра. Тогда в области $S^+ - \sigma$ функция $\Psi(z)$ представима интегралом Коши

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L'}\frac{\Psi^+(t)\,dt}{t-z},$$

где L' — граница области $S^+-\sigma$. Но так как вблизи t_0

$$\Psi(z)=O\left(\frac{1}{|z-t_0|^{\nu}}\right),\quad \nu<1,$$

то интеграл по бесконечно малой дуге окружности, описанной около t_0, стремится к нулю, и поэтому во всей области S^+

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\Psi^+(t)\,dt}{t-z}.$$

Но тогда по теореме, доказанной в § 15, функция $\Psi(z)$ непрерывна в $S^+ + L$, если приписать ей значения $\Psi^+(t)$ на L, и следовательно,

$$\frac{|\Phi(z)-\Phi^+(t_0)|}{|z-t_0|^\nu} = |\Psi(z)| \leqslant \max|\Psi^+(t)| \leqslant C,$$

где C не зависит ни от положения t_0 на L, ни от величины $\nu < \mu$ [1]). Поэтому предыдущее неравенство остается также в силе при $\nu=\mu$, и мы будем иметь:

$$|\Phi(z)-\Phi^+(t_0)| \leqslant C|z-t_0|^\mu. \tag{21,5}$$

Совершенно аналогично устанавливается такое же неравенство для точек z, находящихся в S^- [2]).

Таким образом, неравенство (21,2) установлено в случае, когда по крайней мере одна из точек z_1, z_2 находится на L.

Рассмотрим теперь случай, когда обе точки z_1, z_2 находятся в S^+. Мы можем, как легко видеть, ограничиться случаем, когда по крайней мере одна из этих точек, скажем z_1, находится на расстоянии меньшем, чем некоторая постоянная $\rho < R_0$, от границы, где R_0 — некоторый стандартный радиус [3]). Обозначим временно z_1 через z_0 и z_2 через z. Пусть t_0 — ближайшая к z_0 точка контура L.

Разрежем область S^+ прямолинейной купюрой t_0z_0 (отрезок t_0z_0, очевидно, нормален к L в точке t_0) и рассмотрим функцию

$$\Psi_0(z) = \frac{\Phi(z)-\Phi(z_0)}{(z-z_0)^\mu}, \tag{21,6}$$

голоморфную в разрезанной области и непрерывно продолжимую на всю ее границу. Граничное значение этой функции на L удовлетворяет в силу (21,5) условию $|\Psi_0^+(t)| \leqslant C$. Граничное же значение $\Psi_0(z)$ на любой из сторон купюры z_0t_0 удовлетворяет, на этот раз в силу (20,5), такому же условию. Поэтому по теореме о максимуме модуля будем иметь $|\Psi_0(z)| \leqslant C$ всюду в S^+. Совершенно аналогично устанавливается такое же неравенство для S^-. Таким образом, наша теорема доказана.

З а м е ч а н и е 1. Из предыдущей теоремы вытекает следующее заключение. Пусть $\Phi(z)$ — некоторая функция, голоморфная в S^+ [или S^-, включая бесконечно удаленную точку] и непрерывно продолжимая на L, и пусть граничное значение слева [справа], которое мы обозначим просто через $\Phi(t)$, удовлетворяет на L условию $H(\mu)$, $0 < \mu < 1$. Тогда для любых двух точек z_1, z_2 области $S^+ + L$ $[S^- + L]$

$$|\Phi(z_2)-\Phi(z_1)| \leqslant C|z_2-z_1|^\mu,$$

где C — постоянная [4]).

---

[1]) Это следует из того, что функция $\Phi^+(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$.

[2]) Функция $\Psi(z)$ не однозначна в S^-. Однако вследствие того, что нас интересуют лишь точки z, находящиеся вблизи t_0, мы можем ограничиться рассмотрением конечной части области S^-, ограниченной какой-либо частью L, содержащей t_0, дополненной до какого-либо гладкого замкнутого контура, так чтобы ограниченная этим замкнутым контуром область находилась в S^-. Тогда рассматриваемый случай сведется к предыдущему.

[3]) Если расстояние обеих точек от границы $\geqslant \rho$, где ρ — какое-либо фиксированное число, то неравенство (21,2) необходимо имеет место в силу голоморфности функции $\Phi(z)$.

[4]) Этот результат является частным случаем теоремы, доказанной в работе J. L. Walsh and W. E. Sewell [1] (см. также W. E. Sewell [1]) и заключающейся в следующем:

Пусть L — замкнутая жорданова кривая и пусть S — конечная область, ею ограниченная; пусть, далее, $f(z)$ — функция, голоморфная в S и непрерывная в $S + L$.

Действительно, указанный результат непосредственно следует из предыдущей теоремы, если представить функцию $\Phi(z)$ в области S^+ интегралом Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi(t)\,dt}{t-z};$$

аналогично обстоит дело для области S^-.

Обратно, из этого результата можно получить доказанную выше теорему, если воспользоваться еще теоремой Племеля — Привалова.

Замечание 2. Из предыдущих результатов непосредственно вытекают еще следующие. Пусть в формуле (21,1) L — произвольная кусочно-гладкая линия и пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H на некоторой гладкой дуге L', принадлежащей L и не содержащей ее узлов. Тогда в любой левой [правой] окрестности дуги L', находящейся на конечном расстоянии от ее концов, а также от точек линии L, не принадлежащих L', имеет место неравенство (21,2).

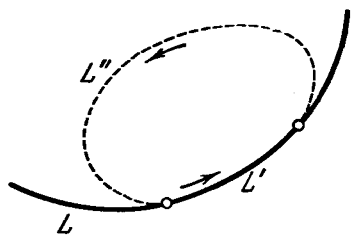

Рис. 12.

Для доказательства достаточно представить интеграл (21,1) в виде суммы двух интегралов, взятых соответственно по L' и по остальной части L, и заменить рассмотрение интеграла по L' рассмотрением интеграла по гладкому замкнутому контуру $L'+L''$, где L'' — некоторая дуга, дополняющая L' до гладкого замкнутого контура и целиком расположенная в упомянутой окрестности (рис. 12); при этом под $\varphi(t)$ на L'' можно подразумевать любую функцию, такую, чтобы функция $\varphi(t)$ удовлетворяла условию H на всем контуре $L'+L''$.

Замечание 3. Аналогично предыдущему, если $\Phi(z)$ — функция, голоморфная в левой [правой] окрестности дуги L' (см. предыдущее замечание), непрерывно продолжима на L' и если $\Phi^+(t)$ [$\Phi^-(t)$] удовлетворяет на L' условию H, то имеет место неравенство (21,2) для точек упомянутой окрестности, находящихся на конечном расстоянии от концов L', а также от точек линии L, не принадлежащих L'.

§ 22. О поведении интеграла типа Коши вблизи концов линии интегрирования[1]). В предыдущих параграфах мы изучили поведение интегра-

Пусть μ — постоянная, $0\leqslant\mu\leqslant 1$, и пусть для всех z, z_0 на L

$$\frac{|f(z)-f(z_0)|}{|z-z_0|^{\mu}}\leqslant K=\text{const};$$

тогда это неравенство справедливо для всех z, z_0 в $S+L$.

Теорема эта является обобщением результата, полученного С. Варшавским (S. Warschawski [2]), который ограничивается случаем, когда одна из точек z, z_0 находится на L.

Доказательство у упомянутых авторов гораздо более сложно, чем приведенное здесь, что объясняется тем, что мы ограничиваемся случаем, когда L — гладкий контур. Наше элементарное доказательство легко распространяется и на случай, когда L — простой кусочно-гладкий контур; см. Добавление II в конце книги.

[1]) Результаты, излагаемые в §§ 22—26, понадобятся нам лишь в главах IV и V, не считая некоторых параграфов настоящей главы, в которых также можно обойтись без них (как это будет указано в соответствующих местах), если ограничиться рассмотрением более частных случаев, которые только и понадобятся нам в главах II, III и VI.

Результаты §§ 22—25 были получены автором и опубликованы (в главной части — без доказательств) в статьях: Н. И. Мусхелишвили [6] и Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава [1]. Доказательства были опубликованы в первом издании настояла типа Коши вблизи и на линии интегрирования, ограничиваясь предположением, что по крайней мере рассматриваемая часть этой линии гладкая, а плотность $\varphi(t)$ принадлежит классу H на этой части. Однако во многих (даже простейших) приложениях такое ограничение может привести к потере иногда наиболее существенных результатов.

С другой стороны, в большинстве приложений вполне достаточно предполагать, что линия L — кусочно-гладкая и что $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* на L (§ 8, п. 4°). Изучением этого случая мы и займемся.

Для выяснения наиболее существенных вопросов достаточно рассмотреть случай, когда линия интегрирования — простая разомкнутая дуга, а $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* в окрестности одного из ее концов, и изучить поведение интеграла типа Коши вблизи этого конца; обобщение на случай любой кусочно-гладкой линии не представит затруднений (§ 26).

1°. Итак, предположим, что линия интегрирования

$$L = ab$$

— гладкая разомкнутая дуга и что $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* в окрестности одного из концов a или b, который мы обозначим через c; мы будем, как обычно, считать, что положительное направление на L ведет от a к b.

Для того чтобы получить формулы, характеризующие поведение интеграла типа Коши вблизи рассматриваемого конца c, в том виде, как они нам понадобятся в дальнейшем, мы представим функцию $\varphi(t)$ следующим образом[1]):

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^{\gamma}}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{22,1}$$

где α и β — действительные постоянные, а $\varphi^*(t)$ — функция, принадлежащая классу H на L в окрестности конца c. В этом выражении $(t-c)^{\gamma}$ обозначает любую определенную ветвь, непрерывно изменяющуюся на L (кроме точки c, если $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$).

Заметим, что из (22,1) следует:

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^{**}(t)}{|t-c|^{\alpha}}, \tag{22,1a}$$

где $\varphi^{**}(t)$ — ограниченная функция, принадлежащая классу H_{ε}^* в окрестности c; последнее означает (§ 8, п. 5°), что произведение $|t-c|^{\varepsilon}\varphi^{**}(t)$ принадлежит в окрестности c классу H при всяком $\varepsilon > 0$ [2]); ясно, что это произведение обращается в нуль при $t = c$.

Заметим еще, что то же условие (22,1) дает:

$$\varphi(t) = \frac{\varphi_*(t)}{(t-c)^{\mu}}, \quad \varphi(t) = \frac{\varphi_{**}(t)}{|t-c|^{\nu}}, \tag{22,2}$$

щей книги (1946 г.). Не будучи, очевидно, знаком с этими работами, Ф. Трикоми (F. Tricomi [3]) опубликовал в 1951 г. формулы, полученные им довольно сложным путем и представляющие собой частные случаи формул (22,7) и (22,8). Ср. также более позднюю работу H. Söhngen [2]. Интересующим нас здесь вопросам посвящен ряд недавно опубликованных работ В. Погожельского; см. об этом сноску в начале § 26.

[1]) То, что функцию, принадлежащую классу H^* в окрестности c, всегда можно представить в виде (22,1), следует из сказанного в тексте ниже, а именно из формул (22,2) и сказанного непосредственно вслед за ними.

[2]) Имеем:

$$\varphi^{**}(t) = \varphi^*(t)\, e^{-i\alpha\vartheta}\,(t-c)^{-i\beta},$$

где $\vartheta = \arg(t-c)$; отсюда и вытекает утверждение, высказанное в тексте, если принять во внимание сказанное в § 6, п. 3°.

где μ, ν — любые положительные постоянные, превосходящие α на сколь угодно малую величину, а $\varphi_*(t)$, $\varphi_{**}(t)$ принадлежат классу H в окрестности c (и обращаются в нуль при $t=c$). Ясно также, что если $\varphi(t)$ удовлетворяет второму из условий (22,2), где $\varphi_{**}(t)$ принадлежит классу H в окрестности c (не обращаясь обязательно в нуль в этой точке), то $\varphi(t)$ удовлетворяет и первому из условий (22,2) при μ, большем ν на сколь угодно малую величину.

2°. Рассмотрим теперь интеграл

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{22,3}$$

где $\varphi(t)$ определяется формулой (22,1).

При указанных условиях для точек z, достаточно близких к c, но не расположенных на L, имеют место следующие предложения.

Предложение I. *Если* $\gamma=0$ (тогда $\varphi^*(t)=\varphi(t)$), *то*

$$\Phi(z)=\mp\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln(z-c)+\Phi_0(z), \tag{22,4}$$

где верхний знак берется при $c=a$, нижний — при $c=b$. Под $\ln(z-c)$ *подразумевается любая ветвь, голоморфная в окрестности c на разрезанной вдоль L плоскости; $\Phi_0(z)$ обозначает функцию, голоморфную в окрестности точки c на разрезанной плоскости, стремящуюся к определенному пределу при $z\to c$ по любому пути.*

Предложение II. *Если* $\gamma=\alpha+i\beta\neq 0$, *то*

$$\Phi(z)=\pm\frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi^*(c)}{(z-c)^\gamma}+\Phi_0(z), \tag{22,5}$$

где знаки выбираются, как в предложении I; $(z-c)^\gamma$ *обозначает ветвь, голоморфную вблизи c на разрезанной вдоль L плоскости и принимающую значение $(t-c)^\gamma$ на левой стороне L*[1]), *а $\Phi_0(z)$ — функцию, голоморфную в окрестности точки c на разрезанной плоскости и обладающую следующими свойствами: если $\alpha=0$, она стремится к определенному пределу при $z\to c$ по любому пути; если же $\alpha>0$, то*

$$|\Phi_0(z)|<\frac{C}{|z-c|^{\alpha_0}}, \tag{22,6}$$

где C и α_0 — положительные постоянные, причем $\alpha_0<\alpha$.

Из предложений I и II вытекает, что *если $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* на L, то функция $\Phi(z)$ представляет собой кусочно-голоморфную функцию*[2]) *с линией скачков L* (в смысле определения, данного в § 10).

Для точек t_0, расположенных на L, имеют место следующие предложения.

Предложение III. *Если* $\gamma=0$, *то*

$$\Phi(t_0)=\mp\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln(t_0-c)+\Phi^*(t_0), \tag{22,7}$$

---

[1]) Под $(t-c)^\gamma$ подразумевается значение, фигурирующее в формуле (22,1).

[2]) При этом условие принадлежности $\varphi(t)$ классу H^* (или какое-либо аналогичное условие) весьма существенно. Как показал И. Н. Карцивадзе [1], функция $\Phi(z)$ может быть сколь угодно быстро возрастающей при $z\to c$ даже в случае, когда плотность $\varphi(t)$ непрерывна всюду на L и имеет производную, также непрерывную всюду на L, кроме конца c.

где $\Phi^*(t_0)$ *принадлежит классу* H *в окрестности* c; *знаки выбираются, как в предложении* I; *под* $\ln(t_0-c)$ *подразумевается любое значение, непрерывно изменяющееся на* L (кроме, разумеется, конца c).

Предложение IV. *Если* $\gamma=\alpha+i\beta\neq 0$, *то*

$$\Phi(t_0)=\pm\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\cdot\frac{\varphi^*(c)}{(t_0-c)^{\gamma}}+\Phi^*(t_0), \tag{22,8}$$

причем если $\alpha=0$, *то* $\Phi^*(t_0)$ *принадлежит классу* H *в окрестности* c; *если же* $\alpha>0$, *то*

$$\Phi^*(t_0)=\frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t_0-c|^{\alpha_0}}, \tag{22,9}$$

где $\Phi^{**}(t_0)$ *принадлежит классу* H *в окрестности* c; $\alpha_0=\mathrm{const}<\alpha$; *знаки выбираются, как в предложении* I.

Предложение I уже доказано в § 15 [формулы (15,7), (15.8)]. Предложение III доказывается совершенно аналогично на основании сказанного в § 18 (конец п. 1°), формулы

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-t_0}dt+\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{t-t_0}=$$
$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-t_0}dt+\frac{\varphi(a)}{2\pi i}\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}+\mathrm{const}\,^{1)} \tag{22,10}$$

и аналогичной формулы, соответствующей концу b. Предложения II и IV будут доказаны в §§ 23—25[2]).

3°. Считая упомянутые предложения доказанными, укажем еще некоторые свойства функций $\Phi_0(z)$, входящих в правые части формул (22,4), (22,5); эти функции, разумеется, тесно связаны с функциями $\Phi^*(t)$, входящими в формулы (22,7), (22,8).

Начнем с формулы (22,4), считая для определенности, что $c=a$. Переходя к пределу при $z\to t_0$ слева от L, где t_0 обозначает точку дуги L, достаточно близкую к концу a, но не совпадающую с ним, и применяя к левой части формулу Сохоцкого — Племеля, получим:

$$\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\ln(t_0-a)+\Phi_0^+(t_0),$$

где под $\ln(t_0-a)$ подразумевается значение, принимаемое выбранной вблизи a ветвью функции $\ln(z-a)$ на левой стороне L. Аналогично, переходя к пределу справа от L, получим:

$$-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0)=-\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\,[\ln(t_0-a)+2\pi i]+\Phi_0^-(t_0),$$

где под $\ln(t_0-a)$ подразумевается то же, что выше. Таким образом, получаем:

$$\Phi_0^+(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\ln(t_0-a)+\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0),$$

$$\Phi_0^-(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\varphi(a)\ln(t_0-a)+\varphi(a)-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\Phi(t_0),$$

---

[1]) Эта постоянная зависит от выбора логарифмического члена. Например, если этот член выбран так, как в формуле (13,4а), то она равна $-\frac{1}{2}\varphi(a)$.

[2]) Заметим, что эти предложения были обобщены И. М. Мельником [1] — [3] на случай, когда вместо (22,1) имеем $\varphi(t)=\varphi^*(t)(t-c)^{-\gamma}\ln^p(t-c)$, где p — целое положительное число, или $\varphi(t)=\varphi^*(t)(t-c)^{-\gamma}\ln\ln(t-c)$.

откуда, сопоставляя с формулой (22,7) и подразумевая в этой последней формуле под $\ln(t_0 - c) = \ln(t_0 - a)$ то же значение, что и здесь, выводим:

$$\Phi_0^+(t_0) = \Phi^*(t_0) + \frac{1}{2}\varphi(t_0),$$

$$\Phi_0^-(t_0) = \Phi^*(t_0) + \varphi(a) - \frac{1}{2}\varphi(t_0).$$

Так как на основании предложения III функция $\Phi^*(t_0)$ принадлежит классу H в окрестности a, то и граничные значения $\Phi_0^+(t_0)$, $\Phi_0^-(t_0)$ принадлежат классу H в этой окрестности, если приписать им надлежащие значения в точке a, а именно, значения, получаемые предельным переходом $t_0 \to a$. Из предыдущих формул следует, что эти предельные значения одинаковы:

$$\lim_{t_0 \to a} \Phi_0^+(t_0) = \lim_{t_0 \to a} \Phi_0^-(t_0) = \Phi^*(a) + \frac{1}{2}\varphi(a),$$

как и следовало ожидать вследствие того, что функция $\Phi_0(z)$ непрерывно продолжима на точку a.

Все эти заключения мы могли бы, конечно, вывести непосредственно, исходя из формул (15,7) и (22,10). Предыдущие элементарные рассуждения мы привели лишь потому, что совершенно аналогичные рассуждения применимы и к формулам (22,5), (22,8). Предоставляя читателю провести эти простые рассуждения, мы сформулируем окончательный результат следующим образом.

В случае $\alpha = 0$ (т. е. когда $\gamma = \alpha + i\beta = 0$ или $\gamma = i\beta$) *функции* $\Phi_0(z)$, *входящие в формулы* (22,4), (22,5), *непрерывно продолжимы на* L *слева и справа вблизи конца* c, *а также на этот конец; граничные значения* $\Phi_0^+(t_0)$, $\Phi_0^-(t_0)$ *этих функций принадлежат классу* H *на* L *в окрестности* c, *если под* $\Phi_0^+(c)$, $\Phi_0^-(c)$ *подразумевать граничное значение* $\Phi_0(c)$ *функции* $\Phi_0(z)$ *при* $z \to c$.

В случае, когда $\alpha > 0$, *функция*

$$\Omega_0(z) = (z - c)^\gamma \Phi_0(z),$$

где $\Phi_0(z)$ *обозначает то же, что в формуле* (22,5), *непрерывно продолжима слева и справа на* L *вблизи конца* c, *а также на этот конец, причем* $\Omega_0(c) = 0$; *граничные значения* $\Omega_0^+(t_0)$, $\Omega_0^-(t_0)$ *принадлежат классу* H *на* L *в окрестности* c, *если условиться считать* $\Omega_0^+(c) = \Omega_0^-(c) = 0$.

4°. Во многих приложениях можно ограничиваться рассмотрением случая $\alpha > 0$, так как если $\varphi(t)$ имеет вид (22,1), заменяя в случае надобности число α несколько большей величиной, можно считать, что $0 < \alpha < 1$.

При этом условии вместо предложений II и IV можно пользоваться их следствием, которое мы сформулируем в виде отдельного предложения.

Предложение V. *Для точек* z, *достаточно близких к* c, *но не расположенных на* L, *голоморфная вблизи* c *на разрезанной вдоль* L *плоскости функция*

$$\Omega(z) = (z - c)^\gamma \Phi(z) \tag{22,11}$$

непрерывно продолжима слева и справа на L *в окрестности конца* c, *а также на конец* c; *при этом если* A *обозначает предел* $\Omega(z)$ *при* $z \to c$, *то вблизи* c

$$|\Omega(z) - A| \leqslant \text{const} \cdot |z - c|^\varepsilon, \quad \varepsilon = \text{const} > 0. \tag{22,12}$$

Для точек же t_0, расположенных на L, функция

$$\Omega(t_0) = (t_0 - c)^\gamma \Phi(t_0)$$

принадлежит классу H в окрестности c, если приписать ей надлежащее значение A_0 в точке c.

Это предложение эквивалентно совокупности предложений II и IV (при $\alpha > 0$), если не считать того, что последние дают явные выражения для A и A_0.

Добавим еще, что в силу сказанного выше граничные значения $\Omega^+(t_0)$, $\Omega^-(t_0)$ удовлетворяют на L в окрестности c условию H, если приписать им значение $A = \Omega(c)$ в точке c.

5°. Рассмотрим, наконец, случай, когда плотность зависит от некоторого параметра. Именно, считая по-прежнему, что $L = ab$ — гладкая разомкнутая дуга, рассмотрим интеграл

$$\Phi(t_0, \tau) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t, \tau)\,dt}{t - t_0}, \tag{22,13}$$

в котором

$$\varphi(t, \tau) = \frac{\varphi^*(t, \tau)}{(t-c)^\gamma}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 < \alpha < 1, \quad c = a \text{ или } b, \tag{22,14}$$

где α и β — действительные постоянные, первая из которых удовлетворяет указанному неравенству, а $\varphi^*(t, \tau)$ обозначает функцию точки t на L и параметра τ, принадлежащего некоторому множеству T, удовлетворяющую условию H по обеим переменным t, τ при $t \in L$, $\tau \in T$. При этих условиях имеет место следующее

Предложение VI. *Функция*

$$\Omega(t_0, \tau) = (t_0 - c)^\gamma \Phi(t_0, \tau) \tag{22,15}$$

удовлетворяет условию H по t_0 и по τ при $t_0 \in L'$, $\tau \in T$, где L' обозначает любую часть дуги L, примыкающую к концу c и находящуюся на конечном расстоянии от другого конца.

Относительно переменной t_0 это вытекает из предложения IV (или предложения V); относительно же τ это будет доказано в § 25 (п. 2°).

§ 23. Продолжение. Некоторые вспомогательные оценки. При доказательстве высказанных в предыдущем параграфе предложений нам понадобятся некоторые вспомогательные оценки, касающиеся интеграла (22,3), к доказательству которых мы и переходим.

Для упрощения (впрочем, незначительного) некоторых формулировок и рассуждений мы будем считать здесь, что функция $\varphi^*(t)$ под знаком этого интеграла удовлетворяет условию H не только в окрестности конца c, но и на всей дуге $L = ab$; это, очевидно, не отразится на общности, так как нас интересует поведение интеграла лишь в окрестности точки c.

1°. Итак, рассмотрим при обозначениях предыдущего параграфа интеграл (22,3)

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab} \frac{\varphi^*(t)\,dt}{(t-c)^\gamma (t-z)}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad c = a \text{ или } b, \tag{23,1}$$

и докажем, считая, что z находится в окрестности конца c, справедливость следующей оценки (несколько более грубой, чем те, которые требуются в конечном счете):

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\nu}}, \tag{23,2}$$

где ν — любое действительное число такое, что $\alpha < \nu < 1$.

Имеем, обозначая через $\varphi^{**}(t)$ то же, что в формуле (22,1а),

$$|z-c|^{\nu}\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{|z-c|^{\nu}-|t-c|^{\nu}}{|t-c|^{\alpha}(t-z)}\varphi^{**}(t)\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{|t-c|^{\nu-\alpha}\varphi^{**}(t)\,dt}{t-z}.$$

Так как $|t-c|^{\nu-\alpha}\varphi^{**}(t)$ принадлежит в окрестности c классу H и обращается в нуль при $t=c$, то второй интеграл правой части остается ограниченным вблизи c.

Рассмотрим теперь первый интеграл правой части, который обозначим через I. Принимая во внимание, что

$$\big||z-c|^{\nu}-|t-c|^{\nu}\big| \leqslant |z-t|^{\nu},$$

имеем:

$$|I| \leqslant \frac{1}{2\pi}\int_{ab}\frac{|\varphi^{**}(t)|\,ds}{|t-c|^{\alpha}|t-z|^{1-\nu}}.$$

Полагая $|t-c|=r$, $|z-c|=\delta$, замечая, что $|t-z| \geqslant |r-\delta|$, и считая дугу ab стандартной (что, конечно, не уменьшает общности), получим, применяя формулу (2,2),

$$|I| \leqslant \text{const}\cdot\int_0^R \frac{dr}{r^{\alpha}|r-\delta|^{1-\nu}},$$

где $R = |b-a|$. Принимая же во внимание, что $1+\alpha-\nu < 1$, легко убедиться, что интеграл в правой части — ограниченная величина[1]). Таким образом, неравенство (23,2) доказано.

2°. Рассмотрим теперь один частный вид интеграла (23,1), а именно, интеграл

$$\Omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}, \quad \gamma=\alpha+i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad \gamma \neq 0, \tag{23,3}$$

где $c = a$ или b.

Будем сначала считать, что $c = a$. На основании формулы Сохоцкого — Племеля (§ 16) имеем для любой точки t_0 на $L = ab$, отличной от концов,

$$\Omega^{+}(t_0) - \Omega^{-}(t_0) = (t_0-a)^{-\gamma}.$$

---

[1]) Для этого достаточно, например, разбить промежуток интегрирования на три части

$$\left(0, \frac{\delta}{2}\right), \quad \left(\frac{\delta}{2}, \delta\right), \quad (\delta, R)$$

и в каждом из этих промежутков заменить $r^{\alpha}|r-\delta|^{1-\nu}$ на меньшие величины, а именно, соответственно на

$$r^{1+\alpha-\nu}, \quad (\delta-r)^{1+\alpha-\nu}, \quad (r-\delta)^{1+\alpha-\nu}.$$

Полученные таким образом интегралы сразу вычисляются и оказываются ограниченными.

Для функции $(z-a)^{-\gamma}$, однозначной вблизи a на разрезанной вдоль $L=ab$ плоскости и принимающей на левой стороне L значение $(t_0-a)^{-\gamma}$, имеем, очевидно,

$$[(t_0-a)^{-\gamma}]^+-[(t_0-a)^{-\gamma}]^-=(1-e^{-2\pi i\gamma})(t_0-a)^{-\gamma}.$$

Следовательно, если положить

$$\omega(z)=\frac{(z-a)^{-\gamma}}{1-e^{-2\pi i\gamma}}=\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma},$$

то

$$[\Omega-\omega]^+=[\Omega-\omega]^-$$

на L вблизи a. Далее, применяя оценку (23,2) к функции $\Omega(z)$ и учитывая вид функции $\omega(z)$, имеем:

$$|\Omega(z)-\omega(z)|<\frac{\text{const}}{|z-a|^{\nu}},\quad \nu<1.$$

Из предыдущего на основании сказанного в § 10, п. 3° следует, что функция $\Omega(z)-\omega(z)$ голоморфна в окрестности точки a, если приписать ей надлежащие значения на L, т. е. в этой окрестности

$$\Omega(z)=\frac{e^{i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}(z-a)^{-\gamma}+A_0+A_1(z-a)+A_2(z-a)^2+\ldots \tag{23,4}$$

Далее, для $z=t_0$ на L имеем:

$$2\Omega(t_0)=\Omega^+(t_0)+\Omega^-(t_0),$$

откуда, как легко видеть, следует для окрестности точки a на L

$$\Omega(t_0)=\frac{1}{2i}\operatorname{ctg}\gamma\pi\cdot(t_0-a)^{-\gamma}+A_0+A_1(t_0-a)+A_2(t_0-a)^2+\ldots \tag{23,5}$$

Совершенно аналогично при $c=b$ для окрестности точки b

$$\Omega(z)=-\frac{e^{-i\gamma\pi}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot(z-b)^{-\gamma}+B_0+B_1(z-b)+B_2(z-b)^2+\ldots, \tag{23,6}$$

$$\Omega(t_0)=-\frac{1}{2i}\operatorname{ctg}\gamma\pi\cdot(t_0-b)^{-\gamma}+B_0+B_1(t_0-b)+B_2(t_0-b)^2+\ldots \tag{23,7}$$

Замечание. Отметим еще одну простую оценку, аналогичную той, которая была приведена в замечании 3 к § 15. Считая, как было условлено, что $\varphi^*(t)$ удовлетворяет условию H на всей дуге $L=ab$, возьмем на этой дуге две точки c' и c'' и рассмотрим интеграл

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{\varphi^*(t)\,dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{\varphi^{**}(t)\,dt}{|t-c|^{\alpha}(t-z)}, \tag{23,8}$$

$$\gamma=\alpha+i\beta,\qquad 0\leqslant\alpha<1,$$

отличающийся от интеграла (23,1) лишь тем, что интегрирование распространяется не на всю дугу L, а на ее часть $c'c''$; случаи, когда c' или c'' совпадают с a или b, не исключаются. Докажем, что при указанных условиях для всех точек z, находящихся в окрестности дуги L,

$$|\Psi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^{\nu}\,|z-c'|^{\varepsilon'}\,|z-c''|^{\varepsilon''}}, \tag{23,9}$$

где ν — любая положительная постоянная, бо́льшая α, а ε', ε'' — любые (сколь угодно малые) положительные постоянные.

Действительно, имеем аналогично п. 1°

$$|z-c|^{\nu}\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{|z-c|^{\nu}-|t-c|^{\nu}}{|t-c|^{\alpha}(t-z)}\varphi^{**}(t)\,dt+\frac{1}{2\pi i}\int_{c'c''}\frac{|t-c|^{\nu-\alpha}\varphi^{**}(t)\,dt}{t-z}.$$

Первый интеграл правой части легко оценивается точно так же, как был оценен интеграл I в п. 1°, и оказывается ограниченным. Ко второму же применяется оценка (15,11), что и приводит к оценке (23,9).

Оценка (23,9), очевидно, пригодна и для точек $z=t_0$, расположенных на L, так что

$$|\Psi(t_0)|<\frac{\text{const}}{|t_0-c|^{\nu}\,|t_0-c'|^{\varepsilon'}\,|t_0-c''|^{\varepsilon''}}. \tag{23,9a}$$

Если $\varphi^*(t)$ удовлетворяет условию H не на всей дуге ab, а лишь на некоторой ее части, примыкающей к концу c, то предыдущие оценки пригодны, очевидно, для случая, когда c' и c'' достаточно близки к c и когда z находится в окрестности той части дуги L, которая примыкает к c и содержит дугу $c'c''$.

§ 24. Продолжение. Доказательство предложения II. При обозначениях § 22 имеем:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)\,dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}, \tag{24,1}$$

где $\varphi^*(t)$ принадлежит классу H в окрестности c (c обозначает a или b).

В случае $\alpha=0$, $\gamma=i\beta\neq0$ перепишем предыдущую формулу так:

$$\Phi(z)=\frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)](t-c)^{-i\beta}}{t-z}\,dt. \tag{24,2}$$

Так как $[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)](t-c)^{-i\beta}$ принадлежит классу H в окрестности c[1]) и обращается в нуль при $t=c$, то второй интеграл правой части — ограниченная вблизи c функция, стремящаяся к определенному пределу при $z\to c$. Поведение же первого интеграла определяется формулами (23,4) и (23,6) предыдущего параграфа, откуда и следует формула (22,5) для случая $\alpha=0$.

Перейдем к рассмотрению случая $\alpha>0$ (причем, напоминаем, $\alpha<1$) и представим $\Phi(z)$ так:

$$\Phi(z)=\frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)-\varphi^*(c)}{(t-c)^{\gamma}(t-z)}\,dt.$$

Поведение первого слагаемого вблизи c определяется формулами (23,4), (23,6). Подынтегральное выражение во втором слагаемом можно переписать так:

$$\frac{[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)](t-c)^{-\varepsilon}}{(t-c)^{\gamma-\varepsilon}(t-z)},$$

где ε — положительное число, достаточно малое для того, чтобы числитель продолжал удовлетворять условию H в окрестности c. Применяя теперь к рассматриваемому второму слагаемому оценку (23,2) и взяв в качестве $\nu=\alpha_0$ любое число, такое, что $\alpha-\varepsilon<\nu<\alpha$, убеждаемся в справедливости формулы (22,5) для случая $\alpha>0$. Таким образом, предложение II доказано.

---

[1]) См. § 6.

§ 25. Продолжение. Доказательство предложений IV и VI. Нам остается доказать предложения IV и VI из § 22.

1°. Докажем предложение IV. В случае $\alpha = 0$ оно непосредственно вытекает из формулы

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)(t-c)^{-i\beta}\,dt}{t-t_0}=$$
$$=\frac{\varphi^*(c)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{(t-c)^{-i\beta}\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{[\varphi^*(t)-\varphi^*(c)](t-c)^{-i\beta}\,dt}{t-t_0}, \qquad (25,1)$$

ибо поведение первого слагаемого в правой части вблизи c определяется формулой (23,5) или (23,7), а числитель подынтегрального выражения во втором слагаемом удовлетворяет в окрестности c условию H и обращается в нуль при $t=c$.

Остается рассмотреть случай $\alpha>0$. Считая, для определенности, $c=a$ (случай $c=b$ рассматривается аналогично), положим:

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\varphi^*(t)\,dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}=\frac{\varphi^*(a)}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}+\Psi^*(t_0), \qquad (25,2)$$

где

$$\Psi^*(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)\,dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}, \qquad (25,3)$$

$$\psi(t)=\varphi^*(t)-\varphi^*(a). \qquad (25,4)$$

Из формулы (23,5) следует, что первое слагаемое правой части (25,2) имеет вид правой части доказываемой формулы (22,8). Далее, вследствие того, что $\psi(a)=0$, из формул (22,5), (22,6), в которых теперь вместо $\Phi(z)$, $\varphi^*(t)$ мы возьмем $\Psi^*(z)$, $\psi(t)$, следует, что $(t_0-a)^\gamma\Psi^*(t_0)\to 0$ при $t_0\to a$[1]). Поэтому формула (22,8) будет доказана, если мы докажем, что функция

$$\Psi(t_0)=(t_0-a)^\gamma\Psi^*(t_0)=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)\,dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)} \qquad (25,5)$$

принадлежит в окрестности точки a классу H, если условиться считать $\Psi(a)=0$. В самом деле, тогда будем иметь:

$$\Psi^*(t_0)=\frac{\Psi(t_0)}{(t_0-a)^\gamma}=\frac{\Psi(t_0)-\Psi(a)}{(t-t_0)^\gamma},$$

и поэтому функция $\Psi^*(t_0)$ будет иметь вид функции $\Phi^*(t_0)$, фигурирующей в правой части доказываемой формулы (22,8).

Остальная часть этого пункта посвящена доказательству того, что функция $\Psi(t_0)$ принадлежит классу H в окрестности a. Не нарушая общности, мы будем считать, что дуга ab — стандартная и что $\psi(t)$ принадлежит классу H на всей дуге ab.

Имеем:

$$\Psi(t_0)=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\,dt+\frac{\psi(t_0)(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}.$$

---

[1]) Для того чтобы можно было применить формулу (22,5) к случаю, когда $z=t_0$ находится на самой дуге ab, достаточно заметить, что

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2}[\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)].$$

Последнее слагаемое принадлежит в окрестности a классу H, как это следует из формулы (23,5).

Рассмотрим первое слагаемое

$$\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{[\psi(t)-\psi(t_0)][(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]\,dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}+\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}dt.$$

Но

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)-\psi(t_0)}{t-t_0}dt=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0}-\frac{\psi(t_0)}{2\pi i}\left\{\ln\frac{t_0-b}{t_0-a}+\text{const}\right\}$$

принадлежит классу H в окрестности a, так как $\psi(a)=0$.

Остается исследовать интеграл

$$\Omega(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\frac{[\psi(t)-\psi(t_0)][(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma]\,dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}.$$

Имеем:

$$\Omega(t_0+h)-\Omega(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{ab}\left\{\frac{[(t_0+h-a)^\gamma-(t-a)^\gamma][\psi(t)-\psi(t_0+h)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0-h)}-\right.$$

$$\left.-\frac{[(t_0-a)^\gamma-(t-a)^\gamma][(\psi(t)-\psi(t_0)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\right\}dt. \tag{25,6}$$

Будем определять положение t на ab дуговой абсциссой s, отсчитываемой от a; пусть точке b соответствует абсцисса $s=s_b$, точкам t_0 и t_0+h соответственно s_0 и $s_0+\sigma$; не нарушая общности, можем, очевидно, считать $\sigma>0$ и, кроме того (так как нас интересует лишь окрестность точки a), $2\sigma<s_b-s_0$.

Обозначим через t_2 точку, соответствующую $s_2=s_0+2\sigma$, а через t_1 — точку, соответствующую $s_1=s_0-2\sigma$, если $s_0-2\sigma>0$, или точку a, если $s_0-2\sigma\leqslant 0$.

Разобьем интеграл (25,6) на сумму двух интегралов: I_0, взятого по части $l=t_1t_2$, и I, взятого по остальной части $ab-t_1t_2=l'$, так что

$$\Omega(t_0+h)-\Omega(t_0)=I_0+I. \tag{25,7}$$

Принимая во внимание, что $(t-a)^\gamma=(t-a)^{\alpha+i\beta}$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$ (§ 6, п. 3°), будем иметь:

$$|(t-a)^\gamma-(t_0-a)^\gamma|\leqslant\text{const}\cdot|t-t_0|^\alpha. \tag{25,8}$$

Поэтому, если λ — показатель условия H для $\psi(t)$, то

$$|I_0|\leqslant\text{const}\cdot\left\{\int_l\frac{ds}{|t-a|^\alpha|t-t_0-h|^{1-\alpha-\lambda}}+\int_l\frac{ds}{|t-a|^\alpha|t-t_0|^{1-\alpha-\lambda}}\right\}\leqslant$$

$$\leqslant\text{const}\cdot\left\{\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0-\sigma|^{1-\alpha-\lambda}}+\int_{s_1}^{s_2}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0|^{1-\alpha-\lambda}}\right\};$$

напомним, что $s_1=s_0-2\sigma$ или 0, $s_2=s_0+2\sigma$.

Произведя подстановку $s=s_0+\sigma\cdot\rho$, где ρ — новая переменная интегрирования, легко убеждаемся, что

$$|I_0|\leqslant\text{const}\cdot\sigma^\lambda. \tag{25,9}$$

Переходя к интегралу I, который берется по $l' = ab - t_1t_2$, перепишем его теперь так:

$$I = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{l'}\left\{\frac{(t_0+h-a)^\nu-(t-a)^\nu}{(t-a)^\nu(t-t_0-h)} - \frac{(t_0-a)^\nu-(t-a)^\nu}{(t-a)^\nu(t-t_0)}\right\}[\psi(t)-\psi(t_0+h)]\,dt +$$
$$+\frac{\psi(t_0)-\psi(t_0+h)}{2\pi i}\int\limits_{l'}\frac{(t_0-a)^\nu-(t-a)^\nu}{(t-a)^\nu(t-t_0)}\,dt. \qquad (25,10)$$

Последний интеграл легко оценивается; именно, принимая во внимание (25,8), получаем:

$$\left|\int\limits_{l'}\frac{(t_0-a)^\nu-(t-a)^\nu}{(t-a)^\nu(t-t_0)}\,dt\right| \leqslant \mathrm{const}\cdot\int\limits_{l'}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0|^{1-\alpha}} =$$
$$= \mathrm{const}\cdot\left\{\int\limits_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0-s)^{1-\alpha}} + \int\limits_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s-s_0)^{1-\alpha}}\right\}; \qquad (25,11)$$

если $s_0 - 2\sigma \leqslant 0$, то первый интеграл в правой части отпадает. При $s_1 = s_0 - 2\sigma > 0$, произведя подстановку $s = s_0\rho$, получаем:

$$\int\limits_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0-s)^{1-\alpha}} = \int\limits_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}}\frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)^{1-\alpha}} \leqslant \int\limits_0^1\frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)^{1-\alpha}} = \mathrm{const}.$$

Во втором интеграле правой части (25,11) замена переменной $s = s_0 + 2\sigma\cdot\rho$ дает при достаточно малом σ

$$\int\limits_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s-s_0)^{1-\alpha}} = \int\limits_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\left(\rho+\frac{s_0}{2\sigma}\right)^\alpha\rho^{1-\alpha}} \leqslant \int\limits_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}}\frac{d\rho}{\rho} = \ln\frac{s_b-s_0}{2\sigma} < \mathrm{const}\cdot|\ln\sigma|.$$

Таким образом, второе слагаемое в правой части (25,10) не превосходит $\mathrm{const}\cdot\sigma^\lambda|\ln\sigma|$ и, тем более, $\mathrm{const}\cdot\sigma^{\lambda-\varepsilon}$, где ε — произвольно фиксированное положительное число.

Оценим теперь первое слагаемое правой части (25,10), которое мы представим в виде суммы $I_1 + I_2$, где

$$I_1 = \frac{(t_0+h-a)^\nu-(t_0-a)^\nu}{2\pi i}\int\limits_{l'}\frac{\psi(t)-\psi(t_0+h)}{(t-a)^\nu(t-t_0-h)}\,dt,$$

$$I_2 = \frac{h}{2\pi i}\int\limits_{l'}\frac{[\psi(t)-\psi(t_0+h)]\,[(t_0-a)^\nu-(t-a)^\nu]\,dt}{(t-a)^\nu(t-t_0-h)(t-t_0)}.$$

Имеем:

$$|I_1| \leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma^\alpha\left\{\int\limits_0^{s_1}\frac{ds}{s^\alpha(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}} + \int\limits_{s_2}^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}}\right\},$$

причем первый интеграл отпадает, если $s_0 - 2\sigma \leqslant 0$.

Если $\lambda \geqslant \alpha$, то совершенно так же, как при оценке правой части 25,11), легко устанавливаем, что выражение, заключенное в фигурные скобки, ограниченно при $\lambda > \alpha$ и не превосходит $\mathrm{const}\cdot|\ln\sigma|$, если $\lambda = \alpha$;

поэтому при $\lambda \geqslant \alpha$

$$|I_1| \leqslant \text{const} \cdot \sigma^{\alpha-\varepsilon},$$

где ε — произвольно зафиксированная положительная постоянная (при $\lambda > \alpha$ можно взять $\varepsilon = 0$).

Если $\lambda < \alpha$, то, производя те же подстановки, как при оценке выражения (25,11), получаем (для первого интеграла — в случае $s_0 > 2\sigma$, ибо при $s_0 \leqslant 2\sigma$ он исчезает):

$$\int_0^{s_1} \frac{ds}{s^\alpha (s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}} = \frac{1}{s_0^{\alpha-\lambda}} \int_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha \left(1+\frac{\sigma}{s_0}-\rho\right)^{1-\lambda}} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{s_0^{\alpha-\lambda}} \int_0^1 \frac{d\rho}{\rho^\alpha (1-\rho)^{1-\lambda}} < \text{const} \cdot \sigma^{\lambda-\alpha},$$

$$\int_{s_2}^{s_b} \frac{ds}{s^\alpha (s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}} = \frac{1}{(2\sigma)^{\alpha-\lambda}} \int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}} \frac{d\rho}{\left(\rho+\frac{s_0}{2\sigma}\right)^\alpha \left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{1-\lambda}} <$$

$$< \frac{1}{(2\sigma)^{\alpha-\lambda}} \int_1^\infty \frac{d\rho}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{1+\alpha-\lambda}} = \text{const} \cdot \sigma^{\lambda-\alpha}.$$

Таким образом, при $\lambda < \alpha$ получаем:

$$|I_1| \leqslant \text{const} \cdot \sigma^\lambda.$$

Переходим, наконец, к оценке I_2. Имеем:

$$|I_2| \leqslant \text{const} \cdot \sigma \left\{ \int_0^{s_1} \frac{ds}{s^\alpha (s_0+\sigma-s)^{1-\lambda} (s_0-s)^{1-\alpha}} + \int_{s_2}^{s_b} \frac{ds}{s^\alpha (s-s_0-\sigma)^{1-\lambda} (s-s_0)^{1-\alpha}} \right\};$$

первый интеграл отпадает при $s_0 \leqslant 2\sigma$.

Произведя те же подстановки, что и в предыдущем случае, получаем:

$$\int_0^{s_1} \frac{ds}{s^\alpha (s_0+\sigma-s)^{1-\lambda} (s_0-s)^{1-\alpha}} = \frac{1}{s_0^{1-\lambda}} \int_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha \left(1+\frac{\sigma}{s_0}-\rho\right)^{1-\lambda} (1-\rho)^{1-\alpha}}.$$

Вспоминая, что мы должны считать здесь $\frac{\sigma}{s_0} < \frac{1}{2}$, рассмотрим два случая: $\frac{\sigma}{s_0} > \frac{1}{4}$ и $\frac{\sigma}{s_0} \leqslant \frac{1}{4}$.

В первом случае последний интеграл не превосходит интеграла

$$\int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha (1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}} = \text{const};$$

во втором случае он не превосходит интеграла

$$\int_0^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}} \leqslant \int_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}} + 2^\alpha \int_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{2\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{(1-\rho)^{2-\lambda-\alpha}};$$

первый интеграл в правой части — конечная величина, а второй сразу вычисляется и, как легко видеть, не превосходит

$$\mathrm{const}\cdot\left(\frac{\sigma}{s_0}\right)^{\lambda+\alpha-1} \text{ при } \lambda+\alpha<1, \quad \mathrm{const}\cdot\left|\ln\frac{\sigma}{s_0}\right| \text{ при } \lambda+\alpha=1$$

и остается ограниченным при $\lambda+\alpha>1$.

Сопоставляя предыдущие неравенства, легко заключаем, что во всех случаях

$$\sigma\int_0^{s_1} \frac{ds}{s^\alpha(s_0+\sigma-s)^{1-\lambda}(s_0-s)^{1-\alpha}} \leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma^{\lambda-\varepsilon},$$

где ε — произвольно зафиксированная положительная постоянная.

Далее,

$$\sigma\int_{s_2}^{s_b} \frac{ds}{s^\alpha(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}(s-s_0)^{1-\alpha}} =$$

$$= \frac{\sigma^\lambda}{2^{1-\lambda}} \int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}} \frac{d\rho}{\left(\rho+\frac{s_0}{2\sigma}\right)^\alpha\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{1-\lambda}\rho^{1-\alpha}} \leqslant \frac{\sigma^\lambda}{2^{1-\lambda}} \int_1^{\frac{s_b-s_0}{2\sigma}} \frac{d\rho}{\left(\rho-\frac{1}{2}\right)^{2-\lambda}};$$

вычисляя последний интеграл, убеждаемся, что

$$\sigma\int_{s_2}^{s_b} \frac{ds}{s^\alpha(s-s_0-\sigma)^{1-\lambda}(s-s_0)^{1-\alpha}} \leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma^{\lambda-\varepsilon},$$

где ε — произвольно фиксированная положительная постоянная (при $\lambda<1$ можно считать $\varepsilon=0$).

Сопоставляя предыдущие оценки, приходим к оценке

$$|I| \leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma^{\mu-\varepsilon}, \tag{25,12}$$

где μ — наименьшее из чисел α, λ, а ε — положительная (сколь угодно малая) постоянная.

Неравенства (25,9) и (25,12) доказывают требуемое предложение.

2°. Перейдем к доказательству предложения VI § 22. Это предложение можно доказать при помощи того же приема, который был применен при доказательстве аналогичного предложения в § 18, п. 3°.

Будем для определенности считать, что $c = a$, так что под L' мы можем подразумевать любую дугу ab', составляющую часть ab, при условии, что b' не совпадает с b. Далее, не нарушая общности, мы можем считать дугу ab стандартной. Напомним еще, что нам достаточно показать, что функция $\Omega(t_0, \tau)$ удовлетворяет условию H по переменной τ.

Имеем:

$$\Omega(t_0, \tau+h)-\Omega(t_0, \tau)=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t, \tau)}{t-t_0}\,dt=$$

$$=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{[\varphi^*(t, \tau+h)-\varphi^*(t_0, \tau+h)]-[\varphi^*(t, \tau)-\varphi^*(t_0, \tau)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\,dt+$$

$$+[\varphi^*(t_0, \tau+h)-\varphi^*(t_0, \tau)]\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}. \qquad (25,13)$$

Последнее слагаемое правой части на основании (23,5) не превосходит по модулю $\mathrm{const}\cdot|h|^\nu$, где ν — показатель условия H для функции $\varphi^*(t, \tau)$ по переменной τ. Остается рассмотреть первое слагаемое правой части, т. е.

$$I=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{[\varphi^*(t, \tau+h)-\varphi^*(t_0, \tau+h)]-[\varphi^*(t, \tau)-\varphi^*(t_0, \tau)]}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\,dt. \qquad (25,14)$$

Введем обозначение $|h|=\sigma$ и будем определять положения точек t, t_0 на ab их дуговыми абсциссами s, s_0, отсчитываемыми от точки a. Рассмотрим отдельно два случая: $s_0\leqslant 2\sigma$ и $s_0>2\sigma$.

В первом случае ($s_0\leqslant 2\sigma$) воспользуемся тем, что функция $\varphi^*(t, \tau)$ удовлетворяет условию H по переменной t. Обозначая через λ соответствующий показатель, будем иметь (напомним, что $\gamma=\alpha+i\beta$, $0<\alpha<1$):

$$|I|\leqslant \mathrm{const}\cdot s_0^\alpha\int\limits_0^{s_b}\frac{ds}{s^\alpha|s-s_0|^{1-\lambda}},$$

где s_b обозначает дуговую абсциссу точки b. Произведя подстановку $s=s_0\rho$, легко убеждаемся (ср. § 51), что

$$|I|\leqslant \mathrm{const}\cdot\sigma^{\mu-\varepsilon}=\mathrm{const}\,|h|^{\mu-\varepsilon},$$

где μ — наименьшее из чисел α, λ, а ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

Остается рассмотреть случай $s_0>2\sigma$. В этом случае представим интеграл в правой части (25,14) в виде суммы трех интегралов: от 0 до $s_0-\sigma$, от $s_0-\sigma$ до $s_0+\sigma$ и от $s_0+\sigma$ до s_b, в соответствии с чем напишем:

$$I=I_1+I_2+I_3.$$

Имеем, обозначая через b_1 точку с дуговой абсциссой $s_0-\sigma$,

$$I_1=\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab_1}\frac{\varphi^*(t, \tau+h)-\varphi^*(t, \tau)}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}\,dt-$$

$$-[\varphi^*(t_0, \tau+h)-\varphi^*(t_0, \tau)]\cdot\frac{(t_0-a)^\gamma}{2\pi i}\int\limits_{ab_1}\frac{dt}{(t-a)^\gamma(t-t_0)}.$$

Второе слагаемое, как легко видеть на основании (23,9а)[1]), не превосходит по модулю $\mathrm{const}\cdot|h|^{\nu-\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малая положительная

[1]) В формуле (23,9а) в нашем случае $c'=c=a$, $c''=b$.

постоянная. Обозначим первое слагаемое через I_1'; будем иметь:

$$|I_1'| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^\nu s_0^\alpha \int\limits_0^{s_0-\sigma} \frac{ds}{s^\alpha (s_0-s)}.$$

Произведя подстановку $s=s_0\rho$, получим, принимая во внимание, что $s_0>2\sigma$,

$$|I_1'| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^\nu \int\limits_0^{1-\frac{\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha (1-\rho)} = \mathrm{const}\cdot|h|^\nu \left\{ \int\limits_0^{\frac{1}{2}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)} + \int\limits_{\frac{1}{2}}^{1-\frac{\sigma}{s_0}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha(1-\rho)} \right\},$$

откуда легко заключаем, что $|I_1'| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^{\nu-\varepsilon}$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная, и что, следовательно,

$$|I_1| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^{\nu-\varepsilon}.$$

Точно так же оценивается I_3. Остается оценить I_2. Имеем:

$$|I_2| \leqslant \mathrm{const}\cdot s_0^\alpha \int\limits_{s_0-\sigma}^{s_0+\sigma} \frac{ds}{s^\alpha |s-s_0|^{1-\lambda}}.$$

Произведя подстановку $s=s_0+\sigma\rho$, получим:

$$|I_2| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^\lambda \int\limits_{-1}^{+1} \frac{d\rho}{\left(1+\frac{\sigma\rho}{s_0}\right)^\alpha |\rho|^{1-\lambda}},$$

откуда, замечая, что $\frac{\sigma}{s_0}<\frac{1}{2}$, легко заключаем:

$$|I_2| \leqslant \mathrm{const}\cdot|h|^\lambda.$$

Сопоставляя полученные оценки, приходим к требуемому выводу.

§ 26. О поведении интеграла типа Коши вблизи узлов кусочно-гладкой линии интегрирования[1]**.** В этом параграфе мы рассмотрим вопрос о поведении интеграла типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{26,1}$$

вблизи узлов линии интегрирования L, которую будем теперь считать кусочно-гладкой. Мы будем считать узлами и те точки, которые не являют-

[1]) Недавно опубликован ряд интересных статей В. Погожельского, из которых назовем W. Pogorzelski [2] — [7] (две последние вышли после сдачи рукописи настоящей книги издательству), где также рассматриваются свойства интегралов типа Коши в случае гладких разомкнутых и кусочно-гладких (по нашей терминологии) линий интегрирования. Автор вводит некоторые классы функций на L, являющиеся подклассами класса H^* (по нашим обозначениям), исчерпывающим его в своей совокупности, и в соответствии с этим дает несколько более уточненную, с известной точки зрения, характеристику поведения интеграла типа Коши вблизи и на линии интегрирования. В остальном результаты В. Погожельского во многих отношениях аналогичны результатам, излагаемым в настоящем параграфе; эти последние результаты были получены мною уже несколько лет назад, но публикуются здесь впервые. Они являются почти непосредственным следствием результатов, изложенных в предыдущих параграфах и опубликованных в первом издании настоящей книги (*примечание ко второму изданию*).

ся узлами в геометрическом смысле, но в которых плотность $\varphi(t)$ перестает быть непрерывной; число таких точек мы всегда будем считать конечным. Таким образом, приводимые ниже результаты охватывают и тот случай, когда линия L — гладкая в геометрическом смысле, но $\varphi(t)$ имеет конечное число разрывов определенного вида.

Рассмотрению поведения вблизи узлов мы предпошлем некоторые замечания, дополняющие в известном направлении результаты § 22.

1°. Начнем с доказательства следующего вспомогательного предложения, тесно связанного с теоремой § 21.

Пусть $L = ab$ — гладкая разомкнутая дуга, пусть $\omega(z)$ — функция, голоморфная в некоторой окрестности точки a на разрезанной вдоль L плоскости, непрерывно продолжимая в этой окрестности слева и справа на L, а также на точку a, и пусть граничные значения $\omega^+(t)$, $\omega^-(t)$ удовлетворяют условию $H(\mu)$, $0 < \mu < 1$[1]), на части дуги L, заключенной в этой окрестности.

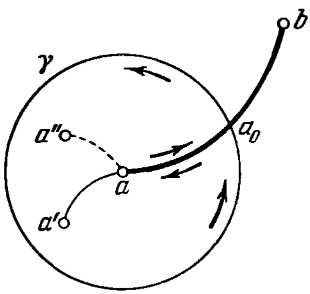

Рис. 13.

Пусть, далее, дуга ab несколько продлена за конец a гладкой дугой $a'a$ (например, отрезком касательной) так, чтобы полученная в результате дуга $L' = a'ab$, содержащая дугу $L = ab$, была гладкой (рис. 13).

При указанных условиях функция $\omega(z)$ будет непрерывно продолжима слева и справа на L' в окрестности точки a и граничные значения $\omega^+(t)$, $\omega^-(t)$ будут удовлетворять условию $H(\mu)$ на L' (а не только на L) в этой окрестности.

В самом деле, опишем из a, как из центра, окружность γ достаточно малого радиуса для того, чтобы она целиком умещалась в рассматриваемой окрестности и пересекала L ровно в одной точке a_0. На основании формулы Коши, примененной к кругу, ограниченному окружностью γ и разрезанному вдоль дуги aa_0, имеем для точек z, расположенных внутри γ, но не на дуге aa_0,

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma} \frac{\omega(t)\,dt}{t-z},$$

где через Γ обозначена граница рассматриваемого разрезанного круга, описываемая в положительном направлении. Эта граница (рис. 13) состоит из левой стороны разреза, описываемой в направлении aa_0, из окружности γ, описываемой в направлении, обратном движению часовой стрелки, и из правой стороны разреза, описываемой в направлении a_0a. Через $\omega(t)$ обозначено граничное значение функции $\omega(z)$, принимаемое ею на Γ; в частности, на левой и правой сторонах разреза aa_0 под $\omega(t)$ следует соответственно подразумевать $\omega^+(t)$, $\omega^-(t)$. Таким образом,

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{aa_0} \frac{\omega^+(t)-\omega^-(t)}{t-z}\,dt + \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}.$$

Так как второй интеграл правой части представляет собой функцию, голоморфную в окрестности точки a, остается рассмотреть интеграл

$$\omega_0(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{aa_0} \frac{\omega^+(t)-\omega^-(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int_{a'aa_0} \frac{\psi(t)\,dt}{t-z},$$

[1]) Мы берем $\mu < 1$, чтобы не оговаривать отдельно случая $\mu = 1$.

где $\psi(t) = \omega^+(t) - \omega^-(t)$ на дуге aa_0 и $\psi(t) = 0$ на добавленной дуге $a'a$. Вследствие того, что $\omega^+(t) - \omega^-(t) \to 0$ при $t \to a$ на L, как это следует из условия непрерывной продолжимости функции $\omega(z)$ на точку a, и вследствие того, что, по условию, $\omega^+(t)$ и $\omega^-(t)$ принадлежат классу $H(\mu)$ на L в окрестности a, функция $\psi(t)$ принадлежит классу $H(\mu)$ на L', а отсюда и следует, на основании теоремы Племеля — Привалова, высказанное утверждение.

Из доказанного только что предложения вытекает еще, на основании замечания 2 к § 21, что при указанных условиях для любых двух точек z_1, z_2, расположенных одновременно слева или справа от $L' = a'ab$ в окрестности точки a, имеет место неравенство

$$|\omega(z_2)-\omega(z_1)| \leqslant \text{const}\cdot|z_2-z_1|^{\mu}. \tag{26,2}$$

Неравенство это, очевидно, справедливо и тогда, когда точки z_1, z_2 (обе одновременно, или одна из них) находятся на L, если под $\omega(z)$ при z на L *подразумевать граничное значение с надлежащей стороны*.

Предыдущее неравенство показывает, в частности, что функция $\omega(z)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ в окрестности точки a на всякой гладкой дуге aa'', проведенной из точки a на разрезанной вдоль L плоскости, как на рис. 13. В этом легко убедиться, если представить себе, что дуга aa'' расположена целиком в левой или правой окрестности дуги $L' = a'ab$, а этого всегда можно достигнуть надлежащим выбором дуги $a'a$.

Ясно, что все сказанное относится и к случаю, когда вместо конца a рассматривается конец b.

2°. Возвращаясь к предложениям § 22, будем считать, что в интеграле (26,1) $L = ab$ обозначает гладкую разомкнутую дугу и что при обозначениях § 22

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^{\gamma}}, \quad \gamma = \alpha + i\beta, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \quad c = a \text{ или } b. \tag{26,3}$$

Напомним, что поведение интеграла (26,1) вблизи точки c на разрезанной вдоль L плоскости определяется формулами (22,4), (22,5):

$$\Phi(z) = \mp \frac{\varphi(c)}{2\pi i} \ln(z-c) + \Phi_0(z) \quad \text{при} \quad \gamma = 0 \tag{26,4}$$

и

$$\Phi(z) = \pm \frac{e^{\pm\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi} \frac{\varphi^*(c)}{(z-c)^{\gamma}} + \Phi_0(z) \quad \text{при} \quad \gamma \neq 0. \tag{26,5}$$

Верхние знаки берутся при $c = a$, нижние — при $c = b$. Под $\ln(z-c)$ подразумевается любая ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль L плоскости вблизи конца c; под $(z-c)^{\gamma}$ подразумевается ветвь, голоморфная в такой же области и принимающая на левой стороне L значение $(t-c)^{\gamma}$, фигурирующее в формуле (26,3)[1]). В правой части формулы (26,4) $\Phi_0(z)$ обозначает функцию, голоморфную на разрезанной плоскости вблизи c, непрерывно продолжимую слева и справа на L вблизи c, а также на точку c; граничные значения $\Phi_0^+(t)$, $\Phi_0^-(t)$ принадлежат классу H в окрестности c на L (§ 22, п. 3°). Такими же свойствами обладает и функция $\Phi_0(z)$ правой части формулы (26,5) при $\alpha = 0$ и произведение $(z-c)^{\gamma}\Phi_0(z) = \Omega_0(z)$ при $\alpha > 0$, причем $\Omega_0(c) = 0$.

[1]) Напомним, что значение $(t-c)^{\gamma}$ на L в формуле (26,3) фиксируется произвольно, разумеется, при условии непрерывного изменения на L (кроме точки c при $\alpha = 0$, $\beta \neq 0$).

Из сказанного в п. 1° настоящего параграфа следует, что функция $\Phi_0(z)$ в правой части формулы (26,4), или формулы (26,5) при $\alpha=0$, принадлежит классу H в окрестности точки c на всякой гладкой дуге cc', проведенной из точки c на разрезанной вдоль L плоскости. Таким же свойством обладает функция $(z-c)^\gamma\Phi_0(z)=\Omega_0(z)$ в случае $\alpha>0$. Так как в этом последнем случае $\Omega_0(c)=0$, то будем, очевидно, иметь:

$$\Phi_0(z)=\frac{\Omega_0(z)-\Omega_0(c)}{(z-c)^\gamma}=\frac{\Phi_{00}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \tag{26,6}$$

где α_0 — некоторая положительная постоянная, меньшая α, а $\Phi_{00}(z)$ — функция, удовлетворяющая условию H в окрестности c на любой гладкой дуге cc', проведенной из c на разрезанной вдоль L плоскости.

Напомним, наконец, что поведение интеграла (26,1) на линии интегрирования $L=ab$ в окрестности конца c определяется формулами (22,7), (22,8):

$$\Phi(t_0)=\mp\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln(t_0-c)+\Phi^*(t_0)\ \text{ при }\ \gamma=0 \tag{26,7}$$

и

$$\Phi(t_0)=\pm\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\cdot\frac{\varphi^*(c)}{(t_0-c)^\gamma}+\Phi^*(t_0)\ \text{ при }\ \gamma\neq0, \tag{26,8}$$

где верхние знаки берутся при $c=a$, а нижние — при $c=b$; функция $\Phi^*(t_0)$ в формуле (26,7), а также в формуле (26,8) при $\alpha=0$, принадлежит классу H в окрестности c; при $\alpha>0$

$$\Phi^*(t_0)=\frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t_0-c|^{\alpha_0}}, \tag{26,9}$$

где $\alpha_0=\text{const}<\alpha$, а $\Phi^{**}(t_0)$ принадлежит классу H на L в окрестности c.

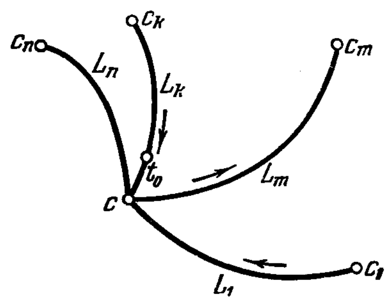

Рис. 14.

3°. После того, что было сказано в предыдущих пунктах, изучение поведения функции $\Phi(z)$, определяемой формулой (26,1), где теперь под L мы будем подразумевать произвольную кусочно-гладкую линию, в окрестности узлов этой линии не представляет никаких затруднений. К этому случаю мы и переходим.

Итак, пусть L в формуле (26,1) обозначает *произвольную кусочно-гладкую линию* (§ 1, п. 4°, 5°) и пусть c — один из ее узлов (рис. 14). Пусть в этой точке соединены концы разомкнутых дуг $L_1, L_2, \ldots, L_n$, причем положительные направления на этих дугах могут вести от c (тогда точка c является начальной точкой дуги) или к c (тогда c является конечной точкой дуги). В первом случае соответствующие дуги мы назовем *исходящими*, а во втором — *входящими*.

Для изучения поведения $\Phi(z)$ вблизи c достаточно, очевидно, считать, что в формуле (26,1) L состоит из совокупности дуг $L_1=cc_1$, $L_2=cc_2, \ldots, L_n=cc_n$[1]), что мы и будем предполагать.

Рассмотрим сначала случай, весьма часто встречающийся в приложениях, когда функция $\varphi(t)$ в формуле (26,1) принадлежит классу H_0

[1]) Здесь мы временно отступаем от правила, согласно которому на первое место ставится буква, обозначающая начальную точку дуги.

в окрестности c, т. е. когда

$$\varphi(t)=\varphi_k(t) \text{ на } L_k, \quad k=1, 2, \ldots, n, \tag{26,10}$$

где $\varphi_k(t)$ обозначает функцию, заданную на дуге L_k и принадлежащую на L_k в окрестности конца c классу H.

Таким образом, в нашем случае

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int_{L_k}\frac{\varphi_k(t)\,dt}{t-z}. \tag{26,11}$$

Применяя к каждому слагаемому правой части результаты, изложенные в предыдущем пункте, легко приходим к следующему заключению.

В окрестности узла c для точек z, не расположенных на L,

$$\Phi(z)=A\ln(z-c)+\Phi_0(z), \tag{26,12}$$

где A — постоянная, определяемая формулой

$$A=\sum_{k=1}^{n}\frac{\mp\varphi_k(c)}{2\pi i}, \tag{26,13}$$

где верхний знак перед $\varphi_k(c)$ берется для k, соответствующих исходящим дугам, а нижний — для k, соответствующих входящим дугам, и где $\Phi_0(z)$ обозначает функцию, голоморфную в каждом из секторов, на которые разбивается окрестность узла c дугами L_k $(k=1, 2, \ldots, n)$, и непрерывно продолжимую из каждого сектора на его границу в окрестности точки c (и на саму точку c); при этом граничные значения функции $\Phi_0(z)$ принадлежат классу H на границе сектора в окрестности точки c. Под $\ln(z-c)$ в данном секторе можно подразумевать любую непрерывно изменяющуюся (кроме самой точки c) ветвь.

Для точек же $z=t_0$, расположенных на L вблизи узла c, будем иметь совершенно аналогичную формулу

$$\Phi(t_0)=A\ln(t_0-c)+\Phi^*(t_0), \tag{26,14}$$

где $\Phi^*(t_0)$ — функция точки t_0 на L, принадлежащая классу H_0 в окрестности c, т. е.

$$\Phi^*(t_0)=\Phi_k^*(t_0) \text{ на } L_k, \quad k=1, 2, \ldots, n, \tag{26,15}$$

причем $\Phi_k^*(t_0)$ удовлетворяет условию H на L_k в окрестности конца c; под $\ln(t_0-c)$ при t_0 на L_k подразумевается любая ветвь логарифма, непрерывно изменяющаяся на L_k (кроме точки c), а под A — постоянная, определяемая формулой (26,13).

Отметим особо один частный случай. А именно, предположим, что $\varphi(t)$ принадлежит в окрестности c классу H (а не только H_0) и что $\varphi(c)=0$. Тогда, как легко видеть на основании предыдущего, $\Phi(z)$ стремится к определенному пределу при $z\to c$ по любому пути, а $\Phi(t_0)$ принадлежит классу H на L в окрестности c.

Рассмотрим теперь случай, когда в формуле (26,1) L обозначает, как выше, кусочно-гладкую линию, а функция $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* вблизи данного узла c. Мы будем считать, что эта функция представлена вблизи c следующим образом (ср. § 22):

$$\varphi(t)=\frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^{\gamma}}, \quad \gamma=\alpha+i\beta\neq 0, \quad 0\leqslant\alpha<1, \tag{26,16}$$

где под значениями $(t-c)^\gamma$ на отдельных дугах $L_1, L_2, \ldots, L_n$, сходящихся в узле c, подразумеваются любые значения, непрерывно изменяющиеся на этих дугах (кроме, быть может, точки c при $\alpha=0$), а $\varphi^*(t)$ обозначает функцию, принадлежащую классу H_0 в окрестности c. Таким образом, мы можем написать:

$$\varphi(t)=\varphi_k(t)=\frac{\varphi_k^*(t)}{(t-c)^\gamma} \quad \text{на} \quad L_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{26,17}$$

где $\varphi_k^*(t)$ обозначает функцию, заданную на L_k и принадлежащую в окрестности конца c дуги L_k классу H.

Представив, аналогично предыдущему, функцию $\Phi(z)$ в виде суммы (26,11) и применяя к каждому слагаемому результаты, изложенные в п. 2°, легко приходим к следующему заключению.

В окрестности узла c для точек z, не расположенных на L,

$$\Phi(z)=\frac{K}{(z-c)^\gamma}+\Phi_0(z), \tag{26,18}$$

где K — постоянная, могущая иметь различные значения для различных секторов, на которые разбивается окрестность узла c линией L, а $\Phi_0(z)$ — функция, голоморфная в каждом из этих секторов; при $\alpha=0$ она непрерывно продолжима на границу соответствующего сектора в окрестности точки c (включая саму эту точку); при $\alpha>0$

$$\Phi_0(z)=\frac{\Phi_{00}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0=\text{const}<\alpha, \tag{26,19}$$

где $\Phi_{00}(z)$ — ограниченная вблизи c функция, непрерывно продолжимая на границу соответствующего сектора; при этом граничные значения этой функции принадлежат классу H на границе сектора в окрестности точки c.

Для точек $z=t_0$ на L вблизи узла c

$$\Phi(t_0)=\frac{K_0}{(t_0-c)^\gamma}+\Phi^*(t_0), \tag{26,20}$$

где K_0 — постоянная, могущая иметь различные значения для различных дуг L_k, а $\Phi^*(t_0)$ обозначает функцию точки t_0 на L, обладающую следующими свойствами: при $\alpha=0$ $\Phi^*(t_0)$ принадлежит классу H_0 в окрестности c; при $\alpha>0$

$$\Phi^*(t_0)=\frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t-t_0|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0=\text{const}<\alpha, \tag{26,21}$$

где $\Phi^{**}(t_0)$ принадлежит классу H в окрестности c.

Легко выписать явные выражения для постоянных K и K_0 формул (26,18), (26,20), но мы этого для общего случая делать не будем, так как упомянутые выражения нам не понадобятся, а ограничимся одним типичным примером, который будет рассмотрен в следующем пункте.

4°. Рассмотрим, для пояснения предыдущего, следующий частный случай. Пусть в узле c сходятся лишь две гладкие дуги $L_1=c_1c$ и $L_2=cc_2$, так что, в нашем случае, узел представляет собой обычную угловую точку линии $L=L_1+L_2=c_1cc_2$ (рис. 14а)[1]; положительные

[1]) В частности, дуги L_1 и L_2 могут гладко продолжать друг друга, так что дуга L может быть гладкой.

направления на $L_1 = c_1c$ и $L_2 = cc_2$ мы будем считать выбранными согласно приведенным обозначениям. Мы рассмотрим случай, когда при прежних обозначениях

$$\varphi(t) = \frac{\varphi^*(t)}{(t-c)^\gamma}, \quad \gamma = \alpha + i\beta \neq 0,$$

причем

$$\varphi^*(t) = \varphi_1^*(t) \text{ на } L_1, \quad \varphi^*(t) = \varphi_2^*(t) \text{ на } L_2,$$

где $\varphi_1^*(t)$ и $\varphi_2^*(t)$ удовлетворяют условию H соответственно на L_1 и на L_2 в окрестности c. В соответствии с этим

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Phi_2(z),$$

где

$$\Phi_1(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_1} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \quad \Phi_2(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_2} \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}.$$

Линия L разбивает окрестность точки c на два сектора, которые мы теперь обозначим через σ^+ и σ^- и будем называть соответственно левой и правой окрестностями L (вблизи точки c), в зависимости от их положения относительно положительного направления, выбранного на L.

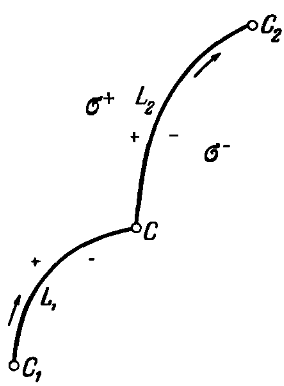

Рис. 14а.

Для того чтобы применить к $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ формулы, приведенные в п. 2°, нам следует определенным образом зафиксировать ветви многозначных функций, входящих в эти формулы. Мы поступим следующим образом, имея все время в виду окрестность точки c.

Под $(t-c)^\gamma$ на L_2 мы будем подразумевать произвольно выбранное значение, непрерывно изменяющееся на L_2 (кроме точки c при $\alpha = 0$). Под $(z-c)^\gamma$ мы будем подразумевать как в секторе σ^+, так и в секторе σ^- ветвь, голоморфную на разрезанной вдоль L_2 плоскости и принимающую на левой стороне L_2 значение $(t-c)^\gamma$. Далее, под $(t-c)^\gamma$ на L_1 мы будем подразумевать значение, принимаемое на L_1 только что указанной ветвью $(z-c)^\gamma$. Нам понадобится временно еще другая ветвь этой последней функции, а именно ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль L_1 (но не вдоль L_2) плоскости, принимающая на левой стороне L_1 указанное выше значение $(t-c)^\gamma$; эту ветвь мы обозначим через $[(z-c)^\gamma]^*$. Легко видеть, что

$$[(z-c)^\gamma]^* = (z-c)^\gamma \quad \text{в секторе } \sigma^+,$$

$$[(z-c)^\gamma]^* = e^{-2\pi i\gamma}(z-c)^\gamma \quad \text{в секторе } \sigma^-.$$

После этого легко написать требуемые формулы. А именно, на основании формулы (26,5) будем иметь при очевидных обозначениях

$$\Phi_2(z) = \frac{e^{\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_2^*(c)}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0^{(2)}(z) \quad \text{в } \sigma^+ \text{ и } \sigma^-,$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{[(z-c)^\gamma]^*} + \Phi_0^{(1)}(z) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0^{(1)}(z) \quad \text{в } \sigma^+,$$

$$\Phi_1(z) = -\frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{[(z-c)^\gamma]^*} + \Phi_0^{(1)}(z) = -\frac{e^{+\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{\varphi_1^*(c)}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0^{(1)}(z) \quad \text{в } \sigma^-,$$

откуда следуют формулы

$$\begin{aligned}\Phi(z) &= \frac{e^{\gamma\pi i}\varphi_2^*(c) - e^{-\gamma\pi i}\varphi_1^*(c)}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{1}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0(z) \text{ слева от } L,\\ \Phi(z) &= \frac{e^{\gamma\pi i}\varphi_2^*(c) - e^{\gamma\pi i}\varphi_1^*(c)}{2i\sin\gamma\pi}\cdot\frac{1}{(z-c)^\gamma} + \Phi_0(z) \text{ справа от } L,\end{aligned} \tag{26,22}$$

где функция $\Phi_0(z)$ обладает следующими свойствами: при $\alpha=0$ она непрерывно продолжима слева и справа на L в окрестности c и ее граничные значения принадлежат классу H на L в этой окрестности; при $\alpha>0$

$$\Phi_0(z) = \frac{\Phi_{00}(z)}{|z-c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 = \text{const} < \alpha, \tag{26,23}$$

где функция $\Phi_{00}(z)$ непрерывно продолжима на L слева и справа в окрестности c и ее граничные значения принадлежат классу H на L в этой окрестности.

Формулы для $\Phi(t_0)$ при t_0 на L можно получить аналогичным путем, исходя из формулы (26,8). Еще проще вывести их из формул (26,22), приняв во внимание, что

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2}[\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0)].$$

Замечая, что $[(t_0-c)^\gamma]^+ = [(t_0-c)^\gamma]^- = (t_0-c)^\gamma$ на L_1 и $[(t_0-c)^\gamma]^+ = (t_0-c)^\gamma$, $[(t_0-c)^\gamma]^- = e^{2\pi i\gamma}(t_0-c)^\gamma$ на L_2, легко получаем:

$$\begin{aligned}\Phi(t_0) &= \left\{\frac{e^{\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\varphi_2^*(c) - \frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\varphi_1^*(c)\right\}\frac{1}{(t_0-c)^\gamma} + \Phi^*(t_0) \text{ на } L_1,\\ \Phi(t_0) &= \left\{\frac{\operatorname{ctg}\gamma\pi}{2i}\varphi_2^*(c) - \frac{e^{-\gamma\pi i}}{2i\sin\gamma\pi}\varphi_1^*(c)\right\}\cdot\frac{1}{(t_0-c)^\gamma} + \Phi^*(t_0) \text{ на } L_2,\end{aligned} \tag{26,24}$$

где $\Phi^*(t_0)$ принадлежит классу H_0 на L в окрестности c при $\alpha=0$, а при $\alpha>0$

$$\Phi^*(t_0) = \frac{\Phi^{**}(t_0)}{|t_0-c|^{\alpha_0}}, \quad \alpha_0 = \text{const} < \alpha; \tag{26,25}$$

$\Phi^{**}(t_0)$ принадлежит классу H на L в той же окрестности [1]).

5°. Из предыдущих результатов непосредственно вытекают следующие важные заключения.

Пусть в интеграле типа Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z},$$

где L — кусочно-гладкая линия, плотность $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* на L. Тогда $\Phi(z)$ представляет собой кусочно-голоморфную функцию, исчезающую на бесконечности.

---

[1]) Формулы (26,22) и (26,24) для случая, когда дуги L_1 и L_2 гладко продолжают друг друга (что несущественно и не отражается на виде формул), были даны в статье Д. А. Квеселава [1] и воспроизведены в первом издании настоящей книги. Во втором издании был восполнен пробел, имевшийся в доказательстве.

Далее, если $\varphi(t)$ принадлежит классу H^* на L, то и $\Phi(t_0)$, при t_0 на L, принадлежит тому же классу. Иными словами, класс H^* функций, заданных на L, инвариантен относительно операции

$$\int_L \frac{(\ )\,dt}{t-t_0}.$$

6°. Рассмотрим, наконец, случай, когда плотность зависит еще от некоторого параметра τ, изменяющегося на некотором множестве T. А именно, рассмотрим интеграл типа Коши

$$\Phi(z, \tau)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t, \tau)\,dt}{t-z}, \tag{26,26}$$

где L обозначает кусочно-гладкую линию, а функция $\varphi(t, \tau)$ при $t \in L$, $\tau \in \mathrm{T}$ удовлетворяет следующим условиям: для t в окрестности данного узла c

$$\varphi(t, \tau)=\frac{\varphi^*(t, \tau)}{(t-c)^{\gamma}}, \quad \gamma=\alpha+i\beta, \tag{26,27}$$

где α и β — действительные постоянные, $0<\alpha<1$, а $\varphi^*(t, \tau)$ принадлежит классу H_0 по переменной t в окрестности c и удовлетворяет условию H по переменной τ; для остальных же значений t имеет место неравенство

$$|\varphi(t, \tau+h)-\varphi(t, \tau)| \leqslant A(t)\cdot|h|^{\mu}, \quad \mu=\text{const}>0, \tag{26,28}$$

где $A(t)$ — некоторая положительная, интегрируемая на L функция.

Тогда при t_0 на L, достаточно близких к c, функция $\Omega(t_0, \tau) = (t_0-c)^{\gamma}\Phi(t_0, \tau)$ принадлежит классу H_0 по переменной t_0 и удовлетворяет условию H по переменной τ.

Относительно переменной t_0 предложение это можно считать доказанным на основании результатов п. 3°.

Остается доказать справедливость предложения относительно параметра τ. И в этой части предложение доказано для случая, когда L состоит из единственной гладкой дуги ab (§ 25, п. 2°). Относительно указанного частного случая добавим к сказанному в § 25 следующее замечание. Считая для определенности, что $c=a$ и что $\varphi^*(t, \tau)$ принадлежит по переменной t классу H на всей дуге ab, рассмотрим наряду с функцией

$$\Omega(z, \tau)=(z-a)^{\gamma}\Phi(z, \tau)$$

функцию

$$\Psi(z, \tau)=(z-b)^{1-\gamma}(z-a)^{\gamma}\Phi(z, \tau);$$

множитель $(z-b)^{1-\gamma}$ введен нами для того, чтобы иметь дело с однозначными функциями на всей плоскости, разрезанной вдоль ab; так как этот множитель представляет собой функцию, голоморфную в окрестности точки a и отличную от нуля, то он никакого влияния на поведение рассматриваемых функций, с интересующей нас точки зрения, оказывать не будет. Замечая, что $1-\alpha>0$, легко убеждаемся, что функция $\Psi(z, \tau)$ непрерывно продолжима слева и справа на все точки дуги ab, а также на ее концы. Далее, на основании предложения VI (§ 22, п. 5°) легко заключаем, что при t_0 на L и τ, $\tau+h \in \mathrm{T}$,

$$|\Psi^{\pm}(t_0, \tau+h)-\Psi^{\pm}(t_0, \tau)| \leqslant \text{const}\cdot|h|^{\mu}, \quad \mu=\text{const}>0,$$

причем одновременно берутся верхние или нижние знаки и случаи, когда $t_0 = a$ или $t_0 = b$ не исключаются; в этих случаях под $\Psi^{\pm}(a, \tau)$ следует подразумевать $\Psi(a, \tau)$ и аналогично для остальных символов. Если теперь Γ обозначает какой-либо простой замкнутый контур, охватывающий дугу ab и находящийся на конечном расстоянии от нее, то, очевидно, для точек t_0 этого контура будем иметь:

$$|\Psi(t_0, \tau+h) - \Psi(t_0, \tau)| \leqslant \text{const}\cdot|h|^{\mu},$$

причем можно считать, что в обоих последних неравенствах μ обозначает одно и то же. Применяя теперь теорему о максимуме модуля к конечной области, ограниченной контуром Γ и разрезанной вдоль дуги ab, легко убеждаемся в справедливости неравенста

$$|\Psi(z, \tau+h) - \Psi(z, \tau)| \leqslant \text{const}\cdot|h|^{\mu}$$

для всех точек z указанной области, в частности для всех точек z, принадлежащих окрестности точки a. Отсюда, очевидно, следует, что для всех точек z, принадлежащих окрестности конца a, будем также иметь:

$$|\Omega(z, \tau+h) - \Omega(z, \tau)| \leqslant \text{const}\cdot|h|^{\mu}, \quad \tau \in T, \quad \tau+h \in T, \quad \mu = \text{const} > 0,$$

в частности для всех точек любой гладкой дуги aa', проведенной из a на разрезанной вдоль ab плоскости и достаточно близких к a.

После этого замечания доказательство интересующего нас предложения никаких затруднений не представляет. И здесь, как в п. 3°, достаточно рассмотреть случай, когда L состоит из гладких дуг $L_1, L_2, \ldots, L_n$, сходящихся в узле c. Представив интеграл $\Phi(z, \tau)$ в виде суммы интегралов, взятых соответственно по $L_1, L_2, \ldots, L_n$, и применив к каждому слагаемому указанные выше результаты, мы придем к требуемому заключению.

З а м е ч а н и е. Мы исключили случай, когда в формуле (26,27) $\alpha = 0$. Если $\alpha = 0$ (в частности, если $\gamma = 0$), то, как легко видеть на основании предыдущего, функция $|t_0 - c|^{\varepsilon}\,\Phi(t_0, \tau)$, где ε — сколь угодно малая положительная величина, принадлежит при t_0, достаточно близких к c, классу H по переменной t_0 и удовлетворяет условию H по переменной τ.

В частности, если $\varphi^*(t, \tau)$ принадлежит по переменной t в окрестности c классу H и если, кроме того, $\varphi^*(c, \tau) = 0$ для всех $\tau \in T$, то $\Phi(t_0, \tau)$ принадлежит классу H по переменной t_0 в окрестности c и удовлетворяет условию H по переменной $\tau \in T$. Для того чтобы в этом убедиться, достаточно провести те же рассуждения, как в случае $\alpha > 0$, рассматривая вместо функции $\Psi(z, \tau)$ функцию $(z - b)\,\Phi(z, \tau)$.

§ 27. Краткие сведения относительно некоторых обобщений. Во всей этой книге мы будем рассматривать интегралы типа Коши лишь в предположении, что линия интегрирования гладкая или кусочно-гладкая, а плотность $\varphi(t)$ принадлежит классу H, или, в более общем случае, классу H^*.

Но все же мы дадим здесь некоторые, весьма, впрочем, краткие, сведения относительно результатов, касающихся интегралов типа Коши при иных предположениях.

Результаты, изложенные в предыдущих параграфах, можно обобщить в следующих двух основных направлениях.

Во-первых, вместо плотности $\varphi(t)$, принадлежащей на L классу H^*, можно рассматривать плотность, удовлетворяющую аналогичному, но более общему условию, заботясь о том, чтобы и при этом более общем условии сохранились неизменными или почти неизменными простейшие основные предложения, доказанные выше.

Во-вторых, можно, частично отказавшись от сохранения в неизменном виде упомянутых выше предложений, изучать интегралы типа Коши при возможно более общих предположениях относительно линии интегрирования L и плотности $\varphi(t)$.

Разумеется, такое разделение направлений лишь условно и многие результаты можно отнести к промежуточным направлениям.

Некоторые из приводимых ниже результатов получены их авторами в связи с теорией рядов Фурье и относятся к интегралам вида

$$\Psi(\vartheta_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta, \tag{27,1}$$

где ϑ, ϑ_0 — действительные переменные, заключенные в интервале $[0, 2\pi]$, а интеграл понимается в смысле главного значения по Коши; функция $\psi(\vartheta)$ считается непрерывной, если она непрерывна в этом интервале, и, кроме того, $\psi(2\pi)=\psi(0)$. Легко видеть, что интеграл $\Psi(\vartheta_0)$ лишь постоянным слагаемым отличается от интеграла типа Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{27,2}$$

в случае, когда L — окружность радиуса 1 с центром в O и $z=t_0$ находится на L; для того чтобы в этом убедиться, достаточно положить $t=e^{i\vartheta}$, $t_0=e^{i\vartheta_0}$, $\varphi(t)=\psi(\vartheta)$ (см. ниже, начало § 33).

Среди работ, которые можно отнести к первому из указанных выше направлений, следует назвать работу А. Зигмунда (A. Zygmund [1]), в которой рассматриваются интегралы вида (27,1). Введя некоторые классы функций, несколько более общие, чем класс функций, удовлетворяющих условию H, автор доказывает, что если $\psi(\vartheta)$ принадлежит одному из этих классов, то имеет место предложение, аналогичное предложению, доказанному в § 18, п. 2°.

Эти результаты были обобщены Л. Г. Магнарадзе [4], [8] [1]) на случай интеграла вида (27,2) в предположении, что L — гладкая или кусочно-гладкая линия, подчиненная определенным условиям. Кроме того, он ввел некоторые новые классы функций $\varphi(t)$, фигурирующие в интегралах вида (27,2), обладающие свойствами, аналогичными предыдущим. Это позволило ему несколько обобщить результаты, изложенные в §§ 16, 18, 21.

Дальнейшее развитие этих результатов дано в работах А. А. Бабаева [1] — [3], А. А. Бабаева и В. В. Салаева [1], У-Сюе-Моу [1], Л. Г. Магнарадзе [9].

Некоторые обобщения результатов, приведенных в §§ 16 и 18, даны Н. А. Давыдовым [1].

М. Б. Гагуа [1] и Я. Л. Геронимус [3], [4] несколько обобщили результаты, полученные в § 21.

Ряд свойств интегралов вида (27,2) в случае, когда L представляет собой счетную совокупность гладких контуров, установлен в работе И. Н. Карцивадзе и Б. В. Хведелидзе [2].

---

[1]) См. также Я. Л. Геронимус [2].

Переходя к результатам, которые можно отнести ко второму направлению, условимся в следующем.

Если функция $f(x)$ определена на некотором множестве E, измерима на этом множестве, а функция $|f(x)|^p$ суммируема, то мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{L}_p(E)$. Если же вместо $|f(x)|^p$ на E суммируема функция $\rho(x)|f(x)|^p$, где $\rho(x)$ — некоторая неотрицательная функция, определенная на E, то мы будем говорить, что $f(x)$ принадлежит классу $\mathscr{L}_p(\rho;E)$. При этом классы $\mathscr{L}_1(E)$ и $\mathscr{L}_1(\rho;E)$ мы будем обозначать просто через $\mathscr{L}(E)$ и $\mathscr{L}(\rho;E)$.

Н. Н. Лузин [1] показал, что если в формуле (27,1) функция $\psi(\vartheta)$ принадлежит классу $\mathscr{L}_2([0,2\pi])$, то функция $\Psi(\vartheta)$ принадлежит тому же классу $\mathscr{L}_2([0,2\pi])$. М. Рисс (M. Riesz [1]) дал важное обобщение этого результата, доказав, что если $\psi(\vartheta)$ принадлежит классу $\mathscr{L}_p([0,2\pi])$, где $p = \text{const} > 1$, то $\Psi(\vartheta)$ также принадлежит тому же классу $\mathscr{L}_p([0,2\pi])$. Эти результаты легко переносятся на случай интегралов вида (27,2), когда линия интегрирования L принадлежит некоторым подклассам гладких линий (см. С. Г. Михлин [7], Б. В. Хведелидзе [18]). Аналогичные результаты для некоторых негладких линий получены в работе А. Г. Джваршейшвили [1].

Вышеуказанный результат М. Рисса обобщается на случай функций, суммируемых в p-й степени с определенным весом (см. G. Hardy and J. Littlewood [1], Н. И. Ахиезер [1], К. И. Бабенко [1], K. Nickel [1], Б. В. Хведелидзе [18], В. Ф. Гапошкин [1], И. Б. Симоненко [5]). Из этих результатов мы приведем здесь тот, который нам придется не раз упомянуть.

Пусть в формуле (27,2) путь интегрирования L есть замкнутая или разомкнутая линия Ляпунова [1]) конечной длины. Пусть, кроме того,

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{m_1} |t-c_k|^{\alpha_k(p-1)} \prod_{k=m_1+1}^{m} |t-c_k|^{-\alpha_k}, \tag{27,3}$$

где $0 \leqslant m_1 \leqslant m$, $0 \leqslant \alpha_k < 1$, $c_k \in L$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $p = \text{const} > 1$. Тогда если в формуле (27,2) функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $\mathscr{L}_p(\rho;L)$, то функция $\Phi(t_0)$, где $t_0 \in L$, также принадлежит классу $\mathscr{L}_p(\rho;L)$ (см. Б. В. Хведелидзе [18]).

Если в формуле (27,1) функция $\psi(\vartheta)$ принадлежит классу $\mathscr{L}([0,2\pi])$, то функция $\Psi(\vartheta_0)$ будет почти всюду конечна (И. И. Привалов [2]), но может не быть суммируемой (Н. Н. Лузин [1]). А. Н. Колмогоров [1] показал, что в этом случае $\Psi(t_0)$ принадлежит классу $\mathscr{L}_p([0,2\pi])$ для всех $0 < p < 1$. А. Н. Колмогоров [2] показал также, что если $\psi(\vartheta)$ принадлежит классу $\mathscr{L}([0,2\pi])$, то $\Psi(\vartheta_0)$ является интегрируемой в смысле Данжуа B [2]). Е. Титчмарш (E. Titchmarsh [1]) показал, что если $\psi(\vartheta)$ принадлежит классу $\mathscr{L}([0,2\pi])$, то $\Psi(\vartheta_0)$ является A-интегрируемой [3]). Понятие этого последнего интеграла было успешно использовано П. Л. Ульяновым [1]—[4] для изучения некоторых вопросов, связанных с интегралами Коши и типа Коши. Так, например, им доказано (П. Л. Ульянов [3]), что если функция представима интегралом типа Коши с суммируемой плотностью, то она представима и в виде A-интеграла Коши.

[1]) См. § 7, п. 3°.

[2]) Определение интеграла Данжуа B см., например, A. Zigmund [2], т. 1, стр. 417 русского перевода.

[3]) Определение А-интегрирования см., например, Н. К. Бари [1], стр. 585.

Дальнейшее развитие этих результатов можно найти в работах А. Г. Джваршейшвили [1], [3] и Г. А. Хускивадзе [1] — [4].

В. В. Голубеву [1] принадлежит обобщение результата, изложенного в § 17, на случай, когда линия L спрямляема, а $\varphi(t)$ принадлежит классу $\mathscr{L}(L)$.

И. И. Привалов [2], [7] доказал, что если в формуле (27,2) путь интегрирования L — простая спрямляемая линия, состоящая из конечного числа дуг определенной вогнутости, и $\varphi(t)$ принадлежит классу $\mathscr{L}(L)$, то почти всюду имеют место формулы Сохоцкого — Племеля (16,2), когда z стремится к t_0 на L по любым некасательным путям. Этот результат остается в силе и в случае, когда L — линия Ляпунова (см. Б. В. Хведелидзе [18]), а также для несколько более общих линий (см. А. Г. Джваршейшвили [1], Г. А. Хускивадзе [4], В. П. Хавин [1], Г. Ц. Тумаркин [2], Э. Г. Гордадзе [1].

Ряд важных свойств интегралов типа Коши, плотности которых принадлежат различным суммируемым классам, был установлен В. И. Смирновым [1], [2], [3]; часть этих результатов изложена в книге И. И. Привалова [7], в которой собраны основные известные результаты, относящиеся к интегралам типа Коши с суммируемой плотностью (так, например, кроме результатов упомянутых выше авторов, в этой книге изложены соответствующие результаты П. Фату, Ф. и М. Риссов, Ф. и Р. Неванлинна, М. В. Келдыша и М. А. Лаврентьева [1], М. А. Лаврентьева [1], [3], Г. М. Фихтенгольца [1], Г. М. Голузина и В. И. Крылова [1], А. И. Маркушевича [2] и др.).

Некоторые свойства интегралов типа Коши с плотностью, принадлежащей классам $\mathscr{L}_p(\rho;\ L)$, где $p > 1$, а $\rho(t)$ — функция вида (27,3), изучил Б. В. Хведелидзе [18]. Из этих свойств отметим следующее: если $\Phi_1(z)$ и $\Phi_2(z)$ — интегралы типа Коши, плотности которых принадлежат соответственно классам $\mathscr{L}_p(\rho;\ L)$ и $\mathscr{L}_q(\rho^{1-q};\ L)$, где $p > 1$, $q = p/(p-1)$, то произведение $\Phi_1(z)\,\Phi_2(z)$ представимо интегралом типа Коши с суммируемой плотностью.

И. И. Приваловым [5], [7] изучены граничные свойства интеграла типа Коши — Стилтьеса. Необходимое и достаточное условие для представимости аналитических функций интегралом типа Коши — Стилтьеса получено Г. Ц. Тумаркиным [1].

Отметим, наконец, что Т. Г. Гегелиа [1], [2] изучил основные свойства интегралов типа Коши для довольно общего класса негладких линий. См. также А. Д. Алексеев [1], [2], А. А. Бабаев [1] — [3], А. А. Бабаев и В. В. Салаев [1].

III. Некоторые непосредственные приложения

В этом отделе мы изложим различные результаты, которые почти непосредственно вытекают из предыдущего и которыми (за исключением результатов § 33) мы будем пользоваться в дальнейшем.

§ 28. Формула перестановки Пуанкаре — Бертрана[1]**.** 1°. Пусть L — кусочно-гладкая линия с узлами $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и пусть $\varphi(t, t_1)$ —

[1]) Этой формулой мы воспользуемся лишь в главах II и VI в применении к случаю, когда L состоит из гладких замкнутых контуров и, за исключением немногих мест, которые можно опустить без ущерба для понимания остального, когда $\varphi(t, t_1)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным на L. Поэтому читатель может провести доказательство при указанных предположениях (в этом случае $\Pi(t, t_1) = 1$); тогда не придется пользоваться результатами §§ 22—26.

функция двух точек t, t_1 этой линии, представимая в виде

$$\varphi(t, t_1) = \frac{\varphi^*(t, t_1)}{\Pi(t, t_1)}, \tag{*}$$

где $\varphi^*(t, t_1)$ обозначает функцию класса H_0 на L, а

$$\Pi(t, t_1) = \prod_{k=1}^{n} |t - c_k|^{\alpha_k} |t_1 - c_k|^{\beta_k}, \tag{**}$$

причем α_k, β_k обозначают неотрицательные постоянные, подчиненные условию

$$\alpha_k + \beta_k < 1. \tag{***}$$

Пусть t_0 — фиксированная точка на L, отличная от узлов. Рассмотрим повторные интегралы

$$A = \int_L \frac{dt}{t - t_0} \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt_1}{t_1 - t}, \quad B = \int_L dt_1 \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt}{(t - t_0)(t_1 - t)}, \tag{28,1}$$

различающиеся лишь порядком интегрирования. Оба интеграла имеют смысл. Действительно, функция

$$\chi(t) = \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt_1}{t_1 - t} \tag{28,2}$$

удовлетворяет на L условию H, кроме, быть может, окрестностей узлов (§ 18, п. 4°); в окрестностях же узлов c, как нетрудно проверить на основании результатов § 26, п. 3°, будем иметь при принятых относительно функции $\varphi(t, t_1)$ условиях

$$|\chi(t)| < \frac{\text{const}}{|t - c|^{\nu}}, \quad \nu = \text{const} < 1\,^{1)}.$$

Поэтому интеграл

$$A = \int_L \frac{\chi(t)\, dt}{t - t_0} \tag{28,3}$$

имеет вполне определенный смысл (ибо точка t_0 отлична от узлов). Далее,

$$B = \int_L \frac{dt_1}{t_1 - t_0} \int_L \left\{ \frac{1}{t - t_0} - \frac{1}{t - t_1} \right\} \varphi(t, t_1)\, dt = \int_L \frac{\omega(t_0, t_1) - \omega(t_1, t_1)}{t_1 - t_0}\, dt_1, \tag{28,4}$$

где введены обозначения

$$\omega(t_0, t_1) = \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt}{t - t_0}, \quad \omega(t_1, t_1) = \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt}{t - t_1}. \tag{28,5}$$

Отношение

$$\frac{\omega(t_0, t_1) - \omega(t_1, t_1)}{t_1 - t_0} = \Omega(t_0, t_1), \tag{28,6}$$

рассматриваемое как функция точки t_1, перестает быть непрерывным лишь в окрестности точки t_0 и в окрестностях узлов c.

---

1) А именно, для $c = c_k$ можно считать $\nu = \alpha_k + \beta_k + \varepsilon$, где ε — сколь угодно малая положительная постоянная.

В окрестности точки t_0 будем иметь:

$$|\Omega(t_0, t_1)| < \frac{\text{const}}{|t_1 - t_0|^{\nu}}, \quad \nu = \text{const} < 1,$$

так как в этой окрестности функции $\omega(t_0, t_1)$ и $\omega(t_1, t_1)$ удовлетворяют условию H и их разность обращается в нуль при $t_1 = t_0$.

В окрестностях же узлов c, как нетрудно проверить на основании результатов § 26, будем иметь при принятых относительно $\varphi(t, t_1)$ условиях

$$|\omega(t_0, t_1)| < \frac{\text{const}}{|t_1 - c|^{\nu}}, \quad |\omega(t_1, t_1)| < \frac{\text{const}}{|t_1 - c|^{\nu}}, \quad \nu = \text{const} < 1\,^{1)},$$

и, следовательно, в окрестностях узлов c (не забудем, что точка t_0 отлична от узлов)

$$|\Omega(t_0, t_1)| < \frac{\text{const}}{|t_1 - c|^{\nu}}, \quad \nu = \text{const} < 1.$$

Поэтому интеграл B существует даже в обычном смысле.

Однако интегралы A и B не равны, вообще говоря, между собой, а именно, имеет место следующая весьма важная **формула Пуанкаре—Бертрана**:

$$\int_L \frac{dt}{t - t_0} \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt_1}{t_1 - t} = -\pi^2 \varphi(t_0, t_0) + \int_L dt_1 \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt}{(t - t_0)(t_1 - t)}. \quad (28,7)$$

Укажем следующее простое доказательство этой формулы. Положим

$$\Phi(z) = \int_L \frac{dt}{t - z} \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt_1}{t_1 - t}, \quad \Psi(z) = \int_L dt_1 \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt}{(t - z)(t_1 - t)}, \quad (28,8)$$

где z — точка плоскости, не расположенная на L.

Легко показать, что в этих повторных интегралах перестановка порядка интегрирования уже допустима вследствие того, что одна из особенностей подынтегральной функции (именно при $t = t_0$) устранена. Примем это пока без доказательства[2], так что будем считать:

$$\Phi(z) = \Psi(z). \quad (28,9)$$

Функции $\Phi(z)$ и $\Psi(z)$ тесно связаны с интегралами A и B. Именно, на основании формулы Сохоцкого — Племеля (16,4)

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = 2 \int_L \frac{dt}{t - t_0} \int_L \frac{\varphi(t, t_1)\, dt_1}{t_1 - t}. \quad (28,10)$$

Далее,

$$\Psi(z) = \int_L \frac{\psi(t_1, z)\, dt_1}{t_1 - z}, \quad (28,11)$$

где

$$\psi(t_1, z) = \int_L \left\{ \frac{1}{t - z} - \frac{1}{t - t_1} \right\} \varphi(t, t_1)\, dt. \quad (28,12)$$

Обозначим через $\psi^+(t_1, t_0)$, $\psi^-(t_1, t_0)$ пределы $\psi(t_1, z)$ при $z \to t_0$ слева и справа от L. По формулам Сохоцкого — Племеля (16,3), (16,4)

---

[1]) Ср. предыдущую сноску.

[2]) Доказательство будет дано ниже, в п. 2°.

имеем:

$$\psi^+(t_1,\ t_0)-\psi^-(t_1,\ t_0)=2\pi i\varphi(t_0,\ t_1),$$
$$\psi^+(t_1,\ t_0)+\psi^-(t_1,\ t_0)=2\int\limits_L\left\{\frac{1}{t-t_0}-\frac{1}{t-t_1}\right\}\varphi(t,\ t_1)\,dt=$$
$$=2(t_1-t_0)\int\limits_L\frac{\varphi(t,\ t_1)\,dt}{(t-t_0)(t_1-t)}\,. \qquad (28,13)$$

Кроме того,

$$\left.\begin{aligned}\psi(t_1,\ z)&=\psi^+(t_1,\ t_0)+\varepsilon^+ \quad (\text{если } z \text{ слева от } L),\\ \psi(t_1,\ z)&=\psi^-(t_1,\ t_0)+\varepsilon^- \quad (\text{если } z \text{ справа от } L),\end{aligned}\right\} \qquad (28,14)$$

где $\varepsilon^+\to 0$, $\varepsilon^-\to 0$ при $z\to t_0$. Мы докажем ниже (в п. 3°), что

$$\int\limits_L\frac{\varepsilon^+\,dt_1}{t_1-z}\to 0, \qquad \int\limits_L\frac{\varepsilon^-\,dt_1}{t_1-z}\to 0 \qquad (28,15)$$

при $z\to t_0$ по прямой, составляющей конечный угол с касательной в t_0. Заменяя в (28,11) $\psi(t_1,\ z)$ выражениями (28,14), принимая во внимание (28,15) и применяя формулы Сохоцкого — Племеля, получаем:

$$\Psi^+(t_0)=\pi i\psi^+(t_0,\ t_0)+\int\limits_L\frac{\psi^+(t_1,\ t_0)\,dt_1}{t_1-t_0}\,,$$
$$\Psi^-(t_0)=-\pi i\psi^-(t_0,\ t_0)+\int\limits_L\frac{\psi^-(t_1,\ t_0)\,dt_1}{t_1-t_0}\,,$$

откуда, принимая во внимание (28,13),

$$\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)=-2\pi^2\varphi(t_0,\ t_0)+2\int\limits_L dt_1\int\limits_L\frac{\varphi(t,\ t_1)\,dt}{(t-t_0)(t_1-t)}\,. \qquad (28,16)$$

Но вследствие (28,9) левые части в (28,10) и (28,16) равны. Сравнивая же правые части, получаем требуемую формулу (28,7).

2°. Докажем теперь справедливость равенства (28,9), которым мы воспользовались выше. Для того чтобы не усложнять обозначений, мы проведем доказательство в предположении, что $L=ab$ — простая гладкая дуга, а затем укажем, как обобщить это доказательство на случай произвольной кусочно-гладкой линии.

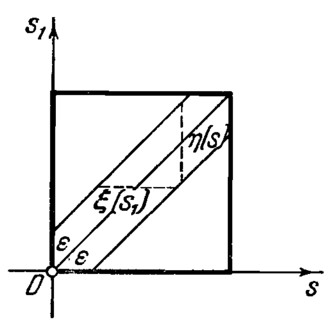

Рис. 15.

Для большей наглядности будем определять положение точек t, t_1 на L дуговыми абсциссами s, s_1, отсчитывая их от точки a, так что $0\leqslant s\leqslant l$, $0\leqslant s_1\leqslant l$, где l — длина дуги ab, и будем рассматривать s и s_1 как прямоугольные координаты на вспомогательной плоскости Oss_1. Область изменения точки $(s,\ s_1)$ на этой плоскости есть квадрат Q со сторонами, равными l (рис. 15).

Особенности подынтегрального выражения

$$\frac{\varphi(t,\ t_1)}{(t-z)(t_1-t)} \qquad (28,17)$$

сосредоточены на диагонали $s=s_1$ квадрата Q, а также на его сторонах, согласно формулам (*), (**) п. 1° (в этих формулах теперь $n=2$, $c_1=a$,

$c_2=b$). Легко, однако, видеть, что эти последние особенности не существенны для приводимых ниже рассуждений вследствие условия (***) п. 1°.

Вырежем из Q полоску q прямыми $s_1=s\pm\varepsilon$, где ε — достаточно малая положительная величина (рис. 15). Легко видеть, что

$$\Phi(z)=I_0+I_1,\quad \Psi(z)=I_0+I_2,$$

где

$$I_0=\iint\limits_{Q-q}\frac{\varphi(t,t_1)\,dt\,dt_1}{(t-z)(t_1-t)}=\iint\limits_{Q-q}\frac{\varphi(t,t_1)}{(t-z)(t_1-t)}\frac{dt}{ds}\frac{dt_1}{ds_1}\,ds\,ds_1,$$

$$I_1=\int\limits_L\frac{dt(s)}{t-z}\int\limits_{\eta(s)}\frac{\varphi(t,t_1)\,dt_1(s_1)}{t_1-t},\qquad I_2=\int\limits_L dt_1(s_1)\int\limits_{\xi(s_1)}\frac{\varphi(t,t_1)\,dt(s)}{(t-z)(t_1-t)}.$$

$\eta(s)$ обозначает отрезок прямой, параллельной оси Os_1 и находящейся на расстоянии s от нее, заключенный в полоске q, а $\xi(s_1)$ — отрезок прямой, параллельной оси Os и находящейся на расстоянии s_1 от нее, заключенный в той же полоске.

Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что

$$I_1\to 0,\quad I_2\to 0\quad\text{при}\quad \varepsilon\to 0.$$

Положим для сокращения письма

$$\Omega(t)=\Omega(t(s))=\int\limits_{\eta(s)}\frac{\varphi(t,t_1)\,dt_1}{t_1-t}$$

и представим интеграл I_1 в виде суммы трех интегралов:

$$I_1=\int\limits_{ab}\frac{\Omega(t)\,dt}{t-z}=\int\limits_{aa'}\frac{\Omega(t)\,dt}{t-z}+\int\limits_{a'b'}\frac{\Omega(t)\,dt}{t-z}+\int\limits_{b'b}\frac{\Omega(t)\,dt}{t-z},\tag{28,18}$$

где a', b' обозначают точки дуги $L=ab$, взятые соответственно в окрестностях концов a, b. Легко проверить, принимая во внимание формулы (*) — (***) и применяя к интегралу $\Omega(t)$ оценку, данную в замечании в конце § 23[1]), что, когда точки a' и b' достаточно близки соответственно к a и b, первый и третий интегралы в правой части (28,18) сколь угодно малы по модулю, независимо от значения ε. Далее, зафиксировав точки a', b', можно, как легко видеть, взять постоянную ε настолько малой, чтобы значения функции

$$\Omega(t)=\int\limits_{\eta(s)}\frac{\varphi(t,t_1)-\varphi(t,t)}{t_1-t}\,dt_1+\varphi(t,t)\int\limits_{\eta(s)}\frac{dt_1}{t_1-t}$$

были сколь угодно малыми по модулю, когда точка t расположена на дуге $a'b'$. Поэтому будет сколь угодно мал по модулю и второй интеграл в правой части (28,18).

Отсюда следует, что $I_1\to 0$. Аналогично доказывается, что $I_2\to 0$.

Таким образом, равенство (28,9) доказано для случая, когда L состоит из одной гладкой дуги[2]).

В общем случае доказательство можно провести совершенно аналогично. И в этом случае положение точки t на L можно определять при помощи одного действительного параметра s следующим образом. Пусть $L_k=a_kb_k$ $(k=1,2,\ldots,p)$ — гладкие разомкнутые дуги, из кото-

[1]) Формула (23,9а).

[2]) Проведенное доказательство, очевидно, остается в силе и в случае, если точка b совпадает с a, т. е. когда L — замкнутый контур, могущий иметь угловую точку.

рых состоит линия L (§ 1, п. 5°), и пусть l_k — длина дуги L_k. Положим, для точки t, расположенной на L_k,

$$s = l_1 + l_2 + \ldots + l_{k-1} + s^{(k)},$$

где $s^{(k)}$ — дуговая абсцисса точки t, отсчитываемая по L_k от точки a_k. Очевидно, что любой точке t на L, не совпадающей с узлами, соответствует вполне определенное значение s, а любому значению s, отличному от значений $s=0$, $s=l_1$, $s=l_1+l_2$, ..., $s=l_1+l_2+\ldots+l_p$, соответствует вполне определенная точка t, отличная от узлов. Для узлов и для только что указанных значений параметра s однозначность соответствия, вообще говоря, нарушается, но это не существенно для хода доказательства.

Если t и t_1 — две переменные точки на L, а s и s_1 — соответствующие значения параметра, то этим точкам соответствует точка (s, s_1) на вспомогательной плоскости Oss_1; соответствие перестает быть однозначным, лишь когда точки t, t_1 совпадают с узлами, а значения параметров s, s_1 — со значениями 0, l_1, l_1+l_2 и т. д. Область изменения точки (s, s_1) представляет собой квадрат Q со сторонами, равными $l_1+l_2+\ldots+l_p$. Особенности подынтегральной функции (28,17) сосредоточены на диагонали $s=s_1$ квадрата и на прямых $s, s_1 = 0, l_1, l_1+l_2, \ldots$ $\ldots, l_1+l_2+\ldots+l_p$. Эти последние особенности не существенны, и более детальное рассмотрение требуется лишь для точек, близких к диагонали $s=s_1$.

После сказанного становится ясным, как обобщить доказательство, проведенное нами для случая $p=1$, на случай произвольного p; поэтому мы на этом доказательстве останавливаться не будем.

3°. Перейдем к доказательству формул (28,15). Нам, очевидно, достаточно показать, что интегралы

$$I' = \int_l \frac{\varepsilon^+ dt_1}{t_1 - z}, \quad I'' = \int_l \frac{\varepsilon^- dt_1}{t_1 - z},$$

где l обозначает дугу, вырезаемую из L окружностью достаточно малого радиуса R_0 с центром в t_0, стремятся к нулю, когда z стремится к t_0 соответственно слева или справа от L по прямым, составляющим конечные углы с касательной к L в точке t_0. Мы можем считать, что $R_0 = R_0(\alpha_0)$ — стандартный радиус для той гладкой дуги, на которой расположена точка t_0, и что z стремится к t_0 по прямой, составляющей с касательной нетупой угол $\beta_0 > \alpha_0$.

На основании формулы (20,7) имеем:

$$|\varepsilon^+| = |\psi(t_1, z) - \psi^+(t_1, t_0)| \leqslant C\delta^\mu,$$

где C — постоянная, $\delta = |z - t_0|$, а μ — показатель условия H для функции $\varphi(t, t_1)$ по переменной t при предположении, что t и t_1 находятся в окрестности точки t_0; мы считаем $\mu < 1$, что, конечно, не нарушает общности. Далее (ср. стр. 57),

$$|t_1 - z|^2 \geqslant (r - \delta\cos\omega_0)^2 + \delta^2 \sin^2\omega_0,$$

где $r = |t_1 - t_0|$, $0 < \omega_0 < \frac{\pi}{2}$, поэтому

$$|I'| \leqslant B\delta^\mu \int_0^{R_0} \frac{dr}{\sqrt{(r-\delta\cos\omega_0)^2 + \delta^2\sin^2\omega_0}} =$$

$$= B\delta^\mu \left[\ln\left\{r - \delta\cos\omega_0 + \sqrt{(r-\delta\cos\omega_0)^2 + \delta^2\sin^2\omega_0}\right\}\right]_0^{R_0},$$

где B — некоторая постоянная. Следовательно, $I' \to 0$, когда $\delta \to 0$.

Точно так же докажем, что $I'' \to 0$. Таким образом, формула перестановки (28,7) доказана.

4°. Формула эта была впервые дана А. Пуанкаре (H. Poincaré [1]) при весьма ограничительных предположениях относительно функции $\varphi(t, t_1)$ и линии L, с ошибкой в знаке. При более общих (но менее общих, чем здесь) условиях эта формула была доказана Г. Бертраном (G. Bertrand [1], [3]) и, в несколько ином виде, Ф. Трикоми (F. Tricomi [1], [2])[1]. Строгое доказательство, при несколько менее общих предположениях, чем здесь, дано Ж. Жиро (G. Giraud [1])[2].

Приведенное здесь доказательство было дано автором в первом издании настоящей книги в предположении, что L — гладкая линия, а $\varphi(t, t_1)$ принадлежит классу H на L[3]).

Доказательство при более общих предположениях, принятых нами здесь, было дано автором во втором издании.

Замечание 1. Следует отметить, что на самом деле формула перестановки в несколько ином виде была получена Г. Харди (G. Hardy [3], [4]) ранее Пуанкаре и Бертрана, о чем, к сожалению, мне стало известно лишь после сдачи в печать второго издания настоящей книги. Я успел упомянуть работы Г. Харди лишь в добавлении ко второму изданию. Вообще работы этого автора (G. Hardy [1] — [4]), посвященные интегралам в смысле главного значения по Коши, содержат ряд результатов, заслуживающих внимания. Однако в настоящее время результаты эти представляют интерес, главным образом, с точки зрения истории развития теории интегралов типа Коши[4].

Несмотря на сказанное, я все же решил оставить термин «формула перестановки Пуанкаре — Бертрана», так как лишь у этих авторов формула дана в том виде, как она используется в большинстве приложений (Г. Харди ограничивается областью действительного переменного).

Замечание 2. Отметим одно простое следствие из формулы перестановки (28,7).

Пусть на L дана функция $K(t, t_1)$, представимая в виде

$$K(t, t_1) = \frac{\psi(t, t_1)}{|t_1 - t|^{\lambda}}, \quad \lambda = \text{const} < 1, \tag{28,19}$$

где $\psi(t, t_1)$ — функция, подчиненная тем же условиям, что и функция $\varphi(t, t_1)$ в п. 1°. Тогда

$$\int_L \frac{dt}{t - t_0} \int_L K(t, t_1)\, dt_1 = \int_L dt_1 \int_L \frac{K(t, t_1)\, dt}{t - t_0},$$

где t_0 — любая точка на L, отличная от узлов.

---

[1]) Ср. также В. Д. Купрадзе [5].

[2]) Ж. Жиро рассматривает многомерные области интегрирования, а случай одномерной области получает в качестве частного.

[3]) Обобщения в различных направлениях условий, достаточных для справедливости формулы (28,7), даны в работах: Л. Г. Магнарадзе [8], Б. В. Хведелидзе [5], [18], С. Г. Михлин [7], F. Tricomi [3], [5], [6], Г. А. Хускивадзе [4], Э. Г. Гордадзе [1], А. Д. Алексеев [3], В. А. Пааташвили [3], W. Zakowski [1].

[4]) То обстоятельство, что эти работы Г. Харди, как и ряд давно опубликованных важных работ других авторов (например, работ Ю. В. Сохоцкого и И. Племеля), относящихся к интегралам типа Коши, не привлекли должного внимания в свое время, объясняется тем, что значительный интерес к работам в этой области возник лишь за последние годы, в связи с приложениями к граничным задачам.

Таким образом, перестановка порядка интегрирования в рассматриваемом случае допустима.

Это непосредственно следует из формулы (28,7), если заметить, что в силу условия (28.19)

$$K(t,\ t_1)=\frac{\varphi(t,\ t_1)}{t_1-t},$$

где функция

$$\varphi(t,\ t_1)=\psi(t,\ t_1)\cdot|t-t_1|^{1-\lambda}e^{i\vartheta},\quad \vartheta=\arg(t_1-t),$$

удовлетворяет условиям, указанным в п. 1°, причем $\varphi(t,\ t)=0$. Полученный результат легко доказать и непосредственно[1]).

§ 29. Условие аналитической распространимости функции, заданной на совокупности замкнутых контуров. 1°. Пусть L представляет собой совокупность конечного числа гладких замкнутых контуров $L_1,\ L_2,\ \ldots,\ L_p$, не имеющих общих точек (рис. 16). Линия L разбивает плоскость на некоторое (конечное) число связных частей. Из этих частей мы составим две части плоскости, которые обозначим через S^+ и S^- и которые обладают следующими свойствами.

Части S^+ и S^- имеют общей границей линию L (которая не причисляется ни к S^+, ни к S^-); части S^+ и S^- вместе с L составляют всю плоскость; связные части, составляющие S^+, не имеют общих между собой граничных точек; то же самое — относительно связных частей, составляющих S^-.

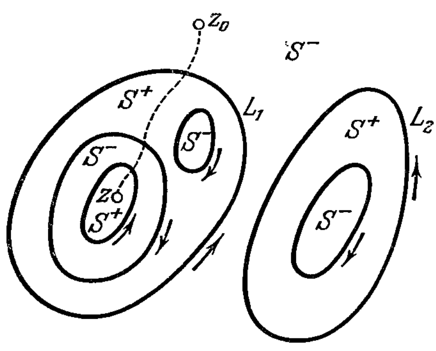

Рис. 16.

Предыдущие условия вполне определяют части S^+ и S^- (если не считать того, что S^+ можно обозначить через S^-, и наоборот). Для того чтобы в этом убедиться, достаточно заметить следующее. Отнесем к части S^- связную часть, содержащую бесконечно удаленную точку (на рис. 16 это — часть, состоящая из точек, расположенных вне контуров L_1 и L_2). Пусть, далее, z — какая-либо точка, не расположенная на L. Если обозначить через k число замкнутых контуров, внутри которых находится z (в случае, изображенном на рис. 16, $k=3$), то мы должны считать, что $z\in S^+$, если k — нечетное число, и $z\in S^-$, если k — четное число (или нуль). В самом деле, пусть z_0 — какая-либо точка, находящаяся вне всех замкнутых контуров, составляющих L, и, следовательно, принадлежащая S^-. Мы можем перейти из точки z_0 в точку z так, чтобы пересечь каждый из k контуров, окружающих z ровно по одному разу (рис. 16, пунктир); но при каждом таком пересечении мы переходим из части S^- в часть S^+ или наоборот, ибо по условию часть S^+ может иметь общую границу лишь с частью S^-.

[1]) Доказательство справедливости формулы перестановки для случая, когда один из интегралов рассматривается в смысле главного значения по Коши, даны при различных предположениях также в работах: G. Hardy [3], С. Г. Михлин [7], И. Н. Карцивадзе [2], Б. В. Хведелидзе [5], [18], K. Nickel [1], E. Love [1], А. Г. Джваршейшвили [1]. [3], [5], Г. А. Хускивадзе [4], Э. Г. Гордадзе [1].

Таким образом, все точки плоскости, не принадлежащие L, однозначно распределяются между частями S^+ и S^- и легко видеть, что при этом удовлетворяются все поставленные относительно этих частей условия.

Относительно положительного направления на L мы раз и навсегда условимся в следующем: если плоскость разбита указанным образом на части S^+ и S^-, то положительным направлением на L считается то, при движении вдоль которого часть S^+ остается слева (рис. 16).

Разумеется, мы можем обозначить через S^+ то, что было обозначено через S^-, и наоборот; в этом случае бесконечно удаленная точка будет принадлежать части S^+, а положительное направление на L изменится на обратное.

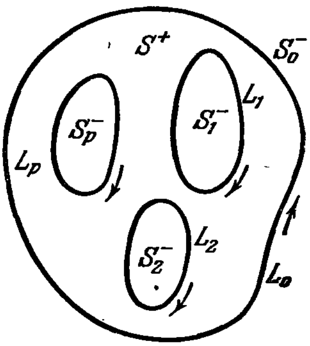

Рис. 17.

2°. В приложениях чаще всего встречается случай, когда одна из частей S^+ и S^- является связной. Пусть это будет S^+.

Здесь могут представиться два случая: когда область S^+ конечна и когда она бесконечна.

В первом случае область S^+ ограничена замкнутыми контурами, которые мы теперь обозначим через $L_0, L_1, \ldots, L_p$, из них один — пусть это будет L_0 — охватывает все остальные, а эти последние не охватывают друг друга (рис. 17). В этом случае часть S^- состоит из связных частей $S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$, где S_0^- обозначает бесконечную часть, состоящую из точек, расположенных вне L_0, а S_k^- $(k=1, 2, \ldots, p)$ — часть, состоящую из точек, расположенных внутри L_k.

Во втором случае, когда часть S^+ бесконечна, мы имеем то же расположение контуров, с той разницей, что контур L_0 отсутствует (можно сказать, уходит в бесконечность) и отсутствует также часть S_0^-.

3°. Вернемся к общему случаю, рассмотренному в п. 1°. Пусть $\varphi(t)$ обозначает непрерывную функцию, заданную на L.

Поставим себе следующий вопрос: *каким условиям должна удовлетворять функция $\varphi(t)$ для того, чтобы она была граничным значением функции $\varphi(z)$, голоморфной в части S^+ плоскости* [аналогичный вопрос может быть, разумеется, поставлен относительно части S^-]?

Под функцией, голоморфной в S^+ [или S^-], здесь подразумевается функция, которая голоморфна в отдельных связных частях, из которых состоит S^+ [или S^-].

Если $\varphi(t)$ является граничным значением функции $\varphi(z)$, голоморфной в S^+ [или в S^-], то мы будем говорить, что функция $\varphi(t)$, заданная на L, *аналитически распространима на* S^+ [*на* S^-].

Поставленный выше вопрос решается весьма просто. Если функция $\varphi(t)=\varphi^+(t)$ есть граничное значение функции $\varphi(z)$, голоморфной в S^+ и в случае, когда часть S^+ бесконечна, обращающейся в нуль на бесконечности, то, очевидно, по теореме Коши [1])

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=0 \text{ для всех } z\in S^-. \tag{29,1}$$

---

[1]) Напомним, что L можно представить себе как совокупность границ связных частей, составляющих часть S^+ плоскости [а также, как совокупность границ связных частей, составляющих S^-].

Обратно, легко убедиться, что если (29,1) имеет место, то $\varphi(t)$ есть граничное значение функции $\varphi(z)$, определяемой формулой

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad \text{для } z\in S^+,$$

голоморфной в S^+ и непрерывно продолжимой на L из S^+.

В самом деле, положим:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{29,2}$$

На основании (29,1) $\Phi(z)=0$ всюду в S^-; поэтому $\Phi(z)$ принимает справа от L граничные значения $\Phi^-(t)=0$. Следовательно, согласно сказанному в § 17, функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L также и слева, причем

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\Phi^+(t),$$

а это и доказывает наше утверждение.

Таким образом, *условие* (29,1) *является необходимым и достаточным для того, чтобы непрерывная функция* $\varphi(t)$, *заданная на* L, *была граничным значением функции, голоморфной в* S^+ *и в случае, когда часть* S^+ *бесконечна, обращающейся в нуль на бесконечности.*

Этому условию можно придать еще следующий вид, если $\varphi(t)$ принадлежит классу H на L. Именно, переходя в (29,1) к пределу $z\to t_0$, где t_0 — любая точка на L, получаем:

$$-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=0 \quad \text{для всех } t_0\in L. \tag{29,3}$$

Ясно, что и, обратно, из (29,3) следует (29,1)[1]), так что (29,3) *является необходимым и достаточным условием того, чтобы заданная на* L *функция* $\varphi(t)$, *удовлетворяющая условию* H, *была граничным значением функции, голоморфной в* S^+ *и в случае, когда часть* S^+ *бесконечна, обращающейся в нуль на бесконечности.*

Совершенно аналогично получаем *необходимое и достаточное условие того, чтобы заданная на* L *непрерывная функция* $\varphi(t)$ *была граничным значением функции* $\varphi(z)$, *голоморфной в* S^- *и в случае, когда часть* S^- *бесконечна, обращающейся в нуль на бесконечности.* Это условие заключается в следующем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=0 \quad \text{для всех } z\in S^+. \tag{29,4}$$

В случае, когда $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H, предыдущее условие эквивалентно следующему:

$$\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=0 \quad \text{для всех } t_0\in L. \tag{29,5}$$

Найденные условия легко обобщить на случай, когда от $\varphi(z)$ не требуется, чтобы она обращалась в нуль на бесконечности. Пусть, например,

---

[1]) Действительно, из (29,3) следует, что функция $\Phi(z)$, определяемая формулой (29,2), голоморфная в S^- и непрерывно продолжимая на L, принимает на L значения $\Phi^-(t)=0$; следовательно, $\Phi(z)=0$ всюду в S^-.

часть S^- бесконечна и, следовательно, часть S^+ конечна (как на рис. 16), и пусть требуется найти *необходимое и достаточное условие того, чтобы непрерывная на L функция $\varphi(t)$ была граничным значением функции $\varphi(z)$, голоморфной в S^- и имеющей на бесконечности полюс с заданной главной частью*, т. е. имеющей при больших $|z|$ вид

$$\varphi(z)=\gamma(z)+O\left(\frac{1}{z}\right), \tag{29,6}$$

где $\gamma(z)$ — заданный полином («главная часть»), в частности, постоянная[1]).

В рассматриваемом случае условие (29,4) заменяется, очевидно, следующим:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\gamma(t)}{t-z}\,dt=0 \text{ для всех } z\in S^+$$

или, что то же,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\gamma(z) \text{ для всех } z\in S^+. \tag{29,7}$$

Соответственно этому условие (29,5) заменяется следующим:

$$\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\gamma(t_0) \text{ для всех } t_0\in L. \tag{29,8}$$

Условия (29,3) и (29,8) были указаны И. Племелем (J. Plemelj [1]) для случая, когда L — простой замкнутый контур (при частном предположении, что $\gamma(z)=\text{const}$). Ф. Казорати (F. Casorati [1]), ограничиваясь также случаем одного замкнутого контура L и конечной области, дал значительно раньше Племеля, но без должного обоснования, условие

$$\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt=0 \text{ для всех } t_0\in L,$$

эквивалентное условию (29,3). Позднее Г. Морера (G. Morera [1]) дал более строгое обоснование этого условия, а также указал другое условие

$$\int\limits_L \varphi(t)\ln(t-t_0)\,dt=0 \text{ для всех } t_0\in L,$$

эквивалентное, при некоторых дополнительных предположениях, предыдущему.

С более общей точки зрения интересующие нас здесь условия, для случая одного замкнутого контура, были изучены В. В. Голубевым [1] и И. И. Приваловым [2]; см. также И. И. Привалов [7].

4°. Выпишем для облегчения ссылок следующие известные (или непосредственно вытекающие из известных) формулы, которыми мы будем часто пользоваться и которыми мы фактически воспользовались выше.

А именно, пусть L, S^+, S^- обозначают то же, что выше, и пусть, например, S^+ обозначает конечную, а S^- — бесконечную части.

Пусть сначала $\varphi(t)$ обозначает граничное значение функции $\varphi(z)$, голоморфной в S^+. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases}\varphi(z) & \text{при } z\in S^+,\\ 0 & \text{при } z\in S^-.\end{cases} \tag{29,9}$$

---

[1]) В этом случае мы говорим о полюсе условно («полюс нулевого порядка»).

Пусть теперь $\varphi(t)$ обозначает граничное значение функции $\varphi(z)$, голоморфной в S^- и имеющей на бесконечности полюс с главной частью $\gamma(z)$. Тогда

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \begin{cases} \gamma(z) & \text{при } z \in S^+, \\ -\varphi(z)+\gamma(z) & \text{при } z \in S^-. \end{cases} \tag{29,10}$$

Последняя формула непосредственно вытекает из формулы и теоремы Коши, примененных к функции $\varphi(z) - \gamma(z)$, голоморфной в S^-, включая бесконечно удаленную точку, и обращающейся в нуль на бесконечности. Знак минус перед $\varphi(z)$ в последней формуле появляется оттого, что положительное направление на L оставляет область S^- справа, а не слева.

З а м е ч а н и е. Легко видеть, что формулы (29,9), (29,10) останутся в силе, если считать, что простые замкнутые контуры, составляющие L, не гладкие, а лишь кусочно-гладкие, и что функция $\varphi(z)$ принимает граничные значения $\varphi(t)$ всюду на L, кроме, быть может, узлов, вблизи же узлов удовлетворяет условию:

$$|\varphi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1,$$

где c соответствующий узел (это условие достаточно, но, конечно, не необходимо).

§ 30. Обобщенная теорема Гарнака. Из предыдущего непосредственно вытекает следующее предложение, которое находит применение в ряде вопросов.

Пусть L, S^+, S^- обозначают то же, что в п. 1° предыдущего параграфа, пусть $\varphi(t)$ — действительная непрерывная функция, заданная на L, и пусть

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}; \tag{30,1}$$

тогда если $\Phi(z) = 0$ для всех $z \in S^+$, то $\varphi(t)$ сохраняет постоянные значения на отдельных (замкнутых) *контурах, составляющих L, причем эти значения одинаковы на тех контурах, которые ограничивают одну и ту же связную часть, принадлежащую S^-; в частности, если S^- содержит связную бесконечную часть, то $\varphi(t) = 0$ на границе этой части. Обратное предложение также справедливо.*

Справедливость обратного предложения легко проверяется непосредственно. Докажем прямое предложение.

Если $\Phi(z) = 0$ в части S^+ плоскости, то в силу сказанного в п. 3° предыдущего параграфа, $\varphi(t)$ есть граничное значение функции $\varphi(z)$, голоморфной в S^- и исчезающей на бесконечности, если S^- содержит точку $z = \infty$. Но так как функция $\varphi(t)$ действительна, то $\operatorname{Im}\varphi(z)$[1]) принимает на L граничное значение 0. Поэтому $\operatorname{Im}\varphi(z) = 0$ всюду в S^-. Следовательно, $\varphi(z)$ сохраняет постоянные значения в каждой из связных частей, составляющих S^-, в частности, равна нулю в той из них (если таковая имеется), которая содержит точку $z = \infty$. Отсюда и следует высказанное предложение.

---

[1]) Через $\operatorname{Re}\Phi$ и $\operatorname{Im}\Phi$ обозначаются соответственно действительная и мнимая части комплексной величины Φ.

Ясно, что в формулировке доказанного предложения мы можем заменить S^+ на S^- и наоборот, так как разница здесь лишь в обозначениях.

Это предложение представляет собой обобщение одного предложения, принадлежащего А. Гарнаку (A. Harnack [1]), правда, не вполне правильно им сформулированного.

В случае, когда L состоит из одного замкнутого контура, это предложение сводится к следующему: *если* $\Phi(z)=0$ *для всех* z *внутри* L, *то* $\varphi(t)=0$ *на* L; *если же* $\Phi(z)=0$ *для всех* z *вне* L, *то* $\varphi(t)=\text{const}$ *на* L.

Замечание 1. Доказанное предложение остается в силе, если в его формулировке заменить условие $\Phi(z)=0$ в S^+ условием $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$ в S^+.

В самом деле, пусть $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$ в S^+. Тогда $\Phi(z)$ сохраняет постоянные чисто мнимые значения в связных частях, составляющих S^+; поэтому $\Phi^+(t)$ сохраняет постоянные, чисто мнимые значения на отдельных контурах, составляющих L. Следовательно, и мнимая часть функции $\Phi^-(t)=\Phi^+(t)-\varphi(t)$ сохраняет постоянные значения на этих контурах и, в частности, на контурах, ограничивающих связные части, из которых состоит S^-. Но тогда функция $\Phi(z)$ сохраняет постоянное значение в каждой из этих частей[1]); в частности, в той из этих частей (если таковая имеется), которая содержит бесконечно удаленную точку, $\Phi(z)=0$. Далее, на границе каждой из этих частей $\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t)$, и так как $\Phi^+(t)$ — чисто мнимая величина, а $\varphi(t)$ — по условию, действительная функция, то $\varphi(t)=-\operatorname{Re}\Phi^-(t)$ сохраняет одно и то же постоянное значение на всей границе любой из этих частей; это значение равно нулю на границе той из них (если таковая имеется), которая содержит точку $z=\infty$. Таким образом, наше утверждение доказано.

Замечание 2. Легко доказать, аналогично предыдущему, что если при прежних обозначениях $\operatorname{Im}\Phi(z)=0$ в S^+, то $\varphi(t)$ сохраняет постоянные значения на замкнутых контурах, составляющих L; обратное также имеет место[2]).

§ 31. Определение кусочно-голоморфной функции по заданному скачку.

1°. Решим теперь следующую, весьма важную для дальнейшего задачу.

Пусть L обозначает кусочно-гладкую линию (§ 1) и пусть $\varphi(t)$ — функция класса H^* (§ 8), заданная на L[3]).

Требуется *найти кусочно-голоморфную функцию* $\Phi(z)$, *исчезающую на бесконечности, по граничному условию*

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \text{ на } L, \text{ кроме узлов.} \tag{31,1}$$

Задача сразу решается на основании формул Сохоцкого — Племеля. А именно, задача имеет одно и только одно решение, которое дается

---

[1]) Это вытекает из известного предложения теории потенциала; см. ниже, § 60.

[2]) На этот раз постоянные (действительные) значения, принимаемые $\varphi(t)$ на отдельных контурах, ничем между собой не связаны.

[3]) За исключением глав IV и V, мы будем пользоваться приводимым ниже результатом лишь в случае, когда L состоит из гладких замкнутых контуров, а $\varphi(t)$ удовлетворяет условию H на L. Если иметь в виду этот случай, то нет надобности в приводимых ниже рассуждениях опираться на результаты § 26; достаточно воспользоваться результатами § 16.

формулой

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{31,2}$$

Действительно, функция $\Phi(z)$, определяемая этой формулой, кусочно-голоморфна (§ 26, п. 5°) и удовлетворяет в силу формулы Сохоцкого — Племеля (16,3) условию (31,1). Остается показать, что других решений задача не имеет.

Допустим, что задача имеет еще одно решение, и пусть $\Psi(z)$ обозначает разность этих двух решений. Тогда в силу условия (31,1) должно быть

$$\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=0 \text{ на } L, \text{ кроме узлов.}$$

Но тогда на основании сказанного в § 10, п. 3° функция $\Psi(z)$ голоморфна на всей плоскости (если приписать ей надлежащие значения на L), и так как она исчезает на бесконечности, то в силу теоремы Лиувилля $\Psi(z)=0$ на всей плоскости. Поэтому наши два решения совпадают.

Рассмотренная только что задача была поставлена и решена Ю. В. Сохоцким [1], но без четкой формулировки условий и без должного обоснования результата.

Позднее эта задача, в той или иной постановке, рассматривалась рядом авторов [1]).

Если заменить требование $\Phi(\infty)=0$ более общим требованием, а именно, чтобы порядок $\Phi(z)$ на бесконечности не превосходил заданного целого числа $k \geqslant -1$ [2]), то самое общее решение, как показывают рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим [3]), дается формулой

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+P_k(z), \tag{31,3}$$

где $P_k(z)$ — произвольный полином степени не выше k; при $k=-1$ следует считать $P_k(z)=0$.

Совершенно очевидно, как решить задачу несколько более общую, а именно, если считать, что $\Phi(z)$ может иметь конечное число полюсов в заданных точках (а не только один полюс на бесконечности).

2°. Рассмотренную выше задачу можно решить еще так. Умножим обе части равенства (31,1) на

$$\frac{1}{2\pi i}\frac{dt}{t-z},$$

где z — любая точка плоскости, не расположенная на L, и проинтегрируем по L. Тогда, как нетрудно убедиться, применяя надлежащим образом формулу Коши [4]) и учитывая, что $\Phi(z)$ может иметь полюс порядка не выше k на бесконечности, получим снова формулу (31,3).

---

[1]) Решение задачи (31,1) в случае, когда L представляет собой счетную совокупность замкнутых контуров, при некоторых дополнительных условиях дано в работах И. Н. Карцивадзе и Б. В. Хведелидзе [2] и В. А. Пааташвили [3]. Случай счетной совокупности отрезков рассмотрен в работе С. А. Фрейдкина [5].

[2]) Относительно случая $k<-1$ см. ниже, п. 3°.

[3]) При этом следует применить обобщенную теорему Лиувилля.

[4]) Применимость формулы Коши обеспечивается тем, что по условию функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима (слева и справа) на все точки линии L, отличные от узлов, а вблизи узлов c

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha=\text{const}<1.$$

Это утверждение почти очевидно, например, для случая, когда L — простой замкнутый или разомкнутый кусочно-гладкий контур. Доказательство для общего случая приведено в Добавлении III в конце книги.

Таким образом, мы приходим к выводу, что *если решение существует, оно имеет вид* (31,3); *это заключение справедливо и в случае, когда функция* $\varphi(t)$ *лишь непрерывна на* L, *за возможным исключением узлов, и абсолютно интегрируема на* L. В случае же, когда $\varphi(t)$ принадлежит классу H^*, формула (31,3) на самом деле дает решение.

3°. Если потребовать, чтобы функция $\Phi(z)$ имела не бесконечности порядок не выше $k < -1$ (т. е. имела на бесконечности нуль порядка не ниже $-k > 1$), то задача, как нетрудно видеть на основании формул (11,2a), (11,2b), имеет решение лишь в том случае, если

$$\int_L t^j \varphi(t)\,dt = 0, \quad j = 0,\ 1,\ \ldots,\ -k-2; \tag{31,4}$$

при соблюдении этих условий решение дается формулой (31,2).

4°. Распространение предыдущих результатов на случай, когда линия скачков простирается в бесконечность, никаких затруднений не представляет (ср. § 19, п. 1°).

Мы ограничимся здесь случаем, когда линия скачков — бесконечная прямая. Не нарушая общности, мы можем считать, что эта прямая — действительная ось, которую мы, как в § 19, обозначим через D.

Задачу теперь мы поставим так: найти всюду ограниченную кусочно-голоморфную функцию по условию

$$\Phi^+(t) - \Phi^-(t) = \varphi(t) \text{ на } D, \tag{31,5}$$

где $\varphi(t)$ — заданная на D функция, удовлетворяющая условию H всюду на D, включая бесконечно удаленную точку (см. § 19, п. 3°).

Все решения задачи, как легко видеть (ср. предыдущий параграф), даются формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} + C_0, \tag{31,6}$$

где C_0 — произвольная постоянная.

Задачу можно сделать определенной, потребовав, например, чтобы $\Phi^+(\infty) = 0$. Тогда на основании формулы (19,14)

$$C_0 = -\frac{1}{2}\varphi(\infty).$$

Если заменить требование ограниченности $\Phi(z)$ требованием, что $\Phi(z)$ может иметь полюс не выше данного порядка k в заданной точке a_0, не расположенной на D, и остается ограниченной всюду, кроме окрестности точки a_0, то общее решение задачи дается, очевидно, формулой

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} + C_0 + \frac{C_1}{z-a_0} + \ldots + \frac{C_k}{(z-a_0)^k}, \tag{31,7}$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_k$ — произвольные постоянные.

Сказанное в п. 2° легко переносится на рассмотренный здесь случай. Аналогично обстоит дело для результатов п. 3°; в нашем случае бесконечно удаленную точку (которая теперь расположена на линии скачков D) следует заменить какой-либо фиксированной точкой, не расположенной на D.

Замечание. Приведенные выше результаты останутся, очевидно, неизменными, если допустить, что функция $\Phi(z)$ может не быть ограниченной в окрестностях конечного числа точек $c_1, c_2, \ldots, c_n$, расположенных на D на конечном расстоянии, подчиняясь, однако, условию

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c_k|^\alpha}, \quad \alpha = \text{const} < 1; \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

как всякая кусочно-голоморфная функция.

§ 32. Обращение интеграла типа Коши в случае замкнутых контуров. Пусть L обозначает совокупность конечного числа замкнутых гладких контуров без общих точек и пусть положительное направление на L выбрано так, как в § 29, п. 1°.

Рассмотрим интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \psi(t_0), \tag{32,1}$$

где t_0 — произвольная точка на L, $\psi(t)$ — заданная на L функция класса H, а $\varphi(t)$ — искомая функция, которую мы также подчиним условию H.

Уравнение (32,1) представляет собой одно из простейших сингулярных интегральных уравнений; его можно решить при помощи формул, которые будут выведены в следующей главе для общего случая. Однако вследствие того, что уравнение (32,1) представляет значительный самостоятельный интерес, мы приведем здесь три способа его решения; при этом мы будем пользоваться обозначениями § 29, п. 1°, в частности, обозначениями S^+, S^-.

Первый способ. Введем в рассмотрение кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{32,2}$$

исчезающую на бесконечности. Тогда на основании формулы Сохоцкого — Племеля (16,4) уравнение (32,1) запишется в виде

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \psi(t_0) \text{ на } L. \tag{32,3}$$

Рассмотрим вторую кусочно-голоморфную функцию, определенную так:

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Phi(z) & \text{при } z \in S^+, \\ -\Phi(z) & \text{при } z \in S^-. \end{cases} \tag{32,4}$$

Тогда условие (32,3) перепишется так:

$$\Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0) = \psi(t_0) \text{ на } L,$$

откуда на основании результата предыдущего параграфа

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-z}. \tag{32,5}$$

С другой стороны, на основании (16,3), (32,2) и (32,4)

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0) = \Psi^+(t_0) + \Psi^-(t_0),$$

откуда, наконец, на основании (32,5) и (16,4)

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t - t_0}. \qquad (32,6)$$

Итак, из (32,1) следует (32,6). Но точно таким же путем из (32,6) следует (32,1). Итак (32,6) является (единственным) решением уравнения (32,1); иными словами, *каждое из соотношений*

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} = \psi(t_0), \qquad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t - t_0} = \varphi(t_0) \qquad \text{(A)}$$

является следствием другого, т. е. эти *соотношения обращают друг друга.*

Второй способ. Формулы обращения (A) вытекают из следующих простых рассуждений. Пусть $\omega(t)$ — какая-либо функция, удовлетворяющая на L условию H. Исчезающая на бесконечности функция

$$\Omega(z) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t - z}$$

голоморфна в S^+ и непрерывна в $S^+ + L$, если приписать ей на L значения

$$\Omega^+(t) = \omega(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1 - t}. \qquad (*)$$

Поэтому

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Omega^+(t)\,dt}{t - z} = 0 \text{ для всех } z \in S^-;$$

переходя к пределу при $z \to t_0$ справа, получаем[1]):

$$-\Omega^+(t_0) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\Omega^+(t)\,dt}{t - t_0} = 0.$$

Подставляя сюда значения $\Omega^+(t)$ из (*), получаем:

$$-\omega(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1 - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{dt}{t - t_0} \left\{ \omega(t) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1 - t} \right\} = 0,$$

откуда, раскрывая скобки и производя сокращение, получаем соотношение

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{dt}{t - t_0} \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\omega(t_1)\,dt_1}{t_1 - t} = \omega(t_0), \qquad \text{(B)}$$

справедливое для всякой функции $\omega(t)$, удовлетворяющей на L условию H. Формула (B) выражает то же, что и формулы обращения (A), т. е. что каждое из соотношений (A) есть следствие другого.

Третий способ. Переписав (32,1) в виде

$$\psi(t) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1 - t},$$

---

[1]) Это соотношение мы могли бы сразу написать на основании (29,3).

умножая обе части на $\frac{1}{\pi i}\frac{dt}{t-t_0}$, интегрируя по t вдоль L и применяя формулу перестановки Пуанкаре — Бертрана (§ 28), получаем:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0} = -\frac{1}{\pi^2}\int_L \frac{dt}{t-t_0}\int_L \frac{\varphi(t_1)\,dt_1}{t_1-t} =$$

$$= \varphi(t_0) - \frac{1}{\pi^2}\int_L \varphi(t_1)\,dt_1 \int_L \frac{dt}{(t-t_0)(t_1-t)}. \qquad (**)$$

Но, как легко непосредственно проверить,

$$\int_L \frac{dt}{(t-t_0)(t_1-t)} = \frac{1}{t_1-t_0}\int_L \left\{\frac{1}{t-t_0} - \frac{1}{t-t_1}\right\} dt = 0.$$

Поэтому второе слагаемое в (**) исчезает, и мы получаем формулу (32,6). Тем же путем из (32,6) получим (32,1).

Как мы видим, формулы обращения (А) являются почти тривиальным следствием формул Сохоцкого — Племеля, а также формулы перестановки Пуанкаре — Бертрана. В применении к частным контурам (бесконечная прямая, окружность) [1]) они, в том или ином эквивалентном (или почти эквивалентном) виде, часто встречаются в литературе под названием формул Гильберта. Я затрудняюсь указать автора, впервые давшего эти формулы в применении к произвольным гладким контурам. И. Н. Векуа [1], ограничиваясь случаем одного замкнутого контура, получил их как частный случай решения одного класса сингулярных уравнений, а также сообщил мне способ их вывода, приведенный выше под названием второго [2]).

§ 33. Формулы обращения Гильберта. Применим, в частности, полученный результат к случаю, когда L — окружность радиуса 1 с центром в начале. Положим

$$t = e^{i\vartheta}, \quad t_0 = e^{i\vartheta_0}. \qquad (33,1)$$

Тогда

$$\frac{dt}{t-t_0} = \frac{ie^{i\vartheta}\,d\vartheta}{e^{i\vartheta} - e^{i\vartheta_0}} = \frac{ie^{i\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}\,d\vartheta}{e^{i\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}} - e^{-i\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}} =$$

$$= \frac{1}{2}\,\frac{\cos\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2} + i\sin\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}{\sin\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}}\,d\vartheta = \frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta + \frac{i}{2}\,d\vartheta. \qquad (33,2)$$

Будем обозначать теперь $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ через $\varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta)$ (считая, что $\varphi(\vartheta+2k\pi) = \varphi(\vartheta)$, $\psi(\vartheta+2k\pi) = \psi(\vartheta)$ при k целом) и, кроме того,

---

[1]) Случай окружности см. в следующем параграфе.

[2]) И. Н. Карцивадзе и Б. В. Хведелидзе [1], [2] распространили формулы обращения на случай, когда линия интегрирования представляет собой счетное множество замкнутых контуров при некоторых дополнительных условиях.

Недавно П. Л. Ульянов [4] установил справедливость формулы обращения (32,6) при весьма общих предположениях относительно заданной и искомой функций для случая, когда контур L удовлетворяет условию Ляпунова.

заменим $\psi(\vartheta)$ через $\frac{1}{i}\psi(\vartheta)$. Тогда формулы (A) предыдущего параграфа примут соответственно вид[1]):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta=\psi(\vartheta_0), \tag{33,3}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta+\frac{i}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\,d\vartheta=-\varphi(\vartheta_0). \tag{33,4}$$

Из последних формул легко вывести известные формулы обращения Гильберта, полученные им другим (менее прямым) путем.

Рассмотрим уравнение

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta=\psi(\vartheta_0), \tag{33,5}$$

где $\varphi(\vartheta)$ — искомая, а $\psi(\vartheta)$ — заданная функции, удовлетворяющие условию H. Легко видеть, что это уравнение может иметь решение лишь при соблюдении условия

$$\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\,d\vartheta=0, \tag{33,6}$$

которое получим, если проинтегрируем обе части (33,5) по ϑ_0 от 0 до 2π и примем во внимание, что, как легко видеть,

$$\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta_0=0. \tag{*}$$

Предположим, что условие (33,6) соблюдено, и будем искать решение уравнения (33,5), удовлетворяющее дополнительному условию

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta=0. \tag{33,7}$$

Но при этом условии уравнение (33,5) совпадает с уравнением (33,3), решение которого дается формулой (33,4), т. е., принимая во внимание (33,6),

$$\varphi(\vartheta_0)=-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta. \tag{33,8}$$

Формулы (33,5) и (33,8) вместе с условиями (33,6) и (33,7) представляют собой *формулы обращения Гильберта*[2]).

Мы нашли решение уравнения (33,5), удовлетворяющее дополнительному условию (33,7). Покажем, что все прочие решения получаются из найденного путем прибавления произвольной постоянной[3]). Прежде всего, очевидно, что $\varphi(\vartheta)+\text{const}$ есть также решение; это следует из (*). Пусть теперь $\varphi_1(\vartheta)$ — какое-либо решение уравнения (33,5);

---

[1]) Интегралы, содержащие $\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}$, следует, конечно, понимать в смысле главного значения по Коши.

[2]) См. D. Hilbert [2], гл. IX, стр. 75.

[3]) Предполагается, конечно, что условие (33,6) соблюдено.

положим

$$\varphi^*(\vartheta) = \varphi_1(\vartheta) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi_1(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Тогда, очевидно, $\varphi^*(\vartheta)$ есть решение, удовлетворяющее дополнительному условию (33,7); но такое решение единственно и, следовательно, совпадает с найденным уже решением (33,8). Отсюда и следует наше утверждение.

Из сказанного легко вытекают следующие формулы обращения [1]):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta = \psi(\vartheta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{33,9}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta = \varphi(\vartheta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta, \tag{33,10}$$

которые следует понимать так: *если $\varphi(\vartheta)$ и $\psi(\vartheta)$ — функции, удовлетворяющие условию H, то каждое из равенств* (33,9), (33,10) *влечет за собой другое.* Предоставляя вывод читателю (ср. вывод следующих формул), докажем несколько иные формулы обращения [2]):

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta = \psi(\vartheta_0), \tag{33,11}$$

$$-\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta + \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\,d\vartheta = \varphi(\vartheta_0), \tag{33,12}$$

которые следует понимать в том же смысле, что и предыдущие.

Предположим, например, что имеет место (33,11). Умножая обе части (33,11) на $d\vartheta_0$ и интегрируя от 0 до 2π, получаем, пользуясь (*),

$$\int_0^{2\pi}\varphi(\vartheta)\,d\vartheta = \int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\,d\vartheta,$$

вследствие чего уравнение (33,11) дает:

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta = \psi(\vartheta_0) - \frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\psi(\vartheta)\,d\vartheta = \psi_0(\vartheta_0).$$

---

[1]) O. D. Kellogg [1] (по лекциям Гильберта).

[2]) Эти формулы приведены в книге E. Hellinger und O. Toeplitz [1], стр. 1454, с ошибкой в знаке; авторы ссылаются на статью O. D. Kellogg [1]. Но в последней имеются только формулы (33,9), (33,10).

Так как $\psi_0(\vartheta)$ удовлетворяет условию (33,6), в силу сказанного выше будем иметь:

$$\varphi(\vartheta_0) = -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi_0(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta + \text{const} =$$

$$= -\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta-\vartheta_0}{2}\,d\vartheta + C,$$

где C — некоторая постоянная. Умножая обе части предыдущего равенства на $d\vartheta_0$ и интегрируя от 0 до 2π, получаем:

$$2\pi C = \int_0^{2\pi} \varphi(\vartheta)\,d\vartheta = \int_0^{2\pi} \psi(\vartheta)\,d\vartheta.$$

Подставляя это значение C в предыдущую формулу, получаем требуемую формулу (33,12). Точно таким же путем из (33,12) получаем (33,11).

ГЛАВА ВТОРАЯ

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ И СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В СЛУЧАЕ ГЛАДКИХ ЗАМКНУТЫХ КОНТУРОВ И НЕПРЕРЫВНЫХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

Для принятой нами системы изложения теории линейных сингулярных уравнений, содержащих интегралы типа Коши (только такими уравнениями, как было уже сказано во введении, мы и будем заниматься в этой книге), весьма существенное значение имеет решение одной граничной задачи, которую мы называем задачей линейного сопряжения. Решению этой задачи, при определенных частных предположениях, которые будут обобщены в главе IV, посвящен отдел I настоящей главы.

В отделе II решается другая граничная задача, названная нами задачей Римана — Гильберта. Задача эта не нужна нам для общей теории, но мы все же приводим ее решение, так как оно почти непосредственно вытекает из предыдущего, а также потому, что задача эта представляет самостоятельный интерес и играет значительную роль в некоторых приложениях.

Отдел III настоящей главы посвящен изложению теории сингулярных уравнений упомянутого выше вида при определенных частных предположениях, которые будут обобщены в главе V.

Как было уже упомянуто, решение задачи сопряжения и теория сингулярных уравнений с интегралами типа Коши тесно связаны между собой. Следует, однако, отметить, что теория таких сингулярных уравнений может быть развита до определенного этапа без привлечения задачи сопряжения (или аналогичной задачи). Однако привлечение этой задачи делает теорию особенно простой и наглядной.

Частные предположения, о которых упоминалось выше, сводятся, в существенной своей части, к тому, что мы изучаем в этой главе (а также в следующей, где даются некоторые приложения) случай, когда рассматриваемые линии состоят из (конечного числа) гладких замкнутых контуров, а задаваемые на них функции принадлежат классу H.

Как было сказано, в главах IV и V будут введены более общие предположения. Мы могли бы изложить интересующие нас вопросы, исходя с самого начала из этих последних предположений, но предпочли остановиться на принятом здесь порядке, так как для многих приложений вполне достаточно ограничиться теми предположениями, которые приняты в настоящей главе, и так как эти предположения значительно упрощают теорию[1]), не лишая ее самостоятельности и законченности.

---

[1]) Это, впрочем, лишь отчасти относится к задаче сопряжения, которая решается в общем случае почти столь же просто, как и в случае, рассмотренном в настоящей главе; основное различие заключается лишь в том, что в общем случае приходится опираться на результаты, касающиеся поведения интеграла типа Коши в окрестностях узлов линии интегрирования, изложенные в §§ 22—26.

I. Задача сопряжения в случае гладких замкнутых контуров и непрерывного коэффициента

§ 34. Однородная задача сопряжения. 1°. Пусть L обозначает совокупность конечного числа простых гладких замкнутых контуров $L_1, L_2, \ldots, L_p$ ($L = L_1 + L_2 + \ldots + L_p$), не имеющих общих точек[1]).

Однородной задачей линейного сопряжения граничных значений или, короче, однородной задачей сопряжения мы будем называть следующую задачу[2]):

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с граничной линией L, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \text{ на } L, \tag{34,1}$$

где $G(t)$ — заданная на L функция точки t, принадлежащая классу H и не обращающаяся в нуль нигде на L.

Напомним, что под $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ всегда подразумеваются граничные значения соответственно слева и справа.

Функцию $G(t)$, которая наряду с линией L определяет данную задачу, мы будем называть коэффициентом данной задачи сопряжения.

Заметим здесь же следующее. Если заменить на обратное положительное направление некоторых из контуров, составляющих L, то для того, чтобы условия задачи остались неизменными, следует для этих контуров заменить обозначение Φ^+ на Φ^- и наоборот, что вызовет замену коэффициента $G(t)$ на $[G(t)]^{-1}$ в граничном условии (34,1).

При решении задачи, как мы увидим, существенную роль играет целое число $\varkappa$, определяемое формулой

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L, \tag{34,2}$$

где символ $[\quad]_L$ обозначает приращение выражения, заключенного в скобки, при обходе линии L один раз в положительном направлении, т. е. сумму приращений при обходе отдельных контуров L_k ($k = 1, 2, \ldots, p$) по одному разу. Под $\ln G(t)$ при t на L_k можно подразумевать любое значение этого многозначного выражения при условии, чтобы оно непрерывно изменялось при движении t по L_k.

Это число $\varkappa$ мы будем называть индексом функции $G(t)$, заданной на L, или еще индексом задачи сопряжения.

Легко видеть, что значение индекса не зависит от выбора положительных направлений на контурах L_k, лишь бы оставались неизменными условия задачи, т. е. что число $\varkappa$ является инвариантом задачи. В самом деле, при замене положительного направления какого-либо из контуров L_k на обратное, значение функции $G(t)$ на L_k должно быть заменено значением $[G(t)]^{-1}$ для того, чтобы задача оставалась неизменной; поэтому $\ln G(t)$ заменится на $-\ln G(t)$, вследствие чего приращение $\ln G(t)$ при обходе контура L_k в положительном направлении останется неизменным.

2°. Относительно постановки, решения и названия рассматриваемой задачи заметим следующее:

---

[1]) Обобщение на случай, когда эти контуры могут пересекаться, не представляет затруднений; см. замечание 3 в конце § 35.

[2]) Более общую постановку см. в главе IV.

Если считать, что L — простой замкнутый контур (т. е. $p = 1$) и $G(t)$ представляет собой кусочно-постоянную функцию (изменяющуюся скачком при переходе через некоторые точки на L), то задача эта обратится в частный случай одной задачи, поставленной Риманом (об этой задаче будет сказано в главе VI). Поэтому поставленную выше задачу, которую мы назвали «задачей сопряжения»[1]), обычно называют «задачей Римана». Однако в том примерно виде, как эта задача сформулирована выше, она была впервые рассмотрена Д. Гильбертом[2]) (Götting. Nachrichten, 1905; воспроизведено в книге D. Hilbert [2]). Следует отметить, что Гильберт рассматривает задачу при менее общих условиях: он считает, что L состоит из одного аналитического контура и что $G(t)$ обладает непрерывной второй производной по дуге. Довольно сложным путем он сводит задачу к интегральному уравнению Фредгольма, составление которого требует нахождения функций Грина для областей, на которые разбивается плоскость линией L (речь идет о функции Грина задачи Неймана); полного исследования полученного уравнения Гильберт не дает.

Между тем полное решение исходной задачи может быть получено совершенно элементарно при помощи интегралов типа Коши. Идея этого решения содержится в конце статьи J. Plemelj [1]. И. Племель рассматривает лишь частный случай, когда L состоит из одного замкнутого контура и когда индекс (по принятой здесь терминологии; сам Племель понятия индекса не вводит) равен нулю, но из этого частного случая можно весьма просто вывести решение и для общего случая[3]).

Впервые полное, притом вполне эффективное решение было дано Ф. Д. Гаховым [1], [2]; это решение, с некоторыми упрощениями, изложено в п. 2° следующего параграфа. Ф. Д. Гахов первоначально рассмотрел лишь случай, когда L состоит из одного замкнутого контура. Решение для случая, когда L состоит из нескольких замкнутых контуров, ограничивающих некоторую связную часть плоскости, было дано Б. В. Хведелидзе [2]; решение это приведено в п. 3° следующего параграфа; наконец, решение для случая, когда контуры $L_1, L_2, \ldots, L_p$, составляющие L, расположены произвольно, указано в статье W. Trjitzinsky [1], где рассматриваются и более общие случаи; это решение изложено в п. 4° следующего параграфа.

§ 35. Решение однородной задачи сопряжения. 1°. Мы увидим ниже, что общее решение задачи сводится к нахождению некоторого частного решения, характеризуемого тем, что оно *нигде на конечном расстоянии в нуль не обращается*; подразумевается, что не обращаются в нуль также граничные значения этого решения нигде на L. Такое решение, существование которого будет доказано ниже, мы будем называть *каноническим*. Мы увидим ниже

---

[1]) Название это было введено в третьем издании (1949 г.) книги автора [9].

[2]) Поэтому в первом издании настоящей книги я назвал ее задачей Гильберта. Это название было принято рядом авторов. Некоторые авторы применяют название «задача Римана — Гильберта»; это последнее название я применяю к другой (но близкой) задаче, которая будет рассмотрена в отделе II настоящей главы. Применяются иногда также и другие названия.

[3]) Интересующую нас задачу рассматривал также Э. Пикар (É. Picard [1]). Он составляет сначала для решения задачи два интегральных уравнения, одно из которых — уравнение Фредгольма (второго рода), а другое — сингулярное уравнение; не исследуя этих уравнений, он в дальнейшем приводит не связанное с ними элементарное решение, то же самое, что у Племеля (в том же частном случае), не ссылаясь на него.

(п. 6°), что каноническое решение определяется вполне указанным выше свойством, если не считать произвольного постоянного множителя, отличного от нуля.

2°. Рассмотрим сначала частный случай, когда L состоит из одного простого замкнутого контура (т. е. когда $p = 1$). В зависимости от выбора положительного направления на L могут представиться два случая: когда область S^+, остающаяся слева при движении в положительном направлении по L, конечна и когда область S^+ бесконечна. Эти два случая[1]) мы обозначим соответственно через A и B. Область, дополняющую $S^+ + L$ до полной плоскости, мы обозначим через S^-.

Логарифмируя соотношение (34,1), получим:

$$[\ln \Phi(t)]^+ - [\ln \Phi(t)]^- = \ln G(t). \qquad (*)$$

Это соотношение дало бы возможность сразу найти по способу, указанному в § 31, функцию $\ln \Phi(z)$, если бы она была голоморфна, а следовательно, однозначна в S^+ и S^-, и поэтому была бы однозначна на L функция $\ln G(t)$[2]). Но, вообще говоря, это не имеет места и поэтому требуется дополнительное исследование.

Начнем с рассмотрения $\ln G(t)$. Когда t пробегает один раз контур L в положительном направлении, $\ln G(t)$ получает приращение, равное $2\varkappa\pi i$, где целое число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L \qquad (35,1)$$

есть **индекс** для нашего частного случая (см. предыдущий параграф, п. 1°).

Пусть a — произвольно фиксированная точка, расположенная внутри контура L (так что $a \in S^+$ в случае A и $a \in S^-$ в случае B). Введем обозначение

$$G_0(t) = (t-a)^{-\varkappa} G(t) \text{ в случае A} \qquad (35,2A)$$

и

$$G_0(t) = (t-a)^{\varkappa} G(t) \text{ в случае B.} \qquad (35,2B)$$

Ясно, что функция $\ln G_0(t)$ возвращается к первоначальному значению при обходе контура L в положительном направлении. Поэтому, выбрав произвольно определенное значение для $\ln G_0(t)$ в какой-либо точке контура L и потребовав, чтобы эта функция изменялась на L непрерывно, мы можем подразумевать под $\ln G_0(t)$ вполне определенную функцию, заданную на L; ясно, что эта функция удовлетворяет условию H.

Введя теперь новую кусочно-голоморфную функцию

$$\Psi(z) = \begin{cases} \Phi(z) & \text{при } z \in S^+ \\ (z-a)^{\varkappa}\Phi(z) & \text{при } z \in S^- \end{cases} \text{ в случае A} \qquad (35,3A)$$

и

$$\Psi(z) = \begin{cases} (z-a)^{\varkappa}\Phi(z) & \text{при } z \in S^+ \\ \Phi(z) & \text{при } z \in S^- \end{cases} \text{ в случае B,} \qquad (35,3B)$$

---

[1]) Эти случаи, разумеется, непосредственно сводятся один к другому; мы выписываем ниже канонические решения для обоих случаев лишь для удобства, так как они часто встречаются в приложениях.

[2]) Именно таким образом (и при указанном частном предположении) дает Племель (см. предыдущий параграф) решение задачи.

легко убедиться, что условие (34,1) принимает вид

$$\Psi^+(t) = G_0(t)\,\Psi^-(t). \tag{35,4}$$

Для того чтобы найти упомянутое в п. 1° каноническое решение, действуя пока чисто формально, напишем:

$$\ln \Psi^+(t) - \ln \Psi^-(t) = \ln G_0(t),$$

откуда, считая, что $\ln \Psi(z)$ — (однозначная) кусочно-голоморфная функция, исчезающая на бесконечности, и применяя сказанное в § 31, получим:

$$\ln \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}, \quad \Psi(z) = e^{\Gamma(z)},$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}. \tag{35,5}$$

Ясно, что найденная функция $\Psi(z)$ кусочно-голоморфна, обращается в единицу на бесконечности и всюду отлична от нуля. Непосредственная проверка показывает, что она является (частным) решением задачи (35,4). В самом деле, из (35,5) следует, что $\Gamma^+(t_0) - \Gamma^-(t_0) = \ln G_0(t_0)$, где t_0 — произвольная точка на L, откуда выводим

$$\frac{\Psi^+(t_0)}{\Psi^-(t_0)} = e^{\ln G_0(t_0)} = G_0(t_0),$$

т. е. (35,4). Из найденного частного решения задачи (35,4) сразу выводим по формулам (35,3) частное решение исходной задачи (34,1)

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^+ \\ (z-a)^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^- \end{cases} \quad \text{в случае A,} \tag{35,6A}$$

$$X(z) = \begin{cases} (z-a)^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^+ \\ e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^- \end{cases} \quad \text{в случае B.} \tag{35,6B}$$

В дальнейшем нам часто придется иметь дело с граничными значениями $X^+(t)$, $X^-(t)$; эти значения легко вычислить по формулам Сохоцкого — Племеля, которые дают:

$$\Gamma^+(t) = \frac{1}{2}\ln G_0(t) + \Gamma(t), \quad \Gamma^-(t) = -\frac{1}{2}\ln G_0(t) + \Gamma(t),$$

откуда на основании (35,6A) и (35,6B) следует:

$$X^+(t) = e^{\frac{1}{2}\ln G_0(t)} e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = (t-a)^{-\varkappa} e^{-\frac{1}{2}\ln G_0(t)} e^{\Gamma(t)} \quad \text{в случае A,} \tag{35,7A}$$

$$X^+(t) = (t-a)^{-\varkappa} e^{\frac{1}{2}\ln G_0(t)} e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = e^{-\frac{1}{2}\ln G_0(t)} e^{\Gamma(t)} \quad \text{в случае B.} \tag{35,7B}$$

Эти формулы на основании (35,2A) и (35,2B) можно переписать еще так:

$$X^+(t) = (t-a)^{-\frac{\varkappa}{2}} [G(t)]^{\frac{1}{2}} e^{\Gamma(t)}, \quad X^-(t) = (t-a)^{-\frac{\varkappa}{2}} [G(t)]^{-\frac{1}{2}} e^{\Gamma(t)} \tag{35,8}$$

в обоих случаях A, B.

Выбор значений двузначных выражений в правых частях последних формул в нашем случае безразличен, при условии, чтобы эти правые части изменялись непрерывно на L и чтобы всегда $\frac{X^+(t)}{X^-(t)} = G(t)$, ибо замена X на $-X$ ничего по существу здесь не меняет; однако в некоторых вопросах требуется, чтобы формулы (35,8) давали граничные значения именно той функции X (z), которая дается формулой (35,6A) или (35,6B), а не функции — X (z); в этих случаях следует обращаться к формулам (35,7A), (35,7B).

Отметим еще, что граничные значения $X^+(t)$ и $X^-(t)$ принадлежат классу H на L.

Частное решение X (z) или любое другое, отличающееся от него постоянным (отличным от нуля) множителем, и будет искомым каноническим решением (п. 1°), ибо оно нигде (за возможным исключением бесконечно удаленной точки) в нуль не обращается[1]), включая точки линии L; под последним подразумевается, что

$$X^+(t) \neq 0, \quad X^-(t) \neq 0$$

всюду на L.

Отметим еще, что, как легко видеть, функция $X(z)$ не зависит от выбора значения $\ln G_0(t)$ на L, лишь бы это значение непрерывно изменялось на L. Действительно, всякое другое значение $\ln G_0(t)$ будет отличаться от выбранного лишь слагаемым вида $2\pi ik$, где k — целое число. Поэтому функция $\Gamma(z)$ формулы (35,5) может измениться лишь на слагаемое вида

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2k\pi i\,dt}{t-z} = \begin{cases} 0 & \text{при } z \text{ вне } L, \\ \pm 2k\pi i & \text{при } z \text{ внутри } L, \end{cases}$$

так что выражение $e^{\Gamma(z)}$ останется неизменным.

Легко также непосредственно проверить, что функция X (z) фактически не зависит от положения точки a внутри L (см. замечание 1 в конце параграфа).

Отметим, наконец, что порядок X (z) на бесконечности равен в точности $(-\varkappa)$.

Найдя каноническое решение, легко найти и самое общее решение; но мы предпочитаем написать его сразу для общего случая (см. ниже, п. 5°).

3°. Исходя из предыдущего решения, легко составить каноническое решение для общего случая (см. ниже, п. 4°); однако мы предпочитаем найти непосредственно каноническое решение еще для одного частного случая[2]), так как он часто встречается в приложениях.

Именно, предположим теперь, что линия L состоит из замкнутых контуров $L_0, L_1, \ldots, L_p$, ограничивающих некоторую связную часть плоскости (область) S^+, причем контур L_0 содержит внутри себя все остальные, как в § 29, п. 2° (рис. 17 на стр. 108); так же как в упомянутом параграфе, мы обозначим через S^- часть плоскости, дополняющую $S^+ + L$ до полной плоскости, и будем считать, что положительное направление на L оставляет слева область S^+.

В этом случае каноническое решение строится совершенно аналогично предыдущему. А именно, обозначим через $\lambda_0, \lambda_1, \ldots, \lambda_p$ целые числа, определяемые формулами

$$\lambda_k = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_{L_k} = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_{L_k}, \quad k = 0, 1, \ldots, p, \tag{35,9}$$

и пусть $\varkappa$ по-прежнему обозначает индекс (см. предыдущий параграф, п. 1°)

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L = \lambda_0 + \lambda_1 + \ldots + \lambda_p. \tag{35,10}$$

---

[1]) При $\varkappa > 0$, $X(\infty) = 0$.

[2]) Это решение было дано Б. В. Хведелидзе [2].

Пусть теперь a_0 — какая-либо произвольно фиксированная точка области S^+ и пусть $a_1, a_2, \ldots, a_p$ — произвольно фиксированные точки, взятые соответственно внутри контуров $L_1, L_2, \ldots, L_p$. Положим еще

$$\Pi(z)=(z-a_1)^{\lambda_1}(z-a_2)^{\lambda_2}\ldots(z-a_p)^{\lambda_p},$$

$$G_0(t)=(t-a_0)^{-\varkappa}\Pi(t)G(t); \tag{35,11}$$

аргумент функции $G_0(t)$ возвращается, очевидно, к первоначальному значению, когда t описывает любой из контуров $L_0, L_1, \ldots, L_p$.

Положим, наконец,

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}. \tag{35,12}$$

Тогда, как легко видеть (ср. п. 2°), кусочно-голоморфная функция

$$X(z)=\begin{cases}\dfrac{1}{\Pi(z)}e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^+,\\ (z-a_0)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^-\end{cases} \tag{35,13}$$

представляет собой (частное) решение задачи (34,1), которое нигде на конечном расстоянии в нуль не обращается, так же как его граничные значения $X^+(t)$, $X^-(t)$ на L. Таким образом, решение $X(z)$ или всякое другое, отличающееся от него постоянным (отличным от нуля) множителем, является каноническим.

Граничные значения $X^+(t)$, $X^-(t)$ принадлежат классу H на L; их выражения, аналогичные выражениям (35,7А) и (35,8), легко выписать.

Легко непосредственно проверить, что построенная нами функция $X(z)$ не зависит от выбора значения $\ln G_0(t)$ в формуле (35,12); ср. п. 2°. Легко также непосредственно проверить, что функция $X(z)$ фактически не зависит от выбора точек $a_0, a_1, \ldots, a_p$ в соответствующих областях (ср. замечание 1 в конце параграфа). Порядок на бесконечности функции $X(z)$ равен в точности $(-\varkappa)$.

Все формулы, полученные в настоящем пункте, остаются в силе и тогда, когда контур L_0 отсутствует (и, следовательно, область S^+ бесконечна); следует лишь считать, что в этом случае $\lambda_0=0$.

4°. Рассмотрим теперь общий случай, когда L состоит из произвольно расположенных (простых, замкнутых, гладких и непересекающихся) контуров $L_1, L_2, \ldots, L_p$, на которых выбраны определенные положительные направления. Задачу для этого случая мы решим, исходя из решения, полученного в п. 2° для случая, когда имеется лишь один замкнутый контур (ср. W. Trjitzinsky [1]).

А именно, обозначим через $X_k(z)$ каноническое решение однородной задачи сопряжения, вычисленное в предположении, что все контуры, составляющие L, кроме одного контура L_k, отброшены; соответствующий индекс обозначим через λ_k. Легко видеть, что функция

$$X(z)=X_1(z)X_2(z)\ldots X_p(z) \tag{35,14}$$

будет одним из решений задачи (34,1) для $L=L_1+L_2+\ldots+L_p$, т. е. для задачи, взятой в том виде, как она поставлена в § 34. В самом деле, на основании самого определения функций $X_j(t)$ будем иметь для точек t контура L_k

$$X_k^+(t)=G(t)X_k^-(t),\quad X_l^+(t)=X_l^-(t),\quad l\neq k,$$

ибо контур L_k не является линией скачков для функции $X_l(z)$; следовательно, $X^+(t) = G(t)\, X^-(t)$ на любом из контуров L_k, составляющих L, а это и требовалось показать.

Частное *решение* (35,14) (или любое другое, отличающееся от него постоянным множителем) *является каноническим решением задачи* (34,1), ибо решение это нигде на конечном расстоянии в нуль не обращается, так же как и граничные значения $X^+(t)$, $X^-(t)$ на L.

Порядок этого решения на бесконечности равен в точности $(-\varkappa)$, где $\varkappa$ по-прежнему обозначает индекс функции $G(t)$, заданной на L, т. е.

$$\varkappa = \sum_{k=1}^{p} \lambda_k = \frac{1}{2\pi i} \sum_{k=1}^{p} [\ln G(t)]_{L_k} = \frac{1}{2\pi i} [\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi} [\arg G(t)]_L. \quad (35,15)$$

Для вычисления граничных значений $X^+(t)$ и $X^-(t)$ на L заметим следующее. Если $t \in L_k$, то граничные значения функций $X_1(z), \ldots, X_{k-1}(z)$, $X_{k+1}, (z), \ldots, X_p(z)$ в точке t получим, подставляя просто t на место z, ибо L_k не является линией скачков для этих функций. Поэтому

$$X^\pm(t) = X_1(t) \ldots X_{k-1}(t)\, X_k^\pm(t)\, X_{k+1}(t) \ldots X_p(t) \text{ при } t \in L_k; \quad (35,16)$$

для вычисления же $X_k^+(t)$, $X_k^-(t)$ мы имеем формулы, приведенные в п. 2°.

Отметим, что, очевидно, граничные значения $X^+(t)$, $X^-(t)$ удовлетворяют условию H всюду на L.

5°. Покажем теперь, что если $X(z)$ обозначает каноническое решение, то *все решения однородной задачи сопряжения* (мы имеем всегда в виду лишь решения, имеющие конечный порядок на бесконечности) *даются формулой*

$$\Phi(z) = X(z)\, P(z), \quad (35,17)$$

где $P(z)$ — произвольный полином.

В самом деле, пусть $\Phi(z)$ — какое-либо решение. Имеем, по условию,

$$\Phi^+(t) = G(t)\, \Phi^-(t), \quad X^+(t) = G(t)\, X^-(t),$$

откуда, принимая во внимание, что $X^+(t) \neq 0$, $X^-(t) \neq 0$,

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}.$$

Следовательно, функция $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ голоморфна на всей плоскости; но она имеет конечный порядок на бесконечности; следовательно, эта функция — полином, и наше утверждение доказано.

Отметим следующее важное обстоятельство. Так как граничные значения $X^+(t)$, $X^-(t)$ принадлежат классу H на L, то на основании формулы (35,17) ясно, что и граничные значения $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ всякого решения нашей задачи принадлежат классу H на L; это, конечно, есть следствие того, что мы подчинили заданную функцию $G(t)$ условию H.

6°. Из формулы (35,17) легко вывести заключение, что *все канонические решения* (в смысле определения, данного в п. 1°) *получаются умножением одного из них на произвольную* (отличную от нуля) *постоянную.* Действительно, для того чтобы решение $\Phi(z)$ было каноническим, необходимо и достаточно, чтобы в формуле (35,17) полином $P(z)$ сводился к постоянной, ибо если степень полинома $P(z)$ отлична от нуля, то функция $\Phi(z)$ не может быть отлична от нуля всюду на конечном расстоянии.

Отметим еще следующее. Если в формуле (35,17) степень полинома $P(z)$ равна k, то порядок решения $\Phi(z)$ на бесконечности равен в точности $(-\varkappa + k)$. Следовательно, этот порядок не меньше порядка $(-\varkappa)$ канонического решения $X(z)$; порядок $\Phi(z)$ равен порядку $X(z)$ лишь в том случае, когда $k = 0$, т. е. когда $P(z) = \text{const} \neq 0$.

Из сказанного выше вытекает, что *каноническое решение вполне характеризуется, с точностью до постоянного множителя, любым из следующих трех свойств*:

I. Оно нигде на конечном расстоянии в нуль не обращается.

II. Оно имеет наинизший возможный порядок на бесконечности (равный $-\varkappa$).

III. Всякое решение однородной задачи представимо в виде (35,17).

Утверждения, соответствующие I и II, только что доказаны; утверждение, соответствующее III, почти очевидно на основании предыдущего.

7°. С точки зрения приложений особый интерес представляют решения однородной задачи, исчезающие на бесконечности. Отметим следующее предложение, непосредственно вытекающее из предыдущего:

Если $\varkappa \leqslant 0$, то однородная задача не имеет решений, исчезающих на бесконечности (кроме тривиального решения $\Phi(z) = 0$); *если $\varkappa > 0$, то она имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений, исчезающих на бесконечности,*

$$X(z),\ zX(z),\ \ldots,\ z^{\varkappa-1}X(z). \tag{35,18}$$

Действительно, всякое решение, исчезающее на бесконечности, дается, очевидно, формулой (35,17), в которой полином $P(z)$ должен иметь степень не выше $\varkappa - 1$. Поэтому все решения, исчезающие на бесконечности, даются формулой

$$\Phi(z) = X(z) P_{\varkappa-1}(z),$$

где

$$P_{\varkappa-1}(z) = C_0 z^{\varkappa-1} + C_1 z^{\varkappa-2} + \ldots + C_{\varkappa-1},$$

причем $C_0, C_1, \ldots, C_{\varkappa-1}$ — произвольные постоянные.

8°. Иногда требуется найти решения, ограниченные на бесконечности (не обязательно обращающиеся в нуль). Как легко видеть, аналогично предыдущему, при $\varkappa \leqslant -1$ однородная задача не имеет решений, ограниченных на бесконечности. При $\varkappa > -1$ она имеет ровно $\varkappa + 1$ линейно независимых таких решений

$$X(z),\ zX(z),\ \ldots,\ z^{\varkappa}X(z).$$

Общее решение в этом случае дается формулами предыдущего пункта, в которых теперь вместо $\varkappa - 1$ следует написать $\varkappa$.

Замечание 1. В п. 2° при построении канонического решения $X(z)$ мы ввели произвольную точку a, расположенную внутри L. На основании предыдущего легко видеть, что решение $X(z)$ фактически не зависит от a. Действительно, как было показано, каноническое решение определено с точностью до постоянного множителя. Оно будет определено вполне, если его подчинить, например, следующему дополнительному условию:

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa} X(z) = 1,$$

но этому условию удовлетворяет функция $X(z)$, построенная в п. 2°. Следовательно, если при построении $X(z)$ мы заменим точку a на любую другую точку b, расположенную внутри L, мы получим ту же самую функцию.

Сказанное легко проверить и непосредственным вычислением. В самом деле, пусть $X_a(z)$ обозначает то, что в п. 2° было обозначено через $X(z)$, и пусть $X_b(z)$ обозначает функцию, построенную так же, как $X_a(z)$, но при замене точки a на точку b (расположенную также внутри контура L). Останавливаясь для определенности на случае А (п. 2°), будем иметь на основании (35,6А), (35,5), (35,2А)

$$\frac{X_b(z)}{X_a(z)} = \begin{cases} \exp[\Gamma_b(z) - \Gamma_a(z)] & \text{при } z \in S^+, \\ \left(\frac{z-a}{z-b}\right)^{\varkappa} \exp[\Gamma_b(z) - \Gamma_a(z)] & \text{при } z \in S^-, \end{cases}$$

где

$$\Gamma_a(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln[(t-a)^{-\varkappa} G(t)]\, dt}{t-z}, \quad \Gamma_b(z) = \int_L \frac{\ln[(t-b)^{-\varkappa} G(t)]\, dt}{t-z},$$

и, следовательно,

$$\Gamma_b(z) - \Gamma_a(z) = \frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \ln\left(\frac{t-a}{t-b}\right) \frac{dt}{t-z},$$

где под $\ln\left[\frac{t-a}{t-b}\right]$ мы можем подразумевать значение, принимаемое на L функцией $\ln\left[\frac{z-a}{z-b}\right]$, голоморфной вне L и исчезающей на бесконечности.

Но тогда на основании теоремы Коши

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \ln\left(\frac{t-a}{t-b}\right) \frac{dt}{t-z} = \begin{cases} 0 & \text{при } z \in S^+, \\ -\ln\frac{z-a}{z-b} & \text{при } z \in S^-. \end{cases}$$

Отсюда, подставляя в предыдущие формулы, получаем, что

$$\frac{X_b(z)}{X_a(z)} = 1,$$

и наше утверждение доказано.

Аналогично доказывается соответствующее утверждение относительно функции $X(z)$, построенной в п. 3°.

Замечание 2. Формулам, дающим каноническое решение для случая, рассмотренного в п. 2° (когда L состоит из одного замкнутого контура), можно придать несколько иной вид, где вместо точки a, расположенной внутри L, фигурирует (произвольно выбранная) точка c, расположенная на самом контуре L. Для этого поступим следующим образом. Останавливаясь для определенности на случае А (п. 2°), возьмем на контуре произвольную точку c и соединим ее с точкой a, расположенной внутри L, какой-либо простой непрерывной дугой l, целиком расположенной в S^+. Под $\ln G(t)$ будем подразумевать какое-либо значение этой функции, непрерывное на контуре L, разрезанном в точке c, а под $\ln(t-a)$ — значение, принимаемое на L какой-либо ветвью функции $\ln(z-a)$, голоморфной в области S^+, разрезанной вдоль дуги l. Тогда формулу (35,5) можно переписать так:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)\, dt}{t-z} - \frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\ln(t-a)\, dt}{t-z}.$$

Принимая теперь во внимание, что функция $X(z)$, построенная в п. 2°, не зависит от положения точки a, и приближая точку a к точке c, непрерывно укорачивая купюру $l = ac$, легко заключаем на основании формулы (35,6А), что

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^+, \\ (z-c)^{-\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^-, \end{cases}$$

где на этот раз

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)\, dt}{t-z} - \frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\ln (t-c)\, dt}{t-z},$$

причем под $\ln (t-c)$ следует подразумевать значение, принимаемое на L какой-либо ветвью функции $\ln (z-c)$, голоморфной в S^+. Принимая во внимание последнее обстоятельство, будем иметь на основании теоремы Коши [1])

$$\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln (t-c)\, dt}{t-z} = \begin{cases} \ln (z-c) & \text{при } z \in S^+, \\ 0 & \text{при } z \in S^-, \end{cases}$$

откуда следует, что

$$X(z) = (z-c)^{-\varkappa} e^{\gamma(z)}, \tag{35,19}$$

где

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)\, dt}{t-z}. \tag{35,20}$$

Эти формулы, как легко проверить, справедливы при любом выборе положительного направления на L (т. е. в обоих случаях A, B, рассмотренных в п. 2°).

Очевидно, что в точке c функция $X(z)$ не имеет никаких особенностей, несмотря на внешний вид предыдущей формулы; это легко проверить и непосредственно [2]).

Аналогичную формулу легко вывести и для случая, рассмотренного в п. 3°, а также для общего случая.

Все эти формулы являются частными случаями формул, которые будут выведены в главе IV.

Замечание 3 [3]). Легко обобщить полученные результаты на случай, когда замкнутые контуры $L_1, L_2, \ldots, L_p$, составляющие линию L, могут иметь общие точки (т. е. пересекаться и касаться друг друга), лишь бы число этих точек, которые мы для краткости будем называть точками c, было конечно.

Мы здесь временно отступаем от условия (§ 1), согласно которому мы должны были бы разбить замкнутые контуры, составляющие L, на дуги, не имеющие друг с другом никаких общих точек, кроме концов. Под кусочно-голоморфной функцией в нашем случае мы будем подразумевать функцию, голоморфную в каждой из связных частей, на которые разбивается плоскость линией L, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки, и непрерывно продолжимую слева и справа

---

[1]) То обстоятельство, что $\ln (z-c)$ обращается в бесконечность при $z=c$, как легко видеть, значения не имеет.

[2]) Формулы вида (35,19) были несколько иным путем получены Ф. Д. Гаховым [10], первое изд., § 44.2.

[3]) Ср. W. Trjitzinsky [1].

на все точки L, кроме, быть может, точек c, вблизи которых она должна быть ограничена.

Под коэффициентом $G(t)$ в формулировке однородной задачи сопряжения мы будем теперь подразумевать функцию, определенную следующим образом: $G(t) = G_k(t)$ на L_k, кроме точек c, где $G_k(t)$ — функции, заданные на контурах L_k ($k = 1, 2, \ldots, p$), удовлетворяющие на них условию H; в точках c функция $G(t)$ не определена вообще. Далее, в формулировке однородной задачи сопряжения следует требовать лишь, чтобы условие (34,1) было соблюдено всюду на L, кроме точек c.

При этих условиях все рассуждения, приведенные в тексте настоящего параграфа, останутся в силе. Каноническое решение $X(z)$ строится точно так же, как выше. Оно нигде в нуль не обращается, так же как и граничные его значения $X^+(t)$, $X^-(t)$, где под t подразумевается точка линии L, отличная от точек c; вблизи же точек c функция $X(z)$ удовлетворяет условию $|X(z)| > \text{const} > 0$ и остается ограниченной.

Замечание 4. Во многих случаях, встречающихся на практике, каноническое решение можно весьма просто построить в конечном виде.

Пусть, например, L — простой замкнутый контур и пусть $G(t)$ — рациональная функция от t. Если обозначить через S^+, S^- области, на которые разбивается плоскость контуром L (причем, как всегда, область S^+ примыкает к L слева), то, очевидно, функция

$$X_0(z) = \begin{cases} G(z) & \text{при } z \in S^+, \\ 1 & \text{при } z \in S^- \end{cases}$$

удовлетворяет требуемому граничному условию $X_0^+(t) = G(t)\, X_0^-(t)$. Если $G(z)$ не имеет нулей и полюсов в S^+ на конечном расстоянии, то, очевидно, $X_0(z)$ и будет искомым каноническим решением. Если же $G(z)$ имеет нули и полюсы в S^+, то мы получим требуемое каноническое решение $X(z)$, если положим

$$X(z) = \frac{X_0(z)}{R(z)},$$

где $R(z)$ обозначает рациональную функцию, имеющую нулями и полюсами те (и только те) нули и полюсы (притом той же кратности), которые имеет рациональная функция $G(z)$ в части S^+ плоскости на конечном расстоянии[1]).

Этот простой результат можно, конечно, получить и из общих формул, если вычислить входящий в них интеграл $\Gamma(z)$, который в нашем случае легко берется в конечном виде.

Так как всякую непрерывную функцию, заданную на L, можно с произвольной точностью аппроксимировать рациональной функцией, то сказанное выше может служить для приближенного решения задачи.

В более общем случае, когда L состоит из нескольких замкнутых контуров $L_1, L_2, \ldots, L_p$, а

$$G(t) = G_k(t) \text{ на } L_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

где $G_k(t)$ — рациональные функции, мы можем построить каноническое решение, соединив только что указанный прием с приемом, указанным в п. 4° настоящего параграфа.

---

[1]) Отметим, что рассуждения и формулы останутся неизменными и в более общем случае, когда L, S^+, S^- обозначают то же, что в § 29, п. 1°, в частности, то же, что в п. 3° настоящего параграфа.

§ 36. Союзные однородные задачи сопряжения. Однородные задачи сопряжения, соответствующие граничным условиям

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t), \quad \Psi^+(t) = [G(t)]^{-1}\,\Psi^-(t) \text{ на } L, \tag{36,1}$$

мы будем называть с о ю з н ы м и.

Из результатов предыдущего параграфа непосредственно вытекает, что если $\varkappa$ — индекс одной из этих задач, то индексом другой будет $(-\varkappa)$, и что если $X(z)$ — каноническое решение одной задачи, то $[X(z)]^{-1}$ будет каноническим решением другой.

В частности, на основании сказанного в п. 7° предыдущего параграфа заключаем, что если индекс $\varkappa$ данной однородной задачи отрицателен, то союзная с ней однородная задача имеет ровно $(-\varkappa)$ линейно независимых решений, исчезающих на бесконечности,

$$\frac{1}{X(z)}, \ \frac{z}{X(z)}, \ \ldots, \ \frac{z^{-\varkappa-1}}{X(z)}, \tag{36,2}$$

где $X(z)$ — каноническое решение данной однородной задачи.

§ 37. Неоднородная задача сопряжения. 1°. Н е о д н о р о д н о й з а д а ч е й л и н е й н о г о с о п р я ж е н и я граничных значений, или, короче, н е о д н о р о д н о й з а д а ч е й с о п р я ж е н и я мы будем называть следующую граничную задачу:

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с граничной линией L, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \text{ на } L, \tag{37,1}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на L функции класса H, причем $G(t) \neq 0$ всюду на L (прочие обозначения те же, что в § 34).

Функцию $G(t)$ мы будем, как и в случае однородной задачи, называть к о э ф ф и ц и е н т о м, а функцию $g(t)$ — с в о б о д н ы м ч л е н о м задачи сопряжения.

Эту задачу, являющуюся естественным обобщением однородной задачи сопряжения, впервые (в несколько иной постановке) рассматривал И. И. Привалов [3][1]; однако ему не удалось получить сколько-нибудь полного решения[2]. Решение было впервые дано Ф. Д. Гаховым [1], [2]; это решение (с некоторыми обобщениями) и воспроизводится здесь[3].

Надо отметить, что Т. Карлеман (T. Carleman [1]) раньше И. И. Привалова и Ф. Д. Гахова решил задачу, аналогичную рассматриваемой здесь, в одном частном случае[4]; способ решения Ф. Д. Гахова по существу аналогичен способу Т. Карлемана.

Решение поставленной задачи может быть сразу получено на основании результатов, изложенных в предыдущих параграфах.

Именно, пусть $X(z)$ — каноническое решение однородной задачи, получаемой из (37,1) при $g(t) = 0$. Тогда из равенства $X^+(t) = G(t)\,X^-(t)$

---

[1]) И. И. Привалов рассматривает случай, когда L — спрямляемый замкнутый контур, а $G(t)$ и $g(t)$ — интегрируемые по Лебегу функции, причем $0 < m < |G(t)| < M$, где m и M — постоянные. От $\Phi(z)$ требуется лишь, чтобы граничные значения достигались по любым некасательным путям.

[2]) И. И. Привалов пользуется тем же методом, каким Э. Пикар пытался решить однородную задачу; мы имеем в виду первый из методов, названных в сноске на стр. 123.

[3]) В указанных статьях Ф. Д. Гахов рассматривает случай, когда L состоит из одного замкнутого контура.

[4]) См. об этом в главе IV.

следует, что

$$G(t)=\frac{X^+(t)}{X^-(t)}.$$

Вносся это значение $G(t)$ в (37,1), получаем:

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)}-\frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)}=\frac{g(t)}{X^+(t)}.$$

Функция $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ имеет на бесконечности конечный порядок. Следовательно, применяя сказанное в § 31, получим:

$$\frac{\Phi(z)}{X(z)}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}+P(z),$$

где $P(z)$ — произвольный полином, откуда

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P(z). \qquad (37,2)$$

Это и есть общее решение неоднородной задачи сопряжения. Функцию $X(z)$, представляющую собой каноническое решение однородной задачи, получаемой при $g(t)=0$, мы будем называть канонической функцией, соответствующей рассматриваемой неоднородной задаче; индексом этой задачи мы будем называть индекс $\varkappa$ соответствующей однородной задачи.

2°. С точки зрения приложений особый интерес представляют решения неоднородной задачи, исчезающие на бесконечности.

Выясним возможность существования таких решений и найдем их. Принимая во внимание, что порядок $X(z)$ на бесконечности равен в точности $(-\varkappa)$, видим, что при $\varkappa\geqslant 0$ решение (37,2) исчезает на бесконечности тогда и только тогда, когда $P(z)$ — полином степени не выше $\varkappa-1$, причем при $\varkappa=0$ следует считать $P(z)=0$.

При $\varkappa<0$ мы должны, очевидно, взять $P(z)=0$ и, кроме того, потребовать, чтобы коэффициенты при z^{-1}, z^{-2} ..., $z^{\varkappa}$ в разложении

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}=-\frac{z^{-1}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)}-\frac{z^{-2}}{2\pi i}\int\limits_L \frac{tg(t)\,dt}{X^+(t)}-\dots$$

были равны нулю. Таким образом, мы приходим к следующему результату:

Если $\varkappa\geqslant 0$, общее решение неоднородной задачи сопряжения (37,1), *исчезающее на бесконечности, дается формулой*

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P_{\varkappa-1}(z), \qquad (37,3)$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa-1$ [$P_{\varkappa-1}(z)=0$ при $\varkappa=0$].

Если $\varkappa<0$, то при соблюдении следующих необходимых и достаточных условий существования решения, исчезающего на бесконечности:

$$\int\limits_L \frac{t^k g(t)\,dt}{X^+(t)}=0, \quad k=0,\ 1,\ \dots,\ -\varkappa-1, \qquad (37,4)$$

это решение дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}. \tag{37,5}$$

Отметим, что при $\varkappa = 0$ всегда имеется одно и только одно решение, которое исчезает на бесконечности; при $\varkappa < 0$ решение, которое исчезает на бесконечности, если оно существует, также единственно; при $\varkappa > 0$ всегда имеется бесчисленное множество решений (а именно, общее решение содержит $\varkappa$ произвольных постоянных).

3°. Иногда требуется найти решения, лишь ограниченные на бесконечности (и, следовательно, на всей плоскости). В этом случае мы, очевидно, имеем следующий результат: при $\varkappa \geqslant -1$ общее ограниченное решение задачи дается формулой (37,3), где вместо $P_{\varkappa-1}(z)$ следует написать $P_\varkappa(z)$, считая $P_\varkappa(z) = 0$ при $\varkappa = -1$. При $\varkappa < -1$ ограниченное решение существует лишь при соблюдении условий (37,4), где на этот раз следует считать $k = 0, 1, \ldots$ $\ldots, -\varkappa-2$. Решение при этих условиях дается формулой (37,5). При $\varkappa = -1$ задача всегда имеет одно и только одно ограниченное решение.

4°. Две задачи сопряжения мы будем называть союзными, если соответствующие им однородные задачи являются союзными в смысле определения, данного в § 36.

Если привлечь к рассмотрению однородную задачу, союзную с данной задачей (37,1), то условие (37,4) можно представить в виде

$$\int\limits_L \psi_k^+(t)\,g(t)\,dt = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa, \tag{37,6}$$

где функции $\psi_k^+(t)$ представляют собой граничные значения функций $\psi_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, -\varkappa$, составляющих полную систему линейно независимых решений однородной задачи, союзной с данной, исчезающих на бесконечности.

Это непосредственно следует из формул (37,4) и (36,2).

Замечание 1. При постановке задачи сопряжения как однородной, так и неоднородной мы выделяли особо бесконечно удаленную точку, допуская, что искомые решения могут иметь в этой точке особенность, а именно полюс. Такое допущение, как это ясно из предыдущего и как это подтвердится в дальнейшем, весьма удобно с точки зрения ряда выводов и приложений. Но само собой разумеется, что не существенно, выделим ли мы именно бесконечно удаленную точку или любую другую точку, не расположенную на L, допуская в ней полюсы искомых решений; вместо одной такой точки можно взять и несколько точек, допуская в них полюсы. Мы остановились именно на бесконечно удаленной точке вследствие того, что в большинстве приложений это более удобно практически.

Замечание 2. Обобщение результатов настоящего параграфа на случай, когда контуры L_k, составляющие L, могут иметь общие точки (в конечном числе), никаких затруднений не представляет; ср. замечание 3 в конце § 35.

Замечание 3. В работах Н. В. Говорова [1], [2] и П. Г. Юрова [1] задача сопряжения изучена для некоторых случаев обращения индекса функции $G(t)$ в бесконечность (чего, конечно, не может быть при принятых нами условиях).

§ 38. Задача сопряжения для случая, когда граничная линия — прямая. **1°.** Во всей этой книге, за немногими исключениями, мы не рассматриваем отдельно случая, когда граничная линия простирается в бесконечность, так как этот случай путем простого дробно-линейного преобразования может быть сведен к случаю конечной граничной линии. При этом, разумеется, первоначальная граничная линия должна быть такова, чтобы после преобразования она удовлетворяла тем условиям, которые мы принимаем при решении тех или иных задач.

2°. В качестве простейшего, но практически важного примера мы рассмотрим здесь случай, когда граничная линия — бесконечная прямая D; мы будем считать для упрощения обозначений, что D совпадает с действительной осью. Через S^+ и S^- мы будем соответственно обозначать верхнюю и нижнюю полуплоскости.

Задачу сопряжения для этого случая мы сформулируем так:

Найти функцию $\Phi(z)$, *кусочно-голоморфную* (при линии скачков D) *и ограниченную на всей плоскости, кроме, быть может, окрестности заданной точки* a_0, *не расположенной на* D [1]), *в которой она может иметь полюс, по граничному условию*

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{на } D, \tag{38,1}$$

где $G(t)$ *и* $g(t)$ — *заданные на* D *функции, удовлетворяющие условию* H *всюду на* D, *причем* $G(t) \neq 0$; *бесконечно удаленная точка включается в* D.

Индексом нашей задачи или индексом функции $G(t)$ мы будем называть целое число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\,[\ln G(t)]_D = \frac{1}{2\pi i}\,[\ln G(t)]_{-\infty}^{+\infty}, \tag{38,2}$$

где под $[\ln G(t)]_{-\infty}^{+\infty}$ следует понимать приращение $\ln G(t)$, когда точка t пробегает прямую D от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Напомним, что в силу условий [2]), наложенных на $G(t)$, имеем $G(+\infty) = G(-\infty) \neq 0$.

3°. Для того чтобы привести рассматриваемую задачу к случаю конечной граничной линии, применим, например, следующее дробно-линейное преобразование:

$$z + i = -\frac{1}{\zeta + i}, \qquad \text{т. е. } z = -\frac{i\zeta}{\zeta + i}, \tag{38,3}$$

указанное в § 19, п. 3°. Напомним, что при этом преобразовании прямая D плоскости z переходит в окружность L плоскости ζ, касательную к действительной оси в точке $\zeta = 0$ и имеющую центром точку $\zeta = -\frac{i}{2}$. Если точка t пробегает в положительном направлении прямую D плоскости z, то соответствующая ей точка τ плоскости ζ, определяемая равенством

$$\tau + i = -\frac{1}{t + i}, \tag{38,3a}$$

описывает окружность L в направлении, которое мы примем за положительное, оставляющем слева ограниченный ею круг. Этот круг мы обо-

---

[1]) Ср. замечание 1 в конце предыдущего параграфа. Мы не берем здесь в качестве такой точки точку $z = \infty$, так как в нашем случае эта последняя расположена на граничной линии.

[2]) В частности, условия H для окрестности бесконечно удаленной точки.

значим через Σ^+, а часть плоскости, внешнюю по отношению к Σ^+, — через Σ^-.

Подстановка (38,3) конформно преобразует область S^+ в область Σ^+, а область S^- — в область Σ^-; при этом точке $z=\infty$ соответствует точка $\zeta=-i$, а точке $\zeta=\infty$ — точка $z=-i$.

Для того чтобы не усложнять внешнего вида формул, мы будем обозначать функцию

$$\Phi(z)=\Phi\left(\frac{-i\zeta}{\zeta+i}\right)$$

просто через $\Phi(\zeta)$; аналогично поступаем для функций $G(t)$ и $g(t)$, а также для других функций, которые нам встретятся в дальнейшем.

При этих обозначениях граничное условие (38,1) запишется так:

$$\Phi^+(\tau)=G(\tau)\Phi^-(\tau)+g(\tau) \text{ на } L. \tag{38,4}$$

В качестве точки $z=a_0$, где допускается существование полюса функции $\Phi(z)$, проще всего взять точку $a_0=-i$, соответствующую точке $\zeta=\infty$; это, очевидно, не нарушит общности.

При таком выборе граничная задача для $\Phi(\zeta)$ в точности совпадает с частным случаем задачи сопряжения, рассмотренным в предыдущих параграфах, а именно с тем частным случаем, когда граничная линия — простой замкнутый контур (в нашем случае — окружность). Поэтому мы можем непосредственно воспользоваться приведенными там формулами.

Каноническая функция $X(\zeta)$, определенная с точностью до произвольного постоянного множителя (отличного от нуля), может быть вычислена по формулам (35,6A) и (35,5), (35,2A). А именно, если в качестве точки a в формуле (35,2A) взять центр окружности L, т. е. точку $a=-\frac{i}{2}$, будем иметь:

$$X(\zeta)=\begin{cases} e^{\Gamma(\zeta)} & \text{при } \zeta\in\Sigma^+, \\ \left(\zeta+\frac{i}{2}\right)^{-\varkappa}e^{\Gamma(\zeta)} & \text{при } \zeta\in\Sigma^-, \end{cases} \tag{38,5}$$

где

$$\Gamma(\zeta)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\ln G_0(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}, \quad G_0(\tau)=\left(\tau+\frac{i}{2}\right)^{-\varkappa}G(\tau). \tag{38,6}$$

Общее решение однородной задачи, т. е. задачи, получающейся при $g(\tau)=0$, имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой

$$\Phi(\zeta)=X(\zeta)P(\zeta), \tag{38,7}$$

где $P(\zeta)$ — произвольный полином. Для некоторого упрощения дальнейших формул целесообразно считать, что этот полином расположен по степеням $\zeta+\frac{i}{2}$, т. е. представлен в виде

$$P(\zeta)=A_0+A_1\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)+\ldots+A_n\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)^n. \tag{38,8}$$

Общее решение неоднородной задачи, имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой (§ 37)

$$\Phi(\zeta)=\frac{X(\zeta)}{2\pi i}\int\limits_L\frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)(\tau-\zeta)}+X(\zeta)P(\zeta). \tag{38,9}$$

Таким образом, задачу можно считать решенной, так как, найдя $\Phi(\zeta)$, мы можем найти $\Phi(z)$, вернувшись к старой переменной z согласно формуле (38,3).

4°. Выясним теперь вопрос о существовании всюду ограниченных решений, которые требуются в некоторых приложениях.

На основании формулы (38,9) и вида функции $X(\zeta)$ легко заключаем (ср. § 37, п. 3°):

При $\varkappa \geqslant -1$ всюду ограниченные решения всегда существуют; они даются формулой (38,9), где под $P(\zeta)$ следует подразумевать произвольный полином вида (38,8) при $n=\varkappa$, считая $P(\zeta)=0$ при $\varkappa=-1$. В последнем случае задача имеет одно и только одно ограниченное решение.

При $\varkappa < -1$ ограниченное решение существует лишь при соблюдении условий

$$\int\limits_L \left(\tau+\frac{i}{2}\right)^k \frac{g(\tau)\,d\tau}{X^+(\tau)}=0, \qquad k=0, 1, \ldots, -\varkappa-2; \tag{38,10}$$

при соблюдении этих условий задача имеет единственное ограниченное решение, которое дается формулой (38,9) при $P(\zeta)=0$.

Условия (38,10) получаются совершенно аналогично условиям, полученным в § 37; только на этот раз мы разложили интеграл формулы (38,9) по убывающим степеням $\zeta+\frac{i}{2}$, а не ζ. Разумеется, можно написать условия, эквивалентные условиям (38,10), в точно таком же виде, как указано в § 37, п. 3°, но с известной точки зрения это менее удобно в нашем случае.

5°. Выразим теперь полученное решение без посредства вспомогательной переменной ζ; это представляет определенный интерес, хотя с практической точки зрения иногда целесообразно пользоваться решением в том виде, как оно приведено выше.

Возвращение к переменной z весьма легко осуществить, если вспомнить формулы (19,16) и (19,17), которые мы теперь запишем так:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{z+i}{t+i}\,\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+A, \tag{38,11}$$

где

$$A=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\varphi(t)\,dt}{t+i}; \tag{38,11a}$$

здесь, аналогично предыдущему, мы пишем $\varphi(t)$ вместо $\varphi\left(\frac{-it}{t+i}\right)$.

Преобразуем теперь формулы (38,5) и (38,6) к переменной z. Имеем:

$$\zeta+\frac{i}{2}=-\frac{i}{2}\,\frac{z-i}{z+i}, \qquad \tau+\frac{i}{2}=-\frac{i}{2}\,\frac{t-i}{t+i}.$$

Легко видеть, что, не изменяя результатов, мы можем заменить в формулах (38,5), (38,6) выражения $\zeta+\frac{i}{2}$ и $\tau+\frac{i}{2}$ выражениями

$$2i\left(\zeta+\frac{i}{2}\right)=\frac{z-i}{z+i}, \qquad 2i\left(\tau+\frac{i}{2}\right)=\frac{t-i}{t+i},$$

ибо при такой замене функция $X(\zeta)$ лишь приобретет постоянный отличный от нуля множитель.

Поэтому, применяя формулу (38,11) и отбрасывая в выражении для $\Gamma(z)$ постоянное слагаемое, что также изменит $X(z)$ лишь на постоянный множитель, получим:

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^{+}, \\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^{-}, \end{cases} \tag{38,12}$$

где

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}, \qquad G_0(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}G(t). \tag{38,13}$$

Далее, формула (38,9) при помощи формулы (38,11) дает выражение для общего решения, могущего иметь полюс в точке $z=-i$,

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)(t-z)}-\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_{D}\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)(t+i)}+X(z)\,Q(z), \tag{38,14}$$

где $Q(z)$ — произвольный полином относительно $\frac{z-i}{z+i}$,

$$Q(z)=C_0+C_1\frac{z-i}{z+i}+\ldots+C_n\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{n}; \tag{38,15}$$

здесь $C_0, C_1, \ldots, C_n$ обозначают произвольные постоянные.

Разумеется, второй член правой части формулы (38,14) можно вычеркнуть вследствие произвольности постоянной C_0, но для формулировки результатов, касающихся существования всюду ограниченных решений, удобнее его оставить.

6°. Наконец, относительно решений, остающихся всюду ограниченными, результат, полученный в п. 4°, можно сформулировать так:

При $\varkappa\geqslant -1$ всюду ограниченные решения всегда существуют и даются формулой (38,14), где $Q(z)$ — выражение вида (38,15) при $n=\varkappa$ и произвольных $C_0, C_1, \ldots, C_{\varkappa}$, если условимся считать, что $Q(z)=0$ при $\varkappa=-1$. Заметим, что при $\varkappa\geqslant 0$ второе слагаемое правой части (38,14) можно, очевидно, вычеркнуть.

При $\varkappa<-1$ всюду ограниченные решения существуют лишь при наличии условий, вытекающих из (38,10),

$$\int\limits_{D}\left(\frac{t-i}{t+i}\right)^{k}\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)(t+i)^{2}}=0, \qquad k=0, 1, \ldots, -\varkappa-2; \tag{38,16}$$

при соблюдении этих условий решение (единственное) дается формулой (38,14) при $Q(z)=0$.

З а м е ч а н и е. Решение поставленной задачи можно получить и непосредственно, не прибегая к вспомогательной переменной ζ; это сделано Ф. Д. Гаховым [10], первое издание, § 14.7. Условия существования ограниченного решения имеют там несколько иной вид, но легко проверить, что они эквивалентны условиям (38,16).

II. Задача Римана — Гильберта

В этом отделе дается, в качестве непосредственного приложения предыдущих результатов, решение одной граничной задачи, представляющей значительный практический интерес. Излагаемые здесь результаты будут использованы в дальнейшем тексте лишь при решении некоторых отдельных конкретных задач, и ознакомление с ними не обязательно для понимания основного текста книги.

§ 39. О распространении на всю плоскость аналитических функций, заданных на круге или на полуплоскости. В рассмотренной нами задаче сопряжения искомая функция $\Phi(z)$ представляла собой кусочно-голоморфную на всей плоскости функцию, а в граничных условиях фигурировали значения этой функции, принимаемые ею с обеих сторон границы.

Во многих же важнейших задачах приходится иметь дело с искомыми функциями, голоморфными на ч а с т и плоскости, причем в граничных условиях фигурируют значения, принимаемые на границе как самими искомыми функциями, так и комплексно сопряженными с ними функциями.

Очень часто удается свести задачи этого последнего типа к задачам предыдущего типа путем д о п о л н е н и я искомой голоморфной функции до кусочно-голоморфной функции, определенной уже на всей плоскости (кроме границы).

Функцию, голоморфную в данной области и непрерывную вплоть до границы, можно дополнить до кусочно-голоморфной функции, определенной на всей плоскости, бесчисленным множеством способов (например, можно приписать ей значение 0 в той части плоскости, где она не определена с самого начала). Но особенно полезными оказываются способы дополнения или р а с п р о с т р а н е н и я на всю плоскость, которые будут сейчас указаны [1]). Эти способы относятся к случаю аналитических функций, заданных на круге, внешности круга или на полуплоскости.

1°. Ф у н к ц и и, з а д а н н ы е н а п о л у п л о с к о с т и. Пусть S^+ обозначает верхнюю (нижнюю) полуплоскость $y>0$ $(y<0)$, а D — ее границу (т. е. ось Ox); через S^- мы будем обозначать нижнюю (верхнюю) полуплоскость.

Пусть $\Phi(z)$ — заданная функция точки z полуплоскости S^+. Свяжем с $\Phi(z)$ функцию $\Phi_*(z)$, определенную в S^- следующим соотношением:

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi(\bar{z})};\tag{39,1}$$

таким образом, по определению, функции $\Phi(z)$ и $\Phi_*(z)$ принимают комплексно сопряженные значения в точках, сопряженных относительно оси Ox (т. е. точках $z=x+iy$, $\bar{z}=x-iy$, каждая из которых является зеркальным отражением другой относительно Ox). Формулу (39,1) мы будем писать еще так:

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}(z),\tag{39,2}$$

условившись понимать под $\overline{\Phi}(z)$ функцию, определяемую формулой

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})};\tag{39,3}$$

иными словами, если $\Phi(z)=u(x, y)+iv(x, y)$, то, по определению,

$$\overline{\Phi}(z)=u(x, -y)-iv(x, -y).\tag{39,3a}$$

Легко видеть, что если функция $\Phi(z)$ голоморфна или мероморфна в полуплоскости S^+, то $\Phi_*(z)=\overline{\Phi}(z)$ голоморфна или мероморфна

[1]) Некоторые другие способы дополнения, приспособленные к определенным конкретным задачам, указаны в книге автора [9]; в этой книге, а также в книге автора [1] можно найти ряд приложений приема распространения функции на всю плоскость.

в полуплоскости[1]) S^-, и что соотношение (39,1) симметрично относительно Φ_* и Φ, т. е.

$$\Phi(z)=\overline{\Phi_*(\bar{z})},\quad [\Phi_*(z)]_*=\Phi(z). \tag{39,4}$$

Полезно заметить, что если $\Phi(z)$ — рациональная функция

$$\Phi(z)=\frac{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n},$$

то $\Phi_*(z)=\overline{\Phi}(z)$ получается из $\Phi(z)$ простой заменой коэффициентов комплексно сопряженными величинами.

Предположим теперь, что $\Phi(z)$ принимает определенное граничное значение $\Phi^+(t)$ при $z\to t$ из S^+, где t — точка оси Ox, т. е. действительное число. Тогда существует и $\Phi_*^-(t)$, причем

$$\Phi_*^-(t)=\overline{\Phi}^-(t)=\overline{\Phi^+(t)}, \tag{39,5}$$

ибо при $z\to t$ из S^-, $\bar{z}$ стремится к t из S^+, и поэтому $\Phi_*(z)=\overline{\Phi(\bar{z})}$ стремится к $\overline{\Phi^+(t)}$.

Будем теперь для простоты считать, что функция $\Phi(z)$ голоморфна в S^+ и непрерывно продолжима на D, за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки.

Обозначим через $\Omega(z)$ кусочно-голоморфную функцию, определенную так:

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z) & \text{при } z\in S^+,\\ \Phi_*(z) & \text{при } z\in S^-.\end{cases} \tag{39,6}$$

Тогда на основании (39,5) очевидно, что

$$\Omega^-(t)=\overline{\Omega^+(t)},\quad \Omega^+(t)=\overline{\Omega^-(t)}. \tag{39,7}$$

Эти соотношения и позволяют преобразовать граничные условия (какой-либо задачи), в которых фигурируют $\Phi^+(t)$ и $\overline{\Phi^+(t)}$ [или $\Phi^-(t)$ и $\overline{\Phi^-(t)}$], в граничные условия, в которых фигурируют $\Omega^+(t)$ и $\Omega^-(t)$.

Отметим еще одно важное свойство указанного способа продолжения $\Phi(z)$. *Если мнимая часть $\Phi^+(t)$ равна нулю на каком-либо участке оси Ox, то функция $\Phi_*(z)$ представляет собой аналитическое продолжение функции $\Phi(z)$ через этот участок.* Это свойство есть не что иное, как известный «принцип отражения» Шварца. Оно непосредственно вытекает из предложения, доказанного в § 10, ибо в нашем случае на упомянутом участке $\Phi_*^-(t)=\Phi^+(t)$ в силу формулы (39,5).

Введенные обозначения можно применять и не только к функциям, определенным в полуплоскости. Пусть $\Psi(z)$ обозначает кусочно-голоморфную функцию с линией скачков D (ось Ox). Тогда через $\Psi_*(z)$ мы будем обозначать другую кусочно-голоморфную функцию, определенную

---

[1]) Вообще, если функция $\Phi(z)$ голоморфна в некоторой области σ^+, то функция $\overline{\Phi}(z)$ голоморфна в области σ^-, симметричной с σ^+ по отношению к оси Ox. Это вытекает из того, что если функции $u(x,y)$ и $v(x,y)$ удовлетворяют соотношениям Коши — Римана

$$\frac{\partial u}{\partial x}=\frac{\partial v}{\partial y},\quad \frac{\partial u}{\partial y}=-\frac{\partial v}{\partial x},$$

то эти соотношения останутся в силе при замене $u(x,y)$, $v(x,y)$ соответственно на $u(x,-y)$, $-v(x,-y)$.

(для всех z, не расположенных на D) так:

$$\Psi_*(z)=\overline{\Psi(\bar{z})}=\overline{\Psi}(z);$$

очевидно, будем иметь также

$$\Psi(z)=\overline{\Psi_*(\bar{z})}=\overline{\Psi}_*(z).$$

В частности, определенная формулами (39,6) кусочно-голоморфная функция $\Omega(z)$ обладает, очевидно, свойством

$$\Omega_*(z)=\Omega(z); \tag{39,8}$$

для произвольной кусочно-голоморфной функции $\Psi(z)$ это, вообще говоря, не имеет места.

Легко видеть, что аналогично (39,5)

$$\Psi_*^-(t)=\overline{\Psi^+(t)}\ ,\Psi_*^+(t)=\overline{\Psi^-(t)}. \tag{39,5a}$$

Укажем, наконец, следующую важную формулу. Пусть кусочно-голоморфная функция представлена интегралом типа Коши

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}\quad (D\text{—действительная ось}), \tag{39,9}$$

где интеграл, взятый между бесконечными пределами, понимается в смысле главного значения по Коши (§ 19).

Найдем выражение для $\Psi_*(z)$. По определению имеем: $\Psi_*(z)=\overline{\Psi(\bar{z})}$. Но

$$\Psi(\bar{z})=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D\frac{\varphi(t)\,dt}{t-\bar{z}}$$

и, следовательно,

$$\Psi_*(z)=\overline{\Psi}(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D\frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z}\,. \tag{39,10}$$

2°. **Функции, заданные на круге или на плоскости с круговым отверстием.** Пусть теперь S^+ обозначает область $|z|<1$ (или область $|z|>1$), а S^- — область $|z|>1$ (или соответственно $|z|<1$) и пусть L — общая граница этих областей, т. е. окружность $|z|=1$.

Пусть $\Phi(z)$ — функция, заданная в S^+. Этой функции мы сопоставим функцию $\Phi_*(z)$, определенную в S^- совершенно аналогично тому, как зто было сделано в случае полуплоскости, с той лишь разницей, что под сопряженными точками мы теперь будем понимать точки, сопряженные относительно окружности L, т. е. точки z и $\frac{1}{\bar{z}}$. В соответствии с этим определим функцию $\Phi_*(z)$ так:

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar{z}}\right)}, \tag{39,11}$$

или, если воспользоваться введенным выше обозначением

$$\overline{\Phi}(z)=\overline{\Phi(\bar{z})},$$

еще так:

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)\,. \tag{39,12}$$

Соотношение (39,11) симметрично, т. е. из него следует:

$$\Phi(z)=\overline{\Phi_*\left(\frac{1}{\bar z}\right)},\ [\Phi_*(z)]_*=\Phi(z). \tag{39,13}$$

Если функция $\Phi(z)$ голоморфна или мероморфна в S^+, то функция $\Phi_*(z)$ голоморфна или мероморфна в S^-. В частности, если

$$\Phi(z)=\frac{a_0z^m+a_1z^{m-1}+\ldots+a_m}{b_0z^n+b_1z^{n-1}+\ldots+b_n},$$

то

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)=\frac{\bar a_0z^{-m}+\bar a_1z^{-m+1}+\ldots+\bar a_m}{\bar b_0z^{-n}+\bar b_1z^{-n+1}+\ldots+\bar b_n}.$$

Далее, если

$$\Phi(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}a_kz^k \text{ в } S^+,$$

то

$$\Phi_*(z)=\sum_{-\infty}^{+\infty}\bar a_kz^{-k} \text{ в } S^-.$$

Легко видеть, что если $\Phi(z)$ имеет полюс (нуль) порядка k при $z=0$ $(z=\infty)$, то $\Phi_*(z)$ имеет также полюс (нуль) того же порядка при $z=\infty$ $(z=0)$.

Предположим теперь, что $\Phi(z)$ принимает определенное граничное значение $\Phi^+(t)$ при $z\to t$ на L из S^+. Тогда существует $\Phi_*^-(t)$, причем

$$\Phi_*^-(t)=\overline{\Phi}^-\left(\frac{1}{t}\right)=\overline{\Phi^+(t)}, \tag{39,14}$$

ибо если $z\to t$ из S^-, то $\frac{1}{\bar z}$ также стремится к t, но уже из S^+, и поэтому

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)=\overline{\Phi\left(\frac{1}{\bar z}\right)}$$

стремится к $\overline{\Phi^+(t)}$.

Будем теперь считать для простоты, что функция $\Phi(z)$ голоморфна в S^+ (за исключением, быть может, бесконечно удаленной точки) и непрерывно продолжима на L.

Обозначим, аналогично предыдущему, через $\Omega(z)$ кусочно-голоморфную функцию

$$\Omega(z)=\begin{cases}\Phi(z) \text{ при } z\in S^+,\\ \Phi_*(z) \text{ при } z\in S^-.\end{cases} \tag{39,15}$$

Тогда, очевидно, так же как и в п. 1°,

$$\Omega^-(t)=\overline{\Omega^+(t)},\ \Omega^+(t)=\overline{\Omega^-(t)}. \tag{39,16}$$

Далее, как и в случае полуплоскости, *если мнимая часть* $\Phi^+(t)$ *равна нулю на некотором участке окружности* L, *то* $\Phi_*(z)$ *представляет собой аналитическое продолжение* $\Phi(z)$ *через этот участок* (принцип отражения Шварца).

Так же как в п. 1°, обозначение $\Psi_*(z)$ можно распространить на любую кусочно-голоморфную функцию $\Psi(z)$, положив

$$\Psi_*(z)=\overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar z}\right)}=\overline{\Psi}\left(\frac{1}{z}\right);$$

тогда, очевидно, и

$$\Psi(z)=\overline{\Psi_*\left(\frac{1}{\bar z}\right)}=\overline{\Psi}_*\left(\frac{1}{z}\right).$$

Введенная выше кусочно-голоморфная функция $\Omega(z)$ обладает свойством

$$\Omega_*(z)=\Omega(z). \qquad (39,8a)$$

Легко видеть, что аналогично (39,14)

$$\Psi_*^-(t)=\overline{\Psi^+(t)},\quad \Psi_*^+(t)=\overline{\Psi^-(t)}. \qquad (39,14a)$$

Предположим, наконец, что $\Psi(z)$ представляется интегралом типа Коши

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad (L\text{ — окружность } |z|=1). \qquad (39,17)$$

Тогда

$$\Psi\left(\frac{1}{\bar z}\right)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-\frac{1}{\bar z}},$$

$$\Psi_*(z)=\overline{\Psi\left(\frac{1}{\bar z}\right)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,\overline{dt}}{\bar t-\frac{1}{z}}.$$

Замечая, что на окружности L имеем

$$t=e^{i\vartheta},\quad \bar t=e^{-i\vartheta}=\frac{1}{t},\quad \overline{dt}=-ie^{-i\vartheta}d\vartheta=-\frac{dt}{t^2},$$

получаем после простых преобразований

$$\Psi_*(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\varphi(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \overline{\varphi(t)}\,\frac{dt}{t}. \qquad (39,18)$$

§ 40. Задача Римана — Гильберта. 1°. В качестве приложения полученных выше результатов рассмотрим одну важную граничную задачу теории аналитических функций, которая представляет собой частный случай весьма общей задачи, поставленной Риманом [1]). Интересующая нас задача была впервые рассмотрена Гильбертом [2]), поэтому мы и даем ей название з а д а ч и Р и м а н а — Г и л ь б е р т а.

Задача эта заключается в следующем. Пусть S^+ — конечная или бесконечная область, ограниченная одним простым гладким замкнутым контуром L. Требуется:

Найти функцию $\Phi(z)=u+iv$, голоморфную в S^+, непрерывно продолжимую на L, по граничному условию

$$\operatorname{Re}(a+ib)\Phi^+\equiv au^+-bv^+=c \text{ на } L, \qquad (40,1)$$

где a, b, c — заданные на L действительные непрерывные функции.

[1]) Речь идет о задаче нахождения аналитической в некоторой области функции по заданному соотношению между граничными значениями ее действительной и мнимой частей. Задача поставлена Б. Риманом в его знаменитой диссертации [1] (1851 г.).

[2]) D. Hilbert [1], [2].

Первоначально[1]) Гильберт привел эту задачу к сингулярному интегральному уравнению указанного ниже (§ 44) типа, с целью дать пример приложения такого уравнения. Затем обнаружилось[2]), что рассматриваемая задача может быть весьма просто сведена к последовательному решению двух задач Дирихле[3]). Полное исследование задачи, проведенное таким способом, можно найти в статье И. Н. Векуа [8]. Здесь же мы дадим решение, непосредственно вытекающее из полученного выше решения задачи сопряжения, пользуясь способом дополнения искомой голоморфной в S^+ функции до кусочно-голоморфной функции, указанным в предыдущем параграфе[4]). Упомянутый способ применим к случаю, когда S^+ — полуплоскость или круговая область. Но к любому из этих случаев может быть сведен и общий случай (односвязной области) путем конформного отображения. Поэтому мы начнем с решения задачи для круга.

2°. Прежде чем к этому перейти, сделаем одно важное замечание. Пусть

$$\Phi_1(z)=u_1+iv_1,\quad \Phi_2(z)=u_2+iv_2,\ \ldots,\ \Phi_k(z)=u_k+iv_k$$

—какие-либо частные решения однородной задачи

$$au^+-bv^+=0 \text{ на } L. \tag{40,2}$$

Очевидно тогда, что и всякая линейная комбинация

$$\Phi(z)=C_1\Phi_1(z)+C_2\Phi_2(z)+\ldots+C_k\Phi_k(z) \tag{40,3}$$

с действительными постоянными коэффициентами $C_1, C_2, \ldots$ $\ldots, C_k$ будет также ее решением.

Поэтому в следующих параграфах (до § 43 включительно) под линейной комбинацией мы будем подразумевать линейную комбинацию с действительными (постоянными) коэффициентами. В соответствии с этим мы будем говорить, что функции $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_k(z)$ линейно независимы, если никакая их линейная комбинация с действительными коэффициентами не равна тождественно нулю, кроме случая, когда все коэффициенты равны нулю.

§ 41. Решение задачи Римана — Гильберта для круга. Пусть S^+ — круг $|z|<1$, а L — его окружность $|z|=1$. Граничное условие (40,1) задачи Римана — Гильберта можно, очевидно, записать так:

$$2\operatorname{Re}(a+ib)\Phi^+(t)=(a+ib)\Phi^+(t)+(a-ib)\overline{\Phi^+(t)}=2c \text{ на } L, \tag{41,1}$$

где $a=a(t)$, $b=b(t)$, $c=c(t)$ — заданные непрерывные действительные функции точки t на L. Мы будем считать, кроме того, что эти функции удовлетворяют условию H и что

$$a^2+b^2\neq 0 \text{ всюду на } L.$$

Дополним искомую в S^+ функцию $\Phi(z)$ функцией $\Phi_*(z)$, положив, как в § 39,

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) \text{ в } S^-,$$

[1]) D. Hilbert [1].

[2]) D. Hilbert [2].

[3]) Впоследствии Ф. Нетер (F. Noether [1]) использовал это решение как раз с обратной целью: исследовать интегральное уравнение упомянутого выше типа.

[4]) Идея такого способа содержится в монографии автора [1] (1922 г.). Приводимое ниже решение было впервые опубликовано в первом издании настоящей книги.

и обозначим кусочно-голоморфную функцию, равную $\Phi(z)$ в S^+ и $\Phi_*(z)$ в S^-, снова через $\Phi(z)$[1]). Определенная таким образом функция $\Phi(z)$ обладает свойством (см. (39,8а))

$$\Phi_*(z)=\overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right)=\Phi(z) \text{ при } |z|\neq 1. \tag{41,2}$$

Кроме того, она, очевидно, ограничена на бесконечности.

При этих обозначениях граничное условие (41,1) может быть на основании формулы (39,16) записано так:

$$(a+ib)\Phi^+(t)+(a-ib)\Phi^-(t)=2c, \tag{41,3}$$

или еще

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{41,4}$$

где

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib}, \quad g(t)=\frac{2c}{a+ib}. \tag{41,5}$$

Мы пришли, таким образом, к задаче сопряжения, рассмотренной в предыдущих параграфах (§§ 34—37). Мы должны теперь искать решения этой задачи, ограниченные на бесконечности. Пусть $\Phi(z)$ — какое-либо решение задачи сопряжения (41,3), удовлетворяющее последнему условию. Эта функция может не оказаться решением исходной задачи (41,1), ибо она может не удовлетворять дополнительному условию (41,2). Однако при помощи $\Phi(z)$ всегда можно построить и решение исходной задачи. В самом деле, переходя в (41,3) к сопряженным значениям, убеждаемся при помощи (39,14а), что если $\Phi(z)$ удовлетворяет условию (41,3), то $\Phi_*(z)$ удовлетворяет условию

$$(a-ib)\Phi_*^-(t)+(a+ib)\Phi_*^+(t)=2c,$$

т. е. также будет решением той же задачи сопряжения (41,3), а следовательно, функция

$$\Omega(z)=\frac{1}{2}[\Phi(z)+\Phi_*(z)], \tag{41,6}$$

удовлетворяющая, очевидно, условию (41,2), будет решением и исходной задачи (41,1). Ясно, что, обратно, всякое решение исходной задачи может быть получено таким образом[2]). Так как мы умеем найти общее решение задачи сопряжения, то тем самым можем найти всю совокупность решений задачи Римана — Гильберта.

Для того чтобы ближе исследовать эту совокупность решений, рассмотрим подробнее однородную задачу Римана — Гильберта, получающуюся из (41,1) при $c=0$.

Обозначим через $\varkappa$ индекс функции $G(t)$, т. е.

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L=\frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L. \tag{41,7}$$

Эту формулу, очевидно, можно переписать и так:

$$\varkappa=\frac{1}{\pi i}[\ln(a-ib)]_L=\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_L. \tag{41,8}$$

---

[1]) В § 39 эта функция была обозначена через $\Omega(z)$.

[2]) Действительно, всякое решение $\Phi(z)$ исходной задачи, будучи дополнено до кусочно-голоморфной функции указанным выше образом, является решением задачи сопряжения (41,3), причем

$$\Phi(z)=\Phi_*(z)=\frac{1}{2}[\Phi(z)+\Phi_*(z)].$$

Мы видим, таким образом, что $\varkappa$ — четное число [1]), положительное, отрицательное или нуль. Число $\varkappa$ мы будем называть **индексом** соответствующей **задачи Римана — Гильберта**.

Пусть $X(z)$ — каноническая функция, соответствующая задаче сопряжения (41,4). Эта функция дается формулой [2])

$$X(z) = Ce^{\Gamma(z)} \text{ при } |z| < 1, \quad X(z) = Cz^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} \text{ при } |z| > 1, \tag{41,9}$$

где C — произвольная постоянная, не равная нулю, и

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln[t^{-\varkappa}G(t)]\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\Theta(t)\,dt}{t-z}, \tag{41,10}$$

где

$$\Theta(t) = \arg\left[-t^{-\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right] \tag{41,11}$$

— действительная функция, непрерывная на L. На основании (39,18) имеем:

$$\Gamma_*(z) = \frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{\Theta(t)\,dt}{t-z} - i\alpha = \Gamma(z) - i\alpha, \tag{41,12}$$

где

$$\alpha = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Theta(t)\,dt}{t} = \frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}\Theta(t)\,d\vartheta \qquad (t = e^{i\vartheta}) \tag{41,13}$$

— действительная постоянная. Из этих формул заключаем, что

$$X_*(z) = \bar{C}e^{\Gamma_*(z)} = \bar{C}e^{-i\alpha}e^{\Gamma(z)} \text{ при } |z| > 1,$$

$$X_*(z) = \bar{C}e^{-i\alpha}z^{\varkappa}e^{\Gamma(z)} \qquad \text{при } |z| < 1,$$

т. е. что для всех z, не расположенных на L,

$$X_*(z) = \frac{\bar{C}}{C}e^{-i\alpha}z^{\varkappa}X(z).$$

Полагая

$$C = e^{-\frac{i\alpha}{2}}, \tag{41,14}$$

мы получим каноническую функцию $X(z)$, обладающую свойством

$$X_*(z) = z^{\varkappa}X(z). \tag{41,15}$$

Разберем теперь возможные случаи: $\varkappa \geqslant 0$ и $\varkappa \leqslant -2$. При $\varkappa \geqslant 0$ однородная задача сопряжения, получающаяся из (41,3) при $c(t) = 0$, имеет отличные от нуля решения, ограниченные на бесконечности; все они даются формулой

$$\Phi(z) = P(z)\,X(z), \tag{41,16}$$

---

[1]) В случае разрывных коэффициентов, который будет рассмотрен в главе IV (§ 93), формула (41,8) не всегда справедлива и индекс $\varkappa$ может принимать также нечетные значения.

[2]) Каноническая функция $X(z)$ есть каноническое решение однородной задачи сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t).$$

Это решение дается формулами § 35, п. 2°: (35,2A), (35,5), (35,6A); точку, обозначенную там через a, мы берем теперь в начале координат.

где

$$P(z)=C_0z^{\varkappa}+C_1z^{\varkappa-1}+\ldots+C_{\varkappa} \tag{41,17}$$

— произвольный полином степени не выше $\varkappa$. Для того чтобы (41,16) было также решением исходной однородной задачи Римана — Гильберта, необходимо и достаточно, чтобы $\Phi_*(z)=\Phi(z)$, т. е. чтобы $X_*(z)P_*(z)=X(z)P(z)$ или, принимая во внимание, что $P_*(z)=$ $=\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)$ и $X_*(z)=z^{\varkappa}X(z)$, чтобы

$$z^{\varkappa}\overline{P}\left(\frac{1}{z}\right)=\overline{C}_0+\overline{C}_1z+\ldots+\overline{C}_{\varkappa}z^{\varkappa}=C_0z^{\varkappa}+C_1z^{\varkappa-1}+\ldots+C_{\varkappa}=P(z), \tag{41,18}$$

то есть

$$C_k=\overline{C}_{\varkappa-k},\ k=0,1,\ldots,\varkappa. \tag{41,18a}$$

Таким образом, если положим

$$C_k=A_k+iB_k,\ k=0,\ 1,\ldots,\frac{\varkappa}{2},$$

где A_k, B_k—действительные числа (причем $B_{\frac{\varkappa}{2}}=0$), то

$$C_k=A_{\varkappa-k}-iB_{\varkappa-k},\ k=\frac{\varkappa}{2}+1,\ldots,\varkappa.$$

Всего мы будем иметь $\varkappa+1$ произвольных действительных постоянных. Обозначая эти постоянные в каком-либо порядке через D_0, $D_1,\ldots$ $\ldots, D_{\varkappa}$, заключаем, что при $\varkappa\geqslant 0$ общее решение однородной задачи Римана — Гильберта имеет вид

$$\Phi(z)=D_0\Phi_0(z)+D_1\Phi_1(z)+\ldots+D_{\varkappa}\Phi_{\varkappa}(z), \tag{41,19}$$

где D_0, $D_1,\ldots,D_{\varkappa}$ — действительные произвольные постоянные, а $\Phi_0(z)$, $\Phi_1(z),\ldots,\Phi_{\varkappa}(z)$ — линейно независимые частные решения той же задачи (причем линейная независимость понимается в смысле, указанном в предыдущем параграфе (п. 2°)).

При $\varkappa\leqslant-2$ однородная задача сопряжения, соответствующая (41,3), не имеет отличных от нуля решений, ограниченных на бесконечности; поэтому не имеет ненулевых решений и рассматриваемая однородная задача Римана — Гильберта.

Итак, мы имеем следующие результаты, касающиеся однородной задачи Римана — Гильберта:

При $\varkappa\geqslant 0$ однородная задача Римана — Гильберта имеет ровно $\varkappa+1$ линейно независимых решений; совокупность всех решений дается формулой

$$\Phi(z)=X(z)(C_0z^{\varkappa}+C_1z^{\varkappa-1}+\ldots+C_{\varkappa}),$$

где C_0, $C_1,\ldots,C_{\varkappa}$ — постоянные, подчиненные условию (41,18a), *а в остальном произвольные. Через $X(z)$ обозначена каноническая функция задачи сопряжения* (41,3), *подчиненная условию* (41,15). Функция $X(z)$, определенная, очевидно, с точностью до произвольного постоянного действительного множителя, может быть вычислена по формулам (41,9)—(41,11), (41,13), (41,14).

При $\varkappa\leqslant-2$ однородная задача Римана — Гильберта не имеет решений, отличных от нуля.

Вернемся к неоднородной задаче (41,1). Для того чтобы построить общее ее решение, достаточно найти хотя бы одно частное решение, так как общее решение неоднородной задачи найдется прибавлением к последнему общего решения однородной задачи. Для того же, чтобы найти частное решение неоднородной задачи Римана — Гильберта, достаточно найти какое-либо частное решение задачи сопряжения (41,3), ограниченное на бесконечности, ибо из этого решения по формуле (41,6) получается частное решение задачи Римана — Гильберта. С другой стороны, мы знаем, что если исходная задача Римана — Гильберта имеет решение, то и соответствующая задача сопряжения имеет решение, ограниченное на бесконечности. Поэтому для выяснения вопроса разрешимости неоднородной задачи мы можем непосредственно применить сказанное в § 37.

Таким образом, мы приходим к результату:

При $\varkappa \geqslant 0$ неоднородная задача Римана — Гильберта всегда имеет решения; общее решение содержит линейным образом $\varkappa + 1$ действительных произвольных постоянных.

При $\varkappa \leqslant -2$ задача эта имеет решение тогда и только тогда, когда соблюдены приводимые ниже условия (41,21) или, что все равно, (41,23); при соблюдении этих условий задача имеет единственное решение.

Только что упомянутые условия даются формулами (37,4), в которых следует считать $k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 2$ (§ 37, п. 3°). Таким образом, эти условия имеют вид

$$\int_L \frac{t^k g(t)\,dt}{X^+(t)} = 0$$

или

$$\int_L \frac{t^k c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]\,X^+(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 2. \tag{41,20}$$

Преобразуем эти условия. На основании (41,10)

$$\Gamma^+(t_0) = \frac{i}{2}\Theta(t_0) + \frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\Theta(t)\,dt}{t - t_0}$$

или, полагая $t = e^{i\vartheta}$, $t_0 = e^{i\vartheta_0}$ и произведя простые преобразования,

$$\Gamma^+(t_0) = \frac{i}{2}\Theta(t_0) + \frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}\,d\vartheta + \frac{i}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\,d\vartheta,$$

откуда, замечая, что последнее слагаемое, согласно (41,13), равно $\frac{i\alpha}{2}$, что $X(z) = e^{-\frac{i\alpha}{2}}e^{\Gamma(z)}$ при $|z| < 1$ и что

$$e^{i\Theta(t_0)} = -t_0^{-\varkappa}\frac{a(t_0) - ib(t_0)}{a(t_0) + ib(t_0)},$$

получаем

$$X^+(t_0) = \pm t_0^{-\frac{\varkappa}{2}}\sqrt{-\frac{a(t_0) - ib(t_0)}{a(t_0) + ib(t_0)}}\exp\left\{\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(t)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta - \vartheta_0}{2}\,d\vartheta\right\}.$$

Подставляя в (41,20), получаем:

$$\int_0^{2\pi} e^{i\left(\frac{\varkappa}{2}+k\right)\vartheta}\,\Omega(\vartheta)\,c(\vartheta)\,d\vartheta = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{41,21}$$

где положено

$$\Omega(\vartheta)=\frac{1}{\sqrt{a^2(\vartheta)+b^2(\vartheta)}}\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(\vartheta_1)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta_1-\vartheta}{2}\,d\vartheta_1\right\}, \qquad (41{,}22)$$

а $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $\Theta(t)$ обозначены через $a(\vartheta)$, $b(\vartheta)$, $c(\vartheta)$, $\Theta(\vartheta)$.

Эти условия эквивалентны следующим $(-\varkappa-1)$ условиям, записанным в действительной форме:

$$\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)\,c(\vartheta)\cos k\vartheta\,d\vartheta=0, \qquad k=0,1,\ldots,-\frac{\varkappa}{2}-1,\\ &\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)\,c(\vartheta)\sin k\vartheta\,d\vartheta=0, \qquad k=1,\ldots,-\frac{\varkappa}{2}-1.\end{aligned} \qquad (41{,}23)$$

Нам остается выписать формулы, дающие решение исходной неоднородной задачи Римана — Гильберта (41,1), когда она разрешима.

Если $\varkappa\leqslant-2$ и если соблюдены условия (41,20), то задача сопряжения (41,3) имеет единственное решение $\Phi(z)$, которое мы получим по формуле (37,5), принимая во внимание (41,5),

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}. \qquad (41{,}24)$$

Вследствие единственности решения функция $\Phi(z)$ будет также решением исходной задачи (41,1) [1]; таким образом:

При $\varkappa\leqslant-2$ и при соблюдении необходимых и достаточных условий (41,21) *или эквивалентных им условий* (41,23) *существования решения, решение* (*единственное*) *задачи Римана — Гильберта* (41,1) *дается формулой* (41,24).

При $\varkappa\geqslant0$ формула

$$\Psi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)} \qquad (*)$$

дает одно из частных решений задачи (41,3); одно из частных решений $\Phi(z)$ исходной задачи (41,1) мы получим, полагая согласно формуле (41,6)

$$\Phi(z)=\frac{1}{2}[\Psi(z)+\Psi_*(z)]. \qquad (**)$$

Вычислим $\Psi_*(z)$. Применяя формулу (39,18) и замечая, что

$$X_*(z)=z^\varkappa X(z),\quad \overline{X^+(t)}=X_*^-(t)=t^\varkappa X^-(t)$$

и что в силу самого определения $X(z)$ имеем

$$(a-ib)X^-(t)=-(a+ib)X^+(t),$$

легко получаем:

$$\begin{aligned}\Psi_*(z)&=X_*(z)\left\{-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a-ib)\,\overline{X^+(t)}\,(t-z)}+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a-ib)\,\overline{X^+(t)}\,t}\right\}=\\ &=z^\varkappa X(z)\left\{\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}-\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)\,t}\right\}.\end{aligned}$$

[1]) То есть будем иметь: $\Phi_*(z)=\Phi(z)$, если соблюдены условия (41,20). Это легко также проверить непосредственно [см. приводимое ниже выражение для $\Psi_*(z)$].

Внося это выражение[1]) в (**), получаем формулу, дающую частное решение задачи Римана — Гильберта (41,1) при $\varkappa \geqslant 0$,

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\left\{\int_L \frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)} + z^{\varkappa}\int_L \frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}\right\} - \\ - \frac{z^{\varkappa}X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{t^{-\varkappa}c}{(a+ib)X^+(t)}\frac{dt}{t}. \quad (41,25)$$

В случае $\varkappa = 0$ формула эта несколько упрощается:

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int_L \frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)} - \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{c}{(a+ib)X^+(t)}\frac{dt}{t}. \quad (41,26)$$

Пример: задача Дирихле для круга. В качестве простейшего примера рассмотрим задачу Дирихле для круга S^+ ($|z| < 1$), т. е. задачу нахождения гармонической в S^+ и непрерывной в $S^+ + L$ функции u по граничному условию

$$u = f(t) \text{ на } L, \quad (41,27)$$

где $f(t)$ — заданная на L действительная непрерывная функция[2]).

Эта задача есть частный случай задачи Римана — Гильберта, который мы получим, полагая в (40,1) $a = 1$, $b = 0$, $c = f(t)$.

Соответствующая однородная задача сопряжения[3]) в нашем случае имеет вид

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0; \quad (41,28)$$

каноническое решение этой последней задачи очевидно: $X(z) = A$ при $|z| < 1$, $X(z) = -A$ при $|z| > 1$, где A — произвольная постоянная. Индекс $\varkappa = 0$. Для того чтобы было соблюдено условие (41,15), т. е. в нашем случае $X_*(z) = X(z)$, достаточно, очевидно, взять $A = i$, так что $X(z) = i$ при $|z| < 1$, $X(z) = -i$ при $|z| > 1$. В соответствии с этим общее решение однородной задачи Римана — Гильберта будет Ci, где C — произвольная действительная постоянная. Общее решение неоднородной задачи получим по формуле (41,26), прибавив к правой части общее решение Ci однородной задачи. Таким образом,

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\frac{dt}{t} + iC = \frac{1}{2\pi i}\int_L f(t)\frac{t+z}{t-z}\frac{dt}{t} + iC. \quad (41,29)$$

Мы получили известную **формулу Шварца**.

§ 42. Задача Римана — Гильберта для полуплоскости. Эта задача непосредственно сводится к предыдущей, например, путем преобразования $z + i = -(\zeta + i)^{-1}$, как в § 38 для задачи сопряжения.

Вследствие большого значения рассматриваемой задачи мы приведем ее решение, выраженное непосредственно через переменную z, аналогично тому, что мы сделали в § 38.

---

[1]) Легко непосредственно проверить, что множитель при $X(z)$ в выражении для $\Psi_*(z)$ отличается от множителя при $X(z)$ в выражении для $\Psi(z)$ лишь слагаемым вида (41,17), как и следовало ожидать.

[2]) Для того чтобы непосредственно применить изложенное выше, следует подчинить $f(t)$ еще условию H; однако, как легко проверить, окончательный результат справедлив и без этого условия.

[3]) То есть задача $(a + ib)\Phi^+(t) + (a - ib)\Phi^-(t) = 0$, которая получается из (41,3) при $c = 0$.

Пусть, как в § 38, S^+ и S^- обозначают соответственно верхнюю и нижнюю полуплоскости, а D — действительную ось.

Граничное условие (40,1) и здесь, разумеется, можно записать так:

$$(a+ib)\,\Phi^+(t)+(a-ib)\,\overline{\Phi^+(t)}=2c \text{ на } D. \tag{42,1}$$

Мы будем считать и здесь, что искомая функция $\Phi(z)=u+iv$ ограничена всюду в S^+ и непрерывно продолжима на границу D (включая бесконечно удаленную точку). Мы будем также считать, что заданные на границе D действительные функции $a=a(t)$, $b=b(t)$, $c=c(t)$ удовлетворяют условию H (включая бесконечно удаленную точку) и что $a^2+b^2\neq 0$ (также включая бесконечно удаленную точку).

Дополним искомую в S^+ функцию $\Phi(z)$ до кусочно-голоморфной функции, полагая на этот раз $\Phi(z)=\overline{\Phi}(z)$ при z в S^-. Тогда мы будем иметь на всей плоскости, кроме точек на D,

$$\overline{\Phi}(z)=\Phi(z); \tag{42,2}$$

граничное же условие примет вид

$$(a+ib)\,\Phi^+(t)+(a-ib)\,\Phi^-(t)=2c, \tag{42,3}$$

как в предыдущем параграфе. И здесь мы приходим к задаче сопряжения

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t) \text{ на } D, \tag{42,4}$$

где

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib},\quad g(t)=\frac{2c}{a+ib}, \tag{42,5}$$

на этот раз для случая, когда граничная линия — бесконечная прямая (§ 38). Индекс $\varkappa$ этой задачи дается формулой

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-ib}{a+ib}\right]_{-\infty}^{+\infty}=\frac{1}{\pi}\,[\arg(a-ib)]_{-\infty}^{+\infty}=-\frac{1}{\pi}\,[\arg(a+ib)]_{-\infty}^{+\infty}, \tag{42,6}$$

показывающей, что $\varkappa$ — четное число.

Для решения задачи применим результаты, изложенные в § 38, пп. 4°, 5°.

В соответствии с формулами (38,13) положим:

$$G_0(t)=\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}G(t)=-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}, \tag{42,7}$$

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_D\frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi}\int\limits_D\frac{\Theta(t)\,dt}{t-z}, \tag{42,8}$$

где

$$\Theta(t)=\arg\left\{-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right\} \tag{42,9}$$

— действительная функция.

Каноническая функция $X(z)$, согласно формуле (38,12), может быть представлена в виде

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^+,\\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^-.\end{cases} \tag{42,10}$$

Так как функция $\Gamma(z)$ обладает, очевидно, свойством

$$\overline{\Gamma}(z)=\Gamma(z),$$

то каноническая функция $X(z)$ обладает свойством

$$\overline{X}(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa} X(z). \qquad (42,11)$$

При $\varkappa \geqslant 0$ однородная задача сопряжения, соответствующая случаю $c=0$ в формуле (42,3), имеет отличные от нуля ограниченные решения. Совокупность этих решений дается формулой

$$\Phi(z) = X(z)\left\{C_0 + C_1\frac{z-i}{z+i} + C_2\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^2 + \ldots + C_{\varkappa}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa}\right\}, \qquad (42,12)$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_{\varkappa}$ — произвольные постоянные.

Для того чтобы это решение было также решением однородной задачи Римана — Гильберта, соответствующей случаю $c=0$ в формуле (42,1), необходимо и достаточно, чтобы $\overline{\Phi}(z) = \Phi(z)$, а это, на основании формулы (42,11), равносильно условиям

$$\overline{C}_k = C_{\varkappa-k}, \qquad k = 0, 1, \ldots, \varkappa. \qquad (42,13)$$

Таким образом (ср. предыдущий параграф), однородная задача Римана — Гильберта при $\varkappa \geqslant 0$ имеет ровно $\varkappa+1$ линейно независимых (в смысле § 40, п. 2°) решений.

При $\varkappa < 0$ (т. е. при $\varkappa \leqslant -2$) однородная задача не имеет отличных от нуля решений.

Одно из ограниченных частных решений неоднородной задачи сопряжения при $\varkappa \geqslant 0$ дается формулой (см. § 38, п. 6°)

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_D \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_D \frac{c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]\,X^+(t)(t-z)}. \qquad (42,14)$$

Одним из частных решений исходной задачи будет:

$$\frac{1}{2}[\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)];$$

общее же решение мы получим, прибавив к предыдущему выражению функцию вида (42,12), где коэффициенты C_k подчинены условиям (42,13).

При $\varkappa < 0$ ($\varkappa \leqslant -2$) неоднородная задача Римана — Гильберта имеет решение лишь при соблюдении условий (формула (38,16)):

$$\int\limits_D \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k \frac{g(t)\,dt}{(t+i)^2 X^+(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa-2,$$

или

$$\int\limits_D \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k \frac{c(t)\,dt}{(t+i)^2[a(t)+ib(t)]\,X^+(t)} = 0, \qquad (42,15)$$

$$k = 0, 1, \ldots, -\varkappa-2.$$

При соблюдении этих условий решение единственно и дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_D \frac{c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]\,X^+(t)(t-z)} - \frac{X(z)}{\pi i}\int\limits_D \frac{c(t)\,dt}{(t+i)\,X^+(t)\,[a(t)+ib(t)]}. \qquad (42,16)$$

Условия (42,15) могут быть заменены столькими же условиями в действительном виде. А именно, подставляя в левые части равенств (42,15) значение $X^+(t) = \exp\Gamma^+(t)$, получим после простых выкладок

$$\int_D e^{-(\varkappa+2+2k)i\vartheta}\,\Omega(t)\,c(t)\,dt=0, \qquad k=0,1,\ldots,-\varkappa-2,$$

где

$$\Omega(t)=\frac{1}{(1+t^2)\sqrt{a^2(t)+b^2(t)}}\exp\left\{-\frac{1}{2\pi}\int_D\frac{\Theta(t_1)\,dt_1}{t_1-t}\right\}, \qquad (42{,}17)$$

$$\vartheta=\arg(t+i)=-\arg(t-i),$$

так что $t+i=\sqrt{1+t^2}e^{i\vartheta}$, а $\Theta(t)$ определяется формулой (42,9).

Таким образом, условия существования решения задачи Римана — Гильберта при $\varkappa<0$ (т. е. $\varkappa\leqslant-2$) могут быть представлены в следующем действительном виде:

$$\left.\begin{aligned}&\int_D \Omega(t)\,c(t)\cos 2k\vartheta\,dt=0, \quad k=0,1,\ldots,-\frac{\varkappa}{2}-1,\\ &\int_D \Omega(t)\,c(t)\sin 2k\vartheta\,dt=0, \quad k=1,2,\ldots,-\frac{\varkappa}{2}-1.\end{aligned}\right\} \qquad (42{,}18)$$

Отметим особо наиболее простой случай, когда $\varkappa=0$ [1]). В этом случае частное решение задачи сопряжения

$$\Phi_0(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_D\frac{c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]\,X^+(t)}$$

является также частным решением задачи Римана — Гильберта. В самом деле, при $\varkappa=0$ имеем $\overline{X}(z)=X(z)$. Принимая во внимание, что

$$\overline{X^+(t)}=\overline{X}^-(t)=X^-(t)$$

и что, в силу самого определения функции $X(z)$,

$$(a+ib)\,X^+(t)=-(a-ib)\,X^-(t),$$

заключаем:

$$\overline{\Phi_0}(z)=\Phi_0(z).$$

Общее же решение задачи Римана — Гильберта получим, прибавляя к этому частному решению общее решение однородной задачи, т. е. $CX(z)$, где C — произвольная действительная постоянная. Таким образом, окончательно общее решение при $\varkappa=0$ дается формулой

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_D\frac{c(t)\,dt}{[a(t)+ib(t)]\,X^+(t)\,(t-z)}+CX(z), \qquad (42{,}19)$$

где C — произвольная действительная постоянная. Напомним, что в нашем случае

$$X(z)=\exp\frac{1}{2\pi}\int_D\frac{\Theta(t)\,dt}{t-z}, \quad \Theta(t)=\arg\left\{-\frac{a-ib}{a+ib}\right\}. \qquad (42{,}20)$$

В частном случае задачи Дирихле для полуплоскости S^+ имеем $a=1$, $b=0$, $c=f(t)$, $X(z)=+i$ при $z\in S^+$, $X(z)=-i$ при

[1]) В первом издании настоящей книги были приведены формулы лишь для последнего случая. Формулы для общего случая опубликованы впервые во втором издании.

$z \in S^-$, и предыдущая формула дает:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i} \int_D \frac{f(t)\,dt}{t-z} + Ci,$$

где C — произвольная действительная постоянная.

§ 43. Приведение общего случая к случаю круговой области. 1°. Обратимся теперь к общему случаю (конечной или бесконечной) области S^+, ограниченной простым замкнутым контуром L.

Будем считать, что контур L не только гладкий, но и удовлетворяет условию Ляпунова[1]) (§ 7, п. 3°).

Пусть $z = \omega(\zeta)$, $\zeta = \chi(z)$ — соотношения (каждое из которых является обращением другого), осуществляющие конформное отображение области S^+ плоскости z на круг $|\zeta| < 1$ плоскости ζ; окружность $|\zeta| = 1$ мы обозначим через γ. Из теории конформных отображений известно, что при принятых нами условиях не только функции $\omega(\zeta)$ и $\chi(z)$, но и их производные $\omega'(\zeta)$ и $\chi'(z)$ непрерывно продолжимы соответственно на γ и на L; если σ и s обозначают дуговые абсциссы соответствующих друг другу точек контуров γ и L, то существуют непрерывные производные $\frac{d\sigma}{ds}$ и $\frac{ds}{d\sigma}$[2]).

Поэтому очевидно, что если $\varphi(t)$ обозначает какую-либо функцию точки t контура L, удовлетворяющую условию H на L, то та же функция, выраженная через соответствующую точку τ контура γ, т. е. функция $\psi(\tau) = \varphi(\omega(\tau))$, будет удовлетворять условию H на γ (с тем же показателем); то же самое справедливо, если поменять ролями L и γ.

Поэтому если требуется решить для области S^+ задачу Римана — Гильберта, соответствующую граничному условию

$$\operatorname{Re}(a+ib)\Phi^+ \equiv au^+ - bv^+ = c \text{ на } L, \tag{43,1}$$

где $a = a(t)$, $b = b(t)$, $c = c(t)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию H, то, отобразив конформно область S^+ на круг $|\zeta| < 1$, мы придем к точно такой же задаче, но уже для области $|\zeta| < 1$; граничное условие для этой последней задачи выражается той же формулой (43,1), если под a, b, c подразумевать функции $a(\omega(\tau))$, $b(\omega(\tau))$, $c(\omega(\tau))$ точки окружности γ.

Поэтому мы можем непосредственно перенести выводы, полученные для случая круговой области, на случай области указанного выше вида. Решение для области S^+ и условия разрешимости задачи мы получим из соответствующих формул для круга $|\zeta| < 1$, возвращаясь к переменной z по формуле $\zeta = \chi(z)$.

В частности, очевидно, индекс $\varkappa$ может быть определен непосредственно по заданным функциям $a(t)$, $b(t)$ по такой же формуле, что и для круга,

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L \tag{43,2}$$

---

[1]) Заметим, что, не нарушая основных результатов, это ограничение можно значительно ослабить.

[2]) Указанный результат относительно непрерывной продолжимости $\omega'(\zeta)$ и $\chi'(z)$ принадлежит Келлогу (O. D. Kellogg [2]), который доказал, кроме того, что $\omega'(\zeta)$ и $\chi'(z)$ удовлетворяют условию H. См. еще S. Warschawski [1], [2].

или

$$\varkappa = \frac{1}{\pi i}[\ln(a-ib)]_L = \frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_L. \tag{43,3}$$

Замечание 1. Пусть $\Phi(z)$ — какое-либо решение задачи Римана — Гильберта (43,1). Легко видеть, что при принятых относительно контура L и функций $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ условиях граничное значение $\Phi^+(t)$ будет удовлетворять условию H. Это следует из того, что граничное значение любого решения задачи Римана — Гильберта для круга удовлетворяет условию H, если функции a, b, c удовлетворяют этому условию; как было сказано выше, функции, удовлетворяющие условию H на γ (или на L), переходят при конформном отображении в функции, удовлетворяющие условию H на L (или на γ).

Замечание 2. Случай, когда граница L рассматриваемой (односвязной) области простирается в бесконечность, ничем существенным не отличается от предыдущего; и здесь, разумеется, мы можем перейти к случаю круга путем конформного отображения.

Простейший пример случая, когда L простирается в бесконечность, был приведен в предыдущем параграфе.

2°. Изложенный выше способ решения задачи Римана — Гильберта основан на применении конформного отображения данной области на круг (или, что сводится к тому же, на полуплоскость). Поэтому условие, что данная область односвязна, является здесь весьма существенным (в противоположность задаче сопряжения). Для случая многосвязной области задача Римана — Гильберта изучена в работах: Д. А. Квеселава [2], И. Н. Векуа [11], Дун Гуан-чан [1], Б. Боярский [2], Ф. Д. Гахов и Э. Г. Хасабов [1], Э. И. Зверович [1].

3°. Изложенный выше способ решения задачи Римана — Гильберта был обобщен на случай нескольких неизвестных функций Н. П. Векуа [16], а на случай, когда от искомой функции требуется лишь представимость интегралом типа Коши,— Б. В. Хведелидзе [18] и А. Э. Драчинским [4].

Решение и исследование задачи Римана — Гильберта при весьма общих условиях даны в главе 3 монографии И. Н. Векуа [13]. В этой монографии, так же как в предшествующей ей статье того же автора [11], речь идет о задаче Римана — Гильберта для обобщенных аналитических функций, содержащих в качестве частного случая обычные аналитические функции. Там же рассмотрен вопрос о корректности постановки задачи Римана — Гильберта.

Приближенному решению задачи Римана — Гильберта посвящены работы Л. С. Клабуковой [1], [2] и М. А. Алексидзе [1].

III. Сингулярные интегральные уравнения в случае гладких замкнутых контуров и непрерывных коэффициентов

§ 44. Сингулярные операторы и сингулярные уравнения. Во всем этом отделе мы будем подразумевать под L линию, состоящую из конечного числа гладких замкнутых контуров $L_1, L_2, \ldots, L_p$ без общих точек.

Сингулярным оператором (с ядром типа Коши) мы будем во всем этом отделе называть оператор, определяемый формулой

$$K\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{44,1}$$

где t, t_0 — точки на L, а $A(t_0)$, $K(t_0, t)$ — заданные на L функции класса H.

K есть символ сингулярного оператора. Вообще сингулярные операторы мы будем обозначать буквами жирного шрифта.

Формулу (44,1) иногда удобно представить так:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt, \tag{44,2}$$

где

$$B(t_0) = K(t_0, t_0), \qquad k(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - K(t_0, t_0)}{t-t_0}. \tag{44,3}$$

Оператор $\mathbf{K}^0$, определяемый формулой

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{44,4}$$

мы будем называть *характеристической частью оператора* **K**, а $A(t)$, $B(t)$ — *коэффициентами характеристической части*. Функцию $\frac{K(t_0, t)}{t-t_0}$ мы будем называть *ядром* оператора **K**.

Мы будем также предполагать во всем дальнейшем, что *функции*

$$S(t) = A(t) + B(t), \qquad D(t) = A(t) - B(t) \tag{44,5}$$

не обращаются в нуль нигде на L.

Значение этого условия выяснится ниже[1]); операторы, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть *операторами нормального типа*.

Заметим еще, что в силу принятых условий, как легко видеть на основании результатов §§ 5 и 6,

$$k(t_0, t) = \frac{k^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda = \text{const} < 1, \tag{44,6}$$

где $k^*(t_0, t)$ принадлежит классу H на L.

Сингулярным интегральным уравнением (с ядром типа Коши) мы будем называть уравнение вида

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0), \tag{44,7}$$

где **K** — сингулярный оператор, подчиненный указанным выше условиям, $f(t)$ — заданная функция, называемая *свободным членом* или *правой частью* уравнения, а $\varphi(t)$ — искомая функция. То обстоятельство, что оператор **K** — нормального типа, мы будем выражать, говоря, что уравнение (44,7) — *нормального типа*.

Во всей этой главе мы будем предполагать, что свободный член $f(t)$ удовлетворяет условию H, и будем разыскивать решения $\varphi(t)$, также удовлетворяющие этому условию.

На основании (44,2) уравнение (44,7) можно записать еще так:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0). \tag{44,8}$$

---

[1]) Функции S и D играют более важную роль, чем A и B; обозначения легко запомнить (Summa и Differentia).

Уравнение

$$K^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0) \qquad (44,9)$$

мы будем называть **характеристическим уравнением**, соответствующим уравнению (44,7), а функции $A(t_0)$, $B(t_0)$ — **коэффициентами характеристического уравнения**.

Теория сингулярных уравнений вида (44,7) начала разрабатываться почти непосредственно вслед за возникновением теории уравнений Фредгольма. Начало было положено А. Пуанкаре[1]) и Д. Гильбертом[2]), пришедшими к этим уравнениям в связи с совершенно различными вопросами: Гильберт — рассматривая некоторые граничные задачи теории аналитических функций, Пуанкаре — разрабатывая общую теорию приливов.

После них теория значительно продвинулась вперед благодаря работам ряда авторов, которые будут упомянуты ниже, в соответствующих местах.

Замечание 1. Вместо того чтобы писать сингулярное уравнение в виде (44,8), иногда удобно представлять его в несколько ином виде:

$$K\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L k_1(t_0,t)\varphi(t)\,dt=f(t_0), \qquad (44,10)$$

где $B(t)$ обозначает то же, что выше, а

$$k_1(t_0,t)=\frac{K(t_0,t)-K(t,t)}{t-t_0}. \qquad (44,11)$$

Замечание 2. Легко показать, что форма и расположение замкнутых контуров $L_1, \ldots, L_p$, составляющих L, не имеют принципиального значения[3]), лишь бы эти контуры были гладкими и не пересекали друг друга[4]).

Рассмотрим, в самом деле, наряду с линией L другую линию Λ, состоящую из такого же числа гладких, замкнутых, непересекающихся контуров $\Lambda_1, \ldots, \Lambda_p$. Будем обозначать через τ точки на Λ (а также их аффиксы) и установим между L и Λ взаимно однозначное непрерывное соответствие

$$t=t(\tau). \qquad (44,12)$$

Это всегда можно сделать и притом так, чтобы функция $t'(\tau)=\frac{dt}{d\tau}$ была непрерывной на Λ и нигде в нуль не обращалась[5]). Мы будем, кроме того, предполагать, что $t'(\tau)$ удовлетворяет условию H. Этого всегда можно достигнуть, если, например, L и Λ являются линиями Ляпунова[6]). Но такое соответствие между L и Λ может оказаться осуществи-

---

[1]) H. Poincaré [1].

[2]) D. Hilbert [1], [2].

[3]) Иначе обстоит дело с практической точки зрения. В приложениях путь интегрирования L обычно тесно связан с рассматриваемой задачей, и элементы, входящие в уравнение $K\varphi = f$, обычно имеют более или менее простой геометрический смысл, что облегчает исследование задачи. При переходе от L к другой линии интегрирования это преимущество часто теряется.

[4]) Впрочем, и это последнее ограничение легко снять.

[5]) Для этого достаточно, например, привести в соответствие точки контуров L_k и Λ_k, имеющие пропорциональные дуговые абсциссы.

[6]) Для этого достаточно установить такое же соответствие, какое указано в предыдущем примечании.

мым и тогда, когда L и Λ — просто гладкие линии; простейшим очевидным примером является случай, когда контуры L_k и Λ_k, составляющие L и Λ, отличаются друг от друга лишь положением на плоскости или подобны между собой.

Вводя в уравнение (44,7) переменную τ на место t, получим уравнение

$$A(\tau_0)\varphi(\tau_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_{\Lambda}\frac{K^*(\tau_0, \tau)\varphi(\tau)\,d\tau}{\tau-\tau_0}=f(\tau_0), \tag{44,13}$$

где введены обозначения

$$A(\tau)=A(t(\tau)), \quad \varphi(\tau)=\varphi(t(\tau)), \quad f(\tau)=f(t(\tau))$$

и

$$K^*(\tau_0, \tau)=\frac{(\tau-\tau_0)\,t'(\tau)}{t(\tau)-t(\tau_0)}K(t(\tau_0), t(\tau)). \tag{44,14}$$

Легко проверить на основании сказанного в § 7, что $K^*(\tau_0, \tau)$ удовлетворяет на Λ условию H (ср. § 13, замечание 5).

Таким образом, мы получим сингулярное уравнение того же вида, что исходное, но путем интегрирования является уже Λ.

Замечание 3. Можно еще, разумеется, представить уравнение (44,7) в виде, где переменными являются действительные величины. Это осуществимо различными способами; мы укажем один из простейших.

Будем для простоты считать, что L удовлетворяет условию Ляпунова и состоит из одного-единственного замкнутого контура. Не нарушая общности, мы можем считать, что длина этого контура равна 2π, в соответствии с этим параметрическое представление L может быть взято в виде

$$x=x(s), \quad y=y(s), \quad 0\leqslant s\leqslant 2\pi,$$

где s — дуговая абсцисса; на основании принятых условий $x'(s)$, $y'(s)$ удовлетворяют условию H и

$$x(2\pi)=x(0), \; y(2\pi)=y(0), \; x'(2\pi-0)=x'(+0), \; y'(2\pi-0)=y'(+0).$$

Легко, далее, видеть (см. § 7), что отношения

$$\frac{e^{is}-e^{is_0}}{t-t_0}=\omega(t_0, t), \qquad \frac{t-t_0}{e^{is}-e^{is_0}}=\frac{1}{\omega(t_0, t)}$$

будут удовлетворять условию H на L[1].

Замечая, что

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{\omega(t_0, t)\,t'(s)\,ds}{e^{is}-e^{is_0}}=\frac{\omega(t_0, t)\,t'(s)\,e^{-is_0}e^{-i\frac{s-s_0}{2}}\,ds}{e^{i\frac{s-s_0}{2}}-e^{-i\frac{s-s_0}{2}}}=$$

$$=\frac{\omega(t_0, t)\,t'(s)\,e^{-is_0}}{2i}\left\{\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}-i\right\}ds, \tag{44,15}$$

---

[1]) Если бы вместо $e^{is}-e^{is_0}$ мы взяли, например, просто $s-s_0$, то отношение $\frac{s-s_0}{t-t_0}$ было бы неограниченно при $s\to 2\pi$, $s_0\to 0$. Поэтому-то мы и выбрали выражение $e^{is}-e^{is_0}$, обладающее периодом 2π и обращающееся в нуль лишь при $s=s_0+2k\pi$, где k — целое число.

внося это выражение в (44,7) и производя некоторые простые преобразования, аналогичные тем, при помощи которых из (44,7) получается (44,8), приходим к уравнению вида

$$a(s_0)\psi(s_0)+\frac{b(s_0)}{2\pi}\int_0^{2\pi}\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\psi(s)\,ds+\int_0^{2\pi}l(s_0, s)\psi(s)\,ds=g(s_0), \quad (44,16)$$

где $a(s)$, $b(s)$, $g(s)$ — заданные функции, обладающие периодом 2π и удовлетворяющие условию H, а $l(s_0, s)$ — также заданная функция, представимая в виде

$$l(s_0, s)=l^*(s_0, s)\left|\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\right|^\lambda, \quad 0\leqslant\lambda<1, \quad (44,17)$$

где $l^*(s_0, s)$ обладает периодом 2π по s_0 и s и удовлетворяет условию H. Через $\psi(s)$ обозначена неизвестная функция $\varphi(t)$, выраженная через s.

Ясно, что, обратно, от всякого уравнения вида (44,16) можно перейти к уравнению вида (44,7), *причем контур L можно выбрать произвольно*, лишь бы были удовлетворены указанные выше условия гладкости.

Если дано уравнение вида (44,16), то проще всего представить себе, что интегрирование производится по окружности L радиуса 1 с центром в начале координат, а s — аргумент точки t на L. Тогда $t=e^{is}$, $dt=ie^{is}ds$,

$$\frac{dt}{t-t_0}=\frac{ie^{is}\,ds}{e^{is}-e^{is_0}}=\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\,ds+\frac{i}{2}\,ds, \quad (44,18)$$

откуда, замечая, что $i\,ds=\frac{dt}{t}$,

$$\frac{1}{2}\operatorname{ctg}\frac{s-s_0}{2}\,ds=\frac{dt}{t-t_0}-\frac{1}{2}\frac{dt}{t}.$$

Внося это выражение, так же как и выражение для ds в (44,16), получим, очевидно, уравнение вида (44,8) или, что сводится к тому же, вида (44,7).

§ 45. Основные свойства сингулярных операторов. Изучим ближе сингулярные операторы, введенные в предыдущем параграфе.

1°. Условимся сначала относительно обозначений. Сингулярный оператор **K**, определяемый формулой (44,1), переводит всякую функцию $\varphi(t)$ класса H в некоторую новую функцию $\psi(t)$ по формуле

$$\psi(t_0)=A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{K(t_0, t)\varphi(t)\,dt}{t-t_0}.$$

Соотношение между функциями $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ мы обычно будем записывать так:

$$\psi=\mathbf{K}\varphi, \quad (*)$$

но иногда будем писать, например,

$$\psi(t_0)=\mathbf{K}\varphi(t_0) \quad \text{или} \quad \psi(t)=\mathbf{K}\varphi(t),$$

указывая этим, что аргументу функции ψ, получаемой из функции φ применением оператора **K**, придано значение t_0 или t.

Таким образом, символ $\mathbf{K}\varphi(\ )$ следует рассматривать как единый символ функции $\psi\ (\ )$.

Вообще же, для упрощения письма мы во многих случаях будем опускать обозначение аргументов функции и писать φ, ψ и т. д. вместо $\varphi\,(t)$, $\psi\,(t)$ или $\varphi\,(t_0)$, $\psi\,(t_0)$ и т. д., когда это не может вызвать недоразумений, как, например, в формуле (*) или, например, в выражениях

$$\int\limits_L \varphi\psi\,dt, \qquad \int\limits_L \varphi\psi\,dt_0,$$

где ясно, что под φ, ψ следует подразумевать в первом случае соответственно $\varphi\,(t)$, $\psi\,(t)$, а во втором — соответственно $\varphi\,(t_0)$, $\psi\,(t_0)$.

2°. После этих, почти, впрочем, очевидных замечаний перейдем к рассмотрению наиболее важных для нас свойств сингулярных операторов. Напомним для удобства обозначения, введенные в предыдущем параграфе,

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A\,(t_0)\,\varphi\,(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K\,(t_0,\ t)\,\varphi\,(t)\,dt}{t-t_0}\,, \tag{45,1}$$

$$B\,(t) = K\,(t,\ t), \tag{45,2}$$

$$S\,(t) = A\,(t) + B\,(t), \quad D\,(t) = A\,(t) - B\,(t); \tag{45,3}$$

напомним еще, что мы условились рассматривать лишь операторы нормального типа, т. е. такие, что $S\,(t)$ и $D\,(t)$ нигде на L в нуль не обращаются. Оператор $\mathbf{K}$ мы будем применять лишь к функциям $\varphi\,(t)$ класса H.

Укажем, прежде всего, следующее важное свойство оператора $\mathbf{K}$, которое непосредственно следует из результата § 18, п. 4°:

Сингулярный оператор $\mathbf{K}$ *переводит всякую функцию* $\varphi\,(t)$ *класса* H *в новую функцию* $\psi\,(t)$ *также класса* H.

Введем еще одно понятие, играющее в дальнейшем важную роль. Именно, индексом оператора $\mathbf{K}$ или уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ мы будем называть целое число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{A-B}{A+B}\right]_L = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{D}{S}\right]_L, \tag{45,4}$$

где, как всегда, $[\ \ ]_L$ обозначает приращение функции, заключенной в скобки, при обходе L в положительном направлении.

Из определения следует, что *индекс зависит лишь от характеристической части оператора* $\mathbf{K}$.

Кроме того, легко видеть, что *индекс* $\varkappa$ *не изменится, если заменить линию интегрирования* L *другой линией* Λ, *как в замечании* 2 *предыдущего параграфа*. Действительно, как показывают формулы (44,13) и (44,14), коэффициенты A и B остаются неизменными, т. е. их значения в соответствующих точках линий L и Λ равны между собой.

Если $B\,(t) = 0$ и, следовательно, $A\,(t) \neq 0$ всюду на L (в силу условия, что S и $D \neq 0$ на L), то уравнение $\mathbf{K}\varphi = f$ обращается в обычное уравнение Фредгольма (второго рода). Поэтому оператор $\mathbf{K}$ при $B = 0$ или, что все равно, при $S = D$ мы будем называть фредгольмовым (второго рода)[1]). *Индекс фредгольмова оператора равен нулю*, как показывает формула (45,4).

3°. Перейдем теперь к вопросу о композиции двух сингулярных операторов. Пусть $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — сингулярные операторы, определяемые

[1]) В дальнейшем, говоря просто о фредгольмовом операторе, мы будем подразумевать фредгольмов оператор второго рода.

формулами

$$\mathbf{K}_1\varphi \equiv A_1(t_0)\,\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{45,5}$$

$$\mathbf{K}_2\psi \equiv A_2(t_0)\,\psi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(t_0, t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{45,6}$$

Мы будем говорить, что оператор

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2, \tag{45,7}$$

определяемый формулой

$$\mathbf{K}^*\psi = \mathbf{K}_1(\mathbf{K}_2\psi), \tag{45,8}$$

получается *композицией* операторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ в указанном порядке (операторы $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ и $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ вообще различны).

Найдем выражение для $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$. Произведя операции, указанные в (45,8), и пользуясь формулой перестановки Пуанкаре — Бертрана (§ 28), непосредственно получаем:

$$\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\psi \equiv [A_1(t_0)\,A_2(t_0)+B_1(t_0)\,B_2(t_0)]\,\psi(t_0)+$$
$$+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{A_1(t_0)\,K_2(t_0, t)+K_1(t_0, t)\,A_2(t)}{t-t_0}\,\psi(t)\,dt+$$
$$+\frac{1}{(\pi i)^2}\int_L \left[\int_L \frac{K_1(t_0, t_1)\,K_2(t_1, t)\,dt_1}{(t_1-t_0)(t-t_1)}\right]\psi(t)\,dt, \tag{45,9}$$

где, аналогично предыдущему, $B_1(t)=K_1(t, t)$, $B_2(t)=K_2(t, t)$.

Легко показать, что

$$\int_L \frac{K_1(t_0, t_1)\,K_2(t_1, t)}{(t_1-t_0)(t-t_1)}\,dt_1=\frac{k_{12}(t_0, t)}{|t-t_0|^{\lambda}}, \tag{45,10}$$

где $0\leqslant\lambda<1$, а k_{12} принадлежит классу H. В самом деле, функция $F(t_0, t, t_1)=K_1(t_0, t_1)\,K_2(t_1, t)$ удовлетворяет условию H. Далее,

$$\int_L \frac{F(t_0, t, t_1)\,dt_1}{(t_1-t_0)(t-t_1)}=\frac{1}{t-t_0}\left\{\int_L \frac{F(t_0, t, t_1)\,dt_1}{t_1-t_0}-\int_L \frac{F(t_0, t, t_1)\,dt_1}{t_1-t}\right\}=$$
$$=\frac{\omega_0(t_0, t)-\omega(t_0, t)}{t-t_0}, \tag{45,11}$$

где

$$\omega_0(t_0, t)=\int_L \frac{F(t_0, t, t_1)\,dt_1}{t_1-t_0}, \qquad \omega(t_0, t)=\int_L \frac{F(t_0, t, t_1)\,dt_1}{t_1-t}.$$

Так как $\omega(t_0, t)$ и $\omega_0(t_0, t)$ удовлетворяют условию H (§ 18, п. 4° и 3°) и, кроме того, $\omega(t_0, t_0)=\omega_0(t_0, t_0)$, то правая часть (45,11) представима, как легко видеть, в виде $\dfrac{k_{12}(t_0, t)}{|t-t_0|^{\lambda}}$, и наше утверждение доказано.

Мы видим, таким образом, что характеристическая часть оператора $\mathbf{K}^*$ определяется лишь первыми двумя слагаемыми правой части (45,9).

Обозначая через $A^*(t)$ и $B^*(t)$ коэффициенты характеристической части оператора $\mathbf{K}^*$, будем иметь на основании (45,9)

$$A^*=A_1A_2+B_1B_2, \qquad B^*=A_1B_2+B_1A_2, \tag{45,12}$$

откуда, полагая $S_j = A_j + B_j$, $D_j = A_j - B_j$ $(j = 1,2)$,

$$S^* = A^* + B^*, \qquad D^* = A^* - B^*,$$

выводим:

$$S^* = S_1 S_2, \qquad D^* = D_1 D_2. \tag{45,13}$$

Из предыдущих формул на основании (45,4) следует, что *индекс* $\varkappa^*$ *оператора* $\mathbf{K}^*$ *равен сумме индексов* $\varkappa_1$ *и* $\varkappa_2$ *операторов* $\mathbf{K}_1$ *и* $\mathbf{K}_2$: $\varkappa^* = \varkappa_1 + \varkappa_2$.

Если оператор $\mathbf{K}_1$ таков, что оператор $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ — фредгольмов, то оператор $\mathbf{K}_1$ мы будем называть регуляризирующим оператор $\mathbf{K}_2$. Для того чтобы оператор $\mathbf{K}^*$ был фредгольмовым, необходимо и достаточно, чтобы $B^* = 0$ или, что сводится к тому же, чтобы $S^* = D^*$. Таким образом, если $\mathbf{K}_1$ — оператор, регуляризирующий $\mathbf{K}_2$, то

$$A_1 B_2 + B_1 A_2 = 0 \tag{45,14}$$

или, что сводится к тому же,

$$S_1 S_2 = D_1 D_2 \tag{45,15}$$

и обратно. Из предыдущего следует, что если задан оператор $\mathbf{K}_2$, то можно бесчисленным множеством способов подобрать регуляризирующий его оператор $\mathbf{K}_1$. Можно, например, произвольно задать функцию $S^* = D^* \neq 0$, и тогда S_1, D_1 определяются по формулам

$$S_1 = \frac{S^*}{S_2}, \qquad D_1 = \frac{S^*}{D_2}; \tag{45,16}$$

в частности, можно взять $S^* = D^* = 1$. Обычно удобнее всего удовлетворять условию (45,14), полагая

$$A_1 = A_2, \qquad B_1 = -B_2. \tag{45,17}$$

Мы видим, что *при подборе регуляризирующего оператора имеют значение лишь характеристические части операторов*.

Мы видим, кроме того, что если $\mathbf{K}_1$ — оператор, регуляризирующий $\mathbf{K}_2$, то $\mathbf{K}_2$ регуляризирует оператор $\mathbf{K}_1$[1]).

Так как индекс фредгольмова оператора равен нулю, то *индексы операторов* $\mathbf{K}_1$ *и* $\mathbf{K}_2$, *регуляризирующих друг друга, равны по величине и противоположны по знаку*.

Добавим еще несколько слов о композиции произвольного числа операторов. Легко проверить, что если $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}_3$ — сингулярные операторы, то

$$\mathbf{K}_1(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3) = (\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)\mathbf{K}_3, \tag{45,18}$$

т. е. что композиция сингулярных операторов обладает свойством ассоциативности; поэтому можно просто писать $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3$ вместо $\mathbf{K}_1(\mathbf{K}_2\mathbf{K}_3)$ или $(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)\mathbf{K}_3$. Аналогично обстоит дело для любого числа операторов.

Замечание. Рассмотрим оператор $\mathbf{k}$, определяемый формулой

$$\mathbf{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt, \tag{45,19}$$

где

$$k(t_0, t) = \frac{k_0(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda}, \qquad 0 < \lambda < 1, \tag{45,20}$$

[1]) Отметим здесь же, что это, вообще говоря, несправедливо в отношении операторов, связанных с системами уравнений (глава VI).

причем $k_0(t_0, t)$ удовлетворяет условию H. Такой оператор можно назвать фредгольмовым оператором первого рода.

Пусть $\mathbf{K}$ — какой-либо сингулярный оператор. Тогда, как легко видеть, операторы $\mathbf{Kk}$ и $\mathbf{kK}$ будут фредгольмовыми операторами первого рода.

Это следует, во-первых, из формул (45,12), ибо фредгольмов оператор первого рода можно рассматривать как частный случай сингулярного оператора (но уже не принадлежащего к нормальному типу), в котором коэффициенты A и B характеристической части тождественно равны нулю.

Во-вторых, наше утверждение легко проверяется непосредственно. Если

$$\mathbf{K}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\psi(t)\,dt}{t - t_0},$$

то, например, как показывает непосредственная подстановка $\psi = \mathbf{k}\varphi$, получим[1]):

$$\mathbf{Kk}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L n(t_0, t)\varphi(t)\,dt,$$

где

$$n(t_0, t) = A(t_0)k(t_0, t) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t_1)k(t_1, t)\,dt_1}{t_1 - t},$$

и легко видеть, что $n(t_0, t)$ удовлетворяет условию такого же вида (45,20), что и $k(t_0, t)$[2]). Аналогично обстоит дело для $\mathbf{kK}$.

§ 46. Союзные операторы и союзные уравнения. 1°. Операторы, определяемые формулами

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)\,dt}{t - t_0} \tag{46,1}$$

и

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t, t_0)\psi(t)\,dt}{t - t_0}, \tag{46,2}$$

получающиеся один из другого перестановкой t_0 и t в ядре $\frac{K(t_0, t)}{t - t_0}$, мы будем называть *союзными*. В частности, оператором, союзным с характеристическим оператором $\mathbf{K}^0$, который определяется формулой

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0}, \tag{46,3}$$

---

[1]) Законность перестановки порядка интегрирования следует из § 28 (замечание).

[2]) Это легко проверяется непосредственно, а также следует из формулы (45,10), если учесть, что на основании условия (45,20) $k(t_0, t)$ можно представить в виде

$$k(t_0, t) = \frac{k^*(t_0, t)}{t - t_0},$$

где $k^*(t_0, t)$ удовлетворяет условию H (ср. § 28, конец замечания 2).

является оператор $\mathbf{K}^{0\prime}$, определяемый формулой

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{46,4}$$

Следует обратить внимание на то, что оператор $\mathbf{K}^{0\prime}$, союзный с характеристическим оператором $\mathbf{K}^0$, не является, вообще говоря, характеристической частью $\mathbf{K}'^0$ оператора $\mathbf{K}'$, ибо $\mathbf{K}'^0$ дается формулой

$$\mathbf{K}'^0\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{46,5}$$

Таким образом, следует различать обозначения $\mathbf{K}^{0\prime}$ и $\mathbf{K}'^0$.

2°. Возвращаясь к общему случаю, отметим следующие основные свойства союзных операторов.

I. Индексы союзных операторов равны по величине и обратны по знаку.

II. Для всяких двух операторов имеем:

$$(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)' = \mathbf{K}_2'\mathbf{K}_1'; \tag{46,6}$$

вообще,

$$(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\ldots\mathbf{K}_n)' = \mathbf{K}_n'\mathbf{K}_{n-1}'\ldots\mathbf{K}_2'\mathbf{K}_1'. \tag{46,6a}$$

III. Для всяких двух функций φ и ψ

$$\int\limits_L \psi\mathbf{K}\varphi\,dt = \int\limits_L \varphi\mathbf{K}'\psi\,dt. \tag{46,7}$$

Эти свойства устанавливаются простой непосредственной проверкой. Легко показать (мы на этом не будем останавливаться), что свойство III является характерным для понятия союзных операторов, т. е. что если для двух сингулярных операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ соблюдено равенство (46,7), каковы бы ни были функции φ, ψ, удовлетворяющие условию H, то операторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ — союзные в смысле данного первоначального определения.

3°. Интегральные уравнения

$$\mathbf{K}\varphi = f \quad \text{и} \quad \mathbf{K}'\psi = g \tag{46,8}$$

мы будем называть с о ю з н ы м и, каковы бы ни были правые части f и g.

Из (46,7) вытекает следующее важное предложение: *если уравнение* $\mathbf{K}\varphi = f$ *имеет решения, то необходимо*

$$\int\limits_L f\psi\,dt = 0, \tag{46,9}$$

где ψ — *любое решение союзного однородного уравнения* $\mathbf{K}'\psi = 0$ [1]).

Действительно, если φ — решение уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$, то

$$\int\limits_L f\psi\,dt = \int\limits_L \psi\mathbf{K}\varphi\,dt = \int\limits_L \varphi\mathbf{K}'\psi\,dt = 0.$$

Обратное предложение также имеет место; оно будет доказано в § 53.

[1]) Напомним, что под решениями мы всегда подразумеваем решения класса H.

§ 47. Решение характеристического уравнения. Для общей теории сингулярных интегральных уравнений рассматриваемого вида большое значение имеет решение уравнения

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0), \tag{47,1}$$

которое мы назвали характеристическим. Общее и притом весьма элементарное решение в замкнутом виде было дано И. Н. Векуа [1]. Это решение и излагается здесь[1]).

Напомним, что $A(t)$, $B(t)$, $f(t)$ обозначают функции, принадлежащие классу H, и что неизвестную функцию $\varphi(t)$ мы также подчиняем условию H.

Введем в рассмотрение кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{47,2}$$

Вспоминая, что, согласно формулам Сохоцкого — Племеля,

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0), \quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0), \tag{47,3}$$

видим на основании (47,1), что функция $\Phi(z)$ должна быть решением задачи сопряжения

$$(A+B)\Phi^+(t) - (A-B)\Phi^-(t) = f, \tag{47,4}$$

исчезающим на бесконечности.

Обратно, пусть кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, исчезающая на бесконечности, есть решение задачи (47,4). Определим функцию $\varphi(t_0)$ первой из формул (47,3). Тогда (§ 31) функция $\Phi(z)$ представится в виде (47,2), и, следовательно, будет иметь место также вторая формула (47,3), а это показывает, что $\varphi(t)$ есть решение исходного уравнения (47,1). Граничную же задачу (47,4) мы решать умеем. Для того чтобы непосредственно применить выведенные раньше формулы, перепишем условие (47,4) так:

$$\Phi^+(t_0) = G(t_0)\Phi^-(t_0) + \frac{f(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{47,5}$$

где

$$G(t_0) = \frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}. \tag{47,6}$$

Теперь мы видим, что число $\varkappa$, названное выше (§ 45) индексом интегрального уравнения (47,1), есть индекс соответствующей задачи сопряжения (47,5).

Пусть $X(z)$ — каноническая функция (§ 37), соответствующая задаче сопряжения (47,5).

---

[1]) Идея излагаемого метода решения содержится у Т. Карлемана (Т. Carleman [1]), который рассматривает иной и притом частный случай (см. об этом начало § 99). Эта же идея была использована С. Г. Михлиным [3], который, однако, дает решение уравнения (47,1) лишь в случае $\varkappa = 0$ (кроме того, он считает, что $A(t) = 1$ и что L — простой замкнутый контур с кривизной, удовлетворяющей условию H). В случае $\varkappa \neq 0$ С. Г. Михлин ограничивается решением однородного уравнения $\mathbf{K}^0\varphi = 0$, считая, что L — окружность.

Тогда (§ 37) общее решение задачи (47,5), исчезающее на бесконечности, дается при $\varkappa \geqslant 0$ формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]\,X^+(t)\,(t-z)} + X(z)\,Q_{\varkappa-1}(z), \tag{47,7}$$

где $Q_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa-1$, причем $Q_{\varkappa-1}(z)=0$ при $\varkappa=0$. При $\varkappa<0$ решение существует лишь при условии

$$\int\limits_L \frac{t^k f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]\,X^+(t)} = 0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa-1; \tag{47,8}$$

если эти условия соблюдены, то (единственное) решение дается формулой (47,7) при $Q_{\varkappa-1}(z)=0$.

Решение исходного интегрального уравнения мы получим по формуле $\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)$, из которой на основании формулы (47,7) и формул Сохоцкого — Племеля следует:

$$\varphi(t_0) = \frac{X^+(t_0)+X^-(t_0)}{2\,[A(t_0)+B(t_0)]\,X^+(t_0)}\, f(t_0) +$$
$$+ \frac{X^+(t_0)-X^-(t_0)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]\,X^+(t)\,(t-t_0)} + [X^+(t_0)-X^-(t_0)]\,Q_{\varkappa-1}(t_0). \tag{47,9}$$

Замечая теперь, что по самому определению функции $X(z)$

$$\frac{X^+(t_0)}{X^-(t_0)} = G(t_0) = \frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)},$$

легко заключаем, что решение (47,9) можно переписать так:

$$\varphi(t_0) = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0)\,Z(t_0)\,P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{47,10}$$

где введены следующие обозначения:

$$\mathbf{K}^* f \equiv A^*(t_0)\,f(t_0) - \frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{Z(t)\,(t-t_0)}, \tag{47,11}$$

$$Z(t_0) = [A(t_0)+B(t_0)]\,X^+(t_0) = [A(t_0)-B(t_0)]\,X^-(t_0), \tag{47,12}$$

$$A^*(t_0) = \frac{A(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}, \qquad B^*(t_0) = \frac{B(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}, \tag{47,13}$$

а $P_{\varkappa-1}(t_0)$ обозначает произвольный полином степени не выше $\varkappa-1$.

Входящая в эти формулы функция $Z(t)$ точки t на L может быть легко вычислена по формулам § 35.

Например, если L состоит из единственного замкнутого контура с произвольно выбранным положительным направлением, то по формулам (35,8) легко получим:

$$Z(t) = (t-a)^{-\frac{\varkappa}{2}} \sqrt{A^2(t)-B^2(t)}\, e^{\Gamma(t)}, \tag{47,14}$$

где a обозначает произвольно фиксированную точку внутри L, а $\Gamma(t)$ определяется формулой

$$\Gamma(t_0) = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_L \frac{\ln\,[(t-a)^{\mp\varkappa}\,G(t)]\,dt}{t-t_0}, \tag{47,15}$$

при значении $G(t)$, определяемом формулой (47,6). Верхний знак перед $\varkappa$ берется в случае, когда положительное направление на L выбрано так, что конечная область, ограниченная L, остается слева, нижний же знак — в противном случае. Можно произвольно выбрать одно из двух возможных значений правой части (47,14) в какой-либо точке на L, а затем изменять это значение непрерывно.

Формула (47,10) дает общее решение интегрального уравнения (47,1), когда $\varkappa \geqslant 0$. Та же формула дает решение и при $\varkappa < 0$, если положить в ней $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$ и считать, что свободный член $f(t)$ уравнения удовлетворяет (необходимым и достаточным) условиям (47,8), которые на основании (47,12) можно переписать так:

$$\int_L \frac{t^k f(t)\,dt}{Z(t)} = 0, \quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa-1. \tag{47,16}$$

Формулы, эквивалентные формулам (47,9)—(47,16), даны И. Н. Векуа [1][1]).

В случае, когда $f(t) = 0$, т. е. когда мы имеем дело с однородным уравнением, предыдущие результаты показывают, что при $\varkappa \leqslant 0$ однородное уравнение не имеет решений, отличных от нуля, а при $\varkappa > 0$ оно имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений, совокупность которых дается формулой

$$\varphi(t) = B^*(t)\, Z(t)\, P_{\varkappa-1}(t), \tag{47,17}$$

где $P_{\varkappa-1}(t)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa-1$.

Функцию $Z(t)$ мы будем называть **канонической функцией**, соответствующей уравнению (47,1).

Резюмируем полученные результаты.

I. *Если* $\varkappa > 0$, *то однородное уравнение* $K^0\varphi = 0$ *имеет ровно* $\varkappa$ *линейно независимых решений.*

II. *Если* $\varkappa \leqslant 0$, *то это уравнение не имеет решений, отличных от нуля.*

III. *Если* $\varkappa \geqslant 0$, *то неоднородное уравнение* $K^0\varphi = f$ *разрешимо при любой правой части* f.

IV. *Если* $\varkappa < 0$, *то это уравнение разрешимо тогда и только тогда, когда правая часть* f *удовлетворяет* $(-\varkappa)$ *условиям вида*

$$\int_L f\psi_k\,dt = 0, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa-1, \tag{47,18}$$

где ψ_k *— определенные линейно независимые функции* (см. (47,16)). *При соблюдении этих условий уравнение имеет одно и только одно решение.*

В случае $\varkappa > 0$ совокупность решений однородного уравнения дается формулой (47,17); в случае $\varkappa \geqslant 0$ общее решение неоднородного уравнения дается формулой (47,10); в случае $\varkappa < 0$ условия разрешимости неоднородного уравнения даются формулами (47,16), а решение — формулой (47,10) при $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$.

Замечание 1. На практике часто выгоднее пользоваться непосредственно формулой (47,9); см., например, следующее замечание.

Замечание 2. Если в характеристическом уравнении (47,1) $A(t_0) = 0$ и, следовательно, по условию $B(t_0) \neq 0$ всюду на L, можно, не нарушая общности, считать $B(t_0) = 1$; тогда уравнение примет вид

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} = f(t_0). \tag{47,19}$$

---

[1]) В сущности, И. Н. Векуа дал формулы лишь для случая, когда L состоит из одного замкнутого контура. Но обобщение на случай нескольких контуров ничего принципиально нового не требует после того, как решена соответствующая задача сопряжения.

Будем считать, что положительное направление на L выбрано так, как в § 29, п. 1°, и пусть S^+, S^- обозначают то же, что и в упомянутом месте (см. рис. 16 на стр. 107).

В нашем случае $G(t) = -1$. Легко видеть (ср. § 35, замечание 4), что каноническая функция $X(z)$ определяется (с точностью до постоянного множителя) формулой

$$X(z) = \begin{cases} -1 & \text{при} \quad z \in S^+, \\ +1 & \text{при} \quad z \in S^-. \end{cases} \tag{47,20}$$

Таким образом, $X^+(t) = -1$, $X^-(t) = 1$, и формула (47,9) дает:

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)\,dt}{t - t_0}. \tag{47,21}$$

Мы получили, как и следовало ожидать, формулу обращения, выведенную в § 32 иным путем.

З а м е ч а н и е 3. Обобщение на случай, когда контуры, составляющие L, могут иметь конечное число общих точек, никаких затруднений не представляет; ср. § 35, замечание 3.

§ 48. Решение уравнения, союзного с характеристическим. Рассмотрим теперь уравнение

$$K^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t - t_0} = g(t_0), \tag{48,1}$$

союзное с уравнением $K^0\varphi = f$; индекс $\varkappa'$ этого уравнения равен $(-\varkappa)$, если $\varkappa$ по-прежнему обозначает индекс оператора K^0.

Уравнение (48,1) можно также свести к задаче сопряжения следующим простым приемом[1]). Введем кусочно-голоморфную функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t - z}, \tag{48,2}$$

исчезающую на бесконечности. Принимая во внимание формулы

$$B(t_0)\,\psi(t_0) = \Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0), \qquad \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t - t_0} = \Psi^+(t_0) + \Psi^-(t_0),$$

заключаем, что уравнение (48,1) эквивалентно следующей задаче:

Найти функцию $\psi(t)$ класса H и кусочно-голоморфную функцию $\Psi(z)$, исчезающую на бесконечности, по условиям

$$\begin{aligned} A(t_0)\,\psi(t_0) &= \Psi^+(t_0) + \Psi^-(t_0) + g(t_0), \\ B(t_0)\,\psi(t_0) &= \Psi^+(t_0) - \Psi^-(t_0). \end{aligned} \tag{48,3}$$

Последние же условия в свою очередь эквивалентны условиям

$$(A + B)\,\psi = 2\Psi^+ + g, \qquad (A - B)\,\psi = 2\Psi^- + g$$

или еще

$$\psi = \frac{2\Psi^+}{A + B} + \frac{g}{A + B}, \qquad \psi = \frac{2\Psi^-}{A - B} + \frac{g}{A - B}. \tag{48,4}$$

---

[1]) Этот прием был указан автором (для более общего случая — системы сингулярных уравнений) и опубликован в статье Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа [1]. Рассматриваемое уравнение обычно приводят к характеристическому путем подстановки $B(t)\,\psi(t) = \varphi(t)$; но такую подстановку нельзя признать законной, по крайней мере без дополнительных исследований, в случае, когда функция $B(t)$ не всюду отлична от нуля.

Сравнивая правые части, приходим к задаче сопряжения

$$\Psi^+(t_0) = [G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0) + \frac{B(t_0)\,g(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}, \tag{48,5}$$

где $G(t_0)$ обозначает то же, что в предыдущем параграфе,

$$G(t_0) = \frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{48,6}$$

причем требуется найти решение, исчезающее на бесконечности. Решив эту задачу, мы получим решение исходной задачи по любой из формул (48,4).

Обратим внимание на то, что однородная задача сопряжения

$$\Psi^+(t_0) = [G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0), \tag{48,7}$$

получающаяся из (48,5) при $g = 0$, является союзной (§ 36) с однородной задачей сопряжения, получающейся из (47,5), при $f = 0$. Поэтому если $X(z)$ и $\varkappa$ обозначают каноническое решение и индекс этой последней задачи, то $[X(z)]^{-1}$ и $\varkappa' = -\varkappa$ будут каноническим решением и индексом задачи (48,7). В соответствии с этим общее решение задачи (48,5), исчезающее на бесконечности, представится при $\varkappa' \geqslant 0$ (т. е. при $\varkappa \leqslant 0$) в виде

$$\Psi(z) = \frac{[X(z)]^{-1}}{2\pi i}\int_L \frac{X^+(t)\,B(t)\,g(t)\,dt}{[A(t)-B(t)](t-z)} + [X(z)]^{-1} Q_{\varkappa'-1}(z), \tag{48,8}$$

где $Q_{\varkappa'-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa'-1$ ($Q_{\varkappa'-1}(z) = 0$ при $\varkappa' = 0$).

При $\varkappa' < 0$ (т. е. $\varkappa > 0$) решение дается той же формулой (48,8) при $Q_{\varkappa'-1}(z) = 0$, если соблюдены следующие необходимые и достаточные условия разрешимости:

$$\int_L \frac{X^+(t)\,B(t)\,g(t)\,t^k\,dt}{A(t)-B(t)} = 0, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa'-1. \tag{48,9}$$

Из (48,8), пользуясь любой из формул (48,4), получаем после простых преобразований

$$\psi(t_0) = \mathbf{K}^{*\prime} g + \frac{P_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \tag{48,10}$$

где $\mathbf{K}^{*\prime}$ обозначает оператор, союзный с оператором $\mathbf{K}^*$ предыдущего параграфа, т. е.

$$\mathbf{K}^{*\prime} g \equiv A^*(t_0)\,g(t_0) + \frac{1}{\pi i Z(t_0)}\int_L \frac{Z(t)\,B^*(t)\,g(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{48,11}$$

причем $A^*(t)$, $B^*(t)$, $Z(t)$ обозначают то же, что в предыдущем параграфе (формулы (47,12), (47,13)).

Условия же (48,9) можно переписать так:

$$\int_L t^k Z(t)\,B^*(t)\,g(t)\,dt = 0, \qquad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa'-1. \tag{48,12}$$

Общее решение однородного уравнения дается при $\varkappa' > 0$ формулой

$$\psi(t) = \frac{P_{\varkappa'-1}(t)}{Z(t)}, \tag{48,13}$$

где $P_{\varkappa'-1}(t)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa'-1$. Следовательно, при $\varkappa' > 0$ однородное уравнение имеет ровно $\varkappa'$ линейно независимых решений; при $\varkappa' \leqslant 0$ однородное уравнение не имеет решений, отличных от нуля.

Итак, уравнение $K^{0\prime}\psi = g$ обладает такими же свойствами, как и уравнение $K^0\varphi = f$; мы подразумеваем под этим, что по отношению к уравнению $K^{0\prime}\psi = g$ справедливы утверждения I—IV предыдущего параграфа при условии замены K^0 на $K^{0\prime}$ и $\varkappa$ на $\varkappa' = -\varkappa$.

Мы видим теперь, что функции ψ_k, фигурирующие в условиях (47,18) разрешимости уравнения $K^0\varphi = f$, представляют собой полную систему линейно независимых решений союзного с ним однородного уравнения $K^{0\prime}\psi = 0$; точно так же условия (48,12) разрешимости уравнения $K^{0\prime}\psi = g$ можно записать так:

$$\int_L g\varphi_k\,dt = 0, \tag{48,14}$$

где φ_k $(k = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ — полная система линейно независимых решений однородного уравнения $K^0\varphi = 0$, союзного с предыдущим. Эти предложения представляют собой частный случай важной теоремы, которая будет доказана в § 53.

Отметим еще следующий факт, также представляющий собой частный случай важной общей теоремы, которая будет доказана в том же § 53: разность числа k линейно независимых решений однородного уравнения $K^0\varphi = 0$ и числа k' линейно независимых решений союзного однородного уравнения $K^{0\prime}\psi = 0$ равна индексу оператора K^0:

$$k - k' = \varkappa. \tag{48,15}$$

В самом деле, при $\varkappa \geqslant 0$ $k = \varkappa$, $k' = 0$; при $\varkappa \leqslant 0$ $k = 0$, $k' = -\varkappa$.

§ 49. Некоторые замечания общего характера[1]**).** Прежде чем идти дальше, сделаем несколько общих замечаний. Как известно, различие между уравнением Фредгольма второго рода

$$N\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0), \tag{49,1}$$

где[2]) $A(t_0) \neq 0$ всюду на L, и уравнением Фредгольма первого рода

$$\int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0), \tag{49,2}$$

---

[1]) В этом параграфе мы пользуемся некоторыми общими понятиями функционального анализа; соответствующие места могут быть пропущены без ущерба для понимания остального, так как в дальнейшем этими понятиями мы, за исключением одного параграфа (§ 133), который также может быть опущен, пользоваться не будем. Для интересующихся приложениями общих методов функционального анализа к сингулярным интегральным уравнениям укажем следующие работы: Ф. В. Аткинсон [1], Н. И. Ахиезер [1], Ф. Д. Беркович [1], И. Ц. Гохберг [1] — [6], И. Ц. Гохберг и М. Г. Крейн [1], [2], И. Ц. Гохберг и М. К. Замбицкий [1], А. И. Гусейнов [2], Х. М. Коган [1], А. Е. Косулин [2], [3], М. Г. Крейн [1], С. Г. Михлин [1] — [7], Б. А. Пламеневский [1], З. Пресдорф [1] — [5], С. Г. Самко [1], И. Б. Симоненко [6], С. А. Фрейдкин [2] — [4], С. А. Фрейдкин и М. В. Прокопец [1], З. И. Халилов [3], Д. Ф. Харазов и Б. В. Хведелидзе [1], Б. В. Хведелидзе [18], Ю. И. Черский [1], J. Elliott [1], [2], G. Fichera [1], W. Koppelman [1] — [3], W. Koppelman and J. Pincus [1], D. Przeworska-Rolewicz [1] — [3], C. R. Putnam [1], H. Schaefer [1], J. Schwartz [1], M. Shinbrot [1].

[2]) Мы вводим коэффициент $A(t_0)$ для облегчения сравнения с сингулярным уравнением; можно в (49,1) всегда считать $A(t_0) = 1$.

получающимся из (49,1) при $A(t_0)=0$, весьма существенно. Такого существенного различия нет между сингулярными уравнениями

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt=f(t_0) \qquad (49{,}3)$$

и

$$\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt=f(t_0). \qquad (49{,}4)$$

Сингулярные уравнения (49,3) и (49,4) обычно также называют соответственно уравнениями второго и первого рода (и мы тоже иногда будем так поступать), но эта классификация менее оправдана, чем в случае уравнений Фредгольма: уравнение (49,4), как мы увидим в дальнейшем и как мы уже видели на простом примере (§ 47, замечание 2), есть попросту частный случай уравнения (49,3). Причина этого сводится, в общем, к следующему.

Будем для простоты считать, что ядро $n(t_0, t)$, а также коэффициент $A(t_0)$ и свободные члены в (49,1) и (49,2) — непрерывные функции и что решения $\varphi(t)$ разыскиваются в функциональном пространстве C непрерывных функций, в котором норма определена как $\max|\varphi(t)|$, а расстояние между $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$ — как $\max|\varphi_2(t)-\varphi_1(t)|$ на L.

Обозначим через $\mathbf{E}$ единичный оператор, т. е. такой, что $\mathbf{E}\varphi\equiv\varphi$, а через $\mathbf{n}$ оператор, определяемый формулой

$$\mathbf{n}\varphi\equiv\int\limits_L n(t_0, t)\varphi(t)\,dt. \qquad (49{,}5)$$

Тогда уравнение (49,1) перепишется так:

$$A\mathbf{E}\varphi+\mathbf{n}\varphi=f. \qquad (49{,}1\text{a})$$

Линейный оператор $\mathbf{n}$ представляет собой *вполне непрерывный оператор*, т. е. переводит всякое ограниченное (по модулю) множество функций $\varphi(t)$ в компактное множество, тогда как оператор $\mathbf{E}$ есть просто непрерывный оператор. Таким образом, в операторе $A\mathbf{E}+\mathbf{n}$ части $A\mathbf{E}$ и $\mathbf{n}$ обладают существенно различными свойствами.

Обратимся теперь к сингулярному уравнению (49,3) и запишем его так:

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A\mathbf{E}\varphi+B\mathbf{I}\varphi+\mathbf{k}\varphi=f, \qquad (49{,}3\text{a})$$

где $\mathbf{I}$ и $\mathbf{k}$ обозначают операторы, определяемые формулами

$$\mathbf{I}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \qquad \mathbf{k}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt. \qquad (49{,}6)$$

Будем считать для простоты, что $A(t_0)$, $B(t_0)$, $k(t_0, t)$ удовлетворяют на L условию $H(\nu)$, и пусть μ — некоторое фиксированное положительное число такое, что $\mu\leqslant\nu$, $\mu<1$ [1]).

Введем в рассмотрение множество всех функций $\varphi(t)$, удовлетворяющих на L условию $H(\mu)$, и определим норму $|\varphi(t)|$ следующим образом:

$$|\varphi(t)|=M+M_0,$$

[1]) Условие $\mu<1$ мы вводим, лишь имея в виду приложения к рассматриваемым интегралам типа Коши. При определении же нормированного пространства H^{μ} (см. ниже) и доказательстве его полноты можно при $\nu=1$ считать $\mu\leqslant 1$; это относится и к доказательству того, что оператор $\mathbf{k}$ (см. ниже) вполне непрерывный.

где

$$M = \max |\varphi(t)|, \qquad M_0 = \sup \frac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\mu}} \quad \text{на } L$$

(в последнем равенстве sup обозначает точную верхнюю границу); соответственно этому *расстояние* между функциями $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ определим как $\|\varphi_2(t) - \varphi_1(t)\|$. Легко видеть, что аксиома треугольника (так же как и все прочие, необходимые для нормы и расстояния, аксиомы) соблюдена и что множество функций $\varphi(t)$ составляет полное нормированное линейное пространство, которое мы обозначим через H^{μ} [1]).

Легко видеть, что **I** в пространстве H^{μ} представляет собой, так же как и **E**, непрерывный (но не вполне непрерывный) оператор и что тем же свойством обладает оператор $A\mathbf{E} + B\mathbf{I}$. Поэтому, вообще говоря, целесообразно рассматривать характеристическую часть $A\mathbf{E} + B\mathbf{I}$ оператора **K** как одно целое.

Что же касается оператора **k**, то он существенно отличается от **E** и **I**, так как он представляет собой *вполне непрерывный оператор в пространстве* H^{μ}, т. е. переводит всякое ограниченное множество функций φ в компактное (в смысле метрики пространства H^{μ}). Докажем это. Пусть $\{\varphi\}$ — множество функций пространства H^{μ}, такое, что $\|\varphi\| \leqslant R$, где R — постоянная. Из определения нормы $\|\varphi\|$ следует тогда, что функции φ равномерно ограничены и равностепенно непрерывны [2]). Следовательно, по теореме Арцеля из всякого бесконечного подмножества этих функций φ можно выбрать равномерно сходящуюся подпоследовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ Обозначим ее предел (в обычном смысле, т. е. в смысле метрики в C) через φ. Пусть $\psi_n = \mathbf{k}\varphi_n$, $\psi = \mathbf{k}\varphi$. Наше предложение будет доказано, если мы покажем, что ψ_n стремится к ψ в смысле метрики в H^{μ}, т. е. что $\|\omega_n\| \to 0$, где

---

[1]) Докажем полноту нашего пространства. Пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ — какая-либо фундаментальная последовательность в этом пространстве, так что при всяком целом $p > 0$

$$\|\varphi_{n+p} - \varphi_n\| \leqslant \varepsilon_n, \tag{*}$$

где ε_n не зависит от p и $\lim\limits_{n\to\infty} \varepsilon_n = 0$.

Из (*) следует, что последовательность $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$ является фундаментальной и в пространстве C, так что существует $\lim\limits_{n\to\infty} \varphi_n = \varphi$ в том смысле, что $\lim\limits_{n\to\infty} \max |\varphi - \varphi_n| = 0$. Далее, из (*) следует:

$$\sup \left| \frac{\varphi_{n+p}(t_2) - \varphi_{n+p}(t_1)}{|t_2 - t_1|^{\mu}} - \frac{\varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1)}{|t_2 - t_1|^{\mu}} \right| \leqslant \varepsilon_n,$$

откуда вследствие того, что ε_n не зависит от p, следует:

$$\sup \left| \frac{\varphi(t_2) - \varphi(t_1)}{|t_2 - t_1|^{\mu}} - \frac{\varphi_n(t_2) - \varphi_n(t_1)}{|t_2 - t_1|^{\mu}} \right| \leqslant \varepsilon_n.$$

Отсюда следует, очевидно, что $\dfrac{|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)|}{|t_2 - t_1|^{\mu}}$ — ограниченная величина и что поэтому функция φ принадлежит пространству H^{μ}; очевидно, далее, что $\lim\limits_{n\to\infty} \|\varphi - \varphi_n\| = 0$, а это доказывает полноту пространства H^{μ}.

[2]) Ибо $|\varphi(t_2) - \varphi(t_1)| \leqslant M_0 |t_2 - t_1|^{\mu} \leqslant R |t_2 - t_1|^{\mu}$.

$\omega_n = \psi - \psi_n$. Но это непосредственно вытекает из того, что, во-первых, $\max |\omega_n| \to 0$ и, во-вторых,

$$\omega_n(t_2) - \omega_n(t_1) = \frac{1}{\pi i} \int_L [k(t_2, t) - k(t_1, t)] \rho_n(t)\, dt,$$

откуда

$$\frac{|\omega_n(t_2) - \omega_n(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\mu} \leqslant \frac{1}{\pi} \int_L \frac{|k(t_2, t) - k(t_1, t)|}{|t_2 - t_1|^\mu} |\rho_n(t)|\, dt,$$

где $\rho_n = \varphi - \varphi_n$, и, следовательно,

$$\sup \frac{|\omega_n(t_2) - \omega_n(t_1)|}{|t_2 - t_1|^\mu} \to 0.$$

Таким образом, наше утверждение доказано.

Из сказанного ясно, в частности, что в сингулярном операторе $\mathbf{K}$ его характеристическая часть $A\mathbf{E} + B\mathbf{I}$ должна играть роль, аналогичную той, которую играет часть $A\mathbf{E}$ в операторе Фредгольма $\mathbf{N}$. Однако следует иметь в виду и существенное различие: оператор $A\mathbf{E}$ обратим, т. е. уравнение $A\mathbf{E}\varphi = f$ всегда однозначно разрешимо, тогда как оператор $A\mathbf{E} + B\mathbf{I}$ не всегда обратим[1]). Действительно, мы видели, что уравнение

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A\mathbf{E}\varphi + \mathbf{I}\varphi = f$$

разрешимо при всякой правой части f лишь тогда, когда $\varkappa \geqslant 0$, и однозначно разрешимо при всяком f лишь тогда, когда $\varkappa = 0$. Мы увидим ниже, что сингулярное уравнение с индексом $\varkappa = 0$ во многом аналогично уравнению Фредгольма (второго рода).

З а м е ч а н и е. То обстоятельство, что в левой части (49,3а) члены $A\mathbf{E}\varphi$ и $B\mathbf{I}\varphi$ в известном смысле равноправны, можно усмотреть еще из следующего. Произведем подстановку $\psi = \mathbf{I}\varphi$, где ψ — новая искомая функция. Тогда на основании формулы обращения (§ 32) $\varphi = \mathbf{I}\psi$ и уравнение (49,3а) принимает вид

$$B\mathbf{E}\psi + A\mathbf{I}\psi + \mathbf{k}_1\psi = f,$$

где, как легко видеть, оператор $\mathbf{k}_1$ имеет такой же вид, как оператор $\mathbf{k}$; таким образом, коэффициенты A и B попросту обмениваются местами.

§ 50. О регуляризации сингулярного интегрального уравнения. Обычный метод исследования сингулярного интегрального уравнения заключается в его р е г у л я р и з а ц и и, т. е. в приведении его к уравнению Фредгольма. Один из способов регуляризации мы сейчас укажем [2]).

Пусть дано сингулярное интегральное уравнение

$$\mathbf{K}\varphi = f \tag{50,1}$$

и пусть $\mathbf{M}$ — какой-либо сингулярный оператор, регуляризирующий $\mathbf{K}$ (§ 45).

Произведя операцию $\mathbf{M}$ над обеими частями предыдущего уравнения, получим уравнение Фредгольма

$$\mathbf{N}\varphi \equiv \mathbf{M}\mathbf{K}\varphi = \mathbf{M}f. \tag{50,2}$$

[1]) С этим как раз и связано (см. С. М. Никольский [1]) несовпадение основных теорем теории сингулярных уравнений с теоремами Фредгольма.

[2]) Этот способ — наиболее часто применяемый до последнего времени; он был указан (в различных частных осуществлениях) самими основателями теории сингулярных уравнений — Пуанкаре и Гильбертом. В общем виде он появляется у Ф. Нетера (F. Noether [1]).

Ясно, что всякое решение исходного уравнения будет решением и уравнения Фредгольма (50,2); обратное же заключение, вообще говоря, не справедливо [1]); следовательно, уравнения (50,1) и (50,2), вообще говоря, не эквивалентны. Однако легко видеть, что, умея находить все решения уравнения Фредгольма (50,2), можно найти и все решения исходного уравнения (50,1). Об этом будет подробнее сказано ниже (§ 53); пока же мы отметим одно непосредственное следствие из предыдущего:

Число линейно независимых решений однородного сингулярного уравнения

$$\mathrm{K}\varphi = 0 \tag{50,3}$$

конечно.

Действительно, все решения предыдущего уравнения являются решениями однородного уравнения Фредгольма $\mathrm{MK}\varphi = 0$; число же линейно независимых решений последнего, как известно, конечно.

Отметим еще следующее важное обстоятельство. Уравнение Фредгольма (50,2) имеет вид [2])

$$\mathrm{N}\varphi \equiv a(t_0)\,\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = g(t_0), \tag{50,4}$$

где, как легко проверить на основании результатов § 45, $a(t_0) \neq 0$ всюду на L и принадлежит классу H, правая часть $g(t_0) = \mathrm{M}f(t_0)$ также принадлежит классу H, а ядро $n(t_0, t)$ имеет вид

$$n(t_0, t) = \frac{n^*(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda = \mathrm{const} < 1, \tag{50,5}$$

где $n^*(t_0, t)$ принадлежит классу H.

Решения уравнения Фредгольма обычно разыскиваются в классе непрерывных функций; для наших же целей нам важно находить решения класса H. Однако нет необходимости заранее налагать это последнее дополнительное условие на решение уравнения Фредгольма (50,4), ибо оно будет удовлетворено автоматически. А именно, легко показать, что при принятых условиях всякое непрерывное (и даже просто ограниченное и интегрируемое) решение уравнения (50,4) необходимо принадлежит классу H. Это будет показано в следующем параграфе.

§ 51. О характере непрерывности решений уравнения Фредгольма.

1°. Имея в виду доказать предложение, высказанное в конце предыдущего параграфа, рассмотрим уравнение Фредгольма

$$a(t_0)\,\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = g(t_0). \tag{51,1}$$

Под $a(t_0)$ мы будем подразумевать заданную функцию класса H, не обращающуюся в нуль [3]), и будем считать, что ядро $n(t_0, t)$

---

[1]) Об этом будет подробно сказано ниже (см. § 53).

[2]) Мы считаем, как всегда, что рассматриваемые сингулярные операторы удовлетворяют условиям, указанным в § 44. Кроме того, мы, как всегда, считаем, что правая часть $f(t_0)$ в (50,1) принадлежит классу H и что неизвестная функция $\varphi(t)$ подчинена тому же условию.

[3]) Не нарушая общности, можно считать $a(t_0) = 1$.

представимо в виде

$$n(t_0, t) = \frac{n^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\lambda}, \qquad 0 < \lambda = \text{const} < 1, \tag{51,2}$$

где $n^*(t_0, t)$ принадлежит классу H по обеим переменным.

Мы покажем, что если функция $g(t_0)$ принадлежит классу H, то любое ограниченное интегрируемое решение $\varphi(t)$ уравнения (51,1) также принадлежит классу H.

Из (51,1) следует:

$$\varphi(t_0) = -\frac{\omega(t_0)}{a(t_0)} + \frac{g(t_0)}{a(t_0)}, \tag{51,1a}$$

где положено

$$\omega(t_0) = \int_L n(t_0, t)\varphi(t)\,dt = \int_L \frac{n^*(t_0, t)\varphi(t)\,dt}{|t-t_0|^\lambda}. \tag{51,3}$$

Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что функция $\omega(t_0)$ принадлежит классу H, какова бы ни была ограниченная интегрируемая функция $\varphi(t)$. А для этого в свою очередь достаточно показать, что функция

$$\omega(t_0, t_1) = \int_L \frac{n^*(t_1, t)\varphi(t)\,dt}{|t-t_0|^\lambda}$$

удовлетворяет условию H по t_0 и t_1 (t_1, как и t_0, — произвольная точка на L).

Это утверждение по отношению к t_1 почти очевидно: обозначая через μ показатель условия H функции $n^*(t_1, t)$ по t_1, получаем:

$$|\omega(t_0, t_1+h) - \omega(t_0, t_1)| \leqslant \int_L \frac{|n^*(t_1+h, t) - n^*(t_1, t)|\,|\varphi(t)|\,ds}{|t-t_0|^\lambda} \leqslant$$

$$\leqslant B|h|^\mu \int_L \frac{ds}{|t-t_0|^\lambda} \leqslant B_0|h|^\mu, \tag{51,4}$$

где B и B_0 — постоянные.

Докажем теперь утверждение относительно t_0. Имеем:

$$\omega(t_0+h, t_1) - \omega(t_0, t_1) = \int_L \frac{|t-t_0|^\lambda - |t-t_0-h|^\lambda}{|t-t_0|^\lambda\,|t-t_0-h|^\lambda} n^*(t_1, t)\varphi(t)\,dt,$$

откуда, вспоминая, что $|t-t_0|^\lambda$ удовлетворяет условию $H(\lambda)$, получаем

$$|\omega(t_0+h, t_1) - \omega(t_0, t_1)| \leqslant C|h|^\lambda \int_L \frac{ds}{|t-t_0|^\lambda\,|t-t_0-h|^\lambda} = C|h|^\lambda I,$$

где C — постоянная. Разобьем теперь интеграл I на два: $I = I_1 + I_2$, где I_1 берется по стандартной дуге l, вырезаемой из L кругом стандартного радиуса R, описанным из t_0, как из центра, а I_2 — по линии $L - l$. Не нарушая общности, можно считать, что $|h| < \frac{R}{2}$. Тогда, очевидно, $|I_2| < C_2$, где C_2 — постоянная. Далее, вводя переменную $r = |t - t_0|$, получаем:

$$|I_1| < C_1 \int_0^R \frac{dr}{r^\lambda |r-\delta|^\lambda},$$

где C_1 — постоянная и где для краткости введено обозначение $|h| = \delta$. Вводя новую переменную интегрирования ρ соотношением $r = \delta \cdot \rho$, получаем:

$$|I_1| < C_1 \delta^{1-2\lambda} \int_0^{\frac{R}{\delta}} \frac{d\rho}{\rho^\lambda |1-\rho|^\lambda}.$$

Если теперь $\lambda > \frac{1}{2}$, то

$$\int_0^{\frac{R}{\delta}} \frac{d\rho}{\rho^\lambda |1-\rho|^\lambda} < \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^\lambda |1-\rho|^\lambda} = \text{const}$$

(последний интеграл — сходящийся), и мы можем считать наше предложение доказанным, так как всегда можно предполагать, что в формуле (51,2) $\lambda > \frac{1}{2}$ $\left(\text{не представляет никакого труда произвести и непосредственную оценку также при } \lambda \leqslant \frac{1}{2}\right)$.

2°. Предыдущий результат можно несколько обобщить. Именно, пусть функция $\varphi(t)$ интегрируема на L и ограничена всюду на L, кроме, быть может, (сколь угодно малых) окрестностей конечного числа точек c на L, вблизи которых эта функция может быть неограниченной, так, однако, что

$$|\varphi(t)| < \frac{\text{const}}{|t-c|^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha = \text{const} < 1; \tag{51,5}$$

пусть, далее, $\varphi(t)$ удовлетворяет уравнению (51,1), за исключением, быть может, значений $t = c$. Тогда, как будет сейчас показано, $\varphi(t)$ принадлежит классу H на L, если приписать этой функции надлежащие значения в точках c.

При доказательстве можно, очевидно, ограничиться случаем, когда имеется лишь одна точка c. Наше утверждение будет доказано, если мы покажем, что функция $\omega(t_0)$, определяемая формулой (51,3), ограничена, ибо тогда мы сможем воспользоваться результатом предыдущего пункта.

Имеем:

$$|\omega(t_0)| \leqslant K \int_L \frac{ds}{|t-c|^\alpha |t-t_0|^\lambda},$$

где K — некоторая постоянная. Для оценки $|\omega(t_0)|$ с интересующей нас точки зрения достаточно, очевидно, оценить интеграл

$$I_0(t_0) = \int_l \frac{ds}{|t-c|^\alpha |t-t_0|^\lambda},$$

где l обозначает дугу, вырезаемую из L окружностью стандартного радиуса R с центром в c, а t_0 принадлежит дуге l, не совпадая с c.

Полагая $r = |t - c|$, $r_0 = |t_0 - c|$, будем иметь:

$$I_0(t_0) \leqslant K' \int_0^R \frac{dr}{r^\alpha |r - r_0|^\lambda} = K' I'(t_0),$$

где K' — некоторая постоянная.

Если $\alpha + \lambda < 1$, то интеграл

$$I'(t_0) = \int_0^R \frac{dr}{r^\alpha |r - r_0|^\lambda}$$

ограничен[1]), и наше утверждение доказано.

Случай $\alpha + \lambda = 1$ мы можем исключить путем некоторого (сколь угодно малого) увеличения числа α (или λ).

Рассмотрим случай $\alpha + \lambda > 1$. Произведя подстановку $r = r_0 \cdot \rho$, получим:

$$I'(t_0) = \frac{1}{r_0^{\alpha+\lambda-1}} \int_0^{\frac{R}{r_0}} \frac{d\rho}{\rho^\alpha |1 - \rho|^\lambda} < \frac{1}{r_0^{\alpha+\lambda-1}} \int_0^\infty \frac{d\rho}{\rho^\alpha |1 - \rho|^\lambda},$$

ибо последний интеграл — сходящийся.

Из предыдущей оценки вытекает аналогичная оценка для функции $\omega(t_0)$:

$$|\omega(t_0)| < \frac{\text{const}}{|t_0 - c|^{\alpha+\lambda-1}},$$

что приводит на основании равенства (51,1а) к следующей новой оценке для $\varphi(t)$:

$$|\varphi(t)| \leqslant \frac{\text{const}}{|t - c|^{\alpha'}},$$

где $\alpha' = \alpha + \lambda - 1 < \alpha$. Если $\alpha' + \lambda < 1$, то мы приходим к предыдущему случаю. Если же $\alpha' + \lambda > 1$ (случай $\alpha' + \lambda = 1$ можно, как выше, исключить), мы можем повторить предыдущие рассуждения, и ясно, что после конечного числа таких операций мы придем к случаю, когда, при новых обозначениях, $\alpha + \lambda < 1$. Таким образом, наше утверждение доказано.

§ 52. О резольвенте уравнения Фредгольма. Напомним еще некоторые результаты теории уравнения Фредгольма

$$\mathrm{N}\varphi \equiv a(t_0)\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\varphi(t)\,dt = g(t_0). \tag{52,1}$$

Относительно элементов, входящих в предыдущее уравнение, мы сделаем пока несколько более общие предположения, чем выше, а именно, будем считать, что $a(t)$ — непрерывная функция, не обращающаяся в нуль[2]), а

$$n(t_0, t) = \frac{n^*(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \tag{52,2}$$

где $n^*(t_0, t)$ — непрерывная на L функция. Функцию $g(t)$ мы будем также считать непрерывной.

---

[1]) Ср. стр. 79.

[2]) Не нарушая общности, можно считать, как это обычно и делается, $a(t) = 1$.

Из теории уравнений Фредгольма мы будем считать известным следующее. Если однородное уравнение

$$N\varphi=0 \tag{52,3}$$

не имеет решений, отличных от нулевого, то уравнение (52,1) имеет единственное решение при всякой правой части $g(t)$, и это решение дается формулой

$$\varphi(t_0)=\Gamma g\equiv\alpha(t_0)g(t_0)+\int_L\gamma(t_0,\ t)g(t)\,dt, \tag{52,4}$$

где $\alpha(t_0)=\frac{1}{a(t_0)}$, а $\gamma(t_0,\ t)$ — вполне определенная функция, имеющая вид

$$\gamma(t_0,\ t)=\frac{\gamma^*(t_0,\ t)}{|t-t_0|^\lambda},\quad 0\leqslant\lambda<1,$$

причем $\gamma^*(t_0,\ t)$ — непрерывная функция. Функция $\gamma(t_0,\ t)$ называется резольвентой Фредгольма.

Обратимся теперь к случаю, когда однородное уравнение (52,3) имеет отличные от нуля решения. Как мы уже упоминали, уравнение это может иметь лишь конечное число линейно независимых решений, и столько же линейно независимых решений будет иметь союзное с ним уравнение

$$N'\psi=0. \tag{52,5}$$

Обозначим соответственно через $\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n$ и $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_n$ полные системы линейно независимых решений однородных уравнений (52,3) и (52,5).

Неоднородное уравнение (52,1) имеет решения тогда и только тогда, когда правая его часть удовлетворяет условиям

$$\int_L g(t)\psi_j(t)\,dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{52,6}$$

Покажем теперь, что и в рассматриваемом случае существует оператор Γ такого же вида, как оператор, фигурирующий в (52,4) и обладающий следующим свойством: если соблюдены условия (52,6), то функция

$$\varphi(t_0)=\Gamma g\equiv\alpha(t_0)g(t_0)+\int_L\gamma(t_0,\ t)g(t)\,dt$$

представляет собой решение (точнее, одно из решений) уравнения (52,1); функцию $\gamma(t_0,\ t)$ можно в этом случае назвать обобщенной резольвентой Фредгольма[1]).

Способ, который будет нами применен [2]), заключается в сведении вопроса к случаю, когда однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений.

Введем с этой целью две системы функций $\xi_1(t),\ \xi_2(t),\ \ldots,\ \xi_n(t)$ и $\eta_1(t),\ \eta_2(t),\ \ldots,\ \eta_n(t)$ класса H[3]), связанных с функциями

[1]) Такая резольвента имеется у самого Фредгольма. Весьма простая теория обобщенной резольвенты дана в работе В. А. Гурвица (W. A. Hurwitz [1]), который называет ее псевдорезольвентой. Метод построения обобщенной резольвенты, приводимый в тексте, заимствован у этого автора.

[2]) См. предыдущее примечание.

[3]) Это условие мы налагаем, имея в виду приложения к сингулярным уравнениям; Гурвиц этого условия не вводит, ограничиваясь рассмотрением непрерывных функций (в действительной области).

$\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ и $\psi_1(t), \psi_2(t), \ldots, \psi_n(t)$ следующими соотношениями:

$$\int_L \varphi_i \xi_j \, dt = \delta_{ij}, \quad \int_L \psi_i \eta_j \, dt = \delta_{ij}, \tag{52,7}$$

где

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ при } i = j, \\ 0 \text{ при } i \neq j. \end{cases}$$

Такие функции ξ_i и η_i всегда можно построить, при этом бесчисленным множеством способов. Это доказано в Добавлении IV в конце книги.

Рассмотрим наряду с уравнением (52,1) новое интегральное уравнение Фредгольма

$$a(t_0)\varphi(t_0) + \int_L \left\{ n(t_0, t) + \sum_{i=1}^{n} \eta_i(t_0)\xi_i(t) \right\} \varphi(t)\, dt = g(t_0) \tag{52,8}$$

и покажем, что всякое его решение является в то же время решением исходного уравнения (52,1), если только соблюдены условия (52,6). В самом деле, пусть $\varphi(t)$ — какое-либо решение (если таковое существует) уравнения (52,8); тогда в силу самого этого уравнения

$$\mathrm{N}\varphi(t_0) + \sum_{i=1}^{n} a_i \eta_i(t_0) = g(t_0), \tag{52,9}$$

где a_i — постоянные:

$$a_i = \int_L \varphi(t)\xi_i(t)\, dt. \tag{52,10}$$

Умножая обе части (52,9) на $\psi_k(t_0)\,dt_0$, интегрируя по t_0 вдоль L, принимая во внимание (52,6), (52,7) и замечая, что (§ 46)

$$\int_L \psi_k \mathrm{N}\varphi \, dt_0 = \int_L \varphi \mathrm{N}'\psi_k \, dt_0 = 0 \tag{52,11}$$

(ибо $\mathrm{N}'\psi_k = 0$), получаем $a_k = 0$. Следовательно, в (52,9) все $a_i = 0$, и поэтому $\mathrm{N}\varphi = g(t_0)$, а это и требовалось показать.

Покажем, наконец, что однородное уравнение, получающееся из (52,8) при $g(t_0) = 0$, не имеет отличных от нуля решений. В самом деле, всякое решение этого последнего уравнения будет, как мы только что видели, также решением уравнения $\mathrm{N}\varphi = 0$[1]), притом таким, что все постоянные $a_i = 0$. Следовательно, во-первых, $\varphi = b_1\varphi_1 + b_2\varphi_2 + \ldots + b_n\varphi_n$, где $b_1, b_2, \ldots, b_n$ — постоянные; вспоминая, во-вторых, что $a_i = 0$, получаем, согласно формулам (52,10) и (52,7), что все $b_j = 0$, и наше утверждение доказано.

Из предыдущего вытекает, что неоднородное уравнение (52,8) однозначно разрешимо при всякой правой части $g(t_0)$, и это решение представится в виде $\varphi = \Gamma g$, где Γ — оператор указанного выше вида. Если, кроме того, соблюдены условия (52,6), то, как мы видели, Γg будет одним из решений исходного уравнения (52,1). Таким образом, существование обобщенной резольвенты доказано.

Общее решение уравнения (52,1) при соблюдении условий (52,6) представится, очевидно, в виде

$$\varphi = \Gamma g + c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n. \tag{52,12}$$

---

[1]) Ибо при $g(t) = 0$ условия (52,6), очевидно, удовлетворены.

Легко, далее, видеть, что оператор $\mathbf{\Gamma}'$, союзный с $\mathbf{\Gamma}$, играет ту же роль по отношению к уравнению $\mathbf{N}'\omega = g$, союзному с $\mathbf{N}\varphi = g$, как оператор $\mathbf{\Gamma}$ по отношению к этому последнему.

Отметим в заключение следующее обстоятельство. Предположим, что в уравнении (52,1) коэффициент $a(t_0)$ принадлежит классу H и ядро $n(t_0, t)$ имеет вид (52,2), где $n^*(t_0, t)$ также принадлежит классу H. Пусть $g(t_0)$ — произвольная функция точки t_0 на L класса H. Замечая, что функция $\varphi(t_0) = \mathbf{\Gamma} g(t_0)$ является решением уравнения (52,8), заключаем на основании результатов предыдущего параграфа, что $\mathbf{\Gamma} g(t_0)$ принадлежит классу H. То же самое, очевидно, имеет место для $\mathbf{\Gamma}' g(t_0)$.

§ 53. Основные теоремы. Сопоставление результатов, полученных в предыдущих параграфах, с основами теории уравнений Фредгольма легко приводит к общей теории сингулярного интегрального уравнения[1])

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)\,dt}{t - t_0} = f(t_0). \tag{53,1}$$

Общая теория уравнения (53,1) была в основном впервые дана Ф. Нетером (F. Noether [1]). Чрезвычайно простой вид теория получила в работах И. Н. Векуа, особенно в его работе [7]. Результаты И. Н. Векуа будут изложены в следующих параграфах.

В настоящем же параграфе мы будем в основном следовать методу Ф. Нетера[2]), внося в него некоторые уточнения и упрощения.

Пусть $\mathbf{M}$ — какой-либо оператор, регуляризирующий оператор $\mathbf{K}$ (см. § 45). Как и в § 50, выводим из (53,1) уравнение Фредгольма

$$\mathbf{N}\varphi \equiv \mathbf{MK}\varphi = \mathbf{M}f, \tag{53,2}$$

среди решений которого содержатся все решения уравнения (53,1).

Поставим себе целью найти общее решение уравнения (53,1), имея общее решение уравнения Фредгольма (53,2).

Прежде всего, напишем условия разрешимости уравнения (53,2), которые имеют вид

$$\int\limits_L \omega_j \mathbf{M}f\,dt_0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{53,3}$$

где $\omega_j = \omega_j(t_0)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, — полная система линейно независимых решений однородного уравнения Фредгольма

$$\mathbf{N}'\psi \equiv \mathbf{K}'\mathbf{M}'\psi = 0, \tag{53,4}$$

союзного с (53,2). Будем считать, что условия (53,3) которые на основании формулы (46,7) можно переписать и так:

$$\int\limits_L f\mathbf{M}'\omega_j\,dt_0 = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{53,5}$$

---

[1]) Мы считаем, как во всем этом отделе, что выполнены условия, принятые в § 44.

[2]) Ф. Нетер рассматривает сингулярное уравнение, представленное в виде, указанном в замечании 3 в конце § 44, но его рассуждения могут быть перенесены без всяких принципиальных изменений на рассматриваемый здесь случай. Такое перенесение, с некоторыми упрощениями (см. сноску в конце § 55), осуществлено в статьях В. Д. Купрадзе [3].

выполнены. Тогда общее решение уравнения (53,2) представится в виде (см. предыдущий параграф)

$$\varphi(t_0) = \mathbf{\Gamma M} f(t_0) + \sum_{i=1}^{n} c_i \chi_i(t_0), \tag{53,6}$$

где $\mathbf{\Gamma}$ — вполне определенный оператор указанного в предыдущем параграфе вида, χ_i $(i = 1, 2, \ldots, n)$ — полная система линейно независимых решений однородного уравнения $\mathbf{MK}\varphi = 0$, c_i — произвольные постоянные.

Но это решение уравнения (53,2) может не быть решением исходного уравнения (53,1). Действительно, если φ есть какое-либо решение уравнения (53,2), которое можно переписать так:

$$\mathbf{M}(\mathbf{K}\varphi - f) = 0,$$

то, очевидно,

$$\mathbf{K}\varphi - f = \sum_{i=1}^{m} a_i \xi_i, \tag{53,7}$$

где $\xi_1, \ldots, \xi_m$ — полная система линейно независимых решений уравнения $\mathbf{M}\xi = 0$, а $a_1, a_2, \ldots, a_m$ — некоторые постоянные. Эти последние, очевидно, вполне определены, если дана функция φ, т. е. если заданы постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$ в формуле (53,6).

Для того чтобы решение (53,6) уравнения (53,2) было также решением уравнения (53,1), необходимо и достаточно, чтобы все $a_i = 0$. Выразим последние условия через заданную функцию f и через постоянные c_j; с этой целью выразим постоянные a_i формулы (53,7) через только что указанные элементы. Для этого поступим так: пусть $\xi_1^*, \xi_2^*, \ldots, \xi_m^*$ — какие-либо определенные функции класса H на L такие, что

$$\int_L \xi_i(t_0)\, \xi_j^*(t_0)\, dt_0 = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j, \ \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j);$$

такие функции всегда можно подобрать[1]). Умножим теперь обе части (53,7) на $\xi_j^*(t_0)\, dt_0$ и проинтегрируем вдоль L. Тогда получим:

$$a_j = \int_L \xi_j^* (\mathbf{K}\varphi - f)\, dt_0.$$

Внося теперь вместо функции $\varphi(t_0)$ ее выражение (53,6) и производя простые преобразования[2]), получим формулы вида

$$a_j = f_j + \sum_{i=1}^{n} A_{ji} c_i, \tag{53,8}$$

где f_j — постоянные, выражающиеся через функцию f формулами

$$f_j = \int_L f_j^*(t_0)\, f(t_0)\, dt_0, \tag{53,9}$$

в которых $f_j^*(t_0)$ обозначают вполне определенные функции класса H, не зависящие ни от функции f, ни от постоянных c_i, а A_{ji} — вполне определенные постоянные, также не зависящие ни от f, ни от c_i. Следовательно,

---

[1]) См. Добавление IV в конце книги.

[2]) В частности, такое преобразование (см. § 46):

$$\int_L \xi_j^* \mathbf{K\Gamma M} f\, dt_0 = \int_L f \mathbf{M}'\mathbf{\Gamma}'\mathbf{K}' \xi_j^*\, dt_0.$$

для того чтобы функция φ, определяемая формулой (53,6), была решением исходного уравнения (53,1), необходимо и достаточно, чтобы постоянные c_i удовлетворяли системе линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{i=1}^{n} A_{ji}c_i + f_j = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{53,10}$$

Если эта система имеет решения, то имеет решения и исходное интегральное уравнение, и наоборот. Условия же разрешимости системы (53,10) выражаются, как известно, некоторым числом (нам оно сейчас безразлично) соотношений вида

$$\sum_{j=1}^{m} B_{ij}f_j = 0,$$

где B_{ij} — определенные постоянные. Вспоминая, что постоянные f_j имеют вид (53,9), мы можем переписать предыдущие условия в виде

$$\int_L f(t)\,\psi_j^*(t)\,dt = 0, \tag{53,11}$$

где $\psi_j^*(t)$ — вполне определенные функции класса H. не зависящие от f. Принимая, далее, во внимание, что и условия (53,5) имеют вид (53,11), приходим к следующему важному заключению:

Необходимые и достаточные условия разрешимости исходного интегрального уравнения выражаются конечным числом условий вида (53,11), *где* $\psi_j^*(t)$ — *определенные функции класса* H.

Теперь нетрудно доказать следующие три теоремы, принадлежащие Ф. Нетеру и играющие в теории сингулярных интегральных уравнений вида (53,1) ту же роль, что известные теоремы Фредгольма для уравнений Фредгольма. Теоремы эти следующие.

Теорема I. *Необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения*

$$\mathbf{K}\varphi = f \tag{53,1}$$

заключаются в том, чтобы

$$\int_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k', \tag{53,12}$$

где $\psi_1(t), \ldots, \psi_{k'}(t)$ — *полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения* $\mathbf{K}'\psi = 0$.

Теорема II. *Разность числа* k *линейно независимых решений однородного уравнения* $\mathbf{K}\varphi = 0$ *и числа* k' *линейно независимых решений союзного однородного уравнения* $\mathbf{K}'\psi = 0$ *зависит лишь от характеристической части оператора* $\mathbf{K}$.

Теорема III. *Упомянутая в предыдущей теореме разность равна индексу оператора* $\mathbf{K}$, *т. е.*

$$k - k' = \varkappa. \tag{53,13}$$

Теорема II является, очевидно, непосредственным следствием теоремы III, так как индекс $\varkappa$ по самому его определению зависит лишь от характеристической части оператора $\mathbf{K}$. Однако мы сочли целесообразным сформулировать теорему II отдельно, так как доказательство этой теоремы, так же как и доказательство теоремы I, можно провести, не опираясь на решение задачи сопряжения, что дает возможность легко распространить эти теоремы на ряд других классов сингулярных уравнений, для которых задача сопряжения или аналогичные ей задачи не могут быть непосредственно использованы, либо их использование более или менее сложно[1]). Переходим к доказательству теорем I—III.

Доказательство теоремы I. Необходимость условий (53,12) непосредственно следует из сказанного в конце § 46. Докажем их достаточность. Для этого в свою очередь достаточно показать, что условия (53,11), которые, как мы знаем, достаточны для разрешимости (53,1), являются следствиями условий (53,12). Следующий простой прием (Ф. Нетера) быстро приводит к цели. Пусть $g(t)$ — произвольная функция класса H. Уравнение

$$\mathbf{K}\varphi = \mathbf{K}g$$

разрешимо, так как одним из его решений является $\varphi = g$. Следовательно, в силу необходимости условий (53,11)

$$\int_L \psi_j^* \mathbf{K}g\,dt = \int_L g\mathbf{K}'\psi_j^*\,dt = 0.$$

Так как это должно иметь место для всякой функции g, то, очевидно, должно быть $\mathbf{K}'\psi_j^* = 0$, т. е. ψ_j^* есть решение однородного уравнения $\mathbf{K}'\psi = 0$. Следовательно, ψ_j^* представляет собой линейную комбинацию функций ψ_i. Поэтому условия (53,11) являются следствиями условий (53,12), а это и требовалось доказать.

Доказательство теорем II и III. Пусть, по-прежнему, $\mathbf{M}$ — любой оператор, регуляризирующий $\mathbf{K}$. Рассмотрим союзные друг с другом однородные уравнения Фредгольма

$$\mathbf{MK}\varphi = 0, \quad \mathbf{K}'\mathbf{M}'\psi = 0. \tag{53,14}$$

Эти уравнения имеют одно и то же число линейно независимых решений. Мы подсчитаем его двумя способами, и сравнение результатов приведет нас к теореме II[2]). Обозначим соответственно через

$$\varphi_j\,(j = 1, \ldots, k),\quad \psi_j\,(j = 1, \ldots, k'),\quad \chi_j\,(j = 1, \ldots, m),\quad \omega_j\,(j = 1, \ldots, m')$$

полные системы линейно независимых решений уравнений

$$\mathbf{K}\varphi = 0,\ \mathbf{K}'\psi = 0,\ \mathbf{M}\chi = 0,\ \mathbf{M}'\omega = 0.$$

Все решения уравнения $\mathbf{MK}\varphi = 0$ удовлетворяют уравнению

$$\mathbf{K}\varphi = \sum_{j=1}^{m} a_j\chi_j, \tag{53,15}$$

где a_j — постоянные. Эти постоянные должны быть выбраны так, чтобы предыдущее уравнение было разрешимо, т. е., на основании теоремы I, чтобы

$$\sum_{j=1}^{m} A_{ij}a_j = 0 \quad (i = 1,\ 2, \ldots,\ k'), \tag{53,16}$$

[1]) По этой же причине мы не сочли целесообразным отказаться от изложения доказательства теорем I и II по методу самого Ф. Нетера, хотя доказательство по методу И. Н. Векуа [7], опирающегося с самого начала на задачу сопряжения, гораздо проще.

[2]) Приводимое здесь доказательство теоремы II, совпадающее по идее с доказательством Ф. Нетера, но несравненно более простое, было указано И. Н. Векуа и опубликовано в моей заметке [8].

где

$$A_{ij} = \int_L \psi_i \chi_j \, dt \quad (i = 1, 2, \ldots, k', \ j = 1, 2, \ldots, m). \tag{53,17}$$

Пусть r — ранг матрицы $\| A_{ij} \|$; тогда, как известно, $m - r$ из постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_m$, удовлетворяющих системе (53,16), останутся вполне произвольными, а остальные r будут их линейными комбинациями. Обозначим остающиеся произвольными постоянные через $b_1, b_2, \ldots, b_{m-r}$. Внеся в правую часть (53,15) на место a_j их выражения через b_j, приведем это уравнение к виду

$$\mathbf{K}\varphi = \sum_{i=1}^{m-r} b_i \xi_i,$$

где ξ_i — некоторые линейные комбинации функций χ_j; функции ξ_i, как легко видеть, линейно независимы[1]).

Предыдущее уравнение разрешимо при всяких b_i; решая его, получим:

$$\varphi = \sum_{i=1}^{m-r} b_i \eta_i + \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j,$$

где c_j — произвольные постоянные, так же как и b_i, а η_i — какие-либо частные решения уравнений $\mathbf{K}\varphi = \xi_i$ $(i = 1, 2, \ldots, m - r)$. Функции η_i, φ_j, как легко видеть, линейно независимы[2]). Следовательно, первое уравнение (53,14) имеет ровно $m - r + k$ линейно независимых решений.

Обращаясь теперь ко второму уравнению (53,14), мы получим совершенно аналогичный результат: в рассуждениях надо только заменить соответственно $\mathbf{M}$ и $\mathbf{K}$ на $\mathbf{K}'$ и $\mathbf{M}'$ и, следовательно, χ_i и φ_i соответственно

---

[1]) Действительно, если при некоторых значениях постоянных b_i имеем

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i \xi_i = 0,$$

то и сумма

$$\sum_{i=1}^{m} a_i \chi_i,$$

из которой получилась предыдущая сумма после внесения на место a_i их выражений через b_j, также равна нулю и, следовательно, в силу линейной независимости χ_i все $a_i = 0$. Но b_j суть некоторые из a_i, следовательно, все $b_j = 0$.

[2]) В самом деле, если при некоторых значениях b_i, c_j имеем

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i \eta_i + \sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j = 0,$$

то, производя над обеими частями предыдущего равенства операцию $\mathbf{K}$, получим:

$$\sum_{i=1}^{m-r} b_i \xi_i = 0,$$

откуда следует, что все $b_i = 0$. Но тогда

$$\sum_{j=1}^{k} c_j \varphi_j = 0$$

и, значит, все $c_j = 0$.

на ψ_i и ω_i. В связи с этим вместо постоянных A_{ij} мы получим постоянные

$$A'_{ij} = \int_L \chi_i \psi_j \, dt = A_{ji},$$

так что ранг матрицы $\| A'_{ij} \|$ совпадает с рангом r прежней матрицы $\| A_{ij} \|$. Таким образом, мы установили, что число линейно независимых решений второго уравнения (53,14) равно $k' - r + m'$. Сравнивая этот результат с прежним, получаем:

$$m' - r + k' = m - r + k,$$

откуда, наконец,

$$k - k' = m' - m. \tag{53,18}$$

Это равенство и доказывает теорему II, ибо для всех уравнений вида $\mathrm{K}\varphi = 0$, имеющих одну и ту же характеристическую часть, мы можем взять один и тот же регуляризирующий оператор M, так что число $m' - m$ будет одним и тем же.

Для того чтобы доказать и теорему III, достаточно, в силу предыдущей теоремы, для подсчета $k - k'$ оставить в операторе K лишь его характеристическую часть; но тогда уравнение $\mathrm{K}\varphi = 0$ обратится в однородное характеристическое уравнение, и теорема III непосредственно вытекает из сказанного в конце § 48 [формула (48,15)][1]).

Замечание 1. Отметим одно непосредственное следствие теоремы III.

Если индекс $\varkappa > 0$, то однородное уравнение $\mathrm{K}\varphi = 0$ *имеет по крайней мере $\varkappa$ линейно независимых решений*, ибо число решений этого уравнения $k = \varkappa + k'$ и $k' \geqslant 0$.

Замечание 2. Из предыдущего замечания следует, что если индекс $\varkappa$ уравнения

$$\mathrm{K}\varphi = f \tag{*}$$

отрицателен, то нельзя найти такой регуляризирующий оператор M, чтобы предыдущее уравнение было эквивалентно уравнению Фредгольма

$$\mathrm{MK}\varphi = \mathrm{M}f \tag{**}$$

при **всяком** выборе f[2]). В самом деле, мы знаем (§ 45), что индекс регуляризирующего оператора должен быть равен $-\varkappa > 0$. Предположим, что уравнения (*) и (**) эквивалентны при всяком выборе f. Возьмем любую функцию φ класса H и положим $f = \mathrm{K}\varphi + \chi$, где χ — любое отличное от нуля решение однородного уравнения $\mathrm{M}\chi = 0$ (такое решение всегда существует, ибо индекс оператора M — положительное число). Но тогда $\mathrm{MK}\varphi = \mathrm{M}f$ и, следовательно, в силу предполагаемой эквивалентности (*) и (**), $\mathrm{K}\varphi = f$, откуда $\chi = 0$, что противоречит условию.

Замечание 3. Отметим еще следующее обстоятельство. Возьмем на линии L конечное число точек $c_1, c_2, \ldots, c_n$ и будем искать решения уравнения (53,1) не в классе H, а в более общем классе H^*, считая, что «узлами» являются точки $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Легко видеть, что и при этом, более общем, условии насчет искомых решений мы получим те же решения, что раньше; иными словами, решения класса H^* необходимо при-

---

[1]) Сам Ф. Нетер пользуется для вычисления разности $k - k'$ не задачей сопряжения, а задачей Римана — Гильберта, не вполне строгое решение которой он дает в той же названной выше статье.

[2]) Это обстоятельство было указано С. Г. Михлиным [3].

надлежат классу H. Это следует из того, что всякое решение класса H^* необходимо удовлетворяет уравнению Фредгольма (53,2), а решения этого последнего уравнения класса H^* необходимо принадлежат и классу H (§ 51, п. 2°).

§ 54. Случай действительного уравнения. Может случиться, что уравнение $\mathrm{K}\varphi = f$, которое мы запишем временно так:

$$\mathrm{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \int_L N(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0), \tag{54,1}$$

где

$$N(t_0, t) = \frac{1}{\pi i}\frac{K(t_0, t)}{t - t_0}, \tag{54,2}$$

является фактически действительным уравнением, т. е. обращается в действительное уравнение, если вместо переменной t ввести надлежащим образом выбранную действительную переменную s.

Пусть $t = t(s)$ — соотношение, связывающее переменные t и s так, что когда s пробегает определенные промежутки $l_1, l_2, \ldots, l_p$, то t описывает (один и только один раз) контуры $L_1, L_2, \ldots, L_p$, составляющие L. Мы будем считать, что производная $\frac{dt}{ds} = t'(s)$ всюду отлична от нуля и удовлетворяет условию H; оговорки, которые следует сделать относительно концов промежутков l_j, очевидны. Если для упрощения мы будем обозначать функции от t, выраженные через s, прежними символами, то уравнение (54,1) примет вид

$$\mathrm{N}\varphi \equiv A(s_0)\varphi(s_0) + \int_L N(s_0, s)\,t'(s)\,\varphi(s)\,ds = f(s_0). \tag{54,3}$$

Согласно условию, $A(s)$, $N(s_0, s)t'(s)$ и $f(s)$ — действительные функции. Мы обозначили оператор K, выраженный через переменную s, другим символом (в данном случае через N) по причине, которая сделается ясной из дальнейшего.

Рассмотрим однородное уравнение

$$\mathrm{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \int_L N(t_0, t)\varphi(t)\,dt = 0, \tag{54,4}$$

или, что то же самое, уравнение

$$\mathrm{N}\varphi \equiv A(s_0)\varphi(s_0) + \int_L N(s_0, s)\,t'(s)\,\varphi(s)\,ds = 0, \tag{54,5}$$

соответствующее уравнению (54,1), или, что то же самое, (54,3).

Очевидно, что в рассматриваемом случае, если $\varphi(s) = \xi(s) + i\eta(s)$, где $\xi(s)$, $\eta(s)$ — действительные функции, является каким-либо решением уравнения (54,4) или, что то же самое, уравнения (54,5), то каждая из функций $\xi(s)$ и $\eta(s)$ будет также решением.

Пусть $\varphi_1(s), \varphi_2(s), \ldots, \varphi_k(s)$ — полная система линейно независимых действительных решений однородного уравнения (54,4) или (54,5). Всякое действительное решение этого уравнения представится тогда в виде линейной комбинации

$$\varphi(s) = c_1\varphi_1(s) + c_2\varphi_2(s) + \ldots + c_k\varphi_k(s), \tag{54,6}$$

где постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_k$ могут принимать произвольные действительные значения.

На основании сказанного выше ясно, что и всякое комплексное решение уравнения (54,4) или (54,5) представится той же формулой (54,6), в которой, однако, постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_k$ могут принимать и произвольные комплексные значения.

Таким образом, число линейно независимых решений уравнения (54,5), все равно, будем ли мы ограничиваться решениями в действительной области или будем рассматривать и комплексные решения,— одно и то же, только в первом случае под линейной комбинацией подразумевается комбинация с действительными коэффициентами, а во втором — комбинация с комплексными коэффициентами.

Рассмотрим теперь уравнение, союзное с (54,4), т. е. уравнение

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) + \int_L N(t, t_0)\psi(t)\,dt = 0. \qquad (54,7)$$

Если теперь мы составим уравнение, союзное с (54,5), понимая под этим действительное уравнение, получаемое из (54,5) перестановкой переменных s_0 и s в ядре, то получим:

$$\mathbf{N}'\omega \equiv A(s_0)\omega(s_0) + t'(s_0)\int_L N(s, s_0)\omega(s)\,ds = 0. \qquad (54,8)$$

Это уравнение не совпадает с уравнением (54,7), ибо последнее после введения переменной s приобретает вид

$$A(s_0)\psi(s_0) + \int_L N(s, s_0)t'(s)\psi(s)\,ds = 0 \qquad (54,9)$$

(поэтому-то мы выбрали различные обозначения для операторов, фигурирующих в левых частях уравнений $\mathbf{K}\varphi = f$ и $\mathbf{N}\varphi = f$).

Однако различие между уравнениями (54,8) и (54,9) несущественно: если в уравнение (54,9) ввести вместо неизвестной $\psi(s)$ новую неизвестную $\omega(s)$ соотношением

$$\psi(s) = [t'(s)]^{-1}\omega(s),$$

то уравнение это после умножения на $t'(s_0)$ обратится в уравнение (54,8).

Пусть $\omega_j(s)$ $(j = 1, 2, \ldots, k')$ — полная система линейно независимых действительных решений уравнения $\mathbf{N}'\omega = 0$. На основании сказанного выше легко видеть, что система функций $\psi_j(s) = [t'(s)]^{-1}\omega_j(s)$ представляет собой полную систему линейно независимых решений (в комплексной области) уравнения $\mathbf{K}'\varphi = 0$. Условия разрешимости уравнения (54,1) имеют, как мы знаем, вид

$$\int_L f(t)\psi_j(t)\,dt = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k'). \qquad (54,10)$$

Внося сюда на место ψ_j их выражения $[t']^{-1}\omega_j$, получаем эти условия в действительной форме:

$$\int_L f(s)\omega_j(s)\,ds = 0 \quad (j = 1, 2, \ldots, k'). \qquad (54,11)$$

Сопоставляя все изложенное выше, приходим к следующему заключению: *основные теоремы, сформулированные в предыдущем параграфе, остаются в силе для действительного уравнения и в том случае, если ограничиться решениями в действительной области, а под уравнением, союзным с* $\mathbf{N}\varphi = 0$, *подразумевать также действительное уравнение* $\mathbf{N}'\omega = 0$.

§ 55. Теорема эквивалентности И. Н. Векуа и новое доказательство основных теорем. Метод регуляризации, указанный в § 50, которым мы воспользовались для доказательства основных теорем, обладает тем существенным недостатком, что получаемое при этом уравнение Фредгольма не всегда эквивалентно исходному. Мы даже видели (§ 53, замечание 2), что в случае $\varkappa < 0$ таким путем вообще невозможно добиться эквивалентности. Однако это не значит, что нельзя привести данное сингулярное уравнение к эквивалентному уравнению Фредгольма каким-либо иным путем. Наоборот, имеет место следующая

Теорема эквивалентности (И. Н. Векуа). *Сингулярное интегральное уравнение*

$$\mathrm{K}\varphi = f \tag{55,1}$$

всегда эквивалентно (в определенном, указанном ниже смысле) *некоторому уравнению Фредгольма, получаемому, исходя из данного, при помощи лишь квадратур*[1]).

Действительно, обозначим через $\varkappa$ индекс предыдущего уравнения и рассмотрим отдельно случаи:

I. $\varkappa \geqslant 0$. Тогда существует оператор M, регуляризирующий оператор **K** и такой, что однородное уравнение $\mathrm{M}\omega = 0$ не имеет решений, отличных от нулевого. В качестве такого оператора можно взять, например, оператор $\mathbf{K}^{0\prime}$, т. е. оператор, союзный с характеристической частью оператора **K**, или оператор $\mathbf{K}'^{0}$, т. е. характеристическую часть оператора $\mathbf{K}'$, союзного с **K**. Оба эти оператора имеют индекс, равный $-\varkappa \leqslant 0$, и поэтому при таком выборе M уравнение $\mathrm{M}\omega = 0$ имеет лишь тривиальное решение $\omega = 0$[2]). То, что при этом M — регуляризирующий оператор, следует из формул (45,14), (46,4) и (46,5).

Пусть M — какой-либо оператор, обладающий указанными свойствами. Тогда *уравнение Фредгольма*

$$\mathrm{MK}\varphi = \mathrm{M}f \tag{55,2}$$

эквивалентно исходному, так как все решения уравнения $\mathrm{K}\varphi = f$ суть, очевидно, решения уравнения $\mathrm{MK}\varphi = \mathrm{M}f$ и, наоборот, всякое решение последнего уравнения будет решением исходного, ибо из предыдущего уравнения следует, что $\mathrm{M}(\mathrm{K}\varphi - f) = 0$, и, следовательно, $\mathrm{K}\varphi - f = 0$[3]).

II. $\varkappa < 0$. Тогда существует оператор M такой, что оператор **K** будет регуляризирующим для M и что, кроме того, уравнение

$$\mathrm{M}\psi = g \tag{55,3}$$

разрешимо при всякой правой части (класса H). В качестве M можно взять, например, один из тех же операторов $\mathbf{K}^{0\prime}$ или $\mathbf{K}'^{0}$, что и выше. Так как на этот раз их индекс $-\varkappa > 0$, то они обладают требуемым свойством; такой выбор имеет еще то преимущество, что уравнение (55,3) решается тогда относительно ψ в замкнутом виде при помощи лишь квадратур (§§ 47 и 48).

Произведем теперь подстановку

$$\varphi = \mathrm{M}\psi, \tag{55,4}$$

---

1) И. Н. Векуа [7].

2) См. §§ 47, 48.

3) То обстоятельство, что при $\varkappa \geqslant 0$ уравнение $\mathrm{K}\varphi = f$ может быть приведено к эквивалентному уравнению Фредгольма $\mathrm{MK}\varphi = \mathrm{M}f$, было указано С. Г. Михлиным [3]. Он, впрочем, ограничивается случаем, когда $A(t) = 1$ и когда L состоит из одного замкнутого контура; считая, что L — окружность, он показывает, что в качестве оператора M можно взять (в наших обозначениях) оператор $\mathbf{K}'^{0}$.

где ψ — новая неизвестная функция. Тогда уравнение (55,1) приводится к уравнению Фредгольма

$$\mathrm{KM}\psi = f, \tag{55,5}$$

которое эквивалентно исходному в следующем смысле: уравнения (55,1) и (55,5) одновременно разрешимы или неразрешимы, и в случае разрешимости решение одного из них непосредственно приводит к решению другого; при этом если в качестве оператора М взять один из операторов $\mathrm{K}^{0\prime}$, K'^{0}, то переход от решения одного уравнения к решению другого осуществляется путем квадратур.

В самом деле, всякому решению ψ уравнения (55,5) соответствует (одно) решение φ уравнения (55,1), а всякому решению φ уравнения (55,1) соответствует (по крайней мере одно) решение ψ уравнения (55,5), которое мы получим, решая (55,4) относительно ψ. Итак, уравнения (55,1) и (55,5) одновременно разрешимы или неразрешимы. Пусть теперь эти уравнения разрешимы. Общее решение уравнения Фредгольма (55,5) дается формулой

$$\psi = \psi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \psi_i, \tag{55,6}$$

где ψ_0 — какое-либо частное его решение, ψ_i ($i = 1, \ldots, m$) — линейно независимые решения уравнения $\mathrm{KM}\psi = 0$, а a_i — произвольные постоянные. Из предыдущего ясно, что вся совокупность решений исходного уравнения будет дана формулой[1])

$$\varphi = \mathrm{M}\psi_0 + \sum_{i=1}^{m} a_i \mathrm{M}\psi_i; \tag{55,7}$$

аналогично обстоит дело для обратной задачи (не представляющей, впрочем, для нас интереса) — нахождения общего решения уравнения (55,5) по решению уравнения (55,1).

Предыдущая теорема дает возможность чрезвычайно просто доказать основные теоремы § 53; мы приводим новое доказательство этих теорем.

Доказательство теоремы I (И. Н. Векуа [7]). Необходимость условий (53,12) вытекает из сказанного в конце § 46. Докажем их достаточность. Для этого будем считать, что условия (53,12) выполнены, и покажем, что тогда уравнение $\mathrm{K}\varphi = f$ разрешимо.

а) Пусть сначала $\varkappa \geqslant 0$. Тогда уравнение (55,1) эквивалентно уравнению Фредгольма (55,2) и, следовательно, в силу теоремы Фредгольма оно разрешимо, если

$$\int_L \omega_j \mathrm{M} f\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{55,8}$$

где ω_j ($j = 1, \ldots, n$) — полная система линейно независимых решений однородного уравнения $\mathrm{K}'\mathrm{M}'\omega = 0$, союзного с (55,2). Предыдущие условия можно переписать в виде

$$\int_L f \mathrm{M}'\omega_j\, dt = 0. \tag{55,9}$$

[1]) Из формулы (55,7) нельзя вывести заключения, что число линейно независимых решений однородного уравнения $\mathrm{K}\varphi = 0$ равно m, ибо среди функций $\mathrm{M}\psi_i$ ($i = 1, 2, \ldots, m$) могут оказаться линейно зависимые между собой, несмотря на линейную независимость функций ψ_i.

Но так как $K'M'\omega_j = 0$, то функция $M'\omega_j$ представляет собой решение однородного уравнения $K'\psi = 0$; поэтому условия (55,9) выполнены в силу условий (53,12), и уравнение $K\varphi = f$ разрешимо.

b) Пусть теперь $\varkappa < 0$. Тогда уравнение (55,1) разрешимо, если разрешимо уравнение Фредгольма (55,5). Условия разрешимости последнего имеют вид

$$\int_L f\chi_j\, dt = 0, \tag{55,10}$$

где χ_j — полная система линейно независимых решений однородного уравнения $M'K'\chi = 0$, союзного с (55,5). Но уравнение $M'\omega = 0$ не может иметь решений, отличных от нуля, ибо по условию уравнение (55,3) разрешимо при любой правой части, что было бы невозможно, если бы уравнение $M'\omega = 0$ имело решения, отличные от нуля. Следовательно, $K'\chi_j = 0$, и условия (55,10) удовлетворены в силу (53,12). Таким образом, теорема доказана.

Доказательство теорем II и III достаточно провести для случая $\varkappa \geqslant 0$, ибо в случае $\varkappa < 0$ мы можем применить те же рассуждения к союзному уравнению $K'\psi = 0$, имеющему индекс $(-\varkappa)$.

Возьмем в качестве регуляризирующего оператора M один из операторов $K^{0\prime}$ или K'^{0}. Тогда уравнение $M\varphi = 0$ не имеет отличных от нуля решений, а уравнение $M'\psi = 0$ имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений. Уравнение Фредгольма $MK\varphi = 0$ эквивалентно уравнению $K\varphi = 0$, и поэтому число его решений равно числу k решений этого последнего. Следовательно, число решений уравнения $K'M'\psi = 0$ должно быть равно k. Но решение уравнения $K'M'\psi = 0$ получается решением неоднородного уравнения

$$M'\psi = c_1\psi_1 + c_2\psi_2 + \ldots + c_{k'}\psi_{k'}, \tag{55,11}$$

где $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k'}$ — полная система решений уравнения $K'\psi = 0$, а c_1, c_2, ..., $c_{k'}$ — произвольные постоянные. Но уравнение (55,11) всегда разрешимо, и число его линейно независимых решений слагается, как легко видеть, из числа k' линейно независимых функций ψ_j в правой части (55,11) и из числа $\varkappa$ решений уравнения $M'\psi = 0$. Следовательно, $k = k' + \varkappa$, и теоремы II и III доказаны[1]).

§ 56. Сопоставление сингулярного уравнения с фредгольмовым. Квазифредгольмово сингулярное уравнение. Приведение к каноническому виду. 1°. В приложениях интегральных уравнений Фредгольма к тем или иным задачам основную роль играют, как известно, следующие теоремы.

Пусть дано уравнение Фредгольма $F\varphi = f$, где F — фредгольмов оператор. Тогда:

I. Однородное уравнение $F\varphi = 0$ имеет лишь конечное число линейно независимых решений.

II. *Союзные однородные уравнения* $F\varphi = 0$ *и* $F'\psi = 0$ *имеют одинаковое число линейно независимых решений.*

III. Неоднородное уравнение $F\varphi = f$ разрешимо при любой правой части f тогда и только тогда, когда союзное однородное уравнение $F'\psi = 0$ (*или, что все равно, однородное уравнение* $F\varphi = 0$) не имеет решений, отличных от нуля.

---

[1]) Приведенное доказательство теорем II и III совпадает с доказательством, данным В. Д. Купрадзе [3]; см. также И. Н. Векуа [7].

IV. Необходимые и достаточные условия разрешимости неоднородного уравнения заключаются в том, чтобы

$$\int\limits_L f(t)\,\psi_k(t)\,dt = 0,$$

где $\psi_k(t)$ — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $\mathbf{F}'\psi = 0$.

Сопоставляя это с тем, что было доказано в предыдущих параграфах относительно сингулярного уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$, убеждаемся, что утверждения, содержащиеся в предложениях I—IV, переносятся и на сингулярные интегральные уравнения, *за исключением тех, которые напечатаны курсивом.* Основное различие между уравнениями Фредгольма и сингулярными заключается в том, что предложение II должно быть заменено предложением (при обозначениях предыдущих параграфов)

$$k - k' = \varkappa.$$

Среди сингулярных уравнений можно, однако, выделить один класс уравнений, для которых справедливы *все без исключения* утверждения, содержащиеся в предложениях I—IV. Это те сингулярные уравнения, *индекс $\varkappa$ которых равен нулю.* В этом случае $k = k'$, и неоднородное уравнение $\mathbf{K}\varphi = f$ разрешимо при всякой правой части класса H, если однородное уравнение $\mathbf{K}\varphi = 0$ не имеет решений, отличных от нуля (ибо тогда и союзное однородное уравнение $\mathbf{K}'\psi = 0$ обладает этим свойством).

Такие сингулярные уравнения можно назвать квазифредгольмовыми, а соответствующие операторы (т. е. операторы с индексом нуль) — квазифредгольмовыми операторами¹).

2°. Вернемся к сингулярному уравнению общего вида. Вспомним, что во многих случаях интегральные уравнения Фредгольма применяются не для численного решения тех или иных задач, а для их качественного исследования. Поэтому ясно, что после того, как установлены общие свойства сингулярных интегральных уравнений, эти уравнения можно использовать с аналогичной целью непосредственно с тем же успехом, что и уравнения Фредгольма. Следовательно, далеко не во всех случаях целесообразно приводить сингулярные уравнения к уравнениям Фредгольма: эта промежуточная стадия часто может лишь усложнить исследование.

В связи с этим естественно возникает вопрос: к какому по возможности простому эквивалентному (сингулярному же) уравнению можно привести данное сингулярное уравнение? Конечно, этот вопрос неопределенный.

И. Н. Векуа [7] указал один весьма простой вид, к которому можно привести всякое другое сингулярное уравнение, не нарушая эквивалентности²). А именно, пусть дано сингулярное интегральное уравнение

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0). \qquad (56,1)$$

---

¹) И. Н. Векуа [7] применяет в этом случае термин «псевдорегулярный». Следует заметить, что в настоящее время в функциональном анализе функциональные уравнения, к которым применимы теоремы I—IV, часто называются просто фредгольмовыми.

²) И. Н. Векуа рассматривает лишь случай, когда L ограничивает некоторую связную часть плоскости. В рассматриваемом здесь более общем случае мы получаем тот же результат, применив надлежащие обозначения.

Не нарушая общности, мы можем считать, что положительное направление на L выбрано так, как в § 29, п. 1°. Будем под S^+, S^- подразумевать то же, что в упомянутом параграфе, и считать, что через S^- обозначена та часть плоскости, которая содержит бесконечно удаленную точку, и что начало координат расположено в S^+.

Обозначим через $\varkappa$ индекс уравнения (56,1) и рассмотрим оператор M, определяемый формулой

$$\mathrm{M}\psi \equiv a(t_0)\,\psi(t_0) + \frac{b(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{56,2}$$

где

$$\begin{aligned} 2a(t) &= \frac{1}{A(t)+B(t)} + \frac{t^{\varkappa}}{A(t)-B(t)},\\ 2b(t) &= \frac{1}{A(t)+B(t)} - \frac{t^{\varkappa}}{A(t)-B(t)}. \end{aligned} \tag{56,3}$$

Легко видеть, что M — квазифредгольмов оператор, т. е. индекс его равен нулю. Действительно, этот индекс равен

$$\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{a-b}{a+b}\right]_L = \frac{1}{2\pi i}\left[\ln\left\{\frac{A+B}{A-B}t^{\varkappa}\right\}\right]_L =$$
$$= -\frac{1}{2\pi i}\left[\ln\frac{A-B}{A+B}\right]_L + \frac{\varkappa}{2\pi i}[\ln t]_L = -\varkappa + \frac{\varkappa}{2\pi i}[\ln t]_L = 0,$$

ибо $[\ln t]_L = 2\pi i$; в последнем легко убедиться, если учесть, что L можно рассматривать как границу части S^- плоскости, содержащей бесконечно удаленную точку и не содержащей начала координат[1]).

Из того обстоятельства, что M — характеристический оператор с индексом нуль, следует, что однородное уравнение $\mathrm{M}\psi = 0$ не имеет отличных от нуля решений.

Поэтому уравнение (56,1) эквивалентно уравнению

$$\mathrm{N}\varphi \equiv \mathrm{MK}\varphi = \mathrm{M}f. \tag{56,4}$$

При этом характеристическая часть N^0 оператора N имеет весьма простой вид [2])

$$\mathrm{N}^0\varphi \equiv \frac{1}{2}(1+t_0^{\varkappa})\,\varphi(t_0) + \frac{1}{2}(1-t_0^{\varkappa})\,\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{56,5}$$

Сингулярное интегральное уравнение

$$\mathrm{N}\varphi = f \tag{56,6}$$

при только что указанном виде характеристической части N^0 можно назвать **каноническим видом сингулярного уравнения.**

Важно отметить, что общее решение характеристического уравнения

$$\mathrm{N}^0\varphi = f \tag{56,7}$$

в предположении, что в случае $\varkappa < 0$ соблюдены условия разрешимости [3]),

---

[1]) При вычислении $[\ln t]_L$ достаточно ограничиться обходом совокупности тех замкнутых контуров, которые составляют границу связной части плоскости, входящей в состав S^- и содержащей точку $z = \infty$, ибо при обходе совокупности остальных контуров приращение $\ln t$ равно нулю.

[2]) Здесь следует воспользоваться формулами (45,12) или (45,13).

[3]) Эти условия указаны ниже (формула (56,11)).

имеет также весьма простой вид

$$\varphi(t_0) = \mathrm{N}^* f + (1 - t_0^{-\varkappa}) P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{56,8}$$

где $P_{\varkappa-1}(t_0)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$, равный нулю при $\varkappa \leqslant 0$, и

$$\mathrm{N}^* f \equiv \frac{1}{2}(1 + t_0^{-\varkappa}) f(t_0) + \frac{1}{2}(1 - t_0^{-\varkappa}) \frac{1}{\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\, dt}{t - t_0}. \tag{56,9}$$

Эту последнюю формулу легче всего получить непосредственно из формулы (47,9), если заметить, что функция $\mathrm{X}(z)$, соответствующая уравнению $\mathrm{N}^0\varphi = f$, дается формулами

$$\mathrm{X}(z) = \begin{cases} 1 & \text{при } z \in S^+, \\ z^{-\varkappa} & \text{при } z \in S^-. \end{cases} \tag{56,10}$$

В самом деле, граничное условие однородной задачи сопряжения, соответствующей уравнению $\mathrm{N}^0\varphi = 0$, имеет вид

$$\Phi^+(t) = t^\varkappa \Phi^-(t),$$

и ясно (ср. § 35, замечание 4), что функция $\mathrm{X}(z)$, определяемая формулой (56,10), будет каноническим решением этой задачи.

В случае $\varkappa < 0$ условия разрешимости уравнения (56,7) имеют следующий вид:

$$\int\limits_L t^k f(t)\, dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1; \tag{56,11}$$

это непосредственно следует из (47,8) и (56,10).

§ 57. Метод регуляризации Т. Карлемана — И. Н. Векуа. В предыдущих параграфах мы познакомились с двумя методами регуляризации сингулярного интегрального уравнения[1]). Укажем еще один метод, который был намечен Т. Карлеманом (T. Carleman [1]) в одном частном случае (см. ниже § 99) и получил развитие в работах И. Н. Векуа [1]—[4], [7]. В ряде случаев метод этот более удобен, чем упомянутые выше.

Пусть дано сингулярное интегральное уравнение

$$\mathrm{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i} \int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\, dt = f(t_0) \tag{57,1}$$

или, короче,

$$\mathrm{K}\varphi \equiv \mathrm{K}^0\varphi + \mathbf{k}\varphi = f, \tag{57,2}$$

где K^0 — характеристическая часть оператора K, т. е. по-прежнему

$$\mathrm{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int\limits_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - t_0} \tag{57,3}$$

и

$$\mathbf{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\, dt, \tag{57,4}$$

причем $k(t_0, t)$ имеет вид, указанный в § 44 (формула (44,6)).

Перепишем (57,2) в виде

$$\mathrm{K}^0\varphi = f - \mathbf{k}\varphi \tag{57,5}$$

[1]) Первый метод состоит в замене уравнения $\mathrm{K}\varphi = f$ уравнением $\mathrm{MK}\varphi = \mathrm{M}f$, где M — регуляризирующий оператор, второй — в подстановке $\varphi = \mathrm{M}\psi$.

и решим предыдущее уравнение, считая правую часть как бы заданной функцией. *Не обращая пока внимания на условия разрешимости, возникающие при* $\varkappa < 0$[1]), получим на основании результатов § 47:

$$\varphi(t_0) = \mathbf{K}^* f - \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi + B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0)$$

или

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{57,6}$$

где

$$\mathbf{K}^* f \equiv A^*(t_0) f(t_0) - \frac{B^*(t_0)\, Z(t_0)}{\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\, dt}{Z(t)(t-t_0)}, \tag{57,7}$$

причем $Z(t)$, $A^*(t)$, $B^*(t)$ определяются формулами (47,12), (47,13), а $P_{\varkappa-1}(t_0)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$ ($P_{\varkappa-1} = 0$ при $\varkappa \leqslant 0$).

Оператор $\mathbf{K}^*\mathbf{k}$ на основании сказанного в § 45 (замечание) представляет собой фредгольмов оператор первого рода

$$\mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int\limits_L N(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{57,8}$$

где

$$N(t_0, t) = \mathbf{K}^* k(t_0, t), \tag{57,9}$$

причем при применении оператора $\mathbf{K}^*$ к функции $k(t_0, t)$ переменной считается t_0, а t рассматривается как параметр, так что

$$N(t_0, t) = A^*(t_0)\, k(t_0, t) - \frac{B^*(t_0)\, Z(t_0)}{\pi i} \int\limits_L \frac{k(t_1, t)\, dt_1}{Z(t_1)(t_1 - t_0)}. \tag{57,10}$$

На основании результатов § 47 уравнение (57,6) эквивалентно исходному уравнению (57,1), если $\varkappa \geqslant 0$; если же $\varkappa < 0$, то к уравнению (57,6) следует присоединить еще уравнения

$$\int\limits_L \frac{t^k \mathbf{k} \varphi(t)\, dt}{Z(t)} = \int\limits_L \frac{t^k f(t)\, dt}{Z(t)}, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{57,11}$$

происходящие из условий (47,16), и тогда исходное уравнение (57,1) эквивалентно уравнению (57,6) и совокупности уравнений (57,11).

Уравнение (57,6) представляет собой уравнение Фредгольма (второго рода). Напомним, что на основании сказанного в § 45 (замечание)

$$N(t_0, t) = \frac{N^*(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda}, \quad 0 \leqslant \lambda < 1, \tag{57,12}$$

где $N^*(t_0, t)$ удовлетворяет условию H.

Таким образом, мы достигли р е г у л я р и з а ц и и исходного уравнения, причем, что весьма важно, о б е с п е ч е н а э к в и в а л е н т н о с т ь. Правда, в случае $\varkappa < 0$ мы получаем, кроме уравнения Фредгольма второго рода, еще дополнительные уравнения (57,11), но это несущественно, так как вопрос в основном сводится к решению уравнения Фредгольма (57,6).

---

[1]) Эти условия будут учтены ниже (формула (57,11)).

Вместо того чтобы пользоваться для регуляризации сингулярного уравнения формулами § 47, можно исходить и из формул § 48. Именно, пусть дано уравнение[1])

$$\mathbf{K}'\psi \equiv \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \mathbf{k}'\psi = f(t_0), \tag{57,13}$$

где

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{57,14}$$

$$\mathbf{k}'\psi \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t,\ t_0)\,\psi(t)\,dt. \tag{57,15}$$

Применяя результаты § 48, получаем совершенно аналогично предыдущему, что уравнение (57,13) при $\varkappa' \geqslant 0$ (где $\varkappa'$ обозначает его индекс) эквивалентно уравнению Фредгольма (второго рода)

$$\psi + \mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'\psi = \mathbf{K}^{*\prime}f + \frac{Q_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \tag{57,16}$$

где $Q_{\varkappa'-1}(t_0)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa' - 1$ ($Q_{\varkappa'-1} = 0$ при $\varkappa' = 0$).

При $\varkappa' < 0$ уравнение (57,13) эквивалентно уравнению (57,16) при $Q_{\varkappa'-1}(t_0) = 0$ и дополнительным уравнениям, получающимся из условий (48,12),

$$\int\limits_L t^k Z(t)\,B^*(t)\,\mathbf{k}'\varphi(t)\,dt = \int\limits_L t^k Z(t)\,B^*(t)\,f(t)\,dt. \tag{57,17}$$

Заметим, что даже в случае, когда $\mathbf{K}'$ обозначает оператор, союзный с $\mathbf{K}$, уравнения Фредгольма (57,6) и (57,16) не будут, вообще говоря, союзными, ибо $(\mathbf{K}^*\mathbf{k})' = \mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}$, а не $\mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'$.

Исходя из указанного метода регуляризации, можно получить все основные теоремы, изложенные в предыдущих параграфах[2]); это сделано И. Н. Векуа в работах [2] и [4] (автор пользуется первым из двух указанных в настоящем параграфе способов); кроме того, можно получить таким путем ряд новых результатов, как, например, результаты, изложенные в следующем параграфе.

§ 58. Введение параметра λ. Аналогично тому, как это делается в теории уравнений Фредгольма, можно и в сингулярное интегральное уравнение ввести некоторый параметр λ; при этом наиболее простые и близкие к классической теории Фредгольма результаты получаются, если ввести параметр в качестве множителя перед оператором $\mathbf{k}$ в уравнение вида (57,2) или перед оператором $\mathbf{k}'$ в уравнение вида (57,13)[3]), как это делает И. Н. Векуа [7].

В соответствии со сказанным рассмотрим сингулярное уравнение

$$\mathbf{K}\varphi \equiv \mathbf{K}^0\varphi + \lambda\mathbf{k}\varphi = f(t_0), \tag{58,1}$$

где λ — произвольный параметр (вообще комплексный).

---

[1]) Само собой разумеется, что уравнение $\mathbf{K}'\psi = f$ можно рассматривать вне связи с тем, что оно является союзным с уравнением $\mathbf{K}\varphi = f$, ибо всякий сингулярный оператор $\mathbf{K}'$ можно представить в виде $\mathbf{K}^{0\prime} + \mathbf{k}'$.

[2]) Таким способом будут ниже, в § 102, доказаны основные теоремы в более общем случае.

[3]) Это соответствует тому, что в уравнении Фредгольма параметр обычно вводят в качестве множителя перед вполне непрерывной частью (см. § 49) оператора Фредгольма; при ином способе введения параметра теория значительно усложняется.

Регуляризируя это уравнение по первому из способов, указанных в предыдущем параграфе, получаем при $\varkappa \geqslant 0$ эквивалентное уравнение Фредгольма

$$\varphi + \lambda \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = f^*(t_0), \tag{58,2}$$

где

$$f^*(t_0) = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0) Z(t_0) P_{\varkappa-1}(t_0) \tag{58,3}$$

и $P_{\varkappa-1}(t_0)$ обозначает произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$. Союзное с предыдущим однородное уравнение имеет вид

$$\psi + \lambda (\mathbf{K}^* \mathbf{k})' \psi \equiv \psi + \lambda \mathbf{k}' \mathbf{K}^{*\prime} \psi = 0. \tag{58,4}$$

Из теории уравнений Фредгольма известно, что союзные однородные уравнения $\varphi + \lambda \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = 0$ и $\psi + \lambda \mathbf{k}' \mathbf{K}^{*\prime} \psi = 0$ одновременно не имеют или имеют решения, отличные от нуля (причем число линейно независимых решений этих уравнений всегда одинаково); такие решения существуют лишь тогда, когда параметр λ принимает одно из бесконечного или конечного ряда «характеристических» значений

$$\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \tag{58,5}$$

не имеющего предельных точек на конечном расстоянии. Если λ отлично от значений (58,5), то неоднородное уравнение (58,2) однозначно разрешимо при всякой правой части; решение представляется в виде

$$\varphi(t_0) = f^*(t_0) + \int_L \Gamma(t_0, t; \lambda) f^*(t)\, dt, \tag{58,6}$$

где $\Gamma(t_0, t; \lambda)$ — резольвента Фредгольма, представляющая собой мероморфную функцию от λ с полюсами в точках (58,5).

При $f = 0$, т. е. когда исходное уравнение однородно,

$$f^*(t_0) = B^*(t_0) Z(t_0) (C_0 t_0^{\varkappa-1} + C_1 t_0^{\varkappa-2} + \ldots + C_{\varkappa-1}) \tag{58,7}$$

(C_j — произвольные постоянные), и при λ, отличном от характеристических значений (58,5), уравнение (58,2) имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений, получающихся решением уравнений Фредгольма

$$\varphi + \lambda \mathbf{K}^* \mathbf{k} \varphi = B^*(t_0) Z(t_0) t_0^k, \quad k = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1. \tag{58,8}$$

Таким образом, мы приходим к следующему результату:

При $\varkappa \geqslant 0$ *общее решение сингулярного интегрального уравнения* $\mathbf{K}\varphi = f$ *представляется в виде мероморфной функции от* λ, *содержащей линейным образом* $\varkappa$ *произвольных постоянных. За исключением, быть может, ряда дискретных характеристических значений* $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ *параметра* λ, *однородное уравнение* $\mathbf{K}\varphi = 0$ *имеет ровно* $\varkappa$ *линейно независимых решений, которые являются также мероморфными функциями от* λ (во всех случаях, как известно из § 53 (замечание 1), однородное уравнение имеет н е м е н е е $\varkappa$ линейно независимых решений).

К этому результату, указанному И. Н. Векуа [7], добавим еще следующее. Пусть теперь $\varkappa < 0$. Тогда исходное уравнение (58,1) эквивалентно уравнению (58,2), где $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$, и дополнительным условиям (57,11) предыдущего параграфа. Внося в эти последние выражение (58,6) для φ, мы, как легко видеть, получим $(-\varkappa)$ условий вида

$$\int_L \omega_j(t, \lambda) f(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, -\varkappa, \tag{58,9}$$

где $\omega_j(t, \lambda)$ — определенные мероморфные функции от λ с полюсами в точках (58,5). При λ, отличном от значений (58,5), условия (58,9) выражают необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения (58,1), ибо в этом случае уравнение Фредгольма (58,2) всегда разрешимо. Считая, что λ отлично от значений (58,5), выразим условия (58,9) иным образом. Именно, рассмотрим однородное уравнение

$$\mathbf{K}'\psi = \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \lambda\mathbf{k}'\psi = 0, \tag{58,10}$$

союзное с уравнением $\mathbf{K}\varphi = 0$. Пусть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k'}$ $(k' \geqslant \varkappa' = -\varkappa)$ — линейно независимые его решения. Тогда условия (58,9) должны быть эквивалентны условиям

$$\int_L \psi_j(t) f(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k', \tag{58,11}$$

ибо эти последние также являются необходимыми и достаточными условиями разрешимости уравнения (58,1).

Отсюда легко заключить[1]), что функции $\omega_j(t, \lambda)$ являются линейными комбинациями функций $\psi_j(t)$, и обратно. Следовательно, при λ, отличном от значений (58,5), все функции $\omega_j(t, \lambda)$ $(j = 1, 2, \ldots, \varkappa')$ линейно независимы и $k' = \varkappa' = -\varkappa$.

Таким образом, мы получаем следующий результат:

При $\varkappa = -\varkappa' < 0$ для всех значений λ, отличных от характеристических значений (58,5), *условия разрешимости уравнения* $\mathbf{K}\varphi = f$ *представляются в виде ровно $\varkappa' = -\varkappa$ соотношений вида* (58,9), *где $\omega_j(t, \lambda)$ — линейно независимые функции, мероморфные относительно λ, с полюсами в точках* (58,5); *если f удовлетворяет этим условиям, то решение дается формулой* (58,6).

При $\varkappa = 0$, т. е. в случае квазифредгольмова уравнения, результаты этого параграфа в точности совпадают с известными результатами, относящимися к уравнениям Фредгольма.

§ 59. Краткие указания относительно некоторых других результатов. В главах IV—VI результаты, изложенные в настоящей главе, будут обобщены в различных направлениях.

В настоящем же параграфе мы дадим краткие сведения относительно ряда результатов, тесно связанных с предыдущими, которые, несмотря на их значительный интерес, мы не имеем возможности подробно изложить, оставаясь в намеченных рамках книги.

В §§ 116, 117 и в Добавлении V в конце книги будут даны краткие указания относительно других важных результатов, полученных, в главной своей части, за последнее время.

1°. Пусть $\mathbf{K}$ обозначает сингулярный оператор рассмотренного выше типа. В § 55 был изложен способ приведения сингулярного уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ к эквивалентному уравнению Фредгольма, указанный И. Н. Векуа. Им же несколько раньше был дан другой способ, также представляющий интерес. Способ этот основан на методе регуляризации, указанном в § 57. Если индекс $\varkappa \geqslant 0$, то, как мы видели, уравнение $\mathbf{K}\varphi = f$ непосредственно приводится этим методом к эквивалентному уравнению Фредгольма. И. Н. Векуа [3], [4] показал, что и в случае $\varkappa < 0$ можно путем простых преобразований привести данное сингулярное уравнение к уравнению

---

[1]) См. предложение, приведенное в конце Добавления IV.

Фредгольма, сопровождаемому добавочными условиями вида

$$\int_L \omega_j(t) f(t)\, dt = 0; \qquad (*)$$

упомянутое уравнение Фредгольма и функции $\omega_j(t)$ могут быть построены при помощи лишь простых квадратур.

2°. Обозначим через $\mathbf{T}$ оператор, определяемый формулой

$$\mathbf{T}\varphi(t) \equiv \frac{dt(s)}{ds}\cdot\varphi(t),$$

где, как всегда, t — аффикс точки контура L, s — соответствующая дуговая абсцисса; мы будем считать в этом пункте, что L удовлетворяет условию Ляпунова, т. е. что $\frac{dt}{ds}$ принадлежит классу H. Будем обозначать чертой над знаком оператора переход к комплексно сопряженному оператору, т. е. по определению

$$\overline{\mathbf{K}}\overline{\varphi} = \overline{\mathbf{K}\varphi},$$

и рассмотрим следующие операторы:

$$\overline{\mathbf{K}'}\mathbf{TK}, \quad \mathbf{U} = [\overline{\mathbf{K}'}\mathbf{TK}]^0, \quad \mathbf{M} = \mathbf{U}'\overline{\mathbf{K}'}\mathbf{T},$$

где верхний значок ^{0} указывает, что берется характеристическая часть оператора.

Легко непосредственно проверить, что $\overline{\mathbf{K}'}\mathbf{TK}$ и $\mathbf{U}$ — квазифредгольмовы операторы, а $\mathbf{MK}$ — фредгольмов оператор, так что оператор $\mathbf{M}$ является регуляризирующим по отношению к $\mathbf{K}$. Далее, имеет место следующая теорема: *уравнение Фредгольма*

$$\mathbf{MK}\varphi = \mathbf{M}f$$

разрешимо при всякой функции f и эквивалентно уравнению $\mathbf{K}\varphi = f$, если это последнее разрешимо.

Оператор $\mathbf{M}$, который, как мы видим, строится совершенно элементарно и обладает только что сформулированным свойством, был указан И. Н. Векуа [7] (доказательство см. там же).

Еще раньше В. Д. Купрадзе [3] показал, что в случае действительного уравнения $\mathbf{L}\varphi = f$ вида (44,16) таким свойством обладает оператор $\mathbf{L}'$, союзный с $\mathbf{L}$. В. Д. Купрадзе [4] построил также некоторый оператор, обладающий этим свойством, для уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$; но построение этого последнего оператора требует нахождения всех решений союзного однородного уравнения $\mathbf{K}'\psi = 0$.

3°. Ряд интересных результатов содержится в работах Л. Берга (L. Berg [1]—[3]). Следует особо отметить построение «сингулярной резольвенты» — функции, играющей для сингулярного интегрального уравнения роль, аналогичную резольвенте Фредгольма,и удовлетворяющей двум функциональным уравнениям, аналогичным известным функциональным уравнениям, которым удовлетворяет эта последняя.

4°. Сингулярным интегральным уравнениям посвящены многочисленные работы Ж. Жиро. Их перечисление можно найти в одной из его последних работ: G. Giraud [2]; см. также В. Д. Купрадзе [1], С. Г. Михлин [7].

В области одномерных уравнений, т. е. уравнений рассматриваемого нами типа, исследования Ж. Жиро[1]), как мне кажется, излишне усложнены и вместе с тем недостаточно полны: например, понятие индекса, фундаментальное для всей теории, у него отсутствует, хотя это понятие было введено значительно раньше. Свою теорию Ж. Жиро строит на исследовании зависимости решения интегрального уравнения от параметра λ, который он вводит не так, как было указано в предыдущем параграфе; а именно, он рассматривает уравнение (пишем в наших обозначениях)

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{\lambda B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\lambda\int\limits_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt=f(t_0), \tag{59,1}$$

где параметр λ входит также в характеристическую часть. Это нарушает внутреннюю аналогию с уравнениями, рассматриваемыми в классической теории Фредгольма (ср. начало § 58), и значительно усложняет исследование. Во всяком случае общая теория уравнения вида (59,1) нисколько не проще, по крайней мере в отношении результатов, полученных Ж. Жиро, чем теория гораздо более общего уравнения

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K(t_0,\ t;\ \lambda)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0), \tag{59,2}$$

где $K(t_0,\ t;\ \lambda)$ удовлетворяет условию H по t и t_0, а относительно λ — мероморфная в некоторой области функция[2]).

Если применить к этому последнему уравнению изложенные выше методы, то можно получить результаты Жиро гораздо проще, чем это сделано самим автором, а также ряд более общих результатов. Это сделано Д. Ф. Харазовым [1] [3]).

5°. Большой интерес представляет обобщение изложенных выше результатов в смысле расширения классов как задаваемых, так и, в особенности, искомых функций, а также замены гладких линий интегрирования линиями более общего вида. Простейшие обобщения в указанных направлениях будут даны в главах IV и V. Одно обобщение в аналогичном направлении дано в работе L. Berg [3]. О других обобщениях, требующих применения интегралов Лебега, будет кратко сказано в § 116.

Здесь же отметим лишь, что изложенные выше результаты легко переносятся на случай замены класса H несколько более общими классами непрерывных функций, о которых упоминалось в § 27. Такие обобщения даны в работах Л. Г. Магнарадзе [5], [7], [8].

6. Вопросу устойчивости решения задачи сопряжения посвящена работа Л. А. Чикина [2], а приближенному решению — работы Г. Ф. Манджавидзе [4]—[6], А. В. Батырева [1] и В. В. Иванова [5].

---

[1]) Результаты, полученные им в этой области, в наиболее законченном виде изложены в работе G. Giraud [2].

[2]) Уравнение (59,2) представляет собой аналог уравнения Фредгольма, ядро которого — мероморфная функция параметра λ, изученного Я. Д. Тамаркиным (J. D. Tamarkin [1]).

[3]) Впоследствии некоторые из этих результатов были перенесены И. Ц. Гохбергом [2] на случай линейных уравнений в банаховых пространствах.

ГЛАВА ТРЕТЬЯ

ПРИЛОЖЕНИЯ К НЕКОТОРЫМ ГРАНИЧНЫМ ЗАДАЧАМ

Изложенные в предыдущих главах результаты оказываются весьма полезными при решении многих важных задач теории аналитических функций и математической физики. За последнее время этим путем получен ряд результатов, представляющих значительный интерес. В этой главе будут изложены некоторые из них.

Мы начнем с одной из простейших задач рассматриваемого типа — задачи Дирихле. Решению этой задачи, основанному на применении сингулярных интегральных уравнений (§§ 64, 65), мы предпосылаем классическое решение Фредгольма с некоторыми изменениями, приближающими это решение к кругу рассматриваемых в настоящей главе вопросов[1]).

I. Задача Дирихле

§ 60. Постановка задачи Дирихле и видоизмененной задачи Дирихле. Теоремы единственности. Пусть S^+ обозначает (связную) область, ограниченную простыми замкнутыми непересекающимися гладкими контурами $L_0, L_1, \ldots, L_p$, из которых первый охватывает все остальные. Под L мы будем подразумевать совокупность этих контуров; положительным направлением на L мы будем считать то, которое оставляет S^+ слева. Контур L_0 может отсутствовать, и тогда область S^+ будет бесконечной. Через S^- мы обозначим совокупность конечных областей $S_1^-, \ldots, S_p^-$, заключенных соответственно внутри контуров $L_1, \ldots, L_p$, и (при наличии контура L_0) бесконечной области S_0^-, состоящей из точек, расположенных вне L_0.

На контуры $L_0, \ldots, L_p$ мы наложим еще следующее условие: угол, составляемый касательной к L_j с постоянным направлением, удовлетворяет условию H; иными словами, мы будем считать, что L удовлетворяет условию Ляпунова.

Классическую задачу Дирихле для области S^+ мы формулируем так:

А. Задача Дирихле. *Найти (действительную) функцию $u(x, y)$, гармоническую в S^+ и непрерывную в $S^+ + L$, по граничному условию*

$$u = f(t) \text{ на } L, \tag{60,1}$$

---

[1]) Задача Дирихле, если не обращать внимания на некоторые дополнительные обстоятельства, возникающие в случае многосвязной области, представляет собой частный случай задачи Римана — Гильберта, когда один из коэффициентов a, b в граничном условии (40,1) равен тождественно нулю.

Однако при решении задачи Римана — Гильберта мы использовали конформное отображение данной области S^+ на круг, что эквивалентно решению некоторой задачи Дирихле. Поэтому мы рассматриваем здесь задачу Дирихле самостоятельно, тем более, что мы решаем ее здесь для областей, ограниченных произвольным числом контуров.

где $f(t)$ — заданная на L (действительная) непрерывная функция; в случае бесконечной области от функции $u(x, y)$ требуется еще, чтобы она оставалась ограниченной на бесконечности.

Последнее условие ограниченности u на бесконечности равносильно требованию, что u стремится к вполне определенному пределу, когда z уходит в бесконечность[1]).

Для некоторых применений не меньший интерес представляет и следующая задача, которую мы назовем «видоизмененной задачей Дирихле»[2]).

B. Видоизмененная задача Дирихле. *Найти функцию $u(x, y)$, гармоническую в S^+ и непрерывную в $S^+ + L$, по следующим условиям:* I) *$u(x, y)$ является действительной частью некоторой функции $\Phi(z)$, голоморфной в S^+;* II) *она удовлетворяет граничному условию*

$$u = f(t) + a(t) \text{ на } L, \tag{60,2}$$

где $f(t)$ — заданная на L непрерывная (действительная) функция,

$$a(t) = a_j \text{ на } L_j, \quad j = 0, 1, \ldots, p, \tag{60,3}$$

и a_j (действительные) постоянные, не задаваемые заранее; *в случае бесконечной области требование $u = f + a_0$ на L_0 заменяется требованием ограниченности $u(x, y)$ на бесконечности.*

Ниже будет показано, что постоянные a_j вполне определяются условиями самой задачи, если (произвольно) фиксировать одну из них. В дальнейшем, если противное не оговорено, мы будем считать $a_0 = 0$ (в случае отсутствия контура L_0 это требование заменяется условием, что $u = 0$ на бесконечности).

Отметим особо случай, когда L состоит из единственного замкнутого контура. Здесь следует различать два случая:

a) $p = 0$. Тогда S^+ представляет собой конечную часть плоскости, ограниченную контуром L_0.

b) $p = 1$, а контур L_0 отсутствует. Тогда область S^+ представляет собой бесконечную часть плоскости, ограниченную контуром L_1.

Легко видеть, что в случае a) задачи A и B совпадают (если считать $a_0 = 0$). В случае b) эти задачи непосредственно сводятся одна к другой. Например, если $u(x, y)$ есть решение задачи B (исчезающее на бесконечности), то $u(x, y) - a_1$ будет решением задачи A.

Вернемся к общему случаю произвольного p. Различие между задачами A и B, т. е. между классической и видоизмененной задачами Дирихле, заключается в следующем.

Если $u(x, y)$ — решение задачи A, то сопряженная с u функция v может оказаться (и, вообще говоря, будет) многозначной. Условие I) в формулировке задачи B исключает эту возможность и, таким образом, ограничивает класс искомых гармонических функций; но зато условие II) задачи B требует лишь, чтобы функция u принимала на контурах L_j значения, заданные не вполне, а с точностью до постоянных слагаемых.

---

[1]) Напомним, что всякая функция $u(x, y)$, гармоническая вне круга $|z| > R_0$ и ограниченная на бесконечности, разлагается при $|z| > R_0$ в ряд

$$u(x, y) = a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} r^{-n} (a_n \cos n\vartheta + b_n \sin n\vartheta) \qquad (z = re^{i\vartheta}),$$

абсолютно и равномерно сходящийся вне круга любого радиуса $R > R_0$. Поэтому $u \to a_0$ при $r \to \infty$.

[2]) Термин этот введен в статье Н. И. Мусхелишвили и Д. З. Авазашвили [1].

Каждая из задач A *и* B *не может иметь более одного решения* (если, как мы условились, в задаче B считать $a_0 = 0$[1])).

В случае задачи A это утверждение сводится к тому, что гармоническая в S^+ функция, непрерывная в $S^+ + L$ и принимающая на L нулевые значения, равна нулю во всей области. Это же последнее вытекает из хорошо известного предложения о том, что гармоническая функция, отличная от постоянной, достигает минимума и максимума лишь на границе области[2]).

Перейдем к доказательству нашего утверждения для задачи B. B этом случае оно сводится к следующему предложению:

Если функция $u(x, y)$, гармоническая в S^+ и непрерывная в $S^+ + L$, является действительной частью функции $\Phi(z) = u + iv$, голоморфной в S^+, и если $u(x, y)$ принимает постоянные значения a_j на L_j ($a_0 = 0$), то необходимо $u = 0$, $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$ (в случае бесконечной области условие $a_0 = 0$ заменяется условием $u = 0$ на бесконечности)[3]).

Обозначим через a_m ту из постоянных $a_0, a_1, \ldots, a_p$ или, в случае бесконечной области, $a_1, a_2, \ldots, a_p$, которая имеет минимальное значение (если таких постоянных несколько, выберем любую из них). Предположим, что $u(x, y)$ не сохраняет постоянного значения в S^+. Так как $u = a_m$ на L_m, то a_m есть минимальное значение u в $S^+ + L$. Следовательно, в S^+ всюду $u > a_m$, ибо по предположению функция u отлична от постоянной. Поэтому, как легко видеть, всегда можно построить в области S^+ два близких к L_m гладких контура L'_m, L''_m, на которых $u(x, y)$ принимает постоянные значения $a_m + \varepsilon'$, $a_m + \varepsilon''$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon''$[4]).

---

[1]) Вместо $a_0 = 0$ можно взять $a_k = 0$, где a_k — одна из постоянных $a_1, \ldots, a_p$.

[2]) Случай бесконечной области (т. е. когда L_0 отсутствует) сводится к случаю конечной области путем простой инверсии.

[3]) Идея приводимого в тексте доказательства заимствована из книги J. Plemelj [3]. Приведем здесь еще одно простое доказательство. По известной теореме (мы считаем пока S^+ конечной областью)

$$\int_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \iint_{S^+} \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x} \right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y} \right)^2 \right] dx\, dy,$$

где n — внешняя нормаль. Но левая часть предыдущей формулы равна нулю, так как

$$\int_L u \frac{\partial u}{\partial n} ds = \int_L u \frac{\partial v}{\partial s} ds = \sum_{j=0}^{p} a_j \int_{L_j} dv = 0,$$

ибо функция v по условию однозначна. Следовательно, на основании первой из приведенных формул $u = \text{const}$ в S^+. Но $u = 0$ на L_0, следовательно, $u = 0$ в S^+. Аналогично для случая бесконечной области. Доказательство это нельзя, однако, считать полным, ибо существование $\frac{\partial u}{\partial n}$, $\frac{\partial v}{\partial s}$ и справедливость соотношения $\frac{\partial u}{\partial n} = \frac{\partial v}{\partial s}$ на границе L (что, впрочем, при наших предположениях действительно имеет место) требует в свою очередь доказательства.

[4]) Отложим на нормали в точке t к L_m, направленной внутрь S^+, отрезок tM настолько малой постоянной длины δ, чтобы этот отрезок целиком принадлежал области S^+ при всяком положении t на L. Когда точка t опишет L_m, точка M опишет непрерывную замкнутую кривую (которая может пересекать сама себя,— это неважно). Ясно, что на всей этой кривой $u \geqslant a_m + \varepsilon_0$, где ε_0 — некоторая положительная постоянная. Поэтому если взять числа ε_1 и ε_2 такие, что $0 < \varepsilon_1 < \varepsilon_2 < \varepsilon_0$, то на отрезке tM найдутся точки t_1 и t_2, в которых $u(x, y)$ принимает значения $a_m + \varepsilon_1$ и $a_m + \varepsilon_2$. При движении t по L_m точки t_1 и t_2 опишут замкнутые непрерывные кривые $\overset{(1)}{L_m}$ и $\overset{(2)}{L_m}$. Эти кривые не имеют общих точек (ибо на них u принимает различные значения). Далее, ни одна из этих кривых не пересекает сама себя, ибо если бы, например, кривая $\overset{(1)}{L_m}$ образовала петлю, то гармоническая функция u, имея постоянное значение $a_m + \varepsilon_1$ на петле, была бы постоянной и во всей области, ограниченной этой петлей,

Обозначим через Σ кольцеобразную область, заключенную между L'_m и L''_m, а через $\Lambda = L'_m + L''_m$ — ее границу и применим известную формулу

$$\int\limits_{\Lambda} u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \iint\limits_{\Sigma}\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy, \tag{*}$$

где n — нормаль к Λ, направленная вовне Σ. Но

$$\int\limits_{L'_m} u\,\frac{\partial u}{\partial n}\,ds = \int\limits_{L'_m} u\,\frac{\partial v}{\partial s}\,ds = (a_m+\varepsilon')\int\limits_{L'_m} dv = 0;$$

аналогично обстоит дело для интеграла, взятого по L''_m. Поэтому левая часть формулы (*) равна нулю; следовательно, $u = \text{const}$ в Σ и, значит, во всей области S^+. Но так как $u = a_0 = 0$ на L_0 или, в случае бесконечной области, $u = 0$ на бесконечности, то $u = 0$ в области S^+.

Замечание. Предположим, что по-прежнему $u = a_j$ на L_j, но условие $a_0 = 0$ отброшено. Тогда очевидно, что $u = \text{const} = a_0 = a_1 = \ldots = a_p$.

Поэтому два решения задачи B при отсутствии добавочного условия $a_0 = 0$ могут различаться постоянной.

§ 61. Решение видоизмененной задачи Дирихле при помощи потенциала двойного слоя. Начнем с решения видоизмененной задачи Дирихле. Сохраняя условия и обозначения предыдущего параграфа, будем, кроме того, считать, что заданная функция $f(t)$ принадлежит классу H[1]. Будем искать функцию $\Phi(z) = u(x, y) + iv(x, y)$ в виде

$$u(x, y) + iv(x, y) = \Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int\limits_{L}\frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{61,1}$$

где $\mu(t)$ — искомая действительная функция класса H.

Полагая $t - z = re^{i\vartheta}$ и отделяя действительную часть, получаем (см. § 12):

$$u(x, y) = \frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\mu(t)\,d\vartheta = \frac{1}{\pi}\int\limits_{L}\mu(t)\,\frac{\cos(r, n)}{r}\,ds, \tag{61,2}$$

где n — нормаль в точке t, направленная влево от L, а (r, n) обозначает угол между n и направлением $\overrightarrow{tz}$.

а следовательно, и во всей области S^+. Кривые $L_m^{(1)}$ и $L_m^{(2)}$, удовлетворяющие уравнениям вида $u(x, y) = \text{const}$, могут иметь лишь конечное число особых точек, т. е. точек, в которых $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$. Действительно, в этих точках $\Phi'(z) = 0$, а число нулей голоморфной в S^+ функции $\Phi'(z)$, находящихся на конечном расстоянии от границы области S^+, конечно, так как $\Phi'(z)$ не равняется тождественно нулю (в противном случае было бы $\Phi(z) = \text{const}$ в S^+). Следовательно, $L_m^{(1)}$ и $L_m^{(2)}$ состоят из конечного числа дуг аналитических кривых, ибо функция $u(x, y)$ — аналитическая. Контуры $L_m^{(1)}$ и $L_m^{(2)}$ ограничивают некоторую кольцеобразную область Σ, целиком расположенную внутри S^+. Число точек z_j области Σ, в которых $\Phi'(z) = 0$, — конечно. С другой стороны, если ε — любое число такое, что $\varepsilon_1 < \varepsilon < \varepsilon_2$, то так же, как мы построили контуры $L_m^{(1)}$ и $L_m^{(2)}$, можем построить контур L_m^0, целиком расположенный в Σ и такой, что $u = a_m + \varepsilon$ на L_m^0. Так как число точек z_j конечно, то существует бесчисленное множество значений ε таких, что контур L_m^0 не проходит через эти точки и, следовательно, является аналитическим контуром без особых точек (и, тем более, гладким контуром). Придав ε два значения ε' и ε'', удовлетворяющих этому условию, мы получим требуемые контуры L'_m и L''_m.

[1]) От этого предположения легко освободиться (см. замечание 1 в конце параграфа).

Таким образом, $u(x, y)$ представляется в виде **потенциала двойного слоя**.

Переходя в (61,1) к пределу при $z \to t_0$ и отделяя затем действительную часть, получаем для граничного значения $u(x, y)$ выражение[1])

$$u = \operatorname{Re}\Phi^+(t_0) = \mu(t_0) + \operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0} = \mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta =$$

$$= \mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos(r, n)}{r}\,ds, \qquad (61,3)$$

где на этот раз $\vartheta = \vartheta(t_0, t)$ обозначает угол, составляемый направлением $\overrightarrow{t_0 t}$ с осью Ox, $r = |t - t_0|$, а (r, n) — угол между направлением $\overrightarrow{tt_0}$ и n (рис. 9 на стр. 47).

Таким образом, граничное условие (60,2) принимает вид

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta = f(t_0) + a(t_0) \qquad (61,4)$$

или, еще,

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos(r, n)}{r}\,ds = f(t_0) + a(t_0), \qquad (61,4а)$$

где, напоминаем, $a(t_0) = a_j = \text{const}$ на L_j. Если не обращать внимания на (не известное заранее) слагаемое $a(t_0)$ в правой части предыдущего равенства, то оно представляет собой уравнение Фредгольма[2]) с ядром

$$K(t_0, t) = \frac{1}{\pi}\frac{\cos(r, n)}{r},$$

которое на основании принятых условий представимо в виде (§ 7, п. 3°)

$$K(t_0, t) = \frac{K_0(t_0, t)}{|t - t_0|^{\alpha}} = \frac{K_0(t_0, t)}{r^{\alpha}}, \qquad (61,5)$$

где $0 \leqslant \alpha < 1$, а $K_0(t_0, t)$ удовлетворяет условию H по обеим переменным.

Следовательно (§ 51), всякое (непрерывное) решение уравнения (61,4) удовлетворяет и условию H, ибо мы подчинили этому условию заданную функцию $f(t)$[3]).

Рассмотрим однородное уравнение

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta = 0, \qquad (61,6)$$

соответствующее уравнению (61,4). Оно имеет, как показывает непосредственная проверка, следующее решение[4]):

$$\mu(t) = C_k \text{ на } L_k \ (k = 1, 2, \ldots, p), \quad \mu(t) = 0 \text{ на } L_0, \qquad (61,7)$$

где C_k — произвольные постоянные. Других решений уравнение (61,6)

---

[1]) Мы применяем здесь формулу Сохоцкого — Племеля (первая формула (16,2)); см. также § 13, формулы (13,6) и след.

[2]) То самое, если не считать слагаемого $a(t_0)$, которым пользуются обычно для решения задачи Дирихле.

[3]) Можно легко показать, что $\mu(t)$ удовлетворяет условию H **с тем же показателем**, что и функция $f(t)$. См. J. Schauder [1], стр. 633.

[4]) В случае бесконечной области последнее из равенств (61,7) отпадает.

не имеет. В самом деле, пусть $\mu(t)$ — какое-либо его решение. Тогда действительная часть функции

$$\Phi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z},$$

голоморфной в S^+, принимает нулевые значения на L. Следовательно, $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$ в S^+, откуда и следует наше утверждение (замечание 1 § 30).

Общее решение (61,7) однородного уравнения есть линейная комбинация p линейно независимых решений $\mu_1(t), \ldots, \mu_p(t)$, где

$$\mu_j(t)=\begin{cases} 1 \text{ при } t \text{ на } L_j \ (j=1, 2, \ldots, p), \\ 0 \text{ на остальных контурах.}\end{cases} \tag{61,8}$$

Согласно общей теории интегральных уравнений Фредгольма неоднородное уравнение (61,4) разрешимо в том и только том случае, когда правая его часть удовлетворяет известным интегральным условиям, числом p. Для решения задачи следует подобрать постоянные a_j так, чтобы удовлетворить этим условиям.

Однако составление упомянутых условий довольно сложно, по крайней мере практически: для этого требуется найти все линейно независимые решения однородного уравнения, союзного с уравнением (61,6). Кроме того, наличие ненулевых решений уравнения (61,6) значительно усложняет решение исходного уравнения (61,4), если даже постоянные a_j уже подобраны надлежащим образом.

Все эти трудности можно обойти при помощи весьма простого приема, который состоит в замене уравнения (61,4) эквивалентным ему уравнением, уже не содержащим неопределенных постоянных a_j и обладающим тем свойством, что соответствующее однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений. А именно, рассмотрим вместо уравнения (61,4) другое интегральное уравнение Фредгольма

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta-\int_L k(t_0, t)\,\mu(t)\,ds=f(t_0), \tag{61,9}$$

где s — дуговая абсцисса точки t, а (действительная) функция $k(t_0, t)$ определена на L следующим образом:

$$k(t_0, t)=\begin{cases} \rho_j(t) \text{ при } t_0, t \text{ на } L_j, \ j=1, \ldots, p, \\ \quad 0 \text{ во всех остальных случаях;}\end{cases} \tag{61,10}$$

$\rho_j(t)$ обозначает действительную непрерывную функцию, заданную на контуре L_j $(j=1, \ldots, p)$, удовлетворяющую условию

$$\int_{L_j} \rho_j(t)\,ds \neq 0, \tag{61,11}$$

а в остальном совершенно произвольную. Например, можно взять:

$$\rho_j(t)=1, \quad j=1, \ldots, p.$$

Выражение

$$\int_L k(t_0, t)\,\mu(t)\,ds,$$

фигурирующее в левой части (61,9), сохраняет постоянное значение на каждом из контуров L_j:

$$\int_L k(t_0, t)\mu(t)\,ds = c_j \text{ при } t_0 \text{ на } L_j,\ j=0, 1, \ldots, p, \tag{61,12}$$

где c_j — постоянные[1]), причем $c_0 = 0$[2]).

Докажем, что уравнение (61,9) обладает требуемым свойством, а именно, что однородное уравнение

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta - \int_L k(t_0, t)\mu(t)\,ds = 0 \tag{61,13}$$

не имеет решений, отличных от нуля.

Действительно, пусть $\mu(t)$ — какое-либо решение этого уравнения. В силу (61,12) и (61,13) действительная часть функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{*}$$

голоморфной в S^+, принимает на контурах L_j постоянные значения c_j, причем $c_0 = 0$. Следовательно, на основании доказанного в предыдущем параграфе, $\operatorname{Re}\Phi(z) = 0$ в S^+. Поэтому (§ 30, замечание 1) $\mu(t) = b_j$ на L_j, где b_j — постоянные, причем $b_0 = 0$. Если внесем эти значения $\mu(t)$ в (61,13), получим, очевидно,

$$b_j \int_{L_j} \rho_j\,ds = 0, \quad j = 1, \ldots, p,$$

т. е. в силу (61,11) $b_j = 0$. Таким образом, предложение доказано.

Из сказанного следует, что *неоднородное уравнение* (61,9) *всегда имеет* (*единственное*) *решение*.

Решение $\mu(t)$ уравнения (61,9) дает решение исходного уравнения (61,4), так как в силу (61,12) будем иметь:

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\,d\vartheta = f(t_0) + c_j \text{ на } L_j.$$

При этом постоянные a_j, фигурирующие в (61,4), получают вполне определенные значения

$$a_j = c_j = \int_{L_j} \rho_j \mu\,ds. \tag{61,14}$$

Таким образом, задача решена до конца[3]).

Замечание 1. Мы подчинили искомую функцию $\mu(t)$ условию H лишь для того, чтобы воспользоваться формулой Сохоцкого — Племеля при переходе к пределу $z \to t_0$ в (61,1). Однако, если в (61,1) мы отделим действительную часть до перехода к пределу и воспользуемся известными

---

[1]) А именно,

$$c_j = \int_{L_j} \rho_j \mu\,ds.$$

[2]) В случае бесконечной области последнее равенство отпадает, а в (61,12) надо взять $j = 1, \ldots, p$.

[3]) Изложенный способ был указан автором в заметке [2]; некоторые дальнейшие следствия см. в заметке автора [3]. Обобщение на одну смешанную задачу дано в заметке автора [5]; обобщение на пространство трех измерений см. в статье автора [4]; ср. также Д. И. Шерман [4], В. Д. Купрадзе [2], Н. П. Векуа [13].

Способ, аналогичный изложенному в тексте, был еще раньше применен К. Якобом (C. Jacob [3] — [5]). К сожалению, я ознакомился с этими работами лишь недавно свойствами потенциала двойного слоя, мы придем к результату (61,3) и в предположении, что функция $\mu(t)$ просто непрерывна.

Поэтому все предыдущие заключения останутся в силе, если считать заданную функцию $f(t)$ и искомую функцию $\mu(t)$ просто непрерывными.

Замечание 2. Выбор вспомогательного ядра $k(t_0, t)$ влияет, разумеется, на решение $\mu(t)$ интегрального уравнения (61,9). Однако легко видеть, что изменение ядра $k(t_0, t)$ повлечет лишь замену $\mu(t)$ на $\mu(t)+\alpha(t)$, где $\alpha(t)$ сохраняет постоянные значения на отдельных контурах L_j, причем $\alpha(t)=0$ на L_0. В самом деле, если $\mu_1(t)$ и $\mu_2(t)$ — решения, соответствующие двум различным вспомогательным ядрам $k_1(t_0, t)$ и $k_2(t_0, t)$, то разность $\mu(t)=\mu_2(t)-\mu_1(t)$ будет, очевидно, удовлетворять уравнению вида (61,4) при $f(t_0)\equiv 0$, откуда, так же как выше, заключаем, что $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$ в S^+, где $\Phi(z)$ обозначает функцию, связанную с $\mu(t)$ формулой (*), и, следовательно, как выше, $\mu(t)= =\alpha_j=\text{const}$ на L_j, причем $\alpha_0=0$.

На основании теоремы единственности решения видоизмененной задачи Дирихле, доказанной в предыдущем параграфе, ясно, кроме того, что *постоянные a_j формулы* (61,14) *от выбора ядра $k(t_0, t)$ не зависят.*

§ 62. Некоторые следствия. Пусть $\Psi(z)$ — голоморфная в S^+ функция такая, что ее действительная часть $\operatorname{Re}\Psi(z)$ непрерывно продолжима на L; тогда, как мы знаем (§ 9), функция $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ непрерывна на L. Будем пока считать, что контур L_0 существует. Если под $f(t)$ в граничном условии (60,2) видоизмененной задачи Дирихле мы будем подразумевать $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$, то эта задача имеет, очевидно, решение $u(x, y)=$, $=\operatorname{Re}\Psi(z)$, причем $a_1=a_2=\ldots=a_p=0$ (а также $a_0=0$ по условию). На основании теоремы единственности других решений задача не имеет.

С другой стороны, решение задачи дается формулой[1])

$$u(x, y)=\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-z},$$

где $\mu(t)$ — действительная непрерывная функция, определяемая интегральным уравнением (61,9), в котором $f(t)=[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$.

Следовательно, будем иметь:

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\mu(t)\,dt}{t-z}+Ci, \tag{62,1}$$

где C — действительная постоянная. Таким образом, мы имеем следующий результат.

Всякая голоморфная в конечной области S^+ функция $\Psi(z)$ такая, что ее действительная часть непрерывно продолжима на L, представима в виде (62,1), *где $\mu(t)$ — действительная непрерывная функция, а C — действительная постоянная.*

На основании самого вывода (а также непосредственно из предложения § 30) ясно, что при заданной функции $\Psi(z)$ функция $\mu(t)$ определяется с точностью до произвольных (действительных) постоянных на внутренних контурах $L_1, \ldots, L_p$ и единственным образом на L_0; постоянная C вполне определена.

и потому не упомянул их в предыдущих изданиях. Этот промах я исправил при печатании немецкого перевода настоящей книги (Berlin, 1965).

[1]) Мы используем здесь сказанное в замечании 1 в конце предыдущего параграфа; если мы захотим ограничиться лишь тем, что было сказано в основном тексте упомянутого параграфа, то достаточно считать, что $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ удовлетворяет условию H.

В случае бесконечной области S^+, т. е. когда контур L_0 отсутствует, будем, как легко видеть, иметь при тех же условиях относительно $\Psi(z)$ представление

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}+\Psi(\infty), \tag{62,1a}$$

где $\mu(t)$ — действительная непрерывная функция, определенная с точностью до произвольных постоянных на контурах L_j.

Предположим теперь, что $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ принадлежит на L классу H. Тогда на основании результатов предыдущего параграфа и функция $\mu(t)$, определяемая интегральным уравнением (61,9) при $f(t)=[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$, удовлетворяет условию H.

Следовательно, на основании результатов §§ 15 и 18 существует граничное значение[1]) $\Psi^+(t)$, и это граничное значение принадлежит классу H. Таким образом, мы имеем следующий результат (теорема И. И. Привалова)[2]):

Если действительная часть функции $\Psi(z)$, голоморфной в S^+, принимает на L определенное граничное значение, принадлежащее классу H, то и мнимая ее часть обладает тем же свойством[3]).

§ 63. Решение задачи Дирихле. После того как решена видоизмененная задача Дирихле, решение классической задачи Дирихле (60,1) не представляет никакого труда: она может быть приведена к предыдущей многими способами (в случае конечной односвязной области обе задачи попросту совпадают). Мы укажем здесь один из простейших способов такого приведения. Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_p$ — произвольно фиксированные точки соответственно в областях $S_1^-, S_2^-, \ldots, S_p^-$. Представим искомую гармоническую функцию в виде

$$u(x, y)=U(x, y)+\sum_{k=1}^{p} A_k\ln|z-z_k|, \tag{63,1}$$

где $U(x, y)$ — новая искомая гармоническая функция, а A_k — неопределенные пока действительные постоянные. В случае отсутствия контура L_0 мы будем считать, что

$$\sum_{k=1}^{p} A_k=0; \tag{63,2}$$

это условие обеспечивает обращение в нуль выражения $\Sigma A_k\ln|z-z_k|$ на бесконечности[4]).

---

[1]) Напомним, что обозначение $\Psi^+(t)$ мы применяем в том лишь случае, когда предел достигается по любому пути, расположенному в S^+.

[2]) И. И. Привалов [2]; в указанной работе теорема доказана для круга, но обобщение на случай произвольной области рассматриваемого нами вида может быть непосредственно получено при помощи конформного отображения.

[3]) Легко показать (см. сноску [3]) на стр. 205), что если $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$, то и $[\operatorname{Im}\Psi(t)]^+$ удовлетворяет условию $H(\alpha)$, если $\alpha<1$, и условию $H(1-\varepsilon)$, где ε — сколь угодно малое положительное число, если $\alpha=1$.

[4]) Имеем при больших $|z|$

$$\ln|z-z_k|=\ln|z|+\ln\left|1-\frac{z_k}{z}\right|=\ln|z|+O\left(\frac{1}{|z|}\right),$$

откуда следует:

$$\sum_{k=1}^{p} A_k\ln|z-z_k|=\ln|z|\cdot\sum_{k=1}^{p} A_k+O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

Функция U должна в силу (60,1) удовлетворять граничному условию

$$U = f(t) - \sum_{k=1}^{p} A_k \ln|t - z_k| \quad \text{на} \quad L. \tag{63,3}$$

Если мы будем считать постоянные A_k произвольно фиксированными, а от функции U потребуем, чтобы она была действительной частью голоморфной в S^+ функции и в случае отсутствия L_0 исчезала на бесконечности, то задача (63,3) не будет, вообще говоря, разрешима, но зато будет всегда разрешима видоизмененная задача Дирихле

$$U = f(t) - \sum_{k=1}^{p} A_k \ln|t - z_k| + a_j \text{ на } L_j, \tag{63,4}$$

$$j = 0, 1, \ldots, p; \quad a_0 = 0\text{[1]}.$$

Решение этой последней задачи даст нам значение $U(x, y)$, а также определит постоянные $a_1, \ldots, a_p$, и легко видеть, что для этих постоянных мы получим выражения вида

$$a_j = f_j + \sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} A_k, \tag{63,5}$$

где γ_{jk} — вполне определенные постоянные, не зависящие от функции $f(t)$, а f_j ($j = 1, \ldots, p$) — также постоянные, зависящие от функции $f(t)$ и обращающиеся в нуль при $f(t) \equiv 0$.

Для того чтобы функция u, определяемая формулой (63,1), была решением задачи Дирихле, необходимо и достаточно, чтобы $a_j = 0$ ($j = 1, \ldots, p$), т. е. чтобы постоянные A_k удовлетворяли линейным уравнениям

$$\sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk} A_k + f_j = 0, \quad j = 1, \ldots, p. \tag{63,6}$$

Рассмотрим сначала случай конечной области. Определитель, составленный из γ_{jk}, отличен от нуля. В самом деле, если бы этот определитель был равен нулю, то однородная система, получающаяся из (63,6) при $f(t) \equiv 0$ (тогда $f_j = 0$, $j = 1, \ldots, p$), имела бы решение $A_1, \ldots, A_p$, отличное от нулевого. Но тогда мы получили бы гармоническую в S^+ функцию

$$u = U + \sum_{k=1}^{p} A_k \ln|z - z_k|,$$

не равную тождественно нулю[2]) и обращающуюся в нуль на L, что невозможно. Следовательно, система (63,6) всегда разрешима; определив A_k, мы получим решение исходной задачи.

В случае бесконечной области к уравнениям (63,6) следует добавить еще уравнение (63,2). Полученная система будет, вообще говоря несовместима; это понятно, так как функция u, представленная в виде (63,1), при условии (63,2) исчезает на бесконечности, а задача Дирихле такого решения, вообще говоря, не имеет[3]).

---

[1]) В случае отсутствия L_0, $j = 1, \ldots, p$, а условие $a_0 = 0$ отпадает.

[2]) Сумма $U + \Sigma A_k \ln|z - z_k|$ не может быть тождественно равной нулю в S^+, если не все $A_k = 0$, так как в противном случае функция $U + iV + \Sigma A_k \ln(z - z_k)$, где V — функция, сопряженная с U, была бы равна постоянной. Последнее же невозможно, так как $U + iV$, по условию, однозначная функция.

[3]) Вспомним, что в формулировке задачи Дирихле мы потребовали лишь ограниченности искомой функции на бесконечности.

Постараемся сначала удовлетворить граничному условию лишь с точностью до постоянной (одной и той же на всех L_j), т. е. требование $a_1 = a_2 = \ldots = a_p = 0$ заменим требованием $a_1 = A$, $a_2 = A$, ..., $a_p = A$, где A — некоторая постоянная. Тогда вместо системы (63,6) получим систему

$$\begin{gathered}\sum_{k=1}^{p} \gamma_{jk}A_k - A + f_j = 0 \quad (j=1, \ldots, p), \\ \sum_{k=1}^{p} A_k = 0\end{gathered} \tag{63,7}$$

$p+1$ уравнений с $p+1$ неизвестными $A, A_1, \ldots, A_p$. Совершенно аналогично предыдущему докажем, что определитель этой системы отличен от нуля и что поэтому система всегда разрешима. Таким образом, мы найдем гармоническую функцию u, исчезающую на бесконечности и принимающую значения $f(t)+A$ на L. Следовательно, функция

$$u - A \tag{63,8}$$

будет решением исходной задачи.

З а м е ч а н и е. Применяя другие методы, можно показать, что предыдущие результаты, касающиеся существования решения, а не представления его в виде потенциала двойного слоя[1]), остаются в силе и при гораздо более общих предположениях относительно границы области. Достаточно, например, предположить, что замкнутые контуры, составляющие границу, представляют собой кривые Жордана[2]) (так что не требуется даже спрямляемости).

§ 64. Решение видоизмененной задачи Дирихле видоизмененным потенциалом простого слоя. В § 61 мы решили видоизмененную задачу Дирихле потенциалом двойного слоя. Но в некоторых случаях, имеющих прикладное значение, требуется представить решение в виде видоизмененного потенциала простого слоя. Мы остановимся на этом вопросе, имея также в виду дать одно из простейших и непосредственных приложений теории сингулярных интегральных уравнений.

Видоизмененная задача Дирихле сформулирована в § 60; теперь мы отбросим добавочное условие $a_0 = 0$, принятое в предыдущих параграфах, и будем, следовательно, считать, что ни одна из постоянных $a_0, a_1, \ldots, a_p$, фигурирующих в формулировке, не задается заранее.

Будем искать решение задачи в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\Phi(z), \tag{64,1}$$

где на этот раз

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{i\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{64,2}$$

причем и здесь $\mu(t)$ — искомая д е й с т в и т е л ь н а я функция класса H.

[1]) И в этом направлении результаты можно значительно обобщить, как это, например, сделано Радоном (J. Radon [1]).

[2]) Такую область можно всегда конформно и непрерывно вплоть до границы отобразить на область, ограниченную, например, аналитическими кривыми (даже просто окружностями; см. любой подробный курс теории функций комплексного переменного).

Таким образом, мы ищем $u(x, y)$ в виде (см. § 12)

$$u(x, y)=\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(z, t)}, \tag{64,3}$$

где $r(z, t)=|z-t|$. Интеграл в правой части представляет собой видоизмененный потенциал простого слоя (§ 12).

Легко видеть, что наша задача не может иметь двух различных решений, представимых в виде (64,1), (64,2). В самом деле, как было показано в § 60 (см. замечание в конце § 60), если $[\operatorname{Re}\Phi]^+=a_j$ на L_j ($j=0, 1, \ldots, p$), где a_j — постоянные, то $u=\text{const}=a_0=a_1=\ldots=a_p$. Но в нашем случае в силу формул Сохоцкого — Племеля $[\operatorname{Re}\Phi]^+=[\operatorname{Re}\Phi]^-$. Отсюда заключаем, что $\operatorname{Re}\Phi(z)=\text{const}=a_0=\ldots=a_p$ также в S^-. Но $\Phi(\infty)=0$; следовательно, $a_0=a_1=\ldots=a_p=0$, $\operatorname{Re}\Phi(z)=0$[1]).

Подставляя (64,3) в граничное условие (60,2) и замечая, что

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t)=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0, t)},$$

получаем интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(t_0, t)}=f(t_0)+a(t_0), \tag{64,4}$$

где, как в § 61, $f(t_0)$ — заданная действительная функция класса H, а $a(t_0)=a_j=\text{const}$ на L_j, где $j=0, 1, \ldots, p$ при наличии контура L_0 и $j=1, \ldots, p$ при отсутствии L_0; в отличие от § 61, как было сказано, мы не будем считать, что $a_0=0$.

Выражение, находящееся в левой части (64,4),

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(t_0, t)}=\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\,ds, \tag{64,5}$$

где $\alpha(t_0, t)$ — угол, составляемый положительной касательной в t с направлением вектора $\overrightarrow{t_0t}$ (рис. 9 на стр. 47), представляет собой сингулярный оператор типа Коши. Действительно, если

$$\vartheta=\vartheta(t_0, t)=\arg(t-t_0),$$

то

$$\ln r=\ln(t-t_0)-i\vartheta,$$

откуда, дифференцируя по t, при постоянном t_0, получаем

$$\frac{dr}{r(t_0, t)}=\frac{dt}{t-t_0}-i\,d\vartheta,$$

и поэтому

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(t_0, t)}=\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L \mu(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\,ds. \tag{64,6}$$

Мы знаем, что (§ 7, п. 3°)

$$\frac{\partial\vartheta}{\partial s}=\frac{\sin\alpha(t_0, t)}{r}=\frac{\cos(r, n)}{r}=\frac{K_0(t_0, t)}{r^\lambda}, \quad 0\leqslant\lambda<1,$$

---

[1]) Рассуждения справедливы и при отсутствии L_0; в этом случае следует считать $j=1, 2, \ldots, p$.

где $K(t_0, t)$ удовлетворяет условию H. Поэтому первый член правой части (64,6) представляет характеристическую часть оператора. Мы видим, таким образом, что индекс уравнения (64,4) равен нулю, т. е. что оно квазифредгольмово (§ 56). Это обстоятельство значительно облегчает исследование[1]).

Наше сингулярное уравнение представляет собой действительное уравнение, и поэтому при его исследовании мы можем ограничиться случаем действительных функций $\mu(t)$ (см. § 54).

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (64,4),

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0, t)} = 0 \tag{64,7}$$

имеет, очевидно, следующее решение:

$$\mu(t) = C_j \text{ на } L_j, \quad \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, p & (\text{при наличии } L_0), \\ j = 1, \ldots, p & (\text{при отсутствии } L_0), \end{matrix} \tag{64,8}$$

где C_j — произвольные (действительные) постоянные. Других решений оно не имеет. В самом деле, пусть $\mu(t)$ — какое-либо решение уравнения (64,7). Тогда $0 = \operatorname{Re}\Phi^+(t) = \operatorname{Im}\Psi^+(t)$, где

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t - z} = \frac{1}{i}\Phi(z),$$

и поэтому (§ 30, замечание 2) $\mu = C_j$ на L_j, и это доказывает наше утверждение[2]).

Поступим теперь с нашим сингулярным уравнением аналогично тому, как мы поступили с фредгольмовым уравнением в § 61, именно, заменим его уравнением

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(t_0, t)} - \int_L k(t_0, t)\,\mu(t)\,ds = f(t_0), \tag{64,9}$$

где $k(t_0, t)$ определяется следующим образом[3]):

$$k(t_0, t) = \begin{cases} \rho_j(t) & \text{при } t_0, t \text{ на } L_j, \\ 0 & \text{во всех остальных случаях,} \end{cases} \tag{64,10}$$

где $\rho_j(t)$ обозначают произвольно выбранные непрерывные (действительные) функции, подчиненные единственному условию

$$\int_{L_j} \rho_j\,ds \neq 0, \tag{64,11}$$

а $j = 0, 1, \ldots, p$ при наличии L_0 и $j = 1, \ldots, p$ при отсутствии L_0.

Теперь, рассуждая совершенно так же, как в § 61, приходим к заключению, что однородное уравнение, соответствующее (64,9), не имеет решений, отличных от нуля. Значит, не имеет решений, отличных от нуля, и союзное с ним однородное уравнение (так как в нашем случае индекс равен нулю), и уравнение (64,9) всегда разрешимо.

---

[1]) В частности, уравнение (64,4) легко приводится к эквивалентному уравнению Фредгольма любым из способов, указанных в предыдущей главе.

[2]) Заметим, между прочим, что в нашем случае $\operatorname{Im}\Psi^+ = \operatorname{Im}\Psi^-$ и поэтому $\operatorname{Im}\Psi(z) = 0$ как в S^+, так и в S^-.

[3]) Различие с § 61 заключается лишь в том, что мы не считаем здесь $k(t_0, t)$ равным нулю, когда t_0 и t находятся на L_0; но и в § 61 мы могли бы поступить аналогично, что привело бы к несколько более общему интегральному уравнению, имеющему свои преимущества. См. Н. И. Мусхелишвили [3] и [4].

Решив уравнение (64,9), мы найдем определенную функцию $\mu(t)$, а постоянные a_j будут даны формулами

$$a_j = \int_{L_j} \rho_j \mu\, ds, \quad \begin{matrix} j = 0, 1, \ldots, p & \text{(при наличии } L_0\text{)}, \\ j = 1, \ldots, p & \text{(при отсутствии } L_0\text{)}. \end{matrix} \tag{64,12}$$

Задача, таким образом, решена. В случае бесконечной области решение, очевидно, исчезает на бесконечности. Если в случае конечной области мы хотим, чтобы на контуре L_0 было в точности $u = f$, то достаточно вместо u взять $u - a_0$.

Замечание 1. Аналогично тому, что было сказано в конце § 61 (замечание 2), легко установить, что хотя выбор вспомогательного ядра $k(t_0, t)$ влияет на решение $\mu(t)$ интегрального уравнения, но изменение ядра может изменить $\mu(t)$ лишь на величину, остающуюся постоянной на каждом из контуров L_j.

Постоянные a_j от выбора дополнительного ядра не зависят; это непосредственно следует из теоремы единственности, доказанной в начале этого параграфа.

Замечание 2. Рассуждая совершенно аналогично тому, как в § 62, легко заключаем, что если функция $\Psi(z)$, голоморфная в S^+, такова, что $[\operatorname{Re}\Psi(t)]^+$ существует и принадлежит классу H, то

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\nu(t)\, dt}{t - z} + C + iC',$$

где $\nu(t)$ — действительная функция, принадлежащая классу H, C и C' — действительные постоянные. Постоянная C определена вполне, функция же $\nu(t)$ определена на каждом контуре L_j с точностью до постоянного слагаемого.

В случае конечной области S^+, т. е. при наличии контура L_0, прибавляя к $\nu(t)$ на L_0 подходящую действительную постоянную, можем, очевидно, добиться того, чтобы $C' = 0$, и тогда

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\nu(t)\, dt}{t - z} + C. \tag{64,13}$$

В этом представлении функция $\nu(t)$ определена вполне на L_0 и с точностью до постоянных слагаемых на L_j, $j = 1, \ldots, p$.

В случае бесконечной области S^+, т. е. при отсутствии контура L_0, будем иметь, очевидно, $C + iC' = \Psi(\infty)$, и поэтому

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi} \int_L \frac{\nu(t)\, dt}{t - z} + \Psi(\infty), \tag{64,14}$$

причем $\nu(t)$ определена на L_j с точностью до постоянных слагаемых.

Эти результаты (даже в несколько более общем виде) непосредственно получаются также из результатов § 62 простой заменой Ψ на $i\Psi$.

§ 65. Решение задачи Дирихле потенциалом простого слоя. Основная задача электростатики. 1°. Из решения видоизмененной задачи Дирихле, полученного в предыдущем параграфе, легко получить и решение классической задачи Дирихле методом, вполне аналогичным методу, примененному в § 63. Во избежание повторений мы на этом останавливаться не будем, а дадим непосредственное решение задачи Дирихле двумя способами: при помощи видоизмененного потенциала простого слоя и при помощи обычного потенциала простого слоя; попутно мы получим решение так называемой основной задачи электростатики.

Имея в виду дать простой и наглядный пример применения метода сингулярных уравнений, мы рассмотрим лишь случай, когда L состоит из единственного замкнутого контура L_0, ограничивающего конечную область S^+.

Мы будем, как выше, считать, что L удовлетворяет условию Ляпунова.

Итак, пусть требуется найти гармоническую в S^+ и непрерывную в $S^+ + L$ функцию $u(x, y)$ по граничному условию

$$u = f(t) \text{ на } L, \tag{65,1}$$

где $f(t)$ — заданная на L действительная функция; мы будем по-прежнему считать, что $f(t)$ удовлетворяет условию H.

2°. Решение при помощи видоизмененного потенциала простого слоя. Будем искать решение задачи в виде

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\Phi(z), \quad \Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{65,2}$$

где $\mu(t)$ — искомая действительная функция, принадлежащая классу H.

Как и в предыдущем параграфе, подставляя (65,2) в (65,1), получаем интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0, t)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\,ds = f(t_0). \tag{65,3}$$

Это (см. предыдущий параграф) — действительное сингулярное интегральное уравнение, имеющее индекс нуль. Все исследование мы будем вести в области действительных функций (см. § 54). Соответствующее (65,3) однородное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}\,ds = 0 \tag{65,4}$$

имеет очевидное решение $\mu(t) = C$, где C — произвольная постоянная; других решений оно не имеет (см. предыдущий параграф). Следовательно, и союзное с предыдущим однородное уравнение

$$\frac{1}{\pi}\int_L \nu(t)\frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r(t, t_0)}\,ds = 0 \tag{65,5}$$

имеет одно и только одно линейно независимое решение (ибо индекс $\varkappa = 0$), так что если $\nu_0(t)$ — какое-либо определенное решение предыдущего уравнения, не равное тождественно нулю, то все прочие решения даются формулой $\nu(t) = C\nu_0(t)$, где C — произвольная постоянная[1]).

На основании общей теории сингулярных уравнений[2]) исходное уравнение (65,3) имеет решения тогда и только тогда, когда

$$\int_L \nu_0(t) f(t)\,ds = 0; \tag{65,6}$$

при соблюдении этого условия общее решение уравнения (65,3) имеет вид

$$\mu(t) = \mu_0(t) + C, \tag{65,7}$$

где $\mu_0(t)$ — какое-либо частное решение, а C — произвольная постоянная.

---

[1]) И здесь мы ограничиваемся действительными решениями.

[2]) См. еще § 54.

Исследуем ближе характер условия (65,6). На основании результата § 14 уравнение (65,5) эквивалентно следующему:

$$\frac{d}{ds_0}\int_L \nu(t)\ln r(t_0,\ t)\,ds=0$$

или еще

$$\int_L \nu(t)\ln r(t_0,\ t)\,ds=\text{const}. \tag{65,8}$$

Докажем, что

$$m_0=\int_L \nu_0(t)\,ds\neq 0. \tag{65,9}$$

В самом деле, в противном случае потенциал простого слоя

$$U(x,\ y)=-\int_L \nu_0(t)\ln|t-z|\,ds=\int_L \nu_0(t)\ln\frac{1}{r(t,\ z)}\,ds \tag{65,10}$$

представлял бы собой в области S^- гармоническую функцию, включая бесконечно удаленную точку (этим мы хотим сказать, что $U(x,\ y)$ принимает определенное конечное значение на бесконечности; в нашем случае это значение равно нулю [1])).

Так как, далее[2]), в силу (65,8) $U^-=U^+=U=\text{const}$ на L, то было бы $U(x,\ y)=\text{const}$ как в S^+, так и в S^-. Но на основании известной формулы теории потенциала[3])

$$-2\pi\nu_0(t_0)=\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^+-\left(\frac{\partial U}{\partial n}\right)^-, \tag{65,11}$$

где n обозначает нормаль к L в точке t_0, направленную влево. Следовательно, в нашем случае было бы $\nu_0(t)=0$ на L, что противоречит условию.

Из (65,9) следует, что всегда можно подобрать постоянную a_0 такую, чтобы

$$\int_L (f+a_0)\,\nu_0\,ds=\int_L f\nu_0\,ds+a_0\int_L \nu_0\,ds=0, \tag{65,12}$$

что является условием разрешимости уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0,\ t)}{r(t_0,\ t)}\,ds=f(t_0)+a_0. \tag{65,13}$$

---

[1]) При больших $|z|$ имеем:

$$U(x,\ y)=-\int_L \nu_0(t)\ln|t-z|\,ds=$$
$$=-\ln|z|\int_L \nu_0(t)\,ds-\int_L \nu_0(t)\ln\left|1-\frac{t}{z}\right|ds=-\ln|z|\int_L \nu_0(t)\,ds+O\left(\frac{1}{|z|}\right).$$

[2]) Мы пользуемся здесь известным свойством потенциала простого слоя, заключающемся в том, что он остается непрерывным при переходе через L (для этого достаточно, чтобы плотность $\nu_0(t)$ была ограничена и интегрируема).

[3]) Для справедливости формулы (65,11) достаточно, чтобы плотность $\nu_0(t)$ была непрерывна.

Если $\mu(t)$ есть какое-либо решение этого уравнения (все остальные решения получатся по формуле $\mu+\text{const}$), то

$$u(x, y) = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z} - a_0 = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(z, t)} - a_0 \tag{65,14}$$

есть решение исходной задачи Дирихле.

3°. Основная задача электростатики. Попутно мы решили следующую задачу теории логарифмического потенциала:

Найти плотность $\nu(t)$ такого распределения массы на границе L области S^+, чтобы соответствующий потенциал

$$U(x, y) = \int_L \nu(t)\ln\frac{1}{r}\,ds \tag{65,15}$$

сохранял постоянное значение в S^+. Здесь $r = r(t, z) = |t - z|$.

Поставленная задача представляет собой двумерный аналог основной задачи электростатики о распределении электричества на границе L проводника S^+. В нашем (двумерном) случае эта задача также имеет физический смысл. Она приближенно соответствует задаче распределения электричества на длинном цилиндрическом проводнике с поперечным сечением S^+.

Если $U = \text{const}$ в S^+, то $U = \text{const}$ на L, и обратно. Следовательно, задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$\int_L \nu(t)\ln r(t_0, t)\,ds = \text{const},$$

откуда дифференцированием по s_0 получаем однородное сингулярное уравнение (65,5).

Мы видели, что оно имеет отличные от нуля решения и что если $\nu_0(t)$ — одно из них, то все прочие получаются по формуле $\nu(t) = C\nu_0(t)$. Соответствующий потенциал дается формулой

$$U(x, y) = CU_0(x, y), \tag{65,16}$$

где

$$U_0(x, y) = \int_L \nu_0(t)\ln\frac{1}{r}\,ds. \tag{65,17}$$

Потенциал $U_0(x, y)$ имеет постоянное значение в $S^+ + L$, которое мы обозначим через k_0:

$$U_0(x, y) = k_0 \text{ в } S^+ + L. \tag{65,18}$$

Может случиться, что $k_0 = 0$; этот случай мы будем называть особым.

Мы видим, что общее решение (65,16) нашей задачи содержит произвольную постоянную C. Задача сделается определенной, если дополнительно задана величина m «массы» или «заряда», распределенного на L,

$$m = \int_L \nu(t)\,ds = C\int_L \nu_0\,ds = Cm_0. \tag{65,19}$$

Это соотношение определяет C, ибо в силу (65,9) $m_0 \neq 0$.

Вместо того чтобы задавать m, можно задать значение k потенциала $U(x, y)$ на $S^+ + L$. Для определения C будем тогда иметь соотношение

$k = k_0 C$, которое определяет C во всех случаях, кроме особого, когда $k_0 = 0$ и когда, следовательно, $U(x, y) = 0$ на $S^+ + L$ при всех C. Этот особый случай не имеет аналога в трехмерном пространстве, т. е. для ньютонова потенциала.

4°. Решение задачи Дирихле потенциалом простого слоя. Непосредственным обобщением предыдущей задачи является нахождение потенциала простого слоя (65,15) по условию $U = f(t)$ на L; это есть задача Дирихле, причем требуется найти решение при помощи потенциала простого слоя. Задача сводится к интегральному уравнению Фредгольма первого рода

$$-\int_L \nu(t) \ln r(t_0, t)\, ds = f(t_0). \tag{65,20}$$

Если мы хотим, чтобы искомое решение $\nu(t)$ удовлетворяло условию H, то мы должны считать, что заданная функция $f(t_0)$ имеет производную по s_0, удовлетворяющую условию H, ибо как легко видеть, левая часть (65,20) обладает этим свойством.

Дифференцируя обе части (65,20) по s_0, получаем сингулярное интегральное уравнение

$$-\int_L \nu(t) \frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r(t, t_0)}\, ds = \frac{df}{ds_0}. \tag{65,21}$$

Это уравнение союзное с уравнением (65,3), которое мы получили, решая задачу Дирихле видоизмененным потенциалом простого слоя.

Однородным уравнением, союзным с (65,21), будет уравнение (65,4), имеющее, как мы знаем, единственное линейно независимое решение $\mu_0(t) = 1$.

Условие разрешимости уравнения (65,21) всегда удовлетворено, ибо

$$\int_L \mu_0(t) \frac{df}{ds}\, ds = \int_L \frac{df}{ds}\, ds = 0. \tag{65,22}$$

Следовательно, уравнение (65,21) всегда разрешимо. Общее его решение имеет вид

$$\nu(t) = \nu^*(t) + C\nu_0(t), \tag{65,23}$$

где $\nu^*(t)$ — какое-либо частное решение, $\nu_0(t)$ — решение соответствующего однородного уравнения (65,5), а C — произвольная постоянная.

Пусть $\nu(t)$ обозначает какое-либо решение уравнения (65,21). Тогда потенциал $U(x, y)$, определенный формулой (65,15), будет, очевидно, удовлетворять граничному условию

$$U = f(t_0) - k \text{ на } L, \tag{65,24}$$

где k — определенная постоянная. Таким образом, функция

$$u(x, y) = U(x, y) + k \tag{65,25}$$

решает задачу Дирихле (65,1), так что решение представляется в виде суммы потенциала простого слоя и некоторой постоянной k. Если же мы хотим представить решение потенциалом простого слоя в чистом виде, мы должны еще найти потенциал простого слоя, имеющий постоянное значение k на L, а следовательно, в $S^+ + L$. Это, как мы видели.

можно сделать всегда, за исключением особого случая, когда в (65,18) $k_0 = 0$.

Интегральное уравнение (65,21) было получено Г. Бертраном (G. Bertrand [2]), который приводит его к интегральному уравнению Фредгольма при помощи метода регуляризации, представляющего собой один из частных видов метода, указанного в § 50. Однако автору (не располагавшему общей теорией сингулярных уравнений) не удалось дать сколько-нибудь полного решения, несмотря на довольно громоздкие выкладки и значительные ограничения, налагаемые им на контур L и на заданную функцию $f(t)$.

Замечание. Из результата п. 4° непосредственно следует, что если исключить случай, названный нами особым ($k_0 = 0$), то всякая гармоническая в S^+ функция $U(x, y)$, граничные значения на L которой имеют производную по s, удовлетворяющую условию H, представима в виде

$$U(x, y) = \int_L \nu(t) \ln \frac{1}{r(t, z)} ds, \tag{65,26}$$

где $\nu(t)$ — действительная функция класса H. Легко видеть, что такое представление единственно; это следует из того, что если $U(x, y) = 0$ в S^+, а следовательно, и на L, то необходимо $\nu(t) = 0$.

В особом же случае, как легко видеть, имеет место представление

$$U(x, y) = \int_L \nu(t) \ln \frac{a}{r(t, z)} ds, \tag{65,27}$$

где a — произвольно фиксированная положительная постоянная, отличная от 1. При фиксированном a предыдущее представление вполне определяет $\nu(t)$, когда задана функция $U(x, y)$.

Легко видеть, далее, что во всех случаях всякая гармоническая функция $U(x, y)$, удовлетворяющая названным выше условиям, представима в виде (65,27), если под a подразумевать любую фиксированную положительную постоянную, такую, однако, чтобы

$$\int_L \nu_0(t) \ln \frac{a}{r(t_0, t)} ds = m_0 \ln a + k_0 \neq 0, \tag{65,28}$$

где m_0 и k_0 определяются соответственно формулами (65,9) и (65,18)[1]).

Мы видим, таким образом, что случай, названный нами особым, ничего исключительного, по существу, не представляет; от него можно избавиться простым изменением единицы длины.

Из предыдущего следует еще, что если действительная часть $U(x, y)$ функции $\Psi(z)$, голоморфной в S^+, удовлетворяет названным выше условиям, то функция $\Psi(z)$ представима в виде

$$\Psi(z) = \int_L \nu(t) \ln \frac{a}{t-z} ds + iC, \tag{65,29}$$

где $\nu(t)$ — действительная функция класса H; a — определенная положительная постоянная, удовлетворяющая условию (65,28), которую можно раз и навсегда фиксировать для данной области S^+; C — действи-

---

[1]) Таким образом, выбор a зависит лишь от области S^+, а не от представляемой гармонической функции.

тельная постоянная (зависящая уже от представляемой функции). Предполагается, конечно, что значения логарифма фиксированы надлежащим образом; мы предоставляем читателю выяснить, как это сделать (ср. ниже, формула (69,2) при $m = 1$).

При фиксированном a и определенном выборе логарифма функция $\Psi(z)$ вполне определяет функцию $\nu(t)$ и постоянную C.

II. Различные представления голоморфных функций интегралами типа Коши и аналогичными

Один из наиболее естественных способов решения тех или иных граничных задач, касающихся голоморфных функций, заключается в том, что искомая голоморфная функция выражается в виде интеграла типа Коши или аналогичного интеграла; это выражение, подставленное в граничное условие, и приводит к интегральному уравнению. Таким именно способом мы пользовались в предыдущих параграфах, решая классическую и видоизмененную задачи Дирихле.

Очень важно, конечно, целесообразно выбрать то или иное интегральное представление искомой функции, приспособленное к решению данной задачи.

В настоящем отделе мы укажем некоторые простейшие способы представления функций, голоморфных в данной области, при помощи интегралов типа Коши и аналогичных.

§ 66. Общие замечания. Пусть S^+ — (связная) область, ограниченная совокупностью гладких контуров $L_0, L_1, \ldots, L_p$, из которых L_0 охватывает все остальные; L_0 может отсутствовать, и тогда S^+ — бесконечная область. Через L мы будем по-прежнему обозначать совокупность контуров $L_0, L_1, \ldots, L_p$ и считать, как всегда, что положительное направление L оставляет S^+ слева. Через S^- мы будем по-прежнему обозначать часть плоскости, дополняющую $S^+ + L$ до полной плоскости; S^- состоит из конечных областей $S_1^-, \ldots, S_p^-$, ограниченных соответственно контурами $L_1, \ldots, L_p$ и, при наличии L_0, — из бесконечной области S_0^-, ограниченной L_0.

Пусть $\Phi(z)$ — функция, голоморфная в S^+, непрерывно продолжимая на L, и пусть в случае бесконечной области $\Phi(\infty) = 0$. Эта функция всегда представима интегралом Коши

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}, \tag{66,1}$$

который есть частный вид интеграла типа Коши.

Естественно возникает вопрос о возможности представления той же функции $\Phi(z)$ другими интегралами типа Коши, в которых вместо $\Phi^+(t)$ фигурируют какие-либо другие функции точки границы. Вопрос этот сводится к следующему: *каковы необходимые и достаточные условия того, чтобы интегралы*

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad \text{и} \quad \Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\psi(t)\,dt}{t-z}, \tag{66,2}$$

где $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ — непрерывные функции точки контура L, представляли в S^+ одну и ту же голоморфную функцию?

На этот вопрос очень легко ответить. Именно, мы должны иметь по условию

$$\int_L \frac{\varphi(t)-\psi(t)}{t-z}\,dt=0$$

для всех z в S^+. Но тогда на основании сказанного в § 29

$$\varphi(t)-\psi(t)=\Omega^-(t), \tag{66,3}$$

где $\Omega^-(t)$ — граничное значение некоторой функции $\Omega(z)$, голоморфной в S^-, непрерывно продолжимой на L и, при наличии контура L_0, исчезающей на бесконечности. Ясно, что, обратно, если имеет место (66,3), то $\Phi(z)=\Psi(z)$ в S^+.

Не забудем, что под $\Omega(z)$ следует подразумевать совокупность функций $\Omega_1(z)$, ..., $\Omega_p(z)$, голоморфных соответственно в S_1^-, ..., S_p^-, и, при наличии контура L_0, функции $\Omega_0(z)$, голоморфной в S_0^- и исчезающей на бесконечности.

Если в случае бесконечной области $\Phi(\infty)\neq 0$, то вместо представления (66,1) мы имеем представление

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}+\Phi(\infty), \tag{66,1a}$$

и, следовательно, такая функция может быть тоже представлена бесчисленным множеством способов интегралом типа Коши с точностью до постоянного слагаемого.

Совершенно аналогичные результаты получим, поменяв ролями S^+ и S^-.

§ 67. Представление интегралом типа Коши с действительной или чисто мнимой плотностью. Пользуясь произвольностью функции $\Omega(z)$ предыдущего параграфа, мы можем придать интегралу типа Коши, представляющему данную голоморфную функцию, тот или иной вид, удобный с той или иной точки зрения.

В §§ 62 и 64 мы уже встретились с простейшими представлениями голоморфных в данной области функций интегралами типа Коши. В настоящем параграфе мы вернемся к этим представлениям для того, чтобы связать их со сказанным в предыдущем параграфе.

Под L, S^+, S^- мы будем подразумевать то же, что в предыдущем параграфе, но, кроме того, будем предполагать, что L удовлетворяет условию Ляпунова, т. е. что касательная к L составляет с постоянным направлением угол, удовлетворяющий условию H.

1°. Предположим сначала, что S^+ — конечная область, т. е. что контур L_0 имеется налицо, и пусть $\Phi(z)$ — заданная голоморфная в S^+ функция, непрерывно продолжимая на L.

Мы видели в § 62, что функция $\Phi(z)$ представима в виде

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}+Ci=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(t)+Ci}{t-z}\,dt, \tag{67,1}$$

где $\mu(t)$ — *действительная* непрерывная функция, а C — действительная постоянная[1]).

[1]) Представление (67,1) имеет место, как мы видели (§ 62), не только в случае, когда функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L, но и тогда, когда этим свойством обладает лишь $\operatorname{Re}\Phi(z)$.

С другой стороны, функция $\Phi(z)$ представима интегралом Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}. \qquad (67,2)$$

Следовательно, на основании сказанного в предыдущем параграфе существует голоморфная в S^- функция $\Omega(z)$, непрерывно продолжимая на L, исчезающая на бесконечности и такая, что

$$\Phi^+(t)=\mu(t)+Ci+\Omega^-(t). \qquad (67,3)$$

Полагая

$$\Phi(z)=U(x, y)+iV(x, y), \quad \Omega(z)+Ci=u(x, y)+iv(x, y), \qquad (67,4)$$

будем иметь на основании (67,3)

$$v^-=V^+ \text{ на } L. \qquad (67,5)$$

Значения V^+ на L мы можем считать заданными, так как функция $\Phi(z)$ задана в S^+. Следовательно, мы найдем значения $v(x, y)$ в областях $S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$, решая задачу Дирихле для этих областей. После этого мы сможем определить значения $\Omega_0(z), \Omega_1(z), \ldots, \Omega_p(z)$ функции $\Omega(z)$ в этих областях. Значение $\Omega_0(z)$ определится, очевидно, вполне, если принять во внимание условие $\Omega(\infty)=0$; так же определится и постоянная C, равная, очевидно, значению $v(x, y)$ на бесконечности. Значения $\Omega_1(z), \ldots, \Omega_p(z)$ определяются с точностью до произвольных действительных постоянных.

После этого на основании формулы (67,3) значение $\mu(t)$ определится по формуле

$$\mu(t)=U^+-u^-. \qquad (67,6)$$

Мы видим еще раз, что $\mu(t)$ определяется вполне на L_0 и с точностью до произвольных (действительных) постоянных на $L_1, \ldots, L_p$.

В § 62 определение $\mu(t)$ было связано с решением интегрального уравнения, связанного в свою очередь с решением задачи Дирихле для многосвязной (при $p>0$) области S^+. Здесь же $\mu(t)$ определяется решением задачи Дирихле для односвязных областей $S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$. Однако в § 62 мы наложили на функцию $\Phi(z)$ более общие условия, чем здесь: там мы потребовали лишь, чтобы действительная часть $\Phi(z)$ была непрерывно продолжима на контур; здесь же мы потребовали, чтобы на контур были непрерывно продолжимы как действительная, так и мнимая части $\Phi(z)$.

2°. Если область S^+ бесконечна, т. е. контур L_0 отсутствует, то, как было показано в § 62, всякая функция $\Phi(z)$, голоморфная в S^+ и непрерывно продолжимая на L, представима в виде

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}+\Phi(\infty), \qquad (67,7)$$

где $\mu(t)$ — непрерывная действительная функция [1]). И здесь, совершенно аналогично предыдущему, определение $\mu(t)$ может быть сведено к решению задач Дирихле для односвязных конечных областей $S_1^-, \ldots, S_p^-$. Функция $\mu(t)$ определяется с точностью до произвольных постоянных на $L_1, \ldots, L_p$.

[1]) Представление (67,7) имеет место и тогда, когда лишь $\mathrm{Re}\,\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L (§ 62).

3°. Заменяя $\Phi(z)$ на $i\Phi(z)$, как это было уже указано в § 64, замечание 2, мы получим для функции $\Phi(z)$, голоморфной в S^+ и непрерывно продолжимой на L, представление

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\nu(t)\,dt}{t-z}+C \tag{67,8}$$

в случае конечной области S^+ и

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi}\int_L \frac{\nu(t)\,dt}{t-z}+\Phi(\infty) \tag{67,9}$$

в случае бесконечной области S^+; в этих формулах $\nu(t)$ — действительная непрерывная функция, а C — действительная постоянная. Функция $\nu(t)$ определяется с точностью до произвольных постоянных на $L_1, \ldots, L_p$ и точно на L_0; постоянная C определена вполне [1]).

Определение $\nu(t)$ можно произвести совершенно аналогично определению $\mu(t)$ в предыдущих случаях.

§ 68. Представление интегралом типа Коши с плотностью вида $(a+ib)\mu$. Указанные в предыдущем параграфе представления являются частными случаями такого:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(a+ib)\,\mu(t)\,dt}{t-z}+C, \tag{68,1}$$

где $a=a(t)$, $b=b(t)$ — заданные (не зависящие от Φ) действительные непрерывные функции такие, что $a^2+b^2\neq 0$ всюду на L, $\mu(t)$ — действительная непрерывная функция, которую требуется подобрать в соответствии с функцией $\Phi(z)$, так же как и постоянную C. При $a=1$, $b=0$ и подходящем C получаем представление (67,1) и (67,7) предыдущего параграфа, а при $a=0$, $b=1$ и подходящем C — представление (67,8) и (67,9).

Мы будем считать, как в предыдущем параграфе, что угол касательной к L с постоянным направлением удовлетворяет условию H; условию H мы подчиним также заданные функции $a(t)$ и $b(t)$.

Мы будем считать, далее, что функция $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L, причем $\Phi^+(t)$ удовлетворяет условию H.

Начнем со случая, когда S^+ — конечная область, т. е. контур L_0 имеется налицо. Тогда формулу (68,1) можно переписать еще так:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{(a+ib)\,\mu(t)+C}{t-z}\,dt. \tag{*}$$

На основании сказанного в § 66, для того, чтобы прийти к представлению (*), следует найти функцию $\Omega(z)$, голоморфную в S^-, исчезающую на бесконечности и непрерывно продолжимую на L, по условию

$$\Phi^+(t)=(a+ib)\,\mu(t)+C+\Omega^-(t) \quad \text{на } L. \tag{68,2}$$

Вводя обозначение

$$iC+i\Omega(z)=\omega(z), \tag{68,3}$$

---

[1]) Представления (67,8) и (67,9) справедливы и тогда, когда лишь $\operatorname{Im}\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L; это следует из результата § 62.

приходим к соотношению

$$\operatorname{Re}\frac{\omega^-(t)}{a+ib}=\operatorname{Re}\frac{i\Phi^+(t)}{a+ib}$$

или еще

$$\operatorname{Re}(a-ib)\,\omega^-(t)=\operatorname{Re} i\,(a-ib)\,\Phi^+(t). \tag{68,4}$$

Таким образом, определение $\omega(z)$, а следовательно, и $\Omega(z)$ свелось к решению задачи Римана — Гильберта для (односвязных) областей $S_0^-, S_1^-, \ldots, S_p^-$, ибо правая часть в (68,4) — заданная на L функция, если задана функция $\Phi(z)$ в S^+.

Возьмем какую-либо из областей S_j^-. Относящаяся к ней задача Римана — Гильберта будет всегда разрешима, если соответствующий индекс $\varkappa$ не отрицателен. Индекс этот дается формулой (см. конец § 43 [1]))

$$\varkappa_j=\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_{L_j}. \tag{68,5}$$

Таким образом, представление (68,1) всегда возможно, если все $\varkappa_j \geqslant 0$. В случае, когда некоторые из $\varkappa_j$ отрицательны, такое представление возможно лишь в случае, когда $\Phi(z)$ удовлетворяет некоторым добавочным условиям, на которых мы не останавливаемся.

В случае б е с к о н е ч н о й о б л а с т и S^+ имеют место совершенно аналогичные результаты. В этом случае постоянная C непосредственно определяется с самого начала:

$$C=\Phi(\infty). \tag{68,6}$$

Применяя к функции $\Phi(z)-\Phi(\infty)$ рассуждения, совершенно аналогичные предыдущим, мы придем к задачам Римана — Гильберта (68,4) для конечных односвязных областей $S_1^-, \ldots, S_p^-$.

Эти задачи всегда разрешимы, если все $\varkappa_j \geqslant 0$. В противном случае представление (68,1) возможно лишь в случае, если $\Phi(z)$ удовлетворяет некоторым добавочным условиям.

В следующем параграфе мы попутно детально рассмотрим одно из представлений вида (68,1).

§ 69. Интегральное представление И. Н. Векуа. Во многих важных задачах в граничных условиях фигурируют не только значения самой искомой функции, но и значения ее производных до некоторого порядка. Поэтому важно иметь формулы, дающие интегральное представление ряда последовательных производных данной голоморфной (или кусочно-голоморфной) функции. Одно из таких представлений, весьма удобное для многих приложений, дано И. Н. Векуа ([5], [8]). Мы приведем его здесь [2]).

---

[1]) Применяя формулу (43,3), мы должны помнить, что, во-первых, в ней следует заменить b на $-b$; кроме того, так как положительное направление контура L_j оставляет в нашем случае рассматриваемую область S_j^- справа, то в ее правой части следует изменить знак на обратный. Поэтому будем иметь:

$$\varkappa_j=-\frac{1}{\pi}[\arg(a+ib)]_{L_j}=+\frac{1}{\pi}[\arg(a-ib)]_{L_j},$$

т. е. формулу, совпадающую по внешнему виду с (43,3).

[2]) Впоследствии Д. И. Шерман [5], а затем Ю. М. Крикунов [1] — [3], М. П. Ганин [3], Р. С. Исаханов [1], [2], Э. Г. Хасабов [1], В. С. Рогожин [2] дали некоторые другие аналогичные представления.

1°. Пусть сначала S^+ — конечная односвязная область, ограниченная замкнутым контуром Ляпунова L. Через S^- мы будем обозначать область, дополняющую $S^+ + L$ до полной плоскости.

Докажем следующее предложение (И. Н. Векуа):

Теорема. *Пусть производная порядка m функции $\Phi(z)$, голоморфной в S^+, принимает на L граничное значение класса H. Тогда, если считать, что начало координат находится в S^+, функция $\Phi(z)$ представима следующим образом:*

при $m=0$

$$\Phi(z)=\int_L \frac{\mu(t)\,ds}{1-\frac{z}{t}}+iC, \tag{69,1}$$

при $m\geqslant 1$

$$\Phi(z)=\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds+iC, \tag{69,2}$$

где $\mu(t)$ — действительная функция класса H, а C — действительная постоянная; $\mu(t)$ и C определяются по $\Phi(z)$ единственным образом[1]*.*

Под $\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)$ при данном t подразумевается ветвь, обращающаяся в нуль при $z=0$; s обозначает дуговую абсциссу.

Начнем с доказательства теоремы для случая $m=0$. Замечая, что

$$ds=t'^{-1}\,dt=\overline{t'}\,dt,$$

где

$$t'=\frac{dt}{ds}=\frac{dx}{ds}+i\frac{dy}{ds},\quad \overline{t'}=\frac{dx}{ds}-i\frac{dy}{ds}=t'^{-1}, \tag{69,3}$$

перепишем формулу (69,1) так:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\pi i\mu(t)\,t\overline{t'}\,dt}{t-z}+iC=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{2\pi i\mu t\overline{t'}+iC}{t-z}\,dt.$$

Отсюда на основании сказанного в предыдущем параграфе выводим, что должно быть

$$2\pi i t\overline{t'}\mu(t)=\Phi^+(t)-\Omega^-(t)-iC, \tag{69,4}$$

где $\Omega^-(t)$ — граничное значение некоторой функции, голоморфной в S^-, непрерывно продолжимой на L и исчезающей на бесконечности. Введем обозначение $\Omega_0(z)=\Omega(z)+iC$. Функция $\Omega_0(z)$ должна принимать на бесконечности чисто мнимое значение и удовлетворять на L граничному условию

$$\operatorname{Re}\frac{\Omega_0^-(t)}{t\overline{t'}}=\operatorname{Re}\frac{\Phi^+(t)}{t\overline{t'}}.$$

Мы имеем, таким образом, для области S^- граничную задачу Римана — Гильберта вида

$$\operatorname{Re}(a-ib)\,\Omega_0^-(t)=c, \tag{69,5}$$

[1]) Б. В. Хведелидзе [18] дал обобщение этой теоремы на случай, когда производная порядка m функции $\Phi(z)$ представима в S^+ интегралом типа Коши с плотностью, принадлежащей при обозначениях, указанных в § 27, классу $\mathcal{L}_p(\rho; L)$, где $p>1$, а $\rho(t)$ — функция вида (27,3). В этом случае $\mu(t)$ также принадлежит классу $\mathcal{L}_p(\rho; L)$.

где

$$a - ib = a(t) - ib(t) = \frac{1}{t\bar{t}'} = \frac{t'}{t}, \quad c = c(t) = \operatorname{Re} \frac{\Phi^+(t)}{t\bar{t}'};$$

при принятых нами условиях $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ удовлетворяют, очевидно, условию H.

Легко видеть, что соответствующий индекс равен нулю, а поэтому на основании результатов §§ 41, 43 задача (69,5) всегда имеет решение, которое представляется в виде

$$\Omega_0(z) = \omega(z) + A\chi(z),$$

где $\omega(z)$ — определенное частное решение задачи (69,5), $\chi(z)$ — частное решение однородной задачи, т. е. задачи

$$\operatorname{Re} \frac{t'}{t} \chi^-(t) = 0, \tag{69,6}$$

а A — действительная постоянная. Остается подобрать A так, чтобы $\operatorname{Re} \Omega_0(\infty) = 0$, т. е. чтобы $\operatorname{Re}[\omega(\infty) + A\chi(\infty)] = 0$. Это всегда возможно, так как $\chi(\infty)$ — действительная величина, отличная от нуля. В самом деле, $\chi(\infty) \neq 0$, ибо решение однородной задачи Римана — Гильберта при нулевом индексе всюду отлично от нуля [1]). Остается показать, что $\operatorname{Im} \chi(\infty) = 0$. Но это следует из формулы (69,6), которая дает:

$$0 = \operatorname{Re} \int_L \frac{\chi^-(t)\, t'\, ds}{t} = \operatorname{Re} \int_L \frac{\chi^-(t)\, dt}{t} = \operatorname{Re}[2\pi i \chi(\infty)].$$

Итак, постоянная A вполне определяется. Так как, далее, $\Omega_0^-(t)$ удовлетворяет условию H [2]), то и функция $\mu(t)$, определяемая формулой (69,4), также удовлетворяет этому условию.

Таким образом, теорема доказана в случае $m = 0$ [3]). Из самого хода наших рассуждений ясно, что $\mu(t)$ и C в (69,1) определяются единственным образом по функции $\Phi(z)$; единственность представления (69,1) легко доказать и непосредственно, причем достаточно предположить, что $\mu(t)$ — н е п р е р ы в н а я (действительная) функция (см. ниже).

Перейдем к доказательству теоремы для случая $m \geqslant 1$. Заметим, прежде всего, что правая часть формулы (69,2) действительно представляет собой функцию, голоморфную в S^+ и такую, что граничные значения ее m-й производной удовлетворяют условию H, если только $\mu(t)$ удовлетворяет этому условию. В самом деле, дифференцируя m раз, получаем:

$$\Phi^{(m)}(z) = (-1)^m (m-1)! \int_L \frac{\mu(t)\, ds}{t^{m-1}(t-z)} = (-1)^m (m-1)! \int_L \frac{\mu(t)\, \bar{t}'\, dt}{t^{m-1}(t-z)},$$

откуда на основании теоремы § 18 и следует наше утверждение.

Покажем теперь, что если представление (69,2) имеет место, то при заданной функции $\Phi(z)$ функция $\mu(t)$ и постоянная C определяются

---

[1]) Действительно, для круговой области это непосредственно следует из формул § 41. Для произвольной области это свойство, очевидно, сохраняется, так как конформное преобразование на него не влияет.

[2]) См. § 43, замечание 1.

[3]) Приведенное доказательство отлично от доказательства И. Н. Векуа; напротив, следующее в тексте доказательство для случая $m \geqslant 1$ представляет собой воспроизведение доказательства И. Н. Векуа [8].

единственным образом. Это сводится к утверждению, что если

$$\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1} \ln\left(1-\frac{z}{t}\right) ds + \int_L \mu(t)\, ds + iC = 0 \tag{69,7}$$

для всех z в S^+, то необходимо $\mu(t) = 0$ (а тогда, очевидно, и $C = 0$). Докажем справедливость последнего утверждения; при доказательстве достаточно считать, что $\mu(t)$ — непрерывная (действительная) функция.

Разлагая левую часть (69,7) в окрестности точки $z = 0$ по степеням z, легко получаем:

$$0 = \int_L \mu(t)\, t^{-k}\, ds = \int_L \mu(t)\, \bar{t}' t^{-k}\, dt, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots \tag{69,8}$$

Но отсюда следует, что интеграл типа Коши

$$\omega(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\mu(t)\, \bar{t}'\, dt}{t - z}$$

равен нулю для всех z в S^+; для того чтобы в этом убедиться, достаточно разложить $\omega(z)$ по степеням z вблизи точки $z = 0$ и принять во внимание (69,8). Следовательно, $\omega^+(t) = 0$ и, значит,

$$\mu(t)\, \bar{t}' = -\omega^-(t). \tag{69,9}$$

Из (69,8) при $k = 0$ следует, что в окрестности бесконечно удаленной точки имеет место разложение вида

$$\omega(z) = \frac{a_{-2}}{z^2} + \frac{a_{-3}}{z^3} + \ldots,$$

и, следовательно, функция

$$\omega_0(z) = \int_{z_0}^{z} \omega(z)\, dz,$$

где z_0 — произвольно фиксированная точка области $S^- + L$, а интеграл берется по любому пути в этой области, голоморфна в S^-, включая $z = \infty$. Считая, что точка z_0 взята на L, выводим из (69,9):

$$\omega_0^-(t) = \int_{z_0}^{t} \omega^-(t)\, dt = -\int_0^s \mu(t)\, ds$$

(мы считаем, что дуговая абсцисса s отсчитывается от z_0); отсюда следует, что $\operatorname{Im} \omega_0^-(t) = 0$ на L и потому $\omega_0(z) = \mathrm{const}$ в S^-, $\omega(z) = \omega_0'(z) = 0$ в S^- и, значит, $\mu(t) = 0$, а это и доказывает наше утверждение о единственности представления в виде (69,2). Точно такое же доказательство применяется и к представлению (69,1).

Прежде чем идти дальше, условимся в следующем: во всем этом параграфе под линейной комбинацией некоторых функций (действительных или комплексных) мы будем понимать линейную комбинацию с действительными (постоянными) коэффициентами и в соответствии с этим определять линейную зависимость или независимость функций.

Условившись в этом, на основании только что доказанного свойства единственности представления функции $\Phi(z)$ в виде (69,1) или (69,2) непосредственно выводим следующее предложение:

Пусть $\mu_j(t)$ — какие-либо непрерывные действительные функции. Положим, считая, что $z \in S^+$,

$$\Phi_j(z) = \int\limits_L \frac{\mu_j(t)\,ds}{1-\frac{z}{t}} \tag{69,1a}$$

или

$$\Phi_j(z) = \int\limits_L \mu_j(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds + \int\limits_L \mu_j(t)\,ds \qquad (m \geqslant 1) \tag{69,2a}$$

(в нижеследующем тексте имеется в виду одна из этих двух формул).

Тогда *из линейной зависимости или независимости функций* $\mu_j(t)$ $(j = 1, \ldots, k)$ *следует линейная зависимость или независимость функций* $\Phi_j(z)$ (*и обратно*).

После этих предварительных замечаний приступим к доказательству возможности представления (69,2). Пусть, согласно условию, $\Phi(z)$ — данная, голоморфная в S^+ функция такая, что $[\Phi^{(m)}(t)]^+$ существует и удовлетворяет условию H. Если представление (69,2) имеет место, то, дифференцируя m раз, переходя к пределу при $z \to t_0$ (из S^+) и обозначая $[\Phi^{(m)}(t)]^+$ просто через $\Phi^{(m)}(t)$, получим:

$$\Phi^{(m)}(t_0) = (-1)^m(m-1)!\,\pi i t_0^{1-m}\bar{t}_0'\mu(t_0) + (-1)^m(m-1)!\int\limits_L \frac{\mu(t)\,ds}{t^{m-1}(t-t_0)}.$$

Деля обе части на $(-1)^m(m-1)!\pi i\bar{t}_0' t_0^{1-m}$ и принимая во внимание, что $t'\bar{t}' = 1$, получим, далее,

$$\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{t_0^{m-1}t_0'\mu(t)\,ds}{t^{m-1}(t-t_0)} = \frac{t_0^{m-1}t_0'\Phi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}, \tag{69,10}$$

откуда, сравнивая действительные части,

$$\mu(t_0) + \int\limits_L \operatorname{Re}\frac{t_0^{m-1}t_0'}{\pi i t^{m-1}(t-t_0)}\mu(t)\,ds = \operatorname{Re}\frac{t_0^{m-1}t_0'\Phi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}. \tag{69,11}$$

Это, как легко видеть, — действительное интегральное уравнение Фредгольма, ядро которого имеет вид

$$\frac{K^*(t_0, t)}{|t-t_0|^\alpha}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1, \tag{*}$$

где $K^*(t_0, t)$ удовлетворяет условию H[1]). Правая часть этого уравнения

---

[1]) Имеем:

$$\frac{1}{\pi i}\frac{t_0^{m-1}t_0'}{t^{m-1}(t-t_0)} = \frac{1}{\pi i}\frac{t_0^{m-1}-t^{m-1}}{t-t_0}\frac{t_0'}{t^{m-1}} + \frac{1}{\pi i}\frac{t_0'}{t-t_0}.$$

Первый член удовлетворяет, очевидно, условию H; второй же член можно переписать так:

$$\frac{1}{\pi i}\frac{t_0'}{t-t_0} = -\frac{1}{\pi i}\frac{\partial}{\partial s_0}\ln(t-t_0) = -\frac{1}{\pi i}\frac{\partial \ln r}{\partial s_0} - \frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta(s_0, s)}{\partial s_0},$$

где $r = |t-t_0|$, $\vartheta(s_0, s) = \arg(t-t_0)$. Следовательно,

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\frac{t_0'}{t-t_0} = -\frac{1}{\pi}\frac{\partial\vartheta(s_0, s)}{\partial s_0}.$$

Последнее же выражение имеет вид (*) (см. § 7).

также удовлетворяет условию H. Поэтому всякое непрерывное его решение будет принадлежать классу H (§ 51).

Докажем разрешимость уравнения Фредгольма (69,11). Для этого рассмотрим союзное с ним однородное уравнение

$$\nu(t_0)+\int_L \operatorname{Re}\left[\frac{t^{m-1}t'}{\pi i t_0^{m-1}(t_0-t)}\right]\nu(t)\,ds=0, \qquad (69,12)$$

которое можно записать и так, считая здесь и в дальнейшем, что $\nu(t)$ — действительная функция:

$$\operatorname{Re}\left\{\nu(t_0)-\frac{t_0^{1-m}}{\pi i}\int_L \frac{t^{m-1}\nu(t)\,dt}{t-t_0}\right\}=0. \qquad (69,13)$$

Пусть $\nu(t)$ — какое-либо (непрерывное) решение уравнения (69,12); тогда $\nu(t)$ удовлетворяет условию H. Введем в рассмотрение функцию

$$\Omega(z)=\frac{1}{z^{m-1}}\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^{m-1}\nu(t)\,dt}{t-z};$$

она голоморфна в S^-, обращается на бесконечности в нуль как z^{-m}, и в силу (69,13)

$$\operatorname{Re}\Omega^-(t)=0 \text{ на } L.$$

Следовательно, $\Omega(z)=0$ в S^-. Поэтому (§ 29)

$$t^{m-1}\nu(t)=\omega^+(t) \text{ на } L, \qquad (69,14)$$

где $\omega(z)$ — некоторая голоморфная в S^+ функция. Из предыдущей формулы следует:

$$\operatorname{Re}[it^{1-m}\omega^+(t)]=0 \text{ на } L.$$

Следовательно, $\omega(z)$ есть решение однородной задачи Римана — Гильберта $\operatorname{Re}(a+ib)\omega^+=0$ для S^+ при $a+ib=it^{1-m}$. Индекс равен $2m-2\geqslant 0$. Поэтому (§§ 41 и 43) она имеет $2m-1$ линейно независимых решений. Следовательно, однородное уравнение Фредгольма (69,12) имеет $2m-1$ линейно независимых решений и столько же решений имеет однородное уравнение, соответствующее уравнению (69,11).

Несмотря на это, *неоднородное уравнение* (69,11) *всегда разрешимо*. В самом деле, в силу известной теоремы Фредгольма для разрешимости уравнения (69,11) необходимо и достаточно, чтобы правая его часть удовлетворяла условию

$$\int_L \nu(t)\operatorname{Re}\left[\frac{t^{m-1}t'\Phi^{(m)}(t)}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}\right]ds=\operatorname{Re}\int_L \frac{\nu(t)\,t^{m-1}t'\Phi^{(m)}(t)\,ds}{(-1)^m(m-1)!\,\pi i}=0,$$

где $\nu(t)$ — любое (действительное) решение однородного уравнения (69,12). Но на основании (69,14) $\nu(t)=t^{1-m}\omega^+(t)$, и предыдущее условие можно переписать так:

$$\operatorname{Re}\frac{1}{\pi i}\int_L \omega^+(t)\,\Phi^{(m)}(t)\,dt=0.$$

Это условие всегда удовлетворено, ибо подынтегральная функция представляет собой граничное значение функции $\omega(z)\,\Phi^{(m)}(z)$, голоморфной в S^+.

Таким образом, разрешимость уравнения (69,11) доказана. Общее решение этого уравнения имеет вид

$$\mu(t)=\mu_0(t)+c_1\mu_1(t)+\ldots+c_{2m-1}\mu_{2m-1}(t), \qquad (69,15)$$

где $\mu_1(t), \ldots, \mu_{2m-1}(t)$ — полная система линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (69,11), а $\mu_0(t)$ — частное решение уравнения (69,11), выбираемое так, чтобы $\mu_0(t) = 0$, если правая часть этого уравнения равна нулю; $c_1, c_2, \ldots, c_{2m-1}$ обозначают действительные постоянные.

Покажем теперь, что найденное общее решение уравнения (69,11), полученного отделением действительных частей в уравнении (69,10), удовлетворяет и этому последнему. В самом деле, положим (при $z \in S^+$):

$$\Psi(z) = \int\limits_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1} \ln\left(1-\frac{z}{t}\right) ds + \int\limits_L \mu(t)\, ds + iC, \qquad (69,16)$$

где $\mu(t)$ определяется формулой (69,15), а C — действительная постоянная. Замечая теперь, что уравнение (69,11) выражает не что иное, как условие

$$\mathrm{Re}\left[\frac{t_0^{m-1} t_0' \Psi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m (m-1)!\, \pi i}\right]^+ = \mathrm{Re}\left[\frac{t_0^{m-1} t_0' \Phi^{(m)}(t_0)}{(-1)^m (m-1)!\, \pi i}\right]^+, \qquad (69,11\text{a})$$

и полагая $\Psi(z) - \Phi(z) = X(z)$, видим, что $X(z)$ удовлетворяет граничному условию

$$\mathrm{Re}\,[it_0^{m-1} t_0' X^{(m)}(t_0)] = 0 \ \text{ на } L,$$

где для краткости мы написали $X^{(m)}(t_0)$ вместо $[X^{(m)}(t_0)]^+$. Но предыдущее условие составляет однородную задачу Римана — Гильберта для $X^{(m)}(z)$, причем индекс этой задачи равен $-2m$, т. е. отрицателен. Следовательно, $X^{(m)}(z) = 0$, т. е. $\Psi^{(m)}(z) = \Phi^{(m)}(z)$, а это и доказывает наше утверждение, ибо уравнение (69,10) выражает не что иное, как условие

$$[\Psi^{(m)}(t_0)]^+ = [\Phi^{(m)}(t_0)]^+. \qquad (69,10\text{a})$$

Отметим еще, что, очевидно,

$$\Psi(z) = \Phi(z) + Q(z), \qquad (69,17)$$

где $Q(z)$ — полином степени не выше $m-1$.

Из предыдущего, в частности, вытекает, что функции $\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots$ $\ldots, \mu_{2m-1}(t)$, являясь решениями однородного уравнения, соответствующего (69,11), представляют собой в то же время решения однородного уравнения, соответствующего (69,10). Пусть $\Psi_j(z)$ обозначают функции, связанные с $\mu_j(t)$ $(j = 1, \ldots, 2m-1)$ формулами (69,2а), в которых теперь вместо $\Phi_j(z)$ следует подразумевать $\Psi_j(z)$. Так как $\mu_j(t)$ обозначают теперь решения однородного уравнения, соответствующего уравнению (69,10), т. е. уравнения, получающегося из (69,10) при $\Phi(z) = 0$, то на основании (69,17) заключаем, что $\Psi_j(z)$ — полиномы степени не выше $m-1$.

Подставляя в (69,16) значение $\mu(t)$, даваемое формулой (69,15), получаем поэтому

$$\Psi(z) = \Psi_0(z) + iC + c_1\Psi_1(z) + \ldots + c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z), \qquad (69,18)$$

где $\Psi_j(z)$ $(j = 0, 1, \ldots, 2m-1)$ определяются формулами (69,2а), в которых вместо $\Phi_j(z)$ следует теперь подразумевать $\Psi_j(z)$. Мы только что видели, что $\Psi_j(z)$ при $j \geqslant 1$ — полиномы степени не выше $m-1$.

Отметим, что, как легко видеть на основании формул (69,2а), величины $\Psi_j(0)$ — действительные числа.

Функции $\mu_1(t), \ldots, \mu_{2m-1}(t)$ по самому определению линейно независимы.

Следовательно, в силу сказанного выше [вслед за формулой (69,2a)] полиномы $\Psi_1(z), \ldots, \Psi_{2m-1}(z)$ также линейно независимы. Легко видеть, что линейно независимы и полиномы

$$i, \ \Psi_1(z), \ \Psi_2(z), \ \ldots, \ \Psi_{2m-1}(z); \qquad (69,19)$$

в самом деле, если $Ci + c_1\Psi_1(z) + \ldots + c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z) \equiv 0$, где C, $c_1, \ldots, c_{2m-1}$ — действительные постоянные, то, полагая $z = 0$ и принимая во внимание, что $\Psi_j(0)$ — действительные числа, получаем $C = 0$; но тогда в силу линейной независимости функций $\Psi_1(z), \ldots, \Psi_{2m-1}(z)$ будем иметь также $c_1 = c_2 = \ldots = c_{2m-1} = 0$, а это и доказывает наше утверждение.

Отсюда легко заключить, что любой полином степени не выше $m-1$ является вполне определенной линейной комбинацией полиномов (69,19) [1]).

Применяя теперь формулу (69,17) к функции $\Psi_0(z)$, заключаем, что

$$\Phi(z) - \Psi_0(z) = Q_0(z),$$

где $Q_0(z)$ — определенный полином степени не выше $m-1$. Следовательно, если мы хотим, чтобы данная функция $\Phi(z)$ была равна $\Psi(z)$, то мы должны так подобрать действительные постоянные C, $c_1, \ldots, c_{2m-1}$, чтобы

$$Q_0(z) = iC + c_1\Psi_1(z) + \ldots + c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z),$$

а это, как следует из только что сказанного, всегда возможно, и притом единственным образом.

Из этого и следует справедливость доказываемой теоремы для $m \geqslant 1$ (для $m = 0$ она была уже доказана).

2°. При тех же условиях, что в п. 1°, с той лишь разницей, что S^+ обозначает на этот раз бесконечную область, ограниченную L, *функция* $\Phi(z)$ *представима формулами, отличающимися от формул* (69,1) *и* (69,2) *лишь тем, что* $\frac{z}{t}$ *заменяется на* $\frac{t}{z}$; *предполагается, что на этот раз начало координат находится вне* S^+ (т. е. по-прежнему внутри контура L) *и что* $\ln\left(1 - \frac{t}{z}\right)$ *есть ветвь, обращающаяся в нуль при* $z = \infty$. Подразумевается, что $\Phi(z)$ голоморфна, включая бесконечно удаленную точку.

Этот результат мы получим, либо повторяя, с надлежащими незначительными изменениями, предыдущие рассуждения, либо сводя к случаю конечной области подстановкой $z = \frac{1}{\zeta}$, $t = \frac{1}{\tau}$.

Если, кроме того, $\Phi(\infty) = 0$, то в соответствующих формулах отпадает слагаемое iC.

3°. Пусть S^+ — многосвязная область такого же вида, как в § 66; мы будем применять обозначения упомянутого параграфа. Пусть $\Phi(z)$ — функция, голоморфная в S^+ и непрерывно продолжимая на L.

---

[1]) Действительно, пусть $P(z)$ — полином степени не выше $m-1$. Покажем, что он (единственным образом) представим в виде

$$P(z) = iC + c_1\Psi_1(z) + \ldots + c_{2m-1}\Psi_{2m-1}(z),$$

где C, $c_1, \ldots, c_{2m-1}$ — действительные постоянные. Приравнивая коэффициенты при одинаковых степенях z и отделяя действительные и мнимые части, получим $2m$ действительных линейных уравнений относительно C, $c_1, \ldots, c_{2m-1}$. Определитель этой системы отличен от нуля, так как в противном случае можно было бы так подобрать постоянные C, $c_1, \ldots, c_{2m-1}$, не все равные нулю, чтобы $P(z) \equiv 0$, а это невозможно, так как функции (69,19) линейно независимы.

Тогда она представима интегралом Коши

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}=\sum_{j=0}^{p}\Phi_j(z), \qquad (69{,}20)$$

где

$$\Phi_j(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_j} \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}, \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ p;$$

если контур L_0 отсутствует, то следует считать $\Phi_0(z)\equiv 0$ и добавить в правой части (69,20) слагаемое $\Phi(\infty)$.

Следовательно, функция $\Phi(z)$ есть сумма функции $\Phi_0(z)$, голоморфной в односвязной конечной области, ограниченной контуром L_0, и функций $\Phi_j(z)$ $(j=1,\ldots,p)$, голоморфных соответственно в бесконечных односвязных областях, ограниченных контурами L_j $(j=1,\ \ldots,\ p)$ и исчезающих на бесконечности. При отсутствии контура L_0 следует вместо $\Phi_0(z)$ взять постоянную $\Phi(\infty)$.

Если, кроме того, граничное значение $[\Phi^{(m)}(t)]^+$ удовлетворяет условию H на L, то мы получим общее представление функции $\Phi(z)$, применяя к $\Phi_0(z)$ представление п. 1°, а к $\Phi_j(z)$ $(j\geqslant 1)$ — представление п. 2°; при этом, разумеется, следует каждый раз подходящим образом выбирать начало координат.

Относительно обобщения формул (69,1), (69,2) на случай многосвязной области см. еще И. Н. Векуа [5].

III. Решение обобщенной задачи Римана—Гильберта—Пуанкаре

Из большого числа граничных задач, которые можно решить при помощи изложенных выше результатов, мы рассмотрим в настоящем отделе[1]) одну, представляющую значительный интерес, как самостоятельный, так и с точки зрения приложений. Эта задача представляет собой обобщение как задачи, названной нами задачей Римана — Гильберта, так и задачи, известной под названием задачи Пуанкаре (см. следующий параграф).

§ 70. Предварительные замечания. В §§ 41 и 43 мы подробно рассмотрели задачу Римана — Гильберта. Близкой к ней является задача, к которой пришел Пуанкаре, разрабатывая математическую теорию приливов (H. Poincaré [1]). Задача эта, которую мы будем называть задачей Пуанкаре, состоит в следующем: *найти гармоническую в некоторой области S^+ функцию по условию на границе L области*:

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial n}+B(s)\frac{\partial u}{\partial s}+c(s)\,u=f(s), \qquad (70{,}1)$$

где $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ — заданные на L действительные функции, s — дуговая абсцисса, n — нормаль к L.

Как раз в связи с этой задачей Пуанкаре ввел в рассмотрение сингулярные интегральные уравнения, вывел формулу перестановки и указал один из методов регуляризации сингулярных уравнений. Сам Пуанкаре дал (неполное) решение задачи в случае, когда $A(s)=1$, $c(s)=0$, считая притом, что контур L и функции $B(s)$, $f(s)$ — аналитические.

[1]) Все, что имеется существенного в этом отделе (§§ 71—75), заимствовано (иногда почти текстуально) из работы И. Н. Векуа [8].

Не совсем полное решение задачи (70,1) дал сравнительно недавно В. Погожельский (W. Pogorzelski [1]) в предположении, что $A(s) = 1$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ — аналитические функции, а L — аналитический контур.

Неполнота решения задачи у названных авторов (не считая уже весьма ограничительных условий, налагаемых на контур и на заданные функции) заключается в том, что вопрос эквивалентности получаемых ими интегральных уравнений Фредгольма (которые в свою очередь получаются регуляризацией сингулярных интегральных уравнений) с исходной задачей остается невыясненным; поэтому даже вопрос существования решения остается открытым.

Первое законченное решение задачи (70,1) было дано Б. В. Хведелидзе [1], [2] при следующих предположениях: область S^+ ограничена конечным числом замкнутых контуров Ляпунова, а функции $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ удовлетворяют условию H.

Ниже (в § 74) будет приведено решение задачи Пуанкаре, получающееся в качестве частного случая решения гораздо более общей задачи, сформулированной в следующем параграфе.

§ 71. Обобщенная задача Римана — Гильберта — Пуанкаре (задача V). Приведение к интегральному уравнению. Пусть S^+ — конечная область, ограниченная простым замкнутым контуром L, удовлетворяющим условию Ляпунова.

Под задачей, упомянутой в заглавии параграфа, мы подразумеваем следующую задачу (з а д а ч а V):

Найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную в S^+, по граничному условию

$$\operatorname{Re}\{\mathrm{L}\Phi\} = f(t_0) \text{ на } L \tag{V}$$

(Re — *действительная часть*), *где* L — *интегро-дифференциальный оператор, определяемый формулой* (s — дуговая абсцисса)

$$\mathrm{L}\Phi \equiv \sum_{j=0}^{m} \left\{ a_j(t_0)\Phi^{(j)}(t_0) + \int_L h_j(t_0, t)\Phi^{(j)}(t)\, ds \right\}, \tag{71,1}$$

в которой $a_0(t), \ldots, a_m(t)$ — заданные на L, вообще комплексные, функции класса H; $f(t)$ — заданная действительная функция класса H; наконец, $h_j(t_0, t)$ — заданные на L, вообще комплексные, функции вида

$$h_j(t_0, t) = \frac{h_j^0(t_0, t)}{|t - t_0|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha < 1,$$

где $h_j^0(t_0, t)$ принадлежат классу H по обеим переменным.

П о д $\Phi^{(j)}(t_0)$ п о д р а з у м е в а е т с я г р а н и ч н о е з н а ч е н и е $[\Phi^{(j)}(t_0)]^+$ п р о и з в о д н о й j-г о п о р я д к а ф у н к ц и и $\Phi(z)$; существование этих граничных значений до $j = m$ включительно, таким образом, предполагается. Мы будем считать, кроме того, что $\Phi^{(m)}(t)$ удовлетворяет на L условию H (следовательно, тому же условию должны удовлетворять и все $\Phi^{(j)}(t)$ при $j \leqslant m$).

Если мы возьмем, в частности, $m = 0$, $h_j(t_0, t) = 0$, то получим задачу Римана — Гильберта; задача Пуанкаре также является частным случаем формулированной задачи (см. § 74).

К задаче V приводятся многие важные граничные задачи, в частности, граничные задачи, связанные с уравнениями в частных производных эллиптического типа (см. об этом § 76, пп. 3°, 4°).

Задача в указанном общем виде была поставлена[1]) и чрезвычайно остроумно решена (я включаю сюда и общее представление голоморфных функций, указанное в § 69) И. Н. Векуа в цитированной уже работе [8][2]), которой мы и будем следовать.

Отметим, прежде всего, следующее свойство однородной задачи, соответствующей задаче V, т. е. задачи $\operatorname{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$: если $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_k(z)$ — частные решения этой задачи, то и любая линейная их комбинация $C_1\Phi_1+\ldots+C_k\Phi_k$ с действительными коэффициентами $C_1, \ldots, C_k$ есть также решение.

Во всем этом отделе (до конца главы) под линейной комбинацией мы будем понимать линейную комбинацию с действительными (постоянными) коэффициентами и будем применять понятие линейной зависимости и независимости в соответствии с этим, как мы поступали в §§ 41—43 при рассмотрении задачи Римана — Гильберта, а также в § 69.

Метод решения, который будет нами применен, заключается в приведении задачи к сингулярному интегральному уравнению (которое, в частности, может оказаться и фредгольмовым).

Рассмотрим сначала случай $m\geqslant 1$. Считая, что начало координат расположено внутри S^+, представим искомую функцию в виде (§ 69)

$$\Phi(z)=\int_L \mu(t)\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds+iC, \qquad (71,2)$$

где $\mu(t)$ — искомая действительная функция, удовлетворяющая условию H, а C — искомая действительная постоянная, и введем в рассмотрение элементарные функции

$$N_0(z,t)=\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+1, \qquad (71,3)$$

$$N_l(z,t)=\frac{d^l}{dz^l}\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right]=$$
$$=(-1)^l\frac{(m-1)(m-2)\ldots(m-l)}{t^l}\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-l-1}\times$$
$$\times\left\{\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)+\frac{1}{m-1}+\frac{1}{m-2}+\ldots+\frac{1}{m-l}\right\} \qquad (71,4)$$
$$(l=1,\ 2,\ \ldots\ m-1),$$

$$N_m(z,t)=\frac{d^m}{dz^m}\left[\left(1-\frac{z}{t}\right)^{m-1}\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)\right]=\frac{(-1)^m(m-1)!}{t^{m-1}(t-z)}, \qquad (71,5)$$

где t — произвольная точка на L, а z — точка области S^+. Как в § 69, под $\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)$ подразумевается ветвь, исчезающая (при фиксирован-

[1]) Случай, когда все $h_j(t_0, t)$ равны нулю, рассматривал еще раньше Ф. Д. Гахов [2]. Автор, следуя методу, примененному Гильбертом в одном частном случае, сводит задачу к весьма сложному сингулярному интегральному уравнению, ядро которого содержит функцию Грина. Поэтому исследование решения при помощи этого метода затруднительно. Кроме того, автор налагает на искомую функцию некоторые дополнительные ограничения, не вытекающие из существа задачи.

[2]) Другое решение аналогичной задачи было позднее дано Д. И. Шерманом [5], который рассматривает также случай многосвязной области.

ном t) в точке $z = 0$. Функции $N_l(z, t)$ голоморфны (по z) в области S^+. Фиксируя произвольно t и переходя к пределу при $z \to t_0$, где t_0, как и t,— точка на L, мы получим однозначно определенные на L функции $N_l(t_0, t)$, которые, кроме $N_{m-1}(t_0, t)$ и $N_m(t_0, t)$, удовлетворяют на L условию H по обеим переменным. Функция $N_{m-1}(t_0, t)$ имеет при $t = t_0$ особенность логарифмического типа, а функция $N_m(t_0, t)$ — особенность типа $(t - t_0)^{-1}$.

Легко теперь видеть, что граничные значения $\Phi(z)$ и ее производных до $(m-1)$-го порядка представятся в виде

$$\begin{aligned}\Phi(t_0) &= \int_L N_0(t_0, t)\,\mu(t)\,ds + iC,\\ \Phi^{(l)}(t_0) &= \int_L N_l(t_0, t)\,\mu(t)\,ds \quad (l = 1, 2, \ldots, m-1).\end{aligned} \tag{71,6}$$

Для граничного же значения производной порядка m будем иметь по формуле Сохоцкого — Племеля

$$\Phi^{(m)}(t_0) = (-1)^m (m-1)!\,\pi i t_0^{1-m}\bar{t}_0'\mu(t_0) + \int_L N_m(t_0, t)\,\mu(t)\,ds. \tag{71,7}$$

Поэтому граничное условие (V) примет вид

$$\mathrm{N}\mu \equiv A(t_0)\,\mu(t_0) + \int_L N(t_0, t)\,\mu(t)\,ds = f(t_0) - C\sigma(t_0), \tag{71,8}$$

где

$$A(t_0) = \operatorname{Re}\{(-1)^m (m-1)!\,\pi i t_0^{1-m}\bar{t}_0' a_m(t_0)\}, \tag{71,9}$$

$$\sigma(t_0) = \operatorname{Re}\left\{ia_0(t_0) + i\int_L h_0(t_0, t)\,ds\right\}, \tag{71,10}$$

$$\begin{aligned}N(t_0, t) = \sum_{l=0}^{m} \operatorname{Re}\left\{a_l(t_0) N_l(t_0, t) + \int_L h_l(t_0, t_1) N_l(t_1, t)\,ds_1\right\} + \\ + \operatorname{Re}\{(-1)^m (m-1)!\,\pi i h_m(t_0, t)\,t^{1-m}\bar{t}'\}.\end{aligned} \tag{71,11}$$

Таким образом, мы получили для определения $\mu(t)$ действительное сингулярное интегральное уравнение, ядро которого, как легко видеть, имеет вид

$$N(t_0, t) = \frac{K(t_0, t)}{t - t_0}, \tag{71,12}$$

где $K(t_0, t)$ удовлетворяет условию H. Функции $A(t_0)$ и $\sigma(t_0)$ также удовлетворяют условию H.

Из самого вывода следует, что полученное интегральное уравнение эквивалентно исходной задаче.

Мы рассмотрели случай $m \geqslant 1$. В случае $m = 0$ граничное условие (V) примет вид

$$\operatorname{Re}\left\{a_0(t_0)\,\Phi(t_0) + \int_L h_0(t_0, t)\,\Phi(t)\,ds\right\} = f(t_0); \tag{71,13}$$

в этом случае мы воспользуемся представлением (69,1)

$$\Phi(z)=\int_L \frac{\mu(t)\,ds}{1-\frac{z}{t}}+iC \tag{71,14}$$

и совершенно аналогично предыдущему получим сингулярное интегральное уравнение, эквивалентное исходной задаче. Простые выкладки показывают, что это интегральное уравнение дается той же формулой (71,8), причем $A(t)$, $\sigma(t)$, $N(t_0, t)$ даются соответственно формулами (71,9), (71,10), (71,11), в которых следует считать $m=0$, $(-1)^m(m-1)!=1$; при этом под $N_0(t_0, t)$ следует теперь понимать не выражение, даваемое формулой (71,3), а выражение (71,5) при $m=0$, т. е. в нашем случае

$$N_0(t_0, t)=\frac{t}{t-t_0}. \tag{71,15}$$

Замечание. Имея в виду дальнейшие приложения, отметим следующее видоизменение рассматриваемой задачи. Вместо оператора $\mathbf{L}$ рассмотрим оператор $\mathbf{L}^*$, определяемый формулой

$$\mathbf{L}^*\Phi\equiv\sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)\Phi^{(j)}(t_0)+\int_0^{t_0}h_j^*(t_0, t)\Phi^{(j)}(t)\,dt\right\}, \tag{71,16}$$

где на этот раз функции $h_j^*(t_0, t)$ удовлетворяют следующим условиям: $h_m^*(t_0, t)=0$[1]), остальные же функции определены для всех t_0 на L и для всех t в области $S^+ + L$. Относительно t эти функции голоморфны в S^+ и непрерывны в $S^+ + L$; когда t_0 и t находятся одновременно на L, эти функции удовлетворяют условию H. Интеграл в (71,16) берется по любому пути, соединяющему точку $t=0$ в S^+ с точкой t_0 на L, не выходящему из S^+ (благодаря принятым условиям интегралы не зависят от пути); вместо $t=0$ можно, конечно, взять любую другую точку из S^+.

Все предыдущие формулы, а также формулы следующего параграфа останутся в силе, если во всех интегралах, где фигурируют выражения $h_j(t_0, t)\,ds$, заменить эти выражения на $h_j^*(t_0, t)\,dt=h_j^*(t_0, t)\,t'ds$, а соответствующий интеграл брать не по L, а от 0 до t_0. Мы получим и в рассматриваемом случае интегральное уравнение вида (71,8), но где на этот раз

$$\sigma(t_0)=\mathrm{Re}\left\{ia_0(t_0)+i\int_0^{t_0}h_0^*(t_0, t)\,dt\right\}, \tag{71,17}$$

$$N(t_0, t)=\sum_{l=0}^{m}\mathrm{Re}\left\{a_l(t_0)N_l(t_0, t)+\int_0^{t_0}h_l^*(t_0, t_1)N_l(t_1, t)\,dt_1\right\}. \tag{71,18}$$

§ 72. Исследование вопроса о разрешимости задачи V. Приступим к исследованию сингулярного интегрального уравнения

$$\mathbf{N}\mu\equiv A(t_0)\mu(t_0)+\int_L N(t_0, t)\mu(t)\,ds=f(t_0)-C\sigma(t_0), \tag{72,1}$$

---

[1]) Это предположение лишь несколько упрощает формулы; без него легко обойтись, подчинив $h_m^*(t_0, t)$ тем же условиям, что остальные $h_j^*(t_0, t)$.

т. е. уравнения (71,8) предыдущего параграфа. Это — действительное уравнение. Во всем дальнейшем под решениями этого уравнения, а также под решениями союзного с ним уравнения мы будем подразумевать действительные решения, удовлетворяющие условию H.

1°. Определим, прежде всего, индекс нашего уравнения и для этого выделим характеристическую часть

$$N^0\mu \equiv A(t_0)\mu(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}$$

выражения $N\mu$. В нашем случае $A(t_0)$ дается формулой (71,9), которую можно переписать еще так:

$$A(t_0) = \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)!\,\pi i\,[t_0^{1-m}\bar{t}_0' a_m(t_0) - \bar{t}_0^{1-m} t_0' \overline{a_m(t_0)}].$$

Коэффициент же $B(t_0)$, очевидно, определяется лишь следующим слагаемым, входящим в $N(t_0, t)\,ds$ формулы (71,8):

$$\operatorname{Re}\{a_m(t_0) N_m(t_0, t)\,ds\} = \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)!\left\{\frac{t^{1-m} a_m(t_0)}{t-t_0} + \frac{\bar{t}^{1-m}\overline{a_m(t_0)}}{\bar{t}-\bar{t}_0}\right\} ds.$$

Замечая, что

$$\frac{ds}{t-t_0} = \frac{\bar{t}'\,dt}{t-t_0},$$

$$\frac{ds}{\bar{t}-\bar{t}_0} = \frac{t'\,\overline{dt}}{\bar{t}-\bar{t}_0} = t'\,d\ln(\bar{t}-\bar{t}_0) = t'\,d\ln(t-t_0) + t'\,d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0} =$$

$$= \frac{t'\,dt}{t-t_0} + t'\,d\ln\frac{\bar{t}-\bar{t}_0}{t-t_0}$$

и что последнее слагаемое не влияет на характеристическую часть интегрального уравнения, видим, что $B(t_0)$ определяется следующими слагаемыми в $N(t_0, t)\,ds$:

$$\frac{1}{2}(-1)^m (m-1)!\left\{\frac{t^{1-m}\bar{t}' a_m(t_0)}{t-t_0} + \frac{\bar{t}^{1-m} t'\overline{a_m(t_0)}}{t-t_0}\right\} dt,$$

откуда сразу получаем:

$$B(t_0) = \frac{1}{2}(-1)^m (m-1)!\,\pi i\,[t_0^{1-m}\bar{t}_0' a_m(t_0) + \bar{t}_0^{1-m} t_0'\overline{a_m(t_0)}].$$

Таким образом,

$$A(t_0) + B(t_0) = (-1)^m (m-1)!\,\pi i t_0^{1-m}\bar{t}_0' a_m(t_0),$$
$$A(t_0) - B(t_0) = (-1)^{m+1} (m-1)!\,\pi i\bar{t}_0^{1-m} t_0'\overline{a_m(t_0)}.$$

Для того чтобы наше сингулярное уравнение было нормального типа (§ 44), необходимо и достаточно, чтобы

$$a_m(t_0) \neq 0 \text{ всюду на } L.$$

Мы будем считать в дальнейшем, что это условие выполнено, и в соответствии с этим говорить, что рассматриваемая задача V — нормального типа.

Индекс $\varkappa$ уравнения (72,1), который мы будем называть также индексом задачи V, дается формулой

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{t^{m-1}t'\overline{a_m(t)}}{\bar{t}^{m-1}\bar{t}' a_m(t)}\right]_L = 2(m+n), \tag{72,2}$$

где
$$n = \frac{1}{2\pi}\,[\arg \overline{a_m(t)}]_L. \tag{72,3}$$

Для исследования разрешимости интегрального уравнения (72,1) нам придется ввести в рассмотрение однородное уравнение
$$\mathrm{N}'\nu \equiv A(t_0)\,\nu(t_0) + \int_L N(t, t_0)\,\nu(t)\,ds = 0, \tag{72,4}$$
союзное с (72,1). Напомним, что (§ 53, теорема III)
$$k - k' = \varkappa, \tag{72,5}$$
где k и k' — числа линейно независимых решений союзных однородных уравнений $\mathrm{N}\mu = 0$ и $\mathrm{N}'\nu = 0$.

2°. Особый интерес представляет тот с л у ч а й, к о г д а з а д а ч а V р а з р е ш и м а п р и в с я к о й п р а в о й ч а с т и $f(t)$. Этот вопрос решается следующей основной теоремой.

Т е о р е м а. *Для того чтобы задача* V *была разрешима при любой правой части* $f(t_0)$, *необходимо и достаточно, чтобы* $k' = 0$ *или* $k' = 1$, *причем в последнем случае решение*[1] $\nu(t)$ *уравнения* $\mathrm{N}'\nu = 0$ *должно удовлетворять условию*
$$\int_L \nu(t)\,\sigma(t)\,ds \neq 0; \tag{72,6}$$
в обоих указанных случаях $\varkappa \geqslant 0$ *и однородная задача* $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ *имеет ровно* $\varkappa + 1$ *линейно независимых решений.*

Начнем с доказательства д о с т а т о ч н о с т и условий, указанных в формулировке, а также части теоремы, касающейся числа решений однородной задачи $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$.

Если $k' = 0$, то на основании теоремы I § 53 уравнение (72,1) разрешимо при любой правой части, т. е. для любой функции $f(t)$ и любой постоянной C. Однородное же уравнение $\mathrm{N}\mu = 0$ имеет $k = \varkappa$ линейно независимых решений в силу (72,5); так как $k \geqslant 0$, то и $\varkappa \geqslant 0$. Следовательно, общее решение уравнения (72,1) при произвольном C имеет вид
$$\mu(t) = \mu^*(t) + C\mu_0(t) + C_1\mu_1(t) + \ldots + C_\varkappa\mu_\varkappa(t), \tag{72,7}$$
где $C, C_1, \ldots, C_\varkappa$ — произвольные действительные постоянные, $\mu_1(t), \ldots, \mu_\varkappa(t)$ — линейно независимые решения однородного уравнения $\mathrm{N}\mu = 0$, а $\mu^*(t)$ и $\mu_0(t)$ — какие-либо частные решения соответственно уравнений $\mathrm{N}\mu = f(t_0)$ и $\mathrm{N}\mu = -\sigma(t_0)$.

Подставляя (72,7) в (71,2) или, при $m = 0$, в (71,14), получаем общее решение исходной задачи V в виде
$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + C(i + \Phi_0(z)) + C_1\Phi_1(z) + \ldots + C_\varkappa\Phi_\varkappa(z), \tag{72,8}$$
где $C, C_1, \ldots, C_\varkappa$ — произвольные действительные постоянные; через $\Phi_0(z), \Phi_1(z), \ldots, \Phi_\varkappa(z)$ обозначены голоморфные в S^+ функции, связанные с $\mu_0(t), \mu_1(t), \ldots, \mu_\varkappa(t)$ формулами (69,2а) или (69,1а), а через $\Phi^*(z)$ — также голоморфная в S^+ функция, таким же образом связанная с $\mu^*(t)$.

Вследствие линейной независимости функций $\mu_j(t)$ $(j = 1, \ldots, \varkappa)$, соответствующие им функции $\Phi_j(z)$ также линейно независимы. Так

[1] Это решение определено с точностью до постоянного множителя, ибо $k' = 1$.

как, далее, $\Phi_j(0)$ ($j = 0, 1, \ldots, \varkappa$) — действительные величины, то из этого легко вытекает линейная независимость функций $i + \Phi_0(z)$, $\Phi_1(z), \ldots, \Phi_\varkappa(z)$ (ср. начало стр. 231).

В соответствии с предыдущим однородная задача $\operatorname{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ имеет ровно $\varkappa + 1$ линейно независимых решений.

Пусть теперь $k' = 1$ и соблюдено условие (72,6). Уравнение (72,1) будет разрешимо при выполнении условия

$$\int\limits_L \nu(t)\,[f(t) - C\sigma(t)]\,ds = 0,$$

которое однозначно определяет постоянную C, ибо по предположению имеет место условие (72,6).

Приписав C указанное значение, получим решение уравнения (72,1) в виде

$$\mu(t) = \mu^*(t) + C_1\mu_1(t) + \ldots + C_{\varkappa+1}\mu_{\varkappa+1}(t) \tag{72,9}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{\varkappa+1}$ — произвольные действительные постоянные, а $\mu_1(t), \mu_2(t), \ldots, \mu_{\varkappa+1}(t)$ — линейно независимые решения однородного уравнения $\mathbf{N}\mu = 0$; этих последних решений будет $\varkappa + 1$ на основании (72,5). Так как $\varkappa + 1 \geqslant 0$ и $\varkappa$ — четное число, то необходимо $\varkappa \geqslant 0$.

В соответствии с этим общее решение исходной задачи представится в виде

$$\Phi(z) = \Phi^*(z) + C_1\Phi_1(z) + \ldots + C_{\varkappa+1}\Phi_{\varkappa+1}(z), \tag{72,10}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{\varkappa+1}$ — произвольные действительные постоянные, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z), \ldots, \Phi_{\varkappa+1}(z)$ — линейно независимые, голоморфные в S^+ функции. Из предыдущего ясно, кроме того, что однородная задача $\operatorname{Re}\{\mathbf{L}\Phi\} = 0$ имеет ровно $\varkappa + 1$ линейно независимых решений.

Перейдем к доказательству н е о б х о д и м о с т и указанных в формулировке теоремы условий. Пусть $\nu_j(t)$ ($j = 1, 2, \ldots, k'$) — полная система линейно независимых решений уравнения $\mathbf{N}'\nu = 0$, которую мы предположим ортогонализированной и нормированной, так что

$$\int\limits_L \nu_i\nu_j\,ds = \delta_{ij} \quad (\delta_{ij} = 1 \text{ при } i = j,\ \delta_{ij} = 0 \text{ при } i \neq j). \tag{72,11}$$

Предположим, что задача V разрешима при любой правой части $f(t_0)$. Тогда и интегральное уравнение (72,1) должно быть разрешимо при любой функции $f(t_0)$ и надлежащим образом выбранном C. Следовательно, должно быть

$$\int\limits_L \nu_j(t)\,[f(t) - C\sigma(t)]\,ds = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k', \tag{72,12}$$

какова бы ни была функция $f(t)$, если постоянная C выбрана надлежащим образом. Мы должны показать, что тогда необходимо $k' = 0$ или $k' = 1$ и что в последнем случае необходимо, чтобы имело место (72,6).

Разберем отдельно два допущения:

а) все числа

$$\int\limits_L \sigma(t)\,\nu_j(t)\,ds = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k'; \tag{72,13}$$

b) по крайней мере одно из них отлично от нуля, скажем

$$\int_L \sigma(t)\,\nu_1(t)\,ds \neq 0. \tag{72,14}$$

Первое допущение при $k' \geqslant 1$ невозможно, ибо тогда условие (72,12) не может выполняться при произвольном выборе $f(t)$. При втором допущении и при $k' \geqslant 2$, придав $f(t)$ частное значение $\nu_2(t)$, заключаем из (72,12) при $j = 1, 2$, что

$$C = 0, \quad \int_L [\nu_2(t)]^2\,ds = 0,$$

а последнее невозможно. Следовательно, необходимо, чтобы $k' \leqslant 1$ и чтобы при $k' = 1$ имело место неравенство (72,6).

Таким образом, наша теорема доказана. Отметим особо очевидное

Следствие. *Если $\sigma(t) = 0$, то задача V разрешима при любой правой части $f(t_0)$ тогда и только тогда, когда $k' = 0$; в этом случае однородная задача* $\operatorname{Re}\{\mathrm{L}\Phi\} = 0$ *имеет ровно $\varkappa + 1$ линейно независимых решений.*

3°. Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда условия, указанные в только что доказанной теореме, не выполнены (что имеет, например, место всякий раз, когда $\varkappa < 0$). В этом случае задача V разрешима не при всякой правой части $f(t_0)$: решение существует тогда и только тогда, когда при надлежащем выборе C соблюдены условия (72,12).

Рассмотрим и здесь два возможных предположения a) и b), указанных выше.

При предположении a), т. е. при наличии (72,13), неоднородная задача V разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_L \nu_j(t)\,f(t)\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k', \tag{72,15}$$

а интегральное уравнение $\mathrm{N}\mu = -C\sigma(t_0)$, соответствующее однородной задаче $\operatorname{Re}\{\mathrm{L}\Phi\} = 0$, разрешимо при произвольном C вследствие (72,13). Общее решение последнего интегрального уравнения имеет вид $\mu(t) = C\mu_0(t) + C_1\mu_1(t) + \ldots + C_k\mu_k(t)$, где по-прежнему $\mu_0(t)$ — частное решение уравнения $\mathrm{N}\mu = -\sigma(t_0)$, а $\mu_1(t), \ldots, \mu_k(t)$ — линейно независимые решения однородного уравнения $\mathrm{N}\mu = 0$. В соответствии с этим однородная задача имеет ровно $k + 1 = \varkappa + k' + 1$ линейно независимых решений.

При предположении b) мы должны считать $k' > 1$, ибо при $k' \leqslant 1$ были бы выполнены условия доказанной выше теоремы. Первое из соотношений (72,12) однозначно определяет C:

$$C = \frac{\int_L \nu_1(t)\,f(t)\,ds}{\int_L \nu_1(t)\,\sigma(t)\,ds}.$$

Подставляя это значение C в остальные равенства (72,12), получим условия разрешимости неоднородной задачи V в виде

$$\int_L \nu_j^*(t)\,f(t)\,ds = 0, \tag{72,16}$$

где

$$\nu_j^*(t)=\nu_{j+1}(t)-\nu_1(t)\frac{\int\limits_L \sigma\nu_{j+1}\,ds}{\int\limits_L \sigma\nu_1\,ds},\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ k'-1. \tag{72,17}$$

В случае однородной задачи $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ в соответствии с предыдущим мы должны взять $C=0$. Поэтому однородная задача $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ в рассматриваемом случае имеет ровно $k=\varkappa+k'$ линейно независимых решений.

Из предыдущего, в частности, следует, что однородная задача $\mathrm{Re}\{\mathbf{L}\Phi\}=0$ не имеет решений, отличных от нуля, лишь в случае b) и то лишь тогда, когда $k=\varkappa+k'=0$.

§ 73. Признаки разрешимости задачи V. Как мы видели в предыдущем параграфе, в вопросе о разрешимости задачи V основную роль играет число k' линейно независимых решений однородного уравнения $\mathbf{N}'\nu=0$. Поэтому важно уметь определять число k', не решая фактически этого уравнения. Весьма интересные результаты в этом направлении также получены И. Н. Векуа в цитированных выше работах.

Рассмотрим функцию

$$\Omega^*(t_0, z)=\sum_{j=0}^{m}\left\{a_j(t_0)N_j(t_0, z)+\int\limits_L h_j(t_0, t)N_j(t, z)\,ds\right\}, \tag{73,1}$$

где $N_j(t_0, z)$ — элементарные функции, введенные в § 71, определяемые формулами (71,3) — (71,5); только здесь п е р в ы й аргумент t_0 означает точку на L, а в т о р о й z — произвольную точку плоскости. В дальнейшем нам придется рассматривать функцию $\Omega^*(t_0, z)$ лишь для $z\in S^-$. В этом случае под выражением $\ln\left(1-\frac{t_0}{z}\right)$, входящим в $N_j(t_0, z)$, мы будем подразумевать ветвь, голоморфную относительно z в области S^- и исчезающую при $z=\infty$. При этом условии функция $\Omega^*(t_0, z)$ будет голоморфной функцией z в области S^-, включая бесконечно удаленную точку, и легко видеть, что

$$\Omega^*(t_0, \infty)=a_0(t_0)+\int\limits_L h_0(t_0, t)\,ds. \tag{73,2}$$

При помощи функции $\Omega^*(t_0, z)$ уравнение $\mathbf{N}'\nu=0$ можно, как легко проверить, представить таким образом:

$$\mathrm{Re}\,\Psi^-(t_0)=0, \tag{73,3}$$

где положено

$$\Psi(z)=\int\limits_L \nu(t)\,\Omega^*(t, z)\,ds. \tag{73,4}$$

Из (73,3) выводим, что при $z\in S^-$

$$\Psi(z)=iC, \tag{73,5}$$

где C — действительная постоянная, определяемая формулой

$$C=\int\limits_L \nu(t)\,\mathrm{Im}\,\Omega^*(t, \infty)\,ds. \tag{73,6}$$

Введем теперь функцию

$$\Omega(t_0, z) = \Omega^*(t_0, z) - i \operatorname{Im} \Omega^*(t_0, \infty). \tag{73,7}$$

Тогда на основании (73,4), (73,6) и (73,5) непосредственно заключаем, что *уравнение* $\mathbf{N}'\nu = 0$ *эквивалентно функциональному уравнению*

$$\int_L \nu(t)\,\Omega(t, z)\,ds = 0 \text{ для всех } z \in S^-, \tag{A}$$

иначе говоря, требованию, чтобы функция $\nu(t)$ была ортогональна к заданной функции $\Omega(t, z)$ при любом z в S^-; функцию $\Omega(t, z)$ мы будем иногда называть «ядром».

Применяя известные теоремы об единственности аналитических функций, мы можем множеством способов заменить уравнение (A) эквивалентными соотношениями, удобными для приложений к тем или иным конкретным случаям. Мы остановимся, вместе с И. Н. Векуа, на следующих соотношениях, эквивалентных (A):

$$\int_L \nu(t)\,\omega_j(t)\,ds = 0, \tag{B}$$

где под $\omega_j(t)$ $(j = 0, 1, 2, \ldots)$ можно подразумевать любую из нижеследующих систем функций:

I. $$\omega_j(t) = \Omega(t, z_j), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{B$_1$}$$

где $z_0, z_1, \ldots$ — любая последовательность точек области S^-, имеющая, по крайней мере, одну предельную точку в S^-; в частности, этой точкой может быть $z = \infty$.

II. $$\omega_j(t) = \Omega_j(t, z_0) = \left[\frac{d^j\Omega(t, z)}{dz^j}\right]_{z=z_0}, \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{B$_2$}$$

где z_0 — произвольно фиксированная точка области S^-.

III. $$\omega_j(t) = \chi_j(t), \quad j = 0, 1, 2, \ldots, \tag{B$_3$}$$

где

$$\chi_0(t) = \operatorname{Re}\left\{a_0(t_0) + \int_L h_0(t_0, t)\,ds\right\},$$

$$\chi_k(t_0) = \mathbf{L}\psi, \quad \psi = t^k, \quad k = 1, 2, \ldots,$$

а $\mathbf{L}$ по-прежнему обозначает оператор, определяемый формулой

$$\mathbf{L}\psi \equiv \sum_{j=0}^{m} \left\{a_j(t_0)\,\psi^{(j)}(t_0) + \int_L h_j(t_0, t)\,\psi^{(j)}(t)\,ds\right\}.$$

Функции $\chi_j(t)$ отличаются лишь постоянными, не равными нулю множителями от коэффициентов разложения функции $\Omega(t, z)$ в ряд по убывающим степеням z в окрестности точки $z = \infty$. В этом легко убедиться на основании формул (73,7), (73,1) и формул (71,3)—(71,5).

Соотношения (B) мы будем выражать, говоря, что функция $\nu(t)$ ортогональна ко всем элементам последовательности $\{\omega_j(t)\}$.

Если не существует функций $\nu(t)$[1]), отличных от нуля, ортогональных к ядру $\Omega(t, z)$ при всяком $z \in S^-$, то мы будем называть ядро $\Omega(t, z)$

[1]) Под $\nu(t)$ всегда подразумевается действительная функция класса H.

полным; если существует лишь конечное число линейно независимых функций $\nu(t)$, ортогональных к $\Omega(t, z)$, то мы будем называть ядро почти полным.

Аналогично, если не существует функции $\nu(t)$, отличной от нуля, ортогональной ко всем элементам последовательности $\{\omega_j(t)\}$, то мы будем называть эту последовательность полной; мы будем называть ее почти полной, если имеется лишь конечное число линейно независимых функций $\nu(t)$, ортогональных ко всем элементам этой последовательности.

Пусть k' — максимальное число линейно независимых друг от друга (действительных) функций $\nu_j(t)$ $(j = 1, 2, \ldots, k')$, ортогональных к ядру $\Omega(t, z)$ или ко всем элементам последовательности $\{\omega_j(t)\}$; это число k' мы будем называть дефектом ядра $\Omega(t, z)$ или последовательности $\{\omega_j(t)\}$. Ясно, что если к последовательности $\{\omega_j(t)\}$ мы добавим функции $\nu_1(t), \nu_2(t), \ldots, \nu_{k'}(t)$, то мы получим уже полную последовательность. Поэтому дефект последовательности $\{\omega_j(t)\}$ можно определить как число линейно независимых друг от друга функций $\nu_j(t)$, ортогональных ко всем $\omega_j(t)$, которые следует добавить к последовательности $\{\omega_j(t)\}$, чтобы получить полную последовательность.

В нашем случае число линейно независимых функций $\nu(t)$, ортогональных к ядру $\Omega(t, z)$ или к элементам последовательности $\{\omega_j(t)\}$, где под $\omega_j(t)$ подразумеваются или (B_1), или (B_2), или (B_3), конечно; оно равно числу k' линейно независимых решений однородного интегрального уравнения $N'\nu = 0$. Следовательно, *в нашем случае ядро $\Omega(t, z)$ и последовательности $\{\omega_j(t)\}$ — почти полные.*

При принятых нами терминах предложение, доказанное в предыдущем параграфе, можно сформулировать так:

Для того чтобы задача V имела решения при любой правой части $f(t)$, необходимо и достаточно, чтобы дефект последовательности $\{\omega_j(t)\}$ [или ядра $\Omega(t, z)$] был равен 0 или 1, причем в последнем случае функция $\nu(t)$, ортогональная ко всем элементам последовательности $\{\omega_j(t)\}$ [или к ядру $\Omega(t, z)$], не должна быть ортогональной к функции $\sigma(t)$.

§ 74. Задача Пуанкаре (задача P). Вернемся к задаче Пуанкаре (§ 70) и будем теперь под S^+ и L понимать то же, что в § 71.

Граничное условие задачи

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial n} + B(s)\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)u = f(s), \tag{74,1}$$

где $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ — заданные на L действительные функции, u — искомая гармоническая в S^+ функция, n — нормаль к L в точке с дуговой абсциссой s, направленная влево от L, можно представить в несколько ином виде, пользуясь соотношениями

$$\frac{\partial u}{\partial s} = \frac{\partial u}{\partial x}\cos\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\sin\theta, \quad \frac{\partial u}{\partial n} = -\frac{\partial u}{\partial x}\sin\theta + \frac{\partial u}{\partial y}\cos\theta, \tag{74,2}$$

где θ — угол, составляемый положительной касательной к L с осью Ox. Тогда условие (74,1) примет вид

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t)\frac{\partial u}{\partial y} + c(t)u = f(t) \text{ на } L, \tag{74,3}$$

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$, $f(t)$ — заданные на L действительные функции. В дальнейшем мы будем считать, что эти функции принадлежат классу H;

кроме того, мы будем считать, что $a(t)$, $b(t)$ одновременно в нуль не обращаются, так что

$$a(t)+ib(t)\neq 0 \text{ всюду на } L. \tag{74,4}$$

От искомой функции мы будем требовать, чтобы ее частные производные $\frac{\partial u}{\partial x}, \frac{\partial u}{\partial y}$ принимали на L граничные значения, удовлетворяющие условию H (тем более тогда это будет иметь место и для самой функции u).

Задачу (74,3) мы будем называть для краткости задачей P. Условие (74,3) можно записать еще так (пишем теперь t_0 вместо t):

$$\operatorname{Re}\{(a+ib)\Phi'(t_0)+c\Phi(t_0)\}=f(t_0) \text{ на } L, \tag{P}$$

где, так же как и выше, мы пишем для краткости $\Phi(t_0)$, $\Phi'(t_0)$ вместо $\Phi^+(t_0)$, $\Phi'^+(t_0)$ и где

$$\Phi(z)=u(x, y)+iv(x, y) \tag{74,5}$$

обозначает голоморфную в S^+ функцию такую, что $\operatorname{Re}\Phi(z)=u(x, y)$.

Условие (P) представляет собой частный случай условия (V), когда в этом последнем

$$m=1,\ h_0=h_1=0,\quad a_1(t)=a(t)+ib(t),\quad a_0(t)=c(t).$$

Применяя к задаче P метод, изложенный в предыдущих параграфах, представим искомую функцию $\Phi(z)$ по формуле (71,2) при $m=1$:

$$\Phi(z)=\int_L \mu(t)\ln\left(1-\frac{z}{t}\right)ds+\int_L \mu(t)\,ds+iC, \tag{74,6}$$

где $\mu(t)$ — действительная искомая функция, удовлетворяющая условию H, C — действительная постоянная.

В рассматриваемом случае функция $\sigma(t)$, определяемая формулой (71,10), тождественно равна нулю и интегральное уравнение (71,8) имеет вид

$$\begin{aligned} N\mu \equiv \operatorname{Re}\{-\pi i\bar{t}_0'[a(t_0)+ib(t_0)]\}\,\mu(t_0)+\\ +\int_L \mu(t)\operatorname{Re}\left\{c(t_0)\ln e\left(1-\frac{t_0}{t}\right)-\frac{a(t_0)+ib(t_0)}{t-t_0}\right\}ds=f(t_0). \end{aligned} \tag{74,7}$$

Индекс этого уравнения, согласно формуле (72,2),

$$\varkappa=2(n+1),\quad n=\frac{1}{2\pi}[\arg(a-ib)]_L. \tag{74,8}$$

Союзное с (74,7) однородное уравнение имеет вид

$$\begin{aligned} N'\nu \equiv \operatorname{Re}\{-\pi i\bar{t}_0'[a(t_0)+ib(t_0)]\}\,\nu(t_0)+\\ +\int_L \nu(t)\operatorname{Re}\left\{c(t)\ln e\left(1-\frac{t}{t_0}\right)+\frac{a(t)+ib(t)}{t-t_0}\right\}ds=0. \end{aligned} \tag{74,9}$$

Оно эквивалентно функциональному уравнению (см. предыдущий параграф)

$$\int_L \nu(t)\,\Omega(t, z)\,ds=0 \quad \text{при всех } z\in S^-, \tag{A}$$

где в нашем случае

$$\Omega(t, z)=\frac{a(t)+ib(t)}{t-z}+c(t)\ln e\left(1-\frac{t}{z}\right). \tag{74,10}$$

Прежде чем сформулировать непосредственно вытекающий отсюда основной результат, заметим следующее: если $\Phi(z)$ — какое-либо решение задачи P, то, очевидно, $\Phi(z)+iC$, где C — действительная постоянная, есть также решение задачи; в соответствии с этим однородная задача, получающаяся из (P) при $f(t)=0$, имеет очевидное решение iC. Так как прибавление iC к $\Phi(z)$ не изменяет функции $u(x, y)$, а изменяет лишь мнимую часть $v(x, y)$ функции $\Phi(z)$, не фигурирующую в первоначальной формулировке задачи, мы условимся не считать различными решения задачи P, отличающиеся слагаемым вида iC; иными словами, два решения $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$ задачи P мы будем считать различными лишь тогда, когда различны действительные их части $u_1(x, y)$ и $u_2(x, y)$.

Вспоминая теперь, что в нашем случае $\sigma(t)=0$, и применяя следствие из теоремы § 72, указанное на стр. 240, приходим к следующему основному результату (И. Н. Векуа, loc. cit.):

Теорема. *Для того чтобы задача* P *была разрешима при любой правой части* $f(t)$, *необходимо и достаточно, чтобы уравнение* (74,9) *не имело отличных от нуля решений или, что то же самое, чтобы ядро* $\Omega(t, z)$ *было полным. При соблюдении этого условия соответствующая задаче* P *однородная задача имеет ровно* $\varkappa$ *линейно независимых решений* (мы не считаем, как было сказано, тривиального решения вида iC).

Предположим теперь, что уравнение (74,9) или, что то же самое, функциональное уравнение (A) имеет k' линейно независимых (действительных) решений $\nu_j(t)$ ($j=1, \ldots, k'$). Тогда задача P разрешима, если соблюдены следующие необходимые и достаточные условия:

$$\int_L \nu_j(t) f(t)\, ds = 0, \quad j=1, 2, \ldots, k', \tag{74,11}$$

однородная же задача, соответствующая P, имеет ровно $k=\varkappa+k'$ линейно независимых решений (не считая решения вида iC). Если, в частности, $\varkappa+k'=0$, то задача P при соблюдении условий (74,11) имеет одно и только одно решение.

Как было сказано в предыдущем параграфе, уравнение (A) эквивалентно условиям

$$\int_L \nu(t)\,\omega_j(t)\, ds = 0, \quad j=0, 1, \ldots, \tag{B}$$

если под системой функций $\omega_j(t)$ подразумевать любую из следующих систем:

I. $$\omega_j(t)=\Omega(t, z_j)=\frac{a(t)+ib(t)}{t-z_j}+c(t)\ln e\left(1-\frac{t}{z_j}\right), \quad j=0, 1, \ldots, \tag{B$_1$}$$

где $z_0, z_1, \ldots,$ — какая-либо последовательность точек области S^-, имеющая в S^-, по крайней мере, одну предельную точку.

II. $$\omega_j(t)=\Omega_j(t, z_0), \quad j=0, 1, \ldots,$$

где

$$\Omega_0(t, z_0)=\Omega(t, z_0)=\frac{a(t)+ib(t)}{t-z_0}+c(t)\ln e\left(1-\frac{t}{z_0}\right),$$

$$\Omega_k(t, z_0)=\left[\frac{d^k\Omega(t, z)}{dz^k}\right]_{z=z_0}=k!\,\frac{a(t)+ib(t)}{(t-z_0)^{k+1}}-(k-1)!\,c(t)\left\{\frac{1}{(t-z_0)^k}+\frac{(-1)^{k-1}}{z_0^k}\right\}, \tag{B$_2$}$$

$k=1, 2, \ldots,$ а z_0 — какая-либо фиксированная точка в S^-.

III. $$\omega_j(t)=\chi_j(t)=j\,[a(t)+ib(t)]\,t^{j-1}+c(t)\,t^j, \quad j=0, 1, \ldots \tag{B$_3$}$$

Напомним, что *полнота одной из систем* I—III *является необходимым и достаточным условием разрешимости задачи* P *при произвольной правой части* $f(t)$.

Отметим в заключение одно непосредственное следствие из полученных результатов. *Если однородная задача, соответствующая задаче* P, *не имеет отличных от нуля решений и если индекс* $\varkappa = 0$, *то задача* P *однозначно разрешима при любой правой части.* В самом деле, как мы видели, число решений однородной задачи $k = \varkappa + k'$; поэтому если $k = \varkappa = 0$, то и $k' = 0$, откуда и следует наше утверждение.

Часто легко непосредственно установить, что однородная задача не имеет отличных от нуля решений. Один из таких случаев был указан Б. В. Хведелидзе [1], [2].

Пусть граничное условие задано в виде (74,1) и пусть $A(s) = 1$. Предположим, далее, что $B(s)$ имеет интегрируемую производную, что $c(s) \not\equiv 0$ и что

$$\frac{1}{2}\frac{dB(s)}{ds} - c(s) \geqslant 0. \tag{74,12}$$

Тогда однородная задача

$$\frac{\partial u}{\partial n} + B(s)\frac{\partial u}{\partial s} + c(s)u = 0 \tag{*}$$

не имеет отличных от нуля решений.

В самом деле, подставляя в известную формулу

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\int\limits_L u\frac{\partial u}{\partial n}\,ds$$

значение $\frac{\partial u}{\partial n}$ из (*), получаем после простого преобразования путем интегрирования по частям:

$$\iint\limits_S \left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 + \left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right] dx\,dy = -\int\limits_L \left[\frac{1}{2}\frac{dB(s)}{ds} - c(s)\right] u^2\,ds \leqslant 0,$$

откуда заключаем $\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial u}{\partial y} = 0$, т. е. $u = \text{const}$. Но тогда из (*) и из $c(s) \not\equiv 0$ следует, что $u = 0$.

Очевидно, что указанный критерий отсутствия ненулевых решений однородной задачи сохраняет силу и для случая конечной многосвязной области.

З а м е ч а н и е. Если граничное условие задачи P задано в виде (74,1), то для вычисления индекса будем иметь следующую формулу:

$$\varkappa = \frac{1}{\pi}[\arg(A + iB)]_L; \tag{74,13}$$

это следует из формулы (74,8), ибо, как легко видеть на основании формул (74,2),

$$A + iB = i(a - ib)e^{i\theta}.$$

§ 75. Примеры. Приведем несколько простых примеров, иллюстрирующих сказанное в предыдущих параграфах (§§ 71—74)[1]. Отметим, что

[1]) Напомним, что в этих параграфах S^+ обозначает конечную односвязную область и точка $z = 0$ находится внутри S^+.

связь между задачей V (или, в частности, P) и последовательностями функций $\{\omega_j(t)\}$ может быть использована двояко: если вопрос о полноте этих последовательностей может быть решен непосредственно, то мы получим ответ на вопрос о разрешимости задачи V, и наоборот, если каким-либо способом выяснен вопрос о разрешимости задачи V, то это дает возможность установить полноту или неполноту последовательностей $\{\omega_j(t)\}$.

1°. Задача Дирихле

$$u = f \text{ на } L \tag{75,1}$$

есть частный случай задачи V при $m = 0$, $a_0(t) = 1$, $h_0(t_0, t) = 0$. Индекс $\varkappa$ соответствующего интегрального уравнения (72,1) равен нулю согласно формуле (72,2); функция $\sigma(t) \equiv 0$. Система функций $\{\chi_j(t)\}$ сводится к следующей (формула (B_3) § 73[1])):

$$1, \ t, \ t^2, \ \ldots \tag{75,2}$$

Мы знаем из предыдущего, что задача Дирихле разрешима при всякой правой части. Отсюда мы заключаем, что *система* (75,2) — *полная*, т. е. что если

$$\int_L t^k \nu(t)\, ds = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, \tag{75,3}$$

то $\nu(t) = 0$; под $\nu(t)$, как всегда, подразумевается действительная функция класса H[2]).

Полагая $t = re^{i\varphi}$ и разделяя действительные и мнимые части, заключаем о полноте системы действительных функций, заданных на L:

$$1, \ r\cos\varphi, \ r\sin\varphi, \ r^2\cos 2\varphi, \ r^2\sin 2\varphi, \ \ldots \text{ на } L, \tag{75,4}$$

где $r = |t|$, $\varphi = \arg t$ на L.

Если L — окружность с центром в O, то мы получаем известную теорему о полноте системы функций

$$1, \ \cos\varphi, \ \sin\varphi, \ \cos 2\varphi, \ \sin 2\varphi, \ \ldots \tag{75,5}$$

2°. Задача Неймана

$$\frac{\partial u}{\partial n} = f \text{ на } L, \tag{75,6}$$

где n — нормаль, которую мы будем считать направленной влево от L, т. е. внутрь S^+, есть частный случай задачи P предыдущего параграфа при

$$a(t) = \cos(n, x) = -\sin\theta, \ b(t) = \sin(n, x) = \cos\theta, \ c(t) = 0, \tag{75,7}$$

где θ — угол, составляемый касательной к L с осью Ox; таким образом,

$$a + ib = ie^{i\theta} = it', \quad a - ib = -ie^{-i\theta} = -i\bar{t}'; \tag{75,8}$$

согласно формуле (74,8) индекс соответствующего задаче уравнения $N\mu = f(t_0)$ равен нулю (легко установить, кроме того, что это уравнение в нашем случае фредгольмово). Согласно формуле (74,10), в нашем случае

$$\Omega(t, z) = \frac{it'}{t - z}. \tag{75,9}$$

---

[1]) В нашем случае $L\psi \equiv \psi$.

[2]) Легко видеть, что заключение о полноте системы (75,2) остается в силе, если считать $\nu(t)$ лишь непрерывной.

Это ядро неполное, так как функциональное уравнение (А) § 74

$$\int_L \nu(t)\,\Omega(t, z)\,ds \equiv i\int_L \frac{\nu(t)\,t'\,ds}{t-z} \equiv i\int_L \frac{\nu(t)\,dt}{t-z}=0, \quad z\in S^-,$$

имеет отличное от нуля действительное решение $\nu(t) = 1$; других (линейно от него не зависимых) решений нет (§ 30); поэтому дефект равен 1.

Следовательно, задача (75,6) разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_L \nu(t)\,f(t)\,ds=0, \text{ т. е. } \int_L f(t)\,ds=0$$

— хорошо известный результат.

Система функций $\{\chi_k(t)\}$ в нашем случае, согласно формуле (B_3) § 73[1]) или § 74, такова:

$$\chi_k(t)=kit't^{k-1}, \quad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{75,10}$$

Эта система, согласно предыдущему, неполная, с дефектом, равным единице. Но если к этой системе добавить функцию $\nu(t) = 1$, мы получим полную систему (мы отбрасываем множители ik)

$$1,\ t',\ t't,\ t't^2,\ \ldots$$

3°. Рассмотрим несколько более общую задачу

$$\frac{\partial u}{\partial n}+c(t)\,u=f(t), \tag{75,11}$$

которую получим из задачи P, считая, что a и b даются формулами (75,8). И здесь индекс соответствующего уравнения $N\mu = f$ равен нулю. В нашем случае, согласно формуле (B_3) § 73[2]) или § 74,

$$\chi_k(t)=kit't^{k-1}+c(t)\,t^k, \quad k=0,\ 1,\ \ldots \tag{75,12}$$

Если система функций $\{\chi_k\}$ — полная, то задача (75,11) имеет решение при всякой правой части f, и обратно.

Рассмотрим случай, когда L — окружность радиуса 1 с центром в начале; пусть $c(t) = c$ — постоянная. Тогда $t' = it$ и

$$\chi_k(t)=(c-k)\,t^k, \quad k=0,\ 1,\ \ldots, \tag{75,13}$$

или, полагая $t=e^{i\varphi}$,

$$\chi_k(t)=(c-k)(\cos k\varphi+i\sin k\varphi). \tag{75,13a}$$

Если c не есть целое положительное число или нуль, то предыдущая система, очевидно, полная и задача имеет одно и только одно решение при всякой правой части.

Пусть теперь $c = m$, где m — целое неотрицательное число. Тогда система (75,13а) неполная. При $m = 0$ она сделается полной, если добавить к ней одну функцию $\nu(t) = 1$; при $m \geqslant 1$ она сделается полной, если добавить к ней две линейно независимые функции: $\nu_1(t) = \cos mt$ и $\nu_2(t) = \sin mt$. Следовательно, при $m = 0$ дефект равен 1, при $m \geqslant 1$ дефект равен 2. Однородная задача, соответствующая задаче (75,11), имеет поэтому одно решение при $m = 0$ и два решения при $m \geqslant 1$;

---

[1]) В нашем случае $L\psi \equiv (a+ib)\,\psi' \equiv ie^{i\theta}\psi' = it_0'\psi'(t_0)$.

[2]) В нашем случае $L\psi \equiv it_0'\psi'(t_0) + c(t_0)\,\psi(t_0)$.

неоднородная же задача разрешима тогда и только тогда, когда

$$\int_0^{2\pi} f(t)\,d\varphi = 0, \quad \text{если} \quad m = 0, \tag{75,14}$$

$$\int_0^{2\pi} f(t)\cos m\varphi\,d\varphi = 0, \quad \int_0^{2\pi} f(t)\sin m\varphi\,d\varphi = 0, \quad \text{если } m \geqslant 1. \tag{75,15}$$

4°. Задача наклонной производной. Рассмотрим, наконец, частный случай задачи Р, когда $c(t) = 0$, так что граничное условие имеет вид

$$a(t)\frac{\partial u}{\partial x} + b(t)\frac{\partial u}{\partial y} = f(t) \text{ на } L. \tag{75,16}$$

Задачу определения гармонической функции $u(x, y)$ по предыдущему граничному условию называют иногда «задачей наклонной производной» (problème de la dérivée oblique), так как граничное условие (75,16) можно переписать так:

$$\sqrt{a^2+b^2}\,\frac{\partial u}{\partial l} = f(t) \text{ на } L, \tag{75,17}$$

где l — направление вектора (a, b), вообще наклонного по отношению к нормали или касательной. Этой задаче, в частности, посвящены сравнительно недавно опубликованные работы A. Liénard [1] и C. Jacob [1]. Ее можно решить методом, изложенным в предыдущем параграфе; однако при принятой нами системе изложения естественнее свести ее непосредственно к задаче Римана — Гильберта, что делается очень просто.

Именно, положим, как в предыдущем параграфе, $u(x, y) = \operatorname{Re}\Phi(z)$ и, кроме того, введем голоморфную в S^+ функцию

$$U + iV = \Psi(z) = \Phi'(z) = \frac{\partial u}{\partial x} - i\frac{\partial u}{\partial y}.$$

Тогда (75,16) запишется так:

$$a(t)U - b(t)V = f(t),$$

или

$$\operatorname{Re}(a+ib)\Psi^+(t) = f(t),$$

так что задача наша непосредственно сводится к задаче Римана — Гильберта, уже решенной в §§ 41—43 (для односвязной области¹)).

§ 76. Некоторые обобщения и приложения. Методы и результаты, изложенные в предыдущих параграфах, могут быть эффективно применены к решению ряда важных вопросов. Мы ограничимся краткими указаниями на некоторые обобщения и приложения²).

1°. Решение задачи Р для многосвязной области было дано Б. В. Хведелидзе в работе [2], в которой, так же как в работе [1], посвященной односвязной области, автор, следуя Пуанкаре, представляет искомую функцию в виде потенциала простого слоя. Затем в работе [3] Б. В. Хведелидзе дает решение более общей задачи, пользуясь уже представлением И. Н. Векуа (см. ниже, п. 3°).

¹) О решении для многосвязной области см. следующий параграф, п. 2°.

²) Обобщения на случай разрывных граничных заданий и на случай нескольких неизвестных функций будут соответственно упомянуты в главах V и VI.

2°. Решение задачи Римана — Гильберта для случая многосвязной области (в §§ 41—43 мы решили ее для односвязной области) может быть получено, если рассматривать задачу Римана — Гильберта как частный случай задачи V и применить метод §§ 71—73, надлежащим образом обобщив его на случай многосвязной области.

3°. Задача Пуанкаре для уравнения эллиптического типа. Задача, названная нами выше задачей P (задачей Пуанкаре) и возникшая в связи с математической теорией приливов, не является для этой теории самостоятельной задачей.

Теория приливов непосредственно приводит к задаче нахождения регулярного в некоторой области S решения дифференциального уравнения эллиптического типа

$$\Delta u+X(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+Y(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+Z(x,\ y)u=F(x,\ y) \tag{76,1}$$

или даже, при более общих предположениях, решения интегро-дифференциального уравнения вида

$$\Delta u+X(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial x}+Y(x,\ y)\frac{\partial u}{\partial y}+Z(x,\ y)u+ \\ +\iint\limits_{S} K(x,\ y;\ \xi,\ \eta)\,u(\xi,\ \eta)\,d\xi\,d\eta=F(x,\ y) \tag{76,2}$$

по граничному условию вида (n — нормаль, s — дуговая абсцисса)

$$A(s)\frac{\partial u}{\partial n}+B(s)\frac{\partial u}{\partial s}+c(s)u=f(s) \text{ на границе } L \text{ области;} \tag{76,3}$$

здесь Δ — оператор Лапласа, $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$, $F(x, y)$, $K(x, y;\ \xi, \eta)$ — функции, заданные в S, а $A(s)$, $B(s)$, $c(s)$, $f(s)$ — функции, заданные на границе L области S, удовлетворяющие известным условиям регулярности, на которых мы не останавливаемся.

Сам Пуанкаре (H. Poincaré [1]) рассмотрел случай уравнения (76,1), предполагая, что в граничном условии $A(s)=1$, $c(s)=0$; случай уравнения (76,2) был рассмотрен в пространной работе Г. Бертрана (G. Bertrand [3]) также в предположении $A(s)=1$, $c(s)=0$; случай того же уравнения в предположении, что $A(s)=1$, был рассмотрен В. Погожельским (W. Pogorzelski [1]). Все эти авторы считают, что граница L области S — замкнутый аналитический контур и что заданные функции, входящие в граничное условие, также аналитические.

Задача, названная нами задачей P, т. е. та же граничная задача, что и здесь, но для случая, когда уравнения (76,1) или (76,2) сводятся к простейшему виду $\Delta u=0$, служит указанным авторам для нахождения функции Грина, соответствующей граничному условию вида (76,3); при помощи этой функции Грина они затем составляют, хорошо известным способом, интегральное уравнение Фредгольма для решения исходной задачи.

Промежуточная стадия — решение задачи P, как уже отчасти было нами сказано раньше, ни у одного из этих авторов не исследована с надлежащей полнотой, так как вопрос об эквивалентности получаемых ими уравнений Фредгольма (которые в свою очередь получаются регуляризацией сингулярных уравнений) остается открытым (на самом деле эквивалентность, вообще говоря, не имеет места). Нечего говорить о том, что структура получаемого в конечном счете (через посредство функции Грина) интегрального уравнения Фредгольма (с областью интегрирования S) весьма сложна.

Для одного довольно широкого и важного класса уравнений вида (76,1) рассматриваемая задача может быть непосредственно сведена к задаче, решенной выше (§§ 71, 72).

Именно, рассмотрим однородное уравнение эллиптического типа

$$\Delta u + X(x, y)\frac{\partial u}{\partial x} + Y(x, y)\frac{\partial u}{\partial y} + Z(x, y)\,u = 0, \tag{76,4}$$

где $X(x, y)$, $Y(x, y)$, $Z(x, y)$ — целые аналитические функции[1]) своих аргументов, действительные при действительных x, y (то, что мы ограничимся однородным уравнением, фактически не снижает общности; см. ниже).

Будем искать (действительные) решения уравнения (76,4), регулярные (т. е. непрерывные вместе со своими производными до второго порядка) в некоторой области S, которую для простоты будем считать односвязной.

И. Н. Векуа[2]) показал, что всякое такое решение можно представить в виде (считая, что точка $z = 0$ принадлежит S)

$$u(x, y) = \mathrm{Re}\left\{\alpha(z, \bar{z})\,\varphi(z) + \int_0^z \beta(z, \bar{z}; \zeta)\,\varphi(\zeta)\,d\zeta\right\}, \tag{76,5}$$

где $\alpha(z, \bar{z})$ и $\beta(z, \bar{z}; \zeta)$ обозначают вполне определенные, зависящие лишь от коэффициентов уравнения (76,4), целые аналитические функции своих аргументов, из которых первая вычисляется элементарно (путем квадратуры), а вторая получается путем всегда сходящегося алгорифма последовательных приближений[3]). Через $\varphi(z)$ обозначена некоторая голоморфная в S функция; какова бы ни была голоморфная функция $\varphi(z)$, соответствующая ей по формуле (76,5) функция $u(x,y)$ будет регулярным решением уравнения (76,4) и, обратно, каждому регулярному решению соответствует голоморфная функция $\varphi(z)$, вполне определенная, если подчинить ее условию $\mathrm{Im}\,\varphi(0) = 0$.

Если вместо однородного уравнения (76,4) мы имеем неоднородное уравнение (т. е. уравнение вида (76,1)), то к правой части формулы (76,5) прибавляется еще один член, который зависит лишь от свободного члена $F(x, y)$ и от коэффициентов уравнения; этот член не оказывает существенного влияния на метод решения.

Как было сказано, функция $\alpha(z, \bar{z})$ вычисляется элементарным путем. В некоторых важных случаях и функция $\beta(z, \bar{z}; \zeta)$ имеет весьма простой вид. Например, в случае уравнения

$$\Delta u + \lambda^2 u = 0,$$

---

[1]) Эти условия можно значительно ослабить, считая, что функции X, Y, Z являются регулярными аналитическими функциями лишь в некоторой конечной области S_0. Но тогда приходится, вообще говоря, наложить некоторые дополнительные условия на область S; подразумевается, что S содержится в S_0.

[2]) См. монографию И. Н. Векуа [10].

[3]) В случае, указанном в сноске [1]), эти функции являются регулярными аналитическими функциями от x и y в некоторой области, содержащей S.

где λ^2 — действительная постоянная (при $\lambda^2 > 0$ предыдущее уравнение есть уравнение колебаний мембраны), $\alpha(z, \bar{z}) = 1$, а

$$\beta(z, \bar{z}; \zeta) = -\frac{\partial}{\partial \zeta} J_0\left(\lambda \sqrt{\bar{z}(z-\zeta)}\right),$$

где $J_0(z)$ — бесселева функция нулевого порядка.

Вернемся к нашей граничной задаче для уравнения (76,4). Если внесем выражение (76,5) в граничное условие (76,3), то, как показывают простые выкладки, условие это принимает вид

$$\operatorname{Re}\left\{a_1(t_0)\varphi'(t_0) + a_0(t_0)\varphi(t_0) + \int_0^{t_0} h_0^*(t_0, t)\varphi(t)\,dt\right\} = f(t_0) \text{ на } L,$$

где $a_1(t_0)$, $a_0(t_0)$, $h^*(t_0, t)$, $f(t_0)$ — заданные функции, обладающие при некоторых предположениях относительно характера регулярности коэффициентов граничного условия свойствами, указанными в § 71 и в замечании к нему (в нашем случае $m = 1$). Поэтому можно применить метод, изложенный в § 72. Этим, по существу, путем задача была решена Б. В. Хведелидзе [3], который распространяет метод также на случай многосвязной области [1]).

Впоследствии Б. В. Хведелидзе [18] существенно обобщил свои результаты в отношении условий, налагаемых на коэффициенты и свободный член соотношения (76,3), а также на искомую функцию, оставляя в силе прежние условия относительно коэффициентов уравнения (76,4).

4°. Решение задачи Пуанкаре при весьма общих предположениях как относительно коэффициентов и свободного члена граничного условия (76,3), так и относительно коэффициентов и свободного члена уравнения (76,1), дано И. Н. Векуа в статье [12] и подробно изложено, с существенными дополнениями, в его монографии [13].

5°. Граничные задачи, связанные с уравнениями эллиптического типа. Метод, указанный в п. 3°, может быть распространен и на некоторые другие виды дифференциальных уравнений эллиптического типа (в том числе и на уравнения порядка большего 2). При наличии представления, аналогичного представлению (76,5), обычно рассматриваемые (линейные) граничные задачи в большинстве случаев могут быть сведены к задаче V, аналогично тому, что было сказано в п. 3°.

Ряд важных результатов, полученных в этом направлении И. Н. Векуа и другими авторами, изложен в монографии И. Н. Векуа [10].

Отметим еще опубликованные после появления этой монографии работы А. И. Каландия [1], [2].

---

[1]) Для этого он использует обобщение представления вида (76,5) на случай многосвязной области, данное также И. Н. Векуа; см. [10].

ГЛАВА ЧЕТВЕРТАЯ

ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В этой главе мы решаем задачу сопряжения в общем случае и даем некоторые приложения полученного решения[1]).

Термин «общий случай» мы применяем здесь в том смысле, что граничная линия L может быть произвольной кусочно-гладкой линией (согласно определению, данному в § 1), а задаваемые и искомые на L функции могут иметь разрывы определенного вида, о чем будет сказано ниже.

Краткие сведения о работах различных авторов, относящихся к решению задачи сопряжения и не упомянутых в главе II, будут даны в § 81.

I. Задача сопряжения в общем случае

§ 77. Термины и обозначения. Во всей этой главе мы будем применять следующие обозначения и термины, в большинстве уже введенные выше.

1°. Под линией L мы будем подразумевать кусочно-гладкую линию в смысле определения, данного в § 1. Мы будем считать (§ 1, п. 5°), что L состоит из гладких разомкнутых дуг L_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, которые не имеют общих точек, за исключением концов. Узлы линии L (в том числе и ее концы) мы будем обозначать через c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$, или просто через c. Точки линии L, отличные от узлов, мы будем по-прежнему называть обыкновенными точками.

Плоскость, разрезанную вдоль L, мы будем обозначать через S; точки линии L не причисляются к S.

В этой и следующей главах нам придется часто иметь дело с частным случаем, важным с точки зрения приложений, когда линия L состоит из гладких разомкнутых дуг $L_k = a_k b_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, не имеющих общих

---

[1]) Некоторые приложения к плоской статической теории упругости читатель найдет в книге автора [9], а также в главе V настоящей книги. Отметим здесь же, что некоторые другие приложения граничных задач теории функций комплексного переменного, а также сингулярных интегральных уравнений к ряду как теоретических, так и прикладных задач читатель может найти в книгах: А. В. Бицадзе [6], [7], И. Н. Векуа [10], [13], Н. П. Векуа [16], Ф. Д. Гахов [10], М. А. Лаврентьев и Б. В. Шабат [1], С. Г. Михлин [9], Л. И. Седов [1], И. Я. Штаерман [1], С. Jacob [2], B. Noble [1], L. C. Woods [1].

Укажем еще на следующие работы, по большей части не упомянутые в названных выше книгах: Р. Д. Банцури и Г. А. Джанашия [1], Ф. Д. Беркович [1], А. В. Бицадзе [2] — [5], Б. Боярский [1], И. Н. Векуа [9], Н. П. Векуа и Р. С. Исаханов [1], Ф. Д. Гахов [11], [12], Ф. Д. Гахов и Л. И. Чибрикова [2], [3], В. А. Какичев [1], [2], В. А. Какичев и В. С. Рогожин [1], А. И. Каландия [1], Т. М. Керимов [1], Л. Г. Магнарадзе [1], Г. Ф. Манджавидзе [7], Г. К. Михайлов и Г. Н. Пыхтеев [1], С. Г. Михлин [8], Г. Н. Пыхтеев [1, [2], В. С. Рогожин [1], М. М. Смирнов [1], Я. Н. Фельд [1], М. М. Фридман [1], [2], И. Х. Хайруллин [1], Ю. И. Черский [2], [4] — [6], [8], Л. И. Чибрикова [3], Д. И. Шерман [8], [10], С. И. Юрченко [1], L. Dragoş [1], G. Fichera [1], [2], S. Gellerstedt [1], G.M.L. Gladwell [1], [2], P. Leehey [1], R. C. MacCamy [1], W. Piechocki and H. Zorski [1], H. Schmidt [1], K. Schröder [2], H. Schubert [1], H. Söhngen [3], G. W. Veltkamp [1], L. Wolfersdorf [1] — [3], H. Zorski [1] —[4].

точек (в том числе и концов). Такую линию мы будем иногда называть прерывистой гладкой линией. В этом случае S является (связной) областью (плоскость со щелями).

2°. В соответствии с терминологией, принятой в § 10, функцию $\Phi(z)$, голоморфную в S, кроме, быть может, точки $z=\infty$, непрерывно продолжимую слева и справа на все обыкновенные точки линии L, а вблизи узлов c допускающую оценку

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha = \text{const} < 1, \tag{77,1}$$

мы будем называть кусочно-голоморфной с линией скачков или граничной линией L.

Напомним, что если разложение $\Phi(z)$ в ряд по степеням z в окрестности бесконечно удаленной точки содержит лишь конечное число членов с положительными степенями z, т. е. если при больших $|z|$

$$\Phi(z) = A_k z^k + A_{k-1} z^{k-1} + \ldots, \quad A_k \neq 0,$$

то по определению $\Phi(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности, равный k; при $k>0$ точка $z=\infty$ является полюсом порядка k, при $k<0$ — нулем порядка $(-k)$.

3°. В дальнейшем нам часто придется встречаться с функциями $\Phi(z)$ точки z в S, обладающими тем свойством, что $|z-c|^{\varepsilon}\Phi(z)\to 0$ при $z\to c$, где c — данный узел, какова бы ни была положительная постоянная ε. Такие функции мы будем называть почти ограниченными вблизи узла c. Примером почти ограниченной вблизи c функции является $\ln(z-c)$.

4°. Понятие классов H, H_0, H^*, H_ε^* будет постоянно применяться ниже; напоминать их мы здесь не будем, отсылая к § 8.

5°. Всюду в дальнейшем, говоря, что некоторое граничное условие выполняется на L, мы подразумеваем (если противное не оговорено), что узлы не включаются в L.

§ 78. Однородная задача сопряжения в общем случае. 1°. Пусть L обозначает произвольную кусочно-гладкую линию (§ 1). Однородную задачу сопряжения для этого общего случая мы формулируем так.

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с граничной линией L, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \tag{78,1}$$

где $G(t)$ — заданная на L функция класса H_0, нигде на L не обращающаяся в нуль.

Функцию $G(t)$, мы будем по-прежнему называть коэффициентом задачи сопряжения (78,1).

Напомним, что по принятому выше условию (§ 77, п. 5°) равенство (78,1) должно быть соблюдено для всех обыкновенных точек линии L. Как понимать условие, что $G(t)$ не обращается в нуль нигде на L, было разъяснено в § 8, п. 3°.

Заметим, что приведенная выше постановка задачи включает случай, когда коэффициент $G(t)$ может иметь конечное число разрывов первого рода на гладких частях линии L, так как точки разрыва можно включить в число узлов, что мы и будем всегда делать.

2°. Так же как в случае гладких замкнутых контуров (§ 35), основное значение и в рассматриваемом случае имеет понятие канонического решения, которое мы определим теперь следующим образом.

Решение $X(z)$ однородной задачи сопряжения (78,1) называется каноническим, если не только функция $X(z)$, но и функция $\frac{1}{X(z)}$ является кусочно-голоморфной.

Напомним, что в силу самого определения кусочно-голоморфной функции, мы должны иметь вблизи всех узлов c

$$|X(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1, \tag{78,2}$$

$$\frac{1}{|X(z)|} < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha = \text{const} < 1. \tag{78,3}$$

Таким образом, каноническое решение характеризуется следующими условиями: оно нигде в S, кроме, быть может, бесконечно удаленной точки, в нуль не обращается; также не обращаются в нуль граничные его значения справа и слева во всех обыкновенных точках граничной линии[1]); вблизи же узлов c оно удовлетворяет условию (78,3), так же как и условию (78,2), которому по определению должна удовлетворять всякая кусочно-голоморфная функция.

Мы увидим сейчас, что при принятых предположениях канонические решения всегда существуют.

3°. Переходя к построению канонических решений, будем подразумевать под $\ln G(t)$ какое-либо определенное значение, непрерывно изменяющееся на каждой из дуг $L_1, L_2, \ldots, L_p$. Так как по условию $G(t)$ принадлежит классу H_0 и нигде на L в нуль не обращается, то и $\ln G(t)$ принадлежит классу H_0.

Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_n$ все узлы линии L. При приближении t к узлу c_k по одной из дуг L_j, имеющих концом точку c_k, функция $\ln G(t)$ стремится к определенному пределу, который мы обозначим через $\ln G_j(c_k)$, так что по определению

$$\ln G_j(c_k) = \lim \ln G(t) \quad \text{при} \quad t \to c_k \text{ по } L_j. \tag{78,4}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)\, dt}{t-z}. \tag{78,5}$$

Легко непосредственно проверить на основании формул Сохоцкого — Племеля, что функция $e^{\gamma(z)}$ удовлетворяет граничному условию (78,1) в обыкновенных точках. Остается выяснить ее поведение вблизи узлов.

На основании результата, полученного в § 26, п. 3°, будем иметь вблизи узла c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$,

$$\gamma(z) = (\alpha_k + i\beta_k) \ln(z - c_k) + \gamma_0(z),$$

где $\gamma_0(z)$ — функция, голоморфная в каждом из секторов, на которые разбивается окрестность точки c_k линией L, и стремящаяся к определенному пределу при $z \to c_k$ по любому пути, не выходящему из данного

---

[1]) Если предыдущие условия не соблюдены, то функция $\frac{1}{X(z)}$ не будет кусочно-голоморфной.

сектора, а

$$\alpha_k + i\beta_k = \sum_j \frac{\mp \ln G_j(c_k)}{2\pi i}, \tag{78,6}$$

где сумма распространяется на все номера j дуг L_j, сходящихся в c_k, причем верхние знаки соответствуют исходящим дугам, а нижние — входящим.

Таким образом, вблизи узла c_k

$$e^{\gamma(z)} = (z - c_k)^{\alpha_k + i\beta_k} \Omega(z), \tag{78,7}$$

где $\Omega(z)$ — функция, голоморфная вблизи c_k в каждом из упомянутых секторов, стремящаяся к определенным, отличным от нуля пределам при $z \to c_k$ по любому пути, не выходящему из данного сектора.

Пусть теперь $\Pi(z)$ обозначает рациональную функцию, определяемую формулой

$$\Pi(z) = \prod_{k=1}^{n} (z - c_k)^{\lambda_k}, \tag{78,8}$$

где λ_k обозначают *целые числа*, подчиненные условиям

$$-1 < \alpha_k + \lambda_k < 1, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{78,9}$$

Легко видеть теперь, что функция

$$X(z) = \Pi(z) e^{\gamma(z)} = e^{\gamma(z)} \prod_{k=1}^{n} (z - c_k)^{\lambda_k} \tag{78,10}$$

представляет собой каноническое решение или, точнее, одно из канонических решений. Действительно, ясно, что $X(z)$ нигде в S в нуль не обращается и вследствие неравенства (78,9) удовлетворяет условиям (78,2), (78,3); ясно также, что граничные значения $X^+(t)$, $X^-(t)$, выражения для которых будут даны ниже, нигде в обыкновенных точках линии L в нуль не обращаются.

Решение $X(z)$, вообще говоря, не вполне определяется условиями (78,9). А именно ясно, что число λ_k, соответствующее узлу c_k, определяется однозначно лишь в случае, когда α_k — целое число; в этом случае $\lambda_k = -\alpha_k$.

Узлы c_k, для которых α_k — целые числа, мы будем называть особенными, остальные узлы — неособенными.

Для неособенных узлов числа λ_k определяются лишь с точностью до слагаемого ± 1, а именно, мы можем выбрать λ_k либо так, чтобы $\alpha_k + \lambda_k < 0$, либо так, чтобы $\alpha_k + \lambda_k > 0$.

Согласно предыдущему, мы допускаем решения задачи (78,1), не ограниченные вблизи узлов. Иногда же целесообразно требовать, чтобы искомое решение было ограничено вблизи некоторых, заранее заданных, неособенных узлов [1]) $c_1, c_2, \ldots, c_q$.

Решения $\Phi(z)$, удовлетворяющие этому условию, мы будем называть *решениями класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Класс, соответствующий $q = 0$, мы будем обозначать через $h(0)$ или h_0. Если m — число всех

[1]) Мы увидим ниже, что вблизи особенных узлов все решения необходимо ограничены.

неособенных узлов, а $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — все эти узлы, то класс $h(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ мы будем иногда обозначать через h_m. Класс h_0 содержит все прочие классы, а класс h_m содержится во всех прочих.

Условимся в соответствии с этим сопоставлять каждому классу решений определенное с точностью до постоянного множителя каноническое решение.

А именно, *каноническим решением класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, где $c_1, c_2, \ldots, c_q$ — заданные неособенные узлы, мы будем называть решение $X(z)$, определяемое формулой (78,10), где целые числа λ_k подобраны так, что $\alpha_k + \lambda_k > 0$ для узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$ и $\alpha_k + \lambda_k < 0$ для всех остальных неособенных узлов[1]), или всякое решение, отличающееся от $X(z)$ постоянным (не равным нулю) множителем.

Целое число $\varkappa$, определяемое формулой

$$\varkappa = -\sum_{k=1}^{n} \lambda_k, \tag{78,11}$$

мы назовем *индексом данного класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$.

Легко проверить, что число $\varkappa$ не зависит от выбора значений функции $\ln G(t)$, лишь бы они непрерывно изменялись на дугах L_k, составляющих L[2]).

Из (78,10) следует, что $X(z)$ имеет на бесконечности порядок $(-\varkappa)$, т. е. нуль порядка $\varkappa$ при $\varkappa > 0$ или полюс порядка $(-\varkappa)$, если $\varkappa < 0$; при $\varkappa = 0$ имеем $X(\infty) = 1$. Во всех случаях

$$\lim_{z\to\infty} z^{\varkappa} X(z) = 1. \tag{78,12}$$

4°. Найдем граничные значения канонического решения $X(z)$. Применяя к интегралу (78,5) формулы Сохоцкого — Племеля, получим:

$$X^+(t_0) = e^{\frac{1}{2}\ln G(t_0)}\Pi(t_0)\, e^{\gamma(t_0)}, \quad X^-(t_0) = e^{-\frac{1}{2}\ln G(t_0)}\Pi(t_0)\, e^{\gamma(t_0)}$$

или

$$X^+(t_0) = \sqrt{G(t_0)}\, X(t_0), \quad X^-(t_0) = \frac{X(t_0)}{\sqrt{G(t_0)}}, \tag{78,13}$$

где

$$X(t_0) = \Pi(t_0)\, e^{\gamma(t_0)}, \tag{78,14}$$

а ветвь радикала, фигурирующего в формулах (78,13), фиксируется формулой

$$\sqrt{G(t_0)} = e^{\frac{1}{2}\ln G(t_0)}. \tag{78,15}$$

Легко видеть на основании формулы (26,14), что

$$X(t_0) = \omega(t_0) \prod_{k=1}^{n} (t_0 - c_k)^{\gamma_k}, \tag{78,16}$$

---

[1]) Напомним, что для особенных узлов $\alpha_k + \lambda_k = 0$.

[2]) Если заменить значение $\ln G(t)$ на какой-либо дуге L_j, входящей в состав L, значением $\ln G(t) + 2l\pi i$, где l — целое число, то, как показывает формула (78,6), к значению α_k, соответствующему узлу, из которого исходит L_j, прибавится $(-l)$, а к значению, соответствующему узлу, куда входит L_j, прибавится $(+l)$. В результате одно из чисел λ_k в сумме (78,11) заменится на $\lambda_k + l$, а другое — на $\lambda_k - l$ и сумма останется неизменной.

где $\omega(t_0)$ — функция класса H_0, не обращающаяся в нуль на L, а

$$\gamma_k = \alpha_k + \lambda_k + i\beta_k. \tag{78,17}$$

Таким образом, функция $X(t_0)$ принадлежит классу H^* на L; она принадлежит классу H в окрестностях узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$ и обращается в нуль на них. Наконец, в окрестностях особенных узлов она принадлежит классу H_ε^*, *оставаясь ограниченной*. То же самое относится, очевидно, и к $X^+(t_0)$, $X^-(t_0)$.

5°. Пусть $X(z)$ — каноническое решение данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Очевидно, что функция

$$\Phi(z) = X(z) P(z), \tag{78,18}$$

где $P(z)$ — произвольный полином, представляет собой также решение данного класса[1]).

Докажем теперь, что, обратно, *всякое решение* $\Phi(z)$ *данного класса дается формулой* (78,18) *при надлежащем подборе полинома* $P(z)$.

В самом деле, из соотношений

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \quad X^+(t) = G(t) X^-(t)$$

следует, что

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} \text{ на } L.$$

Это равенство показывает, что функция $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$, если приписать ей надлежащие значения в обыкновенных точках линии L, голоморфна на всей плоскости, кроме, быть может, узлов и бесконечно удаленной точки. Вблизи узлов она может обращаться в бесконечность порядка, меньшего 1, следовательно, узлы — устранимые особые точки. Так как, далее, $\Phi(z)$ имеет по условию конечный порядок на бесконечности, то $\dfrac{\Phi(z)}{X(z)}$ — полином, и наше утверждение доказано.

6°. Отметим ряд непосредственных следствий, вытекающих из (78,18). Прежде всего, ясно, что *все решения* $\Phi(z)$ *однородной задачи* (78,1) *остаются ограниченными вблизи всех особенных узлов*, так как этим свойством обладает $X(z)$; последнее следует из формул (78,7), (78,10) и из условия $\alpha_k + \lambda_k = 0$.

Далее, *если решение остается ограниченным вблизи данного неособенного узла, то оно необходимо обращается в нуль в этом узле*; под последним следует подразумевать, что решение стремится к нулю, когда z приближается к узлу по любому пути. В самом деле, если c — один из неособенных узлов, определяющих класс канонического решения $X(z)$, то по самому построению функции $X(z)$ она обращается в нуль при $z = c$. Если же c принадлежит к числу других неособенных узлов, то для ограниченности решения $\Phi(z)$ вблизи c, очевидно, необходимо, чтобы полином $P(z)$ содержал множитель $z - c$, и тогда ясно, что $\Phi(z) = 0$ при $z = c$.

Из (78,18) следует еще, что порядок $\Phi(z)$ на бесконечности равен $-\varkappa + k$, где $\varkappa$ — индекс рассматриваемого класса, а k — степень полинома $P(z)$. Следовательно, решения данного класса, имеющие возможно

---

[1]) Заметим, что, по определению решения данного класса, принадлежность решения $\Phi(z)$ классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ не исключает принадлежности того же решения более узкому классу $h(c_1, \ldots, c_q, c_{q+1}, \ldots)$, в противоположность тому, что мы имеем относительно канонического решения данного класса: согласно самому определению, каноническое решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ необходимо неограниченно вблизи неособенных узлов $c_{q+1}, \ldots$, отличных от $c_1, c_2, \ldots, c_q$.

низший порядок на бесконечности, получим, положив $P(z) = C = \text{const} \neq 0$. Итак, *наинизший возможный порядок на бесконечности решения данного класса равен* $(-\varkappa)$; все решения данного класса, имеющие этот порядок, даются формулой

$$\Phi(z) = CX(z),$$

т. е. представляют собой канонические решения данного класса.

Следовательно, *каноническое решение данного класса может быть определено как решение наинизшего (в данном классе) возможного порядка на бесконечности.*

Из предыдущего непосредственно вытекает еще, что *каноническое решение данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ может быть определено как решение, которое нигде не обращается в нуль, кроме узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$, где оно обращается в нуль порядка меньшего единицы, и, кроме, быть может, точки $z = \infty$.*

Пусть по-прежнему m — число всех неособенных узлов, а $c_1, c_2, \ldots$ $\ldots, c_m$ — сами эти узлы. Самый общий класс решений, т. е. класс решений, на которые никаких дополнительных условий на узлах не налагается, мы обозначили выше через h_0; соответствующее каноническое решение мы будем обозначать через $X_0(z)$. Функцию $X_0(z)$ мы получим, взяв для всех неособенных концов $\alpha_k + \lambda_k < 0$. Эта функция $X_0(z)$ нигде в конечной части плоскости (включая узлы) в нуль не обращается.

Индекс $\varkappa_0$ класса h_0, очевидно, больше индексов всех других классов.

Очевидно также, что каноническое решение $X(z)$ и индекс $\varkappa$ всякого класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ связаны с $X_0(z)$ и $\varkappa_0$ соотношениями

$$X(z) = C(z-c_1)(z-c_2)\ldots(z-c_q)X_0(z), \quad C = \text{const} \neq 0,$$
$$\varkappa = \varkappa_0 - q. \tag{78,19}$$

Класс $h(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, являющийся подклассом всех других классов, мы будем обозначать, как выше, через h_m; соответствующие канонические решения и индекс мы будем обозначать через $X_m(z)$ и $\varkappa_m$. Из предыдущего ясно, что

$$X_m(z) = C(z-c_1)\ldots(z-c_m)X_0(z), \quad C = \text{const} \neq 0,$$
$$\varkappa_m = \varkappa_0 - m. \tag{78,20}$$

Замечание. Легко подсчитать число всех классов: имеется один класс h_0; m классов $h(c_j)$ $(j = 1, 2, \ldots, m)$; $\frac{m(m-1)}{1\cdot 2}$ классов $h(c_j, c_k)$ и т. д., всего

$$1 + \frac{m}{1} + \frac{m(m-1)}{1\cdot 2} + \ldots + \frac{m}{1} + 1 = 2^m$$

классов.

§ 79. Союзные однородные задачи сопряжения. Союзные классы. Наряду с задачей (78,1) предыдущего параграфа рассмотрим задачу

$$\Psi^+(t) = [G(t)]^{-1}\Psi^-(t) \text{ на } L, \tag{79,1}$$

которую мы будем называть союзной с задачей (78,1). Между решениями союзных задач существует тесная связь, которая принимает особенно простой вид, если ввести понятие союзных классов решений.

Легко видеть на основании самого определения особенных и неособенных узлов, что узлы особенные (неособенные) для данной задачи будут также особенными (неособенными) для союзной задачи.

Пусть по-прежнему $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — неособенные узлы (для обеих союзных задач). Союзными классами мы будем называть классы[1])

$$h = h(c_1, c_2, \ldots, c_q) \quad \text{и} \quad h' = h(c_{q+1}, \ldots, c_m).$$

На основании самого определения индекса и канонического решения данного класса легко видеть, что канонические решения $X(z)$ и $X'(z)$ союзных задач союзных классов связаны соотношением

$$X'(z) = C[X(z)]^{-1}, \tag{79,2}$$

а их индексы $\varkappa$ и $\varkappa'$ соответственно классов h и h' — соотношением

$$\varkappa' = -\varkappa; \tag{79,3}$$

C обозначает отличную от нуля произвольную постоянную, которую можно всегда считать равной 1.

§ 80. Неоднородная задача сопряжения в общем случае. **1°.** Эту задачу мы сформулируем так, подразумевая под L произвольную кусочно-гладкую линию:

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с граничной линией L, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию[2])

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{на } L, \tag{80,1}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на L функции класса H_0, причем $G(t) \neq 0$ всюду на L.

Функции $G(t)$ и $g(t)$ мы будем по-прежнему называть соответственно коэффициентом и свободным членом задачи.

Особенными и неособенными узлами мы будем называть особенные и неособенные узлы, соответствующие однородной задаче (78,1). Подобно тому как это было сделано в предыдущем параграфе, мы разобьем все возможные решения задачи (80,1) на классы $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ путем назначения тех неособенных узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$, вблизи которых решения данного класса должны быть ограниченными, не налагая никаких условий на поведение решения вблизи других неособенных и особенных узлов (кроме, разумеется, условий, налагаемых согласно нашему определению на всякую кусочно-голоморфную функцию).

Будем искать решения неоднородной задачи (80,1), принадлежащие данному классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Пусть $X(z)$ — каноническое решение этого класса однородной задачи (78,1). Эту функцию мы будем называть канонической функцией данного класса задачи (80,1). Замечая, что

$$G(t) = \frac{X^+(t)}{X^-(t)}$$

перепишем условие (80,1) в виде

$$\frac{\Phi^+(t)}{X^+(t)} - \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} = \frac{g(t)}{X^+(t)}. \tag{80,2}$$

Так как по условию функция $\Phi(z)$ остается ограниченной вблизи тех узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$, на которых $X(z)$ обращается в нуль, то вблизи этих узлов

$$\left|\frac{\Phi(z)}{X(z)}\right| < \frac{\text{const}}{|z - c_j|^{\alpha}}, \quad \alpha < 1;$$

---

[1]) Через $c_1, c_2, \ldots, c_q$ обозначены некоторые неособенные узлы, а через $c_{q+1}, \ldots, c_m$ — все остальные неособенные узлы.

[2]) Подразумевается, что это условие должно быть соблюдено во всех обыкновенных точках линии L.

значит, функция $\frac{\Phi(z)}{X(z)}$ кусочно-голоморфная; она, кроме того, имеет конечный порядок на бесконечности.

Поэтому на основании результатов § 31 заключаем, что

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P(z), \tag{80,3}$$

где $P(z)$ — произвольный полином. Это и есть общее решение данного класса неоднородной задачи (80,1). Второе слагаемое представляет собой общее решение данного класса соответствующей однородной задачи, первое же — некоторое частное решение исходной неоднородной задачи.

Из сказанного в § 26, п. 3° следует, что решение (80,3) действительно ограничено вблизи узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$.

Вблизи особенных узлов, как легко видеть на основании сказанного в том же § 26, решение остается ограниченным, за исключением, быть может, тех особенных узлов, для которых числа β_k формулы (78,6) равны нулю; вблизи этих последних узлов решения могут быть неограниченными, но будут обязательно почти ограниченными (логарифмического типа)[1]).

Отметим еще, что в нашем случае, в противоположность случаю однородной задачи, решения, остающиеся ограниченными вблизи каких-либо неособенных узлов, не обращаются, вообще говоря, в нуль на этих узлах.

2°. С точки зрения приложений особый интерес представляет разыскание тех решений неоднородной задачи (80,1), которые исчезают на бесконечности.

Замечая, что порядок функции $X(z)$ на бесконечности равен в точности $(-\varkappa)$, т. е. индексу класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ с обратным знаком, легко заключаем на основании (80,3):

При $\varkappa \geqslant 0$ решения данного класса, исчезающие на бесконечности, даются формулой

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}+X(z)P_{\varkappa-1}(z), \tag{80,4}$$

где $P_{\varkappa-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa-1$ ($P_{\varkappa-1}(z) = 0$ при $\varkappa=0$).

При $\varkappa<0$ решения данного класса, исчезающие на бесконечности, существуют тогда и только тогда, когда соблюдены условия

$$\int\limits_L \frac{t^j g(t)\,dt}{X^+(t)}=0, \quad j=0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa-1, \tag{80,5}$$

выражающие, что $\Phi(\infty)=0$. При соблюдении этих условий решение (единственное) дается той же формулой (80,4) при $P_{\varkappa-1}(z)=0$.

3°. Из (80,4) следует, что при $\varkappa>0$ однородная задача, соответствующая задаче (80,1), т. е. задача, получаемая при $g(t)=0$, имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений данного класса h, исчезающих на бесконечности,

$$X(z),\quad zX(z),\quad \ldots,\quad z^{\varkappa-1}X(z); \tag{80,6}$$

при $\varkappa \leqslant 0$ эта задача не имеет отличных от нуля решений данного класса, исчезающих на бесконечности.

---

[1]) При α_k целом (что характеризует особенный узел) и при $\beta_k=0$ функция $X^+(t)$ принадлежит классу H_0 в окрестности c_k.

Будем, как в главе II, называть союзными две задачи сопряжения, если союзными являются соответствующие им однородные задачи.

На основании предыдущего и на основании сказанного в § 79 союзная с данной задачей (80,1) однородная задача имеет при $\varkappa < 0$ ровно $(-\varkappa)$ линейно независимых решений класса h' (союзного с h), исчезающих на бесконечности,

$$\frac{1}{X(z)}, \quad \frac{z}{X(z)}, \quad \ldots, \quad \frac{z^{-\varkappa-1}}{X(z)}. \tag{80,7}$$

Сопоставляя эти выражения с формулой (80,5), можем эту последнюю заменить следующей:

$$\int_L \psi_k^+(t)\, g(t)\, dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa, \tag{80,8}$$

где $\psi_k^+(t)$ обозначают граничные значения (слева) функций $\psi_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, -\varkappa$, составляющих полную систему исчезающих на бесконечности линейно независимых решений класса h' однородной задачи, союзной с данной задачей (80,1).

4°. Общее решение данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ можно представить формулой, несколько отличной от (80,3). Пусть $X_1(z)$ — каноническая функция любого класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q, c_{q+1}, \ldots, c_r)$, являющегося подклассом класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Тогда функция

$$\Phi_1(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)\, dt}{X_1^+(t)(t-z)},$$

будучи частным решением класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q, c_{q+1}, \ldots, c_r)$, будет в то же время частным решением класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. С другой стороны, ясно, что общее решение $\Phi(z)$ класса $h(c_1, \ldots, c_q)$ неоднородной задачи представляется в виде

$$\Phi(z) = \Phi_1(z) + \Psi(z),$$

где $\Phi_1(z)$ — какое-либо частное решение этого класса неоднородной задачи, а $\Psi(z)$ — общее решение этого класса однородной задачи. Следовательно, общее решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ неоднородной задачи можно представить в виде

$$\Phi(z) = \frac{X_1(z)}{2\pi i} \int_L \frac{g(t)\, dt}{X_1^+(t)(t-z)} + X(z) P(z), \tag{80,3a}$$

где $P(z)$ — произвольный полином, $X(z)$ — каноническое решение класса $h(c_1, \ldots, c_q)$ однородной задачи, а $X_1(z)$ — каноническое решение той же однородной задачи любого класса $h(c_1, \ldots, c_q, c_{q+1}, \ldots, c_r)$, т. е. класса, являющегося подклассом класса $h(c_1, \ldots, c_q)$. В частности, в качестве $X_1(z)$ всегда можно взять каноническое решение $X_m(z)$ класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_m)$.

5°. То обстоятельство, что при формулировке неоднородной задачи сопряжения мы допускаем разрывы функций $G(t)$ и $g(t)$ лишь в узлах[1]), не снижает общности, так как мы можем причислить точки разрыва этих функций к узлам, аналогично тому, что имеет место в случае однородной задачи.

Однако если функция $g(t)$ имеет разрывы и в точках, отличных от тех, где имеет разрывы функция $G(t)$, то целесообразно причислять к узлам лишь точки разрыва функции $G(t)$. Действительно, «узлы», расположен-

[1]) Речь все время идет о разрывах первого рода.

ные на гладких частях линии L, в которых функция $G(t)$ остается непрерывной, никакого влияния на каноническую функцию не оказывают. Между тем существенные свойства решения задачи определяются именно канонической функцией, которая в свою очередь определяется линией L и коэффициентом задачи $G(t)$[1]).

Поэтому лучше в случае, когда $g(t)$ имеет разрывы, не совпадающие с узлами, определяемыми видом самой линии и разрывами функции $G(t)$, вести рассуждения точно так, как в случае, когда $g(t)$ не имеет таких разрывов. В результате мы получим решение, даваемое теми же формулами, что выше. Разница будет лишь та, что вблизи точек разрыва функции $g(t)$, не совпадающих с узлами, решение будет неограниченным, класса H_ε^*, а именно логарифмического типа, как это, например, показывает формула (80,3).

§ 81. О некоторых работах, связанных с задачей сопряжения. 1°. Решение однородной и неоднородной задач, приведенное в предыдущих параграфах, воспроизводит, без всяких принципиальных изменений, решение, данное автором в статье [6] и существенно дополненное в статье Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава [1]. В названных статьях рассматривается лишь случай, когда линия L состоит из гладких разомкнутых дуг без общих точек (см. § 83, п. 1°), однако рассуждения и результаты этих статей почти текстуально переносятся на рассмотренный случай [2]), что и выполнено в предыдущих параграфах.

Существенное дополнение, данное во второй из упомянутых статей, заключается во введении понятия *классов* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ *решений* и понятия *союзных классов* h и h', играющих весьма существенную роль в приложениях к теории сингулярных интегральных уравнений (см. следующую главу).

Метод, приведенный в статье автора [6], представляет собой обобщение способа, намеченного Т. Карлеманом (T. Carleman [1]) в одном частном случае. А именно, у Карлемана линия L представляет собой отрезок действительной оси; кроме того, он ограничивается случаем, который соответствует (при наших обозначениях) значению $\varkappa_0 = 1$. Понятия индекса и, само собой разумеется, понятия классов решений Карлеман не вводит.

Решение задачи сопряжения для случая, когда L — простой гладкий замкнутый контур, а функции $G(t)$ и $g(t)$ имеют на L разрывы первого рода (ср. § 83, п. 2°), было получено Ф. Д. Гаховым [3] иным путем, а именно, при помощи приведения к случаю, когда $G(t)$ и $g(t)$ непрерывны [3]). Свое первоначальное решение, не содержащее разбиения на классы в указанном здесь смысле и понятия союзных классов, Ф. Д. Гахов получил независимо от работ Н. И. Мусхелишвили [6] и Н. И. Мусхелишвили

[1]) С этим связано и то обстоятельство, что в большинстве задач математической физики, приводящих к задаче сопряжения с *типом* задачи связан вид линии L и функции $G(t)$, а функция $g(t)$ зависит от тех или иных конкретных частных заданий.

[2]) Единственное более или менее существенное различие заключается в том, что вместо результатов, приведенных в § 22, касающихся поведения интегралов типа Коши вблизи концов, мы пользуемся здесь несколько более общими результатами, приведенными в § 26, касающимися поведения интегралов типа Коши вблизи узлов.

[3]) Прием приведения к случаю непрерывных $G(t)$ и $g(t)$, использованный Ф. Д. Гаховым, представляет собой упрощение приема, указанного Д. Гильбертом (D. Hilbert [2], стр. 93) для случая однородной задачи. Аналогичный прием имеется у И. Племеля (J. Plemelj [2]) в применении к однородной задаче сопряжения для нескольких функций в случае кусочно-постоянных коэффициентов; см. еще главу VI.

и Д. А. Квеселава [1], а затем пополнил его, пользуясь второй из названных работ.

Впоследствии результаты работ Н. И. Мусхелишвили [6] и Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава [1] были обобщены в статьях W. J. Trjitzinsky [1] (автор был знаком лишь с первой из названных работ) и Д. А. Квеселава [7] на случай, когда L состоит из замкнутых и разомкнутых гладких дуг, которые могут пересекаться друг с другом в конечном числе точек. Однако результаты этих авторов (в особенности первого, пользующегося весьма громоздкими приемами) являются менее общими и менее простыми, чем изложенные выше.

Некоторое упрощение упомянутых выше результатов Д. А. Квеселава было дано в работе Ф. Д. Гахова и Л. И. Чибриковой [1].

Несколько иным путем, чем это изложено выше, случай пересекающихся контуров (не обязательно гладких) рассмотрен в работе Т. Г. Гегелиа [2]; у этого автора совокупность точек пересечения может образовывать счетное множество.

Задача сопряжения в случае некоторых негладких линий рассмотрена также в работах А. Д. Алексеева [1], [2] и А. А. Бабаева [3].

2°. Задача сопряжения, примерно в такой же постановке, что и здесь, рассмотрена также в работах В. Погожельского (W. Pogorzelski [4], [5]). В этих работах дается решение, характер которого, в известных отношениях, несколько более уточнен, чем у нас [1]).

При некотором ограничении, налагаемом на линию L (подчинение условию Ляпунова), существенные результаты в смысле расширения класса допустимых функций для свободного члена $g(t)$ в граничном условии и искомого решения $\Phi(z)$ получены в работах Б. В. Хведелидзе [6]—[8], [12]—[14], [18]—[21]. Основной результат состоит в следующем. Пусть L — совокупность конечного числа замкнутых или разомкнутых дуг Ляпунова, не имеющих общих точек. Предположим далее, что при сохранении прежних условий относительно коэффициента $G(t)$ в (80,1) свободный член $g(t)$ принадлежит классу $\mathscr{L}_p(\rho; L)$[2]), где $p>1$, а $\rho(t)$ — некоторая функция вида (27,3). Пусть, далее, от искомой функции $\Phi(z)$ требуется, чтобы она была представима интегралом типа Коши по линии L с плотностью класса $\mathscr{L}_p(\rho; L)$. При этих условиях все решения задачи сопряжения (имеющие конечный порядок на бесконечности) даются формулой (80,3). Отсюда непосредственно вытекает заключение, что если в задаче сопряжения (80,1) функции $G(t)$ и $g(t)$ принадлежат классу H_0, то всякое решение этой задачи, представимое интегралом типа Коши с плотностью, принадлежащей классу $\mathscr{L}_p(\rho; L)$, является кусочно-голоморфной функцией.

Впоследствии этот результат был обобщен в различных направлениях. В работах Г. А. Хускивадзе [4] и А. Э. Драчинского [1], [2] показано, что в ряде случаев класс $\mathscr{L}_p$, $p>1$ можно заменить классом $\mathscr{L}_1$. Кроме того, рассмотрены некоторые случаи, когда $g(t)$ и плотность искомого интеграла могут быть несуммируемыми. В работе Э. Г. Гордадзе [2] показано, что L может быть произвольной кусочно-гладкой линией при сохранении условия Ляпунова для отдельных гладких дуг, составляющих L.

---

[1]) Ср. § 26 (сноска в начале параграфа). Следует отметить, что в работах В. Погожельского рассматривается также некоторая, довольно общая, нелинейная задача сопряжения.

[2]) См. § 27.

Некоторые другие случаи рассмотрены в работах А. Д. Алексеева [3], В. А. Пааташвили [3] и С. А. Фрейдкина [5].

3°. В ряде работ, появившихся за последние годы, даны обобщения решения задачи сопряжения в смысле уменьшения ограничений, налагаемых на коэффициент $G(t)$ граничного условия. В этом направлении еще Ф. Д. Гахов в своих первых работах [1], [2] рассмотрел случай, когда коэффициент $G(t)$ обращается в нуль или бесконечность степенного характера в конечном числе точек. В дальнейшем этот случай был более полно изучен различными друг от друга методами Л. А. Чикиным [1], Б. В. Хведелидзе [18] и И. М. Мельником [1]—[3]. В работах Б. В. Хведелидзе[1]) и И. М. Мельника рассмотрен также случай, когда $G(t)$ имеет особенности логарифмического характера. Еще раньше (но после Ф. Д. Гахова) случай, когда $G(t)$ может обращаться в нуль и бесконечность порядка ниже первого, был изучен Н. П. Векуа [18].

В работах В. В. Иванова [4], И. Б. Симоненко [1], Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе [1], [2] и Б. В. Хведелидзе [19], [21] требование, чтобы функция $G(t)$ удовлетворяла условию H, заменено требованием, чтобы она была лишь непрерывна.

Следующие существенные шаги в направлении расширения класса допустимых функций для коэффициента $G(t)$ были сделаны в работах: И. И. Данилюк [1], [2], И. Б. Симоненко [2], [4], H. Widom [1]; впоследствии некоторые аналогичные результаты были установлены также в работах В. А. Пааташвили [1], [2].

4°. В ряде работ, появившихся за последнее время, задача сопряжения изучается в обобщенных функциях (функционалах над некоторым пространством основных функций). Назовем следующие работы: О. С. Парасюк [1], Ю. И. Черский [1], [3], [7], В. С. Рогожин [3]—[6], Ф. Д. Беркович [1], [2], В. Б. Дыбин [1], В. Б. Дыбин и Н. К. Карапетянц [1], Г. А. Джанашия [1], A. H. Lauwerier [1].

5°. Обобщить задачу сопряжения можно также, взяв более общие граничные условия. Так, например, в граничных условиях могут сопрягаться не только граничные значения кусочно-голоморфных функций, но и их производных. В настоящее время изучена следующая граничная задача такого типа:

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию:

$$\sum_{k=0}^{n}\Big[A_k(t_0)\overset{(k)}{\Phi^{+}}(t_0)+B_k(t_0)\overline{\overset{(k)}{\Phi^{+}}(t_0)}+\int_L M_k(t_0,t)\overset{(k)}{\Phi^{+}}(t)\,dt+$$

$$+\int_L N_k(t_0,t)\overline{\overset{(k)}{\Phi^{+}}(t)\,dt}\Big]+\sum_{k=0}^{n}\Big[C_k(t_0)\overset{(k)}{\Phi^{-}}(t_0)+D_k(t_0)\overline{\overset{(k)}{\Phi^{-}}(t_0)}+$$

$$+\int_L R_k(t_0,t)\overset{(k)}{\Phi^{-}}(t)\,dt+\int_L S_k(t_0,t)\overline{\overset{(k)}{\Phi^{-}}(t)\,dt}\Big]=g(t_0)\ \text{на}\ L, \qquad (81,1)$$

где L — простой замкнутый гладкий контур, $A_k(t)$, $B_k(t)$, $C_k(t)$, $D_k(t)$, $g(t)$ — заданные функции, удовлетворяющие условию H, $M_k(t_0, t)$, $N_k(t_0, t)$,

---

[1]) См. также А. Э. Драчинский [1] — [4].

$R_k(t_0, t)$, $S_k(t_0, t)$ — также заданные функции вида

$$\frac{h(t_0, t)}{|t-t_0|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha = \mathrm{const} < 1,$$

причем $h(t_0, t)$ удовлетворяет условию H. Черта сверху обозначает переход к комплексно-сопряженным значениям, а через $\overset{(k)}{\Phi^+}(t_0)$, $\overset{(k)}{\Phi^-}(t_0)$ обозначены граничные значения производной порядка k искомой функции $\Phi(z)$.

Эта задача в случае $M_k(t_0, t) = N_k(t_0, t) = R_k(t_0, t) = S_k(t_0, t) = 0$, $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, была впервые рассмотрена Л. Г. Магнарадзе [2].

Впоследствии Ю. М. Крикунов [1]—[3], а затем Р. С. Исаханов [2], [3], [6], [7] показали, что задачу (81,1) можно изучить путем надлежащего обобщения метода, примененного И. Н. Векуа к решению задачи V, который изложен в главе III настоящей книги.

Упомянем также работу Н. П. Векуа [29], в которой задача (81,1) изучена в случае, когда $M_k(t_0, t) = N_k(t_0, t) = R_k(t_0, t) = S_k(t_0, t) = 0$, $k = 0, 1, \ldots, n$, при разомкнутых контурах.

6°. Другое направление обобщений заключается в том, что в граничном условии задачи сопрягаются граничные значения искомой кусочно-голоморфной функции (а также, в более общем случае, ее производных) не в одной и той же точке границы, а в двух различных точках, связанных между собой определенным соотношением. Относительно таких обобщений см. Добавление V в конце книги.

7°. Задача сопряжения изучена также на римановых поверхностях. Первые работы в этом направлении принадлежат А. В. Месис [1]—[3]. В настоящее время изучение задачи сопряжения, а также задачи Римана — Гильберта и некоторых других на римановых поверхностях значительно продвинулись вперед в работах Л. И. Чибриковой [2], [4]—[9], Ю. Л. Родина [1]—[6], Р. Н. Абдулаева [1]—[7], А. И. Сербина [1]—[3], В. И. Показеева [1]—[3], Э. И. Зверовича [3], В. Коппельмана (W. Koppelman [1]) и др.

8°. В некоторых работах рассматриваются граничные задачи, представляющие собой комбинацию задачи сопряжения и задачи Римана — Гильберта. Назовем работы Е. И. Оболашвили [1], [2] и И. С. Рогожиной [1], [2].

§ 82. Понятие класса h функций, заданных на L. Некоторые обобщения. 1°. В предыдущих параграфах мы ввели понятие класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ для решений $\Phi(z)$ задачи сопряжения. Для дальнейшего весьма важно установить аналогичное понятие для функций $\varphi(t)$, заданных на L.

Пусть по-прежнему $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m \leqslant n)$ обозначают все *неособенные* узлы, соответствующие данной задаче сопряжения, т. е. задаче (78,1) или (80,1); узлы эти вполне определяются заданием функции $G(t)$ на L.

Пусть $\varphi(t)$ — функция класса H^*, заданная на L. Мы будем говорить, что *функция $\varphi(t)$ принадлежит классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, $q \leqslant m$, если она принадлежит классу H_0 в окрестностях узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$, а в окрестностях остальных узлов* (особенных или неособенных) *никаким дополнительным условиям не подчиняется.*

Классы $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ и $h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ мы будем называть *союзными*. Класс, соответствующий $q = 0$, мы будем обозначать через h_0, а класс $h(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ — через h_m.

Таким образом, одни и те же обозначения мы применяем к функциям различного вида: кусочно-голоморфным функциям $\Phi(z)$, являющимся решениями задачи сопряжения, и функциям $\varphi(t)$ класса H^* на L. Однако это не может вызвать смешения.

2°. Мы видели, что самое общее решение однородной задачи сопряжения, включающее решения всех классов, представимо в виде

$$\Phi(z) = X_0(z) P(z), \tag{82,1}$$

где $X_0(z)$ — каноническое решение класса h_0, а $P(z)$ — полином. Отсюда непосредственно следует, что всякое решение однородной задачи, почти ограниченное вблизи какого-либо узла c (§ 77, п. 3°), необходимо ограничено вблизи этого узла; если узел c — неособенный, то решение, почти ограниченное вблизи c, необходимо обращается в нуль на c.

Далее, на основании сказанного в § 80, п. 4° всякое решение неоднородной задачи сопряжения представимо в виде

$$\Phi(z) = \frac{X_m(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{X_m^+(t)(t-z)} + X_0(z) P(z), \tag{82,2}$$

где, как всегда, $X_m(z)$ — каноническая функция класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, а $X_0(z)$ — каноническая функция класса h_0.

Первое слагаемое ограничено вблизи всех неособенных узлов, как это следует из § 26. Отсюда легко заключить, что всякое решение неоднородной задачи, почти ограниченное вблизи какого-либо неособенного узла c, необходимо ограничено вблизи этого узла[1]).

Таким образом, при *определении класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ *решений задачи сопряжения мы можем*, не изменяя результата, *заменить требование ограниченности решения вблизи узлов* $c_1, c_2, \ldots, c_q$ *требованием почти ограниченности*. Это замечание будет нам полезно, так как позволит внести единообразие в некоторые формулировки.

3°. Мы считали до сих пор, что свободный член $g(t)$ в граничном условии (80,1) неоднородной задачи принадлежит классу H_0. Будем теперь считать, что функция $g(t)$ принадлежит классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, где $c_1, c_2, \ldots, c_q$ — заданные неособенные узлы (см. п. 1°). Легко видеть, что решения $\Phi(z)$ задачи (80,1), принадлежащие одноименному классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, даются теми же формулами, что и в случае, когда $g(t)$ принадлежит классу H_0, т. е. формулой (80,3) для общего решения и формулой (80,4) для решений, исчезающих на бесконечности, и что необходимые и достаточные условия существования решений класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, исчезающих на бесконечности, даются теми же формулами (80,5).

Заметим, что вблизи особенных узлов решения могут быть теперь неограниченными любого порядка, меньшего 1, в зависимости от поведения функции $g(t)$ вблизи этих узлов; но если, в частности, $g(t)$ принадлежит классу H_ε^* вблизи данного особенного узла, то решения будут почти ограниченными вблизи этого узла.

§ 83. Важнейшие частные случаи. Случай бесконечной прямолинейной границы. В приложениях чаще всего встречаются следующие частные случаи: когда линия состоит из гладких разомкнутых дуг, не имеющих общих точек, в том числе и концов, т. е. когда L — прерывистая гладкая

[1]) В самом деле, если c — этот узел и если решение почти ограничено вблизи c, то необходимо $P(c) = 0$ и, следовательно, $P(z)$ содержит множитель $(z - c)$.

линия, и когда L состоит из простых замкнутых контуров, не имеющих общих точек. Введенные в предыдущих параграфах общие формулы, разумеется, непосредственно применяются к этим случаям. Мы сделаем здесь несколько дополнительных замечаний, касающихся построения канонических функций, и приведем заново некоторые формулы.

1°. Случай прерывистой гладкой линии. Пусть $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_p$ состоит из простых гладких разомкнутых дуг $L_k = a_k b_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, не имеющих общих точек (в том числе и концов); такую линию мы назвали (§ 77) прерывистой гладкой линией.

Мы считаем, что функции $G(t)$ и $g(t)$ принадлежат классу H на L, т. е. удовлетворяют условию H на каждой из (закрытых) дуг L_k.

Особенные и неособенные узлы (в нашем случае концы) определяются (как и в общем случае) заданием функции $G(t)$. В нашем случае числа $\alpha_k + i\beta_k$ даются формулой, представляющей собой частный случай формулы (78,6),

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{\mp \ln G(c_k)}{2\pi i}, \quad k = 1, 2, \ldots, 2p, \tag{83,1}$$

где верхний знак берется для $c_k = a_j$, нижний — для $c_k = b_j$.

Конец c_k — *особенный*, если α_k — целое число (или нуль), т. е. если $G(c_k)$ — *действительная положительная величина*; в противном случае это — неособенный конец.

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m \leqslant 2p)$ — все неособенные концы. Каноническая функция $X(z)$ класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ дается формулой

$$X(z) = e^{\gamma(z)} \prod_{k=1}^{2p} (z - c_k)^{\lambda_k}, \tag{83,2}$$

где λ_k — целые числа такие, что

$$\begin{gathered} 0 < \alpha_k + \lambda_k < 1 \quad \text{при } k = 1, 2, \ldots, q, \\ -1 < \alpha_k + \lambda_k < 0 \quad \text{при } k = q+1, \ldots, m, \\ \alpha_k + \lambda_k = 0 \quad \text{для особенных узлов,} \end{gathered} \tag{83,3}$$

а $\gamma(z)$ определяется формулой (78,5)

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\ln G(t)\, dt}{t - z}. \tag{83,4}$$

Индекс $\varkappa$ класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ дается формулой

$$\varkappa = -\sum_{k=1}^{2p} \lambda_k, \tag{83,5}$$

где λ_k определяются согласно (83,3).

Легко видеть, что *приведенные формулы применимы без всяких изменений и к случаю, когда дуги $L_k = a_k b_k$ являются простыми кусочно-гладкими разомкнутыми дугами*, при условии, что функция $G(t)$ принадлежит классу H на каждой из дуг L_k (включая угловые точки; см. также замечание в конце п. 2°).

2°. Случай простого замкнутого контура[1]). Пусть теперь L — простой замкнутый кусочно-гладкий контур (рис. 18).

---

[1]) Обобщение на случай нескольких замкнутых контуров никаких затруднений не представляет.

«Узлами» линии L являются угловые ее точки, а также точки (в конечном числе), расположенные на гладких частях линии L, в которых функция $G(t)$ имеет разрывы (первого рода, так как других мы не допускаем). Кроме того, в зависимости от удобства, мы можем причислить к узлам любые другие точки (в конечном числе.)

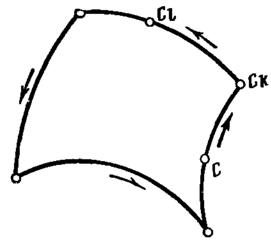

Рис. 18.

Будем считать, что, как в общем случае (§§ 78 и 80), функции $G(t)$ и $g(t)$ принадлежат классу H_0 на L.

Положительное направление на L выберем так, чтобы каждая из двух областей, на которые разбивается плоскость линией L, все время оставалась с одной и той же стороны (слева или справа).

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — все узлы, перенумерованные в произвольном порядке.

Согласно формуле (78,6), имеем в нашем случае

$$\alpha_k + i\beta_k = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(c_k - 0) - \ln G(c_k + 0)] = \frac{1}{2\pi i}\ln\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}, \tag{83,6}$$

где через $G(c_k-0)$ и $G(c_k+0)$ условно обозначены пределы, к которым стремится $G(t)$, когда t стремится к c_k, двигаясь по L соответственно в положительном и отрицательном направлениях, или

$$\alpha_k = \frac{1}{2\pi}\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}, \qquad \beta_k = -\frac{1}{2\pi}\ln\frac{|G(c_k-0)|}{|G(c_k+0)|}; \tag{83,7}$$

мы считаем, что

$$\arg\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} = \arg G_k(c_k-0) - \arg G_k(c_k+0),$$

причем под $\arg G(t)$ подразумевается мнимая часть выбранного значения $\ln G(t)$.

Особенными узлами (т. е. узлами, для которых α_k — целые числа) в нашем случае будут те, для которых отношение

$$\frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} \tag{83,8}$$

— действительное положительное число.

В частности, особенными узлами будут все узлы (в том числе и угловые точки), в которых функция $G(t)$ непрерывна, т. е. $G(c_k+0) = G(c_k-0)$; для этих последних узлов будем иметь, кроме того, $\beta_k = 0$.

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m \leqslant n)$ — все неособенные узлы. Каноническая функция $X(z)$ класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, $q \leqslant m$, дается формулой (78,10) при надлежащем подборе чисел λ_k. Эту формулу в нашем случае можно значительно упростить при помощи надлежащего выбора значений функции $\ln G(t)$ на отдельных участках линии L; а именно, можно добиться того, чтобы все числа λ_k, за исключением одного, были равны нулю.

Действительно, пусть c — какая-либо точка линии L, в которой функция $G(t)$ непрерывна (если среди узлов имеются такие точки, то в качестве c можно взять одну из них). Точку c мы причислим к узлам линии L.

Выбрав в качестве $G(c+0)$ какое-либо определенное значение, будем перемещать точку t, начиная с положения c, в положительном направлении, изменяя $\ln G(t)$ непрерывно, пока не дойдем до первого узла c_k; при этом мы получим вполне определенное значение для $\ln G(c_k-0)$. Перейдя же через точку c_k, зафиксируем значение $\ln G(c_k+0)$ согласно следующему правилу:

$$
\begin{aligned}
0 < \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} < 1 \text{ для } k=1,\ 2,\ \ldots,\ q,&\\
-1 < \alpha_k = \frac{1}{2\pi} \arg \frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} < 0 \text{ для остальных неособенных узлов,}&\quad (83{,}9)\\
\alpha_k = \arg \frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} = 0 \text{ для особенных узлов.}&
\end{aligned}
$$

Продолжая, далее, двигаться в положительном направлении по L и выбирая при переходе через встречаемые узлы значения $\ln G(t)$ согласно только что указанному правилу, мы получим, вернувшись к исходной точке c, вполне определенные значения для этой функции на всех участках, на которые разбивается линия L точками c_k и c.

Положим, наконец,

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}[\ln G(c-0) - \ln G(c+0)] = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L, \qquad (83{,}10)$$

где символ $[\quad]_L$ обозначает приращение выражения, заключенного в скобки, при обходе всего контура в положительном направлении и при соблюдении указанного выше правила (83,9). Очевидно, что $\varkappa$ — целое число.

Имея в виду получить каноническую функцию $X(z)$ класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, воспользуемся формулой (78,10), которую для нашего случая следует переписать так:

$$X(z) = (z-c)^{\lambda}(z-c_1)^{\lambda_1} \ldots (z-c_n)^{\lambda_n} e^{\gamma(z)},$$

ибо мы включили точку c в число узлов; через λ обозначено целое число, соответствующее узлу c так, как числа λ_k соответствуют узлам c_k.

Очевидно, далее, что вследствие выбора чисел α_k согласно (83,9) мы должны положить $\lambda_k = 0$, $k = 1, 2, \ldots, n$. Число α, соответствующее узлу c (так, как числа α_k соответствуют узлам c_k), дается формулой

$$\alpha = \frac{1}{2\pi}[\arg G(c-0) - \arg G(c+0)];$$

поэтому $\lambda = -\varkappa$.

Следовательно, для $X(z)$ будем иметь следующую простую формулу:

$$X(z) = (z-c)^{-\varkappa} e^{\gamma(z)}, \qquad (83{,}11)$$

где, согласно формуле (78,5),

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\ln G(t)}{t-z}, \qquad (83{,}12)$$

причем значение $\ln G(t)$ выбирается согласно указанному выше правилу.

Введенное выше целое число $\varkappa$ является, очевидно, индексом данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$.

Если, в частности, функция $G(t)$ принадлежит на L классу H (а не только классу H_0), то все «узлы» (в том числе и угловые точки) будут особенными. Под $\ln G(t)$ в этом случае следует подразумевать любое значение, непрерывное на всем контуре L, из которого исключена точка c.

В § 35 (замечание 2) мы вывели формулу (35,19) для случая, когда L — простой замкнутый гладкий контур, а функция $G(t)$ удовлетворяет условию H на L; эта формула в точности совпадает с формулой

(83,11), и мы видим, таким образом, что наличие угловых точек не изменяет результата.

Формула (35,19) эквивалентна формуле (35,6A) или (35,6B), в зависимости от положительного направления, выбранного на L.

Легко видеть, что и формулу (83,11) можно заменить формулами, вполне аналогичными формулам (35,6A) или (35,6B), в зависимости от того, какое положительное направление выбрано на L. А именно, если, как в § 35, п. 2°, мы обозначим через S^+ и S^- части плоскости, которые остаются соответственно слева или справа при движении по L в положительном направлении, и назовем случаем A тот, когда область S^+ конечна, а случаем B — тот, когда область S^+ бесконечна, то будем иметь для канонической функции $X(z)$ данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ выражения

$$X(z)=\begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^+ \\ (z-a)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^- \end{cases} \quad \text{в случае } A, \tag{83,13A}$$

$$X(z)=\begin{cases} (z-a)^{-\varkappa}e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^+ \\ e^{\Gamma(z)} & \text{при } z\in S^- \end{cases} \quad \text{в случае } B, \tag{83,13B}$$

где a — произвольно взятая постоянная точка внутри контура L, а

$$\Gamma(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}, \tag{83,14}$$

причем

$$\left.\begin{aligned} G_0(t)&=(t-a)^{-\varkappa}G(t) \text{ в случае } A,\\ G_0(t)&=(t-a)^{\varkappa}G(t) \text{ в случае } B. \end{aligned}\right\} \tag{83,15}$$

Эти формулы имеют точно такой же вид, как и формулы, выведенные в § 35, п. 2°. Существенного дополнения требует лишь правило выбора значения $\ln G_0(t)$. А именно, в нашем случае мы должны считать:

$$\ln G_0(t)=\mp\varkappa\ln(t-a)+\ln G(t), \tag{83,16}$$

где $\ln G(t)$ определяется согласно приведенному выше правилу, выражаемому формулами (83,9) и предшествующим текстом, причем в качестве точки c можно взять любую обыкновенную точку линии L, и где под $\ln(t-a)$ подразумевается любое значение, непрерывно изменяющееся на контуре L, из которого исключена точка c; верхний знак соответствует случаю A, нижний — случаю B.

В справедливости приведенных формул можно убедиться, переходя от этих формул к формуле (83,11), точно так же как мы перешли в § 35 (замечание 2) от формул (35,6A), (35,6B) к формуле (35,19). Можно также вывести формулы (83,13A), (83,13B) непосредственно, следуя пути, указанному в § 35, п. 2°, с очевидными дополнениями[1]), что мы предоставляем читателю.

Замечание 1. При постановке задачи сопряжения

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t) \tag{*}$$

мы отказались от требования, чтобы предыдущее граничное условие выполнялось также в узлах; такое требование в общем случае даже не имело бы смысла, так как понятия граничных значений $\Phi^+(c)$, $\Phi^-(c)$ слева и справа не имеют смысла в случае, когда c — узел общего вида.

---

[1]) Такой вывод был дан в первом издании настоящей книги (§ 85). Здесь же мы начали с вывода формулы (83,11) лишь с целью показать, что она непосредственно вытекает из формул для общего случая.

Однако если данный узел представляет собой угловую точку, т. е. в этом узле соединяются концы лишь двух гладких дуг, то понятие граничных значений слева и справа в этом узле определяется совершенно естественно, как в случае гладкой линии; следует лишь считать, что положительные направления дуг, имеющих общим концом данную точку, таковы, что одна из этих дуг является входящей, а другая — исходящей.

В этом случае имеют место формулы, аналогичные формулам Сохоцкого — Племеля; формулы эти даны в Добавлении II в конце книги. Пользуясь ими, легко показать, что построенные нами выше решения однородной и неоднородной задач сопряжения удовлетворяют граничному условию (*) и в угловых точках, если в окрестности этих точек функции $G(t)$ и $g(t)$ принадлежат классу H и если, как всегда, $G(t) \neq 0$.

На доказательстве (весьма простом) мы останавливаться здесь не будем, так как в дальнейшем не будем пользоваться указанным предложением.

3°. Перенесение предыдущих результатов на случай, когда граничная линия — бесконечная прямая D, никаких затруднений не представляет. Проще всего сделать это приведением к случаю, когда граничная линия — окружность L, как в § 38; мы применяем здесь обозначения упомянутого параграфа.

Никакие новые определения нам не понадобятся, кроме тех, которые естественно переносятся на наш случай путем преобразования $(z+i) = -(\zeta+i)^{-1}$. В частности, если мы отнесем бесконечно удаленную точку прямой D к числу узлов, то условие, которое мы наложили на поведение кусочно-голоморфных функций $\Phi(z)$ вблизи узлов, переходит для бесконечно удаленного узла в условие

$$|\Phi(z)| < \mathrm{const}\cdot|z|^{\alpha}, \quad \alpha = \mathrm{const} < 1, \tag{83,17}$$

для больших $|z|$.

Перенесение на наш случай понятий особенных и неособенных узлов (среди которых теперь может быть и бесконечно удаленная точка), понятия классов функций, заданных на граничной линии (§ 82), настолько очевидно, что мы на этом останавливаться не будем.

Заметим еще, что здесь, применяя формулу (38,11), мы будем брать первое выражение для правой части, т. е. писать:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{f(\tau)\,d\tau}{\tau-\zeta} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{z+i}{t+i}\,\frac{f(t)\,dt}{t-z} = \frac{z+i}{2\pi i}\int\limits_D \frac{f(t)}{t+i}\,\frac{dt}{t-z}, \tag{83,18}$$

ибо в нашем случае мы будем встречаться с функциями $f(t)$, которые могут иметь разрыв при $t = \pm\infty$, вследствие чего интегралы во втором выражении могут потерять смысл (даже как главные значения).

Вследствие почти полной аналогии со сказанным в § 38 и в предыдущем пункте настоящего параграфа, мы ограничимся приведением окончательных формул с некоторыми замечаниями.

Будем считать, что функции $G(t)$ и $g(t)$ принадлежат классу H_0 на D при узлах $c_1, c_2, \ldots, c_n$ (среди которых может быть и бесконечно удаленная точка), а пусть $G(t)$ нигде на D в нуль не обращается.

Пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — все неособенные узлы. Выберем значения $\ln G(t)$ согласно формуле (83,9), взяв в качестве начальной точки c обхода линии D какую-либо ее точку, отличную от узлов, и производя обход от c до $+\infty$, а затем от $-\infty$ до c [1]). Если бесконечно удаленная точка

[1]) См. замечание в конце параграфа.

принадлежит к числу узлов, то для этой точки под $G(c_k - 0)$ и $G(c_k + 0)$ следует соответственно подразумевать $G(+\infty)$ и $G(-\infty)$. Индекс класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ определится формулой

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_D, \tag{83,19}$$

где под $[\ln G(t)]_D$ следует подразумевать приращение $\ln G(t)$ при указанном выше обходе прямой D [1]).

При этих условиях каноническая функция класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ определяется, с точностью до произвольного, отличного от нуля множителя, формулой

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^+, \\ \left(\frac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^-, \end{cases} \tag{83,20}$$

где

$$\Gamma(z) = \frac{z+i}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\ln G_0(t)\,dt}{(t+i)(t-z)}, \quad G_0(t) = \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa} G(t), \tag{83,21}$$

причем под

$$\ln G_0(t) = \varkappa \ln\frac{t+i}{t-i} + \ln G(t)$$

следует подразумевать то значение, которое получим, если будем определять $\ln G(t)$ согласно указанным выше условиям, а под $\ln\frac{t+i}{t-i}$ будем подразумевать ветвь, непрерывно изменяющуюся на D (включая бесконечно удаленную точку), за исключением точки c.

Общее решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ задачи сопряжения дается формулой

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int\limits_D \frac{z+i}{t+i}\,\frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)} + X(z)\,Q(z), \tag{83,22}$$

где $Q(z)$ — многочлен вида

$$Q(z) = C_0 + C_1\frac{z-i}{z+i} + \ldots + C_l\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^l, \tag{83,23}$$

$C_0, C_1, \ldots, C_l$ обозначают произвольные постоянные.

При $\varkappa \geqslant -1$ всегда существуют решения, ограниченные всюду, кроме, быть может, окрестностей узлов $c_{q+1}, \ldots, c_m$ и особенных узлов [2]); эти решения даются формулой (83,22) при $l = \varkappa$; если $\varkappa = -1$, то следует считать $Q(z) = 0$.

При $\varkappa < -1$ такие решения существуют лишь при соблюдении условий

$$\int\limits_D \left(\frac{t-i}{t+i}\right)^k \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t+i)^2} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa-2; \tag{83,24}$$

при соблюдении этих условий решение (единственное) дается формулой (83,22) при $Q(z) = 0$.

З а м е ч а н и е 2. Если бесконечно удаленная точка не является точкой разрыва, т. е. если $G(-\infty) = G(+\infty)$, $g(-\infty) = g(+\infty)$, то

---

[1]) См. замечание в конце параграфа.

[2]) В окрестностях особенных узлов все решения почти ограничены.

предыдущим формулам можно придать такой же внешний вид, как в случае непрерывных коэффициентов (§ 38).

Действительно, если бесконечно удаленная точка не является узлом, то мы можем взять ее в качестве начальной точки c обхода линии D, производя обход от $t = -\infty$ до $t = +\infty$. Тогда будем иметь:

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_{-\infty}^{+\infty}, \tag{83,19a}$$

значения $\ln G(t)$ должны при этом выбираться согласно указанному выше правилу.

Далее, функция $\ln G_0(t)$ будет удовлетворять условию H в окрестности бесконечно удаленной точки, вследствие чего мы можем написать:

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\ln G_0(t)\,dt}{t+i},$$

так как оба последние интеграла существуют (в смысле главного значения по Коши). Отбрасывая последнее (постоянное) слагаемое, мы можем считать, что в формулах (83,20)

$$\Gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_D \frac{\ln G_0(t)\,dt}{t-z}; \tag{83,21a}$$

это изменит $X(z)$ лишь на постоянный, отличный от нуля множитель.

Таким образом, мы получим формулы, имеющие точно такой же вид, как и формулы (38,2), (38,12), (38,13).

Аналогично, в нашем случае формулу (83,22) можно записать в таком же виде, что и формулу (38,14).

Все сказанное выше, кроме сказанного в последнем абзаце, остается, очевидно, в силе, если функция $g(t)$ имеет разрыв на бесконечности, т. е. если $g(-\infty) \neq g(+\infty)$.

§ 84. Один прием, облегчающий построение канонических функций.

1°. Вычисление канонической функции можно иногда значительно упростить, пользуясь следующим обстоятельством [1]), которым мы уже воспользовались в § 35 для частного случая, когда L состоит из гладких замкнутых контуров.

Именно, пусть кусочно-гладкая линия L разбита нами на несколько также кусочно-гладких линий $L_1, L_2, \ldots, L_p$, не имеющих друг с другом общих узлов (к узлам причисляются также все точки разрыва функции $G(t)$), и пусть $X_k(z)$ — каноническая функция определенного класса, построенная в предположении, что граничная линия состоит лишь из L_k. Тогда, как легко видеть (ср. § 35, п. 4°), функция

$$X(z) = X_1(z)\,X_2(z)\,\ldots\,X_p(z) \tag{84,1}$$

представляет собой каноническую функцию определенного класса при граничной линии L.

Ясно также, как следует выбрать классы канонических функций $X_1(z), \ldots, X_p(z)$ для того, чтобы получить каноническую функцию $X(z)$ данного класса.

Пользуясь указанным выше обстоятельством, легко, например, построить каноническую функцию для случая, когда L состоит из конеч-

---

[1]) Ср. W. J. Trjitzinsky [1].

ного числа простых замкнутых кусочно-гладких контуров, не имеющих общих точек, при помощи решения, данного в п. 2° предыдущего параграфа для случая, когда L — простой кусочно-гладкий контур.

Легко тем же путем построить каноническую функцию для случая, когда L состоит из конечного числа замкнутых контуров и разомкнутых дуг, не имеющих общих точек. Для этого достаточно воспользоваться формулами, данными в пп. 1°, 2° предыдущего параграфа.

2°. Если, в противоположность принятому условию, кусочно-гладкие части $L_1, L_2, \ldots, L_p$, на которые мы разбили линию L, имеют общими некоторые узлы, то может оказаться, что функция $X(z)$, определяемая формулой (84,1), не удовлетворяет условиям (78,2), (78,3) в окрестностях некоторых узлов $c_1, c_2, \ldots, c_l$ и поэтому не является канонической. Очевидно, однако, что всегда можно подобрать целые числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_l$, так, чтобы функция

$$(z-c_1)^{\lambda_1}\ldots(z-c_l)^{\lambda_l}X(z)$$

была канонической.

Таким образом, мы можем воспользоваться указанным выше приемом и в том случае, когда линии $L_1, L_2, \ldots, L_p$ имеют общими некоторые узлы.

II. Задача обращения интегралов типа Коши в общем случае

В этом отделе мы даем в качестве одного из простейших приложений предыдущих результатов решение задачи обращения интеграла типа Коши в общем случае, когда путь интегрирования — произвольная кусочно-гладкая линия. Приводимые ниже результаты представляют собой, с одной стороны, обобщение известных результатов, касающихся обращения интеграла типа Коши, когда путь интегрирования представляет собой отрезок действительной оси, т. е. результатов, касающихся решения интегрального уравнения

$$\int_{-a}^{+a}\frac{\varphi(x)\,dx}{x-x_0}=f(x_0),$$

где $f(x)$ — заданная, а $\varphi(x)$ — искомая функции действительной переменной x.

Это уравнение, представляющее собой одно из простейших сингулярных уравнений, играет важную роль в теории тонкого крыла самолета, и поэтому им занимались многие авторы[1]).

Решение для более общего случая, когда линия интегрирования состоит вместо одного отрезка прямой[2]) из (конечного числа) гладких разомкнутых дуг, т. е. является прерывистой гладкой линией, было дано автором в статье [6]; это решение приводится в §§ 86—88.

---

[1]) См., например, Л. И. Седов [2], М. В. Келдыш и М. А. Лаврентьев [2], K. Schröder [1], H. Söhngen [1], [2], J. Weissinger [1], F. Tricomi [3], [6], K. Nickel [2], J. Elliott [1].

[2]) H. Söhngen [1] дает также решение (весьма сложным способом) для случая двух отрезков действительной оси. Другое решение для случая, когда путь интегрирования состоит из конечного числа отрезков действительной оси, дано в статье K. Nickel [2].

С весьма общей точки зрения вопрос обращения интеграла типа Коши для случая, когда путь интегрирования состоит из конечного или счетного множества отрезков прямой, рассмотрен в статье Н. И. Ахиезера [1]. Случай счетного множества отрезков прямой рассмотрен также С. А. Фрейдкиным [1].

Обобщение на случай, когда линия интегрирования может пересекать сама себя и иметь угловые точки, было дано позднее в статье W. J. Trjitzinsky [1], однако результат представлен у этого автора в весьма сложном и незаконченном виде; между тем применение изложенных в предыдущем отделе результатов позволяет получить, почти без всякого труда, вполне законченное и чрезвычайно простое решение (см. § 90).

Решение задачи обращения сводится, как мы увидим, к решению одной из простейших задач сопряжения, с которой мы и начнем. Для большей наглядности мы рассмотрим сначала случай, когда путь интегрирования представляет собой прерывистую гладкую линию, а к общему случаю перейдем после.

§ 85. Решение задачи $\Phi^+ + \Phi^- = g$ в случае прерывистой гладкой граничной линии. 1°. Задача, о которой только что говорилось и решение которой даст нам возможность сразу решить задачу обращения интеграла типа Коши, представляет собой частный случай задачи сопряжения, а именно, случай, когда коэффициент $G(t) = -1$.

Таким образом, наша задача состоит в определении кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$, имеющей конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = g(t) \quad \text{на } L, \tag{85,1}$$

где $g(t)$ — заданная на L функция. Мы будем считать здесь и в следующих параграфах (вплоть до § 88), что L — гладкая прерывистая линия, т. е. что L состоит из гладких разомкнутых дуг $L_k = a_k b_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$, не имеющих общих точек; мы будем считать, как всегда, что положительное направление на L_k ведет от a_k к b_k.

В дальнейшем через $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$ мы будем обозначать концы a_k, b_k, перенумерованные в каком-нибудь порядке.

Плоскость, разрезанную вдоль линии L, мы будем обозначать через S.

Каноническую функцию данного класса, т. е. каноническое решение данного класса однородной задачи сопряжения

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0 \quad \text{на } L \tag{85,2}$$

можно сразу получить по общим формулам § 78 или § 83, п. 1°; предоставляя провести соответствующие (совершенно элементарные) выкладки читателю (такие выкладки будут проведены нами в § 89 для общего случая), заметим, что, как показывает непосредственная проверка, каноническую функцию класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ дает следующая формула:

$$X(z) = C\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} = C\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{85,3}$$

где C — произвольно фиксированная постоянная, отличная от нуля,

$$R_1(z) = \prod_{k=1}^{q}(z - c_k), \quad R_2(z) = \prod_{k=q+1}^{2p}(z - c_k), \tag{85,4}$$

а под радикалом

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} \tag{*}$$

подразумевается какая-либо ветвь, голоморфная в S, т. е. на разрезанной вдоль L плоскости.

Так как нам часто придется иметь дело с таким радикалом, условимся раз навсегда в следующем. Под указанным радикалом мы всегда будем подразумевать ветвь, голоморфную в S, разложение которой в окрестности бесконечно удаленной точки по убывающим степеням z имеет вид

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}=z^{q-p}+A_1 z^{q-p-1}+A_2 z^{q-p-2}+\ldots \tag{85,5}$$

Радикалы $\sqrt{R_1(z)}$ и $\sqrt{R_2(z)}$ нам будут встречаться лишь в отношениях

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}, \quad \frac{\sqrt{R_2(z)}}{\sqrt{R_1(z)}}. \tag{**}$$

Под первым из этих отношений мы будем всегда подразумевать то же, что под радикалом (*), а под вторым — обратную величину радикала (*). Наконец, граничное значение, принимаемое радикалом (*) на L слева, мы будем обозначать просто через

$$\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}} \quad \text{или} \quad \frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}},$$

так что по определению

$$\left[\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\right]^+=\left[\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}\right]^+=\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}=\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}; \tag{85,6}$$

очевидно, далее, что

$$\left[\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\right]^-=-\left[\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}\right]^+=-\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}. \tag{85,7}$$

Из выражения (85,3) для канонического решения класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ следует, что индекс этого класса

$$\varkappa=p-q, \tag{85,8}$$

ибо порядок $X(z)$ на бесконечности равен $q-p$. Ясно также, что все узлы (в нашем случае концы) неособенные.

Каноническая функция $X_0(z)$ самого обширного класса h_0, очевидно, будет $(q=0)$:

$$X_0(z)=\frac{C}{\sqrt{R(z)}}, \tag{85,9}$$

где C — постоянная,

$$R(z)=\prod_{k=1}^{2p}(z-c_k)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j); \tag{85,10}$$

индекс класса h_0

$$\varkappa_0=p. \tag{85,11}$$

Каноническая функция $X_{2p}(z)$ самого узкого класса $h_{2p}=h(c_1, \ldots, c_{2p})$ есть

$$X_{2p}(z)=C\sqrt{R(z)}, \tag{85,12}$$

и соответствующий индекс

$$\varkappa_{2p}=-p. \tag{85,13}$$

Если $q=p$, то индекс соответствующего класса будет равен нулю. Примером канонической функции с индексом нуль является решение класса $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$

$$X_a(z)=C\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}, \tag{85,14}$$

где C — постоянная,

$$R_a(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-a_k), \quad R_b(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-b_k). \tag{85,15}$$

2°. В соответствии со сказанным, на основании результата § 80, общее решение класса $h(c_1, \ldots, c_q)$ неоднородной задачи (85,1), имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,g(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}Q(z), \tag{85,16}$$

где $Q(z)$ — произвольный полином.

Для решений же класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, исчезающих на бесконечности, получаем следующий результат:

при $\varkappa=p-q\geqslant 0$ решения класса $h(c_1, \ldots, c_q)$, исчезающие на бесконечности, всегда существуют и даются формулой

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,g(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}Q_{p-q-1}(z), \tag{85,17}$$

где $Q_{p-q-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $p-q-1$ ($Q_{p-q-1}(z)=0$ при $p=q$);

при $\varkappa=p-q<0$ решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, исчезающее на бесконечности, существует тогда и только тогда, когда $g(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,t^k g(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}}=0, \quad k=0, 1, \ldots, q-p-1; \tag{85,18}$$

оно единственно и дается формулой (85,17) *при* $Q_{p-q-1}(z)=0$.

Замечание 1. В соответствии с § 80, п. 4° общее решение данного класса можно представить и формулами, несколько отличными от (85,16). Например, общее решение класса h_0, исчезающее на бесконечности, можно представить, очевидно, в виде

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,g(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{Q_{p-1}(z)}{\sqrt{R(z)}}, \tag{85,19}$$

где $R_1(z)$, $R_2(z)$ и $R(z)$ обозначают то же, что в формулах (85,4), (85,10), причем теперь следует считать $q\leqslant p$ для того, чтобы обеспечить соблюдение условия $\Phi(\infty)=0$.

Замечание 2. Легко видеть (ср. замечание в конце п. 2° § 83), что все предыдущие результаты и формулы остаются в силе, если считать, что дуги $L_k=a_kb_k$, составляющие L, имеют конечное число угловых точек, т. е. являются простыми кусочно-гладкими разомкнутыми дугами, не имеющими общих точек (в том числе и концов).

Замечание 3. Легко видеть (см. § 82), что полученные результаты остаются в силе и тогда, когда заданная функция $g(t)$ принадлежит классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$.

§ 86. Обращение интеграла типа Коши в случае гладкой прерывистой линии интегрирования. 1°. Поставим себе задачу решить сингулярное интегральное уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0) \quad \text{на} \quad L, \tag{86,1}$$

где $L = L_1 + L_2 + \ldots + L_p$ — совокупность гладких разомкнутых дуг, не имеющих общих точек, как в § 85, $f(t)$ — заданная и $\varphi(t)$ — искомая функции точки t на L. Мы будем считать, что $f(t)$ принадлежит классу H, а искомая функция $\varphi(t)$ — классу H^*.

Предполагается, что условие (86,1) должно быть удовлетворено для всех t_0 на L, кроме, быть может, концов.

Уравнение (86,1) представляет частный случай сингулярного интегрального уравнения, которое будет подробно изучено в следующей главе. Мы рассматриваем его здесь независимо, так как оно представляет значительный самостоятельный интерес (см. введение к этому отделу), а его теория проще общей.

Введем в рассмотрение кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{86.2}$$

исчезающую на бесконечности. Тогда

$$\Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} \tag{86,3}$$

и, следовательно, уравнение (86,1) эквивалентно задаче

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = f(t) \quad \text{на} \quad L \tag{86,4}$$

при добавочном условии $\Phi(\infty) = 0$.

Найдя $\Phi(z)$, мы найдем и $\varphi(t)$ по формуле

$$\varphi(t) = \Phi^+(t) - \Phi^-(t). \tag{86,5}$$

Задача (86,4) нами уже решена в предыдущем параграфе; самое общее ее решение (т. е. решение класса h_0), исчезающее на бесконечности, можно представить в виде (§ 85, замечание 1)

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\,f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)} + \frac{Q_{p-1}(z)}{\sqrt{R(z)}}, \tag{86,6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} R_1(z) &= \prod_{k=1}^{q}(z-c_k), \quad R_2(z) = \prod_{k=q+1}^{2p}(z-c_k),\\ R(z) &= \prod_{k=1}^{p}(z-a_k)(z-b_k) = R_1(z)\,R_2(z), \end{aligned}\right\} \tag{86,7}$$

причем $q \leqslant p$.

Общее же решение $\varphi(t)$ исходного интегрального уравнения мы получим по формуле (86,5). Вспоминая формулу (85,7) и применяя формулу Сохоцкого — Племеля (16,4), получим:

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_2(t_0)}}\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\,f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)} + \frac{P_{p-1}(t_0)}{\sqrt{R(t_0)}}. \tag{86,8}$$

Из предыдущей формулы вытекает следующее свойство решения уравнения (86,1): *если какое-либо решение (класса H^*) интегрального уравнения* (86,1) *остается ограниченным в окрестности какого-либо конца* c_j, *то оно необходимо обращается на нем в нуль и принадлежит в окрестности этого конца классу* H.

В самом деле, всегда можно считать, что $z - c_j$ входит множителем в $R_1(z)$. Но тогда на основании сказанного в § 22 первое слагаемое правой части принадлежит классу H в окрестности c_j и обращается в нуль [1]) при $t_0 = c_j$. Далее, так как функция $\varphi(t_0)$ по условию ограничена вблизи c_j, то полином $P_{p-1}(t_0)$ необходимо делится на $t_0 - c_j$; после этого наше утверждение становится очевидным.

Подобно тому как мы разбили на классы решения задачи сопряжения, мы можем разбить на классы решения уравнения (86,1), относя к классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ все решения, которые остаются ограниченными вблизи концов $c_1, c_2, \ldots, c_q$; мы видели, что решения класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ будут необходимо принадлежать классу H в окрестностях этих концов (и обращаются в нуль на них); поэтому наше определение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ согласуется с определением § 82.

Поставим себе целью найти все решения данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ уравнения (86,1). Из предыдущего ясно, что всякому решению $\varphi(t)$ этого класса соответствует по формуле (86,2) решение $\Phi(z)$ одноименного класса задачи сопряжения (86,4); обратно, всякому решению $\Phi(z)$ класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ задачи сопряжения соответствует по формуле (86,5) решение одноименного класса уравнения (86,1).

Пользуясь теперь результатами § 85, легко приходим к следующим заключениям:

При $\varkappa = p - q \geqslant 0$ *решения уравнения* (86,1) *класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ *всегда существуют и даются формулой*

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, f(t)\, dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t - t_0)} + \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}} P_{p-q-1}(t_0), \tag{86,9}$$

где $P_{p-q-1}(t_0)$ — *произвольный полином степени не выше* $p - q - 1$ (*равный нулю при* $p = q$);

При $\varkappa = p - q < 0$ *решение* (*единственное*) *класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ *существует тогда и только тогда, когда* $f(t)$ *удовлетворяет условиям*

$$\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, t^k f(t)\, dt}{\sqrt{R_1(t)}} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, q - p - 1; \tag{86,10}$$

при соблюдении этих условий решение дается той же формулой (86,9) *при* $P_{p-q-1}(t_0) = 0$.

Полученный результат (86,9) можно назвать **ф о р м у л о й о б р а щ е н и я и н т е г р а л а**, фигурирующего в левой части (86,1).

Особо отметим формулу обращения, соответствующую классу $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$; в этом случае при обозначениях § 85 (формулы (85,15))

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R_a(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_b(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}\, f(t)\, dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t - t_0)}. \tag{86,11}$$

---

[1]) Это следует из формулы (22,8) при $\gamma = \frac{1}{2}$.

Легко видеть, что *все предыдущие результаты останутся в силе, если считать, что функция* $f(t)$, *вместо того чтобы принадлежать классу* H, *принадлежит классу* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, а решения ищутся в том же классе (ср. § 82, п. 3°).

Добавим, что в недавно появившейся работе В. Погожельского (W. Pogorzelski [3]) доказывается справедливость приведенных выше формул при несколько более общих предположениях.

2°. В ряде работ, опубликованных за последнее время: K. Nickel [2], F. Tricomi [3], H. Söhngen [2], а также в некоторых более ранних работах формула (86,8) получена в некоторых подклассах суммируемых функций при различных частных предположениях относительно линии L. В этом направлении за последнее время наиболее общие результаты получены в работах Б. В. Хведелидзе [11], [18] в случае, когда L — прерывистая линия Ляпунова. Из результатов этого автора непосредственно вытекает, что если в уравнении (86,1) правая часть $f(t)$ принадлежит классу H^*, то всякое решение этого уравнения, непрерывное на каждой закрытой части L, не содержащей концов, а на всей линии L интегрируемое в некоторой степени $p > 1$, принадлежит классу H^*.

§ 87. Некоторые видоизменения задачи обращения в случае гладкой прерывистой линии интегрирования[1]**.** Мы видели, что, вообще говоря, не существует решений уравнения (86,1), остающихся ограниченными вблизи всех концов. Однако нетрудно показать, что *уравнение*

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0) + P(t_0) \quad на \quad L, \tag{87,1}$$

где $f(t_0)$ *— заданная функция класса* H, *а* $P(t_0)$ *— полином степени не выше* $p-1$, *не задаваемый заранее, всегда имеет одно и только одно всюду ограниченное решение; при этом вполне определяется и полином* $P(t_0)$.

Напомним, что на основании сказанного в предыдущем параграфе всюду ограниченное решение необходимо принадлежит классу H.

Начнем с доказательства того, что если решение существует, то оно единственно. Это сводится к тому, что если

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = P(t_0), \tag{87,2}$$

где $\varphi(t)$ — функция класса H, а $P(t)$ — полином степени не выше $p-1$, то необходимо $\varphi(t) = 0$, $P(t) = 0$.

Докажем последнее утверждение. Если существует решение класса H уравнения (87,2), то оно необходимо дается, например, формулой (86,11)

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R_a(t_0)}}{\pi i\sqrt{R_b(t_0)}}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}\,P(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-t_0)}, \tag{87,3}$$

ибо эта формула дает не только все решения класса H, но и все решения класса H^*, ограниченные на концах a_j. Интеграл

$$J(t_0) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\,\frac{P(t)\,dt}{t-t_0}$$

[1]) Обобщение результатов этого параграфа на более широкие классы функций дано в работе Б. В. Хведелидзе [18].

легко вычисляется в конечном виде. В самом деле, положим

$$\Omega(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\frac{P(t)\,dt}{t-z},$$

где z обозначает точку, не расположенную на L. Тогда, очевидно, $J(t_0)=\Omega^+(t_0)+\Omega^-(t_0)$. С другой стороны, ясно, что

$$\Omega(z)=\frac{1}{4\pi i}\int_\Lambda \frac{\sqrt{R_b(t)}\,P(t)\,dt}{\sqrt{R_a(t)}\,(t-z)},$$

где Λ обозначает совокупность p замкнутых простых контуров Λ_k, охватывающих дуги L_k, обходящих их в направлении вращения часовой стрелки и настолько близких к ним, чтобы точка z находилась вне каждого из контуров Λ_k (рис. 19).

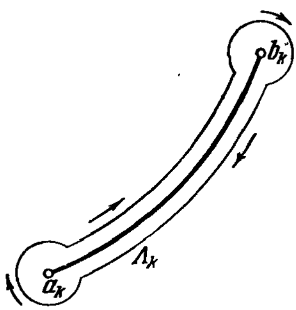

Рис. 19.

Применяя теорему Коши о вычетах[1]), получаем сразу

$$\Omega(z)=\frac{1}{2}\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}P(z)+\frac{1}{2}P^*(z),$$

где $P^*(z)$ — некоторый полином[2]) степени $p-1$, откуда, наконец,

$$J(t_0)=\Omega^+(t_0)+\Omega^-(t_0)=P^*(t_0)$$

и в силу формулы (87,3)

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R_a(t_0)}}{\sqrt{R_b(t_0)}}P^*(t_0).$$

Но так как по условию функция $\varphi(t)$ должна быть ограничена также и на концах b_k, то $P^*(b_k)=0$, $k=1, 2, \ldots, p$, откуда следует, что $P^*(t_0)=0$, а поэтому и $\varphi(t_0)=0$.

Легко теперь проверить непосредственной подстановкой в формулу (87,1), что (единственное) решение задачи (87,1), принадлежащее классу H, дается формулой

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)}, \tag{87,4}$$

где по-прежнему

$$R(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j),\quad \sqrt{R(t)}=\left[\sqrt{R(t)}\right]^+;$$

вместе с тем мы найдем определенное выражение и для полинома $P(t)$.

---

[1]) Мы пользуемся следующей простой формулой, непосредственно вытекающей из теоремы Коши о вычетах: если функция $f(z)$ голоморфна в области, состоящей из точек плоскости, находящихся вне контуров Λ_k, непрерывна вплоть до этих контуров и если, при больших $|z|$, $f(z)=P(z)+O(z^{-1})$, где $P(z)$ — полином, то при z, расположенном вне контуров Λ_k,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{f(t)\,dt}{t-z}=f(z)-P(z).$$

[2]) Этот полином определяется условием, что при больших $|z|$

$$\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}P(z)+P^*(z)=O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Положим с этой целью

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{87,5}$$

где под $\varphi(t)$ подразумевается выражение, определяемое формулой (87,4); тогда подлежащая проверке формула (87,1) примет вид

$$\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0)=f(t_0)+P(t_0), \tag{87,6}$$

где $P(t_0)$ — некоторый полином степени не выше $p-1$.

Для того чтобы вычислить $\Phi(z)$, положим еще

$$\Psi(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{2\pi i}\int_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-z)}. \tag{87,7}$$

Очевидно, будем иметь согласно (87,7) и (87,4)

$$\varphi(t)=\Psi^+(t)-\Psi^-(t),$$

и поэтому, как легко видеть,

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}=\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{\Psi(t)\,dt}{t-z},$$

где Λ обозначает то же, что выше. Подставляя сюда на место $\Psi(t)$ значение, получаемое из (87,7), имеем:

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{t-z}\,\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t_1)\,dt_1}{\sqrt{R(t_1)}\,(t_1-t)}=$$

$$=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(t_1)\,dt_1}{\sqrt{R(t_1)}}\,\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{(t-z)(t_1-t)}. \tag{87,8}$$

Применяя теперь теорему Коши о вычетах к внутреннему интегралу, получаем непосредственно[1]):

$$\frac{1}{2\pi i}\int_\Lambda \frac{\sqrt{R(t)}\,dt}{(t-z)(t_1-t)}=\frac{\sqrt{R(z)}}{t_1-z}+Q(z,t_1), \tag{87,9}$$

где $Q(z,t)$ обозначает полином степени $p-1$, определяемый условием, что при больших $|z|$

$$\frac{\sqrt{R(z)}}{z-t}=Q(z,t)+O\left(\frac{1}{z}\right).$$

Полином $Q(z,t)$ можно определить так: пусть $Q(z)$ обозначает полином степени p, определяемый условием, что при больших $|z|$

$$\sqrt{R(z)}=Q(z)+O\left(\frac{1}{z}\right); \tag{87,10}$$

тогда, очевидно,

$$Q(z,t)=\frac{Q(z)-Q(t)}{z-t}. \tag{87,11}$$

---

[1]) Ср. первую сноску на предыдущей странице; вспомним, что z находится вне контуров Λ_k, а t_1 — внутри одного из них.

Подставляя (87,9) в (87,8), получаем, наконец,

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{2\pi i}\int_L \frac{f(t_1)\,dt_1}{\sqrt{R(t_1)}\,(t_1-z)}+\frac{1}{2}P(z),$$

где $P(z)$ обозначает определенный полином степени не выше $p-1$, а именно

$$P(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{f(t)\,Q(z,t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}. \tag{87,12}$$

Из предыдущего выражения для $\Phi(z)$ непосредственно следует, что условие (87,6) выполнено.

Таким образом, наше утверждение доказано; вместе с тем мы получили определенное выражение (87,12) для полинома $P(z)$.

Это последнее выражение позволяет установить (иным путем, чем это было сделано в § 86 для более общего случая) необходимые и достаточные условия существования решения уравнения

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0),$$

остающегося ограниченным на всех концах; мы считаем по-прежнему, что $f(t)$ принадлежит классу H.

Условие это, очевидно, заключается в том, чтобы

$$\int_L \frac{f(t)\,Q(z,t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}\equiv 0, \tag{87,13}$$

где

$$Q(z,t)=Q_0(t)\,z^{p-1}+Q_1(t)\,z^{p-2}+\ldots+Q_{p-1}(t),$$

а $Q_k(t)$ — определенные полиномы, легко вычисляемые на основании (87,10) и (87,11). В частности, очевидно, что $Q_0(t)=1$ и что, вообще, старший член полинома $Q_k(t)$ равен t^k. Отсюда следует, что система функций $Q_0(t)$, $Q_1(t)$, $\ldots$, $Q_{p-1}(t)$ эквивалентна системе 1, t, t^2, $\ldots$, t^{p-1} в том смысле, что функции каждой из этих систем суть линейные комбинации функций другой.

Условие (87,13), очевидно, эквивалентно p условиям

$$\int_L \frac{Q_k(t)\,f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}=0,\quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1,$$

или, на основании только что сказанного, p условиям более простого вида

$$\int_L \frac{t^k f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}=0,\quad k=0,1,\ldots,p-1. \tag{87,14}$$

Этот результат представляет собой, как было уже сказано, частный случай результата, полученного в § 86 иным путем.

Отметим особо частный случай $p=1$. В этом случае полином $P(t)$ сводится к постоянной, и мы имеем следующий результат.

Пусть требуется найти на разомкнутой дуге ab функцию $\varphi(t)$ класса H и постоянную C такие, чтобы имело место равенство

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)+C, \tag{87,15}$$

где $f(t)$ — заданная на ab функция класса H.

Решение (единственное) дается формулами

$$\varphi(t_0)=\frac{\sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}}{\pi i}\int_{ab}\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}\,(t-t_0)}, \tag{87,16}$$

$$C=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(t-b)}}. \tag{87,17}$$

§ 88. Продолжение. Задача (87,15) предыдущего параграфа представляет собой частный случай задачи (87,1) того же параграфа. Первую задачу можно обобщить и в другом направлении, а именно, решить такую задачу:

Найти функцию $\varphi(t)$ класса H и постоянные C_k по условию

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)+C_k \quad \text{при } t_0\in L_k,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ p, \tag{88,1}$$

где $f(t)$ — заданная функция класса H.

Докажем, прежде всего, что задача не может иметь больше одного решения, т. е. что если

$$\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=C_k \quad \text{при } t_0\in L_k,\ k=1,\ \ldots,\ p, \tag{88,2}$$

то необходимо $\varphi(t)=0$, $C_k=0$. В самом деле, пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет предыдущему условию. Положим

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{88,3}$$

В силу (88,2) на L_k мы будем иметь $\Phi^+(t)+\Phi^-(t_0)=C_k$, т. е.

$$\Phi^+(t_0)-\frac{C_k}{2}=-\left[\Phi^-(t_0)-\frac{C_k}{2}\right],$$

откуда, очевидно, следует, что функция

$$\Psi(z)=\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}\left[\Phi(z)-\frac{C_k}{2}\right]$$

голоморфна в некоторой окрестности дуги L_k (включая саму эту дугу) и обращается в нуль в точках a_k, b_k. Поэтому $\Psi(z)=(z-a_k)(z-b_k)\,\Psi_0(z)$, где $\Psi_0(z)$ голоморфна в окрестности дуги L_k. Таким образом, вблизи L_k

$$\Phi(z)-\frac{C_k}{2}=\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}\,\Psi_0(z)$$

и, следовательно,

$$\Phi'(z)=\frac{\Omega(z)}{\sqrt{(z-a_k)(z-b_k)}},$$

где $\Omega(z)$ голоморфна в окрестности L_k. Из предыдущего следует, что функция

$$\Phi'(z)\sqrt{R(z)}=P(z)$$

голоморфна на всей плоскости. Так как, далее, $P(z)=O(z^{p-2})$ при больших $|z|$, то $P(z)$ — полином степени не выше $p-2$. Для $\Phi(z)$

мы получаем, таким образом, выражение

$$\Phi(z)=\int_{\infty}^{z}\frac{P(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}, \tag{88,4}$$

где интегрирование производится по любому пути, не пересекающему L. Мы знаем, кроме того, что $\Phi(z)$ голоморфна (и, следовательно, однозначна) на всей плоскости, разрезанной вдоль L. Отсюда можно заключить, что $\Phi(z)=0$.

В самом деле, принимая во внимание однозначность функции $\Phi(z)$ на разрезанной плоскости, легко выводим из представления (88,4), что $\Phi(z)$ принимает вполне определенные конечные значения $\Phi(a_k)$, $\Phi(b_k)$ на концах a_k, b_k и что если Λ_k обозначает замкнутый контур, охватывающий дугу L_k, бесконечно близкий к ней и обходящий ее в направлении движения часовой стрелки, то

$$0=\int_{\Lambda_k}\frac{P(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}=2\int_{L_k}\frac{P(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}=2\,[\Phi(b_k)-\Phi(a_k)],$$

так что если положить

$$\Phi(z)=u+iv,$$

то необходимо $u(a_k)=u(b_k)$, $v(a_k)=v(b_k)$. Рассмотрим, далее, интеграл

$$J=\int_{\Lambda}u\,dv,$$

где Λ — совокупность контуров Λ_k. Имеем, очевидно,

$$J=\int_{L}(u^+\,dv^+-u^-\,dv^-).$$

Но из соотношения $\Phi^++\Phi^-=C_k=\alpha_k+i\beta_k$ следует:

$$u^++u^-=\alpha_k,\quad dv^-=-dv^+,$$

и поэтому

$$J=\int_{L}(u^++u^-)\,dv^+=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\int_{L_k}dv^+=\sum_{k=1}^{p}\alpha_k\,[v(b_k)-v(a_k)]=0.$$

С другой стороны,

$$J=\int\int\left[\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2+\left(\frac{\partial u}{\partial y}\right)^2\right]dx\,dy,$$

где двойной интеграл берется по всей разрезанной плоскости. Отсюда заключаем, что $\Phi(z)=u+iv=0$. Следовательно, необходимо $\varphi(t)=0$, и наше утверждение доказано.

Перейдем теперь к решению задачи (88,1). Формула (87,14) предыдущего параграфа дает необходимые и достаточные условия, которым должны удовлетворять постоянные C_k для того, чтобы уравнение (88,1) допускало решение класса H. Условия эти напишутся так:

$$\sum_{k=1}^{p}a_{jk}C_k+A_j=0\quad(j=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1), \tag{88,5}$$

где

$$a_{jk}=\int_{L_k}\frac{t^j\,dt}{\sqrt{R(t)}},\quad A_j=\int_{L}\frac{t^jf(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}. \tag{88,6}$$

Определитель матрицы $\| a_{jk} \|$ отличен от нуля, ибо в противном случае однородная система, получаемая из (88,5) при $f(t) = 0$ имела бы ненулевое решение $C_1, C_2, \ldots, C_p$ и, значит, задача (88,2) имела бы ненулевое решение, что невозможно.

Поэтому система (88,5) всегда имеет определенное решение. Это решение имеет, очевидно, следующий вид:

$$C_k = \int_L \frac{\omega_k(t) f(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}}, \tag{88,7}$$

где $\omega_k(t)$ — определенные полиномы степени не выше $p-1$, коэффициенты которых зависят лишь от вида линии L[1]); легко видеть, что полиномы $\omega_k(t)$ линейно независимы.

После того как постоянные C_k определены, мы можем найти функцию $\varphi(t)$ по формуле (87,4) предыдущего параграфа, которая дает в нашем случае

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \int_L \frac{f(t)\, dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)} + \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \sum_{k=1}^{p} C_k \int_{L_k} \frac{dt}{\sqrt{R(t)}\,(t-t_0)}, \tag{88,8}$$

где под C_k следует понимать выражения (88,7).

Внося эти выражения в (88,8), получаем формулу обращения[2])

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi i} \int_L \frac{f(t)}{\sqrt{R(t)}} \left\{ \frac{1}{t-t_0} + \sum_{k=1}^{p} \omega_k(t) \int_{L_k} \frac{d\tau}{\sqrt{R(\tau)}\,(\tau-t_0)} \right\} dt. \tag{88,9}$$

Мы видим, что, как и следовало ожидать, функция $\varphi(t)$ обращается в нуль на всех концах.

В случае $p = 1$ мы, как легко непосредственно проверить, получаем формулы (87,16), (87,17) предыдущего параграфа.

§ 89. Решение задачи $\Phi^+ + \Phi^- = g$ в общем случае. 1°. Переходя теперь к обобщению результатов, полученных в §§ 85, 86, на случай, когда L — произвольная кусочно-гладкая линия, мы начнем с решения задачи сопряжения для случая, когда $G(t) = -1$, т. е. задачи

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = g(t) \text{ на } L, \tag{89,1}$$

где $g(t)$ — заданная функция класса H_0.

Введем следующие временные обозначения (они понадобятся нам при выводе, а в окончательные формулы не войдут). Простые разомкнутые дуги, не имеющие никаких общих точек, кроме концов, из которых состоит кусочно-гладкая линия L, обозначим через

$$L_k = a_k b_k, \quad k = 1, 2, \ldots, N.$$

Узлы линии L, взятые в каком-либо порядка, обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Каждая из точек a_k, b_l совпадает с одной из точек c_j, причем с одной и той же точкой c_j может совпадать несколько точек a_k, b_l.

---

[1]) Точнее, лишь от положения концов a_k, b_k и от взаимного расположения дуг L_k с топологической точки зрения; иными словами, полиномы $\omega_k(t)$ остаются неизменными при произвольной непрерывной деформации дуг L_k, при которой концы дуг остаются неподвижными, а дуги не пересекают друг друга.

[2]) Формула, по существу совпадающая с (88,9), была независимо получена Н. П. Векуа [1].

Узлы c_j, в которых сходится четное число дуг, будем называть четными, а узлы, в которых сходится нечетное число дуг,— нечетными. Мы увидим ниже, что нечетные узлы являются неособенными (для нашей задачи), а четные — особенными. Число нечетных узлов, очевидно, четное[1]); обозначим его через $2p$, а через

$$c_1,\ c_2,\ \ldots,\ c_{2p} \tag{89,2}$$

— все нечетные узлы.

2°. Для построения канонической функции $X(z)$ воспользуемся формулой (78,10)

$$X(z) = e^{\gamma(z)} \prod_{k=1}^{n} (z-c_k)^{\lambda_k}, \tag{*}$$

где λ_k — целые числа, которые следует надлежащим образом подобрать, а $\gamma(z)$ дается формулой (78,5). Так как в нашем случае $G(t) = -1$, то можно взять $\ln G(t) = \pi i$, и тогда

$$\gamma(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\pi i\,dt}{t-z} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\int\limits_{a_jb_j}\frac{dt}{t-z} = \frac{1}{2}\sum_{j=1}^{N}\ln\frac{z-b_j}{z-a_j},$$

откуда

$$e^{\gamma(z)} = \prod_{j=1}^{N}\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{\frac{1}{2}},$$

причем под выражением $\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{\frac{1}{2}}$ мы подразумеваем ветвь, голоморфную на разрезанной вдоль $L_j = a_jb_j$ плоскости, обращающуюся в 1 при $z=\infty$, считая, что по определению

$$\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{\frac{1}{2}} = \exp\frac{1}{2}\int\limits_{a_jb_j}\frac{dt}{t-z}.$$

Таким образом,

$$X(z) = \prod_{k=1}^{n}(z-c_k)^{\lambda_k}\prod_{j=1}^{N}\left(\frac{z-b_j}{z-a_j}\right)^{\frac{1}{2}}, \tag{**}$$

где целые числа λ_k подлежат подбору.

Прежде чем перейти к упрощению предыдущего выражения, заметим, что правая часть этого выражения, каковы бы ни были целые числа λ_k, представляет собой функцию, голоморфную на разрезанной вдоль L плоскости[2]), кроме, быть может, бесконечно удаленной точки (где она может иметь полюс), изменяющую знак всякий раз, когда точка z переходит через линию L; под этим подразумевается, что $X^+(t) = -X^-(t)$ во всех обыкновенных точках линии L[3]).

---

[1]) Если m_k обозначает число концов a_i, b_j, совпадающих с узлом c_k ($k = 1, 2, \ldots, n$), то число всех концов a_i, b_j равно $2N = m_1 + m_2 + \ldots + m_n$; так как левая часть этого равенства — четное число, то среди слагаемых правой части может быть лишь четное число нечетных.

[2]) То есть функцию, голоморфную (за исключением, быть может, точки $z=\infty$) в каждой из связных частей, на которые разбивается плоскость линией L.

[3]) Напомним, что $X(z)$ является решением однородной задачи, получаемой из (89,1) при $g(t) = 0$.

Соединяя в правой части (**) множители, для которых c_k, a_j или b_j имеют одинаковые значения, получим:

$$X(z) = \pm \prod_{k=1}^{n} (z - c_k)^{\alpha_k}, \tag{***}$$

где α_k — целое число, если c_k — четный узел, и

$$\alpha_k = \mu_k \pm \frac{1}{2}, \tag{****}$$

где μ_k — целое число, если c_k — нечетный узел; в предыдущей формуле можно брать произвольно верхний или нижний знак за счет изменения μ_k на ± 1. Далее, несмотря на двойной знак в правой части формулы (***), она является вполне определенной функцией на всей разрезанной вдоль L плоскости, как это следует из предыдущего и как это будет еще пояснено ниже.

Мы видим теперь, что, как было уже сказано, все *четные узлы особенные*; соответствующие им числа α_k мы должны положить равными нулю (за счет подбора λ_k). Все нечетные же узлы являются неособенными, и мы, очевидно, получим каноническую функцию класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, $q \leqslant 2p$, если положим в (****) $\mu_k = 0$, верхние знаки возьмем для $k = 1, 2, \ldots, q$, а нижние — для $k = q+1, \ldots, 2p$.

Таким образом, окончательно *каноническая функция* $X(z)$ *класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ *дается формулой*

$$X(z) = \pm \prod_{k=1}^{2p} (z - c_k)^{\pm \frac{1}{2}}, \tag{89,3}$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$ *— все нечетные узлы и где в показателях степени верхние знаки берутся для* $k = 1, 2, \ldots, q$, *нижние — для* $k = q+1, \ldots, 2p$.

Все другие канонические функции данного класса получаются из $X(z)$ умножением на произвольный постоянный множитель.

В случае, когда все узлы четные, под правой частью в формуле (89,3) следует, очевидно, подразумевать ± 1, так что в этом случае

$$X(z) = \pm 1. \tag{89,4}$$

Знак в правой части должен оставаться неизменным, пока z находится в одной из связных частей, на которые разбивается плоскость линией L, и изменяться на обратный, когда z переходит через линию L в какой-либо обыкновенной ее точке. Это вполне определяет функцию $X(z)$, если мы (произвольно) фиксируем ее знак в одной из этих частей, например, будем считать, что $X(z) = +1$ в части, содержащей точку $z = \infty$. В этом случае мы получим то самое значение, которое вытекает из формулы (*) в противном случае мы получим упомянутое значение с обратным знаком [1])

В случае p, отличного от нуля, формулу (89,3) можно переписать еще так (ср. § 85):

$$X(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{89,5}$$

где

$$R_1(z) = \prod_{k=1}^{q} (z - c_k), \quad R_2(z) = \prod_{k=q+1}^{2p} (z - c_k).$$

[1]) То, что переходя из одной части плоскости в другую различными путями мы не придем к противоречию, следует из доказанного нами существования функции $X(z)$.

Под

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}=\prod_{k=1}^{2p}(z-c_k)^{\pm\frac{1}{2}}$$

следует подразумевать функцию, голоморфную (кроме, быть может, точки $z=\infty$) в каждой из связных частей, на которые разбивается плоскость линией L, причем эта функция изменяет знак на обратный (как это понимать — было разъяснено выше) при каждом переходе z через линию L (в обыкновенной точке). Для того чтобы получить именно ту функцию, которая определяется формулой (*), следует считать, что в части, содержащей бесконечно удаленную точку, при больших $|z|$ (ср. § 85)

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}=+z^{q-p}+A_1z^{q-p-1}+\ldots \tag{89,6}$$

Индекс класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ дается, очевидно, формулой

$$\varkappa=p-q. \tag{89,7}$$

В случае, когда дуги $L_k=a_kb_k$ не имеют общих концов, все узлы (концы) являются нечетными и, следовательно, неособенными узлами, и мы снова приходим к результатам и формулам, полученным для этого частного случая в § 85.

В рассмотренном выше другом крайнем случае, когда все узлы четные ($p=0$), как мы видели, $X(z)=\pm 1$. В частности, если L состоит из простых замкнутых контуров, не имеющих общих точек, то нечетных узлов нет, и мы получим при надлежащем выборе направления на L результат (47,20).

Заметим еще, что формулы, относящиеся к случаю, когда все узлы четные, можно в дальнейшем писать в том же виде, как для случая наличия нечетных узлов, полагая $p=q=0$ и подразумевая под радикалами

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} \tag{89,8}$$

числа $+1$ или -1 при указанном выше правиле выбора знаков.

3°. Возвращаясь к общему случаю, напишем решение неоднородной задачи (89,1). Совершенно так же, как в § 85, п. 2°, общее решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ неоднородной задачи дается формулой

$$\Phi(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i\sqrt{R_2(z)}}\int\limits_L\frac{\sqrt{R_2(t)}\,g(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}Q(z), \tag{89,9}$$

где $Q(z)$ — произвольный полином, а под $\dfrac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}$ следует подразумевать значение, принимаемое на левой стороне L функцией

$$\frac{\sqrt{R_2(z)}}{\sqrt{R_1(z)}}=1:\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}.$$

Для решений же класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, исчезающих на бесконечности, имеем следующий результат (точно такой же, как в § 85)[1]:

[1]) Не надо, впрочем, забывать, что в нашем случае через $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$ обозначены не все узлы, а лишь нечетные (каковыми и являются все узлы в случае § 85).

При $\varkappa = p - q \geqslant 0$ решения класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, исчезающие на бесконечности, всегда существуют; все они даются формулой

$$\Phi(z) = \frac{\sqrt{R_1(z)}}{2\pi i \sqrt{R_2(z)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-z)} + \frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} Q_{p-q-1}(z), \tag{89,10}$$

где $Q_{p-q-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $p-q-1$ (равный тождественно нулю при $p = q$);

При $\varkappa = p - q < 0$ решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, исчезающее на бесконечности, существует тогда и только тогда, когда $g(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, t^k g(t)}{\sqrt{R_1(t)}}\,dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, q-p-1; \tag{89,11}$$

оно единственно и дается формулой (89,10) *при $Q_{p-q-1}(z) = 0$.*

§ 90. Обращение интеграла типа Коши в общем случае. 1°. Перейдем теперь к решению задачи обращения интеграла типа Коши, т. е. решению уравнения

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} = f(t_0); \quad t_0 \in L, \tag{90,1}$$

где теперь L — произвольная кусочно-гладкая линия. Мы будем считать, что заданная функция $f(t)$ принадлежит на L классу H_0, и будем искать решения $\varphi(t)$ в классе H^*.

Вследствие почти полной аналогии с тем, что было изложено в § 86, мы ограничимся формулировкой результата и краткими указаниями.

Аналогично тому, что было сделано в § 86, все искомые решения $\varphi(t)$ можно разбить на классы, относя к классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ решения, остающиеся ограниченными в окрестностях узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$, произвольно выбранных среди всех нечетных узлов $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$, которые являются неособенными узлами для задачи сопряжения (89,1); мы применяем во всем этом параграфе обозначения, принятые в предыдущем параграфе.

При $\varkappa = p - q \geqslant 0$ решения уравнения (90,1) класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ всегда существуют и даются формулой

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)} + \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}} P_{p-q-1}(t_0), \tag{90,2}$$

где $P_{p-q-1}(t_0)$ — произвольный полином степени не выше $p-q-1$ (равный нулю при $q = p$).

При $\varkappa = p - q < 0$ решение (единственное) класса $h(c_1, \ldots, c_q)$ существует тогда и только тогда, когда $f(t)$ удовлетворяет условиям

$$\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, t^k f(t)\,dt}{\sqrt{R_1(t)}} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, q-p-1; \tag{90,3}$$

при соблюдении этих условий решение дается формулой (90,2) при $P_{p-q-1}(t_0) = 0$.

В окрестностях четных узлов все решения $\varphi(t_0)$ принадлежат классу H_0.

В окрестностях тех нечетных узлов, где по условию решение данного класса должно быть ограничено, оно принадлежит классу H_0, не обращаясь обязательно в нуль; оно (как и в § 86) обращается в нуль, если этот узел — конец линии L.

В случае, когда L имеет только четные узлы ($p = 0$), решение, притом единственное, всегда существует; оно дается формулой

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i \delta(t_0)} \int_L \frac{\delta(t) f(t)\, dt}{t - t_0},$$

где $\delta(t)$ — функция точки t линии L, принимающая на различных ее участках значения ± 1. Выбор этих значений производится согласно следующему правилу [см. сказанное в предыдущем параграфе вслед за формулой (89,4)]. Пусть $\delta(z)$ обозначает функцию, которая принимает лишь значения $+1$ или -1 в различных связных частях, на которые разбивается плоскость линией L, причем $\delta(z)$ изменяет знак на обратный при переходе через L. Тогда в качестве $\delta(t)$ можно взять значение, принимаемое $\delta(z)$ на левой стороне L, иначе говоря, считать $\delta(t) = \delta^+(t)$.

Таким образом, мы имеем в *случае, когда все узлы четные, следующие формулы обращения*:

$$f(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t - t_0}, \quad \varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i \delta(t_0)} \int_L \frac{\delta(t) f(t)\, dt}{t - t_0}. \tag{90,4}$$

Несколько изменив обозначения, эти формулы можно упростить. А именно, введя обозначение

$$\delta(t)\varphi(t) = \psi(t)$$

и изменив на обратные положительные направления тех из дуг L_k, на которых $\delta(t) = -1$, получим следующие формулы обращения:

$$f(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\psi(t)\, dt}{t - t_0}, \quad \psi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)\, dt}{t - t_0} \tag{90,5}$$

— точно такие, как в случае одного простого замкнутого контура.

2°. Приведем для иллюстрации сказанного два простых примера. Пусть сначала L имеет вид, изображенный на рис. 20. В этом случае все узлы четные. Значения $\delta(z)$ можно взять, как указано на рисунке. Если положительное направление на L выбрано, как указано на рисунке, то будем иметь $\delta(t) = +1$ всюду на L и, согласно формуле (90,4),

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{f(t)\, dt}{t - t_0},$$

как в случае простого замкнутого контура.

Рассмотрим теперь случай, когда L имеет вид, указанный на рис. 21. В этом случае имеются два узла a, b, оба нечетных. Будем искать решение наиболее широкого класса, т. е. класса h_0. Индекс этого класса $\varkappa = 1$ (в нашем случае $p = 1$, $q = 0$).

Согласно предыдущему, все такие решения даются формулой

$$\varphi(t_0) = \frac{1}{\pi i \sqrt{(t_0 - a)(t_0 - b)}} \int_L \frac{\sqrt{(t-a)(t-b)}\, f(t)\, dt}{t - t_0} + \frac{C}{\sqrt{(t_0 - a)(t_0 - b)}},$$

где C — произвольная постоянная, а значение радикала определяется, например, следующим образом. Положим

$$\chi(z) = [(z-a)(z-b)]^{\frac{1}{2}},$$

где в правой части подразумевается функция, голоморфная на плоскости, разрезанной вдоль о д н о й из простых дуг L_1, L_2, L_3, соединяющих точки a и b, например, вдоль той дуги L_2, которая заключена между

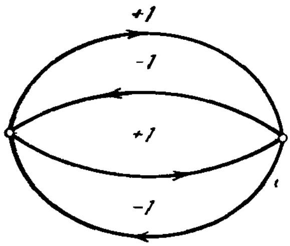

Рис. 20.

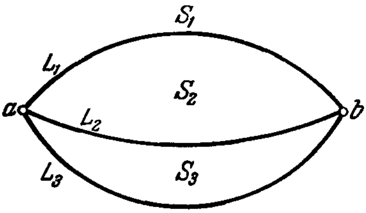

Рис. 21.

двумя другими. Значение $\chi(z)$ можно, например, фиксировать условием $\lim \frac{\chi(z)}{z} = +1$ при $z \to \infty$. Положим, далее (обозначения даны на рисунке),

$$\sqrt{(z-a)(z-b)} = \begin{cases} +\chi(z) \text{ в области } S_1, \\ -\chi(z) \text{ в областях } S_2, S_3. \end{cases}$$

Тогда под $\sqrt{(t-a)(t-b)}$ и $\sqrt{(t_0-a)(t_0-b)}$ можно подразумевать значения, принимаемые функцией $\chi(z)$ на левой стороне L (каково бы ни было положительное направление, выбранное на L).

III. Эффективное решение основных граничных задач теории гармонических функций для некоторых областей

В этом отделе даются применения полученных в отделе I результатов к эффективному решению основных граничных задач теории гармонических функций, встречающихся в гидромеханике, теории упругости и других разделах математической физики, для некоторых областей частного вида.

§ 91. Задача Дирихле и аналогичные для плоскости со щелями, расположенными вдоль прямой. Пусть S обозначает плоскость, разрезанную вдоль отрезков $L_j = a_j b_j$ $(j = 1, 2, \ldots, p)$ действительной оси Ox, не имеющих общих точек; подразумевается, что $a_1 < b_1 < a_2 < \ldots$ Совокупность этих отрезков обозначим через

$$L = L_1 + L_2 + \ldots + L_p.$$

Мы решим для области S три задачи, из которых последняя (задача С) есть обычная задача Дирихле, а две первые — некоторые ее видоизменения, представляющие самостоятельный интерес, а также служащие для решения задачи Дирихле.

З а д а ч а А. *Найти голоморфную в S функцию $\Phi(z) = u + iv$, исчезающую на бесконечности, по граничному условию*

$$u^+ = f^+(t), \quad u^- = f^-(t) \text{ на } L, \tag{91,1}$$

где $f^+(t)$, $f^-(t)$ — заданные на L действительные функции, удовлетворяющие условию H; предполагается, что искомая функция $\Phi(z)$ удовлетворяет вблизи концов c линии L условию

$$|\Phi(z)|<\frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad \alpha=\text{const}<1.$$

Иными словами, предполагается, что функция $\Phi(z)$ — кусочно-голоморфная с линией скачков L.

Применяя обозначения § 39, п. 1°, положим:

$$\Psi(z)=\frac{\Phi(z)+\overline{\Phi}(z)}{2}, \quad \Omega(z)=\frac{\Phi(z)-\overline{\Phi}(z)}{2}. \tag{91,2}$$

Кусочно-голоморфные функции $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$ должны, очевидно, удовлетворять условиям

$$\overline{\Psi}(z)=\Psi(z), \quad \overline{\Omega}(z)=-\Omega(z). \tag{91,3}$$

Граничное условие (91,1) сводится, как легко видеть, к следующим[1]):

$$\Psi^+(t)+\Psi^-(t)=2f(t), \tag{91,4a}$$

на L,

$$\Omega^+(t)-\Omega^-(t)=2g(t) \tag{91,4b}$$

где

$$2f(t)=f^+(t)+f^-(t); \quad 2g(t)=f^+(t)-f^-(t). \tag{91,5}$$

Функция $\Omega(z)$ определяется по условию (91,4b) однозначно (§ 31):

$$\Omega(z)=\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}. \tag{91,6}$$

Формула (39,10) показывает, что второе условие (91,3) удовлетворено.

Мы видим, что функция $\Omega(z)$ почти ограничена (§ 77, п. 3°) вблизи всех концов[2]); она будет, кроме того, ограничена вблизи тех концов c, на которых $f^+(c)=f^-(c)$.

Определение же функции $\Psi(z)$ сводится к одному из простейших частных случаев задачи сопряжения, уже рассмотренному нами в § 85; здесь мы должны лишь учесть добавочное условие $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$.

Обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_{2p}$ точки a_j, b_j, взятые в каком-либо порядке. Каноническая функция класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, т. е. каноническое решение этого класса однородной задачи сопряжения

$$\Psi^+(t)+\Psi^-(t)=0 \text{ на } L, \tag{91,7}$$

имеет согласно формуле (85,3), в которой мы возьмем теперь $C=1$, следующий вид:

$$X(z)=\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}=\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{91,8}$$

---

1) Имеем:

$$u^+(t)=\operatorname{Re}\Phi^+(t)=\frac{1}{2}\left[\Phi^+(t)+\overline{\Phi^+(t)}\right],$$

$$u^-(t)=\operatorname{Re}\Phi^-(t)=\frac{1}{2}\left[\Phi^-(t)+\overline{\Phi^-(t)}\right].$$

Но (см. (39,5a)) $\overline{\Phi^+(t)}=\overline{\Phi}^-(t)$, $\overline{\Phi^-(t)}=\overline{\Phi}^+(t)$, откуда и следуют (91,4a), (91,4b).

2) Для задачи (91,4b) все узлы (в нашем случае — концы) a_j, b_j особенные.

где, как в § 85,

$$R_1(z)=\prod_{j=1}^{q}(z-c_j), \quad R_2(z)=\prod_{j=q+1}^{2p}(z-c_j) \tag{91,9}$$

и где значения радикалов выбираются согласно условиям, принятым в упомянутом параграфе.

Как было уже сказано в § 85, для задачи (91,4a) все концы a_k, b_k неособенные. Общее решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ этой задачи, исчезающее на бесконечности, имеет при $p \geqslant q$ вид

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}\int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}P_{p-q-1}(z), \tag{91,10}$$

где $P_{p-q-1}(z)$ — произвольный полином степени не выше $p-q-1$ ($P_{p-q-1}(z)=0$ при $p=q$), а радикалы понимаются, как в § 85. При $p<q$ решение рассматриваемого класса задачи (91,4a), исчезающее на бесконечности, существует лишь при соблюдении условий (91,12), приводимых ниже, и дается той же формулой (91,10) при $P_{p-q-1}(z)=0$.

Для того чтобы только что приведенное решение задачи (91,4a) удовлетворяло всем требуемым условиям, надо еще, чтобы согласно (91,3) $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$. Проверим, удовлетворено ли это требование.

Легко, прежде всего, видеть, что

$$\overline{X}(z)=X(z). \tag{91,11}$$

Далее, применяя формулу (39,10)[1]), легко проверить, что первое слагаемое правой части (91,10) удовлетворяет условию $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$. Поэтому и вся правая часть в (91,10) будет удовлетворять этому условию тогда и только тогда, когда коэффициенты полинома $P_{p-q-1}(z)$ — действительные числа.

Упомянутые выше условия существования решения задачи (91,4a) класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, исчезающего на бесконечности, при $p<q$ имеют вид (§ 85)

$$\int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}t^k f(t)\,dt=0, \quad k=0, 1, \ldots, q-p-1. \tag{91,12}$$

Будем называть решения $\Phi(z)$ исходной задачи А решениями класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, если они почти ограничены вблизи концов $c_1, c_2, \ldots, c_q$. Тогда на основании предыдущего легко заключаем:

Решение задачи А *класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ *при* $p \geqslant q$ *дается формулой*

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Omega(z)=$$
$$=\frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}\int\limits_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}}\frac{f(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}+\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}P_{p-q-1}(z), \tag{91,13}$$

где $P_{p-q-1}(z)$ — *произвольный полином степени не выше* $p-q-1$ *с действительными коэффициентами* ($P_{p-q-1}(z)=0$ *при* $p=q$); *при* $p<q$ *решение* (*единственное*) *существует тогда и только тогда, когда соблюдены условия* (91,12), *и дается формулой* (91,13) *при* $P_{p-q-1}(z)=0$.

---

[1]) При этом следует иметь в виду, что в нашем случае на основании (39,5a), (91,11) и (91,7) $\overline{X^+(t)}=\overline{X}^-(t)=X^-(t)=-X^+(t)$ на L.

Полученный результат представляет собой некоторое обобщение (в смысле разбиения решений на классы и установления необходимых и достаточных условий разрешимости) весьма ценного результата М. В. Келдыша и Л. И. Седова [1].

Замечание 1. Легко видеть (ср. § 82), что все предыдущие результаты и формулы останутся в силе, если считать, что заданные функции $f^+(t)$ и $f^-(t)$, вместо того чтобы удовлетворять условию H на L, принадлежат классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. В частности, если $f^+(t)$ и $f^-(t)$ — произвольные функции класса h_0 (т. е. класса H^*), то общее решение класса h_0 будет дано формулой (91,13) при $q=0$:

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi i \sqrt{R(z)}} \int_L \frac{\sqrt{R(t)}\, f(t)\, dt}{t-z} + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(t)\, dt}{t-z} + \frac{P_{p-1}(z)}{\sqrt{R(z)}}, \qquad (91,13a)$$

где по-прежнему

$$R(z) = \prod_{j=1}^{p} (z-a_j)(z-b_j). \qquad (91,9a)$$

Замечание 2. Аналогичным путем нетрудно решить задачу, отличающуюся от задачи A тем, что на L задаются значения u^+ и v^-. Эта задача была решена Д. И. Шерманом [1]; решение Д. И. Шермана можно несколько упростить приведением задачи не к сингулярным уравнениям, а непосредственно к некоторым (весьма простым) задачам сопряжения.

Задача B. *Найти кусочно-голоморфную функцию* $\Phi(z) = u + iv$, *исчезающую на бесконечности и почти ограниченную вблизи всех концов, по граничному условию*

$$u^+ = f^+(t) + C_k, \quad u^- = f^-(t) + C_k \text{ на } L_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \qquad (91,14)$$

где $f^+(t)$ *и* $f^-(t)$ *— заданные действительные функции, удовлетворяющие условию* H, *а* C_k *— действительные постоянные, не задаваемые заранее.*

Эта задача совпадает по существу с задачей, которую мы назвали в § 60 видоизмененной задачей Дирихле[1]); поэтому мы сохраним здесь это название.

Вводя функции $\Psi(z)$ и $\Omega(z)$ формулами (91,2), приходим к следующим двум задачам сопряжения:

$$\Psi^+(t) + \Psi^-(t) = 2f(t) + 2C_k \text{ на } L_k, \quad k = 1, 2, \ldots, p, \qquad (91,15a)$$

$$\Omega^+(t) - \Omega^-(t) = 2g(t) \qquad \text{на } L, \qquad (91,15b)$$

где $f(t)$ и $g(t)$ определяются формулами (91,5).

Вторая задача решается, как в предыдущем случае; решение будет почти ограниченным вблизи всех концов (и даже ограниченным вблизи тех концов, на которых $f^+(t)$ и $f^-(t)$ принимают одинаковые значения).

---

[1]) Главное отличие от видоизмененной задачи Дирихле, сформулированной в § 60, заключается в том, что там требовалась непрерывная продолжимость функции $u(x, y)$ на все точки границы, здесь же мы допускаем исключение для концов, вблизи которых функция $u(x, y)$ должна лишь быть почти ограниченной. Мы увидим, однако, что при поставленных здесь условиях функция $u(x, y)$ окажется ограниченной и вблизи концов и даже непрерывно продолжимой на те концы c, на которых $f^+(c) = f^-(c)$; ясно, что если последнее условие не соблюдено, то непрерывная продолжимость на c невозможна.

Нам остается найти почти ограниченное и, следовательно, ограниченное[1]) решение задачи (91,15а), т. е. решение класса h_{2p}; канонической функцией этого класса будет:

$$X_{2p}(z)=\sqrt{R(z)}, \quad R(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-a_k)(z-b_k) \tag{91,16}$$

(см. формулу (85,12); здесь мы взяли $C=1$).

Необходимые и достаточные условия существования решения класса h_{2p} задачи (91,15а), исчезающего на бесконечности, имеют вид[2])

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{t^k[f(t)+C(t)]\,dt}{\sqrt{R(t)}}=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1,$$

где $C(t)=C_j$ на L_j. Эти условия дают p линейных уравнений для определения C_j

$$\sum_{j=1}^{p}\gamma_{kj}C_j+\gamma_k=0, \quad k=0,\ 1,\ \ldots,\ p-1, \tag{91,17}$$

где

$$\gamma_{kj}=\frac{1}{\pi i}\int_{L_j}\frac{t^k\,dt}{\sqrt{R(t)}}, \quad \gamma_k=\frac{1}{\pi i}\int_L\frac{t^k f(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}}. \tag{91,18}$$

Легко видеть, что γ_{kj} и γ_k — действительные величины.

Если система (91,17) имеет (действительное) решение, то требуемое решение задачи (91,15а) будет дано формулой

$$\Psi(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{\pi i}\int_L\frac{f(t)+C(t)}{\sqrt{R(t)}(t-z)}\,dt, \tag{91,19}$$

где $C(t)=C_j$ на L_j и C_j ($j=1,\ \ldots,\ p$) удовлетворяют системе (91,17). При этом $\overline{\Psi}(z)=\Psi(z)$.

Покажем теперь, что определитель системы (91,17), т. е. определитель матрицы $\|\gamma_{ij}\|$, отличен от нуля. Действительно, если бы он был равен нулю, то однородная система, получающаяся из (91,17) при $f(t)=0$, имела бы решение $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_p$, отличное от нулевого. Соответствующая этому решению функция

$$\Psi_0(z)=\frac{\sqrt{R(z)}}{\pi i}\int_L\frac{C(t)\,dt}{\sqrt{R(t)}(t-z)}$$

была бы функцией, исчезающей на бесконечности, непрерывно продолжимой на все отрезки L_j, *включая концы*, причем $[\operatorname{Re}\Psi_0(t)]^+=[\operatorname{Re}\Psi_0(t)]^-=C_j$ на L_j. Но тогда в силу теоремы единственности решения видоизмененной задачи Дирихле, доказанной в § 60 (легко видеть, что доказательство применимо и к нашему случаю), необходимо $C_1=C_2=\ldots=C_p=0$, что противоречит условию. Следовательно, определитель системы (91,17) отличен от нуля, и система эта всегда однозначно разрешима.

---

[1]) Так как для задачи (91,15а) все концы неособенные, то всякое почти ограниченное решение будет и ограниченным (§ 82, п. 2).

[2]) Это — условия (85,18), примененные к случаю $q=2p$.

Итак, поставленная задача всегда имеет единственное решение; оно дается формулой

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \Omega(z) = \frac{\sqrt{R(z)}}{\pi i} \int_L \frac{f(t) + C(t)}{\sqrt{R(t)}}\, dt + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(t)\, dt}{t - z}, \tag{91,20}$$

где $C(t) = C_j$ на L_j, причем постоянные C_j однозначно определяются системой (91,17).

Замечание 3. Легко видеть, что *гармоническая функция* $u = \operatorname{Re}\Phi(z)$ *будет не только почти ограниченной, но и ограниченной вблизи всех концов*. Это очевидно относительно первого слагаемого правой части в (91,20). Второе слагаемое в окрестности любого конца c представляется в виде

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(t)\, dt}{t - z} = \mp \frac{g(c)}{\pi i} \ln(z - c) + \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{g(t) - g(c)}{t - z}\, dt,$$

где верхний знак берется для концов a_j, а нижний — для концов b_j. Следовательно, вблизи c

$$u = \operatorname{Re}\Phi(z) = \mp g(c) \frac{\vartheta}{\pi} + u_0,$$

где u_0 непрерывна в точке c, а $\vartheta = \arg(z - c)$.

Очевидно далее, что если $g(c) = f^+(c) - f^-(c) = 0$, то u будет непрерывно продолжимой на c.

Задача С (задача Дирихле). *Найти функцию $U(x, y)$, гармоническую и ограниченную всюду в S по граничному условию*

$$U^+ = f^+(t), \quad U^- = f^-(t) \text{ на } L, \tag{91,21}$$

где $f^+(t)$ и $f^-(t)$ — заданные действительные функции, удовлетворяющие условию H.

Мы укажем два способа решения этой задачи. Первый способ сводит ее к задаче В, а второй — к задаче А.

Первый способ. Задачу С можно свести к задаче В при помощи различных приемов; мы укажем один из простейших.

Обозначим через $\omega_j(x, y)$ или, проще, $\omega_j(z)$ следующие элементарные гармонические функции:

$$\omega_j(z) = \operatorname{Re}\frac{(z - b_j)\ln(z - b_j) - (z - a_j)\ln(z - a_j)}{b_j - a_j}, \quad j = 1, \ldots, p, \tag{91,22}$$

причем под $\omega_j(z)$ подразумевается ветвь, однозначная на разрезанной вдоль L_j плоскости и такая, что при больших $|z|$

$$\omega_j(z) = -\ln|z| - 1 + O\left(\frac{1}{z}\right). \tag{91,22a}$$

Легко видеть, что $\omega_j(z)$ принимает одинаковые значения слева и справа на отрезках $a_j b_j$; эти значения мы будем обозначать через $\omega_j(t)$.

Положим теперь

$$U(x, y) = u(x, y) + \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \omega_j(z), \tag{91,23}$$

где $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ — действительные постоянные, последние p из которых связаны соотношением

$$\alpha_1 + \alpha_2 + \ldots + \alpha_p = 0, \tag{91,24}$$

обеспечивающим обращение в нуль суммы

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j \omega_j(z)$$

на бесконечности; $u(x, y)$ — новая искомая гармоническая функция, исчезающая на бесконечности.

Из (91,21) получаем для функции u следующие граничные условия:

$$u^+ = f^+(t) - \omega(t), \quad u^- = f^-(t) - \omega(t) \quad \text{на } L, \tag{91,25}$$

где для краткости положено

$$\omega(t) = \alpha_0 + \sum_{j=1}^{p} \alpha_j \omega_j(t). \tag{91,26}$$

Вместо того чтобы решить задачу (91,25), решим задачу B

$$u^+(t) = f^+(t) - \omega(t) + C_j, \quad u^-(t) = f^-(t) - \omega(t) + C_j \quad \text{на } L_j, \tag{91,27}$$

считая фиксированными постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ и полагая, как это требуется условием задачи B, что $u(x, y)$ — действительная часть некоторой кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$, исчезающей на бесконечности и почти ограниченной вблизи всех концов.

Мы знаем (см. выше, решение задачи B), что постоянные C_j при этом вполне определятся, и ясно, что они будут выражены линейно через постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$:

$$C_j = \sum_{k=0}^{p} \gamma_{jk} \alpha_k + \gamma_j, \tag{91,28}$$

где γ_{jk} — определенные постоянные, не зависящие от выбора функций $f^+(t)$, $f^-(t)$, а γ_j — постоянные, обращающиеся в нуль при $f^+(t) = f^-(t) = 0$.

Подберем теперь постоянные $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$ так, чтобы $C_j = 0$ $(j = 1, \ldots, p)$ и чтобы, кроме того, было удовлетворено условие (91,24). Таким образом, мы получим для определения постоянных α_k систему уравнений

$$\left.\begin{aligned} &\sum_{k=0}^{p} \gamma_{jk} \alpha_k + \gamma_j = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, p, \\ &\sum_{k=0}^{p} \alpha_k = 0. \end{aligned}\right\} \tag{91,29}$$

Ниже будет показано, что эта система всегда однозначно разрешима. Если постоянные α_k подобраны в соответствии с (91,29), то решение исходной задачи C будет дано формулой (91,23), где под $u(x, y)$ следует понимать решение задачи (91,27)[1]).

Покажем теперь, что определитель системы (91,29) отличен от нуля. Рассуждая от противного, предположим, что он равен нулю. Тогда однородная система, получающаяся из (91,29) при $f^+(t) = f^-(t) = 0$ (тогда все γ_j равны нулю), имеет ненулевое решение $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_p$. При этих значениях постоянных α_j функция $U(x, y)$, определяемая формулой (91,23), будет решением задачи Дирихле (91,21) при $f^+ = f^- = 0$. Но тогда, как

---

[1]) В силу сказанного выше (замечание к задаче B) функция $u(x, y)$ будет не только почти ограниченной, но и ограниченной вблизи всех концов.

известно, $U = 0$. Если же $U = 0$, то необходимо $\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_p = 0$. В самом деле, $\alpha_0 = 0$, так как в правой части (91,23) оба слагаемых, отличных от α_0, исчезают на бесконечности[1]). Далее, пусть $\alpha_k \neq 0$ $(k \geqslant 1)$. Если z обойдет вокруг отрезка $a_k b_k$ (не обходя вокруг других отрезков), то функция, сопряженная с $u(x, y)$, вернется к первоначальному значению, так же как и функции, сопряженные с $\omega_j(z)$ $(j \neq k)$, функция же, сопряженная с $\omega_k(z)$, получит, как легко видеть, приращение, отличное от нуля. Значит, если $\alpha_k \neq 0$, то функция, сопряженная с правой частью (91,23), получит приращение, отличное от нуля, что невозможно, так как левая часть $U = 0$.

Итак, наше утверждение доказано, и задача С может считаться решенной.

Второй способ решения задачи С, указанный М. В. Келдышем и Л. И. Седовым [1], состоит в приведении ее к задаче А; он является несколько менее общим, чем предыдущий, так как требует дифференцируемости заданных функций $f^+(t)$ и $f^-(t)$, но на практике иногда приводит к более простым результатам.

Мы изложим этот способ с некоторыми (несущественными) изменениями и упрощениями.

Обозначим через

$$\Phi(z) = U(x, y) + iV(x, y) \tag{91,30}$$

аналитическую функцию, действительной частью которой является искомая гармоническая функция $U(x, y)$. Функция $V(x, y)$, сопряженная с $U(x, y)$, будет, вообще говоря, многозначной, поэтому будет многозначной и функция $\Phi(z)$. Но функция

$$\Phi'(z) = \frac{\partial U}{\partial x} + i\frac{\partial V}{\partial x}$$

будет, как известно, однозначной[2]) (вследствие однозначности функции U), а при больших $|z|$

$$\Phi'(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right) \tag{91,31}$$

вследствие ограниченности U[3]).

Будем считать, что $f^+(t) = f^-(t)$ на всех концах, т. е. при $t = a_k$, b_k (это означает непрерывность граничных значений искомой функции U), и введем в рассмотрение функции $f(t)$, $g(t)$, определяемые формулой (91,5);

---

[1]) Функция $u(x, y)$ есть действительная часть решения задачи В, исчезающего (согласно условию этой задачи) на бесконечности.

[2]) Гармоническая функция $V(x, y)$ приобретает при обходе по любому замкнутому пути, охватывающему один из отрезков $a_k b_k$ и не охватывающему других, постоянное приращение, не зависящее от пути обхода. Поэтому ясно, что функция $\Phi'(z)$ вернется к первоначальному значению при обходе по такому пути.

[3]) Гармоническая функция $U(x, y)$, однозначная и ограниченная в окрестности точки $z = \infty$, разлагается при достаточно больших $|z|$ в ряд вида

$$U(x, y) = \alpha_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k \cos k\vartheta + \beta_k \sin k\vartheta)\, r^{-k} \qquad (z = re^{i\vartheta}),$$

и поэтому при достаточно больших $|z|$

$$\Phi(z) = U + iV = \alpha_0 + i\beta_0 + \sum_{k=1}^{\infty} (\alpha_k + i\beta_k)\, z^{-k}, \qquad \Phi'(z) = O\left(\frac{1}{z^2}\right).$$

тогда, согласно принятому условию, будем иметь

$$f(a_k)=f^+(a_k)=f^-(a_k),\quad f(b_k)=f^+(b_k)=f^-(b_k),$$
$$g(a_k)=g(b_k)=0,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ p. \tag{91,32}$$

Будем далее считать, что функции $f^+(t)$, $f^-(t)$, а следовательно, и $f(t)$, $g(t)$ имеют производные класса H^*. От функции $\Phi'(z)$ мы потребуем, чтобы она была кусочно-голоморфна [1]).

Мы приходим, таким образом, к задаче A для функции $\Phi'(z)$, причем роль $f(t)$, $g(t)$ играют теперь $f'(t)$, $g'(t)$.

Применяя формулу (91,13a), получим:

$$\Phi'(z)=\frac{1}{\pi i\sqrt{R(z)}}\int_L \frac{\sqrt{R(t)}\,f'(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{g'(t)\,dt}{t-z}+\frac{C_1z^{p-2}+\ldots+C_{p-1}}{\sqrt{R(z)}}, \tag{91,33}$$

где $R(z)$ определяется формулой (91,9a) и где радикалы надо понимать, как указано в § 85; $C_1,\ \ldots,\ C_{p-1}$ обозначают действительные постоянные. Мы взяли в числителе последнего слагаемого в (91,33) полином степени $p-2$, а не $p-1$, чтобы удовлетворить условию (91,31), ибо, как легко видеть, первые два слагаемых этому условию удовлетворяют. Относительно первого слагаемого это очевидно; что же касается второго слагаемого, то коэффициент при z^{-1} его разложения по убывающим степеням z вблизи бесконечно удаленной точки равен

$$-\frac{1}{\pi i}\int_L g'(t)\,dt=-\frac{1}{\pi i}\sum_{k=1}^{p}[g(b_k)-g(a_k)]$$

и, следовательно, равен нулю в силу (91,32).

Найдя $\Phi'(z)$, мы найдем $\Phi(z)$ по формуле

$$\Phi(z)=\int_0^z \Phi'(z)\,dz+C,$$

где под C можно подразумевать действительную постоянную.

Для определения постоянных $C_1,\ \ldots,\ C_{p-1},\ C$ мы имеем p следующих очевидных условий [2]):

$$\operatorname{Re}\int_0^{a_k}\Phi'(z)\,dz+C=f(a_k). \tag{91,34}$$

Интегрирование можно производить по любому пути, ведущему от 0 к a_k (не пересекающему L), например, по левой стороне оси Ox (тогда под знаком интеграла надо взять $\Phi'^{+}(t)\,dt$).

Условия (91,34) представляют собой, как легко видеть, систему p линейных уравнений относительно $C_1,\ C_2,\ \ldots,\ C_{p-1},\ C$. Докажем, что эта система всегда однозначно разрешима. Доказательство легко получить, опираясь на теорему единственности решения задачи Дирихле, но мы

[1]) Это допущение оправдывается a posteriori, так как мы увидим, что решение такого вида существует; то, что мы не потеряем никаких других решений, следует из единственности решения задачи Дирихле.

[2]) Не забудем, что $f^+(a_k)=f^-(a_k)=f(a_k)$.

приведем здесь простое непосредственное доказательство, данное также М. В. Келдышем и Л. И. Седовым [1].

Рассмотрим однородную систему, соответствующую системе (91,34); мы ее получим, полагая $f(t) = g(t) = 0$, так что эта однородная система имеет вид

$$\operatorname{Re} \int_0^{a_k} \frac{C_1 t^{p-2} + \ldots + C_{p-1}}{\sqrt{R(t)}}\, dt + C = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p, \tag{91,35}$$

откуда легко выводим:

$$\int_{b_k}^{a_{k+1}} \frac{C_1 t^{p-2} + \ldots + C_{p-1}}{\sqrt{R(t)}}\, dt = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, p-1. \tag{91,36}$$

Следовательно, на каждом отрезке $b_k a_{k+1}$ (число таких отрезков равно $p-1$) полином $C_1 z^{p-2} + C_2 z^{p-3} + \ldots + C_{p-1}$ необходимо изменяет знак, по крайней мере, один раз, так что он должен иметь не менее $p-1$ корней; но это возможно лишь при $C_1 = C_2 = \ldots = C_{p-1} = 0$. После этого очевидно, что и $C = 0$.

Итак, однородная система, соответствующая (91,34), не имеет решений, отличных от нулевого. Следовательно, ее определитель отличен от нуля, и система (91,34) всегда однозначно разрешима.

§ 92. Задача Дирихле и аналогичные для плоскости со щелями, расположенными вдоль окружности. Совершенно аналогично могут быть решены задачи A, B, C предыдущего параграфа в случае области S, представляющей собой плоскость, разрезанную вдоль конечного числа дуг некоторой окружности. Этот случай может быть приведен к случаю предыдущего параграфа путем простой инверсии, но непосредственное решение, аналогичное решению, указанному в предыдущем параграфе, быстрее приводит к цели. Вывод соответствующих формул, вполне аналогичных формулам предыдущего параграфа, мы предоставляем читателю (ср. аналогичные выкладки в следующем параграфе).

§ 93. Задача Римана — Гильберта при разрывных коэффициентах. 1°. Эту весьма важную, с точки зрения приложений[1]), задачу мы формулируем так (ср. § 40):

Пусть L — гладкий замкнутый контур и пусть S^+ (конечная или бесконечная) часть плоскости, ограниченная L. Требуется найти функцию $\Phi(z) = u + iv$, голоморфную в S^+ и непрерывно продолжимую на все точки контура L, кроме, быть может, заданных точек $c_1, c_2, \ldots, c_n$ этого контура, вблизи которых

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z - c_j|^{\alpha}}, \qquad \alpha = \text{const} < 1, \tag{93,1}$$

по граничному условию

$$a(t) u^+ - b(t) v^+ = c(t), \tag{93,2}$$

---

[1]) Из новейших приложений укажем применения к безмоментной теории оболочек; см. статью А. Л. Гольденвейзера [1]. Применение к одной важной задаче теории дифференциальных уравнений с частными производными смешанного типа дано в заметке А. В. Бицадзе [3].

где $a(t)$, $b(t)$, $c(t)$ — заданные на L действительные функции класса H_0 при узлах $c_1, c_2, \ldots, c_n$, причем $a^2(t)+b^2(t) \neq 0$ всюду на L[1]).

Мы будем предполагать еще, что контур L удовлетворяет условию Ляпунова.

Путем конформного отображения эту задачу, как в § 43, можно свести к случаю, когда S^+ — круг[2]). Этот случай мы и рассмотрим теперь.

2°. Итак, пусть L — окружность $|z|=1$, а S^+ — круг $|z|<1$; через S^- мы обозначим область $|z|>1$.

После того, что было сказано в §§ 41, 43 и 83, п. 2°, решение поставленной задачи почти очевидно. Поэтому мы ограничимся краткими указаниями[3]).

Как в § 41, мы распространим искомую в области S^+ функцию $\Phi(z)$ и на область S^- так, чтобы для всех z в S^- и в S^+

$$\Phi_*(z) = \overline{\Phi}\left(\frac{1}{z}\right) = \Phi(z). \tag{93,3}$$

Это, как в § 41, приводит к задаче сопряжения, соответствующей задаче Римана — Гильберта (93,2),

$$(a+ib)\Phi^+(t)+(a-ib)\Phi^-(t)=2c \tag{93,4}$$

или

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t), \tag{93,5}$$

где

$$G(t)=-\frac{a-ib}{a+ib}, \qquad g(t)=\frac{2c}{a+ib}. \tag{93,6}$$

Аналогично тому, что было сделано в § 80 (см. также § 83), разобьем все решения рассматриваемой задачи Римана — Гильберта на классы, относя к классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ решения, остающиеся ограниченными вблизи заданных неособенных узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$.

Индекс $\varkappa$ данного класса мы определим формулой

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{a-ib}{a+ib}\right]_L, \tag{93,7}$$

выбирая скачки аргумента функции $G(t)$ при переходе через точки c_j в соответствии с рассматриваемым классом решений, как было указано в § 83 (формула (83,9)). *Скачки аргумента отношения* $\frac{a-ib}{a+ib}$, *равного* $-G(t)$, *мы будем всегда принимать равными скачкам аргумента* $G(t)$.

---

1) В отношении точек разрыва c_j последнее условие, как всегда, следует понимать в том смысле, что

$$a^2(c_j \pm 0)+b^2(c_j \pm 0) \neq 0.$$

2) На основании сказанного в начале § 43 легко видеть, что условия, наложенные нами на L, обеспечивают сохранение требуемых свойств рассматриваемых функций при конформном отображении на круг.

3) Приводимое в тексте полное решение задачи, насколько мне известно, никем еще указано не было. Один частный случай рассмотрен в статье F. Noether [1], но законченного решения автор не получил даже в этом частном случае. Законченное решение для другого частного случая было дано С. Л. Соболевым [1] методом, отличным от излагаемого в тексте (воспроизводим сноску, сделанную в первом издании).

В противоположность тому, что имеет место в случае непрерывных коэффициентов, число $\varkappa$ теперь может быть как четным, так и нечетным[1]).

Пусть $X(z)$ обозначает каноническую функцию данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ задачи (93,5), удовлетворяющую добавочному условию

$$X_*(z) = \overline{X}\left(\frac{1}{z}\right) = z^{\varkappa} X(z); \tag{93,8}$$

функция $X(z)$ определена с точностью до постоянного действительного множителя и может быть вычислена по формулам (41,9) — (41,11), (41,13), (41,14), если теперь понимать выражение

$$\ln\left[t^{-\varkappa} G(t)\right] = i \arg\left[-t^{-\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right] = i\Theta(t) \tag{93,9}$$

так, как было указано в § 83, вслед за формулой (83,16)[2]).

Общее решение данного класса однородной задачи Римана — Гильберта, получающейся из (93,2) при $c(t) = 0$, дается при $\varkappa \geqslant 0$ формулой

$$\Phi(z) = X(z)\left(C_0 z^{\varkappa} + C_1 z^{\varkappa-1} + \ldots + C_{\varkappa}\right), \tag{93,10}$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_{\varkappa}$ — постоянные, связанные соотношениями

$$C_k = \overline{C}_{\varkappa-k}, \tag{93,11}$$

а в остальном — произвольные, совершенно так, как в § 41 (с той лишь разницей, что здесь $\varkappa$ может быть и нечетным числом). В соответствии с этим *однородная задача при $\varkappa \geqslant 0$ имеет ровно $\varkappa+1$ линейно независимых решений данного класса*, как в § 41 (линейная независимость понимается так же, как в § 40, п. 2°); *при $\varkappa \leqslant -1$ однородная задача не имеет решений данного класса, отличных от нуля.*

Неоднородная задача (93,2) *при $\varkappa \geqslant -1$ разрешима* (*в данном классе*) *при всякой правой части $c(t)$; в частности, при $\varkappa = -1$ она разрешима однозначно.*

При $\varkappa \leqslant -2$ эта задача имеет (*единственное*) *решение данного класса лишь тогда, когда соблюдены следующие условия* (их число равно $-\varkappa-1$):

при $\varkappa$ четном[3]):

$$\begin{aligned} &\int_0^{2\pi} \Omega(\vartheta)\, c(\vartheta) \cos k\vartheta \, d\vartheta = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, -\frac{\varkappa}{2} - 1, \\ &\int_0^{2\pi} \Omega(\vartheta)\, c(\vartheta) \sin k\vartheta \, d\vartheta = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, -\frac{\varkappa}{2} - 1; \end{aligned} \tag{93,12}$$

---

[1]) Мы не можем теперь утверждать, что изменение аргумента отношения $\frac{a-ib}{a+ib}$ равно удвоенному изменению аргумента выражения $a - ib$, уже потому, что скачок последнего аргумента при переходе через точки c_j нами не фиксирован в отдельности.

[2]) В нашем случае в формуле (83,16) следует считать $a = 0$ и взять верхний знак.

[3]) В этом случае мы имеем те же формулы, что и в § 41.

при $\varkappa$ нечетном

$$\left.\begin{aligned}&\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)\,c(\vartheta)\cos\left(k+\frac{1}{2}\right)\vartheta\,d\vartheta=0,\\&\int_0^{2\pi}\Omega(\vartheta)\,c(\vartheta)\sin\left(k+\frac{1}{2}\right)\vartheta\,d\vartheta=0,\end{aligned}\right\}\quad k=0,\,1,\,\ldots,\,-\frac{\varkappa+1}{2}-1. \tag{93,13}$$

Здесь $\Omega(\vartheta)$ обозначает действительную функцию, определенную, как в § 41 (формула (41,22)),

$$\Omega(\vartheta)=\frac{1}{\pm\sqrt{a^2(\vartheta)+b^2(\vartheta)}}\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_0^{2\pi}\Theta(\vartheta_1)\operatorname{ctg}\frac{\vartheta_1-\vartheta}{2}\,d\vartheta_1\right\} \tag{93,14}$$

со следующим добавлением: в § 41 знак перед радикалом $\sqrt{a^2+b^2}$ безразличен, ибо там это выражение, изменяясь непрерывно на L, сохраняет один и тот же знак. В рассматриваемом же сейчас случае это не имеет места. Поэтому следует теперь иметь в виду, что

$$\pm\sqrt{a^2(\vartheta)+b^2(\vartheta)}=(a+ib)\sqrt{\frac{a-ib}{a+ib}}=(a+ib)\,e^{\frac{i\omega}{2}},$$

где

$$\omega=\arg\frac{a-ib}{a+ib},$$

причем при переходе через точки разрыва c_j следует изменять аргумент ω так, как это было указано выше, вслед за формулой (93,7).

Выпишем еще формулы, дающие решение данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ исходной неоднородной задачи (93,2). Эти формулы имеют такой же вид, как в § 41.

При $\varkappa\geqslant 0$ одно из частных решений задачи (93,2) дается формулой

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\left\{\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}+z^{\varkappa}\int_L\frac{t^{-\varkappa}c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}\right\}-$$
$$-\frac{z^{\varkappa}X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{t^{-\varkappa}c}{(a+ib)X^+(t)}\frac{dt}{t}; \tag{93,15}$$

при $\varkappa\leqslant -1$ решение (единственное) дается формулой

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}, \tag{93,16}$$

если только при $\varkappa\leqslant -2$ соблюдены условия существования (93,12) или (93,13).

Отметим отдельно формулу, дающую (частное) решение при $\varkappa=0$:

$$\Phi(z)=\frac{X(z)}{\pi i}\int_L\frac{c\,dt}{(a+ib)X^+(t)(t-z)}-\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L\frac{c}{(a+ib)X^+(t)}\frac{dt}{t}. \tag{93,17}$$

3°. Приведем, наконец, **решение задачи Римана — Гильберта для полуплоскости.** Будем применять обозначения, принятые в §§ 42 и 83, п. 3°. Вследствие почти полной аналогии с предыдущим мы ограничимся приведением окончательных формул и краткими указаниями.

Задача Римана — Гильберта для полуплоскости S^+ формулируется совершенно так, как в п. 1°. Если бесконечно удаленная точка границы D (действительной оси) причисляется к узлам, то условие (93,1) для этой точки следует понимать так: $|\Phi(z)| < \text{const} \cdot |z|^\alpha$, $\alpha = \text{const} < 1$, при больших $|z|$.

Как в § 42, интересующая нас задача сводится к решению задачи сопряжения (93,4) или, что то же (93,5), где на этот раз границей является прямая D, а решение должно удовлетворять условию

$$\overline{\Phi}(z) = \Phi(z)$$

и быть ограниченным всюду, кроме, быть может, окрестностей некоторых узлов.

Индекс данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ определяется формулой

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln G(t)]_D, \tag{93,18}$$

где по-прежнему

$$G(t) = -\frac{a-ib}{a+ib},$$

а значения $\ln G(t)$ следует выбирать так, как в § 83, п. 3°; о том, как следует понимать формулу (93,18), см. в том же § 83, п. 3°, а также замечание в конце названного параграфа. Целое число $\varkappa$ может быть как четным, так и нечетным.

Каноническую функцию $X(z)$ данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ задачи сопряжения мы можем определить формулой (см. (83,20), (83,21))

$$X(z) = \begin{cases} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^+, \\ \left(\dfrac{z+i}{z-i}\right)^{\varkappa} e^{\Gamma(z)} & \text{при } z \in S^-, \end{cases} \tag{93,19}$$

где на этот раз

$$\Gamma(z) = \frac{z+i}{2\pi i}\int_D \frac{\ln G_0(t)\,dt}{(t+i)(t-z)} + \gamma = \frac{z+i}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{(t+i)(t-z)} + \gamma,$$

$$G_0(t) = \left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa} G(t) = -\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}, \tag{93,20}$$

$$\Theta(t) = \arg G_0(t) = \arg\left\{-\left(\frac{t+i}{t-i}\right)^{\varkappa}\frac{a-ib}{a+ib}\right\}, \tag{93,21}$$

причем в последней формуле аргумент должен выбираться согласно условию, принятому в § 83, п. 3°, в соответствии с рассматриваемым классом решений. Через γ обозначена произвольная пока постоянная, которую мы ввели с целью несколько упростить дальнейшие формулы. А именно, эту постоянную мы подберем так, чтобы $\overline{\Gamma}(z) = \Gamma(z)$. Для этого, как легко видеть, достаточно положить

$$\gamma = -\frac{i}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{1+t^2},$$

так что окончательно

$$\Gamma(z) = \frac{z+i}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{(t+i)(t-z)} - \frac{i}{2\pi}\int_D \frac{\Theta(t)\,dt}{1+t^2} = \frac{1}{4\pi}\int_D \left[\frac{z+i}{t+i} + \frac{z-i}{t-i}\right]\frac{\Theta(t)\,dt}{t-z}. \tag{93,22}$$

При таком выборе $\Gamma(z)$ будем иметь, как в случае непрерывных коэффициентов (§ 42),

$$\overline{X}(z) = \left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa} X(z). \tag{93,23}$$

Общее решение данного класса однородной задачи Римана—Гильберта при $\varkappa \geqslant 0$ дается формулой

$$\Phi(z) = X(z)\left\{C_0 + C_1\frac{z-i}{z+i} + \ldots + C_{\varkappa}\left(\frac{z-i}{z+i}\right)^{\varkappa}\right\},$$

где $C_0, \ldots, C_{\varkappa}$ — постоянные, подчиненные условиям

$$\overline{C}_k = C_{\varkappa-k}, \tag{93,24}$$

а в остальном произвольные. При $\varkappa \leqslant -1$ однородная задача отличных от нуля решений данного класса не имеет.

Неоднородная задача Римана—Гильберта при $\varkappa \geqslant -1$ разрешима в данном классе при всякой правой части $c(t)$; в частности, при $\varkappa = -1$ она разрешима однозначно. При $\varkappa \leqslant -2$ эта задача имеет (единственное) решение данного класса тогда и только тогда, когда соблюдены следующие условия, вытекающие после некоторых простых преобразований из условий (83,24):

$$\left.\begin{aligned} &\int_D \Omega(t)\,c(t)\cos 2k\vartheta\,dt = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\frac{\varkappa}{2}-1,\\ &\int_D \Omega(t)\,c(t)\sin 2k\vartheta\,dt = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, -\frac{\varkappa}{2}-1, \end{aligned}\right\} \tag{93,25}$$

при $\varkappa$ четном и

$$\left.\begin{aligned} &\int_D \Omega(t)\,c(t)\cos(2k+1)\vartheta\,dt = 0,\\ &\int_D \Omega(t)\,c(t)\sin(2k+1)\vartheta\,dt = 0, \end{aligned}\quad k = 0, 1, \ldots, -\frac{\varkappa+1}{2}-1,\right\} \tag{93,26}$$

при $\varkappa$ нечетном; в этих формулах $\vartheta = \arg(t+i) = -\arg(t-i)$, а $\Omega(t)$ обозначает действительную функцию

$$\Omega(t) = \frac{1}{\pm\sqrt{a^2(t)+b^2(t)}\,(1+t^2)}\exp\left\{-\frac{1}{4\pi}\int_D\left[\frac{t+i}{t_1+i}+\frac{t-i}{t_1-i}\right]\frac{\Theta(t_1)\,dt_1}{t_1-t}\right\}; \tag{93,27}$$

относительно выбора знака перед радикалом в последней формуле см. сказанное в предыдущем пункте вслед за формулой (93,14).

Одно из частных решений неоднородной задачи сопряжения, соответствующей рассматриваемой задаче Римана — Гильберта, дается формулой (см. (83,22))

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_D \frac{z+i}{t+i}\,\frac{g(t)\,dt}{X^{+}(t)\,(t-z)}. \tag{93,28}$$

При $\varkappa = -1$ это решение будет также (единственным) решением данного класса задачи Римана—Гильберта. При $\varkappa \geqslant 0$ одним из частных решений задачи Римана—Гильберта будет

$$\frac{1}{2}[\Phi(z) + \overline{\Phi}(z)];$$

общее же решение получим прибавлением общего решения однородной задачи.

При $\varkappa \leqslant -2$ решение (единственное) задачи Римана — Гильберта дается формулой (93,28), если соблюдены необходимые и достаточные условия (93,25) или (93,26).

Замечание. Если бесконечно удаленная точка не является точкой разрыва, то предыдущие формулы можно упростить подобно тому, как было указано в замечании в конце § 83; аналогично поступаем для случая, когда $G(-\infty) = G(+\infty)$, но $g(-\infty) \neq g(+\infty)$.

§ 94. Частный случай: смешанная задача теории голоморфных функций. Пусть на замкнутом контуре Ляпунова L заданы раздельно лежащие дуги $a_1b_1, a_2b_2, \ldots, a_pb_p$ (точки $a_1, b_1, a_2, b_2, \ldots$ следуют друг за другом в положительном направлении на L) и пусть *требуется найти голоморфную в S^+ функцию $\Phi(z) = u + iv$ по граничному условию*

$$u^+ = f(t) \text{ на } L', \qquad v^+ = g(t) \text{ на } L'', \tag{94,1}$$

где $f(t)$, $g(t)$ — функции класса H, заданные соответственно на L' и L'', причем L' обозначает совокупность дуг a_jb_j ($j = 1, 2, \ldots, p$), а L'' — остальную часть L, т. е. совокупность дуг b_ja_{j+1} ($j = 1, \ldots, p$); под a_{p+1} подразумевается a_1; мы считаем, как и в предыдущем параграфе, что $\Phi(z)$ непрерывно продолжима на L всюду, кроме, быть может, точек a_j, b_j, вблизи которых соответственно

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-a_j|^\alpha}, \qquad |\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-b_j|^\alpha}, \qquad \alpha = \text{const} < 1. \tag{94,2}$$

Задача эта есть частный случай предыдущей

$$a(t)u^+ - b(t)v^+ = c(t), \tag{94,3}$$

если считать:

$$\begin{aligned} &a(t) = 1, \quad b(t) = 0, \qquad c(t) = f(t) \text{ на } L', \\ &a(t) = 0, \quad b(t) = -1, \quad c(t) = g(t) \text{ на } L''. \end{aligned} \tag{94,4}$$

Путем конформного отображения эта задача, как в предыдущем параграфе, может быть сведена к случаю круга. Поэтому мы будем считать, что L — окружность $|z| = 1$, а S^+ — круг $|z| < 1$.

Согласно общему способу, указанному в предыдущем параграфе, мы, прежде всего, должны найти каноническое решение $X(z)$ данного класса однородной задачи сопряжения $(a + ib)\Phi^+ + (a - ib)\Phi^- = 0$ (на L), удовлетворяющее добавочному условию

$$X_*(z) = z^\varkappa X(z). \tag{94,5}$$

В нашем случае эта последняя задача имеет вид

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0 \text{ на } L', \quad \Phi^+(t) - \Phi^-(t) = 0 \text{ на } L''. \tag{94,6}$$

Второе из условий (94,6) показывает, что L'' не является линией скачков для функции $\Phi(z)$, так что предыдущая задача сводится к задаче определения кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$ с линией скачков $L' = a_1b_1 + \ldots + a_pb_p$ по первому из условий (94,6), т. е. к задаче

$$\Phi^+(t) + \Phi^-(t) = 0 \text{ на } L'. \tag{94,7}$$

Эта задача уже решена нами в § 85.

Будем для определенности искать решение самого обширного класса т. е. класса h_0. Соответствующее каноническое решение задачи (94,7 есть (§ 85)

$$X(z)=\frac{C}{\sqrt{R(z)}},$$

где C — произвольная постоянная, отличная от нуля, а

$$R(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j); \tag{94,8}$$

согласно условию, принятому в § 85, мы будем считать, что при больших $|z|$

$$\sqrt{R(z)}=z^p+\alpha_1 z^{p-1}+\ldots \tag{94,9}$$

В соответствии с этим под

$$\sqrt{R(0)}=\left\{\prod_{j=1}^{p}a_j b_j\right\}^{\frac{1}{2}} \tag{94,10}$$

мы будем подразумевать значение указанной ветви $\sqrt{R(z)}$ при $z=0$. Принимая во внимание, что $\overline{a}_j=a_j^{-1}$, $\overline{b}_j=b_j^{-1}$, получаем:

$$R_*(z)=\overline{R}\left(\frac{1}{z}\right)=\prod_{j=1}^{p}\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{a_j}\right)\left(\frac{1}{z}-\frac{1}{b_j}\right)=\frac{R(z)}{z^{2p}R(0)},$$

откуда, как легко проверить, следует, что

$$[\sqrt{R(z)}]_*=\frac{\sqrt{R(z)}}{z^p\sqrt{R(0)}},$$

где радикалы понимаются в только что указанном смысле, и, значит

$$X_*(z)=\frac{\overline{C}}{[\sqrt{R(z)}]_*}=\frac{\overline{C}\sqrt{R(0)}}{\sqrt{R(z)}}z^p=\frac{\overline{C}}{C}\sqrt{R(0)}\,z^pX(z). \tag{94,11}$$

Так как в нашем случае индекс

$$\varkappa=\varkappa_0=p \tag{94,12}$$

(ибо, как мы знаем, порядок $X(z)$ на бесконечности равен $-\varkappa$), то соотношение (94,5) будет удовлетворено, если мы положим:

$$\frac{\overline{C}}{C}\sqrt{R(0)}=1.$$

Введем обозначение

$$\sqrt{R(0)}=\left\{\prod_{j=1}^{p}a_j b_j\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{i\alpha}, \tag{94,13}$$

где α — действительная величина. Тогда мы можем взять, очевидно,

$$C=e^{\frac{i\alpha}{2}}=\sqrt[4]{R(0)}. \tag{94,14}$$

Таким образом, окончательно каноническое решение класса h_0 задачи сопряжения (94,7), удовлетворяющее условию (94,5), дается формулой

$$X(z)=\frac{\sqrt[4]{R(0)}}{\sqrt{R(z)}}=\frac{e^{\frac{i\alpha}{2}}}{\sqrt{R(z)}}; \tag{94,15}$$

эта функция есть в то же время каноническое решение требуемого вида однородной задачи сопряжения (94,6).

Следовательно, на основании сказанного в предыдущем параграфе *общее решение класса* h_0 *однородной смешанной задачи, получающейся из* (94,1) *при* $f(t)=0$, $g(t)=0$, *дается формулой*

$$\Phi_0(z)=\frac{\sqrt[4]{R(0)}}{\sqrt{R(z)}}(C_0z^p+C_1z^{p-1}+\ldots+C_p), \tag{94,16}$$

где $C_0, C_1, \ldots, C_p$ — *(вообще комплексные) постоянные, связанные соотношениями*

$$C_{p-j}=\overline{C}_j, \quad j=0, 1, \ldots, p, \tag{94,17}$$

а в остальном произвольные.

Имея функцию $X(z)$ и общее решение (94,16) однородной задачи, мы можем сразу написать общее решение класса h_0 исходной неоднородной задачи, пользуясь формулой (93,15) предыдущего параграфа: а именно, эта формула дает нам некоторое частное решение неоднородной задачи; прибавив к нему общее решение (94,16) однородной задачи, мы получим требуемое общее решение класса h_0 исходной задачи.

Мы получим, однако, более простое выражение для общего решения, если в качестве частного решения возьмем решение одного из тех классов, которым соответствует индекс нуль.

Таким классом будет, например, класс $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$, т. е. класс решений, ограниченных на концах $a_1, a_2, \ldots, a_p$ и могущих быть неограниченными на концах $b_1, b_2, \ldots, b_p$. Соответствующее каноническое решение однородной задачи сопряжения (94,7) будет, очевидно,

$$Z(z)=C\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}},$$

где

$$R_a(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j), \quad R_b(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-b_j). \tag{94,18}$$

На основании условия, принятого в § 85, под предыдущим радикалом подразумевается такая ветвь, что

$$\left[\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}\right]_{z=\infty}=1. \tag{94,19}$$

Положим аналогично предыдущему

$$\sqrt{\frac{R_a(0)}{R_b(0)}}=\left\{\prod_{j=1}^{p}\frac{a_j}{b_j}\right\}^{\frac{1}{2}}=e^{i\beta} \tag{94,20}$$

и

$$C=e^{-\frac{i\beta}{2}}=\left\{\prod_{j=1}^{p}\frac{b_j}{a_j}\right\}^{\frac{1}{4}}.$$

Тогда каноническая функция класса $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$

$$Z(z)=e^{-\frac{i\beta}{2}}\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}} \tag{94,21}$$

будет удовлетворять условию

$$Z_*(z) = Z(z).$$

В соответствии с этим одно из частных решений $\Psi(z)$ исходной неоднородной задачи будет, согласно формуле (93,17) предыдущего параграфа,

$$\Psi(z) = \frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}\int\limits_L \frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\frac{h(t)\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}\int\limits_L \frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\frac{h(t)\,dt}{t}; \tag{94,22}$$

где положено

$$h(t) = \begin{cases} f(t) & \text{на } L', \\ ig(t) & \text{на } L'', \end{cases} \tag{94,23}$$

а под $\dfrac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}} = \sqrt{\dfrac{R_b(t)}{R_a(t)}}$ подразумевается значение, принимаемое $\dfrac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}} = 1 : \sqrt{\dfrac{R_a(z)}{R_b(z)}}$ с левой стороны L (т. е. изнутри L).

Общее решение класса h_0 исходной задачи получим по формуле

$$\Phi(z) = \Psi(z) + \Phi_0(z), \tag{94,24}$$

где $\Psi(z)$ дается формулой (94,22), а $\Phi_0(z)$ определяется формулами (94,16) (94,17).

Заметим еще, что общее решение класса $h(a_1, \ldots, a_p)$ будет, очевидно, дано формулой

$$\Phi(z) = \Psi(z) + Ce^{-\frac{i\beta}{2}}\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}, \tag{94,25}$$

где C — произвольная действительная постоянная.

§ 95. Смешанная задача для полуплоскости. Формулы М. В. Келдыша и Л. И. Седова. Пусть на действительной оси Ox даны раздельно лежащие конечные отрезки a_jb_j, $j = 1, 2, \ldots, p$ (подразумевается, что $a_1 < b_1 < a_2 < b_2 \ldots$). Обозначим через D' совокупность этих отрезков, а через D'' — остальную часть действительной оси, так что D'' состоит из конечных отрезков b_ja_{j+1} $(j = 1, 2, \ldots, p-1)$ и из бесконечного «отрезка» b_pa_1, состоящего из двух полупрямых $b_p < x < \infty$ и $-\infty < x < a_1$. Смешанную задачу мы формулируем в нашем случае так:

Найти функцию $\Phi(z) = u + iv$, голоморфную в верхней полуплоскости $y > 0$ и ограниченную на бесконечности, по граничному условию

$$u^+ = f(t) \text{ на } D', \quad v^+ = g(t) \text{ на } D''; \tag{95,1}$$

мы считаем, что вблизи D (через $D = D' + D''$ мы обозначаем всю действительную ось) искомая функция $\Phi(z)$ удовлетворяет таким же условиям, как функция $\Phi(z)$ предыдущего параграфа, и что заданные функции $f(t)$, $g(t)$ удовлетворяют условию H соответственно на D' и D'', включая бесконечно удаленную точку (§ 19).

Решение этой задачи можно сразу получить путем простого преобразования формул предыдущего параграфа при помощи дробно-линейной подстановки $z + i = -(\zeta + i)^{-1}$, которой мы часто пользовались.

Мы, однако, получим более простой результат несколько иным способом, но вполне аналогичным способу, примененному в предыдущем параграфе. Вследствие этой аналогии мы ограничимся краткими указаниями[1]).

Однородная задача сопряжения, соответствующая нашей задаче, имеет вид

$$\Phi^+(t)+\Phi^-(t)=0 \text{ на } D', \quad \Phi^+(t)-\Phi^-(t)=0 \text{ на } D'', \tag{95,2}$$

причем требуется найти решение, обладающее свойством

$$\overline{\Phi}(z)=\Phi(z).$$

В качестве решения этой однородной задачи, играющего роль канонического решения класса h_0, мы возьмем функцию

$$X(z)=\frac{1}{\sqrt{R(z)}}, \tag{95,3}$$

где

$$R(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)(z-b_j); \tag{95,4}$$

под $\sqrt{R(z)}$ подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль D' плоскости и такая, что вблизи $z=\infty$

$$\sqrt{R(z)}=z^p+\alpha_1 z^{p-1}+\ldots; \tag{95,5}$$

это равносильно тому, что $\sqrt{R(z)}$ принимает на Ox положительные значения при $x>b_p$.

Легко видеть, что $X_*(z)=\overline{X}(z)=X(z)$. Мы не называем это решение каноническим потому, что оно обращается в нуль порядка $\geqslant 1$ на границе D (при $z=\infty$); однако здесь мы можем воспользоваться им совершенно так, как пользовались каноническим решением. А именно, как легко видеть, общее решение класса h_0 однородной задачи, получающейся из (95,1) при $f(t)=g(t)=0$, дается формулой

$$\Phi_0(z)=\frac{C_0z^p+C_1z^{p-1}+\ldots+C_p}{\sqrt{R(z)}}, \tag{95,6}$$

где $C_0, \ldots, C_p$ — произвольные действительные постоянные.

Найдем теперь, как в предыдущем параграфе, каноническое решение $Z(z)$ класса $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ задачи (95,2). Таким решением, очевидно, будет с точностью до постоянного множителя

$$Z(z)=\sqrt{\frac{R_a(z)}{R_b(z)}}, \tag{95,7}$$

где

$$R_a(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j), \quad R_b(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-b_j), \tag{95,8}$$

а под $\sqrt{\dfrac{R_a(z)}{R_b(z)}}=\dfrac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}$ подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль D' плоскости, принимающая на бесконечности значение 1. И в этом случае $Z_*(z)=\overline{Z}(z)=Z(z)$.

---

[1]) Ср. также решение несколько менее общей задачи, данное Ф. Д. Гаховым [3], [4].

Одно из частных решений $\Psi(z)$ исходной задачи (95,1) дается формулой (ср. (42,19))

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}\int_L \frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}\frac{h(t)\,dt}{t-z}, \tag{95,9}$$

где

$$h(t)=\begin{cases} f(t) \text{ на } D', \\ ig(t) \text{ на } D'', \end{cases} \tag{95,10}$$

а под $\frac{\sqrt{R_b(t)}}{\sqrt{R_a(t)}}$ понимается значение, принимаемое $\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}$ при $z\to t$ из верхней полуплоскости; под $\frac{\sqrt{R_b(z)}}{\sqrt{R_a(z)}}$ понимается в свою очередь величина, обратная величине $\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}}$.

Общее решение класса h_0 исходной задачи (95,1) дается, таким образом, формулой

$$\Phi(z)=\Psi(z)+\Phi_0(z), \tag{95,11}$$

где $\Phi_0(z)$ и $\Psi(z)$ определяются формулами (95,6) и (95,9).

Общее решение той же задачи класса $h(a_1, a_2, \ldots, a_p)$ дается формулой

$$\Phi(z)=\Psi(z)+C\frac{\sqrt{R_a(z)}}{\sqrt{R_b(z)}},$$

где C — действительная произвольная постоянная.

Полученные в этом параграфе формулы представляют собой формулы М. В. Келдыша и Л. И. Седова[1]).

---

[1]) М. В. Келдыш и Л. И. Седов [1]; Л. И. Седов [1]; ср. также A. Signorini [1].

ГЛАВА ПЯТАЯ

СИНГУЛЯРНЫЕ ИНТЕГРАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ОБЩЕМ СЛУЧАЕ. НЕКОТОРЫЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

В отделе I этой главы излагается теория сингулярных интегральных уравнений с интегралами типа Коши для случая, когда путь интегрирования — произвольная кусочно-гладкая линия, а коэффициенты соответствующего характеристического уравнения (см. § 96) могут иметь разрывы, но должны принадлежать, однако, классу H_0. Этот случай мы условно называем общим.

В том виде, как она излагается здесь, теория эта была дана в статье автора [6] и существенно дополнена в статье Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава [1]. В этой последней статье впервые введены понятия союзных классов решений и доказаны основные теоремы, приводимые в § 102.

Следует, впрочем, отметить, что в перечисленных работах теория изложена применительно к случаю, когда путь интегрирования — прерывистая гладкая линия[1]). Однако, как это легко установить сравнением нижеследующего изложения с названными выше статьями[2]), все почти без исключения результаты, а также их доказательства почти дословно переносятся и на интересующий нас здесь общий случай; основное различие заключается лишь в том, что вместо предложений, приведенных в § 22, мы пользуемся несколько более общими предложениями, приведенными в § 26.

Обобщение результатов названной выше статьи автора [6] на случай, когда линия интегрирования состоит из замкнутых и разомкнутых контуров, которые могут иметь конечное число общих точек, было дано в статье W. J. Trjitzinsky [1]. Затем Д. А. Квеселава [7], значительно упростив изложение и результаты предыдущего автора, обобщил на указанный случай также результаты статьи Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава [1].

Излагаемые ниже результаты являются более общими, чем результаты упомянутых авторов, и получены, как мне кажется, более естественным и прямым путем; последнее относится главным образом к решению задачи сопряжений для общего случая (глава IV, отдел I), на которое существенно опирается излагаемая ниже теория.

В отделе II даются некоторые простейшие приложения изложенной в отделе I теории. В отделе III рассматривается один вид сингулярного интегрального уравнения, отличный от рассмотренных ранее, а в отделе IV даются приложения к двум важным задачам смешанного типа теории упругости. Наконец, в отделе V приводятся краткие сведения относительно некоторых других результатов и обобщений.

---

[1]) О другом частном случае, когда линия интегрирования представляет собою совокупность гладких замкнутых контуров без общих точек, но коэффициенты характеристической части имеют разрывы (первого рода), будет сказано в § 103, п. 2°.

[2]) Их содержание изложено также в первом издании настоящей книги.

I. Сингулярные интегральные уравнения в общем случае

§ 96. Определения, обозначения и термины. 1°. Во всем этом отделе, если противное не оговорено, L обозначает кусочно-гладкую линию (§ 1). Гладкие дуги, составляющие L, обозначаются через L_k, $k = 1, 2, \ldots, p$, а узлы (в том числе и концы) линии L — через c_k, $k = 1, 2, \ldots, n$. Через t_0, t, t_1 обозначаются точки линии L.

2°. В этом отделе будут изучаться уравнения вида $\mathbf{K}\varphi = f$, где $\mathbf{K}$ — оператор, определяемый формулой

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K(t_0, t)\varphi(t)\,dt}{t - t_0}, \tag{I}$$

в которой $A(t)$ и $K(t_0, t)$ обозначают функции, подчиненные определенным условиям, которые будут сейчас указаны.

А именно, для того чтобы иметь возможность применить без особых усложнений методы, аналогичные тем, которыми мы пользовались в главе II, мы будем считать, что оператор $\mathbf{K}$ представим в одном из следующих двух видов:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt \tag{a}$$

или

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\varphi(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k'(t_0, t)\varphi(t)\,dt, \tag{b}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $k(t_0, t)$, $k'(t_0, t)$ — функции класса H_0 на L; условие, налагаемое на две последние функции, можно значительно ослабить, не изменяя результатов, но мы на этом останавливаться не будем.

От формы представления (I) оператора $\mathbf{K}$ можно перейти к формам (a) или (b), если положить

$$B(t) = K(t, t),$$
$$k(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - B(t_0)}{t - t_0}, \quad k'(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - B(t)}{t - t_0}$$

и если предположить, что функции $B(t)$, $k(t_0, t)$ или $k'(t_0, t)$ удовлетворяют указанным выше условиям.

Если, в частности, *обе* функции $k(t_0, t)$ и $k'(t_0, t)$ принадлежат классу H_0 (по обеим переменным), то уравнение (I) может быть приведено к любому из двух видов (a), (b). Однако мы этого предположения вводить не будем, ибо оно никаких существенных упрощений не внесет, а только снизит общность.

Таким образом, при наших предположениях, операторы типов (a) и (b), вообще говоря, несводимы друг к другу. Если мы, например, попытаемся преобразовать оператор типа (b) к виду (a) тем же путем, каким мы преобразовали оператор типа (I) к виду (a), получим:

$$A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\varphi(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k'(t_0, t)\varphi(t)\,dt =$$
$$= A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L \left\{\frac{B(t) - B(t_0)}{t - t_0} + k'(t_0, t)\right\}\varphi(t)\,dt;$$

но, вообще говоря, отношение $\frac{B(t)-B(t_0)}{t-t_0}$ имеет в окрестностях узлов c_k особенности вида $(t-t_0)^{-1}$, когда t_0 и t расположены на различных дугах L_j, сходящихся в c_k.

3°. Всюду в дальнейшем под **сингулярными операторами** мы будем подразумевать операторы одного из видов (a), (b), т. е. операторы K, K′, определяемые формулами

$$\mathrm{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt \tag{96,1}$$

и

$$\mathrm{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t, t_0)\psi(t)\,dt, \tag{96,2}$$

где $A(t)$, $B(t)$, $k(t_0, t)$ принадлежат классу H_0 на L.

Мы записали второй оператор, т. е. оператор вида (b), несколько иначе, чем выше, по причине, которая будет сейчас указана.

Операторы (96,1) и (96,2) мы будем называть **союзными** друг с другом, сохраняя определение союзных операторов вида (I), данное в § 46. Так же как в случае, изученном в главе II, союзные операторы и соответствующие им сингулярные интегральные уравнения тесно связаны друг с другом. Поэтому целесообразно (для того чтобы не умножать без надобности терминов и обозначений) изучать операторы вида (b) не самостоятельно, а в качестве операторов, союзных с оператором вида (a). Это, конечно, нисколько не ограничивает общности и тем более целесообразно, что одновременное рассмотрение союзных операторов неизбежно.

4°. Мы будем говорить, что операторы K и K′ **нормального типа**, если

$$A(t)+B(t)\neq 0, \qquad A(t)-B(t)\neq 0 \tag{96,3}$$

всюду на L; при $t=c_j$ под этим подразумевается, как всегда, что отличны от нуля пределы соответствующих выражений при $t\to c_j$ по любой из дуг L_k, имеющих концом c_j.

Во всем дальнейшем мы будем считать, что рассматриваемые операторы нормального типа.

5°. Оператор K^0, определяемый формулой

$$\mathrm{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{96,4}$$

мы будем называть **характеристической частью** оператора K, а функции $A(t_0)$, $B(t_0)$ — **коэффициентами** характеристической части.

Если через k мы обозначим фредгольмов оператор первого рода

$$\mathrm{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt, \tag{96,5}$$

то оператор K можно представить в виде суммы операторов K^0 и k, т. е.

$$\mathrm{K}\varphi=\mathrm{K}^0\varphi+\mathrm{k}\varphi. \tag{96,6}$$

Оператором, союзным с K^0, будет оператор $\mathrm{K}^{0\prime}$, определяемый формулой

$$\mathrm{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0)-\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{96,7}$$

В соответствии с этим

$$\mathbf{K}'\psi = \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \mathbf{k}'\psi, \tag{96,8}$$

где $\mathbf{k}'$ — фредгольмов оператор первого рода, союзный с оператором $\mathbf{k}$, т. е.

$$\mathbf{k}'\psi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L k(t, t_0)\,\psi(t)\,dt. \tag{96,9}$$

6°. Мы будем применять операторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ к функциям φ, ψ класса H^* на L. Легко видеть на основании результатов § 26, что эти операторы переводят функции класса H^* в функции того же класса. В частности, функции класса H_0 переводятся этими операторами в функции класса H_ε^*, а функции класса H_ε^* — в функции того же класса.

7°. В § 46 мы познакомились с важной формулой

$$\int_L \psi\mathbf{K}\varphi\,dt = \int_L \varphi\mathbf{K}'\psi\,dt, \tag{96,10}$$

где L представляет собой совокупность гладких замкнутых контуров, а φ, ψ — произвольные функции класса H.

Легко видеть, что эта формула сохраняет силу и в случае, когда L — произвольная кусочно-гладкая линия. Однако нам придется применять эту формулу к более широкому классу функций φ, ψ, чем функции класса H, а именно, к функциям класса H^*. Если φ и ψ — произвольные функции класса H^*, то интегралы в формуле (96,10) могут оказаться расходящимися. Но в дальнейшем мы будем применять формулу (96,10) лишь в случаях, когда в окрестности каждого узла одна из функций φ, ψ принадлежит классу H_ε^*. Легко проверить, что в этом случае формула (96,10) сохраняет силу.

8°. Уравнения следующих двух видов:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{96,11}$$

и

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t - t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t, t_0)\,\psi(t)\,dt = g(t_0), \tag{96,12}$$

где $f(t)$ и $g(t)$ — заданные функции класса H^* на L, мы будем называть *сингулярными интегральными уравнениями*; решения этих уравнений мы всегда будем разыскивать в классе H^*.

В дальнейшем мы не будем требовать, чтобы уравнение (96,11) или (96,12) удовлетворялось в точках, совпадающих с узлами линии L.

Мы будем всегда предполагать, что эти уравнения *нормального типа*, т. е. что *операторы* $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ нормального типа.

Уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ и $\mathbf{K}'\psi = g$, каковы бы ни были правые их части f и g, мы будем называть *союзными*.

Обычно мы будем рассматривать уравнение типа $\mathbf{K}'\psi = g$ не самостоятельно (ср. п. 3°), а как союзное с уравнением $\mathbf{K}\varphi = f$; это делается с единственной целью не умножать терминов и обозначений и нисколько нас не ограничивает.

9°. Уравнение простейшего вида

$$K^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0) \tag{96,13}$$

мы будем называть характеристическим уравнением, а функции $A(t_0)$, $B(t_0)$ — его коэффициентами.

Уравнение же

$$K^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0} = g(t_0) \tag{96,14}$$

мы будем называть союзным с характеристическим.

Замечание. Под узлами линии L мы подразумеваем не только узлы в геометрическом смысле, но и другие точки этой линии, в которых допускаются разрывы рассматриваемых функций (ср. § 78).

Мы увидим, что главную роль играют разрывы функций $A(t)$, $B(t)$, а не геометрические свойства линии L (т. е. наличие угловых точек и пр.).

§ 97. Решение характеристического уравнения. 1°. Подобно тому как мы поступили в главе II, начнем с решения характеристического уравнения

$$K^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0). \tag{97,1}$$

Мы будем считать, как было уже сказано, что

$$A^2(t) - B^2(t) \neq 0 \text{ всюду на } L. \tag{97,2}$$

Кроме того, мы будем считать пока, что $f(t)$ принадлежит классу H_0; решение же $\varphi(t)$ уравнения (97,1) мы будем, как было условлено, искать в классе H^*.

Введем в рассмотрение кусочно-голоморфную функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}, \tag{97,3}$$

исчезающую на бесконечности. Тогда

$$\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0), \quad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = \Phi^+(t_0) + \Phi^-(t_0), \tag{97,4}$$

откуда следует, что функция $\Phi(z)$ должна быть исчезающим на бесконечности решением задачи сопряжения

$$(A+B)\Phi^+ - (A-B)\Phi^- = f \tag{97,5}$$

или

$$\Phi^+(t_0) = G(t_0)\Phi^-(t_0) + \frac{f(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{97,6}$$

где

$$G(t_0) = \frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}. \tag{97,7}$$

Задача эта была подробно изучена в предыдущей главе (отдел I).

Особенные и неособенные узлы, соответствующие этой задаче (§ 80), мы будем теперь называть особенными и неособенными узлами, соответствующими оператору K^0 или уравнению $K^0\varphi = f$.

Неособенные узлы мы будем по-прежнему обозначать через $c_1, c_2, \ldots, c_m$ $(m \leqslant n)$.

Самое общее решение (класса H^*) задачи (97,6), имеющее конечный порядок на бесконечности, можно представить, например, в виде (§ 80, п. 4°)

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{[A(t)+B(t)]\,X^+(t)\,(t-z)} + X_0(z)\,Q(z), \tag{97,8}$$

где $X(z)$ — каноническая функция какого-либо класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, соответствующая задаче (97,6), $X_0(z)$ — каноническая функция для той же задачи класса h_0, а $Q(z)$ — некоторый полином.

Решение $\Phi(z)$ должно быть подчинено еще условию, что $\Phi(\infty) = 0$; этим условием мы займемся ниже, а теперь выведем некоторые заключения из того факта, что *если существуют решения уравнения* (97,1), *то все они необходимо даются формулой* $\varphi(t_0) = \Phi^+(t_0) - \Phi^-(t_0)$, *в которой* $\Phi(z)$ *имеет вид* (97,8).

Вычислим $\varphi(t_0)$. Введем с этой целью обозначение

$$Z(t_0) = [A(t_0)+B(t_0)]\,X^+(t_0) = [A(t_0)-B(t_0)]\,X^-(t_0); \tag{97,9}$$

функции $X^+(t_0)$ и $X^-(t_0)$ определяются формулами (78,13).

Функцию $Z(t)$ мы будем называть *канонической функцией данного класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, *соответствующей уравнению* $K^0\varphi = f$ *или оператору* K^0.

В частности, каноническая функция $Z_0(t)$ класса $h_0 = h(0)$, соответствующая случаю $q = 0$, определяется формулами

$$Z_0(t_0) = [A(t_0)+B(t_0)]\,X_0^+(t_0) = [A(t_0)-B(t_0)]\,X_0^-(t_0). \tag{97,9a}$$

Введем обозначения

$$A^*(t_0) = \frac{A(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}, \quad B^*(t_0) = \frac{B(t_0)}{A^2(t_0)-B^2(t_0)}. \tag{97,10}$$

Тогда, пользуясь формулами Сохоцкого — Племеля, легко получим (ср. § 47):

$$\varphi(t_0) = K^*f + B^*(t_0)\,Z_0(t_0)\,P(t_0), \tag{97,11}$$

где

$$K^*f \equiv A^*(t_0)\,f(t_0) - \frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i} \int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{Z(t)\,(t-t_0)}, \tag{97,12}$$

а $P(t_0)$ обозначает полином.

На основании определения (97,9) функции $Z(t_0)$ и на основании формул (78,13) и (78,14) очевидно, что

$$Z(t_0) = \omega_0(t_0) \prod_{k=1}^{n} (t_0 - c_k)^{\gamma_k}, \tag{97,13}$$

где $\omega_0(t_0)$ — функция класса H_0, не обращающаяся в нуль, а

$$0 < \operatorname{Re}\gamma_k < 1 \quad (k = 1, 2, \ldots, q); \quad -1 < \operatorname{Re}\gamma_k < 0 \quad (k = q+1, \ldots, m);$$
$$\operatorname{Re}\gamma_k = 0 \quad (k = m+1, \ldots, n). \tag{97,14}$$

Такие же формулы имеют место для $Z_0(t_0)$; следует только в последнем случае считать $q = 0$.

2°. Исходя из сказанного, приходим к следующим выводам:

В окрестностях всех особенных узлов c_k $(k = m+1, \ldots, n)$ *решение* $\varphi(t)$ *принадлежит классу* H_ε^*. *Кроме того, оно ограничено вблизи тех из особенных узлов* c_k, *для которых* $\gamma_k \neq 0$; *вблизи же тех узлов* c_k, *для которых* $\gamma_k = 0$, *оно может быть неограниченным как* $\ln(t - c_k)$. Все это следует из результатов § 26.

Если в окрестности какого-либо неособенного узла решение $\varphi(t)$ *ограничено, то оно принадлежит в этой окрестности классу* H_0.

В самом деле, пусть c_k — неособенный узел, вблизи которого функция $\varphi(t_0)$ ограничена. Возьмем в формулах (97,11), (97,12) в качестве канонической функции $Z(t)$ такую, которая исчезает на c_k. Тогда первое слагаемое правой части (97,11) принадлежит в окрестности c_k классу H_0 (§ 26). Поэтому для того, чтобы функция $\varphi(t_0)$ была ограниченной, необходимо, чтобы полином $P(t_0)$ имел корень c_k, и наше утверждение становится очевидным.

3°. Разобьем теперь все возможные решения рассматриваемого интегрального уравнения $\mathbf{K}^0\varphi = f$ на классы, относя к классу $h(c_1, c_2, \ldots c_q)$, $0 \leqslant q \leqslant m$, все решения $\varphi(t)$, которые остаются ограниченными в окрестностях неособенных узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$. Мы видели, что такие решения будут принадлежать в окрестностях узлов $c_1, c_2, \ldots, c_q$ классу H_0; поэтому данное здесь определение класса решений согласуется с определением класса функций $\varphi(t)$, принятым в § 82.

Легко видеть, что решению класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ интегрального уравнения (97,1) будет, по формуле (97,3), соответствовать решение одноименного класса задачи сопряжения (97,6)[1]. Поэтому для нахождения всех решений этого класса уравнения (97,1) достаточно найти все решения одноименного класса задачи сопряжения (97,6), исчезающие на бесконечности.

Исходя из того, что мы знаем о решении этой последней задачи (§ 80), легко приходим к следующим заключениям.

Будем называть индексом $\varkappa$ данного класса $h(c_1, \ldots, c_q)$ уравнения $\mathbf{K}^0\varphi = f$ или оператора $\mathbf{K}^0$ индекс одноименного класса задачи сопряжения (97,6). Тогда, если подразумевать под $Z(t)$ каноническую функцию класса $h(c_1, \ldots, c_q)$, будем иметь:

При $\varkappa \geqslant 0$ *все решения класса* $h = h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ *уравнения* $\mathbf{K}^0\varphi = f$ *даются формулой*

$$\varphi(t_0) = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0) Z(t_0) P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{97,15}$$

где $P_{\varkappa-1}(t_0)$ *обозначает произвольный полином степени не выше* $\varkappa - 1$ $[P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$ при $\varkappa = 0]$.

При $\varkappa < 0$ *решение (единственное) существует при соблюдении (необходимых и достаточных) условий*

$$\int\limits_L \frac{t^k f(t)\, dt}{Z(t)} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{97,16}$$

и дается той же формулой (97,15), *в которой* $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$.

Из предыдущего следует также, что при $\varkappa \leqslant 0$ однородное уравнение $\mathbf{K}^0\varphi = 0$ не имеет решений класса h, отличных от нуля; при $\varkappa > 0$

---

[1]) Если функция $\varphi(t_0)$ ограничена вблизи данного неособенного узла c и, следовательно, принадлежит классу H_0 в окрестности этого узла, то функция $\Phi(z)$, определяемая формулой (97,3), будет почти ограничена вблизи c. Но тогда, как мы знаем (§ 82), она будет необходимо ограничена вблизи c.

оно имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений класса h, совокупность которых дается формулой

$$\varphi(t) = B^*(t)\,Z(t)\,P_{\varkappa-1}(t), \tag{97,17}$$

где $P_{\varkappa-1}(t)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$.

Легко видеть, что предыдущие результаты останутся в силе, если функция $f(t)$, вместо того чтобы принадлежать классу H_0, принадлежит классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Только в этом случае решения могут быть неограниченными также вблизи тех особенных узлов, для которых $\gamma_k \neq 0$, если функция $f(t)$ не ограничена вблизи этих узлов.

Замечание. Рассмотрим уравнение

$$\mathrm{K}_1\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0), \tag{97,18}$$

получающееся из (97,1) заменой $B(t_0)$ на $-B(t_0)$. Это уравнение не будет союзным с уравнением (97,1), кроме случая $B(t_0) = \mathrm{const}$ (союзное уравнение будет рассмотрено в следующем параграфе). Соответствующая уравнению (97,18) задача сопряжения получается из задачи (97,6) заменой $B(t_0)$ на $-B(t_0)$, т. е. имеет вид

$$\Psi^+(t_0) = [G(t_0)]^{-1}\,\Psi^-(t_0) + \frac{f(t_0)}{A(t_0) - B(t_0)}, \tag{97,19}$$

ибо при замене B на $-B$ функция G заменяется на G^{-1}. Однородные задачи сопряжения, соответствующие задачам (97,6) и (97,19), являются, таким образом, союзными (§ 79). Поэтому на основании сказанного в § 79, если $X(z)$ и $\varkappa$ — каноническая функция и индекс класса h, соответствующие задаче (97,6), то $[X(z)]^{-1}$ и $-\varkappa$ являются канонической функцией и индексом класса h', союзного с h, соответствующими задаче (97,18).

Принимая теперь во внимание формулы (97,9), определяющие каноническую функцию $Z(t)$, соответствующую уравнению (97,1), и такие же формулы, составленные применительно к уравнению (97,19), приходим к следующему выводу.

Все формулы и результаты настоящего параграфа останутся в силе, если заменить соответственно

$$B(t), \qquad Z(t) \qquad \varkappa, \quad h$$

на

$$-B(t), \quad \frac{A^2(t) - B^2(t)}{Z(t)}, \quad -\varkappa, \quad h',$$

где h' обозначает класс, союзный с h.

§ 98. Решение уравнения, союзного с характеристическим. 1°. Рассмотрим теперь уравнение

$$\mathrm{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0} = g(t_0), \tag{98,1}$$

союзное с уравнением $\mathrm{K}^0\varphi = f$. Мы будем считать, что $g(t)$ принадлежит классу H_0, и будем, как всегда, искать решения $\psi(t)$, принадлежащие классу H^*.

Введем кусочно-голоморфную функцию

$$\Psi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{B(t)\,\psi(t)\,dt}{t-z},$$

исчезающую на бесконечности. Принимая во внимание, что

$$B(t_0)\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0),$$

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0}=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0), \tag{98,2}$$

убеждаемся, совершенно аналогично случаю § 48, что решение уравнения (98,1) эквивалентно следующей граничной задаче: найти функцию $\psi(t)$ класса H^* и кусочно-голоморфную функцию $\Psi(z)$, исчезающую на бесконечности, по условиям:

$$\begin{aligned} A(t_0)\psi(t_0)&=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)+g(t_0),\\ B(t_0)\psi(t_0)&=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0). \end{aligned} \tag{98,3}$$

Последние же условия в свою очередь эквивалентны условиям

$$(A+B)\psi=2\Psi^++g, \quad (A-B)\psi=2\Psi^-+g$$

или еще

$$\psi=\frac{2\Psi^+}{A+B}+\frac{g}{A+B}, \quad \psi=\frac{2\Psi^-}{A-B}+\frac{g}{A-B}. \tag{98,4}$$

Сравнивая правые части, приходим к задаче сопряжения

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0)+\frac{B(t_0)g(t_0)}{A(t_0)-B(t_0)}, \tag{98,5}$$

где, как в предыдущем параграфе,

$$G(t_0)=\frac{A(t_0)-B(t_0)}{A(t_0)+B(t_0)}, \tag{98,6}$$

причем требуется найти решение $\Psi(z)$, исчезающее на бесконечности. Решив эту задачу, мы найдем $\psi(t)$ по любой из формул (98,4).

Однородная задача сопряжения

$$\Psi^+(t_0)=[G(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0) \tag{98,7}$$

является союзной с однородной задачей

$$\Phi^+(t_0)=G(t_0)\Phi^-(t_0), \tag{98,8}$$

соответствующей задаче (97,6) предыдущего параграфа (см. § 79; ср. также замечание к предыдущему параграфу). Поэтому если $X(z)$ — каноническое решение класса $h=h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ этой последней задачи, то $[X(z)]^{-1}$ будет каноническим решением союзного класса $h'=h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ задачи (98,7), как это вытекает из сказанного в § 79. Поэтому, как легко видеть, общее решение задачи (98,5), имеющее конечный порядок на бесконечности, можно представить следующим образом:

$$\Psi(z)=\frac{[X(z)]^{-1}}{2\pi i}\int_L \frac{X^+(t)B(t)g(t)\,dt}{[A(t)-B(t)](t-z)}+[X_m(z)]^{-1}Q(z), \tag{98,9}$$

где $Q(z)$ — полином и где $X_m(z)$ обозначает каноническое решение класса $h_m=h(c_1, c_2, \ldots, c_m)$ однородной задачи (98,8), а следовательно, $[X_m(z)]^{-1}$ — каноническое решение класса h_0 задачи (98,7).

Мы должны выразить еще условие, что $\Psi(\infty)=0$. Не обращая пока внимания на это условие, выведем совершенно аналогично тому, что было сделано в предыдущем параграфе, некоторые следствия из того факта, что всякое решение интегрального уравнения (98,1) необходимо дается формулами (98,4), где $\Psi(z)$ обозначает выражение вида (98,9). Вычисляя $\psi(t_0)$ по одной из формул (98,4), получаем после простых выкладок, аналогичных выкладкам предыдущего параграфа (ср. также § 48),

$$\psi(t_0) = \mathrm{K}^{*\prime} g + \frac{P(t_0)}{Z_m(t_0)}, \tag{98,10}$$

где $P(t_0)$ — некоторый полином, $Z_m(t_0)$ — каноническая функция класса $h_m = h(c_1, c_2, \ldots, c_m)$, соответствующая уравнению (97,1) предыдущего параграфа, и

$$\mathrm{K}^{*\prime} g \equiv A^*(t_0) g(t_0) + \frac{1}{\pi i \mathrm{Z}(t_0)} \int\limits_L \frac{\mathrm{Z}(t) B^*(t) g(t)\, dt}{t - t_0}, \tag{98,11}$$

так что $\mathrm{K}^{*\prime}$ — оператор, союзный с оператором K^* предыдущего параграфа.

2°. Особенными и неособенными узлами, соответствующими оператору $\mathrm{K}^{0\prime}$ или уравнению $\mathrm{K}^{0\prime}\psi = g$, мы будем называть особенные или неособенные узлы, соответствующие задаче (98,7); это — то же самое, что особенные и неособенные узлы, соответствующие союзной с ней задаче (98,8) или, что то же, союзному с $\mathrm{K}^{0\prime}$ оператору K^0.

Легко видеть (ср. предыдущий параграф), что в окрестностях всех особенных узлов всякое решение $\psi(t)$ принадлежит классу H_ε^*; оно ограничено вблизи тех особенных узлов, для которых $\gamma_k \neq 0$, и может быть неограниченным как $\ln(t - c_k)$ вблизи тех узлов, для которых $\gamma_k = 0$.

Далее, так же как и в предыдущем параграфе, если решение ограничено вблизи какого-либо неособенного узла, то оно необходимо принадлежит классу H_0 в окрестности этого узла.

3°. Разобьем теперь все возможные решения уравнения (98,1) на классы совершенно так же, как в предыдущем параграфе.

Индексом данного класса уравнения (98,1) или оператора $\mathrm{K}^{0\prime}$ мы будем называть индекс соответствующей однородной задачи сопряжения (98,7) одноименного класса.

Если $\mathrm{X}(z)$ — каноническое решение класса $h = h(c_1, \ldots, c_q)$ задачи (98,8), то, как было сказано, $[\mathrm{X}(z)]^{-1}$ будет каноническим решением союзного класса $h' = h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ задачи (98,7). Следовательно, *индексы $\varkappa$ и $\varkappa'$ союзных классов h и h' союзных уравнений* (97,1) *и* (98,1) *равны по величине и обратны по знаку*:

$$\varkappa' = -\varkappa.$$

На основании изложенного легко устанавливаем следующее предложение:

Если $\varkappa' = -\varkappa \geqslant 0$, то все решения класса $h' = h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ уравнения (98,1) *даются формулой*

$$\psi(t_0) = \mathrm{K}^{*\prime} g + \frac{P_{\varkappa'-1}(t_0)}{\mathrm{Z}(t_0)}, \tag{98,12}$$

где $P_{\varkappa'-1}(t_0)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa' - 1$ ($P_{\varkappa'-1}(t_0) = 0$ при *$\varkappa_1 = 0$), а $\mathrm{Z}(t_0)$ — каноническая функция класса h, союзного с h' для союзного уравнения* (97,1).

Если $\varkappa' = -\varkappa < 0$, то решение класса h' существует лишь при соблюдении условий

$$\int\limits_L \mathrm{Z}(t) B^*(t) t^j g(t)\, dt = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, -\varkappa' - 1; \tag{98,13}$$

при соблюдении этих условий решение (единственное) дается той же формулой (98,12), *в которой* $P_{\varkappa'-1}(t_0) = 0$.

Формула (98,12) выводится совершенно так же, как была выведена формула (98,10); надо только дополнительно учесть условие $\Psi(\infty) = 0$, которое и показывает, что степень произвольного полинома не должна превосходить $\varkappa' - 1$ и что при $\varkappa' < 0$ должны иметь место условия (98,13).

Из предыдущего следует также, что при $\varkappa' \leqslant 0$ однородное уравнение $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = 0$ не имеет отличных от нуля решений класса h'; при $\varkappa' > 0$ оно имеет ровно $\varkappa'$ линейно независимых решений класса h', совокупность которых дается формулой

$$\psi(t) = \frac{P_{\varkappa'-1}(t)}{Z(t)}. \tag{98,14}$$

4°. Предыдущие результаты останутся в силе, если функция $g(t)$ принадлежит классу h' (а не необходимо классу H_0); только в этом случае решения могут быть неограниченными и вблизи тех особенных узлов, для которых $\gamma_k \neq 0$.

Замечание. Сопоставляя условия разрешимости союзных уравнений

$$\mathbf{K}^0\varphi = f, \quad \mathbf{K}^{0\prime}\psi = g,$$

легко приходим к следующему результату: для разрешимости уравнения $\mathbf{K}^0\varphi = f$ в данном классе h необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L f\psi_j\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \varkappa',$$

где ψ_j $(j = 1, \ldots, \varkappa')$ — полная система линейно независимых решений союзного класса h' союзного однородного уравнения $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = 0$; аналогично, для разрешимости уравнения $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = g$ в классе h' необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L g\varphi_j\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \varkappa,$$

где φ_j $(j = 1, 2, \ldots, \varkappa)$ — полная система линейно независимых решений союзного с h' класса h союзного однородного уравнения $\mathbf{K}^0\varphi = 0$.

Заметим еще, что если k и k' обозначают соответственно числа линейно независимых решений классов h и h' однородных уравнений $\mathbf{K}^0\varphi = 0$ и $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = 0$, то

$$k - k' = \varkappa\,[1],$$

где $\varkappa$ — индекс класса h для оператора $\mathbf{K}^0$.

Предыдущие результаты представляют собой частный случай важных теорем, которые будут доказаны в § 102.

§ 99. Регуляризация сингулярного уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$. Полученный в § 97 результат позволяет весьма просто привести сингулярное интегральное уравнение $\mathbf{K}\varphi = f$ к уравнению Фредгольма, подобно тому как это было сделано в § 57.

Изложенный в настоящем параграфе способ приведения к уравнению Фредгольма представляет собой развитие идеи, намеченной Т. Кар-

---

[1] При $\varkappa \geqslant 0$ имеем $k = \varkappa$, $k' = 0$; при $\varkappa \leqslant 0$ имеем $k = 0$, $k' = -\varkappa$.

леманом (T. Carleman [1])[1]), в том же направлении, как это сделано И. Н. Векуа для случая замкнутых контуров (см. § 57). Сам Карлеман рассматривает случай, когда L есть отрезок действительной оси и, кроме того, если пользоваться нашими обозначениями, $\varkappa_0 = 1$.

1°. Перепишем уравнение $\mathbf{K}\varphi = f$ так:

$$\mathbf{K}\varphi \equiv \mathbf{K}^0\varphi + \mathbf{k}\varphi = f, \tag{99,1}$$

где по-прежнему

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} \tag{99,2}$$

и

$$\mathbf{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{99,3}$$

Особенными и неособенными узлами, соответствующими оператору $\mathbf{K}$ или уравнению $\mathbf{K}\varphi = f$, мы будем называть особенные и неособенные узлы, соответствующие оператору $\mathbf{K}^0$.

Заметим, что если, как мы и предполагаем, функция $k(t_0, t)$ принадлежит классу H_0, а $\varphi(t)$ — функция класса H^*, то, как легко видеть, $\mathbf{k}\varphi$ представляет собой функцию класса H_0.

Для простоты мы будем считать, что функция $f(t)$ принадлежит классу H_0.

Перепишем уравнение (99,1) еще так:

$$\mathbf{K}^0\varphi = f - \mathbf{k}\varphi \tag{99,4}$$

и будем временно рассматривать правую часть (принадлежащую классу H_0) как известную функцию.

Исходя из этого, мы можем повторить здесь то, что было сказано в § 97, п. 2° относительно поведения решений рассматриваемого уравнения в окрестности узлов. В частности, всякое решение $\varphi(t)$, остающееся ограниченным в окрестности данного неособенного узла, необходимо принадлежит классу H_0 в этой окрестности.

Совершенно так же, как в § 97, мы можем установить разбиение всех возможных решений нашего уравнения на классы $h = h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. *Канонической функцией* $Z(t)$ *и индексом* $\varkappa$ *класса* h *уравнения* (99,1) *или оператора* $\mathbf{K}$ мы будем называть каноническую функцию и индекс (того же класса) соответствующего уравнения $\mathbf{K}^0\varphi = f$ или оператора $\mathbf{K}^0$.

2°. Как в § 97, обозначим через $\mathbf{K}^*$ оператор, определяемый формулой

$$\mathbf{K}^* f \equiv A^*(t_0)\,f(t_0) - \frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{Z(t)\,(t - t_0)}; \tag{99,5}$$

обозначения те же, что в § 97.

Применяя теперь к (99,4) сказанное в § 97, легко приходим к следующим результатам:

---

[1]) В этой статье Т. Карлеман намечает еще один (первый в его статье) весьма остроумный, но искусственный метод регуляризации. Этот метод не нашел распространения вследствие того, что все результаты, которые получаются при его помощи, можно гораздо проще и в более полном виде получить при помощи упомянутого в тексте метода. Из работ, посвященных применению первого метода, мне известны лишь работы В. Д. Купрадзе [6], [7].

Пусть требуется найти все решения уравнения (99,1) класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q) = h$ и пусть $Z(t)$ и $\varkappa$ обозначают соответствующие каноническую функцию и индекс. Тогда:

При $\varkappa \geqslant 0$ уравнение (99,1) *эквивалентно (в смысле разыскания решений класса h) уравнению Фредгольма*

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = f^*(t_0), \tag{99,6}$$

где

$$f^*(t_0) = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0) Z(t_0) P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{99,7}$$

причем $P_{\varkappa-1}(t_0)$ обозначает произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$ $(P_{-1}(t_0) = 0)$.

При $\varkappa < 0$ уравнение (99,1) *эквивалентно* (в том же смысле) *уравнению Фредгольма* (99,6), *причем надо считать $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$, и следующей совокупности дополнительных условий:*

$$\int_L \frac{t^j \mathbf{k}\varphi(t)\,dt}{Z(t)} = \int_L \frac{t^j f(t)\,dt}{Z(t)}, \quad j = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{99,8}$$

Последние условия, происходящие из условий (97,16), можно, очевидно, переписать еще так:

$$\int_L \rho_j(t)\varphi(t)\,dt = \int_L \frac{t^j f(t)\,dt}{Z(t)}, \quad j = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1, \tag{99,8a}$$

где

$$\rho_j(t) = \mathbf{k}'\left[\frac{t^j}{Z(t)}\right] = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{k(t_1, t)\,t_1^j\,dt_1}{Z(t_1)} \tag{99,9}$$

— вполне определенные функции, принадлежащие, как легко видеть, классу H_0.

Отметим, что функция $f^*(t_0)$, определяемая формулой (99,7), принадлежит классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, принадлежа, кроме того, в окрестностях особенных узлов классу H_ε^* и оставаясь ограниченной в окрестностях тех из них, для которых $\gamma_k \neq 0$; в окрестностях особенных узлов c_k, для которых $\gamma_k = 0$, она может быть неограниченной как $\ln(t - c_k)$. Это вытекает из условия, что $f(t)$ принадлежит классу H_0.

§ 100. Регуляризация сингулярного уравнения $\mathbf{K}'\psi = g$. Указанный в предыдущем параграфе способ регуляризации может быть применен и к уравнению

$$\mathbf{K}'\psi \equiv \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \mathbf{k}'\psi = g. \tag{100,1}$$

Особенными и неособенными узлами, соответствующими этому уравнению или оператору $\mathbf{K}'$, мы будем называть особенные и неособенные узлы, соответствующие уравнению $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = g$ или оператору $\mathbf{K}^{0\prime}$, а это — то же самое, что особенные и неособенные узлы, соответствующие оператору $\mathbf{K}$.

Индексом $\varkappa'$ данного класса $h' = h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ оператора $\mathbf{K}'$ или уравнения $\mathbf{K}'\psi = g$ мы будем называть индекс данного класса оператора $\mathbf{K}^{0\prime}$ или уравнения $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = g$.

Считая для простоты, что функция g принадлежит классу H_0, применяя способ, аналогичный способу предыдущего параграфа, и основываясь на результатах § 98, приходим к следующему выводу:

При $\varkappa' \geqslant 0$ *уравнение* (100,1) *эквивалентно, в смысле разыскания решений класса* $h(c_{q+1}, \ldots, c_m) = h'$, *уравнению Фредгольма*

$$\psi(t_0) + \mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'\psi = g^*(t_0), \tag{100,2}$$

где

$$g^*(t_0) = \mathbf{K}^{*\prime} g + \frac{P_{\varkappa'-1}(t_0)}{Z(t_0)}, \tag{100,3}$$

$P_{\varkappa'-1}(t_0)$ *обозначает произвольный полином степени не выше* $\varkappa'-1$ $(P_{-1}(t_0)=0)$, *а* $Z(t_0)$ — *каноническая функция класса* $h(c_1, \ldots, c_q) = h$, *союзного с* h', *для союзного уравнения* $\mathbf{K}\varphi = 0$.

При $\varkappa' < 0$ *уравнение* (100,1) *эквивалентно (в том же смысле) уравнению Фредгольма* (100,2), *причем надо считать* $P_{\varkappa'-1}(t_0) = 0$, *и следующей совокупности дополнительных условий*:

$$\int_L \sigma_j(t)\psi(t)\,dt = \int_L Z(t)B^*(t)t^j g(t)\,dt, \quad j = 0, 1, \ldots, -\varkappa'-1, \tag{100,4}$$

где

$$\sigma_j(t) = \mathbf{k}[Z(t)B^*(t)t^j] = \frac{1}{\pi i}\int_L k(t, t_1)Z(t_1)B^*(t_1)t_1^j\,dt_1 \tag{100,5}$$

— *вполне определенные функции, принадлежащие классу* H_0.

Здесь через $\mathbf{K}^{*\prime}$ обозначен оператор, союзный с $\mathbf{K}^*$,— тот же, что в § 98 (формула (98,11)); $B^*(t)$ определяется формулой (97,10).

Заметим, что уравнение (100,2) н е я в л я е т с я, вообще говоря, союзным с уравнением (99,6), ибо оператором, союзным с $\mathbf{K}^*\mathbf{k}$, является $\mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}$, а не $\mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'$.

Отметим, наконец, что функция $g^*(t_0)$ принадлежит классу $h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$, принадлежа, кроме того, классу H_ε^* в окрестностях особенных узлов и оставаясь ограниченной в окрестностях тех из них, для которых $\gamma_k \neq 0$; в окрестностях же особенных узлов c_k, для которых $\gamma_k = 0$, она может быть неограниченной как $\ln(t_0 - c_k)$. Это следует из того, что по условию $g(t)$ принадлежит классу H_0.

§ 101. Исследование уравнений, полученных в результате регуляризации. 1°. Предпошлем исследованию уравнений, полученных в двух предыдущих параграфах, несколько замечаний, касающихся резольвенты уравнения Фредгольма при несколько иных условиях, чем в § 52. А именно, рассмотрим уравнение Фредгольма

$$\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{A}$$

и союзное с ним уравнение

$$\psi(t_0) + \int_L n(t, t_0)\psi(t)\,dt = g(t_0), \tag{A'}$$

где L — кусочно-гладкая линия, а ядро $n(t_0, t)$ — ограниченная функция, непрерывная для всех значений t_0, t, кроме, быть может, значений, соответствующих узлам. Через $f(t_0)$, $g(t_0)$ обозначены заданные ограниченные функции, непрерывные всюду на L, кроме, быть может, узлов; такие же требования налагаются на искомые функции $\varphi(t)$, $\psi(t)$.

Рассматриваемые функции (как заданные, так и искомые) могут быть вовсе не определены в узлах линии L. В соответствии с этим мы не требуем, чтобы уравнение (A) или (A′) удовлетворялось для значений t_0, соответствующих узлам.

Повторяя почти буквально рассуждения § 52, приходим к следующим выводам.

Если однородное уравнение, соответствующее (A), имеет ν линейно независимых решений (тогда столько же решений имеет и союзное с ним однородное уравнение), то всегда можно заменить ядро $n(t_0, t)$ другим ядром

$$m(t_0, t) = n(t_0, t) + \sum_{i=1}^{\nu} \eta_i(t_0)\,\xi_i(t), \tag{*}$$

где $\xi_i(t)$, $\eta_i(t)$ — заданные на L функции класса H, обладающие следующими свойствами:

Однородные уравнения, соответствующие уравнениям

$$\varphi(t_0) + \int_L m(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0) \tag{B}$$

и

$$\psi(t_0) + \int_L m(t, t_0)\,\psi(t)\,dt = g(t_0), \tag{B′}$$

не имеют отличных от нуля решений, а поэтому неоднородные уравнения (B), (B′) всегда однозначно разрешимы.

Решение уравнения (B) является в то же время решением (точнее, одним из решений) уравнения (A), если это последнее разрешимо, т. е. если его правая часть удовлетворяет условиям

$$\int_L \psi_i(t)\,f(t)\,dt = 0, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{C}$$

где $\psi_i(t)$, $i = 1, 2, \ldots, \nu$,— все линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (A′); аналогично обстоит дело для уравнений (B′) и (A′).

Пусть $\gamma(t_0, t)$ — резольвента уравнения (B), т. е. функция, обладающая тем свойством, что (единственное) решение уравнения (B) дается формулой

$$\varphi(t_0) = f(t_0) + \int_L \gamma(t_0, t)\,f(t)\,dt; \tag{**}$$

тогда $\gamma(t, t_0)$ будет резольвентой уравнения (B′). Из общей теории уравнений Фредгольма следует, что $\gamma(t_0, t)$ — ограниченная функция, интегрируемая по каждой из переменных t_0, t. Известные из теории уравнений Фредгольма соотношения[1])

$$\gamma(t_0, t) + m(t_0, t) = -\int_L m(t_0, t_1)\,\gamma(t_1, t)\,dt_1 \tag{D}$$

и

$$\gamma(t_0, t) + m(t_0, t) = -\int_L \gamma(t_0, t_1)\,m(t_1, t)\,dt_1 \tag{D′}$$

[1]) См. замечание в конце настоящего пункта.

показывают, что функция $\gamma(t_0, t)$ обладает тем же характером непрерывности, что функция $m(t_0, t)$, т. е. непрерывна для всех значений t_0, t, кроме, быть может, значений, соответствующих узлам.

Все решения уравнения (A), когда оно разрешимо, т. е. когда соблюдены условия (C), даются формулой

$$\varphi(t_0) = f(t_0) + \int_L \gamma(t_0, t) f(t)\, dt + \sum_{i=1}^{\nu} C_i \varphi_i(t_0), \tag{E}$$

где $\varphi_i(t)$ — линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (A), а C_i — произвольные постоянные.

Аналогично, все решения уравнения (A′), когда оно разрешимо, даются формулой

$$\psi(t_0) = g(t_0) + \int_L \gamma(t, t_0) g(t)\, dt + \sum_{i=1}^{\nu} C_i \psi_i(t_0), \tag{E′}$$

где $\psi_i(t)$ — линейно независимые решения однородного уравнения, соответствующего (A′), а C_i — произвольные постоянные.

Функция $\gamma(t_0, t)$ является *обобщенной резольвентой Фредгольма* для уравнения (A); аналогично, функция $\gamma(t, t_0)$ — для уравнения (A′).

Замечание. Соотношения (D) и (D′) можно, например, получить так. Подставим выражение для $\varphi(t)$, определяемое формулой (**), в левую часть уравнения (B). Полученное равенство должно быть справедливо при всяком выборе функции $f(t)$; выражая это требование, мы получим соотношение (D). Аналогично, подставляя выражение для $f(t)$, определяемое формулой (B), в правую часть равенства (**), получим соотношение (D′).

2°. Перейдем к исследованию уравнения (99,6), полученного в § 99, которое перепишем теперь так:

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi \equiv \varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L N(t_0, t)\varphi(t)\, dt = f^*(t_0), \tag{101,1}$$

где, согласно формуле (99,7), $f^*(t_0)$ — функция класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, принадлежащая классу H_ε^* в окрестностях особенных узлов, ограниченная в окрестностях тех из них, для которых $\gamma_k \neq 0$, и могущая быть неограниченной как $\ln(t_0 - c_k)$ в окрестностях тех особенных узлов c_k, для которых $\gamma_k = 0$, а

$$N(t_0, t) = A^*(t_0) k(t_0, t) - \frac{B^*(t_0) Z(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{k(t_1, t)\, dt_1}{Z(t_1)(t_1 - t_0)}. \tag{101,2}$$

Наряду с этим уравнением рассмотрим соответствующее однородное уравнение

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = 0 \tag{101,3}$$

и союзное с ним однородное уравнение

$$\psi(t_0) + \mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\psi \equiv \psi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L N(t, t_0)\psi(t)\, dt = 0, \tag{101,4}$$

где на основании (101,2)

$$N(t, t_0) = A^*(t) k(t, t_0) - \frac{B^*(t) Z(t)}{\pi i}\int_L \frac{k(t_1, t_0)\, dt_1}{Z(t_1)(t_1 - t)}. \tag{101,5}$$

Мы назвали в § 99 уравнение (101,1) уравнением Фредгольма, хотя его ядро $N(t_0, t)$ не принадлежит к тому типу ядер, которые обычно называются регулярными.

Несмотря на это, к уравнению (101,1) применимы все основные теоремы Фредгольма, если формулировать их надлежащим образом. Мы покажем это путем приведения уравнения (101,1) к уравнению Фредгольма с ограниченным ядром[1]).

Согласно формуле (97,13) имеем:

$$Z(t) = \omega_0(t) \prod_{j=1}^{n} (t-c_j)^{\gamma_j}, \tag{101,6}$$

где $\omega_0(t)$ — определенная функция класса H_0, не обращающаяся в нуль нигде на L,

$$\begin{aligned} 0 < \operatorname{Re}\gamma_j < 1, &\quad j = 1, 2, \ldots, q, \\ -1 < \operatorname{Re}\gamma_j < 0, &\quad j = q+1, \ldots, m, \\ \operatorname{Re}\gamma_j = 0, &\quad j = m+1, \ldots, n. \end{aligned} \tag{101,7}$$

Обозначим через $c_{l+1}, \ldots, c_n$ $(l \geqslant m)$ те особенные узлы, для которых $\gamma_j = 0$, и положим

$$T(t) = \prod_{j=q+1}^{m} (t-c_j)^{\gamma_j} \prod_{j=l+1}^{n} [\ln(t-c_j) + c_j^0], \tag{101,8}$$

где c_j^0 — постоянные, выбранные так, чтобы выражения $\ln(t-c_j)+c_j^0$ не обращались в нуль нигде на L, а в остальном произвольные.

Произведем, далее, подстановку

$$\varphi(t) = T(t)\,\varphi_0(t). \tag{101,9}$$

Тогда уравнение (101,1) примет вид

$$\varphi_0(t_0) + \int_L n(t_0, t)\,T(t)\,\varphi_0(t)\,dt = f_0(t_0), \tag{101,10}$$

где введены обозначения

$$f_0(t) = \frac{f^*(t)}{T(t)}, \tag{101,9a}$$

$$\pi i n(t_0, t) = \frac{N(t_0, t)}{T(t_0)} = \frac{A^*(t_0)\,k(t_0, t)}{T(t_0)} - \frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i T(t_0)} \int_L \frac{k(t_1, t)\,dt_1}{Z(t_1)(t_1-t_0)}. \tag{101,11}$$

Легко видеть на основании результатов § 26, п. 3°, что $n(t_0, t)$ — ограниченная функция. Далее, на основании результатов того же параграфа (п. 6°) функция $n(t_0, t)$ принадлежит по переменной t_0 при фиксированном значении t классу H_ε^*, принадлежа классу H_0 в окрестностях всех неособенных узлов. То же самое имеет место относительно переменной t при фиксированном значении t_0.

Говоря, что $n(t_0, t)$ принадлежит по t_0 классу H_0 при фиксированном t, мы подразумеваем, что t не совпадает с узлами, но может находиться сколь угодно близко от них, и что при этом коэффициент и показатель соответствующего условия H для $n(t_0, t)$ по переменной t_0 могут быть

---

[1]) Легко также исследовать уравнения типа (101,1) непосредственно; ср. É. Goursat [1], n°. 561.

выбраны независимо от положения t; аналогично обстоит дело относительно принадлежности классу H_ε^*. То же самое относится к случаю, когда фиксирована переменная t_0, а изменяется t.

Произведем еще в уравнении (101,10) замену переменной интегрирования, полагая

$$\mathrm{T}(t)\,dt = d\tau \tag{101,12}$$

или для определенности

$$\tau = \int_c^t \mathrm{T}(t)\,dt \quad \text{на} \quad L_k,\ k = 1, 2, \ldots, p, \tag{101,12a}$$

где c — один из концов дуги L_k. Когда точка t описывает дуги L_k, соответствующая ей точка τ описывает некоторые дуги Λ_k. Совокупность дуг Λ_k мы обозначим через Λ.

Дуги Λ_k могут пересекать друг друга, а также сами себя, но это значения не имеет. Следует лишь условиться характеризовать точки τ на Λ_k не их геометрическими положениями, т. е. значениями τ, но и значениями t, которым они соответствуют; иными словами, следует считать, что дуги Λ_k представлены параметрически при помощи (комплексного) параметра t[1]).

В дальнейшем, говоря об узлах, мы будем иметь в виду узлы линии L или соответствующие им точки линии Λ, а не другие узлы (в геометрическом смысле), которые может иметь Λ.

В соответствии со сказанным, функции, обозначаемые ниже через $\varphi_0(\tau)$ или $n(\tau_0, \tau)$ и т. д., следует рассматривать как функции от t или t_0, t и т. д. Поэтому мы будем иногда вместо $\varphi_0(t)$, $n(t_0, t)$ и т. д. писать $\varphi_0(\tau)$, $n(\tau_0, \tau)$ и т. д. Говоря, что функции $\varphi_0(\tau)$, $n(\tau_0, \tau)$ и т. д. принадлежат классу H, H_0, H^*, H_ε^*, мы будем подразумевать, что это имеет место относительно переменных t, t_0 и т. д. на L.

Написав теперь в соответствии со сказанным $\varphi_0(\tau)$ вместо $\varphi_0(t)$ и $n(\tau_0, \tau)$ вместо $n(t_0, t)$, мы приведем, таким образом, уравнение (101,10) к виду

$$\varphi_0(\tau_0) + \int_\Lambda n(\tau_0, \tau)\,\varphi_0(\tau)\,d\tau = f_0(\tau_0). \tag{101,13}$$

Ядро $n(\tau_0, \tau)$ ограничено и обладает указанными вслед за формулой (101,11) свойствами. Правая его часть $f_0(\tau_0)$ также ограничена, принадлежит классу H_ε^* и, кроме того, классу H_0 в окрестностях всех неособенных узлов; это следует из формул (99,7), (101,9а) и из результатов § 26.

Для наших целей мы должны искать решения уравнения (101,1) в классе $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Но мы будем в дальнейшем под решениями этого уравнения (101,1) подразумевать любые абсолютно интегрируемые решения, ибо, как легко видеть, все такие решения необходимо принадлежат классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Действительно, пусть искомая функция $\varphi(t)$ абсолютно

[1]) Можно также считать, что дуги Λ_k расположены на соответствующей римановой поверхности, или, еще проще, можно представить их себе в виде нитей (точки которых однозначно соответствуют точкам дуг L_k), расположенных на плоскости, которые могут переходить одна через другую и образовывать петли.

интегрируема[1]); тогда и функция $\varphi_0(\tau)$ обладает этим свойством[2]). С другой стороны, как легко видеть по самому уравнению (101,13), всякое его абсолютно интегрируемое решение будет ограниченной функцией класса H_ε^*, принадлежащей, кроме того, классу H_0 в окрестностях всех неособенных узлов; всякое же такое решение дает по формуле (101,9) решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ уравнения (101,1), а это и доказывает наше утверждение.

Таким образом, решение уравнения (101,1) в классе $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ эквивалентно решению того же уравнения в классе абсолютно интегрируемых функций, а также решению уравнения Фредгольма (101,13) в обычном смысле, т. е. разысканию его решений в классе ограниченных (и, разумеется, интегрируемых) функций.

Перейдем теперь к рассмотрению однородного уравнения (101,4), союзного с (101,1). Если мы произведем в этом уравнении замену переменной (101,12), то оно примет вид (при прежних обозначениях)

$$\psi(\tau_0) + \int_\Lambda n(\tau, \tau_0)\,\psi(\tau)\,d\tau = 0, \qquad (101,14)$$

т. е. обратится в уравнение Фредгольма с ограниченным ядром, союзное с уравнением (101,13). На основании сказанного выше относительно функции $n(\tau, \tau_0)$ легко видеть, что всякое абсолютно интегрируемое решение уравнения (101,14) ограничено и принадлежит классу H_ε^*, принадлежа классу H_0 в окрестностях всех неособенных узлов. Исходя из этого, говоря о решениях уравнения (101,4), мы будем иметь в виду ограниченные решения.

Обратимся теперь к основным теоремам Фредгольма о равенстве числа линейно независимых решений союзных однородных уравнений и об условии разрешимости неоднородного уравнения.

Первая из этих теорем непосредственно применима к однородному уравнению, соответствующему (101,13), и к союзному с ним уравнению (101,14), так как ядра этих уравнений ограничены.

В применении же к уравнениям (101,3) и (101,4) теорему эту, очевидно, можно формулировать так:

Число линейно независимых (абсолютно интегрируемых) решений однородного уравнения

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = 0$$

(эти решения необходимо принадлежат классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ и, кроме того, классу H_ε^* в окрестностях особенных узлов) *конечно и равно числу линейно независимых (ограниченных) решений союзного с ним однородного уравнения*

$$\psi(t_0) + \mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\psi = 0$$

(эти решения необходимо принадлежат классу H_ε^*, принадлежа классу H_0 в окрестностях всех неособенных узлов).

Перейдем ко второй теореме. В применении к уравнениям (101,13) и (101,14) она гласит: необходимое и достаточное усло-

---

[1]) Легко видеть, что при этом предположении интеграл в левой части уравнения (101,1) сохраняет определенный, обычный смысл; предполагается, как всегда, что в этом уравнении точка t_0 отлична от узлов.

[2]) Действительно, в силу (101,9) и (101,12)

$$\varphi_0(\tau)\,d\tau = \varphi(t)\,dt.$$

вие разрешимости уравнения (101,13) заключается в том, чтобы

$$\int_\Lambda f_0(\tau)\,\omega_j(\tau)\,d\tau = 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu, \tag{101,15}$$

где $\omega_j(\tau)$ — полная система линейно независимых решений однородного уравнения (101,14). Если возвратимся к старой переменной t, предыдущие условия представятся в виде

$$\int_L f^*(t)\,\omega_j(t)\,dt = 0, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu. \tag{101,16}$$

Таким образом, в применении непосредственно к уравнениям (101,1) и (101,4) теорема эта формулируется так:

Для того чтобы уравнение

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = f^*(t_0) \tag{101,1}$$

было разрешимо (в классе абсолютно интегрируемых функций), необходимо и достаточно, чтобы правая его часть удовлетворяла условиям (101,16), *где $\omega_j(t)$ — полная система линейно независимых (ограниченных) решений однородного уравнения* (101,4), *союзного с предыдущим. Все (абсолютно интегрируемые) решения уравнения* (101,1) *необходимо принадлежат классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ и, кроме того, классу H_ε^* в окрестностях особенных узлов.*

Напомним, что $f^*(t_0)$ обозначает функцию, принадлежащую классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ и, кроме того, классу H_ε^* в окрестностях особенных узлов.

Если условия разрешимости уравнения Фредгольма (101,13) выполнены, то общее решение его, согласно сказанному в п. 1°, представится в виде

$$\varphi_0(\tau_0) = f_0(\tau_0) + \int_\Lambda \gamma(\tau_0, \tau)\,f_0(\tau)\,d\tau + \sum_{j=1}^{\nu} C_j\chi_{0j}(\tau_0), \tag{101,17}$$

где $\gamma(\tau_0, \tau)$ — обобщенная резольвента, $\chi_{0j}(\tau_0)$, $j = 1, \ldots, \nu$,— полная система линейно независимых решений соответствующего однородного уравнения, а C_j — произвольные постоянные.

Из функциональных уравнений (D) и (D′), приведенных в п. 1°, легко выводим, что в окрестностях узлов резольвента $\gamma(\tau_0, \tau)$ имеет тот же характер, что и ядро $n(\tau_0, \tau)$, т. е. представляет собой ограниченную функцию класса H_ε^* по каждой из переменных, принадлежащую, кроме того, классу H_0 в окрестностях всех неособенных узлов.

Возвращаясь теперь при помощи формул (101,9) и (101,12) к старой неизвестной $\varphi(t)$ и к старой переменной t, получаем, что самое общее (абсолютно интегрируемое) решение уравнения (101,1), а это решение, как мы знаем, принадлежит классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, дается формулой

$$\varphi(t_0) = \mathbf{\Gamma} f^* + \sum_{j=1}^{\nu} C_j\chi_j(t_0), \tag{101,18}$$

где $\chi_j(t)$, $j = 1, \ldots, \nu$,— полная система линейно независимых (абсолютно интегрируемых) решений однородного уравнения (101,3), которые, как мы знаем, принадлежат классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$; через $\mathbf{\Gamma}$

обозначен оператор, определяемый формулой

$$\Gamma f \equiv f(t_0) + \int_L \Gamma(t_0, t) f(t)\, dt, \tag{101,19}$$

где

$$\Gamma(t_0, t) = \mathrm{T}(t_0)\, \gamma(t_0, t). \tag{101,19a}$$

На основании указанных выше свойств функции $\gamma(t_0, t)$ легко заключаем, что *оператор* Γ *переводит всякую функцию* $f(t)$ *класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ *в функцию того же класса, а союзный с ним оператор* Γ', *определяемый формулой*

$$\Gamma' g \equiv g(t_0) + \int_L \Gamma(t, t_0) g(t)\, dt, \tag{101,20}$$

где, согласно формуле (101,19а),

$$\Gamma(t, t_0) = \mathrm{T}(t)\, \gamma(t, t_0), \tag{101,20a}$$

переводит всякую функцию $g(t)$ *класса* $h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ *в функцию того же класса.*

3°. Совершенно аналогично исследуется уравнение (100,2) предыдущего параграфа

$$\psi(t_0) + \mathbf{K}^{*\prime}\mathbf{k}'\psi = g^*(t_0), \tag{101,21}$$

полученное в результате регуляризации уравнения $\mathbf{K}'\psi = g$, и союзное с (101,21) однородное уравнение

$$\omega(t_0) + \mathbf{k}\mathbf{K}^*\omega = 0; \tag{101,22}$$

ввиду полной аналогии мы на этом не останавливаемся.

§ 102. Решение уравнений $\mathbf{K}\varphi = f$ и $\mathbf{K}'\psi = g$. Основные теоремы.

1°. Перейдем теперь к вопросу о решении сингулярного интегрального уравнения

$$\mathbf{K}\varphi \equiv \mathbf{K}^0\varphi + \mathbf{k}\varphi = f \tag{102,1}$$

в данном классе $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$. Регуляризируя предыдущее уравнение по способу, указанному в § 99, получаем уравнение Фредгольма

$$\varphi + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = f^*(t_0) \tag{102,2}$$

и дополнительные условия

$$\int_L \rho_j \varphi(t)\, dt = \int_L \frac{t^j f(t)\, dt}{Z(t)}, \qquad j = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1. \tag{102,3}$$

Исходное сингулярное уравнение эквивалентно, в смысле разыскания решений класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, совокупности уравнения (102,2) и условий (102,3).

Мы применяем здесь обозначения § 99; в частности, функции $\rho_j(t)$ определяются формулой (99,9), а

$$f^*(t_0) = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0), \tag{102,4}$$

где $P_{\varkappa-1}(t_0)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$, который мы представим так:

$$P_{\varkappa-1}(t_0) = A_1 t_0^{k_1} + A_2 t_0^{k_2} + \ldots + A_\varkappa t_0^{k_\varkappa}, \tag{102,5}$$

где $k_1, k_2, \ldots, k_\varkappa$ обозначают числа $0, 1, \ldots, \varkappa - 1$, взятые в каком-либо порядке, а $A^1, A^2, \ldots, A_\varkappa$ — произвольные постоянные.

В случае $\varkappa \geqslant 0$ дополнительные условия (102,3) отпадают, в случае же $\varkappa \leqslant 0$ мы должны считать $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$.

Рассмотрение вопроса о решении уравнения (102,1) мы начнем со случая $\varkappa \geqslant 0$. В этом случае уравнение (102,1) эквивалентно, в смысле разыскания решений класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, уравнению (102,2). Условия разрешимости этого последнего имеют вид (см. предыдущий параграф)

$$\int_L \omega_j(t) f^*(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{102,6}$$

где $\omega_j(t)$, $j = 1, \ldots, \nu$, — полная система линейно независимых решений однородного уравнения

$$\omega + \mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\omega = 0, \tag{102,7}$$

союзного с (102,2); мы знаем, что функции $\omega_j(t)$ принадлежат классу H_ε^*, принадлежа классу H_0 в окрестностях неособенных узлов.

Внося в (102,6) выражение (102,4) для функции $f^*(t_0)$ и вводя обозначения

$$\delta_i = \int_L \omega_i(t)\, \mathbf{K}^* f(t)\, dt, \tag{102,8}$$

убеждаемся, что условия (102,6) имеют вид

$$\sum_{j=1}^{\varkappa} \gamma_{ij} A_j = \delta_i, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{102,9}$$

где γ_{ij} — вполне определенные постоянные, не зависящие от функции $f(t)$. Постоянные δ_i могут быть еще представлены в виде

$$\delta_i = \int_L \omega_i^*(t) f(t)\, dt, \quad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{102,10}$$

где для краткости положено

$$\omega_i^*(t) = \mathbf{K}^{*\prime}\omega_i(t). \tag{102,11}$$

Функции $\omega_i^*(t)$ *принадлежат классу* $h(c_{q+1}, \ldots, c_m) = h'$, *союзному с* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$; это вытекает из того, что функции $\omega_i(t)$ принадлежат классу H_0 в окрестностях неособенных узлов, и из вида оператора $\mathbf{K}^*$, определяемого формулой (98,11). Легко видеть, кроме того, что *функции* $\omega_i^*(t)$ *линейно независимы*. В самом деле, на основании (102,7) имеем $\omega_i + \mathbf{k}'\mathbf{K}^{*\prime}\omega_i = 0$, откуда следует, что $\omega_i = -\mathbf{k}'\omega_i^*$; поэтому если бы функции ω_i^* были линейно зависимы, то были бы линейно зависимы и функции ω_i, что противоречит их определению.

Пусть ранг матрицы $\|\gamma_{ij}\|$ равен ρ ($\rho \leqslant \nu$, $\rho \leqslant \varkappa$). Не нарушая общности, можно считать, что определитель матрицы

$$\|\gamma_{ij}\|, \quad i, j = 1, 2, \ldots, \rho,$$

отличен от нуля. Тогда, как известно, условия разрешимости системы (102,9) относительно $A_1, A_2, \ldots, A_\varkappa$ заключаются в том, чтобы

$$\begin{vmatrix} \gamma_{11} & \gamma_{12} & \cdots & \gamma_{1\rho} & \delta_1 \\ \gamma_{21} & \gamma_{22} & \cdots & \gamma_{2\rho} & \delta_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \gamma_{\rho 1} & \gamma_{\rho 2} & \cdots & \gamma_{\rho\rho} & \delta_\rho \\ \gamma_{\rho+j,1} & \gamma_{\rho+j,2} & \cdots & \gamma_{\rho+j,\rho} & \delta_{\rho+j} \end{vmatrix} = 0 \tag{102,12}$$

при $j=1, 2, \ldots, \nu-\rho$, или в раскрытом виде

$$\delta_{\rho+j}+\sum_{j=1}^{\rho} a_{ji}\delta_i=0, \qquad j=1, 2, \ldots, \nu-\rho, \tag{102,13}$$

где a_{ji} — вполне определенные постоянные, не зависящие от функции $f(t)$.

Внося в предыдущие равенства на место δ_j их выражения (102,10), убеждаемся, что условия разрешимости уравнения (102,2) имеют вид

$$\int_L \lambda_j(t) f(t)\,dt=0, \qquad j=1, 2, \ldots, \nu-\rho, \tag{102,14}$$

где $\lambda_j(t)$ — вполне определенные линейно независимые функции класса $h'=h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$, а именно,

$$\lambda_j(t)=\omega^*_{\rho+j}(t)+\sum_{i=1}^{\rho} a_{ji}\omega^*_i(t), \qquad j=1, 2, \ldots, \nu-\rho. \tag{102,15}$$

Предположим, что условия (102,14) удовлетворяются; тогда уравнение (102,2) разрешимо. Составим его общее решение. Так как по предположению условия (102,14) и, следовательно, (102,13) выполнены, то система (102,9) разрешима относительно $A_1, A_2, \ldots, A_\rho$; самое общее ее решение мы найдем, оставив произвольными постоянные $A_{\rho+1}, \ldots, A_\varkappa$ и решив первые ρ уравнений системы (102,9) относительно $A_1, A_2, \ldots, A_\rho$. Общее решение системы (102,9) будет поэтому иметь вид

$$A_j=B_{j,\rho+1}A_{\rho+1}+\ldots+B_{j\varkappa}A_\varkappa+\Gamma_{j1}\delta_1+\ldots+\Gamma_{j\rho}\delta_\rho, \qquad j=1, 2, \ldots, \rho, \tag{102,16}$$

где B_{ji}, Γ_{ji} — определенные постоянные, не зависящие от функции $f(t)$.

Если теперь мы внесем в правую часть уравнения (102,2) предыдущие значения постоянных $A_1, A_2, \ldots, A_\rho$, то полученное интегральное уравнение будет разрешимо при любых значениях произвольных постоянных $A_{\rho+1}, \ldots, A_\varkappa$. Решая это уравнение при помощи формулы (101,18) и принимая еще во внимание формулы (102,4), (102,8), легко заключаем, что общее решение уравнения (102,2) имеет вид

$$\varphi(t_0)=\Gamma^*K^*f+C_1\chi_1+C_2\chi_2+\ldots+C_\nu\chi_\nu+C_{\nu+1}\chi_{\nu+1}+\ldots+C_{\varkappa+\nu-\rho}\chi_{\varkappa+\nu-\rho}, \tag{102,17}$$

где $\chi_1, \chi_2, \ldots, \chi_\nu$ и $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ обозначают то же, что в формуле (101,18); через $C_{\nu+1}, \ldots, C_{\varkappa+\nu-\rho}$ обозначены для единообразия произвольные постоянные $A_{\rho+1}, \ldots, A_\varkappa$, а через $\chi_{\nu+1}, \ldots, \chi_{\varkappa+\nu-\rho}$ — вполне определенные функции, не зависящие от функции $f(t)$ и принадлежащие, как и функции $\chi_1, \ldots, \chi_\nu$, классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$; об этих функциях будет еще сказано ниже. Наконец, через Γ^* обозначен оператор, определяемый формулой

$$\Gamma^*f\equiv f(t_0)+\int_L \Gamma^*(t_0, t) f(t)\,dt, \tag{102,18}$$

где функция $\Gamma^*(t_0, t)$ отличается от функции $\Gamma(t_0, t)$ формулы (101,19) некоторыми слагаемыми, которые легко выписать в явном виде; если на самом деле произвести эти простые выкладки, станет очевидным, что оператор Γ^* обладает свойством оператора Γ, указанным в конце предыдущего параграфа; а именно, оператор Γ^* переводит функции класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ в функции того же класса, а союзный оператор $\Gamma^{*\prime}$ — функции класса $h'=h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ в функции того же класса.

Рассмотрим, в частности, случай, когда исходное сингулярное уравнение (102,1) однородное, т. е. когда $f(t) = 0$. В этом случае уравнение (102,1) эквивалентно следующему (вообще неоднородному) уравнению:

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0). \tag{102,19}$$

В нашем случае все $\delta_i = 0$ и условия (102,13) разрешимости системы (102,9) удовлетворены. Соотношения же (102,16) принимают вид

$$A_j = B_{j,\rho+1}A_{\rho+1} + \ldots + B_{j\varkappa}A_\varkappa, \quad j = 1, 2, \ldots, \rho. \tag{102,16a}$$

Если внести эти выражения для $A_1, A_2, \ldots, A_\rho$ в правую часть уравнения (102,19), то оно представится в виде

$$\varphi + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = C_{\nu+1}\sigma_{\nu+1} + \ldots + C_{\varkappa+\nu-\rho}\sigma_{\varkappa+\nu-\rho}; \tag{102,20}$$

мы опять написали $C_{\nu+1}, \ldots, C_{\varkappa+\nu-\rho}$ вместо $A_{\rho+1}, \ldots, A_\varkappa$; через $\sigma_{\nu+1}, \ldots, \sigma_{\varkappa+\nu-\rho}$ мы обозначили некоторые линейно независимые функции класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, выражения которых легко выписать.

Общее решение однородного уравнения $\mathbf{K}\varphi = 0$, эквивалентного уравнению (102,20) при произвольных $C_{\nu+1}, \ldots, C_{\varkappa+\nu-\rho}$, имеет согласно общей формуле (102,17) вид

$$\varphi(t_0) = C_1\chi_1(t_0) + \ldots + C_\nu\chi_\nu(t_0) + C_{\nu+1}\chi_{\nu+1}(t_0) + \ldots + C_{\varkappa+\nu-\rho}\chi_{\varkappa+\nu-\rho}(t_0), \tag{102,21}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_{\varkappa+\nu-\rho}$ — произвольные постоянные. Таким образом, функции $\chi_j(t)$ являются решениями однородного уравнения $\mathbf{K}\varphi = 0$; первые ν из них являются в то же время линейно независимыми решениями уравнения $\varphi + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = 0$. Функции же $\chi_j(t)$ при $j > \nu$ являются, очевидно, решениями уравнений

$$\varphi + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = \sigma_j, \quad j = \nu + 1, \ldots, \varkappa + \nu - \rho, \tag{102,22}$$

получающихся из (102,20), если взять все C_i равными нулю, кроме $C_j = 1$. Легко теперь убедиться, что *все функции* $\chi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, \varkappa + \nu - \rho$, *линейно независимы*. В самом деле, пусть при некоторых значениях постоянных C_j функция φ, определенная формулой (102,21), тождественно равна нулю. Тогда, очевидно,

$$0 = \varphi + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = C_{\nu+1}\sigma_{\nu+1} + \ldots + C_{\varkappa+\nu-\rho}\sigma_{\varkappa+\nu-\rho},$$

что возможно лишь при $C_{\nu+1} = \ldots = C_{\varkappa+\nu-\rho} = 0$, ибо функции σ_j линейно независимы. Но тогда из (102,21) при $\varphi = 0$ следует, что и $C_1 = C_2 = \ldots = C_\nu = 0$.

Таким образом, однородное уравнение $\mathbf{K}\varphi = 0$ имеет ровно $\varkappa + \nu - \rho$ линейно независимых решений класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$.

Так как, далее, $\nu \geqslant \rho$, то мы можем утверждать: *при* $\varkappa \geqslant 0$ *однородное уравнение* $\mathbf{K}\varphi = 0$ *имеет по крайней мере* $\varkappa$ *линейно независимых решений класса* $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$.

Перейдем теперь к случаю отрицательного $\varkappa$. В этом случае в уравнении (102,2) следует считать $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$, и условия разрешимости (102,6) этого уравнения сводятся к условиям $\delta_j = 0$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$ т. е. опять к условиям вида

$$\int_L \lambda_j(t) f(t)\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{102,23}$$

где $\lambda_j(t)$ — некоторые определенные линейно независимые функции класса $h' = h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$.

Пусть условия (102,23) удовлетворены; тогда уравнение (102,2) разрешимо; это, однако, не означает еще, что разрешимо в данном классе $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ и исходное уравнение (102,1), ибо в нашем случае ($\varkappa < 0$) требуется выполнение ($-\varkappa$) дополнительных условий (102,3). Внесем общее решение (102,17) в левые части соотношений (102,3); разумеется, в (102,17) мы должны считать $C_{\nu+1} = \ldots = C_{\varkappa+\nu-\rho} = 0$. Мы получим, таким образом, для определения $C_1, C_2, \ldots, C_\nu$ систему ($-\varkappa$) линейных уравнений, аналогичную системе (102,9), условия разрешимости которой опять приведут к некоторому числу условий вида

$$\int_L \lambda_j(t) f(t)\, dt = 0, \quad j = \nu+1, \ldots, \nu+\sigma, \tag{102,24}$$

где $\sigma \leqslant -\varkappa$. Если проделать соответствующие совершенно элементарные выкладки и принять во внимание формулу

$$\int_L \rho_j \mathbf{\Gamma}^* \mathbf{K}^* f\, dt = \int_L f \mathbf{K}^{*\prime} \mathbf{\Gamma}^{*\prime} \rho_j\, dt, \tag{102,25}$$

а также указанное выше свойство оператора $\mathbf{\Gamma}^{*\prime}$, то легко убедиться, что функции $\lambda_j(t)$, $j = \nu+1, \ldots, \nu+\sigma$ принадлежат, так же как и функции $\lambda_j(t)$ формулы (102,23), классу $h' = h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$.

Условия (102,23) вместе с условиями (102,24) дают систему необходимых и достаточных условий разрешимости уравнения (102,1) в классе $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$.

2°. Совершенно аналогично решается уравнение

$$\mathbf{K}'\psi \equiv \mathbf{K}^{0\prime}\psi + \mathbf{k}'\psi = g, \tag{102,1'}$$

союзное с уравнением (101,1), если применить к нему способ регуляризации, указанный в § 100. Вследствие почти полной аналогии мы на этом останавливаться не будем.

3°. Из предыдущих рассуждений непосредственно вытекает, что *число линейно независимых решений* (любого класса) *однородного уравнения* $\mathbf{K}\varphi = 0$ *конечно. Аналогично обстоит дело относительно уравнения* $\mathbf{K}'\psi = 0$.

4°. Перейдем теперь к доказательству теорем, аналогичных теоремам § 53, а именно[1]):

Теорема I. *Необходимые и достаточные условия разрешимости в данном классе* $h = h(c_1, \ldots, c_q)$ *уравнения* $\mathbf{K}\varphi = f$ *заключаются в том, чтобы*

$$\int_L f\psi_j\, dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, k', \tag{102,26}$$

где ψ_j ($j = 1, \ldots, k'$) *— полная система линейно независимых решений союзного класса* $h' = h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$ *союзного однородного уравнения* $\mathbf{K}'\psi = 0$.

Теорема II. *Если* k *— число линейно независимых решений класса* h *однородного уравнения* $\mathbf{K}\varphi = 0$, $\varkappa$ *— индекс этого класса, а* k' *— число линейно независимых решений союзного класса* h' *союзного однородного уравнения* $\mathbf{K}'\psi = 0$, *то*

$$k - k' = \varkappa. \tag{102,27}$$

[1]) Приводимые ниже доказательства общих теорем представляют собой обобщение доказательств, данных И. Н. Векуа [4] для случая замкнутых контуров и непрерывных коэффициентов.

Эти теоремы остаются в силе, если поменять ролями операторы **K**, **K**$'$, *классы* h, h' *и индексы* $\varkappa$, $\varkappa'$.

Доказательство теоремы I. Необходимость условий (102,26) очевидна на основании формулы (96,10), которая, как легко видеть, применима в нашем случае. Докажем их достаточность. Мы видели уже, что необходимые и достаточные условия разрешимости уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ в классе h имеют вид

$$\int_L \lambda_j(t) f(t)\, dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, N, \tag{102,28}$$

где $\lambda_j(t)$ — определенные функции класса h', союзного с h, а N — некоторое целое положительное число или нуль. Теорема I будет, очевидно, доказана, если нам удастся показать, что условия (102,28) являются следствиями условий (102,26).

Пусть $g(t)$ — произвольная функция класса H, обращающаяся в нуль на всех узлах, так что функция $\mathbf{K}g$ принадлежит классу H_0. Уравнение $\mathbf{K}\varphi = \mathbf{K}g$ разрешимо в классе h (и даже в классе H), ибо оно имеет решение $\varphi = g$. Следовательно, необходимо, чтобы

$$\int_L \lambda_j \mathbf{K}g\, dt = \int_L g\mathbf{K}'\lambda_j\, dt = 0.$$

В силу произвольности функции $g(t)$ из предыдущего равенства следует, что $\mathbf{K}'\lambda_j = 0$. Таким образом, λ_j представляют собой решения класса h' однородного уравнения $\mathbf{K}'\psi = 0$ и, следовательно, представляют собой линейные комбинации функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k'}$; значит, условия (102,28) являются следствиями условий (102,26) и теорема I доказана. Совершенно аналогично доказывается теорема, которую получим, если поменяем ролями **K** и **K**$'$, h и h'.

Доказательство теоремы II. Рассмотрим сначала случай $\varkappa \geqslant 0$. В этом случае необходимые и достаточные условия разрешимости в классе h имеют вид (102,14), где $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-\rho}$ — линейно независимые функции класса h'. С другой стороны, как было только что показано, необходимыми и достаточными условиями резрешимости (в том же классе) являются условия (102,26). Таким образом, если какая-либо функция класса H_0 удовлетворяет условиям (102,14), то она удовлетворяет и условиям (102,26), и обратно. Отсюда же следует (см. Добавление IV в конце книги), что функции $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-\rho}$ суть линейные комбинации функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k'}$, и обратно. Следовательно,

$$k' = \nu - \rho.$$

Далее, число линейно независимых решений класса h уравнения $\mathbf{K}\varphi = 0$ равно на основании (102,21), как было уже сказано, $\varkappa + \nu - \rho$, так что

$$k = \varkappa + \nu - \rho;$$

из двух предыдущих равенств следует равенство (102,27).

Перейдем к случаю $\varkappa < 0$. Этот случай можно свести к предыдущему, поменяв ролями операторы **K** и **K**$'$ и классы h и h'.

Рассуждая совершенно аналогично предыдущему, мы придем к соотношению $k' - k = \varkappa'$, где $\varkappa'$ — индекс класса h' оператора **K**$'$; мы знаем, что $\varkappa' = -\varkappa$. Поэтому мы придем снова к равенству (102,27).

Таким образом, теорема II доказана. Так же доказывается теорема, которую получим, поменяв ролями **K** и **K**$'$, h и h'.

Замечание 1. Легко видеть, что теоремы I, II и другие результаты остаются в силе, если функция $f(t)$, вместо того чтобы принадлежать классу H_0, принадлежит классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, принадлежа в то же время классу H_ε^* в окрестностях особенных узлов. Не произойдет никаких существенных изменений и в случае, когда функция $f(t)$, принадлежа классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, принадлежит классу H^* в окрестностях особенных узлов; в частности, предыдущие теоремы остаются в силе и в этом случае.

Аналогичное замечание относится к теоремам, получаемым при замене K на K', h на h'.

Замечание 2. Если после введения надлежащим образом выбранной действительной переменной, например дуговой абсциссы s, рассматриваемое сингулярное интегральное уравнение становится действительным, то доказанные выше основные теоремы сохраняют силу и в этом случае, если ограничиться рассмотрением решений в действительной области, совершенно аналогично тому, что было сказано в § 54. При этом под однородным уравнением, союзным с данным уравнением, следует подразумевать союзное уравнение, также действительное, составленное применительно к данному уравнению, уже приведенному к действительному виду (ср. § 54).

§ 103. Важнейшие частные случаи. В предыдущих параграфах мы рассмотрели уравнения вида

$$\mathrm{K}\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\varphi(t)\,dt = f(t_0) \qquad (103{,}1)$$

и

$$\mathrm{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L k(t, t_0)\psi(t)\,dt = g(t_0) \qquad (103{,}2)$$

в предположении, что L — произвольная кусочно-гладкая линия.

Рассмотрим теперь, как и в § 83, два важных частных случая: когда L — гладкая прерывистая линия и когда L — простой замкнутый кусочно-гладкий контур.

Как в предыдущем, мы будем применять обозначение

$$G(t) = \frac{A(t) - B(t)}{A(t) + B(t)}. \qquad (103{,}3)$$

1°. Случай прерывистой гладкой линии[1]). Здесь L состоит из раздельно лежащих гладких разомкнутых дуг $L_k = a_k b_k$, $k = 1, 2, \ldots, p$. Концы a_k, b_k являются в нашем случае узлами линии L. К числу узлов мы могли бы отнести и некоторые другие точки линии L, но здесь мы этого делать не будем. Концы (узлы) a_k, b_k, взятые в каком-либо порядке, мы будем обозначать через c_k, $k = 1, 2, \ldots, 2p$.

Согласно принятым выше условиям, мы будем предполагать, что функции $A(t)$, $B(t)$ принадлежат на L классу H и что функция $k(t_0, t)$ также принадлежит по обеим переменным t_0, t классу H на L (в нашем случае класс H — то же самое, что класс H_0).

Под $\ln G(t)$ на L_j мы будем подразумевать любое значение, непрерывно изменяющееся на L_j. Числа γ_k, соответствующие концам c_k, даются

---

[1]) Этот случай был непосредственно изучен в статьях Н. И. Мусхелишвили [6] и Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава [1]. См. введение к настоящей главе.

формулой

$$\gamma_k = \alpha_k + \lambda_k + i\beta_k, \tag{103,4}$$

где

$$\alpha_k + i\beta_k = \mp \frac{1}{2\pi i} \ln G(c_k), \tag{103,5}$$

причем верхний знак берется при $c_k = a_j$, нижний — при $c_k = b_j$, а целые числа λ_k подбираются согласно условиям

$$-1 < \alpha_k + \lambda_k < 1, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2p. \tag{103,6}$$

Особенные концы c_k (в нашем случае узлы сводятся к концам), т. е. концы, для которых $\operatorname{Re} \gamma_k = 0$, характеризуются в нашем случае условием, что $G(c_k)$ — действительное положительное число (так как в этом и только в этом случае α_k — целое число).

Особенные концы c_k, для которых не только $\operatorname{Re} \gamma_k = 0$, но и $\gamma_k = 0$, характеризуются условием $G(c_k) = 1$, т. е. $B(c_k) = 0$.

Сказанное в § 97, п. 2° относительно решений характеристического уравнения $\mathrm{K}^0\varphi = f$ (предполагается, что f принадлежит классу H) в нашем случае можно дополнить тем, что решения эти остаются ограниченными также в окрестностях тех особенных концов c_k, для которых $\gamma_k = 0$, и, более того, принадлежат классу H; это следует из формул (97,11) и (97,12), ибо в нашем случае, при $\gamma_k = 0$, будем иметь $B^*(c_k) = B(c_k) = 0$.

Далее, если в окрестности какого-либо неособенного конца c_k решение $\varphi(t)$ уравнения $\mathrm{K}^0\varphi = f$ ограничено, то оно необходимо принадлежит в окрестности этого конца классу H и обращается в нуль на нем[1]). Принадлежность решения классу H доказывается, как в § 97, п. 2°. Далее, если бы $\varphi(c_k) \neq 0$, то в равенстве (103,1) второй член левой части был бы вблизи c_k неограниченным как $\ln(t_0 - c_k)$, что невозможно, так как остальные члены равенства ограничены вблизи c_k. То, что $\varphi(c_k) = 0$, можно также доказать непосредственно.

Добавим еще, что в нашем случае ядро $N(t_0, t)$, определяемое формулой (101,2), будет ограниченным в окрестностях всех особенных концов, и потому функцию $\mathrm{T}(t)$, введенную в § 101 формулой (101,8), можно заменить более простой:

$$\mathrm{T}(t) = \prod_{j=q+1}^{m} (t - c_j)^{\gamma_j}. \tag{103,7}$$

Заметим в заключение, то если $B(c_k) = 0$ на всех концах, то теория уравнений (103,1), (103,2) ничем не отличается от теории, изложенной в главе II для случая, когда L состоит из гладких замкнутых контуров, а функции $A(t)$, $B(t)$ непрерывны на L (принадлежа классу H).

В самом деле, если $B(c_k) = 0$, $k = 1, 2, \ldots, 2p$, то $\gamma_k = 0$, $k = 0, 1, \ldots, 2p$, и все концы особенные. Поэтому понятие классов решений отпадает. Все решения уравнения (103,1) или (103,2) будут принадлежать классу H, даже если мы будем искать их в классе H^*; мы предполагаем здесь, что $f(t)$ и $g(t)$ принадлежат классу H, так же как и функция $k(t_0, t)$.

Никаких существенных изменений мы не будем иметь и в случае, когда для всех концов $\operatorname{Re} \gamma_k = 0$, т. е. когда на всех концах $G(c_k)$ — действительные положительные числа.

---

[1]) Под значением $\varphi(c_k)$ решения $\varphi(t)$ на конце c_k подразумевается предел, к которому стремится $\varphi(t)$ при $t \to c_k$.

2°. Случай простого замкнутого контура[1]). Предположим теперь, что L — простой замкнутый гладкий или кусочно-гладкий контур (случай, когда L состоит из нескольких таких контуров, рассматривается совершенно аналогично).

Будем применять те же обозначения, что в § 83, п. 2°. В частности, обозначим через $c_1, c_2, \ldots, c_n$ узлы линии L; в нашем случае это — угловые точки и некоторые точки, расположенные на гладких частях линии L.

Мы будем считать, как и во всем этом отделе, что $A(t), B(t), k(t_0, t)$ — функции класса H_0 на L.

Если предположить, что функции $A(t)$, $B(t)$, а следовательно, и $G(t)$ принадлежат классу H (а не только H_0), то согласно обозначениям § 83, п. 2° будем иметь для всех «узлов»

$$G(c_k-0)=G(c_k+0), \tag{103,8}$$

откуда следует, что все числа $\gamma_k=0$ (см. формулы (83,7)), так что все узлы особенные. Легко видеть, что в рассматриваемом случае теория уравнений (103,1), (103,2) ничем, по существу, не отличается от теории, изложенной в главе II для случая, когда L — гладкий замкнутый контур (или совокупность конечного числа таких контуров). Единственным различием является то, что $\varphi(t)$ или соответственно $\psi(t)$, найденные согласно общему способу, указанному в предыдущих параграфах, могут не удовлетворять уравнению (103,1) или соответственно (103,2), когда t совпадает с угловыми точками[2]).

Не произойдет существенных изменений и в том случае, если $A(t)$ и $B(t)$ принадлежат классу H_0, но в точках c_k

$$\arg G(c_k-0)=\arg G(c_k+0) \tag{103,9}$$

(с точностью до целого, кратного 2π). И в этом случае все узлы будут особенными и разделение решений на классы отпадает.

Наоборот, если равенства вида (103,8) или (103,9) не имеют места, то даже в случае, когда L — гладкий контур, никаких существенных упрощений по сравнению со случаем, когда L — произвольная кусочно-гладкая линия, мы не получим.

Отметим, однако, одно обстоятельство, которое иногда имеет существенное значение. А именно, покажем, что если решение $\varphi(t)$ уравнения (103,1) остается ограниченным в окрестности данного неособенного узла, то оно необходимо принадлежит в окрестности этого узла классу H (а не только H_0). В самом деле, если c — упомянутый узел и если $\varphi(c-0)\neq\varphi(c+0)$, то второе слагаемое в левой части (103,1) будет неограниченным[3]) как

$$\frac{B(t_0)}{\pi i}[\varphi(c-0)-\varphi(c+0)]\ln(t_0-c),$$

что невозможно, так как остальные слагаемые левой части, а также правая часть ограничены вблизи c.

То же самое имеет место по отношению к уравнению (103,2).

---

[1]) Этот случай (при более частном предположении, что L — гладкий контур) был рассмотрен непосредственно Ф. Д. Гаховым [3], [4], который воспользовался результатом статьи Н. И. Мусхелишвили и Д. А. Квеселава [1].

[2]) См. об этом еще Д. А. Квеселава [7].

[3]) Заметим, что по крайней мере одна из величин $B(c-0)$, $B(c+0)$ отлична от нуля; иначе узел c был бы особенным.

Замечание. В граничных задачах математической физики (например, в задачах теории потенциала), сводящихся к сингулярным интегральным уравнениям, наличие угловых точек границы обычно значительно усложняет решение.

Это не противоречит сказанному выше, ибо в упомянутых задачах наличие угловых точек обычно отражается на функции $k(t_0, t)$, которая может потерять необходимые для непосредственной применимости изложенной выше теории свойства регулярности.

§ 104. Приложение к характеристическому уравнению первого рода. В § 86 и при более общих предположениях в § 90 было решено уравнение

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0), \tag{104,1}$$

которое можно теперь назвать характеристическим уравнением первого рода; оно получается из уравнения $K^0\varphi = f$, рассмотренного в § 97, при $A(t_0) = 0$, $B(t_0) = 1$.

Для простоты мы ограничимся здесь случаем, когда L — гладкая прерывистая линия (как в § 86); общий случай также не представляет затруднений (ср. § 90).

Каноническая функция $X(z)$ класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ для задачи сопряжения (97,6), соответствующей уравнению (104,1), дается формулой (§§ 86 и 85)

$$X(z) = C\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}}, \tag{104,2}$$

где C — произвольная постоянная, отличная от нуля, а

$$R_1(z) = \prod_{j=1}^{q}(z-c_j), \qquad R_2(z) = \prod_{j=q+1}^{2p}(z-c_j); \tag{104,3}$$

радикалы понимаются, как в § 85, а именно:

$$\frac{\sqrt{R_1(z)}}{\sqrt{R_2(z)}} = \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \qquad \frac{\sqrt{R_2(z)}}{\sqrt{R_1(z)}} = 1 : \sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}}, \tag{104,4}$$

причем под радикалом в правых частях подразумевается ветвь, голоморфная на разрезанной вдоль L плоскости; для определенности, как в § 85, мы будем считать, что при больших $|z|$

$$\sqrt{\frac{R_1(z)}{R_2(z)}} = z^{q-p} + \alpha_1 z^{q-p-1} + \ldots \tag{104,5}$$

В нашем случае все концы неособенные. Так как порядок $X(z)$ на бесконечности равен $q-p$, то индекс класса $h(c_1, \ldots, c_q)$

$$\varkappa = p-q. \tag{104,6}$$

Каноническая функция $Z(t)$ для уравнения (104,1) класса $h(c_1, \ldots, c_q)$ дается формулами (97,9) при $A=0$, $B=1$, так что

$$Z(t) = X^+(t) = -X^-(t) = C\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}} = C\sqrt{\frac{R_1(t)}{R_2(t)}}, \tag{104,7}$$

где под последним радикалом понимается значение, принимаемое функцией $\sqrt{\dfrac{R_1(z)}{R_2(z)}}$ на L слева.

В соответствии с этим, согласно формуле (97,12),

$$\mathrm{K}^* f \equiv \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, f(t)\, dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)}. \tag{104,8}$$

Решение класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ уравнения (104,1), согласно общим формулам § 97, представится в виде

$$\varphi(t_0) = \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, f(t)\, dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)} + \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}} P_{p-q-1}(t_0), \tag{104,9}$$

где $P_{p-q-1}(t_0)$ — произвольный полином степени не выше $p-q-1$ ($P_{p-q-1}(t_0)=0$ при $p \leqslant q$), причем при $p<q$ для существования решения необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}}{\sqrt{R_1(t)}} t^j f(t)\, dt = 0, \qquad j = 0, 1, \ldots, q-p-1. \tag{104,10}$$

Мы, таким образом, снова получили результат § 86. Заметим еще, что уравнение (104,1) является союзным с самим собой и что условия разрешимости (104,10) выражают не что иное, как теорему I § 102 в применении к нашему частному случаю.

§ 105. Регуляризация и решение уравнения первого рода. Рассмотрим теперь уравнение первого рода общего вида

$$\frac{1}{\pi i} \int_L \frac{K(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt}{t-t_0} = f(t_0), \tag{105,1}$$

считая для простоты, что, как в предыдущем параграфе, L — гладкая прерывистая линия, и применяя те же обозначения.

Это уравнение можно переписать так:

$$\frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt = f(t_0), \tag{105,2}$$

где

$$B(t_0) = K(t_0, t_0), \qquad k(t_0, t) = \frac{K(t_0, t) - K(t_0, t_0)}{t-t_0}. \tag{105,3}$$

Мы будем, как всегда, предполагать, что рассматриваемое уравнение нормального типа; в нашем случае это сводится к условию, что $B(t) \neq 0$ всюду на L. Поэтому, не нарушая общности, мы можем считать:

$$B(t) = 1. \tag{105,4}$$

В соответствии с этим рассматриваемое уравнение принимает вид

$$\mathrm{K}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\, dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i} \int_L k(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt = f(t_0). \tag{105,5}$$

Мы будем по-прежнему считать, что $k(t_0, t)$ принадлежит классу H по t_0 и по t; кроме того, мы будем считать пока, что и $f(t)$ принадлежит классу H.

Уравнение (105,1) представляет собой частный случай уравнения (96,11), и поэтому мы можем применить к нему все результаты, полученные в предыдущих параграфах. Те же результаты и формулы можно получить, применяя непосредственно к уравнению (105,5) способ регуляризации, указанный в § 99, и пользуясь решением характеристического уравнения (104,1), указанным в предыдущем параграфе. Мы кратко воспроизведем некоторые из этих результатов.

Каноническая функция класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, соответствующая уравнению (105,5), дается формулой

$$Z(t) = C\frac{\sqrt{R_1(t)}}{\sqrt{R_2(t)}}, \tag{105,6}$$

где C — произвольная постоянная, отличная от нуля; индекс класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$

$$\varkappa = p - q. \tag{105,7}$$

При $\varkappa = p - q \geqslant 0$ уравнение (105,5) эквивалентно, в смысле разыскания решений класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_p)$, уравнению Фредгольма

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = \mathbf{K}^*f + \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\sqrt{R_2(t_0)}} P_{p-q-1}(t_0), \tag{105,8}$$

где $P_{p-q-1}(t_0)$ — произвольный полином степени не выше $p-q-1$ ($P_{p-q-1}(t_0) = 0$ при $p = q$).

При $\varkappa = p - q < 0$ уравнение (105,5) эквивалентно (в том же смысле) совокупности уравнения

$$\varphi(t_0) + \mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = \mathbf{K}^*f \tag{105,9}$$

и дополнительных условий

$$\int_L \rho_j \varphi\, dt = \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, t^j f(t)}{\sqrt{R_1(t)}}\, dt, \quad j = 0, 1, \ldots, q-p-1. \tag{105,10}$$

В предыдущих формулах

$$\mathbf{K}^*f \equiv \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t)}\, f(t)\, dt}{\sqrt{R_1(t)}\,(t-t_0)}, \quad \mathbf{k}\varphi \equiv \frac{1}{\pi i}\int_L k(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{105,11}$$

в соответствии с чем

$$\mathbf{K}^*\mathbf{k}\varphi = \frac{1}{\pi i}\int_L N(t_0, t)\, \varphi(t)\, dt, \tag{105,12}$$

где

$$N(t_0, t) = \frac{\sqrt{R_1(t_0)}}{\pi i \sqrt{R_2(t_0)}} \int_L \frac{\sqrt{R_2(t_1)}\, k(t_1, t)\, dt_1}{\sqrt{R_1(t_1)}\,(t_1 - t_0)} \tag{105,13}$$

и

$$\rho_j(t) = \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sqrt{R_2(t_1)}\, t_1^j k(t_1, t)\, dt_1}{\sqrt{R_1(t_1)}}. \tag{105,14}$$

Обратим внимание на то обстоятельство, что все решения уравнения (105,5), остающиеся ограниченными вблизи данного конца c, необходимо обращаются в нуль на нем.

Это свойство решений было уже отмечено в § 86 для одного частного случая, а именно, для уравнения вида (104,1). Общий же случай сводится к указанному частному случаю, ибо уравнение (105,5) можно переписать так:

$$\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0) - \mathbf{k}\varphi;$$

если решение φ ограничено вблизи конца c, то $\mathbf{k}\varphi$ принадлежит классу H в окрестности этого конца, так же как и f; отсюда и вытекает наше утверждение.

Заметим в заключение, что все предыдущие формулы и результаты останутся в силе, если считать, что функция $f(t)$ принадлежит классу $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, а не обязательно классу H.

§ 106. О другом способе исследования сингулярных уравнений. В § 55 мы ознакомились с эффективным способом исследования сингулярного уравнения в случае, когда линия интегрирования состоит из гладких замкнутых контуров, а коэффициенты характеристической части непрерывны, указанным И. Н. Векуа[1]). Аналогичный способ применим и в случае, когда путь интегрирования — произвольная кусочно-гладкая линия и когда рассматриваемые сингулярные уравнения принадлежат к одному из типов, указанных в § 96. В этом случае дело несколько усложняется, так как при подборе регуляризирующих операторов приходится заботиться о том, чтобы поведение ядра уравнения Фредгольма, получающегося в результате регуляризации и эквивалентного исходному сингулярному уравнению, было достаточно простым вблизи концов.

Такие регуляризирующие операторы можно легко найти, исходя из следующих соображений.

Мы знаем, что при обозначениях § 97 решение данного класса h характеристического уравнения

$$\mathbf{K}^0\varphi = f$$

дается при $\varkappa \geqslant 0$ формулой

$$\varphi(t_0) = \mathbf{K}^* f + B^*(t_0)\, Z(t_0)\, P_{\varkappa-1}(t_0),$$

где $P_{\varkappa-1}(t)$ — произвольный полином степени не выше $\varkappa - 1$. Таким обра зом, при $\varkappa \geqslant 0$ имеем тождество

$$\mathbf{K}^0\mathbf{K}^* f \equiv f,$$

так что $\mathbf{K}^0\mathbf{K}^* = \mathbf{E}$, где $\mathbf{E}$ — единичный оператор. Мы видим, что оператор $\mathbf{K}^0$ является в нашем случае регуляризирующим по отношению к $\mathbf{K}^*$, причем результат регуляризации оказывается весьма простым.

Легко поэтому догадаться, что аналогичное обстоятельство имеет место и при $\varkappa < 0$, а также если поменять ролями $\mathbf{K}^0$ и $\mathbf{K}^*$.

И действительно, путем несложных рассуждений можно установить, что

$$\mathbf{K}^*\mathbf{K}^0\varphi = \varphi(t_0) + \frac{B^*(t_0)\, Z(t_0)}{\pi i}\int_L P_{\varkappa-1}(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt,$$

$$\mathbf{K}^0\mathbf{K}^*\varphi = \varphi(t_0) - \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{Q_{\varkappa'-1}(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt}{Z(t)},$$

где $\varphi(t)$ — произвольная функция класса h, а $P_{\varkappa-1}(t_0, t)$ и $Q_{\varkappa'-1}(t_0, t)$ — вполне определенные полиномы степеней не выше соответственно $\varkappa - 1$

---

[1]) Здесь мы имеем в виду метод, указанный в статье И. Н. Векуа [7], отличный от метода, указанного тем же автором в статье [4].

и $\varkappa' - 1$ $(\varkappa' = -\varkappa)$, причем $P_{\varkappa-1}(t_0, t) = 0$ при $\varkappa \leqslant 0$, $Q_{\varkappa'-1}(t_0, t) = 0$ при $\varkappa' \leqslant 0$. Если, в частности, $\varkappa = \varkappa' = 0$, то $\mathbf{K}^*\mathbf{K}^0 = \mathbf{K}^0\mathbf{K}^* = \mathbf{E}$, так что операторы $\mathbf{K}^0$ и $\mathbf{K}^*$ являются взаимно обратными. В общем случае $\varkappa \neq 0$ эти операторы хотя и не являются взаимно обратными, но обладают существенными свойствами таких операторов. Кроме того, нетрудно доказать следующее свойство оператора $\mathbf{K}^*$:

При $\varkappa \geqslant 0$ однородное уравнение $\mathbf{K}^*\omega = 0$ не имеет отличных от нуля решений класса h.

При $\varkappa \leqslant 0$ уравнение $\mathbf{K}^*\omega = f$ разрешимо в классе h при всякой правой части f, принадлежащей классу h; соответствующее однородное уравнение имеет ровно $\varkappa' = -\varkappa$ линейно независимых решений класса h.

Оператор $\mathbf{K}^*$ может поэтому играть ту же роль, что и оператор $\mathbf{M}$ в теореме эквивалентности И. Н. Векуа, доказанной в § 55. Таким образом, мы получим и в нашем случае теорему эквивалентности, аналогичную теореме § 55.

Пользуясь этой теоремой, мы можем, так же как и в § 55, получить основные теоремы, доказанные иным путем в § 102; в нашем случае рассуждения будут несколько сложнее по сравнению с рассуждениями § 55, так как здесь приходится дополнительно исследовать поведение решений вблизи узлов.

Намеченный в настоящем параграфе метод исследования принадлежит Д. А. Квеселава [1], в статье которого читатель может найти доказательства высказанных здесь утверждений[1]).

При помощи этого метода можно получить и ряд новых результатов, аналогичных результатам, указанным в §§ 55, 59 главы II, что отчасти и сделано самим Д. А. Квеселава.

II. Приложение к задаче Дирихле и аналогичным задачам[2])

Изложенные в предыдущих отделах результаты могут быть с успехом применены к решению многих важных задач математической физики.

Мы даем в этом отделе одно из простейших и вместе с тем типичных приложений, а именно, приложение к задаче Дирихле для плоскости, разрезанной вдоль конечного числа дуг произвольной формы, и к некоторым ее видоизменениям, играющим важную роль в аэродинамике (например, в теории крыла самолета).

§ 107. Задача Дирихле и аналогичные для плоскости, разрезанной вдоль дуги произвольной формы. 1°. Пусть $L = ab$ обозначает простую разомкнутую гладкую дугу. Мы будем считать, кроме того, что L обладает кривизной, удовлетворяющей условию H[3]).

Пусть S обозначает плоскость, разрезанную вдоль L. Поставим себе следующую задачу.

---

[1]) Д. А. Квеселава рассматривает более частный случай, а именно, тот, когда линия интегрирования — гладкий замкнутый контур, но коэффициенты характеристической части могут иметь разрывы первого рода, как в § 103, п. 2°. Однако этот метод легко перенести и на общий случай.

[2]) Результаты, изложенные в этом отделе, в части, касающейся случая одного контура (§§ 107, 108), были получены мною в статье [6], в которой, впрочем, решена лишь задача A_1, § 107. Обобщение на случай произвольного числа контуров (§ 109) было дано Н. П. Векуа [1]; см. также мою статью [6].

[3]) Это означает, что координаты x и y точки t на L имеют вторые производные по дуговой абсциссе, удовлетворяющие H.

З а д а ч а А. Найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную в S, исчезающую на бесконечности, непрерывно продолжимую на L слева и справа на все обыкновенные (т. е. отличные от концов) точки линии L, а вблизи концов подчиненную неравенству

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\alpha}}, \quad 0 \leqslant \alpha = \text{const} < 1 \quad (c = a \text{ или } b)\,[1],$$

по следующему граничному условию:

$$\operatorname{Re}\Phi^{+}(t_0) = \operatorname{Re}\Phi^{-}(t_0) = f(t_0) \text{ на } L, \tag{107,1}$$

где $f(t_0)$ — заданная на L действительная функция класса H.

Задачу А можно подразделить на следующие случаи:

З а д а ч а A_1. Дополнительно требуется, чтобы функция $\Phi(z)$ была ограничена вблизи обоих концов a, b.

З а д а ч а A_2. Дополнительно требуется, чтобы функция $\Phi(z)$ была ограничена вблизи одного из концов a, b.

З а д а ч а A_3. Функция $\Phi(z)$ может быть неограниченной вблизи обоих концов a, b.

2°. Выясним предварительно вопрос о существовании отличных от нуля решений однородной задачи, соответствующей задаче А, т. е. задачи, соответствующей случаю, когда $f(t) = 0$. Эту однородную задачу мы будем называть задачей A^0, а однородные задачи, соответствующие задачам A_1, A_2, A_3, — соответственно задачами A_1^0, A_2^0, A_3^0. Для задачи A^0 граничное условие (107,1) принимает вид

$$\operatorname{Re}\Phi^{+}(t_0) = \operatorname{Re}\Phi^{-}(t_0) = 0 \text{ на } L. \tag{*}$$

Рассмотрим сначала частный случай, когда $L = ab$ представляет собой о т р е з о к д е й с т в и т е л ь н о й о с и, и заменим условие $\Phi(\infty) = 0$ более общим условием $\Phi(z_0) = 0$, где z_0 — некоторая заданная точка, не расположенная на L (в частности, можно взять $z_0 = \infty$); мы подразумеваем, что функция $\Phi(z)$ ограничена на бесконечности.

Введем в рассмотрение кусочно-голоморфную функцию (с линией скачков L), ограниченную на бесконечности,

$$\Omega(z) = \Phi(z) - \overline{\Phi}(z);$$

здесь мы применяем обозначения § 39, п. 1°, т. е. под $\overline{\Phi}(z)$ понимаем функцию, определяемую формулой

$$\overline{\Phi}(z) = \overline{\Phi(\bar{z})}.$$

Напомним, что

$$\overline{\Phi}^{+}(t) = \overline{\Phi^{-}(t)}, \qquad \overline{\Phi}^{-}(t) = \overline{\Phi^{+}(t)} \text{ на } L. \tag{**}$$

Легко видеть на основании (*) и (**), что $\Omega^{+}(t) - \Omega^{-}(t) = 0$ на L, откуда следует, что $\Omega(z) = \text{const} = 2C$. Таким образом, $\overline{\Phi}(z) = \Phi(z) - 2C$, где C — постоянная. Поэтому, как легко видеть на основании (*) и (**),

$$\Phi^{+}(t) + \Phi^{-}(t) = 2C \text{ на } L.$$

---

[1]) Иначе говоря, функция $\Phi(z)$ должна быть исчезающей на бесконечности кусочно-голоморфной функцией с линией скачков L.

Для определения $\Phi(z)$ мы имеем, таким образом, один из простейших случаев задачи сопряжения. Общее решение этой задачи, ограниченное на бесконечности, дается формулой

$$\Phi(z) = C + \frac{Az+B}{\sqrt{(z-a)(b-z)}}, \qquad (***)$$

где A и B — произвольные постоянные.

Выражая теперь то требование, что функция $\Phi(z)$ должна удовлетворять граничному условию (*) задачи A^0, легко заключаем, что постоянные A, B, C должны быть чисто мнимыми. Учитывая, далее, дополнительные условия, требуемые в задачах A_1^0 и A_2^0, а также условие $\Phi(z_0) = 0$, приходим путем самых элементарных выкладок к следующим заключениям:

Задачи A_1^0 и A_2^0 не имеют отличных от нуля решений. Самое общее решение задачи A_3^0 имеет вид

$$\Phi(z) = k\omega(z),$$

где k — действительная произвольная постоянная, а $\omega(z)$ — вполне определенная кусочно-голоморфная функция, ограниченная на бесконечности.

Отметим еще следующее обстоятельство. Если в задаче A_1^0 отбросить условие $\Phi(z_0) = 0$, то, как легко заключить на основании той же формулы (***), единственным решением этой задачи будет $\Phi(z) = ki$, где k — действительная постоянная, так что $\operatorname{Re}\Phi(z) = 0$.

Мы рассмотрели случай, когда $L = ab$ — прямолинейный отрезок. Общий же случай сводится к предыдущему при помощи конформного отображения области S на область Σ, представляющую собой плоскость ζ, разрезанную вдоль некоторого отрезка $\alpha\beta$ действительной оси; предполагается, что концы a и b переходят при этом соответственно в концы α и β[1]). Таким образом, полученные выше выводы относительно решения задачи A^0 остаются в силе и для общего случая.

3°. Приступим теперь к решению задачи A. Будем искать это решение в виде (ср. § 65)

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \qquad (107,2)$$

где $\mu(t)$ — искомая действительная функция класса H^*; в дальнейшем под решением задачи A (соответственно задач A_1, A_2, A_3) мы будем пока подразумевать решения, представимые в виде (107,2)[2]).

Граничное условие (107,1) приводит к действительному сингулярному уравнению первого рода

$$\frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{dr}{r(t_0, t)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_L \mu(t)\frac{\cos\alpha(t_0, t)}{r(t_0, t)}ds = f(t_0), \qquad (107,3)$$

---

[1]) На основании известных свойств конформного отображения (см., например, S. Warschawski [1]) легко видеть, что при принятых нами относительно L условиях функция $\Phi(z)$, удовлетворяющая вблизи конца c условию

$$|\Phi(z)| < \frac{\text{const}}{|z-c|^{\mu}}, \qquad 0 \leqslant \mu < 1,$$

преобразуется при конформном отображении в функцию, удовлетворяющую на плоскости ζ такому же условию вблизи соответствующего конца.

[2]) Это ограничение будет снято ниже (п. 7°).

где, как в § 64, $r(t_0, t) = |t - t_0|$, а $\alpha(t_0, t)$ обозначает угол, составляемый положительной касательной в t с направлением вектора $\overrightarrow{t_0 t}$. Предыдущее уравнение может быть переписано еще так (ср. § 64):

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0}+\frac{1}{\pi i}\int_L \mu(t)\frac{\partial\vartheta}{\partial s}\,ds=f(t_0), \tag{107,4}$$

где $\vartheta = \arg(t - t_0)$. При принятых нами относительно L условиях это уравнение принадлежит к тому типу, который был рассмотрен в § 105[1]).

Так как уравнение (107,3) действительное, *все исследования мы будем вести в действительной области* (см. замечание 2 в конце § 102).

Однородное уравнение, союзное с уравнением (107,3),

$$\int_L \nu(t)\frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r(t_0, t)}\,ds=0 \tag{107,5}$$

имеет простой физический смысл. Именно, пусть требуется найти плотность $\nu(t)$ потенциала простого слоя, распределенного по L, принимающего постоянное значение на L, так что

$$\int_L \nu(t)\ln\frac{1}{r(t_0, t)}\,ds=\mathrm{const} \tag{107,6}$$

(«задача распределения электричества» на проводнике L). Дифференцируя обе части предыдущего уравнения по s_0, мы получим как раз уравнение (107,5).

Разберем теперь каждую из задач A_1, A_2, A_3 в отдельности.

4°. Для решения з а д а ч и A_1 требуется, очевидно, найти решение уравнения (107,3) класса $h(a, b)$, т. е. ограниченное на обоих концах a, b [2]). Индекс $\varkappa$ этого класса равен -1 на основании сказанного в § 105[3]).

Однородное уравнение, соответствующее уравнению (107,3), не имеет решений класса $h(a, b)$, отличных от нуля; это вытекает из того, что задача A_1^0 не имеет отличных от нуля решений. Следовательно, союзное однородное уравнение (107,5) имеет ровно одно линейно независимое решение класса h_0, союзного с $h(a, b)$, которое мы обозначим через $\nu_0(t)$.

Легко видеть, что

$$\int_L \nu_0(t)\,ds \neq 0. \tag{107,7}$$

Действительно, в противном случае функция

$$U(x, y)=\int_L \nu_0(t)\ln\frac{1}{r(t_0, t)}\,ds$$

была бы гармонической в S функцией, непрерывно продолжимой на L, включая концы, постоянной на L и исчезающей на бесконечности. Следовательно, $U(x, y) = 0$, откуда следовало бы, что $\nu_0(t) = 0$[4]) на L, а это противоречит условию.

---

[1]) Действительно, на основании сказанного в конце § 7, $\frac{\partial\vartheta}{\partial s}$ удовлетворяет условию H по t и по t_0.

[2]) На основании сказанного в § 105 (п. 4°) такое решение необходимо обращается в нуль на концах.

[3]) В нашем случае $p = 1$, $q = 2$.

[4]) См. § 65, формула (65,11).

Для разрешимости уравнения (107,3) необходимо и достаточно, чтобы

$$\int_L f(t)\,\nu_0(t)\,ds = 0. \tag{107,8}$$

Если это условие не соблюдено, то всегда можно подобрать постоянную C такую, что

$$\int_L [f(t)+C]\,\nu_0(t)\,ds = 0; \tag{107,9}$$

это следует из (107,7). Поэтому, решив задачу

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t_0) = \operatorname{Re}\Phi^-(t_0) = f(t_0) + C \tag{107,10}$$

и положив

$$U = \operatorname{Re}\Phi(z) - C, \tag{107,11}$$

мы получим решение обычной задачи Дирихле

$$U^+ = U^- = f(t_0), \tag{107,12}$$

ограниченное на бесконечности, а именно, принимающее значение $-C$ на бесконечности.

5°. Для решения задачи A_2 требуется найти решение уравнения (107,3) класса $h(a)$; мы для определенности считаем, что решение должно быть ограниченным на конце a. Индекс $\varkappa$ класса $h(a)$ равен 0 [1]). Однородное уравнение, соответствующее уравнению (107,3), не имеет отличных от нуля решений класса $h(a)$; это следует из того, что задача A_2^0 не имеет решений, отличных от нуля. Следовательно, не имеет отличных от нуля решений союзного класса $h(b)$ и союзное уравнение (107,5). Значит, уравнение (107,3) всегда имеет одно и только одно решение класса $h(a)$, и задача A_2 всегда однозначно разрешима.

6°. Для решения задачи A_3 требуется найти решение уравнения (107,3) класса h_0. Индекс $\varkappa$ этого класса равен 1 [2]). Союзное однородное уравнение (107,5) не имеет отличных от нуля решений союзного класса $h(a, b)$, ибо на основании предыдущего пункта оно не имеет отличных от нуля решений даже в более широком классе $h(b)$. Следовательно, уравнение (107,3) всегда разрешимо, и решение содержит линейным образом одну произвольную постоянную (ибо соответствующее однородное уравнение имеет одно линейно независимое решение).

Таким образом, задача A_3 всегда разрешима, и общее ее решение содержит линейным образом одну (действительную) произвольную постоянную.

7°. До сих пор под решением задачи A мы подразумевали решение, представимое в виде (107,2). Нам остается показать, что упомянутое условие, дополнительно наложенное нами в процессе решения задачи, на самом деле не ограничивает общности полученных результатов.

В случае задачи A_2 это очевидно, так как мы показали, что всегда существует решение, представимое в виде (107,2); других же решений задача A_2 не имеет в силу того, что задача A_2^0 не имеет отличных от нуля решений.

В случае задачи A_1 может возникнуть лишь следующее сомнение: останется ли условие (107,8) необходимым для разрешимости задачи,

---

[1]) § 105; в нашем случае $p = 1$, $q = 1$.

[2]) § 105; в нашем случае $p = 1$, $q = 0$.

если мы откажемся от представления решения в виде (107,2). Легко показать, что условие (107,8) необходимо и в этом случае. Действительно, пусть

$$\int_L f(t)\, v_0(t)\, ds \neq 0$$

и пусть, несмотря на это, задача A_1 имеет решение $\Phi_1(z)$, исчезающее на бесконечности. Подберем теперь действительную постоянную C так, чтобы имело место условие (107,9), и составим, как это было показано выше, в п. 4°, решение $\Phi_2(z)$ задачи

$$\operatorname{Re}\Phi_2^+(t_0) = \operatorname{Re}\Phi_2^-(t_0) = f(t_0)$$

такое, что $\operatorname{Re}\Phi_2(\infty) = -C \neq 0$. Но тогда всюду ограниченная функция $\Phi(z) = \Phi_2(z) - \Phi_1(z)$ будет удовлетворять условию: $\operatorname{Re}\Phi^+(t_0) = \operatorname{Re}\Phi^-(t_0) = 0$, и, следовательно, в силу сделанного выше замечания (п. 2°) $\operatorname{Re}\Phi(z) = 0$ всюду, а это противоречит тому, что $\operatorname{Re}\Phi(\infty) = \operatorname{Re}\Phi_2(\infty) - \operatorname{Re}\Phi_1(\infty) = -C \neq 0$.

В случае задачи A_3 может возникнуть сомнение лишь в том, что, разыскивая решения в виде (107,2), мы не получим самого общего решения. Но это сомнение, как легко видеть, отпадает, если сопоставить результат, полученный в п. 6°, с результатом относительно решения однородной задачи A_3^0, указанным в п. 2°.

Замечание. Исследование неоднородного уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_L v(t)\,\frac{\cos\alpha(t, t_0)}{r(t, t_0)}\, ds = g(t_0), \qquad (107,13)$$

союзного с уравнением (107,3), производится совершенно аналогично исследованию этого последнего: достаточно лишь поменять ролями уравнения (107,3) и (107,13).

К уравнению (107,13) сводится одна весьма важная задача гидромеханики, а именно, задача отыскания потока, обтекающего дугу заданной формы. Наибольший интерес с точки зрения приложений представляет нахождение решений класса $h(a)$ или, что сводится к тому же, класса $h(b)$ [1]. Этому вопросу посвящена работа М. А. Лаврентьева [2] 1932 г., который, не имея в своем распоряжении общей теории сингулярных уравнений, дал ряд результатов, представляющих большой интерес, и, в частности, указал метод приближенного решения. Дальнейшая разработка этого и аналогичных методов приближенного решения сингулярных интегральных уравнений является, как мне кажется, одной из важнейших очередных задач теории этих уравнений.

§ 108. Приведение к уравнению Фредгольма. Примеры. Полученное в предыдущем параграфе сингулярное интегральное уравнение (107,4) можно переписать еще так:

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sin\alpha(t_0, t)\, e^{-i\alpha(t_0, t)}\,\mu(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0). \qquad (108,1)$$

В зависимости от класса h, в котором разыскиваются решения, т. е. в зависимости от того, какая из задач — A_1, A_2 или A_3 — должна быть решена, это уравнение может быть приведено к тому или иному уравнению

[1]) Это связано с так называемым постулатом С. А. Чаплыгина; см. М. А. Лаврентьев [2].

Фредгольма согласно способу, указанному в § 105. При этом, конечно, возможно и желательно видоизменять этот способ в зависимости от интересующего нас конкретного случая.

Остановимся для определенности на задаче A_1, т. е. на случае, когда требуется найти решение класса $h(a, b)$ уравнения (108,1). Если мы будем в точности следовать правилу, указанному в § 105, то в нашем случае, когда индекс $\varkappa = -1$, мы получим в результате регуляризации одно уравнение Фредгольма и одно дополнительное условие вида (105,10).

Но предположим, что нас интересует решение задачи Дирихле в обычной постановке, т. е. определение гармонической в S, всюду ограниченной функции $U(x, y)$ по граничному условию

$$U^+ = U^- = f(t_0) \text{ на } L. \tag{108,2}$$

Полагая

$$U = \operatorname{Re}\Phi(z) - C, \tag{108,3}$$

где $\Phi(z)$ обозначает интеграл (107,2), исчезающий на бесконечности, а C — не задаваемую заранее постоянную, мы придем к интегральному уравнению, которое получим из уравнения (108,1), заменяя в нем $f(t_0)$ на $f(t_0)+C$, т. е. к уравнению

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0, t)} \equiv \frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\sin\alpha(t_0, t)\,e^{-i\alpha(t_0, t)}\mu(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0)+C. \tag{108,1a}$$

Вспомним теперь, что на основании сказанного в конце § 87 (единственное) решение класса $h(a, b)$, т. е. класса H, уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0} = g(t_0)+C, \tag{108,4}$$

где C — постоянная, не задаваемая заранее, имеет вид

$$\mu(t_0) = -\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int_L \frac{g(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t-t_0)}, \tag{108,5}$$

причем постоянная C вполне определяется:

$$C = -\frac{1}{\pi}\int_L \frac{g(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}}. \tag{108,6}$$

Мы воспользовались здесь формулами (87,16) и (87,17), несколько преобразовав их; а именно, мы ввели вместо радикала $\sqrt{(t-a)(t-b)}$ радикал $\sqrt{(t-a)(b-t)}$, считая, что

$$\sqrt{(t-a)(t-b)} = i\sqrt{(t-a)(b-t)}; \tag{108,7}$$

в случае, когда $L = ab$ — отрезок действительной оси, $\sqrt{(t-a)(b-t)}$ принимает действительные значения на L.

Перенося теперь второе слагаемое левой части формулы (108,1a) в правую часть и решая при помощи предыдущих формул полученное уравнение, как если бы правая часть была заданной (с точностью до постоянной) функцией, т. е. поступая совершенно аналогично тому, как мы регуляризировали сингулярное уравнение в общем случае, получим уравнение Фредгольма

$$\mu(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L N(t_0, t_1)\,\mu(t_1)\,dt_1=f_0(t_0), \tag{108,8}$$

эквивалентное исходному уравнению (108,1а) в смысле разыскания решений класса H и не содержащее уже никакой неопределенной постоянной; мы ввели следующие обозначения:

$$N(t_0, t_1)=-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int\limits_L \frac{\sin\alpha(t, t_1)\,e^{-i\alpha(t, t_1)}\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t_1-t)(t-t_0)}, \tag{108,9}$$

$$f_0(t_0)=-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t-t_0)}. \tag{108,10}$$

Легко видеть, что при принятых нами условиях уравнение (108,8) представляет собой обычное регулярное интегральное уравнение Фредгольма и что всякое его (непрерывное) решение принадлежит классу H и обращается в нуль на концах.

Легко показать, что однородное уравнение, соответствующее (108,8), не может иметь отличных от нуля решений класса $h(a, b)$. В самом деле, пусть $\mu(t)$ — решение этого однородного уравнения. Тогда в силу (108,1а)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dr}{r(t_0, t)}=\text{const}. \tag{*}$$

Мы можем считать $\mu(t)$ действительной функцией, ибо в противном случае мы могли бы рассмотреть отдельно действительную и мнимую части $\mu(t)$. Из предыдущего уравнения следует, что действительная часть исчезающей на бесконечности функции $\Phi(z)$, определяемой по $\mu(t)$ формулой (107,2) [1]), принимает нулевые граничные значения слева и справа от L, а также на концах a, b; но такая функция необходимо равна нулю, а поэтому $\mu(t)=0$.

Таким же образом легко показать, что уравнение (108,8) может иметь лишь действительные решения; мы предполагаем, разумеется, что $f(t_0)$ — действительная функция. В самом деле, мнимая часть решения, как легко видеть, удовлетворяет уравнению (*) и поэтому необходимо исчезает.

Так как однородное уравнение, соответствующее уравнению Фредгольма (108,8), не имеет отличных от нуля решений, то уравнение (108,8) всегда разрешимо; решение $\mu(t)$ является действительной функцией, и соответствующая этому решению функция $U=\operatorname{Re}\Phi(z)$ удовлетворяет граничному условию

$$U^+=U^-=f(t_0)+\text{const},$$

и наша задача решена при помощи уравнения Фредгольма.

Некоторым неудобством является то, что уравнение (108,8) имеет комплексный вид, тогда как задача Дирихле относится к области действительных функций.

Но и это неудобство легко устранить. В самом деле, разделяя в (108,8) действительную и мнимую части (считая $\mu(t)$ действительной), приходим к двум действительным уравнениям Фредгольма соответственно второго

---

[1]) Эта функция непрерывно продолжима на L слева и справа, а также на концы, ибо $\mu(t)$ обращается в нуль на этих концах.

и первого рода

$$\mu(s_0)+\int\limits_L M(s_0, s_1)\mu(s_1)\,ds_1=F(s_0), \tag{108,11}$$

$$\int\limits_L M_1(s_0, s_1)\mu(s_1)\,ds_1=F_1(s_0), \tag{108,12}$$

где s_0, s_1 — дуговые абсциссы точек t_0 и t_1,

$$(M+iM_1)\,ds_1=\frac{1}{\pi i}N(t_0, t_1)\,dt_1, \quad F+iF_1=f_0(t_0).$$

Легко показать, что всякое (действительное) решение уравнения (108,11) будет также решением уравнения (108,8), т. е. что уравнение (108,12) является следствием уравнения (108,11) и что, таким образом, исходная задача сводится к решению *действительного* уравнения Фредгольма (108,11).

В самом деле, пусть μ' — какое-либо действительное решение уравнения (108,11) и пусть μ — по-прежнему решение уравнения (108,8), необходимо действительное. Тогда, очевидно, $\mu''=\mu-\mu'$ удовлетворяет однородному уравнению

$$\mu''(s_0)+\int\limits_L M(s_0, s_1)\mu''(s_1)\,ds_1=0; \tag{**}$$

легко видеть, что μ'' принадлежит классу H и исчезает на концах.

Положим теперь

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \mu''(t)\frac{dr}{r(t_0, t)}=\chi(t_0). \tag{***}$$

Применяя к предыдущему равенству тот же процесс регуляризации, при помощи которого мы перешли от уравнения (108,1a) к уравнению (108,8), и принимая во внимание (**), получим:

$$\chi_0(t_0)\equiv-\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int\limits_L\frac{\chi(t)\,dt}{\sqrt{(t-b)(b-t)}\,(t-t_0)}=i\nu(t_0),$$

где $\nu(t_0)$ — некоторая действительная функция класса H; отсюда в силу эквивалентности равенств (108,4), (108,5) заключаем, что

$$\chi(t_0)=\frac{1}{\pi}\int\limits_L\frac{i\nu(t)\,dt}{t-t_0}+\text{const};$$

отделяя в интеграле мнимую часть и принимая во внимание, что $\chi(t)$ — действительная функция, получаем:

$$\int\limits_L \nu(t)\frac{dr}{r(t_0, t)}=\text{const},$$

откуда следует, что $\nu(t)=0$. Следовательно, $\chi(t)=\text{const}$ и, наконец, на основании (***) $\mu''(t)=0$, а это доказывает наше утверждение.

Примеры. 1. Пусть $L=ab$ — *отрезок прямой*. Тогда

$$\sin\alpha(t, t_1)=0, \quad N(t_0, t_1)=0$$

и, следовательно, на основании (108,8) и (108,10)

$$\mu(t_0) = -\frac{\sqrt{(t_0-a)(b-t_0)}}{\pi}\int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{\sqrt{(t-a)(b-t)}\,(t-t_0)}. \tag{108,13}$$

2. Пусть $L = ab$ — дуга окружности с центром в начале координат. Легко проверить, что в этом случае $N(t_0, t_1) = 0$, и поэтому $\mu(t_0)$ дается точно такой же формулой (108,13), как в случае прямолинейного отрезка.

§ 109. Задача Дирихле для плоскости, разрезанной вдоль конечного числа дуг произвольной формы. Решение задачи А § 107 может быть без труда обобщено на случай, когда L состоит из любого (конечного) числа дуг $L_j = a_jb_j$, не имеющих общих точек,

$$L = a_1b_1 + a_2b_2 + \ldots + a_pb_p = L_1 + L_2 + \ldots + L_p;$$

мы считаем, как в § 107, что дуги L_j имеют кривизну, удовлетворяющую условию H. Плоскость, разрезанную вдоль L, мы будем обозначать через S.

Для определенности мы остановимся на задаче Дирихле в обычной ее постановке, т. е. на задаче нахождения гармонической в S функции $U(x, y)$, ограниченной на бесконечности и непрерывно продолжимой на L слева и справа, а также на концы, по граничному условию

$$U^+ = U^- = f(t_0) \quad \text{на} \quad L, \tag{109,1}$$

где $f(t_0)$ — заданная действительная функция класса H.

Аналогично тому, как мы поступили в случае замкнутых контуров, начнем с решения видоизмененной задачи Дирихле, т. е. с задачи нахождения функции $\Phi(z)$, голоморфной в S, исчезающей на бесконечности, непрерывно продолжимой на L слева и справа, а также на концы, по граничному условию

$$\operatorname{Re}\Phi^+(t_0) = \operatorname{Re}\Phi^-(t_0) = f(t_0) + C_k \quad \text{на } L_k, \ k = 1, 2, \ldots, p, \tag{109,2}$$

где $f(t_0)$ — заданная действительная функция класса H, а C_k — действительные постоянные, не задаваемые заранее и также подлежащие определению.

Эта задача не может иметь более одного решения (легко видеть, что доказательство § 60 применимо и здесь). Будем разыскивать функцию $\Phi(z)$, как в § 107, в виде

$$\Phi(z) = \frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{109,3}$$

где $\mu(t)$ — искомая действительная функция класса H. Граничные условия (109,2) приводят к интегральному уравнению (ср. предыдущий параграф)

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\sin\alpha(t_0, t)\, e^{-i\alpha(t_0, t)}\,\mu(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0) + C_j$$
$$\text{при } t_0 \in L_j, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \tag{109,4}$$

содержащему неопределенные постоянные C_j.

Вспомним теперь, что на основании сказанного в § 88 решение интегрального уравнения

$$\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-t_0} = f(t_0) + C_j \text{ при } t_0 \in L_j, \quad j=1, \ldots, p, \tag{109,5}$$

где C_j — постоянные, не задаваемые заранее, дается формулой[1])

$$\mu(t_0) = -\frac{\sqrt{R(t_0)}}{\pi}\int\limits_L \frac{f(t)}{\sqrt{R(t)}}\left\{\frac{1}{t-t_0} + \sum_{j=1}^{p}\omega_j(t)\int\limits_{L_j}\frac{dt_1}{\sqrt{R(t_1)}\,(t_1-t_0)}\right\}dt, \tag{109,6}$$

где $\omega_j(t)$ — определенные полиномы степени не выше $p-1$,

$$R(t) = \prod_{j=1}^{p}(t-a_j)(t-b_j); \tag{109,7}$$

как следует понимать радикалы $\sqrt{R(t)}$, неоднократно пояснялось.

При помощи формулы обращения (109,6) мы можем совершенно аналогично тому, как мы сделали в § 108, привести уравнение (109,4) к эквивалентному (в смысле разыскания решений класса H) уравнению Фредгольма (не содержащему уже неопределенных постоянных C_j), которое мы считаем излишним выписывать. Так же как в предыдущем параграфе, легко показать, что полученное таким образом уравнение Фредгольма всегда имеет одно и только одно решение, которое необходимо принадлежит классу H и обращается в нуль на концах. Таким образом, видоизмененная задача Дирихле может считаться решенной.

После этого легко получить и решение $U(x, y)$ задачи Дирихле (109,1). При этом, конечно, достаточно найти решение, удовлетворяющее граничному условию

$$U^+ = U^- = f(t_0) + C, \tag{109,1a}$$

где C — некоторая не задаваемая заранее постоянная. Для этого можно, например, поступить так. Положим

$$U = u + \sum_{j=1}^{p}\alpha_j u_j, \tag{109,8}$$

где u обозначает гармоническую функцию, представимую в виде

$$u = \operatorname{Re}\frac{1}{\pi}\int\limits_L \frac{\mu(t)\,dt}{t-z}, \tag{109,9}$$

причем $\mu(t)$ — действительная искомая функция класса H, α_j — неопределенные пока постоянные, а u_j — потенциалы простых слоев, распределенных по L_j,

$$u_j = \int\limits_{L_j}\sigma_j(t)\ln\frac{1}{r}\,ds, \tag{109,10}$$

причем под $\sigma_j(t)$ подразумеваются произвольно выбранные действительные функции такие, чтобы значения u_j на L удовлетворяли условию H[2])

---

[1]) См. формулу (88,9).

[2]) Для этого, как легко видеть, достаточно, чтобы функции $\sigma_j(t)$ были непрерывны; можно, например, взять $\sigma_j(t) = 1$. В моей статье [6] указан, по недосмотру, неправильный способ подбора функций u_j, обозначенных там через ω_j; этот способ подбора пригоден лишь в случае, когда L состоит из отрезков прямой.

и чтобы

$$e_j = \int_{L_j} \sigma_j\, ds \neq 0. \qquad (109,11)$$

Для того чтобы функция U была ограничена на бесконечности, постоянные α_j должны быть подчинены условию

$$\sum_{j=1}^{p} \alpha_j e_j = 0 \qquad (109,12)$$

(тогда, очевидно, U будет функцией, исчезающей на бесконечности).

Определим теперь u как решение видоизмененной задачи Дирихле, соответствующей граничным условиям

$$u^+ = u^- = f(t) - \sum_{j=1}^{p} \alpha_j u_j(t) + C_j \quad \text{на} \quad L_j,\ j = 1, \ldots, p, \qquad (109,13)$$

при произвольно фиксированных α_j.

Решив эту последнюю задачу, мы получим для постоянных C_j определенные значения, которые, как легко видеть, будут линейными функциями постоянных α_j.

Подберем теперь эти постоянные α_j так, чтобы удовлетворялось условие

$$C_1 = C_2 = \ldots = C_n, \qquad (109,14)$$

а также условие (109,12); это всегда возможно сделать и притом единственным образом, ибо условия (109,12), (109,14) представляют собой систему p линейных уравнений относительно α_j, которая, как нетрудно показать, всегда разрешима единственным образом.

При указанных значениях постоянных α_j решение задачи Дирихле будет дано формулой (109,8).

III. Сингулярные интегральные уравнения, содержащие комплексно сопряженные неизвестные

Методы, аналогичные предыдущим, могут быть применены и к другим типам сингулярных интегральных уравнений.

Мы рассмотрим в этом отделе один тип таких уравнений, а именно уравнения, содержащие наряду с искомой функцией $\varphi(t)$ также комплексно сопряженную с ней функцию $\overline{\varphi(t)}$. Уравнения такого вида можно непосредственно свести к системе двух сингулярных уравнений с двумя неизвестными функциями $\varphi(t)$, $\overline{\varphi(t)}$, если присоединить к данному уравнению другое, получаемое переходом к сопряженным значениям.

Однако есть случаи, когда при решении уравнений упомянутого типа можно обойтись (надлежащим образом видоизмененными) способами, изложенными выше, не приводя данное уравнение к системе сингулярных уравнений.

Один из таких случаев, представляющий значительный интерес с точки зрения приложений, и будет рассмотрен в настоящем отделе.

Нам все же придется опираться на теорию систем интегральных уравнений, но это будут не сингулярные уравнения, а хорошо известные системы уравнений Фредгольма. Необходимые нам свойства таких систем мы приведем в § 110, несколько отступая от обычного способа изложения.

Результаты, изложенные в остальных параграфах этого отдела (§§ 111—114), принадлежат в основном Г. Ф. Манджавидзе [1] — [3].

§ 110. О системе уравнений Фредгольма. В этом параграфе мы напомним некоторые результаты, касающиеся систем интегральных уравнений Фредгольма, которые нам понадобятся в следующем параграфе, а также (при несколько иных условиях) в главе VI. Мы ограничиваемся здесь системами двух уравнений с двумя неизвестными функциями, но это ограничение совершенно несущественно.

1°. Условимся о некоторых терминах и обозначениях, которыми будем пользоваться в ближайших параграфах.

Нам придется рассматривать пары (вообще комплексных) функций некоторой переменной t, взятых в определенном порядке. Если $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$ — такая пара, то мы будем называть ее *вектором с компонентами* $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$; этот вектор мы будем обозначать через φ или $\varphi(t)$ и писать:

$$\varphi(t) = (\varphi_1, \varphi_2).$$

Вектор $\varphi(t)$ является функцией переменной t. В отличие от векторов, обычные функции, например $\varphi_1(t)$ и $\varphi_2(t)$, мы будем иногда называть скалярными функциями или скалярами. Два вектора считаются равными, если равны соответствующие компоненты. Под произведением $\varphi(t)\psi(t)$ (или, короче, $\varphi\psi$) двух векторов $\varphi(t) = (\varphi_1, \varphi_2)$ и $\psi(t) = (\psi_1, \psi_2)$ мы будем подразумевать скалярную функцию, определяемую формулой (такое произведение называют иногда внутренним)

$$\varphi\psi = \varphi_1\psi_1 + \varphi_2\psi_2;$$

мы видим, что $\varphi\psi = \psi\varphi$. На других элементарных операциях и понятиях, связанных с векторами (сумма векторов, умножение вектора на скаляр) мы останавливаться не будем, считая их известными.

Иногда нам придется рассматривать векторы, зависящие не от одной, а от двух переменных, но это, конечно, ничего не изменяет.

Пусть теперь

$$A = \| A_{ij} \| = \begin{Vmatrix} A_{11} & A_{12} \\ A_{21} & A_{22} \end{Vmatrix}$$

— матрица (второго порядка) с компонентами A_{ij} $(i, j = 1, 2)$.

В интересующих нас здесь случаях компоненты эти будут представлять собой (скалярные) функции двух переменных, скажем t_0, t, так что $A_{ij} = A_{ij}(t_0, t)$; в соответствии с этим мы будем иногда писать $A = A(t_0, t)$. Мы считаем известными элементарные свойства матриц и понятия, с ними связанные.

Укажем лишь, что под произведением AB двух матриц мы будем, как обычно, подразумевать матрицу $C = \| C_{ij} \|$ $(i, j = 1, 2)$ с компонентами $C_{ij} = \sum\limits_{k=1}^{2} A_{ik}B_{kj}$, получаемыми умножением строк матрицы A на столбцы матрицы B. Матрицу, транспонированную по отношению к A, мы будем обозначать через A', так что $A' = \| A'_{ij} \|$, где $A'_{ij} = A_{ji}$.

Рассмотрим *линейную подстановку* с матрицей A

$$\psi_1 = A_{11}\varphi_1 + A_{12}\varphi_2, \quad \psi_2 = A_{21}\varphi_1 + A_{22}\varphi_2,$$

преобразующую вектор $\varphi = (\varphi_1, \varphi_2)$ в вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$; эту подстановку мы будем записывать так:

$$\psi = A\varphi.$$

Если в свою очередь $\varphi = B\omega$, где ω — некоторый вектор, а B — некоторая матрица, то $\psi = C\omega$, где $C = AB$, так что $\psi = AB\omega$.

Пусть φ и ψ — некоторые векторы, а A и B — некоторые матрицы. Произведение векторов ψ и $A\varphi$ мы будем записывать так: $\psi A\varphi$. Легко проверить, что

$$\psi A\varphi = \varphi A'\psi,$$

где A' — транспонированная по отношению к A матрица.

Наконец, под линейной комбинацией нескольких векторов

$$\varphi^1 = (\varphi_1^1, \varphi_2^1), \quad \varphi^2 = (\varphi_1^2, \varphi_2^2), \quad \ldots, \quad \varphi^\nu = (\varphi_1^\nu, \varphi_2^\nu)$$

(верхними значками мы обозначаем номера векторов в отличие от нижних значков 1, 2, обозначающих номера компонентов данного вектора) мы будем подразумевать вектор

$$\psi = C_1\varphi^1 + C_2\varphi^2 + \ldots + C_\nu\varphi^\nu = \sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \varphi^\alpha,$$

где C_α — постоянные, вообще комплексные, т. е. вектор $\psi = (\psi_1, \psi_2)$ с компонентами

$$\psi_1 = \sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \varphi_1^\alpha, \qquad \psi_2 = \sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \varphi_2^\alpha;$$

в соответствии с этим определяются понятия линейной зависимости и независимости векторов. А именно, рассматриваемые векторы линейно зависимы, если существуют постоянные C_α, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \varphi^\alpha = 0$$

или, что то же,

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \varphi_1^\alpha = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \varphi_2^\alpha = 0$$

для всех значений переменных, от которых зависят рассматриваемые векторы. В противном случае векторы φ^α линейно независимы.

2°. Во избежание повторений условимся еще в следующем. Нам придется рассматривать здесь функции одной или двух переменных, скажем t_0, t, причем t_0, t обозначают точки заданной кусочно-гладкой линии L. Мы будем считать, что все рассматриваемые здесь функции ограничены и, кроме того, непрерывны для всех значений t_0, t, кроме, быть может, тех значений, которые соответствуют узлам линии L; в узлах рассматриваемые функции могут быть вовсе не определены.

То же самое относится к векторам и матрицам. Говоря, что векторы или матрицы ограничены, непрерывны и т. д., мы подразумеваем, что ограничены, непрерывны и т. д. их компоненты.

3°. Рассмотрим следующую (нормальную) систему двух уравнений Фредгольма (второго рода) с двумя неизвестными функциями

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) + \int_L n_{11}(t_0, t)\,\varphi_1(t)\,dt + \int_L n_{12}(t_0, t)\,\varphi_2(t)\,dt = f_1(t_0), \\ \varphi_2(t_0) + \int_L n_{21}(t_0, t)\,\varphi_1(t)\,dt + \int_L n_{22}(t_0, t)\,\varphi_2(t)\,dt = f_2(t_0), \end{aligned} \qquad (110,1)$$

где L — заданная кусочно-гладкая линия, t_0, t — точки этой линии, $n_{ij}(t_0, t)$ и $f_1(t_0)$, $f_2(t_0)$ — заданные функции; уравнения должны удовлетворяться для всех значений t_0, кроме, быть может, значений, соответствующих узлам.

Применяя обозначения, указанные в п. 1°, систему (110,1) можно, очевидно, записать так:

$$\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0), \tag{110,2}$$

где $\varphi(t) = (\varphi_1, \varphi_2)$ — искомый, а $f(t) = (f_1, f_2)$ — заданный векторы, и где $n(t_0, t)$ обозначает заданную матрицу

$$n(t_0, t) = \|n_{ij}(t_0, t)\| = \begin{Vmatrix} n_{11}(t_0, t) & n_{12}(t_0, t) \\ n_{21}(t_0, t) & n_{22}(t_0, t) \end{Vmatrix}, \tag{110,3}$$

которую мы будем называть *ядром* уравнения (110,2) или системы (110,1).

Мы видим, таким образом, что систему уравнений Фредгольма можно представить в виде одного уравнения, которое мы назовем векторным (так как обе части этого уравнения представляют собой векторы), ничем по виду не отличающегося от обычного уравнения Фредгольма с одной неизвестной функцией, которое мы теперь назовем скалярным. Это сходство не только внешнее: по отношению к уравнению (110,2), заменяющему систему (110,1), можно, без всяких почти изменений, повторить то, что известно насчет обычного (скалярного) уравнения Фредгольма. Поэтому векторные уравнения вида (110,2) мы также будем называть уравнениями Фредгольма.

Мы напомним те основные предложения, которыми будем пользоваться в дальнейшем.

Пусть N — оператор, определяемый формулой

$$\mathrm{N}\varphi \equiv \varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt. \tag{110,4}$$

Тогда уравнение (110,2) запишется так: $\mathrm{N}\varphi = f(t_0)$. Оператором, *союзным* с N, мы будем называть оператор, определяемый формулой

$$\mathrm{N}'\psi \equiv \psi(t_0) + \int_L n'(t, t_0)\,\psi(t)\,dt, \tag{110,5}$$

который получим из оператора N заменой матрицы $n(t_0, t)$ транспонированной матрицей и перестановкой переменных t_0 и t.

Уравнение $\mathrm{N}'\psi = g(t_0)$ мы будем называть *союзным* с уравнением $\mathrm{N}\varphi = f(t_0)$, каковы бы ни были их правые части $f(t_0)$ и $g(t_0)$; эти правые части, напоминаем, представляют собой векторы, так же как и левые части. Соответствующая векторному уравнению $\mathrm{N}'\psi = g$ система уравнений[1]) называется системой, союзной с системой (110,1).

Легко проверить, что если $\varphi(t)$, $\psi(t)$ — два произвольных вектора, являющиеся функциями от t, то

$$\int_L \psi(t)\,\mathrm{N}\varphi(t)\,dt = \int_L \varphi(t)\,\mathrm{N}'\psi(t)\,dt. \tag{110,6}$$

[1]) В том же смысле, в каком система (110,1) соответствует уравнению (110,2).

Далее, имеют место следующие предложения, совершенно аналогичные предложениям для случая одного обычного скалярного уравнения Фредгольма.

Однородное уравнение $N\varphi = 0$ может иметь лишь конечное число линейно независимых решений, и столько же решений имеет союзное с ним однородное уравнение $N'\psi = 0$.

Если однородное уравнение $N\varphi = 0$ не имеет отличных от нуля решений, то уравнение $N\varphi = f$ однозначно разрешимо при всякой правой части f. Если же однородное уравнение $N\varphi = 0$ имеет решения, отличные от нуля, то уравнение $N\varphi = f$ разрешимо лишь при соблюдении условий

$$\int_L f(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt = 0, \quad \alpha = 1,\ 2,\ \ldots,\ \nu, \tag{110,7}$$

где $\psi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, — полная система линейно независимых решений союзного однородного уравнения $N'\psi = 0$. Напомним, что $f(t)\,\psi^\alpha(t)$ есть произведение векторов $f(t) = (f_1, f_2)$ и $\psi^\alpha(t) = (\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha)$, так что $f(t)\,\psi^\alpha(t) = f_1(t)\,\psi_1^\alpha(t) + f_2(t)\,\psi_2^\alpha(t)$.

В случае, когда $\nu = 0$, т. е. когда однородное уравнение не имеет отличных от нуля решений, существует матрица

$$\gamma(t_0, t) = \| \gamma_{ij}(t_0, t) \| = \begin{Vmatrix} \gamma_{11}(t_0, t) & \gamma_{12}(t_0, t) \\ \gamma_{21}(t_0, t) & \gamma_{22}(t_0, t) \end{Vmatrix}, \tag{110,8}$$

называемая **резольвентой** уравнения (110,2) или системы (110,1), через которую (единственное) решение этого уравнения выражается так:

$$\varphi(t_0) = f(t_0) + \int_L \gamma(t_0, t)\,f(t)\,dt, \tag{110,9}$$

или, принимая во внимание, что $\varphi(t) = (\varphi_1, \varphi_2)$, $f(t) = (f_1, f_2)$, в развернутом виде

$$\begin{aligned} \varphi_1(t_0) &= f_1(t_0) + \int_L \gamma_{11}(t_0, t)\,f_1(t)\,dt + \int_L \gamma_{12}(t_0, t)\,f_2(t)\,dt, \\ \varphi_2(t_0) &= f_2(t_0) + \int_L \gamma_{21}(t_0, t)\,f_1(t)\,dt + \int_L \gamma_{22}(t_0, t)\,f_2(t)\,dt. \end{aligned} \tag{110,9a}$$

Матрица $\gamma'(t, t_0)$, получаемая заменой матрицы $\gamma(t_0, t)$ транспонированной и перестановкой переменных t_0, t, является резольвентой союзного уравнения $N'\psi = g$, так что решение этого последнего дается формулой

$$\psi(t_0) = g(t_0) + \int_L \gamma'(t, t_0)\,g(t)\,dt. \tag{110,10}$$

Доказательство этих предложений можно получить, например, при помощи простого приема, указанного самим Фредгольмом, сводящего рассмотрение системы вида (110,1) к одному обычному (скалярному) уравнению с линией интегрирования, состоящей из двух экземпляров линии L; прием этот хорошо известен[1]), и мы на нем останавливаться не будем.

4°. В случае, когда $\nu > 0$, т. е. когда однородные уравнения $N\varphi = 0$ и $N'\psi = 0$ имеют ненулевые решения, существует, как в аналогичном

[1]) См., например, В. И. Смирнов [4], т. IV, § 14; É. Goursat [1], n°. 562.

случае одного уравнения Фредгольма (ср. § 52 и § 101, п. 1°), обобщенная резольвента, которую мы также обозначим через $\gamma(t_0, t)$, обладающая тем свойством, что вектор $\varphi(t_0)$, определяемый формулой (110,9), является решением (вернее, одним из решений) уравнения (110,2), если только соблюдены условия (110,7). Эту обобщенную резольвенту можно построить аналогично тому, как была построена обобщенная резольвента для случая одного уравнения (§ 52 и § 101, п. 1°).

А именно, пусть

$$\varphi^\alpha(t) = (\varphi_1^\alpha, \varphi_2^\alpha) \text{ и } \psi^\alpha(t) = (\psi_1^\alpha, \psi_2^\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{110,11}$$

— полные системы линейно независимых решений однородных уравнений $\mathrm{N}\varphi = 0$ и $\mathrm{N}'\psi = 0$. Пусть, далее,

$$\xi^\alpha(t) = (\xi_1^\alpha, \xi_2^\alpha) \quad \text{и} \quad \eta^\alpha(t) = (\eta_1^\alpha, \eta_2^\alpha), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{110,12}$$

— две системы векторов (функций от t) таких, что

$$\int_L \varphi^\alpha(t)\,\xi^\beta(t)\,dt = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \int_L \psi^\alpha(t)\,\eta^\beta(t)\,dt = \delta_{\alpha\beta}, \tag{110,13}$$

где $\delta_{\alpha\alpha} = 1$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$. Такие две системы векторов можно всегда построить, притом бесчисленным множеством способов; можно, в частности, потребовать, чтобы компоненты этих векторов принадлежали классу H на L[1]).

Составим, далее, матрицы

$$n^\alpha(t_0, t) = \| \eta_i^\alpha(t_0)\,\xi_j^\alpha(t) \| = \begin{Vmatrix} \eta_1^\alpha(t_0)\,\xi_1^\alpha(t) & \eta_1^\alpha(t_0)\,\xi_2^\alpha(t) \\ \eta_2^\alpha(t_0)\,\xi_1^\alpha(t) & \eta_2^\alpha(t_0)\,\xi_2^\alpha(t) \end{Vmatrix}, \tag{110,14}$$

$$\alpha = 1, 2, \ldots, \nu.$$

Если $\varphi(t) = (\varphi_1, \varphi_2)$ — некоторый вектор, то $n^\alpha(t_0, t)\,\varphi(t)$ есть вектор с компонентами $\eta_1^\alpha(t_0)\,[\xi_1^\alpha(t)\,\varphi_1(t) + \xi_2^\alpha(t)\,\varphi_2(t)]$ и $\eta_2^\alpha(t_0)\,[\xi_1^\alpha(t)\,\varphi_1(t) + \xi_2^\alpha(t)\,\varphi_2(t)]$, т. е. вектор, получаемый умножением вектора $\eta^\alpha(t_0) = (\eta_1^\alpha, \eta_2^\alpha)$ на скалярную функцию $\xi^\alpha(t)\,\varphi(t)$. Таким образом,

$$n^\alpha(t_0, t)\,\varphi(t) = [\xi^\alpha(t)\,\varphi(t)]\,\eta^\alpha(t_0). \tag{110,15}$$

Рассмотрим теперь вместо интегрального уравнения (110,2) другое интегральное уравнение

$$\mathrm{M}\varphi \equiv \varphi(t_0) + \int_L m(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = f(t_0), \tag{110,16}$$

отличающееся от уравнения (110,2) тем, что ядро $n(t_0, t)$ заменено ядром

$$m(t_0, t) = n(t_0, t) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} n^\alpha(t_0, t). \tag{110,17}$$

Легко видеть на основании предыдущего, что

$$\mathrm{M}\varphi(t_0) = \mathrm{N}\varphi(t_0) + \sum_{\alpha=1}^{n} a_\alpha \eta^\alpha(t_0),$$

[1]) См. Добавление IV в конце книги; там говорится не о векторах, а о скалярных функциях, но результаты и рассуждения переносятся на наш случай без всякого изменения.

где

$$a_\alpha = \int_L \xi^\alpha(t)\,\varphi(t)\,dt, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu.$$

После этого аналогия со случаем, рассмотренным в § 52, становится настолько полной, что мы можем, не останавливаясь на доказательстве, которое было бы почти дословным повторением сказанного в § 52, формулировать следующий окончательный результат.

Однородное уравнение $M\varphi = 0$, соответствующее уравнению (110,16), не имеет отличных от нуля решений, и поэтому уравнение (110,16) однозначно разрешимо при всякой правой части $f(t_0)$. Решение уравнения (110,16) является в то же время решением (точнее, одним из решений) уравнения (110,2), если только $f(t_0)$ удовлетворяет (необходимым и достаточным) условиям (110,7) разрешимости уравнения (110,2).

Общее решение уравнения (110,2) мы найдем, прибавив к указанному решению линейную комбинацию решений φ^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, соответствующего однородного уравнения.

Резольвента $\gamma(t_0, t)$ уравнения (110,16) и является обобщенной резольвентой уравнения (110,2).

Так же как в случае одного уравнения, резольвента уравнения (110,16) удовлетворяет следующим (на этот раз матричным) соотношениям, вполне аналогичным соотношениям (D) и (D′) § 101, п. 1°:

$$\begin{aligned} \gamma(t_0, t) + m(t_0, t) &= -\int_L m(t_0, t_1)\,\gamma(t_1, t)\,dt_1, \\ \gamma(t_0, t) + m(t_0, t) &= -\int_L \gamma(t_0, t_1)\,m(t_1, t)\,dt_1; \end{aligned} \tag{110,18}$$

в нашем случае порядок сомножителей под знаками интегралов не безразличен.

Матрица $\gamma'(t, t_0)$ является резольвентой уравнения, союзного с уравнением (110,16), и обобщенной резольвентой для уравнения, союзного с (110,2). Соотношения, аналогичные соотношениям (110,18), но составленные для резольвенты $\gamma'(t, t_0)$, ничего нового не дают: они выводятся из соотношений (110,18) переходом к транспонированным матрицам.

§ 111. Об одном интегральном уравнении типа Фредгольма. 1°. Рассмотрим теперь следующее (скалярное) уравнение:

$$N\varphi \equiv \varphi(t_0) + \int_L n_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt + \int_L \overline{n_2(t_0, t)}\,\overline{\varphi(t)\,dt} = f(t_0), \tag{111,1}$$

где L — кусочно-гладкая линия, $n_1(t_0, t)$, $n_2(t_0, t)$, $f(t_0)$ — заданные функции точек t_0, t линии L, $\varphi(t)$ — искомая функция[1]).

Относительно рассматриваемых в этом параграфе функций мы принимаем те же условия, что в предыдущем параграфе (п. 2°).

Уравнение (111,1) мы относим к типу уравнений Фредгольма, так как его теория непосредственно сводится, как будет сейчас показано, к теории этих последних.

[1]) Оператор N в формуле (111,1) не то же самое, что оператор N в предыдущем параграфе.

Выпишем здесь же однородное уравнение, соответствующее предыдущему, так как мы на него будем часто ссылаться,

$$\mathrm{N}\varphi \equiv \varphi(t_0) + \int_L n_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt + \int_L \overline{n_2(t_0, t)}\,\overline{\varphi(t)\,dt} = 0. \qquad (111,1^0)$$

Отметим, что во вторых интегралах предыдущих формул

$$\overline{dt} = \frac{dt}{t'^2} = \overline{t'^2}\,dt,$$

где $t' = \dfrac{dt}{ds}$; через s, как всегда, обозначена дуговая абсцисса на L[1]).

Уравнением, **союзным с уравнением** (111,1), мы будем называть уравнение

$$\mathrm{N}'\psi \equiv \psi(t_0) + \int_L n_1(t, t_0)\,\psi(t)\,dt + \int_L n_2(t, t_0)\,\overline{\psi(t)\,dt} = g(t_0), \qquad (111,2)$$

где $\psi(t)$ и $g(t)$ — искомая и заданная функции. Выпишем здесь же однородное уравнение, соответствующее уравнению (111,2),

$$\mathrm{N}'\psi \equiv \psi(t_0) + \int_L n_1(t, t_0)\,\psi(t)\,dt + \int_L n_2(t, t_0)\,\overline{\psi(t)\,dt} = 0. \qquad (111,2^0)$$

Операторы N и N′ мы будем называть **союзными**. Целесообразность такого определения союзных операторов сделается ясной на основании дальнейшего, в частности, на основании формулы

$$\mathrm{Re} \int_L \psi(t)\,\mathrm{N}\varphi(t)\,dt = \mathrm{Re} \int_L \varphi(t)\,\mathrm{N}'\psi(t)\,dt, \qquad (111,3)$$

справедливой для любых двух функций $\varphi(t)$, $\psi(t)$, что легко непосредственно проверить[2]).

Присоединим теперь к уравнению (111,1) второе уравнение, получаемое переходом к сопряженным значениям, и напишем в обоих

---

[1]) Изменяя обозначения, мы могли бы записать второй интеграл в формулах (111,1) и (111,1⁰) в виде

$$\int_L n_2(t_0, t)\,\overline{\varphi(t)}\,dt,$$

но принятый в тексте способ обозначений, заимствованный у Г. Ф. Манджавидзе [3], приводит к более симметричным формулам.

[2]) В случае, когда $n_2(t_0, t) = 0$, т. е. когда мы имеем дело с обычным уравнением Фредгольма, формула (111,3) эквивалентна известной формуле

$$\int_L \psi(t)\,\mathrm{N}\varphi(t)\,dt = \int_L \varphi(t)\,\mathrm{N}'\psi(t)\,dt. \qquad (*)$$

Действительно, в рассматриваемом случае $\mathrm{N}i\varphi = i\mathrm{N}\varphi$. Поэтому, заменяя в формуле (111,3) $\varphi(t)$ на $i\varphi(t)$ и комбинируя полученную формулу с формулой (111,3), получим формулу (*).

уравнениях $\varphi^*(t)$ вместо $\overline{\varphi(t)}$. Тогда мы получим систему двух уравнений

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)+\int_L n_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{t'^2 n_2(t_0, t)}\,\varphi^*(t)\,dt &= f(t_0),\\ \varphi^*(t_0)+\int_L n_2(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{t'^2 n_1(t_0, t)}\,\varphi^*(t)\,dt &= \overline{f(t_0)}.\end{aligned} \qquad (111,4)$$

Предыдущая система, очевидно, эквивалентна одному уравнению (111,1), если поставить дополнительное условие, чтобы искомые функции φ и φ^* были комплексно сопряженными, т. е. чтобы

$$\varphi^*(t)=\overline{\varphi(t)}. \qquad (111,5)$$

Но пока мы этого условия ставить не будем, а будем рассматривать φ и φ^* как две неизвестные функции, удовлетворяющие системе уравнений (111,4); тогда эта последняя будет представлять собой обычную систему уравнений Фредгольма, которую можно записать в виде одного векторного уравнения (см. предыдущий параграф)

$$\Phi(t_0)+\int_L n(t_0, t)\,\Phi(t)\,dt=F(t_0), \qquad (111,6)$$

где

$$\Phi(t)=(\varphi, \varphi^*), \quad F(t)=(f, \bar{f})$$

соответственно искомый и заданный векторы, а

$$n(t_0, t)=\begin{Vmatrix} n_1(t_0, t) & \overline{t'^2 n_2(t_0, t)} \\ n_2(t_0, t) & \overline{t'^2 n_1(t_0, t)}\end{Vmatrix} \qquad (111,7)$$

— заданная матрица (ядро уравнения (111,6)).

Наряду с системой (111,4) или уравнением (111,6) нам придется рассматривать соответствующую однородную систему

$$\begin{aligned}\varphi(t_0)+\int_L n_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{t'^2 n_2(t_0, t)}\,\varphi^*(t)\,dt &= 0,\\ \varphi^*(t_0)+\int_L n_2(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt+\int_L \overline{t'^2 n_1(t_0, t)}\,\varphi^*(t)\,dt &= 0,\end{aligned} \qquad (111,4^0)$$

или уравнение

$$\Phi(t_0)+\int_L n(t_0, t)\,\Phi(t)\,dt=0. \qquad (111,6^0)$$

Однородным уравнением, союзным с уравнением (111,6) или ($111,6^0$), будет уравнение (см. предыдущий параграф)

$$\mathrm{X}(t_0)+\int_L n'(t, t_0)\,\mathrm{X}(t)\,dt=0, \qquad (111,8)$$

где $\mathrm{X}(t)$ — искомый вектор, а

$$n'(t, t_0)=\begin{Vmatrix} n_1(t, t_0) & n_2(t, t_0) \\ \overline{t_0'^2 n_2(t, t_0)} & \overline{t_0'^2 n_1(t, t_0)}\end{Vmatrix}; \qquad (111,9)$$

t_0' есть значение $t'=\frac{dt}{ds}$ для $t=t_0$.

Обозначим компоненты вектора $X(t)$ соответственно через $\psi(t)$ и $\overline{t'^2}\psi^*(t)$, так что

$$X(t) = (\psi, \overline{t'^2}\psi^*), \tag{111,10}$$

и введем обозначение

$$\Psi(t) = (\psi, \psi^*). \tag{111,11}$$

Тогда, как легко видеть, уравнение (111,8) приведется к уравнению

$$\Psi(t_0) + \int_L n_0'(t_0, t)\,\Psi(t)\,dt = 0, \tag{111,12}$$

где

$$n_0'(t, t_0) = \left\| \begin{matrix} n_1(t, t_0) & \overline{t'^2}n_2(t, t_0) \\ \overline{n_2(t, t_0)} & \overline{t'^2 n_1(t, t_0)} \end{matrix} \right\|. \tag{111,13}$$

Уравнение (111,12) связано с уравнением (111,2⁰), союзным с уравнением (111,1⁰), точно так же как уравнение (111,1) связано с уравнением (111,1⁰).

2°. Возвращаясь к уравнению (111,1) и соответствующей системе (111,4), покажем, что из решения уравнения (111,1) можно непосредственно получить решение системы (111,4), и наоборот.

Начнем с того, что отметим некоторые, почти очевидные свойства решений уравнения (111,1) и системы (111,4) или, что сводится к тому же, векторного уравнения (111,6). А именно, очевидно, что если $\varphi(t)$ есть решение уравнения (111,1), то вектор $\Phi(t) = (\varphi, \bar\varphi)$ есть решение уравнения (111,6). Далее, если вектор $\Phi(t) = (\varphi, \varphi^*)$ есть решение уравнения (111,6), то и вектор $\widetilde{\Phi} = (\overline{\varphi^*}, \bar\varphi)$ есть решение того же уравнения, а также вектор

$$\Omega(t) = \frac{1}{2}[\Phi(t) + \widetilde{\Phi}(t)] = (\omega, \bar\omega),$$

где

$$\omega = \omega(t) = \frac{1}{2}[\varphi(t) + \overline{\varphi^*(t)}].$$

Так как компоненты вектора $\Omega(t) = (\omega, \bar\omega)$ комплексно сопряжены, то функция $\omega = \omega(t)$ является решением уравнения (111,1).

3°. Рассмотрим теперь однородное уравнение (111,1⁰) и соответствующую ему систему (111,4⁰) или, что то же, уравнение (111,6⁰).

Заметим, прежде всего, следующее. Если $\varphi(t)$ есть решение уравнения (111,1⁰), то $C\varphi(t)$, где C — д е й с т в и т е л ь н а я постоянная, есть также решение; при C комплексном это, вообще говоря, не имеет места.

Поэтому в дальнейшем под линейной комбинацией решений уравнения (111,1⁰) мы будем подразумевать линейную комбинацию с д е й с т в и т е л ь н ы м и коэффициентами; в соответствии с этим мы будем понимать линейную зависимость или независимость решений.

Во избежание смешения мы иногда будем в этом случае говорить о линейной комбинации и линейной зависимости или независимости в у з к о м смысле.

В отношении же решений (векторов) уравнения (111,6⁰) мы будем понимать линейную комбинацию по-прежнему в обычном смысле (т. е. с допущением комплексных коэффициентов) и в соответствии с этим понимать линейную зависимость или независимость.

Покажем теперь, что число линейно независимых (в узком смысле) решений однородного уравнения (111,1⁰) совпадает с числом линейно независимых (в обычном смысле) решений уравнения (111,6⁰).

Пусть уравнение (111,1⁰) имеет ν линейно независимых (в узком смысле) решений $\varphi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$. Тогда уравнение (111,6⁰) имеет решения $\Phi^\alpha(t) = (\varphi^\alpha, \overline{\varphi^\alpha})$; эти решения линейно независимы в обычном смысле. В самом деле, если

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \Phi^\alpha(t) = 0,$$

где C_α — комплексные постоянные, т. е. если

$$\sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \varphi^\alpha(t) = 0, \quad \sum_{\alpha=1}^{\nu} C_\alpha \overline{\varphi^\alpha(t)} = 0,$$

то, переходя во втором равенстве к сопряженным значениям и складывая с первым, получим, что действительные величины $C_\alpha + \overline{C}_\alpha$ равны нулю в силу линейной независимости функций $\varphi^\alpha(t)$ в узком смысле; аналогично получим, что $C_\alpha - \overline{C}_\alpha = 0$, откуда и следует, что все C_α равны нулю.

Следовательно, если μ — число линейно независимых (в обычном смысле) решений уравнения (111,6⁰), то $\nu \leqslant \mu$.

Пусть теперь

$$\Phi^\alpha(t) = (\varphi^\alpha, \varphi^{*\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \mu,$$

— линейно независимые (в обычном смысле) решения уравнения (111,6⁰).

Покажем, что при помощи этих решений можно составить столько же линейно независимых (в узком смысле) решений уравнения (111,1⁰).

В самом деле, мы знаем, что векторы

$$\widetilde{\Phi}^\alpha(t) = (\overline{\varphi^{*\alpha}}, \overline{\varphi^\alpha}), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \mu,$$

также являются решениями уравнения (111,6⁰). Поэтому они будут линейными комбинациями векторов $\Phi^\alpha(t)$, т. е.

$$\widetilde{\Phi}^\alpha(t) = \sum_{\beta=1}^{\mu} C_{\alpha\beta} \Phi^\beta(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \mu. \tag{*}$$

Заметим теперь, что векторы с комплексно сопряженными компонентами

$$\Omega^\alpha(t) = k\widetilde{\Phi}^\alpha(t) + \bar{k}\Phi^\alpha(t) = (\omega^\alpha, \overline{\omega^\alpha}), \tag{**}$$

где k — произвольная постоянная, отличная от нуля, а

$$\omega^\alpha = \omega^\alpha(t) = k\overline{\varphi^{*\alpha}} + \bar{k}\varphi^\alpha, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \mu,$$

являются также решениями уравнения (111,6⁰). Поэтому функции ω^α являются решениями уравнения (111,1⁰). Постоянную k можно всегда подобрать так, чтобы функции $\omega^\alpha(t)$ были линейно независимы (в узком смысле). В самом деле, если функции $\omega^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \mu$, связаны линейным соотношением с действительными коэффициентами, которые не все равны нулю, то таким же соотношением (с теми же коэффициентами) связаны и функции $\overline{\omega^\alpha(t)}$, так что в этом случае векторы $\Omega^\alpha(t)$

линейно зависимы. Но тогда определитель линейной подстановки, связывающей векторы $\Omega^\alpha(t)$ с векторами $\Phi^\alpha(t)$, который на основании формул (*) и (**) равен

$$\begin{vmatrix} kC_{11}+\bar{k} & kC_{12} & \ldots & kC_{1\mu} \\ kC_{21} & kC_{22}+\bar{k} & \ldots & kC_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ kC_{\mu 1} & kC_{\mu 2} & \ldots & kC_{\mu\mu}+\bar{k} \end{vmatrix} = k^\mu \begin{vmatrix} C_{11}+\varepsilon & C_{12} & \ldots & C_{1\mu} \\ C_{21} & C_{22}+\varepsilon & \ldots & C_{2\mu} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ C_{\mu 1} & C_{\mu 2} & \ldots & C_{\mu\mu}+\varepsilon \end{vmatrix},$$

где $\varepsilon = \frac{\bar{k}}{k}$, должен равняться нулю. Но, очевидно, можно всегда подобрать k так, чтобы этот определитель был отличен от нуля. Для такого значения k функции $\omega^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \mu$, линейно независимы (в узком смысле). Отсюда следует, в частности, что $\mu \leqslant \nu$, а это вместе с полученным выше неравенством показывает, что $\mu = \nu$, и наше утверждение доказано[1]).

Вместе с тем мы показали, что, найдя какую-либо полную систему $(\varphi^\alpha, \varphi^{*\alpha})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, линейно независимых (в обычном смысле) решений однородного уравнения Фредгольма (111,6⁰), мы можем сразу построить и такую полную систему решений того же уравнения, в которой $\varphi^{*\alpha} = \overline{\varphi^\alpha}$, т. е. систему вида $(\varphi^\alpha, \overline{\varphi^\alpha})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, и тем самым найти полную систему линейно независимых (в узком смысле) решений φ^α, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, однородного уравнения (111,1⁰). Обратно, имея полную систему линейно независимых (в узком смысле) решений φ^α уравнения $N\varphi = 0$, мы тем самым будем иметь полную систему линейно независимых (в обычном смысле) решений $(\varphi^\alpha, \overline{\varphi^\alpha})$ уравнения (111,6⁰).

Из предыдущего следует, что, как было сказано, умея решать уравнение Фредгольма (111,6) или, что то же, систему уравнений (111,4), мы сможем решить и уравнение (111,1), и наоборот.

Возвратимся к случаю однородных уравнений. Применяя полученные выше результаты к однородному уравнению (111,2⁰), союзному с уравнением (111,1⁰), и к соответствующему ему уравнению (111,12), а также учитывая связь между решениями этого последнего уравнения

---

[1]) В случае, когда $n_2(t_0, t) = 0$, уравнение (111,1⁰) обращается в обычное уравнение Фредгольма

$$\varphi(t_0) + \int_L n(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = 0$$

(мы написали n вместо n_1). В этом случае введение понятия линейной комбинации в узком смысле нецелесообразно; однако все сказанное в тексте, разумеется, применимо и к этому случаю. Если $\varphi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \mu$ — полная система линейно независимых в обычном смысле решений предыдущего уравнения, то полной системой линейно независимых в узком смысле решений будет, например,

$$\varphi^1(t), \varphi^2(t), \ldots, \varphi^\mu(t), i\varphi^1(t), i\varphi^2(t), \ldots, i\varphi^\mu(t).$$

Столько же линейно независимых (в обычном смысле) решений имеет система, в которую обратится система (111,4⁰) при $n_2(t_0, t) = 0$; полной системой таких решений будет, например,

$$(\varphi^1, \overline{\varphi^1}), (\varphi^2, \overline{\varphi^2}), \ldots, (\varphi^\mu, \overline{\varphi^\mu}), (i\varphi^1, -i\overline{\varphi^1}), \ldots, (i\varphi^\mu, -i\overline{\varphi^\mu}).$$

В нашем случае число, обозначенное в тексте через ν, равно 2μ.

и решениями уравнения (111,8), союзного с уравнением (111,6), определяемую формулой (111,10), приходим к следующему выводу.

Если $\psi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, — полная система линейно независимых (в узком смысле) решений уравнения (111,2⁰), то векторы $(\psi^\alpha, \overline{\psi^\alpha})$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, представляют полную систему линейно независимых (в обычном смысле) решений уравнения (111,12), а векторы $(\psi^\alpha, \overline{t'^2\psi^\alpha})$ — полную систему линейно независимых решений уравнения (111,8), союзного с уравнением (111,6) или (111,6⁰).

Согласно известному свойству уравнений Фредгольма, союзные однородные уравнения (111,6⁰) и (111,8) имеют одинаковое число линейно независимых решений. Поэтому и союзные уравнения (111,1⁰) и (111,2⁰) имеют одинаковое число линейно независимых (в узком смысле) решений. Это число и было обозначено нами через ν в обоих случаях.

4°. Мы установили полную эквивалентность задачи решения уравнения (111,1) с задачей решения системы уравнений Фредгольма (111,4) или, что то же, векторного уравнения Фредгольма (111,6). Однако можно сформулировать предложения, характеризующие основные свойства уравнения (111,1) так, чтобы система уравнений Фредгольма в этих формулировках не участвовала.

Вот эти предложения, аналогичные теоремам Фредгольма, отчасти уже доказанные выше.

I. Число линейно независимых (в узком смысле) решений однородного уравнения (111,1⁰) конечно и равно числу линейно независимых (в том же смысле) решений союзного однородного уравнения (111,2⁰).

II. Если однородное уравнение (111,1⁰), а следовательно, и уравнение (111,2⁰), не имеет отличных от нуля решений, то неоднородное уравнение (111,1) однозначно разрешимо для всякой правой части.

III. Если однородное уравнение (111,1⁰) имеет отличные от нуля решения и, следовательно, имеет отличные от нуля решения союзное однородное уравнение, то неоднородное уравнение (111,1) разрешимо тогда и только тогда, когда соблюдены условия

$$\operatorname{Re} \int_L f(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{111,14}$$

где $\psi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, — полная система линейно независимых (в узком смысле) решений союзного однородного уравнения (111,2⁰).

Предложение I уже доказано в п. 3°. Предложение II также можно считать доказанным, так как если однородное уравнение (111,1⁰) не имеет отличных от нуля решений, то не имеет таких решений и однородная система, соответствующая системе (111,4). Но тогда система (111,4) однозначно разрешима при всякой функции $f(t_0)$. Если (φ, φ^*) есть решение этой системы, то и $(\overline{\varphi^*}, \overline{\varphi})$ есть решение. В силу же единственности решения должно быть $\varphi^* = \overline{\varphi}$; следовательно, $\varphi = \varphi(t)$ будет (единственным) решением уравнения $N\varphi = f$.

Перейдем к предложению III. Для того чтобы уравнение (111,1) было разрешимо, необходимо и достаточно, чтобы была разрешима система (111,4) или, что то же, (векторное) уравнение (111,6). Условия же (необходимые и достаточные) разрешимости этого последнего выражаются равенствами, вытекающими из равенств (110,7) предыдущего параграфа,

$$\int_L F(t)\,X^\alpha(t)\,dt = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{111,15}$$

где $X^{\alpha}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, — полная система линейно независимых (в обычном смысле) решений однородного уравнения (111,8), союзного с уравнением (111,6). Но $F(t) = (f, \overline{f})$, а в качестве $X^{\alpha}(t)$ мы на основании сказанного в конце предыдущего пункта можем взять векторы $X^{\alpha}(t) = (\psi^{\alpha}, \overline{t'^2\psi^{\alpha}})$, где $\psi^{\alpha} = \psi^{\alpha}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, — полная система линейно независимых (в узком смысле) решений однородного уравнения (111,2^0). Так как, далее,

$$F(t)\,X^{\alpha}(t) = f(t)\,\psi^{\alpha}(t) + \overline{f(t)}\,\overline{\psi^{\alpha}(t)}\,\overline{t'^2},$$

то

$$\int\limits_L F(t)\,X^{\alpha}(t)\,dt = \int\limits_L f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,dt + \int\limits_L \overline{f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,dt} = 2\,\mathrm{Re}\int\limits_L f(t)\,\psi^{\alpha}(t)\,dt,$$

а отсюда и следует эквивалентность условий (111,14) и (111,15); таким образом, теорема III доказана.

5°. Так же как в случае уравнения Фредгольма, решение уравнения (111,1) можно представить при помощи резольвенты или при помощи обобщенной резольвенты, если соответствующее однородное уравнение имеет отличные от нуля решения[1]). Рассмотрим сразу общий случай, когда однородное уравнение может иметь отличные от нуля решения. Пусть $\varphi^{\alpha}(t)$ и $\psi^{\alpha}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, — полные системы линейно независимых (в узком смысле) решений союзных однородных уравнений (111,1^0) и (111,2^0). Составим две системы функций $\xi^{\alpha}(t)$, $\eta^{\alpha}(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \nu$, принадлежащих классу H[2]) и таких, что

$$\mathrm{Re}\int\limits_L \varphi^{\alpha}(t)\,\xi^{\beta}(t)\,dt = \delta_{\alpha\beta}, \qquad \mathrm{Re}\int\limits_L \psi^{\alpha}(t)\,\eta^{\beta}(t)\,dt = \delta_{\alpha\beta},$$

где $\delta_{\alpha\alpha} = 1$, $\delta_{\alpha\beta} = 0$ при $\alpha \neq \beta$, и рассмотрим наряду с уравнением (111,1) другое уравнение

$$\varphi(t_0) + \int\limits_L m_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt + \int\limits_L \overline{m_2(t_0, t)}\,\overline{\varphi(t)\,dt} = f(t_0), \tag{111,16}$$

где

$$\begin{aligned} m_1(t_0, t) &= n_1(t_0, t) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \eta^{\alpha}(t_0)\,\xi^{\alpha}(t),\\ m_2(t_0, t) &= n_2(t_0, t) + \sum_{\alpha=1}^{\nu} \overline{\eta^{\alpha}(t_0)}\,\xi^{\alpha}(t). \end{aligned} \tag{111,17}$$

Совершенно аналогично тому, что было сделано в § 52 (ср. § 101, п. 1°), легко показать, что однородное уравнение, соответствующее уравнению (111,16), не имеет отличных от нуля решений и что, следовательно, уравнение (111,16) однозначно разрешимо при всякой правой части $f(t)$; решение уравнения (111,16) будет в то же время решением исходного уравнения (111,4), если соблюдены (необходимые

[1]) Применяемый здесь способ построения обобщенной резольвенты есть частный случай способа, указанного в п. 4° предыдущего параграфа для системы уравнений Фредгольма.

[2]) Для построения обобщенной резольвенты это условие не обязательно. Но оно будет использовано в дальнейших рассуждениях.

и достаточные) условия разрешимости (111,14) этого последнего. Доказательство мы предоставляем читателю.

Составим теперь систему уравнений Фредгольма, связанную с уравнением (111,16) так, как система (111,4) связана с уравнением (111,1), или, что то же самое, векторное уравнение Фредгольма, аналогичное уравнению (111,6),

$$\Phi(t_0)+\int_L m(t_0, t)\Phi(t)\,dt=F(t), \tag{111,18}$$

где $\Phi(t)=(\varphi, \varphi^*)$, $F(t)=(f, \overline{f})$ и

$$m(t_0, t)=\begin{Vmatrix} m_1(t_0, t) & \overline{t'^2 m_2(t_0, t)} \\ m_2(t_0, t) & \overline{t'^2 m_1(t_0, t)} \end{Vmatrix}. \tag{111,19}$$

Пусть $\gamma(t_0, t)=\|\gamma_{ij}(t_0, t)\|$, $i, j=1, 2$, — резольвента уравнения (111,18), так что решение (единственное) этого уравнения дается формулой

$$\Phi(t_0)=F(t_0)+\int_L \gamma(t_0, t)F(t)\,dt,$$

или, в скалярном виде,

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma_{11}(t_0, t)f(t)\,dt+\int_L \gamma_{12}(t_0, t)\overline{f(t)}\,dt,$$

$$\varphi^*(t_0)=\overline{f(t_0)}+\int_L \gamma_{21}(t_0, t)f(t)\,dt+\int_L \gamma_{22}(t_0, t)\overline{f(t)}\,dt.$$

Так как уравнение (111,18) имеет единственное решение, то, как было отмечено выше, $\varphi^*(t)=\overline{\varphi(t)}$; при этом $\varphi(t)$ является в то же время решением уравнения (111,16). Замечая, что правые части двух предыдущих равенств должны иметь комплексно сопряженные значения при всяком выборе функции $f(t)$, легко заключаем, что

$$\gamma_{21}(t_0, t)=\overline{\gamma_{12}(t_0, t)\,t'^2}, \qquad \gamma_{22}(t_0, t)=\overline{\gamma_{11}(t_0, t)\,t'^2}.$$

Введем обозначения

$$\gamma_{11}(t_0, t)=\gamma_1(t_0, t), \qquad \gamma_{12}(t_0, t)=\overline{\gamma_2(t_0, t)\,t'^2},$$

тогда матрица $\gamma(t_0, t)$ представится в виде

$$\gamma(t_0, t)=\begin{Vmatrix} \gamma_1(t_0, t) & \overline{t'^2\gamma_2(t_0, t)} \\ \gamma_2(t_0, t) & \overline{t'^2\gamma_1(t_0, t)} \end{Vmatrix}, \tag{111,20}$$

аналогичном виду матрицы $m(t_0, t)$.

В соответствии с этим решение (точнее, одно из решений, если $\nu>0$) уравнения (111,1) при соблюдении условий (111,14) дается формулой

$$\varphi(t_0)=f(t_0)+\int_L \gamma_1(t_0, t)f(t)\,dt+\int_L \overline{\gamma_2(t_0, t)}\,\overline{f(t)\,dt}. \tag{111,21}$$

Пару функций $\gamma_1(t_0, t)$ и $\gamma_2(t_0, t)$ можно назвать соответственно резольвентой уравнения (111,16) и обобщенной резольвентой уравнения (111,1).

Применяя предыдущие результаты к уравнению

$$\psi(t_0)+\int_L m_1(t, t_0)\psi(t)\,dt+\int_L m_2(t, t_0)\overline{\psi(t)\,dt}=g(t_0), \qquad (111,22)$$

союзному с уравнением (111,16), и принимая во внимание связь, существующую между (матричными) резольвентами союзных систем уравнений (или союзных векторных уравнений) Фредгольма (см. конец предыдущего параграфа), легко убеждаемся, что (единственное) решение уравнения (111,22) дается формулой

$$\psi(t_0)=g(t_0)+\int_L \gamma_1(t, t_0)g(t)\,dt+\int_L \gamma_2(t, t_0)\overline{g(t)\,dt}, \qquad (111,23)$$

и это решение является в то же время решением уравнения (111,2), союзного с (111,1), если соблюдены следующие (необходимые и достаточные) условия разрешимости:

$$\operatorname{Re}\int_L g(t)\varphi^{\alpha}(t)\,dt=0, \qquad (111,24)$$

где $\varphi^{\alpha}(t)$, $\alpha=1, 2, \ldots, \nu$, — полная система линейно независимых (в узком смысле) решений однородного уравнения (111,1°).

Между функциями $m_1(t_0, t)$, $m_2(t_0, t)$, $\gamma_1(t_0, t)$, $\gamma_2(t_0, t)$ существуют соотношения, непосредственно вытекающие из соотношений (110,18) предыдущего параграфа,

$$\gamma(t_0, t)+m(t_0, t)=-\int_L m(t_0, t_1)\gamma(t_1, t)\,dt_1,$$

$$(111,25)$$

$$\gamma(t_0, t)+m(t_0, t)=-\int_L \gamma(t_0, t)m(t_1, t)\,dt_1,$$

где на этот раз $\gamma(t_0, t)$ и $m(t_0, t)$ обозначают матрицы, определяемые формулами (111,19) и (111,20). Каждое из двух предыдущих матричных соотношений дает четыре скалярных соотношения, но из этих четырех только два независимы; другие два получаются переходом к сопряженным значениям. Выписывать их мы не станем.

§ 112. Сингулярное интегральное уравнение, содержащее вместе с неизвестной функцией и ее сопряженную вне характеристической части.

1°. Перейдем теперь к рассмотрению сингулярного интегрального уравнения, о котором упоминалось во введении к настоящему отделу, а именно, к сингулярному интегральному уравнению следующего вида:

$$K\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+\int_L k_1(t_0, t)\varphi(t)\,dt+$$
$$+\int_L \overline{k_2(t_0, t)}\,\overline{\varphi(t)\,dt}=f(t_0), \qquad (112,1)$$

где L — кусочно-гладкая линия, $A(t_0)$, $B(t_0)$, $k_1(t_0, t)$, $k_2(t_0, t)$, $f(t_0)$ — заданные на L функции класса H_0, а $\varphi(t)$ — искомая функция точки линии L.

К такому уравнению приводят некоторые задачи теории упругости, о двух из которых будет сказано ниже.

Уравнение это было исследовано Г. Ф. Манджавидзе [1], [3] при помощи (надлежащим образом видоизмененного) метода, изложенного в отделе I настоящей главы. Полученные результаты аналогичны результатам упомянутого отдела и представляют их обобщение[1]); поэтому там, где это не может вызвать затруднений, мы не будем приводить детальных доказательств[2]).

Уравнением, союзным с уравнением (112,1), мы будем называть уравнение

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)\,dt}{t-t_0} + \int_L k_1(t, t_0)\psi(t)\,dt + \\ + \int_L k_2(t, t_0)\overline{\psi(t)\,dt} = g(t_0), \qquad (112,2)$$

где $g(t_0)$ — заданная функция класса H_0; операторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ мы будем называть союзными операторами[3]).

В дальнейшем мы будем считать, что производная $t' = \frac{dt}{ds}$, где s — дуговая абсцисса линии L, принадлежит классу H_0, т. е. что L состоит из дуг Ляпунова.

Решения $\varphi(t)$, $\psi(t)$ уравнений (112,1), (112,2) мы будем разыскивать в классе H^*.

Оператор $\mathbf{K}^0$, определяемый формулой

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \qquad (112,3)$$

мы будем называть характеристической частью оператора $\mathbf{K}$. Оператором, союзным с $\mathbf{K}^0$ (для этого случая определение союзного оператора совпадает с прежним), является оператор $\mathbf{K}^{0\prime}$, определяемый прежней формулой

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A(t_0)\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\psi(t)}{t-t_0}\,dt. \qquad (112,4)$$

Легко установить непосредственной проверкой, что если φ и ψ — любые функции класса H^* на L и если в окрестности каждого данного узла одна из них принадлежит классу H_ε^*, то имеет место равенство

$$\mathrm{Re}\int_L \psi\mathbf{K}\varphi\,dt = \mathrm{Re}\int_L \varphi\mathbf{K}'\psi\,dt. \qquad (112,5)$$

Эта формула, как легко видеть, сводится к формуле (96,10) в случае, когда $k_2(t_0, t) = 0$, т. е. когда рассматриваемые сингулярные уравнения сводятся к тем, которые были рассмотрены в отделе I[4]).

---

[1]) Г. Ф. Манджавидзе рассматривает лишь случай, когда L состоит из гладких замкнутых контуров без общих точек (в этом случае «узлами» являются точки разрыва заданных функций); но результаты почти без всяких изменений распространяются и на случай, указанный в тексте.

[2]) Аналогично уравнению (112,1), можно изучить уравнение более общего вида, когда $\overline{\varphi(t)}$ содержится и в характеристической части. См. Л. Г. Михайлов [1], [4], Р. С. Исаханов [5].

[3]) Относительно целесообразности такого определения ср. сказанное в предыдущем параграфе.

[4]) Ср. сноску [2]) на стр. 365.

Мы будем считать, что операторы $\mathbf{K}^0$ и $\mathbf{K}^{0\prime}$ нормального типа, и в соответствии с этим говорить, что уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ и $\mathbf{K}'\psi = g$ или операторы $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ нормального типа.

2°. Любая линейная комбинация с действительными (постоянными) коэффициентами решений однородного уравнения $\mathbf{K}\varphi = 0$ будет также решением, но это не имеет, вообще говоря, места при комплексных коэффициентах. Аналогично обстоит дело для уравнения $\mathbf{K}'\psi = 0$.

Исходя из этого, мы будем, так же как в аналогичном случае, рассмотренном в предыдущем параграфе, подразумевать во всем настоящем параграфе (не оговаривая этого особо) под линейной комбинацией линейную комбинацию с (постоянными) действительными коэффициентами (т. е. линейную комбинацию в узком смысле) и в соответствии с этим понимать линейную зависимость или независимость.

3°. Для решения и исследования уравнений $\mathbf{K}\varphi = f$ и $\mathbf{K}'\psi = g$ мы можем применить метод, совершенно аналогичный тому, который был применен в отделе I для решения уравнений (96,1) и (96,2). А именно, переписав уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ и $\mathbf{K}'\psi = g$ в виде

$$\mathbf{K}^0\varphi = f - \mathbf{k}\varphi \tag{112,6}$$

и соответственно

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi = g - \mathbf{k}'\psi, \tag{112,7}$$

где

$$\mathbf{k}\varphi \equiv \int\limits_L k_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt + \int\limits_L \overline{k_2(t_0, t)}\,\overline{\varphi(t)\,dt} \tag{112,8}$$

и

$$\mathbf{k}'\psi \equiv \int\limits_L k_1(t, t_0)\,\psi(t)\,dt + \int\limits_L k_2(t, t_0)\,\overline{\psi(t)\,dt}, \tag{112,9}$$

будем временно рассматривать правые части уравнений (112,6) и (112,7) как известные функции.

Совершенно так же, как в отделе I (§§ 99, 100), можно установить разбиение решений уравнений $\mathbf{K}\varphi = f$ и $\mathbf{K}'\psi = g$ на классы и определить понятие союзных классов $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$ и $h' = h(c_{q+1}, \ldots, c_m)$. Индексом данного уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ или оператора $\mathbf{K}$ мы будем называть индекс оператора $\mathbf{K}^0$; аналогично индексом уравнения $\mathbf{K}'\psi = g$ или оператора $\mathbf{K}'$ мы будем называть индекс оператора $\mathbf{K}^{0\prime}$. Индексы $\varkappa$ и $\varkappa'$ союзных классов союзных уравнений связаны соотношением

$$\varkappa' = -\varkappa.$$

Канонической функцией $Z(t)$ данного класса h оператора $\mathbf{K}$ или уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ мы будем называть каноническую функцию класса h оператора $\mathbf{K}^0$ или уравнения $\mathbf{K}^0\varphi = f$.

4°. Решая уравнение (112,6) по формулам § 97 так, как если бы правая часть была известной функцией, мы придем к следующему результату, аналогичному результату § 99.

При $\varkappa \geqslant 0$ уравнение (112,1) эквивалентно, в смысле разыскания решений данного класса $h(c_1, c_2, \ldots, c_q)$, уравнению типа Фредгольма

$$\mathbf{N}\varphi \equiv \varphi(t_0) + \int\limits_L N_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt + \int\limits_L \overline{N_2(t_0, t)}\,\overline{\varphi(t)\,dt} = f^*(t_0), \tag{112,10}$$

где

$$N_1(t_0, t) = A^*(t_0)\,k_1(t_0, t) - \frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{k_1(t_1, t)\,dt_1}{Z(t_1)(t_1 - t_0)},$$

$$N_2(t_0, t) = \overline{A^*(t_0)}\,k_2(t_0, t) + \frac{\overline{B^*(t_0)\,Z(t_0)}}{\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{k_2(t_1, t)\,dt_1}}{\overline{Z(t_1)}\,(\overline{t_1} - \overline{t_0})}, \qquad (112{,}11)$$

$$f^*(t_0) = \mathrm{K}^* f(t_0) + B^*(t_0)\,Z(t_0)\,P_{\varkappa-1}(t_0) \qquad (112{,}12)$$

и где, как в § 97,

$$A^*(t) = \frac{A(t)}{A^2(t) - B^2(t)}, \qquad B^*(t) = \frac{B(t)}{A^2(t) - B^2(t)}, \qquad (112{,}13)$$

$$\mathrm{K}^* f(t_0) \equiv A^*(t_0)\,f(t_0) - \frac{B^*(t_0)\,Z(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{f(t)\,dt}{Z(t)(t - t_0)}; \qquad (112{,}14)$$

$P_{\varkappa-1}(t_0)$ обозначает полином степени не выше $\varkappa - 1$ с произвольными комплексными коэффициентами; $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$ при $\varkappa = 0$.

При $\varkappa < 0$ уравнение (112,1) эквивалентно (в том же смысле) уравнению (112,10), в правой части которого следует считать $P_{\varkappa-1}(t_0) = 0$, и дополнительным условиям

$$\int\limits_L a_j(t)\,\varphi(t)\,dt + \int\limits_L b_j(t)\,\overline{\varphi(t)}\,dt = \int\limits_L \frac{t^j f(t)\,dt}{Z(t)}, \qquad (112{,}15)$$

$$j = 0, 1, \ldots, -\varkappa - 1,$$

где

$$a_j(t) = \int\limits_L \frac{k_1(t_1, t)\,t_1^j}{Z(t_1)}\,dt_1, \qquad b_j(t) = \overline{t'^2}\int\limits_L \frac{\overline{k_2(t_1, t)\,t_1^j}}{\overline{Z(t_1)}}\,\overline{dt_1}. \qquad (112{,}16)$$

Поступая аналогично с союзным уравнением (112,2), а именно, решая уравнение (112,7) по формулам § 98, как если бы правая часть была известна, легко получить результат, аналогичный предыдущему и подобный результату § 100, что мы предоставляем читателю.

5°. Уравнение (112,10), если считать, что полином $P_{\varkappa-1}(t_0)$ задан, принадлежит типу, рассмотренному в § 111, с той лишь разницей, что функции $N_1(t_0, t)$, $N_2(t_0, t)$, а также функция $f^*(t_0)$ могут быть неограниченными в окрестностях некоторых узлов. Однако совершенно аналогично тому, что было сделано в § 101, уравнение это может быть приведено к виду, где вместо $N_1(t_0, t)$, $N_2(t_0, t)$, $f^*(t_0)$ фигурируют ограниченные функции, как функции $n_1(t_0, t)$, $n_2(t_0, t)$, $f(t_0)$ в уравнении (111,1) § 111.

Наряду с уравнением (112,10) нам придется рассматривать союзное с ним однородное уравнение $\mathrm{N}'\psi = 0$, где N' — оператор, союзный с N, определяемый формулой (см. § 111)

$$\mathrm{N}'\psi \equiv \psi(t_0) + \int\limits_L N_1(t, t_0)\,\psi(t)\,dt + \int\limits_L N_2(t, t_0)\,\overline{\psi(t)\,dt}. \qquad (112{,}17)$$

Рассмотрение этого уравнения также может быть сведено к рассмотрению уравнения, где вместо $N_1(t, t_0)$ и $N_2(t, t_0)$ фигурируют ограниченные функции $n_1(t, t_0)$ и $n_2(t, t_0)$, подобно тому, как это было сделано в § 101.

Проведя рассуждения, аналогичные рассуждениям § 101, и пользуясь на этот раз результатами § 111, приходим к следующему выводу.

Число ν линейно независимых[1]) (абсолютно интегрируемых) решений однородного уравнения $N\varphi = 0$ (эти решения принадлежат классу h и, кроме того, классу H_ε^* в окрестностях особенных узлов) конечно и равно числу линейно независимых (ограниченных) решений союзного однородного уравнения $N'\psi = 0$ (эти решения принадлежат классу H_ε^*, принадлежа классу H_0 в окрестностях всех неособенных узлов).

Пусть, далее, $f^*(t)$ обозначает функцию класса h, принадлежащую, кроме того, классу H_ε^* в окрестностях всех особенных узлов.

Необходимые и достаточные условия разрешимости (в классе абсолютно интегрируемых функций) уравнения $N\varphi = f^*$ заключаются в том, чтобы

$$\operatorname{Re} \int\limits_L f^*(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{112,18}$$

где $\psi_j(t)$ — полная система линейно независимых (ограниченных) решений уравнения $N'\psi = 0$.

Все (абсолютно интегрируемые) решения уравнения $N\varphi = f^*$ принадлежат классу h и, кроме того, классу H_ε^* в окрестностях особенных узлов.

Аналогичные результаты легко получить и для уравнения $N'\psi = g^*$, союзного с уравнением $N\varphi = f^*$.

6°. На основании результатов § 111, п. 5° легко, аналогично тому, как было сделано в § 101, установить, что существуют функции $\Gamma_1(t_0, t)$ и $\Gamma_2(t_0, t)$, обладающие следующим свойством: оператор, определяемый формулой

$$\Gamma f^* \equiv f^*(t_0) + \int\limits_L \Gamma_1(t_0, t)\,f^*(t)\,dt + \int\limits_L \overline{\Gamma_2(t_0, t)}\;\overline{f^*(t)\,dt}, \tag{112,19}$$

переводит всякую функцию f^* класса h в функцию того же класса, а союзный с Γ оператор Γ', определяемый формулой

$$\Gamma' g^* \equiv g^*(t_0) + \int\limits_L \Gamma_1(t, t_0)\,g^*(t)\,dt + \int\limits_L \Gamma_2(t, t_0)\,\overline{g^*(t)\,dt}, \tag{112,20}$$

переводит всякую функцию g^* класса h' (союзного с h) в функцию того же класса.

Далее, если соблюдены условия (112,18), то решение (точнее, одно из решений) уравнения (112,10) дается формулой

$$\varphi(t_0) = \Gamma f^*(t_0). \tag{112,21}$$

Аналогичный результат имеет место для союзного уравнения $N'\psi = g^*$.

7°. Мы видели, что при $\varkappa \geqslant 0$ уравнение (112,1) эквивалентно (в смысле разыскания решений класса h) уравнению (112,10), содержащему в правой части полином $P_{\varkappa-1}(t_0)$ с произвольными комплексными коэффициентами. Этот полином мы представим теперь в виде линейной комбинации с действительными коэффициентами функций t_0^j и it_0^j, $j = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1$:

$$P_{\varkappa-1}(t_0) = A_1\alpha_1(t_0) + A_2\alpha_2(t_0) + \ldots + A_{2\varkappa}\alpha_{2\varkappa}(t_0), \tag{112,22}$$

[1]) Как было условлено, линейная независимость понимается в узком смысле.

где $\alpha_1(t_0), \alpha_2(t_0), \ldots, \alpha_{2\varkappa}(t_0)$ суть функции $t_0^j, it_0^j, j = 0, 1, \ldots, \varkappa - 1$, взятые в некотором порядке, а $A_1, A_2, \ldots, A_{2\varkappa}$ — действительные произвольные постоянные.

Введем, далее, обозначения

$$\delta_j = \operatorname{Re} \int_L \psi_j(t) \mathbf{K}^* f(t)\, dt, \qquad i = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{112,23}$$

где $\mathbf{K}^* f$ определяется формулой (112,14), а $\psi_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, \nu$, — полная система линейно независимых решений уравнения $\mathbf{N}'\psi = 0$. При этих обозначениях условия разрешимости (112,18) уравнения (112,10) представятся в виде

$$\sum_{j=1}^{2\varkappa} \gamma_{kj} A_j = \delta_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, \nu, \tag{112,24}$$

где γ_{kj} — определенные действительные постоянные, не зависящие от функции $f(t)$; ранг матрицы $\|\gamma_{ki}\|$ мы обозначим через ρ.

Рассуждая, как в § 102, убеждаемся, что условия разрешимости системы (112,24), а следовательно, и условия разрешимости уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ в классе h, имеют вид

$$\operatorname{Re} \int_L \lambda_j(t) f(t)\, dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, \nu - \rho, \tag{112,25}$$

где $\lambda_j(t)$ — определенные линейно независимые функции класса h', и что число l линейно независимых решений класса h однородного уравнения $\mathbf{K}\varphi = 0$ определяется формулой

$$l = 2\varkappa + \nu - \rho. \tag{112,26}$$

В случае $\varkappa < 0$ условия разрешимости уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ в классе h также приводятся к условиям вида (112,25), но на этот раз следует взять $j = 1, 2, \ldots, \nu, \nu + 1, \ldots, \nu + \sigma$, где $0 \leqslant \sigma \leqslant -2\varkappa$.

Аналогичные результаты имеют место и для уравнения $\mathbf{K}'\psi = g$, союзного с уравнением $\mathbf{K}\varphi = f$.

В частности, отметим, что на основании предыдущего число линейно независимых решений однородного уравнения $\mathbf{K}\varphi = 0$ конечно. То же имеет место для союзного однородного уравнения $\mathbf{K}'\psi = 0$.

8°. Теперь легко доказать основные теоремы, относящиеся к уравнениям $\mathbf{K}\varphi = f$ и $\mathbf{K}'\psi = g$, заменяющие для нашего случая теоремы § 102.

Теорема I. *Для разрешимости уравнения* $\mathbf{K}\varphi = f$ *в данном классе h необходимо и достаточно, чтобы*

$$\operatorname{Re} \int_L \psi_j(t) f(t)\, dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, l', \tag{112,27}$$

где ψ_j, $j = 1, 2, \ldots, l'$, — полная система линейно независимых решений союзного с h класса h' союзного однородного уравнения $\mathbf{K}'\psi = 0$.

Теорема II. *Разность чисел l и l' линейно независимых решений союзных классов h и h' союзных однородных уравнений* $\mathbf{K}\varphi = 0$ *и* $\mathbf{K}'\psi = 0$ *равна удвоенному индексу $\varkappa$ класса h уравнения* $\mathbf{K}\varphi = 0$,

$$l - l' = 2\varkappa. \tag{112,28}$$

Те же заключения имеют место, если поменять ролями уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ и $\mathbf{K}'\psi = g$.

Докажем сначала теорему I. Необходимость условий (112,27) непосредственно вытекает из формулы (112,5), на основании которой для $\varphi(t)$, являющегося решением класса h уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$,

$$\operatorname{Re}\int_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = \operatorname{Re}\int_L \psi_j(t)\,\mathbf{K}\varphi(t)\,dt = \operatorname{Re}\int_L \varphi(t)\,\mathbf{K}'\psi_j(t)\,dt = 0.$$

Докажем достаточность этих условий. Как было показано в п. 7°, необходимые и достаточные условия разрешимости в классе h уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ сводятся к некоторому числу k соотношений вида

$$\operatorname{Re}\int_L \lambda_j(t)\,f(t)\,dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k, \tag{112,29}$$

где $\lambda_j(t)$ — некоторые функции класса h'. Достаточность условий (112,27) будет доказана, если мы покажем, что условия (112,29) представляют собой следствия условий (112,27). С этой целью мы используем не раз применявшийся прием. А именно, пусть $g(t)$ — произвольная функция класса H. Уравнение $\mathbf{K}\varphi = \mathbf{K}g$ разрешимо в классе h (и даже в классе H). Следовательно, необходимо, чтобы

$$0 = \operatorname{Re}\int_L \lambda_j(t)\,\mathbf{K}g(t)\,dt = \operatorname{Re}\int_L g(t)\,\mathbf{K}'\lambda_j(t)\,dt.$$

Вследствие произвольности функции $g(t)$ отсюда вытекает, как легко видеть, что $\mathbf{K}'\lambda_j(t) = 0$. Следовательно, функции $\lambda_j(t)$ являются линейными комбинациями функций $\psi_j(t)$, а это и доказывает наше утверждение.

Перейдем к доказательству теоремы II и рассмотрим сначала случай, когда $\varkappa \geqslant 0$. В этом случае необходимые и достаточные условия разрешимости в классе h уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ имеют вид (112,25), где $\lambda_1(t)$, $\lambda_2(t)$, ..., $\lambda_{\nu-\rho}(t)$ — линейно независимые функции класса h'. С другой стороны, необходимыми и достаточными условиями разрешимости в классе h являются условия (112,27).

Таким образом, если какая-либо функция $f(t)$ класса H_0 удовлетворяет условиям (112,25), то она удовлетворяет и условиям (112,27), и обратно. Отсюда легко заключить[1]), что функции $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{\nu-\rho}$ являются линейными комбинациями (с действительными коэффициентами) функций $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{l'}$, и обратно. Следовательно, $l' = \nu - \rho$. Это равенство вместе с ранее доказанным равенством (112,26) приводит к требуемому равенству (112,28).

В случае, когда $\varkappa < 0$, мы можем провести аналогичные рассуждения относительно союзного с уравнением $\mathbf{K}\varphi = 0$ уравнения $\mathbf{K}'\psi = 0$ с положительным индексом $\varkappa' = -\varkappa$, что приведет к требуемому результату. Таким образом, мы можем считать теорему II доказанной.

З а м е ч а н и е. В частном случае, когда функция $k_2(t_0, t)$ тождественно равна нулю, эти результаты, разумеется, совпадают с результатами § 102, хотя по внешнему виду несколько отличаются от них. Внешнее различие происходит от того, что здесь линейная независимость понимается иначе, чем в § 102, а именно, понимается в узком смысле.

В самом деле[2]), пусть $k_2(t_0, t) = 0$ и пусть $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k$ — линейно независимые в обычном смысле решения класса h уравнения $\mathbf{K}\varphi = 0$. Тогда линейно независимыми, в узком смысле, решениями этого класса

[1]) См. Добавление. IV, замечание 2.
[2]) См. сноску на стр. 369.

будут, очевидно, $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_k, i\varphi_1, i\varphi_2, \ldots, i\varphi_k$, так что их число $l = 2k$.

Аналогично, если $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k'}$ — линейно независимые в обычном смысле решения класса h' уравнения $\mathbf{K}'\psi = 0$, то линейно независимыми решениями этого класса в узком смысле будут $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{k'}$, $i\psi_1, i\psi_2, \ldots, i\psi_{k'}$, так что их число $l' = 2k'$.

В соответствии с этим условия (112,27) эквивалентны следующим:

$$\int_L \psi_j(t) f(t)\, dt = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, k',$$

а равенство (112,28) обращается в равенство $k - k' = \varkappa$.

IV. Приложение к некоторым смешанным задачам теории упругости

В качестве приложения изложенных в предыдущем отделе результатов мы приведем в §§ 113, 114 решение двух важных смешанных задач теории упругости, используя в основном работу Г. Ф. Манджавидзе [3].

Для того чтобы не нарушать связности изложения, мы не останавливаемся в §§ 113, 114 на детальном обосновании некоторых утверждений, связанных с поведением рассматриваемых функций вблизи границы. В дополнительном § 115 мы приводим ряд оценок, позволяющих строго обосновать все эти утверждения.

§ 113. Решение основной смешанной задачи плоской теории упругости. 1°. Напомним для удобства читателя некоторые основные формулы и предложения плоской статической теории упругости, ограничиваясь для простоты случаем, когда упругое тело занимает на плоскости[1]) $z = x + iy$ конечную область S, ограниченную простым замкнутым гладким контуром L.

Основные уравнения плоской теории упругости при отсутствии объемных сил, что мы и будем предполагать, сводятся к следующим:

$$\begin{gathered}\frac{\partial X_x}{\partial x} + \frac{\partial X_y}{\partial y} = 0, \quad \frac{\partial Y_x}{\partial x} + \frac{\partial Y_y}{\partial y} = 0, \\ X_x = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial u}{\partial x}, \quad Y_y = \lambda\theta + 2\mu\frac{\partial v}{\partial y}, \\ X_y = Y_x = \mu\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right),\end{gathered} \tag{113,1}$$

где X_x, Y_y, $X_y = Y_x$ — компоненты напряжения, u, v — компоненты смещения, $\lambda > 0$, $\mu > 0$ — постоянные Ламе и где для краткости положено

$$\theta = \frac{\partial u}{\partial x} + \frac{\partial v}{\partial y}. \tag{113,2}$$

Общее (регулярное) решение основных уравнений (113,1) может быть выражено через две произвольные голоморфные в S функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ следующим образом:

$$X_x + Y_y = 4\operatorname{Re}\varphi'(z), \quad Y_y - X_x + 2iX_y = 2[\bar{z}\varphi''(z) + \psi'(z)], \tag{113,3}$$

$$2\mu(u + iv) = \varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}, \tag{113,4}$$

---

[1]) О том, как понимать выражение, что тело занимает плоскую область и пр. см., например, книгу автора [9]. Там же см. доказательство всех приводимых в этом пункте формул и предложений.

где

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=3-4\sigma>1; \tag{113,4a}$$

через

$$\sigma=\frac{\lambda}{2(\lambda+\mu)}$$

обозначен коэффициент Пуассона $\left(0<\sigma<\frac{1}{2}\right)$.

Укажем еще одну важную формулу, которой можно заменить формулы (113,3),

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}=i\int_{z_0}^{z}(X_n+iY_n)\,ds+\text{const}, \tag{113,5}$$

где интеграл взят по любой гладкой дуге l, не выходящей из S, соединяющей произвольно фиксированную точку z_0 с переменной точкой z области S; X_n и Y_n обозначают компоненты напряжения, действующего на дугу l со стороны положительной нормали, т. е. нормали, направленной вправо, если смотреть вдоль положительного направления l (ведущего от z_0 к z). Как известно,

$$\left.\begin{aligned} X_n&=X_x\cos(n,x)+X_y\cos(n,y),\\ Y_n&=Y_x\cos(n,x)+Y_y\cos(n,y).\end{aligned}\right\} \tag{113,6}$$

Интеграл в правой части не зависит от пути интегрирования, соединяющего точку z_0 с точкой z. Это легко проверить непосредственно и очевидно с механической точки зрения[1]).

Добавим к предыдущему еще следующие замечания, важные для дальнейшего.

При заданных напряжениях функция $\varphi(z)$ определяется с точностью до выражения $Ciz+\gamma$, где C — действительная, а γ — комплексная произвольные постоянные; функция же $\psi(z)$ определяется с точностью до произвольной комплексной постоянной γ', так что, не изменяя напряжений, можно заменить

$$\varphi(z) \text{ на } \varphi(z)+Ciz+\gamma, \quad \psi(z) \text{ на } \psi(z)+\gamma',$$

и только такая замена не изменяет напряжений. В частности, если напряжения равны нулю, то $\varphi(z)=Ciz+\gamma$, $\psi(z)=\gamma'$. Эти последние формулы выражают жесткое (бесконечно малое) смещение тела, как целого, что не отражается на напряжениях, как это показывают формулы (113,3).

При заданных смещениях (тогда заданы и напряжения)

$$C=0, \quad \gamma\varkappa-\overline{\gamma'}=0.$$

Если заданы напряжения и, кроме того, фиксирована постоянная в правой части формулы (113,5), то действительная постоянная C остается произвольной, но γ и γ' связаны соотношением $\gamma+\overline{\gamma'}=0$.

Наконец, если заданы смещения и фиксирована постоянная в правой части (113,5), то

$$C=\gamma=\gamma'=0.$$

[1]) Интеграл этот, взятый по любому замкнутому контуру, равен нулю вследствие того, что главный вектор внешних усилий, приложенных к контуру тела, находящегося в равновесии, равен нулю.

2°. В статической теории упругости (в нашем случае плоской) под **основными граничными задачами** подразумевают задачи определения упругого равновесия тела по следующим граничным условиям.

В первой основной задаче задаются внешние напряжения, приложенные к границе. **Во второй основной задаче** задаются смещения точек границы. Наконец, **в основной смешанной задаче** на одной части границы задаются напряжения, а на другой — смещения.

Единственность решения каждой из этих задач вытекает из известной формулы, которая легко выводится при помощи формулы Остроградского — Грина,

$$\int_L (X_n u + Y_n v)\,ds = \iint_S [\lambda (e_{xx} + e_{yy})^2 + 2\mu (e_{xx}^2 + e_{yy}^2 + 2e_{xy}^2)]\,dx\,dy, \quad (113,7)$$

где

$$e_{xx} = \frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy} = \frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy} = \frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x} + \frac{\partial u}{\partial y}\right)$$

— компоненты деформации.

При обычном элементарном выводе этой формулы предполагается, что компоненты смещения и напряжения непрерывно продолжимы на все точки границы L области. О применимости формулы при более общих условиях, с которыми нам придется иметь дело, см. замечание 2 в конце параграфа.

Во всех трех основных задачах для **разности** двух возможных решений имеем на границе

$$X_n u + Y_n v = 0.$$

Поэтому вследствие того, что квадратичная форма переменных e_{xx}, e_{yy}, e_{xy} под знаком двойного интеграла в правой части положительная, мы должны для разности двух решений иметь $e_{xx} = e_{yy} = e_{xy} = 0$, откуда легко следует, что

$$u = -\varepsilon y + \alpha, \quad v = \varepsilon x + \beta,$$

где ε, α, β — (действительные) постоянные; последние формулы выражают жесткое (бесконечно малое) смещение тела, как целого.

В первой основной задаче эти постоянные остаются произвольными, так как решения, отличающиеся жестким смещением, не считаются различными. Во второй и смешанной основных задачах $\varepsilon = \alpha = \beta = 0$; это показывает непосредственная подстановка в граничные условия и очевидно с механической точки зрения, так как если хотя бы на части границы смещения равны нулю, жесткое смещение исключается.

Замечание 1. Принимая во внимание формулы (113,4) и (113,5), мы можем переписать формулу (113,7) еще так:

$$-2\mu \operatorname{Im} \int_L [\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}]\, d\,[\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)] =$$
$$= 2\mu \operatorname{Im} \int_L [\overline{\varphi(t)} + \bar{t}\varphi'(t) + \psi(t)]\, d\,[\varkappa\varphi(t) - t\overline{\varphi'(t)} - \overline{\psi(t)}] =$$
$$= \iint_S [(\lambda + 2\mu)\, e_{xx}^2 + 2\lambda e_{xx} e_{yy} + (\lambda + 2\mu)\, e_{yy}^2 + 4\mu e_{xy}^2]\, dx\,dy \quad (113,8)$$

(второй интеграл получается из первого интегрированием по частям), где, напоминаем, u, v обозначают действительные функции, связанные с $\varphi(z)$, $\psi(z)$ соотношением

$$2\mu(u+iv)=\varkappa\varphi(z)-z\overline{\varphi'(z)}-\overline{\psi(z)},$$

и где

$$e_{xx}=\frac{\partial u}{\partial x}, \quad e_{yy}=\frac{\partial v}{\partial y}, \quad e_{xy}=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial v}{\partial x}+\frac{\partial u}{\partial y}\right).$$

Легко видеть на основании рассуждений, приведших нас к этой формуле, что она справедлива для всяких двух голоморфных в S функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$, если они достаточно регулярны вблизи границы, лишь бы постоянные λ, μ, $\varkappa$ были связаны соотношением

$$\varkappa=\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=1+\frac{2\mu}{\lambda+\mu};$$

справедливость формулы (113,8) легко проверить и непосредственно, без привлечения формул теории упругости.

Легко, далее, видеть, что формула (113,8) справедлива и для многосвязной, конечной или бесконечной области S, ограниченной гладкими замкнутыми контурами, лишь бы функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ были голоморфны в ней, включая бесконечно удаленную точку, если область бесконечна. Справедливость формулы (113,8) для бесконечной области легко проверить, если применить ее сначала к конечной части области S, заключенной внутри окружности $|z|=R$ при достаточно большом R, и перейти к пределу при $R\to\infty$. Интеграл в левой части, взятый по этой окружности, будет при этом, как легко видеть, стремиться к 0[1]).

Заметим еще следующее. Квадратичная форма, фигурирующая под знаком двойного интеграла, будет положительной и в том случае, если $\lambda<0$, лишь бы $\lambda+\mu>0$, иначе говоря, если $\mu>0$, $\varkappa>1$. Действительно, квадратичная форма $(\lambda+2\mu)e_{xx}^2+2\lambda e_{xx}e_{yy}+(\lambda+2\mu)e_{yy}^2$ в этом случае положительна, так как $\lambda+2\mu>0$ и дискриминант $\lambda^2-(\lambda+2\mu)^2=-4\mu(\lambda+\mu)$ отрицателен.

Случай $\lambda<0$ физически невозможен, если рассматривать λ как постоянную Ламе в теории упругости. Но формулу (113,8) нам придется применить к другому случаю в следующем параграфе.

З а м е ч а н и е 2. На теоремы единственности, вытекающие из формул (113,7) или (113,8), нам придется ссылаться и в тех случаях, когда достаточные для элементарного вывода этих формул условия, указанные вслед за формулой (113,7), не соблюдены. Но во всех тех случаях, с которыми нам придется встретиться, дело будет обстоять так. Упомянутые условия будут соблюдены для области S', получаемой из S удалением бесконечно малых частей, вырезаемых окружностями бесконечно малых радиусов с центрами в конечном числе точек границы L. Мы

---

[1]) Так как по условию $\varphi(z)$ и $\psi(z)$ голоморфны в окрестности бесконечно удаленной точки, то в этой окрестности

$$\varphi(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\ldots, \quad \psi(z)=b_0+\frac{b_1}{z}+\ldots,$$

$$\varphi'(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right), \quad \psi'(z)=O\left(\frac{1}{z^2}\right)$$

и т. д.

поэтому сможем применить формулу (113,7) или (113,8) к области S' и затем перейти к пределу, когда радиусы упомянутых окружностей стремятся к нулю. При этом во всех случаях, с которыми нам придется иметь дело, интегралы в левой части, распространенные на дуги этих окружностей, заключенные в S, будут стремиться к нулю[1]), и наши формулы окажутся справедливыми для области S.

3°. Решения первой и второй основных задач хорошо известны; в частности, они изложены в книге автора [9]. Решение основной смешанной задачи в упомянутой книге излагается лишь для некоторых частных случаев, когда можно получить эффективное решение сравнительно элементарными способами.

Здесь же мы укажем решение основной смешанной задачи в общем случае, ограничиваясь, впрочем, для простоты рассмотрением конечной односвязной области. Для многосвязной (конечной или бесконечной) области ход решения тот же, но в этом случае требуются некоторые дополнительные рассмотрения[2]).

Итак, пусть тело занимает конечную область S, ограниченную простым замкнутым контуром L. Мы будем теперь предполагать, что контур L не только гладкий, но обладает кривизной, удовлетворяющей условию $H(1)$, т. е. условию Липшица[3]).

Пусть на L взяты дуги $L'_j = a_j b_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$, не имеющие общих концов, положительные направления которых совпадают с положительным направлением L, оставляющим область S слева, и которые следуют друг за другом в этом направлении. Дуги $b_j a_{j+1}$, $j = 1, 2, \ldots, p$ (под a_{p+1} подразумевается a_1) мы обозначим через L''_j. Совокупность дуг L'_j мы обозначим через L', а совокупность дуг L''_j — через L''.

Основная смешанная задача, к решению которой мы приступаем, заключается в следующем: требуется определить упругое равновесие тела, если на части L' границы заданы внешние напряжения, а на остальной части L'' — смещения.

На основании формул (113,4), (113,5) эта задача сводится, очевидно, к задаче определения двух голоморфных в S функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$ по граничным условиям

$$\left.\begin{aligned} \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= f(t) + C(t) \quad \text{при } t \in L', \\ -\varkappa\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= f(t) \quad \text{при } t \in L''. \end{aligned}\right\} \tag{113,9}$$

этих формулах $f(t)$ — заданная на L функция, а именно,

$$\begin{aligned} f(t) &= i\int_{a_j}^{t} (X_n + iY_n)\,ds \quad \text{при } t \in L'_j, \\ f(t) &= -2\mu(g_1 + ig_2) \quad \text{при } t \in L'', \end{aligned} \tag{113,10}$$

---

[1]) А именно, в случаях, с которыми нам придется иметь дело, для подынтегрального выражения Fds в интеграле, распространенном по дуге окружности с центром в c (s — дуговая абсцисса), будем иметь оценку: $|F| < \text{const}\cdot|z-c|^{-\alpha}$, $\alpha = \text{const} < 1$.

[2]) См. Д. И. Шерман [3], Г. Ф. Манджавидзе [3].

[3]) Это означает, что координаты x, y точки линии L имеют вторые производные класса $H(1)$. Не усложняя значительно рассуждений, можно заменить условие $H(1)$ условием $H(\alpha)$ при $\alpha > \frac{1}{2}$, как это делает Г. Ф. Манджавидзе.

где X_n, Y_n — заданные на L' компоненты внешнего напряжения, а g_1, g_2 — заданные на L'' компоненты смещения; интегралы берутся вдоль дуг $L' = a_j b_j$; s обозначает дуговую абсциссу. Наконец, $C(t)$ обозначает кусочно-постоянную функцию на L', т. е. $C(t) = C_j$ при $t \in L'_j$, где C_j обозначают постоянные, не задаваемые заранее.

Мы будем считать, что $f(t)$ принадлежит классу H_0, а $f'(t) = \frac{df(t)}{dt}$ — классу H^*, при узлах a_j, b_j, $j = 1, 2, \ldots, p$.

Здесь и в дальнейшем, если это не может вызвать недоразумения, мы пишем $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ вместо $\varphi^+(t)$, $\varphi'^+(t)$, $\psi^+(t)$.

Решение, следуя Д. И. Шерману [2], [3], мы будем искать в следующем виде[1]):

$$\begin{aligned}
\varphi(z) &= \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}, \\
\psi(z) &= -\frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega(t)\,dt}{(t-z)^2},
\end{aligned} \tag{113,11}$$

где $\omega(t)$ — функция точки t границы, подлежащая определению[2]).

Если считать, что функция $\omega(t)$ непрерывна и имеет интегрируемую производную $\omega'(t)$, то при помощи интегрирования по частям последнюю формулу можно переписать еще так:

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i} \int_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\bar{t}\omega'(t)\,dt}{t-z}. \tag{113,11a}$$

Аналогично мы можем представить производную $\varphi'(z)$ следующим образом:

$$\varphi'(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega(t)\,dt}{(t-z)^2} = \frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{\omega'(t)\,dt}{t-z}. \tag{113,11b}$$

Вычислим теперь граничные значения $\varphi^+(t)$, $\varphi'^+(t)$, $\psi^+(t)$, считая, что формулы Сохоцкого — Племеля применимы к правым частям первой формулы (113,11) и формул (113,11a), (113,11b), и подставим полученные выражения в граничные условия (113,9), имея в виду, что в этих последних под $\varphi(t)$, $\varphi'(t)$, $\psi(t)$ подразумевается соответственно $\varphi^+(t)$, $\varphi'^+(t)$, $\psi^+(t)$. Это легко приводит к следующему интегральному уравнению для определения $\omega(t)$:

$$\begin{aligned}
\mathbf{K}\omega \equiv A(t_0)\,\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0} + \int_L k_1(t_0, t)\,\omega(t)\,dt &+ \\
+ \int_L \overline{k_2(t_0, t)}\,\overline{\omega(t)\,dt} &= f(t_0) + C(t_0),
\end{aligned} \tag{113,12}$$

---

[1]) Относительно соображений, приводящих к тому или иному виду представления искомых решений, ср. сказанное в § 101 книги автора [9].

[2]) В случае многосвязной области к правым частям (113,11) добавляются еще некоторые простые выражения; см. Д. И. Шерман [3], Г. Ф. Манджавидзе [3]. Ср. также Н. И. Мусхелишвили [9], § 102.

где

$$A(t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1-\varkappa) & \text{на } L',\\ -\varkappa & \text{на } L'',\end{cases}\qquad B(t_0)=\begin{cases}\frac{1}{2}(1+\varkappa) & \text{на } L',\\ 0 & \text{на } L'',\end{cases}\tag{113,13}$$

$$k_1(t_0,t)=\frac{\varkappa}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0},\qquad k_2(t_0,t)=\frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar t-\bar t_0}{t-t_0}\tag{113,14}$$

и, наконец,

$$C(t)=\begin{cases}C_j & \text{на } L_j', \quad j=1,2,\ldots,p,\\ 0 & \text{на } L''.\end{cases}\tag{113,15}$$

Постоянные C_j, как было уже сказано, не задаются заранее и определяются при решении задачи; это будет показано ниже. Пока же мы будем рассматривать функцию $C(t)$ как заданную.

Под частной производной по t в формулах (113,14) следует подразумевать производную по t, вычисленную в предположении, что точка t_0 постоянная; величина же $\bar t$ рассматривается как функция от t, так что

$$\frac{\partial\bar t}{\partial t}=\frac{d\bar t}{dt}=\frac{d\bar t}{ds}:\frac{dt}{ds},$$

где s — дуговая абсцисса.

Характеристическим однородным уравнением, соответствующим уравнению (113,12), будет

$$A(t_0)\,\omega(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}=0.\tag{113,16}$$

Соответствующая этому уравнению однородная задача сопряжения

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t),$$

где

$$G(t)=\frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)}=\begin{cases}-\varkappa & \text{при } t \text{ на } L',\\ 1 & \text{при } t \text{ на } L'',\end{cases}\tag{113,17}$$

решается чрезвычайно просто. А именно, как легко проверить непосредственно[1]) или на основании общих формул § 83, п. 2°, все узлы a_k, b_k неособенные и каноническое решение $X(z)$, например, наиболее узкого класса h_{2p}, дается формулой (с точностью до постоянного отличного от нуля множителя)

$$X(z)=\prod_{j=1}^{p}(z-a_j)^{\frac{1}{2}+i\beta}(z-b_j)^{\frac{1}{2}-i\beta},\tag{113,18}$$

где

$$\beta=\frac{\ln\varkappa}{2\pi}.\tag{113,19}$$

Под множителями

$$(z-a_j)^{\frac{1}{2}+i\beta}(z-b_j)^{\frac{1}{2}-i\beta}=\sqrt{(z-a_j)(z-b_j)}\left[\frac{z-a_j}{z-b_j}\right]^{i\beta}$$

---

[1]) Мы имеем дело, в сущности, с однородной задачей сопряжения для прерывистой граничной линии L', так как на L'' мы имеем $\Phi^+(t)=\Phi^-(t)$, т. е. L'' не является линией скачков функции $\Phi(z)$. Такую задачу для частного случая $\varkappa=1$ ($\beta=0$) мы рассмотрели в § 85.

следует подразумевать ветви, голоморфные на разрезанной соответственно вдоль дуг $a_j b_j$ плоскости, например те, разложения которых в окрестности бесконечно удаленной точки по убывающим степеням z имеют первым членом z.

Канонические решения всех других классов можно получить умножением $X(z)$ на множители вида $(z-a_k)^{-1}$ и $(z-b_k)^{-1}$. Но нам придется иметь дело лишь с функцией $X(z)$.

Из (113,18) следует, что индекс класса h_{2p} нашей задачи сопряжения равен $(-p)$, ибо порядок $X(z)$ на бесконечности равен p. Следовательно, согласно определению, $-p$ является индексом оператора **K**.

Мы будем искать решение $\omega(t)$ уравнения (113,12) в классе h_{2p}[1]. Можно показать (см. § 115), что тогда $\omega(t)$ будет принадлежать классу H, а производная $\omega'(t)$ — классу H^*.

Так как индекс класса h_{2p} оператора **K** равен $(-p)$, то в силу теоремы II § 112 имеем

$$\nu-\nu'=-2p, \tag{113,20}$$

где ν — число линейно независимых (в узком смысле) решений класса h_{2p} однородного уравнения $\mathbf{K}\omega=0$, а ν' — число линейно независимых решений класса $h_0=h'_{2p}$ союзного однородного уравнения $\mathbf{K}'\sigma=0$.

Докажем, что $\nu=0$[2] и, следовательно, $\nu'=2p$. В самом деле, пусть $\omega_0(t)$ — какое-либо решение класса h_{2p} уравнения $\mathbf{K}\omega=0$, а $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — функции, определяемые формулами (113,11), если вместо $\omega(t)$ взять в них $\omega_0(t)$.

Тогда

$$\begin{aligned} \varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}&=0 \text{ на } L',\\ -\varkappa\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}&=0 \text{ на } L''. \end{aligned} \tag{113,21}$$

В силу теоремы единственности (п. 2° настоящего параграфа) и сказанного в конце п. 1° легко заключаем, что

$$\varphi_0(z)=0, \quad \psi_0(z)=0$$

во всей области S. Но тогда на основании формул (113,11) (см. также (113,11a)) мы должны иметь

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z}=0, \quad \frac{\varkappa}{2\pi i}\int_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\bar t\omega_0'(t)\,dt}{t-z}=0$$

[1] Здесь уместно сделать следующее общее замечание. При решении той или иной физической задачи в математической постановке приходится (как и во всех других случаях) заранее налагать на искомые функции некоторые ограничения. При этом обычно приходится руководствоваться как физическими соображениями, так и, поневоле, соображениями, связанными с применяемым методом. Основным критерием законности тех или иных ограничений (критерием корректности постановки задачи) является соблюдение условия, чтобы задача допускала решение, подчиненное принятым ограничениям, и притом единственное, если единственность решения вытекает из физических соображений.

В нашем случае указанное условие, как мы увидим, соблюдено. Ограничение, наложенное нами на $\omega(t)$, имеет целью обеспечить существование на L (кроме узлов) граничных значений функций, определяемых формулами (113,11), а также применимость теорем единственности для граничных задач плоской теории упругости, на которые мы будем ссылаться в тексте.

[2] Способ доказательства принадлежит Д. И. Шерману [2].

для всех $z \in S$. Отсюда заключаем на основании доказанного в § 29 предложения, что функции $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$, определяемые равенствами[1])

$$i\varphi^*(t) = \omega_0(t), \quad -i\psi^*(t) = \varkappa\overline{\omega_0(t)} + \bar{t}\omega_0'(t), \tag{113,22}$$

являются граничными значениями функций $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$, голоморфных в области S^-, дополняющей $S+L$ до всей плоскости, причем $\varphi^*(\infty) = \psi^*(\infty) = 0$. Исключая $\omega_0(t)$ из равенств (113,22), получим:

$$\varkappa\overline{\varphi^*(t)} - \bar{t}\varphi^{*\prime}(t) - \psi^*(t) = 0 \text{ на } L. \tag{113,23}$$

Это граничное условие соответствует второй основной задаче (п. 2°) для тела, занимающего бесконечную область S^-, когда смещения на границе равны нулю. Отсюда на основании соответствующей теоремы единственности и условий $\varphi^*(\infty) = \psi^*(\infty) = 0$ заключаем, что $\varphi^*(z) = \psi^*(z) = 0$. Но тогда на основании (113,22) $\omega_0(t) = 0$.

Таким образом, наше утверждение о том, что $\nu = 0$ и, следовательно, $\nu' = 2p$, доказано.

В силу теоремы I § 112 условия разрешимости (в классе h_{2p}) уравнения (113,12) имеют вид

$$\operatorname{Re}\int_L [f(t) + C(t)]\,\sigma_j(t)\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2p, \tag{113,24}$$

где $\sigma_j(t)$, $j = 1, 2, \ldots, 2p$, — полная система линейно независимых решений класса $h_0 = h'_{2p}$ уравнения $\mathrm{K}'\sigma = 0$.

Полагая $C_k = \gamma_k + i\gamma_{k+p}$, $k = 1, 2, \ldots, p$, где γ_j — действительные постоянные, мы получим (действительную) систему линейных уравнений для определения постоянных γ_k, $k = 1, 2, \ldots, 2p$, вида

$$\sum_{k=1}^{2p} A_{jk}\gamma_k = B_j, \quad j = 1, 2, \ldots, 2p, \tag{113,25}$$

где A_{jk} — определенные постоянные, не зависящие от $f(t)$, а B_j — также постоянные, но зависящие от $f(t)$:

$$B_j = \operatorname{Re}\int_L f(t)\,\sigma_j(t)\,dt.$$

Докажем, что определитель системы (113,25) отличен от нуля. В самом деле, пусть $f(t) = 0$. Тогда в системе (113,25) все $B_j = 0$, и она обратится в однородную. Если определитель этой системы равен нулю, то она допускает отличные от нуля решения. Пусть γ_k^0, $k = 1, 2, \ldots, 2p$, — одно из них. Тогда уравнение (113,12) будет разрешимо (в классе h_{2p}) при $f(t) = 0$, $C_k = C_k^0 = \gamma_k^0 + i\gamma_{k+p}^0$. Пусть $\omega_0(t)$ — его решение, а $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — соответствующие ему функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$. Тогда

$$\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = C_k^0 \text{ на } L_k', \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

$$-\varkappa\varphi_0(t) + t\overline{\varphi_0'(t)} + \overline{\psi_0(t)} = 0 \quad \text{на } L''.$$

Отсюда в силу теоремы единственности для смешанной задачи легко заключаем, что $\varphi_0(z) = \delta$, $\psi_0(z) = \varkappa\bar{\delta}$, где δ — некоторая постоянная.

[1]) Множители i и $-i$ вводятся для того, чтобы получить формулу (113,23) в том виде, как она написана.

Поэтому будем иметь

$$\varphi_0(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z}=\delta,$$
$$\psi_0(z)=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z}-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\bar t\omega_0'(t)\,dt}{t-z}=\varkappa\bar\delta \qquad (113,26)$$

для всех $z\in S$. Вводя теперь снова обозначения (113,22), приходим на основании предложения, доказанного в § 29, к заключению, что функции $\varphi^*(t)$, $\psi^*(t)$ являются граничными значениями некоторых функций $\varphi^*(z)$, $\psi^*(z)$, голоморфных в бесконечной области S^-, причем эти граничные значения связаны соотношением (113,23); на этот раз $\varphi^*(\infty)=-i\delta$, $\psi^*(\infty)=-i\varkappa\bar\delta$. На основании теоремы единственности для второй основной задачи приходим к заключению, что $\varphi^*(z)=$ $=\text{const}=-i\delta$, $\psi^*(z)=\text{const}=-i\varkappa\bar\delta$. Подставляя эти значения в (113,23), получаем, что $\delta=0$, откуда в силу (113,22) $\omega_0(t)=0$. Но тогда $\varphi_0(z)=\psi_0(z)=0$ в S и, следовательно, $C_k^0=\gamma_k^0+i\gamma_{k+p}^0=0$, $k=1, 2, \ldots, p$, что противоречит предположению.

Таким образом, определитель системы (113,25) отличен от нуля, и, значит, она всегда однозначно разрешима относительно постоянных γ_k, $k=1, 2, \ldots, 2p$. Следовательно, постоянные C_j, $j=1, 2, \ldots, p$, вполне определяются[1]; при этих значениях постоянных уравнение (113,12) однозначно разрешимо (в классе h_{2p}), и его решение $\omega(t)$ приводит к решению исходной задачи.

4°. Уравнение (113,12) приобретает чрезвычайно простой вид в случае, когда L — окружность. В этом случае оно, по существу, сводится к характеристическому уравнению с коэффициентами $A(t)$, $B(t)$, определяемыми формулами (113,13), а это, в конечном счете, приводит к задаче сопряжения, в которой коэффициент $G(t)$ определяется формулой (113,17), а свободный член содержит некоторое число не заданных заранее постоянных, которые однозначно определяются в ходе решения задачи из системы линейных алгебраических уравнений. Однако в нашем случае решение можно гораздо проще получить путем непосредственного приведения к задаче сопряжения, минуя интегральные уравнения; см. книгу автора [9], § 123.

§ 114. Решение одной основной смешанной задачи изгиба пластинки. 1°. Методы, применяемые в плоской теории упругости (в частности, методы комплексного переменного) могут быть с успехом перенесены, с соответствующими изменениями, на решение граничных задач (приближенной) теории изгиба упругой, первоначально плоской, пластинки, нагруженной силами, нормальными к ее плоскости. Это происходит оттого, что в том и другом случае мы имеем дело с граничными задачами, связанными с бигармоническим уравнением.

Основными граничными задачами (приближенной) теории изгиба пластинки являются задачи, соответствующие случаям: когда край пластинки заделан, когда он оперт и когда он свободен.

[1] Легко видеть, что исходная граничная задача, определяемая формулами (113,9), допускает решение, в котором одна из постоянных C_j остается произвольной (что не влияет ни на напряжения, ни на смещения). Этот произвол устраняется формой решения (113,11).

Кроме того, к основным задачам можно отнести смешанные задачи, когда различные части края пластинки находятся в различных условиях, соответствующих трем перечисленным выше случаям.

Случай заделанного края приводит к задаче, аналогичной первой основной задаче плоской теории упругости [1]) (§ 113, п. 2°). Как показали С. Г. Лехницкий [1] и И. Н. Векуа [6], случай свободного края сводится к задаче, аналогичной второй основной задаче плоской теории упругости [2]).

Мы приведем здесь решение смешанной задачи, когда одна часть края конечной односвязной пластинки заделана, а остальная часть свободна; решение это дано Г. Ф. Манджавидзе [3] [3]).

Итак, рассмотрим находящуюся под нормальной нагрузкой тонкую упругую пластинку, срединная поверхность которой до нагрузки занимала конечную односвязную область S плоскости $z = x + iy$, ограниченную простым замкнутым контуром L. Мы будем предполагать, что кривизна линии L имеет производную по дуговой абсциссе класса $H(1)$ [4]).

Пусть при обозначениях предыдущего параграфа (стр. 384) на L взяты дуги $L'_j = a_jb_j$, $j = 1, 2, \ldots, p$; дуги b_ja_{j+1} $(a_{p+1} = a_1)$ мы обозначим по-прежнему через L''_j, совокупность дуг L'_j — через L', а совокупность дуг L''_j — через L''. Будем считать, что часть L' края пластинки заделана, а часть L'' свободна.

Обозначим через $w(x,y)$ прогиб, через $q(x,y)$ — интенсивность (нормальной) нагрузки. Согласно приближенной теории изгиба пластинки, функция $w(x, y)$ должна удовлетворять уравнению

$$\Delta\Delta w = \frac{q}{D} \tag{114,1}$$

и граничным условиям

$$w = 0, \quad \frac{\partial w}{\partial n} = 0 \quad \text{при} \quad t \in L',$$

$$\mathbf{M}w \equiv \sigma\Delta w + (1-\sigma)\left[\cos^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial x^2} + \sin^2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} + \sin 2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y}\right] = 0,$$

$$\mathbf{N}w \equiv \frac{\partial\Delta w}{\partial n} + (1-\sigma)\frac{\partial}{\partial s}\left[\cos 2\theta\frac{\partial^2 w}{\partial x\,\partial y} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{2}\sin 2\theta\left(\frac{\partial^2 w}{\partial y^2} - \frac{\partial^2 w}{\partial x^2}\right)\right] = 0 \quad \text{при} \quad t \in L'', \tag{114,2}$$

где n — внешняя нормаль к L, θ — угол, составляемый n с осью Ox, σ — коэффициент Пуассона, $D = \mathrm{const} > 0$ («цилиндрическая жесткость» пластинки).

Общее решение неоднородного уравнения (114,1) можно представить в виде

$$w(x, y) = w_0(x, y) + W(x, y), \tag{114,3}$$

---

[1]) С математической точки зрения эти задачи попросту совпадают в случае конечной односвязной области. В случаях бесконечной и многосвязной (конечной или бесконечной) областей возникают некоторые различия.

[2]) И здесь можно повторить то, что сказано в предыдущей сноске.

[3]) Впоследствии смешанные задачи для других комбинаций граничных заданий, в том числе для случая, когда фигурируют все три упомянутых вида условий (одна часть границы свободна, другая оперта, третья заделана), были решены А. И. Каландия [3], [4].

[4]) То есть что координаты x, y точки линии L имеют производные третьего порядка класса $H(1)$. Без значительного усложнения рассуждений можно заменить класс $H(1)$ классом $H(\alpha)$ при $\alpha > 1/2$, как это делает Г. Ф. Манджавидзе.

где $w_0(x, y)$ — какое-либо частное его решение, а $W(x, y)$ — бигармоническая в S функция, т. е. функция, удовлетворяющая бигармоническому уравнению

$$\Delta\Delta W = 0;$$

что касается частного решения $w_0(x, y)$, то таких решений можно построить бесчисленное множество. Одним из хорошо известных решений является

$$w_0(x, y) = \frac{1}{8\pi D} \iint_S q(\xi, \eta)\, r^2 \ln r\, d\xi\, d\eta, \qquad r = \sqrt{(x-\xi)^2 + (y-\eta)^2}. \tag{114,4}$$

Легко непосредственно проверить, что если $q(x, y)$ — ограниченная интегрируемая функция, то функция $w_0(x, y)$, определяемая предыдущей формулой, и ее частные производные до третьего порядка включительно непрерывны в $S + L$. Достаточным условием того, чтобы функция $w_0(x, y)$ удовлетворяла уравнению (114,1), является условие, чтобы функция $q(x, y)$ удовлетворяла условию H в области $S + L$[1]).

В дальнейшем под $w_0(x, y)$ мы будем подразумевать какое-либо частное решение уравнения (114,1), непрерывное вместе со своими производными до третьего порядка в области $S + L$ и равное тождественно нулю при $q(x, y) = 0$, считая, что такое решение существует. Условия, достаточные для этого, были только что указаны.

Подставляя выражение (114,3) на место w в граничные условия (114,2) и перенося члены, зависящие от частного решения w_0 (которое мы считаем выбранным и известным), в правые части, мы приведем нашу граничную задачу, связанную с неоднородным уравнением (114,1) с однородными граничными условиями (114,2), к граничной задаче, связанной с однородным бигармоническим уравнением $\Delta\Delta W = 0$ с неоднородными граничными условиями, которые будут выписаны ниже (п. 3°) в преобразованном виде.

2°. Прежде чем идти дальше, приведем некоторые (в большинстве хорошо известные) формулы, связанные с бигармоническими функциями (см., например, книгу автора [9]).

Всякая бигармоническая в S функция может быть представлена в виде (формула Гурса)

$$W(x, y) = \operatorname{Re}\,[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] = \frac{1}{2}\,[\bar{z}\varphi(z) + z\overline{\varphi(z)} + \chi(z) + \overline{\chi(z)}], \tag{114,5}$$

где $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ — голоморфные в S функции[2]). Предыдущую формулу можно заменить более удобной для наших целей формулой, которая непосредственно вытекает из предыдущей (и обратно):

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = \varphi(z) + z\overline{\varphi'(z)} + \overline{\psi(z)}, \tag{114,6}$$

где положено

$$\psi(z) = \chi'(z). \tag{114,6a}$$

---

[1]) См., например, О. D. Kellogg [3].

[2]) Напомним, что мы считаем область S конечной и односвязной. В случае многосвязной области функции $\varphi(z)$ и $\chi(z)$ могут быть многозначными, несмотря на однозначность функции $W(x, y)$.

Из (114,5) или из (114,6) легко выводим:

$$\Delta W = 2\left[\varphi'(z) + \overline{\varphi'(z)}\right] = 4\,\mathrm{Re}\,\varphi'(z). \tag{114,7}$$

Если ввести обозначение $P(x, y) = \Delta W$ ($P(x, y)$ — гармоническая функция), а через $Q(x, y)$ обозначить сопряженную с $P(x, y)$ гармоническую функцию (определенную с точностью до действительной произвольной постоянной), то будем иметь:

$$4\varphi'(z) = P(x, y) + iQ(x, y) + Ci, \tag{114,7a}$$

где C — действительная произвольная постоянная; предполагается, что для $Q(x, y)$ выбрано определенное значение. Предыдущая формула показывает, что если бигармоническая функция $W(x, y)$ задана, то функция $\varphi'(z)$ определена с точностью до чисто мнимой произвольной постоянной, а следовательно, функция $\varphi(z)$ — с точностью до выражения $Ciz + \gamma$, где C — действительная, а γ — комплексная произвольные постоянные.

В частности, если $W(x, y) = 0$ в S, то необходимо $\varphi(z) = Ciz + \gamma$ и на основании формулы (114,6) $\psi(z) = -\overline{\gamma}$.

Напомним, наконец, следующую известную формулу [1]), справедливую для всякой бигармонической функции $W(x, y)$, удовлетворяющей определенным условиям регулярности вблизи границы L области S,

$$\iint\limits_S \left\{(\Delta W)^2 - (1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right]\right\} dx\,dy +$$
$$+ \int\limits_L \left[W\mathrm{N}W - \frac{\partial W}{\partial n}\mathrm{M}W\right] ds = 0, \tag{114,8}$$

где M и N — операторы, определяемые формулами (114,2).

Так как выражение

$$(\Delta W)^2 - (1-\sigma)\left[\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} - \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)^2\right] =$$
$$= \left(\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial^2 W}{\partial y^2}\right)^2 + (1+\sigma)\frac{\partial^2 W}{\partial x^2}\frac{\partial^2 W}{\partial y^2} + (1-\sigma)\left(\frac{\partial^2 W}{\partial x\,\partial y}\right)^2$$

представляет собой, очевидно, положительную квадратичную форму от вторых производных функции $W(x, y)$ [2]), то из формулы (114,8) следует, что если на одной части границы $W = \dfrac{\partial W}{\partial n} = 0$, а на остальной части $\mathrm{M}W = \mathrm{N}W = 0$, то все вторые частные производные функции $W(x, y)$ равны нулю, а это значит, что $W(x, y)$ — линейная функция координат x, y. Но так как $W = \dfrac{\partial W}{\partial n} = 0$ на некоторой части границы, то, как легко видеть, $W = 0$ всюду в S.

Мы доказали, таким образом, теорему единственности для сформулированной в п. 1° смешанной задачи.

3°. Вернемся к решению этой задачи. Как было уже сказано, произведя подстановку $w(x, y) = w_0(x, y) + W(x, y)$, где $W(x, y)$ — бигармоническая функция, а $w_0(x, y)$ — некоторое частное решение неоднородного уравнения (114,1), преобразуем граничные условия (114,2)

---

[1]) См., например, Л. В. Канторович и В. И. Крылов [1].

[2]) Напомним, что $0 < \sigma < \frac{1}{2}$.

к неоднородному виду, а именно:

$$\begin{aligned} W &= -w_0, \quad \frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{\partial w_0}{\partial n} \text{ при } t \in L', \\ \mathrm{M}W &= -\mathrm{M}w_0, \quad \mathrm{N}W = -\mathrm{N}w_0 \text{ при } t \in L''. \end{aligned} \tag{114,1a}$$

Преобразуем еще эти условия с целью привести задачу к задаче, аналогичной основной смешанной задаче плоской теории упругости. А именно, заменим первую пару условий (114,1a) следующим:

$$\frac{\partial W}{\partial x} + i\frac{\partial W}{\partial y} = -\frac{\partial w_0}{\partial x} - i\frac{\partial w_0}{\partial y} \text{ при } t \in L';$$

очевидно, что если соблюдено это последнее условие, то условие $\frac{\partial W}{\partial n} = -\frac{\partial w_0}{\partial n}$ на L' будет соблюдено в точности, а условие $W = -w_0$ — с точностью до некоторых постоянных на дугах L'_k.

Обратимся ко второй паре условий (114,1a). Легко установить непосредственной проверкой, что если z изменяется, описывая некоторую дугу l, расположенную в S, и если s обозначает дуговую абсциссу на l, то [1])

$$\left\{\mathrm{M}W + i\int \mathrm{N}W\,ds\right\} dz = (1-\sigma)\, d\left\{\varkappa\varphi(z) - z\overline{\varphi'(z)} - \overline{\psi(z)}\right\}, \tag{114,9}$$

где

$$\varkappa = \frac{\sigma+3}{1-\sigma}; \tag{114,10}$$

эта постоянная отлична от той, которая была обозначена той же буквой в предыдущем параграфе; важно то, что в обоих случаях $\varkappa > 1$.

Принимая во внимание формулу (114,9), а также формулу (114,6), граничные условия задачи можно представить в виде

$$\begin{aligned} \varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= f(t) && \text{при } t \in L', \\ -\varkappa\varphi(t) + t\overline{\varphi'(t)} + \overline{\psi(t)} &= f(t) + itC(t) + \alpha(t) && \text{при } t \in L''. \end{aligned} \tag{114,11}$$

В этих формулах $f(t)$ обозначает заданную функцию:

$$\begin{aligned} f(t) &= -\left(\frac{\partial w_0}{\partial x} + i\frac{\partial w_0}{\partial y}\right) && \text{при } t \in L', \\ f(t) &= \frac{1}{1-\sigma}\int_{b_j}^{t}\left[\mathrm{M}w_0 + \int_{b_j}^{s_\tau} i\mathrm{N}w_0\,ds\right] d\tau && \text{при } t \in L''_j, \end{aligned} \tag{114,12}$$

где τ — переменная точка на $L''_j = b_j a_{j+1}$, s_τ — соответствующая дуговая абсцисса, отсчитываемая от точки b_j. Через $C(t)$ обозначена кусочно-

---

[1]) С. Г. Лехницкий [1], И. Н. Векуа [6]. Формулу (114,9) весьма просто проверить, если учесть, что вдоль дуги l имеем $d\bar{z} = e^{-2i\vartheta}dz = -e^{-2i\theta}dz$, где ϑ — угол, составляемый положительной касательной к l с осью Ox, а $\theta = \vartheta - \frac{\pi}{2}$ — угол нормали, направленной вправо, с той же осью, и если вспомнить, что $\frac{\partial \Delta W}{\partial n} = \frac{\partial P}{\partial n} = \frac{\partial Q}{\partial s}$ [см. формулу (114,7a)].

постоянная функция точки на L'', а именно, $C(t) = C_k$ на L''_k, где C_k — действительные постоянные, не задаваемые заранее; $\alpha(t)$ обозначает также кусочно-постоянную функцию на L'', т. е. $\alpha(t) = \alpha_k$ на L''_k, где на этот раз α_k — вообще комплексные постоянные, также не задаваемые заранее.

Мы будем предполагать, что функция $f(t)$ принадлежит классу H_0, а $f'(t)$ — классу H^* в окрестностях узлов a_j, b_j. Этого достаточно для решения граничной задачи (114,11); что же касается исходной задачи (114,2), то ее решение можно получить при помощи решения задачи (114,11), если функция $q(x, y)$ достаточно регулярна, например удовлетворяет условиям, указанным вслед за формулой (114,4).

Постоянные C_j, α_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, следует определить так, чтобы функция $w(x, y) = \operatorname{Re}[\bar{z}\varphi(z) + \chi(z)] + w_0(x, y)$ была непрерывно продолжима, вместе с первыми производными, на все точки границы L[1]) и обращалась в нуль на L', а не только принимала постоянные значения на дугах L'_j, как того требует первое из условий (114,11).

Будем искать функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ в таком же виде, как в предыдущем параграфе, а именно в виде

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}, \tag{114,13}$$

$$\psi(z) = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,d\bar{t}}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\bar{t}\omega(t)\,dt}{(t-z)^2}.$$

Для $\omega(t)$ получаем уравнение

$$\mathbf{K}\omega \equiv A(t_0)\,\omega(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0} + \int\limits_L k_1(t_0, t)\,\omega(t)\,dt +$$
$$+ \int\limits_L \overline{k_2(t_0, t)}\,\overline{\omega(t)\,dt} = f(t_0) + it_0C(t_0) + \alpha(t_0), \tag{114,14}$$

где оператор $\mathbf{K}$ — тот же самый, что в предыдущем параграфе, а именно, $A(t_0)$, $B(t_0)$, $k_1(t_0, t)$, $k_2(t_0, t)$ определяются формулами (113,13), (113,14). В правой же части на этот раз

$$C(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{на } L', \\ C_j & \text{на } L''_j, \end{cases} \qquad \alpha(t_0) = \begin{cases} 0 & \text{на } L', \\ \alpha_j & \text{на } L''_j, \end{cases} \tag{114,15}$$

где, напоминаем, C_j — д е й с т в и т е л ь н ы е, а α_j — вообще комплексные постоянные, подлежащие определению.

Фиксируем, пока произвольно, постоянные C_j, $j = 1, 2, \ldots, p$, и будем искать решение уравнения (114,14) класса h_{2p}.

Условия разрешимости имеют вид (§ 112)

$$\operatorname{Re}\int\limits_L [f(t) + itC(t) + \alpha(t)]\,\sigma_j(t)\,dt = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, 2p, \tag{114,16}$$

где $\sigma_j(t)$, $j = 1, \ldots, 2p$, — полная система линейно независимых (в узком смысле) решений класса $h_0 = h'_{2p}$ уравнения $\mathbf{K}'\sigma = 0$.

Введя обозначение $\alpha_k = \gamma_k + i\gamma_{k+p}$, где γ_k, γ_{k+p} — действительные постоянные, получим (действительную) систему линейных уравнений

---

[1]) Этому условию мы удовлетворим, подчинив вводимую ниже функцию $\omega(t)$ условию, чтобы она принадлежала классу h_{2p}.

относительно γ_k, $k=1, 2, \ldots, 2p$,

$$\sum_{k=1}^{2p} A_{jk}\gamma_k = B_j, \quad j=1, 2, \ldots, 2p, \tag{114,17}$$

в которой коэффициенты A_{jk} не зависят ни от $f(t)$, ни от C_k, а

$$B_j = -\operatorname{Re}\left[\int_L f(t)\,\sigma_j(t)\,dt + i\sum_{k=1}^{2p} C_k \int_{L_k''} t\sigma_j(t)\,dt\right], \quad j=1, 2, \ldots, 2p.$$

Докажем, что определитель системы (114,17) отличен от нуля. В самом деле, пусть $f(t)=0$ и все $C_k=0$. Тогда в системе (114,17) все $B_j=0$. Пусть γ_k^0, $k=1, 2, \ldots, 2p$, — какое-либо решение этой системы. Тогда уравнение (114,14) разрешимо в классе h_{2p} при $f(t)=0$, $C_k=0$, $\alpha_k=\alpha_k^0=\gamma_k^0+i\gamma_{k+p}^0$, $k=1, 2, \ldots, p$. Пусть $\omega_0(t)$ — его решение, а $\varphi_0(z)$, $\psi_0(z)$ — соответствующие функции, определяемые формулами (114,13). Имеем тогда:

$$\begin{aligned} &\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_0(t)}=0 \quad \text{при } t\in L', \\ &-\varkappa\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t_0)}+\overline{\psi_0(t)}=\alpha_k^0 \quad \text{при } t\in L_k', \quad k=1, 2, \ldots, p. \end{aligned} \tag{114,18}$$

Полагая временно

$$\varkappa\varphi_0(z)-z\overline{\varphi_0'(z)}-\overline{\psi_0(z)}=2\mu(u_0+iv_0),$$

где μ — какая-либо положительная постоянная[1]), и применяя формулу (113,8) предыдущего параграфа[2]), легко заключаем, что

$$\frac{\partial u_0}{\partial x}=\frac{\partial v_0}{\partial y}=\frac{\partial v_0}{\partial x}+\frac{\partial u_0}{\partial y}=0$$

во всей области S, откуда следует, что[3])

$$-\varkappa\varphi_0(z)+z\overline{\varphi_0'(z)}+\overline{\psi_0(z)}=i\varepsilon z+\delta,$$

где ε — действительная, а δ — вообще комплексная постоянные. Но тогда из второй формулы (114,18) следует, что $\varepsilon=0$ и что

$$\alpha_1^0=\alpha_2^0=\ldots=\alpha_p^0=\delta=-(1+\varkappa)\beta;$$

мы ввели новую постоянную β вместо δ для некоторого упрощения следующих формул.

Граничную задачу (114,18) можно слегка видоизменить (по внешнему виду), если вместо функции $\psi_0(z)$ ввести функцию $\psi_*(z)$, полагая $\psi_*(z)=\psi_0(z)-\bar{\delta}$. Тогда мы придем к задаче

$$\begin{aligned} &\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_*(t)}=-\delta \quad \text{на } L', \\ &-\varkappa\varphi_0(t)+t\overline{\varphi_0'(t)}+\overline{\psi_*(t)}=0 \quad \text{на } L'', \end{aligned}$$

---

[1]) Мы ввели множитель 2μ для того, чтобы подчеркнуть аналогию с плоской теорией упругости. Можно взять, например, $2\mu=1$, как это фактически делает Г. Ф. Манджавидзе [3].

[2]) В этой формуле следует придать λ такое значение, чтобы

$$\frac{\lambda+3\mu}{\lambda+\mu}=\varkappa, \text{ т. е. } \lambda=\frac{3-\varkappa}{\varkappa-1}\mu;$$

напомним, что $\varkappa-1>0$.

[3]) Ср. тот случай в плоской теории упругости, когда компоненты деформации (а следовательно, и напряжения) равны нулю.

т. е. к частному случаю основной смешанной задачи плоской теории упругости (см. предыдущий параграф) при нулевых внешних напряжениях на одной части границы и нулевых смещениях на другой (то, что здесь $\varkappa$ имеет иное значение, никакой роли не играет). На основании соответствующей теоремы единственности и вида граничных условий (114,18) легко заключаем отсюда, что $\varphi_0(z) = \beta$, $\psi_0(z) = -\overline{\beta}$ и что, следовательно, на основании формул (114,13)

$$\beta = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\omega_0(t)\,dt}{t-z},$$

$$-\overline{\beta} = -\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{\omega_0(t)}\,dt}{t-z} - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\overline{t}\omega_0'(t)\,dt}{t-z}.$$

Отсюда, рассуждая совершенно так же, как в предыдущем параграфе относительно формул (113,26), выводим, что $\beta = 0$, т. е. что все $\gamma_k^0 = 0$.

Таким образом, доказано, что определитель системы (114,17) отличен от нуля. Следовательно, можно всегда подобрать постоянные α_k так, чтобы уравнение (114,14) было разрешимо в классе h_{2p}.

Найдя это решение $\omega(t)$, которое зависит линейным образом от пока произвольно фиксированных действительных постоянных C_k, составим функцию

$$w_*(x, y) = \operatorname{Re}[\overline{z}\varphi(z) + \chi(z)] + w_0(x, y), \qquad \chi(z) = \int \psi(z)\,dz,$$

где функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$ определяются формулами (114,13).

Построенная таким образом функция $w_*(x, y)$ удовлетворяет уравнению (114,1) и граничным условиям

$$\mathrm{M}w_* = \mathrm{N}w_* = 0 \text{ на } L'', \quad \frac{\partial w_*}{\partial n} = 0, \quad w_* = \rho_k \text{ на } L_k', \quad k = 1, 2, \ldots, p,$$

где ρ_k — какие-то действительные постоянные.

Подберем теперь постоянные C_k так, чтобы

$$\rho_1 = \rho_2 = \ldots = \rho_p, \qquad \operatorname{Im}\varphi'(z_0) = 0, \tag{114,19}$$

где z_0 — произвольно фиксированная точка области S; последнее из условий (114,19) несущественно [1]); мы ввели его для того, чтобы устранить излишний произвол в выборе постоянных.

Если мы сможем удовлетворить условиям (114,19), то функция $w = w_* - \rho$, где ρ — общее значение постоянных ρ_k, будет решением поставленной задачи.

Условия (114,19) сводятся, как легко видеть, к (действительной) линейной системе уравнений относительно величин C_k вида

$$\sum_{k=1}^{p} A_{jk}^0 C_k = B_j^0, \quad j = 1, 2, \ldots, p, \tag{114,20}$$

в которой коэффициенты A_{jk}^0 не зависят от функции $q(x, y)$, а свободные члены B_j^0 зависят лишь от этой функции и обращаются в нуль при $q(x, y) \equiv 0$ [2]).

---

[1]) Замена $\varphi(z)$ на $\varphi(z) + Ciz$, где C — действительная постоянная, не влияет, очевидно, на функцию $w_*(x, y)$.

[2]) Мы считаем, как было условлено, что частное решение $w_0(x, y)$ подобрано так, что $w_0(x, y) \equiv 0$ при $q(x, y) \equiv 0$; таково, например, частное решение (114,4).

Докажем, что система (114,20) всегда разрешима, т. е. что ее определитель отличен от нуля.

В самом деле, пусть $q(x, y) \equiv 0$. Тогда в этой системе все $B_j^0 = 0$ и она обращается в однородную. Пусть C_k^0, $k = 1, 2, \ldots, p$, — какое-либо ее решение и пусть $\varphi^0(z)$, $\psi^0(z)$ — соответствующие этому решению значения функций $\varphi(z)$, $\psi(z)$. На основании теоремы единственности, доказанной в п. 2°, заключаем, принимая во внимание условие $\operatorname{Im} \varphi^{0\prime}(z_0) = 0$, что $\varphi^0(z) = \mathrm{const}$, $\psi^0(z) = \mathrm{const}$. С другой стороны, на L_j'', $j = 1, 2, \ldots, p$, имеет место равенство

$$-\varkappa\varphi^0(t) + t\overline{\varphi^{0\prime}(t)} + \overline{\psi^0(t)} = itC_k^0 + \alpha_k^0,$$

откуда следует, что все $C_k^0 = 0$.

Следовательно, однородная система, соответствующая системе (114,20), не имеет отличных от нуля решений. Поэтому система (114,20) всегда однозначно разрешима и ее решение приводит к решению исходной задачи.

§ 115. Некоторые оценки[1]. В двух предыдущих параграфах, чтобы не нарушать связности изложения, мы оставили в стороне детальное обоснование применимости некоторых формул, например интегральных формул (113,7), (113,8), (114,8), формул (113,11a), (113,11b) и некоторых других. Теперь мы приведем некоторые оценки, достаточные для такого обоснования; более подробно мы остановимся на задаче, рассмотренной в § 113, а относительно задачи § 114 сделаем лишь краткие указания.

Рассмотрим оператор

$$\mathbf{k}\omega \equiv \int_L k_1(t_0, t)\,\omega(t)\,dt + \int_L \overline{k_2(t_0, t)}\,\overline{\omega(t_0, t)\,dt}, \tag{115,1}$$

фигурирующий в уравнении (113,12) или (114,14), где

$$k_1(t_0, t) = \frac{\varkappa}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\ln\frac{\bar t - \bar t_0}{t - t_0}, \quad k_2(t_0, t) = \frac{1}{2\pi i}\frac{\partial}{\partial t}\frac{\bar t - \bar t_0}{t - t_0}. \tag{115,2}$$

Будем считать, что координаты x, y точки t линии L имеют производные порядка m, удовлетворяющие условию $H(1)$, т. е. условию Липшица (в § 113 $m = 2$, а в § 114 $m = 3$).

Введем временно обозначение

$$F(t_0, t) = \frac{\bar t - \bar t_0}{t - t_0}.$$

На основании результатов § 7 функция $F(t_0, t)$ имеет производные порядка m, представимые в виде

$$\frac{a(t_0, t)}{|t - t_0|^\lambda},$$

где λ — произвольное число, удовлетворяющее условию $0 < \lambda < 1$, а $a(t_0, t)$ принадлежит классу H.

Пусть теперь $\omega(t)$ — некоторая функция класса H^*. Положим

$$\eta(t_0) = \int_L \frac{\partial F(t_0, t)}{\partial t}\,\omega(t)\,dt;$$

[1] Г. Ф. Манджавидзе [3].

функция $\eta(t_0)$ имеет производную порядка $m-1$

$$\eta^{(m-1)}(t_0)=\int_L \frac{\partial^m F(t_0, t)}{\partial t\, \partial t_0^{m-1}}\,\omega(t)\,dt,$$

которая, как нетрудно убедиться на основании рассуждений, аналогичных приведенным в начале § 51, принадлежит классу H. Если, далее, функция $\omega(t)$ непрерывна и имеет производную $\omega'(t)$, принадлежащую классу H^*, то, как показывает формула

$$\eta^{(m-1)}(t_0)=-\int_L \frac{\partial^{m-1} F(t_0, t)}{\partial t_0^{m-1}}\,\omega'(t)\,dt,$$

получаемая интегрированием по частям, существует и производная $\eta^{(m)}(t_0)$, также принадлежащая классу H.

Из сказанного непосредственно вытекает, что если функция $\omega(t)$ принадлежит классу H^*, то функция $\mathbf{k}\omega$ имеет производную порядка $m-1$, принадлежащую классу H, а если функция $\omega(t)$ непрерывна и имеет производную $\omega'(t)$, принадлежащую классу H^*, то функция $\mathbf{k}\omega$ имеет производную порядка m, принадлежащую классу H.

Рассмотрим сначала случай § 113 (напомним, что в этом случае $m=2$). Пусть $\omega(t)$ — решение класса h_{2p} уравнения (113,12), т. е. уравнения

$$\mathbf{K}\omega \equiv \mathbf{K}^0\omega+\mathbf{k}\omega=f(t_0)+C(t_0), \tag{115,3}$$

где $C(t)=C_k$ на L_k', $k=1, 2, \ldots, p$, $C(t)=0$ на L''. Функция $\omega(t)$ является также решением класса h_{2p} уравнения

$$\mathbf{K}^0\omega=A(t_0)\,\omega(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-t_0}=f_0(t_0), \tag{115,4}$$

в котором мы будем рассматривать правую часть

$$f_0(t_0)=f(t_0)+C(t_0)-\mathbf{k}\omega \tag{115,5}$$

как заданную.

Будем считать, что заданная функция $f(t)$ принадлежит классу H_0, а $f'(t)$ — классу H^* при узлах a_k, b_k, $k=1, 2, \ldots, p$. Тогда тем же классам принадлежат соответственно $f_0(t)$ и $f_0'(t)$.

Исчезающая на бесконечности кусочно-голоморфная функция

$$\varphi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\omega(t)\,dt}{t-z}$$

является решением класса h_{2p} задачи сопряжения

$$\varphi^+(t)=G(t)\,\varphi^-(t)+g(t), \tag{115,6}$$

где

$$G(t)=\frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)}=\begin{cases} -\varkappa & \text{при } t\in L', \\ 1 & \text{при } t\in L'' \end{cases} \tag{115,6a}$$

и

$$g(t)=\frac{f_0(t)}{A(t)+B(t)}=\begin{cases} f_0(t) & \text{при } t\in L', \\ -\dfrac{f_0(t)}{\varkappa} & \text{при } t\in L''. \end{cases} \tag{115,6b}$$

Таким образом, применяя формулу для решения задачи сопряжения, будем иметь:

$$\varphi(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}, \tag{115,7}$$

где по-прежнему

$$X(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-a_k)^{\frac{1}{2}+i\beta}(z-b_k)^{\frac{1}{2}-i\beta}, \quad \beta=\frac{\ln\varkappa}{2\pi}. \tag{115,8}$$

На основании результатов § 26 граничные значения $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ существуют для всех точек t линии L и принадлежат классу H, а следовательно, функция $\omega(t)=\varphi^+(t)-\varphi^-(t)$ также принадлежит этому классу[1]).

Введем теперь в рассмотрение функцию

$$\varphi_k(z)=(z-c_k)\,\varphi(z), \tag{115,9}$$

где c_k, $k=1, 2, \ldots, 2p$, — одна из точек a_j, b_j. Функция $\varphi_k(t)$ ограничена на бесконечности и является решением класса h_{2p} граничной задачи

$$\varphi_k^+(t)=G(t)\,\varphi_k^-(t)+(t-c_k)\,g(t); \tag{115,10}$$

поэтому

$$\varphi_k(z)=\frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{(t-c_k)\,g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}. \tag{115,11}$$

Обозначим через $\sigma_k=\alpha_k\beta_k$ некоторую дугу линии L, содержащую точку c_k и не содержащую других узлов.

Дифференцируя предыдущее выражение, получим после некоторых элементарных преобразований

$$\varphi_k'(z)-\varphi(z)=(z-c_k)\,\varphi(z)\sum_{r=1}^{2p}{}'\frac{\frac{1}{2}+i\nu_r}{z-c_r}+$$
$$+\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{L-\sigma_k}\frac{\left(i\nu_k-\frac{1}{2}\right)g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}-\frac{X(z)}{2\pi i}\left[\frac{(t-c_k)\,g(t)}{X^+(t)(t-z)}\right]_{t=\alpha_k}^{t=\beta_k}+$$
$$+\frac{X(z)}{2\pi i}\frac{d}{dz}\int_{L-\sigma_k}\frac{(t-c_k)\,g(t)\,dt}{X^+(t)(t-z)}+$$
$$+\frac{X(z)}{2\pi i}\int_{\sigma_k}\frac{t-c_k}{X^+(t)}\left[-\sum_{r=1}^{2p}{}'\frac{\frac{1}{2}+i\nu_r}{t-c_r}g(t)+g'(t)\right]\frac{dt}{t-z}, \tag{115,12}$$

где $\nu_r=\pm\beta$; штрих при знаке суммы означает, что слагаемое с номером $r=k$ опускается.

---

[1]) Из результатов § 26, относящихся к общему случаю, непосредственно вытекает, что $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ принадлежат классу H_0. Но в нашем случае, когда в узлах сходятся по две дуги, можно применить формулы (26,24), которые показывают, если произвести надлежащие простые вычисления, что $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ принадлежат и классу H. Проще, однако, вывести заключение о том, что $\omega(t)$ принадлежит классу H, из сказанного в конце п. 2° § 103.

Первые четыре члена в правой части формулы (115,12), как это легко видеть, непрерывно продолжимы на σ_k всюду, включая точку c_k, с обеих сторон от L; их граничные значения удовлетворяют условию H на σ_k, причем в точке c_k они равны нулю; на основании результатов § 26 то же самое можно сказать о последнем члене.

Поэтому из равенства (115,12) вытекает, что $\varphi_k'^+(t)$, $\varphi_k'^-(t)$ удовлетворяют на L условию H и, кроме того,

$$\varphi_k'^+(c_k)=\varphi^+(c_k), \quad \varphi_k'^-(c_k)=\varphi^-(c_k).$$

Из равенства же

$$\varphi'(z)=\frac{\varphi_k'(z)-\varphi(z)}{z-c_k}$$

заключаем, что $\varphi'^+(t)$ и $\varphi'^-(t)$ принадлежат классу H^* на σ_k (точкой разрыва является лишь c_k).

Так как под c_k мы можем подразумевать любую из точек a_k, b_k, очевидно, что $\varphi'^+(t)$ и $\varphi'^-(t)$ являются функциями класса H^* на L при узлах a_k, b_k, $k=1, 2, \ldots, p$. Далее, функция $\varphi'(z)$, очевидно, стремится равномерно к своим пределам $\varphi'^+(t)$ и $\varphi'^-(t)$, когда точка z приближается к точке t на L слева или справа, если считать, что эта точка не находится на дугах, вырезаемых из L окружностями сколь угодно малого радиуса с центрами в точках a_k, b_k. Поэтому легко видеть, что в точках, отличных от a_k, b_k, $\varphi'^+(t)=\varphi^{+\prime}(t)=\frac{d\varphi^+}{dt}$, $\varphi'^-(t)=$ $=\varphi^{-\prime}(t)=\frac{d\varphi^-}{dt}$ и что $\varphi^{+\prime}(t)$ и $\varphi^{-\prime}(t)$ принадлежат классу H^* на L, а следовательно, и функция $\omega'(t)=\varphi^{+\prime}(t)-\varphi^{-\prime}(t)$ принадлежит классу H^* на L.

Из предыдущего следует, что функция $\psi(z)$, определяемая второй формулой (113,11), может быть представлена в виде (113,11a). Отсюда в свою очередь вытекает, что для всех точек t, отличных от узлов, существует граничное значение $\psi^+(t)$ и что оно принадлежит классу H^*.

Из доказанных выше свойств функции $\omega(t)$ вытекает также справедливость формулы (113,11b).

Переходя теперь к выражениям

$$\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}, \quad -\varkappa\varphi(z)+z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}, \tag{115,13}$$

граничные значения которых фигурируют в условиях (113,9), мы можем утверждать еще большее, а именно, что они непрерывно продолжимы на все точки границы и что их граничные значения принадлежат классу H. В самом деле, это уже доказано для первых слагаемых, содержащих $\varphi(z)$. Рассмотрим теперь сумму $z\overline{\varphi'(z)}+\overline{\psi(z)}$ или, что все равно, сопряженное с ней выражение $\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)$. На основании формул (113,11a), (113,11b) имеем:

$$\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)=-\frac{\varkappa}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\overline{\omega(t)}\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{(\bar{z}-\bar{t})\,\omega'(t)\,dt}{t-z}.$$

Первое слагаемое в правой части обладает требуемым свойством. Обозначая, далее, через c какую-либо из точек a_k, b_k, имеем:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{(\bar{z}-\bar{t})\,\omega'(t)\,dt}{t-z}=\frac{\bar{z}-\bar{c}}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\omega'(t)\,dt}{t-z}+\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{(\bar{c}-\bar{t})\,\omega'(t)\,dt}{t-z},$$

после чего наше утверждение становится очевидным, если учесть, что $\omega'(t)$ принадлежит классу H^*.

Итак, если $\omega(t)$ есть решение класса h_{2p} уравнения (113,12) при надлежащем подборе постоянных C_k, то выражения (115,13) непрерывно продолжимы на все точки границы и их граничные значения удовлетворяют условиям (113,9), так что функции $\varphi(z)$, $\psi(z)$, определенные при помощи $\omega(t)$ формулами (113,11), дают решение задачи[1]).

Однако в процессе доказательства существования решения $\omega(t)$ при надлежащем подборе постоянных C_k и доказательстве самой возможности такого подбора мы воспользовались теоремами единственности, основанными на применении интегральной формулы (113,8).

Теперь нам следует доказать применимость этой формулы при тех условиях, которые мы приняли.

С этой целью необходимо исследовать поведение функции $\varphi''(z)$, а также выражения $d\,[\bar{z}\varphi'(z)+\psi(z)]$, вблизи границы, считая, что $f(t)=0$, так как мы применили формулу (113,8) только при этом предположении.

Итак, мы будем считать, что $f(t)=0$. Тогда в силу того, что $\omega'(t)$ принадлежит классу H^*, и в силу сказанного в начале этого параграфа функции $g(t)$, $g'(t)$ и $g''(t)$ принадлежат классу H_0.

Из формулы (115,12) непосредственно вытекает тогда, что

$$|\varphi'(z)|=\left|\frac{\varphi_k'(z)-\varphi(z)}{z-c_k}\right|<\frac{\text{const}}{|z-c_k|^{\frac{1}{2}}}$$

в окрестности точки c_k, откуда, очевидно, следует, что

$$|\varphi'(z)|<\frac{\text{const}}{|\Pi(z)|^{\frac{1}{2}}} \tag{115,14}$$

в окрестностях всех узлов, где для краткости положено

$$\Pi(z)=\prod_{k=1}^{p}(z-a_k)(z-b_k). \tag{115,15}$$

Рассмотрим теперь функцию

$$\varphi_1(z)=\frac{d}{dz}[\Pi(z)\,\varphi(z)]. \tag{115,16}$$

На основании предыдущего ясно, что функция $\varphi_1(z)$ является решением класса h_{2p} граничной задачи

$$\varphi_1^+(t)=G(t)\,\varphi_1^-(t)+g_1(t), \tag{115,17}$$

где

$$g_1(t)=\frac{d}{dt}[\Pi(t)\,g(t)]. \tag{115,18}$$

Таким образом, $\varphi_1(z)$ является решением такой же граничной задачи, какую мы имели для $\varphi(z)$ при таких же условиях относительно свободного члена. Разница лишь та, что $\varphi_1(z)$ может иметь порядок $2p-1$

---

[1]) При решении смешанной задачи мы заменили задание внешних напряжений X_n, Y_n на L заданием (с точностью до постоянных слагаемых) граничных значений выражения (113,5). Это вполне оправдано с механической точки зрения.

на бесконечности, но это, как легко видеть, не влияет на результат. Поэтому, в частности, мы будем иметь оценку

$$|\varphi_1'(z)| < \frac{\mathrm{const}}{|\Pi(z)|^{\frac{1}{2}}},$$

из которой можно получить оценку для $\varphi''(z)$. А именно, имеем:

$$\Pi(z)\varphi''(z) = \varphi_1'(z) - 2\varphi'(z)\Pi'(z) - \varphi(z)\Pi''(z),$$

откуда следует оценка

$$|\varphi''(z)| < \frac{\mathrm{const}}{|\Pi(z)|^{\frac{3}{2}}}.$$

Эта и аналогичные оценки, вывод которых мы предоставляем читателям, позволяют строго обосновать все заключения § 113.

Аналогичные оценки можно получить для задачи, рассмотренной в § 114. В этом случае координаты x, y точки t линии L имеют по условию производные третьего порядка класса $H(1)$. При помощи рассуждений, подобных предыдущим, можно показать, что при этом условии имеем оценку

$$|\varphi'''(z)| < \frac{\mathrm{const}}{|\Pi(z)|^{\frac{5}{2}}}$$

и другие аналогичные оценки, позволяющие строго обосновать все заключения, что мы предоставляем читателю.

V. Краткие сведения относительно некоторых других результатов

В этом отделе мы даем краткие указания относительно ряда важных результатов, тесно связанных с результатами, изложенными в настоящей главе, на которых мы не имеем возможности остановиться более подробно, оставаясь в намеченных рамках книги.

Результаты эти касаются, во-первых, расширения классов допустимых функций как задаваемых, так и искомых (§ 116); во-вторых, линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений определенного вида (§ 117).

К сожалению, мы не имеем возможности хотя бы вкратце коснуться важного вопроса о методах приближенного решения и поэтому ограничиваемся указанием некоторых работ в этом направлении: М. А. Лаврентьев [2], А. И. Каландия [5], [6], В. В. Иванов [1] — [5], И. Д. Софронов [1], [2], L. Berg [1], R. C. MacCamy [1].

Обзор работ по методам приближенного решения сингулярных интегральных уравнений читатель может найти в статье В. В. Иванова [6].

§ 116. О расширении классов допустимых функций. 1°. В этой книге решение сингулярных интегральных уравнений мы ищем в классе H^*. Напомним, что функция $\varphi(t)$, принадлежащая этому классу, характеризуется следующими свойствами: a) в окрестностях конечного числа точек (узлов) c она имеет вид $\varphi(t) = \varphi_*(t)(t-c)^{-\gamma}$, где $\varphi_*(t)$ принадлежит в окрестности точки c классу H_0, а $\gamma = \mathrm{const}$, $0 \leqslant \operatorname{Re}\gamma < 1$; b) на каждой закрытой части линии L, не содержащей узлов, она удовлетворяет условию H. Мы остановились на этом классе функций потому, что, во-первых, в большинстве задач прикладного характера вполне достаточно ограничиться функциями этого класса, а во-вторых, ограничиваясь классом H^*, удается построить всю теорию сингулярных интегральных уравнений, не прибегая к интегралам Лебега.

Представляет определенный интерес расширение класса рассматриваемых сингулярных интегральных уравнений, а также, в особенности, расширение класса искомых решений. В этом направлении ряд интересных результатов содержится в работах С. Г. Михлина [1] — [7], в которых рассмотрен следующий класс сингулярных интегральных уравнений нормального типа:

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}+V\varphi=f(t_0), \tag{116,1}$$

где свободный член $f(t)$ и решение $\varphi(t)$ принадлежат функциональному пространству $\mathscr{L}_2(L)$, V — вполне непрерывный оператор в $\mathscr{L}_2(L)$, L — замкнутый контур, имеющий ограниченную кривизну. Особо следует отметить, что в работе [6] С. Г. Михлин построил общую теорию сингулярных интегральных уравнений вида (116,1) в том случае, когда от коэффициентов $A(t)$, $B(t)$ требуется лишь непрерывность.

Ясно, что класс H^* не является подклассом $\mathscr{L}_2(L)$, так как если функция принадлежит этому последнему классу, то в узлах она может обращаться в бесконечность только порядка ниже половины [1]). Следовательно, если заменить класс H^* классом $\mathscr{L}_2(L)$, этим существенно расширяется свойство b) класса H^* (см. начало этого пункта), но зато также существенно суживается, в определенном смысле, свойство a). Это последнее обстоятельство в ряде случаев значительно снижает общность решения. Например, в случае разомкнутых контуров предположение, что решение суммируемо с квадратом, заставляет налагать искусственные условия на коэффициенты уравнений. Кроме того, если ограничиться функциями класса $\mathscr{L}_2(L)$, то в ряде задач даже прикладного характера (например, в задачах теории упругости) можно иногда потерять наиболее существенные решения.

Из сказанного вытекает, что если мы хотим получить эффективное расширение результатов, изложенных в этой книге, в смысле расширения классов допустимых решений, следует взять по крайней мере такой класс решений, который охватывает класс H^*. Довольно общим классом такого типа является, например, класс функций, суммируемых с p-й степенью, где $p>1$, или, что в нашем случае представляется более целесообразным, класс $\mathscr{L}_p(\rho;\,L)$ (см. § 27). В этом последнем классе функций сингулярные интегральные уравнения изучены Б. В. Хведелидзе [5] — [7], [9] — [11], [15], [18]. В названных работах, в частности, дано доказательство обобщенных теорем Нетера (для случая уравнения (116,1)) при довольно общих предположениях как относительно задаваемых, так и относительно искомой функций. Приведем формулировку этого результата. Пусть L — конечная совокупность простых взаимно непересекающихся замкнутых или разомкнутых дуг Ляпунова. Пусть функции $A(t)$, $B(t)$ непрерывны всюду на L, кроме, быть может, конечного числа точек, в которых они могут иметь разрывы первого рода, причем $A^2(t)-B^2(t)\neq 0$ всюду на L. Пусть

$$G(t)=\frac{A(t)-B(t)}{A(t)+B(t)}$$

[1]) А не ниже единицы, как это допустимо для функции класса H^*.

и пусть $c_1, c_2, \ldots, c_m$ — все концы линии L и точки разрыва функции $G(t)$. Введем обозначение

$$\alpha_k = n_k - \frac{1}{2\pi} \arg \frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}, \tag{116,2}$$

где

$$n_k = \begin{cases} \frac{1}{2\pi} \arg \frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}, & \text{если } \frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)} \text{ — положительная величина,} \\ \left[\frac{1}{2\pi} \arg \frac{G(c_k-0)}{G(c_k+0)}\right] + 1 & \text{в остальных случаях}^{1)}. \end{cases} \tag{116,3}$$

Если c_k — один из концов линии L, то в (116,2) и (116,3) надо взять в случае начальной точки $G(c_k-0)=1$, а в случае конечной — $G(c_k+0)=1$. Ясно, что $0 \leqslant \alpha_k < 1$. Пусть, наконец,

$$\rho(t) = \prod_{k=1}^{m} |t-c_k|^{\alpha_k(p-1)}. \tag{116,4}$$

Рассмотрим теперь уравнение (116,1), в котором коэффициенты $A(t)$, $B(t)$ удовлетворяют указанным выше условиям, свободный член $f(t)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_p(\rho; L)$, где $p>1$, функция $\rho(t)$ определена равенством (116,4), V — вполне непрерывный оператор в $\mathcal{L}_p(\rho; L)$, а решение $\varphi(t)$ разыскивается в том же классе $\mathcal{L}_p(\rho; L)$. Тогда имеют место следующие утверждения (см. Б. В. Хведелидзе [18]): I) необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения (116,1) заключается в том, чтобы

$$\int_L f(t)\,\psi_j(t)\,dt = 0, \quad j=1, 2, \ldots, k',$$

где $\psi_j(t)$, $j=1, 2, \ldots, k'$, — полная система линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения[2])

$$A(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B(t)\,\psi(t)}{t-t_0}\,dt + \mathrm{V}^*\psi = 0 \tag{116,5}$$

в классе $\mathcal{L}_q(\rho^{1-q}; L)$, где $q=p(p-1)^{-1}$; II) если k — число линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (116,1) в классе $\mathcal{L}_p(\rho; L)$, k' — число линейно независимых решений сопряженного однородного уравнения (116,5) в классе $\mathcal{L}_q(\rho^{1-q}; L)$, то

$$k-k' = \sum_{j=1}^{m} n_j,$$

где n_j — целые числа, определяемые формулой (116,3).

При дальнейшем расширении класса допустимых функций для коэффициентов $A(t)$, $B(t)$ доказательство указанных выше теорем наталкивается на серьезные трудности (см., например, И. Н Карцивадзе [3]).

Наконец, отметим еще один из результатов, представляющий большой интерес с точки зрения затрагиваемых в настоящей книге вопросов. Б. В. Хведелидзе показал, что рассматриваемые в этой главе сингулярные интегральные уравнения (т. е. уравнения (96,11), (96,12)) имеют одни

---

[1]) Символ $[x]$ обозначает целую часть числа x.

[2]) V* — оператор, сопряженный с оператором V; в работе Б. В. Хведелидзе [18] сопряженный оператор определен так, что он совпадает с союзным в рассматриваемых в этой книге случаях.

и те же решения как в классе H^*, так и в классе $\mathcal{L}_p$ (ρ; L). Дело в том, что, налагая заранее те или иные условия на искомые функции, мы не можем без дополнительных исследований поручиться, что этим самым мы не потеряем решений, представляющих интерес для данного вопроса. Поэтому всегда желательно, чтобы ограничения, налагаемые на искомые решения, были как можно менее стеснительны. Кроме того, вышеупомянутый результат Б. В. Хведелидзе показывает, что для рассматриваемых в этой книге сингулярных интегральных уравнений класс H^* для искомых решений является целесообразно подобранным классом.

2°. При построении общей теории мы рассматривали лишь сингулярные интегральные уравнения, принадлежащие нормальному типу, т. е. такие, что функции $S(t) = A(t) + B(t)$ и $D(t) = A(t) - B(t)$ не обращаются в нуль нигде на L. Свойства уравнений, не принадлежащих нормальному типу, существенно отличаются от свойств уравнений нормального типа, и пока мы не имеем более или менее законченной теории таких уравнений. Однако в этом направлении уже имеется ряд интересных результатов. Из работ, содержащих такие результаты, назовем работы Д. И. Шермана [6], [7], [9]. В этих работах рассмотрен один новый способ регуляризации (в случае, когда L — простой замкнутый гладкий контур), пригодный при некоторых дополнительных предположениях и тогда, когда из двух функций $S(t)$ и $D(t)$ лишь одна отлична от нуля всюду на L, а другая имеет нули в конечном числе точек[1]).

В этой связи представляет интерес также работа И. Ц. Гохберга [3], в которой показано, что условие $S(t)D(t) \neq 0$ на L необходимо и достаточно для того, чтобы сингулярное интегральное уравнение допускало регуляризацию с помощью ограниченного линейного оператора в функциональном пространстве Гильберта.

Недавно опубликована работа Ф. Д. Гахова [13], в которой исследуется случай, когда $A(t) \pm B(t) \equiv 0$.

3°. Предполагая, что L представляет собой конечную совокупность взаимно непересекающихся простых замкнутых или разомкнутых дуг Ляпунова, Б. В. Хведелидзе [18], [19] с помощью развития применяемых в этой книге методов показал, что справедливость результатов, изложенных в §§ 97, 98, можно обосновать и в том случае, когда функции $A(t)$, $B(t)$ в уравнениях (97,1), (98,1) кусочно-непрерывны, $A(t) + B(t)$, $A(t) - B(t)$ отличны от нуля всюду на L, а правая часть и искомые решения принадлежат классу $\mathcal{L}_p$ (ρ; L), где $p > 1$, а $\rho(t)$ — некоторая функция вида (27,3).

Аналогичный, но более частный результат другим методом получен также в работе F. Tricomi [4].

Случай, когда $A + B$ или $A - B$ имеют на линии L нули порядков ниже первого, рассмотрен Н. П. Векуа [18], Б. В. Хведелидзе [18] и А. Э. Драчинским [1], а для целых порядков — Л. А. Чикиным [1] и Ф. Д. Гаховым [10].

Обобщения результатов, изложенных в §§ 97, 98, на случай довольно общего класса негладких линий L даны в работах Т. Г. Гегелиа [1], [2].

В ряде работ, появившихся за последнее время, рассмотрены некоторые уравнения, отличные от характеристических сингулярных уравнений, допускающие решение в замкнутой форме (в квадратурах). Эти результаты изложены в книге Ф. Д. Гахова [10], гл. VII второго издания.

---

[1]) Обобщение этого результата дано в статьях А. Е. Косулина [1] и З. Пресдорфа [2].

§ 117. О некоторых сингулярных интегро-дифференциальных уравнениях. Многие задачи, имеющие важное прикладное значение, приводятся к сингулярному интегро-дифференциальному уравнению вида

$$\sum_{r=0}^{m}{}' \left[a_r(t_0)\,\varphi^{(r)}(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_r(t_0, t)\,\varphi^{(r)}(t)\,dt}{t - t_0} \right] = f(t_0), \tag{117,1}$$

где $a_r(t)$, $K_r(t_0, t)$, $f(t)$ — заданные функции, $\varphi^{(r)}(t)$ обозначает производную порядка r искомой функции $\varphi(t)$, причем $\varphi^{(0)}(t) = \varphi(t)$.

Частным случаем этого уравнения является интегро-дифференциальное уравнение Прандтля (уравнение теории крыла самолета), исследованию и решению которого посвящено большое число работ, в частности работы И. Н. Векуа [9] и Л. Г. Магнарадзе [1], тесно связанные с излагаемыми в этой книге методами.

Уравнение вида (117,1) рассмотрел впервые Л. Г. Магнарадзе [2], [3]. Допуская, что $a_r(t)$, $f(t)$, $K_r(t_0, t)$ — заданные достаточное число раз дифференцируемые функции, а L — простой замкнутый в достаточной степени регулярный контур, Л. Г. Магнарадзе сводит уравнение (117,1) к эквивалентному сингулярному или регулярному интегральному уравнению.

Уравнение вида (117,1), когда L — замкнутый гладкий контур, а $a_r(t)$, $f(t)$, $K_r(t_0, t)$ — функции класса H, рассмотрено Ю. М. Крикуновым [1], [2], [3]. Вводя исчезающую на бесконечности кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ по формуле

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - z},$$

он сводит уравнение (117,1) к задаче вида (81,1). Вследствие того, что при рассмотрении этой задачи Ю. М. Крикунов пользуется интегральным представлением, содержащим значения искомой функции и ее производных в точке $z = 0$, расположенной внутри контура L, он ищет решение уравнения (117,1), удовлетворяющее условиям

$$\int_L \varphi(t)\,t^{-k-1}\,dt = r_k, \quad k = 0, 1, \ldots, m-1, \tag{117,2}$$

где r_k — заданные постоянные. Им показано, что нахождение упомянутых решений уравнения (117,1) равносильно решению некоторого сингулярного интегрального уравнения, содержащего в правой части постоянные r_k.

Недавно Н. П. Векуа [28] указал один простой способ приведения уравнения (117,1) к сингулярному интегральному уравнению. Этот способ заключается в следующем.

Будем пока предполагать, что $L = ab$ — разомкнутый гладкий контур. Введя обозначение

$$\varphi^{(m)}(t) = \mu(t),$$

будем иметь:

$$\varphi^{(k)}(t) = \int_L \omega_{m-k-1}(t, t_1)\,\mu(t_1)\,dt_1 + \frac{C_1 t^{m-k-1}}{(m-k-1)!} + \ldots + C_{m-k}, \tag{117,3}$$

где

$$\omega_0(t, t_1) = 1, \text{ если } t_1 \in at,$$
$$\omega_0(t, t_1) = 0, \text{ если } t_1 \overline{\in} at,$$
$$\omega_{k-1}(t, t_1) = \int\limits_L \omega_0(t, t_2)\,\omega_{k-2}(t_2, t_1)\,dt_2, \quad k = 2, 3, \ldots, m,$$

$C_1, C_2, \ldots, C_m$ — произвольные постоянные.

Подставляя эти значения в (117,1), получим сингулярное интегральное уравнение относительно $\mu(t)$ вида

$$\mathbf{K}\mu \equiv a_m(t_0)\,\mu(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_m(t_0, t)\,\mu(t)\,dt}{t - t_0} + \int\limits_L k(t_0, t)\,\mu(t)\,dt =$$
$$= f(t_0) - \sum_{k=1}^{m} C_k \chi_k(t_0), \quad (117{,}4)$$

где

$$k(t_0, t) = \sum_{k=0}^{m-1} a_k(t_0)\,\omega_{m-k-1}(t_0, t) + \sum_{k=0}^{m-1} \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_k(t_0, \tau)\,\omega_{m-k-1}(\tau, t)}{\tau - t_0}\,d\tau,$$

а $\chi_k(t_0)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, — определенные функции, значение которых легко выписать. Отсюда вытекает следующий результат:

Если для каких-нибудь значений постоянных C_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, функция $\mu(t)$ является решением уравнения (117,4), то функция $\varphi(t)$, определенная по формуле (117,3), дает решение исходного уравнения (117,1). Очевидно, что и наоборот, если $\varphi(t)$ — решение уравнения (117,1), то $\varphi^{(m)}(t) = \mu(t)$ дает решение уравнения (117,4) (разумеется, для определенных значений постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_m$).

Используя приведенные выше результаты, Н. П. Векуа [31] дает решение задачи Коши для сингулярного интегро-дифференциального уравнения вида (117,1).

Этот способ, очевидно, можно применить и в том случае, когда L — замкнутый гладкий контур, однако в этом случае следует обратить внимание на то, что функции $\varphi^{(k)}(t)$, $k = 0, 1, \ldots, m-1$, определенные через $\varphi^{(m)}(t) = \mu(t)$ формулами (117,3), вообще говоря, могут быть неоднозначными; поэтому при помощи решения уравнения (117, 4) можно получить и такие решения уравнения (117, 1), которые допускают разрывы первого рода в некоторой фиксированной точке контура L. Но, как легко видеть, при помощи решения уравнения (117,4) всегда можно получить однозначные непрерывные решения уравнения (117,1), если такие решения существуют.

Аналогичный результат имеет место относительно уравнения вида

$$\sum_{r=0}^{m} \left\{ a_r(t_0)\,\varphi^{(r)}(t_0) + b_r(t_0)\,\overline{\varphi^{(r)}(t_0)} + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{K_r(t_0, t)\,\varphi^{(r)}(t)\,dt}{t - t_0} + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{M_r(t_0, t)\,\overline{\varphi^{(r)}(t)}\,dt}{t - t_0} \right\} = f(t_0),$$

где $\overline{\varphi^{(k)}(t)}$ — функция, комплексно-сопряженная с $\varphi^{(k)}(t)$.

Р. С. Исахановым [1] рассмотрено уравнение (117,1) в случае замкнутого контура[1]). Так же как Ю. М. Крикунов, он сводит уравнение к задаче вида (81,1), но в отличие от этого автора он не налагает на решение уравнения (117,1) дополнительных условий (117,2). Им показано, что всякое решение уравнения (117,1) можно представить формулой

$$\varphi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L Q(t_0, t)\,\mu(t)\,dt, \tag{117,5}$$

где $Q(t_0, t)$ — определенная функция, а $\mu(t)$ — решение сингулярного интегрального уравнения вида

$$K\mu \equiv \frac{a_m(t_0)}{t_0^m}\mu(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_m(t_0, t)\,\mu(t)\,dt}{t^m(t-t_0)}+\int_L k(t_0, t)\,\mu(t)\,dt=f(t_0).$$

Р. С. Исаханов [4] показал также, что если функции

$$\frac{d^r a_r(t)}{dt^r},\quad \frac{\partial^r K_r(t_0, t)}{\partial t_0^k\,\partial t^{r-k}},\quad r=0,\ 1,\ \ldots,\ m;\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ r,$$

$$\frac{\partial^m}{\partial t^m}\left[\frac{K_m(t_0, t)-K_m(t_0, t_0)}{t-t_0}\right]$$

удовлетворяют условию H на L, то для уравнения (117,1) имеют место теоремы, аналогичные теоремам Нетера, в которых в качестве уравнения, союзного с (117,1), выступает уравнение

$$\sum_{r=0}^{m}(-1)^r\left\{[a_r(t_0)\,\psi(t_0)]^{(r)}+\frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\left(\frac{\partial}{\partial t_0}+\frac{\partial}{\partial t}\right)^r K_r(t, t_0)\,\psi(t)}{t-t_0}\,dt\right\}=0.$$

В работах Н. П. Векуа [34] и К. И. Кванталиани [1] изучены некоторые классы сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, зависящих от малого параметра.

Н. П. Векуа [35] рассмотрел также одну дифференциальную граничную задачу линейного сопряжения с малым параметром при старших производных.

---

[1]) Относительно некоторых результатов в случае, когда L есть совокупность разомкнутых контуров, а также в случае разрывных коэффициентов см. Р. С. Исаханов [2], [3].

ГЛАВА ШЕСТАЯ

СИСТЕМЫ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ И ЗАДАЧА СОПРЯЖЕНИЯ ДЛЯ НЕСКОЛЬКИХ НЕИЗВЕСТНЫХ ФУНКЦИЙ

Эта глава посвящена обобщению результатов, касающихся сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши и задачи сопряжения, на случай нескольких неизвестных функций. При этом мы рассматриваем лишь случай замкнутых контуров и непрерывных коэффициентов, ограничиваясь указанием на литературу относительно других, более общих случаев.

Если удовлетвориться определением индекса системы сингулярных интегральных уравнений как разности между числом решений данной однородной системы и числом решений союзной системы, то перенесение основных теорем, касающихся одного сингулярного уравнения, на случай системы может быть осуществлено почти автоматически путем введения целесообразных обозначений, что и сделано фактически ниже, в отделе I настоящей главы.

Не так обстоит дело относительно вывода формулы, дающей явное выражение индекса. Эта формула, как и в случае одного уравнения, связана с решением соответствующей задачи сопряжения.

В противоположность случаю одной неизвестной функции задача сопряжения для нескольких неизвестных функций не решается в замкнутом виде, если, конечно, иметь в виду общий случай.

Решению задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций посвящен отдел II настоящей главы. При этом решении существенно используются результаты, полученные в отделе I относительно систем сингулярных интегральных уравнений. Наконец, в отделе III результаты, полученные относительно задачи сопряжения, используются в свою очередь для более детального изучения систем сингулярных интегральных уравнений[1]).

I. Системы сингулярных интегральных уравнений

Как было только что сказано, обобщение основных теорем, касающихся одного сингулярного интегрального уравнения (имеются в виду теоремы, доказанные в главе II), на случай системы таких уравнений может быть осуществлено весьма просто.

Это обобщение дано в §§ 119, 120, представляющих собой воспроизведение, без каких-либо существенных изменений, моей статьи [7] с учетом дополнения к ней [8].

---

[1]) В первом издании настоящей книги порядок и способ изложения были иными. А именно, сначала была решена задача сопряжения для нескольких неизвестных функций, независимо от теории систем сингулярных уравнений, при помощи приведения задачи к уравнениям Фредгольма, как это делает И. Племель (см. об этом в § 122), а затем уже изложена теория систем сингулярных интегральных уравнений.

Во втором издании был применен значительно более простой способ, который и воспроизводится без изменений в настоящем издании.

Из работ, предшествовавших упомянутой моей статье, следует в первую очередь назвать работу, выполненную Н. П. Векуа, о которой будет сказано ниже (§ 136), и статью Ж. Жиро (G. Giraud [2]), в которой он дает построение регуляризирующего оператора, совпадающего по существу с тем, который будет указан ниже, в § 119 [1]), но несколько менее общего, и доказывает теорему, совпадающую с теоремой 1 § 120 [2]).

§ 118. Некоторые обозначения и термины [3]). 1°. В дальнейшем нам придется иметь дело с совокупностями n функций $\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n$, заданных на некоторых линиях или в некоторых областях. Такую совокупность функций мы будем называть в е к т о р о м и обозначать одной буквой, например, Φ; мы будем писать

$$\Phi = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n) \tag{118,1}$$

и называть $\Phi_1, \ldots, \Phi_n$ к о м п о н е н т а м и вектора Φ.

Рассмотрим линейную подстановку

$$\begin{gathered}\Psi_1 = A_{11}\Phi_1 + A_{12}\Phi_2 + \ldots + A_{1n}\Phi_n,\\ \Psi_2 = A_{21}\Phi_1 + A_{22}\Phi_2 + \ldots + A_{2n}\Phi_n,\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ \Psi_n = A_{n1}\Phi_1 + A_{n2}\Phi_2 + \ldots + A_{nn}\Phi_n\end{gathered}$$

или, короче,

$$\Psi_\alpha = \sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}\Phi_\beta, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{118,2}$$

где $A_{\alpha\beta}$ — функции, заданные на тех же линиях или в тех же областях, что и Φ. Подстановку (118,2) мы будем, как обычно, записывать кратко так:

$$\Psi = A\Phi, \tag{118,3}$$

где $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ и $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ обозначают векторы, а A — матрицу

$$A = \| A_{\alpha\beta} \| = \left\| \begin{matrix} A_{11} & A_{12} & \ldots & A_{1n} \\ A_{21} & A_{22} & \ldots & A_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ A_{n1} & A_{n2} & \ldots & A_{nn} \end{matrix} \right\| \tag{118,4}$$

с компонентами $A_{\alpha\beta}$ ($\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$). Определитель матрицы A мы будем обозначать через $\det A = \det \| A_{\alpha\beta} \|$. Если $\det A \neq 0$, то матрицу A мы будем называть н е о с о б е н н о й.

П р о и з в е д е н и е м д в у х в е к т о р о в $\Phi = (\Phi_1, \ldots, \Phi_n)$ и $\Psi = (\Psi_1, \ldots, \Psi_n)$ мы будем называть сумму $\Phi_1\Psi_1 + \ldots + \Phi_n\Psi_n$; это произведение, называемое иногда в н у т р е н н и м, мы будем

[1]) Этот оператор, определяемый формулами (119,20), (119,21) и представляющий наиболее общий вид регуляризирующего оператора, был указан в моей статье [7].

[2]) В цитированной работе Ж. Жиро имеется также ряд других результатов, одинаково относящихся как к случаю одного уравнения, так и к случаю системы. Эти результаты касаются главным образом зависимости решения от параметра λ; о них было упомянуто в § 59, п. 4°.

[3]) В этом параграфе мы отчасти повторяем некоторые определения, данные в § 110 (для частного случая $n = 2$, что, впрочем, несущественно).

обозначать через $\Phi\Psi$ или $\Psi\Phi$, так что

$$\Phi\Psi = \Psi\Phi = \Phi_1\Psi_1 + \Phi_2\Psi_2 + \ldots + \Phi_n\Psi_n. \qquad (118,5)$$

Произведением $C = AB$ двух матриц $A = \|A_{\alpha\beta}\|$ и $B = \|B_{\alpha\beta}\|$ мы будем, как обычно, называть матрицу $C = \|C_{\alpha\beta}\|$, где

$$C_{\alpha\beta} = \sum_{\gamma=1}^{n} A_{\alpha\gamma}B_{\gamma\beta} \quad (\alpha,\ \beta = 1,\ 2,\ \ldots,\ n).$$

Матрицу, получаемую из A заменой строк столбцами и обратно, мы будем называть транспонированной и обозначать через $A' = \|A'_{\alpha\beta}\|$, так что $A'_{\alpha\beta} = A_{\beta\alpha}$. Легко проверить, что для любых двух векторов Φ, Ψ имеем:

$$\Psi A\Phi = \Phi A'\Psi, \qquad (118,6)$$

где под $\Psi A\Phi$ подразумевается произведение векторов Ψ и $A\Phi$ (аналогично для правой части).

Напомним еще известные соотношения:

$$(AB)' = B'A', \qquad (118,7)$$

$$(AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}, \quad (A^{-1})' = (A')^{-1}; \qquad (118,8)$$

в формулах (118,8) предполагается, что матрицы A и B — неособенные, т. е. что их определители отличны от нуля. Вместо $(A')^{-1}$ мы будем часто писать A'^{-1}.

2°. Говоря, что некоторая матрица непрерывна, принадлежит классу H, кусочно-голоморфна, принимает определенное граничное значение, имеет конечный порядок на бесконечности и т. д., мы будем подразумевать, иногда не поясняя этого особо, что все ее компоненты удовлетворяют названным условиям. Аналогично обстоит дело для векторов.

3°. В дальнейшем (если противное не оговорено) под L подразумевается совокупность конечного числа гладких замкнутых контуров без общих точек, на которых выбраны определенные положительные направления.

§ 119. Основные определения и вспомогательные предложения[1]).

1°. Под системами сингулярных интегральных уравнений мы подразумеваем в дальнейшем системы уравнений следующего вида:

$$\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(t_0)\varphi_\beta(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \sum_{\beta=1}^{n} \frac{K_{\alpha\beta}(t_0,\ t)\varphi_\beta(t)\,dt}{t - t_0} = f_\alpha(t_0), \quad \alpha = 1,\ \ldots,\ n, \qquad (119,1)$$

где t_0, t — аффиксы точек на L, $A_{\alpha\beta}(t)$, $K_{\alpha\beta}(t_0,\ t)$, $f_\alpha(t)$ — заданные на L функции класса H, $\varphi_\alpha(t)$ — искомые функции, от которых мы будем требовать, чтобы они принадлежали классу H.

Обозначим через $\varphi(t)$ и $f(t)$ векторы с компонентами $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, … …, $\varphi_n(t)$ и $f_1(t)$, $f_2(t)$, …, $f_n(t)$:

$$\varphi(t) = (\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n), \quad f(t) = (f_1,\ f_2,\ \ldots,\ f_n), \qquad (119,2)$$

через $A(t)$ и $K(t_0,\ t)$ — матрицы с компонентами $A_{\alpha\beta}(t)$ и $K_{\alpha\beta}(t_0,\ t)$; кроме того, введем в рассмотрение матрицу $B(t) = K(t,\ t)$, так что

[1]) Ср. §§ 45, 46.

по определению

$$A(t)=\|A_{\alpha\beta}(t)\|,\quad B(t)=\|B_{\alpha\beta}(t)\|,\quad K(t_0,\ t)=\|K_{\alpha\beta}(t_0,\ t)\|,\tag{119,3}$$

причем

$$B_{\alpha\beta}(t)=K_{\alpha\beta}(t,\ t).\tag{119,4}$$

При указанных обозначениях система (119,1) может быть записана так:

$$\mathbf{K}\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{1}{\pi i}\int\limits_L\frac{K(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0)\tag{119,5}$$

или еще так:

$$\mathbf{K}\varphi\equiv\mathbf{K}^0\varphi+\mathbf{k}\varphi=f(t_0),\tag{119,6}$$

где

$$\mathbf{K}^0\varphi\equiv A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}$$

и

$$\mathbf{k}\varphi\equiv\frac{1}{\pi i}\int\limits_L k(t_0,\ t)\,\varphi(t)\,dt,\tag{119,7}$$

причем

$$k(t_0,\ t)=\frac{K(t_0,\ t)-K(t_0,\ t_0)}{t-t_0}=\frac{K(t_0,\ t)-B(t_0)}{t-t_0}.\tag{119,8}$$

Легко видеть, что

$$k(t_0,\ t)=\frac{k^*(t_0,\ t)}{|t-t_0|^{\alpha}},\quad 0\leqslant\alpha<1,\tag{119,9}$$

где $k^*(t_0,\ t)$ — матрица, принадлежащая классу H (т. е. матрица, компоненты которой удовлетворяют условию H).

Оператор $\mathbf{K}$ мы будем называть *сингулярным оператором с ядром типа Коши* или, короче, *сингулярным оператором*. Этот оператор переводит всякий вектор $\varphi(t)$ класса H в вектор $\mathbf{K}\varphi$, также принадлежащий классу H.

Оператор $\mathbf{K}^0$ мы будем называть *характеристической частью* оператора $\mathbf{K}$.

Уравнение $\mathbf{K}\varphi=f$ мы будем называть *сингулярным уравнением*; это уравнение выражает то же, что система уравнений (119,1), и в дальнейшем, смотря по удобству, мы будем одинаково применять термины «уравнение» и «система уравнений».

Уравнение $\mathbf{K}^0\varphi=f$ мы будем называть *характеристическим уравнением, соответствующим уравнению* $\mathbf{K}\varphi=f$.

Иногда мы будем рассматривать уравнения вида $\mathbf{K}^0\varphi=f$ самостоятельно и называть их просто *характеристическими уравнениями* или *характеристическими системами уравнений*.

Основными матрицами оператора $\mathbf{K}$ или $\mathbf{K}^0$, а также уравнений $\mathbf{K}\varphi=f$ или $\mathbf{K}^0\varphi=f$ мы будем называть матрицы

$$S=A+B,\quad D=A-B.\tag{119,10}$$

Если

$$\det S\neq 0,\quad \det D\neq 0\tag{119,11}$$

всюду на L, мы будем говорить, что оператор $\mathbf{K}$ или уравнение $\mathbf{K}\varphi = f$ — нормального типа. Во всем дальнейшем мы будем рассматривать лишь операторы нормального типа.

Если, в частности, $B(t) = 0$ и, следовательно, $S = D$, то уравнение $\mathbf{K}\varphi = f$ представляет собой обычную (квазирегулярную) систему уравнений Фредгольма (второго рода). Поэтому в случае $S = D$ мы будем называть оператор $\mathbf{K}$ фредгольмовым.

2°. Оператор $\mathbf{K}$ и оператор $\mathbf{K}'$, определяемый формулой

$$\mathbf{K}'\psi \equiv A'(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K'(t, t_0)\,\psi(t)\,dt}{t - t_0}, \tag{119,12}$$

мы будем называть союзными; в формуле (119,12) $A'(t_0)$ обозначает матрицу, получаемую из $A(t_0)$ транспонированием элементов, а $K'(t, t_0)$ — матрицу, получаемую из $K(t_0, t)$ одновременным транспонированием элементов и переменных t_0, t; так что если положим

$$A'(t) = \| A'_{\alpha\beta}(t) \|, \quad K'(t, t_0) = \| K'_{\alpha\beta}(t, t_0) \|,$$

то

$$A'_{\alpha\beta}(t) = A_{\beta\alpha}(t), \quad K'_{\alpha\beta}(t, t_0) = K_{\beta\alpha}(t, t_0).$$

Так же, как в § 46, легко устанавливается общая формула

$$\int_L \psi \mathbf{K}\varphi\, dt = \int_L \varphi \mathbf{K}'\psi\, dt, \tag{119,13}$$

где $\varphi = \varphi(t)$, $\psi = \psi(t)$ — произвольные векторы класса H.

3°. Перейдем к вопросу о композиции двух сингулярных операторов. Пусть

$$\mathbf{K}_1\varphi \equiv A_1(t_0)\,\varphi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_1(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt}{t - t_0}$$

и $\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad$ (119,14)

$$\mathbf{K}_2\psi \equiv A_2(t_0)\,\psi(t_0) + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{K_2(t_0, t)\,\psi(t)\,dt}{t - t_0}.$$

Обозначая через B_1, B_2, S_1, S_2, D_1, D_2 матрицы, связанные с операторами $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ так же, как матрицы B, S, D связаны с оператором $\mathbf{K}$, легко получаем, совершенно так же, как в § 45,

$$\mathbf{K}_1[\mathbf{K}_2\psi] \equiv \mathbf{K}^*\psi,$$

где $\mathbf{K}^*$ — сингулярный оператор такого же типа, что и операторы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$, а именно:

$$\mathbf{K}^*\psi \equiv [A_1(t_0)\,A_2(t_0) + B_1(t_0)\,B_2(t_0)]\,\psi(t_0) + \\ + \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{[A_1(t_0)\,K_2(t_0, t) + K_1(t_0, t)\,A_2(t)]\,\psi(t)\,dt}{t - t_0} + \\ + \frac{1}{(\pi i)^2}\int_L \left[\int_L \frac{K_1(t_0, t_1)\,K_2(t_1, t)\,dt_1}{(t_1 - t_0)(t - t_1)}\right]\psi(t)\,dt. \tag{119,15}$$

Различие с соответствующей формулой § 45 лишь в том, что здесь A_1, B_1, K_1, A_2, B_2, K_2 обозначают матрицы, и поэтому порядок сомножителей, фигурирующих в предыдущей формуле, не безразличен.

Оператор $\mathbf{K}^*$, получаемый композицией операторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ (в указанном порядке), мы будем обозначать через $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$:

$$\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2. \tag{119,16}$$

Обозначая через S^* и D^* основные матрицы оператора $\mathbf{K}^*$, получаем, совершенно так же, как в § 45,

$$S^* = S_1S_2, \quad D^* = D_1D_2. \tag{119,17}$$

Из этих формул следует, что оператор $\mathbf{K}^*$ — нормального типа, если, как мы предполагаем, операторы $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ — нормального типа, и что характеристическая часть оператора $\mathbf{K}^*$ вполне определяется характеристическими частями операторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$.

Из этих же формул следует, что если заданы характеристические части двух из трех операторов $\mathbf{K}_1$, $\mathbf{K}_2$, $\mathbf{K}^*$, то характеристическая часть третьего определяется однозначно. Например, если заданы характеристические части операторов $\mathbf{K}_2$ и $\mathbf{K}^*$, то для основных матриц оператора $\mathbf{K}_1$ получаем:

$$S_1 = S^*S_2^{-1}, \quad D_1 = D^*D_2^{-1}, \tag{119,18}$$

а соответствующие матрицы A_1 и B_1 даются формулами

$$A_1 = \frac{1}{2}[S^*S_2^{-1} + D^*D_2^{-1}], \qquad B_1 = \frac{1}{2}[S^*S_2^{-1} - D^*D_2^{-1}]. \tag{119,19}$$

В частности, *при заданном операторе* $\mathbf{K}_2$ *можно бесчисленным множеством способов так подобрать оператор* $\mathbf{K}_1$, *чтобы оператор* $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2 = \mathbf{K}^*$ *был фредгольмовым*. В самом деле, для этого необходимо и достаточно, чтобы $S^* = D^*$ и, следовательно,

$$S_1 = S^*S_2^{-1}, \qquad D_1 = S^*D_2^{-1}, \tag{119,20}$$

$$A_1 = \frac{1}{2}S^*(S_2^{-1} + D_2^{-1}), \quad B_1 = \frac{1}{2}S^*(S_2^{-1} - D_2^{-1}), \tag{119,21}$$

где S^* — произвольная матрица, удовлетворяющая на L условию H и такая, что $\det S^* \neq 0$ всюду на L. В частности, можно взять $S^* = D^* = E$, где E — единичная матрица, и тогда, как легко видеть, *оба оператора* $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ *и* $\mathbf{K}_2\mathbf{K}_1$ *будут фредгольмовыми*.

Индексом сингулярного оператора $\mathbf{K}$ или уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$ мы будем называть целое число

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln\det S^{-1}D]_L = \frac{1}{2\pi}\left[\arg\frac{\det(A-B)}{\det(A+B)}\right]_L. \tag{119,22}$$

Из этого определения вытекает, что индекс зависит лишь от характеристической части оператора $\mathbf{K}$, так что индекс оператора $\mathbf{K}^0$ есть в то же время индекс оператора $\mathbf{K}$.

Из формул (119,17) следует, что если $\varkappa'$ и $\varkappa''$ — индексы операторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$, то индекс $\varkappa^*$ оператора $\mathbf{K}^* = \mathbf{K}_1\mathbf{K}_2$ равен сумме $\varkappa'$ и $\varkappa''$,

$$\varkappa^* = \varkappa' + \varkappa''. \tag{119,23}$$

Индекс фредгольмова оператора равен, очевидно, нулю.

§ 120. Регуляризация системы сингулярных уравнений. Основные теоремы. Пусть дана система сингулярных уравнений (119,1), которую мы, как в предыдущем параграфе, представим в виде одного уравнения

$$\mathbf{K}\varphi = f. \tag{120,1}$$

Из сказанного в предыдущем параграфе мы знаем, что всегда можно подобрать, притом бесчисленным множеством способов, сингулярный оператор **M** такой, чтобы оператор **MK** был фредгольмовым. Оператор **M**, обладающий этим свойством, мы будем называть регуляризирующим оператор **K**. При этом не обязательно, чтобы и оператор **KM** был фредгольмовым[1]) (как было указано в предыдущем параграфе, **M** можно подобрать и так, чтобы оба оператора **MK**, **KM** были фредгольмовыми, но для излагаемых ниже результатов это несущественно).

Пусть **M** — какой-либо регуляризирующий оператор. Тогда все решения уравнения (120,1) будут в то же время решениями уравнения Фредгольма

$$\mathbf{MK}\varphi = \mathbf{M}f. \qquad (120,2)$$

Обратное заключение не всегда справедливо, и поэтому уравнение Фредгольма (120,2) не всегда эквивалентно исходному сингулярному уравнению. Однако, умея решать уравнение (120,2), можно всегда найти и общее решение исходного уравнения (120,1), совершенно так же, как это было показано в § 53.

Из предыдущего, в частности, непосредственно вытекает, что *число линейно независимых решений однородного уравнения* $\mathbf{K}\varphi = 0$ *конечно.*

Повторяя буквально рассуждения, приведенные в § 53 для случая одного уравнения[2]), приходим к следующим основным теоремам.

Теорема I. *Необходимое и достаточное условие разрешимости уравнения*

$$\mathbf{K}\varphi = f$$

заключается в том, чтобы

$$\int\limits_L f(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt = 0, \qquad (120,3)$$

где $\psi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, k'$, *— полная система линейно независимых решений однородного уравнения* $\mathbf{K}'\psi = 0$, *союзного с данным.*

Напомним, что в нашем случае

$$f = (f_1, \ldots, f_n), \quad \psi^\alpha = (\psi_1^\alpha, \ldots, \psi_n^\alpha)$$

— векторы и что

$$f\psi^\alpha = f_1\psi_1^\alpha + \ldots + f_n\psi_n^\alpha. \qquad (120,4)$$

Теорема II. *Разность числа* k *линейно независимых решений однородного уравнения* $\mathbf{K}\varphi = 0$ *и числа* k' *линейно независимых решений союзного однородного уравнения* $\mathbf{K}'\psi = 0$ *зависит лишь от характеристической части оператора* **K**.

Можно, далее, доказать следующую важную теорему.

Теорема III. *Упомянутая в теореме* II *разность равна индексу* $\varkappa$ *оператора* **K**, *т. е.*

$$k - k' = \varkappa. \qquad (120,5)$$

---

[1]) В случае одного сингулярного уравнения (§ 45), если **MK** — фредгольмов оператор, то и **KM** обладает этим свойством; в нашем же случае (когда мы имеем дело фактически с системами уравнений), это, не всегда имеет место; поэтому можно различать операторы, регуляризирующие данный оператор слева и справа.

[2]) При этом следует иметь в виду сказанное в § 110 относительно резольвенты системы уравнений Фредгольма.

Напомним, что согласно формуле (119,22)

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi i}[\ln\det(A-B)-\ln\det(A+B)]_L=$$
$$=\frac{1}{2\pi}[\arg\det(A-B)-\arg\det(A+B)]_L. \qquad (120,6)$$

Эта теорема будет доказана ниже, в § 135, причем при доказательстве будут существенно использованы результаты, касающиеся решения задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций, излагаемые в следующем отделе.

Замечание. Из того обстоятельства, что всякое решение сингулярного уравнения (120,1) является в то же время решением уравнения Фредгольма (120,2), вытекает, совершенно так же, как в замечании 3 к § 53, следующее заключение. Если взять на линии L конечное число точек $c_1, c_2, \ldots, c_n$, рассматривая их как узлы, и искать решение уравнения (120,1) не в классе H, а в более широком классе H^*, то это не расширит класса решений: все решения класса H^* будут необходимо принадлежать классу H.

II. Задача сопряжения для нескольких неизвестных функций

§ 121. Вспомогательные предложения. 1°. Пусть L по-прежнему обозначает линию, состоящую из конечного числа гладких замкнутых контуров, не имеющих общих точек; как всегда, предполагается, что на L выбрано определенное положительное направление.

Под кусочно-голоморфным вектором

$$\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$$

с линией скачков L мы будем понимать вектор, компоненты которого

$$\Phi_\alpha=\Phi_\alpha(z), \quad \alpha=1, 2, \ldots, n,$$

представляют собой кусочно-голоморфные функции с линией скачков L.

Если все эти функции имеют конечный порядок на бесконечности, то мы будем говорить, что вектор $\Phi(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности. *Порядком k на бесконечности* такого вектора мы будем называть наивысший из порядков компонентов Φ_α, $\alpha = 1, 2, \ldots, n$.

Если в окрестности бесконечно удаленной точки

$$\Phi_\alpha(z)=\gamma_\alpha(z)+O\left(\frac{1}{z}\right), \quad \alpha=1, 2, \ldots, n,$$

где $\gamma_\alpha(z)=\gamma_\alpha$ — полиномы, то вектор

$$\gamma(z)=(\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n)$$

мы будем называть *главной частью* вектора $\Phi(z)$ на бесконечности.

Хотя перенесение формул Сохоцкого — Племеля (§ 16) и результатов § 31 на случай, когда мы имеем дело с векторами, а не с обычными функциями, совершенно очевидно, мы все же воспроизведем здесь некоторые из этих формул и результатов для облегчения ссылок.

2°. Пусть $\varphi(t)$ — вектор, заданный на L и принадлежащий классу H, и пусть $\Phi(z)$ — кусочно-голоморфный вектор, определяемый формулой

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{121,1}$$

Тогда на основании формул Сохоцкого — Племеля будем иметь:

$$\begin{aligned}\Phi^+(t_0)&=\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\\ \Phi^-(t_0)&=-\frac{1}{2}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0},\end{aligned} \tag{121,2}$$

где на этот раз Φ и φ обозначают векторы. И в этом случае мы будем называть формулы (121,2) формулами Сохоцкого—Племеля.

3°. Пусть требуется определить кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z)$, имеющий конечный порядок на бесконечности, по условию

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \quad \text{на} \quad L, \tag{121,3}$$

где $\varphi(t)$ — заданный на L вектор класса H.

Решение дается формулой

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+\gamma(z), \tag{121,4}$$

где

$$\gamma(z)=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n)$$

— вектор, компонентами $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ которого являются произвольные полиномы. Вектор $\gamma(z)$ представляет собой главную часть вектора $\Phi(z)$ на бесконечности и, следовательно, вполне определен, если задана эта главная часть. В частности, если по условию $\Phi(\infty)=0$, то $\gamma(z)=0$.

4°. Результат предыдущего пункта сохраняет силу и в случае, когда линия L кусочно-гладкая, а вектор $\varphi(t)$ принадлежит классу H^*; в этом случае, разумеется, требуется, чтобы условие (121,3) было соблюдено в точках, отличных от узлов. В частности, сказанное относится и к случаю, когда линия L состоит из гладких замкнутых контуров, но вектор $\varphi(t)$ имеет разрывы в конечном числе точек, которые мы рассматриваем в качестве узлов.

5°. Пусть в условии (121,3) вектор $\varphi(t)$ лишь непрерывен, не принадлежа классу H. Тогда можно утверждать следующее (ср. § 31, п. 2): если существует кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z)$, имеющий конечный порядок на бесконечности и удовлетворяющий условию (121,3), то он дается формулой (121,4).

§ 122. Однородная задача сопряжения. Пусть по-прежнему L обозначает линию, состоящую из конечного числа гладких замкнутых контуров без общих точек.

Однородную задачу линейного сопряжения или, короче, однородную задачу сопряжения мы формулируем так:

Найти кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z)=(\Phi_1,\ \Phi_2,\ \ldots,\ \Phi_n)$ *с линией скачков* L*, имеющий конечный порядок на бесконечности, по* *граничному условию на* L

$$\Phi_\alpha^+(t) = G_{\alpha 1}(t_0)\Phi_1^-(t) + G_{\alpha 2}(t)\Phi_2^-(t) + \ldots + G_{\alpha n}(t)\Phi_n^-(t)$$

$$(\alpha = 1, \ldots, n)$$

или, короче,

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t), \tag{122,1}$$

где

$$G(t) = \| G_{\alpha\beta}(t) \|$$

— *матрица, заданная на* L, *принадлежащая классу* H *и нигде на* L *неособенная*, т. е. такая, что ее определитель $\det G(t) \neq 0$ всюду на L[1]).

Всюду в дальнейшем, говоря о решениях задачи (122,1), мы имеем в виду решения, отличные от тривиального решения $\Phi(z) = 0$.

Прежде чем приступить к решению этой задачи, скажем несколько слов о более общей задаче, когда функции $G_{\alpha\beta}(t)$ могут иметь разрывы первого рода в конечном числе точек.

К частному случаю такой задачи, а именно, к случаю, когда функции $G_{\alpha\beta}(t)$ кусочно-постоянны, приводит одна из основных задач аналитической теории линейных дифференциальных уравнений — задача построения системы линейных дифференциальных уравнений с рациональными коэффициентами и регулярными особыми точками с заранее заданной группой монодромии.

В указанном частном случае, т. е. когда функции $G_{\alpha\beta}(t)$ кусочно-постоянны, и именно в связи с только что упомянутой задачей теории линейных дифференциальных уравнений, однородная задача сопряжения (как мы ее называем) была впервые сформулирована Б. Риманом, не указавшим, однако, никаких способов ее решения (формулировка задачи содержится в кратком посмертном фрагменте B. Riemann [2]).

Впоследствии задача, поставленная Риманом (мы имеем в виду как однородную задачу сопряжения, так и соответствующую задачу теории дифференциальных уравнений), была предметом многочисленных важных исследований ряда авторов.

Однако для наших целей, т. е. для приложений к теории сингулярных интегральных уравнений, требуется решить задачу сопряжения в той постановке, как она дана в начале настоящего параграфа.

В этом, по существу, виде (но при значительно более ограничительных условиях) задача была поставлена и отчасти решена Д. Гильбертом (Götting. Nachrichten, 1905; воспроизведено в книге D. Hilbert [2], стр. 94—102). Решение, данное Д. Гильбертом, который приводит задачу к интегральным уравнениям Фредгольма, весьма сложно и его нельзя признать полным.

Полное (если не считать некоторых, легко восполнимых пробелов) и притом весьма остроумное решение было вскоре после этого дано И. Племелем[2]) (J. Plemelj [2]). Этот автор, так же как и Д. Гильберт, использует интегральные уравнения Фредгольма, но совершенно отличные от тех, которые строит Д. Гильберт; при построении своих уравнений И. Племель существенно использует свойства интегралов типа Коши.

---

[1]) Некоторые случаи нарушения условия $\det G(t) \neq 0$ рассмотрены в работах Ф. Д. Гахова [9] и Э. И. Зверовича и Г. С. Литвинчука [1].

[2]) И. Племель решает задачу при более общих предположениях, чем Д. Гильберт, но при несколько менее общих, чем те, которые приняты нами.

Основным результатом И. Племеля является построение некоторой частной системы решений, которую мы называем канонической[1]) (см. § 126) и через которую непосредственно выражается общее решение задачи[2]).

Приводимое ниже решение однородной задачи сопряжения значительно проще, чем решение, данное И. Племелем. Упрощение достигается за счет того, что вместо приведения задачи к уравнениям Фредгольма, как это делает И. Племель, мы приводим ее к системе сингулярных интегральных уравнений, дающей возможность весьма просто установить существование системы решений, которую мы называем фундаментальной (см. § 125).

Более простым, чем у И. Племеля, является также построение канонической системы решений, после того как найдена фундаментальная система (§ 126).

§ 123. Приведение к системе сингулярных уравнений. Однородную задачу сопряжения (122,1), поставленную в предыдущем параграфе, легко свести к решению весьма простой системы сингулярных интегральных уравнений следующим образом.

Положим

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \quad \text{на} \quad L.$$

Тогда искомый кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z)$, имеющий по условию конечный порядок на бесконечности, представится следующим образом (§ 121, п. 5°):

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+\gamma(z), \tag{123,1}$$

где

$$\gamma(z)=(\gamma_1,\ \gamma_2,\ \ldots,\ \gamma_n)$$

— вектор, компоненты которого $\gamma_\alpha=\gamma_\alpha(z)$ — некоторые полиномы, представляющие собой главную часть $\Phi(z)$ на бесконечности. Таким образом. задача сводится к определению векторов $\varphi(t)$ и $\gamma(t)$.

Из самой постановки задачи следует, что вектор

$$\varphi(t)=(\varphi_1,\ \varphi_2,\ \ldots,\ \varphi_n)$$

должен быть непрерывным на L[3]), т. е. что его компоненты $\varphi_1 = \varphi_1(t), \ldots, \varphi_n=\varphi_n(t)$ должны быть непрерывными функциями t на L.

---

[1]) И. Племель называет эту систему фундаментальной; последний термин мы применяем в несколько ином смысле (см. § 125).

[2]) Следует отметить также работы Дж. Д. Биркгофа (G. D. Birkhoff [1], [2] и некоторые другие). Работы этого автора, опубликованные позднее работы И. Племеля (но выполненные независимо от нее), дают менее полное решение (вследствие значительных ограничений, налагаемых на линию L и матрицу G), но все же представляют интерес, так как содержат ряд результатов, позволяющих упростить изложение. Работы эти, в особенности работа [2], в которой автор решает задачу способом последовательных приближений, представляют интерес и по методу; этот метод при надлежащем обобщении и видоизменении может привести к достаточно полным результатам. Некоторые из таких обобщений и видоизменений намечены в заметке R. Garnier [1].

Достаточно полное решение задачи сопряжения методом последовательных приближений, совершенно отличным от метода Биркгофа, дано в работах Г. Ф. Манджавидзе [5], [6], Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе [1]; см. § 133.

[3]) Постановка задачи предполагает существование граничных значений $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ для всех точек линии L; поэтому $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ необходимо непрерывны; см. § 9.

Мы же предположим заранее, что $\varphi(t)$ принадлежит классу H; ниже будет показано (§ 128), что всякое решение нашей задачи необходимо удовлетворяет этому условию[1]).

Вычисляя, исходя из (123,1), по формулам Сохоцкого — Племеля (§ 121, п. 2°) граничные значения $\Phi^+(t_0)$, $\Phi^-(t_0)$ и внося их в соотношение (122,1), написав в нем t_0 вместо t, легко получаем:

$$A(t_0)\varphi(t_0)+\frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L\frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=f(t_0), \tag{123,2}$$

где для сокращения письма положено

$$A(t_0)=E+G(t_0),\quad B(t_0)=E-G(t_0), \tag{123,3}$$

$$f(t_0)=[G(t_0)-E]\,\gamma(t_0), \tag{123,4}$$

причем E обозначает единичную матрицу.

Уравнение (123,2) представляет собой простейшую систему сингулярных интегральных уравнений относительно компонентов $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ вектора φ, а именно, характеристическую систему, если считать, что правая часть задана, т. е. задан вектор $f(t_0)$.

Система эта — нормального типа, ибо определители основных матриц $S=A+B=2E$ и $D=A-B=2G$ не обращаются в нуль нигде на L; напомним, что по условию $\det G(t)\neq 0$ на L.

Вектор $f(t_0)$ содержит, однако, неопределенные заранее полиномы $\gamma_1(t_0), \gamma_2(t_0), \ldots, \gamma_n(t_0)$. Эти полиномы можно выбирать совершенно произвольно при единственном условии, чтобы система (123,2) была разрешима.

Условия же разрешимости системы (123,2) заключаются, как мы знаем (§ 120), в равенствах

$$\int\limits_L f(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt=0,\quad \alpha=1, 2, \ldots, k', \tag{123,5}$$

где $\psi^\alpha(t)$, $\alpha=1, 2, \ldots, k'$, — полная система линейно независимых решений однородной системы, союзной с (122,2).

Этим условиям вследствие произвольности полиномов $\gamma_1, \gamma_2, \ldots, \gamma_n$ можно, очевидно, удовлетворить бесчисленным множеством способов, и поэтому задача имеет бесчисленное множество решений.

§ 124. Некоторые свойства решений однородной задачи сопряжения. Прежде чем перейти к построению общего решения однородной задачи сопряжения, укажем некоторые свойства решений этой задачи, почти непосредственно вытекающие из самой постановки и из результатов предыдущего параграфа.

1°. Отметим, прежде всего, что если вектор

$$\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$$

— некоторое решение однородной задачи сопряжения (123,1), а $P=P(z)$ — произвольный полином, то и вектор

$$\Phi(z)P(z)=(\Phi_1P, \Phi_2P, \ldots, \Phi_nP)$$

---

[1]) Мы считаем, как было условлено, что матрица $G(t)$ принадлежит классу H.

будет также решением. Более общо, если векторы $\Phi^1(z)$, $\Phi^2(z)$, ..., $\Phi^m(z)$ — какие-либо m решений[1]), а $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., $P_m(z)$ — какие-либо полиномы, то и вектор

$$\Phi^1(z)P_1(z)+\Phi^2(z)P_2(z)+\ldots+\Phi^m(z)P_m(z)$$

будет решением.

Все это непосредственно следует из вида граничного условия (122,1).

2°. Пусть $\Phi(z)=(\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ — какое-либо решение однородной задачи сопряжения и пусть $\Phi(c)=0$ в некоторой точке c плоскости, не расположенной на L, т. е. $\Phi_1(c)=\Phi_2(c)=\ldots=\Phi_n(c)=0$. Тогда отношение

$$\Psi(z)=\frac{\Phi(z)}{z-c}=\left(\frac{\Phi_1(z)}{z-c}, \quad \frac{\Phi_2(z)}{z-c}, \ \ldots, \ \frac{\Phi_n(z)}{z-c}\right) \qquad (124,1)$$

также, очевидно, будет решением.

Предположим теперь, что точка c расположена на L. В этом случае, говоря, что решение $\Phi(z)$ обращается в нуль в точке c или что $\Phi(c)=0$, мы будем подразумевать, что $\Phi^+(c)=0$, $\Phi^-(c)=0$. Заметим, что одно из этих равенств влечет за собой другое в силу соотношения $\Phi^+(c)=G(c)\Phi^-(c)$ и в силу того, что $\det G(c)\neq 0$.

Пусть теперь $\Phi(z)$ — некоторое решение такое, что $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ принадлежат классу H[2]), и пусть $\Phi(c)=0$, где c — некоторая точка на L, в указанном только что смысле. Покажем, что и в этом случае вектор $\Psi(z)$ является решением, причем граничные значения $\Psi^+(t)$, $\Psi^-(t)$ принадлежат классу H всюду на L, включая точку c.

Наше утверждение будет, очевидно, доказано, если нам удастся доказать это последнее обстоятельство.

Прежде всего, легко видеть на основании сказанного в § 21, что вектор $\Psi(z)$ кусочно-голоморфен (при линии скачков L), причем точка c рассматривается как узел. Если, далее, положить, как в § 123, $\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t)$, то будем иметь для всех точек на L, отличных от c,

$$\psi(t)=\Psi^+(t)-\Psi^-(t)=\frac{\varphi(t)}{t-c}.$$

Но так как $\Phi^+(c)=\Phi^-(c)=0$, то $\varphi(c)=0$; так как, далее, функция $\varphi(t)$ принадлежит классу H, то, очевидно, функция $\psi(t)$ принадлежит классу H^*. Поэтому, как в § 123 (см. § 121, п. 4°),

$$\Psi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L\frac{\psi(t)\,dt}{t-z}+\gamma(z),$$

где $\gamma(z)$ — некоторый вектор с полиномиальными компонентами.

Отсюда следует, как в § 123, что $\psi(t)$ удовлетворяет уравнению (123,2), за исключением, быть может, точки c. Поэтому (см. замечание в конце § 120) функция $\psi(t)$ принадлежит классу H на L, если приписать ей надлежащее значение в точке c. Но тогда предыдущая формула показывает, что вектор $\Psi(z)$ непрерывно продолжим на все точки линии L

---

[1]) Мы обычно будем отмечать номера решений (векторов) верхними значками, нижними же — номера компонентов данного решения, так что, например,

$$\Phi^\beta=(\Phi_1^\beta, \Phi_2^\beta, \ldots, \Phi_n^\beta).$$

[2]) Ниже (§ 128) будет показано, что всякое решение обладает указанным свойством; но мы этим обстоятельством здесь не воспользуемся, так как оно еще не доказано нами.

(включая точку c) справа и слева и что граничные его значения принадлежат классу H, а это и доказывает наше утверждение.

3°. Докажем, наконец, следующее свойство решений однородной задачи сопряжения, имея в виду решения, принимающие граничные значения класса H^1)[1]: порядок на бесконечности любого отличного от нуля решения не ниже некоторого определенного числа.

Именно, легко видеть, что порядок любого решения $\Phi(z)$ нашей задачи не может быть ниже, чем $m = -k$, где k — число линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (123,2).

Действительно, если бы порядок на бесконечности решения $\Phi(z)$ был меньше, чем $(-k)$, то векторы

$$\Phi(z),\ z\Phi(z),\ \ldots,\ z^k\Phi(z)$$

были бы решениями однородной задачи сопряжения (122,1), исчезающими на бесконечности. Но тогда векторы

$$\varphi(t)=\Phi^+(t)-\Phi^-(t),\quad t\varphi(t),\quad t^2\varphi(t),\ \ldots,\ t^k\varphi(t)$$

составляли бы систему $k+1$ линейно независимых решений однородного уравнения, соответствующего уравнению (123,2)[2]. Но это невозможно, так как число линейно независимых решений этого уравнения равно k.

§ 125. Фундаментальная система решений. 1°. В дальнейшем нам часто придется иметь дело с системами n решений однородной задачи сопряжения (122,1), которые мы будем отличать верхними значками:

$$\begin{aligned}
&\Phi^1(z)=(\Phi_1^1,\ \Phi_2^1,\ \ldots,\ \Phi_n^1),\\
&\Phi^2(z)=(\Phi_1^2,\ \Phi_2^2,\ \ldots,\ \Phi_n^2),\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
&\Phi^n(z)=(\Phi_1^n,\ \Phi_2^n,\ \ldots,\ \Phi_n^n).
\end{aligned} \tag{125,1}$$

Матрицу

$$\|\Phi_\alpha^\beta\|=\left\|\begin{matrix}\Phi_1^1(z) & \Phi_1^2(z) & \ldots & \Phi_1^n(z)\\ \Phi_2^1(z) & \Phi_2^2(z) & \ldots & \Phi_2^n(z)\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ \Phi_n^1(z) & \Phi_n^2(z) & \ldots & \Phi_n^n(z)\end{matrix}\right\|, \tag{125,2}$$

столбцами которой служат векторы (решения) $\Phi^1(z)$, $\Phi^2(z)$, ..., $\Phi^n(z)$, мы будем называть матрицей данной системы решений.

Очевидно, что в силу граничного условия (122,1) имеет место следующее матричное соотношение:

$$\|\Phi_\alpha^\beta(t_0)\|^+=G(t_0)\,\|\Phi_\alpha^\beta(t_0)\|^-, \tag{125,3}$$

где значками $(^+)$ и $(^-)$ обозначены соответствующие граничные значения матрицы $\|\Phi_\alpha^\beta(z)\|$.

---

[1]) Ср. предыдущую сноску.

[2]) Функция $\varphi(t)$, соответствующая решению $\Phi(z)$, исчезающему на бесконечности, удовлетворяет однородному уравнению, получаемому из (123,2) при $f(t_0)=0$, ибо главная часть $\gamma(z)$ вектора $\Phi(z)$ на бесконечности равна нулю и, следовательно, в силу (123,4) $f(t_0)=0$.

Очевидно, что и обратно, если элементы $\Phi_\alpha^\beta(z)$, $\alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n$, матрицы $\| \Phi_\alpha^\beta(z) \|$ — кусочно-голоморфные функции и если эта матрица удовлетворяет соотношению (125,3), то каждый столбец этой матрицы, рассматриваемый как вектор, является решением однородной задачи сопряжения (122,1).

2°. Для дальнейшего важно построить такую систему n решений однородной задачи сопряжения, определитель матрицы которой не равен тождественно нулю. Такую систему решений мы будем называть **фундаментальной**, а матрицу этой системы — **фундаментальной матрицей**.

Таких систем, как мы увидим, существует бесчисленное множество, но, как будет показано ниже, для получения общего решения задачи достаточно построить какую-либо одну из них.

Одну из фундаментальных систем решений можно построить, например, следующим образом.

Возьмем в качестве вектора $\gamma(z)$, фигурирующего в правой части формулы (123,1), вектор

$$\gamma^\beta(z) = (0, 0, \ldots, \gamma_\beta^\beta, 0, \ldots, 0),$$

все компоненты которого, кроме одного, стоящего на месте с номером β, равны нулю, отличный же от нуля компонент $\gamma_\beta^\beta = \gamma_\beta^\beta(z)$ представляет собой полином с неопределенными коэффициентами. Эти коэффициенты мы выберем так, чтобы соответствующая система (123,2) была разрешима, т. е. чтобы были соблюдены условия, даваемые формулой (123,5),

$$\int_L f^\beta(t)\,\psi^\alpha(t)\,dt = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, k', \tag{125,4}$$

где, согласно формуле (123,4),

$$f^\beta(t) = [G(t) - E]\,\gamma^\beta(t).$$

Подставив в (125,4) на место $\gamma_\beta^\beta(t)$ полином с неопределенными коэффициентами, мы получим, очевидно, систему линейных однородных алгебраических уравнений относительно этих неопределенных коэффициентов. Полученная система всегда имеет решения, отличные от нулевого, если в качестве $\gamma_\beta^\beta(z)$ взять полином степени не ниже k', ибо тогда число неизвестных в упомянутой системе будет не меньше $k' + 1$. Выбрав какое-либо определенное решение этой системы, отличное от нулевого, мы получим определенные выражения для полинома $\gamma_\beta^\beta(z)$ и, следовательно, для вектора $\gamma^\beta(z)$. Подставив это значение в правую часть формулы (123,2), мы получим разрешимую систему сингулярных интегральных уравнений. Пусть $\varphi(t)$ — решение этой системы (или какое-либо определенное решение, если решений несколько). Тогда формула (123,1) при выбранном нами значении вектора $\gamma(z) = \gamma^\beta(z)$ даст определенное решение $\Phi^\beta(z)$ однородной задачи сопряжения. Придавая β значения $1, 2, \ldots, n$, мы получим систему n решений

$$\Phi^1(z) = (\Phi_1^1, \Phi_2^1, \ldots, \Phi_n^1), \ \ldots, \ \Phi^n(z) = (\Phi_1^n, \Phi_2^n, \ldots, \Phi_n^n). \tag{125,5}$$

Заметим, что так как под решениями $\varphi(t)$ уравнения (123,2) всегда подразумеваются решения класса H, то найденные нами решения $\Phi^\beta(z)$ $\beta = 1, 2, \ldots, n$, принимают на L граничные значения, принадлежащие классу H.

Легко видеть, что определитель матрицы $\| \Phi_\alpha^\beta \|$ найденной системы решений не равен тождественно нулю. В самом деле, этот определитель, наверное, отличен от нуля в окрестности бесконечно удаленной точки, так как при $z \to \infty$ все его элементы, кроме диагональных, стремятся к нулю, диагональные же элементы имеют на бесконечности главными частями полиномы $\gamma_\beta^\beta(z)$, отличные от нуля[1]).

Таким образом, система решений (125,5) является фундаментальной.

§ 126. Нормальная и каноническая системы решений. 1°. Нормальной системой решений однородной задачи сопряжения мы будем называть фундаментальную систему $\Psi^1, \Psi^2, \ldots, \Psi^n$, обладающую тем свойством, что определитель ее матрицы, т. е. $\det \| \Psi_\alpha^\beta(z) \|$, нигде на конечном расстоянии, включая точки линии L, не обращается в нуль. Говоря, что определитель не обращается в нуль на L, мы подразумеваем, что не обращаются в нуль его граничные значения слева и справа, т. е. что

$$\det \| \Psi_\alpha^\beta(t) \|^+ \neq 0, \quad \det \| \Psi_\alpha^\beta(t) \|^- \neq 0;$$

одно из этих неравенств влечет за собой другое в силу соотношения

$$\det \| \Psi_\alpha^\beta(t) \|^+ = \det G(t) \cdot \det \| \Psi_\alpha^\beta \|^-, \tag{126,1}$$

вытекающего из (125,3).

Матрицу нормальной системы решений мы будем называть нормальной матрицей.

Имея фундаментальную систему решений или, что то же, фундаментальную матрицу $\| \Phi_\alpha^\beta(z) \|$, легко построить и нормальную систему, как будет сейчас показано. Во всем этом параграфе под решением мы будем подразумевать решение такое, что его граничные значения принадлежат классу H.

Пусть c — некоторая точка плоскости (отличная от бесконечно удаленной точки) и пусть $\det \| \Phi_\alpha^\beta(z) \|$ обращается в нуль в этой точке; мы считаем пока, что точка c не расположена на L.

Имеем по условию

$$\begin{vmatrix} \Phi_1^1(c) & \Phi_1^2(c) \ldots \Phi_1^n(c) \\ \Phi_2^1(c) & \Phi_2^2(c) \ldots \Phi_2^n(c) \\ \cdots & \cdots \\ \Phi_n^1(c) & \Phi_n^2(c) \ldots \Phi_n^n(c) \end{vmatrix} = 0. \tag{126,2}$$

Поэтому всегда можно найти числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_\beta \Phi_\alpha^\beta(c) = 0, \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{126,3}$$

[1]) Заметим, что решение, не равное тождественно нулю в какой-либо одной из связных частей, на которые разбивается плоскость линией L, не равно тождественно нулю ни в одной из этих частей. Действительно, если решение $\Phi(z) = 0$ в одной из этих частей, то граничные значения, принимаемые $\Phi(z)$, когда z стремится к границе этой части, оставаясь внутри нее, равны нулю. Но тогда, в силу (122,1) равны нулю граничные значения $\Phi(z)$ и при стремлении z к границе из частей, примыкающих к ней с другой стороны. Поэтому $\Phi(z) = 0$ и во всех частях, имеющих общую границу с рассматриваемой; отсюда и следует наше утверждение. Из сказанного следует также, что решение, равное тождественно нулю в сколь угодно малой области на плоскости, равно тождественно нулю на всей плоскости.

или, что то же,

$$a_1\Phi^1(c)+a_2\Phi^2(c)+\ldots+a_n\Phi^n(c)=0. \qquad (126,4)$$

Рассмотрим теперь решение

$$\Phi(z)=a_1\Phi^1(z)+a_2\Phi^2(z)+\ldots+a_n\Phi^n(z).$$

В силу (126,4) будем иметь $\Phi(c)=0$. Поэтому на основании сказанного в § 124, п. 2° отношение

$$\Psi(z)=\frac{\Phi(z)}{z-c} \qquad (126,5)$$

будет также решением.

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ обозначают соответственно порядки на бесконечности решений $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \ldots, \Phi^n(z)$. Не нарушая общности, можно считать, что $\lambda_1\leqslant\lambda_2\leqslant\ldots\leqslant\lambda_n$. Обозначим через a_m последнее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не равное нулю.

Заменяя в фундаментальной системе решений $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \ldots, \Phi^n(z)$ решение $\Phi^m(z)$ решением $\Psi(z)$, определяемым формулой (126,5), мы, очевидно, получим новую фундаментальную систему решений[1]), при этом одно из решений старой системы, а именно $\Phi^m(z)$, заменяется решением, имеющим на бесконечности на единицу меньший порядок.

Аналогично можно поступить и в случае, когда точка c расположена на линии L, как легко видеть на основании сказанного в § 124, п. 2°. При этом теперь под $\Phi^1(c), \ldots, \Phi^n(c)$ в (124,1) следует подразумевать граничные значения $\Phi^{1+}(c), \ldots, \Phi^{n+}(c)$ или же граничные значения $\Phi^{1-}(c), \ldots, \Phi^{n-}(c)$; в этих двух случаях мы получим для определения чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$ эквивалентные уравнения вследствие соотношения $\Phi^+(c)=G(c)\Phi^-(c)$.

Таким образом, во всех случаях, если определитель фундаментальной матрицы обращается в нуль в некоторой точке c плоскости, мы можем заменить данную фундаментальную систему решений другой, снизив при этом порядок на бесконечности одного из решений на единицу.

Если определитель матрицы полученной таким образом новой фундаментальной системы обращается в нуль в некоторой точке плоскости, то можно повторить указанный выше прием, и т. д. При каждой такой замене фундаментальной системы решений новой сумма порядков на бесконечности отдельных решений снижается на единицу. Но мы знаем, что порядок на бесконечности любого решения не может быть ниже определенного числа (§ 124, п. 3°).

Следовательно, после конечного числа операций указанного вида мы придем к фундаментальной системе решений такой, что определитель ее матрицы нигде на конечном расстоянии в нуль не обращается.

Мы получим, таким образом, нормальную систему[2]), матрицу которой мы обозначим через $\|\Psi_\alpha^\beta(z)\|$.

---

[1]) Определитель матрицы новой системы решений равен, очевидно

$$\frac{a_m}{z-c}\det\|\Phi_\alpha^\beta(z)\|$$

и, следовательно, не равен тождественно нулю.

[2]) Примененный в тексте прием построения нормальной системы, исходя из фундаментальной, указан в статье G. D. Birkhoff [2]; ср. также его статью [1]. Обоснование утверждения, что (126,5) является решением и в случае, когда точка c распо-

2°. Определитель матрицы $\| \Psi_\alpha^\beta (z) \|$ нормальной системы решений, по самому определению такой системы, отличен от нуля во всех конечных точках плоскости и представляет собой голоморфную функцию в каждой конечной области, не содержащей точек линии L. В окрестности бесконечно удаленной точки определитель этот может оставаться конечным, но может обращаться и в нуль или иметь полюс. Избежать этих двух последних возможностей, как будет ясно из дальнейшего, в общем случае нельзя: оказывается, что порядок на бесконечности определителя матрицы нормальной системы не зависит от выбора этой системы.

Можно, однако, преобразовать нормальную систему к виду, удобному для рассмотрений, связанных с поведением решений в окрестности бесконечно удаленной точки.

А именно, обозначим через

$$-\varkappa_1, \quad -\varkappa_2, \quad \ldots, \quad -\varkappa_n$$

порядки на бесконечности решений

$$\Psi^1 (z), \quad \Psi^2 (z), \quad \ldots, \quad \Psi^n (z),$$

составляющих нормальную систему. Представим определитель матрицы этих решений следующим образом:

$$\det \| \Psi_\alpha^\beta (z) \| = z^{-\varkappa_1-\varkappa_2-\ldots-\varkappa_n} \det \| z^{\varkappa_\beta} \Psi_\alpha^\beta \|.$$

Элементы $z^{\varkappa_\beta} \Psi_\alpha^\beta (z)$ последнего определителя стремятся к определенным конечным значениям при $z \to \infty$; следовательно, определитель

$$\Delta (z) = \det \| z^{\varkappa_\beta} \Psi_\alpha^\beta (z) \| \qquad (126,6)$$

стремится к определенному конечному значению при $z \to \infty$ и представляет собой голоморфную функцию в окрестности точки $z = \infty$.

Нормальную систему решений $\Psi^1 (z), \ldots, \Psi^n (z)$ мы будем называть *канонической*, если определитель (126,6) отличен от нуля при $z = \infty$ (и, следовательно, отличен от нуля в некоторой окрестности бесконечно удаленной точки).

Покажем, что всякую нормальную систему можно преобразовать в каноническую, не изменяя при этом определителя ее матрицы.

ложена на L, проведено этим автором при весьма частных предположениях относительно линии L и матрицы $G (t)$, а именно, что L — аналитический контур и что элементы матрицы $G (t)$ — аналитические вблизи линии L функции, за исключением конечного числа точек на L, вблизи которых они, однако, дифференцируемы неограниченное число раз.

Аналогичный прием применен Ф. Д. Гаховым [5], [9] (который, видимо, не был знаком с работой Биркгофа) в связи с несколько иным, но близким вопросом; при этом случай, когда точка c расположена на L, заранее исключается.

Другое, значительно более сложное построение нормальной системы, исходя из фундаментальной (причем сразу получается не только нормальная, но и каноническая система, о которой будет сказано в следующем пункте), дано И. Племелем (J. Plemelj [2]); случай, соответствующий нашему случаю, когда точка c расположена на L, у этого автора недостаточно обоснован. Строгое обоснование метода И. Племеля было дано в статье Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа [1] и воспроизведено в первом издании настоящей книги. См. также Н. П. Векуа [8], [16].

В самом деле, если $\Delta(\infty) \neq 0$, то цель уже достигнута. Предположим теперь, что $\Delta(\infty) = 0$. При больших $|z|$ мы имеем для элементов матрицы $\| \Psi_\alpha^\beta(z) \|$ разложения следующего вида:

$$\Psi_\alpha^\beta(z) = z^{-\varkappa_\beta} \left\{ a_\alpha^\beta + O\left(\frac{1}{z}\right) \right\}, \quad a_\alpha^\beta = \text{const},$$

так что

$$0 = \Delta(\infty) = \det \| a_\alpha^\beta \|.$$

Но тогда можно найти числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$, не все равные нулю и такие, что

$$\sum_{\beta=1}^{n} a_\alpha^\beta a_\beta = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, n.$$

Переставив в случае надобности столбцы матрицы $\| \Psi_\alpha^\beta(z) \|$ (это сводится к новой нумерации решений и может изменить лишь знак определителя), мы можем считать, что $-\varkappa_1 \leqslant -\varkappa_2 \leqslant \ldots \leqslant -\varkappa_n$. Пусть a_m — последнее из чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$, отличное от нуля. Заменяя теперь в нормальной системе решений $\Psi^1(z), \Psi^2(z), \ldots, \Psi^n(z)$ решение $\Psi^m(z)$ решением $a_1 z^{\varkappa_1 - \varkappa_m} \Psi^1(z) + a_2 z^{\varkappa_2 - \varkappa_m} \Psi^2(z) + \ldots + a_m \Psi^m(z)$, мы получим, очевидно, новую нормальную систему решений, причем одно из решений старой системы заменяется решением, порядок которого на бесконечности по крайней мере на единицу ниже (остальные решения сохраняют свои порядки), а определитель матрицы новой системы отличается от соответствующего определителя старой лишь постоянным, отличным от нуля множителем; этот множитель мы можем считать равным единице за счет умножения одного из столбцов новой нормальной матрицы на отличную от нуля постоянную. Таким образом, мы можем считать, что определители новой и старой матриц равны между собой.

Если новая система решений окажется канонической, то цель достигнута; в противном случае мы можем произвести преобразование, аналогичное предыдущему. Такие преобразования не могут быть продолжены неограниченно, так как порядок на бесконечности любого отличного от нуля решения не ниже некоторого определенного числа (§ 124, п. 3°).

Таким образом, после конечного числа указанных выше элементарных операций мы придем к канонической системе решений, определитель матрицы которой равен определителю исходной фундаментальной матрицы[1]).

3°. Решения, составляющие каноническую систему, мы будем обычно обозначать через

$$\begin{aligned} \chi^1(z) &= (\chi_1^1, \chi_2^1, \ldots, \chi_n^1), \\ \chi^2(z) &= (\chi_1^2, \chi_2^2, \ldots, \chi_n^2), \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \chi^n(z) &= (\chi_1^n, \chi_2^n, \ldots, \chi_n^n), \end{aligned} \tag{126,7}$$

а ее матрицу, которую будем называть *канонической матрицей*, — через $X(z)$, так что

$$X(z) = \| \chi_\alpha^\beta(z) \| = \begin{Vmatrix} \chi_1^1(z) & \chi_1^2(z) & \ldots & \chi_1^n(z) \\ \chi_2^1(z) & \chi_2^2(z) & \ldots & \chi_2^n(z) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \chi_n^1(z) & \chi_n^2(z) & \ldots & \chi_n^n(z) \end{Vmatrix}. \tag{126,8}$$

[1]) Ср. G. D. Birkhoff [1], [2], а также Н. П. Векуа [8], [16], Ф. Д. Гахов [5], [9].

Напомним свойства, характеризующие каноническую систему решений $\chi^1(z), \chi^2(z), \ldots, \chi^n(z)$, а именно:

Свойство 1. Каноническая матрица $X(z)$, т. е. матрица системы решений $\chi^\beta(z)$, $\beta = 1, 2, \ldots, n$, является нормальной, т. е. определитель этой матрицы

$$\Delta(z) = \det X(z) = \det \| \chi_\alpha^\beta(z) \| \tag{126,9}$$

нигде в конечной части плоскости в нуль не обращается.

Свойство 2. Пусть $(-\varkappa_\beta)$ обозначает порядок решения χ^β на бесконечности. Тогда определитель

$$\Delta^0(z) = \det \| z^{\varkappa_\beta} \chi_\alpha^\beta(z) \| = z^{\varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n} \Delta(z) \tag{126,10}$$

отличен от нуля при $z = \infty$.

Последнее свойство можно, очевидно, выразить и так: порядок на бесконечности определителя $\det \| \chi_\alpha^\beta \|$ равен сумме порядков столбцов матрицы $\| \chi_\alpha^\beta(z) \|$; под порядком столбца подразумевается наивысший порядок его элементов; напомним, что совокупность элементов столбца с номером β, рассматриваемая как вектор, представляет собой решение $\chi^\beta(z)$.

4°. Одно из главных преимуществ канонической системы решений перед просто нормальной системой заключается в следующем ее свойстве.

Рассмотрим решение $\chi(z)$, представляющее собой линейную комбинацию решений канонической системы с полиномиальными коэффициентами:

$$\chi(z) = \chi^1(z) P_1(z) + \chi^2(z) P_2(z) + \ldots + \chi^n(z) P_n(z), \tag{126,11}$$

где $P_1(z)$, $P_2(z)$, ..., $P_n(z)$ — полиномы соответственно степеней $m_1, m_2, \ldots, m_n$; это решение можно, очевидно, записать и так (§ 118, п. 1°):

$$\chi(z) = X(z) P(z), \tag{126,12}$$

где через $P(z)$ обозначен вектор с компонентами $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)$, т. е.

$$P(z) = (P_1, P_2, \ldots, P_n).$$

Порядки на бесконечности отдельных слагаемых в правой части (126,11) равны соответственно $m_1 - \varkappa_1$, $m_2 - \varkappa_2$, ..., $m_n - \varkappa_n$.

Из того обстоятельства, что $\Delta^0(\infty) \neq 0$, т. е. из свойства 2 канонической матрицы, вытекает, что *порядок на бесконечности комбинации* $\chi(z)$ в точности равен наибольшему из чисел $m_1 - \varkappa_1$, $m_2 - \varkappa_2$, ..., $m_n - \varkappa_n$; иными словами, что члены высшего порядка в сумме (126,11) сократиться не могут. Обратно, из этого свойства, как легко видеть, вытекает свойство 2.

§ 127. Индексы однородной задачи сопряжения.

1°. Целые числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$, т. е. порядки на бесконечности решений канонической системы, взятые с обратным знаком, мы будем называть частными индексами рассматриваемой однородной задачи сопряжения, а их сумму

$$\varkappa = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_n$$

— суммарным индексом или просто индексом.

Ниже (в § 130) будет показано, что частные индексы не зависят от выбора канонической системы решений (если не считать порядка, в котором решения перенумерованы), т. е. являются инвариантами задачи.

Инвариантность же суммарного индекса $\varkappa$, играющего существенную роль, вытекает из того, что он может быть непосредственно выражен через матрицу $G(t)$, характеризующую данную однородную задачу сопряжения, как это будет сейчас показано.

2°. Пусть по-прежнему $\Delta(z)$ обозначает определитель канонической матрицы. Как и для определителя всякой системы n решений, имеем:

$$\Delta^+(t) = \det G(t) \cdot \Delta^-(t) \quad \text{на} \quad L,$$

откуда следует:

$$[\ln \Delta^+(t)]_L = [\ln \det G(t)]_L + [\ln \Delta^-(t)]_L, \tag{127,1}$$

где символ $[\ ]_L$ обозначает, как всегда, приращение функции, заключенной в скобки, при однократном обходе L в положительном направлении.

Составим из связных частей, на которые разбивается плоскость линией L, две части S^+ и S^- плоскости, как в § 29, п. 1°, и будем временно считать, что положительное направление на L выбрано так, как указано в упомянутом параграфе[1]). Будем, далее, считать, что через S^- обозначена та часть, которая содержит бесконечно удаленную точку.

Так как функция $\Delta(z)$ голоморфна в части S^+ и не обращается в нуль, то

$$[\ln \Delta^+(t)]_L = 0.$$

Далее, обозначим через L' совокупность тех из замкнутых контуров, составляющих L, которые ограничивают связную часть плоскости, входящую в состав S^- и содержащую бесконечно удаленную точку, а через L'' — совокупность остальных контуров, составляющих L. Тогда, аналогично предыдущему,

$$[\ln \Delta^-(t)]_{L''} = 0.$$

Вычислим теперь приращение функции $\ln \Delta^-(t)$ при обходе части L' линии L. Очевидно, что

$$[\ln \Delta^-(t)]_{L'} = [\ln \Delta(z)]_\Gamma,$$

где Γ обозначает окружность достаточно большого радиуса, причем положительным направлением на Γ считается направление, обратное движению часовой стрелки.

Но на основании формулы (126,10)

$$\Delta(z) = \frac{\Delta^0(z)}{z^\varkappa},$$

где $\Delta^0(z)$ — функция, голоморфная в окрестности бесконечно удаленной точки, отличная от нуля в этой окрестности. Поэтому при достаточно большом радиусе окружности Γ имеем $[\ln \Delta^0(z)]_\Gamma = 0$, и, следовательно,

$$[\ln \Delta(z)]_\Gamma = [-\varkappa \ln z]_\Gamma = -2\pi i \varkappa.$$

Таким образом, на основании (127,1)

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi i}[\ln \det G(t)]_L = \frac{1}{2\pi}[\arg \det G(t)]_L. \tag{127,2}$$

[1]) А именно так, что левая окрестность линии L принадлежит части S^+, а правая — части S^-.

Это и есть требуемая формула[1]). *Она справедлива при любом выборе положительного направления на L.*

В самом деле, если положительное направление какого-либо из контуров L_k, составляющих L, не совпадает с тем, которое предполагалось при выводе формулы, то мы можем изменить направление этого контура на обратное, заменив одновременно на этом контуре матрицу $G(t)$ матрицей $[G(t)]^{-1}$ для того, чтобы условие задачи осталось неизменным. Но при этом соответствующее слагаемое в правой части формулы

$$[\ln \det G(t)]_L = \sum_k [\ln \det G(t)]_{L_k}$$

останется неизменным. Отсюда и следует наше утверждение.

§ 128. Общее решение однородной задачи сопряжения. 1°. После того как построена (одна какая-нибудь) каноническая система решений однородной задачи сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \quad \text{на} \quad L, \tag{128,1}$$

нахождение ее общего решения не представляет никаких затруднений.

Пусть

$$\chi^\beta(z) = (\chi_1^\beta, \chi_2^\beta, \ldots, \chi_n^\beta), \quad \beta = 1, 2, \ldots, n,$$

— какая-нибудь каноническая система решений, а $X(z)$ — соответствующая каноническая матрица,

$$X(z) = \| \chi_\alpha^\beta(z) \| \quad (\beta \text{ — номера столбцов, } \alpha \text{ — номера строк}).$$

Тогда

$$X^+(t) = G(t)\,X^-(t),$$

откуда следует формула, которой мы будем часто пользоваться:

$$G(t) = X^+(t)\,[X^-(t)]^{-1}. \tag{128,2}$$

Докажем теперь, что *все решения однородной задачи сопряжения* (подразумеваются кусочно-голоморфные решения, имеющие конечный порядок на бесконечности) *даются формулой*

$$\Phi(z) = \chi^1(z)\,P_1(z) + \chi^2(z)\,P_2(z) + \ldots + \chi^n(z)\,P_n(z), \tag{128,3}$$

где $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)$ — произвольные полиномы или, что то же,

$$\Phi(z) = X(z)\,P(z), \tag{128,4}$$

где $P(z)$ обозначает вектор с произвольными полиномиальными компонентами,

$$P(z) = (P_1, P_2, \ldots, P_n). \tag{128,5}$$

Действительно, подставляя в (128,1) на место $G(t)$ выражение (128,2), получим:

$$[X^+(t)]^{-1}\,\Phi^+(t) = [X^-(t)]^{-1}\,\Phi^-(t).$$

Отсюда следует, что вектор $[X(z)]^{-1}\,\Phi(z)$ голоморфен на всей плоскости; так как, далее, $\Phi(z)$ имеет по условию конечный порядок на бесконечности, то и $[X(z)]^{-1}\,\Phi(z)$ имеет конечный порядок на бесконечности, а поэтому

$$[X(z)]^{-1}\,\Phi(z) = P(z),$$

---

[1]) Она дана в статье Н. И. Мусхелишвили [7] для несколько более частного случая, а именно, для случая, когда линия L ограничивает некоторую связную часть плоскости (область).

где $P(z)$ — вектор, компоненты $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)$ которого — полиномы. Отсюда и следует формула (128,4) или, что то же самое, формула (128,3).

Очевидно, что и обратно формула (128,3) или, что то же, (128,4) дает решение задачи при всяком выборе $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)$, и наше утверждение доказано.

2°. Отметим, что для вывода заключения о представимости всякого решения в виде (128,3) или (128,4) достаточно предположить, что матрица $X(z)$ нормальная[1]).

Но применение канонической матрицы облегчает подбор полиномов $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)$, когда требуется найти решение, имеющее на бесконечности данный порядок.

Именно, на основании сказанного в п. 4° § 126 ясно, что все решения $\Phi(z)$, имеющие на бесконечности порядок не выше заданного целого числа k, даются формулой

$$\Phi(z) = \chi^1(z) P_{k+\varkappa_1} + \chi^2(z) P_{k+\varkappa_2} + \ldots + \chi^n(z) P_{k+\varkappa_n}, \tag{128,6}$$

где $P_{k+\varkappa_j}(z)$ обозначает произвольный полином степени не выше $k+\varkappa_j$; при $k+\varkappa_j < 0$ следует считать $P_{k+\varkappa_j}(z) = 0$.

Решение $\Phi(z)$ будет иметь в точности порядок k, если степень по крайней мере одного из полиномов $P_{k+\varkappa_j}(z)$ достигает $k+\varkappa_j$.

Если все $k+\varkappa_j < 0$, то задача не имеет (нетривиальных) решений, имеющих на бесконечности порядок не выше k.

3°. Из формулы (128,3), дающей общее решение однородной задачи сопряжения, вытекает, что *граничные значения* $\Phi^+(t)$, $\Phi^-(t)$ *всякого решения этой задачи принадлежат классу* H, если, конечно, матрица $G(t)$ удовлетворяет принятым выше (§ 122) условиям.

В самом деле, мы видели (§ 126), что всегда можно построить нормальную матрицу $X(z)$, граничные значения которой принадлежат классу H. Если подразумевать под $X(z)$ именно такую матрицу, ясно, что правая часть формулы (128,3) всегда принадлежит классу H.

В частности, из сказанного следует, что граничные значения элементов, составляющих любую каноническую матрицу, обладают этим свойством.

§ 129. Некоторые дополнительные замечания относительно решения однородной задачи сопряжения. **1°.** Мы видели, что после того, как построена (одна какая-нибудь) нормальная система решений, общее решение однородной задачи сопряжения получается весьма просто в явном виде. То же самое, как мы увидим, относится и к неоднородной задаче сопряжения, которая будет сформулирована и решена в § 132.

В настоящем параграфе мы сделаем несколько замечаний, которые могут облегчить построение нормальной (а следовательно, и канонической) матрицы решений в ряде случаев.

2°. Отметим, прежде всего, следующее обстоятельство. Пусть $L_1, L_2, \ldots, L_p$ обозначают замкнутые контуры, составляющие L. Покажем, что построение нормальной системы решений задачи сопряжения

---

[1]) Несколько иначе обстоит дело, если $X(z)$ лишь фундаментальная матрица; в этом случае, как легко видеть, для того, чтобы получить в с е решения, под $P_1(z), P_2(z), \ldots, P_n(z)$ в формуле (128,3) следует подразумевать рациональные функции (а не только полиномы), подобранные так, чтобы решение не имело полюсов на конечном расстоянии.

при граничной линии L можно свести к последовательному построению нормальных систем решений задач сопряжения при граничных линиях $L_1, L_2, \ldots, L_p$, взятых каждая в отдельности.

В самом деле, пусть $X(z)$ обозначает нормальную матрицу для задачи сопряжения

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) \quad \text{на} \quad L. \tag{129,1}$$

Будем искать $X(z)$ в виде произведения

$$X(z) = X_1(z) X_2(z) \ldots X_p(z), \tag{129,2}$$

где $X_k(z)$, $k = 1, 2, \ldots, p$, обозначает кусочно-голоморфную матрицу с линией скачков L_k, имеющую конечный порядок на бесконечности. Тогда на L_k мы должны иметь:

$$X_1(t) \ldots X_{k-1}(t) X_k^+(t) X_{k+1}(t) \ldots X_p(t) =$$
$$= G(t) X_1(t) \ldots X_{k-1}(t) X_k^-(t) X_{k+1}(t) \ldots X_p(t),$$

так как на L_k имеем $X_j^+(t) = X_j^-(t) = X_j(t)$ при $j \neq k$. Если умножить предыдущее равенство слева на $[X_1(t) \ldots X_{k-1}(t)]^{-1}$, а справа на $[X_{k+1}(t) \ldots X_p(t)]^{-1}$, получим:

$$X_k^+(t) = G_k(t) X_k^-(t) \quad \text{на} \quad L_k, \tag{129,3}$$

где положено

$$G_k(t) = [X_1(t) \ldots X_{k-1}(t)]^{-1} G(t) [X_1(t) \ldots X_{k-1}(t)] \quad \text{на} \quad L_k, \tag{129,4}$$
$$k = 1, 2, \ldots, p;$$

при $k = 1$ предыдущее равенство следует понимать так:

$$G_1(t) = G(t) \quad \text{на} \quad L_1.$$

Будем теперь под $X_1(z), X_2(z), \ldots, X_p(z)$ подразумевать нормальные матрицы задач (129,3) соответственно при $k = 1, 2, \ldots, p$; тогда, очевидно, матрица $X(z)$, определяемая формулой (129,2), будет нормальной матрицей для задачи (129,1). Построение же матриц $X_1(z), X_2(z), \ldots, X_p(z)$ мы можем произвести последовательно, начиная с $X_1(z)$. В самом деле, матрица $G_1(t)$ задана: $G_1(t) = G(t)$ на L_1; найдя $X_1(z)$, мы определим $G_2(t)$ по формуле $G_2(t) = [X_1(t)]^{-1} G(t) X_1(t)$ на L_2 и т. д.

Указанный здесь прием представляет собой обобщение приема, приведенного в § 35, п. 4°; различие происходит оттого, что теперь сомножители $X_1(z), X_2(z), \ldots, X_p(z)$ представляют собой матрицы и поэтому в общем случае не коммутативны.

В несколько более сложном, чем здесь, виде прием этот указан в статье Н. П. Векуа [17].

3°. Иногда представляется целесообразным рассматривать решения однородной задачи сопряжения несколько более общие, чем те, которые мы рассматривали до сих пор, а именно, *кусочно-мероморфные* решения. Под этим мы подразумеваем решения, непрерывно продолжимые на L слева и справа и голоморфные в отдельных связных частях, на которые разбивается плоскость линией L, за исключением конечного числа полюсов (в том числе и возможного полюса в бесконечно удаленной точке); других особенностей мы не допускаем.

Ясно, что из каждого кусочно-мероморфного решения можно получить кусочно-голоморфное решение, имеющее конечный порядок на бесконечности, путем умножения на подходящий полином.

Систему n кусочно-мероморфных решений, определитель которой не равен нулю тождественно, мы будем называть фундаментальной кусочно-мероморфной системой, а ее матрицу — фундаментальной кусочно-мероморфной матрицей.

Легко видеть, что, найдя какую-либо кусочно-мероморфную фундаментальную систему, можно сразу найти и кусочно-голоморфную систему решений, имеющих конечный порядок на бесконечности: для этого достаточно умножить решения кусочно-мероморфной системы на подходящие полиномы, что соответствует умножению столбцов соответствующей кусочно-мероморфной фундаментальной матрицы на эти полиномы.

Построив фундаментальную кусочно-голоморфную матрицу, можно, далее, построить нормальную и канонические матрицы, как показано в § 126.

4°. Одним из простейших частных случаев, когда можно сразу найти фундаментальную систему решений, является следующий[1]).

Пусть L состоит из одного простого замкнутого контура и пусть элементы матрицы $G(t)$ — рациональные функции. Тогда, очевидно, матрица

$$X(z)=\begin{cases} G(z) & \text{при } z\in S^+, \\ E & \text{при } z\in S^-, \end{cases}$$

где E — единичная матрица, а S^+, S^- — области, на которые разбивается плоскость линией L (причем S^+ примыкает к L слева), является фундаментальной кусочно-мероморфной матрицей.

Все сказанное останется в силе, если считать, что L состоит из нескольких замкнутых контуров, если под S^+, S^- подразумевать то же, что в § 29, п. 1°, и если положительное направление на L выбрано соответствующим образом (т. е. как в § 29).

5°. Несколько более общим, чем предыдущий, является тот случай, когда L состоит из конечного числа простых замкнутых контуров $L_1, L_2, \ldots, L_p$ с произвольно выбранными положительными направлениями, а

$$G(t)=G^{(k)}(t) \text{ на } L_k, \qquad k=1, 2, \ldots, p,$$

где $G^{(k)}(t)$ представляет собой матрицу, элементы которой — рациональные функции (быть может, различные для различных контуров). Тогда, очевидно, можно построить фундаментальную матрицу $X(z)$ следующим образом (ср. сказанное в п. 2° и п. 4°).

Обозначим через S_k^+ и S_k^- части плоскости, на которые она разбивается контуром L_k, выбирая обозначения так, чтобы положительное направление на L_k оставляло область S_k^+ слева, и положим $G_1(t) = G^{(1)}(t)$ при $t\in L_1$; затем, принимая во внимание, что элементы $G_1(t)$ — рациональные функции, положим

$$X_1(z)=\begin{cases} G_1(z) & \text{при } z\in S_1^+, \\ E & \text{при } z\in S_1^-. \end{cases}$$

Далее, положим $G_2(t)=[X_1(t)]^{-1}G^{(2)}(t)X_1(t)$ при $t\in L_2$; затем, имея в виду, что элементы матрицы $G_2(t)$ — рациональные функции, положим

$$X_2(z)=\begin{cases} G_2(z) & \text{при } z\in S_2^+, \\ E & \text{при } z\in S_2^- \end{cases}$$

и т. д.

[1]) Ср. Н. П. Векуа [8].

Матрица $X_1(z)X_2(z)\ldots X_p(z)$ будет, очевидно, фундаментальной кусочно-мероморфной матрицей для исходной задачи.

6°. Отметим, наконец, что однородная задача сопряжения (129,1), очевидно, эквивалентна следующей: представить матрицу $G(t)$, заданную на L, в виде произведения

$$G(t) = X^+(t)\,[X^-(t)]^{-1},$$

где $X^+(t)$, $X^-(t)$ представляет собой граничные значения некоторой кусочно-голоморфной матрицы $X(z)$ такой, что $\det X(z)$ не обращается в нуль нигде на конечном расстоянии.

Действительно, если имеет место предыдущее представление, то матрица $X(z)$ является, очевидно, нормальной матрицей для задачи (129,1).

В частности[1]), задача сопряжения (129,1) может считаться решенной, если S^+, S^- обозначают то же, что в § 29, п. 1°, а направление на L выбрано соответственным образом, и если каким-либо способом удастся представить $G(t)$ в виде произведения

$$G(t) = \Omega^+(t)\,\Omega^-(t) \quad \text{на } L,$$

где $\Omega^+(t)$, $\Omega^-(t)$ — граничные значения некоторой кусочно-мероморфной матрицы $\Omega(z)$ такой, что $\det\Omega(z)$ не равен тождественно нулю. Действительно, в этом случае матрица

$$X(z) = \begin{cases} \Omega(z) & \text{при } z \in S^+, \\ [\Omega(z)]^{-1} & \text{при } z \in S^- \end{cases}$$

является, очевидно, фундаментальной кусочно-мероморфной матрицей для задачи (129,1), исходя из которой можно построить нормальную и канонические матрицы.

§ 130. Связь между каноническими системами. Инвариантность частных индексов. Переходя теперь к вопросу о связи между двумя различными каноническими системами решений одной и той же однородной задачи сопряжения, мы начнем с доказательства того, что частные индексы, т. е. числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ (§ 127, п. 1°), — одни и те же для всех канонических систем (если не считать порядка, в котором решения канонических систем перенумерованы).

Пусть

$$\chi^1(z),\ \chi^2(z),\ \ldots,\ \chi^n(z) \tag{130,1}$$

и

$$\zeta^1(z),\ \zeta^2(z),\ \ldots,\ \zeta^n(z) \tag{130,2}$$

— две какие-либо канонические системы и пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ и $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — соответствующие частные индексы, так что $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_n$ и $-\lambda_1, -\lambda_2, \ldots, -\lambda_n$ представляют собой порядки на бесконечности решений (130,1) и (130,2).

Будем считать эти решения перенумерованными так, что $\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n$ и $\lambda_1 \geqslant \lambda_2 \geqslant \ldots \geqslant \lambda_n$. Мы должны доказать, что $\lambda_1 = \varkappa_1, \ldots, \lambda_n = \varkappa_n$.

---

[1]) Ср. Ф. Д. Гахов [5]; автор рассматривает случай, когда L ограничивает некоторую связную часть плоскости и когда $\Omega(z)$ (см. ниже) — кусочно-голоморфная матрица.

Из основного свойства канонических систем следует, что решения (130,2) могут быть выражены через решения (130,1) формулами вида

$$\zeta^\alpha=\chi^1P_{\alpha1}+\chi^2P_{\alpha2}+\ldots+\chi^nP_{\alpha n},\quad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\qquad (130,3)$$

где $P_{\alpha\beta}$ — полиномы; аналогичными формулами выражаются решения (130,1) через решения (130,2).

Предположим теперь для общности, что

$$\varkappa_1=\varkappa_2=\ldots=\varkappa_k>\varkappa_{k+1},\qquad \lambda_1=\lambda_2=\ldots=\lambda_l>\lambda_{l+1},$$

и докажем, что $\varkappa_1=\lambda_1$, $k=l$. В самом деле, формулы (130,3), примененные к первым l решениям (130,2), показывают, если сравнить порядки левой и правой частей, что $-\lambda_1\geqslant-\varkappa_1$, ибо порядок на бесконечности правой части (130,3) не может быть ниже, чем $(-\varkappa_1)$. Меняя ролями системы (130,1), (130,2), получаем аналогично $-\varkappa_1\geqslant-\lambda_1$, откуда заключаем, что $\varkappa_1=\lambda_1$.

То же сравнение порядков левой и правой частей формул (130,3), примененных к первым l решениям (130,2), показывает, что правые части могут содержать лишь первые k слагаемых, т. е. что[1]) при $\alpha=1,2,\ldots,l$

$$\zeta^\alpha=\chi^1P_{\alpha1}+\chi^2P_{\alpha2}+\ldots+\chi^kP_{\alpha k}.\qquad (130,4)$$

Если теперь $l>k$, то из формул (130,4) следовало бы существование по крайней мере одного соотношения вида

$$\zeta^1Q_1+\zeta^2Q_2+\ldots+\zeta^lQ_l=0,$$

где Q_j — полиномы[2]), не все равные нулю, что невозможно для решений канонической системы[3]). Точно так же, меняя ролями (130,1), (130,2), докажем, что не может иметь места и обратное неравенство, следовательно, $l=k$.

Итак, мы имеем $\varkappa_1=\lambda_1,\ \ldots,\ \varkappa_k=\lambda_k$, $\varkappa_k>\varkappa_{k+1}$, $\lambda_k>\lambda_{k+1}$. Пусть теперь $\varkappa_{k+1}=\ldots=\varkappa_{k+r}>\varkappa_{k+r+1}$, $\lambda_{k+1}=\ldots=\lambda_{k+s}>\lambda_{k+s+1}$. Покажем, что $\varkappa_{k+1}=\lambda_{k+1}$, $r=s$. Применяя формулы (130,3) к решениям

$$\zeta^{k+1},\ \zeta^{k+2},\ \ldots,\ \zeta^{k+s},$$

заключаем, прежде всего, что правые части этих формул не могут состоять только из первых k слагаемых, так как в противном случае мы имели бы соотношения вида (130,4) для $\alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ k+s$, и тогда имело бы место по крайней мере одно соотношение вида

$$\zeta^1Q_1+\zeta^2Q_2+\ldots+\zeta^kQ_k+\zeta^{k+1}Q_{k+1}+\ldots+\zeta^{k+s}Q_{k+s}=0,\qquad (130,5)$$

где Q_j — полиномы, не все равные нулю, а это невозможно.

Из сказанного следует, что необходимо $-\lambda_{k+1}\geqslant-\varkappa_{k+1}$. Аналогично заключаем, что $-\varkappa_{k+1}\geqslant-\lambda_{k+1}$, и, следовательно, $\varkappa_{k+1}=\lambda_{k+1}$. Применяя теперь формулы (130,3) к первым $k+s$ решениям (130,2), будем иметь, очевидно, формулы вида[4])

$$\zeta^\alpha=\chi^1P_{\alpha1}+\ldots+\chi^{k+r}P_{\alpha,\,k+r},\quad \alpha=1,\ 2,\ \ldots,\ k+s.$$

---

[1]) В нашем случае, очевидно, $P_{\alpha1},\ldots,P_{\alpha k}$ — постоянные, но для единообразия (имея в виду дальнейшее) мы рассматриваем их как частные случаи полиномов.

[2]) Ср. предыдущую сноску.

[3]) Действительно, в противном случае мы имели бы, очевидно, $\det\|\zeta_\alpha^\beta\|=0$.

[4]) Первые k из этих формул совпадают с формулами (130,4), но для нас это не важно.

Если $s > r$, то из предыдущих соотношений следовало бы по крайней мере одно соотношение вида (130,5), что невозможно. Аналогично заключаем, что не может иметь места и обратное неравенство. Следовательно, $r = s$.

Дальнейший процесс рассуждений очевиден, и мы можем считать наше предложение доказанным.

Легко на основании предыдущих рассуждений указать способ составления всех канонических систем, после того как найдена одна из них. Но мы на этом не останавливаемся; см. книгу Н. П. Векуа [16], § 5.

§ 131. Союзные однородные задачи сопряжения. 1°. Однородные задачи сопряжения, соответствующие граничным условиям

$$\Phi^+(t) = G(t)\,\Phi^-(t) \quad \text{на} \quad L \tag{I}$$

и

$$\Psi^+(t) = [G'(t)]^{-1}\,\Psi^-(t) \quad \text{на} \quad L, \tag{I'}$$

мы будем называть с о ю з н ы м и; штрихом, как всегда, обозначается переход к транспонированной матрице.

Между решениями союзных задач существует тесная связь. А именно, легко показать, что *если*

$$X(z) = \| \chi_\alpha^\beta(z) \|$$

— нормальная или каноническая матрица для задачи (I), *то*

$$Z(z) = \| \zeta_\alpha^\beta(z) \| = [X'(z)]^{-1}$$

— нормальная или соответственно каноническая матрица для союзной задачи (I').

Действительно, если $X(z)$ — нормальная матрица для задачи (I), то по определению нормальной матрицы определитель

$$\Delta(z) = \det X(z)$$

отличен от нуля всюду на конечном расстоянии. Поэтому элементы $\zeta_\alpha^\beta(z)$ матрицы $[X'(z)]^{-1}$, которые даются формулами

$$\zeta_\alpha^\beta = \frac{\Delta_\alpha^\beta(z)}{\Delta(z)}, \tag{131,1}$$

где $\Delta_\alpha^\beta(z)$ — алгебраическое дополнение элемента $\chi_\alpha^\beta(z)$ в определителе $\Delta(z)$, представляют собой кусочно-голоморфные функции, имеющие конечные порядки на бесконечности.

Далее, из соотношения

$$X^+(t) = G(t)\,X^-(t)$$

следует, очевидно,

$$[X'^+(t)]^{-1} = [G'(t)]^{-1}\,[X'^-(t)]^{-1},$$

а это показывает, что матрица $[X'(z)]^{-1}$ есть матрица некоторой системы n решений задачи (I'). Эта система нормальная, так как ее определитель

$$\det Z(z) = \det [X'(z)]^{-1} = \frac{1}{\Delta(z)}$$

нигде на конечном расстоянии в нуль не обращается. Таким образом, наше утверждение доказано для случая, когда $X(z)$ — нормальная матрица.

Предположим теперь, что $X(z)$ — каноническая матрица для задачи (I). Пусть по-прежнему $(-\varkappa_\beta)$ обозначает порядок на бесконечности решения $\chi^\beta(z) = (\chi_1^\beta, \chi_2^\beta, \ldots, \chi_n^\beta)$. Тогда, по определению канонической матрицы, определитель

$$\Delta^0(z) = \det \| z^{\varkappa_\beta} \chi_\alpha^\beta(z) \| = \det \| \chi_\alpha^{0\beta}(z) \|,$$

где положено $\chi_\alpha^{0\beta}(z) = z^{\varkappa_\beta}\chi_\alpha^\beta(z)$, отличен от нуля при $z=\infty$. Но, как легко видеть, на основании (131,1)

$$\zeta_\alpha^\beta(z) = \frac{\Delta_\alpha^{0\beta}(z)}{\Delta^0(z)} z^{\varkappa_\beta}, \tag{131,2}$$

где $\Delta_\alpha^{0\beta}(z)$ обозначает алгебраическое дополнение элемента $\chi_\alpha^{0\beta}(z)$ в определителе $\Delta^0(z)$. Из последней формулы следует, во-первых, что порядок на бесконечности решения $\zeta^\beta(z) = (\zeta_1^\beta, \zeta_2^\beta, \ldots, \zeta_n^\beta)$ равен в точности $\varkappa_\beta$ и что определитель

$$\det \| z^{-\varkappa_\beta} \zeta_\alpha^\beta(z) \| = \frac{1}{\Delta^0(z)}$$

не обращается в нуль на бесконечности. Это и доказывает, что матрица $Z(z) = [X'(z)]^{-1}$ является канонической для задачи (I').

Из предыдущего следует также, что *если* $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ — *частные индексы задачи* (I), *то* $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_n$ *являются частными индексами союзной задачи* (I'). Поэтому и *суммарные индексы союзных задач равны по величине и обратны по знаку.*

2°. Рассмотрим, в частности, вопрос о решениях союзных задач (I), (I'), исчезающих на бесконечности.

Пусть $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ обозначают по-прежнему частные индексы задачи (I) и пусть

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_m \geqslant 0 > \varkappa_{m+1} \geqslant \varkappa_{m+2} \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n \tag{131,3}$$

(если все $\varkappa_j$ не отрицательны, то $m = n$; если все они отрицательны, то мы будем считать $m = 0$).

Положим, далее,

$$\lambda = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_m, \quad -\mu = \varkappa_{m+1} + \ldots + \varkappa_n, \tag{131,4}$$

так что

$$\lambda - \mu = \varkappa. \tag{131,5}$$

На основании формулы (128,6) общее решение задачи (I), исчезающее на бесконечности (т. е. имеющее на бесконечности порядок не выше $k = -1$), дается формулой

$$\Phi(z) = \chi^1(z) P_{\varkappa_1 - 1}(z) + \ldots + \chi^n(z) P_{\varkappa_n - 1}(z), \tag{131,6}$$

где $P_{\varkappa_j - 1}$ — полином степени не выше $\varkappa_j - 1$ с произвольными коэффициентами $(P_{\varkappa_j - 1}(z) = 0$ при $\varkappa_j \leqslant 0)$, или

$$\Phi(z) = X(z) P(z), \tag{131,7}$$

где $P(z)$ — вектор с компонентами $P_{\varkappa_1 - 1}(z), \ldots, P_{\varkappa_n - 1}(z)$:

$$P(z) = (P_{\varkappa_1 - 1}, P_{\varkappa_2 - 1}, \ldots, P_{\varkappa_n - 1}). \tag{131,8}$$

Если обозначить через $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ коэффициенты полиномов $P_{\varkappa_1-1}(z), P_{\varkappa_2-1}(z), \ldots, P_{\varkappa_n-1}(z)$, взятые в каком-нибудь порядке[1]), то, как легко видеть, $P(z)$ представится следующим образом:

$$P(z)=C_1P^1(z)+C_2P^2(z)+\ldots+C_\lambda P^\lambda(z), \tag{131,9}$$

где $P^j(z)$ обозначает определенный вектор, все компоненты которого, за исключением одного, равны нулю, а не равный нулю компонент представляет собой целую неотрицательную степень z. Очевидно, что векторы $P^1(z), P^2(z), \ldots, P^\lambda(z)$ линейно независимы.

Следовательно, на основании (131,7)

$$\Phi(z)=C_1\Phi^1(z)+C_2\Phi^2(z)+\ldots+C_\lambda\Phi^\lambda(z), \tag{131,10}$$

где $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \ldots, \Phi^\lambda(z)$ — векторы, определяемые формулой

$$\Phi^j(z)=X(z)P^j(z), \quad j=1, 2, \ldots, \lambda, \tag{131,11}$$

и представляющие собой решения задачи (I), исчезающие на бесконечности, а $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ — произвольные постоянные.

Легко видеть, что векторы $\Phi^1(z), \Phi^2(z), \ldots, \Phi^\lambda(z)$ линейно независимы. В самом деле, если вектор $\Phi(z)$, определяемый формулой (131,10), равен тождественно нулю, т. е. если

$$\Phi(z)=X(z)P(z)=0,$$

то необходимо $P(z)=0$, ибо $\det X(z)\neq 0$. Но тогда, на основании (131,9), $C_1=C_2=\ldots=C_\lambda=0$, ибо векторы $P^1(z), P^2(z), \ldots, P^\lambda(z)$ линейно независимы.

Таким образом, задача (I) имеет ровно λ линейно независимых решений

$$\Phi^1(z), \Phi^2(z), \ldots, \Phi^\lambda(z), \tag{131,12}$$

исчезающих на бесконечности; совокупность этих решений дается формулой (131,6), или, что то же, (131,7).

Совершенно аналогично, принимая во внимание, что $[X'(z)]^{-1}$ является канонической матрицей задачи (I′) и что ее частными индексами являются $-\varkappa_1, -\varkappa_2, \ldots, -\varkappa_n$, имеем следующий результат:

Общее решение задачи (I′), исчезающее на бесконечности, дается формулой

$$\Psi(z)=[X'(z)]^{-1}Q(z), \tag{131,13}$$

где

$$Q(z)=(Q_{-\varkappa_1-1}, Q_{-\varkappa_2-1}, \ldots, Q_{-\varkappa_n-1}), \tag{131,14}$$

причем $Q_{-\varkappa_j-1}=Q_{-\varkappa_j-1}(z)$ обозначает произвольный полином степени не выше $(-\varkappa_j-1)$ ($Q_{-\varkappa_j-1}=0$ при $\varkappa_j\geqslant 0$).

Имеем, аналогично формуле (131,9),

$$Q(z)=D_1Q^1(z)+D_2Q^2(z)+\ldots+D_\mu Q^\mu(z), \tag{131,15}$$

[1]) Число (произвольных) коэффициентов полинома $P_{\varkappa_j-1}(z)$ равно $\varkappa_j$ при $\varkappa_j>0$ и равно нулю при $\varkappa_j\leqslant 0$. Поэтому в силу (131,3) и (131,4) число всех (произвольных) коэффициентов равно

$$\varkappa_1+\varkappa_2+\ldots+\varkappa_m=\lambda.$$

где $D_1, D_2, \ldots, D_\mu$ — произвольные постоянные, а $Q^j(z)$ обозначают определенные линейно независимые векторы с полиномиальными компонентами. При этих обозначениях формула (131,13) представится так:

$$\Psi(z) = D_1\Psi^1(z) + D_2\Psi^2(z) + \ldots + D_\mu\Psi^\mu(z), \tag{131,16}$$

где

$$\Psi^j(z) = [X'(z)]^{-1} Q^j(z). \tag{131,17}$$

Векторы

$$\Psi^1(z),\ \Psi^2(z),\ \ldots,\ \Psi^\mu(z) \tag{131,18}$$

представляют собой линейно независимые решения задачи (I′), исчезающие на бесконечности.

Таким образом, задача (I′) имеет ровно μ линейно независимых решений (131,18), исчезающих на бесконечности.

Сопоставляя предыдущие результаты и принимая во внимание (131,5), заключаем еще, что *разность чисел линейно независимых решений задач* (I) *и* (I′), *исчезающих на бесконечности, равна* (суммарному) *индексу задачи* (I).

§ 132. Неоднородная задача сопряжения[1]**.** 1°. Неоднородную задачу сопряжения для нескольких неизвестных функций мы формулируем так:

Найти кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$ *с линией скачков* L, *имеющий конечный порядок на бесконечности, по граничному условию*

$$\Phi^+(t) = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{на} \quad L, \tag{132,1}$$

где $G(t)$ *— заданная на* L *матрица класса* H *и нигде на* L *не особенная, а* $g(t)$ *— заданный на* L *вектор класса* H.

Решение этой задачи можно легко получить следующим образом.

Пусть по-прежнему $X(z)$ — каноническая матрица для однородной задачи, получаемой из (132,1) при $g(t) = 0$. Тогда по формуле (128,2)

$$G(t) = X^+(t)[X^-(t)]^{-1}.$$

Подставляя это выражение в (132,1), получим:

$$[X^+(t)]^{-1}\Phi^+(t) - [X^-(t)]^{-1}\Phi^-(t) = [X^+(t)]^{-1} g(t),$$

откуда на основании сказанного в § 121, п. 3° следует, что *все решения рассматриваемой задачи, удовлетворяющие поставленным условиям, даются формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{[X^+(t)]^{-1} g(t)\,dt}{t-z} + X(z)P(z), \tag{132,2}$$

---

[1]) Как было уже упомянуто ранее, полное и притом элементарное решение этой задачи для случая одной неизвестной функции было дано Ф. Д. Гаховым. В работе [2] Ф. Д. Гахов рассматривает также неоднородную задачу для нескольких неизвестных функций и строит непосредственно для этого случая систему интегральных уравнений Фредгольма, аналогичную системе, построенной И. Племелем для однородной задачи (J. Plemelj [2]). Однако этим путем Ф. Д. Гахову не удается получить сколько-нибудь полного решения. Между тем, как будет показано в этом параграфе, решение неоднородной задачи легко приводится к решению соответствующей однородной задачи и притом способом, аналогичным тому, которым пользуется сам Ф. Д. Гахов в случае одной неизвестной функции. Решение, приводимое здесь, было дано в статье Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа [1].

где $P(z)$ — вектор

$$P(z)=(P_1,\ P_2,\ \ldots,\ P_n),$$

причем $P_\alpha = P_\alpha(z)$ — произвольные полиномы.

Частные индексы $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ и суммарный индекс $\varkappa$ однородной задачи сопряжения, соответствующий данной задаче, мы будем называть соответственно частными индексами и суммарным индексом, или просто индексом данной задачи.

2°. С точки зрения дальнейших приложений особый интерес представляет нахождение решений, исчезающих на бесконечности.

Пусть, как в п. 2° предыдущего параграфа,

$$\varkappa_1 \geqslant \varkappa_2 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_m \geqslant 0 > \varkappa_{m+1} \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n, \tag{132,3}$$

$$\lambda = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_m,\ \mu = -\varkappa_{m+1} - \ldots - \varkappa_n. \tag{132,4}$$

Введем временно обозначение

$$[X^+(t)]^{-1} g(t) = h(t) = (h_1,\ h_2,\ \ldots,\ h_n); \tag{132,5}$$

тогда, очевидно, формулу (132,2) можно переписать так:

$$\Phi(z) = \chi^1(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h_1(t)\,dt}{t-z} + P_1(z)\right\} + \ldots + \chi^n(z)\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{h_n(t)\,dt}{t-z} + P_n(z)\right\}; \tag{132,6}$$

замечая, что при больших $|z|$

$$\int_L \frac{h_\alpha(t)\,dt}{t-z} = -z^{-1}\int_L h_\alpha(t)\,dt - z^{-2}\int_L t h_\alpha(t)\,dt - z^{-3}\int_L t^2 h_\alpha(t)\,dt - \ldots, \tag{132,7}$$

и оценивая порядки различных слагаемых правой части формулы (132,6) на бесконечности, легко заключаем, что для существования решений, исчезающих на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы свободный член $g(t)$ удовлетворял μ условиям

$$\int_L t^j h_\alpha(t)\,dt = 0,\ j = 0,\ 1,\ \ldots,\ -\varkappa_\alpha - 1;\ \alpha = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n, \tag{132,8}$$

и что при соблюдении этих условий общее решение требуемого вида дается формулой (132,2), в которой следует считать

$$P(z) = (P_{\varkappa_1 - 1},\ P_{\varkappa_2 - 1},\ \ldots,\ P_{\varkappa_m - 1},\ 0,\ 0,\ \ldots,\ 0),$$

где $P_{\varkappa_j - 1} = P_{\varkappa_j - 1}(z)$ обозначает произвольный полином степени не выше $\varkappa_j - 1$ ($P_{\varkappa_j - 1}(z) = 0$, если $\varkappa_j = 0$).

Совокупность условий (132,8) можно записать в виде одного; а именно, умножая равенства (132,8) на произвольные постоянные и складывая, получим:

$$\int_L Q(t)\,h(t)\,dt = 0, \tag{132,9}$$

где $Q(t)$ — вектор, определяемый формулой

$$Q(t) = (0,\ 0,\ \ldots,\ 0,\ Q_{-\varkappa_{m+1}-1},\ \ldots,\ Q_{-\varkappa_n - 1}),$$

причем $Q_{-\varkappa_j - 1} = Q_{-\varkappa_j - 1}(z)$ обозначает полином с произвольными коэффициентами степени не выше $(-\varkappa_j - 1)$.

Будем в дальнейшем для единообразия писать, как в предыдущем параграфе:

$$P(z)=(P_{\varkappa_1-1},\ P_{\varkappa_2-1},\ \ldots,\ P_{\varkappa_n-1}), \tag{132,10}$$

$$Q(z)=(Q_{-\varkappa_1-1},\ Q_{-\varkappa_2-1},\ \ldots,\ Q_{-\varkappa_n-1}), \tag{132,11}$$

условившись под $P_\alpha = P_\alpha(z)$, $Q_\alpha = Q_\alpha(z)$ подразумевать произвольные полиномы степени не выше α, причем $P_\alpha(z)=0$, $Q_\alpha(z)=0$, если $\alpha<0$.

При этих обозначениях мы можем сформулировать полученный результат следующим образом, приняв еще во внимание формулу (132,5):

Для существования решений задачи (132,1), *исчезающих на бесконечности, необходимо и достаточно, чтобы свободный член $g(t)$ удовлетворял условию*

$$\int_L Q(t)\,[\mathrm{X}^+(t)]^{-1}g(t)\,dt=0, \tag{132,12}$$

где $Q(t)$ — произвольный вектор вида (132,11); *при соблюдении этого условия общее решение требуемого вида дается формулой* (132,2), *где $P(z)$ — произвольный вектор вида* (132,10).

Второе слагаемое в правой части (132,2) представляет собой в нашем случае общее решение однородной задачи, получаемой из (132,1) при $g(t)=0$, исчезающее на бесконечности; это слагаемое является линейной комбинацией с произвольными постоянными коэффициентами линейно независимых решений (§ 131, п. 2°)

$$\Phi^1(z),\ \Phi^2(z),\ \ldots,\ \Phi^\lambda(z) \tag{132,13}$$

упомянутой однородной задачи, исчезающих на бесконечности.

Условие же (132,12) можно, принимая во внимание формулу [1]

$$\int_L Q(t)\,[\mathrm{X}^+(t)]^{-1}g(t)\,dt=\int_L g(t)\,[\mathrm{X}'^+(t)]^{-1}Q(t)\,dt$$

и формулу (131,13), записать еще так:

$$\int_L \Psi^+(t)\,g(t)\,dt=0, \tag{132,14}$$

где $\Psi^+(t)$ обозначает граничное значение (слева) общего решения $\Psi(z)$ однородной задачи, союзной с (132,1), исчезающее на бесконечности; это условие эквивалентно μ условиям

$$\int_L \Psi^{j+}(t)\,g(t)\,dt=0,\quad j=1,\ 2,\ \ldots,\ \mu, \tag{132,15}$$

где

$$\Psi^{1+}(t),\ \Psi^{2+}(t),\ \ldots,\ \Psi^{\mu+}(t) \tag{132,16}$$

— граничные значения линейно независимых решений $\Psi^1(z)$, $\Psi^2(z)$, ..., $\Psi^\mu(z)$ однородной задачи, союзной с (132,1), исчезающих на бесконечности (§ 131, п. 2°). Вследствие линейной независимости последних векторов, линейно независимы, как легко видеть, и векторы (132,16).

---

[1] См. § 118, формула (118,6).

§ 133. О решении задачи сопряжения методом последовательных приближений. Мы видели, что решение задачи сопряжения как однородной, так и неоднородной сводится, по существу, к построению фундаментальной матрицы решений, при помощи которой можно построить нормальную и каноническую матрицы. Для построения фундаментальной матрицы мы применили метод, основанный на теории сингулярных интегральных уравнений. В § 122 упоминался метод И. Племеля, основанный на применении интегральных уравнений Фредгольма.

Недавно Г. Ф. Манджавидзе [5], [6] дал новый весьма простой способ построения фундаментальной матрицы методом последовательных приближений [1]). Мы приводим здесь краткое изложение этого способа.

Нам при этом придется опираться на некоторые элементарные понятия и предложения функционального анализа, отчасти уже изложенные в § 49.

Прежде чем приступить к изложению сущности метода, отметим некоторые свойства нормы, введенной в § 49, которыми будем пользоваться в настоящем параграфе.

Мы будем считать для простоты, что L — простой замкнутый гладкий контур [2]). Через S^+ и S^- мы обозначим соответственно конечную и бесконечную области, ограниченные L; мы будем считать, что положительное направление на L оставляет область S^+ слева.

Рассмотрим множество функций $f(t)$, заданных на L и удовлетворяющих условию $H(\alpha)$ при $0<\alpha\leqslant 1$. Согласно сказанному в § 49, это множество составляет полное нормированное линейное пространство H^α, если определить норму следующим образом:

$$|f| = \max|f(t)| + \sup\frac{|f(t_2)-f(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha}$$

(t, t_1, $t_2 \in L$). Эту норму мы будем здесь обозначать через $|f|_\alpha$, явно указывая показатель α.

Если $F(t)$ — матрица с элементами $f_{ik}(t)$, удовлетворяющими условию $H(\alpha)$, то под $|F|_\alpha$ мы будем понимать $\max|f_{ik}|_\alpha$, а под $M(F)$ — максимальную среди величин $\max|f_{ik}(t)|$, $t\in L$.

Нетрудно убедиться, что если $f_1(t)$ и $f_2(t)$ — функции, удовлетворяющие условию $H(\alpha)$, то

$$|f_1f_2|_\alpha \leqslant \max|f_1(t)|\cdot|f_2|_\alpha + \max|f_2(t)|\cdot|f_1|_\alpha, \tag{133,1}$$

и

$$|f_1f_2|_\alpha \leqslant |f_1|_\alpha\cdot|f_2|_\alpha. \tag{133,2}$$

Для нормы произведения квадратных матриц $F_1(t)$ и $F_2(t)$ порядка n будем иметь аналогичные неравенства

$$|F_1F_2|_\alpha \leqslant n\{M(F_1)\cdot|F_2|_\alpha + M(F_2)\cdot|F_1|_\alpha\} \tag{133,1a}$$

и

$$|F_1F_2|_\alpha \leqslant n|F_1|_\alpha\cdot|F_2|_\alpha. \tag{133,2a}$$

---

[1]) Этот метод, как уже упоминалось в § 122 (сноска [2]) на стр. 419), совершенно отличен от метода Биркгофа, упомянутого там же.

[2]) Мы знаем, что, умея строить фундаментальные матрицы для случая простых замкнутых контуров, можно построить фундаментальную матрицу для случая совокупности нескольких таких контуров (§ 129, п. 2°).

На основании сказанного в § 18 можно легко установить, проследив за ходом рассуждений, что если две функции $\varphi(t)$ и $\psi(t)$, удовлетворяющие условию $H(\alpha)$ при $\alpha<1$, связаны соотношением

$$\psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt,$$

то имеет место неравенство

$$\sup\frac{|\psi(t_2)-\psi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha}\leqslant C_\alpha\sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha},$$

где C_α — постоянная, не зависящая от функции $\varphi(t)$.

Кроме того, очевидно,

$$|\psi(t_0)|\leqslant\frac{1}{2\pi}\int\limits_L \frac{ds}{|t-t_0|^{1-\alpha}}\cdot\sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha};$$

складывая эти неравенства, легко заключить, что

$$\|\psi\|_\alpha\leqslant A_\alpha\sup\frac{|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)|}{|t_2-t_1|^\alpha}\leqslant A_\alpha\|\varphi\|_\alpha, \qquad (133,3)$$

где A_α — постоянная, не зависящая от $\varphi(t)$.

Если $\varphi(t)$ и $\psi(t)$ связаны соотношением

$$\psi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}+\frac{1}{2}\varphi(t_0),$$

то, очевидно, также имеет место неравенство

$$|\psi|_\alpha\leqslant B_\alpha|\varphi|_\alpha, \qquad (133,3\text{a})$$

где постоянная B_α не зависит от $\varphi(t)$. Такие же неравенства будем иметь для матриц.

Неравенство (133,3а) выражает аналог известной теоремы Рисса [1]).

Рассмотрим теперь граничную задачу предыдущего параграфа

$$\Phi^+(t)=G(t)\Phi^-(t)+g(t)\quad\text{на}\quad L; \qquad (133,4)$$

здесь под $g(t)$ (как и под $G(t)$) мы будем подразумевать также квадратную матрицу, а под $\Phi(z)$ — искомую кусочно-голоморфную квадратную матрицу порядка n (это делается для удобства дальнейших рассуждений).

Будем считать, что $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют на L условию H с каким-нибудь показателем $\mu\leqslant 1$; мы сохраняем здесь и другие ограничения и обозначения предыдущего параграфа.

Возьмем матрицу $R(z)$, элементы которой являются рациональными функциями, полюсы которых не расположены на L, такую, что

$$|G-R|_\nu<\varepsilon,$$

где ε — некоторое положительное число, а число $\nu<\mu$ [2]). Если число ε

---

[1]) См. M. Riesz [1].

[2]) Возможность приближения рациональными функциями данной функции $f(t)$, удовлетворяющей условию H с показателем μ, по норме пространства H^ν ($\nu<\mu$; вообще говоря, нельзя брать $\nu=\mu$) нетрудно показать: сначала доказывается, что к $f(t)$ можно приблизиться кусочно-линейными функциями от t, т. е. функциями, имеющими вид a_kt+b_k на дугах $\alpha_k\beta_k$, $\sum\alpha_k\beta_k=L$, a_k, b_k — постоянные; затем устанавливается возможность приближения кусочно-линейных функций функциями, имеющими непрерывную производную по t; наконец, легко показать возможность приближения таких функций рациональными функциями.

достаточно мало, то, очевидно, $\det R(t) \neq 0$ на L, причем $|G^{-1} - R^{-1}|_\nu$ — также сколь угодно малая величина (порядка ε), а $|R^{-1}|_\nu$ — ограниченная величина:

$$|G^{-1} - R^{-1}|_\nu \leqslant C\varepsilon, \quad |R^{-1}|_\nu \leqslant C_1,$$

где C, C_1 — постоянные.

Вводя обозначения

$$\varphi(z) = \Phi(z) \text{ при } z \in S^+, \quad \varphi(z) = R(z)\Phi(z) \text{ при } z \in S^-,$$

перепишем граничное условие (133,4) в виде

$$\varphi^+(t) - \varphi^-(t) = G_0(t)\varphi^-(t) + g(t), \tag{133,5}$$

где

$$G_0 = (G - R)R^{-1};$$

в силу (133,2а)

$$|G_0|_\nu \leqslant n|G - R|_\nu \cdot |R^{-1}|_\nu \leqslant nC_1\varepsilon. \tag{133,5а}$$

Рассмотрим последовательность кусочно-голоморфных матриц

$$\varphi_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_0(t)\varphi_{m-1}^-(t)\,dt}{t-z} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(t)\,dt}{t-z}, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{133,6}$$

где $\varphi_0^-(t) = 0$. Очевидно, что $\varphi_m^+(t)$, $\varphi_m^-(t)$ удовлетворяют условию $H(\mu)$.

Из (133,6) следует:

$$\varphi_{m+1}(z) - \varphi_m(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_0(t)\,[\varphi_m^-(t) - \varphi_{m-1}^-(t)]\,dt}{t-z};$$

применяя формулы Сохоцкого — Племеля, получаем без труда

$$\varphi_{m+1}^-(t_0) - \varphi_m^-(t_0) =$$
$$= \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{G_0(t)\,[\varphi_m^-(t) - \varphi_{m-1}^-(t)] - G_0(t_0)\,[\varphi_m^-(t_0) - \varphi_{m-1}^-(t_0)]}{t-t_0}\,dt. \tag{133,7}$$

Следовательно, в силу неравенства (133,3)

$$|\varphi_{m+1}^- - \varphi_m^-|_\nu \leqslant A_\nu |G_0 \cdot (\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-)|_\nu \leqslant$$
$$\leqslant nA_\nu |G_0|_\nu \cdot |\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-|_\nu \leqslant A'_\nu\varepsilon\,|\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-|_\nu, \tag{133,8}$$

где $A'_\nu = n^2C_1A_\nu$.

Из неравенства (133,8) вытекает, что

$$|\varphi_{m+1}^- - \varphi_m^-|_\nu \leqslant (A'_\nu\varepsilon)^m |\varphi_1^-|_\nu, \quad m = 1, 2, \ldots, \tag{133,9}$$

следовательно, если $A'_\nu\varepsilon < 1$, то ряд

$$\sum_{m=0}^{\infty} |\varphi_{m+1}^- - \varphi_m^-|_\nu$$

сходится.

Таким образом, последовательность $\varphi_m^-(t)$ сходится по норме пространства H^ν к матрице $\varphi^-(t)$. Аналогично, $\varphi_m^+(t)$ сходится к матрице $\varphi^+(t)$. Матрицы $\varphi^+(t)$ и $\varphi^-(t)$ удовлетворяют на L условию $H(\nu)$ и являются граничными значениями кусочно-голоморфной матрицы $\varphi(z)$, исчезающей на бесконечности; при этом соблюдается граничное условие (133,5).

Возьмем теперь $g(t)$ равным $G(t)R^{-1}(t)$. Тогда из граничного условия (133,5) следует:

$$\varphi^+(t) = G(t)R^{-1}(t)[\varphi^-(t)+E]. \tag{133,10}$$

Заменяя теперь в приведенных выше рассуждениях матрицу $G(t)$ матрицей $G^{-1}(t)$ (тогда, очевидно, R можно заменить на R^{-1}), построим кусочно-голоморфную матрицу $\psi(z)$, исчезающую на бесконечности и удовлетворяющую граничному условию

$$\psi^+(t) = G^{-1}(t)R(t)[\psi^-(t)+E]. \tag{133,11}$$

Из (133,10) и (133,11) следует, что

$$\det\varphi^+(t)\cdot\det\psi^+(t) = \det[\varphi^-(t)+E]\cdot\det[\psi^-(t)+E].$$

Поэтому функция

$$\lambda(z) = \begin{cases} \det\varphi(z)\cdot\det\psi(z) & \text{при } z\in S^+, \\ \det[\varphi(z)+E]\cdot\det[\psi(z)+E] & \text{при } z\in S^- \end{cases}$$

голоморфна на всей плоскости; так как она обращается в единицу на бесконечности, то $\lambda(z)\equiv 1$. Отсюда следует, что $\det\varphi(z)\neq 0$ в S^++L, $\det[\varphi(z)+E]\neq 0$ в S^-+L. Таким образом, матрица

$$\Phi(z) = \begin{cases} \varphi(z) & \text{при } z\in S^+, \\ R^{-1}(z)[\varphi(z)+E] & \text{при } z\in S^- \end{cases}$$

является фундаментальной кусочно-мероморфной матрицей решений однородной задачи

$$\Phi^+(z) = G(t)\Phi^-(t).$$

Исходя из этого решения, можно построить, как мы уже видели выше, нормальную и каноническую матрицы. Таким образом, задача решена.

Предыдущий метод распространяется и на случай, когда $G(t)$ и $g(t)$ принадлежат классу H_0 (Г. Ф. Манджавидзе [6]), а также, в известной мере, на случай, когда матрица $G(t)$ лишь непрерывна, а $g(t)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_p$ при $p>1$ (Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе [1]).

З а м е ч а н и е. Приведенные выше рассуждения показывают, что если $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию H с показателем μ, то граничные значения любого решения задачи (133,4) удовлетворяют условию H с показателем $\mu-\eta$, где η — сколь угодно малое положительное число. Проведя дополнительные рассуждения, можно показать, что при $\mu<1$ граничные значения решений будут удовлетворять условию H с показателем μ.

В самом деле, из равенства (133,7) вытекает:

$$|\varphi^-_{m+1}-\varphi^-_m|_\mu \leqslant A_\mu|G_0(\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1})|_\mu;$$

в силу же (133,1а)

$$|G_0(\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1})|_\mu \leqslant n\{M(G_0)|\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1}|_\mu + M(\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1})\cdot|G_0|_\mu\}.$$

Но

$$M(G_0)\leqslant|G_0|_\nu < nC_1\varepsilon,$$

$$M(\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1})\leqslant|\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1}|_\nu\leqslant(A'_\nu\varepsilon)^{m-1}|\varphi^-_1|_\nu,$$

последнее в силу (133,9). Таким образом,

$$|\varphi^-_{m+1}-\varphi^-_m|_\mu\leqslant D_1\varepsilon|\varphi^-_m-\varphi^-_{m-1}|_\mu + D_2(A'_\nu\varepsilon)^{m-1}, \tag{133,12}$$

где

$$D_1 = n^2 C_1 A_\mu, \quad D_2 = n A_\mu |G_0|_\mu |\varphi_1^-|_\nu.$$

Из неравенства (133,12) вытекает:

$$\sum_{m=1}^{N} |\varphi_{m+1}^- - \varphi_m^-|_\mu \leqslant D_1 \varepsilon \sum_{m=1}^{N+1} |\varphi_m^- - \varphi_{m-1}^-|_\mu + D_2 \sum_{m=1}^{N} (A'_\nu \varepsilon)^{m-1}$$

или

$$(1 - D_1\varepsilon) \sum_{m=1}^{N} |\varphi_{m+1}^- - \varphi_m^-|_\mu \leqslant D_1 \varepsilon |\varphi_1^-|_\mu + D_2 \sum_{m=1}^{N} (A'_\nu \varepsilon)^{m-1}.$$

Следовательно, если ε достаточно мало, а именно, если $D_1\varepsilon < 1$, $A'_\nu\varepsilon < 1$, то ряд $\sum_{m=1}^{\infty} |\varphi_{m+1}^- - \varphi_m^-|_\mu$ сходится, т. е. последовательность $\varphi_m^-(t)$ сходится по норме пространства H^μ и предельная матрица удовлетворяет на L условию H с показателем μ.

III. Приложение к исследованию систем сингулярных интегральных уравнений

Результаты, изложенные в предыдущем отделе, полученные при использовании результатов отдела I, позволяют в свою очередь существенно дополнить теорию сингулярных уравнений, изложенную в отделе I.

§ 134. Приложение к исследованию характеристической системы сингулярных интегральных уравнений. Рассмотрим систему сингулярных интегральных уравнений, которую мы назвали в § 119 характеристической:

$$\sum_{\beta=1}^{n} A_{\alpha\beta}(t_0)\varphi_\alpha(t_0) + \sum_{\beta=1}^{n} \frac{B_{\alpha\beta}(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi_\beta(t)\,dt}{t - t_0} = f_\alpha(t_0), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, n, \tag{134,1}$$

или в матричной записи

$$\mathbf{K}^0\varphi \equiv A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t - t_0} = f(t_0), \tag{134,2}$$

где

$$A(t_0) = \| A_{\alpha\beta}(t_0) \|, \quad B(t_0) = \| B_{\alpha\beta}(t_0) \|, \qquad \alpha, \beta = 1, 2, \ldots, n,$$

— матрицы, заданные на L и принадлежащие классу H,

$$f(t_0) = (f_1, f_2, \ldots, f_n)$$

и

$$\varphi(t_0) = (\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)$$

— соответственно заданный и искомый векторы класса H.

Мы будем считать, что система (134,1) (или, что то же, уравнение (134,2)) нормальная, т. е. что основные матрицы

$$S(t) = A(t) + B(t), \quad D(t) = A(t) - B(t) \tag{134,3}$$

нигде на L не особенные, т. е. $\det S \neq 0$, $\det D \neq 0$ всюду на L.

Решение системы (134,1) может быть весьма просто сведено к решению задачи сопряжения, с которой она тесно связана (эту связь мы уже использовали в § 123 с обратной целью).

А именно, введем в рассмотрение кусочно-голоморфный вектор

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \qquad (134,4)$$

Тогда на основании формул Сохоцкого — Племеля

$$\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0), \qquad \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=\Phi^+(t_0)+\Phi^-(t_0). \qquad (134,5)$$

Вносия эти значения в (134,2) и принимая во внимание (134,3), получаем (написав t вместо t_0)

$$S(t)\,\Phi^+(t)=D(t)\,\Phi^-(t)+f(t)$$

или

$$\Phi^+(t)=G(t)\,\Phi^-(t)+g(t), \qquad (134,6)$$

где положено

$$G(t)=[S(t)]^{-1}D(t), \quad g(t)=[S(t)]^{-1}f(t). \qquad (134,7)$$

Таким образом, уравнение (134,2) свелось к неоднородной задаче сопряжения (134,6) в том смысле, что каждому решению уравнения (134,2) отвечает по формуле (134,4) определенное решение задачи (134,6), исчезающее на бесконечности, а каждому такому решению задачи (134,6) отвечает по первой формуле (134,5) определенное решение уравнения (134,2).

На основании результата, полученного в п. 2° § 132, задача (134,6) допускает решения, исчезающие на бесконечности, в том и только том случае, когда соблюдено условие (132,12), и в этом случае решение дается формулой (132,2), в которой $P(z)$ имеет вид (132,10).

Из формулы (132,2) на основании формул Сохоцкого — Племеля следует [1]:

$$\Phi^+(t_0)=X^+(t_0)\left\{\frac{1}{2}[X^+(t_0)]^{-1}g(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{[X^+(t)]^{-1}g(t)\,dt}{t-t_0}\right\}-\frac{1}{2}X^+(t_0)P(t_0),$$

$$\Phi^-(t_0)=X^-(t_0)\left\{-\frac{1}{2}[X^+(t_0)]^{-1}g(t_0)+\right.$$
$$\left.+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{[X^+(t)]^{-1}g(t)\,dt}{t-t_0}\right\}-\frac{1}{2}X^-(t_0)P(t_0), \qquad (134,8)$$

откуда согласно формуле $\varphi(t_0)=\Phi^+(t_0)-\Phi^-(t_0)$ может быть получено выражение для искомого решения $\varphi(t)$. Вводя для упрощения этого последнего выражения еще следующие обозначения [2]:

$$Z(t)=S(t)\,X^+(t)=D(t)\,X^-(t), \qquad (134,9)$$

$$A^*(t)=\frac{1}{2}[S^{-1}(t)+D^{-1}(t)], \quad B^*(t)=-\frac{1}{2}[S^{-1}(t)-D^{-1}(t)], \qquad (134,10)$$

---

[1]) Мы пишем теперь $-\frac{P}{2}$ вместо P, что, конечно, не меняет дела.

[2]) В (134,9) и при выводе (134,10) мы используем соотношение

$$X^+=GX^-, \quad G=S^{-1}D.$$

получаем:

$$\varphi(t_0) = A^*(t_0) f(t_0) - \frac{B^*(t_0) Z(t_0)}{\pi i} \int_L \frac{[Z(t)]^{-1} f(t)\, dt}{t - t_0} + B^*(t_0) Z(t_0) P(t_0); \tag{134,11}$$

необходимое и достаточное условие (132,12) при этих обозначениях запишется, как легко видеть, так:

$$\int_L f(t) [Z'(t)]^{-1} Q(t)\, dt = 0. \tag{134,12}$$

Напомним, что в формулах (134,11), (134,12)

$$\begin{aligned} P(t) &= (P_{\varkappa_1-1}, P_{\varkappa_2-1}, \ldots, P_{\varkappa_n-1}), \\ Q(t) &= (Q_{-\varkappa_1-1}, Q_{-\varkappa_2-1}, \ldots, Q_{-\varkappa_n-1}), \end{aligned} \tag{134,13}$$

где $P_\alpha = P_\alpha(t)$, $Q_\alpha = Q_\alpha(t)$ обозначают произвольные полиномы степени не выше α, причем $P_\alpha(t) = 0$, $Q_\alpha(t) = 0$, если $\alpha < 0$.

Пусть по-прежнему

$$\begin{gathered} \varkappa_1 \geqslant \varkappa_1 \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_m \geqslant 0 > \varkappa_{m+1} \geqslant \ldots \geqslant \varkappa_n, \\ \lambda = \varkappa_1 + \varkappa_2 + \ldots + \varkappa_m, \quad \mu = -\varkappa_{m+1} - \ldots - \varkappa_n. \end{gathered} \tag{134,14}$$

Вектор $P(t)$, содержащийся в правой части формулы (134,11), можно представить следующим образом (§ 131, п. 2°):

$$P(t) = C_1 P^1(t) + C_2 P^2(t) + \ldots + C_\lambda P^\lambda(t), \tag{134,15}$$

где $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$ — произвольные постоянные, а $P^1(t), P^2(t), \ldots, P^\lambda(t)$ — вполне определенные, линейно независимые векторы с полиномиальными компонентами.

В соответствии с этим в формуле (134,11)

$$B^*(t_0) Z(t_0) P(t_0) = C_1 \gamma^1(t_0) + C_2 \gamma^2(t_0) + \ldots + C_\lambda \gamma^\lambda(t_0), \tag{134,16}$$

где

$$\gamma^\alpha(t_0) = B^*(t_0) Z(t_0) P^\alpha(t_0), \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, \lambda, \tag{134,17}$$

— определенные векторы класса H; легко видеть, что они линейно независимы. В самом деле, если правая часть (134,16) равна тождественно нулю при некоторых значениях постоянных $C_1, C_2, \ldots, C_\lambda$, то

$$B^*(t_0) Z(t_0) P(t_0) = -\frac{1}{2} [X^+(t_0) - X^-(t_0)] P(t_0) = 0,$$

откуда следует, что вектор $X(z) P(z)$ голоморфен на всей плоскости; так как он исчезает на бесконечности, то необходимо $X(z) P(z) = 0$, откуда следует, что $P(z) = 0$ и, значит, $C_1 = C_2 = \ldots = C_\lambda = 0$, а это доказывает наше утверждение.

Вектор $Q(t)$ в условии (134,12) можно представить так (§ 131, п. 2°):

$$Q(t) = D_1 Q^1(t) + D_2 Q^2(t) + \ldots + D_\mu Q^\mu(t), \tag{134,18}$$

где $D_1, D_2, \ldots, D_\mu$ — произвольные постоянные, а $Q^1(t), Q^2(t), \ldots, Q^\mu(t)$ — определенные линейно независимые векторы с полиномиальными компонентами. Поэтому условие (134,12) эквивалентно μ условиям

$$\int_L f(t) \psi^\alpha(t)\, dt = 0, \qquad \alpha = 1, 2, \ldots, \mu, \tag{134,19}$$

где

$$\psi^\alpha(t) = [Z'(t)]^{-1} Q^\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \mu. \tag{134,20}$$

Векторы $\psi^\alpha(t)$ принадлежат классу H. Они, как легко видеть, линейно независимы. В самом деле, если при некоторых значениях постоянных $D_1, D_2, \ldots, D_\mu$ имеем

$$D_1\psi^1(t) + D_2\psi^2(t) + \ldots + D_\mu\psi^\mu(t) = 0,$$

то $[Z'(t)]^{-1} Q(t) = 0$, где $Q(t)$ определяется формулой (134,18); но тогда $Q(t) = 0$, так как $\det [Z(t)]^{-1}$ не равен, очевидно, нулю, и поэтому в силу линейной независимости векторов $Q^\alpha(t)$

$$D_1 = D_2 = \ldots = D_\mu = 0.$$

Таким образом, мы имеем следующий результат:

Необходимые и достаточные условия разрешимости системы (134,1), или, что то же самое, уравнения (134,2), *даются соотношением* (134,12), *которое эквивалентно* μ *соотношениям* (134,19). *При соблюдении этих условий общее решение дается формулой* (134,11), *содержащей линейным образом* λ *произвольных постоянных.*

Числа $\varkappa_1, \varkappa_2, \ldots, \varkappa_n$ и $\varkappa$ мы будем теперь называть **частными индексами** и **суммарным индексом** системы (134,1), или, что то же, уравнения (134,2), или еще оператора $\mathbf{K}^0$. Суммарный индекс мы будем называть также просто **индексом**.

Отметим, что если все частные индексы неотрицательны, то условие разрешимости всегда соблюдено и решение содержит $\varkappa$ произвольных постоянных.

Рассмотрим теперь однородное уравнение, получающееся из (134,2) при $f = 0$. Условие разрешимости (134,12) в этом случае соблюдено, и мы имеем следующий результат:

Однородное уравнение

$$\mathbf{K}^0\varphi = 0$$

имеет ровно λ *линейно независимых решений*. В частности, если $\lambda = 0$, т. е. если все частные индексы неположительны, однородное уравнение не имеет решений, отличных от нулевого.

§ 135. Исследование системы, союзной с характеристической. 1°. Рассмотрим теперь систему сингулярных интегральных уравнений, союзную с характеристической системой (134,1), т. е. систему, которую в матричной записи можно представить в виде уравнения

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi \equiv A'(t_0)\,\psi(t_0) - \frac{1}{\pi i}\int_L \frac{B'(t)\,\psi(t)\,dt}{t - t_0} = g(t_0), \tag{135,1}$$

где $A'(t_0)$, $B'(t_0)$ — матрицы, получаемые транспонированием матриц $A(t_0)$, $B(t_0)$ предыдущего параграфа, $g(t_0)$ — заданный вектор класса H, $\psi(t)$ — искомый вектор класса H.

Уравнение вида (135,1) можно, разумеется, рассматривать самостоятельно, но удобнее его связать с системой (134,1) или, что все равно, с уравнением (134,2); это, конечно, не нарушает общности.

Уравнение (135,1) также просто, но несколько иным образом, сводится к некоторой задаче сопряжения.

Введем с этой целью кусочно-голоморфный вектор

$$\Psi(z)=\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B'(t)\,\psi(t)\,dt}{t-z}, \tag{135,2}$$

исчезающий на бесконечности. Принимая во внимание формулы

$$B'(t_0)\,\psi(t_0)=\frac{1}{2}[\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0)],$$

$$\frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{B'(t)\,\psi(t)\,dt}{t-t_0}=\frac{1}{2}[\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)],$$

заключаем, что уравнение (135,1) эквивалентно следующей задаче: *найти вектор $\psi(t)$, определенный на L, удовлетворяющий условию H, и кусочно-голоморфный вектор $\Psi(z)$, исчезающий на бесконечности, по условиям*

$$2A'(t_0)\,\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)+\Psi^-(t_0)+2g(t_0),$$

$$2B'(t_0)\,\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)-\Psi^-(t_0).$$

Последние же условия в свою очередь эквивалентны условиям (получаемым из предыдущих сложением и вычитанием)

$$S'(t_0)\,\psi(t_0)=\Psi^+(t_0)+g(t_0), \quad D'(t_0)\,\psi(t_0)=\Psi^-(t_0)+g(t_0), \tag{135,3}$$

где

$$S'(t_0)=A'(t_0)+B'(t_0), \quad D'(t_0)=A'(t_0)-B'(t_0)$$

или

$$\left.\begin{aligned}\psi(t_0)&=[S'(t_0)]^{-1}\Psi^+(t_0)+[S'(t_0)]^{-1}g(t_0),\\ \psi(t_0)&=[D'(t_0)]^{-1}\Psi^-(t_0)+[D'(t_0)]^{-1}g(t_0)\end{aligned}\right\}\ \text{на } L. \tag{135,4}$$

Сравнивая правые части предыдущих равенств, приходим к задаче сопряжения (пишем t вместо t_0)

$$\Psi^+(t)=[G'(t)]^{-1}\Psi^-(t)+\{[G'(t)]^{-1}-E\}\,g(t), \tag{135,5}$$

где, как всегда, $G'(t)$ обозначает матрицу, получаемую транспонированием матрицы

$$G(t)=[S(t)]^{-1}D(t), \tag{135,6}$$

а E — единичная матрица, причем требуется найти решение, исчезающее на бесконечности. Решив эту задачу, мы найдем $\psi(t)$ по одной из формул (135,4).

Таким образом, решение системы (135,1), союзной с системой (134,1), сводится к решению задачи сопряжения (135,5), союзной с задачей (134,6) предыдущего параграфа, при том же условии относительно поведения решений на бесконечности.

Мы знаем, что если $\mathrm{X}(z)$ — каноническая матрица решений однородной задачи сопряжения, соответствующей (134,6), то $[\mathrm{X}'(z)]^{-1}$ — каноническая матрица решений однородной задачи сопряжения, соответствующей (135,5).

Так как, далее, главная трудность решения задачи сопряжения, однородной или неоднородной, заключается в нахождении канонической матрицы, то можно сказать, что задачи решения союзных систем сингулярных уравнений (134,1) и (135,1), т. е. уравнений

$$\mathbf{K}^0\varphi=f, \quad \mathbf{K}^{0\prime}\psi=g,$$

представляют собой эквивалентные задачи.

2°. Рассмотрим, в частности, однородное уравнение (систему уравнений)

$$\mathbf{K}^{0\prime}\psi = 0,$$

союзное с уравнением

$$\mathbf{K}^{0}\varphi = 0.$$

Соответствующая ему задача сопряжения (135,5) обращается в однородную задачу сопряжения

$$\Psi^{+}(t) = [G'(t)]^{-1}\Psi^{-}(t).$$

Все решения этой последней задачи, исчезающие на бесконечности, даются формулой (§ 131, п. 2°)

$$\Psi(z) = [X'(z)]^{-1}Q(z), \tag{135,7}$$

где при обозначениях § 131, п. 2°

$$Q(z) = (Q_{-\varkappa_1-1}, Q_{-\varkappa_2-1}, \ldots, Q_{-\varkappa_n-1}), \tag{135,8}$$

причем $Q_\alpha = Q_\alpha(z)$ обозначает произвольный полином степени не выше α ($Q_\alpha(z) = 0$, если $\alpha < 0$).

Искомое же общее решение уравнения $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = 0$ найдем по любой из формул (135,4), в которых следует теперь считать $g(t_0) = 0$. Если при этом мы используем обозначение (134,9), то получим искомое общее решение в виде

$$\psi(t) = [Z'(t)]^{-1}Q(t) \tag{135,9}$$

или, вспоминая, что согласно формуле (131,15)

$$Q(t) = D_1Q^1(t) + D_2Q^2(t) + \ldots + D_\mu Q^\mu(t), \tag{135,10}$$

где $D_1, D_2, \ldots, D_\mu$ — произвольные постоянные, а $Q^1(t), Q^2(t), \ldots, Q^\mu(t)$ — определенные линейно независимые векторы с полиномиальными компонентами,

$$\psi(t) = D_1\psi^1(t) + D_2\psi^2(t) + \ldots + D_\mu\psi^\mu(t), \tag{135,11}$$

где

$$\psi^\alpha(t) = [Z'(t)]^{-1}Q^\alpha(t), \quad \alpha = 1, 2, \ldots, \mu, \tag{135,12}$$

представляют собой, очевидно, линейно независимые решения однородного уравнения $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = 0$.

Мы видим теперь, что векторы $\psi^\alpha(t)$, $\alpha = 1, 2, \ldots, \mu$, фигурирующие в условиях (134,19) разрешимости уравнения $\mathbf{K}^0\varphi = f$ и определяемые формулой (134,20), совпадающей с формулой (135,12), представляют собой полную систему линейно независимых решений союзного однородного уравнения $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = 0$. Этого и следовало ожидать на основании общей теоремы I § 120.

3°. В предыдущем параграфе было показано, что число линейно независимых решений однородного уравнения $\mathbf{K}^0\varphi = 0$ равно λ; только что мы убедились, что число линейно независимых решений союзного однородного уравнения $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = 0$ равно μ. Вспоминая, что $\lambda - \mu = \varkappa$, приходим к следующему заключению:

Разность чисел линейно независимых решений союзных однородных уравнений $\mathbf{K}^0\varphi = 0$ *и* $\mathbf{K}^{0\prime}\psi = 0$ *равна (суммарному) индексу оператора* $\mathbf{K}^0$.

Сопоставляя этот результат с теоремой II § 120 и вспоминая, что по определению индекс оператора $\mathbf{K}$, имеющего характеристической частью оператор $\mathbf{K}^0$, равен индексу этого последнего, получаем доказательство теоремы III § 120, высказанной там без доказательства.

§ 136. О применении решения задачи сопряжения к регуляризации систем сингулярных уравнений. 1°. Полученные в §§ 134, 135 решения характеристической системы сингулярных уравнений и союзной с ней системы легко приводят к способам регуляризации системы сингулярных уравнений, совершенно аналогичным тем, которые были указаны в § 57 для случая одного уравнения.

Исходя из этих способов, можно, в частности, получить основные теоремы, доказанные в § 120 иным путем. Именно таким образом эти теоремы и были впервые (если не считать теоремы I, доказанной впервые Ж. Жиро) доказаны в работе, выполненной Н. П. Векуа, который воспользовался лишь общими моими указаниями. Эта работа, несколько упрощенная и дополненная мною (наиболее существенным добавлением является явное и эффективное выражение для индекса $\varkappa$), была опубликована в виде нашей совместной статьи (Н. И. Мусхелишвили и Н. П. Векуа [1]); часть ее существенно использована в отделе II настоящей главы.

Упомянутые только что способы регуляризации в общем случае менее эффективны, чем способ, указанный в § 120, так как они связаны с задачей сопряжения для нескольких неизвестных функций, которая не решается, вообще говоря, в замкнутом виде в противоположность случаю о д н о й неизвестной функции (см. еще п. 2°).

Однако в ряде частных случаев, представляющих большой практический интерес, задача сопряжения, соответствующая рассматриваемой системе сингулярных интегральных уравнений, может быть решена эффективно, и тогда упомянутые только что способы регуляризации оказываются весьма полезными и с практической точки зрения.

Это, например, имеет место, когда компоненты матриц $A(t)$, $B(t)$ и, следовательно, матрицы $G(t) = [A(t) + B(t)]^{-1}[A(t) - B(t)]$ — рациональные функции (§ 129), и в некоторых других случаях [1]).

2°. Метод исследования сингулярного уравнения, изложенный в § 55, основанный на теореме эквивалентности И. Н. Векуа, может быть также обобщен на систему сингулярных уравнений. Это сделано в интересной статье Н. П. Векуа [2], к которой мы и отсылаем читателя. Следует особо отметить, что приведение системы сингулярных уравнений к эквивалентной системе уравнений Фредгольма осуществляется при этом без фактического решения соответствующей задачи сопряжения, что делает этот способ регуляризации эффективным.

Обобщение результата И. Н. Векуа, указанного в § 59, п. 1°, на случай системы уравнений дано в заметке Н. П. Векуа [10].

§ 137. Краткие указания относительно некоторых обобщений и приложений. 1°. Из важнейших обобщений изложенных в настоящей главе результатов, имеющих существенное значение для приложений к ряду вопросов, упомянем в первую очередь обобщение решения задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций и теории систем сингулярных уравнений на случай разрывных коэффициентов.

Для одного частного случая однородной задачи сопряжения с разрывными коэффициентами, а именно, когда коэффициенты кусочно-постоянны (т. е. для случая, соответствующего задаче Римана в ее пер-

---

[1]) См. Н. П. Векуа и Д. А. Квеселава [1], [2], Н. Г. Чеботарев и Ф. Д. Гахов [1], Ф. Д. Гахов [5], Д. И. Шерман [7], Г. Н. Чеботарев [1], [2]; см. также § 129 настоящей книги.

воначальной постановке; см. § 122), решение было дано И. Племелем в его неоднократно цитированной работе J. Plemelj [2].

Решение задачи сопряжения и системы сингулярных уравнений для случая коэффициентов, принадлежащих классу H_0, было дано Н. П. Векуа [3], [4]. В этих работах рассматриваются системы, которые получаются из уравнений (96,11), (96,12), если заменить в них неизвестные функции φ, ψ и правые части f, g векторами, а функцию $k(t_0, t)$ — матрицей. В работе Н. П. Векуа [6] предыдущие результаты применяются к решению сингулярного уравнения $\mathbf{K}\varphi = f$, где $\mathbf{K}$ — оператор, определяемый формулой (I) § 96, в которой $K(t_0, t)$—функция класса H_0; от $\mathbf{K}$ уже не требуется, чтобы он приводился к одному из видов (a), (b) того же параграфа. В работе Н. П. Векуа [7] решается аналогичный вопрос для системы сингулярных уравнений. Изложение указанных результатов можно найти в монографии Н. П. Векуа [16].

Несколько иной способ решения задачи сопряжения с разрывными коэффициентами указан в статье Ф. Д. Гахова [6]. Одно обобщение дано в статье Л. Г. Магнарадзе [7]. Некоторые случаи, когда в задаче сопряжения $\det G(t)$ может обращаться в нуль или бесконечность, рассмотрены в работах Ф. Д. Гахова [7], [8].

В названных выше работах речь идет о случае, когда L состоит из гладких контуров. Случай кусочно-гладких простых контуров рассмотрен в статье Н. П. Векуа [14]; см. также его монографию [16].

Обобщение результатов, изложенных в §§ 110, 111, на случай системы уравнений, дано Г. Ф. Манджавидзе [2].

2°. В статье М. П. Ганина [1] дано построение сингулярного оператора $\mathbf{R}$, обладающего тем свойством, что уравнение $\mathbf{K}\varphi = f$ (краткая запись системы уравнений) в случае его разрешимости эквивалентно уравнению $\mathbf{RK}\varphi = \mathbf{R}f$, представляющему собой уравнение (систему уравнений) Фредгольма; в этой статье использована одна идея И. Н. Векуа [7]. В статье М. П. Ганина [2] дается также построение другого оператора, обладающего тем же свойством и являющегося обобщением оператора, построенного В. Д. Купрадзе [4]; построение это обладает тем недостатком, отмеченным самим автором, что требует нахождения всех решений двух систем сингулярных интегральных уравнений.

3°. Отметим один новый способ регуляризации системы сингулярных уравнений, указанный Д. И. Шерманом [7], [9], который приложим и к некоторым системам, не принадлежащим к нормальному типу.

4°. В работах Б. В. Хведелидзе [16], [18] показано, что существенная часть результатов, полученных в этой главе, касающихся задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций, остается в силе и в том случае, когда в граничном условии (132,1) неособенная матрица $G(t)$ принадлежит классу H, вектор $g(t)$ принадлежит классу $\mathcal{L}_p$, $p>1$, L — линия Ляпунова, а искомый вектор $\Phi(z)$ представим интегралом типа Коши с линией скачков L и плотностью, принадлежащей классу $\mathcal{L}_p$. Этот результат впоследствии был существенно дополнен в работе Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе [1]. А именно, названными авторами было показано, что относительно неособенной матрицы $G(t)$ *достаточно предполагать лишь непрерывность*.

Справедливость теорем Нетера для системы сингулярных интегральных уравнений обоснована в работах Б. В. Хведелидзе [17], [18] для случая, когда в уравнении (119,6) матрицы $A(t_0)$, $B(t_0)$ непрерывны или кусочно-непрерывны, всюду на L имеют место условия (119,11), а известный и искомый векторы $f(t)$ и $\varphi(t)$ принадлежат классу

$\mathscr{L}_p(\rho; L)$, где $p > 1$, $\rho(t)$ — некоторая функция типа (116,4), а $\mathbf{k}$ — вполне непрерывный оператор.

Следует отметить также, что в работе Б. В. Хведелидзе [18] построен регуляризирующий оператор для случая разомкнутых контуров или для случая, когда коэффициенты имеют разрывы первого рода, аналогично тому, как это сделано в § 120, без привлечения граничной задачи сопряжения.

5°. Решение задачи, представляющей собой обобщение задачи, названной нами задачей V (см. §§ 70, 71), на случай нескольких неизвестных функций дано в работе Б. В. Хведелидзе [4].

6°. Решение той же задачи, что в п. 5°, но распространенной на случай разрывных коэффициентов, дано в работе Н. П. Векуа [5] [1]).

7°. В § 76, п. 3° было сказано о задаче Пуанкаре для уравнения эллиптического типа и о решении этой задачи, данном Б. В. Хведелидзе.

Обобщение на случай системы уравнений эллиптического типа, имеющей вид

$$\Delta u_j + \sum_{k=1}^{n} \left[A_{jk}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial x} + B_{jk}(x, y) \frac{\partial u_k}{\partial y} + C_{jk}(x, y) u_k \right] = 0,$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

где $A_{jk}(x, y)$, $B_{jk}(x, y)$, $C_{jk}(x, y)$ — целые функции своих аргументов, дано в кандидатской диссертации А. В. Бицадзе, краткое извлечение из которой опубликовано в его статье [1].

Аналогичный метод был применен З. И. Халиловым [1] к системе обобщенных полигармонических уравнений (см. также З. И. Халилов [2]).

8°. Распространение результатов, указанных в § 117, на случай нескольких неизвестных функций дано в работах Л. Г. Магнарадзе [2], Н. П. Векуа [28], Р. С. Исаханова [4] и других.

9°. Решение задач, представляющих собой обобщение задач, упомянутых в § 81, п. 4°, на случай нескольких неизвестных функций и приложение к одному обобщенному типу системы сингулярных уравнений дано в работах Н. П. Векуа [9], [11], [12], [15], [19], [20]; изложение результатов первых четырех работ имеется в монографии того же автора [16].

Другой способ рассмотрения систем сингулярных интегральных уравнений упомянутого типа дан в статье М. П. Ганина [4]. Им же [3] поставлена и приведена к системе сингулярных интегральных уравнений весьма общая задача, представляющая обобщение одной из упомянутых задач. Исследования полученной системы автор в названной работе не дает.

10°. В статье А. В. Месис [3] рассмотрена однородная задача сопряжения для случая, когда коэффициенты являются алгебраическими функциями, подчиненными определенным условиям.

11°. Частным индексам задачи сопряжения посвящены работы Г. Н. Чеботарева [3] и Ю. Л. Шмульяна [1], [2].

Вопрос об устойчивости частных индексов задачи сопряжения относительно малого изменения матрицы $G(t)$ рассматривался в работах Б. Боярского [3] — [5], И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [1], [2], Г. Ф. Манджавидзе [4]. Утверждение, высказанное в последней работе, о том, что частные индексы устойчивы, оказалось несправедливым.

---

[1]) Впоследствии этот результат обобщен в работе Б. В. Хведелидзе [18].

12°. Системы сингулярных интегральных уравнений на полупрямой рассмотрены в уже упомянутых работах И. Ц. Гохберга и М. Г. Крейна [2], М. Г. Крейна [1], где можно найти указания и на более ранние работы.

13°. Вопрос приближенного решения задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций рассмотрен в работах Г. Ф. Манджавидзе [4] — [6] и В. В. Иванова [5].

14°. Обобщением граничной задачи сопряжения, изученной в этой главе, является следующая граничная задача:

Найти кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$, имеющий конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+(t) = A(t)\,\Phi^-(t) + B(t)\,\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \tag{137,1}$$

где $A(t)$, $B(t)$ — заданные матрицы, удовлетворяющие условию H, $g(t)$ — заданный вектор, также удовлетворяющий условию H.

Эта задача в случае одной искомой кусочно-голоморфной функции была поставлена А. И. Маркушевичем [1].

Задача (137,1) была изучена Н. П. Векуа [21]. Первое исследование задачи (137,1) было проведено в работе Н. П. Векуа [21] сразу для случая нескольких искомых функций. В дальнейшем результаты Н. П. Векуа были дополнены и развиты для случая одной искомой функции в работах Б. Боярского [6] и Л. Г. Михайлова [1] — [3].

§ 138. Краткие сведения о некоторых результатах по теории многомерных сингулярных интегральных уравнений. Хотя в книге не излагаются вопросы теории многомерных сингулярных интегралов и интегральных уравнений, мы считаем целесообразным дать некоторые сведения о результатах в этой области.

Для построения теории одномерных сингулярных интегральных уравнений весьма важную роль в нашем изложении играет задача линейного сопряжения аналитических функций; однако, как мы знаем, многие результаты этой теории можно получить без привлечения задачи сопряжения, при помощи непосредственной регуляризации. Последний метод допускает обобщение на многомерный случай и часто применяется в теории многомерных сингулярных интегральных уравнений.

Для построения теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, естественно, важную роль играет изучение свойств многомерных сингулярных интегральных операторов. Первая работа в этом направлении принадлежит Ф. Трикоми (F. Tricomi [2]), который установил формулу перестановки двумерных сингулярных интегралов и применил ее к решению одного класса сингулярных интегральных уравнений.

Достаточно подробно изучены свойства многомерных сингулярных операторов в различных классах функций. В классе H^α они установлены в работе Ж. Жиро (G. Giraud [1]); в некоторых подклассах непрерывных функций результаты Ж. Жиро обобщены Т. Г. Гегелиа [6].

Один цикл работ С. Г. Михлина посвящен исследованию многомерных сингулярных интегральных операторов в пространстве $\mathscr{L}_2$; эти результаты подытожены в его монографии [10].

За последнее десятилетие много работ посвящено исследованию многомерных сингулярных операторов в пространствах $\mathscr{L}_p$ $(p > 1)$. Имеется в этом направлении целый ряд работ А. Кальдерона и А. Зигмунда; основные результаты этих авторов изложены в их совместных работах A. P. Calderón and A. Zygmund [1], [2].

Многомерные сингулярные операторы в пространствах с весом изучены в работах: A. P. Calderón and A. Zygmund [1] и Т. Г. Гегелиа [4], в пространствах Орлича — в работе S. T. Koizumi [1], в пространствах дифференцируемых функций — в работах A. P. Calderón and A. Zygmund [2] и Т. Г. Гегелиа [3]. В пространствах обобщенных функций сингулярные операторы изучены в работах J. Horváth [1], L. Hörmander [1], B. Malgrange [1].

В теории многомерных сингулярных интегральных уравнений важную роль играет понятие символа сингулярного оператора, введенное С. Г. Михлиным. В одномерном случае символ можно отождествить с парой матричных функций (S, D), где $S = A + B$, $D = A - B$ (см. Добавление VI). Как и в одномерном случае, в основном рассматриваются такие уравнения, символ которых всюду отличен от нуля.

Задача регуляризации многомерных сингулярных интегральных уравнений в классе $\mathscr{L}_2$ была решена С. Г. Михлиным; эта же задача в классах $\mathscr{L}_p$ и $\mathscr{L}_p$ с некоторым весом изучена в работах J. J. Kohn [1], Т. Г. Гегелиа [5] и R. T. Seely [1].

Важным вопросом теории многомерных сингулярных интегральных уравнений является проблема индекса. Одна из первых работ в этом направлении принадлежит Ж. Жиро (G. Giraud [3]).

Общая формула для индекса двумерного сингулярного оператора была дана А. И. Вольпертом [1], [2]; его результаты были обобщены в работах: Н. А. Берикашвили [1], Б. Боярский [6] и R. T. Seely [2].

В работах M. F. Atiyah and I. M. Singer [1] и M. F. Atiyah and R. Bott [1] проблема индекса разрешена для широкого класса операторов, включающего в себя многомерные сингулярные интегральные операторы.

В работах А. В. Бицадзе [8] — [10] даны формулы обращения одного класса систем двумерных сингулярных интегральных уравнений, исследованы многомерные аналоги интеграла типа Коши и граничной задачи сопряжения.

Различным аспектам теории многомерных сингулярных интегральных уравнений посвящены работы: А. В. Бицадзе [1], М. И. Вишик и Г. И. Эскин [1], [2], И. Ц. Гохберг [7], А. С. Дынин [1], М. С. Агранович, Л. Р. Волевич и А. С. Дынин [1], L. Loomis [1], E. M. Stein and G. Weiss [1], E. M. Stein [2], W. J. Trjitzinsky [2]. Более подробные указания на соответствующую литературу можно найти в книге С. Г. Михлина [10], в обзорных статьях: В. Д. Купрадзе [1], A. P. Calderón [2], C. Miranda [1], в курсах лекций А. Зигмунда A. Zygmund [3], [4]).

ДОБАВЛЕНИЕ I

О ГЛАДКИХ И КУСОЧНО-ГЛАДКИХ ЛИНИЯХ

1°. Определение гладкой дуги L или гладкого контура L (разомкнутого или замкнутого) было дано в § 1; мы будем придерживаться обозначений упомянутого параграфа. В частности, параметрическое представление дуги L мы будем писать в виде

$$x=\varphi(s), \quad y=\psi(s), \quad s_a \leqslant s \leqslant s_b, \tag{1}$$

где s — дуговая абсцисса. Длину дуги L мы будем обозначать теперь через l, так что

$$l=s_b-s_a. \tag{2}$$

Пусть t_1 и t_2 — какие-либо две точки на L. Обозначим через $\sigma(t_1, t_2)=\sigma$ длину части дуги L, заключенной между t_1 и t_2, причем в случае, если L — замкнутый контур, мы будем иметь в виду ту из двух частей, которая имеет меньшую длину. Таким образом, в случае замкнутого контура $0 \leqslant \sigma \leqslant \frac{l}{2}$, а в случае разомкнутого контура $0 \leqslant \sigma \leqslant l$. Обозначим, далее, через $r(t_1, t_2)=r$ расстояние между точками t_1 и t_2. Очевидно, r представляет собой непрерывную функцию дуговых абсцисс s_1 и s_2 точек t_1 и t_2. Рассмотрим все пары точек t_1, t_2 таких, что

$$\sigma(t_1, t_2) \geqslant \lambda, \quad 0<\lambda<\frac{l}{2}, \tag{*}$$

где λ — произвольно фиксированное число в указанном промежутке, и положим

$$\rho=\rho(\lambda)=\min r(t_1, t_2) \tag{**}$$

в предположении, что имеет место (*). Этот минимум достигается по крайней мере для одной пары точек t_1, t_2. Легко видеть, что $\rho(\lambda)>0$. В самом деле, если бы $\rho(\lambda)=0$, то дуга L пересекала бы себя, что противоречит условию.

Таким образом, каждому числу λ, $0<\lambda<\frac{l}{2}$, соответствует число $\rho=\rho(\lambda)>0$, обладающее следующим свойством: если из любой точки t_0 на L описать, как из центра, окружность радиуса $\rho_0<\rho$, то все точки t контура L такие, что $\sigma(t_0, t) \geqslant \lambda$, будут расположены вне этой окружности.

2°. Пусть α_0 — произвольно заданный острый угол, $0<\alpha_0<\frac{\pi}{2}$. Из непрерывности изменения направления касательной к L следует, что существует число $\sigma_0=\sigma_0(\alpha_0)>0$, зависящее лишь от α_0 и обладающее следующим свойством: угол α между касательными к L в точках t_1 и t_2 не превосходит α_0, если только $\sigma(t_1, t_2) \leqslant \sigma_0$. В дальнейшем мы будем считать, что $\sigma_0<\frac{l}{2}$.

Рассмотрим дугу t_1t_2, принадлежащую L и не превосходящую по длине σ_0. Из предыдущего следует, что острый угол, составляемый любой хордой, стягивающей две произвольные точки τ_1, τ_2 дуги t_1t_2, с касательной в t_1 (или t_2), не превосходит α_0; в самом деле, на дуге $\tau_1\tau_2$ всегда найдется точка, касательная в которой параллельна рассматриваемой хорде.

3°. Пусть t_0 — какая-либо фиксированная точка на L. Рассмотрим дугу L_0, представляющую собой часть L, состоящую из точек t таких, что $\sigma(t_0, t) \leqslant \sigma_0$, где σ_0 обозначает то же, что выше. Не нарушая общности, мы можем считать, что в случае, когда L — замкнутый контур, точка, соответствующая значениям $s = s_a$ или s_b в (1), не принадлежит L_0. Точка t_0 разбивает L_0 на две части, соответствующие $s > s_0$ и $s < s_0$; исключение представляет лишь случай, когда L — разомкнутая дуга, а t_0 совпадает с одним из ее концов. Рассмотрим изменение расстояния $r = r(t_0, t)$ при движении t по L. Легко видеть, что $\frac{dr}{ds} = \pm \cos\alpha$, где α — острый угол, составляемый хордой t_0t с касательной в точке t; верхний знак берется для части $s > s_0$, нижний — для части $s < s_0$. Мы видим, таким образом, что r — монотонная функция s на каждой из этих частей, ибо $\cos\alpha \geqslant \cos\alpha_0 = k_0$, $< k_0 < 1$. На обеих частях будем иметь:

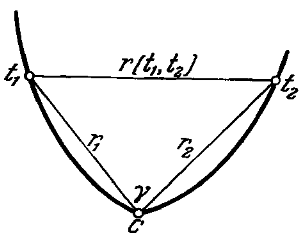

Рис. 22.

$$k_0|s - s_0| \leqslant r(t_0, t) \leqslant |s - s_0|. \qquad (***)$$

Опишем теперь из t_0, как из центра, окружность Γ радиуса $R \leqslant R_0$, где R_0 — наименьшее из чисел $\rho(\sigma_0)$ и $k_0 \cdot \sigma_0$; под $\rho(\sigma_0)$ мы подразумеваем то же, что под $\rho(\lambda)$ в п. 1°, при $\lambda = \sigma_0$.

Легко показать, что окружность Γ пересекает L ровно в двух точках, за исключением того случая, когда L — разомкнутая дуга и расстояние t_0 до ближайшего конца меньше R; тогда L пересекает окружность Γ ровно в одной точке.

В самом деле, пусть сначала L — замкнутый контур. При возрастании s от значения s_0 до значения $s_0 + \sigma_0$ расстояние $r(t_0, t)$ монотонно возрастает от значения 0 до значения $r_1 \geqslant k_0\sigma_0 \geqslant R_0$; следовательно, точка t встретит окружность Γ ровно один раз; то же будет иметь место при убывании s от s_0 до $s_0 - \sigma_0$. Других точек пересечения L с Γ не существует в силу сказанного в п. 1°.

Совершенно аналогично рассматривается случай разомкнутого контура.

Отметим, что из неравенства (***), имеющего место для достаточно малых $\sigma(t_0, t)$, очевидно следует неравенство

$$k_0\sigma(t_1, t_2) \leqslant r(t_1, t_2) \leqslant \sigma(t_1, t_2), \quad 0 < k_0 < 1, \qquad (3)$$

для любой пары точек на L; через k_0 обозначена постоянная из указанного промежутка, не зависящая от положения t_1 и t_2 на L.

4°. Рассмотрим теперь простую кусочно-гладкую дугу в смысле определения, данного в § 1, п. 4°.

Простая кусочно-гладкая дуга, очевидно, также представима в виде (1), но производные $\varphi'(s)$ и $\psi'(s)$ будут иметь разрывы первого рода в точках соединения отдельных гладких частей, т. е. в *угловых точках*. Если при переходе через угловую точку касательная изменяет свое направление на обратное, то такая точка есть **точка возврата** или **острие**.

Заметим, что неравенство (3) сохраняет силу и в окрестностях угловых точек, **отличных от точек возврата**. Действительно, очевидно, достаточно проверить его справедливость в том лишь случае, когда t_1 и t_2 находятся в окрестности угловой точки c, по разные от нее стороны. Рассмотрение же треугольника ct_1t_2 (рис. 22) показывает, что если r_1 и r_2 — расстояния точки c до t_1 и t_2, то

$$(r_1+r_2)\sin\frac{\gamma}{2}\leqslant r(t_1, t_2)\leqslant r_1+r_2,$$

где γ — угол при вершине c. При t_1, t_2, достаточно близких к c, будем иметь:

$$\sin\frac{\gamma}{2}\geqslant k_0',$$

где k_0' — положительная постоянная.

Кроме того, применяя неравенство (3) к гладким дугам ct_1 и ct_2, получаем $k_0''(\sigma_1+\sigma_2)\leqslant r_1+r_2\leqslant\sigma_1+\sigma_2$, где σ_1 и σ_2 — длины дуг ct_1 и ct_2, так что $\sigma(t_1, t_2)=\sigma_1+\sigma_2$, а k_0'' — постоянная такая, что $0<k_0''<1$. Отсюда и вытекает наше утверждение.

ДОБАВЛЕНИЕ II

О ПОВЕДЕНИИ ИНТЕГРАЛА ТИПА КОШИ ВБЛИЗИ УГЛОВЫХ ТОЧЕК

В этом Добавлении мы рассмотрим вопрос о поведении интеграла типа Коши вблизи угловых точек простой кусочно-гладкой линии интегрирования. Этот вопрос является частным случаем вопроса, рассмотренного в § 26, но здесь мы рассмотрим его непосредственно, не опираясь на результаты § 26. При этом мы получим некоторые формулы, представляющие интерес, но не выведенные в тексте книги. Для удобства читателя мы повторим здесь, в несколько ином виде, некоторые из рассуждений, приведенных в тексте книги.

1°. Пусть L — простая кусочно-гладкая дуга, замкнутая или разомкнутая, и пусть $\varphi(t)$ — функция точки t линии L. Функция $\varphi(t)$ является в то же время функцией дуговой абсциссы s на L.

Говоря, что функция $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ на некоторой части линии L, мы должны теперь различать, рассматриваем ли мы $\varphi(t)$ как функцию от t или как функцию от s.

В первом случае условие $H(\mu)$ выражается неравенством

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant \text{const}\cdot r_{12}^{\mu} = \text{const}\cdot |t_2-t_1|^{\mu}, \tag{1}$$

а во втором — неравенством

$$|\varphi(t_2)-\varphi(t_1)| \leqslant \text{const}\cdot \sigma_{12}^{\mu}; \tag{2}$$

в этих формулах μ — положительная постоянная, $0<\mu\leqslant 1$; t_1, t_2 — две произвольные точки рассматриваемой части, $r_{12} = |t_2 - t_1|$, а σ_{12} — длина дуги, заключенной между t_1 и t_2 и принадлежащей этой части.

Мы знаем, что для точек t_1, t_2, расположенных на любой гладкой части линии L, условия (1) и (2) эквивалентны. То же имеет место для окрестности любой угловой точки, отличной от точки возврата; это следует из сказанного в п. 4° предыдущего Добавления.

Для окрестности же точек возврата отношение r_{12}/σ_{12} может быть сколь угодно малым, и поэтому из (2) не вытекает (1). Наоборот, ясно, что из (1) вытекает (2).

В соответствии с предыдущим мы будем говорить, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ в сильной форме, если имеет место неравенство (1), и условию $H(\mu)$ в слабой форме, если имеет место неравенство (2). Класс функций, удовлетворяющих условию $H(\mu)$ в слабой форме, есть класс, который мы в тексте книги называли классом H. В дальнейшем, если противное не оговорено, под условием H мы будем понимать условие H в слабой форме, т. е. в смысле неравенства (2), или, что то же, в смысле принадлежности классу H.

2°. В § 13 была выведена формула (13,4):

$$\Phi(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0} + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt \tag{3}$$

для случая, когда $L=ab$ — гладкая дуга. Эта формула, очевидно, сохраняет силу и в случае, когда L — простая кусочно-гладкая дуга, а точка t_0 отлична от угловых точек (и от концов). Рассуждая совершенно так же, как в § 13, легко заключаем, что если t_0 — угловая точка, то вместо (3) будем иметь:

$$\Phi(t_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}=$$

$$=-\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t_0)+\frac{\varphi(t_0)}{2\pi i}\ln\frac{b-t_0}{a-t_0}+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(t_0)}{t-t_0}\,dt, \quad (4)$$

где α обозначает неотрицательный угол, $0\leqslant\alpha\leqslant 2\pi$, на который поворачивается бесконечно малый вектор t_0t, когда точка t, оставаясь слева от L и вращаясь вокруг t_0, переходит с части t_0b на часть at_0 (рис. 23). В случае обыкновенной точки $\alpha=\pi$, и мы снова получаем формулу (3).

3°. В § 15 были выведены формулы (15,5) в предположении, что $L=ab$ — гладкая дуга. Очевидно, что эти формулы остаются в силе и тогда, когда L — простая кусочно-гладкая дуга, а t_0 не совпадает с угловыми точками. Легко видеть, что эти формулы, а также заключение о непрерывной продолжимости функции $\Phi(z)$ на точку t_0 слева и справа остаются в силе и тогда, когда t_0 — угловая точка, в частности, точка возврата. В самом деле, пусть $t_0=c$ — угловая точка. Имеем, как в § 15 (формула (15,4)):

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)-\varphi(c)}{t-z}\,dt+\frac{\varphi(c)}{2\pi i}\ln\frac{z-b}{z-a}.$$

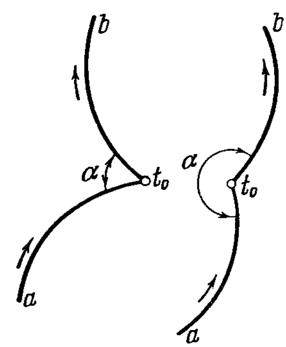

Рис. 23.

Интеграл в правой части этой формулы стремится к определенному пределу, когда $z\to c$ слева или справа от L; в этом легко убедиться, разбивая этот интеграл на два: один, взятый по дуге ac, а другой — по дуге cb, и замечая, что плотность $\varphi(t)-\varphi(c)$ обращается в нуль при $t=c$. Переходя к пределу, как в § 15, получим требуемые формулы.

4°. На основании результатов двух предыдущих пунктов легко видеть, что в случае, когда t_0 — угловая точка, формулы Сохоцкого — Племеля (16,2) приобретают следующий вид:

$$\Phi^+(t_0)=\left(1-\frac{\alpha}{2\pi}\right)\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \quad (5)$$

$$\Phi^-(t_0)=-\frac{\alpha}{2\pi}\varphi(t_0)+\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \quad (6)$$

где L — произвольная простая кусочно-гладкая линия, а α — угол, определяемый, как выше (п. 2°).

5°. В § 18 была доказана теорема Племеля — Привалова в предположении, что L — гладкая линия. Легко видеть, что окрестности угловых точек, отличных от точек возврата, не представляют исключения ни в смысле результата, ни в смысле доказательства, приведенного в § 18[1]).

Остается рассмотреть окрестности точек возврата. Мы покажем, что теорема справедлива и в случае, когда L — любая простая кусочно-гладкая линия (могущая иметь точки возврата), причем под условием $H(\mu)$ можно подразумевать как слабую, так и сильную его форму.

Одновременно с этим мы распространим и теорему § 21 на случай области, ограниченной кусочно-гладким контуром.

В связи с этой последней теоремой сделаем следующее замечание. Пусть ab — гладкая разомкнутая дуга и пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет на ab условию $H(\mu)$, $\mu < 1$, причем $\varphi(a) = 0$. Продолжив дугу ab за конец a отрезком $a'a$ касательной в точке a, положим $\varphi(t) = 0$ на $a'a$ и рассмотрим функцию

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{ab}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{a'b}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}. \tag{7}$$

На основании сказанного в § 21 (замечание 2), $\Phi(z)$ удовлетворяет в окрестности дуги ab (кроме, быть может, окрестности точки b) слева (справа) от $a'b$ неравенству

$$|\Phi(z_2) - \Phi(z_1)| \leqslant C\,|z_2 - z_1|^{\mu}. \tag{8}$$

Это неравенство имеет место и для точек, расположенных на самой дуге $a'b$ (кроме, быть может, окрестности точки b), если подразумевать под $\Phi(z)$ при z на $a'b$ граничные значения слева или справа.

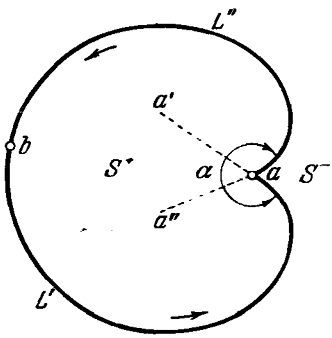

Рис. 24.

Пусть теперь L — любой простой кусочно-гладкий контур. Так как, очевидно, все дело сводится к изучению поведения функции

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \tag{9}$$

в достаточно малых окрестностях угловых точек, то, не нарушая общности, можем считать, что L — простой замкнутый контур, имеющий единственную угловую точку a. Кроме того, опять-таки не нарушая общности, мы можем считать, что мы имеем в a входящий угол, то есть что угол α, отмеченный на рис. 24, больше π; при $\alpha = 2\pi$ мы имеем точку возврата.

Пусть $\varphi(t)$ удовлетворяет на L условию $H(\mu)$ в слабой форме. Не нарушая общности, мы можем считать, что $\varphi(a) = 0$, ибо в противном случае мы можем заменить рассмотрение интеграла $\Phi(z)$

---

[1]) И здесь дело сводится к изучению интеграла

$$\Psi(t_0) = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L}\frac{\varphi(t) - \varphi(t_0)}{t - t_0}\,dt,$$

в чем проще всего убедиться на основании формул (15,5). Исследование же интеграла $\Psi(t_0)$ может быть произведено совершенно так же, как в § 18.

рассмотрением интеграла

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)-\varphi(a)}{t-z}\,dt=\begin{cases}\Phi(z)-\varphi(a) & \text{в } S^+,\\ \Phi(z) & \text{в } S^-.\end{cases} \tag{10}$$

Разобьем теперь контур L точкой a и какой-либо другой точкой b на две гладкие дуги L' и L''; соответственно этому интеграл $\Phi(z)$ представится в виде суммы двух интегралов

$$\Phi(z)=\Phi_1(z)+\Phi_2(z), \tag{11}$$

взятых соответственно по L' и по L''.

Применяя к каждому из этих интегралов сказанное выше относительно поведения интеграла (7), легко заключаем, что оценка (8) имеет место в S^-, вблизи a, и, следовательно, в S^-; для того чтобы сказанное стало очевидным, достаточно продолжить гладкие дуги, сходящиеся в a, отрезками касательных aa' и aa'' (в случае точки возврата эти отрезки совпадают) и заметить, что окрестность области S^-, примыкающая к точке a, находится по одну и ту же сторону как по отношению к гладкой дуге baa', так и по отношению к гладкой дуге $a''ab$.

Приближая, в частности, z_1 и z_2 формулы (8) к точкам t_1, t_2 границы L, убеждаемся, что граничное значение $\Phi^-(t)$, т. е. значение со стороны «впадины», удовлетворяет условию $H(\mu)$ в сильной форме, даже если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ лишь в слабой форме[1]).

Остается рассмотреть поведение $\Phi(z)$ в области S^+, т. е. со стороны «выступа». Имеем:

$$\Phi^+(t)=\Phi^-(t)+\varphi(t).$$

Так как $\varphi(t)$ и $\Phi^-(t)$ удовлетворяют условию $H(\mu)$, то то же имеет место для $\Phi^+(t)$.

Таким образом, теперь *теорема Племеля — Привалова распространена на любые кусочно-гладкие линии, причем точки возврата не исключаются.*

Заметим, что если $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ в сильной форме, то это же самое будет иметь место для $\Phi^+(t)$, ибо на основании предыдущего $\Phi^-(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ в сильной форме.

6°. В предыдущем пункте мы попутно распространили теорему § 21 на случай, когда точки z_1 и z_2 находятся в окрестности угловой точки a границы со стороны «впадины». Нам остается рассмотреть случай, когда z_1 и z_2 находятся со стороны «выступа», т. е. при обозначениях п. 5° в области S^+.

Легко видеть, что для этого случая недостаточно подчинить $\varphi(t)$ условию $H(\mu)$ в с л а б о й форме. Поэтому мы будем считать теперь, что $\varphi(t)$ удовлетворяет условию $H(\mu)$ в с и л ь н о й форме. Тогда, как только что было показано, такому же условию удовлетворяет и граничное значение $\Phi^+(t)$. После этого легко убедиться, что рассуждения, приведенные в § 21, могут быть применены и в нашем случае без каких-либо существенных изменений. Надо только при рассмотрении отношения (21,6) иметь в виду следующее: во-первых, всякую точку z_0 области S^+, находящуюся вблизи a, можно соединить прямолинейной купюрой, не пересекающей L, либо с самой точкой a, либо с некоторой точкой на L вблизи a. В обоих случаях для всякой точки z на купюре имеет место оценка: $|\Phi(z)-\Phi(z_0)|\leqslant C\,|z-z_0|^\mu$, как это следует из представления $\Phi(z)$ в виде (11) и из формулы (8).

[1]) Напомним, что различие между сильной и слабой формами условия $H(\mu)$ имеет место лишь в окрестности точки возврата.

ДОБАВЛЕНИЕ III

К ЗАДАЧЕ ОБ ОПРЕДЕЛЕНИИ КУСОЧНО-ГОЛОМОРФНОЙ ФУНКЦИИ ПО ЗАДАННОМУ СКАЧКУ

Мы оставили без доказательства утверждение, высказанное в п. 2° § 31. Оно заключается в следующем.

Пусть, при обозначениях § 31, кусочно-голоморфная функция $\Phi(z)$, имеющая конечный порядок на бесконечности, удовлетворяет условию:

$$\Phi^+(t)-\Phi^-(t)=\varphi(t) \text{ на } L, \text{ кроме узлов,} \tag{1}$$

где $\varphi(t)$ — заданная на L функция; мы будем считать, что эта функция непрерывна[1]) на L, за возможным исключением узлов, и абсолютно интегрируема на L.

Тогда, умножая обе части равенства (1) на

$$\frac{dt}{t-z},$$

где z — любая точка плоскости, не расположенная на L, и интегрируя по L, получим

$$\Phi(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z}+P(z), \tag{2}$$

где $P(z)$ — полином, представляющий собой главную часть полюса функции $\Phi(z)$ на бесконечности.

Доказательство справедливости этого утверждения сводится, очевидно, к доказательству равенства:

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(t)-\Phi^-(t)}{t-z}\,dt=\Phi(z)-P(z), \tag{3}$$

где z — произвольная точка, не расположенная на L.

Оно почти очевидно, например, в случае, когда L — простой замкнутый, гладкий или кусочно-гладкий контур. В самом деле, пусть, при обычных наших обозначениях, S^+ и S^- — области, на которые разбивается плоскость линией L. Не нарушая общности, можно считать, что S^+ обозначает конечную область, а S^- — бесконечную.

Тогда, очевидно (см. § 29, п. 4°),

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases}\Phi(z) & \text{при } z\in S^+,\\ 0 & \text{при } z\in S^-,\end{cases}$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\Phi^-(t)\,dt}{t-z}=\begin{cases}P(z) & \text{при } z\in S^+,\\ -\Phi(z)+P(z) & \text{при } z\in S^-,\end{cases}$$

и мы получаем формулу (3).

---

[1]) Непрерывность (за исключением узлов) необходимо предположить, так как граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ необходимо непрерывны, за возможным исключением узлов (см. § 9, п. 2°).

Совершенно аналогично рассматривается случай, когда L состоит из нескольких простых замкнутых контуров, не имеющих общих точек.

Так же просто доказывается справедливость формулы (3) в случае, когда $L = ab$ — простая разомкнутая кусочно-гладкая дуга (рис. 25). Тогда, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi^+(t)-\Phi^-(t)}{t-z}\,dt = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Lambda \frac{\Phi(t)\,dt}{t-z},$$

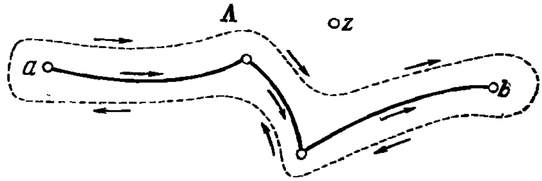

Рис. 25.

где Λ обозначает замкнутый контур, охватывающий линию L, как показано на рис. 25, и достаточно близкий к нему (так, чтобы точка z была расположена вне этого контура). Еще проще представить себе L как разрез в плоскости, а под Λ подразумевать линию, состоящую из двух противоположных краев разреза, описываемых в противоположных направлениях так, чтобы область, окружающая разрез, оставалась слева.

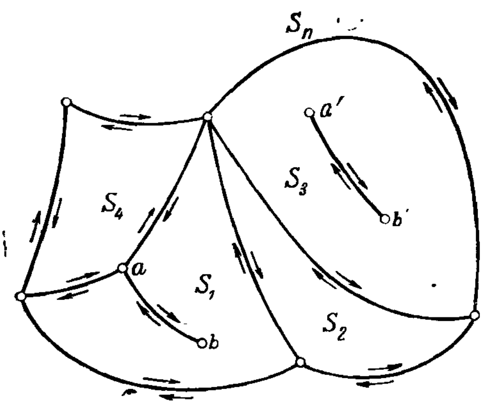

Рис. 26.

Но, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_\Lambda \frac{\Phi(t)\,dt}{t-z} = \Phi(z) - P(z),$$

и наше утверждение доказано.

Совершенно аналогично рассматривается случай нескольких, раздельно расположенных кусочно-гладких дуг.

Перейдем к общему случаю (рис. 26), т. е. будем считать, что L — произвольная, кусочно-гладкая линия, т. е. линия, состоящая из конечного числа простых разомкнутых дуг, не имеющих общих точек, кроме, быть может, концов, как было указано в § 1.

Очевидно, что

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi^+(t)-\Phi^-(t)}{t-z}\,dt = \int\limits_\Lambda \frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z},$$

где Λ обозначает линию L, описываемую два раза в противоположных направлениях, а через $\Phi^*(t)$ обозначено граничное значение функции $\Phi(z)$, принимаемое ею слева по отношению к направлению пути интегрирования.

Далее, легко видеть, что путь интегрирования Λ можно представить себе как совокупность границ $\Lambda_1, \Lambda_2, \ldots, \Lambda_n$ связных частей S_1, $S_2, \ldots, S_n$ плоскости, на которые она разбивается линией L; одна из этих частей, скажем, S_n, содержит бесконечно удаленную точку. Положительное направление на Λ_k ($k = 1, 2, \ldots, n$) выбирается так, чтобы область S_k оставалась слева. При этом дуги, которые не являются частью общей границы двух областей S_k (дуги ab и $a'b'$ на рис. 26), следует рассматривать как разрезы, противоположные края (берега) которых описываются в противоположных направлениях так, чтобы оставлять окружающую разрез часть плоскости слева.

Пусть теперь z находится в одной из конечных областей $S_1, S_2, \ldots, S_{n-1}$, скажем, в S_k. Тогда, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda_k}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=\Phi(z),\quad \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda_n}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=-P(z);$$

интегралы же по остальным линиям Λ_j равны нулю.

Если же z находится в бесконечной части S_n, то, очевидно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda_n}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=\Phi(z)-P(z),$$

интегралы же по остальным линиям Λ_j равны нулю.

Таким образом, во всех случаях

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Lambda_k}\frac{\Phi^*(t)\,dt}{t-z}=\Phi(z)-P(z),$$

а это доказывает наше утверждение.

ДОБАВЛЕНИЕ IV

ОДНО ЭЛЕМЕНТАРНОЕ ПРЕДЛОЖЕНИЕ ОТНОСИТЕЛЬНО БИОРТОГОНАЛЬНЫХ СИСТЕМ ФУНКЦИЙ

Пусть L — кусочно-гладкая линия на плоскости комплексного переменного $z = x + iy$ и пусть

$$\varphi_1(t),\ \varphi_2(t),\ \ldots,\ \varphi_n(t)$$

— какая-либо система линейно независимых непрерывных функций точки $t = x + iy$ на L.

Тогда всегда можно подобрать (бесчисленным множеством способов) *систему n функций $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, ..., $\omega_n(t)$, принадлежащих на L классу H, биортогональную с системой $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ в том смысле, что*

$$(\varphi_i\omega_j) = \int_L \varphi_i(t)\,\omega_j(t)\,dt = \delta_{ij}, \tag{1}$$

где $\delta_{ij} = 1$ при $i = j$, $\delta_{ij} = 0$ при $i \neq j$.

Докажем сначала, что существуют такие линейные комбинации ψ_j $(j = 1, 2, \ldots, n)$ функций φ_i, что к ним можно подобрать функции χ_j, принадлежащие на L классу H, такие, что $(\psi_i\chi_j) = \delta_{ij}$[1].

Относительно функций, обозначаемых ниже через ω_j, χ_j, χ_j' мы будем предполагать, что они принадлежат классу H.

Обозначим φ_1 через ψ_1 и возьмем любую функцию χ_1 такую, что $(\psi_1\chi_1) \neq 0$[2]; таких функций, очевидно, существует бесчисленное множество. Умножив χ_1 на подходящую постоянную, можем считать $(\psi_1\chi_1) = 1$. Заменим функцию φ_2 функцией $\psi_2 = \varphi_2 - c\psi_1$, подобрав постоянную c так, чтобы $(\psi_2\chi_1) = (\varphi_2\chi_1) - c(\psi_1\chi_1) = (\varphi_2\chi_1) - c = 0$. Будем иметь $(\psi_1\chi_1) = 1$, $(\psi_2\chi_1) = 0$. Пусть χ_2' — любая функция такая, что $(\psi_2\chi_2') = 1$[3]. Заменим функцию χ_2' функцией $\chi_2 = \chi_2' - c\chi_1$, подобрав постоянную c так, чтобы $(\psi_1\chi_2) = (\psi_1\chi_2') - c(\psi_1\chi_1) = (\psi_1\chi_2') - c = 0$. Теперь мы будем иметь функции ψ_1, ψ_2, χ_1, χ_2 такие, что

---

[1]) Если отказаться от требования, что χ_j принадлежит классу H, то системы ψ_i и χ_j можно построить так: ортогонализируем обычным образом функции φ_i по дуговой абсциссе s, т. е. составим линейные их комбинации ψ_j такие, что

$$\int_L \psi_i\overline{\psi}_j\,ds = \delta_{ij};$$

тогда ψ_i и $\chi_j = \overline{\psi}_j : \dfrac{dt}{ds}$ удовлетворяют условию $(\psi_i\chi_j) = \delta_{ij}$.

Заметим, что указанный способ все же пригоден для нашей цели в том случае, когда гладкие дуги, составляющие L, удовлетворяют условию Ляпунова. Действительно, в этом случае функции χ_j принадлежат классу H.

[2]) Функция $\psi_1 = \varphi_1$ непрерывна и не равна тождественно нулю, так как функции φ_1, φ_2, ..., φ_n линейно независимы.

[3]) Так как функции системы $\psi_1, \psi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы, то ψ_2 не равна тождественно нулю.

$(\psi_i \chi_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 1, 2)$, причем функции $\psi_1, \psi_2, \varphi_3, \ldots, \varphi_n$ линейно независимы между собой.

Заменим, далее, функцию φ_3 на $\psi_3 = \varphi_3 - c_1\psi_1 - c_2\psi_2$, подобрав c_1, c_2 так, чтобы $(\psi_3, \chi_1) = 0$, $(\psi_3\chi_2) = 0$, т. е. чтобы $(\varphi_3\chi_1) - c_1 = 0$, $(\varphi_3\chi_2) - c_2 = 0$. Подберем функцию χ_3' такую, чтобы $(\psi_3\chi_3') = 1$, и заменим χ_3' через $\chi_3 = \chi_3' - c_1\chi_1 - c_2\chi_2$ так, чтобы $(\psi_1\chi_3) = 0$, $(\psi_2\chi_3) = 0$.

Теперь мы будем иметь функции $\psi_1, \psi_2, \psi_3, \chi_1, \chi_2, \chi_3$ такие, что $(\psi_i\chi_j) = \delta_{ij}$, $i, j = 1, 2, 3$. Способ продолжения процесса очевиден.

Продолжая таким образом, мы получим n линейно независимых функций ψ_i, представляющих собой линейные комбинации функций φ_i, и n функций χ_j таких, что

$$(\psi_i\chi_j) = \delta_{ij}. \tag{2}$$

Так как ψ_j — линейно независимые комбинации функций φ_i, то и обратно

$$\varphi_i = \sum_{k=1}^{n} a_{ik}\psi_k,$$

где a_{ik} — постоянные такие, что определитель матрицы $A = \|a_{ij}\|$ отличен от нуля.

Подберем теперь постоянные b_{ij} так, чтобы функции

$$\omega_j = \sum_{l=1}^{n} b_{lj}\chi_l$$

удовлетворяли условию (1). Выражая это условие, получим:

$$\delta_{ij} = (\varphi_i\omega_j) = \sum_k \sum_l a_{ik}b_{lj}(\psi_k\chi_l) = \sum_k \sum_l a_{ik}b_{lj}\delta_{kl} = \sum_k a_{ik}b_{kj}$$

или, что то же,

$$AB = E,$$

где E — единичная матрица, а $B = \|b_{ij}\|$. Следовательно, требуемые величины b_{ij} существуют, а именно, $B = A^{-1}$. Таким образом, наше утверждение доказано.

Укажем одно непосредственное следствие из доказанного предложения. *Пусть $\varphi_1(t), \varphi_2(t), \ldots, \varphi_n(t)$ — заданные линейно независимые непрерывные функции от t и пусть известно, что для любой функции $\omega(t)$, принадлежащей на L классу H, из соотношений*

$$(\varphi_i\omega) = 0, \quad i = 1, 2, \ldots, n,$$

необходимо следует соотношение $(\varphi_0\omega) = 0$, где $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ — некоторая определенная непрерывная на L функция. Тогда функция φ_0 есть линейная комбинация функций φ_i.

В самом деле, если бы функция φ_0 была линейно независима от $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$, то существовали бы функции $\omega_0, \omega_1, \ldots, \omega_n$ такие, что $(\varphi_i\omega_j) = \delta_{ij}$ $(i, j = 0, 1, \ldots, n)$; в частности, было бы

$$(\varphi_1\omega_0) = 0, \quad (\varphi_2\omega_0) = 0, \ldots, (\varphi_n\omega_0) = 0, \quad (\varphi_0\omega_0) = 1,$$

что противоречит условию предложения.

З а м е ч а н и е 1. Высказанное в начале этого Добавления предложение можно значительно обобщить, расширяя класс функций φ_j и, наоборот, сужая класс функций ω_j.

Например, очевидно, что предложение останется в силе, если считать, что функции φ_i могут иметь разрывы в конечном числе точек, оставаясь абсолютно интегрируемыми; при этом следует считать идентичными функции, отличающиеся друг от друга лишь в точках разрыва[1]).

Далее, не трудно доказать, что в качестве функций $\omega_j(t)$ можно взять, например, рациональные функции; если же линия L состоит лишь из разомкнутых дуг, то в качестве функций $\omega_j(t)$ можно взять даже полиномы[2]). На этом мы не останавливаемся, так как пользоваться этим не будем.

Замечание 2. Если под линейной комбинацией понимать линейную комбинацию с (постоянными) действительными коэффициентами и в соответствии с этим понимать линейную зависимость или независимость функций, заданных на L, иначе говоря, если понимать указанные термины «в узком смысле», как мы иногда поступали в основном тексте книги, то приведенные выше результаты перестают быть справедливыми. Однако имеют место аналогичные результаты, которые будут сейчас указаны.

А именно, пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ — заданные на L непрерывные, линейно независимые (в узком смысле) функции. Тогда всегда можно подобрать (бесчисленным множеством способов) функции $\omega_1(t)$, $\omega_2(t)$, ..., $\omega_n(t)$ так, чтобы

$$\operatorname{Re}(\varphi_i\omega_j) = \operatorname{Re}\int_L \varphi_i(t)\,\omega_j(t)\,dt = \delta_{ij}, \qquad i, j = 1, 2, \ldots, n.$$

Доказательство совершенно аналогично предыдущему: достаточно всюду вместо интегралов вида $(\varphi\psi)$ брать их действительные части $\operatorname{Re}(\varphi\psi)$, а во всех рассматриваемых линейных комбинациях считать коэффициенты действительными.

Совершенно аналогично предыдущему доказывается и следующее предложение. Пусть $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$ — заданные на L непрерывные линейно независимые (в узком смысле) функции и пусть известно, что для любой функции $\omega(t)$ класса H на L из соотношений $\operatorname{Re}(\varphi_i\omega) = 0$, $i = 1, 2, \ldots, n$, следует соотношение $\operatorname{Re}(\varphi_0\omega) = 0$, где $\varphi_0 = \varphi_0(t)$ — некоторая определенная непрерывная на L функция. Тогда $\varphi_0(t)$ есть линейная (в узком смысле) комбинация функций $\varphi_1(t)$, $\varphi_2(t)$, ..., $\varphi_n(t)$.

Сказанное в замечании 1 целиком относится и к рассмотренному здесь случаю.

---

[1]) Это последнее условие существенно при определении понятия линейной независимости; в силу этого условия функции $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n$ будут считаться линейно зависимыми, если существуют такие постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не все равные нулю, что $c_1\varphi_1 + c_2\varphi_2 + \ldots + c_n\varphi_n = 0$ всюду на L, кроме, быть может, точек разрыва.

[2]) То, что в случае замкнутых контуров нельзя обойтись одними полиномами, очевидно: если, например, функции φ_i — сами полиномы, то, каковы бы ни были полиномы ω_j, $(\varphi_i\omega_j) = 0$, в частности, $(\varphi_i\omega_i) = 0$, а не 1, как это требуется.

ДОБАВЛЕНИЕ V

О ГРАНИЧНЫХ ЗАДАЧАХ СОПРЯЖЕНИЯ СО СМЕЩЕНИЕМ

В этом Добавлении мы даем краткое изложение теории одного вида задач сопряжения, являющихся обобщением задач, рассмотренных в этой книге, и которые я предложил назвать задачами сопряжения со смещением (или сдвигом), так как в этих задачах сопрягаются граничные значения в точках, смещенных друг относительно друга. Достаточно подробно (с доказательствами) мы рассматриваем лишь одну типичную задачу, сформулированную в п. 1°. Относительно других мы даем лишь краткие указания.

1°. Пусть S^+ — конечная область, ограниченная одним простым замкнутым контуром Ляпунова L, а S^- — бесконечная область, дополняющая $S^+ + L$ до полной плоскости. Мы будем считать, как обычно, что положительное направление L оставляет S^+ слева.

Пусть, далее, $\alpha(t)$ обозначает некоторую непрерывную функцию, заданную на L. Когда точка t описывает L, то точка $\tau = \alpha(t)$ описывает некоторую линию Λ; мы будем в соответствии с этим говорить, что функция $\alpha(t)$ преобразует или переводит линию L в линию Λ.

Будем теперь считать, что $\alpha(t)$ удовлетворяет следующим условиям:

a) производная $\alpha'(t) = \dfrac{d\alpha(t)}{dt}$ отлична от нуля всюду на L и принадлежит классу H;

b) $\alpha(t)$ переводит взаимно однозначно контур L в самого себя с сохранением направления обхода.

Граничной задачей сопряжения со смещением мы будем называть следующую задачу:

Найти кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$ с линией скачков L, имеющую конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \text{ на } L, \tag{1}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ — заданные на L функции, удовлетворяющие условию H, причем $G(t) \neq 0$ всюду на L.

Эта задача представляет собой естественное обобщение задачи сопряжения, рассмотренной нами в главе II, которая соответствует случаю $\alpha(t) = t$.

Однородную задачу вида (1), получаемую при $g(t) = 0$, впервые рассмотрел К. Газеман (C. Haseman [1]), но ему не удалось получить сколько-нибудь полного решения.

Законченное решение задачи (1) впервые было дано Д. А. Квеселава [3], [6], методом, совершенно отличным от метода К. Газемана. Мы приводим здесь это решение.

2°. Для решения граничной задачи (1) существенное значение имеет следующая

Лемма. *Если кусочно-голоморфная функция* $\Phi(z)$, *исчезающая на бесконечности, удовлетворяет граничному условию*

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \Phi^-(t) \text{ на } L, \tag{2}$$

то она тождественно равна нулю.

Пусть $\Phi(z)$ удовлетворяет граничному условию (2), и пусть $\Phi(\infty) = 0$; тогда функции

$$\Phi(z), \quad [\Phi(z)]^2, \quad [\Phi(z)]^3, \ \ldots \tag{*}$$

также удовлетворяют условию (2) и исчезают на бесконечности. Функции (*), очевидно, линейно независимы, если функция $\Phi(z)$ не равна тождественно нулю.

Следовательно, если существует хотя бы одна функция, удовлетворяющая условиям леммы и не равная тождественно нулю, то существует, по крайней мере, счетная система линейно независимых таких функций. Поэтому достаточно показать, что граничному условию (2) может удовлетворять лишь конечное число линейно независимых кусочно-голоморфных функций, исчезающих на бесконечности.

Пусть функция $\Phi(z)$ удовлетворяет условиям леммы. Тогда из самого принятого нами определения понятия граничных значений (при отсутствии узлов) следует, что функции $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ непрерывны на L. Если бы они, кроме того, удовлетворяли условию H, мы имели бы, на основании формулы Коши и формул Сохоцкого — Племеля:

$$\frac{1}{2}\Phi^+(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi^+(t)\,dt}{t-t_0} = 0, \qquad \frac{1}{2}\Phi^-(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi^-(t)\,dt}{t-t_0} = 0 \tag{**}$$

для всех t_0 на L.

Однако можно показать, что предыдущие формулы справедливы и при тех предположениях, которые приняты нами здесь[1]).

Пользуясь соотношением (2) и принимая во внимание, что $\alpha(t)$ переводит контур L в самого себя с сохранением направления[2]), легко видеть, что первую из формул (**) можно переписать так:

$$\frac{1}{2}\Phi^-(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\Phi^-(t)\,\alpha'(t)\,dt}{\alpha(t)-\alpha(t_0)} = 0;$$

складывая это равенство со вторым из равенств (**), получаем

$$\Phi^-(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_L K(t_0, t)\,\Phi^-(t)\,dt = 0, \tag{3}$$

где

$$K(t_0, t) = \frac{1}{t-t_0} - \frac{\alpha'(t)}{\alpha(t)-\alpha(t_0)}. \tag{4}$$

В силу условий, наложенных на функцию $\alpha(t)$ и на контур L, как легко проверить,

$$K(t_0, t) = \frac{K_0(t_0, t)}{|t-t_0|^\gamma}, \qquad 0 \leqslant \gamma = \text{const} < 1, \tag{4a}$$

где $K_0(t_0, t)$ — некоторая функция, удовлетворяющая условию H на L.

---

[1]) О применимости формул Сохоцкого — Племеля в случае, когда плотность лишь непрерывна (и для более общих случаев), см. И. И. Привалов [7].

[2]) Если бы направление изменялось на обратное, знак перед интегралом в приводимой формуле следовало бы изменить на обратный и наши выводы оказались бы несправедливыми.

Таким образом, граничное значение $\Phi^-(t)$ любой кусочно-голоморфной функции $\Phi(z)$, удовлетворяющей условию (2) и исчезающей на бесконечности, является решением интегрального уравнения Фредгольма (3). Следовательно, может существовать лишь конечное число линейно независимых таких функций. Отсюда и следует наше утверждение.

3°. Переходя к решению граничной задачи (1), начнем с того случая, когда $G(t)=1$. В этом случае мы имеем граничное условие

$$\Phi^+[\alpha(t)] = \Phi^-(t) + g(t) \quad \text{на } L. \tag{5}$$

Будем искать решение $\Phi(z)$ этой задачи, имеющее заданную главную часть на бесконечности, т. е. решение, имеющее в окрестности бесконечно удаленной точки вид

$$\Phi(z) = P(z) + O\left(\frac{1}{z}\right),$$

где $P(z)$ — заданный полином («главная часть»).

На основании предыдущего легко видеть, что задача не может иметь двух различных решений с одной и той же главной частью, ибо разность таких решений является, очевидно, решением соответствующей однородной задачи, исчезающим на бесконечности, а такое решение в силу доказанной леммы равно нулю.

Будем теперь искать решение задачи (5) в виде:

$$\begin{aligned} &\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\beta(t)]\,dt}{t-z} && \text{при} \quad z\in S^+, \\ &\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} + P(z) && \text{при} \quad z\in S^-, \end{aligned} \tag{6}$$

где $\varphi(t)$ — искомая функция точки контура L класса H, $\beta(t)$ — функция, обратная $\alpha(t)$[1]), а

$$P(z) = C_0 + C_1 z + \ldots + C_n z^n$$

— произвольно заданный полином.

Из формул (6), пользуясь формулами Сохоцкого — Племеля, выводим без труда

$$\Phi^+[\alpha(t_0)] = \frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\alpha'(t)\,\varphi(t)\,dt}{\alpha(t)-\alpha(t_0)},$$

$$\Phi^-(t_0) = -\frac{1}{2}\varphi(t_0) + \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + P(t_0).$$

Подставляя эти выражения в граничное условие (5), получим

$$\mathrm{K}\varphi \equiv \varphi(t_0) - \frac{1}{2\pi i}\int_L K(t_0, t)\,\varphi(t)\,dt = g(t_0) + P(t_0), \tag{7}$$

где $K(t_0, t)$ определяется формулой (4).

В силу сказанного в предыдущем пункте, уравнение (7) является интегральным уравнением Фредгольма с ядром вида (4а). Всякое инте-

---

[1]) Функция $\beta(t)$, очевидно, переводит контур L в самого себя с сохранением направления обхода и имеет отличную от нуля производную, удовлетворяющую условию H.

грируемое ограниченное решение $\varphi(t)$ этого уравнения удовлетворяет условию H (см. § 51), и любому такому решению формула (6) приводит в соответствие кусочно-голоморфную функцию $\Phi(z)$, являющуюся некоторым решением граничной задачи (5).

Однородное уравнение $\mathbf{K}\varphi = 0$ не имеет решений, отличных от нуля. В самом деле, пусть $\varphi(t)$ — некоторое решение этого уравнения. Тогда кусочно-голоморфная функция

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\beta(t)]\,dt}{t-z} \quad \text{при} \quad z \in S^+,$$

$$\Phi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} \quad \text{при} \quad z \in S^-$$

удовлетворяет условиям доказанной выше леммы. Следовательно,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\beta(t)]\,dt}{t-z} = 0 \quad \text{при} \quad z \in S^+,$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} = 0 \quad \text{при} \quad z \in S^-.$$

Из этих равенств следует, что $\varphi(t) = \Psi^+(t)$, $\varphi[\beta(t)] = \Psi^-(t)$, где $\Psi(z)$ — некоторая кусочно-голоморфная функция, исчезающая на бесконечности. Функция $\Psi(z)$ очевидно удовлетворяет граничному условию

$$\Psi^+[\beta(t)] = \Psi^-(t) \quad \text{на } L.$$

Поэтому, в силу той же леммы, $\Psi(z) = 0$. Следовательно, $\varphi(t) = \Psi^+(t) = 0$, и наше утверждение доказано.

Из предыдущего следует, что *уравнение* (7) *всегда однозначно разрешимо относительно* $\varphi(t)$.

Сопоставление всего сказанного приводит к следующему результату. *Любое кусочно-голоморфное решение граничной задачи* (5), *имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой* (6), *где* $P(z)$ — *произвольный полином, а* $\varphi(t)$ — *решение интегрального уравнения* (7).

Отметим, что граничная задача (5) имеет единственное решение, исчезающее на бесконечности; это решение дается формулой (6), где нужно положить $P(z) = 0$, а под $\varphi(t)$ подразумевается решение уравнения (7) при $P(t_0) = 0$.

4°. Рассмотрим теперь задачу с однородным граничным условием

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) \quad \text{на } L. \tag{8}$$

Пусть при наших обычных обозначениях

$$\varkappa = \frac{1}{2\pi}[\arg G(t)]_L$$

есть индекс функции $G(t)$. Будем считать, что точка $z = 0$ расположена в области S^+. Тогда под

$$g^*(t) = \ln[t^{-\varkappa} G(t)]$$

мы можем подразумевать вполне определенную однозначную функцию класса H на L.

Непосредственная проверка показывает, что функция

$$X(z) = \exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\chi[\beta(t)]\,dt}{t-z}\right\} \quad \text{при} \quad z \in S^+,$$

$$X(z) = z^{-\varkappa}\exp\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{\chi(t)\,dt}{t-z}\right\} \quad \text{при} \quad z \in S^-,$$

где $\chi(t)$ — решение интегрального уравнения $K\chi = g^*$, является некоторым (частным) решением граничной задачи (8). Эту функцию $X(z)$ мы будем называть каноническим решением однородной задачи (8). Каноническое решение $X(z)$ нигде на конечном расстоянии в нуль не обращается, а его порядок на бесконечности равен $(-\varkappa)$.

Переписав теперь граничное условие (8) в виде

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} \quad \text{на } L$$

и используя результаты предыдущего пункта, легко приходим к следующему заключению:

Любое кусочно-голоморфное решение однородной граничной задачи (8), *имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой*

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho[\beta(t)]\,dt}{t-z} \quad \textit{при} \quad z \in S^+,$$

$$\Phi(z) = \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\rho(t)\,dt}{t-z} + X(z)P(z) \quad \textit{при} \quad z \in S^-,$$

где $P(z)$ — произвольный полином, $X(z)$ — каноническое решение и $\rho(t)$ — решение интегрального уравнения $K\rho = P(t)$.

Если $\varkappa \leqslant 0$, то однородная граничная задача (8) не имеет (нетривиального) решения, исчезающего на бесконечности; если $\varkappa > 0$, то она имеет ровно $\varkappa$ линейно независимых решений, исчезающих на бесконечности.

5°. Перейдем теперь к решению неоднородной задачи (1). Пусть $X(z)$ — каноническое решение однородной задачи, получаемой из (1) при $g(t) = 0$. Тогда граничное условие (1) можно записать в виде

$$\frac{\Phi^+[\alpha(t)]}{X^+[\alpha(t)]} = \frac{\Phi^-(t)}{X^-(t)} + \frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]},$$

откуда на основании результатов пункта 3° легко заключаем:

Любое кусочно-голоморфное решение неоднородной граничной задачи (1), имеющее конечный порядок на бесконечности, дается формулой

$$\begin{aligned} \Phi(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi[\beta(t)]\,dt}{t-z} \quad \text{при} \quad z \in S^+, \\ \Phi(z) &= \frac{X(z)}{2\pi i}\int_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-z} + X(z)P(z) \quad \text{при} \quad z \in S^-, \end{aligned} \tag{9}$$

где $P(z)$ — произвольный полином, $X(z)$ — каноническое решение соответствующей однородной задачи и $\varphi(t)$ — решение интегрального уравнения

$$K\varphi = P(t) + \frac{g(t)}{X^+[\alpha(t)]}. \tag{10}$$

Относительно решений, исчезающих на бесконечности, легко приходим к следующему результату:

При $\varkappa \geqslant 0$ общее решение неоднородной задачи (1), исчезающее на бесконечности, дается формулой (9), где под $P(z)$ следует подразумевать произвольный полином $P_{\varkappa-1}(z)$ степени не выше $\varkappa - 1$ ($P_{\varkappa-1}(z) = 0$ при $\varkappa = 0$).

При $\varkappa < 0$ решение (единственное), исчезающее на бесконечности, дается той же формулой (9), если положить $P(z) = 0$; при этом должны быть соблюдены необходимые и достаточные условия существования решения, исчезающего на бесконечности:

$$\int_L h_k(t)\, g(t)\, dt = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, -\varkappa, \tag{11}$$

где $h_k(t)$ — определенные линейно независимые функции, не зависящие от $g(t)$.

Отметим, что при $\varkappa = 0$ всегда существует одно и только одно решение, исчезающее на бесконечности. При $\varkappa > 0$ общее решение содержит $\varkappa$ произвольных комплексных постоянных.

Из (9) следует, в частности, что граничные значения $\Phi^+(t)$ и $\Phi^-(t)$ всякого кусочно-голоморфного решения задачи (1) удовлетворяют условию H; это, конечно, следствие того, что мы подчинили условию H функции $G(t)$ и $g(t)$.

Отметим, наконец, что в работах Б. В. Хведелидзе [20], И. Б. Симоненко [3], А. Э. Драчинского [2] задача (1) исследована в классе функций, представимых интегралом типа Коши.

6°. До сих пор мы предполагали, что $\alpha(t)$ сохраняет направление обхода на L. Случай, когда $\alpha(t)$ изменяет направление обхода на обратное, значительно отличается от предыдущего[1]).

В противоположность этому при указанном предположении относительно $\alpha(t)$ с достаточной полнотой изучена задача, аналогичная предыдущей, а именно, задача со следующим граничным условием:

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\overline{\Phi^-(t)} + g(t), \tag{12}$$

где $\overline{\Phi^-(t)}$ обозначает функцию, комплексно сопряженную с $\Phi^-(t)$.

Эта граничная задача впервые была поставлена и решена Д. А. Квеселава [4], [6] при указанных в формулировке задачи (1) условиях относительно функций $G(t)$ и $g(t)$.

Предполагая, что $\alpha(t)$ изменяет направление обхода L на обратное и налагая дополнительное условие

$$\alpha[\alpha(t)] = t, \tag{13}$$

Т. Карлеман (T. Carleman [2]) рассмотрел однородную задачу, соответствующую следующей граничной задаче:

Найти функцию $\Phi(z)$, голоморфную в области S^+ за исключением конечного числа полюсов и непрерывно продолжимую на L, по граничному условию

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\,\Phi^+(t) + g(t), \tag{14}$$

где $G(t)$ и $g(t)$ удовлетворяют условию H и $G(t) \neq 0$ всюду на L.

---

[1]) В частности, как легко показать на простых примерах, однородная задача может в этом случае иметь бесчисленное множество решений, исчезающих на бесконечности.

Т. Карлеман составил интегральное уравнение Фредгольма, которому удовлетворяет $\Phi^+(t)$, но не исследовал его. При тех же условиях Д. А. Квеселава [5], [6] дал законченное решение указанной граничной задачи методом, несколько отличным от метода Т. Карлемана.

7°. Граничные задачи сопряжения со смещением можно рассматривать при несколько более общем предположении относительно функции $\alpha(t)$, а именно в предположении, что $\alpha(t)$ переводит контур L в другой контур с такими же свойствами. Как показали Л. И. Чибрикова и В. С. Рогожин [1] к этому случаю непосредственно применим изложенный выше метод Д. А. Квеселава. Кроме того, при помощи конформного отображения этот случай легко приводится к случаю, когда $\alpha(t)$ переводит контур L в самого себя.

Решение упомянутых выше задач для случая, когда контур L разомкнут, дано Л. И. Чибриковой [1]. Ей же принадлежит исследование этих задач для случая, когда $G(t)$ и $g(t)$ могут определенным образом обращаться в нуль или бесконечность, а также иметь разрывы первого рода в конечном числе точек контура.

8°. Граничную задачу сопряжения со смещением для нескольких неизвестных функций можно сформулировать так:

Найти кусочно-голоморфный вектор $\Phi(z) = (\Phi_1, \Phi_2, \ldots, \Phi_n)$, имеющий конечный порядок на бесконечности, по граничному условию

$$\Phi^+[\alpha(t)] = G(t)\Phi^-(t) + g(t) \quad \text{на } L, \tag{15}$$

где $G(t) = \|G_{kj}\|$, $k, j = 1, 2, \ldots, n$,— заданная матрица, удовлетворяющая условию H и нигде на L не особенная, $g(t) = (g_1, g_2, \ldots, g_n)$ — заданный вектор, также удовлетворяющий условию H, а $\alpha(t)$ — функция, обладающая свойствами а), b) пункта 1°.

Полное решение этой задачи впервые было дано Н. П. Векуа[1]) [9], [12] см. также книгу Н. П. Векуа [16], глава IV.

В упомянутой книге Н. П. Векуа решена также более общая задача, соответствующая граничным условиям

$$\Phi_k^+[\alpha_k(t)] = \sum_{j=1}^{n} G_{kj}(t)\Phi_j^-(t) + g(t), \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $\alpha_1(t), \alpha_2(t), \ldots, \alpha_n(t)$ — заданные на контуре L функции, обладающие свойствами а), b) пункта 1°.

Граничная задача (15) в случае, когда элементы матрицы $G(t)$ имеют разрывы первого рода в конечном числе точек контура L, рассмотрена в упомянутой выше работе Л. И. Чибриковой [1].

В работе Г. Ф. Манджавидзе и Б. В. Хведелидзе [1] показано, что граничную задачу (15) можно свести к обычной задаче сопряжения.

9°. В работах Н. П. Векуа [22], [24] поставлены и решены различные обобщенные граничные задачи типа задачи (137,1), упомянутой в § 137, но со смещениями, в случае нескольких неизвестных функций. В работе [24] решена наиболее общая задача такого вида с граничным условием

$$\Phi_j^+[\alpha_j(t_0)] = \sum_{k=1}^{n} A_{jk}(t_0)\Phi_k^-(t_0) + \sum_{k=1}^{n} B_{jk}(t_0)\overline{\Phi_k^-(t_0)} + g_j(t_0),$$
$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

[1]) Эту задачу Н. П. Векуа называет обобщенной задачей Гильберта для нескольких неизвестных функций.

где $A_{jk}(t)$, $B_{jk}(t)$, $g_j(t)$, j, $k=1, 2, \ldots, n$,— заданные функции, удовлетворяющие условию H, $\alpha_j(t)$, $j=1, 2, \ldots, n$,— функции, удовлетворяющие условиям а), b) п. 1°, $\Phi_1(z)$, $\Phi_2(z)$, $\ldots$, $\Phi_n(z)$ — компоненты искомого кусочно-голоморфного вектора $\Phi(z)$.

Н. П. Векуа строит эквивалентные рассматриваемым задачам интегральные уравнения и на основе исследования этих уравнений дает их решение.

Граничная задача Карлемана для нескольких неизвестных функций, а также некоторые другие задачи рассмотрены в работах Н. П. Векуа [19], [20], [23], [25] — [27]. Из этих работ особо следует упомянуть работу [23], где дается решение задачи Карлемана в случае, когда условие (13) заменено более общим условием

$$\alpha^m(t)=t,$$

где m — любое четное целое положительное число[1]).

Некоторые другие обобщения граничной задачи сопряжения со смещениями рассмотрены в работах Г. Н. Александрия [1], [2], С. С. Чакветадзе [1], Э. Г. Хасабова [1], М. Г. Бедоевой [1], а некоторые более общие аналогичные задачи — в работах И. М. Мельника [4], Г. С. Литвинчука [1] — [3], Г. С. Литвинчука и Э. Г. Хасабова [1] — [3], Л. Г. Михайлова [3], Э. И. Зверовича [2], Г. Ф. Манджавидзе [8].

10°. Задача типа (81,1), но со смещениями для нескольких неизвестных функций и для многосвязной области рассмотрена М. П. Ганиным [3].

Н. П. Векуа [28] — [30] рассмотрел также задачи со смещениями, граничные условия которых содержат наряду с искомыми функциями и их производные, а также их сопряженные значения. Пользуясь определенными интегральными представлениями для решения каждой из рассматриваемых задач, Н. П. Векуа сводит эти задачи к сингулярным интегро-дифференциальным уравнениям, изученным им в статье [28].

Задача типа (81,1), но со смещениями рассмотрена также в работе Р. С. Исаханова [2].

11°. Представляет значительный интерес изучение так называемых сингулярных интегральных уравнений со смещением (сдвигом). Среди работ, посвященных таким уравнениям, отметим работы Н. П. Векуа [11], Р. С. Исаханова [4], Р. А. Кордзадзе [1] — [3], Г. С. Литвинчука [2], Т. М. Керимова [2].

---

[1]) Здесь принято обозначение

$$\alpha^k(t)=\alpha(\alpha^{k-1}(t)), \qquad k=2, \ldots, m,$$

при $\alpha^1(t)\equiv\alpha(t)$.

ДОБАВЛЕНИЕ VI

Б. Боярский

ПРЯМОЙ ПОДХОД К ТЕОРИИ СИСТЕМ СИНГУЛЯРНЫХ ИНТЕГРАЛЬНЫХ УРАВНЕНИЙ[1])

В последнее время теория сингулярных интегральных уравнений значительно продвинулась вперед, особенно в части, относящейся к многомерным задачам. Этот прогресс связан с некоторой новой точкой зрения на задачи теории таких уравнений. Оказалось целесообразным более внимательно отнестись к некоторым гомотопическим вопросам, которые, конечно, возникали уже в классической теории в связи с формулой для индекса системы сингулярных уравнений. Гомотопические вопросы оказались также важными при рассмотрении теории частных индексов задачи сопряжения для нескольких неизвестных функций (см. Б. Боярский [4]).

Гомотопический подход, как кажется, позволяет лучше понять удельный вес отдельных частей теории систем сингулярных уравнений и задач сопряжения, а также правильно понять взаимоотношения этих теорий.

Ниже мы, в частности, показываем, как можно получить формулу для индекса для систем сингулярных уравнений, не прибегая к изучению задачи сопряжения в ее полной общности. Главное внимание уделяется при этом доказательству теоремы III (см. § 53 и § 120). Целесообразность отделения теорем I и II от теоремы III особенно ясна в теории систем уравнений и отчетливо указывается в тексте монографии (§ 53). Материал данного дополнения трудно признать новым. Он, по-видимому, ясен всем, которые старались думать о вопросах индекса в гомотопических терминах. Следует отметить, что излагаемый ниже подход имеет важное значение для многомерных задач (см. А. И. Вольперт [1], Б. Боярский [6], R. T. Seeley [2]).

Изложение в этом добавлении, по мере возможности, примыкает весьма тесно к методам и понятиям, разработанным в настоящей монографии. В частности, мы, как правило, избегаем использования новых понятий, о которых в основном тексте нет речи. Это относится как к теоретико-функциональным, так и к алгебраическим и топологическим понятиям.

Поэтому нами приведено по возможности элементарное доказательство теоремы Аткинсона[2]) об индексе композиции сингулярных операторов, а также, во избежание ссылок на гомотопические свойства группы неособенных комплексных матриц, приведены подробные доказательства

[1]) Настоящее Добавление воспроизводит доклад проф. Б. Боярского, сделанный по приглашению Тбилисского математического института в мае 1966 г. Текст доклада, по моей просьбе, тогда же был передан мне автором для опубликования в виде добавления к настоящему изданию книги (тогда я предполагал закончить подготовку этого издания значительно раньше). Некоторое время спустя появилась статья С. Г. Михлина [11], содержащая аналогичные результаты, полученные им независимо.

[2]) Ф. В. Аткинсон [1].

относящихся сюда фактов в виде лемм 4, 5 и 6, изложенных совершенно элементарным образом.

Заметим, что в теоретико-функциональной части мы избегаем введения сопряженных пространств или операторов и, в согласии с духом монографии, используем только понятие союзной системы уравнений. Следует сказать, что этот подход монографии имеет известные преимущества перед обычно принятым в руководствах по функциональному анализу, ибо освобождает от необходимости изучения структуры сопряженных пространств, что порою представляет собой не совсем легкую задачу, особенно в случае нерефлексивных пространств. Все рассуждения проведены для класса H^μ. Однако, без существенных изменений, даже еще проще, можно рассмотреть системы с непрерывной характеристической частью в пространстве $\mathscr{L}_2$ (работы Манджавидзе — Хведелидзе). Этот подход применим также к задаче с разрывными коэффициентами. Тогда классы $h(c_1, \ldots, c_n)$, введенные в монографии, появляются естественным образом как классы полной непрерывности операторов вида (7).

Для упрощения изложения мы будем считать, что линия интегрирования L представляет собой совокупность конечного числа простых замкнутых контуров Ляпунова, не имеющих общих точек и ограничивающих некоторую конечную связную часть плоскости (рис. 17 в § 29).

В дальнейшем будет использоваться линейное нормированное пространство векторных функций $\varphi = (\varphi_1, \ldots, \varphi_n)$ класса H^μ (см. § 49 и § 133).

Систему сингулярных интегральных уравнений мы записываем в виде (см. § 119)

$$\mathbf{K}\varphi = A(t_0)\varphi(t_0) + \frac{B(t_0)}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0} + \mathbf{k}\varphi = f(t_0), \tag{1}$$

а через $\mathbf{K}'\varphi = 0$ обозначаем соответствующую однородную союзную систему.

Левую часть системы (1) удобно записывать в виде

$$\mathbf{K}\varphi = A\mathbf{E}\varphi + B\mathbf{I}\varphi + \mathbf{k}\varphi, \tag{2}$$

где

$$\mathbf{E}\varphi = \varphi \quad \text{и} \quad \mathbf{I}\varphi = \frac{1}{\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}. \tag{3}$$

Напомним, что в силу формул Сохоцкого — Племеля (§ 16) и формулы обращения (§ 32) оператор $\mathbf{I}\varphi$ удовлетворяет соотношению

$$\mathbf{I}^2\varphi = \mathbf{E}\varphi. \tag{4}$$

Характеристическая часть $\mathbf{K}^0$ оператора (2) определяется формулой

$$\mathbf{K}^0\varphi = A\mathbf{E}\varphi + B\mathbf{I}\varphi. \tag{5}$$

В силу рассуждений §§ 45, 119 характеристическая часть композиции сингулярных операторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$ полностью определяется их характеристическими частями $\mathbf{K}_1^0$ и $\mathbf{K}_2^0$. Удобно результаты §§ 45, 119 выразить следующим образом:

Пару матричных функций $(S(t), D(t))$, где

$$S(t) = A(t) + B(t) \quad \text{и} \quad D(t) = A(t) - B(t), \tag{6}$$

назовем *символом* σ оператора (2): $\sigma(\mathbf{K}) = (S, D)$; *произведением двух символов* (S', D') и (S'', D'') мы будем называть символ $(S'S'', D'D'')$. Тогда формулы (119,17) означают, что справедлива следующая

Лемма 1. *Символ произведения (композиции) сингулярных операторов равен произведению символов этих операторов.*

Другое доказательство леммы можно получить, если заметить, что характеристическая часть оператора вида

$$A\mathbf{I}\varphi - \mathbf{I}A\varphi \tag{7}$$

для любой матрицы $A \in H^{\mu}$ равна нулю [другими словами, оператор вида (7) вполне непрерывен; ср. §§ 49, 119], и воспользоваться формулой (4).

Условие нормальности

$$\det S(t) \neq 0, \quad \det D(t) \neq 0 \tag{8}$$

означает, что символ (6) имеет обратный для матричных функций класса H^{μ}.

Очевидно, что система уравнений (1) нормального типа всегда эквивалентна системе уравнений, для которой

$$S(t) \equiv E, \tag{9}$$

где E — обозначает единичную матрицу.

Тогда символ редуцируется к матрице $D(t)$. Если и $D(t) \equiv E$, мы имеем систему уравнений

$$\varphi + \mathbf{k}\varphi = f; \tag{10}$$

это есть система уравнений Фредгольма второго рода.

Множество матричных функций $D(t)$, $t \in L$, класса H^{μ}, удовлетворяющих условию (8), обозначим через $\Omega^{\mu}(L; n)$.

Оператор

$$\mathbf{K}_0(D) \equiv \frac{E+D(t_0)}{2}\varphi(t_0) + \frac{E-D(t_0)}{2\pi i}\int\limits_L \frac{\varphi(t)\,dt}{t-t_0}, \tag{11}$$

очевидно, есть оператор нормального типа и

$$\sigma(\mathbf{K}_0(D)) = (E, D). \tag{12}$$

Таким образом, каждый элемент класса $\Omega^{\mu}(L; n)$ определяет некоторый сингулярный оператор. В классе операторов, для которых $S(t) \equiv E$, оператор $\mathbf{K}_0(D)$ определяется однозначно с точностью до вполне непрерывного оператора.

Из этих замечаний и леммы 1 следует, что условие (8) достаточно для регуляризуемости системы уравнений (1). В полном соответствии с рассуждениями §§ 45, 120 регуляризатором системы уравнений (1) будет любой оператор с символом $(S^{-1}(t), D^{-1}(t))$.

Пусть α и β — числа линейно-независимых решений систем уравнений $\mathbf{K}\varphi = 0$ и $\mathbf{K}'\varphi = 0$ соответственно. Эти числа конечны (см. §§ 45, 50, 120).

Разность $\varkappa(\mathbf{K}) = \alpha - \beta$ назовем аналитическим индексом системы (1). Напомним, что в обозначениях основного текста $\alpha = k$, $\beta = k'$. В дальнейшем вместо α и β мы будем иногда писать $\alpha(\mathbf{K})$ и $\beta(\mathbf{K})$, явно указывая на связь этих чисел с оператором $\mathbf{K}$.

Удобно ввести понятие оператора конечного ранга. Оператор $\mathbf{m}$ называется оператором конечного ранга, если $\mathbf{m}$ переводит все пространство H^μ в конечномерное подпространство. Другими словами, любой оператор конечного ранга можно представить в виде

$$\mathbf{m}\varphi = \sum_{i=1}^{N} f_i \mathbf{m}_i \varphi,$$

где $\mathbf{m}_i(\varphi)$ — некоторые функционалы в пространстве H^μ, а $f_i \in H^\mu$. Очевидно, теорема II § 120 содержит в себе следующую теорему.

Теорема 1. *Для любого оператора* $\mathbf{m}$ *конечного ранга операторы* $\mathbf{K}$ *и* $\mathbf{K}+\mathbf{m}$ *одновременно являются операторами нормального типа и*

$$\varkappa(\mathbf{K}) = \varkappa(\mathbf{K}+\mathbf{m}). \tag{13}$$

Напомним еще, что число β есть число линейно независимых условий разрешимости неоднородной системы (1). Так как $(\mathbf{K}')' = \mathbf{K}$, то вместе с теоремой I § 120 это означает, что аналитические индексы операторов $\mathbf{K}$ и $\mathbf{K}'$ связаны формулой

$$\varkappa(\mathbf{K}') = -\varkappa(\mathbf{K}).$$

Полезно будет пользоваться следующей леммой:

Лемма 2. *Если* $\varkappa(\mathbf{K}) \geqslant 0$, *то существует такой оператор конечного ранга* $\mathbf{m}$, *что* $\beta(\mathbf{K}+\mathbf{m}) = 0$ *и, следовательно,* $\alpha(\mathbf{K}+\mathbf{m}) = \varkappa(\mathbf{K})$.

Если $\varkappa(\mathbf{K}) < 0$, *то существует такой оператор конечного ранга* $\mathbf{m}$, *что* $\alpha(\mathbf{K}+\mathbf{m}) = 0$ *и соответственно* $\varkappa(\mathbf{K}) = -\beta(\mathbf{K}+\mathbf{m})$.

Доказательство (ср. § 52):

Положим ради краткости (как в тексте книги)

$$(f, \varphi) = \int_L f(t)\,\varphi(t)\,dt$$

для любых (векторных) функций f и φ класса H^μ. Пусть $\hat{g}_i$, $i = 1, 2, \ldots, \alpha$ — (векторные) функции класса H^μ такие, что $(\varphi_i, \hat{g}_j) = \delta_{ij}$, где φ_i, $i = 1, 2, \ldots, \alpha$, — полная система линейно независимых решений уравнения $\mathbf{K}\varphi = 0$ (ср. Добавление IV, а также § 110).

Положим еще[1])

$$[\varphi, \psi] = \int_L \overline{\varphi}\psi\,ds = (\overline{\varphi}\,\overline{t'}, \psi), \quad t' = \frac{dt}{ds}.$$

В пространстве решений системы $\mathbf{K}'\varphi = 0$ выберем базис $g_1, \ldots, g_\beta$, ортонормированный по $[g_i, g_j]$, т. е. такой, что

$$[g_i, g_j] = (\overline{g}_i\overline{t'}, g_j) = \delta_{ij}.$$

Полагая

$$\mathbf{m}\varphi = \sum_{i=1}^{\beta} (\varphi, \hat{g}_i)\,\overline{g}_i\overline{t'},$$

имеем

$$\mathbf{m}\varphi_j = \overline{g}_j\overline{t'} = \psi_j.$$

---

[1]) Через $\overline{\varphi}$ обозначается вектор, компоненты которого комплексно сопряжены с компонентами вектора φ.

Система уравнений

$$\mathbf{K}\varphi + \mathbf{m}\varphi = f$$

разрешима при любой правой части. В самом деле, если

$$\hat{f} = f - \sum_{k=1}^{\beta} (f, g_k)\,\psi_k,$$

то

$$(\hat{f}, g_j) = (f, g_j) - \sum_{k=1}^{\beta} (f, g_k)(\psi_k, g_j) = (f, g_j) - \sum_{k=1}^{\beta} (f, g_k)\,\delta_{kj} = 0,$$

и система

$$\mathbf{K}\varphi = \hat{f}$$

имеет решение φ_0. Это решение можно выбрать таким, чтобы

$$\mathbf{m}\varphi_0 = 0,$$

ибо оно определено лишь с точностью до линейной комбинации

$$\sum_{i=1}^{\alpha} \lambda_i \varphi_i \qquad (\alpha \geqslant \beta).$$

Положим

$$\mu_i = (f, g_i), \qquad i = 1,\ 2,\ \ldots,\ \beta,$$

и рассмотрим вектор

$$\varphi = \varphi_0 + \sum_{i=1}^{\beta} \mu_i \varphi_i.$$

Имеем

$$\mathbf{K}\varphi + \mathbf{m}\varphi = \mathbf{K}\varphi_0 + \mathbf{m}\varphi_0 + \mathbf{K}\Big(\sum_{i=1}^{\beta} \mu_i \varphi_i\Big) + \sum_{i=1}^{\beta} \mu_i \mathbf{m}\varphi_i =$$
$$= f - \sum_{k=1}^{\beta} (f, g_k)\,\psi_k + \sum_{i=1}^{\beta} \mu_i \psi_i = f.$$

Аналогично рассматривается случай отрицательного индекса. Из леммы 2 выводим следующую важную теорему.

Теорема 2.

$$\varkappa(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2) = \varkappa(\mathbf{K}_1) + \varkappa(\mathbf{K}_2). \tag{14}$$

Доказательство. Если $\alpha(\mathbf{K}_1) = \varkappa(\mathbf{K}_1)$, $\alpha(\mathbf{K}_2) = \varkappa(\mathbf{K}_2)$, то, очевидно, $\beta(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2) = 0$, ибо система уравнений $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\varphi = f$ всегда разрешима. Действительно, можно сначала решить уравнение $\mathbf{K}_1\hat{\varphi} = f$, а затем уравнение $\mathbf{K}_2\varphi = \hat{\varphi}$. Далее, легко видеть, что $\alpha(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2) = \alpha(\mathbf{K}_1) + \alpha(\mathbf{K}_2)$. Отсюда и из леммы 2 непосредственно следует, что формула (14) справедлива для любых операторов $\mathbf{K}_1$ и $\mathbf{K}_2$, для которых $\varkappa(\mathbf{K}_i) \geqslant 0$.

В самом деле, тогда существуют в силу леммы 2 операторы $\mathbf{m}_1$ и $\mathbf{m}_2$ такие, что

$$\beta(\mathbf{K}_i + \mathbf{m}_i) = 0, \qquad i = 1,\ 2.$$

Тогда

$$\varkappa((\mathbf{K}_1 + \mathbf{m}_1)(\mathbf{K}_2 + \mathbf{m}_2)) = \varkappa(\mathbf{K}_1 + \mathbf{m}_1) + \varkappa(\mathbf{K}_2 + \mathbf{m}_2) = \varkappa(\mathbf{K}_1) + \varkappa(\mathbf{K}_2)$$

и

$$(\mathbf{K}_1+\mathbf{m}_1)(\mathbf{K}_2+\mathbf{m}_2)=\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2+\mathbf{m}_1\mathbf{K}_2+\mathbf{K}_1\mathbf{m}_2+\mathbf{m}_1\mathbf{m}_2=\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2+\mathbf{m},$$

где $\mathbf{m}$ — оператор конечного ранга.

Аналогично рассматривается случай $\varkappa(\mathbf{K}_i)\leqslant 0$. Впрочем, этот случай можно свести к предыдущему переходом к союзным уравнениям.

Остался случай $\varkappa(\mathbf{K}_1)\geqslant 0$, $\varkappa(\mathbf{K}_2)<0$. В силу леммы 2 можем рассмотреть только случай $\beta(\mathbf{K}_1)=0$, $\alpha(\mathbf{K}_2)=0$. Нам надо подсчитать числа $\alpha(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)$ и $\beta(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)$. Решения уравнения $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\varphi=0$ являются решениями уравнения

$$\mathbf{K}_2\varphi=\sum_{i=1}^{\alpha_1}\lambda_i\varphi_i \quad (\alpha_1=\alpha(\mathbf{K}_1),\ \lambda_i\text{ — постоянные}), \tag{15}$$

где $\{\varphi_i\}$ — полная система решений уравнения $\mathbf{K}_1\varphi=0$. Система (15) разрешима тогда и только тогда, если

$$\sum_{i=1}^{\alpha_1}\lambda_i(\varphi_i, g_k)=0, \quad k=1, \ldots, \beta_2 \quad (\beta_2=\beta(\mathbf{K}_2)); \tag{16}$$

$\{g_k\}$ — полная система решений уравнения $\mathbf{K}_2'g=0$. Пусть матрица $\|(\varphi_i, g_k)\|$ имеет ранг p. Тогда число линейно независимых решений системы (15) равно

$$\alpha(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)=\alpha(\mathbf{K}_1)-p.$$

Рассмотрим однородную систему $\mathbf{K}_2'\mathbf{K}_1'\varphi=0$, союзную с системой $\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2\varphi=f$. Ее решения являются решениями уравнения

$$\mathbf{K}_1'\varphi=\sum_{k=1}^{\beta_2}\mu_k g_k,$$

где μ_k — постоянные; но это уравнение разрешимо лишь при соблюдении α_1 условий:

$$\sum_{k=1}^{\beta_2}\mu_k(g_k, \varphi_j)=0, \qquad j=1, \ldots, \alpha_1. \tag{17}$$

Это дает β_2-p решений системы $\mathbf{K}_2'\mathbf{K}_1'\varphi=0$. Отсюда $\beta(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)=\beta_2-p$. Окончательно,

$$\varkappa(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)=\alpha(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)-\beta(\mathbf{K}_1\mathbf{K}_2)=\alpha_1-\beta_2=\varkappa(\mathbf{K}_1)+\varkappa(\mathbf{K}_2),$$

что и требовалось.

Следующая теорема непосредственно примыкает к рассуждениям § 133. В частности, мы воспользуемся введенным там обозначением для нормы матричной функции

$$|D|_\mu=\max|d_{ik}|_\mu.$$

Теорема 3. *Пусть $\mathbf{K}_1$ — сингулярный оператор нормального типа с символом (E, D_1) и $\mathbf{K}_2$ — другой сингулярный оператор такой, что $\sigma(\mathbf{K}_2)=(E, D_2)$, причём*

$$|D_1-D_2|_\mu<\varepsilon. \tag{18}$$

Тогда при достаточно малом ε оператор $\mathbf{K}_2$ нормального типа и $\varkappa(\mathbf{K}_2)=\varkappa(\mathbf{K}_1)$.

Доказательство. Нормальность $\mathbf{K}_2$ следует непосредственно из (18), при достаточно малом ε. Рассмотрим оператор $\mathbf{K}_3$ с символом

$(E,\ D_2D_1^{-1})$. В силу (18)

$$|D_2D_1^{-1}-E|_\mu=|(D_2-D_1)D_1^{-1}|_\mu\leqslant n\varepsilon|D_1^{-1}|_\mu;$$

$\mathbf{K}_3$ имеет поэтому вид

$$\mathbf{K}_3\varphi=\frac{1}{2}(E+D_2D_1^{-1})\varphi+\frac{1}{2}(E-D_2D_1^{-1})\mathbf{I}\varphi+\mathbf{k}\varphi=\mathbf{E}\varphi+\mathbf{A}\varphi+\mathbf{k}\varphi,$$

где $\mathbf{k}$ — вполне непрерывный оператор и $\mathbf{A}$ — оператор такой, что $|\mathbf{A}|<1$ для достаточно малого ε.

Поэтому существует оператор $\mathbf{R}$ такой, что

$$(\mathbf{E}+\mathbf{A})\mathbf{R}\varphi=\mathbf{R}(\mathbf{E}+\mathbf{A})\varphi=\varphi.$$

А именно, можно взять

$$\mathbf{R}\varphi=\sum_{k=0}^{\infty}(-1)^k\mathbf{A}^k\varphi;$$

ряд, определяющий $\mathbf{R}\varphi$, сходится в нормированном пространстве H^μ.

Уравнение

$$\mathbf{K}_3\varphi=\mathbf{E}\varphi+\mathbf{A}\varphi+\mathbf{k}\varphi=f$$

эквивалентно уравнению

$$\varphi+\mathbf{R}\mathbf{k}\varphi=\mathbf{R}f,$$

которое является уравнением Фредгольма второго рода. Поэтому

$$\varkappa(\mathbf{K}_3)=0.$$

Имеем, далее,

$$\sigma(\mathbf{K}_3\mathbf{K}_1)=(E,\ D_2)\quad\text{или}\quad\mathbf{K}_3\mathbf{K}_1=\mathbf{K}_2+\mathbf{v},$$

где $\mathbf{v}$ — вполне непрерывный оператор.

В силу теорем 1 и 2

$$\varkappa(\mathbf{K}_2)=\varkappa(\mathbf{K}_2+\mathbf{v})=\varkappa(\mathbf{K}_3\mathbf{K}_1)=\varkappa(\mathbf{K}_3)+\varkappa(\mathbf{K}_1)=\varkappa(\mathbf{K}_1),$$

что и требовалось.

Теперь необходимо изучить некоторые свойства множества $\Omega^\mu(L;\ n)$. Для этой цели введем следующее определение.

Два элемента D_1 и D_2 из $\Omega^\mu(L;\ n)$ назовем г о м о т о п н ы м и: $D_1\sim D_2$, если существует матричная функция $D(t;\ \lambda)$, определенная на произведении $L\times I$, где I — единичный отрезок $0\leqslant\lambda\leqslant 1$, удовлетворяющая условию $\det D(t;\ \lambda)\neq 0$, принадлежащая H^μ по t и λ и такая, что

$$D(t;\ 0)\equiv D_1(t)\quad\text{и}\quad D(t;\ 1)\equiv D_2(t).$$

Отношение гомотопии есть отношение эквивалентности. В частности, существенной чертой гомотопии является возможность применять ее поочередно.

Л е м м а 3. *Пусть L — простая замкнутая кривая. Тогда каждая функция из $\Omega^\mu(L;\ 1)$ гомотопна функции $t^\varkappa$, где $\varkappa$ — целое число* (для удобства мы предполагаем, что начало координат расположено внутри конечной области, ограниченной кривой).

Д о к а з а т е л ь с т в о. Пусть $a(t)\in\Omega^\mu(L;\ 1)$, и пусть

$$\varkappa=\frac{1}{2\pi}[\arg a(t)]_L.$$

Тогда существует однозначная ветвь логарифма функции $a(t)t^{-\varkappa}$ на L: $a(t)t^{-\varkappa}=e^{h(t)}$, причем $h(t)$ удовлетворяет условию H на L; поэтому функция

$$a(t;\lambda)=t^{\varkappa}e^{\lambda h(t)},\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1,\quad t\in L,$$

осуществляет требуемую гомотопию.

Если линия L состоит из нескольких простых контуров $L_0, L_1, L_2, \ldots, L_m$, ограничивающих вместе конечную связную часть плоскости G, причем контуры L_k, $k\geqslant 1$, расположены внутри L_0, то, очевидно, справедлива

Лемма 4. *Каждая функция $a(t)$ из $\Omega^{\mu}(L;1)$ гомотопна функции вида*

$$(t-t_0)^{\varkappa_0-\varkappa_1-\ldots-\varkappa_m}(t-t_1)^{\varkappa_1}\ldots(t-t_m)^{\varkappa_m},$$

где

$$\varkappa_i=\frac{1}{2\pi}[\arg a(t)]_{L_i},\qquad i=0,\ldots m,$$

причем точка $t_0\in G$, а точки t_i, $i>1$, выбраны внутри L_i.

Классификация гомотопических типов элементов из $\Omega^{\mu}(L;n)$ непосредственно сводится к случаю $n=1$. Именно, имеет место

Лемма 5. *Любая матричная функция $D(t)$ гомотопна матричной функции вида*

$$D_{ij}^{*}=\|d_{ij}(t)\|,$$

где

$$d_{ij}=0,\ i\neq j,\ d_{ii}=1 \text{ для } i\geqslant 2,\ d_{11}\in\Omega^{\mu}(L;1).$$

Доказательство. Ниже мы даем описание нескольких шагов требуемой гомотопической деформации матрицы $D(t)$. Если какой-нибудь элемент первой строки d_{1i}, $i=1,\ldots n$, например, $d_{11}(t)\neq 0$ на L, то очевидно, что матричная функция

$$D(t;\lambda)=\begin{Vmatrix} d_{11} & d_{12}-\lambda\frac{d_{12}}{d_{11}}d_{11} & d_{13}-\lambda\frac{d_{13}}{d_{11}}d_{11} & \ldots & d_{1n}-\lambda\frac{d_{1n}}{d_{11}}d_{11} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2}-\lambda\frac{d_{12}}{d_{11}}d_{n1} & d_{n3}-\lambda\frac{d_{13}}{d_{11}}d_{n1} & \ldots & d_{nn}-\lambda\frac{d_{1n}}{d_{11}}d_{n1} \end{Vmatrix}$$

осуществляет гомотопию D в матричную функцию вида

$$\begin{Vmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Дальше гомотопия осуществляется по формуле

$$D(t;\lambda)=\begin{Vmatrix} d_{11} & 0 & \ldots & 0 \\ (1-\lambda)d_{21} & d_{22} & \ldots & d_{2n} \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ (1-\lambda)d_{n1} & d_{n2} & \ldots & d_{nn} \end{Vmatrix}.$$

Если $d_{11}(t)$ (и ни один другой элемент первой строки) не удовлетворяет условию $d_{11}(t)\neq 0$ на L, то, очевидно, его можно заменить равномерно аппроксимирующей функцией $\tilde{d}_{11}(t)$,

$$|d_{11}(t)-\tilde{d}_{11}(t)|<\varepsilon,$$

которая этому условию уже удовлетворяет. При достаточно малом ε, очевидно, матрица $\tilde{D}=\|\tilde{d}_{ik}\|$, $\tilde{d}_{ik}=d_{ik}$, $(i, k)\neq(1, 1)$, принадлежит множеству $\Omega^{\mu}(L; n)$, а также $D(t; \lambda)=D(t)+\lambda(\tilde{D}(t)-D(t))\in\Omega^{\mu}(L; n)$.

В результате конечного числа указанных операций получим диагональную матрицу, гомотопную данной.

Покажем теперь, что любая диагональная матрица порядка 2 $D=\begin{Vmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22}\end{Vmatrix}$ гомотопна матрице вида $\begin{Vmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & 1\end{Vmatrix}$.

Сначала предположим $d_{11}=\bar{d}_{22}$, $|d_{11}|=1$; тогда матрица

$$D(t; \lambda)=\begin{Vmatrix}(1-\lambda)d_{11} & i\lambda \\ i\lambda & (1-\lambda)d_{22}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix}1-\lambda & -i\lambda \\ -i\lambda & 1-\lambda\end{Vmatrix},\quad 0\leqslant\lambda\leqslant 1,$$

$$\det[D(t; \lambda)]=[(1-\lambda)^2+\lambda^2]^2\geqslant\frac{1}{4},$$

принадлежит $\Omega^{\mu}(L; 2)$ и $D(t; 0)=D$, $D(t; 1)=\begin{Vmatrix}1 & 0 \\ 0 & 1\end{Vmatrix}$.

В общем случае,

$$\begin{Vmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22}\end{Vmatrix}\sim\begin{Vmatrix} d_{11} & 0 \\ 0 & d_{22}\end{Vmatrix}\cdot\begin{Vmatrix} d_{22} & 0 \\ 0 & \bar{d}_{22}\end{Vmatrix}=\begin{Vmatrix} d_{11}d_{22} & 0 \\ 0 & 1\end{Vmatrix},\tag{19}$$

ибо в силу леммы 3 можно принять $|d_{ii}|=1$.

Применяя этот процесс гомотопных преобразований матричных функций, мы, очевидно, после конечного числа шагов придем к матрице, в которой $d_{ij}=\delta_{ij}$ для $(i, j)\neq(1,1)$, что и требуется в лемме 5.

Леммы 4 и 5 дают следующую лемму.

Лемма 6. *Любой элемент из $\Omega^{\mu}(L; n)$ гомотопен элементу вида*

$$\begin{Vmatrix}(t-t_0)^{\varkappa_0-\varkappa_1-\ldots-\varkappa_m} & (t-t_1)^{\varkappa_1} & \ldots & (t-t_m)^{\varkappa_m} & 0 & \ldots & 0 \\ & 0 & & & 1 & \ldots & 0 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ & 0 & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & 1\end{Vmatrix}.\tag{20}$$

Очевидно, что если $a(t)$ гомотопна матрице вида (20), то

$$\varkappa_i=\frac{1}{2\pi}[\arg\det a(t)]_{L_i},\quad i=0, 1, \ldots, m.\tag{21}$$

Положим

$$\nu(D(t))=\frac{1}{2\pi}[\arg\det D(t)]_{L_0}-\frac{1}{2\pi}\sum_{i=1}^{m}[\arg\det D(t)]_{L_i}=\varkappa_0-(\varkappa_1+\ldots+\varkappa_m).\tag{22}$$

Ясно, что если $D_1\sim D_2$, то

$$\nu(D_1)=\nu(D_2).\tag{23}$$

Обратное справедливо лишь для $m=0$, т. е. для одного контура. Однако мы этим фактом пользоваться не будем.

Очевидно,

$$\nu(D_1D_2)=\nu(D_1)+\nu(D_2). \tag{24}$$

Отметим также, что при любом натуральном p существует матрица D_p такая, что

$$\nu(D_p)=p; \tag{25}$$

при этом можно взять

$$D_p=D_1^p. \tag{26}$$

Достаточно принять

$$D_1=\begin{Vmatrix} t & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 1 & \dots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & 0 & \dots & 1 \end{Vmatrix} \quad (t_0=0). \tag{27}$$

Введем еще следующее отображение классов гомотопии в группу целых чисел:

$$f(D)=\varkappa(\mathrm{K}_D), \tag{28}$$

где K_D — любой оператор такой, что

$$\sigma(\mathrm{K}_D)=(E,\ D).$$

Это определение корректно.

Очевидно, (28) есть отображение классов гомотопии в целые числа: если $D_1\sim D_2$, то $f(D_1)=f(D_2)$; это следует из теоремы 3.

Теорема 2 дает

$$f(D_1D_2)=f(D_1)+f(D_2). \tag{29}$$

Докажем теперь основную лемму:

Лемма 7. *Если* $\nu(D)=0$, *то* $f(D)=0$.

Доказательство. Система уравнений с символом $(E,\ D)$ имеет тот же аналитический индекс $f(D)$, что и система с характеристической частью, определенная матрицей

$$d_{11}=(t-t_1)^{\varkappa_1}\ \dots\ (t-t_m)^{\varkappa_m}\,t^{\nu(D)},\quad d_{ik}=\delta_{ik},\quad (i,\ k)\neq(1,1).$$

Тогда, очевидно, соответствующая неоднородная система имеет вид

$$\begin{aligned} &\frac{1+d_{11}}{2}\varphi_1+\frac{1-d_{11}}{2}\mathrm{I}\varphi_1=f_1,\\ &\varphi_i=f_i,\quad i=2,\ \dots,\ n. \end{aligned} \tag{30}$$

Эта система однозначно разрешима при любой правой части. Можно было бы без труда выписать ее решение в явном виде, однако достаточно заметить, что система (30) соответствует задаче линейного сопряжения

$$\left.\begin{aligned} &\varphi_1^+=d_{11}\varphi_1^-+f_1,\\ &\varphi_i^+=\varphi_i^-+f_i,\qquad i\geqslant 2, \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

которая подстановкой

$$\psi_i(z)=\frac{\varphi_i(z)}{d_{ii}(z)},\ z\in G^+,\quad \psi_i(z)=\varphi_i(z),\ z\in G^-\quad (d_{ii}(z)\equiv 1,\ i\geqslant 2;\ \nu=0), \tag{32'}$$

сводится к эквивалентной задаче $\psi_i^+=\psi_i^-+f_i$, $i=1\ 2,\ \dots,\ n$, всегда однозначно разрешимой; следовательно, $\varkappa=f(D)=0$.

Положим теперь

$$c = f(D_1), \tag{33}$$

где матрица D_1 определена формулой (27); c — целое число.

В силу (24) и (26) для любой матрицы $D \in \Omega^{\mu}(L; n)$ имеем

$$\nu(DD_1^{-\nu(D)}) = \nu(D) - \nu(D)\,\nu(D_1) = 0.$$

Согласно лемме 7

$$f(DD_1^{-\nu}) = 0$$

или в силу (29)

$$f(D) = f(D_1)\,\nu(D) = c\nu(D).$$

Подсчитаем теперь постоянную c. Для этого достаточно найти разность $\alpha - \beta$ для системы (30). Эта система отвечает задаче сопряжения (31), в которой

$$d_{11}'(t) = t(t-t_1)^{\varkappa_1} \ldots (t-t_m)^{\varkappa m}.$$

Подстановка (32) приводит тогда к задаче сопряжения

$$\psi_1^+ = t\psi_1^- + f_1,$$
$$\psi_i^+ = \psi_i^- + f_i, \quad i \geqslant 2,$$

которая, очевидно, имеет индекс $+1$. Поэтому $c = +1$.

Итак, нами доказана формула Н. И. Мусхелишвили: Для системы сингулярных интегральных уравнений

$$\varkappa(\mathrm{K}) = \frac{1}{2\pi}\left[\arg \frac{\det(A-B)}{\det(A+B)}\right]_L.$$

Заметим, наконец, что описанный выше метод может быть приспособлен к более общему случаю, рассмотренному в книге, а также к разрывным задачам.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

А. Русский алфавит

Абдулаев Р. Н. [1] Неоднородная задача Римана с разрывными коэффициентами, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 1, 1962, стр. 81—86.

[2] Краевые задачи для аналитических функций на конечных римановых поверхностях, Уч. зап. Перм. ун-та, т. 22, вып. 2, 1962, стр. 3—9.

[3] Об условии разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 152, № 6, 1963, стр. 1279—1281.

[4] К условиям разрешимости однородной задачи Римана на замкнутых римановых поверхностях, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXIII, № 3, 1964, стр. 519—522.

[5] Однородная задача Римана на замкнутых римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 160, № 5, 1965, стр. 983—985.

[6] Задача Сохоцкого на открытых римановых поверхностях, Уч. зап. Перм. ун-та, № 103, 1963, 3—6.

[7] Задача Римана на открытых римановых поверхностях, Уч. зап. Перм. ун-та, № 103, 1963, стр. 143—146.

Агранович М. С., Волевич Л. Р. и Дынин А. С. [1] Разрешимость общих граничных задач для эллиптических систем в многомерных областях, Совместный Советско-Американский симпозиум по уравнениям с частными производными, Новосибирск, 1963.

Александрия Г. Н. [1] Обобщенная задача Газемана для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. 12, № 10, 1951, стр. 585—590.

[2] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. 14, № 2, 1953, стр. 65—70.

Алексеев А. Д. [1] Особое интегральное уравнение на контуре из класса R, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVII, 1960, стр. 275—291.

[2] Об особом интегральном уравнении на контуре из класса R, Докл. АН СССР, т. 136, № 3, 1961, стр. 525—528.

[3] Об одном случае разрывной задачи Римана, Докл. АН СССР, т. 167, № 2, 1966, стр. 255—258.

Алексидзе М. А. [1] О приближенном решении задачи Римана — Гильберта, Тр. Вычисл. центра АН ГрузССР, т. 6, № 3, 1965, стр. 103—122.

Аткинсон Ф. В. (F. V. Atkinson). [1] Нормальная разрешимость линейных уравнений в нормированных пространствах, Матем. сб., т. 28 (70), № 1, 1951, стр. 3—14.

Ахиезер Н. И. [1] О некоторых формулах обращения сингулярных интегралов, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 9, № 4, 1945, стр. 275—290.

Бабаев А. А. [1] Об одном обобщении теоремы Племеля — Привалова и его применения, Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем. н., № 4, 1963, стр. 3—10.

[2] Об особом интеграле с непрерывной плотностью, Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем. н., № 5, 1965, стр. 11—28.

[3] Некоторые свойства особого интеграла с непрерывной плотностью и его приложения, Докл. АН СССР, т. 166, № 2, 1966, стр. 255—258.

Бабаев А. А. и Салаев В. В. [1] Об одном аналоге теоремы Племеля — Привалова в случае негладких кривых и ее приложениях, Докл. АН СССР, т. 161, № 2, 1965, стр. 267—269.

Бабенко К. И. [1] О сопряженных функциях, Докл. АН СССР, т. 62, № 2, 1948, стр. 157—160.

Банцури Р. Д. и Джанашия Г. А. [1] Об уравнениях типа свертки для полуоси, Докл. АН СССР, т. 155, № 2, 1964, стр. 251—253.

Бари Н. К. [1] Тригонометрические ряды, М., 1961.

Батырев А. В. [1] Приближенное решение задачи Римана — Привалова, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 5, 1956, стр. 71—76.

Бедоева М. Г. [1] Об одном виде граничной задачи линейного сопряжения при заданных смещениях, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXVIII, № 3, 1962, стр. 257—264.

Берикашвили Н. А. [1] Об индексе систем сингулярных интегральных уравнений на двумерных многообразиях, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIV, № 2, 1964, стр. 257—264.

Беркович Ф. Д. [1] О решении одной бесконечной системы линейных алгебраических уравнений в классе растущих последовательностей, Докл. АН СССР, т. 149, № 3, 1963, стр. 485—498.

Бицадзе А. В. [1] Граничные задачи для систем линейных дифференциальных уравнений эллиптического типа, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 8, 1944, стр. 761—770 (на груз. яз.).

[2] Об одной системе функций, Успехи матем. наук, т. 5, вып. 4, 1950, стр. 154—155.

[3] К общей задаче смешанного типа, Докл. АН СССР, т. 78, № 4, 1951, стр. 621—624.

[4] К проблеме уравнений смешанного типа, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 61, 1953, стр. 1—60.

[5] Об одном элементарном способе решения некоторых граничных задач теории голоморфных функций и связанных с ними особых интегральных уравнений, Успехи матем. наук, т. 12, вып. 5, 1957, стр. 185—190.

[6] Уравнения смешанного типа, изд-во АН СССР, М., 1959.

[7] Краевые задачи для эллиптических уравнений второго порядка, М., 1966.

[8] Обращение одной системы сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 93, № 4, 1953, стр. 595—597.

[9] Пространственный аналог интеграла типа Коши и некоторые его применения, Докл. АН СССР, т. 93, № 3, 1953, стр. 389—392.

[10] О двумерных интегралах типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVI, 1955, стр. 177—184.

[11] Об одном классе многомерных сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 159, № 5, 1964, стр. 955—957.

Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В., Тавхелидзе А. Н. [1] Применение методов Н. И. Мусхелишвили для решения сингулярных интегральных уравнений в квантовой теории поля, Проблемы механики сплошной среды (сборник), изд. АН СССР, М., 1961, стр. 45—59.

Боярский Б. (B. Bojarski) [1] Об одной граничной задаче теории функций, Докл. АН СССР, т. 119, № 2, 1958, стр. 199—202.

[2] Об особом случае задачи Римана — Гильберта, Докл. АН СССР, т. 119, № 3, 1958, стр. 411—414.

[3] Классы гомотопии матричных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 3, 1958, стр. 263—269.

[4] Об устойчивости задачи Гильберта для голоморфного вектора, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 4, 1958, стр. 391—397.

[5] Задачи Римана — Гильберта для голоморфного вектора, Докл. АН СССР, т. 126, № 4, 1959, стр. 695—698.

[6] On the index problem for systems of singular integral equations, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. XI, № 10, 1963, p. 653—655; vol. XIII, № 9, 1965, p. 627—631, 633—637.

Векуа Илья Н. [1] О сингулярных линейных интегральных уравнениях, содержащих интегралы в смысле главного значения по Коши, Докл. АН СССР, т. XXVI, № 4, 1940, стр. 335—338.

[2] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 7, 1941, стр. 579—586.

[3] О приведении сингулярных интегральных уравнений к уравнениям Фредгольма, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 8, 1941, стр. 697—700.

[4] Интегральные уравнения с особым ядром типа Коши, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. X, 1941, стр. 45—72.

[5] Об одном новом интегральном представлении аналитических функций и его приложении, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 6, 1941, стр. 477—484; Дополнения к работе «Об одном новом интегральном представлении...», там же, № 8, 1941 стр. 701—706.

[6] Об изгибе пластинки со свободным краем, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 7, 1942, стр. 641—648.

[7] К теории сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 9, 1942, стр. 869—876.

[8] Об одной линейной граничной задаче Римана, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XI, 1942, стр. 109—139.

[9] Об интегро-дифференциальном уравнении Прандтля, Прикл. матем. и мех., т. 9, № 2, 1945, стр. 143—150.

[10] Новые методы решения эллиптических уравнений, М.— Л., 1948.

[11] Системы дифференциальных уравнений первого порядка эллиптического типа и граничные задачи с применением к теории оболочек, Матем. сб., т. 31, № 2, 1952, стр. 217—314.

[12] Граничная задача с косой производной для уравнения эллиптического типа, Докл. АН СССР, т. XCII, № 6, 1953, стр. 1113—1116.

[13] Обобщенные аналитические функции, М., 1959.

Векуа Николай П. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений и некоторые краевые задачи теории потенциала, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. X, 1941, стр. 73—92 (на груз. яз.).

[2] К теории систем сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 3, 1943, стр. 207—214.

[3] Задача Римана с разрывными коэффициентами для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 1, 1944, стр. 1—10 (на груз. яз.).

[4] К теории систем сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 2, 1944, стр. 125—134 (на груз. яз.).

[5] Об одной линейной граничной задаче Римана с разрывными коэффициентами для системы аналитических функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. V, № 5, 1944, стр. 473—482 (на груз. яз.).

[6] Сингулярное интегральное уравнение общего вида с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. VI, № 1, 1945, стр. 3—10 (на груз. яз.).

[7] Система сингулярных интегральных уравнений общего вида с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. VI, № 3, 1945, стр. 185—194 (на груз. яз.).

[8] Краевая задача Гильберта с рациональными коэффициентами для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. VII, № 9—10, 1946, стр. 595—600.

[9] Обобщенная краевая задача Гильберта для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 9—10, 1947, стр. 577—584.

[10] Одно замечание о системе сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. ун-та, т. XXXа, 1947, стр. 31—38 (на груз. яз.).

[11] Об одной обобщенной системе сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. IX, № 3, 1948, стр. 153—160.

[12] Обобщенная краевая задача Гильберта для нескольких неизвестных функций, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVI, 1948, стр. 81—102 (на груз. яз.).

[13] О некоторых краевых задачах теории логарифмического потенциала, Тр. Тбилисск. ун-та, т. XXXIV, 1948, стр. 311—327 (на груз. яз. с русск. резюме).

[14] Граничная задача Гильберта и системы сингулярных интегральных уравнений в случае кусочно-гладких контуров, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 31—40 (на груз. яз.).

[15] Об одной граничной задаче теории функций комплексного переменного, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 41—46.

[16] Системы сингулярных интегральных уравнений и некоторые граничные задачи, М.— Л., 1950.

[17] Граничная задача Гильберта для нескольких неизвестных функций в случае несвязных областей, Сообщ. АН ГрузССР, т. XI, № 9, 1950, стр. 533—538.

[18] Об одной задаче Гильберта с разрывными коэффициентами и ее применении к сингулярным интегральным уравнениям, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVIII, 1951, стр. 307—313.

[19] Граничная задача Карлемана для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 1, 1952, стр. 9—14.

[20] Об одной граничной задаче теории функций комплексного переменного для нескольких неизвестных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 16, № 2, 1952, стр. 157—180.

[21] Об одной задаче теории функций комплексного переменного, Докл. АН СССР, т. LXXXVI, № 3, 1952, стр. 457—460.

[22] Об одной обобщенной граничной задаче теории функций комплексного переменного, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 52, 1954, стр. 1—9 (на груз. яз.).

[23] Об одной граничной задаче линейного сопряжения, Докл. АН СССР, т. XCIX, № 2, 1954, стр. 173—176.

[24] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 56, 1955, стр. 75—80.

[25] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, с заданными смещениями, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXI, 1955, стр. 169—189.

[26] Об одной обобщенной граничной задаче Карлемана для нескольких неизвестных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 3, 1956, стр. 377—384.

[27] Об одной граничной задаче линейного сопряжения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIV, 1957, стр. 135—147.

[28] Об одной системе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и ее приложениях в граничных задачах линейного сопряжения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIV, 1957, стр. 135—147.

[29] Об одной дифференциальной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций в случае разомкнутых контуров, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 5, 1958, стр. 513—518.

[30] Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXII, № 1, 1959, стр. 3—8.

[31] Задача Коши для сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXII, № 6, 1959, стр. 641—648.

[32] Замечание к моей статье «Об одной граничной задаче линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций», Сообщ. АН ГрузССР, т. XXIV, № 1, 1960, стр. 3—6.

[33] Общая граничная задача линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций с заданными смещениями, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 84, 1961, стр. 23—34.

[34] Линейные интегро-дифференциальные уравнения с малыми параметрами при старших производных, Проблемы механики сплошной среды (сборник), изд. АН СССР, М., 1961, стр. 92—100.

[35] Об одной дифференциальной граничной задаче линейного сопряжения с малым параметром, Сообщ. АН ГрузССР, т. LXXXVI, № 2, 1964, стр. 257—260.

Векуа Н. П. и Исаханов Р. С. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых эффективно, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXIII, № 3, 1959, стр. 257—264.

Векуа Н. П. и Квеселава Д. А. [1] Об одной краевой задаче теории функций комплексного переменного, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 3, 1941, стр. 233—240.

[2] Об одной краевой задаче теории функций комплексного переменного и ее применении к решению системы сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. IX, 1941, стр. 38—48.

Вишик М. И. и Эскин Г. И. [1] Краевые задачи для общих сингулярных уравнений в ограниченной области, Докл. АН СССР, т. 155, № 1, 1964, стр. 24—27.

[2] Уравнения в свертках в ограниченной области в пространствах с весовыми нормами, Матем. сб., т. 69, № 1, 1966, стр. 65—110.

Вольперт А. И. [1] Об индексе системы двумерных сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 142, № 4, 1962, стр. 776—777.

[2] Эллиптические системы на сфере и двумерные сингулярные интегральные уравнения, Матем. сб., т. 59, 1962, стр. 195—214.

Гагуа М. Б. [1] О поведении аналитических функций и их производных в замкнутых областях, Сообщ. АН ГрузССР, т. X, № 8, 1949, стр. 451—456.

Ганин М. П. [1] Эквивалентно-регуляризирующий оператор для системы сингулярных уравнений, Докл. АН СССР, т. LXXIX, № 3, 1951, стр. 385—387.

[2] Эквивалентная регуляризация системы сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 9, 1951, стр. 517—523.

[3] Об одной общей краевой задаче для аналитических функций, Докл. АН СССР, т. LXXIX, № 6, 1951, стр. 921—924.

[4] Об обобщенной системе сингулярных интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 10, 1951, стр. 591—596.

Гапошкин В. Ф. [1] Одно обобщение теоремы М. Рисса о сопряженных функциях, Матем. сб., т. 46, № 3, 1958, стр. 359—372.

Гахов Ф. Д. [1] О краевой задаче Римана, Матем. сб., т. 2 (44), № 4, 1937, стр. 673—683.

[2] Линейные краевые задачи теории функций комплексного переменного, Изв. Казанск. физ.-матем. о-ва и Научно-исслед. ин-та матем. и мех. при Казанск. ун-те, 3 сер., т. X, 1938, стр. 39—79.

[3] Краевые задачи теории аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Диссертация на соискание степени доктора физ.-матем. наук (защищена 26.10.1942 г. в Совете Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР).

[4] Краевые задачи аналитических функций и сингулярные интегральные уравнения, Изв. Казанск. физ.-матем. о-ва при Казанск. ун-те, сер. 3, т. XIV, 1949, стр. 75—160.

[5] О краевой задаче Римана для системы n пар функций, Докл. АН СССР, т. LXVII, № 4, 1949, стр. 601—606.

[6] О краевой задаче Римана для системы n пар функций с разрывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. LXXIII, № 2, 1950, стр. 261—264.

[7] Об особенных случаях краевой задачи Римана, Докл. АН СССР, т. 80, № 5, 1951, стр. 705—708.

[8] Особые случаи краевой задачи Римана для системы n пар функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 16, № 2, 1952, стр. 147—156.

[9] Краевая задача Римана для системы n пар функций, Успехи матем. наук, т. 7, вып. 4, 1952, стр. 3—54.

[10] Краевые задачи, М., 1958; второе издание, М., 1963.

[11] Краевая задача Римана и некоторые другие задачи, сводящиеся к ней, Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1961, стр. 359—375.

[12] О новых типах интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Проблемы механики сплошной среды (сборник), изд. АН СССР, М., 1961, стр. 101—113.

[13] Вырожденные случаи особых интегральных уравнений с ядром Коши, Дифференциальные уравнения, т. 11, № 4, 1966, стр. 533—543.

Гахов Ф. Д. и Крикунов Ю. М. [1] Топологические методы теории функций комплексного переменного и их приложения к обратным краевым задачам, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 2, 1956, стр. 207—240.

Гахов Ф. Д. и Хасабов Э. Г. [1] Краевая задача Гильберта для многосвязной области, Изв. высших учебных заведений, Математика, № 1 (2), 1958, стр. 12—23.

Гахов Ф. Д. и Чибрикова Л. И. [1] О краевой задаче Римана для случая пересекающихся контуров, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, стр. 107—110.

[2] О некоторых типах сингулярных интегральных уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Матем. сб., т. 35, 1954, стр. 395—436.

[3] Решение задач механики сплошной среды сведением к краевым задачам для автоморфных функций, Приложения теории функций в механике сплошной среды (Труды Международного симпозиума в Тбилиси), т. 2, «Наука», М., 1965, стр. 208—218.

Гегелиа (Гегелия) Т. Г. [1] О некоторых сингулярных интегральных уравнениях частного вида, Сообщ. АН ГрузССР, т. XIII, № 10, 1952, стр. 581—586.

[2] Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров, Сообщ. АН ГрузССР, т. XV, № 2, 1954, стр. 69—76.

[3] Дифференциальные свойства некоторых интегральных преобразований, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVI, 1959, стр. 195—225.

[4] О свойствах многомерных сингулярных интегралов в пространстве $L_p(S, \rho)$, Докл. АН СССР, т. 139, № 2, 1961.

[5] О регуляризации сингулярных интегральных операторов, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIX, 1963, стр. 229—237.

[6] Некоторые специальные классы функций и их свойства, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXXII, 1966, стр. 94—139.

Геронимус Я. Л. [1] О касательной производной логарифмического потенциала простого слоя, Докл. АН СССР, т. 91, № 6, 1953, стр. 1257—1260.

[2] О некоторых интегральных уравнениях, Докл. АН СССР, т. 98, № 1, 1954, стр. 5—7.

[3] О некоторых свойствах функций, непрерывных в замкнутом круге, Докл. АН СССР, т. 98, № 6, 1954, стр. 889—891.

[4] О некоторых свойствах аналитических функций, непрерывных в замкнутом круге или круговом секторе, Матем. сб., т. 38, № 3, 1956, 319—330.

[5] О дифференциальных свойствах некоторых функций, представляемых сингулярными интегралами, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 20, № 6, 1956, стр. 775—782.

Говоров Н. В. [1] О краевой задаче Римана с бесконечным индексом, Докл. АН СССР, т. 154, № 6, 1964, стр. 1247—1249.

[2] Неоднородная краевая задача Римана с бесконечным индексом, Докл. АН СССР, т. 159, № 5, 1964, стр. 961—964.

Голубев В. В. [1] Однозначные аналитические функции с совершенным множеством особых точек, Уч. зап. Моск. ун-та, отд. физ.-матем., вып. 29, 1916, (см. также В. В. Голубев, Однозначные аналитические функции. Автоморфные функции, М., 1961).

Голузин Г. М. и Крылов В. И. [1] Обобщение формулы Carleman'а и приложение ее к аналитическому продолжению функций, Матем. сб., т. 40, № 2, 1933, стр. 144—149.

Гольденвейзер А. Л. [1] О применении решений задачи Римана — Гильберта к расчету безмоментных оболочек, Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 2, 1951, стр. 149—166.

Гордадзе Э. Г. [1] О сингулярных интегралах с ядром Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXVII, № 3, 1965, стр. 521—526.

[2] О задаче Римана — Привалова в случае негладкой граничной линии, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР (Сборник работ, посвященных 60-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа), т. XXXIII, 1967, стр. 25—31.

Гохберг И. Ц. [1] О линейных уравнениях в нормированных пространствах, Докл. АН СССР, т. LXXVI, № 4, 1951, стр. 477—480.

[2] О линейных операторах, аналитически зависящих от параметра, Докл. АН СССР, т. LXXVIII, № 4, 1951, стр. 629—632.

[3] Об одном применении теории нормированных колец к сингулярным интегральным уравнениям, Успехи матем. наук, т. 7, вып. 2 (48), 1952, стр. 149—156.

[4] О системах сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, стр. 55—60.

[5] О числе решений однородного сингулярного интегрального уравнения с непрерывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 122, № 3, 1958, стр. 327—330.

[6] Задача факторизации в нормированных кольцах, функции от изометрических и симметрических операторов и сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, т. 19, вып. 1, 1964, стр. 71—124.

[7] К теории многомерных сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 133, № 6, 1960, стр. 1279—1282.

Гохберг И. Ц. и Замбицкий М. К. [1] О нормально разрешимых операторах в пространстве с двумя нормами, Изв. АН МолдССР, сер. физ.-матем. и техн. н., № 6, 1964, стр. 80—84.

Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г. [1] Об устойчивой системе частных индексов задачи Гильберта для нескольких неизвестных функций, Докл. АН СССР, т. 119, № 5, 1958, стр. 854—857.

[2] Системы интегральных уравнений на полупрямой с ядрами, зависящими от разности аргументов, Успехи матем. наук, т. 13, вып. 2, 1958, стр. 3—72.

Гусейнов А. И. [1] Об одном классе нелинейных сингулярных интегральных уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 12, № 2, 1948, стр. 193—212.

[2] К теории линейных сингулярных интегральных уравнений, Тр. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем., т. 3, 1953, стр. 65—84.

Давыдов Н. А. [1] Непрерывность интеграла типа Коши в замкнутой области, Докл. АН СССР, т. LXIV, № 6, 1949, стр. 759—762.

Данилюк И. И. [1] Задачи Гильберта с измеримыми коэффициентами, Сибирск. матем. ж., т. 1, № 2, 1960, стр. 171—197.

[2] К теории одномерных сингулярных уравнений, Проблемы механики сплошной среды (сборник), изд. АН СССР, М., 1961, стр. 135—144.

Джанашия Г. А. [1] Об уравнениях типа свертки для полуоси с ограниченной правой частью, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXVI, № 1, 1964, стр. 11—18.

Джваршейшвили А. Г. [1] Об особом интеграле, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 84, 1961, стр. 161—184.

[2] О существовании сингулярного интеграла, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIV, № 3, 1964, стр. 529—534.

[3] Сингулярный интеграл и его некоторые применения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР (Сборник работ по теории функций, 1), т. XXXI, 1966, стр. 71—90.

[4] О функциях, аналитических в полуплоскости, там же, стр. 91—109.

[5] О преобразованиях Гильберта и интегралах типа Коши, там же, стр. 110—121.

Драчинский А. Э. [1] О граничной задаче Римана — Привалова в классе суммируемых функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXII, № 2, 1963, стр. 271—276.

[2] О задаче Римана — Привалова с заданным смещением в классе суммируемых функций, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 8 (93), 1963, стр. 53—56.

[3] Об одной разрывной задаче линейного сопряжения, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 8 (93), 1963, стр. 32—52.

[4] Об одной граничной задаче Римана — Привалова для круга, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIV, № 1, 1964, стр. 31—35.

[5] Разрывная граничная задача линейного сопряжения для нескольких неизвестных функций и ее приложение к системам сингулярных интегральных уравнений, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 4 (97), 1964, стр. 3—9.

Дун Гуан-чан [1] Задача Римана — Гильберта для многосвязиой области, Acta math. sinica, vol. 8, № 2, 1958, стр. 290—304.

Дыбин В. Б. [1] Исключительный случай интегральных уравнений типа свертки в классе обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 161, № 4, 1965, стр. 753—756.

Дыбин В. Б. и Карапетянц Н. К. [1] Об интегральных уравнениях типа свертки в классе обобщенных функций, Сибирск. матем. ж., т. VII, № 3, 1966, стр. 531—545.

Дынин А. С. [1] Сингулярные операторы произвольного порядка на многообразии, Докл. АН СССР, т. 141, № 1, 1961, стр. 21—23.

Зверович Э. И. [1] О сведении задачи Гильберта для многосвязной области к задаче Гильберта с рациональным коэффициентом, Докл. АН СССР, т. 157, № 4, 1964, стр. 777—780.

[2] Краевая задача типа задачи Карлемана для многосвязной области, Докл. АН СССР, т. 156, № 6, 1964, стр. 1270—1272.

[3] Краевые задачи со сдвигом на абстрактных римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 157, № 1, 1964, стр. 26—29.

Зверович Э. И. и Литвинчук Г. С. [1] Краевая задача Римана для двух пар функций с вырожденной матрицей коэффициентов, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, вып. 19, 1963, стр. 149—153.

[2] Односторонние краевые задачи теории аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 5, 1964, стр. 1003—1036.

Иванов В. В. [1] Приближенное решение особых интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 110, № 1, 1956, стр. 15—18.

[2] Некоторые свойства особых интегралов типа Коши и их приложения, Докл. АН СССР, т. 121, № 5, 1958, стр. 793—794.

[3] Некоторые свойства особых интегралов, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 4, 1958, стр. 89—95.

[4] Приближенное решение краевой задачи Римана для систем n пар функций, Докл. АН СССР, т. 129, № 1, 1959, стр. 27—29.

[5] Методы приближенного решения систем сингулярных интегральных уравнений, Ж. вычисл. матем. и матем. физ., т. 3, № 4, 1963, стр. 664—682.

[6] Методы приближенного решения сингулярных интегральных уравнений, сб. «Математический анализ. 1963», Итоги науки, Ин-т научн. информ. АН СССР, М., 1965, стр. 125—177.

Исаханов Р. С. [1] Дифференциальная граничная задача линейного сопряжения и ее применение к теории интегро-дифференциальных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. XX, № 6, 1958, стр. 659—666.

[2] О некоторых дифференциальных граничных задачах теории аналитических функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 1, 1958, стр. 11—18.

[3] Об одном классе дифференциальных граничных задач, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXV, № 5, 1960, стр. 517—524.

[4] Об одном классе сингулярных интегро-дифференциальных уравнений, Докл. АН СССР, т. 132, № 2, 1960, стр. 264—267.

[5] О некоторых граничных задачах линейного сопряжения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVIII, 1962, стр. 73—84.

[6] О союзных дифференциальных граничных задачах теории функций комплексного переменного, Тр. Грузинск. политехн. ин-та, № 3 (96), 1964, стр. 23—32.

Какичев В. А. [1] О некоторых уравнениях Фредгольма, разрешимых в особых интегралах Коши, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 4 (23), 1961, стр. 25—38.

[2] О некоторых уравнениях Фредгольма, разрешимых в интегралах Гильберта, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 6 (25), 1961, стр. 32—42.

Какичев В. А. и Рогожин В. С. [1] Об одном обобщении уравнения Чандрасекара, Дифференциальные уравнения, т. II, № 3, 1966, стр. 1264—1270.

Каландия А. И. [1] Решение основной n-гармонической задачи в случае бесконечной области, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 169—189.

[2] Основная n-гармоническая задача для многосвязных областей, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 15, № 2, 1951, стр. 185—198.

[3] Об одной смешанной задаче изгиба упругой пластинки, Прикл. матем. и мех., т. XVI, вып. 3, 1952, стр. 271—282.

[4] Общая смешанная задача изгиба упругой пластинки, Прикл. матем. и мех., т. XVI, вып. 5, 1952, стр. 513—532.

[5] Об одном прямом методе решения уравнения теории крыла и его применении в теории упругости, Матем. сб., т. 42, № 2, 1957, стр. 249—272.

[6] О приближенном решении одного класса сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 125, № 4, 1959, стр. 715—718.

Канторович Л. В. и Крылов В. И. [1] Приближенные методы высшего анализа, изд. 3-е, М.— Л., 1950.

Карцивадзе И. Н. [1] О поведении интеграла типа Коши вблизи концов пути интегрирования, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, 1951, стр. 257—263.

[2] Об одной формуле перестановки интегралов, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVI, № 1, 1955, стр. 3—10.

[3] О сингулярном интегральном операторе с разрывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 109, № 3, 1956, стр. 450—452.

Карцивадзе И. Н. и Хведелидзе Б. В. [1] Об одной формуле обращения, Сообщ. АН ГрузССР, т. X, № 10, 1949, стр. 587—591.

[2] Об интеграле типа Коши, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XX, 1954, стр. 211—244 (на груз. яз., с подробным русск. резюме).

Кванталиани К. И. [1] Некоторые задачи для сингулярных интегро-дифференциальных уравнений с малым параметром, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIX, № 3, 1965, стр. 519—525.

Квеселава Д. А. [1] Сингулярные интегральные уравнения с разрывными коэффициентами, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XIII, 1944, стр. 1—27 (на груз. яз., с подробным русск. резюме).

[2] Задача Римана — Гильберта для многосвязной области, Сообщ. АН ГрузССР, т. VI, № 8, 1945, стр. 581—590 (на груз. яз.).

[3] Решение одной граничной задачи теории функций, Докл. АН СССР, т. 53, № 8, 1946, стр. 683—686.

[4] Об одной граничной задаче теории функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. VII, № 9—10, 1946, стр. 609—614.

[5] Решение одной граничной задачи Т. Карлемана, Докл. АН СССР, т. 55, № 8, 1947, стр. 683.

[6] Некоторые граничные задачи теории функций, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVI, 1948, стр. 39—90.

[7] Граничная задача Гильберта и сингулярные интегральные уравнения в случае пересекающихся контуров, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XVII, 1949, стр. 1—27.

Келдыш М. В. и Лаврентьев М. А. [1] Sur la représentation conforme des domaines limités par des courbes rectifiables, Ann. scient. École norm. supér., t. 54, f. 1, 1937, p. 1—38.

[2] О движении крыла под поверхностью тяжелой жидкости, Труды конференции по теории волнового сопротивления, изд. ЦАГИ, М., 1937, стр. 31—64.

Келдыш М. В. и Седов Л. И. [1] Эффективное решение некоторых краевых задач для гармонических функций, Докл. АН СССР, т. XVI, № 1, 1937, стр. 7—10.

Керимов Т. М. [1] Об одной краевой задаче для эллиптических уравнений, Уч. зап. Азерб. ун-та, физ.-матем. и хим. сер., № 4, 1959, стр. 9—20.

[2] Основные теоремы сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, содержащие комплексно сопряженные неизвестные, Уч. зап. Азерб. ун-та, сер. физ.-матем. н., № 2, 1965, стр. 15—19.

Клабукова Л. С. [1] Приближенный метод решения задач Гильберта и Пуанкаре, Вычислительная математика, № 3, 1958, 34—87.

[2] О приближенном методе решения задачи Римана — Гильберта в многосвязной области, Вычислительная математика, № 7, 1961, стр. 115—132.

Коган Х. М. [1] Об одном сингулярном интегро-дифференциальном уравнении, Успехи матем. наук, т. 20, вып. 3, 1965, стр. 243—244.

Колмогоров А. Н. [1] Sur les fonctions harmoniques conjuguées et les séries de Fourier, Fundam. math., t. 7, 1925, p. 23—29.

[2] Sur un procédé d'intégration de M. Denjoy, Fundam. math., t. 11, 1928, p. 27—28.

Кордзадзе Р. А. [1] Основные теоремы для сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, Докл. АН СССР, т. 154, № 6, 1964, стр. 1250—1253.

[2] О сингулярных интегральных уравнениях со сдвигом, Докл. АН СССР, т. 160, № 6, 1965, стр. 1242—1243.

[3] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, Докл. АН СССР, т. 168, № 6, 1966, стр. 1245—1248.

Косулин А. Е. [1] Особый случай в теории сингулярных уравнений, Вестник ЛГУ, 1962, № 19, стр. 142—148.

[2] Одномерные сингулярные уравнения в обобщенных функциях, Докл. АН СССР, т. 163, № 5, 1965, стр. 1054—1057.

[3] Одномерные сингулярные уравнения в обобщенных функциях. Случай разомкнутых контуров, Вестн. Ленингр. ун-та, № 7, 1966, стр. 157—160.

Крейн М. Г. [1] Интегральные уравнения на полупрямой с ядром, зависящим от разности аргументов, Успехи матем. наук, т. 13, вып. 5, 1958, стр. 3—120.

Крикунов Ю. М. [1] О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1952, стр. 191—199.

[2] О решении обобщенной краевой задачи Римана и линейного сингулярного интегро-дифференциального уравнения, Докл. АН СССР, т. 85, № 2, 1952, стр. 269—272.

[3] Обобщенная краевая задача Римана и линейное интегро-дифференциальное уравнение, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956, стр. 3—29.

[4] Дифференцирование особых интегралов с ядром Коши и одно граничное свойство голоморфных функций, Краевые задачи теории функций комплексного переменного (сборник), изд. Казанского ун-та, 1962, стр. 17—24.

Купрадзе В. Д. [1] О некоторых сингулярных интегральных уравнениях математической физики, Успехи матем. наук, вып. 2, 1936, стр. 196—237.

[2] К решению задачи Дирихле для многосвязной области, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, т. 1, № 8, 1940, стр. 569—571.

[3] К теории интегральных уравнений с интегралом в смысле главного значения по Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 1—2, 3, 7, 1941, стр. 23—28, 227—231, 587—596; Изв. АН СССР, сер. матем., т. 5, № 3, 1941, стр. 255—262.

[4] О проблеме эквивалентности в теории особых интегральных уравнений, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 9, 1941, стр. 793—798.

[5] Об одной формуле композиции сингулярных интегралов, Тр. Тбилисск. ун-та, т. XXIII, 1942, стр. 159—164.

[6] Некоторые новые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 42, 1951, стр. 2—23.

[7] Randwertaufgaben der Schwingungstheorie und Integralgleichungen, Berlin, 1956.

Лаврентьев М. А. [1] Sur la correspondance entre les frontières dans la représentation conforme, Матем. сб., т. 36, № 2, 1929, стр. 112—115.

[2] О построении потока, обтекающего дугу заданной формы, Тр. ЦАГИ, вып. 118, М., 1932.

[3] О некоторых граничных задачах в теории однолистных функций, Матем. сб., т. 1 (43), № 6, 1936, стр. 815—846.

Лаврентьев М. А. и Шабат Б. В. [1] Методы теории функций комплексного переменного, 3-е изд., М., 1965.

Лехницкий С. Г. [1] О некоторых вопросах, связанных с теорией изгиба тонких плит, Прикл. матем. и мех., т. II, № 2, 1938, стр. 181—210.

Литвинчук Г. С. [1] Об одном типе особых функциональных уравнений и краевых задач со сдвигом для аналитических функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 25, № 6, 1961, стр. 871—886.

[2] Об индексе и нормальной разрешимости одного класса функциональных уравнений, Докл. АН СССР, т. 149, № 5, 1963, стр. 1029—1032.

[3] О некоторых системах сингулярных интегральных уравнений, Успехи матем. наук, т. 18, № 2, 1963, стр. 139—144.

Литвинчук Г. С. и Хасабов Э. Г. [1] К теории сингулярных интегральных уравнений, подчиняющихся альтернативе Фредгольма, Докл. АН СССР, т. CXL, № 1, 1961, стр. 48—51.

[2] Один класс сингулярных интегральных уравнений и обобщенная краевая задача типа задачи Карлемана, Сибирск. матем. ж., т. V, № 4, 1964, стр. 858—880.

[3] Об индексе обобщенной краевой задачи Гильберта, Успехи матем. наук, т. 20, вып. 6, 1965, стр. 124—130.

Лузин Н. Н. [1] Интеграл и тригонометрический ряд, М., 1915.

Магнарадзе Л. Г. [1] Об одном новом интегральном уравнении теории крыла самолета, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 6, 1942, стр. 503—508.

[2] Об одной системе линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и о линейной граничной задаче Римана, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 1, 1943, стр. 3—9.

[3] Теория одного класса линейных сингулярных интегро-дифференциальных уравнений и ее применения к задаче колебания крыла аэроплана конечного размаха, удара о поверхность воды и аналогичным, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 2, 1943, стр. 108—110.

[4] Об одном обобщении теоремы Племеля—Привалова, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 8, 1947, стр. 509—516.

[5] Об одной линейной граничной задаче Римана — Гильберта, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 9—10, 1947, стр. 525—590.

[6] О касательной производной логарифмического потенциала простого слоя, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 9—10, 1947, стр. 591—596.

[7] Об одной линейной граничной задаче теории функций комплексного переменного, Докл. АН СССР, т. LXIV, № 1, 1949, стр. 17—20.

[8] Об одном обобщении теоремы И. И. Привалова и его применениях к некоторым линейным граничным задачам теории функций и к сингулярным интегральным уравнениям, Докл. АН СССР, т. XVIII, № 4, 1949, стр. 657—660.

[9] О неравенстве Зигмунда для обобщенных сопряженных функций, представимых сингулярными интегралами Стилтьеса, Тр. Тбилисск. ун-та, т. 117, 1966, стр. 369—381.

Манджавидзе Г. Ф. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. XI, № 5, 1950, стр. 269—274.

[2] Об одной системе сингулярных интегральных уравнений с разрывными коэффициентами, Сообщ. АН ГрузССР, т. XI, № 6, 1950, стр. 351—356.

[3] Об одном сингулярном интегральном уравнении с разрывными коэффициентами и его применении в теории упругости, Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 3, 1951, стр. 279—296.

[4] О приближенном решении граничных задач теории функций комплексного переменного, Сообщ. АН ГрузССР, т. XIV, № 10, 1953, стр. 577—582.

[5] О приближенном решении граничных задач теории аналитических функций, Тр. Третьего Всесоюзного матем. съезда, т. I, 1956, стр. 88.

[6] Приближенное решение граничных задач теории аналитических функций, Исследования по современным проблемам теории функций комплексного переменного (сборник статей под редакцией А. И. Маркушевича), М., 1960, стр. 365—370.

[7] Сингулярные интегральные уравнения как аппарат решения смешанных задач плоской теории упругости, Приложения теории функций в механике сплошной среды (Труды Международного симпозиума в Тбилиси), т. I, 1965, стр. 237—247.

[8] Граничная задача линейного сопряжения общего вида со смещениями, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР (Сборник работ, посвященный 60-летию со дня рождения академика И. Н. Векуа), т. XXXIII, 1967, стр. 77—81.

Манджавидзе Г. Ф. и Хведелидзе Б. В. [1] О задаче Римана — Привалова с непрерывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 123, № 5, 1958, стр. 791—794.

[2] О задаче линейного сопряжения и сингулярных интегральных уравнениях с ядром Коши с непрерывными коэффициентами, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVIII, 1962, стр. 85—105.

Маркушевич А. И. [1] Об одной граничной задаче теории аналитических функций, Уч. зап. МГУ, т. I, вып. 100, 1946, стр. 20—29.

(2) Несколько замечаний об интегралах типа Коши, Уч. зап. МГУ, т. I, вып. 100, 1946, стр. 31—33.

[3] Теория аналитических функций, М.— Л., 1950.

[4] Вклад Ю. В. Сохоцкого в общую теорию аналитических функций, Историко-математические исследования, вып. III, М.— Л., 1950, стр. 399—406.

Мельник И. М. [1] Исключительный случай краевой задачи Римана, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. 24, 1957, стр. 149—162.

[2] О краевой задаче Римана с разрывными коэффициентами, Изв. высших учебных заведений, № 2 (9), 1959, стр. 158—166.

[3] Поведение интеграла типа Коши вблизи точек разрыва плотности и особый случай краевой задачи Римана, Уч. зап. физ.-матем. фак. Ростовск.-н/Д. ун-та, т. 43, № 6, 1959, стр. 59—71.

[4] О краевой задаче Гильберта, Докл. АН СССР, т. 138, № 3, 1961, стр. 537—540.

Месис А. В. [1] Задача Римана над полем алгебраических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 110, кн. 7, 1950, стр. 51—60.

[2] О краевой задаче Римана над полем алгебраических функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 9, 1952, стр. 3—16.

[3] О краевой задаче Римана над полем алгебраических функций для системы n пар функций, Укр. матем. ж., т. 8, 1956, стр. 441—449.

Михайлов Г. К. и Пыхтеев Г. Н. [1] Решение некоторых задач плоского потенциального течения жидкости со свободными поверхностями сведением их к краевым задачам со сдвигом, Приложения теории функций в механике сплошной среды (Труды Международного симпозиума в Тбилиси), т. 2, М., 1965, стр. 331—332.

Михайлов Л. Г. [1] Общая краевая задача о бесконечно малых изгибаниях склеенных поверхностей, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 5 (18), 1960, стр. 99—102.

[2] Об одной граничной задаче линейного сопряжения, Докл. АН СССР, т. 139, № 2, 1961, стр. 294—297.

[3] Общая задача сопряжения аналитических функций и ее применения, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 27, № 5, 1963, стр. 969—992.

[4] Новый класс особых интегральных уравнений и его применения к дифференциальным уравнениям с сингулярными коэффициентами, Душанбе, 1963.

Михлин С. Г. [1] Об одной задаче теории сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 15, № 8, 1937, стр. 429—432.

[2] Проблема эквивалентности в теории сингулярных интегральных уравнений, Матем. сб., т. 3 (45), № 1, 1938, стр. 121—141.

[3] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. XXIV, № 4, 1939, стр. 315—317.

[4] Об одной теореме Ф. Нетера, Докл. АН СССР, т. 43, № 4, 1944, стр. 143—145.

[5] О разрешимости линейных уравнений в гильбертовом пространстве, Докл. АН СССР, т. 57, № 1, 1947, стр. 11—12.

[6] Сингулярные интегральные уравнения с непрерывными коэффициентами, Докл. АН СССР, т. 59, № 3, 1948, стр. 435—438.

[7] Сингулярные интегральные уравнения, Успехи матем. наук, т. 3, вып. 3 (25), 1948, стр. 29—112.

[8] Об интегральном уравнении F. Tricomi, Докл. АН СССР, т. 59, № 6, 1948, стр. 1053—1056.

[9] Интегральные уравнения, М.— Л., 1949.

[10] Многомерные сингулярные интегралы и интегральные уравнения, М., 1962.

[11] О вычислении индекса системы одномерных сингулярных уравнений, Докл. АН СССР, т. 168, № 6, 1966, стр. 1248—1250.

Мусхелишвили Н. И. [1] Applications des intégrales analogues à celles de Cauchy à quelques problèmes de la Physique Mathématique, Тбилиси, изд. Тбилисского ун-та, 1922.

[2] О решении задачи Дирихле на плоскости, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, т. I, № 2, 1940, стр. 99—106.

[3] Замечания относительно основных граничных задач теории потенциала, Сообщ. Груз. фил. АН СССР, т. I, № 3, 1940, стр. 169—170; Исправление погрешности, там же, № 7, стр. 567.

[4] О решении основных граничных задач теории ньютонова потенциала, Прикл. матем. и мех., т. IV, № 4, 1940, стр. 3—26.

[5] Об основной смешанной краевой задаче теории логарифмического потенциала для многосвязных областей, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 4, 1941, стр. 309—313.

[6] Приложение интеграла типа Коши к одному классу сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. X, 1941, стр. 1—43.

[7] Системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. III, № 10, 1942, стр. 987—994.

[8] Замечание к статье «Системы сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши», Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 2, 1943, стр. 99—101.

[9] Некоторые основные задачи математической теории упругости, Л., 1933; 5-е изд., М., 1966.

Мусхелишвили Н. И. и Авазашвили Д. З. [1] О решении основных контурных задач теории логарифмического потенциала, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. 7, 1940, стр. 1—24.

Мусхелишвили Н. И. и Векуа Н. П. [1] Краевая задача Римана для нескольких неизвестных функций и ее приложение к системам сингулярных интегральных уравнений, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XII, 1943, стр. 1—46.

Мусхелишвили Н. И. и Квеселава Д. А. [1] Сингулярные интегральные уравнения с ядрами типа Коши на разомкнутых контурах, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XI, 1942, стр. 141—172.

Никольский С. М. [1] Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 7, № 3, 1943, стр. 147—166.

Оболашвили Е. И. [1] Безмоментные оболочки положительной кривизны под действием разрывных внешних сил, Труды конференции по теории пластин и оболочек, Казань, 1961, стр. 250—253.

[2] Об одном обобщении принципа симметрии Римана — Шварца и его применения, Докл. АН СССР, т. 157, № 5, 1964, стр. 1051—1054.

Пааташвили В. А. [1] Об одной разрывной задаче линейного сопряжения с суммируемым коэффициентом, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXIV, № 3, 1964, стр. 519—524.

[2] О разрывной задаче линейного сопряжения, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXVI, № 3, 1964, стр. 539—540.

[3] О линейной задаче сопряжения в случае счетного множества замкнутых контуров, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXVII, № 1, 1965, стр. 31—36.

Парасюк О. С. [1] О «парных» интегральных уравнениях в классе обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 110, № 6, 1956, стр. 957—958.

Пламеневский Б. А. [1] О сингулярных интегральных операторах на группе, Докл. АН СССР, т. 164, № 1, 1965, стр. 47—50.

Показеев В. И. [1] Задача Римана для одного класса аналитических функций, определенных на фундаментальном многоугольнике, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 123, № 9, 1964, стр. 58—70.

[2] Краевая задача Карлемана для фундаментального многоугольника, там же, стр. 40—57.

[3] Краевая задача Гильберта на рассеченной римановой поверхности с краем, там же, стр. 71—85.

Пресдорф З. [1] Операторы, допускающие неограниченную регуляризацию, Вестн. Ленингр. ун-та, № 13, 1965, стр. 59—67.

[2] К теории систем сингулярных интегральных уравнений с вырождающейся символической матрицей, I и II, Вестн. Ленингр. ун-та, № 19, 1965, стр. 58—73 и № 7, 1966, стр. 68—75.

[3] Об устойчивости индекса одномерного сингулярного оператора с обращающимся в нуль символом, Проблемы математического анализа (сборник), изд. Ленингр. ун-та, 1966, стр. 70—79.

[4] Индекс одномерного сингулярного оператора с обращающимся в нуль символом в пространстве $C^{\infty}(\Gamma)$, Вестн. Ленингр. ун-та, № 7, 1966, стр. 154—156.

[5] О линейных уравнениях в пространствах основных и обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 166, № 4, 1966, стр. 802—805.

Привалов И. И. [1] Sur les fonctions conjuguées, Bull. Soc. math. France, t. 44, № 2—3, 1916, p. 100—103.

[2] Интеграл Cauchy, Изв. Саратовского ун-та, физ.-матем. фак-т, вып. 1, 1918; отд. издание, Саратов, 1919.

[3] Об одной граничной задаче в теории аналитических функций, Матем. сб., т. 41, № 4, 1934, стр. 519—526.

[4] Об интегралах типа Коши, Докл. АН СССР, т. XXIII, № 9, 1939, стр. 859—862.

[5] Об интеграле типа Коши — Стильтьеса, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 4, № 3, 1940, стр. 261—276.

[6] Введение в теорию функций комплексного переменного, изд. 8-е, М.— Л., 1948.

[7] Граничные свойства однозначных аналитических функций, изд. 2-е (под ред. А. И. Маркушевича), М., 1950.

Пыхтеев Г. Н. [1] Решение одной смешанной краевой задачи со сдвигом и формулы обращения для некоторых сингулярных интегральных уравнений первого рода, Сибирск. матем. ж., т. 4, № 4, 1963, стр. 845—861.

[2] Решение одной задачи Дирихле со сдвигом и некоторых сингулярных интегральных уравнений со сдвигом, Сибирск. матем. ж., т. 6, № 4, 1965, стр. 900—917.

Рогожин В. С. [1] Один класс бесконечных систем линейных алгебраических уравнений, Докл. АН СССР, т. 114, № 3, 1957, стр. 486—489.

[2] Новое интегральное представление кусочно-аналитической функции и его приложение, Докл. АН СССР, т. 135, № 4, 1960, стр. 791—793.

[3] Краевые задачи Римана и Гильберта в классе обобщенных функций, Сибирск. матем. ж., т. 2, № 5, 1961, стр. 734—745.

[4] Краевая задача Римана в пространстве обобщенных функций и многочлены Фабера, Докл. АН СССР, т. 152, № 6, 1963, стр. 1308—1311.

[5] Краевая задача Римана в классе обобщенных функций, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 6, 1964, стр. 1325—1344.

[6] Общая схема решения краевых задач в пространстве обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 164, № 2, 1965, стр. 277—280.

[7] О некоторых новых интегральных представлениях аналитических функций, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 6, 1964, стр. 143—152.

Рогожина И. С. [1] Задача Гильберта для кусочно-аналитической функции, Уч. зап. Кабардино-Балкарск. ун-та, вып. 19, 1963, стр. 259—263.

[2] Об одной краевой задаче со смещением для кусочно-аналитической функции, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 2, 1965, стр. 139—151.

Родин Ю. Л. [1] Об условиях разрешимости краевых задач Римана и Гильберта на римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 129, № 6, 1959, стр. 1234—1237.

[2] О задаче Римана на замкнутых римановых поверхностях, Докл. АН СССР, т. 132, № 5, 1960, стр. 1038—1040.

[3] Краевые задачи теории аналитических функций на римановых поверхностях конечного рода, Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1960, стр. 436—442.

[4] О краевой задаче Римана с разрывными коэффициентами на римановых поверхностях, Уч. зап. Пермск. ун-та, т. 17, № 2, 1960, стр. 79—81.

[5] Краевая задача Римана для дифференциалов на замкнутых римановых поверхностях, Уч. зап. Пермск. ун-та, т. 17, № 2, 1960, стр. 83—85.

[6] О краевой задаче Римана на замкнутых римановых поверхностях, Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1961, стр. 419—428.

Самко С. Г. [1] Общее сингулярное уравнение в исключительном случае, Дифференциальные уравнения, т. I, № 8, 1965, стр. 1108—1116.

Седов Л. И. [1] Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики, М.— Л., 1950; 2-е изд., М., 1966.

[2] Теория нестационарного глиссирования и движения крыла со сбегающими вихрями, Труды ЦАГИ, вып. 252, 1936.

Сербин А. И. [1] Об одной краевой задаче на конечной римановой поверхности, Краевые задачи теории функций комплексного переменного (сборник), Казань, 1962, стр. 25—39.

[2] Об одной обобщенной краевой задаче Римана на конечной римановой поверхности, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 128, № 9, 1964, стр. 86—94.

[3] Об общей краевой задаче на конечной римановой поверхности, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 128, № 9, 1964, стр. 95—105.

Симоненко И. Б. [1] Краевая задача Римана с непрерывным коэффициентом, Докл. АН СССР, т. 124, № 2, 1959, стр. 278—282.

[2] Краевая задача Римана с измеримым коэффициентом, Докл. АН СССР, т. 135, № 3, 1960, стр. 538—541.

[3] Краевые задачи Римана и Римана — Газемана с непрерывным коэффициентом, Исслед. по соврем. пробл. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1961, стр. 380—389.

[4] Краевая задача Римана для n пар функций с непрерывными коэффициентами, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 1 (20), 1961, стр. 140—145.

[5] Краевая задача Римана для n пар функций с измеримыми коэффициентами и ее приложение к исследованию сингулярных интегралов в пространствах L_p с весами, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 28, № 2, 1964, стр. 277—306.

[6] Новый общий метод исследования линейных операторных уравнений типа сингулярных интегральных уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 29, № 3 и 4, 1965, стр. 567—586, 756—782.

Смирнов В. И. [1] Sur les valeurs limites das fonctions régulières a l'intérieur d'un cercle, Ж. Ленингр. физ.-матем. о-ва, т. 2, 1928, стр. 22—37.

[2] Sur les formules de Cauchy et de Green et quelques problèmes qui s'y rattachent, Изв. АН СССР, ОМЕН, № 3, 1932, стр. 337—372.

[3] Ueber die Ränderzuordnung bei konformer Abbildung, Math. Ann., Bd. 107, 1932, S. 313—323.

[4] Курс высшей математики, 5 томов, М., 1957—1959.

Смирнов М. М. [1] Об одной краевой задаче для уравнения смешанного типа, Вестн. Ленингр. ун-та, сер. матем., мех. и астр., № 1, 1957, стр. 80—96.

Соболев С. Л. [1] Об одной предельной задаче теории логарифмического потенциала и ее применении к отражению плоских упругих волн, Тр. Сейсмол. ин-та АН СССР, № 11, 1930, стр. 1—9.

Софронов И. Д. [1] О некоторых свойствах сингулярных операторов и решений сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 110, № 6, 1956, 940—942.

[2] К приближенному решению сингулярных интегральных уравнений, Докл. АН СССР, т. 111, № 1, 1956, стр. 37—39.

Сохоцкий Ю. В. [1] Об определенных интегралах и функциях, употребляемых при разложениях в ряды, С.-Петербург, 1873.

Тумаркин Г. Ц. [1] Об интегралах типа Коши — Стильтьеса, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 4, 1956, 163—166.

[2] Свойства аналитических функций, представимых интегралами типа Коши — Стильтьеса и типа Коши — Лебега, Изв. АН АрмССР, сер. физ.-матем. н., т. XVI, № 5, 1963, 23—45.

Ульянов П. Л. [1] Некоторые вопросы A-интегрирования, Докл. АН СССР, т. 102, № 6, 1955, стр. 1077—1090.

[2] Об A-интеграле Коши, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 5, 1956, стр. 223—229.

[3] Об A-интегралах Коши для контуров, Докл. АН СССР, т. 112, № 3, 1957, стр. 383—385.

[4] Об интегралах типа Коши, Тр. Матем. ин-та АН СССР, т. 60, 1961, стр. 262—281.

У Сюе-моу [1] Интеграл Коши и его применение, Ханьшулунь яньцзю баогао, № 1, 1958, стр. 49—53 (на кит. яз.).

Фельд Я. Н. [1] Парные системы бесконечных линейных алгебраических уравнений, связанные с бесконечными периодическими структурами, Докл. АН СССР, т. 106, № 2, 1956, стр. 215—218.

Фихтенгольц Г. М. [1] Sur l'intégrale de Poisson et quelques questions qui s'y rattachent, Fundam. math., t. 13, 1929, p. 1—33.

[2] Курс дифференциального и интегрального исчисления, 3 тома, М.— Л., 1947—1949.

Фрейдкин С. А. [1] Решение одного класса сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, стр. 13—17.

[2] Оператор сингулярного интегрирования по разомкнутому контуру в пространствах с весом, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 11, 1954, стр. 19—27.

[3] Области Нетера и Фредгольма сингулярного оператора, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 17, 1955, стр. 17—25.

[4] Области постоянства индекса сингулярных уравнений, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 24, 1956, стр. 95—104.

[5] Краевая задача Римана и сингулярные интегральные уравнения с кусочно-постоянными коэффициентами в случае счетного множества интервалов, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 70, 1964, стр. 27—38.

Фрейдкин С. А. и Прокупец М. В. [1] Области постоянства индекса некоторых сингулярных операторов, Уч. зап. Кишиневск. ун-та, т. 54, 1960, стр. 37—41.

Фридман М. М. [1] Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечной прямолинейной жестко закрепленной щели, Докл. АН СССР, т. LX, № 7, 1948, стр. 1145—1148.

[2] Дифракция плоской упругой волны относительно полубесконечного прямолинейного разреза, свободного от напряжений, Докл. АН СССР, т. LXVI, № 1, 1949, стр. 21—24.

Хавин В. П. [1] Граничные свойства интегралов типа Коши и гармонически сопряженных функций в областях со спрямляемой границей, Матем. сб., т. 68, № 4, 1965, стр. 499—517.

Хайруллин И. Х. [1] О некоторых бесконечных системах линейных алгебраических уравнений, разрешаемых в замкнутой форме, Докл. АН СССР, т. 123, № 5, 1958, стр. 795—798.

Халилов З. И. [1] Общая краевая задача для системы обобщенных полигармонических уравнений, Докл. АН СССР, т. 51, № 3, 1946, стр. 167—169.

[2] Краевые задачи для эллиптических уравнений, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 11, № 4, 1947, стр. 345—362.

[3] Линейные уравнения в линейных нормированных пространствах, Баку, 1949.

Харазов Д. Ф. [1] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений, ядро которых — мероморфная функция параметра, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XIII, 1944, стр. 139—152.

Харазов Д. Ф. и Хведелидзе Б. В. [1] Некоторые замечания к теории сингулярных интегральных уравнений с ядром Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXVIII, № 2, 1962, стр. 129—135.

Хасабов Э. Г. [1] Краевая задача типа задачи Карлемана, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 2, 1963, стр. 124—133.

Хведелидзе Б. В. [1] О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала, Докл. АН СССР, т. XXX, № 3, 1941, стр. 195—198.

[2] О краевой задаче Пуанкаре теории логарифмического потенциала для многосвязной области, Сообщ. АН ГрузССР, т. II, № 7 и 10, 1941, стр. 571—578, 865—872.

[3] Задача Пуанкаре для линейного дифференциального уравнения второго порядка эллиптического типа, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XII, 1943, стр. 47—77 (на груз. яз., с подробным русск. резюме).

[4] Об одной линейной граничной задаче Римана для системы аналитических функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. IV, № 4, 1943, стр. 289—296.

[5] Некоторые свойства особых интегралов в смысле главного значения Коши — Лебега, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 5, 1947, стр. 283—290.

[6] Сингулярные интегральные уравнения в особых интегралах Коши — Лебега, Сообщ. АН ГрузССР, т. VIII, № 7, 1947, стр. 427—434.

[7] О задаче Римана в теории аналитических функций и о сингулярных интегральных уравнениях с ядром типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XII, № 2, 1951, стр. 69—76.

[8] О задаче линейного сопряжения в теории аналитических функций, Докл. АН СССР, т. LXXVI, № 2, 1951, стр. 177—180.

[9] О линейных сингулярных интегральных уравнениях с особым ядром типа Коши, Докл. АН СССР, т. LXXVI, № 3, 1951, стр. 367—370.

[10] Об одном классе сингулярных интегральных уравнений с ядрами типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XV, № 7, 1954, стр. 401—405.

[11] Некоторые формулы композиций сингулярных интегралов и их приложения к обращению интеграла типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVI, № 2, 1955, стр. 81—88.

[12] Об одной разрывной задаче Римана — Привалова в теории аналитических функций, Докл. АН СССР, т. 102, № 6, 1955, стр. 1081—1084.

[13] О задаче Римана — Привалова в теории аналитических функций, Успехи матем. наук, т. 10, вып. 3, 1955, стр. 165—171.

[14] О разрывной граничной задаче Римана — Привалова с коэффициентом, имеющим критические точки, Докл. АН СССР, т. 111, № 1, 1956, стр. 40—43.

[15] Сингулярные интегральные уравнения с ядрами Коши в классе функций, суммируемых с весом, Докл. АН СССР, т. 111, № 2, 1956, стр. 304—307.

[16] О разрывной задаче Римана — Привалова для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVII, № 10, 1956, стр. 865—872.

[17] О системах сингулярных интегральных уравнений с ядрами Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XVIII, № 2, 1957, стр. 129—136.

[18] Линейные разрывные граничные задачи теории функций, сингулярные интегральные уравнения и некоторые их приложения, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXIII, 1957, стр. 3—158.

[19] Замечание к моей работе «Линейные разрывные граничные задачи теории функций...», Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 2, 1958, стр. 129—130.

[20] О разрывной задаче Римана — Привалова с заданным смещением, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXI, № 4, 1958, стр. 385—389.

[21] Граничная задача Римана — Привалова с кусочно-непрерывным коэффициентом, Тр. Груз. политехн. ин-та, № 1 (81), 1962, стр. 11—29.

Хускивадзе Г. А. [1] Об A-интегралах типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXVII, № 6, 1961, стр. 663—670.

[2] О сопряженных функциях и особых интегралах Коши, Докл. АН СССР, т. 140, № 6, 1961, стр. 1270—1273.

[3] О сопряженных функциях и интегралах типа Коши, Сообщ. АН ГрузССР, т. XXXII, № 2, 1963.

[4] О сопряженных функциях и интегралах типа Коши, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXXI (Сборник работ по теории функций, 1), 1966, стр. 5—54.

Чакветадзе С. С. [1] Решение одной граничной задачи Газемана для нескольких неизвестных функций, Сообщ. АН ГрузССР, т. 11, № 8, 1951, стр. 449—455.

Чеботарев Г. Н. [1] О решении матричного уравнения $e^Be^C=e^{B+C}$, Докл. АН СССР, т. 96, № 6, 1954, стр. 1109—1112.

[2] К решению в замкнутой форме краевой задачи Римана для системы n пар функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956, стр. 31—58.

[3] Частные индексы краевой задачи Римана с треугольной матрицей второго порядка, Успехи матем. наук, т. 11, вып. 3, 1956, стр. 199—202.

Чеботарев Н. Г. и Гахов Ф. Д. [1] О краевой задаче Римана для системы n пар функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 110, кн. 7, 1950, стр. 45—50.

Черепанов Г. П. [1] Решение одной линейной краевой задачи Римана для двух функций и ее приложение к некоторым смешанным задачам плоской теории упругости, Прикл. матем. и механ., т. 26, № 5, 1962, стр. 907—912.

[2] Задача Римана — Гильберта для внешности разрезов вдоль прямой или вдоль окружности, Докл. АН СССР, т. 156, № 2, 1964, стр. 275—278.

[3] Об одном интегрируемом случае краевой задачи Римана для нескольких функций, Докл. АН СССР, т. 161, № 6, 1965, стр. 1285—1289.

Черский Ю. И. [1] Общее сингулярное уравнение и уравнение типа свертки, Матем. сб., т. 41, № 3, 1957, стр. 277—296.

[2] О сведении смешанных граничных задач к краевой задаче Римана, Докл. АН СССР, т. 116, № 6, 1957, стр. 927—929.

[3] К решению краевой задачи Римана в классе обобщенных функций, Докл. АН СССР, т. 125, № 6, 1959, стр. 500—503.

[4] Сведение периодических задач математической физики к особым уравнениям с ядром Коши, Докл. АН СССР, т. 140, № 1, 1961, стр. 69—72.

[5] Вопросы, связанные с приведением граничных задач для дифференциальных уравнений к задаче Римана, Исследования по совр. проб. теории функций комплексного переменного (сборник), Физматгиз, М., 1961, стр. 392—399.

[6] Задачи математической физики, сводящиеся к задаче Римана, Тр. Тбилисск. матем. ин-та АН ГрузССР, т. XXVIII, 1962, стр. 209—246.

[7] Задача сопряжения в одном классе обобщенных функций, Успехи матем. наук, т. 20, вып. 5, 1965, стр. 246—250.

[8] К решению смешанных задач для уравнений в частных производных, Дифференциальные уравнения, т. I, № 5, 1965, стр. 647—662.

Чибрикова Л. И. [1] Особые случаи обобщенной задачи Римана, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1954, стр. 129—154.

[2] О краевой задаче Римана для автоморфных функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 116, кн. 4, 1956, стр. 59—109.

[3] Эффективное решение краевой задачи Гильберта для некоторых многоугольников, ограниченных дугами окружностей, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 117, кн. 2, 1957, стр. 22—26.

[4] Решение краевой задачи Римана для автоморфных функций в случае групп, характеризующихся двумя инвариантами, Докл. АН СССР, т. 141, № 1, 1961, стр. 47—50.

[5] Краевая задача Римана для автоморфных функций в случае групп с двумя инвариантами, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 6, 1961, стр. 121—131.

[6] Письмо в редакцию, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 3, 1962, стр. 195—196.

[7] О краевой задаче Гильберта на конечной римановой поверхности, Краевые задачи теории функций комплексного переменного (сборник), Казань, 1962, стр. 59—72.

[8] Об одном особом случае задачи Римана для автоморфных функций, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 122, № 3, 1962, стр. 81—94.

[9] Граничная задача Римана на римановой поверхности с краем, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 123, № 9, 1964, стр. 3—14.

Чибрикова Л. И. и Рогожин В. С. [1] О сведении некоторых краевых задач к обобщенной задаче Римана, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 112, кн. 10, 1952, стр. 123—127.

Чикин Л. А. [1] Особые случаи краевой задачи Римана и сингулярных интегральных уравнений, Уч. зап. Казанск. ун-та, т. 113, кн. 10, 1953, стр. 57—105.

[2] Об устойчивости краевой задачи Римана, Докл. АН СССР, т. 111, № 1, 1956, стр. 44—46.

Шерман Д. И. [1] Смешанная задача теории потенциала и теории упругости для плоскости с конечным числом прямолинейных разрезов, Докл. АН СССР, т. XXVII, № 4, 1940, стр. 330—334.

[2] К решению плоской статической задачи теории упругости при заданных на границе смещениях, Докл. АН СССР, т. XXVII, № 9, 1940, стр. 911—914.

[3] Смешанная задача статической теории упругости для плоских многосвязных областей, Докл. АН СССР, т. XXVIII, № 1, 1940, стр. 29—32.

[4] Некоторые замечания к задаче Дирихле, Докл. АН СССР, т. XXIX, № 4, 1940, стр. 286—287.

[5] К общей задаче теории потенциала, Изв. АН СССР, сер. матем., т. 10, № 2, 1946, стр. 121—134.

[6] Об одном случае в теории сингулярных уравнений, Докл. АН СССР, т. LIX, № 4, 1948, стр. 647—650.

[7] О приемах решения некоторых сингулярных интегральных уравнений, Прикл. матем. и мех., т. XII, вып. 4, 1948, стр. 423—452.

[8] К уравнению Прандтля в теории крыла конечного размаха, Изв. АН СССР, Отд. техн. наук, № 5, 1948, стр. 595—600.

[9] Об одном случае регуляризации сингулярных уравнений, Прикл. матем. и мех., т. XV, вып. 1, 1951, стр. 75—82.

[10] О связи основной задачи теории упругости с одним особым случаем задачи Пуанкаре, Прикл. матем. и мех., т. XVII, 1953, стр. 685—692.

Шмульян Ю. Л. [1] Задача Римана с положительно определенной матрицей, Успехи матем. наук, т. 8, вып. 2, 1953, стр. 143—145.
[2] Задача Римана с эрмитовой матрицей, Успехи матем. наук, т. 9, вып. 4, 1954, стр. 243—248.

Штаерман И. Я. [1] Контактная задача теории упругости, М., 1949.

Юров П. Г. [1] Однородная краевая задача Римана с бесконечным индексом логарифмического типа, Изв. высш. учебн. заведений, Математика, № 2, 1966, стр. 158—163.

Юрченко С. И. [1] Смешанная задача о колебаниях бесконечной пластинки единичной ширины, Прикл. матем. и мех., т. 27, № 5, 1963, стр. 951—956.

B. Латинский алфавит

Atiyah M. F. and Bott R. [1] The index problem for manifolds with boundary, Differential analysis, Bombay Colloquium, 1964. Oxford University Press, 1964, p. 175—186.

Atiyah M. F. and Singer I. M. [1] The index of elliptic operators on compact manifolds, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 69, № 3, 1963, p. 422—433.

Berg L. [1] Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen I, Math. Nachr., Bd. 15, H. 4—6, 1956, S. 193—212.
[2] Lösungsverfahren für singuläre Integralgleichungen II, Wiss. Z. Univ. Rostock, Math.-Nat. Reihe, Bd. 4, H. 3, 1954/55, S. 381—391.
[3] Über die Resolvente einer singulären Integralgleichung, Math. Nachr., Bd. 15, H. 5—6, 1956, S. 339—352.

Bertrand G. [1] Équations de Fredholm à intégrales principales au sens de Cauchy, C. r. Acad. sci. Paris, t. 172, 1921, p. 1458—1461.
[2] Le problème de Dirichlet et le potentiel de simple couche, Bull. sci. math., 2 sér., t. XLVII, 1923, p. 282—288 et 298—307.
[3] La théorie des marées et les équations intégrales, Ann. scient. École norm. supér., 3 sér., t. XL, 1923, p. 151—258.

Birkhoff G. D. [1] A theorem on matrices of analytic functions, Math. Ann., Bd. 74, H. 1, 1913, S. 122—133; Coll. Math. Papers, vol. 1, 1950, p. 240—251.
[2] The generalized Riemann problem for linear differential equations and the allied problems for linear difference and q-difference equations, Proc. Amer. Acad. Arts and Sci., vol. 49, 1913, p. 521—568; Coll. Math. Papers, vol. 1, 1950, p. 259—306.

Calderón A. P. [1] On theorems of M. Riesz and Zygmund, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 1, № 4, 1950, p. 533—535.
[2] Singular integrals, American Mathematical Society, 1965.

Calderón A. and Zygmund A. [1] On singular integrals, Amer. J. Math., vol. 78, № 2, 1956, p. 289—309.
[2] Singular integral operators and differential equations, Amer. J. Math., vol. 79, № 4, 1957, p. 901—921.

Carleman T. [1] Sur la résolution de certaines équations intégrales, Arkiv för mat., astr. och fys., Bd. 16, № 26, 1922, p. 1—19.
[2] Sur la théorie des équations intégrales et ses applications, Verhandl. des Internat. Math. Kongr. Zürich, Bd. 1, 1932.

Casorati F. [1] Alcuni riflessioni relative alla teoria generale delle funzioni di variabili affatto libere, ossia complesse, Rend. del R. Istituto Lombardo, cl. sc. mat. nat., vol. III, 1866, p. 337—350.

Dragoş L. [1] Asupra ecuaţiei integro-diferenţiale a lui Prandtl, Com. Acad. R. P. Romîne, t. VIII, № 5, 1958, p. 451—459.

Elliott J. [1] On some singular integral equations of the Cauchy type, Ann. Math., vol. 54, № 2, 1951, p. 349—369.
[2] On an integro-differential operator of the Cauchy type, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 7, № 4, 1956, p. 616—626.

Fatou P. [1] Séries trigonométriques et séries de Taylor, Acta math., t. 30, 1906, p. 335—400.

F i c h e r a G. [1] Una introduzione alla teoria della equazioni integrali singolari, Rend. mat. e applic., vol. XVII, № 1—2, 1958, p. 82—191.

[2] Linear elliptic equations of higher order in two independent variables and singular integral equations, with applications to anisotropic inhomogeneous elasticity. «Partial Differential Equations and Continuum Mech.», Madison, Wisconsin Press, 1961, p. 55—80.

G a r n i e r R. [1] Sur le problème de Riemann — Hilbert, C. r. Acad. sci. Paris, t. 221, № 10—13, 1945, p. 276—278.

G e l l e r s t e d t S. [1] Quelques problèmes mixtes pour l'équation $y^m z_{xx} + z_{yy} = 0$, Arkiv för mat., astr. och fys., Bd. 26, № 1, 1938, p. 1—32.

G i r a u d G. [1] Équations à intégrales principales, étude suivie d'une application, Ann. scient. École norm. supér., 3 sér., t. 51, f. 3—4, 1934, p. 251—372.

[2] Sur une classe d'équations linéaires où figurent des valeurs principales d'intégrales simples, Ibid., 3 sér., t. 56, f. 2, 1939, p. 119—172.

[3] Équations et systèmes d'équations où figurent des valeurs principales d'intégrales, C. r. Acad. sci. Paris, t. 204, № 9, 1937, p. 628—630.

G l a d w e l l G. M. L. [1] Some mixed boundary value problems in isotropic thin plate theory, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. XI, № 2, 1958, p. 159—171.

[2] Some mixed boundary value problems of aeolotropic thin plate theory, Quart. J. Mech. and Appl. Math., vol. XII, № 1, 1959, p. 72—81.

G o u r s a t É. [1] Cours d'analyse mathématique, t. III, 4 édit., Paris, 1927. Русский перевод: Э. Г у р с а, Курс математического анализа, т. III, М.— Л., 1933.

H a r d y G. H. [1] The elementary theory of Cauchy's principal values, Proc. London Math. Soc., vol. 34, № 1, 1901, p. 16—40.

[2] The theory of Cauchy's principal values (Second Paper: The use of principal values in some of the double limit problems of the integral calculus), Ibid., p. 55—91.

[3] The theory of Cauchy's principal values (Third Paper: Differentiation and integration of principal values), Ibid., vol. 35, № 1, 1902, p. 81—107.

[4] The theory of Cauchy's principal values (Fourth Paper: The integration of principal values — continued — with applications to the inversion of definite integrals), Ibid., ser. 2, vol. 7, № 2, 1908, p. 181—208.

H a r d y G. H. and L i t t l e w o o d J. E. [1] Some more theorems concerning Fourier series and Fourier power series, Duke Math. J., vol. 2, № 2, 1936, p. 354—382.

H a r n a c k A. [1] Beiträge zur Theorie des Cauchy'schen Integrals, Ber. d. k. Sächs. Ges. d. Wiss., Math.-Phys. Klasse, Bd. 37, 1885, S. 379—398. Перепечатано в Math. Ann., Bd. 35, 1899, S. 1—18.

H a s e m a n C. [1] Anwendung der Theorie der Integralgleichungen auf einige Randwertaufgaben, Göttingen, 1907.

H e l l i n g e r E. und T o e p l i t z O. [1] Integralgleichungen und Gleichungen mit unendlichvielen Unbekannten, Sonderausgabe aus der Encykl. d. Math. Wiss. (II C 13), 1928.

H i l b e r t D. [1] Über eine Anwendung der Integralgleichungen auf ein Problem der Funktionentheorie, Verhandl. des III. Internat. Math. Kongr., Heidelberg, 1904.

[2] Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen, Leipzig — Berlin, 1912 (2 Aufl., 1924).

H ö r m a n d e r L. [1] Estimates for translation invariant operators in L^p spaces, Acta math., vol. 104, № 1—2, 1960, p. 93—140. Русский перевод: Л. Х ё р м а н д е р, Оценки для операторов, инвариантных относительно сдвига, М., ИЛ, 1962.

H o r v á t h J. [1] Singular integral operators and spherical harmonics, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 62, № 1, 1956, p. 52—63.

H u r w i t z W. A. [1] On the pseudo-resolvent to the kernel of an integral equation, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 13, 1912, p. 405—413.

J a c o b C. [1] Sur le problème de la dérivée oblique de Poincaré et sa connexion avec le problème de Hilbert, Bull. math. Soc. Roumaine sci., t. 42, № 2, 1941, p. 9—47.

[2] Introduction mathématique à la mécanique des fluides, Bucarest — Paris, 1959.

[3] Sur la détermination des fonctions harmoniques conjuguées par certaines conditions aux limites, Paris, 1935.

[4] Conditions d'uniformité ou de multiformité dans le problème plan de Dirichlet, Mathematica, t. XV, 1939, p. 12—24.

[5] Sur le problème de Dirichlet dans un domaine plan multiplement connexe et ses applications à l'Hydrodynamique, J. math. pures et appl., t. XVIII, fasc. IV, 1939, p. 363—383.

Kellogg O. D. [1] Unstetigkeiten in der linearen Integralgleichungen, Math. Ann., Bd. 58, 1904, S. 441—456.

[2] Harmonic functions and Green's integral, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 13, 1912, p. 109—132.

[3] Foundations of potential theory, Berlin, 1929.

Kohn J. J. [1] Singular integral equations for differential forms on Riemannian manifolds, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 42, № 9, 1956, p. 650—653.

Koppelman W. [1] On the spectral theory of singular integral operators, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., vol. 44, № 12, 1958, p. 1252—1254.

[2] The Riemann — Hilbert problem for finite Riemann surfaces, Comm. Pure and Appl. Math., vol. XII, № 1, 1959, p. 13—35.

[3] Spectral multiplicity theory for a class of singular integral operators, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 113, № 1, 1964, p. 87—100.

Koppelman W. and Pincus J. D. [1] Spectral representations for finite Hilbert transformations, Math. Z., Bd. 71, H. 4, 1959, S. 399—407.

Lauwerier H. A. [1] The Hilbert problem for generalized functions, Arch. Ration. Mech. and Analysis, vol. 13, № 2, 1963, p. 157—166.

Leehey P. [1] The Hilbert problem for an airfoil in unsteady flow, J. Math. and Mech., vol. 6, № 4, 1957, p. 427—453.

Liénard A. [1] Problème plane de la dérivée oblique dans la théorie du potentiel, J. de l'École polytechnique, III sér., № 5—7, 1938, p. 35—158, 177—226.

Loomis L. [1] A note on Hilbert's transform, Bull. Amer. Math. Soc., vol. 52, № 12, 1946, p. 1082—1086.

Love E. [1] Repeated integrals involving Cauchy principal values, J. London Math. Soc., vol. 25, № 99, 1950, p. 184—189.

MacCamy R. C. [1] On singular integral equations with logarithmic or Cauchy kernels, J. Math. and Mech., vol. 7, № 3, 1958, p. 335—375.

Malgrange B. [1] Opérateurs intégraux singuliers et unicité du problème de Cauchy, Séminaire Schwartz, Secrétariat mathématique, 4-ème année, 1959/1960, Paris, 1960, exposés 1—10. Русский перевод: Б. Мальгранж, Сингулярные интегральные операторы и единственность задачи Коши, Математика, 6 : 5, 1962, стр. 87—129.

Miranda C. [1] Gli integrali principali nella teoria del potenziale, Rend. Seminario Mat. e Fis. di Milano, vol. 24, 1952, p. 107—122.

Morera G. [1] Intorno all'integrale di Cauchy, Rend. del R. Istituto Lombardo, ser. II, vol. XXII, 1889, p. 191—200.

Nickel K. [1] Lösung eines speziellen Minimumproblems, Math. Z., Bd. 53, H. 1, 1950, S. 21—52.

[2] Lösung eines Integralgleichungssystem aus der Tragflügeltheorie, Math. Z., Bd. 54, H. 1, 1951, S. 81—96.

Noble B. [1] Methods based on the Wiener — Hopf technique for the solution of partial differential equations, London, 1958. Русский перевод: Б. Нобл, Применение метода Винера — Хопфа для решения дифференциальных уравнений в частных производных, М., ИЛ, 1962.

Noether F. [1] Über eine Klasse singulärer Integralgleichungen, Math. Ann., Bd. 82, H. 1—2, 1920, S. 42—63.

Osgood W. F. [1] Lehrbuch der Funktionentheorie, Bd. I, Leipzig — Berlin, 1912.

Picard É. [1] Leçons sur quelques types simples d'équations aux dérivées partielles, Paris, 1927.

Piechocki W. and Zorski H. [1] Thermoelastic problem for a wedge Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. techn., vol. VII, № 10, 1959, p. 555—565.

Pincus J. D. [1] On the spectral theory of singular integral operators, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 113, № 1, 1964, p. 101—128.

Plemelj J. [1] Ein Ergänzungssatz zur Cauchy'schen Integraldarstellung analytischer Funktionen, Randwerte betreffend, Monatsh. für Math. und Phys., XIX. Jahrgang, 1908, S. 205—210.
[2] Riemannsche Funktionenscharen mit gegebener Monodromiergruppe, Ibid., S. 211—245.
[3] Potentialtheoretische Untersuchungen, Leipzig, 1911.

Pogorzelski W. [1] Über die Transformationen einiger iterierten uneigentlichen Integrale und ihre Anwendung zur Poincaré'schen Randwertaufgabe, Math. Z., Bd. 44, H. 3, 1939, S.427—444.
[2] Sur l'équation intégrale singulière non-linéaire et sur les propriétés d'une intégrale singulière pour les arcs non fermés, J. Math. and Mech., vol. 7, № 4, 1958, p. 515—532.
[3] Problème généralisé de Hilbert pour les arcs non fermés, Ann. scient. École norm. supér., t. LXXV, f. 3, 1958, p. 201—222.
[4] Sur certaines classes de fonctions complexes définies sur les arcs non fermés, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. VII, № 2, 1959, p. 57—62.
[5] Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. VII, № 6, 1959, p. 311—317.
[6] Sur une propriété principale d'une classe de fonctions discontinues pour le système des arcs, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. math., astr. et phys., vol. VIII, № 6, 1960, p. 359—364.
[7] Problèmes aux limites discontinus dans la théorie des fonctions analytiques, J. Math. and Mech., vol. 9, № 4, 1960, p. 583—606.

Poincaré H. [1] Leçons de Mécanique Céleste, t. III, Paris, 1910, Chap. X.

Przeworska-Rolewicz D. [1] Sur les opérations satisfaisant à une identité polynomiale, Studia math., 22, № 1, 1962, p. 43—58.
[2] Équations avec opérations algébriques, Studia math., vol. 22, № 3, 1963, p. 337—367.
[3] Sur les équations avec opérations presque algébriques, Studia math., vol. 25, № 2, 1965, p. 163—180.

Putnam C. R. [1] Commutators, absolutely continuous spectra, and singular integral operators, Amer. J. Math., vol. 86, № 2, 1964, p. 310—316.

Radon J. [1] Über die Randwertaufgaben beim logarithmischen Potential, Sitzungsber. Akad. Wiss. in Wien, Math.-naturwiss. Kl., Abt. IIa, Bd. 128, H. 7, 1919, S. 1123—1167.

Riemann B. [1] Grundlagen für eine allgemeine Theorie der Funktionen einer veränderlichen complexen Grösse, Göttingen, 1851; Werke, Leipzig, 1876, S. 3—43. Русский перевод: Б. Риман, Сочинения, М., 1948, стр. р. 49—87.
[2] Zwei allgemeine Lehrsätze über lineare Differentialgleichungen mit algebraischen Koeffizienten, Werke, Leipzig, 1876, S. 357—369. Русский перевод: Б. Риман, Сочинения, М., 1948, стр. 176—186.

Riesz M. [1] Sur les fonctions conjuguées, Math. Z., Bd. 27, H. 2, 1927, S. 218—244.

Schaefer H. [1] Über singuläre Integralgleichungen und eine Klasse von Homomorphismen in lokalkonvexen Räumen, Math. Z., Bd. 66, H. 2, 1956, S. 147—163.

Schauder J. [1] Potentialtheoretische Untersuchungen, Erste Abhandl., Matz. Z., Bd. 33, H. 4, 1931, S. 602—640.

Schmidt H. [1] Strenge Lösungen zur Prandtlschen Theorie der tragenden Linie, Z. angew. Math. und Mech., Bd. 17, H. 2, 1937, S. 101—115.

Schröder K. [1] Über eine Integralgleichung erster Art der Tragflügeltheorie, Stizungsber. Preuss. Akad. d. Wiss., Phys.-math. Klasse, Bd. XXX, 1938, S. 345—362.
[2] Über die Prandtlsche Integro-Differentialgleichung der Tragflügeltheorie, Abhandl. d. Preuss. Akad. d. Wiss., Math.-naturwiss. Klasse, 1939, № 16.

Schubert H. [1] Über eine lineare Integrodifferentialgleichung mit Zusatzkern, Vorträge der 3. Tagung über Probleme und Methoden der Mathematischen Physik. Technische Hochschule Karl-Marx-Stadt. Institut für Math. und angewandte Mech., H. 2, 1966, S. 117—148.

Schwartz J. [1] Some results on the spectra and spectral resolutions of a class of singular integral operators, Comm. Pure and Appl. Math., vol. 15, № 1, 1962, p. 75—90.

Seeley R. T. [1] Regularization of singular integral operators on compact manifolds, Amer. J. Math., vol. 83, № 2, 1961, p. 265—275.
[2] The index of elliptic systems of singular integral operators, J. Math. Anal. and Appl., vol. 7, № 2, 1963, p. 289—309.

Sewell W. E. [1] Degree of approximation by polynomials in the complex domain, Princeton, 1942.

Shinbrot M. [1] On singular integral operators, J. Math. and Mech., vol. 13, № 3, 1964, p. 395—406.

Signorini A. [1] Sopra un problema al contorno nella teoria delle funzioni di variabile complessa, Ann. mat. pura ed appl., Ser. III, t. XXV, 1916, p. 253—273.

Söhngen H. [1] Die Lösungen der Integralgleichung

$$g(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-a}^{a}\frac{f(\xi)\,d\xi}{x-\xi}$$

und deren Anwendung in der Tragflügeltheorie, Math. Z., Bd. 45, H. 2, 1939, S. 245—264.
[2] Zur Theorie der endlichen Hilbert-Transformation, Math. Z., Bd. 60, H. 1, 1954, S. 31—51.
[3] Luftkräfte an einem schwingenden Gitter, Z. angew. Math. und Mech., Bd. 35, H. 3, 1955, S. 81—88.

Stein E. M. [1] Note on singular integrals, Proc. Amer. Math. Soc., vol. 8, № 2, 1957, p. 250—254.
[2] On the theory of harmonic functions of several variables, Acta math., vol. 106, № 3—4, 1961, p. 137—174.

Stein E. M. and Weiss G. [1] On the theory of harmonic functions of several variables, Acta math., vol. 103, № 1—2, 1960, p. 25—62.

Tamarkin J. D. [1] On Fredholm's integral equations, whose kernels are analytic in a parameter, Ann. Math., Ser. 2, vol. 28, № 2, 1927, p. 127—152.

Titchmarsh E. C. [1] On conjugate functions, Proc. London Math. Soc., Ser. 2, vol. 29, Part I, 1929, p. 49—80.

Tricomi F. [1] Sulle equazioni lineari alle derivate parziali di 2° ordine di tipo misto, Mem. d. R. Accademia dei Lincei, ser. V, vol. XIV, fasc. VII, 1923, p. 133—247. Русский перевод: Ф. Трикоми, О линейных уравнениях в частных производных второго порядка смешанного типа, М.—Л., Гостехиздат, 1947.
[2] Equazioni integrali contenenti il valor principale di un integrale doppio, Math. Z., Bd. 27, H. 1, 1927, S. 87—133.
[3] On the finite Hilbert transformation, Quart. J. Math., vol. 2, № 7, 1951, p. 199—211.
[4] Equazioni integrali singolari del tipo di Carleman, Ann. mat. pura ed appl., Ser. quarta, t. XXXIX, 1955, 229—244.
[5] Sull'inversione dell'ordine di integrali «principali» nel senso di Cauchy, Rend. Acc. Lincei, vol. XVIII, fasc. I, 1955, p. 3—7.
[6] Integral equations, New York — London, 1957. Русский перевод: Ф. Трикоми, Интегральные уравнения, М., ИЛ, 1960.

Trjitzinsky W. J. [1] Singular integral equations with Cauchy kernels, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 60, № 2, 1946, 167—214.
[2] Multidimensional principal integrals, boundary value problems and integral equations, Acta math., vol. 84, № 1—2, 1950, p. 1—128.

Veltkamp G. W. [1] The drag on a vibrating aerofoil in incompressible flow, Indagationes math., vol. XX, fasc. 3, 1958, p. 278—297.

Walsh J. L. and Sewell W. E. [1] Sufficient conditions for various degrees of approximation by polynomials, Duke Math. J., vol. 6, № 3, 1940, p. 658—705.

Warschawski S. [1] Über das Randverhalten der Ableitung der Abbildungsfunktion bei konformer Abbildung, Math. Z., Bd. 35, H. 3, 1932, S. 321—456.
[2] Bemerkung zu meiner Arbeit «Über das Randverhalten der Ableitung u. s. w.», Math. Z., Bd. 38, H. 5, 1934, S. 669—683.

Weissinger J. [1] Ein Satz über Fourierreihen und seine Anwendung auf die Tragflügeltheorie, Math. Z., Bd. 47, H. 1, 1940, S. 16—33.

Widom H. [1] Singular integral equations in L_p, Trans. Amer. Math. Soc., vol. 97, № 1, 1960, p. 131—160.

Wolfersdorf L. [1] Zum Problem der Richtungsableitung für die Tricomi-Gleichung, Mathematische Nachrichten, Bd. 25, H. 2, 1963, S. 111—127.
[2] Abelsche Integralgleichungen und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-Gleichung, Math. Nachr., Bd. 29, H. 3—4, 1965, S. 161—178.
[3] Berichtigung zur Arbeit «Abelsche Integralgleichungen und Randwertprobleme für die verallgemeinerte Tricomi-Gleichung», Math. Nachr., Bd. 32, H. 3—4, 1966, S. 246.

Woods L. C. [1] The theory of subsonic plane flow, Cambridge, 1961.

Zakowski W. [1] Sur une généralisation de la transformation de Poincaré — Bertrand, Ann. polon. math., t. X, № 2, 1961, p. 115—122.

Zorski H. [1] Plates with discontinuous supports, Arch. mech. stosowanej, t. X, № 3, 1958, p. 271—313.
[2] A semi-infinite strip with discontinuous boundary condition, Arch. mech. stosowanej, t. X, № 3, 1958, p. 371—398.
[3] Plates with discontinuous supports, I, II, Bull. Acad. polon. sci., Sér. sci. techn., vol. VI, № 3, 1958, p. 127—132 and p. 133—140.
[4] Some cases of bending of anisotropic plates, Arch. mech. stosowanej, t. XI, № 1, 1959, p. 71—91.

Zygmund A. [1] Sur le module de continuité de la somme de la série conjuguée de la série de Fourier, Prace Matematyczno-Fizyczne, vol. 33, 1924, p. 125—132.
[2] Trigonometric series, vol. I, II, Cambridge, 1959. Русский перевод: А. Зигмунд, Тригонометрические ряды, т. I, II, М., ИЛ, 1966.
[3] On singular integrals, Rend. mat. appl., ser. 5, vol. 16, № 3—4, 1957, p. 468—505.
[4] Intégrales singulières, Publications du Séminaire de mathématiques d'Orsay, 4-ème année, 1964—1965, p. 1—56.

Николай Иванович Мусхелишвили

Сингулярные интегральные уравнения

М., 1968 г., 512 стр. с илл.

Редактор *Е. Д. Соломенцев*

Техн. редактор *К. Ф. Брудно*

Корректоры *Е. А. Белицкая, Л. Н. Боровина*

Сдано в набор 27/II 1968 г. Подписано к печати 22/X 1968 г. Бумага 70×108/16. Физ. печ. л. 32. Условн. печ. л. 44,80. Уч.-изд. л. 38,82. Тираж 10300 экз. Т-14853. Цена книги 2 р. 68 к. Зак. № 260.

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико-математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15.

Московская типография № 16 Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР Москва, Трехпрудный пер., 9