



The International Series of Monographs on Physics
general editors W. Marshall, D. H. Wilkinson

THE THEORY OF RELATIVITY

BY

C. MØLLER

PROFESSOR OF MATHEMATICAL PHYSICS
IN THE UNIVERSITY OF COPENHAGEN

SECOND EDITION

CLARENDON PRESS OXFORD
1972

К. МЁЛЛЕР

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

ВТОРОЕ ИЗДАНИЕ

Перевод с английского
В. Г. КРЕЧЕТА, В. Г. ЛАПЧИНСКОГО

Под редакцией профессора
Д. ИВАНЕНКО

**МОСКВА АТОМИЗДАТ
1975**

Мёллер К. Теория относительности. Изд. 2-е. Пер. с англ. Под ред. проф. Д. Иваненко. М., Атомиздат, 1975, 400 с.

Книга относится к числу фундаментальных трудов по теоретической физике. В ней содержатся основы специальной теории относительности и все разделы классической физики в рамках релятивистской теории: механика точки и сред, электродинамика, теория волновых полей и термодинамика.

Во второй части книги, посвященной общей теории относительности, излагаются основы римановой геометрии и эйнштейновской теории гравитации. Рассматриваются лагранжев формализм, законы сохранения, космологические и астрофизические проблемы, экспериментальные обоснования общей теории относительности.

Книга написана с большим педагогическим мастерством. Она без сомнения станет настольной книгой для самого широкого круга читателей.

Рис. 19. Библиография 393.

Предлагаемая вниманию читателей фундаментальная книга по специальной и общей теории относительности (СТО и ОТО) написана известным авторитетным датским теоретиком профессором Копенгагенского университета Кристианом Меллером. Меллер воспитывался на знаменитых семинарах и симпозиумах Нильса Бора и поныне сохраняет тесную связь с Институтом физики, носящим имя великого теоретика. В небольшом крыле Института помещается более скромный Северный институт теоретической атомной физики «Нордита», объединяющий ученых пяти скандинавских стран, директором которого состоит профессор К. Меллер.

Включившись в разработку приложений только что созданной квантовой механики, Меллер завоевал в начале 30-х годов широкое признание своей теорией рассеяния электронов с учетом релятивистских эффектов. Ряд его работ был посвящен теории 5-мерного пространства. В последние два десятилетия, подобно многим другим теоретикам квантовой и ядерной физики, Меллер посвящает все свое внимание теории относительности, своевременно уловив возрастающую актуальность проблем гравитации.

Активный участник международных конференций и симпозиумов (в том числе 5-й конференции 1968 г. в Тбилиси), проходящих под эгидой Международного гравитационного комитета (МГК), Меллер состоял председателем оргкомитета очередной, также успешной, 6-й конференции 1971 г. в Копенгагене, на которой он был избран председателем МГК еще на три года, а с 1974 г. заместителем председателя. Меллер неоднократно посещал Советский Союз, выступал с докладами в Московском университете. Он выражает ныне особое удовлетворение в связи с публикацией русского перевода второго издания его книги и передает советским читателям, в особенности молодым физикам, свои лучшие пожелания.

Настоящая книга, являющаяся университетским курсом и вместе с тем монографией по теории относительности, несомненно вносит вклад в современную литературу по СТО и ОТО, а публикация ее русского перевода будет весьма полезна как советским студентам, приступающим к овладению релятивизмом, так и научным работникам, давая им в руки подробные расчеты, спокойное надежное изложение, толкая мысль вперед обсуждением спорных вопросов. В ней излагаются с новых точек зрения (например, с ударением на тетрадный формализм, проектирование на 3-мерное пространство и т. д.) многие глубокие старые и новые проблемы (измерения в ОТО, энергия поля и др.). В частности, в параграфе о космологии Меллер весьма разумным образом рассматривает не только фридмановскую модель, но также предыдущие статические модели Эйнштейна и де Ситтера, интересные не только с исторической точки зрения, но и в смысле предельных случаев, конечно учитывая столь необходимый космологический член.

Как известно, вопросы гравитации вышли ныне на первый план в науке. Это связано, во-первых, со всесторонним анализом основ теории, в частности, продолжающимися дискуссиями вокруг толкований и обобщений принципа эквивалентности (В. А. Фок, Шифф и др.), широким применением топологии

к ОТО и анализу сингулярностей (Хокинг, Пенроуз и др.), успехами алгебраической классификации (А. З. Петров и др.), отысканием новых точных решений (Керр и др.), продвижением на трудном пути квантования гравитации. Во-вторых, усовершенствование экспериментальных средств позволило начать наблюдение эффектов ОТО как в земных лабораториях, так и в системе планет, и впервые после стимулирующих работ Вебера начать поиски гравитационных волн.

Но, конечно, к главным достижениям последних лет относится открытие реликтового излучения, по всей видимости, космологического происхождения, в сущности, окончательно подтверждающего картину эволюции ранее «горячей» Вселенной, расширяющейся от Большого взрыва, во многом предсказанную на базе ОТО. Обнаружение предсказанных сверхплотных нейтронных звезд в виде пульсаров (испускающих, подобно квазарам и многим другим звездным объектам, в частности, предсказанное нами с И. Я. Померанчуком синхротронное излучение) со своей стороны дало большой толчок развитию релятивистской астрофизики.

Оставаясь общепризнанным базисом понимания гравитации и пространства — времени, эйнштейновская ОТО вместе с тем допускает и, согласно нашим и ряда других теоретиков взглядам, даже требует естественных обобщений, притом и в неквантовом своем аспекте, среди которых наибольшее внимание привлекли ныне скалярно-тензорная теория (Йордан — Бранс — Дикке), развивающая гипотезу Дирака о вековом ослаблении константы тяготения и различные варианты «компенсирующей» трактовки гравитации как калибровочного поля (Вейль, Фок — Иваненко, Утияма, Салам и др.), любопытным образом подсказывающей наличие картановского кручения, а не только искривления пространства — времени. Можно сказать, что наука вступила ныне в третий, после классического ньютоновского и ортодоксального релятивистского эйнштейновского, период исследования гравитации. Не исключено, что в условиях сверхплотных состояний, на самых малых расстояниях, пространство — время существенно изменяет свой характер, приобретая, например, некоторую дискретность (давно предсказывавшуюся в работах В. А. Амбарцумяна — Д. Д. Иваненко, Снайдера, И. Е. Тамма, Д. И. Блохинцева, Финкельштейна и др.), или существенно меняя свои топологические свойства (Уилер, Тредер и др.). Книга Меллера, посвященная второму периоду гравитации, вместе с тем дает в ряде случаев отправной пункт и в направлении изучения упомянутых обобщений и новейших астрономических открытий, части которых, например в области релятивистского исследования планет (Шапиро и др.), она уже касается.

Наша рекомендация фундаментальной книги профессора Меллера, конечно, не означает полного согласия с ним в ряде пунктов: в частности, исторического освещения установления СТО и ОТО, признания необходимости трактовки гравитации как калибровочного (компенсирующего) поля и некоторых других вопросов.

Мы ограничимся здесь этими краткими пояснениями, считая, что нарушать характер книги дополнительными статьями и отдельными примечаниями было бы нецелесообразно. Однако с согласия автора, мы надеемся оказать содействие читателям, добавив аннотированный и классифицированный список не отмеченной автором литературы главным образом последних лет (в частности, недостаточно учтенной отечественной). Вместе с литературой автора книги, наш список, дополняя историю вопроса, излагая точки зрения многих авторов, а также сообщая новейшие эмпирические данные, подводит читателя к актуальным проблемам современной физики.

Д. Иваненко

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

К моменту выхода первого издания этой книги в 1952 г. теория относительности казалась всем законченным разделом физики, в котором уже не было каких-либо интересных проблем, а потому ведущие физики избегали активной работы в этой области. Однако исследования последних десяти — пятнадцати лет принципиально изменили ситуацию. Анализ новых проблем и сторон теории привел к лучшему пониманию ее математической структуры и физического содержания. Кроме того, интенсивные экспериментальные исследования в сотрудничестве с астрофизиками обеспечили более надежное измерение классических релятивистских эффектов и открыли новые возможности применения теории в космологии. Этот прогресс не удивителен, так как, в отличие от теории тяготения Ньютона, эйнштейновская теория гравитационного поля проявляется во всех физических процессах. И хотя эти эффекты чрезвычайно малы, постоянно увеличивающаяся точность гравитационных экспериментов переводит общую теорию относительности в разряд все более и более экспериментально проверяемых.

Естественно поэтому, что в настоящее издание включена часть новых результатов. Но общий характер книги как достаточно простого введения в релятивистскую физику не изменился, так как одна часть нового материала дана в виде упражнений, другая (ее можно опустить при первом чтении) — мелким шрифтом. Подготовленному читателю именно эти места покажутся наиболее интересными, хотя они отражают лишь малую часть достижений последних лет. Метод изложения такой же, как и в первом издании: комбинирование абстрактного четырехмерного формализма с более физичным трехмерным описанием явлений.

Перечислим основные изменения текста первого издания. Четвертая глава содержит новое изложение механики точки переменной собственной массы. Дополнено изложение механики континуума в шестой главе. Седьмая глава дополнена новыми параграфами по механике сред с внутренней теплопроводностью, а разделы, посвященные термодинамике, написаны заново. Изменениям подверглось и изложение электродинамики сплошных сред. В главе девятой изложены некоторые новые математические методы, которые используются затем для изложения общерелятивистской механики частиц в следующей главе. Здесь же подробно рассмотрены распространение света и свойства фотонов в гравитационном поле. В одиннадцатой главе обсуждается проблема динамических величин изолированной излучающей системы в свете новых достижений; наконец, в двенадцатой главе дается изложение экспериментальной проверки специальной и общей теорий относительности по состоянию на конец 1970 г.

При подготовке этого нового, пересмотренного издания активную помощь оказали мне сотрудники секретариата Северного института теоретической атомной физики (Nordita). Я с особой благодарностью отмечаю помощь мисс Хеллман, которая столь же старательно, как и двадцать лет назад, помогала мне при подготовке рукописи к печати.

Копенгаген
Июль 1971

Кристиан Меллер

Настоящая монография является расширенным вариантом курса лекций, который я читаю в Копенгагенском университете последние двадцать лет. Следовательно, книга в первую очередь предназначена для читателей, чей уровень математической и физической культуры достаточно высок. Считается, что изучающие теорию относительности хорошо владеют методами нерелятивистской механики и электродинамики, а также всеми теми разделами, которые мы называем классической, неквантовой физикой. Такое последовательное исключение всех квантовых эффектов, на первый взгляд, может показаться существенным недостатком книги. Однако для этого есть веские основания. Во-первых, законченной, непротиворечивой квантовой теории пока нет. Во-вторых, классическая релятивистская теория, которая уже сама по себе достаточно надежна как база для описания многих физических явлений, как раз и является фундаментом для будущей непротиворечивой квантовой теории. Для изучающих квантовую теорию поля или для тех, кто активно работает в этой области, хорошее знание релятивистской физики столь же необходимо, как необходимо знание ньютоновской механики для понимания элементарной квантовой механики. Да и вообще классическая теория относительности является в настоящее время наиболее совершенным разделом теоретической физики.

Наше изложение несколько отличается от общепринятого тем, что четырехмерной формулировке отводится несколько меньшая роль. Конечно, четырехмерная формулировка, основанная на лоренцевой симметрии пространства — времени, является изящным способом выражения принципа относительности на математическом языке, и, кроме того, она позволяет кратчайшим путем перейти к формулировке общековариантной теории. В ранних руководствах по теории относительности естественно было специально подчеркивать именно эту однородность пространственно-временного многообразия. Я полагаю, однако, что в современных руководствах полезно делать акцент именно на различии между пространственными и временной переменными, которое так легко теряется в четырехмерном формализме.

В первых трех главах мы избегаем поэтому всякого упоминания о четырехмерной картине и релятивистскую механику точки формулируем исключительно на языке обыкновенного трехмерного векторного анализа. В последующих главах, где используется уже четырехмерный формализм, время от времени дается трехмерная картина для лучшего уяснения физики явлений.

В книгу вошли только те результаты, которые считаются в настоящее время хорошо установленными; в частности, все попытки построения единых теорий электромагнитного и гравитационного взаимодействий места в книге не нашли. Довольно мало уделено внимания космологии, так как эти вопросы очень широко обсуждаются в серии монографий Толмана. Несмотря на эти ограничения мы надеемся, что читатель найдет в нашей книге достаточно полное и последовательное изложение одной из самых красивых во всей истории науки

теорий, большая часть которой создана только одним человеком — Альбертом Эйнштейном.

При написании этой работы и подготовке ее к изданию я пользовался поддержкой и помощью многих моих коллег. Прежде всего я благодарен профессору Нильсу Бору за его постоянный интерес к работе на протяжении многих лет, за его многочисленные советы и дискуссии в стенах его института. Я благодарю также профессоров Мотта и Снеддона, прочитавших мою рукопись и устранивших из нее мои даницизмы. Я признателен также за их доброжелательное отношение ко мне.

Я благодарю также докторов Кона и Святецкого, магистра Линдхарда за их помощь в проверке формул. И наконец, я выражаю свою признательность мисс Хеллман за ее неутомимую и многостороннюю помощь при подготовке рукописи к изданию.

Копенгаген
Ноябрь, 1951

Кристиан Меллер

ОСНОВЫ СПЕЦИАЛЬНОЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ. ИСТОРИЧЕСКИЙ ОБЗОР

§ 1.1. Принцип относительности в механике. Преобразования Галилея

Специальная теория относительности, созданная в начале XX в. главным образом благодаря работам Эйнштейна, имеет глубокие корни в прошлом. Эту теорию можно рассматривать как продолжение и обобщение идей, лежащих в основе описания природы, предложенного еще Галилеем и Ньютоном. Фундаментальный постулат теории — так называемый принцип относительности* — уже в работах Галилея и Гюйгенса играл определяющую роль в выборе основных законов природы. Справедливость принципа относительности в механике является простым следствием уравнений Ньютона. Поскольку последние представляют собой особенно хороший материал для иллюстрации принципа относительности, мы начнем с рассмотрения чисто механических явлений.

В соответствии с первым законом Ньютона, законом инерции, всякая материальная точка, предоставленная сама себе, будет двигаться равномерно и прямолинейно. Так как мы не можем определить движение иначе, чем движение одних тел относительно других, то первый закон Ньютона только тогда считается сформулированным точно, когда установлена система отсчета, по отношению к которой можно измерить скорость точки. Именно поэтому Ньютон ввел понятие «абсолютного пространства», по отношению к которому можно зарегистрировать движение любых материальных тел в природе. Опыт показывает, что неподвижные звезды в целом с хорошим приближением можно считать покоящимися относительно «абсолютного пространства», так как любое достаточно удаленное от неподвижных звезд тело всегда движется относительно них с постоянной скоростью.

Очевидно, однако, что закон инерции должен быть справедлив и во всех остальных системах отсчета, равномерно движущихся по отношению к абсолютной системе, поскольку во всех этих системах свободные частицы тоже будут двигаться равномерно и прямолинейно. Все системы отсчета, в которых справедлив закон инерции, называются инерциальными системами. Совокупность инерциальных систем — это бесконечность в кубе систем, движущихся относительно друг друга равномерно и прямолинейно. Одна из них, покоящаяся относительно неподвижных звезд, является абсолютной. Но с точки зрения справедливости закона инерции все инерциальные системы полностью эквивалентны. Тогда в соответствии с принципом относительности в механике все инерциальные системы должны быть эквивалентными относительно всех законов механики. Если это так, то все механические процессы должны выглядеть совершенно одинаково во всех инерциальных системах, так что никакое наблюдение таких явлений не дает возможности обнаружить равномерное движение системы в целом относительно абсолютной системы. Таким образом, изучение только механических явлений не позволяет выделить абсолютную систему отсчета.

* В гл. 1—7 речь идет только о специальном принципе относительности, а не о принципе, лежащем в основе общей теории относительности (ОТО).

Мы увидим, что все фундаментальные уравнения механики Ньютона подчиняются принципу относительности. Рассмотрим две произвольные инерциальные системы отсчета, I и I' . В каждой из них определим системы координат S и S' соответственно, например декартовы координаты $\mathbf{x} = (x, y, z)$ и $\mathbf{x}' = (x', y', z')$ в I и I' . Тогда, имея в виду наше обычное представление о пространстве и времени, найдем для радиус-вектора одной и той же точки в двух системах S и S'

$$\mathbf{x}' = \mathbf{x} - \mathbf{v}t, \quad (1.1a)$$

где \mathbf{v} — вектор скорости системы отсчета S' по отношению к S ; t — время. Для простоты принято, что при $t = 0$ начала двух координатных систем совпадают. К уравнению (1.1a) следует прибавить условие

$$t' = t, \quad (1.1)$$

из которого следует, что параметр, описывающий ход времени, один и тот же во всех системах, в том числе и в S и S' . Это означает, что в механике Ньютона время — абсолютное понятие. Уравнения (1.1a) и (1.1) называют часто *преобразованиями Галилея*.

Если оси двух систем координат выбрать параллельными, а \mathbf{v} — по направлению оси x , получим *специальные преобразования Галилея*:

$$x' = x - vt; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t. \quad (1.2)$$

Поскольку S и S' полностью эквивалентны (S движется относительно S' со скоростью $-\mathbf{v}$), то преобразования, обратные (1.2), легко получить, заменяя штрихованные величины нештрихованными и наоборот, и учитывая, что \mathbf{v} меняет знак.

Рассмотрим теперь произвольное движение точки. Дифференцируя (1.1a), получим

$$d\mathbf{x}'/dt' = d\mathbf{x}/dt - \mathbf{v}$$

или

$$\mathbf{u}' = \mathbf{u} - \mathbf{v}, \quad (1.3)$$

где \mathbf{u} и \mathbf{u}' — скорости материальной точки в S и S' -системах. Выражение (1.3) представляет собой обычную теорему о сложении скоростей. В случае специальных преобразований Галилея (1.2) использование (1.3) дает

$$u'_x = u_x - v; \quad u'_y = u_y; \quad u'_z = u_z. \quad (1.4)$$

Когда вектор скорости \mathbf{u} , а следовательно, и \mathbf{u}' перпендикулярны оси z , уравнения (1.4) можно записать иначе:

$$u' \cos \vartheta' = u \cos \vartheta - v;$$

$$u' \sin \vartheta' = u \sin \vartheta,$$

где ϑ и ϑ' — углы между осью x и направлениями \mathbf{u} и \mathbf{u}' соответственно. Обозначив $u = |\mathbf{u}|$ и $u' = |\mathbf{u}'|$ и объединив два последних уравнения, получим

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \sin \vartheta / \cos \vartheta - v/u, \quad (1.5)$$

а суммируя их квадраты, находим

$$u' = u \left(1 - 2 \frac{v}{u} \cos \vartheta + \frac{v^2}{u^2} \right)^{1/2}. \quad (1.6)$$

Теперь предположим, что материальная точка с массой m движется под действием силы \mathbf{F} . В абсолютной системе координат S движение точки подчиняется второму закону Ньютона:

$$m d^2 \mathbf{x} / dt^2 = \mathbf{F}. \quad (1.7)$$

Из (1.1a) и (1.1) следует, что

$$d^2\mathbf{x}'/dt'^2 = d^2\mathbf{x}/dt^2, \quad (1.8)$$

а так как в механике Ньютона принято, что сила и масса являются абсолютными величинами, т. е.

$$\mathbf{F}' = \mathbf{F}, \quad m' = m, \quad (1.9)$$

то в результате получим

$$m' d^2\mathbf{x}'/dt'^2 = \mathbf{F}'. \quad (1.10)$$

Следовательно, второй закон Ньютона справедлив в любой инерциальной системе, как это и должно быть в соответствии с принципом относительности. Другими словами, фундаментальные уравнения Ньютона инвариантны по отношению к преобразованиям Галилея. Хорошо известно, что эта инвариантность нарушается при более сложных преобразованиях, приводящих к понятию ускоренных систем отсчета, так как возникает необходимость введения фиктивных центробежных сил и сил Кориолиса, зависящих от ускорения системы отсчета и не следующих непосредственно из динамических уравнений.

Именно это принципиальное отличие инерциальных и неинерциальных систем отсчета привело к понятию абсолютного пространства.

§ 1.2. Специальный принцип относительности

Принцип относительности в механике не позволяет однозначно выделить из множества систем отсчета абсолютную систему, оперируя при этом только механическими явлениями. Расширяя понятие принципа относительности приходим к основному постулату специальной теории относительности: *принцип относительности справедлив не только для законов механики, но и для всех остальных физических законов**. В рамках специальной теории относительности (СТО) все физические законы должны иметь одинаковый вид во всех инерциальных системах отсчета, т. е. наблюдатели, находящиеся в различных инерциальных системах, должны получать совершенно одинаковое динамическое описание одних и тех же физических явлений. Если это так, то понятие абсолютного пространства полностью теряет смысл, поскольку любую инерциальную систему с полным правом можно объявить абсолютной системой отсчета. Конечно, нам никто не мешает назвать абсолютной системой одну определенную инерциальную систему, например ту, которая покоится относительно неподвижных звезд, и записать все физические законы в координатах выбранной системы. Однако такая процедура чрезвычайно неудовлетворительна из-за произвола в выборе самой системы отсчета. Более того, выбор конкретной системы вносит осложнения в физические исследования. Обычно эксперименты, из которых выводятся физические законы, выполняются не в системе отсчета, связанной с неподвижными звездами. Если пренебречь ускорением Земли при ее движении в течение года вокруг Солнца, то с Землей можно связать инерциальную систему, переход от которой к системе неподвижных звезд несколько неудобен.

Справедливость принципа относительности для всех физических законов устраняет саму необходимость преобразований инерциальных систем вследствие их полной эквивалентности, чем достигается существенное упрощение способа описания природы.

Однако, как мы увидим ниже, такое упрощение достигается ценой сильного осложнения наших представлений о пространстве и времени. Распро-

* За исключением законов гравитации, которые рассматриваются в ОТО.

странение принципа относительности на теорию электромагнитных явлений означает, как уже отмечалось, что два экспериментатора, установив аналогичную аппаратуру в двух инерциальных системах отсчета, должны независимо прийти к уравнениям Максвелла для электромагнитного поля. Эти уравнения содержат фундаментальную константу c — скорость света, которую можно измерить чисто электродинамическим путем ($c = 3 \cdot 10^8$ м/сек [272]). Кроме того, из уравнений Максвелла следует, что электромагнитные волны в вакууме распространяются со скоростью c , причем скорость эта не зависит от способа получения волны. Но поскольку по той же теории Максвелла световые волны имеют электромагнитную природу, скорость света c в вакууме не должна зависеть от кинематического состояния источника света и потому всегда имеет одно и то же фиксированное значение. Если уравнения Максвелла подчиняются принципу относительности, то скорость света должна быть одной и той же во всех инерциальных системах отсчета, независимо от движения источника света. Это утверждение находится в противоречии с обычной кинематикой, по которой скорость света будет меньше в S' , если обе системы движутся в направлении светового луча.

Отсюда следует, что принятие принципа относительности обязательно ведет к пересмотру всей обычной концепции пространства и времени. Но прежде чем решиться на такой радикальный шаг, необходимо убедиться в его неизбежности. А такая уверенность может следовать только из анализа результатов эксперимента. И наиболее пригодными здесь оказываются оптические эксперименты вследствие их высокой точности. В следующих разделах мы дадим поэтому краткий исторический обзор ряда оптических экспериментов, целью которых было выяснение эффектов, возникающих из-за движения измерительной аппаратуры относительно абсолютного пространства. Все эти эксперименты, как мы увидим, дали отрицательные результаты и окончательно привели к общему признанию специального принципа относительности.

§ 1.3. Инвариантность фазы плоской волны

В противоположность релятивистской точке зрения, в соответствии с которой уравнения Максвелла имеют один и тот же вид во всех инерциальных системах, сам Максвелл и его современники считали, что основные уравнения электродинамики справедливы только в одной инерциальной системе, в такой, которая покоится относительно так называемого мирового эфира. Под эфиром понималась такая среда, которой заполнено все пространство и материя, которая является носителем оптических и электромагнитных процессов. Более того, мировой эфир считался носителем абсолютной системы отсчета, придавая смысл ньютонову абсолютному пространству. В дальнейшем мы детально проанализируем эту точку зрения, и нашей первой задачей будет попытка рассмотреть все эффекты, которые должны иметь место в любой инерциальной системе, движущейся относительно эфира.

Пусть S — декартова система координат, неподвижно связанная с эфиром. Относительно S плоская монохроматическая световая волна в пустом пространстве имеет скорость $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек. Волны такого типа полностью определяются (нормальной) фазовой скоростью, частотой и направлением распространения. Прежде всего определим свойства преобразований этих трех величин к новой системе координат S' , движущейся относительно эфира с постоянной скоростью v параллельно оси x .

Для простоты предположим, что нормаль к фронту волны лежит в плоскости x, y . Тогда в системе координат S можно написать

$$\left. \begin{aligned} \psi &= A \cos 2\pi F; \\ F &= \nu [t - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)/c] = \nu (t - l/c), \end{aligned} \right\} \quad (1.11)$$

где v — частота; α — угол между осью x и нормалью n ; $l = x \cos \alpha + y \sin \alpha$ — расстояние от начала координат O до точки фронта волны p , имеющей координаты (x, y) (рис. 1).

Фаза F в (1.11) имеет простой физический смысл. Предположим, что гребень волны, которая проходит через начальную точку O при $t = 0$, снабжен меткой. Пусть наблюдатель находится в точке p и начинает считать проходящие мимо него волны с того момента, когда помеченная волна достигла точки p . Тогда количество прошедших волн к моменту времени t как раз равно F . Поскольку помеченная волна проходит расстояние Op за l/c сек, а количество прибывающих волн за одну секунду равно v , то наблюдатель считает волны в течение $t - l/c$ сек.

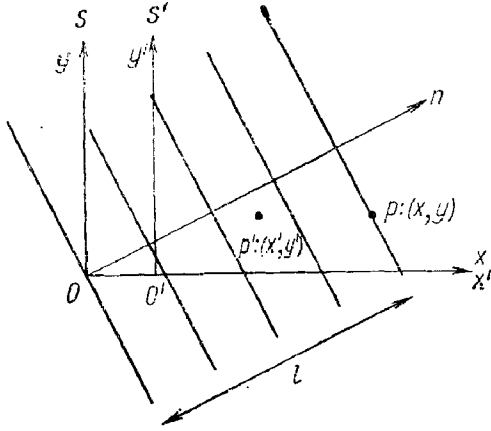


Рис. 1.

Пусть теперь система S' движется относительно S , причем обе системы совпадают в момент времени $t = 0$, когда помеченная волна проходит через их общую начальную точку. Если p' — точка в S' с координатами (x', y') такая, что p и p' совпадают

при $t = t'$, то количество волн, прошедших через точку p' с момента времени, когда помеченная волна прибыла в точку p' , до момента времени t , выражается, как и ранее, числом F . С другой стороны, это же число, сосчитанное наблюдателем в точке p' , из тех же соображений равно

$$F = v' \left(t' - \frac{l'}{c'} \right) = v' \left\{ t' - \frac{x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha'}{c'} \right\}, \quad (1.12)$$

где штрихованными буквами обозначены соответствующие физические величины, измеренные в системе S' . Таким образом, фаза F является инвариантом.

§ 1.4. Преобразование характеристик плоской волны

Связь между координатами (x, y, t) в (1.11) и координатами (x', y', t') в (1.12) дается преобразованиями Галилея (1.2), поскольку p' совпадает с p при $t' = t$. Решая (1.11) и (1.12) относительно F и исключая координаты (x, y, t) с помощью (1.2), получаем

$$v \left\{ t - \frac{[(x' + vt') \cos \alpha + y' \sin \alpha]}{c} \right\} = v' \left\{ t' - \frac{[x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha']}{c'} \right\}. \quad (1.13)$$

Это уравнение должно удовлетворяться для всех значений независимых переменных x', y', t' , но это возможно только при равенстве коэффициентов в обеих частях уравнения (1.13). Отсюда имеем

$$v' = v [1 - (v/c) \cos \alpha], \quad (1.14)$$

$$\left. \begin{aligned} v' \sin \alpha' / c' &= v \sin \alpha / c; \\ v' \cos \alpha' / c' &= v \cos \alpha / c. \end{aligned} \right\} \quad (1.15)$$

Из (1.15) следует:

$$\operatorname{tg} \alpha' = \operatorname{tg} \alpha; \quad (1.16)$$

$$\alpha' = \alpha; \quad (1.17)$$

$$v'^2 / c'^2 = v^2 / c^2. \quad (1.18)$$

Решая последнее уравнение относительно c' с учетом (1.14), находим

$$c' = c - v \cos \alpha. \quad (1.19)$$

Уравнения (1.14), (1.17) и (1.19) показывают, как изменяются все характеристики плоской волны, измеренные в координатной системе, движущейся относительно мирового эфира. Из уравнения (1.17) следует, что направление нормали одинаково в обеих инерциальных системах. С другой стороны, если $\alpha \neq \pi/2$, уравнения (1.14) и (1.19) позволяют при известных частоте и скорости определить в принципе направление движения лабораторной системы относительно эфира. Обсудим эти два вывода подробнее.

§ 1.5. Эффект Доплера

Уравнение (1.14), являющееся, по сути дела, математической формулировкой эффекта Доплера для световых волн, дает связь между частотой ν' в движущейся системе отсчета и абсолютной частотой ν , измеренной в системе отсчета, покоящейся в эфире. Если \mathbf{n} — единичный вектор в направлении нормали к фронту волны, а \mathbf{v} — вектор скорости S' относительно эфира, то (1.14) можно записать в виде

$$\nu' = \nu (1 - \mathbf{nv}/c), \quad (1.20)$$

где \mathbf{nv} — скалярное произведение двух векторов. Эффект Доплера возникает, когда наблюдатель движется относительно источника света. Однако формулу (1.20) нельзя использовать непосредственно, так как обычно и наблюдатель и источник света движутся относительно эфира. Если ν^0 — собственная частота источника света, т. е. частота, измеренная покоящимся относительно источника света наблюдателем, то по аналогии с (1.20) можно записать

$$\nu^0 = \nu (1 - \mathbf{nv}^0/c), \quad (1.21)$$

где \mathbf{v}^0 — скорость источника относительно эфира.

Исключив из (1.20) и (1.21) неизвестную абсолютную частоту ν , получим уравнение

$$\nu' = \nu^0 \frac{1 - (\mathbf{nv})/c}{1 - (\mathbf{nv}^0)/c}. \quad (1.22)$$

Частоты ν' и ν^0 , направление движения \mathbf{n} и относительная скорость $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}^0$ наблюдателя относительно источника могут быть измерены непосредственно. Тогда из (1.22) можно определить в принципе абсолютные скорости источника и наблюдателя \mathbf{v}^0 и \mathbf{v} .

Однако \mathbf{v} и \mathbf{v}^0 малы по сравнению со скоростью c , поэтому (1.22) можно разложить по v/c . Если пренебречь всеми величинами порядка малости выше v/c и \mathbf{v}^0/c , то из (1.22), вводя относительную скорость $\mathbf{v}_r = \mathbf{v} - \mathbf{v}^0$, можно получить

$$\nu' = \nu^0 \{1 - (\mathbf{nv}_r/c) - (\mathbf{nv}^0)(\mathbf{nv}_r)/c^2\}. \quad (1.23)$$

В первом приближении эффект Доплера зависит только от \mathbf{v}_r . Абсолютная скорость источника света \mathbf{v}^0 входит только в члены второго порядка малости.

Эффект Доплера наблюдается в спектрах звезд, линии в которых сдвигаются в фиолетовую или красную сторону в зависимости от того, удаляется от звезды или приближается к ней во время измерения система отсчета, связанная с Землей. Орбитальная скорость Земли равна $3 \cdot 10^4$ м/сек, как и большинство скоростей в космосе, следовательно, $v/c \approx 10^{-4}$. Эффекты второго порядка выходят за пределы точности оптических измерений.

Доплер-эффект наблюдается также при быстром движении земных источников света. Измеряя частоту излучения быстро движущихся ионизирован-

ных молекул водорода, Штарк [241] обнаружил хорошее совпадение результатов с (1.23) в первом приближении по v/c . В этих экспериментах относительная скорость v_r , а следовательно v , была порядка 10^6 м/сек, т. е. $v/c \approx 1/300$. Однако и в этом случае величины второго порядка малости все еще слишком малы, чтобы быть измеренными, поэтому опыты Штарка не позволяют определить абсолютную скорость.

Позднее, уже в тридцатых годах, опыты повторил Айвс [120] на улучшенной аппаратуре, что позволило определить величины второго порядка. Полученные при этом результаты не согласовались с (1.23), но подтвердили формулу (2.90) (см. § 2.11), полученную в рамках СТО. Величины второго порядка оказались не зависящими от направления распространения света; они зависели только от v_r . В соответствии со СТО, движение относительно эфира обнаружено не было.

Эти эксперименты были выполнены гораздо позже, и, конечно, не они оказали влияния на признание СТО, а из экспериментов Штарка еще нельзя было сделать выводов в пользу принципа относительности, хотя они ему и не противоречили.

§ 1.6. Скорость света в вакууме

Вернемся теперь к вопросу, можно ли измерениями скорости света обнаружить абсолютное движение Земли. Поскольку в (1.19) входит v ,

$$c' = c - (nv), \quad (1.24)$$

отсюда следует, что такая принципиальная возможность существует. Хорошо известные измерения скорости света, выполненные Физо [91] и Фуко в 1865 г., не обнаружили никакого влияния движения Земли на значение c . Как же понять этот фундаментальный факт с точки зрения теории эфира?

Прежде всего, следует заметить, что на самом деле измерялась не фазовая скорость волны, а групповая. Например, в опытах Физо световой сигнал посылается вдоль некоторого пути туда и обратно и измеряется промежуток времени между моментами излучения и приема сигналов. Однако скорость светового сигнала равна фазовой скорости c только тогда, когда система S покоится относительно эфира; в системе S' скорость светового сигнала уже не будет равна фазовой скорости c' (1.24). Это легко понять, если учесть, что световой сигнал — это вполне определенное количество электромагнитной энергии, а энергия, как и масса, является величиной сохраняющейся, так что световой сигнал в некотором отношении следует рассматривать здесь как материальную частицу. Следовательно, мы должны ожидать, что скорость светового сигнала в S' определяется из (1.3), (1.5) и (1.6), если положить в этих уравнениях $u = c$, т. е. скорости света в эфире.

Строгие рассуждения на основе волновой теории света подтверждают этот предварительный вывод. Из волновой теории следует, что эфир в движущейся системе координат ведет себя как анизотропная среда, откуда и следует различие между фазовой и групповой скоростями, причем последняя, действительно, определяется из (1.3). Чтобы проиллюстрировать это, используем принцип Гюйгенса, справедливый в геометрической оптике, как следствие теории электромагнетизма Максвелла. В соответствии с этим принципом каждая волновая поверхность получается как огибающая элементарных волн, испущенных из каждой точки предыдущей волновой поверхности.

Рассмотрим распространение света в системе координат S' , движущейся со скоростью v относительно системы эфира S . В S' мы «ощущаем эфирный ветер» со скоростью v , переносящий световую волну так же, как звуковую волну несет атмосферный ветер.

На рис. 2 приведена диаграмма последовательных положений световых волн в системе S' . Пусть поверхность σ изображает фронт данной световой

волны в момент времени t . Чтобы получить фронт этой волны σ_1 в момент времени $t + dt$, возьмем произвольную точку P поверхности σ , которую считаем центром испускания элементарной волны. Эта элементарная волна в момент $t + dt$ образует сферу E с центром в точке Q , которая из-за эфирного ветра лежит на расстоянии vdt от точки P в направлении ветра. Поэтому инфинитезимальный вектор \overrightarrow{PQ} равен

$$\overrightarrow{PQ} = -vdt. \quad (1.25)$$

Поскольку скорость распространения элементарной волны в эфире равна c , сфера E имеет радиус $QP_1 = cdt$. Волновой фронт σ_1 получается как огибающая всех элементарных волн; поэтому вектор $\overrightarrow{QP_1}$ перпендикулярен σ_1 в точке P_1 и в пределе, когда $dt \rightarrow 0$, перпендикулярен и фронту σ . Таким образом, вектор $\overrightarrow{QP_1}$ лежит в направлении фазовой скорости волны, отсюда

$$\overrightarrow{QP_1} = cdt = cndt, \quad (1.26)$$

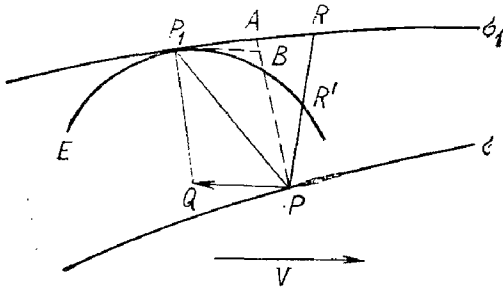


Рис. 2.

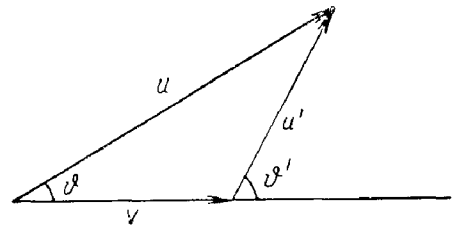


Рис. 3.

где $\mathbf{c} = \mathbf{nc}$ — вектор фазовой скорости волны в эфире. В системе S' (нормальная) фазовая скорость определяется соотношением

$$\overrightarrow{PA} = \mathbf{c}' dt = c' \mathbf{n}' dt, \quad (1.27)$$

где \mathbf{n}' — единичный направляющий вектор нормали к волне в системе S' . Из (1.17) имеем

$$\mathbf{n}' = \mathbf{n}. \quad (1.28)$$

Из формул (1.25) — (1.28) снова получаем соотношение (1.24) между c' и c , если учтем, что

$$PB = QP_1 = cdt,$$

а BA — проекция вектора $\overrightarrow{BP_1} = \overrightarrow{PQ} = -vdt$ на направление \mathbf{n} .

Относительное направление луча, т. е. направление распространения световой энергии с точки зрения наблюдателя в S' , определяется вектором $\overrightarrow{PP_1}$. Тогда, обозначив \mathbf{u}' относительную скорость луча, получим:

$$\overrightarrow{PP_1} = \mathbf{u}' dt = u' \mathbf{e}' dt, \quad (1.29)$$

где \mathbf{e}' — единичный направляющий вектор скорости. Вектор $\overrightarrow{PP_1}$ равен сумме векторов \overrightarrow{PQ} и $\overrightarrow{QP_1}$:

$$\overrightarrow{PP_1} = \overrightarrow{PQ} + \overrightarrow{QP_1}. \quad (1.30)$$

Отсюда, учитывая (1.25), (1.26) и (1.29), в пределе $dt \rightarrow 0$ получаем

$$\mathbf{u}' = \mathbf{c} - \mathbf{v}. \quad (1.31)$$

В абсолютной системе отсчета групповая скорость (скорость луча) совпадает с фазовой скоростью:

$$u = ue = c = cn, \quad (1.32)$$

т. е.

$$u = c, \quad e = n = n',$$

так что (1.31) можно представить в виде

$$u' = u - v. \quad (1.33)$$

Таким образом, мы получили теорему сложения для групповых скоростей, аналогичную теореме сложения скоростей для частиц. Если ϑ и ϑ' — углы между вектором v и направлениями абсолютной и относительной скоростей луча соответственно, то из векторного треугольника (рис. 3), учитывая, что $u = c$, имеем

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \sin \vartheta / (\cos \vartheta - v/c) \quad (1.34)$$

и

$$u'^2 + v^2 + 2vu' \cos \vartheta' = u^2 = c^2.$$

Решая это уравнение относительно u' , получаем

$$u' = (c^2 - v^2 + v^2 \cos^2 \vartheta')^{1/2} - v \cos \vartheta' = \{c^2 - v^2 + (ve')^2\}^{1/2} - (ve'). \quad (1.35)$$

Из сравнения (1.35) и (1.24) следует, что относительная групповая скорость в общем случае отличается от относительной фазовой скорости на величину порядка v/c . И только тогда, когда направление луча (направление нормали к волне) совпадает или противоположно направлению v , обе скорости одинаковы и равны $c - v$ и $c + v$ соответственно. Очевидно, что скорость, измеряемая по методу Физо и Фуко, есть групповая скорость, но, поскольку в формуле (1.35) содержится v , в принципе с помощью таких измерений можно определить абсолютную скорость Земли. Однако легко понять, почему в таких опытах не обнаружено никаких изменений в скорости света. В экспериментах Фуко и Физо луч света направлялся по известному замкнутому пути и измерялось время прохождения луча по этому пути. Луч света для увеличения этого пути многократно отражался соответствующим образом расставленными зеркалами. Пусть l_1, l_2, \dots, l_n — расстояния между зеркалами, а e'_1, e'_2, \dots, e'_n — соответствующие единичные направляющие векторы луча света; тогда, очевидно, справедливо соотношение

$$\sum_i l_i e'_i = 0, \quad (1.36)$$

поскольку луч описывает замкнутый многоугольник. Время прохождения луча по этому многоугольнику, согласно (1.35), равно

$$t = \sum_i \frac{l_i}{[\{c^2 - v^2 + (ve'_i)^2\}^{1/2} - (ve'_i)]}. \quad (1.37)$$

Разлагая это выражение в ряд по малому параметру v/c и ограничиваясь величинами первого порядка малости, получаем

$$t = \sum_i l_i/c + \sum_i l_i (ve'_i)/c^2,$$

В соответствии с формулой (1.36) все величины первого порядка в этом разложении исчезают, и, следовательно, в данном приближении имеем

$$t = \sum_i l_i/c.$$

Таким образом, в первом приближении измеряемое время оказывается таким, как если бы Земля покоилась относительно эфира. Следовательно, опре-

деление абсолютной скорости v требует измерения величин второго порядка малости. Однако методы Физо и Фуко не обладают такой точностью, и поэтому даже на основе теории эфира получается, что результаты этих опытов соответствуют принципу относительности. Гораздо позже Майкельсону удалось разработать метод, позволяющий измерять величины второго порядка малости и дать тем самым окончательное доказательство справедливости принципа относительности. Мы, однако, будем придерживаться исторической последовательности событий и вернемся к обсуждению экспериментов Майкельсона в § 1.12.

§ 1.7. Скорость света в преломляющих средах

До сих пор мы рассматривали распространение света в вакууме. Теперь предположим, что пространство заполнено изотропным прозрачным веществом с показателем преломления n . Если эта среда покоится относительно эфира, то фазовая скорость света в абсолютной системе S , в соответствии с феноменологической электродинамикой Максвелла, равна

$$c_1 = c/n; \quad n = (\epsilon\mu)^{1/2}, \quad (1.38)$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная, а μ — магнитная проницаемость. Тогда фазовая скорость c'_1 относительно движущейся системы координат по аналогии с (1.24) определяется формулой

$$c'_1 = c_1 - (nv). \quad (1.39)$$

Эта формула справедлива, если преломляющая среда покоится в абсолютной системе S . Теперь предположим, что среда движется относительно S со скоростью v , т. е. покоится относительно S' . Как в этом случае определить фазовую скорость в S' ?

Эта проблема обсуждалась неоднократно. Проще всего предположить, что формула (1.39) остается справедливой, т. е. эфир проходит сквозь среду без возмущений и не увлекается ею. Тогда в системе S' эфирный ветер имеет скорость $-v$, и можно с помощью принципа Гюйгенса тем же способом, что и в § 1.6, найти групповую скорость. Для этого достаточно в (1.35) заменить c фазовой скоростью $c_1 = c/n$:

$$u' = \{c_1^2 - v^2 + (ve')^2\}^{1/2} - (ve'). \quad (1.40)$$

По другой гипотезе, впервые выдвинутой Стоксом [244, 245], эфир полностью увлекается движущейся средой. Тогда, очевидно, имеем

$$u' = c'_1 = c/n, \quad (1.41)$$

так как эфирного ветра в системе S' нет.

Возможен третий вариант: эфир лишь частично увлекается движущейся средой, скажем, со скоростью αv , где «коэффициент увлечения» α — положительное число, меньшее единицы и зависящее от показателя преломления n . Эта гипотеза предложена Френелем [97], который, основываясь на теории упругого эфира, получил следующее выражение для коэффициента увлечения:

$$\alpha = 1 - 1/n^2. \quad (1.42)$$

По этой гипотезе скорость системы S' относительно увлеченного эфира равна $v - \alpha v = v/n^2$. Тогда вместо (1.39) получим

$$c'_1 = c_1^* - (nv)/n^2, \quad (1.43)$$

где $c_1^* = c/n$ — фазовая скорость в системе S^* , связанной с увлекаемым эфиром. Следовательно, для фазовой скорости в абсолютной системе S имеем формулу

$$c_1 = c_1^* + \alpha(vn) = c/n + (vn)(1 - 1/n^2), \quad (1.44)$$

так как система S движется со скоростью $-\alpha v$ относительно S^* .

Чтобы найти относительную групповую скорость u' по методу, изложенному в § 1.6, мы должны вместо системы S использовать систему S^* , которая играет ту же роль, что и система S в предыдущем рассмотрении. Поскольку эфирный ветер в S' имеет скорость $-v/n^2$, то по аналогии с (1.31) имеем

$$u' = c_1^* - v/n^2, \quad (1.45)$$

где вектор c_1^* с модулем $c_1^* = c/n$ есть фазовая скорость в системе S^* . Величину относительной групповой скорости получим из (1.35), заменяя c и $(-v)$ на $c_1^* = c/n$ и $(-v/n^2)$ соответственно, т. е.

$$u' = \{c_1^{*2} - v^2/n^4 + (ve')^2/n^4\}^{1/2} - (ve')/n^2. \quad (1.46)$$

В абсолютной системе S имеется эфирный ветер, движущийся со скоростью $\alpha v = (1 - 1/n^2)v$. Поэтому формулу для абсолютной групповой скорости u по аналогии с (1.45) и (1.46) можно записать в виде

$$u = c_1^* + \alpha v; u = \{c_1^{*2} - \alpha v^2 + \alpha^2 (ve)^2\}^{1/2} + \alpha (ve); \alpha = 1 - 1/n^2; c_1^* = c/n, \quad (1.47)$$

откуда, пренебрегая величинами второго порядка малости, получаем

$$u = c/n + \alpha (ve). \quad (1.48)$$

Исключая из (1.45) и (1.47) скорость c_1^* , снова получаем простую теорему сложения скоростей

$$u = u' + v. \quad (1.49)$$

При сравнении уравнений (1.43), (1.46), (1.47) и (1.44) видно, что групповая скорость совпадает с фазовой, если направление распространения света совпадает или противоположно направлению скорости v . Без всяких вычислений это следует из того факта, что в этом случае эфирный ветер несет элементарные волны в направлении светового луча. Все вышележащее справедливо и для неоднородных сред с непрерывно изменяющимся коэффициентом преломления с той лишь разницей, что система отсчета S^* , зависящая от величины n , изменяется при переходе от точки к точке неоднородной среды.

§ 1.8. Эксперименты Хука и Физо

Измерения скорости света в прозрачных средах дают еще один способ определения абсолютного движения Земли. Подобный эксперимент выполнен Хуком [115], который использовал интерферометр, схематически изображенный на рис. 4. Монохроматический луч света из источника L разделялся стек-

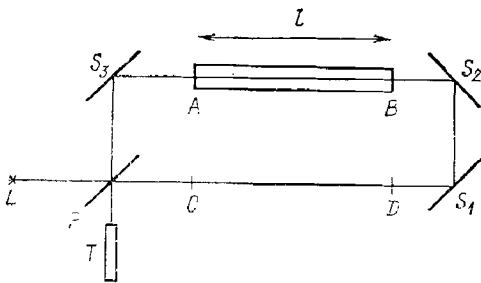


Рис. 4.

лянной (слабо посеребренной) пластиной P , расположенной под углом 45° к направлению луча, на два пучка, один из которых (луч 1) проходил через пластину, а другой (луч 2) отражался. Луч 1 с помощью зеркал S_1, S_2, S_3 направлялся по периметру прямоугольника $PS_1S_2S_3P$ и снова, частично проходя через пластину P , попадал на объектив телескопа T . Луч 2 проходил тот же самый путь в противоположном направлении и, частично отражаясь от пластины P , также попадал на объектив T , где интерферировал с лучом 1. Между S_2 и S_3 устанавливалась труба длиной l , заполненная прозрачной средой с показателем преломления n (например, водой). Даже если вся аппаратура покоится в эфире, такое устройство приводит к появлению интерференцион-

ных полос в телескопе, поскольку невозможно установить наклон зеркал с такой точностью, чтобы оба луча проходили пути с одинаковой оптической длиной. Но если все устройство движется со скоростью v относительно эфира, то возникает дополнительный сдвиг фаз ΔF между лучами 1 и 2, который можно вычислить по формулам (1.40), (1.41) или (1.46).

Для простоты предположим, что линии PS_1 и S_2S_3 параллельны скорости v движения аппаратуры относительно эфира. Результирующий сдвиг фаз обусловлен, очевидно, разностью промежутков времени t_1 и t_2 , в течение которых лучи 1 и 2, соответственно, проходят расстояние AB трубы и равное ему расстояние CD стороны PS_1 . Оставшиеся отрезки пути DS_1S_2B и AS_3PC не дают никакого вклада в ΔF , так как на этих участках оба луча совершенно эквивалентны.

Значения t_1 и t_2 зависят от степени увлечения эфира преломляющей средой. При отсутствии эффекта увлечения в соответствии с (1.40) имеем

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{(c/n)+v}; \quad t_2 = \frac{l}{(c/n)-v} + \frac{l}{c+v}.$$

Здесь значение коэффициента преломления для воздуха мы положили равным единице. Разность фаз ΔF , обусловленная лишь абсолютным движением аппаратуры, определяется выражением

$$\Delta F = v(t_2 - t_1) = 2lv \{1/[c(n)^2 - v^2] - 1/(c^2 - v^2)\}.$$

Отсюда, пренебрегая величинами высшего порядка малости относительно v/c , в первом приближении получим

$$\Delta F = \frac{2lv}{c} \cdot \frac{v}{c} (n^2 - 1). \quad (1.50)$$

Когда аппаратура покоится относительно Земли, скорость v совпадает с абсолютной скоростью Земли. Поэтому, поворачивая все устройство на угол 180° вокруг оси, перпендикулярной направлению движения Земли, получаем для разности фаз величину $-\Delta F$. Такой поворот вызовет смещение интерференционных полос, соответствующее сдвигу фаз $2\Delta F$, а поскольку ΔF , определяемая по (1.50), есть величина порядка v/c , то ее легко измерить.

Однако результат эксперимента Хука оказался отрицательным: никакого смещения интерференционных полос после поворота аппаратуры не наблюдалось. Этот результат также полностью подтверждает принцип относительности, в соответствии с которым все эффекты не должны зависеть от движения измерительных инструментов.

Поскольку точность измерений в эксперименте Хука не превышала v/c , отрицательный результат этого эксперимента не привел к серьезным трудностям для эфирной теории; он показал только, что предположение об отсутствии увлечения эфира преломляющей средой неверно. Аналогично результат эксперимента Хука отвергает гипотезу Стокса, так как в соответствии с этой гипотезой из (1.41) получаем следующее значение для ΔF :

$$\Delta F = -(2lv/c) (v/c). \quad (1.51)$$

С другой стороны, формулы (1.43) и (1.45), соответствующие коэффициенту увлечения (1.42), позволяют объяснить результат Хука. В этом случае из (1.45) и (1.46) имеем:

$$\begin{aligned} \Delta F &= v \left(\frac{l}{c/n - v/n^2} + \frac{l}{c+v} - \frac{l}{c/n + v/n^2} - \frac{l}{c-v} \right) = \\ &= 2lv \left(\frac{1}{c^2 - (v/n)^2} - \frac{1}{c^2 - v^2} \right). \end{aligned} \quad (1.52)$$

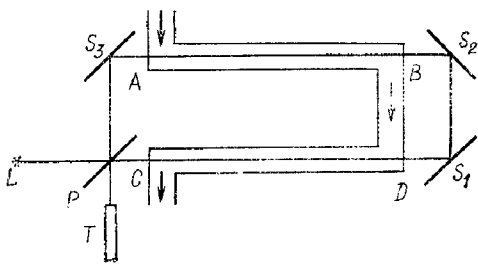


Рис. 5.

И, пренебрегая величинами порядка $(v/c)^2$ и выше, получаем нулевой результат. Таким образом, только гипотеза Френеля дает в первом приближении нулевое значение для ΔF . Поэтому опыт Хука, по крайней мере в первом приближении, можно считать экспериментальным подтверждением формулы Френеля для скорости света в движущихся средах. Несколько раньше Физо [91, 92], Майкельсон и Морли [154] получили такой же результат при измерении скорости света в движущейся воде. Методика эксперимента была во многом сходна с методом Хука (рис. 5). Различие заключалось лишь в том, что у Физо лучи 1 и 2 проходили сквозь воду как на участке S_2S_3 , так и на участке PS_1 . Как видно из рисунка, направление движения луча 2 в воде совпадало с направлением движения воды, а направление луча 1 было противоположным движению воды. Физо сравнивал положения интерференционных полос, когда вода покоилась в трубе и когда текла с большой скоростью. При этом результирующий сдвиг полос можно было измерить.

Из эксперимента Хука известно, что движение Земли относительно эфира дает эффект лишь второго порядка, поэтому при вычислениях можно считать, что аппаратура покоится в абсолютной системе S . Тогда в (1.48) вектор v равен скорости движения воды в трубе. Поскольку вектор e на участках AB и CD параллелен v , из (1.48) имеем

$$\Delta F = lv \{ [c/n - v(1 - 1/n^2)]^{-1} - [c/n + v(1 - 1/n^2)]^{-1} \} = (2lv/c^2)(n^2 - 1), \quad (1.53)$$

где l — общее расстояние, которое луч света проходит в воде. Результаты измерений фазового сдвига в опыте Физо полностью соответствовали формуле (1.53).

§ 1.9. Электронная теория Лоренца

Результаты рассмотренных экспериментов можно считать убедительным доказательством справедливости формул Френеля (1.42)—(1.48), по крайней мере в первом приближении.

Однако вывод этих формул для сред с показателем преломления, зависящим от частоты света, на основе примитивной теории эфира встречается с серьезными трудностями. Поскольку коэффициент увлечения α в (1.42) есть функция от n , то увлечение эфира зависит не только от свойства движущейся среды, но также и от частоты. Строго говоря, для каждой длины волны (цвета) светового сигнала нужно рассматривать отдельный эфир, что, конечно, сделать невозможно.

В этом заключается трудность как для механической теории эфира Френеля, так и для максвелловской феноменологической теории, в которой эфир является системой отсчета, где справедливы уравнения Максвелла. Фактически, вследствие зависимости эффекта увлечения от частоты, невозможно определить ту систему отсчета, в которой была бы справедлива электродинамика Максвелла.

Эта трудность связана с тем, что коэффициент преломления в этой теории — постоянная величина, равная $(\epsilon\mu)^{1/2}$, что никак не объясняет явление дисперсии. Удовлетворительное объяснение дисперсии и эффекта увлечения дано Лоренцем в его электронной теории [149] (см. также Розенфельд [211]). В соответствии с теорией Лоренца, эфир вообще не увлекается преломляющей средой и всегда покоится в определенной инерциальной системе — абсолютной системе. Предполагается, что материальная среда состоит из атомов, которые содержат в себе как положительно, так и отрицательно заряженные

чистицы. Положительные частицы составляют практически всю массу атома, а отрицательные частицы (электроны) очень легкие по сравнению с положительными. Под действием электромагнитных полей в световых волнах электроны совершают вынужденные колебания около положения равновесия. Поэтому электроны сами испускают электромагнитные волны, интерферирующие с падающими волнами таким образом, что эффективная скорость света в покоящейся среде становится равной c/n вместо c .

Отсюда следует, что коэффициент n в общем случае зависит от соотношения между частотой падающей волны и собственной частотой электрона. Более того, Лоренц смог показать, что равномерное движение среды так изменяет волны, испущенные колеблющимися электронами, что эффективная фазовая скорость света в движущейся среде определяется в первом приближении формулами Френеля (1.43) и (1.44).

Таким образом, при изучении распространения света в преломляющих веществах электронная теория Лоренца дает, по крайней мере в первом приближении, те же результаты, что и теория Френеля, однако уже без тех серьезных возражений, которые могут возникнуть при выводе формул Френеля. Она даже допускает более точную формулировку выражения (1.44) теории Френеля. Поскольку показатель преломления n в диспергирующей среде зависит от частоты ν , а частоты вследствие доплер-эффекта различны в системах S и S' , необходимо уточнить то значение для частоты ν , тем самым, такое n , которые следует подставлять в формулу (1.44). Лоренц смог показать, что необходимо подставлять значение $n(\nu')$, где ν' — частота в системе S' , движущейся вместе с преломляющей средой, в то время как n — функция от частоты, измеренной в преломляющей среде, покоящейся относительно эфира.

Мы не будем углубляться дальше в теорию Лоренца, так как во второй главе все упомянутые выше результаты получим более просто с помощью СТО. Отметим только, что в первом приближении формулы Френеля (1.42)—(1.48) являются следствием электронной теории. В следующем параграфе мы используем эти формулы, чтобы показать, что для всех оптических эффектов первого порядка эфирная теория в форме, данной Лоренцем, приводит к результатам, соответствующим принципу относительности.

§ 1.10. Соответствие между теорией эфира и принципом относительности для всех эффектов первого порядка. Принцип Ферма

Согласно принципу относительности путь светового луча, соединяющего две фиксированные точки на поверхности Земли, совершенно не зависит от ее абсолютного движения. Это должно быть справедливо по крайней мере приближенно, иначе было бы невозможно получать устойчивые оптические изображения предметов. Если бы прохождение луча сквозь систему линз оптических инструментов заметно зависело от абсолютного движения Земли, то получаемое при этом изображение изменялось бы во времени. Однако такой эффект никогда не наблюдался.

Лоренц [149] показал, что этот факт можно объяснить, основываясь на электронной теории, если предположить, что все эффекты второго порядка слишком малы и не поддаются измерению. Этот результат теории Лоренца тем более удивителен, если учесть, что относительная групповая скорость u' в первом приближении существенно зависит от абсолютной скорости v . Так, пренебрегая в (1.46) всеми членами высшего порядка начиная со второго, получаем

$$u' = c/n - (v \cdot e')/n^2. \quad (1.54)$$

Чтобы построить путь луча, снова рассмотрим рис. 2 (с. 17). В соответствии с (1.29) имеем

$$\overrightarrow{PP_1} = u' e' dt,$$

где u' определяется выражением (1.54), а e' — единичный вектор относительного направления луча, проходящего через точку P . Теперь вместо (1.25) и (1.26) имеем

$$QP_1 = cdt/n \quad \text{и} \quad \vec{PQ} = -vdt/n^2,$$

где n — показатель преломления среды в рассматриваемой точке, причем в данном случае система S^* , покоящаяся в «увлеченном» эфире, играет ту же роль, что и «абсолютная» система S в вакууме. Назовем две точки P и P_1 , лежащие на одном луче и на последовательных волновых поверхностях σ и σ_1 , сопряженными точками. Тогда построение траектории светового луча сводится, очевидно, к определению сопряженных точек на последовательных волновых поверхностях. Рассмотрим на σ и σ_1 две произвольные точки, определим расстояние между ними ds с направляющим вектором e' и обозначим величину ds/u' , где u' берется из (1.54). Если эти две точки сопряженные, подобно точкам P и P' на рис. 2, то $ds/u' = dt$, где dt — время перемещения фронта из положения σ в положение σ_1 . Если же две точки несопряженные, как, например, точки P и R (см. рис. 2), то ds/u' всегда больше dt . В этом случае $dt = PR'/u'$, где R' — точка пересечения элементарной волны E с отрезком PR , и поскольку $PR > PR'$, то $ds > u'dt$.

Пусть A и B — две фиксированные точки в преломляющей среде. Рассмотрим интеграл

$$\int_A^B ds/u' \quad (1.55)$$

вдоль произвольной кривой, соединяющей эти точки, где u' — относительная групповая скорость (1.54) в точках кривой AB . В соответствии с вышесказанным полагаем, что интеграл (1.55) принимает минимальное значение, когда кривая AB совпадает со световым лучом, проходящим через точки A и B , так как только в этом случае любой элемент ds кривой соединяет сопряженные точки.

Таким образом, луч между двумя произвольными точками A и B определяется из условия минимума интеграла (1.55), а поскольку интеграл равен времени прохождения луча из точки A в точку B , то это условие тождественно *принципу Ферма*, который, как видим, есть следствие принципа Гюйгенса.

С помощью (1.54) в первом приближении получим

$$1/u' = 1/[c/n - (ve')/n^2] = n/c + (ve')/c^2, \quad (1.56)$$

откуда

$$\int_A^B ds/u' = (1/c) \int_A^B nds + (1/c^2) \left(v \int_A^B ds \right), \quad (1.57)$$

где $ds = e'ds$ — инфинитезимальный вектор, соединяющий две сопряженные точки кривой AB . Последний член в (1.57) равен проекции кривой AB на направление v , умноженной на v/c^2 , и эта проекция одинакова для всех кривых, связывающих фиксированные точки A и B .

Следовательно, при варьировании интеграл (1.55) можно заменить интегралом

$$\int_A^B ds/u' = \int_A^B nds/c. \quad (1.58)$$

Это выражение равно времени прохождения светового луча из точки A в точку B преломляющей среды, покоящейся в эфире. Поэтому в первом приближении распространение света одинаково как в движущейся, так и в покоя-

щейся среде, что соответствует принципу относительности. Если на пути луча в покоящейся среде расположить экраны с малыми отверстиями, то луч пройдет через эти отверстия и в том случае, если вся аппаратура движется с постоянной скоростью.

Из эксперимента Хука следует, что интерференция света, по крайней мере в первом приближении, не зависит от абсолютного движения Земли. В последующих экспериментах также не было обнаружено никакого влияния абсолютного движения Земли на интерференционную картину. Хотя все эти результаты согласуются со специальным принципом относительности, Лоренц показал [149], однако, что их можно легко объяснить также и на основе эфирной теории, если предположить, что эффекты второго порядка малости лежат за пределами точности измерений.

Рассмотрим произвольный интерференционный эксперимент с аппаратурой, покоящейся в системе S' , которая движется вместе с Землей. В подобных экспериментах всегда используются два луча, 1 и 2, которые испускаются из одной точки A и, следуя различными путями, приходят в точку B один позже другого. Время t_1 прохождения из точки A в точку B луча 1 и время t_2 луча 2 согласно (1.57) определяется по формулам:

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= \int_I ds/u' = \int_I (n/c) ds + (1/c^2) \left(\mathbf{v} \int_I d\mathbf{s} \right); \\ t_2 &= \int_{II} ds/u' = \int_{II} (n/c) ds + (1/c^2) \left(\mathbf{v} \int_{II} d\mathbf{s} \right), \end{aligned} \right\} \quad (1.59)$$

где интегралы вычисляются по соответствующим траекториям лучей I и II. Поскольку конечные точки интегрирования для обоих лучей совпадают, последние члены в (1.59) равны, а разность $t_1 - t_2$ определяется выражением

$$\Delta t = t_1 - t_2 = \int_I (n/c) ds - \int_{II} (n/c) ds. \quad (1.60)$$

Таким образом, значение Δt такое же, как и в случае покоящейся относительно эфира аппаратуры. Отсюда следует, что разность фаз лучей 1 и 2 в точке B , определяемая произведением Δt на частоту, не изменяется при повороте всей аппаратуры на 180° , приводящем к противоположной ориентации аппаратуры относительно направления движения Земли. Поэтому такой поворот (в первом приближении) не вызывает никакого сдвига интерференционных полос.

§ 1.11. Аберрация света

В предыдущих параграфах мы видели, что направление движения светового луча, по крайней мере в первом приближении, не зависит от абсолютного движения источника света и наблюдателя. Однако направление луча существенно зависит от скорости источника относительно наблюдателя. Это явление, называемое *абберацией*, впервые наблюдал в 1727 г. Брэдли [34], который заметил, что все звезды совершают совместное годовое движение по небу. Это кажущееся движение вызывается тем, что наблюдаемое направление светового луча, испущенного звездой, зависит от скорости Земли относительно звезды. Чтобы найти величину абберации, рассмотрим находящуюся вне атмосферы Земли точку P' , неподвижную относительно системы отсчета S' , движущейся вместе с Землей. Согласно вышеизложенному, абберация зависит только от относительной скорости звезды и наблюдателя. Поэтому для простоты можно предположить, что звезда покоится в абсолютной системе S . Теперь рассмотрим луч света, испущенный звездой и проходящий через точку P' . Абсолютное направление луча определяется тем направлением, в котором наблюдалась бы звезда, если бы Земля покоилась относительно эфира, а относительное направление определяется кажущимся положением звезды.

Поскольку для точки P' показатель преломления равен единице, соотношение между абсолютным и относительным направлением луча определяется формулой (1.34). Пусть θ и θ' — углы между направлением движения Земли и действительным и кажущимся направлениями на звезду. Тогда $\vartheta = \pi + \theta$ и $\vartheta' = \pi + \theta'$ и из формулы (1.34) получим

$$\operatorname{tg} \theta' = \sin \theta / (\cos \theta + v/c). \quad (1.61)$$

Поскольку путь луча от точки P' к телескопу на Земле в первом приближении не зависит от движения Земли, то на этом пути свет не подвергается последующей аберрации. Это верно даже при прохождении луча сквозь сильно преломляющее вещество, например, даже если телескоп заполнен водой. Подобный эксперимент выполнил Эйри [9, 10, 11], который показал, что аберрация не изменяется в присутствии воды.

§ 1.12. Эксперимент Майкельсона

Результаты всех рассмотренных нами экспериментов соответствовали постулату относительности, однако точность измерений (за исключением эксперимента Айвса, выполненного значительно позже) была недостаточна для учета эффектов второго порядка малости и выше. В таком приближении электронная теория Лоренца, основанная на концепции абсолютного эфира, со-

гласовывалась с постулатом относительности. Движение Земли относительно эфира, в соответствии с теорией Лоренца, приводило к эффектам лишь второго порядка малости. Поэтому для решающей экспериментальной проверки справедливости принципа относительности чрезвычайно важно было найти способ измерения этих эффектов. Это было сделано в 1881 г. Майкельсоном [153, 155], который измерял скорость света с помощью интерферометра, схематически изображенного на рис. 6. Полупрозрачной посеребренной пластиной P луч света из источника L разделялся на два перпендикулярных луча 1 и 2. Первый луч, пройдя сквозь пластину, отражался зеркалом S_1 обратно на эту пластину, где опять частично отражался и попадал в телескоп T . Второй луч отражался зеркалом S_2 и также попадал в теле-

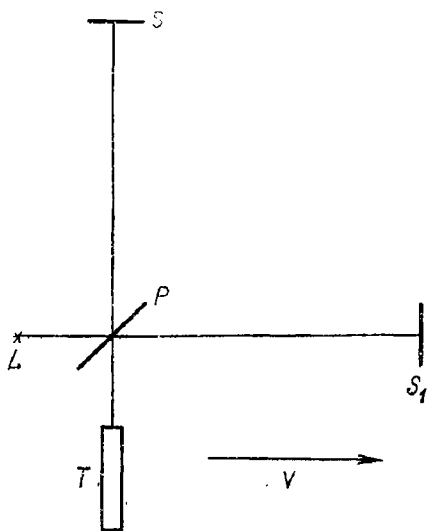


Рис. 6.

скоп T , где интерферировал с лучом 1. Если даже аппаратура и покоится относительно эфира, в телескопе и в этом случае должны наблюдаться интерференционные полосы.

Теперь предположим, что отрезок PS_1 параллелен направлению движения Земли в эфире и имеет одинаковую с отрезком PS_2 длину l . По формуле (1.35) легко вычислить разность фаз ΔF лучей 1 и 2, обусловленную движением аппаратуры в эфире. Пусть t_1 — время прохождения луча 1 от P до S_1 и обратно, тогда

$$t_1 = \frac{l}{c-v} + \frac{l}{c+v} = \frac{2l}{c} \cdot \frac{1}{1-v^2/c^2}, \quad (1.62)$$

так как \mathbf{e}' параллелен скорости \mathbf{v} . Аналогично находим время t_2 , необходимое лучу 2 для прохождения от P до S_2 и обратно, и поскольку в этом случае вектор \mathbf{e}' всегда перпендикулярен вектору \mathbf{v} ,

$$t_2 = 2l (c^2 - v^2)^{-1/2}. \quad (1.63)$$

Обрасывая величины высшего порядка малости по сравнению со вторым, получаем искомую разность фаз ΔF

$$\Delta F = \nu(t_1 - t_2) = \nu l v^2 / c^3. \quad (1.64)$$

При повороте всего прибора на угол 90° так, чтобы отрезок PS_2 стал параллельным ν , разность фаз становится равной $-\Delta F$. Следовательно, такой поворот вызывает сдвиг интерференционных полос, соответствующий разности фаз $2\Delta F$.

По расчетам сдвиг интерференционных полос, вызванный разностью фаз $2\Delta F$, ожидался равным одной трети расстояния между полосами, но, несмотря на то, что аппаратура позволяла измерить сдвиг в сто раз меньший, никакого эффекта обнаружено не было. Таким образом, здесь мы впервые встретились с экспериментом, указывающим на то, что принцип относительности справедлив по крайней мере с точностью до малых второго порядка*.

§ 1.13. Гипотеза о сокращении

Результат эксперимента Майкельсона привел к большим трудностям для гипотезы эфира. Майкельсон сам пытался объяснить отсутствие эффекта полным увлечением эфира Землей в ее движении вокруг Солнца. В этом случае на поверхности Земли, полагал Майкельсон, не должно быть никакого эфирного ветра, но он может наблюдаться на больших высотах. Поэтому Майкельсон повторил эксперимент на вершине горы и опять получил отрицательный результат. Такое предположение противоречило также всем оптическим опытам и электронной теории Лоренца, согласно которым увлечение эфира происходит лишь частично внутри преломляющей среды.

Чтобы объяснить отсутствие влияния движения Земли на результаты эксперимента Майкельсона, Лоренц [146] и Фицджеральд [145] независимо друг от друга выдвинули гипотезу о *сокращении любого твердого тела, движущегося со скоростью v в направлении движения*, причем относительное сокращение равно $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Тогда в эксперименте Майкельсона длина отрезка PS_1 равна не l , а $l(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, в то время как длина отрезка PS_2 остается неизменной, поскольку PS_2 составляет прямой угол с направлением движения аппаратуры. Отсюда вместо (1.62) для величины t_1 получаем формулу

$$t_1 = 2l(c^2 - v^2)^{-1/2} = t_2, \quad (1.65)$$

так как t_2 определяется из (1.63). В этом случае разность фаз ΔF становится равной нулю, в полном согласии с экспериментом Майкельсона.

Согласно этой странной гипотезе, стержень, имеющий длину l_0 , если он перпендикулярен направлению движения Земли, имеет более короткую длину

$$l = l_0(1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (1.66)$$

если он параллелен направлению движения Земли. Конечно, на Земле это укорочение измерить невозможно, так как все тела, в том числе и измерительная линейка, сокращаются в одинаковой степени. Только внеземной наблюдатель, неподвижный относительно эфира, сможет, в принципе, наблюдать такое укорочение и обнаружить, что сама Земля и все предметы на ней сокращаются в направлении движения Земли.

Гипотеза о сокращении кажется слишком неправдоподобной с первого взгляда, но, как подчеркивал Лоренц [149], ее нельзя избежать в рамках концепции абсолютно неподвижного эфира. С этой точки зрения результат Майкельсона с таким же основанием может рассматриваться прямым доказательством гипотезы о сокращении, с каким сдвиг интерференционных полос

* Результаты Майкельсона позже были подтверждены несколькими исследователями [124, 119]. В противоположность этим результатам Миллер [159] обнаружил малый эффект (опровергнутый позднее — Прим. ред.).

при нагревании определенных частей аппаратуры является доказательством изменения длины ее нагретых частей.

Чтобы сделать гипотезу о сокращении более приемлемой, Лоренц предпринял попытку объяснить ее на основе электронной теории. Ему действительно удалось дать правдоподобное объяснение формулы (1.66). Предполагая, что все материальные тела состоят из электрических заряженных частиц, которые держатся вместе лишь посредством электростатических сил, он смог показать, что положение равновесия частиц в таких чисто электростатических системах изменяется в соответствии с (1.66) при движении системы как целого с постоянной скоростью v относительно эфира. Сложность заключалась лишь в предположении, что частицы удерживаются вместе исключительно электрическими силами, которое вряд ли справедливо для реальных тел. В частности, трудно объяснить, как удерживается заряд внутри одного электрона, если не вводить дополнительно силы притяжения неэлектрической природы. Поэтому предположение о справедливости формулы (1.66) для одного электрона, что и сделал Лоренц, следует рассматривать как новую гипотезу, не являющуюся следствием самой электронной теории. Таким образом, лоренцево сокращение следует рассматривать как основное и универсальное явление, лежащее в основе фундаментальных законов природы.

§ 1.14. Справедливость принципа относительности для всех физических явлений

Эксперимент Майкельсона был лишь первой из многочисленных попыток определения движения Земли относительно эфира. Все эти эксперименты, в которых были использованы как оптические, так и электромагнитные устройства, дали отрицательный результат. Следовательно, никакое физическое явление не должно зависеть от движения Земли. В конечном счете, не может быть сомнений, что принцип относительности справедлив не только для механических явлений, но и для оптических и электромагнитных явлений.

Мы не будем здесь детально обсуждать все эти эксперименты, ограничившись экспериментом Айвса, упоминавшимся в § 1.5. Айвс показал, что доплер-эффект во втором приближении также зависит лишь от скорости источника света относительно наблюдателя, что соответствует принципу относительности (см. также более поздние эксперименты, рассмотренные в § 12.1). Этот факт, а также результаты других упоминавшихся ранее экспериментов невозможно объяснить на основе эфирной теории, даже дополнив ее гипотезой о сокращении; формула (1.22) не содержит величин с размерностью длины. Следовательно, гипотеза о сокращении, имеющая дело с длинами, не может привести формулу (1.22) в соответствие с результатом Айвса.

Позже Лоренц [149] исследовал проблему: какие еще гипотезы, наряду с гипотезой о сокращении длин, следует добавить к эфирной теории, чтобы все предсказания этой теории соответствовали принципу относительности, уже подтвержденному экспериментами. Он нашел, что в каждой инерциальной системе необходимо использовать специальное время, так называемое местное время, отличное от времени в абсолютной системе эфира. Согласно гипотезе о сокращении, длина метрической линейки зависит от абсолютной скорости рассматриваемой системы отсчета. Аналогично темп хода часов (а поэтому и единица времени) зависит, в соответствии с новой гипотезой, от движения инерциальной системы. Если основные уравнения электронной теории в каждой движущейся инерциальной системе записать в терминах местного времени и собственных пространственных переменных, то они будут иметь одинаковый вид в любой инерциальной системе. Поэтому все электромагнитные явления не зависят от движения системы отсчета. С помощью этих новых гипотез удалось на некоторое время сохранить концепцию абсолютного эфира, пока Эйнштейн [65] не пришел к выводу, что результаты всех рассмотренных выше экспериментов поколебали сами основы теории эфира.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ КИНЕМАТИКА

§ 2.1 Одновременность событий

Бесплодные попытки обнаружить влияние движения Земли на механические, оптические и электромагнитные явления привели физиков к убеждению о справедливости принципа относительности для всех физических процессов. Полностью изменилась сама основа нашего описания природы, ибо как только была осознана универсальность принципа относительности, упоминавшаяся в § 1.2, концепция абсолютной системы отсчета, связанной с неподвижным эфиром, потеряла всякое физическое значение. Любые физические процессы протекают одинаковым образом во всех инерциальных системах и никаким экспериментом невозможно обнаружить среди них абсолютную систему отсчета. Все инерциальные системы становятся полностью эквивалентными, и для любой удовлетворительной теории необходимо потребовать, чтобы она приводила к одинаковым результатам во всех таких системах отсчета. Эйнштейн [65—68] первый сформулировал эту новую точку зрения в своей фундаментальной работе 1905 г. [65] и показал ее следствия. (См. о вкладе Пуанкаре стр. 392—Прим. ред.)

Поскольку основные уравнения электродинамики — уравнения Максвелла — справедливы в любой инерциальной системе, скорость света в вакууме должна иметь одинаковое значение $c = 3 \cdot 10^8$ м/сек во всех инерциальных системах отсчета. Это, конечно, противоречит той кинематической концепции, которая вытекает из повседневного опыта и выражается в форме закона сложения скоростей (1.3). Новая точка зрения на законы природы, установившаяся в результате многочисленных прецизионных экспериментов и выраженная в форме принципа относительности, заставляет нас пересмотреть эту кинематическую концепцию, считавшуюся ранее *a priori* справедливой. Эйнштейн смог показать, что более тщательный анализ методов измерения скорости, т. е. обсуждение методов, при помощи которых можно реально произвести это измерение, позволяет однозначно, точно и ясно описать все физические процессы в соответствии с принципом относительности.

Рассмотрим инерциальную систему отсчета, в которой световой сигнал из точки A передается прямолинейно в точку B . Скорость сигнала определяется отношением расстояния между точками к времени его прохождения. Измерение расстояний не представляет затруднений, но определение разницы во времени между моментами испускания сигнала в точке A и его приемом в точке B при более тщательном размышлении оказывается не столь простой задачей.

В самом деле, если время испускания сигнала t_1 отсчитывается по часам в точке A , а время приема t_2 — по часам в точке B , то разность $t_2 - t_1$ дает действительное время распространения сигнала из A в B только при одинаковом темпе хода обоих часов. Поэтому необходимо, чтобы стрелки обоих часов начали ход одновременно из одного положения. Но как быть уверенным, что два события в разных местах происходят одновременно?

Существует несколько способов синхронизации часов в точках A и B .

Можно, например, взять еще одни часы, завести по часам A , перенести из A в B и по ним отрегулировать часы B или же использовать временной сигнал, посылая его из A в B . Рассмотрим сначала последний метод, практически более

точный. Предположим, что временной сигнал посылается из A в нулевой момент времени по часам A . В повседневной жизни часы в B устанавливаются на нуль, когда временной сигнал прибывает в эту точку. При этом допускается неточность из-за конечности скорости распространения временного сигнала. Для точности часы B к моменту прибытия сигнала нужно установить в положение l/u , где l — расстояние AB , а u — скорость временного сигнала. При выполнении этой коррекции необходимо знать скорость распространения временного сигнала, но измерение скорости включает в себя, как сказано выше, синхронизацию часов в двух различных точках, для чего как раз и предназначался временной сигнал.

Аналогичная ситуация возникает при установке часов в A и B с помощью третьих часов, транспортируемых из A в B . В этом случае третьи часы нужно скорректировать, учитывая влияние их собственного движения, но для экспериментального исследования этого влияния нужно заранее синхронизировать часы в A и B . Опять получается порочный круг.

Таким образом, во всех методах синхронизации часов встречаются одни и те же трудности. Понятие одновременности двух событий в разных местах не имеет, очевидно, точного объективного смысла, поскольку не существует экспериментальных методов, устанавливающих эту одновременность. Это справедливо и при исследовании понятия скорости. Как подчеркивал Эйнштейн, необходимо сначала точно определить понятие одновременности. Но при этом мы обладаем некоторой свободой, и, как увидим далее, можно воспользоваться таким определением понятия одновременности, чтобы скорость света равнялась c во всех инерциальных системах отсчета.

§ 2.2. Относительность одновременности

Предположим, что мы находимся в некоторой инерциальной системе отсчета I , и в нашем распоряжении имеется большое количество стандартных часов, которые отсчитывают одинаковое время, если покоятся в одном и том же месте. Разместим эти часы в системе I везде, где нужно измерять время. Для синхронизации часов используем световые сигналы, поскольку законы распространения света достаточно хорошо известны из экспериментов.

Например, опыт Физо и другие аналогичные эксперименты показали, что световой луч проходит по периметру замкнутого многоугольника за время, равное отношению периметра многоугольника к универсальной константе c , входящей в уравнения Максвелла. Это время, независимо от определения одновременности, можно измерить обыкновенными часами, помещенными в фиксированной точке многоугольника, а периметр — измерительной линейкой, покоящейся в системе I .

Для синхронизации часов, размещенных в различных точках системы I , выберем в качестве центра синхронизации некоторую точку O этой системы, из которой будем испускать во все стороны световые сигналы. Пусть часы в точке O в момент испускания сигнала показывают время t_0 , в момент прихода сигнала в некоторую точку P часы в P поставим на время $t_0 + l_0/c$, где l_0 — расстояние OP , измеренное неподвижной измерительной линейкой. При этом все часы в системе I размещены определенным образом. Говорят, что два события в точках P и P_1 произошли одновременно, если часы в этих точках показывают одинаковое время. Такое определение одновременности является корректным, если можно показать, что в нем нет противоречий, для чего необходимо выполнение двух условий.

1. Сигнал, испущенный из точки O в момент времени $t_0 + \tau$ (на τ сек позже синхронизирующего сигнала), придет в точку P , когда часы в P покажут время $t_0 + l_0/c + \tau$, т. е. также на τ сек позже. Это значит, что метод синхронизации часов не зависит от времени регулировки.

2. Способ синхронизации не зависит от выбора точки (центра синхронизации).

Первое условие всегда выполняется, поскольку все точки в инерциальной системе эквивалентны, так что двое стандартных часов, идущих в одном темпе в точке O , будут идти в том же темпе, если их поместить в разных точках O и P . Что касается второго условия, что нужно лишь показать, что световой сигнал, испущенный из произвольной точки P_1 в момент времени t_1 по часам в этой точке, прибывает в другую произвольную точку P , когда часы в этой точке покажут время

$$t = t_1 + l/c, \quad (2.1)$$

где l — расстояние P_1P .

Для доказательства предположим, что время отправления сигнала t_1 совпадает со временем прибытия в P сигнала синхронизации из точки O , т. е.

$$t_1 = t_0 + l_1/c. \quad (2.2)$$

Если сигнал, посланный из P_1 , по прибытии в точку P сразу посылается в точку O , то время его прибытия t_2 , в соответствии с данными экспериментов (опыт Физо и др.), определится из выражения

$$t_2 = t_0 + (l_1 + l + l_0)/c, \quad (2.3)$$

поскольку световой сигнал прошел периметр замкнутого многоугольника (треугольника) $l_1 + l + l_0$ (рис. 7). К моменту прихода сигнала из точки P_1

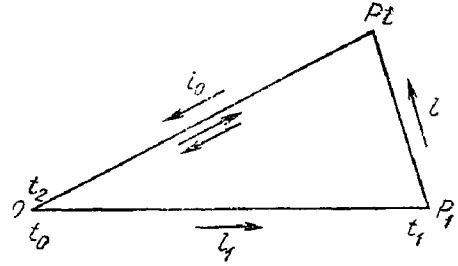


Рис. 7.

в точку P часы в P показывали время t , а когда в точку P пришел синхронизирующий сигнал из точки O , то эти часы были поставлены на время $t_0 + l_0/c$. Если этот сигнал отразится и придет обратно в точку O , то, в соответствии с опытом Физо, часы в O покажут время $t_0 + 2l_0/c$. Однако сигнал из точки P_1 в P придет на $\tau = t - (t_0 + l_0/c)$ сек позже первоначального сигнала, посланного из точки O , и, в соответствии с первым предположением, он придет в точку O также на τ сек позже, т. е. в момент времени

$$t_2 = t_0 + 2l_0/c + \tau = t + l_0/c. \quad (2.4)$$

Данное значение t_2 должно совпадать с t_2 , полученным по формуле (2.3). Тогда из (2.3), (2.4) и (2.2) следует:

$$t = t_0 + (l_1 + l)/c = t_1 + l/c,$$

что и требовалось доказать [см. (2.1)].

Таким образом, используемый здесь метод синхронизации не зависит от выбора центра синхронизации. Наряду с этим мы установили определенный способ регистрации последовательных событий в инерциальной системе I . Мы говорим, что некоторое событие в точке P произошло в момент времени t , если стандартные часы, помещенные в этой точке, в момент наступления данного события в точке P показывают время t . Кроме того, мы имеем теперь точный смысл понятия скорости, и, в частности, скорость света, которая, как оказалось, имеет значение c для любого направления; точно показано, что световой сигнал, испущенный из точки P_1 в момент времени t_1 , прибывает в другую произвольную точку P в момент времени $t_1 + l/c$, где l есть расстояние P_1P .

Рассмотрим другую произвольную инерциальную систему I' . Предположим, что в этой системе также размещено большое количество часов, аналогичных часам системы I . Эти часы синхронизируются с помощью световых сигналов, испускаемых из точки O' системы I' , тем же способом, что и часы в системе I . Все расстояния измеряются покоящейся относительно I' измерительной линейкой того же типа, что и линейка в I . Это означает, что обе линейки имеют одинаковую длину, когда они покоятся относительно друг друга.

Согласно принципу относительности, опыт Физо дает в системе I' тот же результат, что и в системе I , откуда следует, что описанный выше метод синхронизации часов обеспечивает непротиворечивое определение времени и для системы I' . Скорость света и в системе I' будет одинаковой во всех направлениях и определяться той же величиной c . Здесь также будем говорить, что событие в точке P' системы I' произошло в момент времени t' , когда часы в точке P' показывают время t' . В общем случае t' отлично от момента времени t , когда то же самое событие наблюдается в системе I . Два события в двух разных точках системы I' называются одновременными, если они произошли в один момент времени t' по часам системы I' .

Следовательно, понятие одновременности потеряло свой абсолютный смысл, поскольку два одновременных события в системе I для наблюдателя в I' уже не будут одновременными.

Рассмотрим, например, два события в двух точках A и B системы I . Поскольку скорость света в любом направлении равна c , для одновременности двух событий достаточно потребовать, чтобы световые сигналы, испущенные из точек A и B навстречу друг другу в момент наступления этих событий, пришли в среднюю точку C отрезка AB одновременно. Этот критерий одновременности двух событий справедлив и для системы I' . Пусть отрезок AB расположен параллельно вектору скорости \mathbf{v} движения системы I' относительно I . Рассмотрим точки A' и B' , совпадающие с точками A и B в момент наступления этих событий. Одновременно (относительно системы I) и центральная точка C' отрезка $A'B'$ совпадает с точкой C . Но так как точка C' вместе с системой I' движется относительно I со скоростью \mathbf{v} , то в момент встречи световых сигналов в точке C' уже не будет совпадать с C . Это означает, что световые сигналы не встретятся в C' , и, согласно определенному выше критерию одновременности, два события, одновременные в системе I , в системе I' уже не будут одновременными.

Следовательно, понятие одновременности двух событий в различных точках пространства имеет точный смысл только в данной инерциальной системе отсчета. И только приближенно, когда скорость света можно считать бесконечно большой по сравнению со всеми остальными скоростями, можно говорить об абсолютной одновременности событий, независимо от движения наблюдателя. Такая аппроксимация совершенно удовлетворительна как для повседневной жизни, так и для многих физических процессов. Этим объясняется глубоко укоренившееся убеждение в существовании абсолютного времени и абсолютной одновременности.

§ 2.3. Специальные преобразования Лоренца

Событие в точке P инерциальной системы I можно охарактеризовать четырьмя величинами: тремя пространственными координатами точки P и временем t . Эти четыре величины называются пространственно-временными координатами события. Если в системе I пользоваться декартовыми координатами, то пространственно-временные координаты события суть (x, y, z, t) , причем $\mathbf{x} = (x, y, z)$ — декартовы координаты точки P . Координаты (x, y, z) определяются путем измерения длин проекций вектора \mathbf{x} на декартовы оси с помощью стандартной измерительной линейки, покоящейся в системе I , а время t отсчитывается по стандартным часам, покоящимся в точке P .

Именно таким способом с данной инерциальной системой мы связываем определенную пространственно-временную систему координат S . Когда дана система S , то система отсчета, т. е. инерциальная система I , полностью определена.

С другой стороны, для данной системы отсчета I можно использовать различные системы пространственно-временных координат, например полярные координаты. Однако в специальной теории относительности обычно используются системы координат лишь упомянутого выше типа, поэтому нет необ-

ходимости делать различие между системой отсчета и системой координат. Совсем иное положение в общей теории относительности, где необходимо различать систему отсчета и систему координат, используемую для фиксации событий в данной системе отсчета (рис. 8).

Событие в другой инерциальной системе также можно охарактеризовать четырьмя координатами (x', y', z', t') , определяющими систему координат S' . Эти координаты находятся тем же способом, что и для системы S . Наша основная задача — найти соответствие между координатами (x, y, z, t) системы S и координатами (x', y', z', t') системы S' данного события, т. е. найти закон преобразования координат, соответствующий преобразованиям Галилея (1.1) в нерелятивистской кинематике. Поскольку любое равномерное прямолинейное движение относительно системы S остается таковым и для системы S' , то переменные (x', y', z', t') должны быть линейными функциями от переменных (x, y, z, t) . Для удобства предположим, что декартовы оси в S и S' параллельны, а система S' движется относительно S со скоростью v в положительном направлении оси x . Кроме того, начала координат O в S и O' в S' совпадают в момент времени $t = t' = 0$.

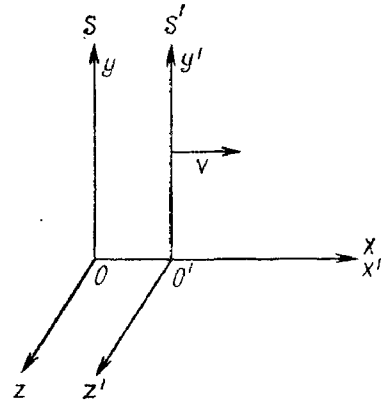


Рис. 8.

Рассмотрим в S' все точки плоскости

$$y' = a' = \text{const.} \quad (2.5)$$

Эти точки в системе S также принадлежат плоскости

$$y = a = \text{const.} \quad (2.6)$$

Постоянные a' и a определяют расстояние между этими плоскостями и плоскостью xz , и поскольку эти расстояния находятся с помощью измерительных линеек, движущихся различным образом, то отношение

$$k = a'/a \quad (2.7)$$

в общем случае не равно единице.

Эта величина может зависеть только от относительной скорости v . Но простым рассуждением можно показать, что в действительности $k = 1$. Так, если изменить направления осей x, z и соответственно x', z' на противоположные, то ни a , ни a' не изменятся, но системы S и S' поменяются ролями. Теперь система S будет двигаться относительно S' со скоростью v в положительном направлении оси x' . Отсюда можно, как и ранее, записать, что

$$k = a/a'. \quad (2.8)$$

Из (2.7) и (2.8) следует, что $k^2 = 1$, и поскольку положительные направления осей y и y' совпадают, то a и a' должны иметь одинаковый знак. Поэтому

$$k = 1, \quad a' = a. \quad (2.9)$$

Отсюда также следует, что для любого события его координаты y и y' совпадают, т. е.

$$y' = y. \quad (2.10)$$

Аналогично можно показать, что

$$z' = z. \quad (2.11)$$

Чтобы найти формулы преобразования для остальных координат, воспользуемся постоянством скорости света в системах S и S' . Если световой сигнал испускается из общего начала координат O и O' в момент $t = t' = 0$,

то распространение сферической световой волны в системе S описывается уравнением

$$x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0, \quad (2.12)$$

а в системе S' аналогичным уравнением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = 0. \quad (2.12')$$

Положим теперь

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 \quad (2.13)$$

и

$$s'^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2. \quad (2.13')$$

Для всех значений (x, y, z, t) , при которых $s^2 = 0$, s'^2 также обратится в нуль, и поскольку соотношение между (x', y', z', t') и (x, y, z, t) линейно, то s'^2 пропорционально s^2 , т. е.

$$s'^2 = k(v) s^2, \quad (2.14)$$

где k — постоянная, зависящая лишь от относительной скорости v . Как и при выводе (2.10) и (2.11), можно показать, что $k = 1$, откуда следует, что

$$s'^2 = s^2, \quad (2.15)$$

т. е. величина s^2 , определяемая по формулам (2.13), инвариантна. Используя (2.10), (2.11) и (2.15), получаем

$$x^2 - c^2 t^2 = x'^2 - c^2 t'^2, \quad (2.16)$$

причем x' и t' — линейные функции от x и t . Поэтому можно записать

$$\left. \begin{aligned} x' &= \alpha x + \beta t; \\ t' &= \gamma x + \delta t, \end{aligned} \right\} \quad (2.17)$$

где постоянные $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ определяются так, чтобы условие (2.16) удовлетворялось при всех x и t .

Для точки O' имеем $x' = 0$. Поэтому из первого уравнения (2.17) найдем закон движения O' относительно S :

$$x = -\beta t / \alpha,$$

а поскольку скорость этой точки относительно S равна v , то

$$\beta = -\alpha v. \quad (2.18)$$

Начальная точка O имеет координату $x = 0$. Тогда из уравнений (2.17) после исключения t получим формулу

$$x' = \beta t' / \delta,$$

описывающую движение точки O относительно S' . Из соображений симметрии следует, что скорость точки O относительно S' равняется $-v$, что с учетом (2.18) дает

$$\beta = -\delta v = -\alpha v, \text{ т. е. } \delta = \alpha. \quad (2.19)$$

С помощью (2.18) и (2.19) уравнения (2.17) можно переписать в виде:

$$x' = \alpha(x - vt); \quad t' = \gamma x + \alpha t. \quad (2.20)$$

Подставив их в (2.16), получим

$$x^2 - c^2 t^2 = (\alpha^2 - \gamma^2 c^2) x^2 - \alpha^2 (1 - v^2/c^2) c^2 t^2 - 2\alpha(\gamma c^2 + \alpha v) xt. \quad (2.21)$$

Поскольку уравнение (2.21) выполняется при всех значениях x и t , то коэффициенты при x^2 , t^2 и xt в обеих частях этого уравнения соответственно равны. Это дает три уравнения для определения двух величин α и γ .

Из последних двух сразу получаем

$$\alpha = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \quad (2.22)$$

и

$$\gamma = -\alpha v/c^2 = -(v/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (2.23)$$

Оставшееся уравнение, выражающее равенство коэффициентов при x^2 в обеих частях (2.21), выполняется тождественно и показывает, что уравнение (2.19), т. е. предположение, что точка O движется относительно S' со скоростью $-v$, согласуется с уравнением (2.16).

Из (2.10), (2.11), (2.20), (2.22) и (2.23) окончательно получим закон преобразования для пространственно-временных координат произвольного события:

$$\left. \begin{aligned} x' &= (x - vt)/\sqrt{1 - v^2/c^2}; & y' &= y; & z' &= z; \\ t' &= (t - vx/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.24)$$

Обратные преобразования имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x &= (x' + vt')/\sqrt{1 - v^2/c^2}; & y &= y'; & z &= z'; \\ t &= (t' + vx'/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.24')$$

Эти преобразования можно получить из (2.24) переобозначением штрихованных и нештрихованных переменных и заменой v на $-v$. Величина v , определяемая из (2.18), представляет собой скорость точки O' относительно S . Из (2.24) следует, однако, что и любая точка P' в системе S' с фиксированными координатами x' , y' , z' движется относительно S в направлении оси x с той же скоростью. Аналогично из (2.24') следует, что любая точка P в системе S движется со скоростью $-v$ относительно S' в направлении оси x' . Поэтому v представляет собой просто относительную скорость двух инерциальных систем.

Впервые преобразования (2.24) и (2.24') вывел Лоренц, они получили (по предложению Пуанкаре [198]. — *Прим. ред.*) название преобразований Лоренца. Однако вывод этих преобразований из принципа относительности принадлежит Эйнштейну [75]. Ввиду специального выбора декартовых осей (см. рис. 8) мы говорим о специальных преобразованиях Лоренца. При таких преобразованиях величина s^2 , определяемая из (2.13), инвариантна. Устремляя c к ∞ , получаем преобразования Галилея (1.2). (Лоренцевы вращения вместе со сдвигами Вигнера назвал преобразованиями Пуанкаре. — *Прим. ред.*)

§ 2.4. Общие преобразования Лоренца

Преобразования пространственно-временных координат в самом общем случае, когда относительная скорость S' и S не параллельна оси x , а прямоугольные координаты в S' и S ориентированы по отношению друг к другу произвольным образом, можно получить, комбинируя пространственные вращения осей в S и S' со специальными преобразованиями Лоренца (2.24). Поскольку при пространственных вращениях s^2 не меняется, то величина s^2 инвариантна и при самых общих преобразованиях Лоренца.

Для вывода этих преобразований в явном виде удобно воспользоваться векторным аппаратом. Рассмотрим снова специальные преобразования Лоренца (2.24), соответствующие рис. 8. Здесь пространственные координаты события (x, y, z) и (x', y', z') в системах S и S' можно рассматривать как ком-

оненты векторов \mathbf{x} и \mathbf{x}' некоторого абстрактного линейного векторного пространства, т. е.

$$\mathbf{x} = (x, y, z); \quad \mathbf{x}' = (x', y', z').$$

Аналогично скорость \mathbf{v} системы S' относительно системы S можно представить вектором этого же пространства с компонентами $(v, 0, 0)$, т. е. $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$. Используя эти векторные обозначения, специальные преобразования Лоренца (2.24) можно привести к виду

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathbf{x} + \mathbf{v} \left[\frac{\mathbf{x}\mathbf{v}}{v^2} \{ (1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1 \} - t (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \right]; \\ t' &= (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \{ t - (\mathbf{v}\mathbf{x})/c^2 \}, \end{aligned} \right\} \quad (2.25)$$

где $(\mathbf{v}\mathbf{x}) = v_x x + v_y y + v_z z$ — скалярное произведение векторов \mathbf{v} и \mathbf{x} .

Вектор $\mathbf{v}' = (-v, 0, 0)$ представляет собой скорость системы S относительно S' , поэтому обратные преобразования Лоренца (2.24') можно записать в форме

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathbf{x}' + \mathbf{v}' \left[(\mathbf{x}'\mathbf{v}'/v'^2) \{ (1 - v'^2/c^2)^{-1/2} - 1 \} - t' (1 - v'^2/c^2)^{-1/2} \right]; \\ t &= (1 - v'^2/c^2)^{-1/2} \{ t' - (\mathbf{v}'\mathbf{x}')/c^2 \}. \end{aligned} \right\} \quad (2.25')$$

Поскольку

$$\mathbf{v}' = -\mathbf{v}, \quad (2.26)$$

обратные преобразования (2.25') можно получить из (2.26) переобозначением $(\mathbf{x}'t')$ и $(\mathbf{x}t)$ и заменой \mathbf{v} на $-\mathbf{v}$.

Предполагается, что оси пространства векторов \mathbf{x} , \mathbf{x}' , \mathbf{v} , \mathbf{v}' фиксированы, поэтому вращение декартовых осей системы S вызывает противоположное вращение векторов \mathbf{x} и \mathbf{v} . Аналогичное вращение декартовых осей системы S' индуцирует противоположное вращение векторов \mathbf{x}' и \mathbf{v}' .

Рассмотрим сначала случай, когда оси в S и S' подвергнуты одному и тому же вращению. Векторы \mathbf{x} , \mathbf{x}' , \mathbf{v} , \mathbf{v}' также подвергнутся одинаковому (но противоположному) вращению, и, следовательно, соотношения (2.25), (2.25') и (2.26) между ними не изменятся. Мы говорим в этом случае о преобразованиях Лоренца без вращения, поскольку взаимная ориентация декартовых осей в S и S' не меняется (см., однако, рассуждения в § 2.5).

Если обозначить v_x , v_y , v_z компоненты вектора скорости движения системы S' относительно S , то векторные уравнения (2.25) суть не что иное как краткая форма записи следующих четырех уравнений:

$$\left. \begin{aligned} x' &= \{ 1 + (\gamma - 1) v_x^2/v^2 \} x + (\gamma - 1) v_x v_y y/v^2 + (\gamma - 1) v_x v_z z/v^2 - v_x \gamma t; \\ y' &= (\gamma - 1) v_y v_x x/v^2 + \{ 1 + (\gamma - 1) v_y^2/v^2 \} y + (\gamma - 1) v_y v_z z/v^2 - v_y \gamma t; \\ z' &= (\gamma - 1) v_z v_x x/v^2 + (\gamma - 1) v_z v_y y/v^2 + \{ 1 + (\gamma - 1) v_z^2/v^2 \} z - v_z \gamma t; \\ t' &= -\gamma v_x x/c^2 - \gamma v_y y/c^2 - \gamma v_z z/c^2 + \gamma t, \end{aligned} \right\} \quad (2.27)$$

представляющих собой общие преобразования Лоренца без вращений. Обратные преобразования, как и раньше, получаются заменой (x, y, z, t) на (x', y', z', t') и v_x, v_y, v_z на $-v_x, -v_y, -v_z$ соответственно.

Рассматривая случай, когда декартовы оси систем S и S' имеют различную ориентацию, необходимо иметь в виду, что эти оси должны быть уже подвергнуты различным вращениям для приведения их к одинаковой ориентации, соответствующей рис. 8. Тогда последнее уравнение в (2.25) остается без изменения, а первое нужно заменить на

$$\mathfrak{D}\mathbf{x}' = \mathbf{x} + \mathbf{v} \{ (\gamma - 1) (\mathbf{x}\mathbf{v})/v^2 - \gamma t \}, \quad (2.28a)$$

где \mathfrak{D} — оператор вращения, который переводит вектор \mathbf{x}' в вектор $\mathfrak{D}\mathbf{x}'$, соответствующий преобразованиям Лоренца без вращения.

Таким образом, оператор \mathfrak{D}^{-1} приводит декартовы оси системы S' к одинаковой ориентации с осями системы S . Вместо уравнения (2.26) имеем

$$\mathfrak{D}\mathbf{v}' = -\mathbf{v}, \quad (2.29)$$

т. е. компоненты (v'_x, v'_y, v'_z) скорости системы S относительно S' уже не равны $(-v_x, -v_y, -v_z)$. Умножая (2.28a) на оператор \mathfrak{D}^{-1} и используя (2.29), общие преобразования Лоренца запишем в виде:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x}' &= \mathfrak{D}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{v}' \{(\gamma - 1)(\mathbf{x}\mathbf{v})/v^2 - \gamma t\}; \\ t' &= \gamma \{t - (\mathbf{v}\mathbf{x})/c^2\}. \end{aligned} \right\} \quad (2.28б)$$

\mathfrak{D} можно интерпретировать также и как оператор, приводящий оси в S к одинаковой ориентации с осями в S' . Поэтому преобразования, обратные (2.28), имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{x} &= \mathfrak{D}\mathbf{x}' - \mathbf{v} \{(\gamma - 1)(\mathbf{x}'\mathbf{v}')/v^2 - \gamma t'\}; \\ t &= \gamma \{t' - (\mathbf{v}'\mathbf{x}')/c^2\}; \\ v &= |\mathbf{v}'| = |\mathbf{v}| = v \end{aligned} \right\} \quad (2.28')$$

и проверяются непосредственно при их подстановке в правую часть (2.28б).

Легко видеть, что уравнения (2.25) и (2.28) удовлетворяют уравнению (2.15), которое, в свою очередь, можно записать в векторном виде

$$(\mathbf{x}\mathbf{x}) - c^2 t^2 = (\mathbf{x}'\mathbf{x}') - c^2 t'^2. \quad (2.30)$$

Полагая в (2.25) $c = \infty$, приходим к общим преобразованиям Галилея (1.1).

До сих пор мы предполагали, что начальные точки O и O' в момент времени $t = t' = 0$ совпадали, и поэтому преобразования Лоренца были *однородными* преобразованиями пространственно-временных координат. Теперь откажемся от этого предположения и учтем смещение начала пространственных и временных координат в S' . Для этого в (2.24), (2.25) и (2.28) следует заменить (x', y', z', t') на $(x' - x'_0, y' - y'_0, z' - z'_0, t' - t'_0)$ соответственно, где x'_0, y'_0, z'_0, t'_0 — постоянные. При *неоднородных* преобразованиях Лоренца подобного типа величина s^2 уже не будет инвариантной. Однако для двух событий с координатами (x_1, y_1, z_1, t_1) и (x_2, y_2, z_2, t_2) соответственно выражения

$$\Delta x = x_1 - x_2, \quad \Delta y = y_1 - y_2, \quad \dots$$

не содержат постоянных x'_0, y'_0, z'_0, t'_0 и преобразуются согласно уравнениям (2.25). Поэтому величина

$$\Delta s^2 = \Delta x^2 + \Delta y^2 + \Delta z^2 - c^2 \Delta t^2 \quad (2.31)$$

будет инвариантной при произвольных неоднородных преобразованиях Лоренца.

В соответствии с принципом относительности все физические процессы во всех инерциальных системах протекают одинаковым образом, а это требует, чтобы все фундаментальные уравнения физики во всех инерциальных системах имели одинаковую форму. Иными словами, фундаментальные уравнения должны быть форм-инвариантными, т. е. ковариантными при преобразованиях Лоренца. Это требование, являющееся формальным выражением принципа относительности, оказывается очень полезным при разработке новых теорий.

Мы увидим далее, что оно автоматически выполняется для уравнений Максвелла в вакууме. С другой стороны, основные уравнения механики Ньютона не удовлетворяют этому требованию, так как они являются ковариантными, как показано в § 1.1, относительно преобразований Галилея. Поэтому механика Ньютона справедлива лишь приблизительно, когда преобразования Лоренца и Галилея можно считать идентичными, т. е. при скоростях, малых по сравнению со скоростью света. Поэтому для скоростей, сравнимых

со скоростью света, уравнения механики Ньютона следует заменить уравнениями релятивистской механики Эйнштейна, являющимися ковариантными при преобразованиях Лоренца (см. гл. 3).

§ 2.5. Сокращение размеров движущихся тел

С помощью преобразований Лоренца можно произвести сравнительное описание свойств измерительных линеек и часов в инерциальных системах S и S' .

Рассмотрим измерительный стержень, покоящийся в системе S' и расположенный вдоль оси x' (см. рис. 8). Концы его имеют координаты x'_1 и x'_2 , так что длина стержня в системе S' (собственная длина) определяется формулой $l^0 = x'_2 - x'_1$. В соответствии с первым уравнением (2.24) движение концов стержня определяется выражениями

$$\left. \begin{aligned} x_1(t) &= vt + (1 - v^2/c^2)^{1/2} x'_1; \\ x_2(t) &= vt - (1 - v^2/c^2)^{1/2} x'_2. \end{aligned} \right\} \quad (2.32)$$

Естественно теперь определить длину стержня l в системе S как разность между координатами его концов в один и тот же момент времени (в системе S). Из (2.32) получим, что

$$l = x_2(t) - x_1(t) = (x'_2 - x'_1) (1 - v^2/c^2)^{1/2} = l^0 (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (2.33)$$

т. е. l не зависит от t . С другой стороны, поскольку системы S и S' совершенно эквивалентны, масштабная линейка длиной l^0 , покоящаяся на оси x в системе S , в системе S' имеет длину l , снова определяемую выражением (2.33).

Масштабная линейка, расположенная перпендикулярно оси x , будет, согласно (2.24), иметь одинаковую длину в системах S и S' . Поэтому в общем случае можно сказать, что тело, движущееся со скоростью v относительно инерциальной системы S , сокращается в направлении своего движения в соответствии с формулой (2.33), а его поперечные размеры не зависят от движения. Если V^0 — объем покоящегося тела, т. е. его объем в инерциальной системе, движущейся вместе с ним, то объем тела в системе S дается выражением

$$V = V^0 (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (2.34)$$

Формула (2.33) совпадает с формулой (1.66) Лоренца, но их физическая интерпретация принципиально различна. У Лоренца l^0 — длина масштабной линейки, покоящейся относительно эфира, а l — ее длина при движении со скоростью v относительно эфира. Согласно его точке зрения, метрическая линейка имеет абсолютную длину, не зависящую от движения наблюдателя. Иной физический смысл у формулы (2.33). Здесь l^0 — длина масштабной линейки в специальной системе, движущейся вместе с ней, т. е. длина в той инерциальной системе, относительно которой масштабная линейка покоится (длина покоя), а l — ее длина, измеренная в произвольной системе отсчета, относительно которой линейка движется со скоростью v . Таким образом, согласно релятивистским концепциям, понятие длины имеет определенный смысл лишь в данной системе отсчета и длина линейки в различных инерциальных системах будет разная. Следовательно, понятие длины потеряло свое абсолютное значение. Об абсолютной длине можно говорить лишь приближенно, когда скорость света считается бесконечно большой.

При выводе формулы (2.33) использовалось понятие одновременности, но, как указывал еще Эйнштейн, эту формулу можно проверить экспериментально и без использования часов. Рассмотрим два стержня M_1 и M_2 с одной и той же длиной покоя l^0 , движущихся в системе S относительно оси x со скоростями v и $-v$ соответственно. Поскольку длина зависит лишь от квадрата скорости, то стержни M_1 и M_2 имеют в системе S одинаковую длину l , поэтому в некоторый момент времени t эти стержни будут совпадать, и сов-

падение двух концов стержней в двух системах отсчета — это два одновременных события в данной инерциальной системе S . Пусть эти два события произошли в точках A и B . Тогда измеренное стандартной линейкой расстояние AB даст искомую величину l .

Хотя такой эксперимент пока невозможно выполнить с достаточной точностью, данное рассмотрение показывает, что лоренцево сокращение есть реальный эффект в принципе наблюдаемый. Этот эффект в то же время выражает не столько свойство движущегося стержня, сколько взаимосвязь движущихся друг относительно друга измерительных линеек. Возникает вопрос о причине, вызывающей лоренцево сокращение. Исходя из принципа относительности, нужно считать саму постановку вопроса совершенно ошибочной. Это все равно что после открытия закона инерции искать причину равномерного прямолинейного движения тела. Такой вопрос, справедливый в античной физике Аристотеля, становится бессмысленным после открытия Галилея, так как, согласно механике Галилея и Ньютона, только отклонение от прямолинейного равномерного движения вызывается какой-либо причиной.

Лоренц старался объяснить сокращение движущихся тел с помощью электронной теории. В то же время Эйнштейн, исходя из принципа относительности, показал, что данный эффект имеет гораздо более фундаментальный характер. Вместо того, чтобы объяснить сокращение на уровне атомной структуры, нужно считать его совершенно элементарным и несводимым к более простым явлениям. На самом деле этот эффект выражает условие, необходимое при разработке любой атомной теории, т. е. условие инвариантности теории относительно преобразований Лоренца. Если это условие выполнено, то сокращение макроскопического движущегося тела можно получить с помощью теории его атомной структуры.

В заключение этого параграфа рассмотрим еще одно свойство преобразований Лоренца без вращения. Пусть \mathbf{x}'_1 и \mathbf{x}'_2 — координатные векторы точек P'_1 и P'_2 в системе S' .

Отрезок, соединяющий эти точки, определяется вектором $\mathbf{r}' = \mathbf{x}'_2 - \mathbf{x}'_1$. В момент времени t точки P'_1 и P'_2 в системе S изображаются векторами \mathbf{x}_1 и \mathbf{x}_2 , которые определяются из (2.25) подстановкой $\mathbf{x} = \mathbf{x}_1$, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_1$ и $\mathbf{x} = \mathbf{x}_2$, $\mathbf{x}' = \mathbf{x}'_2$ соответственно. Вычитая получившиеся выражения, находим

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + \mathbf{v} \{ (1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1 \} (\mathbf{r}\mathbf{v})/v^2, \quad (2.35)$$

где $\mathbf{r} = \mathbf{x}_2 - \mathbf{x}_1$ есть вектор, связывающий P'_1 и P'_2 , одновременные в S .

Разложив векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' на параллельные и перпендикулярные составляющие к вектору \mathbf{v} , формулы (2.35) запишем в виде

$$\mathbf{r}'_{\parallel} = \mathbf{r}_{\parallel} (1 - v^2/c^2)^{-1/2}, \quad \mathbf{r}'_{\perp} = \mathbf{r}_{\perp}.$$

Отсюда следует, что преобразуется только параллельная составляющая вектора \mathbf{r} . Соотношение, обратное (2.35), следующее:

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{v} \frac{\mathbf{r}' \cdot \mathbf{v}}{v^2} \{ (1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1 \}. \quad (2.35')$$

Его справедливость проверяется подстановкой (2.35') в правую часть (2.35).

Из (2.35') следует, что в системе S' вектор, параллельный оси x' , в общем случае уже не будет параллельным оси x с точки зрения наблюдателя в S . Таким образом, даже в случае преобразований Лоренца без вращения для наблюдателя в системе S декартовы оси системы S' не параллельны декартовым осям в S . Два вектора \mathbf{r}'_1 и \mathbf{r}'_2 в системе S' , удовлетворяющие условию $(\mathbf{r}'_1 \cdot \mathbf{r}'_2) = 0$, в системе S уже не удовлетворяют этому условию, т. е. $(\mathbf{r}_1 \mathbf{r}_2) \neq 0$.

$\neq 0$. Поэтому прямоугольные оси координат в системе S' в общем случае не прямоугольны с точки зрения наблюдателя в системе S . Именно по этой причине мы ввели абстрактное векторное пространство для векторов x и x' (см. стр. 35).

§ 2.6. Запаздывание движущихся часов. Парадокс часов

Рассмотрим в системе S' стандартные часы C' , расположенные в точке $x' = x'_1$ оси x (см. рис. 8). Когда часы C' показывают время $t' = t'_1$, стандартные часы в S , совпадающие в этот момент с часами C' , покажут, согласно (2.24), время

$$t_1 = \gamma(t'_1 + vx'_1/c^2); \quad \gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}.$$

Позднее, когда C' покажут время $t' = t'_2$, их показания будут совпадать с другими часами в S , показывающими

$$t_2 = \gamma(t'_2 + vx'_1/c^2).$$

При вычитании получим

$$\Delta t = t_2 - t_1 = \gamma(t'_2 - t'_1) = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \Delta t', \quad (2.36)$$

т. е. движущиеся относительно системы S часы идут медленнее. Наоборот, ввиду эквивалентности обеих систем часы, покоящиеся в S , отстают от часов в S' . Поскольку преобразования Лоренца, с помощью которых получен данный результат, базируются на методе синхронизации часов в системах S и S' , описанном в § 2.2, можно подумать, что замедление хода движущихся часов лишь кажущееся.

Однако, как и в случае лоренцева сокращения, существует принципиальная возможность экспериментальной проверки формулы (2.36). Рассмотрим стандартные часы C_1 и C_2 , помещенные в начале O некоторой системы отсчета S . Пусть в момент времени $t = 0$ часы C_2 начали двигаться с постоянной скоростью v вдоль оси x . В момент времени $t = t_P$ они достигнут точки P и, в соответствии с (2.36), покажут время $t_P (1 - v^2/c^2)^{1/2}$. Сразу же по прибытии в точку P часы C_2 начнут обратное движение с той же скоростью и возвратятся в точку O в момент времени $t = t_1 = 2 t_P$ по неподвижным часам C_1 . Темп хода часов, согласно (2.36), не зависит от знака скорости v , поэтому по прибытии в точку O часы C_2 покажут время $t_2 = 2 (1 - v^2/c^2)^{1/2} t_P$, откуда следует, что возникнет разность отсчетов часов

$$t_2 = (1 - v^2/c^2)^{1/2} t_1. \quad (2.37)$$

Разность $t_2 - t_1$ в принципе можно измерить по показаниям часов C_1 и C_2 до и по окончании процесса.

Еще в своей первой статье по теории относительности Эйнштейн указывал, что данный вывод приводит к парадоксу, который сыграл важную роль при обсуждении логических основ теории. Предположим, что часы C_2 связаны с движущейся вместе с ними инерциальной системой R . Движение часов C_1 относительно R совершенно аналогично движению часов C_2 относительно S , и естественно ожидать, что наблюдатель в R обнаружит замедление хода часов C_1 в противоположность с (2.37).

Однако данное рассуждение ошибочно, так как формула (2.36) справедлива только для инерциальных систем и совершенно неприменима к системе R , скорость которой изменяется от v до $-v$. Поэтому система R обладает ускорением по отношению к неподвижным звездам. Найти вместо (2.36) уравнение, справедливое для системы R , в рамках специальной теории относительности невозможно, так как последняя справедлива лишь для систем отсчета, движущихся с постоянной скоростью. Из данного рассуждения с очевидностью следует необходимость развития специальной теории относительности

д) более общей теории, которая позволит рассматривать произвольно движущиеся системы координат. (Объяснение парадокса часов см. в § 8.17.)

Рассмотрим снова стандартные часы, движущиеся с постоянной скоростью u относительно инерциальной системы S . Время τ , измеренное движущимися часами, называется их собственным временем. Из формулы (2.36) имеем следующее соотношение между приращением собственного времени $d\tau$ и приращением dt времени в системе S :

$$d\tau = (1 - u^2/c^2)^{1/2} dt. \quad (2.38)$$

Можно считать, что эта формула теперь справедлива для произвольно движущихся часов, а u — их мгновенная скорость. При этом предполагаем, что ускорение часов относительно инерциальной системы отсчета не влияет на темп их хода, а приращение собственного времени часов в любое время то же самое, что и для стандартных часов в неподвижной системе S^0 , т. е. в системе, в которой часы покоятся в данный момент времени.

Эффект замедления хода движущихся часов можно получить из общих законов механики, определяющих работу часового механизма. Однако, как и в случае лоренцева сокращения, более логично считать данный эффект элементарным явлением, представляющим собой прямое следствие принципа относительности. Рассчитывая работу механизма часов по формулам механики Ньютона, никакого эффекта замедления не получим, так как время в уравнениях ньютоновской механики есть инвариантный параметр. Отсюда следует, что уравнения Ньютона несправедливы для скоростей, при которых величина $(1 - v^2/c^2)^{1/2}$ заметно отличается от единицы. Если же рассчитывать работу механизма часов, пользуясь точными уравнениями релятивистской механики (см. гл. 3 и 4), то эффект замедления получится как следствие этих уравнений [168]. Поскольку в качестве часов можно использовать произвольную физическую систему, то в любой такой системе, движущейся относительно инерциальной системы отсчета, все явления будут протекать медленнее, чем в покоящейся физической системе того же типа. Рассмотрим, например, радиоактивный распад. Среднее время жизни τ радиоактивного вещества, движущегося со скоростью v , будет больше времени жизни τ^0 того же вещества в покое. Из (2.36) следует, что

$$\tau = (1 - v^2/c^2)^{-1/2} \tau^0. \quad (2.39)$$

Обычно v настолько меньше c , что различие между τ и τ^0 неощутимо. Однако для радиоактивных систем, движущихся с очень большими скоростями, множитель $(1 - v^2/c^2)^{-1/2}$ может иметь значение порядка 100 и более. Поэтому формула (2.39) важна при расчете распада мезонов.

Радиоактивные атомы также можно рассматривать как часы; темп хода таких атомных часов определяется количеством световых волн, испущенных в единицу времени. Пусть ν^0 — собственная частота атома, т. е. частота испущенного света, измеренная в инерциальной системе покоя; тогда количество световых волн, испущенных в единицу времени, как раз равно ν^0 . В инерциальной системе S , относительно которой атом движется со скоростью v , количество испущенных волн в единицу времени равно $\nu^0 (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, так как, согласно (2.36), единичный временной интервал в S соответствует временному интервалу $\Delta\tau = (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ в системе покоя S^0 . Если движущийся атом не имеет радиальной скорости по отношению к наблюдателю в S , то число $\nu^0 (1 - v^2/c^2)^{1/2}$ равно наблюдаемой частоте ν , так как количество испущенных волн и волн, достигших наблюдателя, одинаково. Следовательно, когда радиальная скорость отсутствует, то

$$\nu = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \nu^0. \quad (2.40)$$

Это справедливо, например, при круговом движении атомов со скоростью v относительно наблюдателя, находящегося в центре, или при движении атомов перпендикулярно лучу зрения.

Следовательно, в соответствии с теорией относительности нужно ожидать сдвига частоты и для перпендикулярно падающего света, т. е. увеличение частоты будет меньше по сравнению с рассчитанным по нерелятивистской формуле Доплера (1.14). Этот красный сдвиг спектральных линий, т. е. так называемый «поперечный» доплер-эффект, к которому мы вернемся несколько позже, является прямым следствием замедления хода движущихся часов, описываемого формулой (2.36), и любое экспериментальное подтверждение этого эффекта явится одновременно экспериментальным доказательством формулы (2.36).

§ 2.7. Преобразование скоростей частиц

Рассмотрим опять две инерциальные системы S и S' (см. рис. 8), пространственно-временные координаты которых связаны формулами (2.24) и (2.24'). Движение произвольной частицы в системе S описывается системой уравнений

$$x = x(t); y = y(t); z = z(t). \quad (2.41)$$

В системе S' это движение описывается уравнениями

$$x' = x'(t'); y' = y'(t'); z' = z'(t'), \quad (2.41')$$

отсркие можно получить из (2.41) с помощью преобразований Лоренца (2.24). Мгновенная скорость частицы в системе S' определяется выражениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u}' &= (u'_x, u'_y, u'_z) = \left(\frac{dx'}{dt'}, \frac{dy'}{dt'}, \frac{dz'}{dt'} \right) \\ u' &= (u_x'^2 + u_y'^2 + u_z'^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.42)$$

Аналогично в системе S

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{u} &= (u_x, u_y, u_z) = \left(\frac{dx}{dt}, \frac{dy}{dt}, \frac{dz}{dt} \right) \\ u &= (u_x^2 + u_y^2 + u_z^2)^{1/2} \end{aligned} \right\} \quad (2.43)$$

Дифференцирование преобразований Лоренца (2.24) дает

$$\left. \begin{aligned} dx' &= \gamma(dx - vdt); dy' = dy; dz' = dz, \\ dt' &= \gamma(dt - vdx/c^2), \end{aligned} \right\} \quad (2.44)$$

откуда сразу получаем

$$\left. \begin{aligned} u'_x &= \frac{u_x - v}{1 - vu_x/c^2}; \\ u'_y &= \frac{u_y (1 - v^2/c^2)^{1/2}}{1 - vu_x/c^2}; \\ u'_z &= \frac{u_z (1 - v^2/c^2)^{1/2}}{1 - vu_x/c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.45)$$

Эти формулы преобразования скорости приводят к обычным формулам (1.4) при $c \rightarrow \infty$. Обратные преобразования находятся, как обычно, переобозначением штрихованных и нештрихованных переменных и заменой v на $-v$.

Выбирая ось z так, чтобы вектор \mathbf{u} (и соответственно \mathbf{u}') был перпендикулярным этой оси, (2.45) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} u' \cos \vartheta' &= \frac{u \cos \vartheta - v}{1 - uv \cos \vartheta / c^2}; \\ u' \sin \vartheta' &= \frac{u \sin \vartheta (1 - v^2/c^2)^{1/2}}{1 - uv \cos \vartheta / c^2}, \end{aligned} \right\}$$

где ϑ и ϑ' — углы между осью x и векторами \mathbf{u} и \mathbf{u}' соответственно. Из этих уравнений сразу получаем релятивистские обобщения формул (1.5) и (1.6):

$$\operatorname{tg} \vartheta' = \sin \vartheta (1 - v^2/c^2)^{1/2} / (\cos \vartheta - v/u); \quad (2.46)$$

$$u' = u \frac{\{1 - (2v \cos \vartheta)/u + v^2/u^2 - (v^2 \sin^2 \vartheta)/c^2\}^{1/2}}{1 - (uv \cos \vartheta)/c^2}. \quad (2.47)$$

Формула (2.47) после простых вычислений дает

$$(1 - vu_x/c^2)(1 - u'^2/c^2)^{1/2} = (1 - u^2/c^2)^{1/2}(1 - v^2/c^2)^{1/2}. \quad (2.48)$$

Если u и, следовательно, u' параллельны оси x , то из (2.45) получаем релятивистскую теорему сложения скоростей:

$$u' = (u - v)/(1 - uv/c^2); \quad u = (u' + v)/(1 + vu'/c^2). \quad (2.49)$$

Если $u' = c$, то $u = c$.

Из преобразований Лоренца непосредственно вытекает невозможность существования инерциальных систем S' , для которых $v > c$, поскольку при этом уравнения (2.24), так же как и выражения для лоренцева сокращения и замедления часов, становятся мнимыми. Более того, можно показать, что частицы (или, в более общем случае, сигналы) не могут двигаться со скоростью, большей c , ибо это приводит к абсурдным результатам. Предположим противное. Пусть в момент времени $t = t' = 0$, когда обе системы S и S' совпадают (см. рис. 8), мы посылаем сигнал из общего начала O, O' в направлении отрицательной оси x' с постоянной скоростью $u' > c$ относительно системы S' . В момент времени $t'_1 > 0$ этот сигнал достигнет точки P , расположенной на отрицательной половине оси x' с координатой $x'_P = -u't'_1$. Пространственно-временные координаты этого события в системе S согласно (2.24) следующие:

$$\left. \begin{aligned} x_P &= \gamma(x'_P + vt'_1) = -\gamma t'_1(u' - v) < 0; \\ t_1 &= \gamma(t'_1 + vx'_P/c^2) = \gamma t'_1(1 - vu'/c^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.50)$$

По прибытии в P сигнал немедленно посылается обратно в точку O со скоростью $\omega > c$ относительно S . Движение этого сигнала описывается уравнением

$$x = \omega(t - t_1) + x_P. \quad (2.51)$$

Полагая $x = 0$, находим время t_2 прибытия сигнала в точку O :

$$t_2 = t_1 - x_P/\omega = \gamma t'_1 \{1 - u'v/c^2 + (u' - v)/\omega\} > t_1. \quad (2.52)$$

Выбирая u' и ω так, чтобы

$$u' > c^2/v; \quad \omega > (u' - v)/(u'v/c^2 - 1), \quad (2.53)$$

получаем, что

$$t_2 < 0, \quad (2.54)$$

т. е. в момент возвращения сигнала в точку O часы в этой точке покажут время меньшее, чем в момент испускания сигнала. Это, очевидно, невозможно. Следовательно, можно сделать вывод, что ни в какой инерциальной системе не существует сигналов, способных распространяться быстрее света. Данное утверждение — один из фундаментальных законов природы. В частности, как мы увидим далее (§ 3.4), материальная частица никогда не может достигнуть скорости выше c . (О сверхсветовых скоростях см. литературу на стр. 393. — Прим. ред.)

Дифференцируя (2.25) и (2.25'), получаем формулы преобразования скоростей для случая лоренцевых преобразований без вращения:

$$u' = \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2} u + \{1 - \sqrt{1 - v^2/c^2}\} (uv)'v^2 - 1\} v}{1 - (vu)/c^2}; \quad (2.55)$$

$$\mathbf{u} = \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2} \mathbf{u}' + \{1 - \sqrt{(1 - v^2/c^2)}\} (\mathbf{u}' \mathbf{v})/v^2 + 1 \mathbf{v}}{1 + (\mathbf{v} \mathbf{u}')/c^2}. \quad (2.55')$$

Если $c \rightarrow \infty$, то эти уравнения приводятся к (1.3). Из (2.55) получим

$$(1 - \mathbf{v} \mathbf{u}'/c^2) (1 - u'^2/c^2)^{1/2} = (1 - v^2/c^2)^{1/2} (1 - u^2/c^2)^{1/2}, \quad (2.56)$$

что соответствует (2.48). Когда \mathbf{u}' перпендикулярна \mathbf{v} , т. е. при $\mathbf{u}' \mathbf{v} = 0$, уравнение (2.55') дает

$$\mathbf{u} = \mathbf{v} + (1 - v^2/c^2)^{1/2} \mathbf{u}'. \quad (2.57)$$

Когда \mathbf{u} параллельна \mathbf{v} , опять приходим к формуле (2.49).

§ 2.8. Последовательные преобразования Лоренца. Прецессия Томаса

Рассмотрим три инерциальные системы S , S' и S'' . Пусть S' движется относительно S со скоростью \mathbf{v} , а S'' движется относительно S' со скоростью \mathbf{u}' . Связь между координатами (\mathbf{x}, t) системы S и (\mathbf{x}', t') системы S' дается преобразованиями Лоренца (в общем случае неоднородными). То же справедливо для координат (\mathbf{x}', t') и (\mathbf{x}'', t'') системы S'' . Исключая переменные (\mathbf{x}', t') , получаем соотношения между (\mathbf{x}, t) и (\mathbf{x}'', t'') , которые, как это ясно из физических соображений, также являются преобразованиями Лоренца. Отсюда следует, что преобразования Лоренца образуют *группу*. Если при $t = t' = 0$ начальные точки в S и S' совпадают и если при $t' = t'' = 0$ начальные точки в S' и в S'' также совпадают, то при $t = t'' = 0$ совпадают и начальные точки инерциальных систем S и S'' . Это значит, что однородные преобразования Лоренца образуют подгруппу группы Лоренца. Очевидно, что и пространственные вращения декартовых осей без изменения системы отсчета также образуют подгруппу группы преобразований Лоренца.

В нерелятивистской кинематике преобразования Галилея без вращений декартовых осей образуют подгруппу группы преобразований Галилея. Это неверно, однако, для релятивистской кинематики, так как при комбинировании двух преобразований Лоренца без вращений результирующее преобразование в общем случае приводит к изменению ориентации декартовых осей. Пусть переход от системы S к системе S' определяется преобразованием (2.25), а переход от системы S' к системе S'' уравнениями, полученными из (2.25) заменой $(\mathbf{x}, t, \mathbf{v})$ на $(\mathbf{x}', t', \mathbf{u}')$ и (\mathbf{x}', t') на (\mathbf{x}'', t'') . Исключение (\mathbf{x}', t') приводит к преобразованиям Лоренца типа (2.28), т. е.

$$\mathbf{x}'' = \mathfrak{D}^{-1} \mathbf{x} - \mathbf{w}'' \left[\frac{\mathbf{x} \mathbf{w}}{w^2} \left\{ \frac{1}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} - 1 \right\} - \frac{t}{\sqrt{1 - w^2/c^2}} \right], \quad (2.58)$$

где оператор \mathfrak{D} в общем случае отличен от единичного; \mathbf{w} — скорость системы S'' относительно S и \mathbf{w}'' — скорость S относительно S'' . Преобразования от S к S' и от S' к S'' есть лоренцевы преобразования без вращения, а потому скорость S' относительно S'' равна $-\mathbf{u}'$, а скорость S относительно S'' равна $-\mathbf{v}$.

Скорость \mathbf{w} получаем из (2.55), отождествляя \mathbf{u} с \mathbf{w} , т. е.

$$\mathbf{w} = \frac{(1 - u'^2/c^2)^{1/2} \mathbf{u}' + \mathbf{v} [(u' \mathbf{v}/v^2) \{1 - (1 - v^2/c^2)^{1/2}\} + 1]}{1 + (u' \mathbf{v})/c^2}. \quad (2.59)$$

Из этого же уравнения, заменяя \mathbf{v} и \mathbf{u}' на $-\mathbf{u}'$ и $-\mathbf{v}$ соответственно, находим \mathbf{w}''

$$\mathbf{w}'' = - \frac{(1 - v'^2/c^2)^{1/2} \mathbf{v} + \mathbf{u}' [(u' \mathbf{v}/u'^2) \{1 - (1 - u'^2/c^2)^{1/2}\} + 1]}{1 + (u' \mathbf{v})/c^2}. \quad (2.59')$$

В соответствии с (2.29) имеем

$$\mathfrak{D}\mathbf{w}'' = -\mathbf{w}. \quad (2.60)$$

Сравнивая (2.59) и (2.59'), видим, что оператор \mathfrak{D} , вообще говоря, уже не равен единичному оператору. И только если скорость \mathbf{u}' параллельна \mathbf{v} , т. е. когда $\mathbf{u}' = kv$, формулы (2.59) и (2.59') дают

$$\mathbf{w}'' = -\mathbf{w} = -\mathbf{v}(1+k)/(1+kv^2/c^2),$$

т. е. оператор \mathfrak{D} совпадает с единичным, а результирующее преобразование является преобразованием Лоренца без вращения.

Теперь рассмотрим инфинитезимальное преобразование от S' к S'' , при котором скорость u'' является бесконечно малой величиной. Пренебрегая членами высшего порядка малости по сравнению с u' , преобразование от S' к S'' приводим к виду

$$\mathbf{x}'' = \mathbf{x}' - \mathbf{u}' t'; \quad t'' = t' - (\mathbf{u}' \mathbf{x}')/c^2, \quad (2.61)$$

а для скоростей \mathbf{w} и \mathbf{w}'' из формул (2.59) и (2.59') получаем выражения

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{w} &= \mathbf{v} + (1 - v^2/c^2)^{1/2} \left[\mathbf{u}' + \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{u}')/v^2 \{ (1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1 \} \right]; \\ \mathbf{w}'' &= -\{ \mathbf{v} + \mathbf{u}' - \mathbf{v} (\mathbf{v}\mathbf{u}')/c^2 \}; \\ \omega^2 &= \omega''^2 = v^2 + 2(\mathbf{v}\mathbf{u}') (1 - v^2/c^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.62)$$

Подставив в (2.61) формулы (2.25) для \mathbf{x}' и t' и сравнив с (2.58), после простых, но громоздких вычислений получим

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{D}^{-1}\mathbf{x} &= \mathbf{x} + \frac{1}{v^2} \{ (1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1 \} \{ (\mathbf{v} \times d\mathbf{v}) \times \mathbf{x} \}; \\ d\mathbf{v} &= \mathbf{w} - \mathbf{v}. \end{aligned} \right\} \quad (2.63)$$

Отсюда следует, что

$$\mathfrak{D}\mathbf{x} = \mathbf{x} + (\boldsymbol{\Omega} \times \mathbf{x}),$$

где

$$\boldsymbol{\Omega} = -(1/v^2) \{ (1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1 \} (\mathbf{v} \times d\mathbf{v}). \quad (2.64)$$

Таким образом, оператор \mathfrak{D} представляет собой бесконечно малый поворот вокруг вектора $\boldsymbol{\Omega}$. Угол поворота равен $|\boldsymbol{\Omega}|$. Легко показать, что с точностью до малых высшего порядка формулы (2.62) и (2.63) для \mathbf{w} , \mathbf{w}'' и \mathfrak{D} удовлетворяют уравнению (2.60).

Рассмотрим точечный компас, т. е. материальную частицу, задающую тем или иным способом определенное направление. Таким точечным компасом является, например, классический электрон со спином. Если скорость частицы относительно системы S равна $\mathbf{v} = \mathbf{v}(t)$ и если в (2.64) положить $d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} dt$, то системы S' и S'' в рассмотренном выше приближении являются мгновенными инерциальными системами покоя частицы в моменты t и $t + dt$ соответственно. Поскольку преобразование от системы S' к системе S'' есть инфинитезимальное преобразование Лоренца без вращения, естественно предположить, что направление компаса в момент времени t относительно S' совпадает с его направлением в момент времени $t + dt$ относительно системы S'' , если силы, действующие на компас, не сообщают ему момента вращения.

При подстановке $d\mathbf{v} = \dot{\mathbf{v}} dt$ в (2.64) вектор $\boldsymbol{\Omega}$ определяет поворот осей системы S в момент $t + dt$ для приведения их к одинаковой ориентации с осями S'' . А так как направление компаса в системе покоя неизменно, то его направление в системе S изменяется на угол, соответствующий вектору $\boldsymbol{\Omega}$. Другими

словами, компас прецессирует в системе S со скоростью

$$\boldsymbol{\omega} = -(1/v^2)\{(1 - v^2/c^2)^{-1/2} - 1\} (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}), \quad (2.65)$$

где $\dot{\mathbf{v}} = dv/dt$ — ускорение точечного компаса. Когда $v \ll c$, в первом приближении получим для скорости прецессии

$$\boldsymbol{\omega} = -\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}/2c^2. \quad (2.66)$$

Данный эффект впервые был изучен Томасом (1927 г.) и назван его именем, т. е. прецессией Томаса.

§ 2.9. Преобразование параметров волны в теории относительности

Рассмотрим в системе S плоскую волну с единичным вектором \mathbf{n} в направлении нормали к фронту волны, расположенным в плоскости x, y . Пусть эта волна обладает частотой ν и фазовой скоростью ω относительно S . Такая волна описывается одной или несколькими функциями вида

$$\Psi = A \cos 2\pi\nu [t - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)/\omega], \quad (2.67)$$

где α — угол между вектором \mathbf{n} и осью x .

В системе S' , движущейся вдоль оси x со скоростью v относительно S (см. рис. 1), волна описывается функциями, которые получаются из (2.67) заменой величин, определяющих фазу волны, соответствующими величинами, измеренными в системе S' . Исходя из тех же соображений, что и в § 1.3, следует инвариантность фазы плоской волны, т. е. уравнение

$$\nu [t - (x \cos \alpha + y \sin \alpha)/\omega] = \nu' [t' - (x' \cos \alpha' + y' \sin \alpha')/\omega'] \quad (2.68)$$

должно быть справедливым при всех значениях x, y, t . С помощью преобразований Лоренца от системы S к системе S' исключим из этого уравнения переменные x, y, t и получим уравнение

$$\begin{aligned} \frac{1 - v \cos \alpha/\omega}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \nu t' - \frac{\cos \alpha - v\omega/c^2}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} \cdot \frac{\nu x'}{\omega} - \frac{\nu \sin \alpha}{\omega} y' = \\ = \nu' t' - \frac{\nu' \cos \alpha'}{\omega'} x' - \frac{\nu' \sin \alpha'}{\omega'} y', \end{aligned} \quad (2.69)$$

которое должно выполняться для всех значений x', y', t' . Это возможно, если коэффициенты при x', y', t' в обеих частях (2.69) равны. Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} \nu' &= \nu \frac{1 - v \cos \alpha/\omega}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}} = \nu \frac{1 - (\mathbf{v}\mathbf{n})/\omega}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}; \\ \frac{\nu' \sin \alpha'}{\omega'} &= \frac{\nu \sin \alpha}{\omega}; \\ \frac{\nu' \cos \alpha'}{\omega'} &= \frac{\nu (\cos \alpha - v\omega/c^2)}{\omega (1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (2.70)$$

Из уравнений (2.70) следует, что

$$\operatorname{tg} \alpha' = \frac{\sin \alpha (1 - v^2/c^2)^{1/2}}{\cos \alpha - v\omega/c^2}; \quad (2.71)$$

$$\omega' = \frac{\omega - v \cos \alpha}{\left(1 - \frac{2v\omega \cos \alpha}{c^2} + \frac{v^2 \omega^2}{c^4} - \frac{v^2 \sin^2 \alpha}{c^2}\right)^{1/2}}. \quad (2.72)$$

Обратные соотношения можно получить, как обычно, переобозначением штрихованных и нештрихованных переменных и заменой v на $-v$. В пределе,

когда $c \rightarrow \infty$, уравнения (2.70), (2.71) и (2.72) приводят к нерелятивистским формулам (1.14), (1.16) и (1.19).

Сравнение преобразований (2.46) и (2.47) для скорости и направления движения частицы с формулами (2.71), (2.72) показывает, что (2.46) и (2.47) переходят в (2.71) и (2.72) соответственно, если положить $u = c^2/\omega$, $u' = c^2/\omega'$. Следовательно, когда $\omega = c^2/\omega$, скорость частицы u и направление ее движения \mathbf{n} преобразуются аналогично фазовой скорости ω и нормальному вектору \mathbf{n} плоской волны. Используя это обстоятельство, де Бройль [38] в своей волновой теории элементарных частиц с каждой частицей, обладающей скоростью u и направлением движения \mathbf{n} , связал плоскую волну с фазовой скоростью $\omega = c^2/u$ и нормальным волновым вектором \mathbf{n} . Данная процедура, очевидно, релятивистски инвариантна. Когда скорость частицы $u = c$, фазовая скорость соответствующей волны $\omega = c$. Следовательно, направление движения и скорость такой частицы преобразуются так же, как направление и скорость плоской световой волны в вакууме.

§ 2.10. Групповая скорость в движущихся средах

Рассмотрим однородную изотропную среду с показателем преломления n в инерциальной системе покоя S' (см. рис. 8). Относительно системы S среда движется со скоростью v . В системе покоя S' справедливы феноменологические максвелловские уравнения для неподвижных диэлектриков ϵ , в соответствии с принципом относительности, они верны при любых постоянных скоростях движения S' относительно неподвижных звезд. Поэтому в системе S' фазовая скорость световой волны $\omega' = c/n$ во всех направлениях. В этой системе отсчета групповая скорость должна равняться фазовой скорости, так как по принципу Гюйгенса элементарные волны, определяющие групповую скорость, являются сферическими волнами с постоянной скоростью

$$\omega' = c/n. \quad (2.73)$$

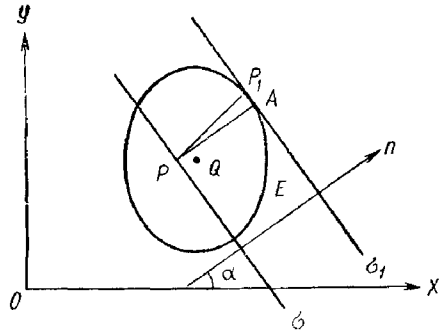


Рис. 9.

Это, однако, неверно для системы S . Рассмотрим, например, распространение элементарной волны, испущенной в момент времени $t = t' = 0$ из общего начала O, O' систем S и S' . В системе S' распространение волны описывается уравнением

$$x'^2 + y'^2 + z'^2 - \omega'^2 t'^2 = 0, \quad (2.74)$$

где $\omega' = c/n$. С помощью преобразований Лоренца (2.24) из (2.74) получим следующее уравнение распространения элементарной волны в системе S :

$$\left. \begin{aligned} (x - at)^2/b + y^2 + z^2 - b\omega'^2 t^2 = 0; \\ a = v \frac{1 - \omega'^2/c^2}{1 - v^2 \omega'^2/c^4}; \quad b = \frac{1 - v^2/c^2}{1 - v^2 \omega'^2/c^4}. \end{aligned} \right\} \quad (2.75)$$

Следовательно, элементарная волна, испущенная в момент времени t из точки x_0, y_0 плоскости x, y системы S , пересекается с этой плоскостью по кривой линии, которая описывается уравнением

$$f(x, y, x_0, y_0) \equiv (x - x_0 - a\Delta t)^2/b + (y - y_0)^2 - b\omega'^2 \Delta t^2 = 0. \quad (2.76)$$

Здесь рассматривается только случай $n > 1$, т. е. $\omega' < c$. Тогда $c > a > 0$ и $1 > b > 0$, а линия пересечения является эллипсом с центром в точке $(x_0 + a\Delta t, y_0)$ и полуосями $b\omega'\Delta t$ и $b^{1/2}\omega'\Delta t$ соответственно. Таким образом,

элементарные волны увлекаются средой со скоростью a и одновременно сжимаются в направлении движения пропорционально $b^{1/2}$.

Снова рассмотрим плоскую волну с нормальным вектором \mathbf{n} , лежащим в плоскости x, y и составляющим угол α с осью x . Соотношение между α и направлением нормали к волне в системе S' определяется (2.71) или обратным ему преобразованием

$$\operatorname{tg} \alpha = (1 - v^2/c^2)^{1/2} \sin \alpha' / (\cos \alpha' + v\omega'/c^2). \quad (2.77)$$

Пусть σ (рис. 9) есть плоскость фронта волны, линия пересечения с плоскостью x, y которой определяется уравнением

$$x_0 \cos \alpha + y_0 \sin \alpha = C = \text{const.} \quad (2.78)$$

Эллипс E с центром в точке $Q(x_0 + a\Delta t, y_0)$ представляет собой элементарную волну к моменту времени $t + \Delta t$, испущенную из точки $P(x_0, y_0)$ в момент времени t , и определяется уравнением (2.76). Волновая плоскость в момент времени $t + \Delta t$ изображается линией σ_1 , которая определяется как огибающая семейства эллипсов (2.76) при варьировании параметров x_0, y_0 , удовлетворяющих условию (2.78). Величина и направление скорости луча определяются вектором $\overrightarrow{PP_1}$, где $P_1(x_1, y_1)$ — точка касания эллипса E с огибающей σ_1

$$\overrightarrow{PP_1} = \mathbf{u}\Delta t. \quad (2.79)$$

Здесь \mathbf{u} — скорость луча. Поскольку P_1 — предельная точка пересечения двух соседних эллипсов семейства (2.76), ее координаты удовлетворяют как уравнению (2.76), так и уравнению, получающемуся варьированием x_0, y_0 в (2.76) при условии (2.78):

$$(\partial f / \partial x_0) \sin \alpha - (\partial f / \partial y_0) \cos \alpha = 0$$

или

$$(x - x_0 - a\Delta t) \sin \alpha = b(y - y_0) \cos \alpha. \quad (2.80)$$

Исключив из уравнений (2.76), (2.78) и (2.80) параметры x_0, y_0 , найдем уравнение огибающей σ_1 :

$$x \cos \alpha + y \sin \alpha = C + \left[a + \omega' \{ b(b + \operatorname{tg}^2 \alpha) \}^{1/2} \right] \cos \alpha \Delta t. \quad (2.81)$$

Последний член в (2.81) определяет расстояние PA между двумя волновыми плоскостями, которое, в свою очередь, должно равняться $\omega\Delta t$, где ω — фазовая скорость. Следовательно,

$$\omega = \left[a + \omega' \{ b(b + \operatorname{tg}^2 \alpha) \}^{1/2} \right] \cos \alpha. \quad (2.82)$$

Подставив формулы (2.75) и (2.77), определяющие a, b, α , в (2.82), получим выражение, идентичное преобразованию, обратному (2.72).

В соответствии с (2.79) имеем

$$u_x = (x_1 - x_0) / \Delta t; \quad u_y = (y_1 - y_0) / \Delta t. \quad (2.83)$$

Поскольку $x = x_1, y = y_1$ — решение уравнений (2.76) и (2.80), из (2.83) получим

$$\left. \begin{aligned} u_x &= a + b^{3/2} \omega' / (b + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}; \\ u_y &= b^{1/2} \operatorname{tg} \alpha \omega' / (b + \operatorname{tg}^2 \alpha)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (2.84)$$

Подставляя сюда значения a, b, α по формулам (2.75) и (2.76) и учитывая, что в системе S' групповая скорость u' равна фазовой скорости волны ω' , получаем, что

$$\left. \begin{aligned} u_x &= (u'_x + v) / (1 + u'_x v / c^2); \\ u_y &= (1 - v^2 / c^2)^{1/2} / (1 + u'_x v / c^2). \end{aligned} \right\} \quad (2.85)$$

Уравнения (2.85) совпадают с преобразованиями, обратными преобразованиям (2.45). Следовательно, групповая скорость [как и в теории абсолютного эфира, см. (1.33)] преобразуется таким же образом, как и скорость материальной частицы. Если ϑ и $\vartheta' = \alpha'$ суть углы между осью x и направлением луча, измеренные в системах S и S' соответственно, то для групповых скоростей имеем уравнения (2.46) и (2.75), связывающие между собой величины u, u', ϑ и ϑ' . Выражая u из (2.47), получаем

$$u = \frac{u' \left(1 - \frac{v^2}{c^2}\right)^{1/2} \left\{1 - \frac{v^2}{u'^2} + \frac{(\mathbf{ve})^2}{u'^2} \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)\right\}^{1/2} + (\mathbf{ve}) \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}{1 - \frac{v^2}{c^2} + \frac{(\mathbf{ve})^2}{c^2} \left(1 - \frac{u'^2}{c^2}\right)}, \quad (2.86)$$

где

$$u' = c/n, \quad (2.87)$$

а \mathbf{e} — единичный вектор в направлении луча, т. е.

$$\mathbf{ve} = v \cos \vartheta. \quad (2.88)$$

В вакууме, когда $n = 1, u' = \omega' = c, u, \omega$ также равны c , и формулы (2.46) и (2.47) для групповой скорости совпадают с формулами (2.71) и (2.72) для фазовой скорости. Таким образом, из теории относительности следует, что для любой инерциальной системы групповая скорость в вакууме совпадает с фазовой скоростью. В теории абсолютного эфира это справедливо только для абсолютной системы отсчета. Такое различие обусловлено тем, что, в соответствии с теорией относительности, элементарные волны в вакууме являются сферическими волнами с фиксированным центром в любой системе отсчета (когда $\omega' = c$, из (2.75) следует $a = 0, b = 1$). Мы покажем позже (гл. 5, 7) что групповая скорость равна скорости распространения энергии электромагнитной волны. Плотность потока энергии определяется вектором Пойнтинга, и для плоской волны в вакууме этот вектор направлен по нормали к фронту волны в любой системе отсчета.

Фазовая скорость совпадает с групповой скоростью только в вакууме. В преломляющей среде мы должны, в общем случае, различать эти две скорости; и только тогда, когда луч параллелен движению среды, обе скорости, согласно (2.85) или (2.86) и (2.72), совпадают и выражаются одной формулой

$$u = \omega = (c/n \pm v)/(1 \pm v/cn), \quad (2.89)$$

где знак плюс означает, что направление луча совпадает с направлением движения среды, а знак минус — что направления противоположны.

§ 2.11. Эффект Доплера, абберация света и эффект увлечения в теории относительности

Если систему S отождествить с системой покоящегося наблюдателя, а систему S' — с движущимся источником света, то релятивистская формула для доплер-эффекта определяется выражением (2.70). Тогда ν — частота, измеренная неподвижным наблюдателем, а ν' — равна собственной частоте ν^0 источника. В пустоте $\omega = c$, и единичный направляющий вектор луча \mathbf{e} совпадает с нормалью \mathbf{n} к фронту волны. Отсюда получаем, что

$$\nu^0 = \nu \left(1 - (\mathbf{ve})/c\right) / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (2.90)$$

где \mathbf{v} — скорость источника относительно наблюдателя, а вектор $\mathbf{e} = \mathbf{n}$ определяет направление света в системе наблюдателя. Когда направление наблюдаемого луча перпендикулярно направлению движения источника, т. е. при $(\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) = 0$, из (2.90) получаем формулу для поперечного доплер-эффекта

$v = v^0 (1 - v^2/c^2)^{1/2}$, являющуюся (как говорилось выше в § 2.6) прямым следствием эффекта замедления хода движущихся часов.

Справедливость формулы (2.90) была доказана экспериментально с большой точностью Айвсом и др. [120], которые измеряли частоту света, испускаемого быстро движущимися ионами (см. § 1.5).

Релятивистская формула для аберрации света получается из (2.46), если системы отсчета S и S' рассматривать как системы, связанные с неподвижными звездами и с Землей соответственно. В любой точке P' вне атмосферы Земли $u = c$, поэтому введя углы $\theta = \vartheta - \pi$, $\theta' = \vartheta' - \pi$ между направлением движения Земли и действительным и кажущимся направлениями на звезду, получим релятивистскую формулу аберрации

$$\operatorname{tg} \theta' = [\sin \theta (1 - v^2/c^2)^{1/2}] / (\cos \theta + v/c). \quad (2.91)$$

Эта формула отличается от формулы (1.61), теории эфира только величиной второго порядка малости v^2/c^2 , так что при современной точности измерений их сравнение невозможно.

Поскольку атмосфера Земли неподвижна относительно системы S' , в соответствии с теорией относительности, луч света на пути от точки P' к телескопу не подвергается в дальнейшем никакой аберрации. В электронной теории Лоренца этот результат подтверждается лишь в первом приближении (см. § 1.10).

Еще один релятивистский эффект состоит в том, что аберрация происходит и в направлении фазовой скорости. В теории абсолютного эфира нормаль к волне, согласно (1.28), имеет одинаковое направление в обеих системах S и S' , в то время как релятивистская формула (2.71) преобразования нормалей к фронту световой волны в вакууме совпадает с формулой преобразования для групповой скорости в движущейся относительно инерциальной системы S среде (2.46). Пренебрегая величинами порядка v^2/c^2 и выше, получаем простое выражение

$$u = u' + \mathbf{v} \cdot \mathbf{e} (1 - u'^2/c^2) = c/n + \alpha (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}), \quad (2.92)$$

где $\alpha = 1 - 1/n^2$ — коэффициент увлечения Френеля. Формула (2.92) совпадает с выражением (1.48) для скорости света в абсолютной системе отсчета. Таким образом, данная формула является прямым следствием принципа относительности и не требует для своего доказательства никаких дополнительных гипотез о свойствах атомной структуры среды. Следует отметить, что теория Френеля справедлива в первом приближении лишь для абсолютной системы отсчета. В любой другой системе уравнения Френеля не выполняются даже в первом приближении. В теории относительности, например, для системы покоя среды $u' = c/n$, а в теории Френеля выражение u' сложнее.

Уравнение (2.92) было проверено экспериментально сначала в опыте Физо (см. § 1.8), а затем с более высокой точностью Зеemanом [284, 285]. Последний измерял скорость света в быстро движущемся кварцевом стержне. Измерения Зеемана были настолько точными, что необходимо было учитывать также эффекты, возникающие, в соответствии с электронной теорией Лоренца, в рассеивающей среде. В такой среде $n = n(v)$, а поскольку v из-за доплер-эффекта зависит еще и от системы отсчета, при проверке (2.92) необходимо выбрать правильное выражение для v и, тем самым, для n . Из формулы (2.86) следует, что в (2.92) нужно использовать значение n , соответствующее частоте ν' в системе покоя среды. В первом приближении по v/c соотношение между ν' и ν согласно (2.70) следующее:

$$\nu' - \nu = -\nu n (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) / c, \quad (2.93)$$

так как различие между направлениями светового луча и нормали к фронту волны порядка v/c . Из (2.93) с точностью до v/c имеем

$$c/n(\nu') = c/n(\nu) + (c/n^2) (dn/d\nu) n\nu (\mathbf{v} \cdot \mathbf{e}) / c,$$

где $n = n(v)$ — значение n при частоте v . Подставляя данное выражение в (2.92), получаем

$$u = c/n + (v \cdot e) [1 - 1/n^2 + (v/n) dn/dv]. \quad (2.94)$$

Эта формула полностью согласуется с измерениями Зеемана.

С помощью теории относительности можно разобрать и другие явления, например отражение света движущимися зеркалами и преломление света между движущимися средами. В инерциальной системе S' , относительно которой зеркало или среда покоятся, выполняются обычные законы отражения и преломления света. Соответствующие законы в системе S получаются непосредственно из формул преобразования (2.46), (2.47) для групповой скорости. Эксперименты по отражению света движущимися зеркалами, проведенные Саньяком [213, 214] и др., хорошо согласуются с теорией.

Во всех экспериментах измерялись эффекты лишь первого порядка, поскольку скорости движения зеркал и сред были малы по сравнению со скоростью света, так что величины второго порядка малости и выше в (2.86) находились за пределом точности измерений. В связи с этим поучительно рассмотреть несколько расширенный опыт Майкельсона, когда вся аппаратура находится в преломляющей среде. Из принципа относительности следует, что при вращении аппаратуры интерференционные полосы не должны смещаться (см. рис. 6). Такой же результат получается при вычислении промежутков времени t'_1 и t'_2 , в течение которых два луча пройдут расстояния PS_1P и PS_2P в инерциальной системе S' покоя аппаратуры; в этой системе скорость света одинакова во всех направлениях и равна c/n и поэтому $t'_1 = t'_2$.

Теперь необходимо, чтобы получился такой же нулевой результат с точки зрения неподвижного наблюдателя в системе S , относительно которой вся аппаратура движется со скоростью v . Соответствующие временные интервалы t_1, t_2 , измеренные по часам S , можно вычислить по формуле (2.86) и получить, что $t_1 = t_2$. Время прохождения луча 2 от точки P к точке S_2 равно $t_2/2$. За это время аппаратура пройдет расстояние $\frac{1}{2} vt_2$, а длина пробега луча составит $\frac{1}{2} ut_2$, где скорость луча u определяется по формуле (2.86) или (2.87). На рис. 10 эти расстояния изображены отрезками PP^* и PS_2^* (P^* и S_2^* — положения точек P и S_2 через промежуток времени $t_2/2$).

Из рисунка видно, что угол ϑ между направлением луча и скоростью v вычисляется по формуле

$$\cos \vartheta = v/u.$$

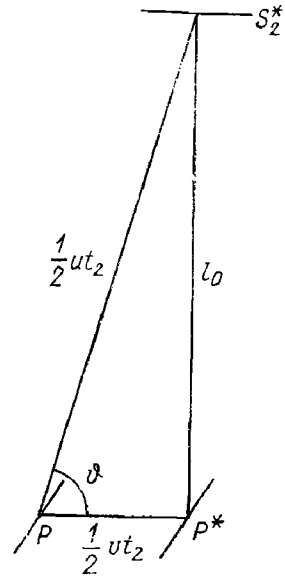


Рис. 10.

Подставляя эту формулу в уравнение (2.47) и решая его относительно u^2 , получаем

$$u^2 = u'^2 (1 - v^2/c^2) + v^2. \quad (2.95)$$

По теореме Пифагора из треугольника $PP^*S_2^*$ имеем

$$\frac{1}{2} t_2 = l_0 / (u^2 - v^2)^{1/2}, \quad (2.96)$$

где l_0 есть расстояние PS_2 . Из (2.96) и (2.95) находим t_2

$$t_2 = 2l_0/u' (1 - v^2/c^2)^{1/2}. \quad (2.97)$$

При вычислении времени пробега луча 1 из P в S_1 и обратно используем выражение для u из (2.89), так как луч 1 движется параллельно скорости v аппаратуры. За время t_1^+ пробега луча из точки P в точку S_1 зеркало S_1 пройдет расстояние vt_1^+ , так что общая длина пробега луча из P в S_1 составит $l + vt_1^+$, где

$$l = l_0 (1 - v^2/c^2)^{1/2} \quad (2.98)$$

есть расстояние PS_1 , измеренное в системе отсчета S . Отсюда получим, что

$$\frac{c/n + v}{1 + v/cn} t_1^+ = l + vt_1^+$$

или

$$t_1^+ = l_0 n (1 + v/cn) / c (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (2.99)$$

Время t_1^- есть время обратного пробега луча из S_1 в P . Оно находится заменой v на $-v$

$$t_1^- = l_0 n (1 - v/cn) / c (1 - v^2/c^2)^{1/2}.$$

Общее время

$$t_1 = t_1^+ + t_1^- = 2l_0 n / c (1 - v^2/c^2)^{1/2}, \quad (2.100)$$

т. е. $t_1 = t_2$, что и требовалось доказать.

Данный результат, даже если он указывает лишь на соответствие теории с экспериментом позволяет сделать выбор между формулой Френеля (1.47) и релятивистской формулой (2.86), отличающихся лишь величинами второго порядка. Используя в предыдущих вычислениях (1.47) вместо (2.86), для t_1 и t_2 получаем выражения

$$\left. \begin{aligned} t_1 &= 2nl/c (1 - v^2/c^2 n^2); \\ t_2 &= 2nl_0/c (1 - v^2/c^2 n^2)^{1/2}, \end{aligned} \right\} \quad (2.101)$$

из которых следует, что при $n \neq 1$ $t_2 \neq t_1$ даже в предположении, что расстояние PS_1 сокращается в соответствии с формулой Лоренца.

Следовательно, если отрицательный результат опыта Майкельсона рассматривается как экспериментальное подтверждение формулы Лоренца (2.98), то отрицательный результат соответствующего эксперимента с аппаратурой, заполненной сильно преломляющей средой, означал бы справедливость релятивистской формулы (2.85) также с точностью до членов высшего порядка*. Аналогично можно рассмотреть эксперимент Хука, который уже обсуждался в § 1.8.

Таким образом, можно утверждать, что релятивистская кинематика полностью соответствует экспериментальным результатам. Она дает простое объяснение всем эффектам увлечения без введения каких-либо дополнительных гипотез и приводит к формуле для доплер-эффекта, которая, в отличие от соответствующей формулы теории эфира, хорошо согласуется с экспериментом.

* Недавно подобный эксперимент был выполнен Шамиром и Фоксом [226] с ожидаемым нулевым результатом.

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ МЕХАНИКА

§ 3.1. Масса и импульс частицы

Как уже говорилось в заключении § 2.4, основные уравнения механики Ньютона необходимо изменить так, чтобы они соответствовали принципу относительности. Там, где все скорости малы по сравнению с c , релятивистская механика должна сводиться к ньютоновской механике. Естественно поэтому предположить, что такие фундаментальные понятия ньютоновской механики, как импульс и масса материальной частицы, имеют смысл и в релятивистской механике.

Таким образом, с каждой материальной частицей, движущейся относительно инерциальной системы S со скоростью \mathbf{u} , свяжем вектор импульса \mathbf{p} , пропорциональный \mathbf{u} :

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}. \quad (3.1)$$

Коэффициент пропорциональности m называется массой частицы. Для общности будем предполагать массу уже не постоянной величиной, как раньше, а универсальной функцией $f(u)$ от величины вектора скорости частицы $u = |\mathbf{u}|$:

$$m = m(u) = f(u). \quad (3.2)$$

Если скорость частицы относительно другой системы S' равна u' , то масса и импульс частицы в системе S' должны быть связаны уравнением

$$\mathbf{p}' = m'\mathbf{u}', \quad (3.3)$$

где

$$m' = m'(u') = f(u') \quad (3.4)$$

есть та же функция от u' , что и m от u . Это следует из принципа относительности, по которому все инерциальные системы совершенно равноправны, так что любое соотношение между физическими величинами должно быть форминвариантным.

Наша первая задача — найти функцию f . Эта функция однозначно определяется из требования, чтобы теорема о сохранении импульса выполнялась в любой инерциальной системе (Льюис [144]). Пусть S и S' — две инерциальные системы с относительной скоростью \mathbf{v} . Рассмотрим столкновение двух одинаковых частиц 1 и 2, двигавшихся со скоростями \mathbf{u}_1 и \mathbf{u}_2 относительно S до столкновения. Соответствующие скорости в системе S' определяются из (2.55). Предположим, что до столкновения скорости частиц удовлетворяли условию

$$\mathbf{u}'_2 = -\mathbf{u}_1. \quad (3.5)$$

Из (2.55) и (2.55') следует, что

$$\mathbf{u}'_1 = -\mathbf{u}_2. \quad (3.6)$$

После столкновения частицы будут иметь скорости $\bar{\mathbf{u}}_1$ и $\bar{\mathbf{u}}_2$ в системе S и $\bar{\mathbf{u}}'_1$, $\bar{\mathbf{u}}'_2$ в системе S' . Рассмотрим частный случай, когда начальная и конечная скорости частицы 1 имеют противоположные направления, т. е.

$$\bar{\mathbf{u}}_1 = -\alpha\mathbf{u}_1, \quad (3.7)$$

где α — положительное число.

Из соображений симметрии имеем также

$$\bar{\mathbf{u}}'_2 = -\alpha \mathbf{u}'_2 \quad (3.8)$$

с тем же коэффициентом пропорциональности α , так как в соответствии с (3.5) движение частицы 2 относительно наблюдателя в S' должно быть таким же, как и движение частицы 1 относительно наблюдателя в S . Из (3.5), (3.7) и (3.8) следует, что

$$\bar{\mathbf{u}}'_2 = -\bar{\mathbf{u}}_1, \quad (3.9)$$

откуда согласно (2.55) находим, что

$$\bar{\mathbf{u}}'_1 = -\bar{\mathbf{u}}_2.$$

Предполагая, что функциональное соотношение (3.2) после столкновения не меняется, из закона сохранения количества движения в системе S имеем

$$f(u_1) \mathbf{u}_1 + f(u_2) \mathbf{u}_2 = f(\bar{u}_1) \bar{\mathbf{u}}_1 + f(\bar{u}_2) \bar{\mathbf{u}}_2. \quad (3.10)$$

Предположим далее, что до столкновения скорость частицы 1 перпендикулярна \mathbf{v} , т. е.

$$(\mathbf{u}_1 \mathbf{v}) = 0, \quad (3.11)$$

что с учетом (3.5), (3.7) и (3.9) дает

$$(\mathbf{u}'_2 \mathbf{v}) = 0, \quad (3.12)$$

$$(\bar{\mathbf{u}}_1 \mathbf{v}) = (\bar{\mathbf{u}}'_2 \mathbf{v}) = 0. \quad (3.13)$$

Теперь при преобразовании скоростей u_2, \bar{u}_2 можно использовать простую формулу (2.57), откуда следует, что

$$\mathbf{u}_2 = \mathbf{u}'_2 (1 - v^2/c^2)^{1/2} + \mathbf{v} = \mathbf{v} - \mathbf{u}_1 (1 - v^2/c^2)^{1/2}; \quad (3.14)$$

$$u_2^2 = (\mathbf{u}_2 \cdot \mathbf{u}_2) = u_1^2 (1 - v^2/c^2) + v^2, \quad (3.15)$$

так как перекрестные члены согласно (3.11) равны нулю. Аналогично, учитывая (3.9), имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{u}}_2 &= \bar{\mathbf{u}}'_2 (1 - v^2/c^2)^{1/2} + \mathbf{v} = -\bar{\mathbf{u}}_1 (1 - v^2/c^2)^{1/2} + \mathbf{v}; \\ \bar{u}_2^2 &= \bar{u}_1^2 (1 - v^2/c^2) + v^2. \end{aligned} \right\} \quad (3.16)$$

Подставив (3.14), (3.15) и (3.16) в (3.10), получим следующее векторное уравнение:

$$\begin{aligned} & \left[f(u_1) - (1 - v^2/c^2)^{1/2} f\left(\sqrt{u_1^2 (1 - v^2/c^2) + v^2}\right) \right] \mathbf{u}_1 + \\ & + f\left(\sqrt{u_1^2 (1 - v^2/c^2) + v^2}\right) \mathbf{v} = \left[f(\bar{u}_1) - (1 - v^2/c^2)^{1/2} f\left(\sqrt{\bar{u}_1^2 (1 - v^2/c^2) + v^2}\right) \right] \bar{\mathbf{u}}_1 + \\ & + f\left(\sqrt{\bar{u}_1^2 (1 - v^2/c^2) + v^2}\right) \mathbf{v}. \end{aligned} \quad (3.17)$$

Умножая это уравнение на \mathbf{v} и учитывая (3.11) и (3.13), имеем

$$f\left(\sqrt{u_1^2 (1 - v^2/c^2) + v^2}\right) = f\left(\sqrt{\bar{u}_1^2 (1 - v^2/c^2) + v^2}\right).$$

Поэтому, если f — монотонная функция от аргумента, то

$$\bar{u}_1 = u_1, \quad (3.18)$$

т. е. $\alpha = 1$ в (3.7). Отсюда следует, что члены, пропорциональные \mathbf{v} в (3.17), сокращаются, а коэффициенты при \mathbf{u}_1 и $\bar{\mathbf{u}}_1$ равны.

Тогда уравнение (3.17) принимает более простой вид:

$$[f(u_1) - f(\sqrt{\{u_1^2(1-v^2/c^2) + v^2\}})(1-v^2/c^2)^{1/2}](\mathbf{u}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1) = 0. \quad (3.19)$$

Более того, поскольку из (3.7) и (3.18) следует, что

$$\mathbf{u}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1 = 2\mathbf{u}_1 \neq 0,$$

коэффициент при $\mathbf{u}_1 - \bar{\mathbf{u}}_1$ в (3.19) должен равняться нулю, т. е.

$$f(u_1) = (1-v^2/c^2)^{1/2} f(\sqrt{\{u_1^2(1-v^2/c^2) + v^2\}}). \quad (3.20)$$

Если потребовать сохранения импульса для любых столкновений (типа рассмотренного), то функция f должна удовлетворять уравнению (3.20) при всех значениях независимых переменных u и v . Решение этого функционального уравнения получим, если устремим u_1 в (3.20) к нулю; тогда

$$f(v) = f(0)/\sqrt{1-v^2/c^2}. \quad (3.21)$$

Функция $f(u)$, определяемая из (3.21), удовлетворяет уравнению (3.20) при всех значениях u_1 и v .

Таким образом, из (3.2) и (3.21) получаем следующее выражение для релятивистской массы частицы, движущейся со скоростью \mathbf{u} :

$$m = m_0/\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad (3.22)$$

где мы положили $f(0) = m_0$.

Постоянная m_0 (так называемая собственная масса или масса покоя частицы) тождественна массе частицы в ньютоновской механике; предположение, предшествовавшее (3.10), очевидно, означает, что масса покоя не меняется при столкновениях рассмотренного типа.

Для импульса частицы, согласно (3.1) и (3.2), теперь имеем выражение

$$\mathbf{p} = m_0 \mathbf{u} / \sqrt{1-u^2/c^2}. \quad (3.23)$$

§ 3.2. Сила, работа, кинетическая энергия

Скорость, а значит и импульс свободной частицы не зависят от времени. Если импульс частицы изменяется, то говорят, что действует сила \mathbf{F} , равная изменению импульса в единицу времени:

$$\mathbf{F} = d\mathbf{p}/dt. \quad (3.24)$$

Уравнение (3.24), совпадающее при малых скоростях частиц со вторым законом Ньютона нерелятивистской механики, рассматривается как определение силы в релятивистской механике. Его можно считать уравнением движения только тогда, когда известно, каким образом сила \mathbf{F} зависит от физического состояния системы, являющегося причиной изменения импульса частицы.

Как и в механике Ньютона, работа A , произведенная силой в единицу времени, равна

$$A = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}), \quad (3.25)$$

где \mathbf{u} — скорость частицы. Кинетическая энергия T частицы определяется уравнением

$$dT/dt = A = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}). \quad (3.26)$$

Иначе говоря, изменение кинетической энергии в единицу времени равно работе силы.

С помощью (3.23) и (3.24) правую часть уравнения (3.26) запишем в виде

$$A = \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d}{dt} \cdot \frac{m_0 \mathbf{u}}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} \right) = \frac{m_0}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} \left(\mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt} \right) + \\ + \frac{m_0 u^2}{c^2 (1-u^2/c^2)^{3/2}} \mathbf{u} \cdot \frac{d\mathbf{u}}{dt}$$

или, учитывая, что $\mathbf{u} \cdot d\mathbf{u}/dt = u \cdot du/dt$, получаем

$$A = \frac{m_0 u}{(1-u^2/c^2)^{3/2}} \cdot \frac{du}{dt} = \frac{d}{dt} \left(\frac{m_0 c^2}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} \right). \quad (3.27)$$

Подставляя (3.27) в правую часть уравнения (3.26) и интегрируя его, найдем кинетическую энергию частицы в явном виде:

$$T = m_0 c^2 \sqrt{1-u^2/c^2} + C, \quad (3.28)$$

где C — постоянная интегрирования.

Предполагая, что при $u = 0$ кинетическая энергия равна нулю, имеем

$$C = -m_0 c^2,$$

откуда

$$T = \frac{m_0 c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} - m_0 c^2. \quad (3.29)$$

Когда скорость частицы u мала по сравнению с c , выражение (3.29) можно разложить в ряд по малому параметру $(u/c)^2$ и в первом приближении получить ньютоновское выражение для кинетической энергии

$$T = (1/2) m_0 u^2. \quad (3.30)$$

Аналогичным образом все величины релятивистской механики и соотношения между ними при скоростях, малых по сравнению со скоростью света, совпадают с соответствующими величинами и соотношениями между ними ньютоновской механики. Интересно отметить, что все отклонения релятивистской механики от механики Ньютона по крайней мере второго порядка по u/c . Вот почему первоначальная электронная теория, базирующаяся на механике Ньютона, могла объяснить все эффекты первого порядка. Когда скорость u имеет величину порядка c , различие между релятивистской и ньютоновской механиками становится значительным. При $u \rightarrow c$ масса (3.22) и кинетическая энергия (3.29) становятся бесконечно большими, поэтому в релятивистской механике скорость света является предельной скоростью.

§ 3.3. Преобразование силы, импульса и энергии

Рассмотрим снова две инерциальные системы S и S' , соответствующие специальным преобразованиям Лоренца (2.24). В обеих системах импульс и кинетическая энергия частицы задаются формулами вида (3.23) и (3.29). Уравнения для преобразований импульса и кинетической энергии получим с помощью преобразований (2.45) скорости частицы.

Введем дополнительно величину E , определяемую соотношением

$$E = T + m_0 c^2 = \frac{m_0 c^2}{(1-u^2/c^2)^{1/2}} = m c^2. \quad (3.31)$$

Поскольку E отличается от кинетической энергии лишь на постоянную величину $m_0 c^2$, ее также можно рассматривать как меру кинетической энергии частицы. Эту величину часто называют просто энергией свободной частицы, пренебрегая при этом на время физическим смыслом постоянной добавки $m_0 c^2$. Аналогичная величина $E' = T' + m_0 c^2$ вводится и в системе S' .

С помощью (3.23), (3.31) и соотношений, обратных (2.45) и (2.48), получим:

$$p_x = \frac{m_0 u_x}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_0 (1+vu'_x/c^2)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u'^2/c^2)}} \left(\frac{u'_x+v}{1+vu'_x/c^2} \right) = \\ = \frac{m_0 (u'_x+v)}{\sqrt{(1-v^2/c^2)(1-u'^2/c^2)}},$$

т. е.

$$p_x = \frac{p'_x + vE'/c^2}{\sqrt{1-v^2/c^2}}. \quad (3.32a)$$

Аналогичным образом найдем, что

$$p_y = p'_y; \quad p_z = p'_z; \quad E = \frac{E' + vp'_x}{(1-v^2/c^2)^{1/2}}. \quad (3.32б)$$

Сравнивая уравнения (3.32) с преобразованиями Лоренца (2.24), видим, что четыре величины

$$p_x, p_y, p_z, E/c^2 \quad (3.33)$$

преобразуются подобно пространственно-временным координатам x, y, z, t . Поэтому по аналогии с уравнениями (2.15), (2.13) и (2.13') имеем

$$p^2 - E^2/c^2 = p'^2 - E'^2/c^2. \quad (3.34)$$

В соответствии с (3.23) и (3.31) инвариант (3.34) имеет постоянное значение $-m_0^2 c^2$. В любой инерциальной системе

$$p^2 - E^2/c^2 = -m_0^2 c^2,$$

т. е.

$$E = c(m_0^2 c^2 + p^2)^{1/2}. \quad (3.35)$$

Отсюда скорость частицы

$$u = pc^2/E = dE/dp. \quad (3.36)$$

Поскольку величины (3.33) преобразуются как координаты (x, y, z, t) при вращениях декартовых осей, формулы преобразования для импульса и энергии в случае общих преобразований Лоренца (2.25') можно записать в векторной форме

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= \mathbf{p}' + \frac{\mathbf{v}}{v^2} \frac{(\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}') \{1 - (1 - v^2/c^2)^{1/2}\} + E' v^2/c^2}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}; \\ E &= \frac{E' + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{p}')}{\sqrt{(1 - v^2/c^2)}}. \end{aligned} \right\} \quad (3.37)$$

Теперь легко видеть, что (3.34), которое аналогично (2.30), является следствием (3.37).

Рассмотрим систему из n свободных частиц. Если импульс и энергию i -й частицы обозначить $p^{(i)}$ и $E^{(i)} = T^{(i)} + m_0^{(i)} c^2$ соответственно, где $T^{(i)}$ — кинетическая энергия, а $m_0^{(i)}$ — масса покоя i -й частицы, то полный импульс и энергия системы определяются выражениями

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= \sum_{i=1}^n \mathbf{p}^{(i)}; & E &= \sum_{i=1}^n E^{(i)} = T + m_0 c^2; \\ T &= \sum_{i=1}^n T^{(i)}; & m_0 &= \sum_{i=1}^n m_0^{(i)}. \end{aligned} \right\} \quad (3.38)$$

Поскольку преобразования (3.32) или (3.37) линейны и справедливы для каждой частицы, аналогичные преобразования справедливы и для полной энергии и импульса системы. Таким образом, уравнения (3.32) и (3.37) можно использовать и для системы свободных частиц, где \mathbf{p} , E и T обозначают полный импульс и энергию системы, а m_0 , согласно (3.38), есть сумма собственных масс частиц. Из этих же уравнений следует, что если теорема о сохранении количества движения при столкновении между частицами справедлива в каждой инерциальной системе, то полная энергия E также сохраняется в любой инерциальной системе.

Возвращаясь к системе из одной частицы с постоянной массой покоя, уравнения (3.24) и (3.26) записываем в форме

$$d\mathbf{p}/dt = \mathbf{F}; \quad (3.39a)$$

$$dE/dt = (\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}). \quad (3.39b)$$

Поскольку уравнения (3.39) выполняются в любой инерциальной системе, закон преобразования для силы \mathbf{F} можно получить из известных преобразований для величин в левых частях (3.39). Из уравнений (2.25)' и (2.26) имеем

$$dt/dt' = (1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}')/c^2) / \sqrt{1 - v^2/c^2}.$$

Поэтому с помощью (3.37) окончательно получим

$$\mathbf{F} = \frac{d\mathbf{p}}{dt} \frac{dt'}{dt} = \frac{(1 - v^2/c^2)^{1/2} \mathbf{F}' + \mathbf{v} [(\mathbf{v} \cdot \mathbf{F}') \{1 - (1 - v^2/c^2)^{1/2}\} + (\mathbf{F}' \cdot \mathbf{u}') v^2/c^2] / v^2}{1 + (\mathbf{v} \cdot \mathbf{u}')/c^2}, \quad (3.40)$$

где \mathbf{F}' — сила, измеренная в инерциальной системе S' . В релятивистской механике сила уже не является абсолютным понятием, как в механике Ньютона.

Если вместо t ввести собственное время частицы τ , а силу Минковского определить соотношением

$$\mathbf{F}_M = \mathbf{F} / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (3.41)$$

то уравнения (3.39) с помощью (2.38) можно представить в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{d\tau} = \mathbf{F}_M, \quad \frac{dE}{d\tau} = \mathbf{F}_M \cdot \mathbf{u}. \quad (3.42)$$

Поскольку τ — инвариант, величины $\{\mathbf{p}, E/c^2\}$ в левых частях (3.42) преобразуются подобно пространственно-временным координатам (x, t) . То же справедливо и для величин $\{\mathbf{F}_M, (\mathbf{F}_M \mathbf{u})/c^2\}$. Это можно проверить непосредственно с помощью формул (3.40), (2.55) и (2.56).

§ 3.4. Гиперболическое движение. Движение электрически заряженной частицы в постоянном магнитном поле

Уравнение (3.39) можно рассматривать как уравнение движения только тогда, когда известно, как именно зависит сила \mathbf{F} от переменных физической системы, вызывающих изменение импульса частицы. Когда скорость частицы мала по сравнению с c , релятивистские уравнения должны совпадать со вторым законом Ньютона. Поэтому в инерциальной системе S^0 , относительно которой частица в рассматриваемый момент имеет нулевую скорость, силу \mathbf{F}^0 можно считать тождественной ньютоновой силе. Тогда с помощью (3.40) можно вычислить силу \mathbf{F} в произвольной инерциальной системе S . Пусть скорость частицы относительно S равна \mathbf{u} ; если S' в (3.40) — система покоя S^0 , то $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ и $\mathbf{u}' = 0$, и для силы \mathbf{F} в системе S получим выражение

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2} + \mathbf{u} ((\mathbf{u} \cdot \mathbf{F}^0)/u^2) \{1 - (1 - u^2/c^2)^{1/2}\}, \quad (3.43)$$

где F^0 — ньютонова сила. Разлагая каждую силу на две компоненты, параллельную и перпендикулярную \mathbf{u} , т. е.

$$\mathbf{F} = \mathbf{F}_{\parallel} + \mathbf{F}_{\perp}; \quad F^0 = F_{\parallel}^0 + F_{\perp}^0,$$

получаем вместо (3.43) простые уравнения

$$\mathbf{F}_{\parallel} = F_{\parallel}^0; \quad \mathbf{F}_{\perp} = F_{\perp}^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2}. \quad (3.43')$$

Таким образом, зная силу F^0 , с помощью (3.43) или (3.43') можно вычислить силу \mathbf{F} в любой инерциальной системе S . Можно показать, например (см. § 5.7), что сила, действующая на заряженную частицу в электрическом поле \mathbf{E} и магнитном поле \mathbf{H} , определяется формулой Лоренца

$$\mathbf{F} = e\{\mathbf{E} + (1/c)(\mathbf{u} \times \mathbf{H})\}, \quad (3.44)$$

где \mathbf{u} — скорость частицы; e — ее электрический заряд и $\mathbf{u} \times \mathbf{H}$ — векторное произведение векторов \mathbf{u} и \mathbf{H} .

Теперь левую часть уравнения движения (3.39) с помощью (3.1), (3.31) и (3.39) можно записать в виде

$$\frac{d\mathbf{p}}{dt} = \frac{d(m\mathbf{u})}{dt} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{dm}{dt} \mathbf{u} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \frac{1}{c^2} \frac{dE}{dt} \mathbf{u} = m \frac{d\mathbf{u}}{dt} + \left(\frac{\mathbf{F} \cdot \mathbf{u}}{c^2} \right) \mathbf{u},$$

где m — релятивистская масса, определяемая формулой (3.22). Подставив данное выражение в уравнение (3.39), получим уравнение движения в форме

$$m d\mathbf{u}/dt = \mathbf{F} - \mathbf{u}(\mathbf{F}\mathbf{u})/c^2. \quad (3.45)$$

Итак, направление ускорения в общем случае уже не совпадает с направлением силы, поэтому движение частицы в релятивистской механике является более сложным, чем в механике Ньютона. И только в том случае, когда сила параллельна или перпендикулярна мгновенной скорости \mathbf{u} , движение частицы относительно простое.

Разберем оба случая. Пусть на частицу действует постоянная сила $F = m_0 g$, направление которой совпадает с направлением начальной скорости частицы. В соответствии с (3.45) частица будет продолжать двигаться в том же направлении. Поэтому траекторией частицы будет прямая линия, которую можно взять в качестве оси x , тогда уравнение (3.39a) примет вид

$$\frac{d}{dt} \left\{ \frac{u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right\} = \frac{F}{m_0} = g; \quad u = \frac{dx}{dt}.$$

Предполагая, что скорость частицы равна нулю при $t = 0$, и интегрируя, получаем, что

$$u / \sqrt{1 - u^2/c^2} = gt,$$

или

$$u = dx/dt = gt / \sqrt{1 + (gt/c)^2}. \quad (3.46)$$

Если предположить далее, что $x = 0$ при $t = 0$, то второе интегрирование даст

$$x = (c^2/g) \{ [1 + (gt/c)^2]^{1/2} - 1 \} \quad (3.47)$$

или

$$(x + c^2/g)^2 - c^2 t^2 = c^4/g^2. \quad (3.48)$$

Уравнение (3.48) в плоскости xt изображается гиперболой, поэтому рассмотренное движение называется гиперболическим движением [31, 237].

Если $(gt)^2 \ll c^2$, то, пренебрегая членами порядка gt/c и выше, получаем из (3.47) обычное уравнение

$$x = (1/2) gt^2,$$

описывающее движение с постоянным ускорением.

Для больших значений t , т. е. при больших скоростях, увеличение x с возрастанием t происходит медленнее, чем в механике Ньютона. При $t \rightarrow \infty$ скорость u , определяемая формулой (3.46), стремится к конечной величине c независимо от значения g . Таким образом, даже при действии очень большой постоянной силы на частицу скорость света никогда не достигается. Это соответствует выводу § 2.7. Движение заряженной частицы в постоянном электрическом поле, направление которого параллельно скорости частицы, как раз является движением рассмотренного вида.

Пусть теперь частица движется в постоянном магнитном поле \mathbf{H} . Сила, действующая на частицу со стороны магнитного поля, в соответствии с (3.44) равна

$$\mathbf{F} = (e/c) (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) = (e/c) (\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{H}), \quad (3.49)$$

т. е. сила перпендикулярна скорости \mathbf{u} , \mathbf{u}_\perp и \mathbf{H} . Поэтому $(\mathbf{F}\mathbf{u}) = 0$, и уравнение движения (3.45) принимает тот же вид, что и в ньютоновской механике, т. е.

$$m d\mathbf{u}/dt = \mathbf{F} = (e/c) (\mathbf{u}_\perp \times \mathbf{H}). \quad (3.50)$$

Здесь m — релятивистская масса, которая в данном случае является постоянной величиной, так как энергия частицы E в соответствии с (3.39б) не меняется со временем, поэтому не меняется и значение вектора скорости \mathbf{u} .

Из (3.50) следует, что составляющая ускорения в направлении \mathbf{H} равна нулю, т. е. составляющая скорости в направлении поля \mathbf{u}_\parallel — величина постоянная, а вместе с ней постоянна и перпендикулярная составляющая \mathbf{u}_\perp , так как величина вектора скорости не меняется со временем. Поэтому траектория частицы будет винтовой линией с осью, параллельной \mathbf{H} . Ее проекция на плоскость, перпендикулярную \mathbf{H} , является окружностью с радиусом ρ , определяемым из условия, что при круговом движении центростремительная сила mu_\perp^2/ρ должна равняться силе (3.49). Отсюда следует, что

$$mu_\perp^2/\rho = (e/c) u_\perp \cdot H$$

или

$$\rho_\perp = mu_\perp = (e/c) H\rho. \quad (3.51)$$

Если скорость частицы перпендикулярна направлению поля, то

$$\rho = (e/c) H\rho. \quad (3.52)$$

Это уравнение позволяет с помощью измерений \mathbf{H} и ρ определить импульс частицы. Эта формула особенно полезна при исследовании космических лучей, β -излучения и в масс-спектрокопии.

§ 3.5. Эквивалентность массы и энергии

Рассмотрим снова систему Σ_1 , состоящую из свободных частиц. Если (\mathbf{p}, E) и (\mathbf{p}', E') — полный импульс и энергия системы в двух инерциальных системах S и S' , то соотношения между ними определяются по формулам (3.37). Для такой системы инвариант (3.34) всегда отрицателен. При $n = 1$ этот инвариант, в соответствии с (3.35), равен $-m_0^2 c^2$, и, поскольку (3.35) выполняется для каждой частицы, вся величина $p^2 - E^2/c^2$ при $n > 1$ должна быть меньше $-\sum_i (m_0^{(i)} c)^2$. Следовательно, всегда можно выбрать систему S' , в которой полный импульс \mathbf{p}' равен нулю. Поэтому, полагая $\mathbf{p}' = 0$ в (3.37), получаем следующее выражение для относительной скорости \mathbf{v} двух систем отсчета S и S' :

$$\mathbf{v} = (c^2/E) \mathbf{p}. \quad (3.53)$$

Поскольку $p^2 - E^2/c^2 < 0$, то $E > c\rho$, и относительная скорость v всегда меньше c , что и требовалось доказать.

Инерциальная система S^0 , в которой $p^0 = 0$, называется системой покоя для Σ_1 или системой центра масс, так как система Σ_1 как целое имеет механические свойства, аналогичные свойствам частицы в системе покоя S^0 . Пусть u — скорость системы S^0 относительно произвольной инерциальной системы S , тогда u обозначает также скорость, с которой Σ_1 как целое движется относительно S .

Отождествляя в (3.37) систему S' с S^0 , получаем, что

$$p = E^0 u/c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}; \quad E = E^0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (3.54)$$

Эти соотношения выражают зависимость полного импульса и полной энергии системы Σ_1 от скорости системы. Теперь естественно определить полную массу системы, как и для одной частицы, в виде отношения полного импульса к скорости [см. уравнение (3.1)]. В соответствии с (3.54) полная масса M системы Σ_1 есть

$$M = (E^0/c^2) / \sqrt{1 - u^2/c^2} = E/c^2 = M_0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (3.55)$$

Это соответствует массе покоя $M_0 = E^0/c^2$, которую с помощью (3.38) можно представить в виде

$$M_0 = E^0/c^2 = m_0 + T^0/c^2, \quad (3.56)$$

где m_0 — сумма масс покоя всех частиц, а T^0 — полная кинетическая энергия в системе покоя.

Выражения (3.54) для импульса и энергии системы Σ_1 с учетом (3.56) становятся совершенно аналогичными выражениям (3.23) и (3.31) для импульса и энергии одной частицы. Из (3.56) видно, что полная масса покоя системы Σ_1 больше суммы масс покоя всех частиц m_0 на величину T^0/c^2 . Таким образом, внутренняя кинетическая энергия системы Σ_1 увеличивает инертную массу системы на T^0/c^2 .

С помощью (3.54) и (3.56) инвариант (3.34) можно представить в виде

$$p^2 - E^2/c^2 = -M_0 c^2, \quad (3.57)$$

что аналогично выражению (3.35) для одной частицы. Формулу (3.57) можно рассматривать как определение массы покоя системы Σ_1 .

Важный вывод о соответствии кинетической энергии системы свободных частиц их инертной массе можно распространить на любой вид энергии.

Предполагая справедливыми общие законы сохранения, можно показать, что

$$\Delta m = \Delta E/c^2. \quad (3.58)$$

Для доказательства этой важной теоремы рассмотрим «столкновение» системы свободных частиц Σ_1 с другой произвольной физической системой Σ_2 , при котором определенное количество энергии и импульса переходит из системы Σ_1 в Σ_2 . Частицы в системе Σ_1 до и после столкновения — свободные, поэтому полная энергия и полный импульс системы до и после столкновения преобразуются в соответствии с (3.32) и (3.37). Вычитая преобразование для энергии и импульса системы после столкновения из соответствующего преобразования для энергии и импульса до столкновения, получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta p &= \Delta p' + \frac{v}{v^2} \cdot \frac{(v \Delta p') \{1 - (1 - v^2/c^2)^{1/2}\} + v^2 \Delta E'/c^2}{\sqrt{1 - v^2/c^2}}; \\ \Delta E &= [\Delta E' + (v \Delta p')]/\sqrt{1 - v^2/c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (3.59)$$

где $(\Delta p, \Delta E)$ и $(\Delta p', \Delta E')$ — уменьшения полного импульса и энергии системы в результате столкновения (измеренные в системах S и S' соответственно). Если в течение всего процесса энергия и импульс сохраняются, то соответствующие величины системы Σ_2 возрастут на Δp и ΔE в инерциальной системе

S и на $\Delta p'$ и $\Delta E'$ — в системе S' . Тогда из (3.59) следует по аналогии с (3.34), что выражение

$$|\Delta p|^2 - (\Delta E)^2/c^2 = |\Delta p'|^2 - (\Delta E')^2/c^2 \quad (3.60)$$

является инвариантом. Когда этот инвариант отрицателен, снова можно найти инерциальную систему $S' = S^0$, в которой $\Delta p' = \Delta p^0 = 0$. Тогда из (3.59) получим

$$\Delta p = \frac{u \Delta E^0/c^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; \quad \Delta E = \frac{\Delta E^0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad (3.61)$$

где u — скорость системы S^0 относительно системы S . Из сравнения этих уравнений с (3.22) и (3.29) следует, что энергии ΔE^0 , перешедшей в систему Σ_2 , нужно сопоставить массу покоя

$$\Delta m_0 = \Delta E^0/c^2 \quad (3.62)$$

и массу Δm , измеренную в S :

$$\Delta m = \Delta m_0 / \sqrt{1-u^2/c^2} = (\Delta E^0/c^2) / \sqrt{1-u^2/c^2} = \Delta E/c^2. \quad (3.63)$$

Изменение импульса системы Σ_2 в течение процесса столкновения соответствует добавлению к Σ_2 одной частицы с массой покоя Δm_0 и скоростью u относительно S . Теперь инвариант (3.60) по аналогии с (3.35) можно представить в форме

$$|\Delta p|^2 - (\Delta E)^2/c^2 = -(\Delta m_0)^2 c^2. \quad (3.64)$$

Это уравнение дает простое выражение для массы покоя перешедшей в Σ_2 энергии. Поскольку Σ_2 — произвольная физическая система, перешедшая в нее энергия может быть любого вида, так что формула (3.63) справедлива для всех видов энергии. В качестве Σ_2 можно, например, выбрать электромагнитное поле, тогда полученная энергия имеет форму электромагнитного излучения. Преобразования энергии и импульса электромагнитного излучения должны определяться уравнениями (3.59). Далее, Σ_2 может быть телом, преобразующим полученную энергию ΔE в тепло, и поскольку приращению энергии ΔE соответствует приращение массы Δm [см. (3.63)], то масса тела увеличивается при нагревании. Наконец, Σ_2 может быть системой, переводящей кинетическую энергию в потенциальную. Это значит, что потенциальной энергии также соответствует определенная инертная масса.

Из предыдущего, в частности из уравнения (3.64), следует, что понятие о массе некоторого количества энергии ΔE имеет определенный смысл только при известном импульсе Δp , соответствующем ΔE . Чтобы эта масса была действительной, левая часть в (3.64) должна быть отрицательной. Только при

$$|\Delta E| > c |\Delta p| \quad (3.65)$$

можно говорить о системе покоя и, следовательно, об определенной массе и скорости энергии.

ΔE может быть и отрицательной, так что в действительности происходит переход энергии в систему Σ_1 . Таким образом, рассматривая процесс, при котором полный импульс p_2 и энергия E_2 системы Σ_2 переходят в систему Σ_1 , видим, что уравнения (3.59) должны выполняться и для полного импульса и полной энергии произвольной системы. Если, кроме того, выполняется соотношение

$$p_2^2 - E_2^2/c^2 \leq 0, \quad (3.66)$$

то система имеет действительную массу покоя, определяемую (3.64):

$$-M_0^2 c^2 = p_2^2 - E_2^2/c^2. \quad (3.67)$$

Когда $p_2^2 - E_2^2/c^2 = 0$, масса покоя системы также равна нулю.

Если Σ_2 — система полей, где плотность энергии поля есть однородная положительно определенная функция переменных поля, то (3.66) всегда выполняется. Когда $E_2 < cp_2$, всегда можно выбрать инерциальную систему S' , в которой $E_2' = 0$, $p_2' \neq 0$. Для этого в преобразованиях (3.59) достаточно положить

$$v = E_2 p_2 / p_2^2, \quad |v| < c. \quad (3.68)$$

Тогда из соотношений, обратных (3.59), имеем

$$E_2' = [E_2 - (vp_2)] / \sqrt{1 - v^2/c^2} = 0; \\ p_2' = (p_2^2 - E_2^2/c^2)^{1/2} > 0.$$

В силу сделанного предположения о зависимости плотности энергии от переменных поля E_2' может равняться нулю только в том случае, когда само поле исчезает, в этом случае импульс p_2' также должен равняться нулю. Поэтому естественно допустить, что соотношение (3.66) выполняется для любой макроскопической физической системы. Простым примером системы, для которой выполняется знак равенства в (3.66), является последовательность плоских электромагнитных волн. В соответствии с (3.67) такая система волн должна иметь нулевую массу покоя и скорость $u = c^2 p_2' / E_2 = c$ в любой инерциальной системе отсчета.

Наоборот, можно показать, что любая материальная частица массы m должна обладать энергией $E = mc^2$, причем в системе покоя частицы ее энергия есть $E_0 = m_0 c^2$. Это утверждение имеет реальный смысл только тогда, когда энергию, соответствующую массе частицы, можно преобразовать в другие виды энергии, например в кинетическую энергию других частиц. Мы не можем заранее знать, что такие «аннигиляционные процессы» действительно существуют в природе, но можем показать, что если они при определенных условиях существуют и для них справедлив принцип относительности и все законы сохранения импульса и энергии, то количество высвободившейся энергии при аннигиляции массы m_0 должно равняться $E_0 = m_0 c^2$.

Для доказательства этого утверждения предположим, что высвободившаяся при аннигиляции энергия и импульс перешли в систему Σ_1 свободных частиц. Рассмотрим снова произвольную инерциальную систему S и систему покоя S^0 . Если $(\Delta p, \Delta E)$ и $(\Delta p^0, \Delta E^0)$ — количества перешедшей энергии и импульса, измеренные в S и S^0 соответственно, то из (3.59) имеем

$$\Delta p = \Delta p^0 + \frac{u}{u^2} \cdot \frac{(u \Delta p^0) \{1 - \sqrt{(1 - u^2/c^2)}\} + u^2 \Delta E^0 / c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad (3.69)$$

где u — скорость частицы относительно S .

Поскольку импульс частицы в системе покоя равен нулю и, кроме того, энергия и импульс частицы после ее аннигиляции равны нулю в любой системе отсчета, то

$$\Delta p^0 = 0; \quad \Delta E^0 = E_0, \quad (3.70)$$

где E_0 — неизвестная энергия, содержащаяся в частице до ее аннигиляции. Кроме того, Δp равна импульсу p частицы относительно S до аннигиляции, т. е.

$$\Delta p = p = m_0 u / \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (3.71)$$

Подставив (3.70) и (3.71) в (3.69), получим

$$m_0 u / \sqrt{1 - u^2/c^2} = E_0 u / c^2,$$

или

$$E_0 = m_0 c^2. \quad (3.72)$$

Тогда в соответствии с (3.22) и (3.29) полная энергия частицы, движущейся со скоростью u , равна

$$E = E_0 + T = m_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2} = mc^2. \quad (3.73)$$

Теперь ясен физический смысл величины E , определяемой формулой (3.31). Энергия E_0 в формуле (3.72) называется собственной энергией или энергией покоя частицы.

Таким образом, мы получили общее доказательство знаменитой формулы Эйнштейна [65, 68, 147, 148]

$$E = mc^2, \quad (3.74)$$

которая утверждает, что любая энергия E обладает инертностью, соответствующей массе E/c^2 , и что любую массу m можно представить в виде энергии mc^2 . Эта теорема об эквивалентности массы и энергии является важнейшим результатом специальной теории относительности. Необходимо заметить, что масса в этой теореме — инертная масса. Однако, как мы увидим в § 8.2, один из важнейших постулатов общей теории относительности — эквивалентность инертной и гравитационной масс. Поэтому энергии E можно приписать и гравитационную массу m , определяемую формулой (3.74).

§ 3.6. Неупругие столкновения. Масса замкнутой системы частиц

Прежде чем приступить к обсуждению экспериментальной проверки релятивистской механики, разберем несколько простых примеров, иллюстрирующих общую теорему об эквивалентности массы и энергии.

Для начала рассмотрим неупругое лобовое столкновение двух глиняных шаров с одинаковыми массами покоя m_0 , движущихся в инерциальной системе $S' = S^0$ по одной линии навстречу друг другу с одинаковой скоростью. Полные импульс и энергия в системе центра масс S^0 до столкновения равны

$$\mathbf{p}^0 = 0; \quad E^0 = 2m_0 c^2 + T^0, \quad (3.75)$$

где T^0 — полная кинетическая энергия.

В системе S , относительно которой S^0 движется со скоростью \mathbf{u} , полные импульс и энергия до столкновения в соответствии с (3.37) и (3.75) определяются выражениями

$$\mathbf{p} = (2m_0 + T^0/c^2) \mathbf{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2}; \quad (3.76a)$$

$$E = (2m_0 c^2 + T^0) / \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (3.76b)$$

При неупругом столкновении оба шара слипаются и образуют один большой шар; по теореме о сохранении импульса этот шар в системе S имеет нулевой импульс и, следовательно, нулевую скорость. Первоначальная кинетическая энергия обеих частиц T^0 в S^0 переходит в тепло, и по закону сохранения энергии количество образовавшейся тепловой энергии Q^0 равно

$$Q^0 = T^0. \quad (3.77)$$

Глиняный шар после столкновения имеет скорость \mathbf{u} относительно S и импульс

$$\mathbf{p} = M_0 \mathbf{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (3.78)$$

где M_0 — масса покоя шара после столкновения. По закону сохранения импульса в системе S выражения для \mathbf{p} в формулах (3.76a) и (3.78) должны быть равны. Тогда с учетом (3.77) получим

$$M_0 = 2 m_0 + Q_0/c^2, \quad (3.79)$$

т. е. масса покоя M_0 шара после столкновения равна суммарной массе покоя обоих шаров плюс масса, эквивалентная тепловой энергии. Энергия шара в си-

стеме S после столкновения, в соответствии с (3.77) и (3.79), определяется выражением

$$E = M_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2} = (2m_0 c^2 + T^0) / \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (3.80)$$

и равна полной энергии шаров до столкновения (3.766), что соответствует закону сохранения энергии в S . Для изменения полной кинетической энергии в процессе столкновения с помощью формул (3.76), (3.79) и (3.77) получим следующее выражение:

$$T_{\text{до}} - T_{\text{после}} = \left\{ \frac{2m_0 c^2 + T_0}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 2m_0 c^2 \right\} - M_0 c^2 \left\{ \frac{2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} - 1 \right\} = Q^0. \quad (3.81)$$

Таким образом, изменение полной кинетической энергии является инвариантом, не зависящим от инерциальной системы, в которой вычисляется кинетическая энергия. Чтобы показать наличие инертности потенциальной энергии, рассмотрим систему Σ , состоящую из некоторого количества частиц, удерживающихся вместе благодаря силам притяжения.

Предположим, что существует инерциальная система S' , в которой скорости всех частиц малы по сравнению со скоростью света, так что в S' можно с хорошим приближением пользоваться нерелятивистской механикой Ньютона. Пренебрегая типично атомными явлениями, обусловленными существованием планковского кванта действия, мы можем в качестве такой механической системы рассматривать атомное ядро, поскольку элементарные частицы, из которых построены атомные ядра, нуклоны, настолько тяжелы, что их скорости в общем случае можно считать малыми по сравнению с c . Данное предположение означает, что собственные времена отдельных частиц в Σ практически совпадают и равны времени t' в системе S' и, кроме того, что силы связи между частицами мгновенны и удовлетворяют третьему закону Ньютона. Если эти силы консервативны, то в системе S' они определяются как градиенты потенциальной функции V' , зависящей от расстояния между частицами. В соответствии с механикой Ньютона при движении частиц сумма полной кинетической и потенциальной энергии не изменяется со временем, т. е.

$$T' + V' = H' = \text{const.} \quad (3.82)$$

Конечно, полная кинетическая энергия в общем случае меняется со временем. Выберем произвольную постоянную в выражении для потенциальной энергии так, чтобы $V' = 0$, если частицы расположены достаточно далеко друг от друга и силы взаимодействия между ними отсутствуют. Тогда в любом состоянии, при котором частицы связаны, $V' < 0$.

Среди всех возможных инерциальных систем S' выберем такую систему S^0 , в которой центр тяжести Σ покоится. В S^0 суммарный импульс всех частиц \mathbf{p}^0 равен нулю. В инерциальной системе S , относительно которой S^0 движется со скоростью u в направлении оси x , суммарный импульс всех частиц \mathbf{p} в соответствии с (3.32) определяется выражением

$$p_x = (m_0 + T^0/c^2) u / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad p_y = p_z = 0, \quad (3.83)$$

где снова m_0 — суммарная масса покоя всех частиц. Поскольку собственные времена всех частиц практически совпадают, \mathbf{p} можно считать функцией одной временной переменной. В противоположность случаю системы свободных частиц \mathbf{p} не является постоянным, поскольку кинетическая энергия в выражении (3.83) для \mathbf{p} зависит от времени.

Однако суммарный импульс \mathbf{p} не является полным импульсом системы Σ в S , так как нужно еще учесть, что потенциальная энергия V^0 имеет массу покоя V^0/c^2 . Поэтому полный импульс \mathbf{P} в S находим по формулам

$$P_x = p_x + \frac{V^0 u/c^2}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} = \frac{(m_0 + H^0/c^2)u}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\ P_y = P_z = 0, \quad (3.84)$$

где $H^0 = T^0 + V^0$ — полная энергия в системе покоя. В отличие от \mathbf{p} полный импульс \mathbf{P} не изменяется со временем, как и должно быть для замкнутой системы, не подверженной действию внешних сил. Если частицы находятся так далеко друг от друга, что их можно считать свободными, должно выполняться равенство $\mathbf{P} = \mathbf{p}$, которое является единственным условием для определения постоянной в потенциальной энергии.

Из (3.84) видно, что атомное ядро, движущееся как целое со скоростью \mathbf{u} относительно системы S , имеет полный момент

$$\mathbf{P} = M_0 \mathbf{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (3.85)$$

с массой покоя

$$M_0 = m_0 + H^0/c^2. \quad (3.86)$$

Для устойчивых ядер H^0 отрицательно, и $\Delta E = -H^0$ является энергией связи ядра, т. е. представляет собой количество энергии, которое необходимо сообщить ядру, чтобы оно полностью разделилось на составляющие частицы. Дефект массы ядра $\Delta m = m_0 - M_0$ определяется из формулы (3.86):

$$\Delta m = \Delta E/c^2. \quad (3.87)$$

Это фундаментальное соотношение между энергией связи и дефектом массы ядра, являющееся частным случаем формулы Эйнштейна (3.74), было неоднократно подтверждено с большой точностью в экспериментах с ядерными реакциями (см. § 3.7)*.

§ 3.7. Экспериментальное подтверждение релятивистской механики

В § 3.1 мы показали, что если при упругом столкновении двух частиц выполняется закон сохранения импульса, то зависимость массы от скорости выражается формулой (3.22). Возникает вопрос о той или иной справедливости сохранения импульса и энергии для больших скоростей. Этот вопрос можно

разрешить лишь с помощью эксперимента. Такой эксперимент впервые выполнил Чемпион [50], который исследовал столкновения быстро движущихся электронов (β -частиц) с покоящимися электронами в камере Вильсона.

Рассмотрим подробнее такое столкновение между электроном 1, имеющим скорость \mathbf{u}_1 и импульс $\mathbf{p}_1 = m_0 \mathbf{u}_1 (1 - u_1^2/c^2)^{-1/2}$, и неподвижным электроном 2 с импульсом $\mathbf{p}_2 = 0$ относительно системы координат S , в которой покоится камера Вильсона. При столкновении некоторая часть импульса переходит к электрону 2. Пусть $\bar{\mathbf{p}}_1$ и $\bar{\mathbf{p}}_2$ импульсы обеих частиц после столкновения, а θ и φ — углы между первоначальным направлением электрона 1 и векторами $\bar{\mathbf{p}}_1$ и $\bar{\mathbf{p}}_2$ соответственно (см. рис. 11). Использование законов сохранения релятивистской механики приводит к простому соотношению между θ и φ .

Для этого удобно использовать тот факт, что теоремы сохранения энергии и импульса справедливы в любой инерциальной системе (если они вообще выполняются). Выберем декартовы оси лабораторной системы S так, чтобы вектор \mathbf{p}_1 был параллелен оси x , а $\bar{\mathbf{p}}_1$ лежал в плоскости x, y . Тогда, если импульс сохраняется, то $\bar{\mathbf{p}}_2$ также должен лежать в плоскости x, y . Теперь введем систему центра инерции S' , в которой полный импульс $\mathbf{p}' = \mathbf{p}'_1 +$

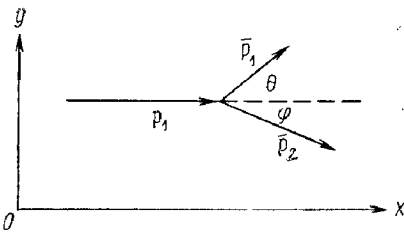


Рис. 11.

* Возможность такого эффекта впервые обсуждалась Ланжевенем [133].

+ $\mathbf{p}'_2 = 0$. S' движется относительно S со скоростью v в направлении оси x . Из уравнения, обратного к (3.32), имеем соотношение

$$p'_x = (p_x - vE/c^2)/\sqrt{1 - v^2/c^2},$$

которое выполняется как для каждой частицы, так и для системы двух частиц с полным импульсом \mathbf{p} и энергией E .

Учитывая, что $\mathbf{p} = \mathbf{p}_1$ и $E = E_1 + m_0c^2 = m_0c^2 + m_0c^2(1 - u_1^2/c^2)^{-1/2}$, получаем следующее выражение для v :

$$v = \frac{c^2 p_1}{E} = \frac{c^2 m_0 u_1}{\sqrt{1 - u_1^2/c^2} m_0 c^2 \{1 + (1 - u_1^2/c^2)^{-1/2}\}} = \frac{u_1}{1 + \sqrt{1 - u_1^2/c^2}}. \quad (3.88)$$

Поскольку $\mathbf{p}'_2 = -\mathbf{p}'_1$, обе частицы имеют одинаковую начальную скорость u' относительно S' . Кроме того, частица 2 первоначально покоилась в S , поэтому скорость u' должна равняться относительной скорости инерциальных систем S' и S , т. е.

$$u' = v; \quad (1/2) E' = E'_1 = E'_2 = m_0c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (3.89)$$

Применяя законы сохранения импульса и энергии в системе центра инерции, получаем импульсы и энергию частиц после столкновения:

$$\left. \begin{aligned} \bar{\mathbf{p}}'_2 &= -\bar{\mathbf{p}}'_1; & \bar{E}'_1 &= \bar{E}'_2 = \frac{1}{2} \bar{E}' = m_0c^2/\sqrt{1 - v^2/c^2}; \\ \bar{p}'_2 &= \bar{p}'_1 = \sqrt{\bar{E}'_1{}^2/c^2 - m_0c^2} = m_0v/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (3.90)$$

Следовательно, обе частицы в системе S' имеют одинаковую скорость и после столкновения. Кроме того, (3.90) дает

$$v^2 \bar{E}'_1{}^2/c^4 = \bar{p}'_1{}^2. \quad (3.91)$$

Из рис. 11 видно, что

$$\operatorname{tg} \theta = \bar{p}'_{1y}/\bar{p}'_{1x}; \quad \operatorname{tg} \varphi = -\bar{p}'_{2y}/\bar{p}'_{2x}.$$

Используя преобразования (3.32) для импульсов частиц после столкновения, с помощью (3.90) и (3.91) получаем

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi &= \frac{\bar{p}'_{1y} (-\bar{p}'_{2y}) (1 - v^2/c^2)}{(\bar{p}'_{1x} + v\bar{E}'_1/c^2) (\bar{p}'_{2x} + v\bar{E}'_2/c^2)} = \\ &= \frac{\bar{p}'_{1y}{}^2 (1 - v^2/c^2)}{(v\bar{E}'_1/c^2 + \bar{p}'_{1x}) (v\bar{E}'_1/c^2 - \bar{p}'_{1x})} = 1 - \frac{v^2}{c^2}. \end{aligned} \quad (3.92)$$

Подставляя выражение (3.88) для v в (3.92), окончательно имеем

$$\operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi = 2/(\gamma_1 + 1), \quad (3.93)$$

где

$$\gamma_1 = (1 - u_1^2/c^2)^{-1/2}. \quad (3.94)$$

Следовательно, произведение $\operatorname{tg} \theta$ и $\operatorname{tg} \varphi$ не зависит от масс покоя частиц (пока они равны) и является функцией скорости частицы 1 до столкновения.

В пределе при $c \rightarrow \infty$ получаем соответствующую формулу ньютоновской механики:

$$\gamma_1 = 1; \quad \operatorname{tg} \theta \operatorname{tg} \varphi = 1,$$

т. е.

$$\operatorname{tg}(\theta + \varphi) = \infty$$

или

$$0 + \varphi = \pi/2. \quad (3.95)$$

Таким образом, в соответствии с механикой Ньютона, направления движения частиц после столкновения перпендикулярны. Этот хорошо известный эффект можно наблюдать, например, при столкновении двух бильiardных шаров. Он также подтвержден экспериментально при столкновениях между α -частицами и ядрами гелия в камере Вильсона. Такие столкновения с хорошей точностью описываются уравнениями нерелятивистской механики, поскольку скорости α -частиц очень малы по сравнению с c . Однако при стремлении скорости первой частицы к скорости света $\gamma_1 > 1$, поэтому $\text{tg}\theta\text{tg}\varphi < 1$, т. е. угол между направлениями движения частиц после столкновения меньше $\pi/2$.

Этот характерный эффект удобно использовать для экспериментальной проверки релятивистской механики. Картина треков частиц при столкновениях β -частиц с покоящимися электронами в камере Вильсона позволяет измерить θ и φ , сумма которых часто оказывается $< 90^\circ$.

Если дополнительно известны скорости β -частиц, а следовательно и γ_1 , то можно непосредственно проверить релятивистскую формулу (3.93). Измерения подобного рода выполнил Чемпион [50] и получил хорошее соответствие с формулой (3.93). Эти измерения можно считать экспериментальным доказательством законов сохранения энергии и импульсов при столкновениях электронов и, следовательно, формулы (3.22) зависимости массы от скорости. Точность измерений была совершенно достаточной для опровержения формулы Абрагама [1] зависимости массы от скорости, предложенной им до появления теории относительности.

Уравнения движения (3.39) и (3.44) можно также проверить непосредственно, измеряя отклонение быстрых электронов в электрическом и магнитном полях. В случае, когда постоянное магнитное поле перпендикулярно направлению движения электронов, выполняется соотношение (3.52), т. е.

$$m u l e = H \rho / c. \quad (3.96)$$

Когда электрон движется в постоянном электрическом поле, перпендикулярном к его начальной скорости u , то в соответствии с (3.44) и (3.45) электрон имеет постоянное ускорение $g = eE/m$ в направлении поля, пока отклонение от первоначальной траектории мало. Поэтому за время $t = l/u$, необходимое для прохождения электроном пути в поле, он отклоняется на расстояние

$$\Delta l = (1/2) g l^2 = (1/2) (eE/m) (l^2/u^2), \quad (3.97)$$

перпендикулярное к начальному направлению его движения.

Следовательно, при движении электрона одновременно в электрическом и магнитном полях измерения H , ρ , E , l , Δl с учетом (3.96) и (3.97) позволяют определить изменение массы m в зависимости от скорости u . Результаты многочисленных экспериментов подобного рода [123, 39, 190, 109]* полностью соответствуют релятивистской формуле (3.22). Их можно считать также экспериментальной проверкой формулы Лоренца (3.44) для силы, действующей на движущийся заряд.

При известном заряде измерения отклонения движения частицы в известном электрическом и магнитном полях позволяют определить абсолютную массу частицы. Этот принцип используется в так называемом масс-спектрографе для определения массы атомных ядер с очень большой точностью.

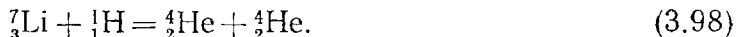
Таким образом, релятивистские уравнения движения быстро заряженных частиц давно были подтверждены экспериментально, а уравнения (3.74) и (3.87), выражающие эквивалентность массы и энергии, невозможно было проверить без достаточного развития ядерной физики. Это вполне понятно, если учесть, что, в соответствии с этими уравнениями, изменение массы тела, обусловленное его потенциальной энергией или его нагреванием, слишком мало по

* См. также исчерпывающий обзор Герлаха [103].

сравнению с полной массой тела. В случае отдельных атомных ядер, однако, ситуация иная.

Из результатов предыдущего параграфа следует, что масса атомного ядра в основном состоянии всегда меньше суммарной массы составляющих нуклонов. Этот дефект массы, в соответствии с (3.87), больше для ядер с большей энергией связи. Измерения ядерных масс с помощью масс-спектрографа подтвердили этот результат; во многих случаях дефект массы составлял несколько процентов от полной массы ядра.

Еще одна возможность экспериментальной проверки формулы (3.74) появилась с осуществлением ядерных реакций, при которых ядра с известным дефектом масс переходят в ядра с другим дефектом масс. Рассмотрим несколько таких реакций. При бомбардировке мишени из лития быстрыми протонами [52] протоны (${}^1_1\text{H}$) проникали в ядра лития (${}^7_3\text{Li}$) и образовывали сложные неустойчивые ядра, которые распадались на две α -частицы (${}^4_2\text{He}$). Этот процесс можно записать в виде уравнения



Ядерные массы в данной реакции очень точно определены с помощью масс-спектрографа. Если массу атома кислорода принять равной 16 а.е.м. , то масса ${}^7_3\text{Li}$ равна $7,0166$. С той же точностью массы ${}^1_1\text{H}$, ${}^4_2\text{He}$ равны $1,0076$ и $4,0028$ соответственно [16, 24]. Таким образом, потеря массы в данной реакции равна

$$m = 7,0166 + 1,0076 - 2 \cdot 4,0028 = 0,0186$$

или в граммах

$$m = 0,309 \cdot 10^{-25} \text{ г.} \quad (3.99)$$

Этой массе по формуле Эйнштейна соответствует энергия

$$mc^2 = 27,7 \cdot 10^{-13} \text{ дж,} \quad (3.100)$$

которая перешла в кинетическую энергию α -частиц. Кинетическую энергию можно определить, измеряя длины путей α -частиц.

В соответствии с прецизионными измерениями Смита [235], разница между полной кинетической энергией α -частиц и кинетической энергией протона составляла величину

$$E = 17,28 \pm 0,03 \text{ Мэв} = (27,6 \pm 0,05) \cdot 10^{-13} \text{ дж.} \quad (3.101)$$

Соответствие между (3.100) и (3.101) прекрасное. Отклонение меньше возможной погрешности измерений; погрешность в определении массы ядра лития, включающая погрешность в mc^2 , порядка $\pm 0,2 \cdot 10^{-13}$.

Таким образом, можно считать, что формула Эйнштейна (3.74) подтверждена экспериментально с большой точностью — погрешность меньше 1%. В то время как масса, соответствующая теплу, выделяемому при обычных химических реакциях, пренебрежимо мала, тепловая энергия, выделяемая в ядерном реакторе, настолько велика, что соответствующая масса может достигать нескольких граммов.

При делении ядра урана масса высвободившейся энергии составляет около одной тысячной массы ядра. Поэтому при полном распаде одной тонны урана выделяется энергия, которая соответствует массе порядка 1 кг.

Современная атомная физика позволяет проверить и формулу (3.72), в соответствии с которой каждой элементарной частице массы m_0 соответствует энергия $E_0 = m_0c^2$. Данное утверждение может быть проверено и поэтому имеет реальный смысл, если существует процесс, в котором частица полностью аннигилирует. После открытия положительных электронов (позитронов) в 1932 г. [13, 14, 25] стало ясно, что аннигиляционные процессы действительно существуют в природе, когда положительный и отрицательный электроны (электрон и позитрон) аннигилируют в соответствии с электронной теорией Дирака [62]. Поскольку обе частицы имеют одинаковые массы, то в со-

ответствии с формулой (3.72) освобожденная энергия равна $2 m_0 c^2$. Эта энергия выделяется в виде электромагнитного излучения, и измеряя эту энергию, можно проверить уравнение (3.72). Можно осуществить и обратный процесс, когда электромагнитное излучение (световые кванты) превращаются в пару электрон — позитрон. Световые кванты в каждом процессе должны иметь необходимую энергию $2 m_0 c^2$ ([14], см. также [202, 55]).

Итак, можно утверждать, что все следствия релятивистской механики полностью согласуются с экспериментом. Однако все эксперименты проведены с атомными ядрами, электронами, нуклонами и другими квантовыми объектами, которые не могут описываться классической механикой. Но поскольку классическая механика является лишь частным случаем квантовой механики, то все рассмотренные выше эксперименты просто показывают, что такие выводы СТО, как теорема об эквивалентности энергии и массы, справедливы и вне области применения классической механики.

При доказательстве этой теоремы (см. § 3.5) система Σ_2 являлась физической системой самого общего вида без всяких ограничивающих предположений относительно ее природы. Более того, во всех экспериментах по отклонению электронов в макроскопическом электромагнитном поле мы имели случай перехода квантовой механики в классическую, так что эти эксперименты можно рассматривать как прямое подтверждение фундаментальных уравнений классической релятивистской механики точки.

ЧЕТЫРЕХМЕРНАЯ ФОРМУЛИРОВКА ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ: ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ

§ 4.1. Четырехмерное представление преобразований Лоренца

В данной инерциальной системе S произвольное событие характеризуется четырьмя пространственно-временными координатами (x, y, z, t) . В другой инерциальной системе S' это же событие характеризуется другими четырьмя числами (x', y', z', t') . Если предположить, что при $t = t' = 0$ начала декартовых координат в обеих системах S и S' совпадают, то соотношения между пространственно-временными координатами события в двух системах отсчета определяются однородными преобразованиями Лоренца, т. е. однородными линейными преобразованиями, оставляющими величину s^2 уравнения (2.13) инвариантной:

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = x'^2 + y'^2 + z'^2 - c^2 t'^2 = s'^2. \quad (4.1)$$

Полагая

$$\text{и} \quad \left. \begin{aligned} x_1 &= x; & x_2 &= y; & x_3 &= z; & x_4 &= i ct \\ x'_1 &= x'; & x'_2 &= y'; & x'_3 &= z'; & x'_4 &= i ct' \end{aligned} \right\} \quad (4.2)$$

($i = \sqrt{-1}$ — мнимая единица), однородные преобразования Лоренца можно рассматривать как однородные линейные преобразования

$$x'_i = \sum_{k=1}^4 \alpha_{ik} x_k \quad (i = 1, 2, 3, 4), \quad (4.3)$$

удовлетворяющие условию

$$s^2 = \sum_i x_i^2 = \sum_i x_i'^2. \quad (4.4)$$

Здесь коэффициенты α_{ik} зависят только от углов между пространственными осями в S и S' и относительной скорости двух инерциальных систем. Поскольку в каждой системе координат x_1, x_2, x_3 — действительные, а x_4 — чисто мнимая величина, то

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\mu\nu}, \alpha_{44} &\text{— действительные числа,} \\ \alpha_{\mu 4}, \alpha_{4\nu} &\text{— чисто мнимые числа,} \end{aligned} \right\} \quad (4.5)$$

где $\mu, \nu = 1, 2, 3$.

Если бы переменные (x_i) и (x'_i) были действительными числами, их можно было бы интерпретировать как декартовы координаты точки в четырехмерном евклидовом пространстве. Тогда преобразования (4.3) представляли бы собой обыкновенные вращения декартовых осей в этом пространстве, а расстояние (4.4) от точки наблюдения (x_i) до начала координат $(0, 0, 0, 0)$ были бы инвариантом при таких вращениях.

Вполне естественно, хотя x_4 и x'_4 и не действительные числа, ввести четырехмерное пространство, точки которого определяются координатами (x_i) . Поскольку любое событие в физическом пространстве в каждой системе пространственно-временных координат характеризуется некоторой совокупно-

стью чисел (x_i) , то такое событие изображается точкой в этом абстрактном четырехмерном пространстве. Это пространство, впервые введенное Пуанкаре [198] и Минковским [161], называется пространственно-временным континуумом или просто четырехмерным пространством или $(3+1)$ -пространством (последнее название напоминает, что четыре измерения пространства не полностью эквивалентны). Таким образом, однородные преобразования Лоренца (4.3) можно интерпретировать как вращение системы координат в $(3+1)$ -пространстве. Инвариантную форму (4.4) естественно называть квадратом четырехмерного расстояния между событием (x_i) и началом $(0, 0, 0, 0)$. Ввиду формальной аналогии пространственно-временного континуума с евклидовым пространством, все обычные геометрические построения можно использовать в и $(3+1)$ -пространстве. Геометрия этого пространства называется *псевдоевклидовой*. Отличие от евклидовой геометрии состоит в том, что расстояние (4.4) может равняться нулю и при ненулевых значениях (x_i) . Все точки, расстояния до которых от начала координат равны нулю, образуют поверхность, удовлетворяющую уравнению

$$s^2 = \sum_i x_i^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 = 0. \quad (4.6)$$

Эта поверхность называется *световым конусом*, так как уравнение (4.6) описывает распространение сферической световой волны, выходящей из начала координат

$$x = y = z = 0$$

в момент времени $t = 0$. Световой конус делит $(3+1)$ -пространство на две отдельные инвариантные области, характеризующиеся неравенствами

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 < 0 \quad (4.7a)$$

и

$$s^2 = x^2 + y^2 + z^2 - c^2 t^2 > 0 \quad (4.7b)$$

соответственно. Для любого события в области (4.7b) можно с помощью преобразований Лоренца найти систему пространственно-временных координат S' , в которой $t' = 0$, т. е. событие $(x_i) = (x, y, z, t)$ одновременно с событием $(0, 0, 0, 0)$ в системе S' . Для событий в области (4.7a) таких преобразований не существует.

Движение материальной частицы можно описать уравнениями в форме

$$x_\mu = x_\mu(x_4); \quad (\mu = 1, 2, 3), \quad (4.8)$$

где $x_\mu(x_4)$ — определенные функции от временной переменной x_4 . Эти уравнения представляют собой кривую в $(3+1)$ -пространстве, которую будем называть мировой линией частицы. При равномерном движении $x_\mu(x_4)$ — линейные функции, а мировая линия частицы — прямая. Если мировая линия проходит через начало координат, то она целиком лежит в области (4.7a), так как скорость частицы не может превысить скорость света. В этом случае всегда можно найти такую систему S' , в которой ось x'_4 совпадает с мировой линией частицы. Для обычного трехмерного пространства последнее просто означает, что всегда можно выбрать инерциальную систему, движущуюся вместе с частицей.

Рассмотрим в системе S два произвольных события с координатами (x_i) и (\bar{x}_i) . При переходе к другой системе S' координаты обоих событий преобразуются одинаково, т. е. в соответствии с формулами (4.3) с одними и теми же коэффициентами α_{in} . Это значит, что разности $(x_i - \bar{x}_i)$ также преобразуются в соответствии с этими формулами, поэтому выражение

$$\sum_i (x_i - \bar{x}_i)^2 = \sum_i (x'_i - \bar{x}'_i)^2 \quad (4.9)$$

является инвариантом. Величина (4.9) представляет собой квадрат четырехмерного расстояния между точками (x_i) и (\bar{x}_i) . Поскольку $\sum_i x_i^2$ и $\sum_i \bar{x}_i^2$ инвариант-

ны, то в соответствии с (4.9) величина

$$\sum_i x_i \bar{x}_i = \sum_i x'_i \bar{x}'_i \quad (4.10)$$

также является инвариантом. Используя (4.3), представляем правую часть (4.10) в виде

$$\sum_i \left(\sum_l \alpha_{il} x_l \right) \left(\sum_m \alpha_{im} \bar{x}_m \right) = \sum_{l,m} \left(\sum_i \alpha_{il} \alpha_{im} \right) x_l \bar{x}_m.$$

В соответствии с (4.10) это выражение должно равняться $\sum_i x_i \bar{x}_i$ при всех значениях независимых переменных (x_l) и (\bar{x}_m) . Это возможно, однако, только при следующих соотношениях между коэффициентами:

$$\sum_i \alpha_{il} \alpha_{im} = \delta_{lm}, \quad (4.11)$$

где

$$\delta_{lm} = \begin{cases} 0 & \text{при } l \neq m \\ 1 & \text{при } l = m \end{cases} \quad (4.12)$$

есть символ Кронекера.

Преобразования, обратные (4.3), имеют вид

$$x_k = \sum_i x'_i \alpha_{ik}, \quad (4.13)$$

поскольку

$$\sum_i x'_i \alpha_{ik} = \sum_{i,l} \alpha_{il} x_l \alpha_{ik} = \sum_l x_l \left(\sum_i \alpha_{il} \alpha_{ik} \right) = \sum_l x_l \delta_{lk} = x_k.$$

Подставляя (4.13) в правую часть (4.10), получаем

$$\sum_i \alpha_{li} \alpha_{mi} = \delta_{lm}. \quad (4.14)$$

Соотношения (4.11) и (4.14) для коэффициентов α_{ik} , так называемые условия ортогональности, показывают, что однородные преобразования Лоренца эквивалентны вращению системы координат в $(3+1)$ -пространстве.

Используя (4.14), для детерминанта матрицы коэффициентов

$$\alpha = |\alpha_{ik}| = \begin{vmatrix} \alpha_{11} & \alpha_{12} & \alpha_{13} & \alpha_{14} \\ \alpha_{21} & \alpha_{22} & \alpha_{23} & \alpha_{24} \\ \alpha_{31} & \alpha_{32} & \alpha_{33} & \alpha_{34} \\ \alpha_{41} & \alpha_{42} & \alpha_{43} & \alpha_{44} \end{vmatrix} \quad (4.15)$$

получаем, с учетом правила умножения детерминантов, следующее значение:

$$\alpha^2 = |\alpha_{ik}|^2 = \sum_i \alpha_{il} \alpha_{il} = |\delta_{ik}| = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 1, \quad (4.15')$$

т. е. $\alpha = \pm 1$.

Детерминант матрицы трехмерных поворотов должен равняться плюс единице, поскольку любой поворот осуществляется непрерывным образом, а детерминант матрицы, соответствующей тождественному преобразованию $x'_i = x_i$, равен единице. Однако для пространственных отражений, когда направления пространственных осей меняют знак, $\alpha = -1$.

Матрица α_{ik} специальных преобразований Лоренца (2.24) имеет вид

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} \gamma & 0 & 0 & i v \gamma / c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ -i v \gamma / c & 0 & 0 & \gamma \end{pmatrix}, \quad (4.16)$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Легко проверить, что (4.16) удовлетворяет условиям ортогональности (4.11) и (4.14) и что $\alpha = +I$.

Специальные преобразования Лоренца можно также записать в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} x'_1 &= x_1 \cos \psi + x_4 \sin \psi; \\ x'_4 &= -x_1 \sin \psi + x_4 \cos \psi; \\ x'_2 &= x_2; \quad x'_3 = x_3, \end{aligned} \right\} \quad (4.17)$$

$$\text{где} \quad \cos \psi = \gamma; \quad \sin \psi = i v \gamma / c; \quad \operatorname{tg} \psi = i v / c. \quad (4.18)$$

Формально уравнения (4.15) описывают вращение в плоскости (x_1, x_4) с чисто мнимым «углом поворота» ψ .

§ 4.2. Лоренцево сокращение и замедление хода движущихся часов в четырехмерном представлении

Любое событие, происшедшее в некоторой точке оси x системы S , изображается точкой в плоскости (x_1, x_4) $(3 + 1)$ -пространства. Рис. 12, где временные оси x_4, x'_4 и угол ψ изображены, как если бы они были действительными, иллюстрирует лоренцево сокращение и замедление хода движущихся часов.

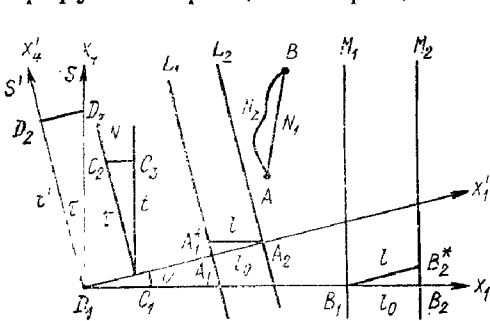


Рис. 12.

$$l = x_{A_2} - x_{A_1^*}.$$

Поскольку здесь справедливы все формальные соотношения евклидовой геометрии, то, рассматривая треугольник $A_1 A_2 A_1^*$ и используя (4.18), получаем формулу лоренцева сокращения длины

$$l = l_0 \sec \psi = l_0 (1 - v^2/c^2)^{1/2}. \quad (4.19)$$

Аналогично мировые линии концов измерительной линейки, покоящейся в системе S , изображаются прямыми M_1 и M_2 , параллельными оси x_4 . Рассматривая треугольник $B_1 B_2 B_2^*$, снова приходим к формуле (4.19).

Тем же способом можно получить геометрическую иллюстрацию эффекта запаздывания часов. Рассмотрим часы, покоящиеся в системе S' ; их мировая линия изображается прямой N , параллельной оси x'_4 ; длина линии определяется в единицах собственного времени τ часов. Пусть отрезок $C_1 C_2$ линии N определяет некоторое значение собственного времени τ . Соответствующее ему значение времени t в системе S определяется проекцией отрезка $C_1 C_2$ на ось x_4 . Рассматривая треугольник $C_1 C_2 C_3$, получаем

$$t = \tau \cos \psi = \tau \gamma, \quad (4.20)$$

что соответствует формуле (2.36) для запаздывания часов.

С другой стороны, если часы покоятся в системе S , то рассмотрение треугольника $D_1D_2D_3$ снова дает формулу (4.20), связывающую время t' системы S' с собственным временем часов.

В данном представлении эффекты лоренцева сокращения и запаздывания часов проявляются в виде проективного укорочения измерительных линеек и временных интервалов. Однако следует подчеркнуть, что такое представление чисто формально; это следует хотя бы из того факта, что «угол проектирования» ψ является мнимой величиной. В общем, не следует преувеличивать эпистемологического значения четырехмерного представления теории относительности. Несмотря на формальную аналогию в описании пространства и времени в теории относительности, существует фундаментальное физическое различие между пространственными и временными переменными. Оно непосредственно связано с разницей между измерительными инструментами, измерительными линейками и часами, необходимыми для физического определения этих переменных. Поэтому невозможно с помощью любого допустимого «вращения» (4.3), удовлетворяющего условию (4.5), перевести временную ось в пространственную. Физический смысл имеют лишь те вращения, которые оставляют временную ось x_4 внутри области (4.7a), т. е. внутри светового конуса (4.6).

§ 4.3. Ковариантность законов природы в четырехмерной формулировке

Несмотря на свой чисто формальный характер, четырехмерное представление сыграло большую роль в развитии теории относительности, поскольку оно позволяет выразить ковариантность законов природы при преобразованиях Лоренца как некоторые соотношения между физическими величинами.

Пусть A, B, \dots — последовательность физических величин, измеренных в определенной инерциальной системе S . Среди них могут быть и так называемые полевые переменные, являющиеся функциями пространственно-временных координат (x_i) системы S . Некоторый динамический закон природы всегда можно выразить одним или несколькими уравнениями вида

$$F(A, B, \dots; \partial A/\partial x_i; \partial B/\partial x_i) = 0, \quad (4.21)$$

где F — функция величин A, B, \dots и, возможно, их производных по координатам (x_i) любого порядка.

В другой инерциальной системе S' с помощью физических измерений находим, в общем случае, уже другие значения A', B', \dots вышеупомянутых физических величин, и если A — полевая переменная, являющаяся функцией от (x_i) , то A' будет уже другой функцией от пространственно-временных координат x'_i , т. е. не будет форм-инвариантной.

Однако физический закон, выраженный в системе S уравнением (4.21), можно в системе S' также записать в виде уравнения

$$F(A', B', \dots; \partial A'/\partial x'_i; \partial B'/\partial x'_i) = 0, \quad (4.21')$$

где, в соответствии с принципом относительности, F должна быть такой же функцией от переменных A', B', \dots , что и функция F от переменных A, B, \dots в (4.21), т. е. любое соотношение между физическими величинами должно выражаться форм-инвариантными или ковариантными уравнениями.

Когда возникла необходимость выразить фундаментальные уравнения электродинамики и теории упругости в форме, не зависящей от декартовой системы координат, были открыты трехмерные векторное и тензорное исчисления. Поскольку преобразования Лоренца представляют собой вращения в $(3+1)$ -пространстве, естественно обобщить трехмерные векторы и тензоры на четырехмерные и, для удовлетворения требования ковариантности законов природы при этих преобразованиях, записывать фундаментальные уравнения в форме четырехмерных тензорных уравнений.

Как мы увидим далее, это возможно для всех фундаментальных уравнений классической макроскопической физики. Поэтому с некоторых пор возникла уверенность, что все законы природы можно записать в тензорной форме. Однако с появлением квантовомеханической теории электрона Дирака [62] стало ясно, что для описания некоторых физических систем кроме тензоров требуются так называемые спиноры с совершенно иным законом преобразования, но тем не менее удовлетворяющие ковариантным дифференциальным уравнениям типа (4.21), (4.21').

§ 4.4. Четырехмерный линейный элемент, или интервал. 4-векторы

Рассмотрим в $(3 + 1)$ -пространстве две близкие точки P и P' с координатами (x_i) и $(x_i + dx_i)$ относительно произвольной инерциальной системы S . Из (4.9) найдем квадрат четырехмерного расстояния между этими точками:

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2. \quad (4.22)$$

Это выражение для *линейного элемента, или интервала*, определяет геометрию в $(3 + 1)$ -пространстве. Инфинитезимальный отрезок, соединяющий P с P' , является аналогом соответствующего вектора трехмерного пространства. Этот вектор в произвольной системе определяется своими четырьмя компонентами (dx_i) . При вращении системы координат эти компоненты преобразуются как координаты:

$$dx'_i = \sum_k \alpha_{ik} x_k. \quad (4.23)$$

Теперь определим в общем случае *4-вектор как величину, которая в произвольной системе координат имеет четыре компоненты (a_i) , преобразующиеся как координаты (x_i)* . Таким образом, вращениям системы координат (4.3), (4.13) соответствуют преобразования компонент вектора

$$a'_i = \sum_k \alpha_{ik} a_k; \quad a_k = \sum_i \alpha_i^k a'_i. \quad (4.24)$$

По аналогии с (4.4) отсюда следует, что квадрат длины 4-вектора, или норма вектора,

$$\sum_i a_i^2 = \sum_i a_i'^2 \quad (4.25)$$

есть инвариант.

В соответствии с тем, что инвариант (4.25) может быть меньше нуля, равен нулю и больше нуля, мы говорим о *времениподобном векторе, нулевом векторе и пространственноподобном векторе*.

Для инфинитезимального вектора (dx_i) , соединяющего два близких события P и P' , (4.25) совпадает с (4.22), т. е.

$$ds^2 = \sum_i dx_i^2 = d\sigma^2 - c^2 dt^2, \quad (4.26)$$

где σ — пространственное расстояние между двумя точками физического пространства, в которых произошли два события, а dt — разница во времени между этими событиями. Световой конус с вершиной в точке P определяется уравнением $ds^2 = 0$. Если точка P' лежит на световом конусе, то два события можно связать световым сигналом. Если вектор dx_i — времениподобный, то он лежит внутри светового конуса, а если он пространственноподобный, то — снаружи.

Из двух векторов с компонентами (a_i) и (b_i) можно образовать новый вектор с компонентами $(a_i + b_i)$. Поэтому квадрат величины этого вектора, являющийся инвариантом, можно записать в виде

$$\sum_i (a_i + b_i)^2 = \sum_i a_i^2 + \sum_i b_i^2 + 2 \sum_i a_i b_i,$$

так что по аналогии с (4.10) величина

$$\sum_i a_i b_i = \sum_i a'_i b'_i \quad (4.27)$$

тоже инвариант. Выражение (4.27) называется скалярным произведением двух векторов. Говорят, что два вектора ортогональны, если их скалярное произведение равно нулю.

Первые три компоненты 4-вектора преобразуются при пространственных вращениях как компоненты обычного пространственного вектора \mathbf{a} . Поэтому в любой инерциальной системе 4-вектор можно разложить на пространственную и временную части:

$$(a_i) = (\mathbf{a}, a_4). \quad (4.28)$$

Конечно, это разложение не инвариантно относительно преобразований Лоренца. Поскольку величина (\mathbf{a}, a_4) преобразуется как

$$(\mathbf{x}, x_4) = (\mathbf{x}, i ct),$$

то в соответствии с (2.25') имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{a} &= \mathbf{a}' + \frac{\mathbf{v}}{v^2} \frac{(\mathbf{v}\mathbf{a}') \{1 - (1 - v^2/c^2)^{1/2}\} - i v^2 a'_4/c}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}; \\ a_4 &= (a'_4 + i (\mathbf{v}\mathbf{a}')/c) / (1 - v^2/c^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (4.29)$$

Если вектор времениподобный, т. е.

$$\sum_i a_i^2 = |\mathbf{a}|^2 - |a_4|^2 < 0, \quad (4.30a)$$

то всегда можно выбрать такую систему S' , в которой пространственный вектор $\mathbf{a}' = 0$. Для этого достаточно взять временную ось системы S' в направлении 4-вектора (a_i) . Если же вектор пространственноподобный, т. е.

$$\sum_i a_i^2 = |\mathbf{a}|^2 - |a_4|^2 > 0, \quad (4.30b)$$

то всегда можно найти такую систему S' , в которой $a'_4 = 0$.

Это означает, что новая временная ось перпендикулярна вектору a_i . Поэтому для вектора b_i , направленного вдоль новой временной оси, $b'_\mu = 0$, ($\mu = 1, 2, 3$), т. е.

$$a_i b_i = a'_i b'_i = 0.$$

§ 4.5. 4-скорость и 4-ускорение. Волновой вектор. Четырехмерная групповая скорость

Рассмотрим движение материальной частицы и соответствующую ей мировую линию (4.8) в $(3+1)$ -пространстве. Воспользуемся параметрическим представлением мировой линии

$$x_i = x_i(s), \quad i = 1, 2, 3, 4, \quad (4.31)$$

где в качестве параметра s выбрана длина мировой линии. Две близкие точки на этой кривой соединяются инфинитезимальным вектором (dx_i) длиной ds , определяемой формулами (4.22) или (4.26). Поскольку скорость частицы всегда меньше c , то, в соответствии с (4.26), на всей мировой линии $ds^2 < 0$. Поэтому

удобно вместо мнимой длины s выбрать новый, уже вещественный параметр τ по формуле

$$s = ic\tau. \quad (4.32)$$

Подставляя (4.32) в (4.26), имеем

$$-c^2 d\tau^2 = d\sigma^2 - c^2 dt^2. \quad (4.33)$$

Учитывая, что скорость u частицы равна $d\sigma/dt$, получим, что

$$d\tau = (1 - u^2/c^2)^{1/2} dt. \quad (4.34)$$

Таким образом, τ совпадает с собственным временем частицы, т. е. со временем, измеряемым стандартными часами, движущимися вместе с частицей. Собственное время частицы является мерой длины ее мировой линии.

Мировая линия, соответствующая равномерному движению, представляется прямой линией, например линией N_1 на рис. 12, связывающей два события A и B . Длина ее определяется из выражения

$$s/ic = \tau_1 = (t_B - t_A) (1 - u_1^2/c^2)^{1/2}, \quad (4.35)$$

где u_1 — скорость равномерного движения, а $(t_B - t_A)$ — разница во времени между двумя событиями A и B . Если взять другую произвольную мировую линию N_2 , соединяющую эти же два события A и B , то она будет соответствовать уже неравномерному движению. Длина дуги этой кривой в соответствии с (4.34) следующая:

$$s_2/ic = \tau_2 = \int_{N_2} (1 - u_2^2/c^2)^{1/2} dt. \quad (4.36)$$

Поскольку выражения (4.35) и (4.36) справедливы в любой системе координат, то можно выбрать такую систему, временная ось которой параллельна прямой мировой линии N_1 . Это означает, что данная система движется вместе с частицей. В этой системе $u_1 = 0$, однако скорость u_1 неравномерного движения, соответствующего N_2 , не может равняться нулю на всей мировой линии.

Поэтому

$$s_2/ic < s_1/ic. \quad (4.37)$$

Таким образом, прямолинейное движение характеризуется тем, что длина мировой линии имеет *стационарное значение*, точнее, наименьшее по сравнению со всеми другими мировыми линиями, соединяющими те же два события.

Поскольку инфинитезимальные приращения координат dx_i на мировой линии частицы являются компонентами 4-вектора, а $d\tau$ — инвариант, то величины

$$U_i = dx_i/d\tau \quad (4.38)$$

также являются компонентами 4-вектора, который называется *4-скоростью*. Используя (4.34) и (4.38), компоненты U_i запишем в виде

$$U_i = \{u/(1 - u^2/c^2)^{1/2}, \quad ic/(1 - u^2/c^2)^{1/2}\}, \quad (4.39)$$

где

$$\mathbf{u} = dx/d\tau \quad (4.40)$$

есть обычный трехмерный вектор скорости. 4-Скорость всегда направлена по касательной к мировой линии частицы, а норма этого вектора имеет постоянное значение $-c^2$, так как из (4.39) видно, что

$$\sum_i U_i^2 = u^2/(1 - u^2/c^2) - c^2/(1 - u^2/c^2) = -c^2. \quad (4.41)$$

Следовательно, 4-скорость есть времениподобный вектор постоянной длины. Дифференцируя (4.41), получаем, что

$$\sum_i U_i dU_i/d\tau = 0. \quad (4.41')$$

Применив уравнения (4.29) к 4-скорости U_i , определяемой в (4.39), мы снова получим преобразования (2.55') для скоростей и преобразования, обратные (2.56).

4-Вектор

$$A_i = dU_i/d\tau = \dot{U}_i = (1 - u^2/c^2)^{-1/2} dU_i/dt$$

называется 4-ускорением. С помощью (4.39) найдем его компоненты:

$$A_i = \left\{ \frac{c^2}{c^2 - u^2} \mathbf{a} + \mathbf{u} \frac{c^2 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)^2}, \frac{ic^3 (\mathbf{u} \mathbf{a})}{(c^2 - u^2)^2} \right\}, \quad (4.42)$$

где $\mathbf{a} = d\mathbf{u}/dt = d^2\mathbf{x}/dt^2$ есть обычное трехмерное ускорение частицы. В соответствии с (4.41') векторы U_i и A_i ортогональны. В системе покоя частицы S' вектор ускорения A_i имеет компоненты

$$A'_i = (\mathbf{a}', 0). \quad (4.42')$$

Другим примером 4-вектора является вектор волнового числа (σ_i) плоской монохроматической волны. В произвольной системе координат S инвариантную фазу волны F в соответствии с (2.68) можно записать в виде

$$-F = \sum_i \sigma_i x_i, \quad \sigma_i = (n\mathbf{v}/\omega, i\nu/c) = (\sigma, \sigma_4),$$

$$|\sigma| = \nu/\omega = 1/\lambda. \quad (4.43)$$

Здесь \mathbf{n} — единичный направляющий 3-вектор нормали к фронту волны; ν — частота; ω — фазовая скорость и λ — длина волны. Поскольку фаза инвариантна, то в соответствии с (4.3) имеем

$$\sum_k \sigma_k x_k = \sum_i \sigma'_i x'_i = \sum_{i,k} \sigma'_i \alpha_{ik} x_k,$$

а так как это уравнение должно выполняться для всех x_k , то

$$\sigma_k = \sum_i \sigma'_i \alpha_{ik}. \quad (4.44)$$

Следовательно, σ_i есть 4-вектор. Уравнения (4.44) или эквивалентные им уравнения (4.29) непосредственно приводят к формулам (2.70)–(2.72) преобразований параметров плоской волны.

В § 2.10 было показано, что групповая скорость в преломляющей среде с показателем преломления $n > 1$ преобразуется в системе покоя среды подобно скорости частицы u' , если $u' = \omega' = c/n$. Поэтому аналогично (4.39) можно определить 4-вектор групповой скорости (U_i)

$$U_i = \{ue/\sqrt{1-u^2/c^2}; ic/\sqrt{1-u^2/c^2}\}, \quad (4.45)$$

где u — величина групповой скорости, а \mathbf{e} — единичный направляющий 3-вектор луча.

В системе покоя среды S' , где $\mathbf{e}' = \mathbf{n}'$ и $\omega' = u' = c/n$, получим, что

$$\sigma'_i = \left(\frac{\nu' n'}{c} \mathbf{n}', i \frac{\nu'}{c} \right); \quad U'_i = \left\{ \frac{cn'}{\sqrt{n^2-1}}, \frac{icn}{\sqrt{n^2-1}} \right\}. \quad (4.46)$$

В любой другой инерциальной системе S $U_k = \sum_i U'_i \alpha_{ik}$. Тогда из (4.46) следует, что

$$\sum_i \sigma_i U_i = \sum_i \sigma'_i U'_i = 0, \quad (4.47)$$

т. е. 4-векторы σ_i и U_i ортогональны друг другу. Подставляя (4.43) и (4.45) в (4.47), получаем

$$(\mathbf{v}/i \sqrt{1-u^2/c^2}) \{(u/\omega)(nc) - 1\} = 0,$$

или

$$\omega = (u\mathbf{n}). \quad (4.47')$$

Формула (4.47) показывает, что в любой инерциальной системе нормальная фазовая скорость равна проекции групповой скорости на нормаль к фронту волны, а групповая скорость равна фазовой скорости в направлении луча.

В то время как квадрат величины (U_i) является инвариантом и равен $-c^2$, для σ_i имеем

$$\sum_i \sigma_i^2 = \mathbf{v}^2 (1/\omega^2 - 1/c^2) = (\mathbf{v}'^2/c^2) (n^2 - 1). \quad (4.48)$$

Следовательно, волновой 4-вектор световой волны в вакууме является нулевым вектором.

§ 4.6. 4-Импульс. 4-Сила. Основные уравнения механики точки в четырехмерной векторной форме

В § 3.3 было показано [см. (3.32) и (3.37)], что импульс и энергия ($\mathbf{p}, E/c$) материальной частицы преобразуются как пространственно-временные координаты (x, ct) . Поэтому величина

$$p_i = (\mathbf{p}, i E/c) \quad (4.49)$$

является 4-вектором и называется 4-импульсом частицы. Подставляя (3.23) и (3.31) в (4.49), получаем, что

$$p_i = m_0 U_i, \quad (4.50)$$

т. е. 4-импульс частицы пропорционален ее 4-скорости, а коэффициент пропорциональности равен массе покоя частицы m_0 . Из (4.41) и (4.50) следует, что норма этого вектора равна

$$\sum_i p_i^2 = p^2 - E^2/c^2 = m_0^2 \sum U_i^2 = -m_0^2 c^2 \quad (4.51)$$

в соответствии с (3.35). Таким образом, 4-импульс является времениподобным вектором.

Поскольку p_i в (4.50) и σ_i в (4.43) преобразуются одинаково, плоскую волну с волновым вектором σ_i можно инвариантным образом связать с частицей с импульсом p_i , так чтобы

$$p_i = \hbar \sigma_i, \quad (4.52)$$

где \hbar — инвариантная постоянная. Если выбрать \hbar равной постоянной Планка, то получим волну де Бройля частицы [38]. Фазовая скорость ω волны де Бройля в соответствии с (4.43), (4.52) и (3.36) связана со скоростью u частицы уравнением

$$1/\omega = i |\boldsymbol{\sigma}|/c\sigma_4 = i |\mathbf{p}|/c p_4 = p/E = u/c^2. \quad (4.52')$$

Теоремы сохранения энергии и импульса при столкновении частиц можно описать одним уравнением

$$p_i = \bar{p}_i, \quad (4.53)$$

где p_i и \bar{p}_i — суммарные 4-импульсы частиц до и после столкновения соответственно. Первые три уравнения в (4.53) ($i = 1, 2, 3$) выражают теорему сохранения импульса, а последнее ($i = 4$) — теорему сохранения энергии. Урав-

нение (4.53) выражает закон сохранения импульса и энергии в ковариантной форме относительно преобразований Лоренца, так как 4-векторы с одинаковыми компонентами в одной системе отсчета будут иметь, очевидно, одинаковые компоненты в любой другой системе.

В заключение § 3.3 было показано, что совокупность величин $(\mathbf{F}_M, (\mathbf{F}_M \mathbf{u}))$ преобразуется как (\mathbf{p}, E) , поэтому четыре величины

$$F_i = \{F_M, i(\mathbf{F}_M \mathbf{u})/c\} = \{\bar{F}/\sqrt{1-u^2/c^2}, (i(\mathbf{F}\mathbf{u})/c)/\sqrt{1-u^2/c^2}\} \quad (4.54)$$

являются компонентами 4-вектора, который называется 4-силой Минковского [163]. Теперь основные уравнения механики (3.42) можно записать в следующей ковариантной форме:

$$dp_i/d\tau = F_i, \quad (4.55)$$

или, поскольку m_0 — постоянная,

$$m_0 A_i = m_0 dU_i/d\tau = F_i. \quad (4.56)$$

Первые три уравнения являются уравнениями движения, а четвертое выражает закон сохранения энергии. Из (4.55) видно, что F_i является 4-вектором, поскольку правая и левая части (4.55) должны преобразовываться одинаково, а левая часть есть производная от 4-вектора по инвариантному аргументу τ , т. е. остается 4-вектором.

Из (4.41') и (4.56) следует также, что векторы U_i и F_i ортогональны друг другу, т. е.

$$\sum_i F_i U_i \equiv 0. \quad (4.57)$$

Уравнения (4.57) или (4.54) для F_i характеризуют *истинную механическую 4-силу*, т. е. величину, определяющую изменение 4-скорости частицы в соответствии с уравнениями вида (4.56). Силу, определенную таким образом, можно рассматривать как *вынуждающую силу*. Если собственная масса частицы — постоянная (как это предполагалось до сих пор), то (4.56) совпадает с (4.55), так что в этом случае F_i также равна скорости изменения 4-импульса.

Однако 4-импульс частицы p_i может изменяться только в одном из двух случаев: либо при изменении 4-скорости частицы, либо при изменении ее собственной массы m_0 . Последний случай имеет место, например, когда частица постоянно теряет массу с определенной скоростью, как маленькая ракета. Как и при изменении 4-импульса под действием 4-силы F_i , здесь также происходит изменение 4-импульса, обусловленное потерей массы. Пусть — Π_i есть 4-импульс, который частица теряет за единицу собственного времени τ . Тогда вместо (4.55) имеем

$$dp_i/d\tau = F_i + \Pi_i. \quad (4.58)$$

Полагая

$$\Pi_i = \{\Pi/1/\sqrt{1-u^2/c^2}, i\Phi/c/\sqrt{1-u^2/c^2}\}, \quad (4.59)$$

из (4.58) получаем уравнения

$$dp/dt = \mathbf{F} + \mathbf{\Pi}; \quad dE/dt = \mathbf{F}\mathbf{u} + \Phi, \quad (4.58')$$

которые в данном случае заменяют (3.39). Очевидно, что $\mathbf{\Pi}$ и Φ представляют собой количества энергии и импульса, подводимых к частице конвекцией в единицу времени t . Из (4.58) непосредственно следует, что Π_i — 4-вектор, но уже не ортогональный U_i . Инвариант $U_i \Pi_i$ с помощью (4.39) и (4.59) приводится к виду

$$U_i \Pi_i = (\mathbf{\Pi}\mathbf{u} - \Phi)/(1 - u^2/c^2) = -\Phi^0, \quad (4.60)$$

где Φ^0 — скорость конвективного подвода энергии в системе покоя частицы, равная скорости увеличения собственной энергии частицы. Это следует также из уравнения (4.58), которое можно записать как

$$m_0 dU_i/d\tau + U_i dm_0/d\tau = F_i + \Pi_i. \quad (4.58'')$$

Умножая (4.58'') и $-U_i$ и учитывая (4.41), (4.41'), (4.57) и (4.60), получаем

$$\Phi^0 = -\Pi_i U_i = c^2 dm_0/d\tau. \quad (4.60')$$

Когда эта величина отлична от нуля, то полная вынуждающая сила D_i не равна просто $F_i + \Pi_i$, так как из (4.58'') и (4.60') следует, что

$$m_0 dU_i/d\tau = D_i, \quad (4.61)$$

где

$$a \quad \left. \begin{aligned} D_i &= F_i + R_i, \\ R_i &= \Pi_i + U_i \Pi_k U_k/c^2 = \Pi_i - U_i \Phi^0/c^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.62)$$

Очевидно, что

$$U_i R_i = U_i D_i = 0, \quad (4.63)$$

т. е. R_i аналогична по форме вынуждающей 4-силе, а именно:

$$R_i = \{ \mathbf{R}/\sqrt{1-u^2/c^2}, \quad i(\mathbf{R}\mathbf{u})/c/\sqrt{1-u^2/c^2} \}. \quad (4.64)$$

Здесь \mathbf{R} — реактивная сила, которая в отсутствие внешней механической силы является основной действующей силой; $\mathbf{R}\mathbf{u}$ — мощность реактивной силы. $R_i = (\Pi_i)_\perp$, т. е. равна составляющей Π_i , перпендикулярной к 4-скорости. Соответствующая параллельная составляющая Π_i имеет вид

$$(\Pi_i)_\parallel = \Pi_i - R_i = U_i \Phi^0/c^2 = U_i dm_0/d\tau \quad (4.65)$$

и равна скорости изменения 4-импульса, обусловленной исключительно изменением собственной массы.

В частном случае немеханическая потеря импульса Π_i может быть вызвана излучением или поглощением тепла частицей. Тогда

$$\delta Q_i \equiv \Pi_i d\tau = (\delta \mathbf{P}, \quad i\delta Q/c) \quad (4.66)$$

можно интерпретировать как 4-импульс подведенного тепла за промежуток $d\tau$ собственного времени. Из (4.59) следует, что

$$\delta \mathbf{P} = \mathbf{P} dt \quad \text{и} \quad \delta Q = \Phi dt \quad (4.67)$$

представляют собой импульс и энергию, полученные системой в течение времени dt вследствие подвода тепла. В этом сугубо частном случае очевидно, что 4-импульс подведенного тепла δQ_i является 4-вектором. В § 7.10 мы увидим, что это общее свойство δQ_i для любого термодинамического процесса, связывающего термически равновесные состояния произвольной термодинамической системы.

Иногда удобно два 4-вектора в правой части (4.58) объединить в один простой 4-вектор F_i^* и записать

$$dp_i/d\tau = F_i^*, \quad F_i^* = F_i + \Pi_i. \quad (4.68)$$

4-Вектор F_i^* , который определяется как скорость изменения 4-импульса, называется *обобщенной 4-силой*. Важно проводить четкое различие между силой подобного типа, для которой

$$F_i^* U_i = \Pi_i U_i = -\Phi_0 = -c^2 dm_0/d\tau, \quad (4.69)$$

и истинной механической, или действующей силой, которая всегда удовлетворяет соотношению (4.57).

В предшествующей литературе и в первом издании этой книги данное различие не было четко проведено. Вместо (4.58) использовалось следующее соотношение:

$$dp/dt = F^*; \quad dE/dt = F^*u + \Phi^*, \quad (a)$$

т. е.

$$F_i^* = \{F^*/\sqrt{1-u^2/c^2}; \quad (i(F^*u + \Phi^*)/c)/\sqrt{1-u^2/c^2}\}. \quad (б)$$

Обобщенная 3-сила F^* определялась как временная производная импульса. Тогда Φ^* должна интерпретироваться как скорость изменения той части E , которая не обусловлена работой (F^*U) этой силы. Обобщенная сила F^* уже не преобразуется в соответствии с уравнением (3.40), которое справедливо лишь для истинной силы. Из (3.43) следует, что компоненты истинной механической силы F в любой системе S являются линейными функциями от компонент F^* в системе покоя. Поэтому если две механические силы уравновешивают друг друга в системе покоя

$$F_1^0 + F_2^0 = 0, \quad (в)$$

то это выполняется и в любой другой системе

$$F_1 + F_2 = 0.$$

Однако обобщенная сила F^* такими свойствами не обладает; F^* не является линейной функцией только от F^{*0} ; поэтому, если даже $F_1^{*0} + F_2^{*0} = 0$, соответствующая величина в другой системе уже не равна нулю.

Что касается определений, то здесь существует некоторая свобода, так что данную величину можно определять различными способами. Однако, пока не проведено четкое различие между определениями, существует риск возникновения путаницы. Кроме того, не все определения одинаково целесообразны. Как впервые указал Отт [191], старая формулировка релятивистской термодинамики как раз представляет собой пример такой путаницы, которая может возникнуть, когда работа, совершенная обобщенной силой F^* , интерпретируется как механическая работа в термодинамическом процессе. Однако при расчете коэффициента полезного действия тепловой машины, в которой тепловая энергия превращается в кинетическую энергию (автомобиля или поезда) или в потенциальную энергию (при подъеме тяжелых предметов краном), нас интересует не обобщенная сила, а действующая сила и ее работа.

Следующий пример показывает, что не всегда целесообразно и даже неразумно определять силу как временную производную от импульса. Рассмотрим в пустом пространстве скопление пыли, покоящееся относительно инерциальной системы S^0 . Скорости всех частиц скопления относительно системы S , движущейся со скоростью v относительно S^0 , должны равняться v . Согласно Галилею, для поддержания этой скорости не требуется никакой силы, в противоположность взглядам Аристотеля, которые утверждают, что для поддержания постоянной скорости требуется сила. Теперь представим, что скопление с помощью воображаемой поверхности f разделено на две части, 1 и 2, с собственными массами M_1^0 и M_2^0 . Импульсы этих частей относительно системы S равны

$$p_1 = M_1^0 v / \sqrt{1-v^2/c^2}; \quad p_2 = M_2^0 v / \sqrt{1-v^2/c^2}.$$

Если M_1^0 и M_2^0 постоянны, то p_1 и p_2 тоже постоянны. Когда поверхность f перемещается по скоплению с определенной скоростью, так что

$$dM_1^0/d\tau = m^0; \quad dM_2^0/d\tau = -m^0$$

скорости изменения собственных масс частей 1 и 2, то в соответствии с (a) для части 1 имеем

$$\begin{aligned} dp_1/dt &= m^0 v / \sqrt{1-v^2/c^2} = F_1^*; \\ dE_1/dt &= m^0 c^2 / \sqrt{1-v^2/c^2} = F_1^* v + \Phi_1^*; \\ F_1^* v &= m^0 v^2 / \sqrt{1-v^2/c^2}; \quad \Phi_1^* = m^0 c^2 \sqrt{1-v^2/c^2}. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения, но с противоположным знаком получаются для части 2. В данном случае F_1^* , F_1^*v и Φ^* — чисто формальные величины, не имеющие никакого физического смысла. Сказать (как это делалось в ранних работах), что F_1^* — реальная физическая сила, необходимая для поддержания постоянной скорости части 1 скопления, значит отказаться от самых фундаментальных основ экспериментальной физики Галилея и вернуться к философии Аристотеля.

§ 4.7. Тензоры второго ранга

В предыдущих параграфах мы видели, что ковариантность основных уравнений механики при преобразованиях Лоренца выглядит особенно изящно, когда эти уравнения записаны в четырехмерной векторной форме. Чтобы полу-

чить аналогичное геометрическое представление для других разделов физики, например для электродинамики, необходимо ввести четырехмерные тензоры.

Тензором второго ранга в $(3 + 1)$ -пространстве называется величина, которая относительно некоторой системы координат S имеет 4^2 компонент t_{ik} , и при переходе к другой системе координат S' преобразуется по закону:

$$t'_{ik} = \sum_{l, m} \alpha_{il} \alpha_{km} t_{lm} = \alpha_{il} \alpha_{km} t_{lm}; \quad t_{ik} = t'_{lm} \alpha_{li} \alpha_{mk}, \quad (4.70)$$

где α_{ik} — коэффициенты уравнения (4.3), определяющего переход от S к S' .

Для упрощения мы опустили здесь знак суммирования. В дальнейшем будем пользоваться правилом, в соответствии с которым по всякому индексу, повторяющемуся в данном выражении дважды, как, например, l или m в (4.70), подразумевается суммирование от 1 до 4. Свободные индексы, например i и k в (4.70), могут независимо принимать значения 1, 2, 3, 4. Следуя этому правилу, уравнение (4.25) можно записать в форме $a_i a_i = a'_i a'_i$. Когда индекс может принимать только значения 1, 2, 3, мы обозначаем его греческой буквой, а если он повторяется в данном выражении дважды, суммируем по этому индексу от 1 до 3. Следовательно, квадрат длины пространственного вектора можно записать в форме

$$|\mathbf{a}|^2 = a_\mu a_\mu.$$

Определение (4.70) 4-тензора является прямым обобщением определения пространственного тензора, компоненты которого при вращениях в физическом пространстве преобразуются по закону

$$t'_{\mu\nu} = \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\beta} t_{\lambda\beta}, \quad (4.71)$$

где $\alpha_{\mu\nu}$ — коэффициенты ортогонального преобразования, соответствующего данному вращению.

Сумма диагональных элементов тензора второго ранга является инвариантом, так как из (4.11) и (4.70) имеем

$$t'_{ii} = (\alpha_{il} \alpha_{im}) t_{lm} = \delta_{lm} t_{lm} = t_{ll}. \quad (4.72)$$

Аналогично из условий ортогональности (4.11) и (4.14) следует, что величина

$$t_{ik} t_{ik} = t'_{lm} t'_{lm} \quad (4.73)$$

есть инвариант.

Если коэффициенты α_{ik} соответствуют трехмерному вращению,

$$\alpha_{\mu 4} = \alpha_{4\nu} = 0; \quad \alpha_{44} = 1, \quad (4.74)$$

то (4.70) принимает вид

$$\left. \begin{aligned} t'_{\mu\nu} &= \alpha_{\mu\lambda} \alpha_{\nu\beta} t_{\lambda\beta}; & t'_{\mu 4} &= \alpha_{\mu\lambda} t_{\lambda 4}; \\ t'_{4\nu} &= \alpha_{\nu\beta} t_{4\beta}; & t'_{44} &= t_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (4.75)$$

Формулы (4.75) показывают, что при пространственных вращениях пространственная часть 4-тензора преобразуется как обычный трехмерный тензор. Кроме того, числа $t'_{\mu 4}$ и $t'_{4\nu}$ в отдельности соответствуют пространственным векторам, а t'_{44} — инвариант при обычных пространственных вращениях. С помощью вектора a_i и тензора t_{ik} можно образовать новый вектор

$$b_i = t_{ik} a_k, \quad (4.76)$$

так как в соответствии с (4.24), (4.70) и (4.11) имеем

$$\begin{aligned} b'_i &= t'_{ik} a'_k = \alpha_{il} \alpha_{km} t_{lm} \alpha_{kn} a_n = \alpha_{il} (\alpha_{km} \alpha_{kn}) t_{km} a_n = \\ &= \alpha_{il} \delta_{mn} t_{lm} a_n = \alpha_{il} (t_{lm} a_m) = \alpha_{il} b_l. \end{aligned} \quad (4.77)$$

Если a_{ik} и b_{ik} — компоненты двух тензоров, то $a_{ik} + b_{ik}$ также являются компонентами тензора, который называется суммой двух тензоров. Если

t_{ik} — тензор, то $\bar{t}_{ik} = t_{ki}$ — тоже тензор, т. е. транспонированный тензор. Если a_i и b_i являются компонентами двух векторов и преобразуются по формулам (4.24), величины

$$t_{ik} = a_i b_k \quad (4.78)$$

преобразуются, очевидно, по формулам (4.70). Тензор второго ранга, определяемый формулой (4.78), называется прямым произведением двух векторов a_i и b_i . Величины

$$t_{ik} = a_i b_k - a_k b_i = -t_{ki} \quad (4.79)$$

также образуют тензор. Такой тензор удовлетворяет соотношениям

$$t_{ik} = -t_{hi} = -\bar{t}_{ik} \quad (4.80)$$

для всех значений индексов i и k и называется антисимметрическим или кососимметрическим тензором. Аналогично тензор, удовлетворяющий соотношениям

$$t_{ik} = t_{ki} = \bar{t}_{ik}, \quad (4.81)$$

называется симметрическим.

Поскольку левая и правая части уравнений (4.80) и (4.81) преобразуются как тензоры, эти уравнения справедливы в любой системе координат. Следовательно, симметричность или антисимметричность тензора являются его инвариантными свойствами. В антисимметрическом тензоре все диагональные элементы равны нулю, так как, полагая в (4.80) $i = k$ (без суммирования), получаем, что

$$t_{ii} = -t_{ii} = 0 \quad (4.82)$$

для любого i .

Антисимметрический тензор второго ранга $F_{ik} = -F_{ki}$ имеет только шесть независимых компонент. Положим

$$H_{\mu\nu} = F_{\mu\nu}; \quad E_\mu = i F_{\mu 4} = -i F_{4\mu}. \quad (4.83)$$

$H_{\mu\nu}$ и E_μ в соответствии с (4.75) преобразуются при пространственных вращениях (4.74) как компоненты антисимметрического пространственного тензора и обычного пространственного вектора \mathbf{E} . Полагая далее

$$H_1 = H_{23}; \quad H_2 = H_{31}; \quad H_3 = H_{12} \quad (4.83')$$

в случае специальных преобразований Лоренца (4.16) получим следующие формулы преобразований для H_μ и E_μ :

$$\left. \begin{aligned} H'_1 &= H_1; & H'_2 &= \gamma(H_2 + vE_3/c); & H'_3 &= \gamma(H_3 - vE_2/c); \\ E'_1 &= E_1; & E'_2 &= \gamma(E_2 - vH_3/c); & E'_3 &= \gamma(E_3 + vH_2/c), \end{aligned} \right\} \quad (4.84)$$

где $\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}$. Соответствующие формулы обратных преобразований получаются переобозначением штрихованных и нештрихованных величин и заменой v на $-v$. Для $\mathbf{v} = (v, 0, 0)$ эти обратные преобразования можно записать в векторной форме:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \gamma \mathbf{E}' + (\mathbf{v}/v^2) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}') (1 - \gamma) - (\gamma/c) (\mathbf{v} \times \mathbf{H}'); \\ \mathbf{H} &= \gamma \mathbf{H}' + (\mathbf{v}/v^2) (\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}') (1 - \gamma) + (\gamma/c) (\mathbf{v} \times \mathbf{E}'). \end{aligned} \right\} \quad (4.84')$$

В такой форме эти уравнения справедливы для любых преобразований Лоренца без пространственных вращений.

§ 4.8. Угловой момент и момент силы в четырехмерной форме

Пусть $x_i = (x, ict)$ — пространственно-временные координаты события на мировой линии материальной частицы, а $(p_i) = \{\mathbf{p}, i(E/c)\}$ — ее 4-импульс.

В соответствии с (4.79) из этих двух 4-векторов можно образовать антисимметрический тензор

$$M_{ik} = x_i p_k - x_k p_i. \quad (4.85)$$

Пространственная часть этого тензора является антисимметрическим пространственным тензором, тензором углового момента $M_{\mu\nu}$, компоненты которого связаны с вектором углового момента

$$\mathbf{M} = \mathbf{x} \times \mathbf{p} \quad (4.86)$$

уравнениями

$$\mathbf{M} = (M_x, M_y, M_z) = (M_{23}, M_{31}, M_{12}). \quad (4.87)$$

Тем же способом из x_i и 4-силы Минковского (F_i) можно образовать тензор

$$D_{ik} = x_i F_k - x_k F_i. \quad (4.88)$$

Пространственная часть этого тензора соответствует моменту силы Минковского (3.41) относительно начала координат.

Используя (4.38), с помощью основных уравнений механики (4.55) получим

$$dM_{ik}/dt = U_i p_k + x_i F_k - U_k p_i - x_k F_i,$$

или, учитывая (4.55) и (4.88),

$$dM_{ik}/dt = D_{ik}. \quad (4.89)$$

Пространственная часть этого уравнения представляет собой теорему об изменении углового момента

$$d\mathbf{M}/dt = (\mathbf{x} \times \mathbf{F}). \quad (4.89')$$

Символ Кронекера (4.12) представляет собой тензор второго ранга с особенно простыми свойствами. Рассмотрим тензор, компоненты которого в системе S равны δ_{ik} . По формулам (4.70) и (4.14) его компоненты в системе S' примут вид

$$\delta'_{ik} = \alpha_{il} \alpha_{km} \delta_{lm} = \alpha_{il} \alpha_{kl} = \delta_{ik}. \quad (4.90)$$

Следовательно, этот тензор имеет одинаковые компоненты в любой системе координат; это единственный тензор, компоненты которого не изменяются при преобразованиях координат.

§ 4.9. Тензоры произвольного ранга

По аналогии с (4.70) тензор третьего ранга в $(3 + 1)$ -пространстве определим как величину с 4^3 компонентами t_{ihl} , преобразующимися по формулам:

$$t'_{ihl} = \alpha_{im} \alpha_{kn} \alpha_{lp} t_{mnp}; \quad t_{ihl} = t'_{mnp} \alpha_{mi} \alpha_{nk} \alpha_{pl}. \quad (4.91)$$

Таким образом, каждый индекс в отдельности преобразуется в соответствии с законом преобразования 4-вектора. 4-Вектор можно рассматривать как тензор первого ранга. В этом смысле инвариант является тензором нулевого ранга. Тогда тензором ранга n назовем величину $t_{ihl} \dots$ с n независимыми индексами, каждый из которых в отдельности преобразуется в соответствии с формулой (4.24) для 4-вектора. Если в тензоре ранга n приравнять два индекса, например k и i , то после суммирования по этим индексам получим тензор ранга $(n - 2)$. Это является прямым следствием формул преобразования для тензоров и условий ортогональности (4.11), (4.14). Данная операция называется *сверткой*. Уравнения (4.72), с помощью которых из тензора второго ранга образуется тензор нулевого ранга, как раз представляют собой пример такой свертки.

При сложении (или вычитании) соответствующих компонент двух тензоров ранга n получили новый тензор того же ранга, но операция сложения двух тензоров различных рангов уже не имеет ковариантного смысла. Однако всегда можно образовать *прямое произведение* двух тензоров ранга n и m с помощью всех возможных произведений их компонент и получить в результате тензор ранга $(m + n)$. Формула (4.78) представляет собой частный случай этой операции, поскольку тензор $t_{ik} = a_i b_k$ ранга 2 является прямым произведением двух тензоров первого ранга a_i и b_k . Последующей сверткой тензора $a_i b_k$ получим тензор нулевого ранга, или инвариант (4.27).

Уравнение (4.76) является частным случаем комбинации обеих операций: прямого умножения и свертки. Сначала прямым умножением тензоров t_{ik} и a_l образуем тензор 3-го ранга $(t_{ik} a_l)$ и затем сверткой получаем тензор первого ранга $b_i = t_{ik} a_k$. Аналогично уравнение (4.73) можно рассматривать как результат прямого умножения t_{ik} на самого себя и двух последовательных свертки.

§ 4.10. Псевдотензоры

В трехмерном векторном исчислении наряду с обычным (полярным) вектором \mathbf{c} законом преобразования

$$a'_\mu = \alpha_{\mu\nu} a_\nu \quad (4.92)$$

рассматривается так называемый аксиальный вектор, преобразующийся по закону

$$a'_\mu = \alpha \alpha_{\mu\nu} a_\nu, \quad (4.93)$$

где $\alpha = |\alpha_{\mu\nu}|$ — определитель матрицы преобразования. При собственных вращениях $\alpha = 1$ и аксиальный вектор преобразуется как полярный. Однако при отражениях, когда одна или три оси меняют знак, $\alpha = -1$; поэтому при отражении относительно начала координат, когда

$$x'_\mu = -x_\mu, \quad (4.94)$$

компоненты аксиального вектора не меняются, а компоненты полярного вектора меняют знак. Примером аксиального вектора является векторное произведение двух полярных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} :

$$\mathbf{c} = (c_1, c_2, c_3) = (a_2 b_3 - a_3 b_2, a_3 b_1 - a_1 b_3, a_1 b_2 - a_2 b_1). \quad (4.95)$$

При отражении $a'_\mu = -a_\mu$, $b'_\mu = -b_\mu$, поэтому $c'_\mu = c_\mu$. Другим примером аксиального вектора является вектор напряженности магнитного поля \mathbf{H} . Естественно обобщение аксиальных векторов на тензоры высшего ранга в четырехмерном пространстве, которые называются *псевдотензорами*. Эти величины преобразуются как тензоры, но, кроме того, еще умножаются на детерминант преобразования $\alpha = |\alpha_{ik}|$, т. е.

$$t'_{ik} = \alpha \alpha_{il} \alpha_{km} t_{lm}. \quad (4.96)$$

Из этого определения получаем следующие следствия. Сумма двух псевдотензоров одинакового ранга является псевдотензором того же ранга. Прямое произведение псевдотензора и тензора — псевдотензор с рангом, равным сумме рангов сомножителей. Прямое произведение двух псевдотензоров — есть тензор. Операция свертки применима и к псевдотензору ранга n , в результате чего получается псевдотензор ранга $n - 2$.

§ 4.11. Символ Леви-Чивита

Символ Кронекера — тензор с одинаковыми компонентами в любой системе координат. Символ Леви-Чивита является псевдотензором с теми же свойствами. В четырехмерном пространстве этот псевдотензор имеет ранг 4. Символ

Левы-Чивита определяется как величина ε_{iklm} -антисимметричная по всем четырем индексам. Поэтому из всех компонент не равны нулю лишь компоненты, у которых все индексы различны. Эти компоненты равны $+1$ или -1 , в зависимости от того, отличается ли система индексов (i, k, l, m) от $(1, 2, 3, 4)$ четным или нечетным числом перестановок соответственно. Теперь рассмотрим псевдотензор с компонентами ε_{iklm} в системе S . При переходе к другой системе S' имеем

$$\varepsilon'_{iklm} = \alpha \alpha_{i_n} \alpha_{k_p} \alpha_{l_q} \alpha_{m_r} \varepsilon_{npqr}. \quad (4.97)$$

Поскольку свойства симметрии инвариантны, ε'_{iklm} также антисимметричны по всем индексам. Поэтому достаточно вычислить компоненту с $(i, k, l, m) = (1, 2, 3, 4)$:

$$\varepsilon'_{1234} = \alpha \alpha_{1_n} \alpha_{2_p} \alpha_{3_q} \alpha_{4_r} \varepsilon_{npqr}. \quad (4.98)$$

Из определения ε_{iklm} следует, что

$$\alpha_{1_n} \alpha_{2_p} \alpha_{3_q} \alpha_{4_r} \varepsilon_{npqr} = \alpha.$$

Тогда, учитывая (4.15) и (4.98), получаем

$$\varepsilon'_{1234} = \alpha^2 = 1 = \varepsilon_{1234}.$$

Из свойств симметрии ε'_{iklm} и ε_{iklm} следует, что

$$\varepsilon'_{iklm} = \varepsilon_{iklm} \quad (4.99)$$

для всех значений индексов (i, k, l, m) .

Таким образом, символ Леви-Чивита является псевдотензором, имеющим одни и те же компоненты в любой координатной системе.

В трехмерном пространстве символ Леви-Чивита представляется величиной $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$, антисимметричной по всем трем индексам, причем $\varepsilon_{123} = 1$. Как и раньше, можно показать, что $\varepsilon_{\mu\nu\lambda}$ — трехмерный псевдотензор.

§ 4.12. Дуальные тензоры

С помощью символа Леви-Чивита можно связать антисимметрический 3-тензор $H_{\mu\nu}$ с псевдовектором (аксиальным вектором) \mathbf{H} :

$$H_{\mu} = (1/2) \varepsilon_{\mu\nu\lambda} H_{\nu\lambda}, \quad (4.100)$$

т. е.

$$\mathbf{H} = (H_1, H_2, H_3) = (H_{23}, H_{31}, H_{12}). \quad (4.101)$$

Величины H_{μ} (4.83) являются компонентами аксиального вектора, дуального тензору $H_{\mu\nu}$. Если $H_{\mu\nu}$ имеет вид

$$f_{\mu\nu} = a_{\mu} b_{\nu} - a_{\nu} b_{\mu} = \begin{vmatrix} a_{\mu} & b_{\mu} \\ a_{\nu} & b_{\nu} \end{vmatrix}, \quad (4.102)$$

где a_{μ} и b_{ν} — два вектора, то соответствующий аксиальный вектор

$$f_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} a_{\nu} b_{\lambda} \quad (4.103)$$

является векторным произведением, $\mathbf{f} = \mathbf{a} \times \mathbf{b}$. Этот тензор, или его дуальный аксиальный вектор, определяют параллелограмм, образованный векторами \mathbf{a} и \mathbf{b} ; компоненты такого дуального вектора равны проекциям этого параллелограмма на три координатные плоскости. Площадь параллелограмма определяется выражением

$$f^2 = f_{\mu\nu} f_{\mu\nu} / 2. \quad (4.104)$$

Псевдотензор f_{μ} перпендикулярен плоскости параллелограмма, так как

$$f_{\mu} a_{\mu} = a_{\mu} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} a_{\nu} b_{\lambda} = 0; \quad f_{\mu} b_{\mu} = 0 \quad (4.105)$$

вследствие антисимметричности символа Леви-Чивита.

Аналогично вектор, дуальный тензору

$$H_{\mu\nu} = \partial a_\nu / \partial x_\mu - \partial a_\mu / \partial x_\nu,$$

т. е. ротору, является аксиальным вектором.

Три вектора \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} определяют параллелепипед, который по аналогии с (4.102) представляется антисимметрическим тензором:

$$V_{\mu\nu\lambda} = \begin{vmatrix} a_\mu & b_\mu & c_\mu \\ a_\nu & b_\nu & c_\nu \\ a_\lambda & b_\lambda & c_\lambda \end{vmatrix}. \quad (4.106)$$

С помощью символа Леви-Чивита этому тензору можно поставить в соответствие псевдотензор нулевого ранга, т. е. псевдоинвариант

$$V = (1/3!) \varepsilon_{\mu\nu\lambda} V_{\mu\nu\lambda} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} a_\mu b_\nu c_\lambda = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 \end{vmatrix}. \quad (4.107)$$

V определяет объем параллелепипеда. Он не изменяется при собственных вращениях, но меняет знак при отражениях. Кроме того,

$$V^2 = (1/3!) V_{\mu\nu\lambda} V_{\mu\nu\lambda}. \quad (4.108)$$

Если \mathbf{a} , \mathbf{b} , \mathbf{c} — три инфинитезимальных вектора, расположенные вдоль осей x_1 , x_2 , x_3 соответственно, например

$$\mathbf{a} = (dx_1, 0, 0); \quad \mathbf{b} = (0, dx_2, 0); \quad \mathbf{c} = (0, 0, dx_3), \quad (4.109)$$

то соответствующий объем равен

$$dV = dx_1 dx_2 dx_3 \quad (4.110)$$

и является псевдоскаляром.

В $(3 + 1)$ -пространстве с помощью символа Леви-Чивита ε_{ihlm} антисимметрический тензор ранга $n \leq 4$ можно связать с псевдотензором ранга 4 — n . Следовательно, псевдотензор F_{ik}^* , дуальный антисимметрическому тензору F_{ih} , определяется выражением

$$F_{ik}^* = (1/2i) \varepsilon_{ihlm} F_{lm}, \quad (4.111)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} F_{23}^* &= (1/i) F_{14}; & F_{31}^* &= (1/i) F_{24}; & F_{12}^* &= (1/i) F_{34}; \\ F_{14}^* &= (1/i) F_{23}; & F_{24}^* &= (1/i) F_{31}; & F_{34}^* &= (1/i) F_{12}. \end{aligned} \right\} \quad (4.112)$$

Вводя величины \mathbf{E} и \mathbf{H} по формулам (4.83), (4.83'), видим, что дуальный псевдотензор F_{ik}^* получается из F_{ih} подстановкой $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$. Уравнения (4.84) и (4.84') не меняются при такой подстановке, поскольку для преобразований Лоренца без вращений $\alpha = 1$, а F_{ik}^* преобразуется как F_{ih} .

Тензор σ_{ik} частного вида

$$\sigma_{ik} = a_i b_k - a_k b_i, \quad (4.113)$$

где a_i и b_k — два вектора, определяет по аналогии с (4.102) двухмерный параллелограмм, построенный на векторах a_i , b_i . Дуальный псевдотензор

$$\sigma_{ik}^* = (1/i) \varepsilon_{ihlm} a_l b_m$$

ортогонален векторам a_i , b_k и тензору σ_{ih} :

$$\sigma_{ik}^* a_k = \sigma_{ik}^* b_k = \sigma_{ik}^* \sigma_{ih} = 0. \quad (4.114)$$

Аналогично (4.104) площадь σ параллелограмма равна

$$\sigma^2 = \sigma_{ih} \sigma_{ih} / 2. \quad (4.115)$$

Антисимметрическому тензору третьего ранга можно поставить в соответствие дуальный псевдотензор первого ранга, т. е. псевдовектор. Для тензора

$$\Sigma_{ihl} = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i \\ a_h & b_h & c_h \\ a_l & b_l & c_l \end{vmatrix}, \quad (4.116)$$

где a_i, b_i, c_i — независимые 4-векторы, дуальный псевдовектор имеет вид

$$\Sigma_i = (1/i3!) \epsilon_{iklm} \Sigma_{klm} = (1/i) \epsilon_{iklm} a_k b_l c_m \quad (4.117)$$

или

$$\Sigma_i = (1/i) \Sigma_{hlm}, \quad (4.118)$$

где $(iklm)$ — четная перестановка из $(1, 2, 3, 4)$. Σ_{ihl} и Σ_i определяют трехмерный параллелепипед, образованный векторами a_i, b_i, c_i . Σ_i ортогонален этому параллелепипеду, так как из (4.117) следует

$$\Sigma_i a_i = \Sigma_i b_i = \Sigma_i c_i = 0. \quad (4.119)$$

Объем V параллелепипеда равен длине псевдовектора Σ_i

$$\Sigma^2 = \epsilon \Sigma_i \Sigma_i, \quad (4.120)$$

где $\epsilon = \pm 1$. Если Σ_i — пространственноподобный вектор, то $\epsilon = +1$, а если Σ_i — времениподобный вектор, то $\epsilon = -1$.

Наконец, псевдотензор, дуальный антисимметрическому тензору четвертого ранга, является псевдоскаляром. Для тензора

$$\Omega_{iklm} = \begin{vmatrix} a_i & b_i & c_i & d_i \\ a_k & b_k & c_k & d_k \\ a_l & b_l & c_l & d_l \\ a_m & b_m & c_m & d_m \end{vmatrix} \quad (4.121)$$

дуальный псевдоскаляр имеет вид

$$\begin{aligned} \Omega &= (1/i4!) \epsilon_{iklm} \Omega_{iklm} = (1/i) \epsilon_{iklm} a_i b_k c_l d_m = \\ &= \frac{1}{i} \begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & d_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & d_2 \\ a_3 & b_3 & c_3 & d_3 \\ a_4 & b_4 & c_4 & d_4 \end{vmatrix}. \end{aligned} \quad (4.122)$$

Ω — объем параллелепипеда, определяемого векторами a_i, b_i, c_i, d_i , удовлетворяющий уравнению

$$\Omega^2 = -(1/4!) \Omega_{ihlm} \Omega_{iklm}. \quad (4.123)$$

Если a_i, b_i, c_i, d_i — инфинитезимальные векторы в направлении координатных осей длиной dx_1, dx_2, dx_3, dx_4 соответственно, то элемент четырехмерного объема

$$d\Omega = (1/i) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 \quad (4.124)$$

также псевдоскаляр.

Рассмотрим два трехмерных инфинитезимальных линейных элемента l_1, l_2 , покоящихся в определенной точке p трехмерного пространства инерциальной системы S^0 . Пусть dx_μ^0 — разность между координатами концов элемента l_1 в S^0 . Тогда dx_μ^0 — являются компонентами 3-вектора dx^0 , соответствующего элементу l_1 . Аналогично δx^0 с компонентами δx_μ^0 — трехмерный вектор, соответствующий l_2 . Тогда параллелограмм, построенный на элементах l_1 и l_2 , описывается (аксиальным) вектором

$$df^0 = (dx^0 \times \delta x^0) = n^0 df^0, \quad (a)$$

где \mathbf{n}^0 — единичный вектор в направлении $d\mathbf{f}^0$. Компоненты $d\mathbf{f}^0$ в соответствии с (4.103) следующие:

$$df_{\mu}^0 = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx_{\nu}^0 \delta x_{\lambda}^0; \quad d\mathbf{f}^0 = (df_{\mu}^0 df_{\mu}^0)^{1/2}. \quad (б)$$

Пусть S — другая инерциальная система, относительно которой $l_1, l_2, S^0, d\mathbf{f}$ движутся с определенной скоростью \mathbf{u} . Теперь определим два 4-вектора dx_i и δx_i со следующими свойствами: в системе S их временные компоненты равны нулю, т. е.

$$dx_4 = \delta x_4 = 0, \quad (в)$$

а в S^0 их пространственные компоненты совпадают с компонентами 3-векторов dx_{μ} и δx_{ν} , соответствующих элементам l_1 и l_2 . Этими условиями оба вектора определены однозначно. Их пространственные компоненты $dx_{\mu}, \delta x_{\mu}$ в системе S определяют два 3-вектора $d\mathbf{x}$ и $\delta\mathbf{x}$, соединяющих одновременные положения концов двух движущихся линейных элементов. Параллелограмм, построенный на этих векторах, определяется аксиальным вектором

$$d\mathbf{f} = (d\mathbf{x} \times \delta\mathbf{x}) = \mathbf{n}d\mathbf{f}; \quad df_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx_{\nu} \delta x_{\lambda}; \quad d\mathbf{f} = (df_{\mu} df_{\mu})^{1/2}, \quad (г)$$

который, очевидно, описывает мгновенное положение движущегося параллелограмма с точки зрения наблюдателя в S .

Соотношение между $d\mathbf{f}$ и $d\mathbf{f}^0$ легко получить, если ввести 4-вектор

$$dF_i = \varepsilon_{ihlm} dx_k \delta x_l U_m/c, \quad (д)$$

где U_i — 4-скорость (4.39). Поскольку символ Леви-Чивита антисимметричен, dF_i ортогонален к U_i , т. е.

$$U_i dF_i = 0; \quad dF_4 = -dF_{\mu} U_{\mu}/U_4 = idF_{\mu} u_{\mu}/c. \quad (е)$$

Кроме того, используя (б), (4.39) и учитывая, что $\varepsilon_{\mu\nu\lambda 4}$ равен трехмерному символу Леви-Чивита, получаем

$$dF_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda 4} dx_{\nu} \delta x_{\lambda} U_4/ci = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx_{\nu} dx_{\lambda} \gamma, \quad (ж)$$

где

$$\gamma = \gamma(u) = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}.$$

Таким образом, из уравнений (г), (е) и (ж) имеем

$$dF_i = \{\gamma df_{\mu}, i\gamma(df_{\mu} u_{\mu})/c\}. \quad (з)$$

Сравнивая формулы (з), (е) с формулами (4.54), (4.57), видим, что 3-вектор df_{μ} аналогичен истинной механической силе. Поэтому в случае преобразований Лоренца без вращений из (4.29) по аналогии с (3.43) получим

$$d\mathbf{f} = (1 - u^2/c^2)^{1/2} d\mathbf{f}^0 + \mathbf{u}(\mathbf{u}d\mathbf{f}^0/u^2) \{1 - (1 - u^2/c^2)^{1/2}\}; \quad \mathbf{u}d\mathbf{f} = \mathbf{u}d\mathbf{f}^0. \quad (и)$$

Это общее выражение для лоренцева сокращения движущегося поверхностного элемента. Если $d\mathbf{f}^0$ параллелен \mathbf{u} , т. е. если поверхностный элемент перпендикулярен движению, из уравнения (и) следует, что $d\mathbf{f}$ также параллелен \mathbf{u} и $d\mathbf{f} = d\mathbf{f}^0$. С другой стороны, когда $d\mathbf{f}^0$ ортогонален \mathbf{u} ,

$$d\mathbf{f} = d\mathbf{f}^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2}; \quad d\mathbf{f} = d\mathbf{f}^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2}.$$

Таким же способом можно получить формулу (2.34) для сокращения движущегося объемного элемента, т. е.

$$dV = dV^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2}, \quad (к)$$

если рассмотреть три инфинитезимальных 4-вектора $dx_i, \delta x_i, \Delta x_i$, причем

$$dx_4 = \delta x_4 = \Delta x_4, \quad (л)$$

и образовать инвариант

$$\varepsilon_{iklm} dx_i \delta x_k \Delta x_l U_m/c = \varepsilon_{iklm} dx_i^0 \delta x_k^0 \Delta x_l^0 U_m^0/c. \quad (м)$$

С учетом (л) и (4.39) левую часть в (м) приведем к виду

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx_\mu \delta x_\nu \Delta x_\lambda \gamma = \gamma dV,$$

а поскольку $U_m^0/ic = \delta_{m4}$, правая часть равна

$$\varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx_\mu^0 \delta x_\nu^0 \Delta x_\lambda^0 = dV^0.$$

Следовательно, (м) совпадает с (к).

§ 4.13. Инфинитезимальные преобразования Лоренца. Преобразования без вращения

Инфинитезимальные однородные линейные преобразования $(x_i) \rightarrow (x'_i)$ имеют вид

$$x'_i = x_i + \varepsilon_{ik} x_k = (\delta_{ik} + \varepsilon_{ik}) x_k, \quad (4.125)$$

где ε_{ik} — инфинитезимальные величины. В случае преобразований Лоренца, подставляя (4.125) в (4.10) и пренебрегая членами второго порядка малости, получаем

$$x_i \bar{x}_i = (x_i + \varepsilon_{ik} x_k) (\bar{x}_i + \varepsilon_{ih} \bar{x}_h) = x_i \bar{x}_i + \bar{x}_i \varepsilon_{ih} x_h + x_i \varepsilon_{ik} \bar{x}_k.$$

Поскольку это уравнение должно удовлетворяться при любых значениях x_i и \bar{x}_i , то

$$\varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}. \quad (4.126)$$

Это условие для инфинитезимальных преобразований эквивалентно условиям ортогональности (4.11), (4.14) для конечных преобразований.

Рассмотрим произвольное преобразование Лоренца (4.3), связывающее пространственно-временные координаты двух систем S и S' . Пусть $\mathbf{v} = (v_x, v_y, v_z)$ — скорость S' относительно S . Тогда соответствующий 4-вектор V_i с учетом (4.39) имеет вид

$$V_i = (\gamma \mathbf{v}, \gamma ic); \quad (\gamma = (1 - v^2/c^2)^{-1/2}).$$

Его компоненты в системе S' следующие:

$$V'_i = (0, 0, 0, ic),$$

поскольку V_i — 4-скорость точки, покоящейся в S' , а это значит, что вектор V_i направлен вдоль оси x'_4 . Тогда из формулы преобразования 4-вектора получим

$$V_k = V'_i \alpha_{ik} = ic \alpha_{4k}, \quad (4.127)$$

Аналогично, если $e_i^{(1)}, e_i^{(2)}, e_i^{(3)}$ — единичные направляющие векторы осей x'_1, x'_2, x'_3 соответственно, то

$$e_k^{(\mu)'} = \delta_{k\mu}; \quad e_k^{(\mu)} = e_l^{(\mu)'} \alpha_{lk} = \delta_{l\mu} \alpha_{\mu k}$$

и

$$e_l^{(\mu)} e_l^{(\nu)} = e_k^{(\mu)'} e_l^{(\nu)'} = \delta_{l\mu} \delta_{l\nu} = \delta_{\mu\nu};$$

$$e_l^{(\mu)} V_l = e_l^{(\mu)'} V'_l = 0. \quad (4.127')$$

Для преобразований Лоренца без вращений коэффициенты α_{ik} в соответствии с (2.27) имеют вид

$$\alpha_{ik} = \begin{vmatrix} 1 + (v_x^2/v^2)(\gamma - 1), & (v_x v_y/v^2)(\gamma - 1), & (v_x v_z/v^2)(\gamma - 1), & iV_1/c \\ (v_y v_x/v^2)(\gamma - 1), & 1 + (v_y^2/v^2)(\gamma - 1), & (v_y v_z/v^2)(\gamma - 1), & iV_3/c \\ (v_z v_x/v^2)(\gamma - 1), & (v_z v_y/v^2)(\gamma - 1), & 1 + (v_z^2/v^2)(\gamma - 1), & iV_3/c \\ -iV_1/c, & -iV_2/c, & -iV_3/c, & -iV_4/c \end{vmatrix} \quad (4.128)$$

В $(3 + 1)$ -пространстве преобразование (4.128) представляет собой поворот в двухмерной плоскости, определяемой временными осями S' и S .

Если v_x, v_y, v_z — бесконечно малые величины, то с точностью до малых второго порядка

$$V_1 = v_x; \quad V_2 = v_y; \quad V_3 = v_z; \quad V_4 = ic,$$

а (4.128) сводится к

$$\alpha_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon_{ik}; \quad \varepsilon_{\mu\nu} = 0, \quad \varepsilon_{\mu 4} = -\varepsilon_{4\mu} = iV_\mu/c; \quad \varepsilon_{44} = 0. \quad (4.129)$$

§ 4.14. Последовательные преобразования Лоренца

Пусть

$$x'_i = \alpha_{ik} x_k; \quad S \rightarrow S' \quad \text{и} \quad x''_i = \alpha'_{ik} x'_k; \quad S' \rightarrow S'' \quad (4.130)$$

два последовательных преобразования Лоренца. Результирующее преобразование

$$x''_i = (\alpha'_{il} \alpha_{lk}) x_k \quad (4.131)$$

также есть преобразование Лоренца. Поэтому коэффициенты

$$\alpha''_{ik} = \alpha'_{il} \alpha_{lk}$$

удовлетворяют тем же условиям ортогональности (4.11), (4.14), что и коэффициенты $\alpha_{ik}, \alpha'_{ik}$. Однако (4.131), в общем случае, уже не является преобразованием Лоренца без вращения даже в случае преобразований (4.130), т. е. α''_{ik} не выражаются в виде (4.128), даже если $\alpha_{ik}, \alpha'_{ik}$ и имеют такой вид. Коэффициенты α''_{ik} можно выразить в виде (4.128), только если три временные оси систем S, S', S'' лежат в одной плоскости.

В частном случае бесконечно малого преобразования Лоренца без вращения от S' к S'' в соответствии с (4.129) имеем

$$\alpha'_{ik} = \delta_{ik} + \varepsilon'_{ik}; \quad \varepsilon'_{\mu\nu} = 0; \quad \varepsilon'_{\mu 4} = -\varepsilon'_{4\mu} = iV'_\mu/c; \quad \varepsilon'_{44} = 0, \quad (4.132)$$

где V'_i — 4-скорость S'' относительно S' . Следовательно,

$$\alpha''_{ik} = (\delta_{il} + \varepsilon'_{il}) \alpha_{lk} = \alpha_{lk} + \varepsilon'_{il} \alpha_{lk}. \quad (4.133)$$

Пусть $x_i = f_i(\tau)$ — мировая линия произвольного движения частицы в S , а τ — собственное время частицы. Попробуем определить последовательные системы покоя частицы таким образом, чтобы две следующие друг за другом системы покоя в любое время имели одинаковую ориентацию пространственных осей. Пусть S' и S'' в (4.13) — две мгновенные системы покоя частицы в моменты времени τ и $\tau + d\tau$, соответственно. Тогда 4-скорость системы S' относительно S равна

$$U_i(\tau) = dx_i/d\tau = \dot{f}_i(\tau). \quad (4.134)$$

Аналогично 4-скорость S'' относительно S равна

$$V_i = U_i(\tau) + dU_i(\tau) = U_i(\tau) + \dot{U}_i d\tau = \dot{f}_i(\tau) + \ddot{f}_i(\tau) d\tau. \quad (4.135)$$

Компоненты этих двух 4-векторов в системе S' следующие:

$$U'_i(\tau) = \alpha_{ik} U_k = (0, 0, 0, ic); \quad (4.136)$$

$$V'_i = U'_i + dU'_i = \alpha_{ik} (U_k + dU_k) = U'_i + \alpha_{ik} dU_k. \quad (4.137)$$

Поскольку предполагается, что переход от системы S' к системе S'' осуществляется бесконечно малыми преобразованиями Лоренца без вращения, то коэффициенты α''_{ik} преобразования от системы S к системе S'' получаются из (4.133) и (4.132), причем V'_μ в (4.132) определяется выражением (4.137). Поэтому

$$\varepsilon'_{ik} = \frac{V'_i U'_k - V'_k U'_i}{c^2} = \frac{U'_k dU'_i - U'_i dU'_k}{c^2}, \quad (4.138)$$

что с учетом (4.136) совпадает с ε'_{ik} в (4.132).

Таким образом, из (4.133), (4.138) и (4.137) имеем

$$\alpha''_{ik} - \alpha_{ik} = (U'_i dU'_i - U'_i dU'_i) \alpha_{ik} / c^2 = (1/c^2) \alpha_{il} (U_k dU_l - U_l dU_k).$$

Коэффициенты α_{ik} можно рассматривать как функции $\alpha_{ik}(\tau)$ от τ ; тогда $\alpha''_{ik} = \alpha_{ik}(\tau + d\tau)$. Поэтому из последнего выражения получаем следующие дифференциальные уравнения для функций $\alpha_{ik}(\tau)$:

$$d\alpha_{ik}(\tau)/d\tau = \alpha_{il} \xi_{lk}, \quad (4.139)$$

где

$$\xi_{lk} = (\dot{U}_l U_k - \dot{U}_k U_l) / c^2. \quad (4.140)$$

Для дальнейшего заметим, что с учетом (4.14), (4.41), (4.41') и (4.13) коэффициенты α_{ik} и ξ_{lk} удовлетворяют соотношениям

$$\left. \begin{aligned} \alpha_{\nu i} \alpha_{\lambda i} &= \delta_{\nu\lambda}; & \alpha_{\nu i} U_i &= 0; \\ \alpha_{\lambda l} \xi_{li} \alpha_{\nu i} &= 0; & \alpha_{\nu l} \xi_{li} U_i &= -\alpha_{\nu l} \dot{U}_i; \\ \alpha_{\nu l} \xi_{li} \alpha_{\lambda m} \xi_{mi} &= -(\alpha_{\nu l} \dot{U}_l) (\alpha_{\lambda m} \dot{U}_m) / c^2. \end{aligned} \right\} \quad (4.141)$$

Уравнения (4.139) определяют переход от фиксированной системы S к мгновенной системе покоя $S' = S'(\tau)$ с системой координат x'_i . Следовательно,

$$x_i = x'_k \alpha_{ki}(\tau) \quad (4.142)$$

или, осуществив такое непрерывное смещение начала координат в S' , чтобы частица всегда находилась в начале координат системы покоя $S'(\tau)$, имеем

$$x_i = f_i(\tau) + x'_k \alpha_{ki}(\tau). \quad (4.143)$$

Теперь присоединим к рассматриваемой частице пространственный единичный вектор $e'(\tau)$, такой, чтобы его компоненты относительно пространственных осей $S'(\tau)$ не изменялись во времени, например любой направляющий вектор пространственных осей в S' . Следовательно, смещение вектора e' происходит без изменения его ориентации. В $(3+1)$ -пространстве этот вектор является пространственноподобным вектором с компонентами

$$e'_i = (e', 0) \quad (4.144)$$

в системе S' . Его компоненты в системе S следующие:

$$e_i(\tau) = e'_k \alpha_{ki}(\tau) = e'_\mu \alpha_{\mu i}(\tau). \quad (4.145)$$

Учитывая (4.136) и (4.144), имеем

$$e_i U_i = e'_i U'_i = 0, \quad (4.146)$$

т. е. e_i ортогонален U_i . Из (4.145), (4.139), (4.140) и (4.146) получаем

$$\begin{aligned} de_i(\tau)/d\tau &= e'_k d\alpha_{ki}(\tau)/d\tau = e'_k \alpha_{kl} (\dot{U}_l U_i - \dot{U}_i U_l) / c^2 = \\ &= [(e_l \dot{U}_l) U_i - \dot{U}_i (e_l U_l)] / c^2, \end{aligned}$$

т. е.

$$de_i(\tau)/d\tau = (e_l \dot{U}_l) U_i / c^2. \quad (4.147)$$

Если $S'(\tau)$ совпадает с S при $\tau = 0$, то $e_i = e'_i$ при $\tau = 0$ и скорость частицы в этот момент равна нулю. В последующее время, в общем случае $e_i \neq e'_i$, и даже если скорость частицы снова становится равной нулю, то всегда

$$e_i = (e, 0) \neq e'_i = (e', 0).$$

Это значит, что компоненты единичного вектора различны в системах S и S' в соответствии с тем фактом, что вектор совершает прецессию Томаса относительно S (см. § 2.8).

§ 4.15. Последовательные системы покоя при произвольном прямолинейном и равномерном вращательном движениях частицы

Пусть частица движется в направлении оси x_1 , тогда $f_2 = f_3 = 0$, т. е.

$$U_i = (\dot{f}_1, 0, 0, \dot{f}_4); \quad \dot{U}_i = (\ddot{f}_1, 0, 0, \ddot{f}_4). \quad (4.148)$$

Предположим, также, что скорость частицы равна нулю при $\tau = 0$ и что в этот момент $S'(\tau)$ совпадает с S . Поэтому, учитывая, что $U_i U_i = U_1^2 + U_4^2 = -c^2$, 4-скорость U_i можно записать в виде

$$U_i = (c \operatorname{sh} \theta(\tau), 0, 0, ic \operatorname{ch} \theta(\tau)), \quad (4.149)$$

где $\theta(\tau)$ — произвольная функция τ , такая, что $\theta = 0$ при $\tau = 0$. Отсюда

$$f_i(\tau) = \left(c \int_0^\tau \operatorname{sh} \theta d\tau, 0, 0, ic \int_0^\tau \operatorname{ch} \theta d\tau \right). \quad (4.150)$$

Если $e_k^{(\mu)}(\tau)$ — единичные направляющие векторы пространственных осей последовательных систем покоя $S'(\tau)$, то

$$e_k^{(\mu)}(0) = \delta_{k\mu} \text{ при } \tau = 0. \quad (4.151)$$

Каждый из этих векторов удовлетворяет уравнениям (4.147), поэтому

$$de_k^{(\mu)}/d\tau = (e_l^{(\mu)} \dot{U}_l) U_k/c^2. \quad (4.152)$$

Учитывая (4.148), видим, что

$$e_k^{(2)} = \delta_{k2}; \quad e_k^{(3)} = \delta_{k3}; \quad e_2^{(1)} = e_3^{(1)} = 0 \quad (4.153)$$

есть решение (4.152). Чтобы найти компоненты $e_1^{(1)}$ и $e_4^{(1)}$, умножим (4.152) на U_k и $e_k^{(1)}$, в результате чего получим следующие интегралы:

$$e_k^{(1)} U_k = 0, \quad e_k^{(1)} e_k^{(1)} = 1. \quad (4.154)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(1)} U_1 + e_4^{(1)} U_4 &= 0; & e_4^{(1)} &= -e_1^{(1)} U_1/U_4; \\ e_1^{(1)2} + e_4^{(1)2} &= 1; \\ e_1^{(1)2} + (1 + U_1^2/U_4^2) &= -e_1^{(1)2} c^2/U_4^2 = 1, \end{aligned} \right\} \quad (4.155)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} e_1^{(1)} &= U_4/ic; \\ e_4^{(1)} &= -U_4 U_1/ic U_4 = iU_1/c. \end{aligned} \right\} \quad (4.156)$$

Поэтому из (4.127) и (4.127') получим

$$\alpha_{ik} = \begin{pmatrix} U_4/ic & 0 & 0 & iU_1/c \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ U_1/ic & 0 & 0 & U_4/ic \end{pmatrix}, \quad (4.157)$$

что соответствует специальным преобразованиям Лоренца [см. (4.116)]. С помощью (4.157), (4.149) и (4.150) преобразования (4.143) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= c \int_0^\tau \operatorname{sh} \theta d\tau + x'_1 \operatorname{ch} \theta(\tau) + x'_4 \frac{\operatorname{sh} \theta(\tau)}{i}; \\ x_2 &= x'_2; \quad x_3 = x'_3; \\ x_4 &= ic \int_0^\tau \operatorname{ch} \theta d\tau + x'_1 i \operatorname{sh} \theta(\tau) + x'_4 \operatorname{ch} \theta(\tau). \end{aligned} \right\} \quad (4.158)$$

В частном случае гиперболического движения частицы из (3.46) имеем

$$d\tau = (1 - u^2/c^2)^{1/2} dt = dt/\sqrt{1 + (gt/c)^2},$$

т. е.

$$\tau = (c/g) \operatorname{sh}^{-1}(gt/c); \quad t = (c/g) \operatorname{sh}(g\tau/c). \quad (4.159)$$

Отсюда с учетом (3.47) получим

$$f_1(\tau) = (c^2/g) (\sqrt{1 + g^2\tau^2/c^2} - 1) = (c^2/g) (\operatorname{ch} g\tau/c - 1); \quad \left. \begin{array}{l} f_2 = f_3 = 0; \quad f_4(\tau) = i(c^2/g) \operatorname{sh} g\tau/c; \end{array} \right\} \quad (4.160)$$

$$\left. \begin{array}{l} U_i = \dot{f}_i = (c \operatorname{sh} g\tau/c, 0, 0, i c \operatorname{ch} g\tau/c); \\ \dot{U}_i = (g \operatorname{ch} g\tau/c, 0, 0, i g \operatorname{sh} g\tau/c). \end{array} \right\} \quad (4.161)$$

Сравнивая с (4.149), видим, что в этом частном случае

$$\theta(\tau) = g\tau/c, \quad (4.162)$$

а преобразования (4.158) приводятся к виду

$$\left. \begin{array}{l} x_1 = (c^2/g) (\operatorname{ch} g\tau/c - 1) + x'_1 \operatorname{ch} g\tau/c + x'_4 (\operatorname{sh} g\tau/c)/i; \\ x_2 = x'_2; \quad x_3 = x'_3; \\ x_4 = i(c^2/g) \operatorname{sh} g\tau/c + x'_1 i \operatorname{sh} g\tau/c + x'_4 \operatorname{ch} g\tau/c. \end{array} \right\} \quad (4.163)$$

Используя коэффициенты (4.157) для компонент \dot{U}'_i вектора 4-ускорения частицы в последовательных системах покоя S' (τ) и учитывая (4.161), получаем

$$\dot{U}'_i = \alpha_{ih} \dot{U}_h = (g, 0, 0, 0), \quad (4.164)$$

откуда следует, что ускорение частицы в последовательных системах покоя постоянно и равно g [ср. с (4.42)].

Теперь кратко рассмотрим решение уравнений (4.139) в случае движения частицы в плоскости (x_1, x_2) по окружности радиуса a с постоянной угловой скоростью ω . В этом случае имеем

$$f_i = (a \cos \omega\gamma\tau, a \sin \omega\gamma\tau, 0, i c\gamma\tau), \quad (4.165)$$

где $\gamma = (1 - u^2/c^2)^{-1/2}$ ($u = a\omega$ — постоянная скорость движения частицы по окружности). Из (4.165) следует

$$\left. \begin{array}{l} U_i = (-a\omega\gamma \sin(\omega\gamma\tau), a\omega\gamma \cos(\omega\gamma\tau), 0, i c\gamma); \\ \dot{U}_i = (-a\omega^2\gamma^2 \cos(\omega\gamma\tau), -a\omega^2\gamma^2 \sin(\omega\gamma\tau), 0, 0). \end{array} \right\} \quad (4.166)$$

Легко проверить, что решение уравнений (4.139) тогда имеет следующий вид:

$$\alpha_{ih} = \begin{bmatrix} \cos \alpha \cos \beta + \gamma \sin \alpha \sin \beta, & \sin \alpha \cos \beta - \gamma \cos \alpha \sin \beta, & 0, & -i(u\gamma/c) \sin \beta \\ \cos \alpha \sin \beta - \gamma \sin \alpha \cos \beta, & \sin \alpha \sin \beta + \gamma \cos \alpha \cos \beta, & 0, & i(u\gamma/c) \cos \beta \\ 0, & 0, & 1, & 0 \\ i(u\gamma/c) \sin \alpha, & -i(u\gamma/c) \cos \alpha, & 0, & \gamma \end{bmatrix}, \quad (4.167)$$

где $\alpha = \omega\gamma\tau$; $\beta = \gamma\alpha = \omega\gamma^2\tau$; $u = a\omega$.

Затем из (4.142) или (4.143) с учетом (4.167) находим преобразование от S к S' (τ). При $\tau = 0$ имеем

$$\alpha_{ih}(0) = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \gamma & 0 & i u\gamma/c \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i u\gamma/c & 0 & \gamma \end{bmatrix}. \quad (4.168)$$

Поэтому, обозначая пространственно-временные координаты системы S' (0) через x_i^0 , из (4.142) получаем

$$\left. \begin{aligned} x_1 &= x_1^0; & x_2 &= \gamma x_2^0 - i(u\gamma/c) x_4^0; \\ x_3 &= x_3^0; & x_4 &= i(u\gamma/c) x_2^0 + \gamma x_4^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.169)$$

Это специальное преобразование Лоренца от S к системе S' (0), движущейся в направлении оси x_2 со скоростью u .

В следующий момент времени $\tau = \tau_1 = 2\pi/\omega\gamma$, в соответствии с (4.167), имеем

$$\alpha_{ik}(\tau_1) = \begin{bmatrix} \cos \beta_1 & -\gamma \sin \beta_1 & 0 & -i(u\gamma/c) \sin \beta_1 \\ \sin \beta_1 & \gamma \cos \beta_1 & 0 & i(u\gamma/c) \cos \beta_1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -i u\gamma/c & 0 & \gamma \end{bmatrix}, \quad (4.170)$$

где $\beta_1 = 2\pi(\gamma - 1)$. Коэффициенты $\alpha_{ik}(\tau_1)$ можно записать также в виде

$$\alpha_{ik}(\tau_1) = \beta_{il} \alpha_{lk}(0),$$

где

$$\beta_{ik} = \begin{pmatrix} \cos \beta_1 & -i \sin \beta_1 & 0 & 0 \\ \sin \beta_1 & \cos \beta_1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}. \quad (4.171)$$

Если координаты системы S' (τ_1) обозначить x_i^1 , то

$$x_i^1 = \alpha_{ik}(\tau_1) x_k = \beta_{il} \alpha_{lk}(0) = \beta_{il} x_l^0$$

или

$$\left. \begin{aligned} x_1^1 &= \cos \beta_1 x_1^0 - \sin \beta_1 x_2^0; \\ x_2^1 &= \sin \beta_1 x_1^0 + \cos \beta_1 x_2^0; \\ x_3^1 &= x_3^0; & x_4^1 &= x_4^0. \end{aligned} \right\} \quad (4.172)$$

Таким образом, система S' (τ_1) не совпадает с системой S' (0). Чтобы пространственные оси в S' (τ_1) имели одинаковую ориентацию с пространственными осями в S' (0) или в S , систему S' (τ_1) нужно повернуть в плоскости $x_1 x_2$ на угол β_1 в направлении движения частицы. Другими словами, оси системы S необходимо повернуть на угол $-\beta_1 = -2\pi(\gamma - 1)$, чтобы привести их к одинаковой ориентации с осями S' (τ_1). Это обусловлено эффектом Томаса. Интегрируя формулу (2.65) для скорости прецессии Томаса по всему периоду T ,

получаем $\int_0^T \boldsymbol{\omega} dt = -\int_0^T (\gamma - 1) (\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}/v^3) dt$. Поскольку в рассматриваемом случае $\mathbf{v} \times \dot{\mathbf{v}}$ — постоянный вектор, перпендикулярный \mathbf{v} и $\dot{\mathbf{v}}$, и $\int_0^T dt = T$, $\int_0^T \dot{v} dt = v\omega T = 2\pi v$, полный угол прецессии равен

$$0 = -2\pi(\gamma - 1) = -\beta_1. \quad (4.173)$$

§ 4.16. Тензорные и псевдотензорные поля. Тензорный анализ

Как и в случае обыкновенного пространства, мы говорим о тензорном поле ранга n в $(3 + 1)$ -пространстве, если с каждой точкой этого пространства связан тензор ранга n . В частности, мы имеем дело с тензорным полем нулевого ранга, или с так называемым скалярным полем, если с каждым точечным событием связано инвариантное число. Это означает, что в каждой системе S мы имеем определенную функцию координат $\varphi(x) = \varphi(x_i) = \varphi(x_1, x_2, x_3, x_4)$, такую, что

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \quad (4.174)$$

если $\varphi'(x')$ — функция, соответствующая системе S' , а числа (x'_i) и (x_i) — координаты одного и того же события в системах S и S' соответственно. В общем случае φ' выражается через переменные x'_i другим способом, нежели φ — через переменные x_i . Следовательно, скалярная функция $\varphi(x_i)$ не форм-инвариантна. Скалярная функция является форм-инвариантной, если φ — функция только от одной величины (4.4), которая также форм-инвариантна.

Аналогично имеем тензорное поле ранга 1, если с каждым точечным событием связан определенный 4-вектор. Компоненты $a_i(x)$ и $a'_i(x')$ этого 4-вектора в двух произвольных системах координат S и S' являются функциями от координат точечного события, а

$$a'_i(x') = \alpha_{ih} a_h(x), \quad (4.175)$$

когда связь между переменными $(x') = (x'_i)$ и $(x) = (x_i)$ определяется формулами (4.3) и (4.13).

Для тензорных полей высших рангов справедливы уравнения, идентичные (4.174) и (4.175).

Из произвольного скалярного поля можно инвариантным способом образовать векторное поле с компонентами $\partial\varphi/\partial x_i$ в произвольной системе координат S , поскольку из (4.13) имеем, что

$$\partial\varphi'/\partial x'_i = (\partial\varphi/\partial x^k) (\partial x^k/\partial x'_i) = \alpha_{ih} \partial\varphi/\partial x_h, \quad (4.176)$$

где

$$\partial x_k/\partial x'_i = \alpha_{ih}. \quad (4.177)$$

4-Вектор $\partial\varphi/\partial x_i$ называется градиентом φ и обозначается

$$\text{grad}_i \varphi = \partial\varphi/\partial x_i, \quad (4.178)$$

как и обычный градиент в трехмерном пространстве.

Аналогично из векторного поля $a_i(x)$ можно образовать тензорное поле ранга 2 с компонентами $\partial a_i/\partial x_k$ в произвольной системе координат, поскольку

$$\partial a'_i/\partial x'_k = \alpha_{ie} (\partial a_e/\partial x_m) \partial x_m/\partial x'_k = \alpha_{ie} \alpha_{km} \partial a_e/\partial x_m. \quad (4.179)$$

Антисимметричная комбинация $\partial a_k/\partial x_i - \partial a_i/\partial x_k$ также является тензорным полем второго ранга и называется ротором векторного поля $a_i(x)$, т. е.

$$\text{rot}_{ih} a \equiv \text{rot}_{ih} (a_i) \equiv \partial a_k/\partial x_i - \partial a_i/\partial x_k. \quad (4.180)$$

(В выражении $\text{rot}_{ih} (a_i)$, конечно, нет суммирования по i). Ротор — антисимметрический тензор. Поэтому в трехмерном пространстве ему соответствует аксиальный вектор $\text{rot } a$.

Сверткой тензорного поля $\partial a_i/\partial x_k$ получаем тензорное поле нулевого ранга. Следовательно, из векторного поля $a_i(x)$ можно образовать скалярное пол-

$$\partial a_i/\partial x_i = \partial a'_i/\partial x'_i, \quad (4.181)$$

которое называется дивергенцией векторного поля a_i , т. е.

$$\text{div } a \equiv \text{div} (a_i) = \partial a_i/\partial x_i, \quad (4.182)$$

и аналогично обычной трехмерной дивергенции $\text{div } a$. Если a_i — градиент скалярной функции ψ , т. е.

$$a_i = \partial\psi/\partial x_i, \quad (4.183)$$

то дивергенция a_i имеет вид

$$\partial a_i/\partial x_i = \partial^2\psi/\partial x_i \partial x_i = \square \psi, \quad (4.184)$$

где

$$\square = \partial^2/\partial x_i \partial x_i = \partial^2/\partial x_\mu \partial x_\mu - (1/c^2) \partial^2/\partial t^2 = \Delta - (1/c^2) \partial^2/\partial t^2. \quad (4.185)$$

Таким образом, оператор (4.185) является ковариантным оператором и называется оператором Д'Аламбера. (Это четырехмерное обобщение оператора Лапласа $\Delta = \partial^2 / \partial x_\mu \partial x_\mu$.)

Тем же способом из тензорного поля ранга n всегда можно дифференцированием образовать тензорное поле ранга $n + 1$, а последующей сверткой — тензорное поле ранга $n - 1$. Как и в только что рассмотренных частных случаях, этот факт является следствием формул преобразования для тензоров, уравнения (4.176) и условий ортогональности (4.11) и (4.14). Следовательно, из тензорного поля второго ранга t_{ik} можно построить тензорное поле $\partial t_{ik} / \partial x_l$ ранга 3, а последующей сверткой тензорное поле ранга 1, т. е. векторное поле

$$\operatorname{div}_i t \equiv \operatorname{div}_i (t_{ik}) = \partial t_{ik} / \partial x_k, \quad (4.186)$$

называемое дивергенцией тензорного поля t_{ik} . Если тензорное поле F_{ik} антисимметрично, то из него можно построить полностью антисимметрическое тензорное поле ранга 3

$$\operatorname{rot}_{ikl} F \equiv \operatorname{rot}_{ikl} (F_{ik}) = \partial F_{ik} / \partial x_l + \partial F_{kl} / \partial x_i + \partial F_{il} / \partial x_k, \quad (4.187)$$

которое называется ротором тензора F_{ik} .

Перестановка любых двух из трех индексов приводит к перемене знака в (4.187). Поэтому $\operatorname{rot}_{ikl} F = 0$, если два индекса равны, и тензор $\operatorname{rot}_{ikl} F$ имеет только $4!/3!1! = 4$ независимые компоненты.

Если F_{ik} — ротор векторного поля, т. е. если

$$F_{ik} = \operatorname{rot}_{ik} a = \partial a_k / \partial x_i - \partial a_i / \partial x_k, \quad (4.188)$$

то $\operatorname{rot} F_{ik}$ тождественно равен нулю

$$\operatorname{rot}_{ikl} F \equiv 0. \quad (4.189)$$

Точно так же мы говорим о псевдотензорном поле, когда с каждой точкой пространства связан определенный псевдотензор. Следовательно, псевдоскалярное поле есть псевдотензорное поле нулевого ранга, псевдовекторное поле — псевдотензорное поле ранга 1 и т. д. Различным антисимметрическим тензорным полям можно поставить в соответствие дуальные псевдотензорные поля. Взаимосвязь между ними такая же, как и между тензорами и их дуальными псевдотензорами, определенными в § 4.12. Псевдовекторное поле, дуальное к $\operatorname{rot}_{ikl} F$, равно $\operatorname{div}_i F^*$, где F_{ik}^* — псевдотензорное поле, дуальное к F_{ik} , так как в соответствии с (4.111) имеем

$$\partial F_{ik}^* / \partial x_k = (1/2 i) \varepsilon_{iklm} \partial F_{lm} / \partial x_k = (1/i 3!) \varepsilon_{iklm} (\partial F_{lm} / \partial x_k + \partial F_{mk} / \partial x_l + \partial F_{kl} / \partial x_m). \quad (4.190)$$

Следовательно, $\operatorname{div}_i F^*$ и $\operatorname{rot}_{ikl} F$ дуальны друг другу.

§ 4.17. Теорема Гаусса для четырехмерного пространства

Если $\mathbf{a} = \mathbf{a}(\mathbf{x})$ — трехмерное векторное поле, а V — область трехмерного пространства, ограниченная замкнутой поверхностью f , то теорема Гаусса для обычного пространства выражается следующим уравнением:

$$\int_V \operatorname{div} \mathbf{a} dV = \int_f a_n df, \quad (4.191)$$

где a_n — компонента вектора \mathbf{a} в направлении внешней нормали n к элементу поверхности df . (Элементарное доказательство этой теоремы см. в приложении 1.) Теорема Гаусса позволяет преобразовать объемный интеграл [левая часть (4.191)] в интеграл по двухмерной границе объема V . Если \mathbf{n} — единичный направляющий вектор внешней нормали, то (4.191) можно записать в другом виде:

$$\int_V (\partial a_\mu / \partial x_\mu) dV = \int_V a_\mu n_\mu df, \quad (4.192)$$

где dV определяется формулой (4.110).

Если элемент поверхности df параллелограмм, образованный инфинитезимальными векторами $dx_\mu, \delta x_\mu$, лежащими на поверхности f , то df можно представить тензором $df_{\mu\nu} = dx_\mu \delta x_\nu - dx_\nu \delta x_\mu$, полученным из (4.102) заменой векторов a_μ, b_μ на dx_μ и δx_μ . С другой стороны, инфинитезимальный параллелограмм можно представить соответствующим аксиальным вектором df_μ , определяемым в (4.103). Поскольку этот вектор перпендикулярен элементу поверхности, то (4.192) принимает следующий вид:

$$\int_V (\partial a_\mu / \partial x_\mu) dV = \int_f a_\mu df_\mu = \int_f a_\mu \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx_\nu \delta x_\lambda. \quad (4.193)$$

Здесь уже обеспечен такой выбор последовательности векторов $dx_\mu, \delta x_\mu$, чтобы аксиальный вектор df_μ лежал в направлении внешней нормали к области V .

В такой форме теорему Гаусса сразу можно обобщить на четырехмерное пространство [237, 238]. Если a_i — четырехвекторное поле и Ω — область в $(3 + 1)$ -пространстве, ограниченная замкнутой трехмерной гиперповерхностью Σ , то обобщенная теорема Гаусса принимает форму

$$\int_\Omega \partial a_i / \partial x_i d\Omega = \int_\Sigma \varepsilon a_i d\Sigma_i = (1/i) \int_\Sigma \varepsilon a_i \varepsilon_{iklm} dx_k \delta x_l \Delta x_m. \quad (4.194)$$

Здесь $d\Omega$ определяется из (4.124), а $d\Sigma_i$ — из (4.117), где a_i, b_i, c_i равны $dx_i, \delta x_i, \Delta x_i$ соответственно. Эти величины являются инфинитезимальными векторами, принадлежащими граничному пространству Σ и выбранными так, чтобы вектор $d\Sigma_i$ был направлен вдоль внешней нормали к области Ω . И снова $\varepsilon = 1$, когда $d\Sigma_i$ — пространственноподобный вектор, и $\varepsilon = -1$, если $d\Sigma_i$ — времениподобный.

Если часть границы Σ — гиперплоскость $\Sigma(4)$ с постоянным значением x_4 и точки на $\Sigma(4)$ имеют большие значения времени, чем точки в Ω , то векторы $dx_i, \delta x_i, \Delta x_i$ ортогональны временной оси, и их можно выбрать в виде $dx_i = (dx_1, 0, 0, 0)$; $\delta x_i = (0, dx_2, 0, 0)$; $\Delta x_i = (0, 0, dx_3, 0)$. Тогда вектор $d\Sigma_i = (0, 0, 0, i dx_1 dx_2 dx_3)$ направлен по внешней нормали к Ω . Кроме того, поскольку $d\Sigma_i$ — времениподобный вектор, то для $\Sigma(4)$ имеем

$$\varepsilon d\Sigma_i = \left(0, 0, 0, \frac{1}{i} dx_1 dx_2 dx_3 \right). \quad (4.195)$$

С другой стороны, если точки в Ω имеют большие значения времени, чем точки в $\Sigma(4)$, то нужно переставить два из трех векторов $dx_i, \delta x_i, \Delta x_i$ так, чтобы $d\Sigma_i$ лежал в направлении внешней нормали к Ω , а в выражении (4.195) для $\varepsilon d\Sigma_i$ заменить $1/i$ на i .

Множитель ε в (4.194) можно опустить, если при этом $d\Sigma_i$ в каждой точке Σ выбрать так, чтобы он был направлен наружу или внутрь области Ω , когда этот вектор пространственноподобный или времениподобный соответственно.

Если $t_{\mu\nu}$ — 3-тензор, то по аналогии с (4.192) и (4.193):

$$\int_V (dt_{\mu\nu} / dx_\nu) dV = \int_f t_{\mu\nu} n_\nu df = \int_f t_{\mu\nu} \varepsilon_{\mu\lambda\beta} dx_\lambda \delta x_\beta. \quad (4.196)$$

Обобщая (4.196) на $(3 + 1)$ -пространство, имеем

$$\int_\Omega (dt_{ik} / dx_k) d\Omega = \int_\Sigma \varepsilon t_{ik} d\Sigma_k = \int (\varepsilon/i) t_{ik} \varepsilon_{iklm} dx_l \delta x_m \Delta x_n. \quad (4.197)$$

Во многих приложениях, и особенно в релятивистской квантовой теории используются интегралы от определенных функций в импульсном пространстве частицы. Это трехмерное абстрактное пространство, каждая точка которого характеризуется компонентами p_x, p_y, p_z вектора импульса. Связь между импульсами p и p' в двух различных инерциальных системах с одинаковой

ориентацией пространственных осей определяется формулой (3.37). Поскольку $E' = c(m_0^2 c^2 + p'^2)^{1/2}$, то это преобразование нелинейно, и по теореме Якоби преобразование элемента объема импульсного пространства $dp_x dp_y dp_z$ дается формулой

$$dp_x dp_y dp_z = J dp'_x dp'_y dp'_z, \quad (\text{а})$$

где

$$J = d(p_x, p_y, p_z) / d(p'_x, p'_y, p'_z) = |\partial p_\mu / \partial p'_\nu| \quad (\text{б})$$

— якобиан. Простое вычисление для него дает

$$J = (1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{u}' / c^2) (1 - v^2 / c^2)^{-1/2} = (1 + \mathbf{v} \cdot \mathbf{p}' / E') (1 - v^2 / c^2)^{-1/2} = E / E', \quad (\text{в})$$

из которого следует, что

$$dp_x dp_y dp_z / E = dp'_x dp'_y dp'_z / E' \quad (\text{г})$$

— инвариант. [Вычисление J наиболее просто в случае специальных преобразований Лоренца (3.32 а, б) и, поскольку величины в (г) инвариантны при пространственных вращениях, то формула (г) справедлива для любых преобразований Лоренца.]

Вводя в импульсном пространстве полярные координаты, формулу (г) можно представить в виде

$$p^2 dp d\omega / E = p'^2 dp' d\omega' / E', \quad (\text{д})$$

где $d\omega$ и $d\omega'$ — телесные углы в направлениях \mathbf{p} и \mathbf{p}' соответственно. Эта формула справедлива и для частиц с нулевой собственной массой (фотон или нейтрино), для которых $E = cp$. В этом случае

$$p dp d\omega = p' dp' d\omega'. \quad (\text{е})$$

В статистической механике вводится еще один тип пространства — *фазовое пространство*. Для одной частицы это шестимерное пространство, каждая точка которого характеризуется шестью числами p_x, p_y, p_z, x, y, z . Элемент объема фазового пространства определяется произведением

$$dp_x dp_y dp_z dx dy dz = dp_x dp_y dp_z dV, \quad (\text{ж})$$

т. е. произведением элементов объема импульсного пространства и обычного пространства. Преобразование элемента объема в импульсном пространстве дается формулой (г), а в трехмерном пространстве формулой (л) (стр. 91), $dV = dV^0 (1 - u^2 / c^2)^{1/2}$; $dV' = dV^0 (1 - u'^2 / c^2)^{1/2}$ или

$$dV = dV' (1 - u^2 / c^2)^{1/2} / (1 - u'^2 / c^2)^{1/2} = dV' E' / E. \quad (\text{з})$$

Умножая формулы (а) и (з) и используя (в), получаем

$$dp_x dp_y dp_z dx dy dz = dp'_x dp'_y dp'_z dx' dy' dz'. \quad (\text{и})$$

Следовательно, элемент объема фазового пространства — инвариант.

§ 4.18. Основные уравнения механики для некогерентной материи

В качестве первого приложения математических методов, изложенных в предыдущем параграфе, рассмотрим движение непрерывно распределенной материи под действием известных внешних сил. Чтобы применить к такой системе фундаментальные уравнения движения материальных частиц, рассмотренные в гл. 3, будем считать непрерывное распределение массы предельным случаем распределения очень большого числа материальных частиц. Если частицы настолько малы, а их плотность так велика, что макроскопические измерительные приборы не позволяют различать отдельные частицы, то распределение массы в любой системе отсчета S описывается плотностью массы $\mu(x, t)$,

которую для практических целей можно считать непрерывной функцией пространственных и временных переменных. $\mu(x, t)$ определяется так, чтобы μdV равнялось полной массе вещества внутри элемента объема dV в точке x и в момент времени t . Движение материи в любой точке пространства и в любой момент времени описывается вектором скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}(x, t)$, являющимся функцией от x, t . Тогда плотность потока массы равна $\mu \mathbf{u}$. В ньютоновской механике масса — сохраняющаяся величина. Но в теории относительности, в соответствии с формулой (3.22), это не так. Когда на материю действуют силы, скорость данной материальной частицы, а следовательно, и ее релятивистская масса изменяется со временем. С другой стороны, собственная масса материи во многих случаях сохраняется, например, когда 4-сила в любой точке ортогональна 4-скорости материи, т. е. когда уравнение (4.57) выполняется везде и всегда.

В произвольной инерциальной системе S плотность собственной массы μ_0 , т. е. собственная масса на единицу объема в соответствии с (3.22) связана с μ формулой

$$\mu_0 = \mu \sqrt{1 - u^2/c^2} \quad (4.198)$$

(μ_0 , как и μ , функция x и t).

Теперь в определенной точке внутри материи и в данный момент времени введем мгновенную инерциальную систему покоя S^0 . В этой системе (4.198) примет вид

$$\mu_0^0 = \mu^0, \quad (4.199)$$

где все величины относительно S^0 отмечены верхним индексом «0».

В системе покоя плотность собственной массы совпадает с релятивистской плотностью массы. В отличие от μ_0 , $\mu_0^0 = \mu^0$, т. е. является инвариантом. Легко видеть, что $\mu_0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$ также инвариант, поскольку небольшое количество материи, имеющее в S объем δV , в системе S^0 имеет объем δV^0 , связанный с δV в соответствии с (2.34) уравнением

$$\delta V = \delta V^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (4.200)$$

Тогда инвариантная собственная масса материальной частицы в обеих системах отсчета имеет вид

$$\mu_0 \delta V = \mu_0^0 \delta V^0 = \mu^0 \delta V^0. \quad (4.201)$$

Учитывая здесь (4.200), получаем

$$\mu_0 \sqrt{1 - u^2/c^2} = \mu^0 \equiv \text{invariant} \quad (4.202)$$

или в соответствии с (4.198)

$$\mu (1 - u^2/c^2) = \mu^0. \quad (4.203)$$

Следовательно, величины в левых частях (4.202) и (4.203) должны быть инвариантны.

Пусть теперь $\Phi = \Phi(x, t)$ — определенная функция от x и t в системе S . Здесь нужно различать локальную производную по времени $\partial\Phi/\partial t$, учитывающую изменение Φ за единицу времени в фиксированной точке пространства, и субстанциональную (полную) производную $d\Phi/dt$, учитывающую изменение Φ за единицу времени, когда мы следуем за материей в ее движении. Соотношение между полной и локальной производной следующее:

$$d\Phi/dt = \partial\Phi/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \text{grad } \Phi). \quad (4.204)$$

Аналогичная формула справедлива и для векторного поля $\mathbf{a} = \mathbf{a}(x, t)$:

$$d\mathbf{a}/dt = \partial\mathbf{a}/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \text{grad } \mathbf{a}), \quad (4.205)$$

поскольку для каждой компоненты a справедливо уравнение (4.204).

Теперь рассмотрим некоторое количество материи, которая в момент времени t занимает объем V , ограниченный замкнутой поверхностью f . К моменту времени $t + dt$ этот объем увеличится на

$$dV = dt \int_f u_n df, \quad (4.206)$$

где интеграл в правой части берется по поверхности f , а u_n — компонента \mathbf{u} в направлении внешней нормали к элементу поверхности df ; каждый элемент поверхности df за время dt проходит расстояние $\mathbf{u}dt$ и заметает объем $u_n \cdot dt df$. С помощью теоремы Гаусса, (4.191), уравнение (4.206) можно записать в виде

$$dV/dt = \int_V \operatorname{div} \mathbf{u} dV. \quad (4.207)$$

Это уравнение должно выполняться для каждой частицы материальной среды. Рассматривая материю, которая в момент t находится внутри инфинитезимального объема δV , из (4.207) получаем

$$(1/\delta V) d\delta V/dt = \operatorname{div} \mathbf{u}. \quad (4.208)$$

Предположим, что в данной системе собственная масса сохраняется. Тогда для любой материальной частицы объемом δV в любой момент времени t имеем

$$\frac{d}{dt} (\mu_0 \delta V) = (d\mu_0/dt) \delta V + \mu_0 d\delta V/dt = 0. \quad (4.209)$$

Отсюда с учетом (4.208) получим

$$d\mu_0/dt + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0. \quad (4.210)$$

Это уравнение, выражающее закон сохранения собственной массы, с помощью (4.204) можно привести к виду

$$\partial\mu_0/\partial t + (\mathbf{u} \cdot \operatorname{grad} \mu_0) + \mu_0 \operatorname{div} \mathbf{u} = 0,$$

или

$$\partial\mu_0/\partial t + \operatorname{div} (\mu_0 \mathbf{u}) = 0. \quad (4.211)$$

Поскольку $\mu_0 \mathbf{u}$ — плотность потока собственной массы, (4.211) является уравнением неразрывности и выражает тот факт, что собственная масса в рассматриваемой системе не имеет ни источников, ни стоков. Теперь с помощью (4.39) можно определить 4-скорость U_i в любой точке среды и в любое время. Поскольку $U_i = U_i(x)$ — функция пространственно-временных координат, в $(3 + 1)$ -пространстве мы имеем 4-векторное поле. Аналогично инвариантная плотность массы μ^0 , определяемая (4.199) и (4.202), может рассматриваться как скалярное поле в $(3 + 1)$ -пространстве, при этом μ^0 в любой инерциальной системе является функцией от пространственно-временных координат:

$$\mu^0 = \mu_0(x) \sqrt{1 - u^2(x)/c^2} = \mu^0(x). \quad (4.212)$$

Умножая скаляр μ^0/c на вектор U_i , получаем новый 4-вектор

$$c_i = \mu^0 U_i/c, \quad (4.213)$$

который можно назвать 4-током плотности собственной массы. В соответствии с (4.39) и (4.202) для компонент c_i имеем

$$c_i = \{\mu^0 \mathbf{u}/\sqrt{c^2 - u^2}, \quad i \mu^0/\sqrt{1 - u^2/c^2}\} = \{\mu_0 \mathbf{u}/c, \quad i \mu_0\}, \quad (4.214)$$

а уравнение неразрывности (4.211) записываем в тензорной форме:

$$\partial c_i/\partial x_i = (1/c) \partial \mu^0 U_i/\partial x_i = 0. \quad (4.215)$$

Левая часть уравнения (4.215) равна четырехмерной дивергенции (4.181) 4-тока плотности массы, поэтому ковариантность этого уравнения при вращениях в $(3 + 1)$ -пространстве очевидна.

Силы, действующие на различные области непрерывно распределенной материи, являются частично внешними, частично внутренними упругими силами взаимодействия между соседними частицами среды. В данной главе мы пренебрегаем упругими силами, отложив их рассмотрение до гл. 6, и имеем дело с материей в виде некогерентной пыли. Предполагаем, что внешние силы являются объемными силами, которые в любой инерциальной системе S можно описать плотностью силы f , определенной так, чтобы сила, действующая на элементарный объем δV , равнялась $f\delta V$.

Теперь рассмотрим движение малой частицы объемом δV и с собственной массой $\mu_0\delta V = \mu^0\delta V^0$. Если U_i — 4-скорость, то 4-импульс частицы в соответствии с (4.50) равен

$$p_i = \mu^0 \delta V^0 U_i, \quad (4.216)$$

а 4-сила (4.54) с учетом (4.200) имеет вид

$$\begin{aligned} F_i &= \{f \delta V / \sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad i(f \cdot u) \delta V / c \sqrt{1 - u^2/c^2}\} = \\ &= \{f, \quad i(f \cdot u) / c\} \delta V^0. \end{aligned} \quad (4.217)$$

Поскольку δV^0 — инвариант, а F_i 4-вектор, величина

$$f_i = \{f, \quad i(f \cdot u) / c\}, \quad (4.218)$$

т. е. плотность 4-силы тоже 4-вектор.

Пространственные компоненты f_i соответствуют обычной плотности силы, а f_4 равна механической работе силы (за единицу времени и над единичным объемом), умноженной на i/c .

Движение рассматриваемой частицы описывается уравнением (4.55). Подставляя (4.216), (4.217) в (4.55), в случае сохранения собственной массы, т. е. когда $(d/d\tau)(\mu^0\delta V^0) = 0$, имеем

$$\mu^0 dU_i/d\tau = f_i. \quad (4.219)$$

Поскольку μ^0 и $d\tau$ — инвариантны, обе части в (4.219) — 4-векторы. Первые три уравнения в (4.219) — уравнения движения, а четвертое выражает закон сохранения энергии. В соответствии с (4.218) и (4.39)

$$f_i U_i \equiv 0. \quad (4.220)$$

Эта формула, как уже указывалось в § 4.6, существенна при сохранении собственной массы. После умножения (4.219) на U_i и суммирования по i левая часть с учетом (4.41') обратится в нуль и уравнение (4.219) совпадет с (4.220).

Фундаментальные уравнения механики в форме (4.219) справедливы лишь в случае сохранения собственной массы (например, если некогерентная пыль не изменяет собственную массу излучением или поглощением лучистой энергии). В противном случае движение частицы с 4-импульсом (4.216) определяется не уравнением (4.55), а уравнениями типа (4.58), (4.58'). Тогда обозначая

$$\left. \begin{aligned} \Pi_i &= \pi_i \delta V^0 = \pi_i \delta V / (1 - u^2/c^2)^{1/2}; \\ \pi_i &= (\pi, \quad i \varphi / c), \end{aligned} \right\} \quad (4.221)$$

получаем

$$d(\mu^0 \delta V^0 U_i) / d\tau = (f_i + \pi_i) \delta V^0 \quad (4.222)$$

или

$$d(\mu^0 \delta V^0 U_i) dt = (f_i + \pi_i) \delta V. \quad (4.223)$$

Очевидно, что π и φ представляют собой изменения импульса и энергии, которые не обусловлены действием внешней силы. В соответствии с (4.221) и (4.60) они образуют 4-вектор π_i , удовлетворяющий соотношению

$$U_i \pi_i = (\pi \cdot \mathbf{u} - \varphi)/(1 - u^2/c^2)^{1/2} = -\varphi^0, \quad (4.224)$$

где φ^0/c — немеханическая энергия на единицу объема, измеренная в мгновенной системе покоя S^0 .

Поскольку δV^0 — объем частицы, а $d\tau$ — дифференциал времени в системе S^0 , уравнение (4.208) в этой системе имеет вид

$$(1/\delta V^0) d\delta V^0/d\tau = d\mu_{\mu}^0/dx_{\mu}^0 = dU_k^0/dx_k^0 = dU_k/dx_k. \quad (4.225)$$

Здесь использовано выражение (4.39) для 4-скорости с учетом того, что дивергенция — инвариант, а компоненты u_{μ}^0 трехмерной скорости \mathbf{u}^0 в системе S^0 равны нулю. В соответствии с (4.225) левую часть в (4.222) можно преобразовать к виду

$$\delta V^0 d(\mu^0 U_i)/d\tau + \mu^0 U_i d\delta V^0/d\tau = \delta V^0 \partial(\mu^0 U_i U_k)/\partial x_k.$$

Таким образом, в общем случае имеем следующее фундаментальное уравнение механики для некогерентной материи:

$$\partial(\mu^0 U_i U_k) \partial x^k = f_i + \pi_i = f_i^*, \quad (4.226)$$

где по аналогии с (4.68) введена плотность обобщенной 4-силы f_i^* :

$$f_i^* = f_i + \pi_i, \quad (4.227)$$

которая в соответствии с (4.220) и (4.224) удовлетворяет соотношению

$$U_i f_i^* = -\varphi^0. \quad (4.228)$$

Уравнение (4.226) можно записать в другой форме, а именно:

$$U_i \partial(\mu^0 U_k)/\partial x_k + \mu^0 dU_i/d\tau = f_i^*. \quad (4.229)$$

Умножив (4.225) на U_i , с учетом (4.41), (4.41'), (4.228), получим

$$\partial(\mu^0 U_k)/\partial x^k = \varphi^0/c^2 \quad (4.230)$$

или в соответствии с (4.213) и (4.214)

$$\partial\mu_0/\partial t + \text{div } \mu_0 \mathbf{u} = \varphi^0/c^2. \quad (4.231)$$

Эти уравнения являются обобщениями уравнения неразрывности (4.211) или (4.215), когда в системе существуют источники собственной массы. Выражение φ^0/c^2 для плотности источника соответствует общей формуле Эйнштейна (3.74). Подставляя (4.230) в (4.229), получаем обобщение уравнения (4.219)

$$\mu^0 dU_i/d\tau = d_i, \quad (4.232)$$

где

$$\left. \begin{aligned} d_i &= f_i^* - (\varphi^0/c^2) U_i = f_i^* + (f_k^* U_k/c^2) U_i = f_i + r_i; \\ r_i &= \pi_i + (\pi_k U_k/c^2) U_i = \pi_i - (\varphi^0/c^2) U_i, \end{aligned} \right\} \quad (4.233)$$

т. е. d_i и r_i — трансверсальные составляющие 4-векторов f_i^* и π_i соответственно. Полная плотность действующей 4-силы d_i есть сумма плотности внешней механической 4-силы f_i^* и реактивной 4-силы r_i .

Если известна только f_i^* , то в общем случае ее невозможно однозначно разделить на механическую часть f_i и немеханическую часть π_i . С помощью (4.228) и (4.223) можно вычислить лишь полную действующую силу $d_i = f_i + r_i$ и φ^0 , т. е. четвертую компоненту π_i в системе покоя. Однако если мы имеем дополни-

тельную информацию, что π^0 равен нулю, то это разделение однозначно, так как в этом случае

$$\left. \begin{aligned} \pi_i &= U_i \varphi^0/c^2; \quad \pi = \gamma u \varphi^0/c^2; \quad \varphi = \gamma \varphi^0; \quad r_i = 0; \\ f_i &= d_i = f_i^* - \pi_i = f_i^* - U_i \varphi^0/c^2 = f_i^* + (f_k^* U_k/c^2) U_i, \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

причем пространственные компоненты f_i^* и f_i в системе покоя имеют вид

$$f_i^{*0} = f_i^0. \quad (б)$$

В любой другой системе плотность обобщенной силы f^* и ее мощность $f^* \mathbf{u}$ существенно отличны от \mathbf{f} и $\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}$, так как

$$f^* = \mathbf{f} + \varphi \mathbf{u}/c^2; \quad f^* \cdot \mathbf{u} = \mathbf{f} \cdot \mathbf{u} + \varphi u^2/c^2. \quad (в)$$

§ 4.19. Тензор кинетической энергии

Величина, стоящая в левой части (4.226)

$$\theta_{ik} = \mu^0 U_i U_k, \quad (4.234)$$

является симметрическим тензором второго ранга и называется *тензором кинетической энергии* [160]. Следовательно, уравнение (4.226) можно представить в виде

$$\partial \theta_{ik} / \partial x_k = f_i^* = f_i + \pi_i, \quad (4.235)$$

т. е. плотность обобщенной 4-силы равна дивергенции тензора кинетической энергии. С помощью (4.39), (4.202) и (4.203) получим следующие выражения для компонент этого тензора:

$$\theta_{44} = -\mu^0 c^2 / (1 - u^2/c^2) = -\mu_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2} = -\mu c^2 = -h, \quad (4.236)$$

где h — плотность энергии или, точнее, сумма кинетической энергии и собственной энергии на единицу объема. Умножая (4.236) на δV , в правой части с точностью до знака получаем энергию малой материальной частицы внутри объема δV .

Три компоненты $\theta_{4\mu}$, являющиеся компонентами пространственного вектора, имеют вид

$$(\theta_{41}, \theta_{42}, \theta_{43}) = \frac{i}{c} \frac{\mu^0 c^2}{1 - u^2/c^2} \mathbf{u} = \frac{i}{c} \mu c^2 \mathbf{u} = \frac{i}{c} h \mathbf{u}. \quad (4.237)$$

Аналогично три компоненты $\theta_{\mu 4}$ можно представить в форме

$$(\theta_{14}, \theta_{24}, \theta_{34}) = i c \mu_0 \mathbf{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2} = i c \mathbf{g}. \quad (4.238)$$

Учитывая уравнение (4.235) [см. далее (4.242) и (4.244)], величины

$$(c/i)\theta_{4\mu} = h \mathbf{u} \quad \text{и} \quad \theta_{\mu 4}/ic = \mathbf{g}$$

следует интерпретировать как плотность потока энергии и плотность импульса соответственно. Из симметрии θ_{ik} имеем равенство

$$\mathbf{g} = h \mathbf{u} / c^2, \quad (4.239)$$

которое выражает тот факт, что энергия h соответствует массе h/c^2 . Пространственную часть $\theta_{\mu\nu}$ тензора энергии можно записать в виде

$$\theta_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu / \sqrt{1 - u^2/c^2} = g_\mu u_\nu, \quad (4.240)$$

где g_μ и u_ν — компоненты пространственных векторов \mathbf{g} и \mathbf{u} .

Величины (4.237) представляют собой плотность потока энергии, поэтому каждый столбец матрицы — компонент пространственного тензора $\theta_{\mu\nu}$ в (4.240), т. е.

$$(\theta_{\mu 1}, \theta_{\mu 2}, \theta_{\mu 3}) = g_\mu \mathbf{u}, \quad (4.241)$$

можно интерпретировать как плотность потока компонент импульса g_{μ} . Поэтому $\theta_{\mu\nu}$ называется также *тензором потока импульса*. Четвертое уравнение в (4.235), выражающее закон сохранения энергии, теперь с помощью (4.236), (4.237) и (4.217), (4.221) можно представить в форме

$$\partial h / \partial t + \operatorname{div} (h \mathbf{u}) = c f_4^* / i = (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) + \varphi \quad (4.242)$$

или

$$\partial \mu / \partial t + \operatorname{div} (\mu \mathbf{u}) = [(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) + \varphi] / c^2. \quad (4.243)$$

Это уравнение совершенно аналогично (4.231).

Плотность источника собственной массы равна φ^0 / c^2 , поэтому плотность источника релятивистской массы равна $[(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) + \varphi] / c^2$ и также соответствует формуле Эйнштейна (3.74).

Тем же способом первые три уравнения в (4.235), выражающие закон сохранения импульса, запишем в виде

$$\partial g_{\mu} / \partial t + \partial \theta_{\mu\nu} / \partial x_{\nu} = \dot{f}_{\mu}^* = \dot{f}_{\mu} + \pi_{\mu} \quad (4.244)$$

или

$$\partial g_{\mu} / \partial t + \operatorname{div} (g_{\mu} \mathbf{u}) = \dot{f}_{\mu}^*. \quad (4.245)$$

Уравнение (4.245) для импульса аналогично уравнению (4.242) для энергии. Оно описывает перенос импульса в материальной среде, а плотность обобщенной силы $\dot{f}^* = \dot{f} + \pi$ в этом уравнении играет роль источника импульса.

Если умножить (4.244) на x_{ν} и вычесть соответствующее уравнение, полученное перестановкой μ, ν , получим

$$\frac{\partial}{\partial t} (g_{\mu} x_{\nu} - g_{\nu} x_{\mu}) + \frac{\partial}{\partial x_{\lambda}} (\theta_{\mu\lambda} x_{\nu} - \theta_{\nu\lambda} x_{\mu}) - \theta_{\mu\nu} + \theta_{\nu\mu} = \dot{f}_{\mu}^* x_{\nu} - \dot{f}_{\nu}^* x_{\mu}. \quad (4.246)$$

Учитывая симметричность $\theta_{\mu\nu}$, последние два члена в левой части можно сократить. Вводя плотность углового момента и момента плотности силы f^*

$$m_{\mu\nu} = x_{\mu} g_{\nu} - x_{\nu} g_{\mu}; \quad (4.247)$$

$$d_{\mu\nu} = x_{\mu} \dot{f}_{\nu}^* - x_{\nu} \dot{f}_{\mu}^* \quad (4.248)$$

[см. (4.85)—(4.89)], уравнение (4.246) можем записать в виде

$$\partial m_{\mu\nu} / \partial t + \partial (m_{\mu\nu} u_{\lambda}) / \partial x_{\lambda} = d_{\mu\nu}. \quad (4.249)$$

Здесь использовано выражение (4.240) для $\theta_{\mu\nu}$. Это уравнение можно представить в форме

$$\partial m_{\mu\nu} / \partial t + (\mathbf{u} \operatorname{grad}) m_{\mu\nu} + m_{\mu\nu} \operatorname{div} \mathbf{u} = d_{\mu\nu}. \quad (4.250)$$

Умножая (4.250) на δV и учитывая (4.204) и (4.208), получаем

$$d (m_{\mu\nu} \delta V) / dt = d_{\mu\nu} \delta V. \quad (4.251)$$

Это уравнение выражает теорему об изменении углового момента для малой частицы материальной среды объемом δV_0 .

Таким образом, симметричность тензора энергии играет очень важную роль, поскольку симметричность его пространственной части существенна для справедливости теоремы об изменении углового момента в ее обычной форме, а уравнение $\theta_{\mu 4} = \theta_{4\mu}$, т. е. (4.239), является выражением теоремы Эйнштейна об инертности энергии.

Тензор энергии удовлетворяет еще одному соотношению

$$\theta_{ik} U_k = \mu^0 U_i U_k U_k = -\mu^0 c^2 U_i = -h^0 U_i, \quad (4.252)$$

где h^0 — плотность энергии в системе покоя.

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА В ВАКУУМЕ

§ 5.1. Фундаментальные уравнения электродинамики в вакууме.
4-плотность тока электрического заряда

В гл. 3 мы показали, что фундаментальные уравнения механики необходимо изменить таким образом, чтобы они удовлетворяли специальному принципу относительности. Уравнения электродинамики в вакууме (уравнения Максвелла) не нуждаются в этом, так как, как мы увидим далее, они уже инвариантны относительно преобразования Лоренца [197, 198, 65, 160, 162].

Представим себе две группы физиков-экспериментаторов, которые оборудовали свои лаборатории в двух инерциальных системах S и S' и независимо проводят электромагнитные эксперименты. Посредством электрически заряженных пробных тел и магнитных компасных стрелок физики в системе S определяют векторы электрического поля \mathbf{E} и магнитного поля \mathbf{H} как функции координат \mathbf{x} и t . Аналогичным способом физики в системе S' определяют векторы электрического и магнитного полей \mathbf{E}' и \mathbf{H}' как функции координат \mathbf{x}' и t' . Кроме того, обе группы физиков могут независимо друг от друга измерить плотности заряда ρ и ρ' в S и S' соответственно. В данной главе мы рассмотрим только электромагнитные явления в вакууме, где существует лишь один тип электрического тока — конвективный, не касаясь электромагнитных явлений ни в проводящих средах, ни в диэлектриках, ни в магнетиках. Следовательно, плотности тока в S и S' равны $\rho\mathbf{u}$ и $\rho'\mathbf{u}'$, где \mathbf{u} и \mathbf{u}' — скорости движения зарядов в S и S' соответственно. Все эти величины — определенные функции от пространственных и временных координат в S и S' .

В соответствии с принципом относительности уравнения полей, образующихся при данных распределениях токов и зарядов, должны иметь одинаковый вид в обеих системах отсчета. Следовательно, обе группы физиков должны в результате своих экспериментов прийти к уравнениям поля Максвелла—Лоренца для пустого пространства.

Таким образом, пользуясь единицами Хевисайда, в системе S мы должны иметь

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = 0; \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} + (1/c) \partial \mathbf{H} / \partial t = 0; \quad (5.1a)$$

$$\operatorname{div} \mathbf{E} = \rho; \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} - (1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t = \rho \mathbf{u} / c. \quad (5.1b)$$

Подставив штрих над всеми величинами в (5.1a) и (5.1b), получим уравнения в системе S' . Уравнения (5.1a) и (5.1b) совпадают с фундаментальными уравнениями классической электронной теории Лоренца.

Связь между \mathbf{u} и \mathbf{u}' дается формулой (2.55), но мы ничего не знаем о связи между ρ и ρ' или между \mathbf{E} , \mathbf{H} и \mathbf{E}' , \mathbf{H}' . Однако одним из наиболее фундаментальных экспериментальных результатов является тот факт, что электрический заряд во всех физических процессах сохраняется. Это по аналогии с (4.211) можно выразить уравнением неразрывности

$$\partial \rho / \partial t + \operatorname{div} (\rho \mathbf{u}) = 0. \quad (5.2)$$

Оно является следствием уравнений Максвелла (5.1b). Очевидно, что такое же уравнение выполняется и в системе S' , т. е.

$$\partial \rho' / \partial t' + \operatorname{div}' (\rho' \mathbf{u}') = 0. \quad (5.2')$$

Связь между ρ и ρ' должна быть теперь такая, чтобы для произвольного распределения заряда и тока (5.2') было следствием (5.2). Определяя в системе S четыре величины

$$s_i = (\rho u/c, i\rho) \quad (5.3)$$

и аналогичные величины s'_i в системе S' , уравнения (5.2) и (5.2') можно записать в виде

$$\partial s_i / \partial x_i = 0 \quad (5.4)$$

и

$$\partial s'_i / \partial x'_i = 0. \quad (5.4')$$

В приложении 2 показано, что если (5.4') является следствием (5.4) для всех возможных распределений заряда и тока, то s_i и s'_i связаны соотношением

$$s'_i = \alpha_{ik} s_k, \quad (5.5)$$

где α_{ik} — коэффициенты преобразования координат, связывающего системы S и S' . Следовательно, s_i есть 4-вектор, называемый *плотностью 4-тока*, а (5.4) выражает тот факт, что дивергенция s_i равна нулю [см. (4.181)].

Умножая на -1 инвариант

$$s_i s_i = s'_i s'_i, \quad (5.6)$$

с помощью (5.3) получаем другой инвариант

$$\rho^2 (1 - u^2/c^2) = \rho'^2 (1 - u'^2/c^2) = \rho^{02}, \quad (5.7)$$

где ρ^0 — плотность заряда в системе покоя S^0 . Следовательно,

$$\rho = \rho^0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (5.8)$$

С помощью (5.8) формулу (5.3) можно представить в форме

$$s_i = \rho^0 U_i / c, \quad (5.9)$$

где U_i есть 4-скорость из (4.39). Выражение (5.9) аналогично выражению (4.213) для плотности 4-тока собственной массы.

Теперь рассмотрим заряд $\rho \delta V$ элемента объема материальной среды. Если δV^0 — соответствующий объем в системе покоя, то $\delta V = \delta V^0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}$, что вместе с (5.8) дает

$$\rho \delta V = \rho^0 \delta V^0, \quad (5.10)$$

Следовательно, электрический заряд элемента объема материальной среды — инвариант. (То же самое справедливо и для полного заряда.) Эта важная теорема об инвариантности электрического заряда является, таким образом, следствием справедливости уравнения непрерывности во всех инерциальных системах. Это можно показать также с помощью следующего рассуждения. Пусть заряженная частица с зарядом e первоначально покоится в системе S . Под действием силы частица ускоряется, пока не достигнет той же скорости v , что и система S' относительно S . Поскольку заряд частицы сохраняется во время ускорения, то частица пока имеет заряд e относительно S . С другой стороны, частица теперь имеет относительно S' нулевую скорость, и поскольку она относительно S' находится в том же положении, в каком находилась первоначально относительно S , то заряд e' частицы относительно S' должен равняться постоянному заряду e относительно S . Следовательно, в любое время $e' = e$, что соответствует (5.10).

§ 5.2. Ковариантность уравнений электродинамики при преобразованиях Лоренца. Тензор электромагнитного поля

В каждой инерциальной системе S определим величину F_{ik} с помощью соотношений

$$F_{ik} = -F_{ki}; \quad (F_{23}, F_{31}, F_{12}) = \mathbf{H}; \quad (F_{41}, F_{42}, F_{43}) = i\mathbf{E}, \quad (5.11)$$

т. е.

$$F_{ik} = \begin{pmatrix} 0 & H_z & -H_y & -iE_x \\ -H_z & 0 & H_x & -iE_y \\ H_y & -H_x & 0 & -iE_z \\ iE_x & iE_y & iE_z & 0 \end{pmatrix}. \quad (5.12)$$

Тогда уравнения (5.1а) можно записать в виде

$$\partial F_{ik} / \partial x_l + \partial F_{hl} / \partial x_i + \partial F_{il} / \partial x_k = 0. \quad (5.13)$$

Левая часть в (5.13) антисимметрична по всем трем индексам i, k, l , поэтому (5.13) содержит лишь четыре независимых уравнения, которые получаются, если положить (i, k, l) равными, например, $(1, 2, 3)$, $(4, 2, 3)$, $(4, 3, 1)$, $(4, 1, 2)$ соответственно. Легко проверить, что получившиеся уравнения совпадают с четырьмя уравнениями (5.1а). Поскольку уравнения (5.4) выполняются в любой инерциальной системе, четыре величины s_i образуют 4-вектор. Аналогично величины F_{ik} образуют антисимметрический тензор, если уравнения (5.13) справедливы в любой инерциальной системе. Тензор F_{ik} называется тензором электромагнитного поля, а уравнения (5.13) или (5.1а) выражают тот факт, что ротор этого тензора равен нулю [см. (4.187)].

С учетом (4.190) уравнения (5.13) можно представить в форме

$$\operatorname{div}_i F^* = \partial F_{ik}^* / \partial x_k = 0, \quad (5.14)$$

где F_{ik}^* — псевдотензор, дуальный F_{ik} . Он получается из F_{ik} заменой в (5.12) $\mathbf{E} \rightarrow \mathbf{H}$, $\mathbf{H} \rightarrow -\mathbf{E}$.

Соотношение (5.11) между F_{ik} и \mathbf{E} , \mathbf{H} совпадает с (4.83), следовательно, при пространственных вращениях векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} преобразуются как полярный вектор и аксиальный вектор соответственно.

В случае общих преобразований Лоренца без вращения векторов \mathbf{E} и \mathbf{H} имеем уравнения (4.84'). Эти уравнения можно записать также в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E}' &= \frac{\mathbf{E} + \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{E}) \{ (1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1 \} + \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{H})}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}; \\ \mathbf{H}' &= \frac{\mathbf{H} + \frac{\mathbf{v}}{v^2} (\mathbf{v} \cdot \mathbf{H}) \{ (1 - v^2/c^2)^{1/2} - 1 \} - \frac{1}{c} (\mathbf{v} \times \mathbf{E})}{(1 - v^2/c^2)^{1/2}}. \end{aligned} \right\} \quad (5.15)$$

Следовательно, разделение поля на электрическое и магнитное, проявляющееся по силам, действующим на измерительные инструменты, не имеет абсолютного значения. Если, например, в системе S мы имеем чисто электрическое поле, т. е. $\mathbf{H} = 0$, то в системе S' , в соответствии с (5.15), уже $\mathbf{H}' \neq 0$. Это ясно и физически, поскольку существование чисто электрического поля в системе S означает, что все заряды в S покоятся. Относительно системы S' эти заряды будут двигаться со скоростью $-\mathbf{v}$. Следовательно, в S' имеет место стационарный ток, образующий магнитное поле в этой инерциальной системе.

С помощью (5.3) и (5.12) вторую пару уравнений Максвелла (5.1б) можно записать в тензорной форме

$$\partial F_{ik} / \partial x_k = s_i. \quad (5.16)$$

Левая и правая части в (5.16) преобразуются как 4-векторы. Ковариантность уравнений (5.16) является следствием ковариантности уравнений (5.1a) и уравнения неразрывности (5.4). Это сильный аргумент в пользу справедливости (5.16). В частности, мы видим, что член $(1/c) \partial \mathbf{E} / \partial t$, т. е. ток смещения Максвелла, абсолютно необходим для ковариантности уравнений (5.16).

Дивергенция векторного уравнения (5.16) вследствие антисимметричности тензора электромагнитного поля равна нулю

$$\partial s_i / \partial x_i = \partial^2 F_{ik} / \partial x_i \partial x_k \equiv 0. \quad (5.17)$$

Это уравнение неразрывности (5.4).

§ 5.3. 4-Потенциал. Калибровочные преобразования

Уравнения (5.1a) дают возможность представить векторы \mathbf{E} и \mathbf{H} в форме

$$\mathbf{H} = \text{rot } \mathbf{A}; \quad \mathbf{E} = -\text{grad } \varphi - (1/c) \partial \mathbf{A} / \partial t, \quad (5.18)$$

где векторный потенциал \mathbf{A} и скалярный потенциал φ всегда можно выбрать так, чтобы они удовлетворяли условию Лоренца в любой инерциальной системе:

$$\text{div } \mathbf{A} + (1/c) \partial \varphi / \partial t = 0. \quad (5.19)$$

Если теперь в каждой инерциальной системе определим четыре величины

$$A_i = (\mathbf{A}, i\varphi), \quad (5.20)$$

то (5.18) и (5.19) примут вид

$$F_{ik} = \partial A_k / \partial x_i - \partial A_i / \partial x_k; \quad (5.21)$$

$$\partial A_i / \partial x_i = 0. \quad (5.22)$$

Поскольку F_{ik} — тензор, потенциалы следует выбрать в различных инерциальных системах так, чтобы A_i преобразовывался как 4-вектор. В этом случае A_i есть 4-потенциал. В соответствии с (5.21) и (5.22) тензор электромагнитного поля равен ротору 4-потенциала, дивергенция которого равна нулю. Более того, из (4.187)–(4.189) следует, что первая пара уравнений Максвелла (5.13) является следствием (5.21).

При заданном F_{ik} 4-потенциал A_i определяется из (5.21) неоднозначно, так как если A_i удовлетворяет (5.21), функции

$$A_i^* = A_i + \partial \psi / \partial x_i, \quad (5.23)$$

где ψ — произвольный скаляр, также удовлетворяют (5.21).

Преобразования (5.23) называются *калибровочными преобразованиями*, а измеряемые величины F_{ik} — инварианты при таких преобразованиях. Условие Лоренца ограничивает класс допустимых калибровочных преобразований. Однако все еще остается большой произвол в выборе потенциалов A_i , удовлетворяющих этому условию. Подстановка (5.23) в (5.22) дает условие для ψ

$$\square \psi = 0, \quad (5.24)$$

Таким образом, если ψ — любое решение (5.24), то A_i^* удовлетворяет как (5.21), так и (5.22), если A_i удовлетворяет этим уравнениям.

Подставляя (5.21) в (5.16), с учетом (5.22) получаем

$$\partial^2 A_i / \partial x_k \partial x_k = -s_i, \quad (5.25)$$

или

$$\square A_i = -s_i. \quad (5.26)$$

Любое решение уравнений (5.26), удовлетворяющее (5.22), дает с помощью (5.21) решение уравнений Максвелла (5.13) и (5.16).

§ 5.4. Интегральное представление 4-потенциала

Уравнение (5.25) имеет форму обычных потенциальных уравнений в $(3+1)$ -пространстве. Следовательно, их решение можно найти тем же методом, что и в трехмерном пространстве [237]. Сначала выпишем решение уравнений (5.25), предполагая, что все четыре координаты x_i действительны, т. е. четырехмерное пространство евклидово.

Пусть

$$R_i = x_i - x_i(P) \quad (5.27)$$

есть 4-вектор, соединяющий фиксированную точку P с координатами $x_i(P)$ и переменную точку с координатами x_i . Если $R^2 = (R_i R_i)$ — квадрат расстояния между этими точками, то в любой точке $x_i \neq x_i(P)$

$$\square (1/R^2) = 0. \quad (5.28)$$

Кроме того, если $\psi(x)$ и $\varphi(x)$ — две произвольные регулярные функции от $x = (x_i)$, то

$$\varphi \square \psi - \psi \square \varphi = \frac{\partial}{\partial x_k} \left(\varphi \frac{\partial \psi}{\partial x_k} - \psi \frac{\partial \varphi}{\partial x_k} \right).$$

Подставим в это уравнение $\psi = 1/R^2$ и проинтегрируем его по всему 4-мерному пространству вне сферы (3-мерной)

$$R^2 = R_i R_i = \{x_i - x_i(P)\} \{x_i - x_i(P)\} = a^2 \quad (5.29)$$

с центром в точке P и радиусом a . Если в качестве переменной интегрирования взять не x_i , а $R_i = x_i - x_i(P)$, то с учетом (5.28) получим

$$-\int \frac{1}{R^2} \square \varphi dx_1 dx_2 dx_3 dx_4 = \int \frac{\partial}{\partial R_k} \left(\varphi \frac{\partial}{\partial R_k} \cdot \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial R_k} \right) dR_1 dR_2 dR_3 dR_4, \quad (5.30)$$

где интеграл берется по четырехмерной области

$$R^2 = R_i R_i \geq a^2. \quad (5.31)$$

Поскольку подынтегральное выражение в правой части (5.30) является суммой частных производных, а функция φ достаточно быстро убывает на бесконечности, то четырехмерный интеграл можно преобразовать в трехмерный интеграл по сфере (5.29). Тогда для первого члена в правой части (5.30) получим

$$\int \left\{ - \left(\varphi \frac{\partial}{\partial R_1} \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial R_1} \right)^+ + \left(\varphi \frac{\partial}{\partial R_1} \frac{1}{R^2} - \frac{1}{R^2} \frac{\partial \varphi}{\partial R_1} \right)^- \right\} dR_2 dR_3 dR_4, \quad (5.32)$$

где интеграл берется по всей сфере (5.29); $()^+$ и $()^-$ означает, что в этих скобках

$$R_1 = \pm \{a^2 - (R_2^2 + R_3^2 + R_4^2)\}^{1/2} = \pm (a^2 - \rho_1^2)^{1/2}, \quad (5.33)$$

а область изменения переменных R_2, R_3, R_4 определяется неравенством

$$\rho_1^2 \equiv R_2^2 + R_3^2 + R_4^2 \leq a^2. \quad (5.34)$$

Для остальных трех членов, соответствующих $k = 2, 3, 4$ в правой части (5.30), получим выражения, аналогичные (5.32), циклической перестановкой индексов $(1, 2, 3, 4)$ в (5.32). (Рассмотренные преобразования соответствуют теореме Грина для трех измерений.) Когда $a \rightarrow 0$, объем трехмерной области интегрирования в (5.32) стремится к нулю как a^3 , и поскольку $1/R^2 = 1/a^2$, второй член внутри скобок $()^\pm$ будет стремиться к нулю. Кроме того, поскольку

$$\partial (1/R^2) / \partial R_k = -2R_k / R^4, \quad (5.35)$$

используя (5.33), в пределе при $a \rightarrow 0$ из (5.32) получаем

$$2\varphi(P) \int (2\sqrt{a^2 - \rho_1^2} / a^4) dR_2 dR_3 dR_4, \quad (5.36)$$

т.е. $\varphi(P)$ — значение функции φ в точке P . Область интегрирования (5.34) является внутренностью сферы $\rho_1^2 = a^2$. Три других члена, получаемые циклической перестановкой индексов, равны, очевидно, первому члену. Поэтому, вводя полярные координаты, для правой части в (5.30) окончательно имеем

$$16\varphi(P)(4\pi/a^4) \int_0^a \sqrt{a^2 - \rho_1^2} \rho_1^2 d\rho_1 = 4\pi^2 \varphi(P), \quad (5.37)$$

а уравнение (5.30) принимает вид

$$4\pi^2 \varphi(P) = - \int (1/R^2) \square \varphi d^4 x, \quad (5.38)$$

где $d^4 x = dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$. Это уравнение справедливо для любой регулярной функции φ . В частности, если $\varphi = A_i$, то, учитывая (5.26), получаем формулу

$$4\pi^2 A_i(P) = \int (s_i/R^2) d^4 x, \quad (5.39)$$

с помощью которой можно вычислить A_i в любой точке P четырехмерного пространства, когда s_i задано в каждой точке.

До сих пор мы считали переменные x_i действительными. Однако в физических задачах плотность 4-тока s_i задается не для действительных, а для чисто мнимых значений x_4 , соответствующих $t < t(P)$. Следовательно, в комплексной плоскости x_4 (рис. 13) s_i задается только на выделенном жирной линией участке мнимой оси. Поэтому, используя аналитическое продолжение функции s_i в подынтегральном выражении (5.39), мы деформируем первоначальный путь интегрирования вдоль действительной оси в контур L вокруг выделенного участка мнимой оси. Тогда выражение (5.39) будет решением уравнения (5.26).

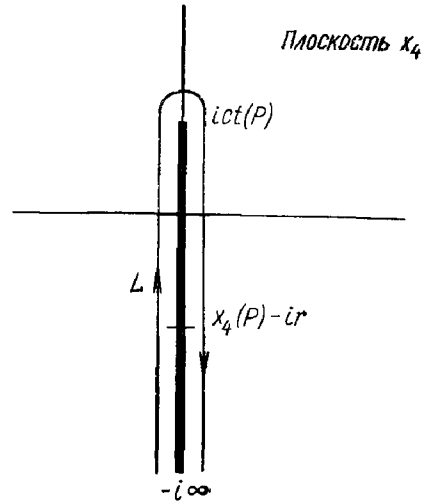


Рис. 13.

Поскольку

$$\partial(1/R^2)/\partial x_i(P) = -\partial(1/R^2)/\partial x_i, \quad (5.40)$$

дивергенция $A_i(P)$ с использованием формулы интегрирования по частям и с учетом (5.4) равна

$$4\pi^2 \frac{\partial A_i(P)}{\partial x_i(P)} = - \int s_i \frac{\partial(1/R^2)}{\partial x_i} d^4 x = \int \frac{\partial s_i}{\partial x_i} \frac{1}{R^2} d^4 x = 0. \quad (5.41)$$

Таким образом, решение (5.39) удовлетворяет условию Лоренца (5.22). Из (5.21), (5.39), (5.40) и (5.35) получаем следующее выражение для тензора электромагнитного поля:

$$2\pi^2 F_{ik}(P) = \int [(R_i s_k - R_k s_i)/R^4] d^4 x. \quad (5.42)$$

§ 5.5. Запаздывающие потенциалы. Потенциалы Льебнера — Вихерта для точечного заряда

В формуле (5.39) порядок интегрирования может быть произвольным. Поэтому сначала будем интегрировать по x_4 вдоль контура L (см. рис. 13), считая (x_1, x_2, x_3) постоянными. Если $r = |\mathbf{x} - \mathbf{x}(P)|$ — пространственное расстояние между пространственными точками \mathbf{x} и $\mathbf{x}(P)$, соответствующими событиям x_i и $x_i(P)$, то

$$R^2 = r^2 + \{x_4 - x_4(P)\}^2 = \{x_4 - x_4(P) + ir\} \{x_4 - x_4(P) - ir\}. \quad (5.43)$$

Поэтому в комплексной плоскости x_4 величина $1/R^2$ как функция x_4 внутри контура L имеет полюс первого порядка в точке

$$x_4 = x_4(P) - ir. \quad (5.44)$$

Поскольку подынтегральное выражение в (5.39) не имеет других полюсов внутри L , то по теореме Коши о вычетах имеем

$$\int_L (s_i/R^2) dx_4 = -2\pi i s_i / (x_4 - x_4(P) - ir) |_{x_4 = x_4(P) - ir} = \pi s_i \{x, t(P) - r/c\} / r. \quad (5.45)$$

Следовательно, потенциалы (5.39) можно записать в виде

$$4\pi A_i(P) = \int (s_i \{x, t(P) - r/c\} / r) dV, \quad (5.46)$$

где интегрирование происходит в обычном трехмерном пространстве. Функция s_i берется не в момент времени $t(P)$, а в момент $t(P) - r/c$, в соответствии с конечной скоростью распространения электромагнитных возмущений. Поэтому потенциалы (5.46) называются запаздывающими потенциалами. Если (5.39) и (5.45) интегрировать вдоль кривой, полученной отражением L относительно точки $x_4 = ict(P)$, то найдем другое решение уравнения (5.26), соответствующее опережающим потенциалам. Однако такое решение, связывающее поле в определенной точке и в определенный момент времени с будущим распределением зарядов и токов, обычно не имеет прямого физического применения.

Теперь рассмотрим произвольное движение точечного заряда e , координаты которого x_μ являются заданными функциями от времени t :

$$x_\mu = x_\mu(t). \quad (5.47)$$

Тогда 4-потенциалы можно получить из (5.46). Но поскольку s_i в (5.46) при учете запаздывания временной переменной довольно сложным образом зависит от переменных интегрирования, легче вернуться к исходному уравнению (5.39). Сначала будем интегрировать по пространственным переменным. Тогда, учитывая, что $s_i = 0$ везде, кроме точек (5.47), в соответствии с (5.3) и (4.39) имеем

$$\int \frac{s_i}{R^2} dx_1 dx_2 dx_3 = \frac{1}{R^2} \left(\frac{e\mathbf{u}}{c}, \quad i\mathbf{e} \right) = \frac{e}{c} \left(1 - \frac{u^2}{c^2} \right)^{1/2} \frac{U_i}{R^2}, \quad (5.48)$$

где $\mathbf{u} = (dx_\mu/dt)$ — скорость точечного заряда, U_i — соответствующая 4-скорость, а

$$R^2 = \{x_\mu(t) - x_\mu(P)\} \{x_\mu(t) - x_\mu(P)\} - c^2 \{t - t(P)\}^2 = r^2 + \{x_4 - x_4(P)\}^2.$$

Все эти величины являются функциями t или чисто мнимой переменной x_4 , но при аналитическом продолжении их можно определять также и вне мнимой оси плоскости x_4 . Поэтому из (5.39) получаем

$$4\pi^2 A_i(P) = \frac{e}{c} \int_L (\sqrt{1 - u^2/c^2} U_i / R^2) dx_4. \quad (5.49)$$

Подынтегральное выражение опять имеет полюс в точке (5.44) комплексной плоскости, и в окрестности этой точки знаменатель имеет вид $R^2 = (dR^2/dx_4)(x_4 - x_4(P) + ir)$, где функции

$$dR^2/dx_4 = 2R_h dR_h/dx_4 = 2R_h U_h d\tau/dx_4 = 2R_h U_h \sqrt{1 - u^2/c^2} / ic \quad (5.50)$$

и $r(t)$ берутся в точке $x_4 - x_4(P) + ir = 0$.

С помощью теоремы о вычетах получим [160, 162]

$$4\pi A_i(P) = eU_i / U_h R_h. \quad (5.51)$$

Здесь R_h — 4-вектор, проведенный из фиксированной точки P к точке пересечения Q мировой линии

$$x_i = x_i(\tau) \quad (5.52)$$

точечного заряда \bar{u} и направленного назад светового конуса

$$R^2 \equiv R_i R_i = 0 \quad (5.53)$$

с вершиной в точке $P (U_i)$, также берется в точке Q .

Если \mathbf{r} — пространственная часть 4-вектора R_i , то для знаменателя в (4.51) с учетом (4.39) и (5.44) имеем

$$U_i R_i = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})}{\sqrt{1-u^2/c^2}} + \frac{ic [x_4 - x_4(P)]}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{(\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) + rc}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (5.54)$$

В результате формула (5.51) примет вид

$$4\pi A(P) = \frac{eu/c}{r + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})/c} \Big|_{t(P) - r/c}; \quad 4\pi\varphi(P) = \frac{e}{r + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})/c} \Big|_{t(P) - r/c}. \quad (5.55)$$

Выражения (5.55) представляют собой формулы потенциалов Льенара—Вихерта движущегося точечного заряда. При вычислении тензора электромагнитного поля $F_{ik}(P)$ в точке P с помощью (5.51) следует помнить, что собственное время τ , соответствующее точке Q , является функцией координат точки P и определяется формулой (5.53) или с учетом (5.27) и (5.52) формулой

$$\{x_i(\tau) - x_i(P)\} \{x_i(\tau) - x_i(P)\} = 0. \quad (5.56)$$

Дифференцируя по $x_k(P)$, получаем

$$R_i [(dx_i/d\tau) (\partial\tau/\partial x_k(P)) - \delta_{ik}] = 0$$

или

$$\partial\tau/\partial x_k(P) = R_k/R_i U_i. \quad (5.57)$$

Тогда из (5.21) и (5.51)

$$4\pi F_{ik}(P) = \frac{d}{d\tau} \left(\frac{eU_k}{U_l R_l} \right) \frac{R_i}{U_m R_m} - \frac{d}{d\tau} \left(\frac{eU_i}{U_l R_l} \right) \frac{R_k}{U_m R_m}$$

или, используя (4.41),

$$4\pi F_{ik}(P) = \frac{e}{(U_l R_l)^2} \left(R_i \frac{dU_k}{d\tau} - R_k \frac{dU_i}{d\tau} \right) + \frac{e}{(U_l R_l)^3} \left(c^2 - R_m \frac{dU_m}{d\tau} \right) (R_i U_k - R_k U_i). \quad (5.58)$$

Формулу (5.58) можно получить также непосредственно из выражения (5.42), если в (5.42) сначала интегрировать по пространственным переменным, а затем вдоль контура L комплексной плоскости x_4 , пользуясь теоремой о вычетах и учитывая, что функция $1/R^4$ в точке (5.44) имеет полюс второго порядка.

Поскольку в соответствии с (5.58) F_{ik} имеет форму

$$4\pi F_{ik} = R_i a_k - R_k a_i, \quad (5.59)$$

где a_i — 4-вектор, с учетом (4.113) и (4.14) имеем

$$F_{ik} F_{ik}^* = 0, \quad (5.60)$$

где F_{ik}^* — псевдотензор (дуальный F_{ik}) получается из (5.12) заменой $(\mathbf{H}, \mathbf{E}) \rightarrow (-\mathbf{E}, \mathbf{H})$. Формула (5.60) тогда совпадает с формулой

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) = 0, \quad (5.61)$$

т. е. во всех инерциальных системах электрическое и магнитное поля везде перпендикулярны друг другу. Кроме того, используя (5.12), (5.58) и (5.53), после несложных выкладок получаем

$$(4\pi)^2 F_{ik} F_{ik} = (4\pi)^2 2 (|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{E}|^2) = -2e^2 c^4 / (U_e R_e)^4. \quad (5.62)$$

Следовательно, для поля движущегося точечного заряда инвариант $|\mathbf{H}|^2 - |\mathbf{E}|^2$ всегда отрицателен. Этот факт вместе с (5.61) означает, что для любого события P всегда можно выбрать такую инерциальную систему, относительно которой вектор магнитного поля в точке P равен нулю. Чтобы получить $\mathbf{H}' = 0$, достаточно в (5.15) положить

$$\mathbf{V} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H})/E^2. \quad (5.63)$$

Это всегда возможно, так как в соответствии с (5.61) и (5.62)

$$v = cEH/E^2 = cH/E < c. \quad (5.64)$$

§ 5.6. Поле равномерно движущегося точечного заряда

Рассмотрим в качестве частного случая поле точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью. Мировая линия такого заряда представляет собой прямую в $(3+1)$ -пространстве с направлением, определенным 4-скоростью U_i . Поскольку $dU_i/d\tau = 0$, (5.58) сводится к формуле

$$4\pi F_{ik} = (ec^2/(U_e R_e)^3) (R_i U_k - R_k U_i). \quad (5.65)$$

Соответствующим выбором начала системы S можно добиться, чтобы ось x_4 и мировая линия заряда всегда лежали в одной плоскости. На рис. 14, где изображена эта плоскость, L — мировая линия частицы, а Q — точка пересечения направленного назад светового конуса с вершиной в произвольной точке P и мировой линии. Если A — проекция точки P на L , то вектор \overrightarrow{AP} с компонентами $x_i^{(1)}$, равный проекции вектора $-R_i$ на направление, перпендикулярное к L , ортогонален 4-скорости U_i , поэтому

$$x_i^{(1)} U_i = 0; \quad -x_i^{(1)} R_i = x_i^{(1)} x_i^{(1)}, \quad (5.66)$$

откуда

$$x_i^{(1)} = -R_i - (U_i/c^2) (U_e R_e). \quad (5.67)$$

Из (5.67) и (5.53) имеем

$$x_i^{(1)} x_i^{(1)} = (U_i R_i)^2/c^2. \quad (5.67')$$

В системе покоя S' точечного заряда ось x'_4 параллельна U_i и мировой линии L , поэтому

$$x_i^{(1)'} = (\mathbf{r}', 0), \quad (5.68)$$

где \mathbf{r}' — пространственный вектор, который соединяет точечный заряд и пространственную точку p' , соответствующую событию P . Учитывая, что $U_i R_i$ — инвариант, с помощью (4.39), (5.27) и (5.44) получаем

$$U_i R_i = U'_i R'_i = icR'_4 = cr' \quad (r' = |\mathbf{r}'|) \quad (5.69)$$

в соответствии с (5.67') и (5.68). Кроме того, из (5.67) следует, что $R_i U_k - R_k U_i = -(x_i^{(1)} U_k - x_k^{(1)} U_i)$, и (5.65) можно записать в виде

$$4\pi F_{ik} = (e/cr'^3) (U_i x_k^{(1)} - U_k x_i^{(1)}). \quad (5.70)$$

В этом выражении вектор $x_i^{(1)}$ всегда можно заменить вектором

$$x_i = x_i^{(1)} + aU_i, \quad (5.71)$$

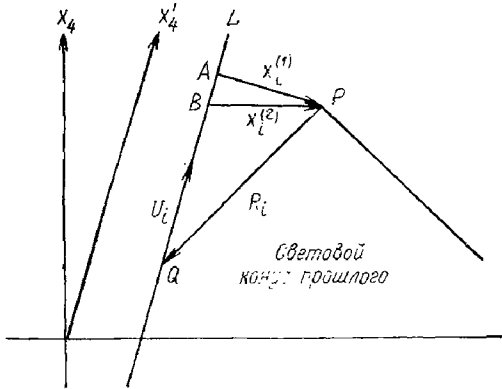


Рис. 14.

соединяющим произвольную точку прямой L с точкой P , где a — постоянная. В произвольной системе S выберем теперь такой вектор $x_i^{(2)}$, чтобы $x_4^{(2)} = 0$. На рис. 14 этот вектор изображается линией BP . В системе S

$$x_i^{(2)} = (\mathbf{r}, 0), \quad (5.72)$$

где \mathbf{r} — пространственный вектор, соединяющий одновременные положения точечного заряда и точки наблюдения P , соответствующей событию P . (Следовательно, в данном случае вектор \mathbf{r} отличен от вектора \mathbf{r} в потенциалах Льенара—Вихерта, являющегося пространственной частью вектора R_i .) Поэтому

$$4\pi F_{ik} = (e/cr'^3) (U_i x_k^{(2)} - U_k x_i^{(2)}), \quad (5.73)$$

что с помощью (5.12), (5.72) и (4.39) приводит к следующим выражениям для векторов электрического и магнитного полей:

$$4\pi \mathbf{E} = \frac{e\mathbf{r}}{r'^3 \sqrt{1-u^2/c^2}}; \quad 4\pi \mathbf{H} = \frac{e}{cr'^3} \frac{\mathbf{u} \times \mathbf{r}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \quad (5.74)$$

На рис. 14 видно, что оба вектора $x_i^{(2)}$ и $x_i^{(1)}$ имеют в системе S' одинаковые пространственные компоненты \mathbf{r}' . Поэтому связь между \mathbf{r}' и \mathbf{r} получается из преобразования (4.29) для вектора с компонентами $x_i^{(2)} = (\mathbf{r}, 0)$; $x_i^{(2)'} = (\mathbf{r}', x_4^{(2)'})$. Поскольку скорость S' относительно S равна \mathbf{u} ,

$$\mathbf{r}' = \mathbf{r} + (\mathbf{u}/u^2) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}) \{1 - \gamma \sqrt{1-u^2/c^2}\} / \sqrt{1-u^2/c^2}, \quad (5.75)$$

где

$$r' = \{r^2 + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r})^2 / (c^2 - u^2)\}^{1/2}. \quad (5.76)$$

Разлагая векторы \mathbf{r} и \mathbf{r}' на параллельные и перпендикулярные составляющие к \mathbf{u} , из (5.75) получаем

$$r'_{\parallel} = r_{\parallel} / \sqrt{1-u^2/c^2}; \quad r'_{\perp} = r_{\perp}. \quad (5.77)$$

Здесь связь между \mathbf{r} и \mathbf{r}' соответствует лоренцеву сокращению в направлении \mathbf{u} [см. (2.35)].

Вектор электрического поля \mathbf{E} параллелен радиусу-вектору \mathbf{r} , а \mathbf{H} перпендикулярен \mathbf{r} и \mathbf{u} . Формулы (5.74) соответствуют выражениям (5.61) и (5.62). Поверхности с постоянными значениями инварианта $E^2 - H^2$ являются, очевидно, эллипсоидами вращения, так называемыми эллипсоидами Хевисайда, которые получаются из сфер $r' = \text{const}$ путем лоренцева сокращения в направлении движения заряда.

Выражения (5.74) можно более просто получить из преобразований (4.84') для вектора электрического поля. В системе покоя точечного заряда S' электрическое поле является сферически симметричным, а вектор магнитного поля равен нулю, т. е.

$$4\pi \mathbf{E}' = e\mathbf{r}'/r'^3; \quad \mathbf{H}' = 0. \quad (5.78)$$

Поэтому из (4.84') и (5.78) следует:

$$\left. \begin{aligned} 4\pi \mathbf{E} &= (e/r'^3) \left[\mathbf{r}' + \frac{\mathbf{u}}{u^3} (\mathbf{u} \cdot \mathbf{r}') \{ (1-u^2/c^2)^{1/2} - 1 \} \right] / (1-u^2/c^2)^{1/2}; \\ 4\pi \mathbf{H} &= (e/c) (\mathbf{u} \times \mathbf{r}') / r'^3 \sqrt{1-u^2/c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (5.78')$$

Поскольку преобразованием, обратным (5.75), является

$$\mathbf{r} = \mathbf{r}' + \mathbf{u} [(\mathbf{r}' \cdot \mathbf{u}) / u^2] \{ (1-u^2/c^2)^{1/2} - 1 \} \quad (5.75')$$

[см. (2.35')], подставляя его в (5.78'), снова получаем формулы (5.74) для электромагнитного поля точечного заряда, движущегося с постоянной скоростью.

Данное решение показывает, что формулы (5.74) справедливы и в случае движения с постоянной скоростью равномерно заряженной сферы. Это следует из того факта, что в системе покоя распределение заряда сферически симметрично. В этом случае r — расстояние от центра сферы, а e — полный заряд сферы.

Аналогичным образом можно определить поле «равномерно ускоренного» точечного заряда, т. е. заряда, совершающего гиперболическое движение (см. § 3.4). При этом снова применимы два различных способа: либо непосредственно использовать выражение (5.58), справедливое для произвольно движущегося заряда, либо ввести систему S^* , движущуюся вместе с зарядом, и решать уравнения Максвелла в этой системе, а затем преобразовать решение к системе S . Однако S^* уже не будет инерциальной системой, и, следовательно, последний способ требует развития общей теории относительности, позволяющей использовать произвольно движущиеся системы отсчета. Необходимый для этого аппарат будет развит в § 8.16 и 10.9.

§ 5.7. Электромагнитные силы, действующие на заряженную материю

С помощью формул, полученных в предыдущих параграфах, можно вычислить поле, создаваемое произвольным распределением зарядов и токов. Рассмотрим обратную задачу о влиянии данного поля F_{ik} на движение электрически заряженной материи. Сначала определим силу, действующую на заряженную частицу с зарядом e , движущуюся в заданном электромагнитном поле со скоростью \mathbf{u} относительно определенной инерциальной системы S . В соответствии с методом, изложенным в § 3.4, введем инерциальную систему S^0 , в которой частица в данный момент времени покоится. В системе S^0 по самому определению вектора электрического поля \mathbf{E}^0 в этой системе сила \mathbf{F}^0 должна быть равна

$$\mathbf{F}^0 = e\mathbf{E}^0. \quad (5.79)$$

Подставляя (5.79) в (3.43) и учитывая, что скорость S^0 относительно S равна скорости частицы \mathbf{u} , с помощью преобразований (5.15) для векторов электромагнитного поля легко получим лоренцево выражение для силы \mathbf{F} в системе S :

$$\mathbf{F} = e \{ \mathbf{E} + (1/c) (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) \}. \quad (5.80)$$

Таким образом, это выражение следует непосредственно из принципа относительности, без привлечения дополнительных гипотез.

Формула (5.80) получается более простым способом с помощью четырехмерного представления и определения 4-силы Минковского. В рассматриваемом случае собственная масса сохраняется, а 4-сила определяется формулой (4.54). Следовательно, в системе покоя

$$F_i^0 = (F^0, 0). \quad (5.81)$$

Если U_i — 4-скорость частицы, то можно ввести 4-вектор с компонентами

$$eF_{ik} U_k / c. \quad (5.82)$$

В системе S^0

$$U_i^0 = (0, 0, 0, ic), \quad (5.83)$$

а компоненты 4-вектора (5.82) в соответствии с (5.12) равны

$$(e/c) F_{ik}^0 U_k^0 = (e\mathbf{E}^0, 0). \quad (5.84)$$

Из (5.79), (5.84) и (5.81) видно, что компоненты 4-векторов F_i и (5.82) в системе покоя равны. Но два 4-вектора, имеющие одинаковые компоненты в какой-нибудь системе отсчета, совпадают. Поэтому в любой инерциальной системе

$$F_i = (e/c) F_{ik} U_k. \quad (5.85)$$

Поскольку $F_{ik} = -F_{ki}$, в соответствии с (4.57)

$$F_i U_i = (e/c) F_{ik} U_k U_i \equiv 0, \quad (5.86)$$

и уравнения движения частицы с учетом (4.56) и (5.85) имеют вид

$$m_0 dU_i/d\tau = (e/c) F_{ik} U_k. \quad (5.87)$$

Вычисляя компоненты F_i в (5.85) с помощью (5.12) и (4.39), получаем выражение (4.54), где \mathbf{F} определяется формулой Лоренца (5.80).

Рассмотрим в заданном внешнем поле непрерывное распределение заряженной среды с плотностью 4-тока (5.3), (5.9), т. е.

$$s_i = (\rho \mathbf{u}/c, \quad i\rho) = \rho^0 U_i/c^2. \quad (5.88)$$

Найдем выражение для плотности электромагнитной 4-силы f_i типа (4.218).

Рассмотрим в определенный момент времени определенную точку в пространстве, в которой заряженная среда движется с некоторой скоростью. Пусть S^0 — мгновенная система покоя среды в этой точке. В этой системе $s_i^0 = (0, 0, 0, i\rho^0)$, а 4-вектор

$$F_{ik} s_k \quad (5.89)$$

имеет компоненты

$$F_{ik}^0 s_k^0 = (\rho^0 \mathbf{E}^0, 0). \quad (5.90)$$

Эти компоненты равны соответствующим компонентам (4.218) плотности 4-силы в S^0

$$f_i^0 = (f^0, 0). \quad (5.91)$$

По определению вектора электрического поля плотность силы в системе покоя должна быть равной

$$\mathbf{f}^0 = \rho^0 \mathbf{E}^0. \quad (5.92)$$

Поэтому в любой системе координат плотность электромагнитной 4-силы должна равняться 4-вектору (5.89), т. е.

$$f_i = F_{ik} s_k, \quad (5.93)$$

Из (4.218), (5.93), (5.88), и (5.12) немедленно получаем лоренцево выражение для плотности силы

$$\mathbf{f} = \rho \{ \mathbf{E} + (1/c) (\mathbf{u} \times \mathbf{H}) \}. \quad (5.94)$$

Кроме того, вследствие антисимметричности тензора поля

$$f_i U_i = F_{ik} s_k U_i = \frac{\rho^0}{c} U_i F_{ik} U_k \equiv 0, \quad (5.95)$$

откуда следует, что f_i имеет характер истинной механической 4-силы. Если среда состоит из заряженной некогерентной пыли с сохраняющейся собственной массой, то уравнения движения в соответствии с (4.219) и (5.93) имеют вид

$$\mu^0 dU_i/d\tau = f_i = F_{ik} s_k. \quad (5.96)$$

§ 5.8. Вариационный принцип в электродинамике

Уравнения поля Максвелла и уравнения движения (5.96) можно получить из некоторого вариационного принципа, сформулированного Вейлем [274] и Борном [31]. Если положить

$$F_{ik} = \partial A_k / \partial x_i - \partial A_i / \partial x_k,$$

где A_i — 4-потенциал, то первая пара уравнений Максвелла (5.13) тождественно удовлетворяется. Теперь рассмотрим инвариантный интеграл

$$L = \int_{\Omega} \mathcal{L} d\Omega, \quad (5.97)$$

где

$$\mathcal{L} = (-1/4) F_{ik} F_{ik} + A_i s_i - \mu^0 c^2 = (-1/4) (\partial A_k / \partial x_i - \partial A_i / \partial x_k)^2 + A_i s_i - \mu^0 c^2 \quad (5.98)$$

(Ω — некоторая область интегрирования в $(3+1)$ -пространстве; s_i — плотность 4-тока и μ^0 — инвариантная плотность массы в системе покоя).

Сначала рассмотрим произвольную вариацию δA_i функций $A_i(x)$, для которой $\delta A_i = 0$ на границе области Ω , а s_i и μ^0 остаются неизменными. Для вариации L интегрированием по частям и учитывая, что $\delta \partial A_i / \partial x_k = \partial \delta A_i / \partial x_k$, получаем

$$\delta L = \int \delta \mathcal{L} d\Omega = \int \left(F_{ik} \frac{\partial \delta A_i}{\partial x_k} + \delta A_i s_i \right) d\Omega = \int \left(-\frac{\partial F_{ik}}{\partial x_k} + s_i \right) \delta A_i d\Omega. \quad (5.99)$$

Условие

$$\delta L = 0 \quad (5.100)$$

для любой вариации рассматриваемого вида приводит к уравнениям — $\partial F_{ik} / \partial x_k + s_i = 0$, т. е. ко второй паре уравнений Максвелла (5.16).

Теперь рассмотрим вариацию, в которой A_i постоянны, а мировые линии материи изменяются. Это значит, что в выражении (5.98) изменяются только последние два члена. Проследим за бесконечно малой частицей материи объемом dV и рассмотрим бесконечно тонкую трубку мировых линий этой частицы. Если τ — собственное время, а $x_i = x_i(\tau)$ — координаты частицы, то

$$U_i = dx_i / d\tau; \quad s_i = \rho^0 U_i / c = (\rho^0 / c) dx_i / d\tau.$$

В качестве Ω в (5.97) выберем часть этой трубки, для которой $\tau_1 < \tau < \tau_2$, и определим вариацию мировой линии, удовлетворяющей условию $\delta x_i = 0$ при $\tau = \tau_1$, $\tau = \tau_2$. Поскольку

$$d\Omega = (1/i) dV dx_4 = cdV^0 d\tau; \quad d\tau = (1/c) (-dx_i dx_i)^{1/2},$$

где dV^0 — объем частицы в системе покоя,

$$\begin{aligned} \int (A_i s_i - \mu^0 c^2) d\Omega &= \int \left(A_i \rho^0 dV^0 \frac{dx_i}{d\tau} - \mu^0 dV^0 c^2 \right) d\tau = \\ &= de \int_1^2 A_i dx_i - dm^0 c^2 \int_1^2 (-dx_i dx_i)^{1/2}. \end{aligned} \quad (5.101)$$

Здесь $dm^0 = \mu^0 dV^0$ и $de = \rho^0 dV^0$ — масса покоя и заряд частицы соответственно — величины, не изменяющиеся вдоль трубки.

Для вариаций интегралов в (5.101), вызванных вариацией $\delta x_i(\tau)$ рассматриваемого вида, интегрированием по частям и учитывая, что $d\delta x_i = \delta dx_i$, получаем

$$\begin{aligned} \delta \int_1^2 A_i dx_i &= \int_1^2 (\delta A_i dx_i + A_i \delta dx_i) = \int_1^2 [(\partial A_i / \partial x_k) \delta x_k dx_i + A_i d\delta x_i] = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} \frac{dx_k}{d\tau} - \frac{dA_i}{d\tau} \right) \delta x_i d\tau = \int_{\tau_1}^{\tau_2} \left(\frac{\partial A_k}{\partial x_i} - \frac{\partial A_i}{\partial x_k} \right) U_k \delta x_i d\tau = \\ &= \int_{\tau_1}^{\tau_2} F_{ik} U_k \delta x_i d\tau; \end{aligned} \quad (5.102)$$

$$\begin{aligned} \delta \int_1^2 (-dx_i dx_i)^{1/2} &= \int_1^2 \frac{1}{2} \frac{-2dx_i \delta dx_i}{(-dx_i dx_i)^{1/2}} = -(1/c) \int_1^2 \frac{dx_i}{d\tau} d\delta x_i = \\ &= (1/c) \int_{\tau_1}^{\tau_2} \frac{dU_i}{d\tau} \delta x_i d\tau. \end{aligned} \quad (5.103)$$

Тогда из (5.98), (5.101), (5.102) и (5.103) для вариации L имеем

$$\begin{aligned} \delta L &= c \int \left(\frac{\rho^0}{c} F_{ik} U_k - \mu^0 dU_i/d\tau \right) \delta x_i dV_0 d\tau = \\ &= c \int (f_i - \mu^0 dU_i/d\tau) \delta x_i dV_0 d\tau. \end{aligned} \quad (5.104)$$

Таким образом, условие $\delta L = 0$ приводит к уравнению

$$\mu^0 dU_i/d\tau = f_i = F_{ik} s_k,$$

т. е. к уравнению движения (5.96) заряженной некогерентной материи.

§ 5.9. Электромагнитный тензор энергии

Теперь покажем, что с помощью уравнений Максвелла плотность 4-силы (5.93) можно представить в форме дивергенции симметрического тензора. Подставляя (5.16) в (5.93), получаем

$$f_i = F_{il} s_l = F_{il} \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_k} = \frac{\partial (F_{il} F_{lk})}{\partial x_k} - \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} F_{lk}.$$

Используя (5.13) и учитывая антисимметричность F_{ik} , имеем

$$\begin{aligned} \frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} F_{lk} &= \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l} F_{lk} = \frac{1}{2} \left(\frac{\partial F_{il}}{\partial x_k} + \frac{\partial F_{ki}}{\partial x_l} \right) F_{lk} = \\ &= -\frac{1}{2} \frac{\partial F_{lk}}{\partial x_l} F_{lk} = -\frac{1}{4} \frac{\partial}{\partial x_i} (F_{lk} F_{lk}). \end{aligned}$$

Таким образом,

$$f_i = -\partial S_{ik}/\partial x_k, \quad (5.105)$$

где

$$S_{ik} = F_{il} F_{kl} - \delta_{ik} (F_{lm} F_{lm})/4. \quad (5.106)$$

Согласно правилам тензорного исчисления, S_{ik} — симметрический тензор

$$S_{ik} = S_{ki}, \quad (5.107)$$

удовлетворяющий тождеству

$$S_{ii} = F_{il} F_{il} - (F_{lm} F_{lm}) \equiv 0. \quad (5.108)$$

Учитывая в (5.106) формулы (5.11), найдем выражения компонент этого тензора через компоненты векторов электрического и магнитного поля:

$$S_{\mu\nu} = -t_{\mu\nu}, \quad (5.109)$$

где

$$t_{\mu\nu} = E_\mu E_\nu + H_\mu H_\nu - 1/2 (E^2 + H^2) \delta_{\mu\nu}, \quad (5.110)$$

— тензор напряжений Максвелла.

Далее,

$$S_{\mu 4} = S_{4\mu} = (i/c) S_\mu, \quad (5.111)$$

где вектор S с компонентами S_μ представляет собой вектор Пойнтинга:

$$S = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H}), \quad (5.112)$$

и, наконец,

$$S_{44} = -W, \quad (5.113)$$

где

$$W = (E^2 + H^2)/2 \quad (5.114)$$

— плотность энергии электромагнитного поля.

Тогда уравнение (5.105), где $i = 4$, можно записать в виде

$$f_4 = (i/c)(\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) = -(i/c) \operatorname{div} \mathbf{S} + (1/ic) \partial W / \partial t; \quad (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) + \operatorname{div} \mathbf{S} + \partial W / \partial t = 0, \quad (5.115)$$

который выражает закон сохранения энергии, если W и \mathbf{S} интерпретировать как плотность энергии поля и плотность тока соответственно. Интегрируя уравнение (5.115) по конечному объему V в пространстве, ограниченном фиксированной поверхностью, и применяя теорему Гаусса, получаем

$$-\frac{d}{dt} \int_V W dV = \int_f S_n df + \int_V (\mathbf{f} \cdot \mathbf{u}) dV, \quad (5.116)$$

где S_n — компонента вектора \mathbf{S} вдоль внешней нормали элемента поверхности df . Таким образом, уменьшение энергии поля внутри V за единицу времени равно выходящему потоку энергии поля через поверхность f плюс полная работа электромагнитных сил внутри V .

Для $i = 1, 2, 3$, имеем

$$f_\mu = dt_{\mu\nu} / \partial x_\nu - \partial (S_\mu / c^2) / \partial t. \quad (5.117)$$

В статическом случае последний член равен нулю и (5.117) в точности совпадает с максвелловским выражением для плотности силы в веществе с $\varepsilon = \mu = 1$.

Рассмотренный вывод принадлежит Минковскому [160, 162]. Как указывал Абрагам [1, 5], вектор

$$\mathbf{g} = \mathbf{S} / c^2 \quad (5.118)$$

следует интерпретировать как плотность электромагнитного импульса, если потребовать сохранение импульса для замкнутой системы. В самом деле, интегрируя (5.117) по внутренности замкнутой поверхности f , в которой содержится вся система, получаем

$$\int \mathbf{f} dV = -d \int \mathbf{g} dV / dt, \quad (5.119)$$

поскольку $\int (\partial t_{\mu\nu} / \partial x_\nu) dV$ можно преобразовать в интеграл по поверхности, где поле, а следовательно, и $t_{\mu\nu}$ равны нулю. Левая часть в (5.119) представляет собой полную силу, действующую на материю, и равна увеличению механического импульса за единицу времени, $d\mathbf{G}_m / dt$. Таким образом (5.119) можно записать в виде

$$d(\mathbf{G}_m + \int \mathbf{g} dV) / dt = 0.$$

Поэтому, чтобы получить постоянство полного момента, мы должны величину $\int \mathbf{g} dV$ считать электромагнитным импульсом. Отсюда следует, что плотность электромагнитного импульса равна $\mathbf{S} / c^2 + \mathbf{C}$, где \mathbf{C} — постоянная. Но поскольку \mathbf{g} должна исчезать вместе с полем, $\mathbf{C} = 0$.

Теперь, определяя скорость распространения электромагнитной энергии формулой

$$\mathbf{w} = \mathbf{S} / W, \quad (5.120)$$

для плотности механического импульса по аналогии с выражением (4.239) можно записать

$$\mathbf{g} = \mathbf{S} / c^2 = \mathbf{w} W / c^2. \quad (5.121)$$

Эта аналогия будет полной, только если скорость ω , определяемая (5.120), удовлетворяет условию $\omega \leq c$.

Для плоской электромагнитной волны $(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) = 0$ и $E = H$; тогда

$$\omega = |S|/W = 2cEH/(E^2 + H^2) = c,$$

т. е. энергия в такой волне распространяется со скоростью света.

Для поля произвольно движущегося заряда, учитывая (5.61) и (5.62), имеем

$$(\mathbf{E} \cdot \mathbf{H}) = 0; \quad E/H = \alpha \geq 1,$$

т. е.

$$\omega = 2cEH/(E^2 + H^2) = 2c\alpha/(1 + \alpha^2) \leq c.$$

§ 5.10. Полный тензор энергии

Если в уравнении движения (4.235) некогерентной среды с сохраняющейся собственной массой использовать формулу (5.105) для выражения плотности электромагнитной 4-силы, то законы сохранения энергии и импульса для системы, состоящей из материи и электромагнитного поля, примут форму

$$\partial T_{ik}/\partial x_k = 0, \quad (5.122)$$

где

$$T_{ik} = \theta_{ik} + S_{ik} \quad (5.123)$$

полный тензор энергии системы. Компоненты этого тензора получаются из компонент θ_{ik} и S_{ik} (см. § 4.19 и § 5.9). Имеем

$$T_{\mu\nu} = \mu_0 u_\mu u_\nu / \sqrt{1 - u^2/c^2} - t_{\mu\nu}. \quad (5.124)$$

Здесь $t_{\mu\nu}$ — тензор напряжений Максвелла, и

$$T_{4\mu} = S_\mu/c, \quad (5.125)$$

где $\mathbf{S} = \mathbf{u}\mu_0 c^2/\sqrt{1 - u^2/c^2} + c(\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ — плотность потока полной энергии. Далее

$$T_{\mu 4} = icg_\mu, \quad (5.126)$$

где

$$\mathbf{g} = \mu_0 \mathbf{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2} + (\mathbf{E} \times \mathbf{H})/c$$

— плотность полного импульса системы.

И, наконец,

$$T_{44} = h, \quad (5.127)$$

где $h = \mu_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2} + (E^2 + H^2)/2$ — плотность полной энергии.

С учетом (5.108) и (4.202) сумма диагональных компонент этого тензора равна

$$T_{ii} = \theta_{ii} = -\mu_0 c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2} = -\mu^0 c^2. \quad (5.128)$$

**ОБЩАЯ ТЕОРИЯ ЗАМКНУТЫХ СИСТЕМ.
МЕХАНИКА УПРУГИХ СРЕД. ТЕОРИЯ ПОЛЯ.**

§ 6.1. Законы сохранения для замкнутых систем

В гл. 5 мы рассматривали движение некогерентной заряженной материи под действием электромагнитных сил. 4-Вектор f_i , описывающий эти силы, мы представляли в виде дивергенции тензора, который сам являлся функцией переменных электромагнитного поля. Принцип относительности требует, чтобы все сигналы распространялись со скоростью, меньшей или равной c . Поэтому мы не можем принять идею Ньютона о силах, действующих мгновенно на конечных расстояниях в пространстве. По-видимому, следует предположить, что все силы взаимодействия между материальными телами, как и электромагнитные силы, передаются посредством промежуточного поля. Таким образом, в общем случае полагаем по аналогии с (5.105), что все виды сил можно описать плотностью 4-силы f_i , являющейся дивергенцией некоторого тензора S_{ik} , зависящего от переменных промежуточных полей. Тогда для замкнутых систем, состоящих из вещества и полей, способом, описанным в § 5.10, получим законы сохранения энергии и импульса в форме

$$\partial T_{ik} / \partial x_k = 0, \quad (6.1)$$

где T_{ik} — полный тензор энергии замкнутой системы. Физический смысл компонент $T_{\mu 4}$ и $T_{4\mu}$ тот же, что и в (5.125), (5.126), (5.127), т. е.

$$T_{4\mu} = (i/c) S_{\mu}, \quad (6.2)$$

где S — плотность потока энергии, и

$$T_{\mu 4} = i c g_{\mu}; \quad T_{44} = -h \quad (6.3)$$

(g и h — плотности полного импульса и энергии соответственно). Это справедливо для любой замкнутой системы, в том числе и для упругих сред.

Уравнения (6.1) для $i = 1, 2, 3$ можно записать в виде

$$\partial T_{\mu\nu} / \partial x_\nu + \partial g_\mu / \partial t = 0, \quad (6.4)$$

представляющем собой закон сохранения импульса в дифференциальной форме. $T_{\mu\nu}$ называется тензором напряжений или тензором потока импульса (см. § 4.19). Аналогично уравнение (6.1) при $i = 4$ представляет собой уравнение неразрывности для энергии (закон сохранения энергии)

$$\text{div } S + \partial h / \partial t = 0. \quad (6.5)$$

Полный тензор энергии для замкнутой системы должен быть симметрическим, т. е.

$$T_{ik} = T_{ki} \quad (6.6)$$

Пространственная часть этого равенства существенна для выполнения закона сохранения углового момента (см. § 4.19 и 6.2), и если этот закон справедлив в любой инерциальной системе, то (6.6) должно выполняться и для пространственно-временных компонент, т. е.

$$T_{\mu 4} = T_{4\mu} \quad (6.7)$$

или с учетом (6.2) и (6.3)

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2. \quad (6.8)$$

Определяя скорость распространения энергии \mathbf{u}^* в системе, как и в случае электромагнитного поля (5.120), имеем

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{S}/h. \quad (6.9)$$

Равенства (6.7) или (6.8) можно записать иначе:

$$\mathbf{g} = \mathbf{u}^*h/c^2. \quad (6.10)$$

Это выражение формально совпадает с уравнением (4.239) для плотности механического импульса и тем самым показывает, что плотность энергии соответствует плотности массы:

$$\mu = h/c^2. \quad (6.11)$$

Следует заметить, что скорость \mathbf{u}^* , определяемая в (6.9), может быть больше c , и даже если \mathbf{u}^* меньше c , то лоренцевы преобразования для \mathbf{u}^* в общем случае уже не будут соответствовать преобразованиям (2.55) для скорости материальной частицы. Кроме того, плотность энергии h может быть и отрицательной и соответствовать, таким образом, отрицательной плотности массы h/c^2 .

Определяя в каждой системе координат четыре величины S_i , где

$$S_i = (\mathbf{S}, i\mathbf{ch}) = cT_{4i}/i, \quad (6.12)$$

из (6.5) в каждой системе координат имеем

$$\partial S_i / \partial x_i = 0. \quad (6.13)$$

Однако величины S_i не преобразуются как компоненты 4-вектора. Если предположить, что $h > 0$ и $u^* < c$, то

$$S_i S_i = S^2 - c^2 h^2 < 0. \quad (6.14)$$

Тогда в каждой системе координат можно определить четыре величины U_i^* , аналогичные 4-скорости частицы:

$$U_i^* = \left\{ \mathbf{u}^* / \sqrt{1 - u^{*2}/c^2}, i c / \sqrt{1 - u^{*2}/c^2} \right\}. \quad (6.15)$$

Эти величины преобразуются как компоненты времениподобного 4-вектора тогда и только тогда, когда скорость \mathbf{u}^* преобразуется как скорость частицы.

Найдем условие, которому в этом случае должен удовлетворять тензор T_{ik} . Поскольку

$$\sqrt{1 - u^{*2}/c^2} = \sqrt{1 - S^2/h^2 c^2} = (-S_i S_i)^{1/2} / hc,$$

то

$$U_i^* = \left\{ \frac{c\mathbf{S}}{(-S_i S_i)^{1/2}}, \frac{i hc^2}{(-S_i S_i)^{1/2}} \right\} = \frac{c S_i}{(-S_i S_i)^{1/2}}; \quad (6.16)$$

$$U_i^* U_i^* = -c^2.$$

Рассмотрим бесконечно малые преобразования Лоренца

$$x'_i = x_i + \varepsilon_{ik} x_k; \quad \varepsilon_{ik} = -\varepsilon_{ki}, \quad (6.17)$$

связывающие пространственно-временные координаты двух инерциальных систем S и S' . Из формул преобразования для тензора имеем

$$T'_{4i} = T_{4i} + \varepsilon_{4e} T_{ei} + \varepsilon_{ik} T_{4h}.$$

Тогда, учитывая (6.12), находим, что

$$\left. \begin{aligned} S'_i &= S_i + \varepsilon_{ik} S_h + (c/i) \varepsilon_{4k} T_{hi}; \\ S'_i S'_i &= S_i S_i + (2c/i) \varepsilon_{4h} T_{hi} S_i. \end{aligned} \right\} \quad (6.17')$$

Раскладывая (6.16) в ряд по ε_{ik} с учетом (6.17) и пренебрегая членами порядка выше первого, получаем

$$U_i^{*'} = \frac{cS_i'}{(-S_l S_l)^{1/2}} = U_i^* + \varepsilon_{ik} U_k^* + \frac{c^2 \varepsilon_{4k}}{i (-S_l S_l)^{1/2}} \left(T_{ki} + \frac{U_i^* T_{kl} U_l^*}{c^2} \right). \quad (6.18)$$

Следовательно, для того, чтобы U_i^* преобразовывалась как 4-вектор, тензор T_{ik} при $i = 1, 2, 3$ и любых k должен удовлетворять условию

$$R_{ik} \equiv T_{ik} + T_{il} U_l^* U_k^* / c^2 = 0. \quad (6.19)$$

Для $i = 4$ уравнение (6.19) тождественно удовлетворяется. Это условие также и достаточное. В самом деле, если (6.19) выполняется в S , то

$$U_i^{*'} = U_i^* + \varepsilon_{ik} U_k^*. \quad (6.20)$$

Тогда R_{ik} при переходе от S к S' преобразуется как тензор, и (6.19) справедливо и в системе S' . Поскольку конечное преобразование Лоренца можно рассматривать как бесконечную последовательность бесконечно малых преобразований Лоренца, то (6.19) можно считать общим условием, которому должен удовлетворять тензор T_{ik} , чтобы скорость энергии \mathbf{u}^* преобразовывалась как скорость частицы.

В общем случае тензор энергии физических систем не удовлетворяет условию (6.19). Существует однако, несколько случаев, когда это условие выполняется. Например, для системы, состоящей из некогерентной материи, на которую не действуют внешние силы, $T_{ih} = \theta_{ih} = \mu^0 U_i U_h$, т. е.

$$S_i = \frac{c}{i} \mu^0 U_i U_4, \quad U_i^* = \frac{c S_i}{(-S_l S_l)^{1/2}} = U_i$$

и

$$R_{ik} \equiv T_{ik} + \frac{T_{il} U_l^* U_k^*}{c^2} = \mu^0 U_i U_k + \frac{\mu^0 U_i U_l U_l U_k}{c^2} = 0.$$

В этом случае скорость распространения энергии совпадает со скоростью среды. Однако для упругой среды, как мы увидим в § 6.4, условие (6.19) в общем случае не выполняется. Далее, в § 7.8 мы встретимся с другим важным случаем, когда по физическим причинам условие (6.19) должно выполняться.

§ 6.2. 4-Импульс, 4-тензор углового момента для замкнутых островных систем

Если

$$g_i = T_{ia} / i c = (\mathbf{g}, i h/c), \quad (6.21)$$

то условие симметрии (6.7) можно записать в виде

$$g_i = S_i / c^2 \quad (6.22)$$

и из (6.13) для замкнутой системы

$$\partial g_i / \partial x_i = 0. \quad (6.23)$$

Следует помнить, что величины g_i и S_i не являются 4-векторами.

Теперь рассмотрим островные системы, т. е. такие системы, для которых за пределами некоторой области физического пространства в любой момент времени $T_{ih} = 0$. Если умножить (6.1) на $dx_1 dx_2 dx_3$ и проинтегрировать по всему физическому пространству при постоянном x_4 , то первые три члена в (6.1), являющиеся частными производными $T_{\mu\nu}$ от пространственных координат x_ν , обратятся в нуль. Следовательно, получаем уравнение $d \int T_{i4} dV / dx_4 = 0$, которое показывает, что четыре величины

$$G_i = \int g_i dV = (\mathbf{G}, iH/c) \quad (6.24)$$

для островных замкнутых систем не изменяются со временем. G и H представляют собой полный импульс и полную энергию системы соответственно. Величины G_i преобразуются как компоненты 4-вектора (вектора 4-импульса). Это можно показать следующим образом.

Пусть a_i — произвольный постоянный 4-вектор. Тогда 4-вектор

$$b_k = a_i T_{ik} \tag{6.25}$$

в соответствии с (6.1) удовлетворяет уравнению

$$\partial b_k / \partial x_k = 0. \tag{6.26}$$

Умножим (6.26) на $d\Omega = (1/i) dx_1 dx_2 dx_3 dx_4$ и проинтегрируем по конечной области Ω в $(3 + 1)$ -пространстве, тогда с помощью обобщенной теоремы Гаусса получим

$$0 = \int_{\Sigma} (\partial b_k / \partial x_k) d\Omega = \int_{\Sigma} \epsilon b_k d\Sigma_k, \tag{6.27}$$

где Σ — трехмерная граница области Ω . Поскольку исследуются ограниченные системы, то в области $(3 + 1)$ -пространства, в которой T_{ik} отличен от нуля, совокупность мировых линий системы образует мировую трубку с конечным поперечным сечением в пространственноподобных направлениях.

Рассмотрим две произвольные координатные системы S и S' в $(3 + 1)$ -пространстве и две гиперплоскости Σ_1 и Σ_2 , определяемые условиями $x_4 = \text{const}$, $x'_4 = \text{const}$ соответственно, с произвольными значениями этих постоянных. В качестве Ω выберем область, ограниченную гиперплоскостями Σ_1 , Σ_2 и цилиндрической гиперповерхностью Σ_3 , ограничивающей мировую трубку, в которой $T_{ik} \neq 0$ (рис. 15). Таким образом, трехмерная гиперповерхность Σ состоит из трех частей Σ_1 , Σ_2 и Σ_3 . На гиперповерхности $\int_{\Sigma} \epsilon b_k d\Sigma_k = 0$, так как на ней $T_{ik} = 0$, $b_k = 0$. Следовательно, из (6.27) получаем

$$\int_{\Sigma_1} \epsilon b_k d\Sigma_k + \int_{\Sigma_2} \epsilon b_k d\Sigma_k = 0. \tag{6.28}$$

Оба интеграла в (6.28) инвариантны и могут быть вычислены в любой системе. Вычислим первый интеграл в системе S , а второй в S' . Если предположить, что события в Σ_2 происходят позже, чем события в Σ_1 , то внешняя нормаль к Σ_1 ориентирована в отрицательном направлении временной оси, и в соответствии с (4.195) для первого интеграла $\epsilon d\Sigma_k = (0, 0, 0, i dx_1 dx_2 dx_3)$. Поэтому

$$\int_{\Sigma_1} b_k d\Sigma_k = i \int b_4(x_1, x_2, x_3, x_4) dx_1 dx_2 dx_3. \tag{6.29}$$

(При интегрировании x_4 считаем постоянным.)

Для второго интеграла аналогичным образом получаем

$$\int_{\Sigma_2} b_k d\Sigma_k = \int_{\Sigma_2} \epsilon b'_k d\Sigma'_k = -i \int b'_4(x'_1, x'_2, x'_3, x'_4) dx'_1 dx'_2 dx'_3. \tag{6.30}$$

Подставляя (6.29) и (6.30) в (6.28), находим, что $\int b_4 dV = \int b'_4 dV$, или с учетом (6.25), (6.21) и (6.24)

$$a_i G_i = a'_i G'_i = \text{invariant.} \quad (6.31)$$

Поскольку эти уравнения должны выполняться для любого постоянного вектора a_i , связь между G_i и G'_i определяется формулой преобразования для вектора

$$G'_i = \alpha_{ih} G_h. \quad (6.31')$$

При доказательстве векторного характера величины G_i было существенно, что тензор T_{ih} всюду регулярен. Если T_{ih} имеет сингулярность на некоторой мировой линии, то эту линию можно исключить из области Ω с помощью некоторой поверхности Σ_4 , которая затем даст вклад в интеграл $\int_{\Sigma} \epsilon b_k d\Sigma_k$ в уравнении (6.27).

Поскольку G_i — вектор, $G_i G_i$ — инвариант. Следовательно, теперь по аналогии с (4.51) можно определить полную собственную массу M_0 системы уравнением

$$G_i G_i = -M_0^2 c^2. \quad (6.32)$$

Далее, из (6.1) и (6.6) имеем

$$\partial(x_i T_{hl} - x_h T_{il}) / \partial x_l = \delta_{il} T_{kl} - \delta_{kl} T_{il} = T_{ki} - T_{ih} = 0. \quad (6.33)$$

Интегрируя это уравнение по всему физическому пространству с учетом ограниченности системы и используя теорему Гаусса, получаем $d \int (x_i T_{h4} - x_h T_{i4}) dV / dx_4 = 0$, откуда следует, что шесть величин

$$M_{ih} = \int (x_i g_h - x_h g_i) dV = -M_{hi} \quad (6.34)$$

не изменяются со временем. Этот результат существенно зависит от симметричности тензора энергии. Методом, аналогичным тому, который применялся при доказательстве векторного характера G_i , можно доказать, что величины M_{ih} преобразуются как компоненты антисимметрического тензора — 4-тензора углового момента относительно начала координат.

Пространственная часть этого тензора $M_{\mu\nu}$ в соответствии с (4.101) дуальна к аксиальному вектору

$$\mathbf{M} = \int (\mathbf{x} \times \mathbf{g}) dV, \quad (6.35)$$

который представляет собой постоянный вектор полного углового момента замкнутой островной системы.

§ 6.3. Центр масс*

Можно предположить, что для любой физической системы G_i есть временноподобный вектор, так что масса M_0 , определяемая формулой (6.32), действительная величина. В этом случае всегда можно найти инерциальную систему S^0 — систему покоя, в которой полный импульс $\mathbf{G}^0 = 0$. Тогда, учитывая (6.32), для компонент G_i в S^0 имеем

$$G_i^0 = (0, 0, 0, i M_0 c). \quad (6.36)$$

Как и для материальной частицы, скорость \mathbf{u} системы покоя S^0 относительно системы S равна

$$\mathbf{u} = c^2 \mathbf{G} / H. \quad (6.37)$$

* См. [96, 192, 201, 166, 17].

В механике Ньютона центр масс системы с плотностью массы $\mu = \mu(\mathbf{x}, t)$ определяется как точка, радиус-вектор которой равен

$$\mathbf{X} = (1/M) \int \mu(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} dV, \quad (6.38)$$

где $M = \int \mu dV$ — полная масса системы. В релятивистской механике плотность массы связана с плотностью энергии уравнением (6.11). Тогда центр масс системы можно определить уравнениями (6.38) и (6.11). Точка, определяемая таким способом, зависит от системы координат, используемой при вычислении интегралов в (6.38), т. е. каждая инерциальная система имеет свой собственный центр масс $C(S)$. В системе S радиус-вектор этой точки $\mathbf{X}\{C(S)\} = \mathbf{X}(S)$ определяется в соответствии с (6.38), (6.11) и (6.24) формулой

$$\mathbf{X}(S) = (1/H) \int h(\mathbf{x}, t) \mathbf{x} dV. \quad (6.39)$$

Для островной замкнутой системы из (6.23) получим, что в каждой системе координат $\partial(g_i x_k)/\partial x_i = g_i \delta_{ik} = g_k$, и при интегрировании по всему физическому пространству $\frac{d}{dx_4} \int g_4 x_k dV = G_k$. Поскольку H не зависит от времени, при $k = 1, 2, 3$ это уравнение показывает, что центр масс, определяемый в (6.39), движется относительно S с постоянной скоростью $c^2 \mathbf{G}/H$, т. е. с той же скоростью \mathbf{u} , что и система покоя S^0 . Следовательно, все центры масс $C(S)$ покоятся в системе S^0 . Особую роль играет точка $C^0 = C(S^0)$, т. е. центр масс в самой системе покоя; $C(S^0)$ можно назвать собственным центром масс. Если $X_i = (X, X_4)$ — пространственно-временные координаты собственного центра масс C^0 в произвольной системе координат, то $X_i = X_i(\tau)$ — линейные функции от собственного времени τ этой точки. Кроме того, если $U_i = dX_i/d\tau = \{\mathbf{u}/\sqrt{1-u^2/c^2}, ic/\sqrt{1-u^2/c^2}\}$ есть 4-скорость C^0 , то из (6.37) имеем

$$G_i = M_0 U_i. \quad (6.40)$$

Следовательно, зависимость полного импульса системы G_i от скорости собственного центра масс такая же, как и для материальной частицы.

Теперь, определяя 4-тензор относительного углового момента m_{ik} относительно собственного центра масс

$$m_{ik} = \int \{(x_i - X_i) g_k - (x_k - X_k) g_i\} dV = M_{ik} - (X_i G_k - G_i X_k) \quad (6.41)$$

и дифференцируя его по x_4 и τ , с учетом (6.40) получаем $dm_{ik}/dx_4 = 0$; $dm_{ik}/d\tau = -U_i G_k + U_k G_i = 0$.

Следовательно, два пространственных вектора \mathbf{m} и \mathbf{n}

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m} &= (m_{23}, m_{31}, m_{12}); \\ -i \mathbf{n} &= (m_{14}, m_{24}, m_{34}) \end{aligned} \right\} \quad (6.42)$$

не изменяются при движении. Поэтому в (6.41) можно положить $x_4 = X_4$ и с помощью (6.42) и (6.41) получить

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{m} &= \int \{(\mathbf{x} - \mathbf{X}) \times \mathbf{g}\} dV|_{x_4=X_4}; \\ -\mathbf{n}/c &= \int (h/c^2)(\mathbf{x} - \mathbf{X}) dV|_{x_4=X_4} = \int \mu(\mathbf{x} - \mathbf{X}) dV|_{x_4=X_4}. \end{aligned} \right\} \quad (6.43)$$

Таким образом, \mathbf{m} — вектор относительного углового момента относительно центра масс, т. е. внутренний угловой момент, а $-\mathbf{n}/c$ — момент массы относительно той же точки. Решение второго уравнения относительно \mathbf{X} дает

$$\mathbf{X} = (1/H) \int h \mathbf{x} dV|_{x_4=X_4} + c\mathbf{n}/H = \mathbf{X}(S) + c\mathbf{n}/H, \quad (6.44)$$

где $\mathbf{X}(S)$ и $\mathbf{X}(S^0) \equiv \mathbf{X}$ — одновременные радиусы-векторы центра масс $C(S)$ и собственного центра масс $C(S^0)$ соответственно.

Из (6.44) видно, что различные центры масс совпадают только тогда, когда \mathbf{n} , а поэтому и m_{ih} равны нулю в любой инерциальной системе, т. е. если рассматриваемая физическая система не имеет внутреннего углового момента. Для системы S^0 уравнение (6.44) принимает вид

$$\mathbf{n}^0 = 0 \quad \text{или} \quad m_{i4}^0 = 0, \quad (6.45)$$

так как, по определению $\mathbf{X}^0 = \mathbf{X}^0(S^0)$. Это условие эквивалентно ковариантному уравнению

$$m_{ih} G_h = 0, \quad (6.46)$$

что видно из (6.36), если (6.46) записать в системе S^0 . Это уравнение ковариантным образом выражает тот факт, что собственный центр масс является центром масс в своей собственной системе покоя.

Если пространственные оси в S и S^0 имеют одинаковую ориентацию, то с помощью формулы преобразования (4.84) для антисимметрического тензора и (6.45) получаем

$$\mathbf{n} = (\mathbf{v} \times \mathbf{m}^0) / \sqrt{c^2 - v^2}, \quad (6.47)$$

где $\mathbf{v} = -\mathbf{u}$ — скорость системы S относительно S^0 и \mathbf{m}^0 — внутренний угловой момент в системе покоя.

Разница между одновременными положениями центра масс в S и собственного центра масс определяется в соответствии с (6.44) и (6.47) не зависящим от времени пространственным вектором

$$\mathbf{a}(S) = \mathbf{X}(S) - \mathbf{X} = -c\mathbf{n}/H = (\mathbf{m}^0 \times \mathbf{v})/M_0 c^2, \quad (6.48)$$

где мы использовали соотношение $H = M_0 c^2 / \sqrt{1 - u^2/c^2} = M_0 c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}$, следующее из (6.40). Поскольку переход от S к S^0 определяется преобразованием Лоренца без вращения, а вектор \mathbf{a} перпендикулярен относительной скорости \mathbf{v} , расстояние между этими двумя центрами в системе покоя S^0 также определяется формулой (6.48). В системе покоя S^0 все центры масс $C(S)$ получаются при варьировании S или \mathbf{v} в (6.48) и образуют двухмерный круглый диск, перпендикулярный вектору углового момента \mathbf{m}^0 с центром в собственном центре масс C^0 и радиусом

$$\rho = |\mathbf{m}^0|/M_0 c. \quad (6.49)$$

В нерелятивистском пределе, при $c \rightarrow \infty$, радиус диска стремится к нулю и остается только один центр масс — ньютоновский центр масс. Но в релятивистском случае имеет место не один центр масс, а геометрическое место центров масс, т. е. вышеупомянутый диск с центром в собственном центре масс. И только в отсутствие внутреннего углового момента в системе радиус диска (6.49) равен нулю. В действительности для всех макроскопических систем радиус (6.49) очень мал по сравнению с размерами системы. Например, для Земли

$$\rho = |\mathbf{m}^0|/M_0 c \approx 10 \text{ м}. \quad (6.50)$$

Для систем с размерами атомного порядка радиус диска центров масс сравним с размерами системы.

Теперь можно сделать определенные выводы о размерах системы с данными внутренним угловым моментом \mathbf{m}^0 и собственной массой M_0 . Рассмотрим произвольную физическую систему, которая в системе покоя S^0 целиком лежит внутри сферы с центром в собственном центре масс C^0 и радиусом r , т. е. систему, для которой все компоненты тензора энергии вне сферы равны нулю. Если, кроме того, плотность энергии h положительна в любой системе отсчета, то весь диск центров масс должен лежать внутри сферы, так как произвольная точка $C(S)$ диска, являющаяся центром масс в системе координат S , должна лежать внутри физической системы, поскольку h положительна. Отсюда

$$r \geq \rho = |\mathbf{m}^0|/M_0 c, \quad (6.51)$$

т. е. система с положительной плотностью энергии и с данными внутренним угловым моментом m^0 и собственной массой покоя M_0 , в соответствии с (6.51), всегда имеет конечные размеры. Если размеры системы меньше ρ , то h не может быть положительной во всех инерциальных системах.

§ 6.4. Фундаментальные уравнения механики упругих сред

В § 4.18 и 4.19 мы исследовали механику некогерентной материи, движущейся под действием данных внешних сил. Теперь рассмотрим механику упругой среды в отсутствие внешних сил. Единственными силами в такой среде будут силы упругости между соседними частицами, обусловленные деформацией материи. Следовательно, мы имеем дело с замкнутой системой, являющейся частным случаем систем общего вида, рассмотренных в § 6.1. Поэтому полный тензор энергии T_{ih} исследуемой механической системы должен удовлетворять уравнениям (6.1)—(6.11). Однако механический тензор энергии, как мы сейчас увидим, имеет в данном случае особенно простые свойства.

Если рассмотренные в § 4.18 силы были объемными, то силы упругости — поверхностные и имеют поэтому совершенно другую природу. Рассмотрим в определенной точке p трехмерного подпространства, пространства Минковского инфинитезимальный поверхностный элемент df с нормалью, определяемой единичным вектором \mathbf{n} . Каждая сторона этого элемента испытывает действие силы, пропорциональной dt . Пусть

$$dt(\mathbf{n}) = \mathbf{t}(\mathbf{n}) df \quad (6.52)$$

— сила, действующая на сторону, к которой направлена нормаль. Тогда, поскольку действие и противодействие равны, сила $\mathbf{t}(-\mathbf{n}) df$, действующая на другую сторону элемента, должна быть равна $-\mathbf{t}(\mathbf{n}) df$.

Компоненты $t_\mu(\mathbf{n})$ силы $\mathbf{t}(\mathbf{n})$ являются линейными функциями компонент n_ν , т. е.

$$t_\mu(\mathbf{n}) = t_{\mu\nu} n_\nu. \quad (6.53)$$

Поскольку $t_\mu(\mathbf{n})$ и n_ν — компоненты 3-векторов, величины $t_{\mu\nu}$ преобразуются при вращениях декартовых осей как компоненты 3-тензора. Тензор упругих напряжений $t_{\mu\nu}$ иногда называется относительным тензором напряжений, в противоположность пространственной части $T_{\mu\nu}$ полного тензора энергии T_{ih} , которая называется абсолютным тензором напряжений [134, 135].

Полная упругая сила \mathbf{F} , действующая на материю, находящуюся внутри замкнутой поверхности f , равна $\int_f \mathbf{t}(\mathbf{n}) df = \int_f dt(\mathbf{n})$, где \mathbf{n} — направленная внутрь нормаль к элементу df .

Компоненты F_μ с учетом (6.53) и с использованием теоремы Гаусса (4.196) равны

$$F_\mu = \int_f t_{\mu\nu} n_\nu df = - \int_V (\partial t_{\mu\nu} / \partial x_\nu) dV, \quad (6.54)$$

где интегрирование происходит по внутренней стороне замкнутой поверхности f . Теперь можно определить плотность \tilde{f} упругой силы так, чтобы выполнялось условие

$$F_\mu = \int_V \tilde{f}_\mu dV. \quad (6.55)$$

Сравнение (6.54) и (6.55) показывает, что

$$\tilde{f}_\mu = -\partial t_{\mu\nu} / \partial x_\nu. \quad (6.56)$$

Теперь движение инфинитезимальной частицы материи с объемом δV описывается уравнениями

$$d(g_{\mu} \delta V)/dt = \tilde{f}_{\mu} \delta V = -\delta V \partial t_{\mu\nu} / \partial x_{\nu}, \quad (6.57)$$

где \mathbf{g} — плотность импульса, а d/dt — субстанциональная производная по времени. С помощью (4.205) и (4.208) получаем

$$\begin{aligned} \frac{d}{dt} (g_{\mu} \delta V) &= \frac{\partial g_{\mu}}{\partial t} \delta V + g_{\mu} \frac{d}{dt} \delta V = \left(\frac{\partial g_{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial g_{\mu}}{\partial x_{\nu}} u_{\nu} \right) \delta V + g_{\mu} \delta V \frac{\partial u_{\nu}}{\partial x_{\nu}} \\ &= \left(\frac{\partial g_{\mu}}{\partial t} + \frac{\partial (g_{\mu} u_{\nu})}{\partial x_{\nu}} \right) \delta V, \end{aligned} \quad (6.58)$$

где u_{ν} — компоненты вектора скорости \mathbf{u} среды в данной точке и в данный момент времени. Из (6.57) и (6.58) находим, что

$$\partial g_{\mu} / \partial t + \partial (g_{\mu} u_{\nu} + t_{\mu\nu}) / \partial x_{\nu} = 0. \quad (6.59)$$

Закон сохранения импульса выражается также уравнением (6.4). Поэтому имеем следующее соотношение между абсолютным и относительным тензорами напряжений:

$$T_{\mu\nu} = t_{\mu\nu} + g_{\mu} u_{\nu}. \quad (6.60)$$

Чтобы найти явное выражение для плотности импульса, воспользуемся соотношением (6.8) между \mathbf{g} и потоком энергии \mathbf{S} :

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2. \quad (6.61)$$

Полная работа упругих сил, действующих на материю внутри замкнутой поверхности f в единицу времени,

$$A = \int_f \mathbf{t}(\mathbf{n}) \cdot \mathbf{u} df = \int_f t_{\mu\nu} n_{\nu} u_{\mu} df = - \int_V (\partial (u_{\mu} t_{\mu\nu}) / \partial x_{\nu}) dV,$$

где интегрирование в последнем выражении происходит по внутреннему объему V поверхности f . Следовательно, работа, произведенная над инфинитезимальной частицей материи, заключенной в объеме δV , равна

$$\delta A = -(\partial (u_{\mu}^* t_{\mu\nu}) / \partial x_{\nu}) \delta V. \quad (6.62)$$

Она вызывает увеличение энергии внутри δV , т. е. δA

$$d(h\delta V)/dt = \delta A, \quad (6.63)$$

где h — полная плотность энергии, включая и упругую энергию. Левую часть в (6.63) можно преобразовать к виду $d(h\delta V)/dt = (\partial h / \partial t + u_{\nu} \partial h / \partial x_{\nu}) \delta V + h \delta V \partial u_{\nu} / \partial x_{\nu} = \{ \partial h / \partial t + \partial (h u_{\nu}) / \partial x_{\nu} \} \delta V$. Тогда с учетом (6.62) получаем уравнение

$$\partial h / \partial t + \partial (h u_{\nu} + u_{\mu} t_{\mu\nu}) / \partial x_{\nu} = 0. \quad (6.64)$$

Сравнивая (6.5) и (6.64), находим, что

$$\mathbf{S} = h\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}), \quad (6.65)$$

где $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})$ — пространственный вектор с компонентами $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})_{\nu} = u_{\mu} t_{\mu\nu}$. Таким образом, кроме конвективного потока $h\mathbf{u}$ существует дополнительный перенос энергии, обусловленный работой упругих сил. Скорость переноса энергии (6.9) равна $\mathbf{u}^* = \mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})/h \neq \mathbf{u}$. Из (6.61) и (6.11) теперь получаем формулу для плотности полного импульса

$$\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2 = \mu\mathbf{u} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})/c^2, \quad (6.66)$$

где $\mu = h/c^2$ — плотность полной массы, включая и массу упругой энергии. Из-за наличия величины $(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})$ в (6.66) направление вектора плотности импульса в общем случае уже не совпадает с направлением движения материи. Поэтому $g_{\nu\mu} \neq g_{\mu\nu}$. Поскольку для выполнения закона сохранения углового момента требуется, чтобы $T_{\mu\nu} = T_{\nu\mu}$ (см. § 6.2), из (6.60) и (6.66) следует, что $t_{\mu\nu} - t_{\nu\mu} = -g_{\mu\alpha}u_{\nu} + g_{\nu\alpha}u_{\mu} = \{-(\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})_{\mu}u_{\nu} + (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t})_{\nu}u_{\mu}\}/c^2 \neq 0$, т. е. относительный тензор напряжений несимметричен. Только в системе покоя материи S^0 в рассматриваемой точке, где $\mathbf{u}^0 = 0$, из (6.60), (6.65) и (6.66) имеем

$$t_{\mu\nu}^0 = T_{\mu\nu}^0 = T_{\nu\mu}^0 = t_{\nu\mu}^0; \quad S_{\mu}^0 = g_{\mu}^0 = T_{\mu 4}^0 = 0; \quad T_{44}^0 = -h^0, \quad (6.67)$$

где h^0 — плотность энергии покоя.

Механический тензор энергии удовлетворяет уравнению

$$T_{ik} U_k = -h^0 U_i, \quad (6.68)$$

где U_i — 4-скорость материи. Справедливость этого ковариантного уравнения следует из (6.67), если (6.68) записать в системе покоя, где $U_i^0 = (0, 0, 0, ic)$. Соотношение (6.68) является характеристикой чисто механического тензора энергии. Оно содержит уравнение (4.252) как частный случай.

4-Импульс инфинитезимальной частицы материи объемом $\delta V = \delta V^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2}$ равен

$$\delta G_i = (g_{\mu} \delta V, i h \delta V/c) = g_i \delta V. \quad (6.69)$$

В противоположность 4-импульсу некогерентной материи δG_i упругой среды уже не будет 4-вектором. Полагая

$$\tilde{f}_i = \left\{ \tilde{f}_{\mu}, \frac{i}{c} \frac{\delta A}{\delta V} \right\} = \left\{ -\frac{\partial t_{\mu\nu}}{\partial x_{\nu}}, -\frac{i}{c} \frac{\partial (u_{\mu} t_{\mu\nu})}{\partial x_{\nu}} \right\}, \quad (6.70)$$

уравнения (6.57) и (6.63) можно записать в виде одного 4-компонентного уравнения

$$d\delta G_i/dt = \tilde{f}_i \delta V, \quad (6.71)$$

или

$$d\delta G_i/d\tau = \tilde{f}_i \delta V^0. \quad (6.71')$$

Упругие силы — чисто поверхностные силы вида (6.52). Как мы увидим далее, сила $dt(\mathbf{n})$ — истинная механическая сила, преобразующаяся в соответствии с (3.40). С другой стороны, (6.71) и (6.71') показывают, что действие упругих сил можно также описать плотностью объемной 4-силы \tilde{f}_i . Однако \tilde{f}_i не является плотностью истинной механической силы, подобной той, что рассматривалась в § 4.18. \tilde{f}_a не равна $i\tilde{f}\mathbf{u}/c$, а \tilde{f}_i даже не 4-вектор, в противоположность плотности обобщенной 4-силы, рассмотренной в § 4.18, 4.19.

Из T_{ik} можно образовать скаляр

$$U_i T_{ik} U_k/c^2 = U_i^0 T_{ik}^0 U_k^0/c^2 = -T_{44}^0 = h^0(x), \quad (6.72)$$

где $h^0(x)$ — инвариантная плотность энергии покоя, которая считается скалярной функцией координат (x_i) в S . Кроме того, с помощью тензора

$$\Delta_{ik} = \delta_{ik} + U_i U_k/c^2, \quad (6.73)$$

удовлетворяющего соотношению

$$U_i \Delta_{ik} = \Delta_{ik} U_k = 0, \quad (6.74)$$

можно образовать симметрический тензор

$$S_{ik} = \Delta_{il} T_{lm} \Delta_{mk} = S_{ki}, \quad (6.75)$$

ортогональный к U_i :

$$U_i S_{ih} = S_{ih} U_h = 0. \quad (6.76)$$

Подставляя (6.73) в (6.75) и учитывая (6.68), (6.72), получаем

$$S_{ik} = T_{ih} - h^0 U_i U_k / c^2. \quad (6.77)$$

В системе покоя S^0 , где $U_i^0 = ic\delta_{i4}$, а T_{ik}^0 определяется выражением (6.67), компоненты S_{ih} следующие:

$$S_{\mu\nu}^0 = T_{\mu\nu}^0 = t_{\mu\nu}^0; \quad S_{i4}^0 = S_{4i}^0 = 0. \quad (6.78)$$

Выражение (6.77) можно представить также в виде

$$T_{ih} = \theta_{ih} + S_{ih}, \quad (6.79)$$

где

$$\theta_{ih} = h^0 U_i U_h / c^2 = \mu^0 U_i U_h \quad (6.80)$$

есть тензор кинетической энергии (4.234), а

$$\mu^0 = h^0 / c^2 \quad (6.81)$$

— плотность массы в системе покоя, включающая и массу, соответствующую упругой энергии. Соотношение (6.79) показывает, что механический тензор энергии состоит из двух частей: кинетического тензора θ_{ih} и «потенциальной» части S_{ih} . Как мы увидим далее, S_{ih} полностью определяется относительным тензором напряжений $t_{\mu\nu}$. Поэтому S_{ih} назовем 4-тензором напряжений. Уравнения (6.1) можно теперь представить в форме

$$\partial\theta_{ih}/\partial x_k \equiv f_i^*, \quad (6.82)$$

где

$$f_i^* = -\partial S_{ih}/\partial x_k. \quad (6.83)$$

Следовательно, действие упругих сил описывается 4-вектором f_i^* , определяемым формулой (6.83) и являющимся плотностью обобщенной 4-силы, так как

$$U_i f_i^* = -\frac{\partial(S_{ih} U_i)}{\partial x_k} + S_{ih} \frac{\partial U_i}{\partial x_k} = S_{ih} U_{i,k} \neq 0. \quad (6.84)$$

Здесь мы использовали (6.76) и ввели обозначение

$$A_{i,k} \equiv \partial A(x)/\partial x_k \quad (6.85)$$

для частной производной по координатам от функции $A(x)$. По аналогии с (4.230), (4.232) и (4.233) фундаментальные уравнения (6.82) или (6.1) эквивалентны уравнениям

$$(\mu^0 U_k)_{,k} = \varphi^0 / c^2 = -U_i f_i^* / c^2 = -S_{ih} U_{i,k} / c^2; \quad (6.86)$$

$$\mu^0 dU_i/d\tau = d_i; \quad (6.87)$$

$$d_i = (f_i^*)_{\perp} = f_i^* + (f_k^* U_k) U_i / c^2. \quad (6.88)$$

Поскольку обе части уравнений (6.87) при умножении на U_i обращаются в нуль, они являются системой только трех независимых уравнений. Следовательно, вместе с (6.86) мы имеем четыре независимых уравнения, эквивалентных четырем уравнениям (6.82) или (6.1).

Вследствие того, что плотность собственной массы включает и плотность массы упругой энергии, собственная масса $\mu^0 \delta V^0$ не сохраняется. В соответствии с (6.86) скорость изменения упругой энергии на единицу объема в системе S^0 равна φ^0 , которую с помощью (6.78) можно записать в виде

$$\varphi^0 = -S_{ih} U_{i,k} = -S_{ik}^0 U_{i,k}^0 = t_{\mu\nu}^0 \mu_{\mu,\nu}^0. \quad (6.89)$$

Теперь в каждой системе S определим величину

$$t_{ik} = S_{ik} - S_{i4} U_k / U_4, \quad (6.90)$$

которая согласно (6.79) и (6.80) равна

$$t_{ik} = T_{ik} - T_{i4} U_k / U_4. \quad (6.91)$$

Очевидно, что t_{ik} — не 4-тензор. Ее компонента t_{i4} в каждой системе координат тождественно равна нулю, т. е.

$$t_{i4} = 0. \quad (6.92)$$

Кроме того, из (6.90) и (6.76) следует, что $U_i t_{ik} = 0$ или

$$t_{4k} = -U_\mu t_{\mu k} / U_4. \quad (6.93)$$

Пространственные компоненты t_{ik} равны компонентам относительного тензора напряжений \mathbf{t} , что можно показать, используя (6.91), (6.3) и (6.60), а именно:

$$T_{\mu\nu} - T_{\mu 4} U_\nu / U_4 = T_{\mu\nu} - g_\mu u_\nu = t_{\mu\nu}. \quad (6.94)$$

Из (6.92)—(6.94) следует, что компоненты t_{ik} полностью определяются относительным тензором напряжений \mathbf{t} и скоростью \mathbf{u} . Как мы уже упоминали раньше, это верно и для компонент 4-тензора напряжений S_{ik} . Кроме того, из (6.90) и (6.76) имеем $t_{ik} U_k = S_{i4} c^2 / U_4$; $S_{i4} = U_4 t_{ik} U_k / c^2$, поэтому

$$S_{ik} = t_{ik} + S_{i4} U_k / U_4 = t_{ik} + t_{il} U_l U_k / c^2. \quad (6.95)$$

Используя (6.92) и (6.93), записываем упругую 4-силу (6.70) в виде

$$\tilde{f}_i = -\partial t_{iv} / \partial x_v = -\partial t_{ik} / \partial x_k, \quad (6.96)$$

откуда с помощью (6.95) и (6.83) получаем следующее соотношение между \tilde{f}_i и плотностью силы f_i^* :

$$f_i^* = -\partial S_{ik} / \partial x_k = \tilde{f}_i - \partial (t_{il} U_l U_k / c^2) / \partial x_k. \quad (6.97)$$

Теперь рассмотрим конечное количество материи в момент времени t , находящееся внутри конечного объема $V(t)$, ограниченного замкнутой поверхностью $f(t)$. Поскольку среда движется, то f и V изменяются со временем. Пусть

$${}^*G_i(t) = (\mathbf{G}, iH/c) \quad (6.98)$$

есть 4-импульс определенной таким образом системы. Тогда производная по времени от G_i получается интегрированием уравнений (6.71) при постоянном t . Используя (6.96) и теорему Гаусса, получаем

$$\frac{dG_i}{dt} = \int_{V(t)} \tilde{f}_i dV = - \int_{f(t)} \frac{\partial t_{i\mu}}{\partial x_\mu} dV = \int_{f(t)} t_{i\mu} n_\mu df = \int_{f(t)} t_{i\mu} df_\mu, \quad (6.99)$$

где \mathbf{n} — внутренняя нормаль к поверхностному элементу df и $df_\mu = n_\mu df$. Из (6.52), (6.53) и (6.93) имеем

$$\begin{aligned} t_{iv} df_v &= t_{iv} n_v df = \{t_\mu(\mathbf{n}) df, (i/c) u_\mu t_\mu(\mathbf{n}) df\} = \\ &= \{d\mathbf{t}(\mathbf{n}), (i/c) \mathbf{u} d\mathbf{t}(\mathbf{n})\}, \end{aligned} \quad (6.100)$$

где $d\mathbf{t}(\mathbf{n})$ — упругая сила, с которой материя вне $f(t)$ действует через поверхностный элемент на материю внутри f . Четыре уравнения (6.99) представляют собой законы сохранения для импульса \mathbf{G} и энергии $H = cG_4/i$.

Как мы уже отмечали, поверхностная сила $d\mathbf{t}(\mathbf{n})$ — истинная механическая сила. Наиболее ясно это можно показать следующим образом. Поскольку элемент df поверхности $f(t)$ движется со скоростью \mathbf{u} среды, величины

$$\begin{aligned} dF_i &= \{ \gamma df_\mu, i \gamma (u_\mu df_\mu) / c \}; \\ \gamma &= (1 - u^2/c^2)^{-1/2}, \end{aligned} \quad (6.101)$$

определяемые уравнением (3) (стр. 91), преобразуются как компоненты 4-вектора.

Следовательно, величина

$$dT_i \equiv S_{ih} dF_h \quad (6.102)$$

также 4-вектор, удовлетворяющий в соответствии с (6.76) соотношению

$$U_i dT_i = 0. \quad (6.103)$$

Компоненты dT_i этого 4-вектора с учетом (6.101) и (6.90) следующие:

$$\begin{aligned} dT_i &= S_{ih} dF_h = \gamma (S_{iv} + i S_{i4} u_v/c) df_v = \\ &= \gamma (S_{iv} - S_{i4} U_v/U_4) df_v = \gamma t_{iv} df_v. \end{aligned}$$

Используя (6.100), получаем, что

$$dT_i = \{ \gamma dt(\mathbf{n}), (i/c) \gamma (\mathbf{u} dt(\mathbf{n})) \}. \quad (6.104)$$

Таким образом, dT_i имеет форму 4-силы Минковского (4.54), удовлетворяющей соотношению (4.57), следовательно, поверхностная сила упругости $dt(\mathbf{n})$ — истинная механическая сила. Относительный тензор напряжений $t_{\mu\nu}$ связан с внутренней деформацией материи. В системе покоя S^0 эта связь определяется уравнениями обычной теории упругости, а для малых деформаций — законом Гука. С помощью трансформационных свойств тензора напряжений эту связь можно определить в любой инерциальной системе [112].

Упражнение

Показать с помощью уравнений (6.80), (6.82) и (4.208), записанных в системе покоя, что движение малой частицы среды с объемом покоя δV^0 описывается уравнением

$$d\delta P_i/d\tau = \delta F_i^*, \quad (a)$$

где

$$\delta F_i^* = f_i^* \delta V^0; \quad \delta P_i = (\mu^0 \delta V^0) U_i = \delta m_0 U_i. \quad (б)$$

В противоположность 4-импульсу δG_i в (6.69), величина δP_i , которая является 4-импульсом, если частица свободная, представляет собой 4-вектор. Поскольку $\delta F_i^* U_i = (f_i^* U_i) \delta V^0 \neq 0$, δF_i^* — обобщенная сила, вызывающая изменение собственной массы δm_0 частицы. Уравнение (a), таким образом, является уравнением вида (4.68).

§ 6.5. Тензор напряжений и тензор энергии. Трансформационные свойства

В системе покоя 3-тензор $S_{\mu\nu}^0 = t_{\mu\nu}^0 = T_{\mu\nu}^0$ определяется действительной симметричной матрицей. Она имеет три действительных собственных значения $p_{(\sigma)}^0$, которые мы помечаем индексом $\sigma = 1, 2, 3$. Соответствующие нормированные собственные векторы $h^{(\sigma)0}$ удовлетворяют соотношениям ортогональности и полноты:

$$\mathbf{h}^{(\sigma)0} \mathbf{h}^{(\rho)0} = \delta^{\sigma\rho}; \quad h_{\mu}^{(\sigma)0} h_{\nu}^{(\sigma)0} = \delta_{\mu\nu}. \quad (6.105)$$

(Как всегда, выполняется правило суммирования от 1 до 3 по двум повторяющимся в одном выражении греческим индексам.) Собственные значения $p_{(\sigma)}^0$ — главные напряжения — являются корнями алгебраического уравнения третьей степени относительно неизвестной λ :

$$|S_{\mu\nu}^0 - \lambda \delta_{\mu\nu}| \equiv |t_{\mu\nu}^0 - \lambda \delta_{\mu\nu}| = 0. \quad (6.106)$$

Матрица $S_{\mu\nu}^0$ выражается через собственные векторы и собственные значения

$$S_{\mu\nu}^0 = t_{\mu\nu}^0 = p_{(\sigma)}^0 h_{\mu}^{(\sigma)0} h_{\nu}^{(\sigma)0}. \quad (6.107)$$

Пусть теперь $h_i^{(\sigma)}$ три 4-вектора со следующими компонентами в системе S^0 :

$$h_i^{(\sigma)0} = (\mathbf{h}^{(\sigma)0}, 0). \quad (6.108)$$

Они образуют ортогональную *триаду* пространственноподобных единичных векторов. Из (6.107), (6.78) и (6.108) непосредственно следует, что 4-тензор напряжений в S^0 имеет форму

$$S_{ik}^0 = \rho_{(\sigma)}^0 h_i^{(\sigma)0} h_k^{(\sigma)0}. \quad (6.109)$$

Поэтому, определяя $\rho_{(\sigma)}^0$ в любой системе S как скалярные функции координат (x_i) , имеем

$$S_{ik} = \rho_{(\sigma)}^0 h_i^{(\sigma)} h_k^{(\sigma)}. \quad (6.110)$$

Кроме того, из (6.79), (6.80), (6.110) и (6.90) имеем

$$T_{ik} = \mu^0 U_i U_k + \rho_{(\sigma)}^0 h_i^{(\sigma)} h_k^{(\sigma)}; \quad (6.111)$$

$$t_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - S_{\mu 4} U_\nu / U_4 = \rho_{(\sigma)}^0 h_\mu^{(\sigma)} (h_\nu^{(\sigma)} + i h_4^{(\sigma)} u_\nu / c). \quad (6.112)$$

Полагая

$$h_i^{(\sigma)} = (\mathbf{h}^{(\sigma)}, h_4^{(\sigma)}) \quad (6.113)$$

и вводя обозначение $\mathbf{a} \odot \mathbf{b}$, для прямого произведения пространственных векторов \mathbf{a} и \mathbf{b} , являющегося 3-тензором с компонентами $a_\mu b_\nu$, уравнение (6.112) для относительного тензора напряжений \mathbf{t} можно записать в виде

$$\mathbf{t} = \rho_{(\sigma)}^0 \{ \mathbf{h}^{(\sigma)} \odot \mathbf{h}^{(\sigma)} + (i/c) h_4^{(\sigma)} (\mathbf{h}^{(\sigma)} \odot \mathbf{u}) \}. \quad (6.114)$$

Триада векторов $h_i^{(\sigma)}$ удовлетворяет, очевидно, тензорным соотношениям

$$h_i^{(\sigma)} h_i^{(\sigma)} = \delta^{\sigma\sigma}; \quad h_i^{(\sigma)} h_k^{(\sigma)} = \Delta_{ik}, \quad (6.115)$$

где Δ_{ik} определено в (6.73). В системе покоя эти уравнения совпадают с (6.105) и (6.108).

Если система покоя S^0 в каждой точке выбирается так, чтобы ее пространственные оси имели одинаковую ориентацию с осями системы S , формулы (4.29) и (6.108) при $\mathbf{v} = \mathbf{u}$ дают

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{h}^{(\sigma)} &= \mathbf{h}^{(\sigma)0} + \mathbf{u} (\mathbf{u} \mathbf{h}^{(\sigma)0}) (\gamma - 1) / u^2; \\ h_4^{(\sigma)} &= i \mathbf{u} \cdot \mathbf{h}^{(\sigma)0} \gamma / c. \end{aligned} \right\} \quad (6.116)$$

Подставляя (6.116) в уравнения (6.110)–(6.112), получаем формулы преобразования для требуемых величин. Например, полагая в (6.111) $i = k = 4$, получаем

$$h = -T_{44} = -\mu^0 U_4^2 - \rho_{(\sigma)}^0 (\mathbf{u} \cdot \mathbf{h}^{(\sigma)0})^2 \gamma^2 / c^2. \quad (6.117)$$

В системе покоя (6.114) сводится к выражению

$$\mathbf{t}^0 = \rho_{(\sigma)}^0 (\mathbf{h}^{(\sigma)0} \odot \mathbf{h}^{(\sigma)0}). \quad (6.118)$$

Поэтому (6.117) дает следующий закон преобразования для плотности энергии:

$$\left. \begin{aligned} h &= (h^0 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} / c^2) / (1 - u^2 / c^2); \\ \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} &= u_\mu t_{\mu\nu}^0 u_\nu \end{aligned} \right\} \quad (6.119)$$

и плотности массы:

$$\mu = (\mu^0 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} / c^4) / (1 - u^2 / c^2). \quad (6.120)$$

Последнее уравнение является обобщением уравнения (4.203), справедливого лишь для некогерентной материи.

Аналогично, полагая $i = \mu$, $k = 4$, из (6.116) и (6.111) для плотности импульса \mathbf{g} с компонентами $g_\mu = T_{\mu 4}/ic$ получаем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{g} &= \mathbf{u} \left\{ h^0 + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u} (1 - \gamma^{-1})/u^2 \right\} \gamma^2/c^2 + (\mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u}) \gamma/c^2; \\ (\mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u})_\mu &= t_{\mu\nu}^0 u_\nu. \end{aligned} \right\} \quad (6.121)$$

И, наконец, выражения (6.116) и (6.112) для относительного тензора напряжений дают

$$\begin{aligned} \mathbf{t} &= \mathbf{t}^0 + \mathbf{u} \odot (\mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u}) (\gamma - 1)/u^2 - (\mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u}) \odot \mathbf{u} (\gamma - 1)/\gamma u^2 - \\ &\quad - (\mathbf{u} \odot \mathbf{u}) (\mathbf{u} \cdot \mathbf{t}^0 \cdot \mathbf{u}) (\gamma - 1)^2/\gamma u^4. \end{aligned} \quad (6.122)$$

При малых скоростях u все эти выражения можно разложить в ряд по малому параметру u/c . Пренебрегая величинами второго и высшего порядка малости относительно u/c и замечая, что $|\mathbf{t}^0| \ll h^0 = \mu^0 c^2$, из (6.119) — (6.122) имеем $h = h^0$; $\mu = \mu^0$; $\mathbf{g} = \mu^0 \mathbf{u}$; $\mathbf{t} = \mathbf{t}^0$. Таким образом, в данном приближении мы получили уравнения нерелятивистской механики континуума в полном соответствии с общим требованием для релятивистского обобщения нерелятивистских теорий.

В частном случае, когда $\mathbf{u} = (u, 0, 0)$, т. е. когда в каждой рассматриваемой точке среда движется параллельно оси x , формулы преобразования (6.119), (6.122), (6.123) сводятся к

$$\left. \begin{aligned} h &= [h^0 + (u^2/c^2) t_{xx}^0] \gamma^2; \\ g_x &= \gamma^2 \left(\mu^0 + \frac{t_{xx}^0}{c^2} \right) u; \quad g_y = \frac{\gamma t_{yx}^0}{c^2} u; \quad g_z = \frac{\gamma t_{zx}^0}{c^2} u; \\ t_{xx} &= t_{xx}^0; \quad t_{xy} = \gamma t_{xy}^0; \quad t_{xz} = \gamma t_{xz}^0; \\ t_{yx} &= (1/\gamma) t_{yx}^0; \quad t_{yy} = t_{yy}^0; \quad t_{yz} = t_{yz}^0; \\ t_{zx} &= (1/\gamma) t_{zx}^0; \quad t_{zy} = t_{zy}^0; \quad t_{zz} = t_{zz}^0. \end{aligned} \right\} \quad (6.123)$$

Из определения (6.108) триады пространственноподобных векторов $h_i^{(\sigma)}$ немедленно следует, что они ортогональны времениподобному единичному вектору U_i/c . Поэтому, полагая

$$h_i^{(4)} = U_i/c; \quad h_i^{(4)} h_i^{(4)} = -1, \quad (a)$$

получаем условия ортогональности:

$$h_i^{(s)} h_i^{(r)} = \varepsilon_s \delta_{srr} \quad (r, s = 1, 2, 3, 4), \quad (b)$$

где ε_s — индикатор:

$$\varepsilon_s = \begin{cases} +1 & \text{при } s = \sigma = 1, 2, 3 \\ -1 & \text{при } s = 4 \end{cases} \quad (v)$$

[круглая скобка после индекса, как, например, в уравнении (б), указывает на отсутствие суммирования по этому индексу, хотя он и появляется дважды]. Учитывая (6.73) и уравнения (а), (в), вторую группу уравнений (6.115) можно теперь записать в виде

$$\varepsilon_s h_i^{(s)} h_k^{(s)} = \delta_{ik}. \quad (г)$$

Четыре вектора $h_i^{(s)}$ называются (ортогональной) *тетрадой*, и, поскольку тетраду можно построить в каждой точке 4-пространства, $h_i^{(s)}(x)$ образуют (специальное) *тетрадное поле*.

Теперь, полагая

$$p_{(4)}^0 = -h^0, \quad (д)$$

получаем следующую компактную форму для механического тензора энергии (6.111):

$$T_{ik} = \varepsilon_s p_{(s)}^0 h_i^{(s)} h_k^{(s)}. \quad (e)$$

Из (б) и (е) далее следует, что

$$T_{ik} h_k^{(r)} = \varepsilon_s p_{(s)}^0 h_i^{(s)} h_k^{(s)} h_k^{(r)} = p_{(s)}^0 h_i^{(s)} \delta^{rs}$$

$$T_{ik} h_k^{(r)} = p_{(r)}^0 h_i^{(r)}. \quad (\text{ж})$$

Таким образом, $h_i^{(r)}$ является собственным вектором T_{ik} , соответствующим собственному значению $p_{(r)}^0$. При $r = 4$, уравнение (ж) совпадает с (6.68).

§ 6.6. Идеальная жидкость

В случае общей механической системы все три корня $\lambda = p_{(\sigma)}^0$ алгебраического уравнения (6.106) различны. Если же они при любой деформации равны в каждой точке среды, т. е. если

$$p_{(\sigma)}^0 = p^0(x) \quad \text{при } \sigma = 1, 2, 3, \quad (6.124)$$

то система называется идеальной жидкостью. В этом случае из (6.110), (6.115) и (6.73) получаем

$$S_{ik} = p^0 \Delta_{ik} = p^0 (\delta_{ik} + U_i U_k / c^2), \quad (6.125)$$

а из (6.90)

$$t_{\mu\nu} = S_{\mu\nu} - S_{\mu 4} U_\nu / U_4 = p^0 \delta_{\mu\nu}. \quad (6.126)$$

Следовательно, относительный тензор напряжений во всех инерциальных системах изображается диагональной матрицей, а упругая сила (6.52), действующая на единицу поверхности, представляет собой нормальное давление, т. е.

$$\mathbf{t}(\mathbf{n}) = p\mathbf{n}, \quad (6.127)$$

где

$$p = p^0(x). \quad (6.128)$$

Последняя формула показывает, что нормальное давление — инвариантный скаляр [195, 196]. Из (6.125), (6.126) следует, что

$$\dagger p = S_{ii}/3 = t_{\mu\mu}/3. \quad (6.129)$$

Тензор энергии идеальной жидкости в соответствии с (6.79), (6.80) и (6.120) имеет вид

$$T_{ik} = (\mu^0 + p^0/c^2) U_i U_k + p^0 \delta_{ik} = (h^0 + p^0) U_i U_k / c^2 + p^0 \delta_{ik}, \quad (6.130)$$

где в силу (6.128) вместо p^0 можно писать p . С учетом (6.3) и (4.39) получаем следующие выражения для плотности энергии и импульса в соответствии с (6.66), (6.126) и (6.127):

$$\left. \begin{aligned} h &= (h^0 + p^0 u^2/c^2)/(1 - u^2/c^2); \\ \mathbf{g} &= ((h^0 + p^0)/(c^2 - u^2)) \mathbf{u} = \mathbf{u} (h + p)/c^2. \end{aligned} \right\} \quad (6.131)$$

Использование S_{ik} из (6.125) в формулах (6.83), (6.84), (6.88) и (6.89) дает

$$\begin{aligned} f_i^* &= -S_{ih,h} = -p_{,i} - (p_{,h} U_i U_h + p U_{i,h} U_h + p U_i U_{h,h})/c^2 = \\ &= -p_{,i} - (U_i/c^2) dp/d\tau - (p/c^2) dU_i/d\tau - U_i p U_{h,h}/c^2; \end{aligned} \quad (6.132)$$

$$\varphi^0 = -f_i^* U_i = -S_{ih} U_{i,h} = -p U_{h,h} = -p^0 \operatorname{div} \mathbf{u}^0; \quad (6.133)$$

$$d_i = (f_i^*)_{\perp} = f_i^* + (f_i^* U_h) U_i / c^2 = (-p/c^2) dU_i/d\tau - p_{,i} - (U_i/c^2) dp/d\tau. \quad (6.134)$$

Следовательно, фундаментальные уравнения (6.86), (6.87) для идеальной жидкости принимают вид

$$(\mu^0 U_h)_{,h} = (-p/c^2) U_{h,h} = -(p^0/c^2) \operatorname{div}^0 \mathbf{u}^0; \quad (6.135)$$

$$-(\mu^0 + p^0/c^2) dU_i/d\tau = +p_{,i} + (U_i/c^2) dp/d\tau. \quad (6.136)$$

В системе покоя S^0 величина $\operatorname{div}^0 \mathbf{u}^0$ есть объемное расширение. Поэтому $-p^0 \operatorname{div}^0 \mathbf{u}^0$ представляет собой увеличение плотности у пружой энергии в единицу

времени. Поскольку μ^0 включает и массу упругой энергии, то $-(p^0/c^2) \times \operatorname{div}^0 \mathbf{u}^0 = -(p/c^2) U_{k, k}$ есть скорость образования в системе S^0 плотности массы, в соответствии с (6.135). Она равна нулю только для несжимаемой жидкости, где $\operatorname{div}^0 \mathbf{u}^0 = 0$. Уравнение (6.135) можно записать также в виде

$$dh^0/d\tau + (h^0 + p^0) \operatorname{div}^0 \mathbf{u}^0 = 0. \quad (6.137)$$

Рассмотрим теперь малую часть жидкости с собственным объемом δV^0 . Умножая (6.137) на δV^0 и учитывая (4.225), получаем

$$d\delta H^0/d\tau + p^0 d\delta V^0/d\tau = 0, \quad (6.138)$$

где $\delta H^0 = h^0 \delta V^0$ — энергия покоя частицы.

До сих пор мы считали нашу систему, упругую среду, чисто механической системой. Однако в действительности все макроскопические системы являются термодинамическими системами, свойства которых зависят от немеханических параметров, например от температуры T^0 . Поэтому возникает вопрос, какие термодинамические процессы можно описывать тензором энергии со свойствами (6.67), (6.68). Во-первых, ясно, что из рассмотрения следует исключить все процессы, в которых тепловая энергия переходит из одной части системы в другую, так как в противоположность уравнениям (6.67), поток тепла в среде приводит к возникновению в системе покоя ненулевого потока энергии. Кроме того, из первого закона термодинамики, выполняющегося в системе покоя, для изменения энергии δH^0 малой частицы среды при любом термодинамическом процессе имеем

$$d(\delta H^0) = dA^0 + dQ^0, \quad (6.139)$$

где dA^0 — выполненная механическая работа, а dQ^0 — подведенная в течение процесса тепловая энергия. Поскольку в нашем случае тепловой поток отсутствует, $dQ^0 = 0$ и сравнение (6.139) с (6.138) показывает, что для жидкости с нормальным давлением

$$dA^0 = -p^0 d(\delta V^0). \quad (6.140)$$

Однако это выражение справедливо только для обратимых процессов. Таким образом, тензор энергии вида (6.67) и (6.68) применим только в случае обратимых процессов без подвода тепла, т. е. для адиабатических процессов. В § 7.9 мы рассмотрим общий случай наличия теплопроводности в среде.

В соответствии со вторым законом термодинамики, применительно к малой частице материи с объемом δV^0 имеем

$$d(\delta H^0) + p^0 d(\delta V^0) = T^0 d(\delta S^0), \quad (6.141)$$

где T^0 — собственная абсолютная температура, а δS^0 — энтропия покоя частицы. Тогда (6.138) можно представить в форме

$$d(\delta S^0)/d\tau = 0, \quad (6.142)$$

откуда следует, что собственная энтропия частицы не меняется во время движения, как и ожидалось для адиабатических процессов.

Ранее мы заметили, что (6.135), (6.136) эквивалентны лишь четырем независимым уравнениям. Однако они содержат пять неизвестных функций: p^0 , μ^0 и три компоненты вектора скорости \mathbf{u} . Поэтому для определения неизвестных требуется еще одно уравнение. Ясно и физически, что движение жидкости не определено, пока не заданы термодинамические свойства системы. Для жидкости термодинамическое состояние в общем случае определяется двумя независимыми параметрами, например p^0 , T^0 . Однако для адиабатических процессов, когда энтропия постоянна, T^0 и, следовательно, все функции термодинамического состояния могут быть выражены через один параметр — давление. Таким образом, для данной жидкости μ^0 можно считать известной функцией от p^0 , так что в четырех уравнениях (6.135), (6.136) остаются лишь четыре неизвестные функции.

Для того чтобы разъяснить это важное положение, введем плотность чистой (голой) массы ρ^0 , которая в случае некогерентной материи совпадает с плотностью собственной массы. Для жидкости с заданным химическим составом ρ^0 равна просто сумме масс покоя всех молекул, содержащихся в единице объема в системе покоя S^0 жидкости. В отличие от полной собственной массы чистая масса сохраняется. Считая ρ^0 скаляром, его сохранение можно выразить в форме уравнения неразрывности

$$(\rho^0 U_i)_{,i} = 0. \quad (6.143)$$

Теперь плотность энергии h^0 равна

$$h^0 = \rho^0 c^2 + \rho^0 \varepsilon^0 = \rho^0 (c^2 + \varepsilon^0), \quad (6.144)$$

где ε^0 — удельная внутренняя энергия, т. е. сумма тепловой и упругой энергий приходящихся на единицу чистой массы в системе S^0 . Пусть v^0 — удельный объем, т. е. объем одного грамма чистой массы в S^0 , тогда

$$\rho^0 v^0 = 1. \quad (6.145)$$

С помощью обыкновенных термодинамических экспериментов с одним граммом покоящейся жидкости можно определить обычное уравнение состояния

$$v^0 = 1/\rho^0 = v^0(p^0, T^0), \quad (6.146)$$

калорическое уравнение состояния

$$\varepsilon^0 = \varepsilon^0(p^0, T^0) \quad (6.147)$$

и удельную энтропию

$$S^0 = S^0(p^0, T^0) \quad (6.148)$$

как функции от p^0 и T^0 . Для адиабатического процесса (6.142) $S^0(p^0, T^0)$ во время движения — постоянная величина, и при заданном значении этой постоянной величины температура может быть выражена как функция давления, т. е. $T^0 = T^0(p^0)$. В соответствии с (6.144)—(6.147) p^0 , ε^0 можно выразить как известные функции одной переменной p^0 . Теперь при заданных начальных условиях четыре независимых уравнения (6.135), (6.136) дают возможность определить движение и давление во всех точках и в любой момент времени; все другие функции состояния также полностью определяются.

Если жидкость находится в термодинамическом равновесии, то μ^0 , p^0 и \mathbf{u} одинаковы во всех точках среды. Тогда, интегрируя (6.131) по всему объему $V = V^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2}$ жидкости, для полного импульса и энергии получаем выражения

$$\begin{aligned} H &= hV = (H^0 + p^0 V^0 u^2/c^2)/(1 - u^2/c^2)^{1/2}; \\ \mathbf{G} &= gV = \frac{(h^0 + p^0) V^0/c^2}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \mathbf{u} = \frac{(H^0 + p^0 V^0)/c^2}{(1 - u^2/c^2)^{1/2}} \mathbf{u} \\ G_i &= (H^0 + p^0 V^0) U_i/c^2 - i p^0 V^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2} \delta_{i4}/c. \end{aligned} \quad (6.149)$$

Из (6.149) видно, что в данном случае полный импульс и энергия, т. е. величины $G_i = \{\mathbf{G}, (i/c)H\}$ не образуют 4-вектор. Это не противоречит нашему общему результату (см. § 6.2), так как данная система не замкнута. Чтобы величины μ^0 , p^0 и \mathbf{u} были везде постоянными в среде, жидкость нужно поместить в сосуд, стенки которого будут воздействовать на систему с силами, не включенными в тензор энергии (6.130) (см. гл. 7). Однако из (6.149) находим, что

$$\mathbf{G} = \mathbf{u} (H + pV)/c^2; \quad H + pV = (H^0 + p^0 V^0)/\sqrt{1 - u^2/c^2}, \quad (6.150)$$

откуда следует, что система имеет тот же самый импульс, что и частица с энергией $E = H + pV$ и энергией покоя $E^0 = H^0 + p^0 V^0$. Величины E и E^0 представляют собой так называемую энтальпию в системах S и S^0 соответственно.

4-Вектор

$$E_i = (\mathbf{G}, iE/c) = (E^0/c^2) U_i \quad (6.151)$$

называется *4-вектором энтальпии*. Его пространственная часть равна импульсу, а $-icE_4 = E$ — энтальпия. Аналогично величина

$$P_i = U_i H^0/c^2 \quad (6.147')$$

является 4-вектором, который называется инклюзивным 4-импульсом системы [131].

Упражнение

Плотность энтальпии покоя жидкости дается формулой

$$\sigma^0 = h^0 + p^0. \quad (a)$$

Показать, что фундаментальные уравнения идеальной жидкости можно записать в виде

$$(\sigma^0 U_i U_k/c^2)_{,k} = -p_{,i} \quad (b)$$

и что они эквивалентны четырем независимым уравнениям

$$(\sigma^0 U_k)_{,k} = dp/d\tau; \quad (b)$$

$$(\sigma^0/c^2) dU_i/d\tau = -p_{,i} - (1/c^2) (dp/d\tau) U_i. \quad (r)$$

Формально они совпадают с уравнениями для системы с плотностью собственной массы σ^0/c^2 и с плотностью обобщенной 4-силы $-p_{,i}$. Поэтому тензор

$$\tilde{\theta}_{ik} = \sigma^0 U_i U_k/c^2 \quad (d)$$

играет роль кинетического тензора (6.80).

Показать, что 4-энтальпия

$$\delta E_i = U_i \sigma^0 \delta V^0/c^2 \quad (e)$$

малой частицы среды с собственным объемом δV^0 удовлетворяет уравнению вида

$$d(\delta E_i)/d\tau = \delta \tilde{F}_i^*, \quad (ж)$$

где

$$\delta \tilde{F}_i^* = -p_i \delta V^0 \quad (з)$$

имеет характер обобщенной силы.

§ 6.7. Скалярные мезонные поля. Общая теория поля

Если силы взаимодействия между атомными ядрами и электронами в атоме целиком описываются электромагнитными полями, характерные короткодействующие силы взаимодействия между составляющими частицами ядра — ядерные силы — имеют неэлектромагнитную природу. Для описания ядерных сил Юкава [283] ввел так называемые мезонные поля. Простейший тип мезонного поля — скалярное поле, описываемое инвариантной скалярной полевой функцией $\Psi(x_i)$, удовлетворяющей уравнению

$$\partial^2 \Psi / \partial x_i \partial x_i - k^2 \Psi = 0, \text{ или } \square \Psi - k^2 \Psi = 0. \quad (6.152)$$

Здесь k — постоянная, связанная с радиусом действия ядерных сил. В случае «нейтрального» мезонного поля Ψ — действительная функция пространственно-временных координат (x_i) . Вводя обозначение $\Psi_i = \partial \Psi / \partial x_i$, уравнения поля представим в виде

$$\partial \Psi_i / \partial x_i - k^2 \Psi = 0. \quad (6.153)$$

Эти уравнения можно вывести из вариационного принципа

$$\delta \int \mathfrak{L}(\Psi, \Psi_i) d\Omega = 0, \quad (6.154)$$

где

$$\mathfrak{L} = -(\Psi_i \Psi_i + k^2 \Psi^2)/2. \quad (6.155)$$

Если предположить, что вариация $\delta\Psi = \delta\Psi(x_i)$ равна нулю на границе произвольной 4-мерной области интегрирования, то, поскольку $\delta\Psi_i = \frac{\partial}{\partial x_i}(\delta\Psi)$, имеем

$$\begin{aligned} \delta \int \mathfrak{L} d\Omega &= \int \delta \mathfrak{L} d\Omega = \int \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi} \delta\Psi + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_i} \delta\Psi_i \right) d\Omega = \\ &= \int \left\{ \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_i} \right) \right\} \delta\Psi d\Omega. \end{aligned} \quad (6.156)$$

Так как это выражение должно равняться нулю при любой вариации Ψ рассматриваемого вида, то уравнение

$$\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi} - \frac{\partial}{\partial x_i} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial \Psi_i} \right) = 0 \quad (6.157)$$

представляет собой уравнение Эйлера соответствующего вариационного принципа (6.154). Уравнение (6.157) совпадает с уравнениями поля (6.163), если \mathfrak{L} определяется формулой (6.155).

Тензор энергии скалярного мезонного поля дается формулой

$$T_{ik} = \Psi_i \Psi_k + \mathfrak{L} \delta_{ik} = \Psi_i \Psi_k - (\Psi_l \Psi_l + k^2 \Psi^2) \delta_{ik}/2. \quad (6.158)$$

В соответствии с уравнениями поля (6.153) этот тензор удовлетворяет уравнению

$$\partial T_{ik} / \partial x_k = 0, \quad (6.159)$$

справедливому для замкнутых систем. Скалярное поле является частным случаем поля общего вида, описываемого совокупностью полевых переменных:

$$Q^\xi = Q^\xi(x_i) = \{Q^1(x_i), Q^2(x_i), \dots\}. \quad (6.160)$$

Предположим, что уравнения поля можно вывести из вариационного принципа

$$\delta \int \mathfrak{L} d\Omega = 0, \quad (6.161)$$

где

$$\mathfrak{L} = \mathfrak{L}(Q^\xi, Q^\xi_i) \quad (6.162)$$

— некоторая алгебраическая инвариантная функция от полевых переменных и их первых производных;

$$Q^\xi_i \equiv \partial Q^\xi / \partial x_i. \quad (6.163)$$

Это значит, что уравнения поля являются уравнениями Эйлера

$$\partial \mathfrak{L} / \partial Q^\xi - \partial (\partial \mathfrak{L} / \partial Q^\xi_i) / \partial x_i = 0, \quad (6.164)$$

вытекающими из вариационного принципа (6.161). Поскольку предполагается, что \mathfrak{L} — инвариант, уравнения (6.164) имеют одинаковую форму в любой инерциальной системе.

В силу уравнений поля (6.164) величина

$$\theta_{ik} = - \sum_{\xi} (\partial Q / \partial Q^\xi_k) Q^\xi_i + \mathfrak{L} \delta_{ik} \quad (6.165)$$

удовлетворяет дивергентному соотношению

$$\partial \theta_{ik} / \partial x_k = 0. \quad (6.166)$$

В самом деле,

$$\frac{\partial \theta_{ik}}{\partial x_k} = - \sum_{\xi} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^\xi_k} \frac{\partial Q^\xi_i}{\partial x_k} - \sum_{\xi} \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^\xi} Q^\xi_i + \sum_{\xi} \left(\frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^\xi} \frac{\partial Q^\xi}{\partial x_i} + \frac{\partial \mathfrak{L}}{\partial Q^\xi_k} \frac{\partial Q^\xi_k}{\partial x_i} \right) = 0.$$

Здесь использовано соотношение $\partial Q_i^{\xi}/\partial x_k = \partial Q_k^{\xi}/\partial x_i$, следующее из (6.163). Поэтому величину (6.165) можно считать тензором энергии поля.

Если ϱ — инвариант, то θ_{ik} — тензор. Он называется *каноническим тензором энергии*; его временная компонента T_{44} равна $-\mathfrak{S}$, где

$$\mathfrak{S} = \sum_{\xi} \frac{\partial \varrho}{\partial Q_4^{\xi}} Q_4^{\xi} - \mathfrak{L} = \sum \frac{\partial \varrho}{\partial Q^{\xi}} - \mathfrak{L} \quad (6.167)$$

есть плотность гамильтониана.

В случае скалярного поля выражение (6.165) для θ_{ik} сводится к (6.158) для T_{ik} . Однако в общем случае тензор θ_{ik} несимметричен и отличается от действительного тензора энергии произвольным тензором t_{ik} , дивергенция которого равна нулю, так что

$$T_{ik} = \theta_{ik} + t_{ik} = T_{ki}, \quad (6.168)$$

где

$$t_{ik} - t_{ki} = -(\theta_{ik} - \theta_{ki}); \quad \partial t_{ik}/\partial x_k = 0. \quad (6.169)$$

Белинфанте [19, 20] и Розенфельд [210] вывели общую формулу для вычисления t_{ik} .

В качестве другого примера рассмотрим электромагнитное поле в вакууме (см. гл. 5). В этом случае полевые переменные Q^{ξ} совпадают с компонентами 4-потенциала A_k , а функция ϱ имеет вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{L} &= -F_{lm} F_{lm}/4 = -(A_{lm} - A_{ml})(A_{lm} - A_{ml})/4 = \\ &= -(A_{lm} A_{lm} - A_{lm} A_{ml})/2, \end{aligned} \quad (6.170)$$

где

$$A_{lm} = \partial A_l/\partial x_m. \quad (6.171)$$

Тогда уравнения Эйлера (6.164) принимают форму максвелловских уравнений (5.16) в вакууме $\partial(A_{ki} - A_{ik})/\partial x_k = \partial F_{ik}/\partial x_k = 0$, или $\partial(\partial A_k/\partial x_k)/\partial x_i - \partial^2 A_i/\partial x_k \partial x_k = 0$. Вместе с условием Лоренца (5.22), которое следует рассматривать как дополнительное условие, эти уравнения приводят к волновому уравнению $\square A_i = 0$. Теперь канонический тензор энергии (6.165) имеет вид

$$\theta_{ik} = \sum_l F_{kl} A_{li} - (F_{lm} F_{lm}) \delta_{ik}/4. \quad (6.172)$$

Этот тензор несимметричен и отличается от симметричного электромагнитного тензора энергии (5.106) величиной

$$t_{ik} = -A_{il} F_{kl}, \quad (6.173)$$

удовлетворяющей с учетом (6.171) и антисимметричности тензора F_{kl} уравнению

$$\partial t_{ik}/\partial x_k = 0.$$

НЕЗАМКНУТЫЕ СИСТЕМЫ. ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ДИЭЛЕКТРИКОВ И ПАРАМАГНЕТИКОВ. ТЕРМОДИНАМИКА

§ 7.1. Общие свойства незамкнутых систем

Замкнутую систему Σ можно многими способами разделить на две незамкнутые системы $\Sigma^{(1)}$ и $\Sigma^{(2)}$ с соответствующим разбиением полного тензора энергии на две части:

$$T_{ik} = T_{ik}^{(1)} + T_{ik}^{(2)}. \quad (7.1)$$

Например, в случае заряженной материи $T_{ik}^{(1)}$ может быть механическим тензором энергии, а $T_{ik}^{(2)}$ — электромагнитным тензором. Определяя 4-вектор f_i^* как

$$f_i^* = -\partial T_{ik}^{(2)} / \partial x_k,$$

из (7.1) и (6.1) получаем

$$\partial T_{ik}^{(1)} / \partial x_k = -\partial T_{ik}^{(2)} / \partial x_k = f_i^*, \quad (7.2)$$

где f_i^* — плотность обобщенной 4-силы, обусловленной системой $\Sigma^{(2)}$ и действующей на систему $\Sigma^{(1)}$. Таким образом, фундаментальные уравнения для незамкнутой системы имеют форму

$$\partial T_{ik} / \partial x_k = f_i^* = -\partial S_{ik} / \partial x_k, \quad (7.2')$$

где f_i^* — сила, действующая на систему с тензором T_{ik} . Сила, действующая на систему с тензором S_{ik} , равна $-f_i^*$. Она имеет характер истинной механической силы только в частном случае. Физический смысл пространственно-временных компонент T_{i4} и T_{4i} тензора энергии незамкнутой системы такой же, как и в случае замкнутой системы [см (6.2), (6.3)], т. е.

$$\left. \begin{aligned} T_{4\mu} &= (i/c) S_{\mu}; & T_{\mu 4} &= icg_{\mu}; & T_{44} &= -h; \\ g_i &= (1/ic) T_{i4} = [g, (i/c) h], \end{aligned} \right\} \quad (7.3)$$

где h , \mathbf{S} и \mathbf{g} — плотность энергии, поток энергии и плотность импульса соответственно, характеризующие незамкнутую систему.

Вместо (6.4) и (6.5) имеем теперь уравнения

$$\left. \begin{aligned} \partial g_{\mu} / \partial t + \partial T_{\mu\nu} / \partial x_{\nu} &= f_{\mu}^*; \\ \partial h / \partial t + \operatorname{div} \mathbf{S} &= (c/i) f_4^*, \end{aligned} \right\} \quad (7.4)$$

которые аналогично (4.244) и (4.242) являются теоремами об изменении энергии и импульса незамкнутой системы. Ввиду неоднозначности разбиения (7.1) тензор энергии незамкнутой системы не обязательно симметрический, но в любом случае должно соблюдаться равенство

$$T_{ik} - T_{ki} = -(S_{ik} - S_{ki}). \quad (7.5)$$

Полные импульс и энергия конечной незамкнутой системы

$$G_i = \int g_i dV = \int (T_{i4}/ic) dV = [G, (i/c) H]$$

в общем случае не постоянны во времени. Интегрируя (7.2') по всему физическому пространству в произвольно инерциальной системе S , получаем

$$d \int (T_{i4}/ic) dV/dt = dG_i/dt = \int f_i^* dV. \quad (7.6)$$

Если $G_i(t)$ и $G_i'(t')$ — импульс и энергия незамкнутой системы в двух различных инерциальных системах, то соотношение между ними уже не будет определяться формулой (6.31'). Это следует из того, что не существует однозначного соответствия между переменными t и t' , являющимися аргументами функций G_i и G_i' . Но даже для стационарной системы, когда G_i и G_i' не зависят от времени, они не будут преобразовываться как компоненты 4-вектора (см. § 7.2). Это непосредственно вытекает из доказательства векторного характера G_i в случае замкнутой системы, приведенного в § 6.2. Для незамкнутой системы вместо (6.28) имеем

$$\int_{\Sigma_1} \epsilon b_h d\Sigma_h + \int_{\Sigma_2} \epsilon b_h d\Sigma_h = \int_{\Omega} a_i f_i^* d\Omega. \quad (7.7)$$

Здесь при произвольной Ω правая часть не равна нулю. Угловой момент, определяемый уравнением

$$M_{ik} = \int (x_i g_k - x_k g_i) dV, \quad (7.8)$$

будет теперь зависеть от времени. Из (7.2') вместо (6.33) получаем уравнение

$$\partial (x_i T_{kl} - x_k T_{il}) / \partial x_l = x_i f_k^* - x_k f_i^* + T_{ki} - T_{ik}.$$

Интегрируя по всему физическому пространству, находим, что

$$\frac{d}{dt} M_{ik} = \int (x_i f_k^* - x_k f_i^* + T_{ki} - T_{ik}) dV. \quad (7.9)$$

Следовательно, в этом случае плотность момента сил должна быть определена как

$$d_{ik} = x_i f_k^* - x_k f_i^* + T_{ki} - T_{ik}. \quad (7.10)$$

Для незамкнутой системы центр масс уже не играет такой большой роли. Определяя радиус-вектор центра масс в инерциальной системе S уравнением (6.39)

$$\mathbf{X}(S) = (1/H) \int h(x, t) x dV = (1/G_4) \int x g_4 dV, \quad (7.11)$$

после простых вычислений, используя (7.9) при $i = \mu$, $k = 4$ и (7.6), получаем

$$\frac{d\mathbf{X}(S)}{dt} = \frac{c^2 \mathbf{G}}{H} - \frac{\mathbf{X}(S)}{G_4} \int f_4^* dV + \frac{1}{G_4} \int x f_4^* dV + \frac{1}{G_4} \int \left(\frac{i}{c} \mathbf{S} - icg \right) dV. \quad (7.12)$$

Следовательно, скорость центра масс уже не равна $c^2 \mathbf{G}/H$, как это было в случае замкнутой системы, даже если тензор энергии и симметричен. Это сильно ограничивает значение центра масс как характерной точки физической системы.

Для замкнутой системы собственный центр масс является центром масс в ее собственной системе покоя. Теперь попытаемся для незамкнутой системы определить внутри нее такую характерную точку, которая в любой момент времени является центром масс в своей мгновенной системе покоя. Конечно, все системы покоя различны в различные моменты времени. Детальное исследование показывает, что этим условием характерная точка определяется неоднозначно [167]. Фактически даже в замкнутой системе существует бесконечное количество точек, являющихся в любой момент времени центрами масс в своих

системах покоя. Например, если представить, что диск, описанный в § 6.3, вращается с постоянной угловой скоростью

$$\omega^0 = -M_0 c^2 \mathbf{m}^0 / |\mathbf{m}^0|^2 \quad (7.13)$$

в системе покоя S^0 собственного центра масс, то любая точка диска будет центром масс в своей мгновенной системе покоя. Рассмотрим, например, точку p , которая в данный момент времени имеет радиус-вектор \mathbf{a} , отсчитываемый от центра диска. Тогда скорость точки

$$\mathbf{v} = (\omega^0 \times \mathbf{a}) = (-M_0 c^2 / |\mathbf{m}^0|^2) (\mathbf{m}^0 \times \mathbf{a}), \quad (7.14)$$

откуда следует, что

$$\mathbf{m}^0 \times \mathbf{v} / M_0 c^2 = (-1 / |\mathbf{m}^0|^2) \{ \mathbf{m}^0 \times (\mathbf{m}^0 \times \mathbf{a}) \} = \mathbf{a}. \quad (7.15)$$

Из сравнения (7.15) и (6.48) видно, что p является центром масс в системе S , движущейся относительно S^0 с той же скоростью \mathbf{v} , что и сама точка p , т. е. любая точка вращающегося диска является центром масс в своей собственной системе покоя.

Для замкнутой системы с помощью условия (6.40) можно было выделить одну точку (собственный центр масс), такую, чтобы полный линейный импульс физической системы равнялся нулю в системе покоя этой точки. В случае незамкнутой системы это невозможно, так как если записать уравнение (7.12) в мгновенной системе покоя определенной выше характерной точки, то левая часть этого уравнения станет равной нулю, а импульс, как это показывает уравнение (7.12), не будет в общем случае равняться нулю в данной инерциальной системе. Если даже он равен нулю в рассматриваемый момент времени, то в последующий момент времени он будет отличен от нуля. Таким образом, однозначное обобщение ньютоновского центра тяжести для незамкнутых систем возможно только в случае внешних сил самого частного вида (см. § 7.2). Однако как мы увидим в § 10.8, существует одно важное исключение. Если внешние силы — гравитационные и если система достаточно мала, то всегда можно однозначно определить собственный центр масс со всеми свойствами ньютоновского центра масс.

§ 7.2. Статические незамкнутые системы

Пусть снова T_{ik} — тензор энергии рассматриваемой системы, но f_i теперь — плотность 4-силы, обусловленной самой системой; тогда в соответствии с (7.2') в каждой инерциальной системе имеем

$$f_i = -\partial T_{ik} / \partial x_k. \quad (7.16)$$

Физическая система называется статической, если существует система координат S^0 , в которой все физические переменные не зависят от времени, и если

$$\mathbf{G}^0 = \int \mathbf{g}^0 dV^0 = \int S^0 dV^0 = 0. \quad (7.17)$$

Статическая система как целое покоится в S^0 , и поскольку все физические переменные не зависят от времени в S^0 , то центр масс в этой инерциальной системе, определенный формулой (7.11), также покоится в S^0 . Следовательно, в этом случае для незамкнутой системы возможно однозначное обобщение ньютоновского центра тяжести.

В качестве примера можно рассмотреть электромагнитное поле заряженной материи, покоящейся в некоторой системе S^0 . Тогда тензором T_{ik} является тензор электромагнитного поля S_{ik} , который при $\epsilon = \mu = 1$ определяется формулой (5.106), а f_i — плотность электромагнитной 4-силы, действующей на заряженную материю.

Другим простым примером статической незамкнутой системы является жидкость, находящаяся в термодинамическом равновесии и помещенная в со-

суд, на которую действует внешнее давление со стороны стенок сосуда. Чтобы найти полную энергию и импульс статической системы в инерциальной системе S , относительно которой S^0 движется с постоянной скоростью \mathbf{u} , нужно использовать формулу преобразования для тензора и выражение (4.128) для коэффициентов преобразования α_{ih} . Интегрируя формулу

$$T_{ih} = T_{im}^0 \alpha_{li} \alpha_{mh} \quad (7.18)$$

по всему пространству и используя формулу Лоренца

$$dV = dV^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$$

и (7.17), получаем

$$\mathbf{G} = \int \mathbf{g} dV = \frac{\mathbf{u} [H^0 + (1/u^2) (\mathbf{u} \int \mathbf{T}^0 dV^0 \mathbf{u}) \{1 - \sqrt{1 - u^2/c^2}\}]}{c^2 \sqrt{1 - u^2/c^2}} + \frac{1}{c^2} (\int \mathbf{T}^0 dV^0 \mathbf{u}); \quad (7.19)$$

$$H = \int h dV = \frac{H^0 + (1/c^2) (\mathbf{u} \int \mathbf{T}^0 dV^0 \mathbf{u})}{\sqrt{1 - u^2/c^2}},$$

где \mathbf{T}^0 — пространственный тензор с компонентами $T_{\mu\nu}^0$. Хотя \mathbf{G} и H не зависят от времени, они не преобразуются как компоненты 4-вектора. Это может служить доказательством незамкнутости рассматриваемой системы. Для упругой среды, предполагая, что ее скорость везде постоянна и равна \mathbf{u} , формулы (7.19) получаем при интегрировании (6.119) и (6.121). Очевидно, что такая система не замкнута, пока во всех точках среды не выполняется условие $\mathbf{t}^0 = \mathbf{T}^0 = 0$.

Если \mathbf{T}^0 имеет вид

$$T_{\mu\nu}^0 = \rho \delta_{\mu\nu}, \quad (7.20)$$

(7.19) совпадает с соответствующим выражением для идеальной жидкости, т. е. с (6.149).

§ 7.3. Электростатические системы. Классические модели электрона

Рассмотрим более подробно случай заряженной материи, покоящейся в системе координат S^0 . При $\varepsilon = \mu = 1$ тензор S_{ih} определяется из (5.106) — (5.114). Поскольку поле в S^0 электростатическое, $\mathbf{H}^0 = 0$, а \mathbf{E}^0 не зависит от времени, т. е.

$$h^0 = |\mathbf{E}^0|^2/2; \quad S^0 = \mathbf{g}^0 = 0; \quad S_{\mu\nu}^0 = -E_\mu^0 E_\nu^0 + |\mathbf{E}^0|^2 \delta_{\mu\nu}/2. \quad (7.21)$$

Предположим, что распределение заряда сферически симметричное. В этом случае поле также является сферически симметричным, а \mathbf{E}^0 направлен вдоль радиуса-вектора, соединяющего центр физической системы с точкой наблюдения. Тогда

$$\left. \begin{aligned} \int E_\mu^0 E_\nu^0 dV^0 &= \int |\mathbf{E}^0|^2 dV^0 \delta_{\mu\nu}/3; \\ \int S_{\mu\nu}^0 dV^0 &= \int |\mathbf{E}^0|^2 dV^0 \delta_{\mu\nu}/6 = \int h^0 dV^0 \delta_{\mu\nu}/3 = H^0 \delta_{\mu\nu}/3. \end{aligned} \right\} \quad (7.22)$$

Используя (7.19) и (7.22), находим электромагнитные импульс и энергию сферически симметричного распределения заряда:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_{эл} &= (4/3) (H_{эл}^0/c^2) \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}; \\ H_{эл} &= \left[1 + \frac{1}{3} u^2/c^2 \right] / \sqrt{1 - u^2/c^2} H_{эл}^0. \end{aligned} \right\} \quad (7.23)$$

Такая система представляет собой классическую модель электрона, так как фундаментальные уравнения лоренцевой электронной теории совпадают с уравнениями Максвелла для сред с $\varepsilon = \mu = 1$. Лоренц выдвинул идею, что масса, энергия и импульс электрона должны быть чисто электромагнитного происхождения, но из (7.23) мы видим, что это невозможно [1], так как зависимость энергии от скорости отлична от релятивистской формулы (3.31) для энергии частицы. Поскольку величины $\{G_{эл}, (i/c)H_{эл}\}$ не преобразуются как компоненты 4-вектора, мы имеем типичную незамкнутую систему. Чтобы получить непротиворечивое классическое описание электрона, нам следует предположить существование внутри электрона неэлектромагнитных импульса и энергии, по крайней мере до тех пор, пока считаем, что уравнения Максвелла выполняются во всем пространстве.

Теперь допустим, что заряд e равномерно распределен по поверхности упругой сферы радиусом a в системе покоя. Если \mathbf{n} — единичный вектор в направлении радиуса-вектора, то соответствующее решение уравнений Максвелла имеет вид

$$\mathbf{E}^0 = (e/4\pi r^2) \mathbf{n} \text{ при } r \geq a; \quad \mathbf{E}^0 = 0 \text{ при } r < a; \quad \mathbf{H}^0 = 0, \quad (7.24)$$

где r — расстояние от центра сферы. Отсюда с учетом (7.21) получим

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu\nu}^0 &= -\frac{e^2}{(4\pi)^2 r^4} n_\mu n_\nu + \frac{1}{2} \frac{e^2}{(4\pi)^2 r^4} \delta_{\mu\nu}, \quad r \geq a, \\ H_{эл}^0 &= \frac{1}{2} \int |\mathbf{E}^0| dV^0 = \frac{e^2}{(4\pi)^2} 2\pi \int_a^\infty \frac{r^2 dr}{r^4} = \frac{e^2}{8\pi a} = m_0^{эл} c^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.25)$$

Здесь заряд e измеряется в единицах Хевисайда, а $m_0^{эл}$ — электромагнитный вклад в массу покоя частицы.

В соответствии с (5.109) электростатическая сила, действующая на единицу поверхности сферы,

$$t_\mu^{эл} = -S_{\mu\nu}^0 n_\nu = e^2 n_\mu / 2 (4\pi)^2 a^4 \quad (7.26)$$

должна уравновешиваться упругой силой. Следовательно, тензор упругих напряжений внутри сферы должен иметь вид

$$t_{\mu\nu}^0 = p^0 \delta_{\mu\nu}, \quad (7.27)$$

где

$$p^0 = -e^2/2 (4\pi)^2 a^4 = -H_{эл}^0/4\pi a^3. \quad (7.28)$$

Теперь из формул (6.149) находим полные механические энергию и импульс

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G}_{мех} &= (H_{мех}^0 + p^0 V^0)/c^2 \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \left(m_0^{мех} - \frac{1}{3} \frac{H_{эл}^0}{c^2} \right) \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}; \\ H_{мех} &= \frac{H_{мех}^0 + (p^0 V^0/c^2) u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{m_0^{мех} c^2 - \frac{1}{3} (H_{эл}^0/c^2) u^2}{\sqrt{1-u^2/c^2}}. \end{aligned} \right\} \quad (7.29)$$

Складывая (7.29) и (7.23), получаем полные энергию и импульс:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G} &= \mathbf{G}_{мех} + \mathbf{G}_{эл} = \frac{H^0}{c^2} \frac{\mathbf{u}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \\ H &= H_{мех} + H_{эл} = \frac{(H_{мех}^0 + H_{эл}^0)}{\sqrt{1-u^2/c^2}} = \frac{H^0}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \end{aligned} \right\} \quad (7.30)$$

которые мы должны иметь для замкнутой системы. Система такого типа впервые была использована Пуанкаре [198] в качестве модели электрона. В своей модели Пуанкаре не указывал природу сил, противодействующих электростати-

ческим силам в электроде; он просто предполагал существование таких неэлектромагнитных сил и соответствующего тензора энергии, который вместе с электромагнитным тензором энергии определяет полный тензор энергии T_{ik} , удовлетворяющий условию $\partial T_{ik}/\partial x_k = 0$, характерному для замкнутых систем.

В противоположность этой дуалистической точке зрения, Ми [156, 157, 158] и Борн [33] отстаивали унитарную концепцию, в соответствии с которой они вводили только электромагнитные полевые переменные. Внутри электрона, где электромагнитное поле очень сильное, они удовлетворяли уравнениям, отличающимся от уравнений Максвелла. Эти уравнения были нелинейными, а соответствующий тензор энергии удовлетворял необходимому условию $\partial S_{ik}/\partial x_k = 0$, т. е. такому, чтобы собственная сила $f_i = -\partial S_{ik}/\partial x_k$ равнялась нулю.

Окончательное решение проблемы электрона и других элементарных частиц классическая физика, вероятно не даст. Кроме постоянной Планка, по-видимому, необходимо ввести новую фундаментальную константу с размерностью длины [111]. Но из рассмотренного выше следует, что, до тех пор пока будет предполагаться существование тензора энергии системы, теория относительности будет требовать, чтобы собственная сила, т. е. 4-дивергенция этого тензора, равнялась нулю.

§ 7.4. Основные уравнения электродинамики стационарной материи

Как показано Лоренцем [149], феноменологические уравнения электродинамики Максвелла для стационарной материи могут быть выведены из фундаментальных уравнений электронной теории путем усреднения их по области пространства, малой с макроскопической точки зрения, но еще достаточно большой, чтобы содержать большое число электронов. Поскольку уравнения (5.13) и (5.16) электронной теории ковариантны, усредняя их по соответствующим пространственно-временным областям, можно найти также и «макроскопические» уравнения электродинамики в движущихся средах. Это было сделано Борном [164] (см. также [94, 56, 57]).

Но если феноменологические уравнения Максвелла справедливы для покоящейся среды, то соответствующие уравнения для движущейся среды можно найти просто с помощью преобразования Лоренца. Этот метод впервые использовал Минковский [160, 162]. Принцип относительности требует, чтобы уравнения Максвелла для стационарной материи выполнялись в той системе координат S^0 , в которой материя покоится, независимо от скорости этой системы относительно неподвижных звезд. Следовательно, в S^0 имеем

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{rot}^0 \mathbf{E}^0 + \left(\frac{1}{c}\right) \frac{\partial \mathbf{B}^0}{\partial t} &= 0; \operatorname{div}^0 \mathbf{B}^0 = 0; \\ \operatorname{rot}^0 \mathbf{H}^0 - \left(\frac{1}{c}\right) \frac{\partial \mathbf{D}^0}{\partial t} &= \mathbf{J}^0/c; \operatorname{div}^0 \mathbf{D}^0 = 0, \end{aligned} \right\} \quad (7.31)$$

где \mathbf{E}^0 , \mathbf{D}^0 , \mathbf{H}^0 , \mathbf{B}^0 — напряженность электрического поля, электрическое смещение, напряженность магнитного поля и магнитная индукция соответственно; ρ^0 и \mathbf{J}^0 — макроскопические плотности заряда и тока. Все эти величины, в принципе, можно определить с помощью макроскопических экспериментов в S^0 . Например, \mathbf{E}^0 и \mathbf{D}^0 определяются как силы, действующие на пробный единичный электрический заряд, помещенный в рассматриваемой точке в параллельный или перпендикулярный к полю малый разрез материи соответственно. Аналогично \mathbf{H}^0 и \mathbf{B}^0 соответствует силам, действующим на пробное намагниченное тело. ■

В изотропных диэлектриках и парамагнетиках кроме полевых уравнений (7.31) мы имеем материальные соотношения, связывающие переменные поля со структурой материи:

$$\mathbf{D}^0 = \epsilon \mathbf{E}^0; \mathbf{B}^0 = \mu \mathbf{H}^0; \mathbf{J}^0 = \sigma \mathbf{E}^0, \quad (7.32)$$

где ϵ — диэлектрическая постоянная; μ — магнитная проницаемость, а σ — электрическая проводимость. Последнее уравнение в (7.32) является математическим выражением закона Ома.

§ 7.5. Уравнения Минковского для равномерно движущихся сред

Рассмотрим два антисимметрических тензора F_{ik} и H_{ik} . В соответствии с (4.83) и (4.48') тензор F_{ik} в произвольной системе координат S определяет пару пространственных векторов \mathbf{B} и \mathbf{E} :

$$\mathbf{B} = (F_{23}, F_{31}, F_{12}); \quad i\mathbf{E} = (F_{41}, F_{42}, F_{43}), \quad (7.33)$$

где \mathbf{B} — аксиальный вектор, а \mathbf{E} — полярный вектор. Аналогично тензор H_{ik} определяет полярный вектор \mathbf{D} и аксиальный вектор \mathbf{H} :

$$\mathbf{H} = (H_{23}, H_{31}, H_{12}); \quad i\mathbf{D} = (H_{41}, H_{42}, H_{43}). \quad (7.34)$$

В системе S рассмотрим 4-вектор с компонентами

$$J_j = (\mathbf{J}/c, i\rho). \quad (7.35)$$

Если компоненты тензоров F_{ik} , H_{ik} , J_j даны в одной системе координат, то их компоненты в любой другой системе можно вычислить с помощью формул преобразования (4.84') и (4.29) антисимметрических тензоров и векторов. Для компонент J_j имеем

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{J} = \mathbf{J}' + \left(\frac{\mathbf{v}}{v^2} \right) \left[(\mathbf{v}\mathbf{J}') \left\{ 1 - \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}} \right\} + \rho' v^2 \right] / \sqrt{1 - \frac{v^2}{c^2}}; \\ \rho = [\rho' + (1/c^2)(\mathbf{v}\mathbf{J}')] / \sqrt{1 - v^2/c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (7.36)$$

где v — скорость S' относительно S .

Если определить тензоры F_{ik} , H_{ik} , J_i так, чтобы величины \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , \mathbf{J} , ρ совпали с макроскопическими электромагнитными переменными \mathbf{E}^0 , \mathbf{D}^0 , \mathbf{H}^0 , \mathbf{B}^0 , \mathbf{J}^0 , ρ^0 в системе покоя S^0 материи, то электродинамические уравнения в любой системе координат должны принять вид

$$\partial F_{ik} / \partial x_i + \partial F_{kl} / \partial x_l + \partial F_{li} / \partial x_k = 0; \quad (7.37a)$$

$$\partial H_{ik} / \partial x_k = J_i. \quad (7.37b)$$

В системе покоя S^0 уравнения (7.37) совпадают с уравнениями Максвелла (7.31), и, поскольку это тензорные уравнения, они должны выполняться в любой инерциальной системе. Согласно (4.190) уравнение (7.37a) можно записать также в форме

$$\partial F_{ik}^* / \partial x_k = 0, \quad (7.37a')$$

где F_{ik}^* — псевдотензор, дуальный тензору F_{ik} .

Подставляя формулы (7.33), (7.34), (7.35) в (7.37), получаем в любой системе координат

$$\text{rot } \mathbf{E} + (1/c) \partial \mathbf{B} / \partial t = 0; \quad \text{div } \mathbf{B} = 0; \quad (7.38a)$$

$$\text{rot } \mathbf{H} - (1/c) \partial \mathbf{D} / \partial t = \mathbf{J}/c; \quad \text{div } \mathbf{D} = \rho. \quad (7.38b)$$

Величины $J_i = (\mathbf{J}/c, i\rho)$ можно интерпретировать как плотность тока и плотность заряда в системе S , так как в соответствии с (7.37b) имеем уравнение неразрывности

$$\partial J_i / \partial x_i = \partial^2 H_{ik} / \partial x_i \partial x_k \equiv 0. \quad (7.39)$$

Если среда — непроводящая, т. е. $\mathbf{J}^0 = 0$ в системе покоя S , то из уравнений (7.36) получим

$$\rho = \rho^0 / \sqrt{1 - u^2/c^2}; \quad \mathbf{J} = \rho^0 \mathbf{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2} = \rho \mathbf{u}, \quad (7.40)$$

где \mathbf{u} — скорость материи относительно S . Следовательно,

$$\delta e = \rho \delta V = \rho^0 \delta V^0 = \delta e^0, \quad (7.41)$$

т. е. заряд инфинитезимальной частицы среды с объемом $\delta V = \delta V^0 \sqrt{1 - u^2/c^2}$ инвариантен, а \mathbf{J} — чисто конвективный ток.

Однако в общем случае $\delta e = \rho \delta V$ — не инвариант. Если в системе S^0 присутствует ток проводимости \mathbf{J}^0 , то из (7.36) получим

$$\rho = \rho^0 / \sqrt{1 - u^2/c^2} + \rho_C, \quad (7.42)$$

где

$$\rho_C = (\mathbf{u} \mathbf{J}^0) / c^2 (1 - u^2/c^2)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$\delta e = \rho \delta V = \rho^0 \delta V^0 + \rho_C \delta V = \delta e^0 + \rho_C \delta V \neq \delta e^0.$$

Даже если в системе покоя S^0 плотность заряда равна нулю, то в системе S плотность заряда равна ρ_C , которая отлична от нуля, когда $\mathbf{J}^0 \neq 0$. Эта кондуктивная плотность заряда дает существенную добавку к полному конвективному току $\rho \mathbf{u}$.

В системе S ток проводимости \mathbf{C} определяется из выражения

$$\mathbf{J} = \rho \mathbf{u} + \mathbf{C} = \mathbf{C} + \rho_C \mathbf{u} + \rho^0 \mathbf{u} / \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (7.43)$$

Поверхностный элемент df , движущийся вместе с материей, описывается 3-вектором $d\mathbf{f} = \mathbf{n} df$, где \mathbf{n} — нормаль к элементу. Тогда заряд, проходящий через df в направлении \mathbf{n} за единицу времени в S , равен $\mathbf{C} df$.

Разделение тока \mathbf{J} в (7.43) на ток проводимости \mathbf{C} и конвективный ток $\rho \mathbf{u}$ не является релятивистски инвариантной операцией. Мы получим ковариантное разделение, если образуем величину

$$J_i = s_i + \rho^0 U_i / c, \quad (7.44)$$

где U_i — 4-скорость материи. Из (7.42)—(7.44) видно, что

$$\left. \begin{aligned} s_i &= (s/c, s_4); \\ \mathbf{s} &= \mathbf{C} + \rho_C \mathbf{u}; \quad S_4 = i\rho_C. \end{aligned} \right\} \quad (7.45)$$

Следовательно, \mathbf{s} есть сумма тока проводимости \mathbf{C} и конвективного тока $\rho_C \mathbf{u}$, соответствующего кондуктивному заряду ρ_C . Далее, поскольку

$$J_i U_i = J_i^0 U_i^0 = icJ_4^0 = -c\rho^0, \quad (7.46)$$

из (7.44) и (7.45) получаем

$$\begin{aligned} s_i U_i &= 0; \quad s_4 = i(\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}) / c^2; \\ \rho_C &= (\mathbf{s} \cdot \mathbf{u}) / c^2 = \mathbf{C} \mathbf{u} / (c^2 - u^2). \end{aligned}$$

В то время как J_i имеет непосредственный физический смысл, полевые переменные \mathbf{E} , \mathbf{D} , \mathbf{H} , \mathbf{B} , входящие в уравнения (7.37), не имеют простого физического смысла, в отличие от переменных \mathbf{E}^0 , \mathbf{D}^0 , \mathbf{H}^0 , \mathbf{B}^0 в системе покоя, которые можно найти из простых макроскопических экспериментов. До сих пор они определялись только формулами преобразований, посредством которых они могли быть выражены через полевые переменные в системе покоя S^0 .

Теперь рассмотрим 4-вектор

$$F_i = (1/c) F_{ik} U_k. \quad (7.47)$$

Из (7.33) для компонент F_i в S получим

$$F_i = \left\{ \frac{\mathbf{E} + (1/c)(\mathbf{u} \times \mathbf{B})}{\sqrt{1 - u^2/c^2}}, \quad \frac{i(\mathbf{E} \cdot \mathbf{u})/c}{\sqrt{1 - u^2/c^2}} \right\}. \quad (7.48)$$

Следовательно, компоненты F_i в системе S^0 имеют вид

$$F_i^0 = (\mathbf{E}^0, 0), \quad (7.49)$$

т.е. F_i есть 4-сила, действующая на единичный заряд, покоящийся относительно среды и помещенный в продольный разрез в материи. Если положить

$$\tilde{\mathbf{E}} = \mathbf{E} + (1/c)(\mathbf{u} \times \mathbf{B}), \quad (7.50)$$

то (7.48) примет вид

$$F_i = \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{E}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \frac{i(\tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{u})/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right\}. \quad (7.51)$$

Сравнение с (4.54) показывает, что $\tilde{\mathbf{E}}$ — сила, действующая на пробное тело и измеряемая наблюдателем в S .

Аналогично 4-вектор

$$K_i = \frac{1}{c} H_{ik} U_k = \left\{ \frac{\mathbf{D} + (1/c)(\mathbf{u} \times \mathbf{H})}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \frac{i(\mathbf{D} \cdot \mathbf{u})/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right\} = \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{D}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \frac{i(\tilde{\mathbf{D}} \cdot \mathbf{u})/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right\} \quad (7.52)$$

с компонентами $K_i^0 = (\mathbf{D}^0, 0)$ в системе покоя есть 4-сила, действующая на единичный заряд, покоящийся относительно среды и помещенный в поперечный разрез в материи.

Следовательно, вектор

$$\tilde{\mathbf{D}} = \mathbf{D} + (1/c)(\mathbf{u} \cdot \mathbf{H}) \quad (7.53)$$

также имеет простой физический смысл. Он представляет собой силу, действующую на пробное тело с точки зрения наблюдателя в S .

Кроме того, если F_{ik}^* и H_{ik}^* — псевдотензоры, дуальные тензорам F_{ik} и H_{ik} [см. (4.111), (4.112)], то мы можем образовать два псевдовектора

$$F_i^* = \left(\frac{1}{c} \right) F_{ik}^* U_k = \left\{ \frac{\mathbf{B} - (\mathbf{u} \times \mathbf{E})/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \frac{i(\mathbf{B} \cdot \mathbf{u})/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right\} = \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{B}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \frac{i(\tilde{\mathbf{B}} \cdot \mathbf{u})/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right\}; \quad (7.54)$$

$$K_i^* = \left(\frac{1}{c} \right) H_{ik}^* U_k = \left\{ \frac{\mathbf{H} - (\mathbf{u} \times \mathbf{D})/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \frac{i(\mathbf{H} \cdot \mathbf{u})/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right\} = \left\{ \frac{\tilde{\mathbf{H}}}{\sqrt{1-u^2/c^2}}, \quad \frac{i(\tilde{\mathbf{H}} \cdot \mathbf{u})/c}{\sqrt{1-u^2/c^2}} \right\}. \quad (7.55)$$

Здесь F_i^* и K_i^* , как это сразу видно при рассмотрении компонент этих псевдовекторов в системе покоя, суть 4-силы, действующие на единичный магнитный полюс, помещаемый в покоящиеся относительно среды поперечный и продольный разрезы соответственно.

Следовательно,

$$\tilde{\mathbf{B}} = \mathbf{B} - (\mathbf{u} \times \mathbf{E})/c \quad (7.56)$$

и

$$\tilde{\mathbf{H}} = \mathbf{H} - (\mathbf{u} \times \mathbf{D})/c \quad (7.57)$$

— силы, действующие на этот единичный магнитный полюс, измеренные в системе S .

Таким образом, векторы $\tilde{\mathbf{E}}$, $\tilde{\mathbf{D}}$, $\tilde{\mathbf{H}}$, $\tilde{\mathbf{B}}$ (или 4-векторы F_i , K_i , F_i^* , K_i^*), в принципе, можно найти непосредственно из физических измерений, выполненных

наблюдателем в S . С помощью (7.50), (7.53), (7.56) и (7.57) можно также выразить тензоры F_{ik} и H_{ik} через величины F_i, K_i, F_i^*, K_i^* :

$$\left. \begin{aligned} F_{ik} &= (1/c)(U_i F_k - U_k F_i) + (1/ic) \varepsilon_{iklm} F_l^* U_m; \\ H_{ik} &= (1/c)(U_i K_k - U_k K_i) + (1/ic) \varepsilon_{iklm} K_l^* U_m, \end{aligned} \right\} \quad (7.58)$$

где ε_{iklm} — символ Леви-Чивита, определенный в § 4.11. Легко видеть, что формулы (7.58) справедливы и для системы покоя S^0 , а поскольку левые и правые части в (7.58) преобразуются как тензоры, то эти формулы действительны и в общем случае.

Учитывая, что вектор \mathbf{u} — постоянный, имеем

$$\begin{aligned} \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{B}) &= -(\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{B} + \mathbf{u} \text{ div} \mathbf{B} = -(\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{B}; \\ \text{rot}(\mathbf{u} \times \mathbf{D}) &= -(\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{D} + \mathbf{u} \text{ div} \mathbf{D} = -(\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{D} + \rho \mathbf{u}. \end{aligned}$$

Поэтому уравнения поля (7.38) можно записать также в виде

$$\text{rot} \tilde{\mathbf{E}} + (1/c) d\mathbf{B}/dt = 0; \quad \text{rot} \tilde{\mathbf{H}} - (1/c) d\mathbf{D}/dt = \mathbf{C}/c; \quad (7.59)$$

$$\text{div} \mathbf{B} = 0; \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho, \quad (7.60)$$

где

$$d\mathbf{B}/dt = \partial\mathbf{B}/\partial t + (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{B};$$

$$d\mathbf{D}/dt = \partial\mathbf{D}/\partial t + (\mathbf{u} \text{ grad}) \mathbf{D}$$

— субстанциональные производные по времени от \mathbf{B} и \mathbf{D} , а \mathbf{C} — ток проводимости, определяемый формулой (7.43).

До сих пор мы рассматривали только одну материальную среду, движущуюся с постоянной скоростью \mathbf{u} . Но поскольку уравнения поля линейны, поля аддитивны, и, следовательно, уравнения (7.37) должны выполняться также в случае нескольких тел, разделенных вакуумом, движущихся равномерно с различными скоростями. Однако уравнения (7.37) дают хорошую аппроксимацию для системы движущихся тел только до тех пор, пока ускорения этих тел, обусловленные электромагнитными силами, достаточно малы.

§ 7.6. Материальные соотношения в четырехмерной формулировке. Граничные условия

Из первых двух уравнений системы (7.32) следует, что силы, действующие на единичное пробное тело, помещенное в продольный и поперечный разрезы, пропорциональны. Коэффициенты пропорциональности в зависимости от того, является ли пробное тело электрическим зарядом или магнитным полюсом, равны ε или μ соответственно. Поэтому

$$\tilde{\mathbf{D}} = \varepsilon \tilde{\mathbf{E}}; \quad \tilde{\mathbf{B}} = \mu \tilde{\mathbf{H}} \quad (7.61)$$

или

$$K_i = \varepsilon F_i; \quad F_i^* = \mu K_i^*. \quad (7.62)$$

Эти уравнения можно также записать в виде

$$H_{ik} U_k = \varepsilon F_{ik} U_k; \quad (7.63a)$$

$$F_{ik}^* U_k = \mu H_{ik}^* U_k. \quad (7.63b)$$

Последнее уравнение совпадает с тензорным уравнением

$$F_{ik} U_l + F_{kl} U_i + F_{li} U_k = \mu (H_{ik} U_l + H_{kl} U_i + H_{li} U_k). \quad (7.63b)$$

В системе покоя уравнения (7.61)—(7.63) сводятся к первым двум уравнениям системы (7.32). Последнее уравнение этой системы, выражающее закон Ома, можно представить в форме

$$s_i = \sigma F_i/c, \quad (7.64)$$

что следует из выражений (7.45) и (7.49), если векторное уравнение (7.64) записать в системе покоя. Поскольку $s_i U_i = F_i U_i = 0$, лишь первые три уравнения в (7.65) независимы, т. е. (7.64) эквивалентно

$$s = (\sigma \tilde{\mathbf{E}}/c) / \sqrt{1 - u^2/c^2}. \quad (7.65)$$

В соответствии с (7.46) и (7.47) закон Ома можно также представить в виде

$$J_i + \dot{U}_i (J_k U_k) / c^2 = (\sigma/c^2) F_{ik} U_k. \quad (7.66)$$

Уравнения поля (7.37) вместе с материальными соотношениями (7.63) и (7.66) позволяют определить поле, когда известно распределение заряда и тока. На границе между материальной средой и вакуумом тангенциальные компоненты $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$ должны быть непрерывными. Это можно показать, если проинтегрировать уравнения (7.59) по инфинитезимальной поверхности, ограниченной малым прямоугольником, две противоположные стороны которого лежат непосредственно внутри и снаружи границы среды. При этом предполагается, что скорость \mathbf{u} , входящая в выражение для $\tilde{\mathbf{E}}$ и $\tilde{\mathbf{H}}$, равна также скорости материи вне границы. Кроме того, интегрируя (7.60) по малому цилиндру, основания которого находятся непосредственно внутри и снаружи границы, получаем, что нормальная компонента \mathbf{B} должна быть непрерывна на границе, а скачок ΔD_n нормальной составляющей вектора \mathbf{D} равен поверхностной плотности заряда на границе.

§ 7.7. Электромагнитный тензор энергии и плотность 4-силы

В гл. 5 было установлено, что в электронной теории

$$f_i = F_{ik} s_k,$$

где f_i — плотность 4-силы, а s_i — плотность тока. Это выражение следует непосредственно из условия, того, что по самому определению напряженности электрического поля плотность силы в системе покоя заряда равна $\rho^0 \mathbf{E}^0$. В материальной среде с отличными от единицы ϵ и μ не так просто найти однозначное выражение для плотности силы, действующей на материю. Во-первых, в системе покоя среды существует, в общем случае, ток проводимости; и даже в случае изолятора совсем не очевидно, что плотность силы в системе покоя равна $\rho^0 \mathbf{E}^0$, так как напряженность электрического поля определяется как сила, действующая на единичный заряд, помещенный в разрез в среде. Эта неопределенность в определении понятия плотности силы приводит к соответствующей неопределенности в определении понятия электромагнитного тензора энергии.

Однако если рассмотреть 4-вектор $F_{il} J_l$, являющийся аналогом плотности 4-силы в электронной теории, то из уравнений поля (7.37) получим

$$\begin{aligned} F_{il} J_l &= F_{il} \partial H_{lk} / \partial x_k = \partial (F_{il} H_{lk}) / \partial x_k - H_{lk} \partial F_{il} / \partial x_k = -\partial (F_{il} H_{kl}) / \partial x_k - \\ &- (1/2) (\partial F_{il} / \partial x_k + \partial F_{ki} / \partial x_l) H_{lk} = -\partial (F_{il} H_{kl}) / \partial x_k + (1/4) \partial (F_{lk} H_{lk}) / \partial x_i + \\ &+ (1/4) (H_{lk} \partial F_{lk} / \partial x_i - F_{lk} \partial H_{lk} / \partial x_i). \end{aligned}$$

Следовательно,

$$F_{il} J_l = (1/4) (F_{kl} \partial H_{kl} / \partial x_i - H_{kl} \partial F_{kl} / \partial x_i) = -\partial S_{ik} / \partial x_k, \quad (7.67)$$

где

$$S_{ik} = F_{il} H_{kl} - (1/4) (F_{lm} H_{lm}) \delta_{ik}. \quad (7.68)$$

Из (7.33) и (7.34) для компонент этого тензора имеем

$$S_{\mu\nu} = -t_{\mu\nu}, \quad (7.69)$$

где тензор

$$t_{\mu\nu} = E_\mu D_\nu + H_\mu B_\nu - (1/2) (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B}) \delta_{\mu\nu}.$$

в системе покоя материальной среды совпадает с максвелловским тензором напряжений.

Кроме того,

$$(S_{41}, S_{42}, S_{43}) = (i/c) \mathbf{S}, \quad (7.70)$$

где $\mathbf{S} = c (\mathbf{E} \times \mathbf{H})$ — вектор Пойнтинга, а

$$S_{44} = -h; \quad h = (\mathbf{E} \mathbf{D} + \mathbf{H} \mathbf{B})/2. \quad (7.71)$$

В системе покоя \mathbf{S} и h совпадают с обычными выражениями для электромагнитных потока энергии и плотности энергии в стационарной среде.

И, наконец,

$$(S_{14}, S_{24}, S_{34}) = ic\mathbf{g}, \quad (7.72)$$

где $\mathbf{g} = (\mathbf{D} \times \mathbf{B})/c$.

Из уравнения (7.67) следует, что величину

$$F_{il} J_l + (F_{kl} \partial H_{kl} / \partial x_i - H_{kl} \partial F_{kl} / \partial x_i) / 4$$

можно считать плотностью 4-силы f_i^* и что тензор S_{ik} , определяемый формулой (7.68), представляет собой электромагнитный тензор энергии. Это означает, что в каждой системе координат величины \mathbf{S} , h и \mathbf{g} должны интерпретироваться как электромагнитные поток энергии, плотность энергии и плотность импульса соответственно.

Приведенные выше выражения для \mathbf{S} , h и \mathbf{g} были выведены Минковским [160, 161]; при $\epsilon = \mu = 1$ они сводятся к соответствующим выражениям электродинамики.

Легко видеть, что в частном случае однородной и изотропной среды второй член в (7.67) равен нулю. В самом деле, в системе покоя этот член с учетом (7.32) приводится к виду

$$(1/4) (F_{kl}^0 \partial H_{kl}^0 / \partial x_i^0 - H_{kl}^0 \partial F_{kl}^0 / \partial x_i^0) = (1/2) (\mathbf{B}^0 \partial \mathbf{H}^0 / \partial x_i^0 - \mathbf{E}^0 \partial \mathbf{D}^0 / \partial x_i^0 - \mathbf{H}^0 \partial \mathbf{B}^0 / \partial x_i^0 + \mathbf{D}^0 \partial \mathbf{E}^0 / \partial x_i^0) = -(1/2) (|\mathbf{H}^0|^2 \partial \mu / \partial x_i^0 + |\mathbf{E}^0|^2 \partial \epsilon / \partial x_i^0).$$

Следовательно, если ϵ и μ — постоянные, то этот член в системе S^0 равен нулю. Но вектор, компоненты которого равны нулю в одной системе координат, будет равен нулю в любой другой системе. Следовательно, в соответствии с (7.33) и (7.35), внутри однородной изотропной среды сила

$$f_i^* \equiv F_{ik} J_k = (\mathbf{f}^*, f_4^*) = \{\rho \mathbf{E} + (1/c) (\mathbf{J} \cdot \mathbf{B}), (i/c) (\mathbf{E} \mathbf{J})\}. \quad (7.73)$$

С помощью (7.43) и (7.50) эту формулу можно представить в виде

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{f}^* &= \rho \{ \mathbf{E} + (1/c) (\mathbf{u} \times \mathbf{B}) \} + (1/c) (\mathbf{C} \times \mathbf{B}) = \rho \tilde{\mathbf{E}} + (1/c) (\mathbf{C} \times \mathbf{B}); \\ f_4^* &= (i/c) \mathbf{E} (\rho \mathbf{u} + \mathbf{C}) = (i/c) (\mathbf{f}^* \mathbf{u} + \tilde{\mathbf{E}} \cdot \mathbf{C}). \end{aligned} \right\} \quad (7.74)$$

В системе покоя S^0 выражение для f_4^* совпадает с формулой Джоуля для тепловой энергии φ^0 , производимой в единице объема среды за единицу времени. Фактически в S^0 сила

$$f_4^{*0} = (i/c) (\mathbf{E}^0 \mathbf{C}^0) = (i/c) (\mathbf{E}^0 \mathbf{J}^0) = (i/c) \varphi^0. \quad (7.75)$$

Кроме этого немеханического действия электромагнитное поле приводит также к возникновению механической силы, которая в системе S^0 соответствует силе Лоренца:

$$\mathbf{f}^{*0} = \rho^0 \mathbf{E}^0 + (1/c) (\mathbf{J}^0 \times \mathbf{B}^0). \quad (7.76)$$

Таким образом, даже если в S^0 поле и стационарно, для того чтобы материя покоилась в S^0 , необходима внешняя механическая сила. Плотность этой силы в системе S^0

$$\mathbf{f}_{\text{внеш}}^0 = \mathbf{f}^{*0}. \quad (7.77)$$

В произвольной инерциальной системе S две величины $\mathbf{f}^* \cdot \mathbf{u}$ и $\varphi^* = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{C}$ в (7.74) ранее интерпретировались как механическая мощность и выделяемая теплота. Однако необходимо заметить, что лоренцева сила \mathbf{f}^* в (7.74) не имеет характера истинной механической силы, так как 4-вектор f_i^* не ортогонален U_i . Действительно, из (7.73), (7.47), (7.35) и (7.51) имеем

$$U_i f_i^* = U_i F_{ik} J_k = -c (F_k J_k) = -\tilde{\mathbf{E}} (\mathbf{J} - \rho \mathbf{u}) / (1 - u^2/c^2)^{1/2} \quad (7.78)$$

или в соответствии с (4.228) и законом Джоуля

$$-U_i f_i^* = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{C} / (1 - u^2/c^2)^{1/2} = E^0 \mathbf{C} = \varphi^0. \quad (7.79)$$

Как уже говорилось в конце § 4.18, в общем случае невозможно обобщенную силу f_i^* однозначно разложить на механическую f_i и немеханическую π_i части. Однако, когда в системе покоя немеханический импульс равен нулю, что обычно предполагается для джоулева тепла, такое разложение однозначно, и мы имеем уравнения [(а), стр. 106], т. е.

$$\left. \begin{aligned} f_i &= f_i^* + U_i f_k^* U_k/c^2 = f_i^* - (F_k J_k) U_i/c; \\ \pi_i &= (F_k J_k) U_i/c = \varphi^0 U_i/c^2. \end{aligned} \right\} \quad (а)$$

Подставляя выражение (7.58) для F_{ik} в (7.73) и используя (7.46), получаем следующее выражение для лоренцевой 4-силы:

$$f_i^* = F_{ik} J_k = (F_k J_k) U_i/c + \rho^0 F_i + \varepsilon_{iklm} J_k F_l^* U_m/ic. \quad (б)$$

Следовательно, механическая 4-сила равна

$$f_i = \rho^0 F_i + \varepsilon_{iklm} J_k F_l^* U_m/ic = \{f, (i/c) (\mathbf{f}\mathbf{u})\} \quad (в)$$

и удовлетворяет, очевидно, характеристическому уравнению $U_i f_i = 0$. Подставляя выражения (7.35), (7.43), (7.54) и (4.39) для J_i , F_i^* и U_i в (в), после некоторых выкладок найдем механическую 3-силу, с которой поле действует на материю:

$$\mathbf{f} = \rho^0 \tilde{\mathbf{E}} / (1 - u^2/c^2)^{1/2} + (1/c) (\mathbf{C} \times \tilde{\mathbf{B}}), \quad (г)$$

где

$$\tilde{\mathbf{B}} = \{\tilde{\mathbf{B}} - \mathbf{u} (\tilde{\mathbf{B}}\mathbf{u})/c^2\} / (1 - u^2/c^2). \quad (д)$$

Именно эту силу, а не лоренцеву силу \mathbf{f}^* нужно уравнивать внешней силой $\mathbf{f}_{\text{внеш}}$, чтобы материя в случае стационарного поля находилась в покое, т. е.

$$\mathbf{f}_{\text{внеш}} = -\mathbf{f}. \quad (е)$$

В системе покоя S^0 сила f^0 (7.76) равна f^{*0} и условие равновесия (е) совпадает с (7.77). Поскольку $\mathbf{f}_{\text{внеш}}$ трансформируется как \mathbf{f} , т. е. как истинная механическая сила, то условие равновесия (е) справедливо для любой системы отсчета, но в общем случае $\mathbf{f}_{\text{внеш}}$ уже не будет совпадать с $-\mathbf{f}^*$.

Для величины немеханической энергии поля, в соответствии с (4.221), (а) и (7.79), имеем

$$\varphi = -i s \rho_4 = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{C} / (1 - u^2/c^2) = E^0 \mathbf{C}^0 / (1 - u^2/c^2)^{1/2} = \varphi^0 / (1 - u^2/c^2)^{1/2}. \quad (ж)$$

В системе S эту формулу можно интерпретировать как выражение для джоулева тепла, выделяемого в единичном объеме среды в единицу времени. Ранее эта величина определялась формулой

$$\varphi^* = \tilde{\mathbf{E}}\mathbf{C} = \varphi^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2}. \quad (з)$$

Уравнение (ж) соответствует новой формулировке термодинамики, начало которой положено работами Отта [191]. В системе S выделенное тепло соответствует импульсу

$$\pi = \mathbf{u} \varphi^0 / c^2 (1 - u^2/c^2)^{1/2} = \varphi \mathbf{u} / c^2. \quad (и)$$

Законы сохранения определяются уравнением (7.2'), где T_{ik} — тензор энергии материи, а S_{ik} — тензор Минковского (7.68). Последний удовлетворяет тому же соотношению

$$S_{ii} = F_{il} H_{il} - F_{kl} H_{kl} \equiv 0, \quad (7.80)$$

то и тензор (5.106) электронной теории, но он уже не симметричный:

$$S_{ik} \neq S_{ki}. \quad (7.81)$$

В системе покоя S^0 пространственная часть (7.69) для изотропной среды вследствие (7.32) симметрична, но

$$S_{\mu 4}^0 - S_{4\mu}^0 = i(\epsilon\mu - 1)(\mathbf{E}^0 \cdot \mathbf{H}^0)_\mu \neq 0.$$

В любой другой системе S даже в случае изотропной среды $S_{\mu\nu} \neq S_{\nu\mu}$. Если для электромагнитного тензора принять выражение Минковского, то материальный тензор T_{ik} должен быть также несимметричным, так как суммарный тензор $T_{ik} + S_{ik}$, являющийся тензором энергии замкнутой системы, должен быть симметричным. Это не противоречит выводу § 6.4, поскольку там мы рассматривали замкнутую механическую систему, а выражение (6.66) для плотности импульса было получено в предположении, что $\mathbf{g} = \mathbf{S}/c^2$, которое в данном случае должно быть отброшено. Вместо (6.66) теперь имеем

$$g_\mu = T_{\mu 4}/ic = \mu u_\mu + u_\nu t_{\nu\mu} + a_\mu = S_\mu/c^2 + a_\mu, \quad (7.82)$$

где a_μ — компоненты 3-вектора

$$\mathbf{a} = (\mathbf{E} \times \mathbf{H} - \mathbf{D} \times \mathbf{B})/c. \quad (7.83)$$

Несимметричность тензора энергии Минковского привела к продолжительной дискуссии [81, 3, 4, 56, 57, 136, 193, 260, 249]. Было ясно, что это свойство является реальной трудностью для теории Минковского. Поэтому Абрагам [3], Абрагам и Беккер [5] пытались сконструировать симметрический электромагнитный тензор энергии. В системе покоя S^0 тензор Абрагама удовлетворяет условиям (7.69), (7.70) и (7.71) (по крайней мере для изотропных сред), но вместо (7.72) в системе покоя Абрагам предложил условие

$$\mathbf{g} = (1/c)(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{S}/c^2. \quad (7.84)$$

Поскольку тензор Абрагама S_{ik}^{Abr} симметричен в S^0 , он симметричен и в любой другой системе отсчета S . Но в любой системе S , отличной от S^0 , компоненты S_{ik}^{Abr} уже не удовлетворяют (7.69)—(7.72), так как в выражение для этого тензора входит скорость \mathbf{u} материи. Плотность 4-силы, получаемая из этого тензора по формуле

$$f_i^{*Abr} = -\partial S_{ik}^{Abr}/\partial x_k, \quad (7.85)$$

также сильно отличается от соответствующего выражения (7.73). В системе покоя

$$f_i^{*Abr} = \mathbf{f}^* + [(\epsilon\mu - 1)/c^2] d\mathbf{S}/dt; \quad f_4^{*Abr} = f_4^*, \quad (7.86)$$

т. е. в системе покоя f_i^{*Abr} отличается от f_i^* Минковского величиной $[(\epsilon\mu - 1)/c^2] d\mathbf{S}/dt$.

Позднее были предложены другие выражения для электромагнитного тензора энергии [18, 152, 106, 107], причем каждый автор объявлял именно свое выражение «корректным». Однако, по нашему мнению, одинаково правильными могут быть многие различные выражения, поскольку разделение полного тензора энергии на связанную с веществом и полевую части является, в основном, вопросом определения. Это справедливо также для всех выводов, базирующихся на электронной теории материи, которая может дать однозначное выражение только для полного тензора энергии.

Если мы определим электромагнитную часть как тензор, зависящий лишь от полевых переменных F_{ik} , H_{ik} , то получим тензор Минковского [37]. В этом случае материальный тензор T_{ik} , как это видно из (7.82), (7.83), также будет явно зависеть от полевых переменных. С другой стороны, предполагая, что полевой тензор зависит и от переменных материальной среды, например от 4-скорости материи, получим одинаково корректное выражение для S_{ik} , как,

например, предложенное Абрагамом. Какое из возможных определений электромагнитного тензора следует предпочесть при описании физических явлений— в основном вопрос удобства. Можно показать, что многие экспериментальные результаты более удобно описывать тензором Минковского [37]. Соответствующий пример будет рассмотрен в следующем параграфе.

§ 7.8. Скорость распространения энергии световой волны в движущейся преломляющей среде

В гл. 1 и 2 мы определили скорость и направление светового луча в прозрачной преломляющей среде с помощью принципа Гюйгенса, а в § 2.10 показали, что определенная таким образом групповая скорость при преобразованиях Лоренца трансформируется как скорость частицы, т. е. в соответствии с формулами (2.45)—(2.47). Как следствие этих формул, в § 2.11 мы получили абберационную формулу (2.91) и формулу Френеля (2.92), соответствующие экспериментам с точностью до малых второго порядка.

Из максвелловской теории света следует, что оптические явления в преломляющей среде с показателем преломления n описываются феноменологическими уравнениями электродинамики Максвелла. Для этой среды диэлектрическая ϵ и магнитная μ постоянные связаны уравнением

$$n = \sqrt{\epsilon\mu}. \quad (7.87)$$

Это справедливо, по крайней мере, для достаточно длинных волн, когда можно пренебречь всеми дисперсионными эффектами. Кроме того, прозрачное тело, которое совсем не поглощает свет, можно рассматривать как идеальный изолятор, т. е.

$$\sigma = 0, \mathbf{J} = 0, \rho = 0. \quad (7.88)$$

Тогда групповая скорость должна совпадать со скоростью распространения энергии волны. Например, в абберационных экспериментах угол абберации есть угол, на который следует повернуть телескоп, чтобы в него попал луч, т. е. энергия. Поэтому направление групповой скорости должно совпадать с направлением распространения энергии в волне. При заданном тензоре энергии электромагнитного поля можно найти скорость распространения энергии по формуле (6.9), т. е.

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{S}/n. \quad (7.89)$$

Тогда мы должны потребовать, чтобы \mathbf{u}^* в случае световой волны при преобразованиях Лоренца трансформировалась как скорость частицы. Это значит, что величина (6.15) должна быть 4-вектором. Как показано в § 6.1, это возможно только тогда, когда тензор энергии удовлетворяет условию (6.119). Покажем теперь, что этому условию удовлетворяет тензор Минковского, но не тензор Абрагама, т. е. в данном случае теория Минковского приводит к более удобному описанию явлений.

Как уже упоминалось в § 6.1, достаточно доказать справедливость условия (6.19) лишь в одной инерциальной системе. Для этого выберем систему покоя преломляющей среды. Очевидно, можно ограничиться случаем плоской волны, так как в задачах, рассмотренных в гл. 1 и 2, радиусы кривизны волновых фронтов велики по сравнению с длинами волн (геометрическая оптика), поэтому в каждом месте искривленные волновые фронты можно аппроксимировать плоскими волнами.

В системе покоя наиболее общее решение уравнений поля в случае плоской волны с нормалью \mathbf{n} к фронту волны при $\rho = 0, \mathbf{J} = 0$ следующее:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= f \{t - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})/\omega\} \mathbf{e}^{(1)}/\sqrt{\epsilon} + g \{t - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})/\omega\} \mathbf{e}^{(2)}/\sqrt{\epsilon}; \\ \mathbf{H} &= g \{t - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})/\omega\} \mathbf{e}^{(1)}/\sqrt{\mu} + f \{t - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})/\omega\} \mathbf{e}^{(2)}/\sqrt{\mu} \end{aligned} \right\} \quad (7.90)$$

(см. приложение 3). Здесь $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ — два фиксированных единичных вектора, ортогональных друг другу и вектору \mathbf{n} :

$$(\mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{e}^{(2)}) = (\mathbf{e}^{(1)} \cdot \mathbf{n}) = (\mathbf{e}^{(2)} \cdot \mathbf{n}) = 0; \quad (\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)}) = \mathbf{n}, \quad (7.91)$$

а f и g — произвольные функции от аргумента t — $(\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})/\omega$, где

$$\omega = c/\sqrt{\varepsilon\mu} = c/n \quad (7.92)$$

— фазовая скорость. Следовательно, из формул Минковского (7.68)—(7.72) в системе покоя имеем

$$\mathbf{S} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = (c/\sqrt{\varepsilon\mu})(f^2 + g^2)\mathbf{e}, \quad (7.93)$$

где

$$\mathbf{e} = (\mathbf{e}^{(1)} \times \mathbf{e}^{(2)}) = \mathbf{n}, \quad (7.94)$$

т. е. направление распространения энергии \mathbf{e} совпадает с направлением волновой нормали \mathbf{n} в этой системе. Кроме того,

$$h = (1/2)(\varepsilon E^2 + \mu H^2) = f^2 + g^2, \quad (7.95)$$

следовательно,

$$\mathbf{u}^* = \mathbf{S}/h = (c/\sqrt{\varepsilon\mu})\mathbf{e} = u^*\mathbf{e} = (c/n)\mathbf{e} = \mathbf{w}, \quad (7.96)$$

т. е. в системе покоя скорость энергии равна фазовой скорости. Из (7.96) с помощью (6.15) и (6.12) получим

$$U_i^* = \{c\mathbf{e}/\sqrt{\varepsilon\mu} - 1, \quad ic\sqrt{\varepsilon\mu}/\sqrt{\varepsilon\mu} - 1\}; \quad (7.97)$$

$$S_i = (\mathbf{S}, i\mathbf{ch}) = (f^2 + g^2)\{c\mathbf{e}/\sqrt{\varepsilon\mu}, \quad i\mathbf{e}\} = (f^2 + g^2)\sqrt{\varepsilon\mu} - 1 U_i^*/\sqrt{\varepsilon\mu}. \quad (7.98)$$

Кроме того, из (7.69) найдем, что

$$\begin{aligned} S_{\mu\nu} &= -t_{\mu\nu} = -\varepsilon E_\mu E_\nu - \mu H_\mu H_\nu + (\varepsilon E^2 + \mu H^2)\delta_{\mu\nu}/2 = \\ &= (f^2 + g^2)(-e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} - e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)} + \delta_{\mu\nu}) = (f^2 + g^2)e_\mu e_\nu, \end{aligned} \quad (7.99)$$

так как с учетом (7.91) и (7.94) $e_\mu^{(1)}e_\nu^{(1)} + e_\mu^{(2)}e_\nu^{(2)} + e_\mu e_\nu = \delta_{\mu\nu}$. Наконец, (7.72) дает

$$S_{\mu 4} = icg_\mu; \quad g_\mu = (\varepsilon\mu/c)(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_\mu = (\sqrt{\varepsilon\mu}/c)(f^2 + g^2)e_\mu. \quad (7.100)$$

Тогда для величины

$$a_\mu = S_{\mu l} U_l^*/c^2 = (1/c^2)(S_{\mu\nu} U_\nu^* + icg_\mu U_4^*) \quad (7.101)$$

с помощью (7.97), (7.99) и (7.100) получим

$$a_\mu = -[(f^2 + g^2)/c]\sqrt{\varepsilon\mu} - 1 e_\mu. \quad (7.102)$$

Таким образом, в соответствии с формулами (7.97)—(7.102) тензор R_{ik} , определенный в (6.19), имеет следующие компоненты:

$$\left. \begin{aligned} R_{\mu\nu} &\equiv S_{\mu\nu} + a_\mu U_\nu^* = (f^2 + g^2)\{e_\mu e_\nu - (\sqrt{\varepsilon\mu} - 1/c) \times \\ &\quad \times ce_\mu e_\nu / \sqrt{\varepsilon\mu} - 1\} = 0; \\ R_{\mu 4} &\equiv icg_\mu + a_\mu U_4^* = i(f^2 + g^2)\{\sqrt{\varepsilon\mu} - \sqrt{\varepsilon\mu} - 1 \times \\ &\quad \times \sqrt{\varepsilon\mu} / \sqrt{\varepsilon\mu} - 1\} e_\mu = 0; \\ R_{4\mu} &\equiv (i/c)(S_\mu + S_e U_e^* U_\mu^*/c^2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (7.103)$$

Следовательно, условие (6.19) удовлетворяется, и скорость распространения энергии \mathbf{u}^* в любой системе координат S совпадает с групповой скоростью, определенной из принципа Гюйгенса (см. также [217]).

Если \mathbf{v}' — скорость системы покоя S относительно системы S' с той же самой ориентацией пространственных осей, то коэффициенты преобразования $\epsilon_{\mu\nu}$ в (6.17') или (6.18) определяются формулой (4.129), где $\mathbf{v} = -\mathbf{v}'$, т. е.

$$\epsilon_{\mu\nu} = 0; \quad \epsilon_{\mu 4} = -\epsilon_{4\mu} = -i v'_\mu / c; \quad \epsilon_{44} = 0. \quad (7.104)$$

Поскольку скорость распространения энергии \mathbf{u}^{*} в системе S' равна

$$u_\mu^{*} = S'_\mu / h' = i c S'_\mu / S'_4 = i c U_\mu^{*} / U_4^{*}, \quad (7.105)$$

то ее можно найти из (6.18) или (6.17'), учитывая (7.104), а именно:

$$\mathbf{u}^{*} = (c/\sqrt{\epsilon\mu}) \mathbf{e} + \mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} / \epsilon\mu. \quad (7.106)$$

Эта формула в первом приближении совпадает, естественно, с формулой (2.55), если в последней положить $\mathbf{v} = -\mathbf{v}'$, $\mathbf{u} = \{c/\sqrt{\epsilon\mu}\} \mathbf{e}$. Из (7.106) находим величину \mathbf{u}^{*} :

$$u^{*} = c/n + (\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}') (1 - 1/n^2), \quad (7.107)$$

что совпадает с формулой Френеля (2.92). С другой стороны, если выбрать для тензора энергии выражение Абрагама, то формулы (7.90)—(7.99) будут еще справедливы в системе покоя, но вместо (7.100) из (7.84) получим

$$\mathbf{g}^{Abr} = (1/c) (\mathbf{E} \times \mathbf{H}) = \mathbf{S}/c^2 = (1/c\sqrt{\epsilon\mu}) (f^2 + g^2) \mathbf{e} = \mathbf{g} - (\epsilon\mu - 1) \mathbf{S}/c^2. \quad (7.108)$$

Таким образом, в этом случае вместо (7.101) имеем $a_\mu^{Abr} = a_\mu - (i/c)(\epsilon\mu - 1)(\mathbf{S}_\mu/c^2) U_4^{*}$ и тензор R_{ik} уже не равен нулю. Следовательно, U_i^{*} — не 4-вектор, и \mathbf{u}^{*} не преобразуется как скорость частицы. Чтобы получить явное выражение для вектора \mathbf{u}^{*} , снова используем (7.104), (7.105) и (6.17'). Тогда

$$\mathbf{u}^{*} = (c/\sqrt{\epsilon\mu}) \mathbf{e} + \mathbf{v}' - (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}) \mathbf{e} / \epsilon\mu + (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}) (1 - 1/\epsilon\mu) \mathbf{e} \quad (7.109)$$

и

$$u^{*} = c/n + 2(\mathbf{e} \cdot \mathbf{v}') (1 - 1/n^2), \quad (7.109')$$

что соответствует коэффициенту увлечения, равному $2(1 - 1/n^2)$, где $(1 - 1/n^2)$ — коэффициент увлечения, найденный Френелем.

Из (7.109) видно, что направление потока энергии в данном случае отличается от направления групповой скорости, определяемой по принципу Гюйгенса. Это вызывает изменение в абберационной формуле для среды с показателем преломления $n > 1$; соответствующее отклонение имеет величину первого порядка по v' . К сожалению, в движущейся прозрачной среде очень трудно измерить абберационные эффекты даже первого порядка.

Кроме того, из (7.109) видно, что скорость распространения энергии отличается от фазовой скорости даже когда $\mathbf{v}' \parallel \mathbf{e}$, в то время как групповая скорость в этом случае совпадает с фазовой скоростью. Этот странный результат вызван следующим обстоятельством.

У Минковского в рассматриваемом случае плотность 4-силы $f_i^{*} = f_i = 0$. Однако теория Абрагама приводит к появлению ненулевой плотности силы. В системе покоя в соответствии с (7.86) имеем

$$\mathbf{f}^{Abr} = (\epsilon\mu - 1/c^2) \partial \mathbf{S} / \partial t = [\epsilon\mu - 1/c \sqrt{\epsilon\mu}] \partial (f^2 + g^2) \mathbf{e} / \partial t; \quad f_4^{Abr} = 0, \quad (7.110)$$

т. е. в этой системе электромагнитная энергия сохраняется: но в системе S' это уже не так. Из (7.104) и формул преобразования $f_i^{*Abr} = f_i^{Abr} + \epsilon_{ikh} f_k^{Abr}$ получим

$$f_4^{*Abr} = \epsilon_{4\nu} f_\nu^{Abr} = \frac{i}{c} \cdot \frac{\epsilon\mu - 1}{c^2} \left(\mathbf{v}' \frac{\partial \mathbf{S}}{\partial t} \right) = \frac{i}{c} \frac{\epsilon\mu - 1}{c \sqrt{\epsilon\mu}} (\mathbf{v}' \cdot \mathbf{e}) \frac{\partial}{\partial t} (f^2 + g^2), \quad (7.111)$$

что с точностью до множителя i/c соответствует механической работе, совершенной над единичным объемом среды в единицу времени. Таким образом, в S' мы имеем обмен энергией между электромагнитной и механической системами, т. е. локальное поглощение и излучение средой световой энергии. Это ясно показывает, что разделение полного тензора энергии на электромагнитную и механическую части у Минковского более естественно, чем у Абрагама. В теории Минковского прозрачное тело является системой, которая даже локально не обменивается энергией с электромагнитным полем.

§ 7.9. Связанная среда с внутренней теплопроводностью

В § 6.4—6.6 мы имели дело с адиабатическим процессом в упругой среде, т. е. исследовали динамику чисто механической системы. Такая система описывается тензором энергии со свойствами (6.67), (6.68). Теперь рассмотрим более общую систему, связанную с непрерывно распределенной реальной материей, внутри которой может иметь место теплопроводность. Движение материи описывается полем скоростей $u(x, t)$ или соответствующей 4-скоростью $U_i(x)$. Тензор энергии T_{ik} этой обобщенной системы все еще симметричен, но для чисто механической системы уже не удовлетворяет условию (6.68). Из T_{ik} , U_i и тензора Δ_{ik} , определенного в (6.73), можно снова образовать скаляр $h^0(x)$ и тензор S_{ik} по формулам (6.72) и (6.75) соответственно. В этом случае эти величины также будут удовлетворять соотношениям (6.70) и (6.78). Кроме того, можно образовать ненулевой вектор

$$Q_i \equiv -\Delta_{ik} T_{kl} U_l = -T_{ik} U_k - h^0 U_i, \quad (7.112)$$

который ортогонален U_i :

$$U_i Q_i = 0. \quad (7.113)$$

Следовательно,

$$Q_i = \{Q, i(Q \cdot u)/c\}, \quad (7.114)$$

что в системе покоя сводится к

$$Q_i^0 = \{Q^0, 0\}. \quad (7.115)$$

Для чисто механической системы, когда справедливо (6.68), вектор Q_i тождественно равен нулю.

Подставляя выражение (6.73) для Δ_{ik} в уравнение (6.75) для S_{ik} и используя (7.112) и (6.72) вместо (6.72), получаем

$$S_{ik} = T_{ik} - h^0 U_i U_k / c^2 - (U_i Q_k + Q_i U_k) / c^2. \quad (7.116)$$

Тогда вместо (6.79) имеем

$$T_{ik} = M_{ik} + H_{ik}, \quad (7.117)$$

где

$$M_{ik} = h^0 U_i U_k / c^2 + S_{ik} \quad (7.118)$$

и

$$H_{ik} = (U_i Q_k + Q_i U_k) / c^2. \quad (7.119)$$

Вследствие (6.76) M_{ik} удовлетворяет соотношению

$$M_{ik} U_k = -h^0 U_i, \quad (7.120)$$

которое в соответствии с (6.68) является характеристическим уравнением для чисто механического тензора. Поэтому M_{ik} называется механической частью тензора энергии, а H_{ik} — его тепловой частью. Последняя с учетом (7.113) и (4.41) удовлетворяет соотношению

$$H_{ik} U_k = -Q_i. \quad (7.121)$$

В системе покоя имеем

$$\left. \begin{aligned} H_{\mu\nu}^0 &= 0, & H_{44}^0 &= 0, & H_{\mu 4}^0 &= H_{4\mu}^0 = i Q_{\mu}^0/c; \\ T_{\mu\nu}^0 &= S_{\mu\nu}^0, & T_{44}^0 &= -h^0, & T_{\mu 4}^0 &= T_{4\mu}^0 = i Q_{\mu}^0/c, \end{aligned} \right\} \quad (7.122)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} S_{\mu}^0 &\equiv -icT_{4\mu}^0 = Q_{\mu}^0; \\ g_{\mu}^0 &= T_{\mu 4}^0/i c \equiv Q_{\mu}^0/c^2 = S_{\mu}^0/c^2. \end{aligned} \right\} \quad (7.123)$$

Следовательно, в системе покоя, где отсутствует перенос механической энергии, плотность потока энергии совпадает с плотностью потока тепла, который поэтому равен 3-вектору \mathbf{Q}^0 . Разделение тензора T_{ik} на механическую M_{ik} и тепловую H_{ik} части сделано Экартом [63], который первым провел детальное исследование систем рассматриваемого типа.

Как и в гл. 6, определим теперь величину

$$t_{ik} = S_{ik} - S_{i4} U_k/U_4. \quad (7.124)$$

Тогда формулы (6.92), (6.93), (6.95) будут справедливыми, но соотношения (6.91), (6.94) выполняются уже не для полного тензора энергии системы T_{ik} , а лишь для его механической части M_{ik} . Пространственная часть $t_{\mu\nu}$ этой величины имеет все свойства относительного тензора напряжений \mathbf{t} , определенного в гл. 6. В системе покоя в соответствии с (7.122), (7.124) имеем

$$t_{\mu\nu}^0 = S_{\mu\nu}^0 = T_{\mu\nu}^0, \quad (7.125)$$

а также соотношение (6.122) между \mathbf{t} и \mathbf{t}^0 .

Формулы (6.100) и (6.104) здесь также справедливы, откуда следует, что величина

$$d\mathbf{t}_{\mu}(\mathbf{n}) = t_{\mu\nu} df_{\nu} \quad (7.126)$$

имеет характер истинной механической силы. Кроме того, остаются неизменными все рассуждения в § 6.5, приведшие к формулам (6.105)—(6.110), (6.112)—(6.116); но теперь (6.111) является выражением лишь для механической части тензора T_{ik} , т. е.

$$M_{ik} = \mu^0 U_i U_k + p_{(\sigma)}^0 h_i^{(\sigma)} h_k^{(\sigma)}. \quad (7.127)$$

Когда все три корня $p_{(\sigma)}^0$ уравнения (6.106) совпадают, т. е. когда отсутствует сдвиг, по аналогии с (6.125), (6.126), (6.128), (6.130) имеем:

$$\left. \begin{aligned} M_{ik} &= (h^0 + p^0) U_i U_k/c^2 + p^0 \delta_{ik}; \\ S_{ik} &= p^0 \Delta_{ik}, & t_{\mu\nu} &= p^0 \delta_{\mu\nu}; \\ \rho &= p^0. \end{aligned} \right\} \quad (7.128)$$

Введем для удобства величину s_{ik} , аналогичную t_{ik} в (7.124), но с заменой S_{ik} на тепловой тензор (7.119), т. е.

$$s_{ik} \equiv H_{ik} - H_{i4} U_k/U_4 = U_i (Q_k - Q_4 U_k/U_4)/c^2. \quad (7.129)$$

Очевидно, что аналогично (6.92)

$$s_{i4} = 0, \quad (7.130)$$

то все остальные свойства s_{ik} и t_{ik} совершенно различны. Наиболее важной частью t_{ik} является относительный тензор напряжений $t_{\mu\nu}$, с помощью которого по формулам (6.93), (6.95) выражаются все остальные компоненты t_{ik} , а также S_{ik} . Однако наиболее важной частью s_{ik} является величина

$$s_k \equiv -ics_{4k} = U_4 (Q_k - Q_4 U_k/U_4)/i c = (\mathbf{s}, 0), \quad (7.131)$$

где

$$\mathbf{s} = \gamma \{ \mathbf{Q} - \mathbf{u} (\mathbf{Q} \cdot \mathbf{u})/c^2 \}. \quad (7.132)$$

Здесь мы использовали (7.114) и (4.39).

В системе покоя s^0 равен плотности потока тепла Q^0 :

$$s^0 = Q^0. \quad (7.133)$$

Из (7.129) и (7.31) видно, что

$$s_{ik} = U_i s_k / \gamma c^2. \quad (7.134)$$

Решая уравнение (7.31) относительно Q_k , можно выразить Q_k , а следовательно, и H_{ik} через s_k .

В произвольной системе S 3-вектор \mathbf{s} является линейной функцией плотности потока тепла s^0 в системе покоя S^0 . Поскольку $Q_4^0 = 0$, из (4.29) имеем $\mathbf{Q} = \mathbf{Q}^0 + \mathbf{u} (\mathbf{Q}^0 \cdot \mathbf{u}) (\gamma - 1) / u^2$, следовательно,

$$\mathbf{s} = \gamma \{s^0 - \mathbf{u} (s^0 \cdot \mathbf{u} / c^2) [\gamma / (\gamma + 1)]\} \quad (7.135)$$

и мы видим, что при малых скоростях \mathbf{s} отличается от s^0 лишь величиной второго порядка малости по u/c .

Далее, вместо (6.91) в рассматриваемом случае из (7.117), (7.118), (7.124), (7.129) и (7.134) имеем:

$$T_{ik} - T_{i4} U_k / U_4 = t_{ik} + s_{ik} = t_{ik} + U_i s_k / \gamma c^2. \quad (7.136)$$

Отсюда, учитывая (6.2), (6.3), (6.93), для $i = \mu$, $k = \nu$ получаем

$$T_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} u_\nu + t_{\mu\nu} + u_\mu s_\nu / c^2, \quad (7.137)$$

а для $i = 4$, $k = \nu$

$$S_\nu = h u_\nu + u_\mu t_{\mu\nu} + s_\nu, \quad (7.138)$$

что является обобщением формул (6.60) и (6.65) для систем с теплопроводностью.

Плотность потока энергии

$$\mathbf{S} = h\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} + \mathbf{s} \quad (7.139)$$

отличается от соответствующей величины (6.65) для чисто механической системы 3-вектором \mathbf{s} , который поэтому следует интерпретировать как плотность потока тепла в обобщенной системе S . Эта интерпретация соответствует требованию, сформулированному на стр. 138, поскольку при малой u вектор \mathbf{s} равен нерелятивистскому потоку тепла s^0 с точностью до малых второго порядка. Плотность импульса равна

$$\mathbf{g} = S/c^2 = \mu\mathbf{u} + \mathbf{u} \cdot \mathbf{t} / c^2 + \mathbf{s} / c^2. \quad (7.140)$$

Последняя величина в правой части (7.140) представляет собой импульс потока тепла.

По аналогии с (6.102) рассмотрим теперь 4-вектор $H_{ik} dF_k$, где dF_i — 4-вектор (6.101). Обозначая $H_{ik} dF_k$ через $dQ_i(n)/d\tau$ и учитывая (6.101), получаем

$$dQ_i/d\tau = H_{ik} dF_k = \gamma (H_{i\nu} + i H_{i4} u_\nu / c) df_\nu = \gamma (H_{i\nu} - H_{i4} U_\nu / U_4) df_\nu$$

или в соответствии с (7.129), (7.134):

$$dQ_i/d\tau = H_{ik} dF_k = \gamma s_{i\nu} df_\nu = U_i (s_\nu df_\nu) / c^2 = U_i (sdf) / c^2. \quad (7.141)$$

Поскольку $H_{ik} dF_k$ и U_i — 4-векторы, sdf — инвариант, т. е.

$$sdf = s^0 df^0. \quad (7.142)$$

Это соотношение непосредственно следует из формул преобразования (7.135) и (u) на стр. 91, для \mathbf{s} и $d\mathbf{f}$ соответственно.

Рассмотрим снова частицу материи, которая в момент времени t имеет объем $V(t)$, ограниченный замкнутой поверхностью $f(t)$. Ее 4-импульс (6.98) равен

$$G_i(t) = \int_{V(t)} g_i dV = (1/ic) \int_V T_{i4} dV = (\mathbf{G}, iH/c). \quad (7.143)$$

Поскольку поверхность f движется вместе с материей,

$$dG_i/dt = \int_V (\partial T_{i4}/\partial x_4) dV - (1/c) \int_f T_{i4} u_v n_v df, \quad (7.144)$$

где \mathbf{n} — внутренняя нормаль к поверхности f . Когда система замкнута, законы сохранения имеют форму (6.1), следовательно,

$$\partial T_{i4}/\partial x_4 = -\partial T_{iv}/\partial x_v. \quad (7.145)$$

Подставляя (7.145) в первый интеграл (7.144) и используя теорему Гаусса, получаем

$$dG_i/dt = \int_f (T_{iv} - T_{i4} u_v/c) n_v df = \int (T_{iv} - T_{i4} U_v/U_4) df_v$$

или, учитывая (7.136),

$$dG_i/dt = \int_f t_{iv} df_v + \int_f s_{iv} df_v. \quad (7.146)$$

В соответствии с (6.100) и (7.134) четыре уравнения (7.146) можно записать в виде

$$d\mathbf{G}/dt = \int_f dt(\mathbf{n}) + \int_f \mathbf{u}(\mathbf{s} \cdot d\mathbf{f})/c^2; \quad (7.147)$$

$$dH/dt = \int_f \mathbf{u} dt(\mathbf{n}) + \int_f s df. \quad (7.148)$$

Первый интеграл в правой части (7.147) представляет собой полную механическую поверхностную силу, с которой наружная материя действует на материю внутри $f(t)$ (для систем без сдвига сила $dt(\mathbf{n}) = pndf$ равна нормальному давлению; но для вязкой жидкости эта сила кроме давления включает в себя и силу вязкости); $\mathbf{u}dt(\mathbf{n})$ — мощность этой силы, так что первый член в (7.148) представляет собой полную работу, совершенную механической поверхностной силой за единицу времени t . Следовательно, второй интеграл в (7.148) следует интерпретировать как полную тепловую энергию, втекающую в систему за единицу времени. (Это соответствует нашей интерпретации s в (7.139) как потока тепловой энергии.) Тогда sdf — количество тепловой энергии, протекающей через элемент df в направлении \mathbf{n} . Аналогично второй интеграл в (7.147) представляет собой поток теплового импульса в систему. Тогда тепловая энергия $dQ(\mathbf{n})$, проходящая через df в течение времени dt , равна

$$dQ(\mathbf{n}) = sdfdt = (s^0 df^0) \gamma d\tau, \quad (7.149)$$

[Здесь мы использовали (7.147), а $d\tau = dt/\gamma$ — собственное время материи в рассматриваемой точке.] Формулу (7.149) можно представить в виде

$$dQ(\mathbf{n}) = \gamma dQ^0(\mathbf{n}^0), \quad (7.150)$$

где

$$dQ^0(\mathbf{n}^0) = s^0 df^0 d\tau \quad (7.151)$$

— соответствующая тепловая энергия в системе покоя. Это тепло обладает импульсом $d\mathbf{P}(\mathbf{u})$, который в соответствии с (7.147) равен

$$d\mathbf{P}(\mathbf{n}) = \mathbf{u}(sdf) dt/c^2 = \mathbf{u}dQ(\mathbf{n})/c^2 = \gamma \mathbf{u}dQ^0(\mathbf{n}^0)/c^2. \quad (7.152)$$

Таким образом, приток тепловой энергии и импульса к телу через поверхность df дает такой же эффект, как если бы к этому телу прибавилась частица с собственной массой $dQ^0(\mathbf{n}^0)/c^2$ и скоростью \mathbf{u} . 4-Импульс подведенного тепла равен

$$dQ_i(\mathbf{n}) = \{(d\mathbf{P}(\mathbf{n}), i dQ(\mathbf{n})/c\} = dQ^0(\mathbf{n}^0) U_i/c^2. \quad (7.153)$$

Он пропорционален 4-скорости материи. Очевидно, что $dQ_i(\mathbf{n})$ равен 4-вектору (7.141), умноженному на $d\tau$:

$$dQ_i(\mathbf{n}) = U_i(\text{sdf}) d\tau/c^2 = \gamma s_{i\nu} df_\nu d\tau = H_{ik} dF_k d\tau. \quad (7.154)$$

С помощью теоремы Гаусса (7.146) можно записать в виде

$$dG_i/dt = -\int_V (\partial t_{i\nu}/\partial x_\nu) dV - \int_V (\partial s_{i\nu}/\partial x_\nu) dV. \quad (7.155)$$

Для инфинитезимального объема 4-импульс материи внутри $\delta V(t)$ определяется формулой

$$\delta G_i = g_i \delta V = (g\delta V, i h \delta V/c) = (\delta G, i \delta H/c), \quad (7.156)$$

а скорость изменения 4-импульса равна

$$d\delta G_i/dt = (\tilde{f}_i + \tilde{\pi}_i) \delta V. \quad (7.157)$$

Здесь \tilde{f}_i — плотность 4-силы (6.70), (6.96):

$$\tilde{f}_i = -\partial t_{i\nu}/\partial x_\nu = [-\partial t_{\mu\nu}/\partial x_\nu, -i(\partial u_\mu t_{\mu\nu}/\partial x_\nu)/c], \quad (7.158)$$

а

$$\tilde{\pi}_i = -\partial s_{i\nu}/\partial x_\nu = [-\partial(u_\mu s_\nu/c^2)/\partial x_\nu, -(i \partial s_\nu/\partial x_\nu)/c] \quad (7.159)$$

есть увеличение 4-импульса в единице объема в единицу времени, обусловленное притоком тепла через границу объема δV . Ни \tilde{f}_i , ни $\tilde{\pi}_i$ не являются 4-векторами. Уравнения (7.157) выражают законы сохранения энергии и импульса. В системе покоя S^0 , где $\mathbf{u}^0 = 0$, они сводятся к уравнениям:

$$d\delta G^0/d\tau = -t_{\mu\nu,\nu}^0 \delta V^0 - (s_\nu^0 u_{\mu,\nu}^0/c^2) \delta V^0; \quad (7.160)$$

$$d\delta H^0/d\tau = (-t_{\mu\nu}^0 u_{\mu,\nu}^0 - \text{div}^0 s^0) \delta V^0. \quad (7.161)$$

Последнее уравнение является обобщением (6.138) для случая материальной среды с касательными напряжениями и подводом тепла. Величина $-t_{\mu\nu,\nu}^0 u_{\mu,\nu}^0 \delta V^0$ — механическая мощность, а $-\text{div}^0 s^0 \delta V^0$ — количество тепловой энергии, втекающей в объем δV^0 за единицу собственного времени. Следовательно, (7.161) содержит в себе первый закон классической термодинамики (6.139). Однако в релятивистской теории этот закон должен быть дополнен соответствующим уравнением сохранения импульса, так как в соответствии с (7.160) подводимое тепло вызывает немеханическое изменение импульса, представленное последним членом в правой части (7.160). Отсюда можно сделать вывод, что релятивистское обобщение первого закона классической термодинамики описывается четырьмя уравнениями. Для инфинитезимальной частицы в произвольной системе S он выражается 4-компонентным уравнением (7.157).

Разделение изменения 4-импульса тела на механическую часть, описывающую действие истинной механической силы, и тепловую часть имеет четко выраженный физический смысл. Однако аналогичное разделение самого 4-импульса в общем случае не может быть проведено однозначно. Поэтому разделение тензора T_{ik} на механическую M_{ik} и тепловую H_{ik} части нельзя, например, истолковывать в том смысле, что $-M_{44} = h^2 \gamma^2 - S_{44}$ — плотность механической энергии, а $-H_{44}$ — плотность тепловой энергии. Необходимо иметь в виду, что h^0 , входящее в выражение для $-M_{44}$, включает в себя и энергию «теплого движения» молекул в теле. Принятая в данном случае терминология должна просто напоминать, что M_{ik} имеет те же свойства, что и тензор энергии чисто механической системы, и что он посредством величины t_{ik} , определенной в (7.124), описывает только механическое изменение 4-импульса. Аналогично мы видели, что H_{ik} или величины s_{ik} , полученная из H_{ik} , описывают изменение 4-импульса, обусловленное подводом тепла.

§ 7.10. Первый закон релятивистской термодинамики. Трансформационные свойства 4-импульса подведенного тепла

Вскоре после появления теории относительности Планк [195, 196], Хазенберль [110], Эйнштейн [67] и другие независимо друг от друга сформулировали законы термодинамики в соответствии со специальным принципом относительности. Эта первоначальная трактовка релятивистской термодинамики вошла без изменения в многочисленные учебники, включая и первое издание настоящей монографии. Однако Отт [191] и независимо от него Арзелье [15] показали, что старая формулировка не совсем удовлетворительна, в частности из-за того, что при описании термодинамических процессов (см. § 4.6) вместо чисто механических сил использовались обобщенные силы.

Работы Отта и Арзелье вызвали бурную дискуссию, в результате чего в настоящее время нет общепринятого описания релятивистской термодинамики. Это является следствием того, что возможны различные формулировки термодинамических законов, поскольку один принцип относительности не определяет их однозначно. Фактически, из принципа относительности следует лишь, что законы классической термодинамики справедливы в мгновенной системе покоя S^0 независимо от ее движения относительно неподвижных звезд. Однако в любой другой системе S существует широкий спектр возможных способов описания релятивистской термодинамики, поскольку формулировка основных законов довольно произвольным образом может явно зависеть от скорости материи относительно S . В этой ситуации мы должны опираться лишь на требование простоты и удобства. Принятая нами формулировка соответствует основным идеям Отта и Арзелье, но в деталях она следует по пути, подсказанному релятивистским обобщением классической статистической механики Гиббса [185].

В соответствии с первым законом классической термодинамики, который должен оставаться справедливым в системе покоя материи, полная энергия H^0 тела в состоянии термодинамического равновесия есть функция переменных, определяющих это состояние. Кроме того, в термодинамических процессах перехода системы из одного состояния термодинамического равновесия в другое изменение энергии ΔH^0 равно

$$\Delta H^0 = \Delta A^0 + \Delta Q^0, \quad (7.162)$$

где ΔA^0 — механическая работа, произведенная при этом внешней средой над системой, а ΔQ^0 — количество тепловой энергии, полученной телом во время процесса. Такое разделение ΔH^0 в (7.162) на две части является однозначным, если мы условимся, в соответствии с духом классической термодинамики, что ΔA^0 включает в себя лишь работу *истинных* механических сил. Тогда ΔQ^0 определится как та часть ΔH^0 , которая не обусловлена действием этих сил. Этой точки зрения мы будем придерживаться в любой системе отсчета, в отличие от старой формулировки, когда в ΔA включалась работа некоторых обобщенных сил.

Мы уже упоминали, что вследствие теоремы Эйнштейна о наличии инерции всех видов энергии, релятивистское обобщение первого закона должно включать аналогичное разделение изменения импульса на две части, обусловленных действием механических сил и подводом тепла соответственно. Следовательно, в произвольной системе S первый закон термодинамики можно записать в виде

$$\Delta G_i = \Delta I_i + \Delta Q_i, \quad i = 1, 2, 3, 4. \quad (7.163)$$

Здесь изменение 4-импульса

$$\Delta G_i = (\Delta G, i \Delta H/c) \quad (7.164)$$

и 4-импульс внешних механических сил

$$\Delta I_i = (\Delta I, i \Delta A/c). \quad (7.165)$$

Его пространственная часть ΔI есть импульс, т. е. интеграл по времени от результирующей внешней силы, а ΔA — полная работа этой силы во время процесса.

Наконец, 4-импульс подведенного тепла

$$\Delta Q_i = (\Delta P, i \Delta Q/c). \quad (7.166)$$

Ни ΔG_i , ни ΔI_i не являются, вообще говоря, 4-векторами, но, как мы увидим, 4-импульс ΔQ_i подведенного во время процесса тепла, соединяющего два термодинамических равновесных состояния, всегда является 4-вектором.

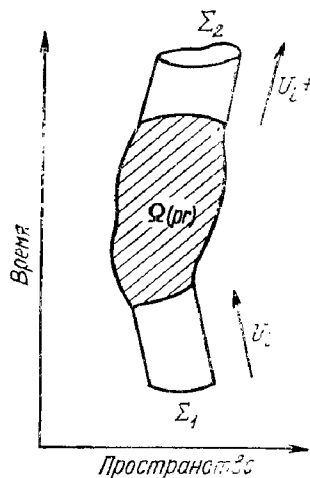


Рис. 16.

В начальном и конечном состояниях равновесия скорость материи u везде одинакова в теле, и поток тепла отсутствует. Однако во время процесса значение u зависит от пространственных и временной координат, и существует тепловой поток, зависящий от свойств тела и типа рассматриваемого процесса. В случае, когда внешние силы являются поверхностными силами, действующими на поверхность тела, скорость изменения 4-импульса определяется уравнением (7.146), где $f(t)$ — замкнутая поверхность, целиком лежащая внутри изменяющегося объема тела. Это уравнение можно записать и в форме (7.155). В более общем случае, когда внешние силы могут быть и объемными, описываемыми плотностью 4-силы f_i , типа (4.128), (4.220), вместо (7.145) имеем

$$\partial T_{ik}/\partial x_k = f_i. \quad (7.167)$$

В этом случае в правую часть (7.155) следует добавить интеграл $\int_V f_i dV$. Полное изменение 4-импульса получается интегрированием этого нового уравнения по временному интервалу $t_1 < t < t_2$, включающему отрезок времени, в течение которого происходит рассматриваемый процесс. При этом получается уравнение в форме первого закона (7.163), в котором

$$\Delta I_i = \Delta I_i^v + \Delta I_i^s; \quad (7.168)$$

$$\Delta I_i^v = \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V f_i dV = \int_{\Omega(12)} f_i d\Omega/c; \quad (7.169)$$

$$\Delta I_i^s = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{\partial t_{iv}}{\partial x_v} dV = - \int_{\Omega(12)} \frac{\partial t_{ik}}{\partial x_k} d\Omega/c; \quad (7.170)$$

$$\Delta Q_i = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_V \frac{\partial s_{iv}}{\partial x_v} dV = - \int_{\Omega(12)} \frac{\partial s_{ik}}{\partial x_k} d\Omega/c. \quad (7.171)$$

Здесь $\Omega_{(12)}$ — часть мировой трубки системы, заключенной между двумя гиперповерхностями Σ_1 и Σ_2 , соответствующими $t = t_1$, $t = t_2$ (рис. 16), а $d\Omega$ определяется из (4.124). Кроме того, мы использовали формулы (6.92) и (7.130):

$$t_{i4} = s_{i4} = 0. \quad (7.172)$$

До и после процесса область 4-пространства, содержащая материю, имеет форму цилиндрических трубок, оси которых параллельны постоянным 4-скоростям U_i и $U_i + \Delta U_i$ материи в начальном и конечном состояниях соответственно. Поскольку эти состояния равновесные, безразлично, где выбирать такие t_1

и t_2 , для которых Σ_1 и Σ_2 не пересекают область $\Omega_{(np)}$, где происходит процесс. Внутри $\Omega_{(np)}$ 4-скорость, конечно, не будет постоянной.

С помощью теоремы Гаусса (4.194) выражение (7.171) для ΔQ_i можно преобразовать в интеграл по трехмерной поверхности Σ области $\Omega_{(12)}$

$$\Delta Q_i = (1/c) \int_{\Sigma} \varepsilon s_{ik} d\Sigma_k = (1/c) \int_{\Sigma(12)} s_{ik} d\Sigma_k. \quad (7.173)$$

Здесь

$$d\Sigma_k = (1/i) \varepsilon_{klmn} dx_l \delta x_m \Delta x_n \quad (7.174)$$

— 4-вектор, ортогональный инфинитезимальным векторам dx_l , δx_m , Δx_n , которые находятся внутри Σ и выбраны так, чтобы $d\Sigma_k$ был направлен внутрь области $\Omega_{(12)}$. Гиперповерхность Σ состоит из двух концевых поверхностей Σ_1 , Σ_2 и «кожуха» $\Sigma_{(12)}$ трубы $\Omega_{(12)}$. На Σ_1 и Σ_2 $d\Sigma_i$ имеет форму (4.195). Поэтому с учетом (7.172) вклад в (7.173) от Σ_1 и Σ_2 равен нулю. Следовательно, в (7.173) поверхность Σ можно заменить «кожухом» $\Sigma_{(12)}$, что и сделано в последнем выражении для правой части этого уравнения.

«Кожух» образован мировыми линиями точек поверхности f тела, откуда следует, что в каждой точке (x_i) на $\Sigma_{(12)}$ 4-вектор $d\Sigma_k$ ортогонален 4-скорости $U_i(x)$ в этой точке, поэтому во всех точках $\Sigma_{(12)}$

$$U_k d\Sigma_k = 0; \quad d\Sigma_4 = -U_\mu d\Sigma_\mu / U_4. \quad (7.175)$$

Из (7.172), (7.129), и (7.175) получим

$$s_{ih} d\Sigma_k = s_{i\mu} d\Sigma_\mu = (H_{i\mu} - H_{i4} U_\mu / U_4) d\Sigma_\mu = H_{ih} d\Sigma_k. \quad (7.176)$$

Это, очевидно, 4-вектор. Интеграл (7.173) является суммой таких 4-векторов, но этого еще недостаточно для того, чтобы ΔQ_i был 4-вектором, так как область интегрирования $\Sigma_{(12)}$ зависит от системы S , в которой производится интегрирование. Однако, если начальное и конечное состояния являются термодинамически равновесными, как это мы предположили, подинтегральное выражение в (7.173) равно нулю везде вне «кожуха» $\Sigma_{(np)}$ области $\Omega_{(np)}$. Тогда

$$\Delta Q_i = (1/c) \int_{\Sigma_{(np)}} s_{ih} d\Sigma_k = (1/c) \int_{\Sigma_{(np)}} H_{ih} d\Sigma_k \quad (7.177)$$

поскольку $\Sigma_{(np)}$ — инвариантная область, ΔQ_i , определяемый в (7.177), — 4-вектор [184, 36, 236].

С другой стороны, 4-импульс ΔI_i , определяемый в (7.168)—(7.170), в общем случае не 4-вектор, даже если начальное и конечное состояния термодинамически равновесны. ΔI_i является 4-вектором только в том случае, если вне $\Omega_{(np)}$ f_i и t_{ik} отсутствуют, т. е. когда термодинамическая система до и после процесса является свободной системой. Тогда ΔG_i также 4-вектор (см. § 6.2). Когда система представляет собой жидкость, заключенную в сосуд (это условие, очевидно, не выполняется, поскольку стенки сосуда воздействуют на жидкость силами нормального давления, даже если она находится в равновесном состоянии).

На $\Sigma_{(12)}$ векторы dx_l , δx_m , Δx_n , входящие в определение $d\Sigma_k$ (7.174), можно выбрать так, чтобы

$$dx_4 = \delta x_4 = 0; \quad \Delta x_n = d\tau U_n. \quad (a)$$

Тогда

$$(1/c) d\Sigma_k = d\tau dF_k, \quad (б)$$

где dF_k — 4-вектор (6.101), определяемый формулами (д), (в), (з), стр. 91. С помощью (7.177), (б), (7.154) и (7.153) для 4-импульса подведенного тепла получим

$$\Delta Q_i = \int_{\Sigma_{(np)}} H_{ih} dF_k d\tau = \int_{\Sigma_{(np)}} dQ_i(n) = \int_{\Sigma_{(np)}} U_i dQ^0(n^0)/c^2, \quad (в)$$

откуда ясно виден физический смысл выражения (7.177).

§ 7.11. Второй закон релятивистской термодинамики

Переходя к формулировке второго закона термодинамики в произвольной инерциальной системе, рассмотрим для простоты лишь физические процессы, т. е. такие процессы, в которых не происходят химические реакции.

В соответствии со вторым законом классической термодинамики, который всегда выполняется в системе покоя, энтропия S^0 тела в тепловом равновесии есть функция от параметров состояния и определяется уравнением

$$dS^0 = \delta Q_{обр}^0 / T^0 = \theta^0 \delta Q_{обр}^0. \quad (7.178)$$

Здесь dS^0 — изменение энтропии между двумя близкими равновесными состояниями, а $\delta Q_{обр}^0$ — тепловая энергия, полученная телом в течение *обратимого* процесса, связывающего два равновесных состояния. Кроме того, T^0 — собственная абсолютная температура, измеренная неподвижным относительно тела термометром, а

$$\theta^0 = 1/T^0, \quad (7.179)$$

— величина, обратная температуре, названная Труделлом [261] «холодом». Для необратимых процессов второй закон утверждает, что

$$dS^0 > \delta Q^0 / T^0 = \theta^0 \delta Q^0. \quad (7.180)$$

Из (7.178) следует, что для обратимых процессов без подвода тепла, т. е. для адиабатических процессов, энтропия постоянна. Если мы хотим, чтобы это было справедливо для произвольных адиабатических процессов в любой инерциальной системе, следует принять, что энтропия — релятивистский инвариант, т. е.

$$S = S^0. \quad (7.181)$$

Другими словами, мы должны предположить, что энтропия тела в тепловом равновесии не зависит от скорости тела. Чтобы убедиться в этом, рассмотрим адиабатическое ускорение, т. е. бесконечно медленное и плавное ускорение без подвода тепла, изменяющее скорость тела без заметного нарушения его внутреннего состояния. Тогда требование постоянства энтропии в течение этого адиабатического процесса приводит к выводу (7.181) об инвариантности энтропии (см. аналогичное рассмотрение на стр. 110 для электрического заряда частицы).

Для покоящегося тела термодинамическое состояние определяется T^0 (или θ^0) и некоторым числом других параметров состояния $(a) = (a_1, \dots, a_m)$. (В случае однородного изотропного тела достаточно одного параметра. Например, можно выбрать давление p^0 или объем V^0 .) Чтобы полностью определить термодинамическое состояние тела в произвольной инерциальной системе, необходимо знать еще три параметра (например, компоненты скорости \mathbf{u}). Таким образом, «пространство» термодинамических состояний, описываемое переменными

$$(a), \theta^0, \mathbf{u}, \quad (7.182)$$

является $(m + 1 + 3)$ -мерным. Переменные (a) , θ^0 определяют внутреннее состояние, а \mathbf{u} описывают кинематику тела.

Такой выбор параметров состояния вполне естествен для нерелятивистской теории, когда внутренние свойства никак не связаны с «внешними» кинетическими свойствами. Однако в релятивистской теории это не так, поскольку инертная масса тела зависит от его внутреннего состояния. Поэтому более естественно переменные θ^0 , \mathbf{u} заменить 4-компонентной величиной

$$\theta_i = \theta^0 U_i, \quad (7.183)$$

где U_i — 4-скорость тела. Поскольку θ^0 — инвариант, θ_i — времениподобный 4-вектор, который будем называть «вектором холода». [Заметим, что четыре величины θ_i независимы, в отличие от компонент u_i , связанных соотношением (4.41).] Затем, выбирая инвариантные (a) , получим, что состояние описывается тензорными величинами

$$\{(a), \theta_i\} = \{a_1, \dots, a_m, \theta_i\}. \quad (7.184)$$

В системе покоя вектор «холода» имеет только одну ненулевую компоненту, пропорциональную «холоду» θ^0 , так как в этой системе

$$\theta_i^0 = i c \theta^0 \delta_{i4}. \quad (7.185)$$

При таком выборе параметров состояния второй закон термодинамики в произвольной системе отсчета принимает простую форму

$$dS \geq -\theta_i \delta Q_i, \quad (7.186)$$

где знак равенства выполняется лишь для обратимых процессов. Поскольку θ_i и $\delta\theta_i$ — 4-векторы, обе части в (7.186) инвариантны. В соответствии с (7.185) и (7.166) для правой части (7.186) получим

$$-\theta_i \delta Q_i = -\theta_i^0 \delta Q_i^0 = -i c \theta^0 \delta Q_4^0 = \theta^0 \delta Q^0. \quad (7.187)$$

Используя (7.181), получаем, что (7.186) совпадает с выражениями (7.178) и (7.180) для обратимых и необратимых процессов соответственно.

В формуле (в) на стр. 169 для 4-импульса подведенного тепла 4-скорость U_i в общем случае является сильно меняющейся функцией от координат внутри области интегрирования $\Sigma_{(пр)}$. Так будет в случае необратимого процесса, даже если он «инфинитезимальный», т. е. когда приращения всех величин во время процесса настолько малы, что произведениями этих приращений можно пренебречь. Однако для инфинитезимального обратимого процесса, протекающего так медленно и плавно, что система проходит через последовательные равновесные состояния, можно считать, что значения U_i везде в $\Sigma_{(пр)}$ лежат в пределах значений U_i в начальном и конечном состояниях. Следовательно, в первом приближении, для инфинитезимального обратимого процесса из формулы (в) на стр. 169 получим

$$\delta Q_i^{обр} = U_i \int_{\Sigma_{(пр)}} dQ^0 (n^0)/c^2 = U_i \delta Q_{обр}^0 / c^2. \quad (а)$$

Здесь U_i — 4-скорость в начальном состоянии, а $\delta Q_{обр}^0$ — полное подведенное тепло, измеренное в системе покоя тела в начальном состоянии.

При $i = 4$ выражение (а) дает следующую формулу преобразования для тепловой энергии, полученной телом во время обратимого процесса:

$$\delta Q_{обр} = \delta Q_{обр}^0 / (1 - u^2/c^2)^{1/2}. \quad (б)$$

Вместе с (7.181) это выражение дает возможность записать второй закон (7.178) для обратимых процессов в форме

$$dS = \delta Q_{обр} / T, \quad (в)$$

где

$$T = T^0 / (1 - u^2/c^2)^{1/2}. \quad (г)$$

Поскольку (в) имеет такую же форму, что и (7.178), величину T , определенную формулой (г) Отта и Арзелье, можно назвать температурой тела относительно системы S , в которой тело движется со скоростью u . Однако для общего необратимого процесса второй закон не будет описываться просто неравенством

$$dS > \delta Q / T, \quad (д)$$

так как его правая часть — не инвариант, за исключением случая необратимых процессов самого частного типа. $\delta Q / T$ будет инвариантом только тогда, когда 4-импульс подведенного тепла пропорционален 4-скорости, т. е. когда тепловой импульс равен нулю в системе покоя. По этой причине мы не будем вводить отдельную температуру T для каждой инерциальной системы, а охарактеризуем термодинамическое (и кинетическое) состояние

4-вектором θ_i , позволяющим сформулировать второй закон для всех процессов в простой форме (7.186). Температура T в (д) пропорциональна четвертой компоненте 4-вектора

$$T_i = T^0 U_i; \quad T_4 = icT. \quad (e)$$

T_i — температурный вектор, введенный Арзелье [15]. Он связан с вектором «холода» соотношением

$$\theta_i = \theta^0 T_i. \quad (ж)$$

Чисто механический процесс (т. е. процесс без подвода тепла) в одной инерциальной системе является чисто механическим процессом в любой инерциальной системе, так как из условия $s^0 = 0$, $\delta Q_i^0 = 0$, вследствие (7.135) и того, что δQ_i — 4-вектор, следует, что $s = 0$, $\delta Q_i = 0$.

Обратное утверждение, однако, неверно, т. е. чисто термический процесс в системе покоя, когда $\Delta I_i^0 = 0$, в общем случае не будет чисто тепловым процессом в другой системе S , поскольку ΔI_i в S не равен нулю. Исключением является частный случай, когда тело до и после процесса свободно, т. е. когда ΔI_i — 4-вектор. Это связано с относительностью одновременности физических событий [127. 184].

§ 7.12. Термодинамические потенциалы однородных изотропных сред*

В классической термодинамике (т. е. для покоящегося тела) термодинамические потенциалы — такие функции, из которых все остальные функции состояния можно получить простым дифференцированием. Для тела рассматриваемого типа хорошо известным примером термодинамического потенциала является свободная энергия Гиббса G^0 , которая считается функцией температуры (или «холода») и давления.

В произвольной системе S состояние можно описать давлением $p = p^0$ и вектором «холода» θ_i :

$$(\theta_i, p) \quad (7.188)$$

и любую функцию состояния рассматривать как функцию этих переменных. Это справедливо, в частности, для инвариантной функции состояния:

$$\psi(\theta_i, p) = -\theta_i E_i - S. \quad (7.189)$$

Здесь S — энтропия, а E_i — 4-вектор энтальпии, определенный (6.151). В отличие от E_i 4-импульс G_i в (6.149) не 4-вектор. Связь между этими величинами в соответствии с (6.149) — (6.151) следующая:

$$G_i = E_i - i p V \delta_{i4} / c. \quad (7.190)$$

Тогда первый закон термодинамики (7.163) для инфинитезимальных процессов можно записать в виде

$$dE_i = \delta J_i + \delta Q_i, \quad (7.191)$$

где

$$\delta J_i = \delta I_i + i d(pV) \delta_{i4} / c. \quad (7.192)$$

Поскольку dE_i и δQ_i — 4-векторы, из (7.192) следует, что δJ_i тоже 4-вектор, в отличие от δI_i , в общем случае не обладающего этим свойством. Таким образом, $\theta_i \delta J_i$ — инвариант, значение которого равно

$$\theta_i \delta J_i = \theta_i^0 \delta J_i^0 = i c \theta^0 \delta J_4^0 = -\theta^0 \{ \delta A^0 + d(p^0 V^0) \}. \quad (7.193)$$

* См. [186].

Здесь мы использовали (7.185), (7.192) и (7.165). Для обратимого процесса совершенная работа в системе покоя равна

$$\delta A^0 = -p^0 dV^0. \quad (7.194)$$

Следовательно,

$$\theta_i \delta J_i^{06p} = -\theta^0 V^0 dp^0 = -\theta^0 V^0 dp. \quad (7.195)$$

Из второго закона для обратимого процесса (7.186) и первого закона в форме (7.191) получим

$$dS = -\theta_i \delta Q_i^{06p} = -\theta_i dE_i + \theta_i \delta J_i^{06p}$$

или, используя (7.195):

$$dS = -\theta_i dE_i - \theta^0 V^0 dp. \quad (7.196)$$

Дифференцируя (7.189) и учитывая (7.196), находим, что

$$d\Psi(\theta_i, p) = -E_i d\theta_i + \theta^0 V^0 dp, \quad (7.197)$$

т. е.

$$E_i = -\partial\Psi/\partial\theta_i; \quad V^0 = (1/\theta^0) \partial\Psi/\partial p. \quad (7.198)$$

Таким образом, если релятивистский термодинамический потенциал $\Psi(\theta_i, p)$ задан как функция параметров состояния (7.188), то энтальпию E_i и объем покоя V^0 можно получить из $\Psi(\theta_i, p)$ частным дифференцированием по параметрам состояния. Для энтропии из (7.189), (7.198) получим

$$S = -\Psi + \theta_i \partial\Psi/\partial\theta_i. \quad (7.199)$$

Поскольку Ψ , по определению (7.189), — инвариант, он может зависеть лишь от инвариантной комбинации тензорных величин (7.188). Единственной инвариантной комбинацией из θ_i является норма этого времениподобного вектора:

$$\theta = \theta(\theta_i) = (-\theta_i \theta_i)^{1/2}/c. \quad (7.200)$$

В результате

$$\Psi(\theta_i, p) = f(\theta, p), \quad (7.201)$$

где f — форм-инвариантная функция от θ и p .

Из (7.183) следует, что значение инварианта θ равно «холоду», т. е.

$$\theta^0 = \theta. \quad (7.202)$$

Таким образом, $\theta(\theta_i)$ просто инвариантный холод, выраженный через θ_i , а 4-скорость имеет вид

$$U_i = \theta_i/\theta. \quad (7.203)$$

В системе покоя инвариант Ψ в (7.189) сводится к

$$\Psi = \Psi^0 = -\theta_i^0 E_i^0 - S^0 = \theta^0 E^0 - S^0 = \theta^0 G^0, \quad (7.204)$$

где

$$G^0 = E^0 - T^0 S^0 = H^0 + p^0 V^0 - T^0 S^0 \quad (7.205)$$

— свободная энергия Гиббса (включающая в себя и энергию покоя массы $p^0 V^0$ тела). Здесь мы использовали (7.185) и (6.151). Величина

$$\Psi^0(\theta^0, p^0) = f(\theta^0, p^0) = \theta^0 G^0(\theta^0, p^0) \quad (7.206)$$

является функцией параметров состояния θ^0, p^0 в системе покоя, которые в принципе могут быть определены посредством обычных лабораторных экспериментов с покоящимся телом. Тогда потенциал $\Psi(\theta_i, p)$ в системе S полу-

чается из (7.201) заменой аргументов θ^0, p^0 в Ψ^0 (θ^0, p^0) = $f(\theta^0, p^0)$ их выражениями θ, p через параметры состояния (7.188) в S :

$$\Psi(\theta_i, p) = \Psi^0(\theta, p). \quad (7.207)$$

В системе покоя, где $\theta_i^0 = i c \theta^0 \delta_{i4}$, три уравнения в (7.198) выражают тот факт, что $E_\mu^0 = 0$ при $i = \mu$. Два оставшихся уравнения имеют вид

$$\left. \begin{aligned} E^0 &= (c/i) E_4^0 = \partial \Psi^0 / \partial \theta^0 = \partial \{ \theta^0 G^0(\theta^0, p^0) \} / \partial \theta^0; \\ V^0 &= (1/\theta^0) \partial \Psi^0 / \partial p^0 = \partial G^0(\theta^0, p^0) / \partial p^0, \end{aligned} \right\} \quad (7.208)$$

т. е. совпадают с известными формулами классической термодинамики.

Упражнение

Инвариантный потенциал Ψ является релятивистским обобщением свободной энергии Гиббса. Заменяя его свободной энергией Гельмгольца в системе покоя

$$F^0(\theta^0, V^0) = H^0 - T^0 S^0 \quad (a)$$

или соответствующим отрицательным «потенциалом Планка»,

$$\Phi^0(\theta^0, V^0) = \theta^0 F^0, \quad (b)$$

можно, как и в (7.207), определить инвариантный термодинамический потенциал

$$\Phi(\theta_i, V^0) = \Phi^0(\theta, V^0). \quad (b')$$

Φ также можно рассматривать как функцию от θ_i и объема V в системе S , который с учетом (7.203) равен

$$V = V^0 (1 - u^2/c^2)^{1/2} = icV^0/U_4 = icV^0\theta/0_4. \quad (r)$$

Следовательно,

$$\Phi(\theta_i, V) = \Phi^0(\theta, V\theta_4/ic\theta). \quad (d)$$

Показать, что частное дифференцирование $\Phi(\theta_i, V)$ по аргументам θ_i, V дает 4-импульс и давление в форме [187]:

$$G_i = -\partial \Phi(\theta_i, V) / \partial \theta_i, \quad p = -(ic/\theta_4) \partial \Phi(\theta_i, V) / \partial V. \quad (e)$$

Релятивистские потенциалы Ψ и Φ связаны, очевидно, соотношением

$$\Psi = \Phi + \theta p V^0. \quad (ж)$$

Показать, исходя из этого соотношения, что выражение (7.198) и (e) для E_i и G_i согласуются с (7.190).

§ 7.13. Идеальный газ. Излучение черного тела

В качестве простого применения развитого в предыдущем параграфе формализма рассмотрим случай идеального одноатомного газа, состоящего из N взаимодействующих частиц с собственными массами m_0 . Для умеренных температур, когда

$$kT^0/m_0 c^2 = k/m_0 c^2 \theta^0 \ll 1 \quad (7.209)$$

(k — постоянная Больцмана), в системе покоя имеем обычное уравнение состояния

$$p^0 V^0 = NkT^0 = Nk/\theta^0. \quad (7.210)$$

Кроме того, энергия, включающая в себя и энергию покоя собственной массы

$$p^0 V^0 = Nm_0, \quad (7.211)$$

равна

$$H^0 = Nm_0 c^2 + 3Nk/2\theta^0. \quad (7.212)$$

Из первого и второго законов для обратимых процессов имеем

$$dS^0 = -\theta^0 dQ_{обп}^0 = \theta^0 (dH^0 + p^0 dV^0). \quad (7.213)$$

Дифференцируя (7.210), (7.212) и исключая V^0 , получаем

$$dS^0 = -Nkd \ln (p^0 \theta^{5/2}), \quad (7.214)$$

откуда

$$S^0 = -Nk \ln (p^0 \theta^{5/2}) + C, \quad (7.215)$$

где C — постоянная интегрирования.

Энтальпия E^0 и потенциал Ψ^0 (7.204) в системе покоя имеют вид

$$E^0 = H^0 + p^0 V^0 = Nm_0 c^2 + (5/2) Nk/\theta^0; \quad (7.216)$$

$$\Psi^0(\theta^0, p^0) = \theta^0 E^0 - S^0 = Nm_0 c^2 \theta^0 + Nk \ln (p^0 \theta^{5/2}) + (5/2) Nk - C. \quad (7.217)$$

В соответствии с (7.207) потенциал Ψ как функция параметров состояния в произвольной системе S равен

$$\Psi(\theta_i, p) = Nm_0 c^2 \theta + Nk \ln (p \theta^{5/2}) + (5/2) Nk - C. \quad (7.218)$$

Подставив это выражение в (7.198), найдем 4-вектор энтальпии и объем покоя как функции от (θ_i, p) :

$$E_i(\theta_i, p) = -\partial\Psi/\partial\theta_i = [Nm_0 c^2 + (5/2) Nk/\theta] \theta_i/\theta c^2; \quad (7.219)$$

$$V^0(\theta_i, p) = (1/\theta) (\partial\Psi/\partial p) = Nk/p\theta. \quad (7.220)$$

Здесь мы использовали соотношение

$$\partial\theta/\partial\theta_i = -\theta_i/\theta c^2 = -U_i/c^2, \quad (7.221)$$

вытекающее из (7.200) и (7.203). Поскольку θ и p — инварианты, (7.220) представляет собой просто другую форму уравнения состояния (7.210).

С учетом (7.210) и (7.221) выражение (7.219) для E_i можно представить также в виде

$$E_i = E^0 U_i/c^2, \quad (7.222)$$

что соответствует определению (6.151) 4-вектора энтальпии.

4-Импульс $G_i(\theta_i, p)$ легко получается из соотношений (7.190), (7.219), (7.221) и (г) на стр. 171. С учетом инвариантности энтропии из формул (7.199), (7.200) и (7.221) имеем

$$S = -Nk \ln (p \theta^{5/2}) - C. \quad (7.223)$$

Эту формулу можно получить также из S^0 в (7.215), положив $p^0 = p$, $\theta^0 = \theta$.

В качестве второго примера рассмотрим термически равновесное электромагнитное излучение внутри закрытой полости со стенками определенной температуры. Эту систему можно считать идеальной жидкостью с некоторым своеобразным уравнением состояния. В системе покоя стенок поток электромагнитного излучения равен нулю в каждой точке, и в соответствии с законом Стефана — Больцмана плотность энергии h^0 определяется формулой

$$h^0 = aT^{04} = a/\theta^{04}, \quad (7.224)$$

где $a = 7,6237 \cdot 10^{-15}$ эрг / (см³ · °К⁴) = $7,6237 \cdot 10^{-16}$ дж / (м³ · °К⁴) — постоянная Стефана — Больцмана. Излучение обуславливает нормальное давление

$$p^0 = aT^{04}/3 = a/3\theta^{04} = h^0/3, \quad (7.225)$$

которое не зависит от объема V^0 полости. Следовательно,

$$H^0 = h^0 V^0 = aV^0/\theta^{04}. \quad (7.226)$$

Интегрируя уравнение (7.123), в данном случае получаем

$$S^0 = 4aV^0/3\theta^{03}, \quad (7.227)$$

где постоянная интегрирования выбрана так, чтобы $S^0 = 0$ при $\theta^0 = \infty$.

В системе S , относительно которой полость движется со скоростью \mathbf{u} , импульс и энергия в соответствии с (6.149), (7.225) и (7.226) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{G} &= \frac{4}{3} \frac{aV^0/\theta^4}{3c^2(1-u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{u} = \frac{4}{3} \frac{H^0/c^2}{(1-u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \mathbf{u} \\ H &= \frac{a(V^0/\theta^4) \left(1 + \frac{1}{3} u^2/c^2\right)}{(1-u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} = H^0 \frac{1 + \frac{1}{3} u^2/c^2}{(1-u^2/c^2)^{\frac{1}{2}}} \end{aligned} \right\} \cdot \quad (7.228)$$

Таким образом, соотношения между \mathbf{G} , H , H^0 и \mathbf{u} такие же, как и для сферически симметричной электростатической системы [см. (7.23)].

Спектральное распределение излучения черного тела описывается формулой Планка, в соответствии с которой в системе покоя плотность энергии, приходящаяся на интервал частот между ν^0 и $\nu^0 + d\nu^0$, равна

$$h\nu^0 d\nu^0 = (8\pi/c^3) h\nu^{03} d\nu^0 / \{\exp(\theta^0 h\nu^0/k) - 1\}, \quad (7.229)$$

где h и k — постоянные Планка и Больцмана. Теперь излучение черного тела можно рассматривать как фотонный газ, т. е. как совокупность частиц с нулевой массой покоя, скоростью c и 4-импульсом

$$p_i = h\sigma_i = (h\nu e/c, i h\nu/c). \quad (7.230)$$

Здесь σ_i — волновой вектор (4.43) плоской монохроматической волны частоты ν . Следовательно, импульс p и энергия E фотонов определяются формулами

$$\mathbf{p} = h\nu \mathbf{e}/c; \quad E = cp = h\nu. \quad (7.231)$$

В системе покоя S^0 , где излучение обладает сферической симметрией, количество фотонов на единицу объема с частотами в интервале $(\nu^0, \nu^0 + d\nu^0)$ и направлением \mathbf{e}^0 внутри телесного угла $d\omega^0$ равно

$$\rho^0 = n_{\nu^0}^0 d\nu^0 d\omega^0 = h_{\nu^0}^0 d\nu^0 d\omega^0 / 4\pi h\nu^0 = 2\nu^{02} d\nu^0 d\omega^0 / c^3 \{\exp(\theta^0 h\nu^0/k) - 1\}, \quad (7.232)$$

где ρ^0 — искомая плотность фотонов. Плотность тока этих фотонов есть $\rho^0 c \mathbf{e}^0$, а интенсивность излучения

$$I_{\nu^0}^0 d\nu^0 d\omega^0 = c\rho^0 h\nu^0 = ch\nu^0 n_{\nu^0}^0 d\nu^0 d\omega^0. \quad (7.233)$$

Из (7.232), (7.233) для удельной интенсивности получим

$$I_{\nu^0}^0 = ch^0 n_{\nu^0}^0 = (2h\nu^{03}/c^2) / \{\exp(\theta^0 h\nu^0/k) - 1\}. \quad (7.234)$$

В системе S , относительно которой черное тело движется со скоростью \mathbf{u} , плотность фотонов

$$\rho = n_{\nu}(e) d\nu d\omega \quad (7.235)$$

равна четвертой компоненте 4-вектора S_i , плотности 4-тока, пропорционального ρ_{Γ} [см. (4.214), (5.3)]:

$$S_i = (\rho c e/c, i\rho) = \rho c p_i / h\nu. \quad (7.236)$$

Поскольку S_i и p_i — 4-векторы, коэффициент пропорциональности должен быть инвариантом, т. е.

$$\rho/\nu = \rho^0/\nu^0 \quad (7.237)$$

или с учетом (7.235), (7.232)

$$n_{\nu}(e) d\nu d\omega = n_{\nu^0}^0 d\nu^0 d\omega^0 (\nu/\nu^0), \quad (7.238)$$

где $(dv, d\omega, e)$ — величины в S , соответствующие величинам $(dv^0, d\omega^0, e^0)$ в S^0 . Соотношение между $dv d\omega$ и $dv^0 d\omega^0$ получается из формулы (с) стр. 101, в соответствии с которой

$$p dp d\omega = p^0 dp^0 d\omega^0 \quad (7.239)$$

является инвариантом для любой частицы с нулевой массой покоя. Используя (7.238), формулу (7.239) можно представить также в виде

$$dv^0 d\omega^0 = dv d\omega (v/v^0), \quad (7.240)$$

что с учетом (7.238) приводит к соотношению

$$n_v = n_{v^0}^0 v^2 / v_0^3. \quad (7.241)$$

Удельная интенсивность I_v излучения определяется в S выражением, аналогичным первому выражению (7.234):

$$I_v = ch v n_v = I_{v^0}^0 v^3 / v_0^3. \quad (7.242)$$

Поскольку в соответствии с (7.185) и (7.230)

$$\theta_i p_i = \theta_i^0 p_i^0 = ic \theta^0 p_4^0 = -\theta^0 h v^0, \quad (7.243)$$

из (7.242) и (7.234) получим следующее выражение для удельной интенсивности I_v , как функции параметров состояния θ_i , 4-импульса и частоты фотонов:

$$I_v(e) = (2h v^3 / c^2) / \{ \exp(-\theta_i p_i / k) - 1 \}. \quad (7.244)$$

Вследствие (7.183) и (7.230) скалярное произведение $-\theta_i p_i$ имеет вид

$$-\theta_i p_i = h v \tilde{\theta}, \quad (7.245)$$

где

$$\tilde{\theta} = \theta^0 (1 - u \cdot e / c) / (1 - u^2 / c^2)^{1/2}, \quad (7.246)$$

так что (7.244) принимает форму

$$I_v = (2h v^3 / c^2) / \{ \exp(\tilde{\theta} h v / k) - 1 \}. \quad (7.247)$$

Таким образом, распределение интенсивности излучения движущегося черного тела имеет тот же вид, что и для покоящегося черного тела; только в данном случае вместо θ^0 используется «эффективный холод» $\tilde{\theta}$, определяемый формулой (7.246).

$\tilde{\theta}$ может быть больше или меньше θ^0 , в зависимости от направления движения относительно наблюдателя.

Упражнение

Плотность импульса g и энергии h фотонного газа определяются, очевидно, выражениями

$$\left. \begin{aligned} g &= \iint (h v / c) e n_v(e) dv d\omega = (1/c^2) \iint I_v(e) e dv d\omega; \\ h &= \iint h v n_v(e) dv d\omega = (1/c^2) \iint I_v(e) dv d\omega. \end{aligned} \right\} \quad (a)$$

Показать, что формулы для g и h , получаемые из (a) и (7.244) интегрированием, соответствуют выражениям (7.228) для G и H .

Вследствие вырожденности уравнения состояния (7.225) термодинамическое состояние излучения черного тела нельзя описать с помощью переменных (7.188), так как собственный объем V^0 , а следовательно, и H^0 не являются функциями p^0 и θ^0 . Поэтому формулы (7.198) уже не имеют смысла. Это находит свое выражение также в том, что Ψ^0 и Ψ , определяемые из (7.207), (7.204) и (7.225) — (7.227), равны тождественно нулю. Однако, потенциал Φ^0 , определяемый формулами (б), (а) на стр. 174, имеет ясный смысл. Из (7.226) и (7.227) получим

$$\Phi^0(\theta^0, V^0) = -a V^0 / 3\theta^0, \quad (б)$$

откуда с учетом (д) на стр. 174

$$\Phi(\theta_i, V) = -(a/3ic) V \theta_4 / \theta^4. \quad (в)$$

Показать, что выражение (е) на стр. 174 для 4-импульса G_i , получаемого дифференцированием $\Phi(\theta_i, V)$ по θ_i , соответствует (7.228). Показать также, что потенциал $\Phi^0(\theta^0, V^0)$ для идеального газа, удовлетворяющий условию (7.209), равен

$$\Phi^0(\theta^0, V^0) = N m_0 c^2 \theta^0 + N k \ln(N k \theta^0)^{3/2} / V^0 + 3N k / 2 - C, \quad (г)$$

откуда с учетом (д) на стр. 174

$$\Phi(\theta_i, V) = Nm_0 c^2 \theta + Nk \ln(\theta^{5/2} ic/\theta_4) - Nk \ln V + Nk \ln Nk + (3/2) Nk - C. \quad (д)$$

Проверить, что соответствующее выражение для G_i из (е) на стр. 174 соответствует (6.149).

Когда температура T^0 настолько высока, что условие (7.209) не выполняется, формулу (г) для Φ^0 следует заменить формулой Джуттнера [122]:

$$\Phi^0(\theta^0, V^0) = -Nk \ln \left\{ (2\pi^2 m_0^3 ckV^0/i\theta^0) H_2^{(1)}(im_0 c^2 \theta^2/k) \right\}, \quad (е)$$

где $H_2^{(1)}$ — функция Ханкеля первого рода и второго порядка. Если (7.209) выполняется, аргумент функции Ханкеля становится настолько большим, что можно воспользоваться асимптотическим разложением

$$-iH(ix) = \exp(-x) (2/\pi x)^{1/2}. \quad (ж)$$

Тогда (е) сводится к (г) с точностью до несущественной аддитивной постоянной.

ОСНОВЫ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ**§ 8.1. Общий принцип относительности**

В соответствии со специальным принципом относительности, являющимся основой СТО, все инерциальные системы, т. е. все жесткие системы отсчета, движущиеся с постоянной скоростью относительно неподвижных звезд, полностью эквивалентны в отношении нашего описания природы. Математически этот принцип выражается в ковариантности фундаментальных уравнений физики при преобразованиях Лоренца. Несмотря на внутреннюю логичность и согласованность, которые характеризуют СТО, крайне неудовлетворительно то обстоятельство, что из всех возможных систем отсчета эта теория выделяет определенный тип систем отсчета — инерциальные системы. Этот недостаток особенно сильно проявляется при исследовании так называемого парадокса часов, уже упоминавшегося в § 2.6. Тогда нам пришлось отказаться от полного решения этой проблемы, сославшись на то, что система S^* , движущаяся вместе с часами, не является в течение всего промежутка времени инерциальной системой, и что поэтому рассмотрение задачи о парадоксе часов в этой системе координат выводит нас за рамки СТО.

Однако трудно сразу признать ускоренные системы отсчета эквивалентными инерциальным системам при описании явлений природы. (Когда в последующих главах мы будем говорить об ускоренных системах отсчета, то всегда будем иметь в виду системы, ускоренные относительно инерциальных систем или неподвижных звезд.) Если мы рассмотрим, например, относительно инерциальной системы отсчета чисто механическую систему под действием заданных сил, состоящую из совокупности материальных частиц, скорости которых малы по сравнению со скоростью света, то для описания такой механической системы с хорошей точностью можно использовать фундаментальные уравнения механики Ньютона. С другой стороны, если мы захотим описать данную механическую систему в ускоренной системе отсчета, то нам следует ввести так называемые фиктивные силы (центробежные силы, силы Кориолиса, и т. д.), не имеющие какой-либо связи с физическими свойствами самой механической системы. В действительности, они зависят лишь от ускорения введенной системы отсчета относительно инерциальных систем.

Именно по этой причине Ньютон ввел концепцию абсолютного пространства, представляющего собой такую систему отсчета, где все законы природы принимают самую простую и естественную форму. Однако, как мы уже упоминали в начале гл. 2, понятие абсолютного пространства теряет свой физический смысл, как только принят специальный принцип относительности, поскольку, в соответствии с этим принципом, никаким экспериментом оказалось невозможным выделить абсолютную систему отсчета. Поэтому Эйнштейн [67, 69 — 71] предложил новую интерпретацию фиктивных сил в ускоренных системах отсчета: вместо того, чтобы рассматривать эти силы как отражение принципиального различия между фундаментальными уравнениями в равномерно движущихся и ускоренных системах отсчета, считать оба типа систем отсчета полностью эквивалентными по отношению к форме фундаментальных уравнений, а «фиктивные» силы рассматривать как реальные силы наряду с любыми другими силами природы. В соответствии с этой новой идеей появле-

ние таких специфических сил в ускоренных системах отсчета должно объясняться тем, что удаленные массы неподвижных звезд ускоряются относительно таких систем. Таким образом, «фиктивные» силы трактуются как вид гравитационных сил, т. е. ускорение удаленных масс вызывает появление «гравитационного поля» в рассматриваемой системе отсчета.

Мысль о том, что ускорение удаленных масс может создавать гравитационное поле, не наблюдаемое в инерциальной системе, не более искусственна, чем, например, тот факт, что электростатическая система имеет нулевое магнитное поле в инерциальной системе покоя зарядов, в то время как в любой другой инерциальной системе, относительно которой заряд движется с постоянной скоростью, магнитное поле не равно нулю. Причину появления магнитного поля в «движущейся» инерциальной системе следует искать в перемещении электрических зарядов относительно такой системы, и наличие магнитного поля не является указанием на то, что фундаментальные уравнения электромагнетизма имеют разную форму в различных инерциальных системах. Единственное существенное различие между двумя рассматриваемыми случаями состоит лишь в том, что причину появления магнитного поля можно найти при изучении движения в земных системах (например, изучая движение зарядов), в то время как источники гравитационных полей в ускоренных системах отсчета следует искать, изучая движение космических удаленных масс. Ранее влияние космических масс считалось пренебрежимо малым; однако теперь мы должны в рассматриваемую физическую систему включить и удаленные массы. Только тогда, когда мы работаем в специальных системах отсчета, например в инерциальных системах, нет необходимости включать в рассмотрение удаленные массы; в этом заключается единственное отличие инерциальных систем от всех остальных систем отсчета. Однако можно допустить, что при формулировке фундаментальных физических законов все системы отсчета эквивалентны. Это и есть так называемый *общий принцип относительности*.

§ 8.2. Принцип эквивалентности

Интерпретация фиктивных сил как сил гравитационных решающим образом подтверждается тем, что они имеют существенное свойство, общее с обычным гравитационным полем — их способность всем свободным частицам сообщать одинаковое ускорение независимо от их массы. Первым это свойство для гравитационного поля Земли доказал Галилей. В качестве результата своих экспериментов он смог сформулировать утверждение, что в пустом пространстве все тела «падают с одинаковой скоростью». Этот результат выражает просто тот факт, что сила, с которой гравитационное поле земли действует на частицу, пропорциональна инертной массе частицы, определяющей инертность частицы к изменению состояния ее движения. Когда скорость частицы мала по сравнению со скоростью света, ее движение в направлении гравитационного поля описывается уравнением $m\ddot{x} = mg$, где m — масса частицы и x — ее ускорение в направлении гравитационного поля. Величина g есть мера напряженности гравитационного поля и не зависит от массы частицы. Отсюда утверждается, что отношение инертной массы частицы к ее гравитационной массе является универсальной константой, зависящей лишь от единиц измерения. Эта теорема теперь доказана многочисленными экспериментами [84, 85, 240, 286, 209]. Наиболее точные из них — эксперименты Этвеша, Зеемана и Дикке. В результате всех экспериментов были получены одинаковые значения отношений инертной и гравитационной масс. Особенно интересны эксперименты Саутернса и Зеемана с ураном, относительно которого в то время уже было известно, что он обладает большим дефектом массы. В гл. 3 мы видели, что любой энергии E соответствует инертная масса $m = E/c^2$, что подтверждено многочисленными ядерными экспериментами (см. § 3.7). Масса, определяемая при помощи масс-спектрографа, очевидно, является инертной массой, и результат Зеемана по-

азывает, что энергия связи ядра урана, проявляющаяся в дефекте массы, так соответствует гравитационной массе, что их отношение имеет ту же универсальную величину, как и во всех других экспериментах.

В соответствии со сказанным выше, гравитационное поле можно охарактеризовать *гравитационным ускорением*, не зависящим от массы пробной частицы. Это справедливо как для обычных гравитационных полей, обусловленных, например, тяготением Земли или Солнца, так и для тех гравитационных полей, которые появляются в ускоренных системах отсчета и обусловлены удаленными массами неподвижных звезд. В самом деле, гравитационное поле на поверхности вращающейся Земли является результирующим этих двух полей разного типа, поскольку центробежная сила, обусловленная вращением Земли, вообще не пренебрежимо мала по сравнению с силой притяжения Земли. Поэтому совершенно естественно предположить, что оба вида гравитационного поля имеют одинаковую природу и подчиняются одним и тем же фундаментальным законам. Это предположение часто называют *принципом эквивалентности* (точная формулировка этого принципа дана в § 9.6). Известно, что гравитационные поля, обусловленные удаленными массами, исчезают при соответствующем выборе системы отсчета, например инерциальной системы, однако гравитационные поля «ближних» масс (например, Земли или Солнца) невозможно исключить никаким выбором системы отсчета; последние мы будем относить поэтому к так называемым *неустранимым гравитационным полям*.

Данная ситуация совершенно аналогична случаю с магнитными полями, с которыми сравнивались гравитационные поля в § 8.1. Если заряды, создающие электромагнитное поле, имеют одинаковую постоянную скорость относительно неподвижных звезд, то выбором системы покоя зарядов в качестве системы отсчета можно полностью исключить магнитное поле; в этой системе электромагнитное поле будет чисто электростатическим полем. Однако в общем случае невозможно выбрать систему отсчета, в которой магнитное поле везде отсутствует. Тем не менее и в этом случае мы не считаем электромагнитное поле существенно отличным от поля в системе, где магнитное поле исключено. Электромагнитное поле во всех случаях описывается одними и теми же фундаментальными уравнениями — уравнениями Максвелла.

Важнейшая задача теперь — найти общие фундаментальные законы, которым должны подчиняться все виды гравитационных полей. Сначала необходимо определить полевые функции, которые могут дать адекватное описание гравитационных полей. Рассмотрим сначала простой случай, когда отсутствует неустранимое гравитационное поле. Соответствующим выбором системы отсчета (например, инерциальной системы) можно исключить гравитационное поле и использовать в этой системе уравнения СТО. Простое преобразование к ускоренным системам отсчета позволяет определить полевые величины, описывающие гравитационные поля в ускоренных системах. В соответствии с принципом эквивалентности можно предположить, что эти величины дают корректное описание также и более общих неустранимых гравитационных полей.

Рассматриваемая здесь гравитационная масса есть *пассивная* гравитационная масса, определяющая величину силы, с которой данное гравитационное поле действует на тело. Именно эта величина в общей теории относительности (ОТО) предполагается в точности равной инертной массе, в отличие от теории Ньютона, где это равенство — случайный факт. Кроме пассивной массы, тело обладает еще и *активной* гравитационной массой, определяющей напряженность гравитационного поля, создаваемого телом. В теории Ньютона обе гравитационные массы равны, так как, в соответствии с третьим законом Ньютона, гравитационная сила, с которой тело 1 действует на тело 2, в точности равна и противоположна по направлению гравитационной силе, с которой тело 2 действует на тело 1. Однако в ОТО — настоящей полевой теории гравитационных сил — третий закон Ньютона теряет свое значение. Тем не менее, в § 11.10 будет показано, что активная гравитационная масса островной системы в точности равна ее инертной массе и, вследствие принципа эквивалентности, равна ее пассивной гравитационной массе.

§ 8.3. Равномерно вращающаяся система координат. Пространство и время в общей теории относительности

Развитие идей общего принципа относительности приводит, как мы увидим, к еще более радикальному пересмотру понятий пространства и времени, чем в СТО. Для иллюстрации характера проблем, с которыми нам придется столкнуться, рассмотрим самую простую ускоренную систему отсчета — равномерно вращающуюся жесткую систему.

Пусть I — некоторая инерциальная система, настолько удаленная от всех масс, что в ней можно пренебречь всеми гравитационными эффектами, и пусть X, Y, Z, T — обычные пространственно-временные координаты, определяемые обычным методом, уже рассмотренным в § 2.2 и 2.3. Для фиксирования точек в физическом пространстве будем использовать вместо декартовых криволинейные координаты. Ограничиваясь рассмотрением событий в плоскости XU , введем полярные координаты (R, θ) с помощью соотношений:

$$X = R \cos \theta; Y = R \sin \theta. \quad (8.1)$$

Теперь можно определить равномерно вращающуюся систему координат S с пространственными координатами

$$x = r \cos \vartheta; y = r \sin \vartheta, \quad (8.2)$$

где

$$r = R; \vartheta = \theta - \omega T. \quad (8.3)$$

Любая фиксированная точка вращающейся системы с постоянными значениями (x, y) или (r, ϑ) совершает в системе I круговое движение с постоянной угловой скоростью ω . При $T = 0$ обе системы совпадают.

Следовательно, для всех точек с

$$r = R < c/\omega \quad (8.4)$$

вращающуюся систему отсчета можно представить в виде равномерно вращающегося диска. Каждая точка p на этом диске характеризуется двумя числами (x, y) или (r, ϑ) , которые равны координатам (X, Y) или (R, θ) той точки неподвижной плоскости XU , с которой в момент времени $T = 0$ по часам системы I точка p совпадает.

Для измерения расстояний во вращающейся системе используем стандартную измерительную линейку того же типа, что и в инерциальной системе, но покоящуюся относительно вращающегося диска. В процессе измерения расстояний в ускоренных системах отсчета возникают проблемы, не встречающиеся в инерциальных системах. Если измерительная линейка удерживается в некотором фиксированном положении относительно ускоренной системы, то она в общем случае будет подвергаться действию сил, которые могут привести к деформации измерительной линейки, так как согласно СТО абсолютно твердые тела не существуют, ибо в противном случае с их помощью можно было бы передавать сигналы со скоростями, большими скорости света.

Рассмотрим, например, измерительную линейку, расположенную в направлении радиуса на вращающемся диске и прикрепленную в точке (r, ϑ) . Центробежные силы обязательно вызовут удлинение этой измерительной линейки. Однако такая деформация зависит от упругих свойств материала линейки и легко учитывается. Теперь сделаем предположение, что после учета деформаций измерительные линейки на вращающемся диске имеют такую же длину относительно системы I , какую имеет стандартная измерительная линейка в инерциальной системе I^0 , движущаяся в рассматриваемый момент времени с той же скоростью, что и измерительная линейка на вращающемся диске. В общем случае будем предполагать, что (с учетом деформаций) стандартные измерительные линейки в ускоренной системе по отношению к стандартным линейкам в I подвергаются лишь лоренцеву сокращению; это означает, что длина линеек не зависит от их ускорения относительно системы I .

Поэтому, если мы с помощью стандартной линейки измерим расстояние между двумя точками на диске (r, ϑ) и $(r + dr, \vartheta)$, то получим

$$d\sigma = dr, \quad (8.5)$$

поскольку скорость линейки относительно I перпендикулярна к направлению линейки и не приводит к лоренцеву сокращению. Если же мы рассмотрим на диске две точки с координатами (r, ϑ) и $(r, \vartheta + d\vartheta)$, то окажется, что измерительная линейка, соединяющая эти две точки, имеет скорость $r\omega$ относительно I , параллельную направлению линейки. Это приводит к сокращению измерительной линейки относительно системы I в соответствии с формулой Лоренца (2.33). Поэтому расстояние между двумя точками, измеренное сократившейся линейкой, будет равно

$$d\sigma = r d\vartheta / \sqrt{1 - r^2 \omega^2 / c^2}. \quad (8.6)$$

Аналогичным образом, повторяя предыдущие рассуждения и используя теорему Пифагора, найдем расстояние $d\sigma$ между двумя соседними точками (r, ϑ) и $(r + dr, \vartheta + d\vartheta)$, измеренное на диске стандартной линейкой:

$$d\sigma^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 / (1 - r^2 \omega^2 / c^2). \quad (8.7)$$

Ясно, что геометрические соотношения, полученные с помощью стандартных измерительных линеек, покоящихся относительно диска, в общем случае отличаются от соотношений евклидовой геометрии. Рассмотрим, например, кривую, заданную уравнением $r = \text{const}$. Эта кривая в соответствии с (8.5) представляет собой окружность радиуса r . Однако длина этой окружности, в соответствии с (8.6), равна

$$\int_0^{2\pi} r d\vartheta / \sqrt{1 - r^2 \omega^2 / c^2} = 2\pi r / \sqrt{1 - r^2 \omega^2 / c^2}. \quad (8.8)$$

Поэтому отношение длины окружности к ее радиусу равно не 2π , а $2\pi / \sqrt{1 - r^2 \omega^2 / c^2} > 2\pi$.

Таким образом, общий принцип относительности, в соответствии с которым при описании природы ускоренные системы координат и инерциальные системы эквивалентны, заставляет нас в некоторых случаях отказаться от евклидовой геометрии, которая даже в специальной теории относительности считалась единственным средством описания пространства, что, в частности, еще отстаивал и Кант. Кроме того, в ускоренных системах отсчета в общем случае невозможно использовать декартовы координаты (см. § 8.6), и мы вынуждены при определении точек физического пространства пользоваться общими криволинейными координатами.

Общий принцип относительности требует также нового пересмотра понятия времени. В СТО время в инерциальной системе определялось с помощью стандартных часов, размещенных в различных точках системы и синхронизированных с помощью световых сигналов методом, рассмотренным в § 2.2. Двое часов, отрегулированных таким методом, синхронно отсчитывают время. Аналогично можно определить время во вращающейся системе координат, используя стандартные часы, закрепленные в различных точках этой системы и отрегулированные в соответствии со стандартными часами инерциальной системы I . Такую регулировку можно сделать, например, устанавливая часы во вращающейся системе на нуль и пуская их в тот момент времени, когда часы в системе I , с которыми они совпадают, показывают нулевое время. Тогда во вращающейся системе $t = 0$ при $T = 0$. Однако стандартные часы в точке (r, ϑ) на диске имеют относительно системы I скорость $r\omega$ и потому, согласно (2.36), отстают по сравнению с часами в I , так что в последующее время имеем

$$t = T \sqrt{1 - r^2 \omega^2 / c^2}. \quad (8.9)$$

Это означает, что, в соответствии с предположением § 2.6, только скорость, а не ускорение, влияет на темп хода стандартных часов. На самом деле, достаточно сильные ускорения будут, конечно, оказывать влияние на скорость хода реальных часов (часы, упавшие на пол), но такой эффект, зависящий лишь

от материала часов, может быть легко учтен, как и деформация измерительной линейки [168, 169].

Описание времени во вращающейся системе, которое получается при использовании временной переменной t , определяемой формулой (8.9), оказывается, однако, чрезвычайно неудобным (хотя в принципе допустимым). Представим, например, источник света (атом), расположенный в точке $A(r, \phi)$ и испускающий свет с собственной частотой ν_0 . Число световых волн, испущенных за время $0 \leq t \leq 1$, равно, по определению, ν_0 . Тогда количество волн, испущенных за время $0 \leq T \leq 1$, равно, согласно (8.9), $\nu_0 \sqrt{1 - r^2 \omega^2 / c^2}$. Такое же количество волн прибудет в центр $O(r = 0)$ в течение интервала времени $0 \leq T \leq 1$ или, поскольку $t = T$ при $r = 0$, в течение времени $0 \leq t \leq 1$.

Следовательно, по шкале времени t количество волн, испущенных из точки A за единицу времени, больше количества волн, прибывших за это же время в центр O . Поэтому использование этой временной переменной приводит к очень сложному описанию распространения света. Данное рассуждение показывает, что в ускоренных системах отсчета неудобно использовать временную переменную, определяемую стандартными часами, и что значительно проще пользоваться часами с различной скоростью хода. Например, в случае вращающегося диска удобнее всего использовать *координатные часы*, скорость хода которых в любом месте в $(1 - r^2 \omega^2 / c^2)^{-1/2}$ выше скорости хода соответствующих стандартных часов. Тогда временная координата t , определяемая этими координатными часами, совпадает с временной координатой в системе I , т. е. вместо (8.9) имеем

$$t = T. \quad (8.10)$$

В принципе, допустимо использование координатных часов с произвольной скоростью хода, лишь бы временная переменная t , определяемая такими часами, обеспечивала разумное описание хронологической последовательности физических событий. Таким образом, в ускоренных системах отсчета пространственные и временная координаты не имеют прямого физического смысла; они просто описывают некоторое произвольное, но однозначное чередование физических событий.

§ 8.4. Неевклидова геометрия. Метрический тензор

Пространственная геометрия на вращающемся диске, как мы видели, является неевклидовой. И хотя все геометрические построения в трехмерном физическом пространстве полностью согласуются с теоремами евклидовой геометрии, представление о неевклидовой геометрии в двух измерениях не является чем-то новым для нас, так как мы встречаемся с примерами таких геометрий на любой кривой поверхности. (Хорошо известен пример сферической геометрии на поверхности сферы.) В качестве введения к изучению неевклидовых геометрий в n -мерном пространстве рассмотрим геометрию произвольной двумерной поверхности, вложенной в трехмерное евклидово пространство. Если x, y, z — декартовы координаты в этом пространстве, то двумерная поверхность определяется параметрическими уравнениями

$$x = F(x^1, x^2); \quad y = G(x^1, x^2), \quad z = H(x^1, x^2), \quad (8.11)$$

где F, G, H — заданные функции от двух параметров x^1 и x^2 , определенных в некоторой области. Дифференцируя (8.11), получаем

$$\left. \begin{aligned} dx &= \partial F dx^1 / \partial x^1 + \partial F dx^2 / \partial x^2; \\ dy &= \partial G dx^1 / \partial x^1 + \partial G dx^2 / \partial x^2; \\ dz &= \partial H dx^1 / \partial x^1 + \partial H dx^2 / \partial x^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.11')$$

Расстояние ds между двумя близкими точками поверхности, соответствующими значениям параметров (x^1, x^2) и $(x^1 + dx^1, x^2 + dx^2)$, равно $ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2$, где dx, dy, dz определяются линейными относительно dx^1 и dx^2 выражениями (8.11'). Тогда для ds^2 имеем следующую однородную квадратическую форму относительно dx^1 и dx^2 :

$$ds^2 = g_{11} (dx^1)^2 + g_{12} (dx^1 dx^2) + g_{21} (dx^2 dx^1) + g_{22} (dx^2)^2, \quad (8.12)$$

$$\left. \begin{aligned} g_{11} &= \left(\frac{\partial F}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x^1}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x^1}\right)^2 \\ g_{12} = g_{21} &= \frac{\partial F}{\partial x^1} \frac{\partial F}{\partial x^2} + \frac{\partial G}{\partial x^1} \frac{\partial G}{\partial x^2} + \frac{\partial H}{\partial x^1} \frac{\partial H}{\partial x^2} \\ g_{22} &= \left(\frac{\partial F}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial G}{\partial x^2}\right)^2 + \left(\frac{\partial H}{\partial x^2}\right)^2 \end{aligned} \right\}. \quad (8.12')$$

Угол θ между двумя линейными элементами δs и Δs , соответствующими бесконечно малым приращениям $(\delta x^i) = (\delta x^1, \delta x^2)$ и $(\Delta x^i) = (\Delta x^1, \Delta x^2)$ параметров x^1 и x^2 , дается формулой

$$\cos \theta = (\delta x \Delta x + \delta y \Delta y + \delta z \Delta z) / \delta s \Delta s, \quad (8.13)$$

где $(\delta x, \delta y, \delta z)$ и $(\Delta x, \Delta y, \Delta z)$ — бесконечно малые приращения x, y, z , полученные из (8.11') заменой $dx^i = (dx^1, dx^2)$ на δx^i и Δx^i соответственно. С учетом (8.11') и (8.12) формула (8.13) принимает вид

$$\cos \theta = \frac{(g_{11} \delta x^1 \Delta x^1 + g_{12} \delta x^1 \Delta x^2 + g_{21} \delta x^2 \Delta x^1 + g_{22} \delta x^2 \Delta x^2)}{\delta s \Delta s}. \quad (8.14)$$

Линейные элементы (δx^i) и (Δx^i) определяют также инфинитезимальный параллелограмм на поверхности с площадью

$$d\sigma = \delta s \Delta s \sin \theta. \quad (8.14')$$

Кривые на поверхности (8.11)

$$x^1 = \text{const} \quad (8.15 \text{ а})$$

или

$$x^2 = \text{const} \quad (8.15 \text{ б})$$

называются координатными линиями. Любая точка на поверхности является точкой пересечения двух координатных линий из семейств (8.15 а) и (8.15 б). Если линейные элементы (δx^i) и (Δx^i) лежат в направлениях этих координатных линий, то $(\delta x^i) = (dx^1, 0)$ и $(\Delta x^i) = (0, dx^2)$, и из (8.12) и (8.14) имеем $\delta s = (g_{11})^{1/2} dx^1$;

$\Delta s = (g_{22})^{1/2} dx^2$; $\cos \theta = g_{12} / (g_{11} g_{22})^{1/2}$; $\sin \theta = (g / g_{11} g_{22})^{1/2}$, где

$$g = g_{11} \cdot g_{22} - g_{12}^2 = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} \\ g_{21} & g_{22} \end{vmatrix} = |g_{ik}| \quad (8.16)$$

есть определитель матрицы коэффициентов g_{ik} .

Следовательно, для площади параллелограмма $d\sigma$ из (8.14') получаем

$$d\sigma = \sqrt{g} dx^1 dx^2. \quad (8.17)$$

Если параметрическое представление поверхности (8.11) имеет то свойство, что любой совокупности значений параметров $x^i = (x^1, x^2)$ соответствует одна и только одна точка поверхности, то $x^i = (x^1, x^2)$ представляет собой систему общих криволинейных координат на двухмерной поверхности. Тогда все основные геометрические величины на данной поверхности можно выразить только через эти координаты, не пользуясь переменными трехмерного пространства, в которое вложена двухмерная поверхность. Если $g_{ik} =$

$= g_{ik}(x^i)$ — заданные функции координат (x^i) , то линейный элемент определяется формулой (8.12), т. е.

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (8.18)$$

Здесь по повторяющимся индексам i, k производится суммирование от 1 до 2.

Угол θ между линейными элементами (δx^i) и (Δx^i) определяется формулой (8.14):

$$\cos \theta = g_{ik} \delta x^i \Delta x^k / \sqrt{g_{ik} \delta x^i \delta x^k} \sqrt{g_{ik} \Delta x^i \Delta x^k}, \quad (8.19)$$

а площадь параллелограмма, определяемая двумя линейными элементами в направлениях координатных линий, вычисляется по формуле (8.17). Величины g_{ik} являются компонентами так называемого *метрического тензора*, который определяет геометрию на поверхности, в общем случае неевклидову.

§ 8.5. Геодезические линии

Прямые линии, определяемые в евклидовой геометрии как линии наименьшей длины между двумя точками, в более общем случае заменяются геодезическими линиями, которые подобным же образом можно определить из вариационного принципа.

Рассмотрим произвольную кривую, соединяющую две точки P_1 и P_2 двумерной поверхности. В параметрическом представлении этой кривой координаты $x^i = (x^1, x^2)$ можно считать некоторыми функциями от произвольного параметра λ в интервале $\lambda_1 < \lambda < \lambda_2$, т. е.

$$x^i = x^i(\lambda), \quad i = 1, 2. \quad (8.20)$$

Пусть $L = L(x^i, \dot{x}^i)$ — заданная функция переменных x^i и $\dot{x}^i = dx^i/d\lambda$. Кривая (8.20), соединяющая две фиксированные точки P_1 и P_2 , которая дает интегралу $\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(x^i, \dot{x}^i) d\lambda$ стационарное значение, определяется условием

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L(x^i, \dot{x}^i) d\lambda = 0 \quad (8.21)$$

для всех инфинитезимальных вариаций $\delta x^i(\lambda)$, удовлетворяющих граничному условию

$$\delta x^i(\lambda_1) = \delta x^i(\lambda_2) = 0. \quad (8.22)$$

Следовательно,

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \{(\partial L / \partial x^i) \delta x^i(\lambda) + (\partial L / \partial \dot{x}^i) \delta \dot{x}^i(\lambda)\} d\lambda, \quad (8.23)$$

и, поскольку $\delta \dot{x}^i = d(\delta x^i)/d\lambda$, интегрируя последнюю величину в (8.23) по частям и учитывая (8.22), получаем

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} L d\lambda = \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \{\partial L / \partial x^i - d(\partial L / \partial \dot{x}^i) / d\lambda\} \delta x^i(\lambda) d\lambda.$$

Этот интеграл может равняться нулю при всех возможных вариациях $\delta x^i(\lambda)$ только в том случае, когда множитель в фигурных скобках для всех точек кривой равен нулю. Следовательно, вариационный принцип (8.21), (8.22) эквивалентен дифференциальным уравнениям Эйлера:

$$\begin{aligned} d/d\lambda (\partial L / \partial \dot{x}^i) - \partial L / \partial x^i &= 0, \\ \dot{x}^i &= dx^i / d\lambda. \end{aligned} \quad (8.24)$$

Если L — однородная функция n -й степени от переменных \dot{x}^i , то

$$\dot{x}^i \partial L / \partial \dot{x}^i = nL, \quad (8.25)$$

и легко видеть, что при $n \neq 1$ функция $L(x^i, \dot{x}^i)$ должна быть тогда постоянной вдоль кривой, удовлетворяющей дифференциальным уравнениям (8.24). В самом деле, из (8.24) и (8.25) имеем

$$\begin{aligned} \frac{dL}{d\lambda} &= \frac{\partial L}{\partial x^i} \dot{x}^i + \frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \ddot{x}^i = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \right) \dot{x}^i + \\ &+ \frac{\partial L}{\partial x^i} \frac{\partial \dot{x}^i}{\partial \lambda} = \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{x}^i} \dot{x}^i \right) = n \frac{dL}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (8.26)$$

Следовательно,

$$(n - 1) dL/d\lambda = 0. \quad (8.27)$$

Если $n \neq 1$, то

$$L(x^i, \dot{x}^i) = \text{const} \quad (8.28)$$

является интегралом уравнений (8.24). Теперь геодезические линии определим из вариационного принципа (8.21), где

$$L(x^i, \dot{x}^i) = g_{ik} (dx^i/d\lambda) (dx^k/d\lambda) = (ds/d\lambda)^2. \quad (8.29)$$

Соответствующие уравнения Эйлера (8.24)

$$d(g_{ik} dx^k/d\lambda)/d\lambda = (\partial g_{ki}/\partial x^i) (dx^k/d\lambda) (dx^l/d\lambda)/2 \quad (8.30)$$

представляют собой два дифференциальных уравнения второго порядка для двух функций $x^i(\lambda)$. Поскольку L в (8.29) — однородная функция второй степени относительно \dot{x}^i ,

$$L = g_{ik} (dx^i/d\lambda) (dx^k/d\lambda) = (ds/d\lambda)^2 = \text{const} \quad (8.31)$$

является интегралом системы (8.30). Соответствующим выбором параметра λ всегда можно добиться, чтобы постоянная в правой части (8.31) равнялась единице. Это означает, что в качестве параметра λ мы выбрали длину дуги s геодезической линии. Тогда (8.30) и (8.31) примут вид

$$\begin{aligned} d(g_{ik} dx^k/ds)/ds &= (\partial g_{ki}/\partial x^i) (dx^k/ds) (dx^l/ds)/2, \\ g_{ik} (dx^i/ds) (dx^k/ds) &= 1. \end{aligned} \quad (8.32)$$

Видно, что кривые, определяемые соотношениями (8.30) и (8.31), удовлетворяют также уравнениям Эйлера (8.24), где $L = [g_{ik} (dx^i/d\lambda) (dx^k/d\lambda)]^{1/2}$. Это означает, что геодезические удовлетворяют также вариационному уравнению

$$\delta \int [g_{ik} (dx^i/d\lambda) (dx^k/d\lambda)]^{1/2} d\lambda = \delta \int ds = 0, \quad (8.33)$$

т. е. расстояние между двумя точками, измеренное вдоль геодезической, соединяющей эти две точки, имеет стационарное значение. Теперь при заданном метрическом тензоре g_{ik} как функции от координат x^i геодезические и углы между двумя пересекающимися геодезическими, как и расстояние между двумя точками, измеренное вдоль соединяющей их геодезической, полностью определяются соотношениями (8.32), (8.19) и (8.18). Поэтому мы можем вывести все геометрические теоремы о треугольниках и других геометрических фигурах, образованных геодезическими на поверхности. Это значит, что геометрия в двухмерном пространстве полностью определяется величинами $g_{ik}(x^i)$.

§ 8.6. Непосредственное измерение метрики. Геометрия n -мерного пространства

Выводы предыдущего параграфа совершенно не зависят от используемой системы координат. Если мы возьмем другую систему криволинейных координат x'^i , связанных с первоначальными координатами x^i соотношениями

$$x'^i = f^i(x^1, x^2), \quad (8.34)$$

то

$$dx'^i = (\partial f^i / \partial x^k) dx^k, \quad (8.35)$$

т. е. дифференциалы координат выражаются друг через друга линейно. Поэтому если с помощью (8.35) исключить dx^i в (8.18), то ds^2 также будет являться однородной квадратической формой от dx'^i :

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g'_{ik} dx'^i dx'^k, \quad (8.36)$$

где коэффициенты g'_{ik} считаются функциями от новых переменных x'^i .

Поскольку геодезические определяются инвариантным вариационным принципом (8.21), (8.29), дифференциальные уравнения для геодезических в новых переменных получаются из (8.30) или (8.32) простой заменой g_{ik} и x^i на g'_{ik} и x'^i соответственно; другими словами, уравнения (8.30) ковариантны или форм-инвариантны. То же самое справедливо и для формулы (8.19).

Если преобразованием типа (8.34) можно ввести такие координаты $X^i = f^i(x^k)$, что линейный элемент в новых координатах будет иметь форму

$$ds^2 = (dX^1)^2 + (dX^2)^2 = \delta_{ik} dX^i dX^k, \quad (8.37)$$

то геометрия на поверхности — евклидова. В этом случае координаты X^i играют ту же роль, что и декартовы координаты в евклидовой плоскости. Дифференциальные уравнения геодезических (8.32) в переменных X^i сводятся к уравнениям

$$d^2 X^i / ds^2 = 0, \quad (8.38)$$

совпадающим по форме с уравнениями прямых в декартовых координатах. Примерами таких поверхностей являются поверхности цилиндра и конуса, которые могут быть развернуты на плоскости без внутренних деформаций. На таких поверхностях все геометрические соотношения для треугольников и других фигур совпадают с соотношениями евклидовой геометрии; и если нас интересует лишь двухмерная геометрия на поверхности, то такие поверхности можно считать тождественными. Вообще, на поверхности невозможно ввести такие (декартовы) координаты, чтобы линейный элемент описывался формулой (8.37). В этом случае геометрия на поверхности уже не евклидова, а риманова. Во всяком случае, геометрию на поверхности можно определить с помощью одних только измерений на ней, т. е. без использования координат евклидова пространства, в которое вложена данная поверхность. Предположим, что мы ввели некоторую систему координат x^i , т. е. непрерывное взаимно однозначное соответствие системы чисел (x^i) и точек на поверхности. С помощью измерительной линейки можно измерить расстояние ds между точками x^i и $x^i + dx^i$. Поскольку ds и dx^i известные числа, формула (8.18) дает одно уравнение для определения неизвестных g_{ik} . Но двухмерный метрический тензор имеет только три независимые компоненты. Поэтому, измеряя три линейных элемента по разным направлениям с общим началом в точке x^i , полностью определим значения g_{ik} в этой точке. Это можно проделать для любой точки поверхности и тем самым экспериментально определить метрический тензор.

Таким образом, геометрия на поверхности становится эмпирической, и исследование ее ограничено лишь точностью измерений. Теперь вообразим, что мы нагреваем поверхность в окрестности точки, где приложена измерительная

линейка, в результате чего она удлиняется. Если не учитывать это удлинение, то с помощью описанного выше метода получаются неточные значения для компонент метрического тензора. Однако, поскольку термическое расширение зависит от материала измерительных линеек, такую погрешность легко учесть и получить «реальные» значения для компонент метрического тензора. С другой стороны, очевидно, что если все измерительные линейки вблизи данной точки по какой-либо причине удлинились в одинаковой степени, независимо от материала линеек, то такое удлинение невозможно заметить и учесть однозначным образом. Поэтому нельзя утверждать, что такое удлинение имеет место, а с физической точки зрения метрический тензор и другие геометрические величины, полученные с помощью таких измерений, должны давать «реальную» геометрию на поверхности.

Все рассуждения данного параграфа для случая двух измерений можно обобщить на пространства 3, 4 и n измерений. Разница лишь в том, что точки в n -мерном пространстве характеризуются n координатами x^i и все индексы в предыдущих формулах должны теперь изменяться от 1 до n . Тогда длина линейного элемента и угол между двумя линейными элементами снова определяются формулами (8.18) и (8.19) соответственно, а геодезические линии — с помощью n уравнений (8.30) или из вариационного принципа (8.21), (8.22), (8.29).

§ 8.7. Общие ускоренные системы отсчета.

Наиболее общие допустимые преобразования координат

В § 8.3 мы выяснили, что пространственная геометрия в равномерно вращающейся системе отсчета неевклидова, а описание времени более сложное, чем в инерциальной системе, что можно объяснить влиянием гравитационного поля, присутствующего во вращающейся системе отсчета. Поэтому, в соответствии с принципом эквивалентности, мы должны ожидать, что гравитационное поле в общем случае будет проявлять себя не только в виде гравитационных сил (центробежные силы, силы Кориолиса, силы притяжения между массами и т. д.), но и сказываться на результатах пространственных и временных измерений.

Рассмотрим снова инерциальную систему I с обычными пространственно-временными координатами (X, Y, Z, T) . Каждой совокупности значений этих переменных соответствует определенное событие, представляющее собой точку в $(3 + 1)$ -пространстве с координатами

$$X^i = (X, Y, Z, T). \quad (8.39)$$

Лоренцевы координаты (8.39) отличаются от координат, определенных в (4.2), только отсутствием множителя i , в четвертой координате. Следовательно, четырехмерный линейный элемент (4.26) принимает форму

$$ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - c^2 dT^2 = \eta_{ik} dX^i dX^k, \quad (8.40)$$

где

$$\eta_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k; \\ 1 & \text{при } i = k = 1, 2, 3; \\ -1 & \text{при } i = k = 4. \end{cases} \quad (8.41)$$

Теперь вместо псевдодекартовых координат Лоренца X^i введем общие криволинейные координаты x^i с помощью преобразований

$$x^i = x^i(X^k), \quad (8.42)$$

где $x^i(X^k)$ — произвольные непрерывные дифференцируемые функции переменных (X^k) . Преобразования (8.1), (8.3), (8.10) являются частным случаем

(8.42). Дифференцируя \check{x}^i (8.42), получаем

$$dx^i = \frac{\partial x^i}{dX^k} dX^k = A_k^i dX^k. \quad (8.43)$$

Из соотношений, обратных (8.42), тем же способом получим

$$dX^i = \frac{\partial X^i}{dx^k} dx^k = \check{A}_k^i dx^k. \quad (8.44)$$

Подставляя (8.44) в правую часть (8.43), находим, что

$$dx^i = A_i^i \check{A}_k^i dx^k.$$

Отсюда

$$A_i^i \check{A}_k^i = \delta_k^i = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases} \quad (8.45)$$

Аналогично подставляя (8.43) в (8.44), имеем

$$\check{A}_i^i A_k^i = \delta_k^i. \quad (8.45')$$

Затем, исключая dX^i в (8.40), получаем следующее выражение для интервала:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k; \quad (8.46)$$

$$g_{ik} = g_{ki} = \eta_{im} \check{A}_i^l \check{A}_k^m = \check{A}_i^l \check{A}_k^l - \check{A}_i^4 \check{A}_k^4. \quad (8.47)$$

(Греческие индексы пробегают значения от 1 до 3, а латинские — от 1 до 4.)

Система S координат (x^i) в 4-пространстве, заданная преобразованиями (8.42), соответствует некоторой системе отсчета R в трехмерном физическом пространстве. Точка отсчета p в R определяется как точка с постоянными значениями трех пространственных координат (x^μ) , а координаты $x^i = (x^\mu, ct)$ с изменяющимся t описывают последовательные события в p . Тогда система отсчета R , соответствующая системе координат S , определяется как совокупность всех точек отсчета p с различными постоянными значениями (x^μ) . В общем случае такая система отсчета уже не будет жесткой, поскольку различные точки отсчета могут иметь различные скорости относительно I . Поэтому движение различных точек в системе отсчета будет аналогично движению жидкости, и мы ограничимся лишь такими преобразованиями (8.42), для которых соответствующая система отсчета может быть описана реальной жидкостью. Это значит, что скорости всех точек в системе отсчета относительно I должны всегда быть меньше c . Поскольку для любой такой точки $dx^\mu = 0$, для компонент ее скорости v^μ относительно I из (8.44) получим

$$v^\mu/c = dX^\mu/dX^4 = \check{A}_4^\mu / \check{A}_4^4. \quad (8.48)$$

Если эта скорость меньше c , то

$$v^2/c^2 = v^\mu v^\mu / c^2 < 1, \text{ или } \check{A}_4^\mu \check{A}_4^\mu - \check{A}_4^4 \check{A}_4^4 < 0. \quad (8.49)$$

Чтобы система отсчета, описываемая формулами (8.42), могла быть реализована физически, допустимые пространственно-временные преобразования должны удовлетворять условию (8.49) или с учетом (8.47) условию

$$g_{44} < 0. \quad (8.50)$$

Представим себе, что в каждой точке системы отсчета мы поместим часы, показывающие время $t = x^4/c$. Тогда мы должны потребовать, чтобы введенное таким способом определение времени давало разумное причинное описание физических явлений.

Следовательно, сигнал, испущенный из точки (x^μ) в момент времени t , должен достичь точки $x^\mu + dx^\mu$ в момент времени $t + dt$ с положительным dt . Поскольку скорость сигнала относительно I не более c , линейный элемент $ds^2 = dX^\mu dX^\mu - c^2 dT^2$ для двух соседних точек на мировой линии сигнала

должен быть меньше или равен нулю. Это значит, что в системе координат x^i $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k \leq 0$.

Другими словами, любые два события, одновременные в системе (x^i) , т. е. события, для которых $dx^4 = 0$, нельзя связать световым сигналом, так что в этом случае мы должны иметь $g_{ik} dx^i dx^k > 0$, или, поскольку $dx^4 = 0$,

$$g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu > 0, \quad (8.51)$$

т. е. квадратическая форма $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu$ — положительно определенная. Необходимым и достаточным условием для этого является положительность миноров матрицы коэффициентов $g_{\mu\nu}$. Поэтому допустимые преобразования (8.42) должны быть такими, чтобы компоненты соответствующего метрического тензора g_{ik} удовлетворяли условиям:

$$g_{\mu\mu} > 0; \begin{vmatrix} g_{\mu\mu} & g_{\mu\nu} \\ g_{\nu\mu} & g_{\nu\nu} \end{vmatrix} > 0; \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} \end{vmatrix} > 0; \quad g_{44} < 0, \quad (8.52)$$

где μ и ν могут принимать любые значения из совокупности 1, 2, 3. (В $g_{\mu\mu}$ нет суммирования по μ .)

Из (8.52) следует, что определитель

$$g = |g_{ik}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} < 0. \quad (8.53)$$

Вводя с помощью преобразований

$$\left. \begin{aligned} x'^i &= x'^i(x^k); \\ dx'^i &= \alpha_k^i dx^k = (\partial x'^i / \partial x^k) dx^k \\ dx^i &= \tilde{\alpha}_k^i dx'^k = (\partial x^i / \partial x'^k) dx'^k \end{aligned} \right\} \quad (8.54)$$

новую систему координат по аналогии с (8.45), (8.45'), имеем

$$\alpha_i^i \tilde{\alpha}_k^i = \tilde{\alpha}_i^i \alpha_k^i = \delta_k^i. \quad (8.55)$$

Интервал ds в новых переменных снова будет однородной квадратической формой:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g'_{ik} dx'^i dx'^k, \quad (8.56)$$

где

$$g'_{ik} = g'_{ki} = g_{lm} \alpha_l^i \tilde{\alpha}_k^m \quad (8.57)$$

— новые функции от координат x'^i . Соотношения, обратные (8.57), следующие

$$g_{ik} = g'_{lm} \alpha_l^i \alpha_k^m, \quad (8.58)$$

что легко проверяется подстановкой (8.57) в (8.58) с использованием (8.55). Преобразования (8.54) должны быть такими, чтобы новые функции g'_{ik} удовлетворяли условиям (8.52). В общем случае система отсчета R' , определяемая системой координат (x'^i) , отлична от системы отсчета R , определяемой координатами (x^i) , но если преобразования (8.54) имеют вид

$$x'^\mu = x'^\mu(x^\nu); \quad x'^4 = x'^4(x^i) = f(x^i), \quad (8.59)$$

где пространственные координаты x'^μ являются функциями лишь от пространственных координат x^ν , то системы отсчета R' и R совпадают, так как в этом случае мы просто вводим другой метод упорядочивания точек в системе R вмес-

те с произвольным непрерывным изменением скорости хода координатных часов. В то время как любая система S координат (x^i) соответствует одной и только одной системе отсчета R в физическом пространстве, в данной системе отсчета всегда можно ввести бесконечное количество пространственно-временных координатных систем S , связанных между собой преобразованиями типа (8.59). Очевидно, что в случае специальных преобразований (8.59) соответствующие коэффициенты α_k^i и $\tilde{\alpha}_k^i$ удовлетворяют условиям:

$$\alpha_4^4 = \tilde{\alpha}_4^4 = 0. \quad (8.59')$$

Вообще гравитационные поля в различных системах координат будут разные, но по физическим причинам во всех системах координат, связанных преобразованиями (8.59), гравитационные поля удобно считать одинаковыми, поскольку все такие координатные системы соответствуют одной системе отсчета. Однако в различных системах отсчета гравитационные поля уже не будут одинаковыми. Исключение составляют инерциальные системы отсчета, в которых отсутствуют гравитационные поля.

§ 8.8. Пространственные измерения и измерения времени в произвольной системе отсчета.

Экспериментальное определение коэффициентов g_{ik}

Рассмотрим произвольную систему отсчета R , соответствующую некоторой системе координат (x^i) , и в ней две точки A и B с пространственными координатами (x^μ) и $(x^\mu + dx^\mu)$ соответственно. Пространственное расстояние $d\sigma$ между точками A и B в момент времени $t = x^4/c$ можно измерить стандартной измерительной линейкой, покоящейся относительно A . В пределе, при очень малом dx^μ точка B практически также будет покоиться относительно измерительной линейки. Чтобы $d\sigma$ выразить через g_{ik} , введем инерциальную систему I^0 , относительно которой в момент времени t точка A (а приблизительно и точка B) покоится. Если X^i — псевдодекартовы пространственно-временные координаты в I^0 , то преобразования от I^0 к R определяются формулами (8.42) — (8.48). Но поскольку I^0 — система покоя для точки A в рассматриваемый момент времени, из (8.48) имеем

$$\tilde{A}_4^\mu = 0 \quad (8.60)$$

в точке A и в момент времени t . Разность dX^μ между одновременными значениями декартовых координат точек A и B получается из (8.44), если положить $t = \mu$ и $dx^4 = dt = 0$. Тогда

$$dX^\mu = \tilde{A}_\nu^\mu dx^\nu. \quad (8.61)$$

Величина $A_4^\mu dx^4$ в (8.44) согласно (8.60) равна нулю, даже при $dx^4 \neq 0$, следовательно, значения dx^μ примерно такие же, как и для одновременных относительно I^0 положений точек A и B .

В соответствии с общим предположением, сформулированным на стр. 182, стандартная измерительная линейка в системе R имеет ту же длину, что и измерительная линейка в I^0 , поэтому $d\sigma^2 = \sum_{\mu=1}^3 (dX^\mu)^2$. Учитывая выражения для dX^μ , видим, что $d\sigma^2$ представляет собой квадратичскую форму от дифференциалов (dx^μ) , т. е.

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu, \quad (8.62)$$

где $\gamma_{\mu\nu} = \tilde{A}_\mu^\lambda \tilde{A}_\nu^\lambda$.

Теперь из (8.47) и (8.60) получим

$$g_{i4} = \tilde{A}_i^\lambda \tilde{A}_4^\lambda - \tilde{A}_i^4 \tilde{A}_4^4 = -\tilde{A}_i^4 \tilde{A}_4^4,$$

откуда

$$\check{A}_\mu^4 = -g_{\mu 4} / \check{A}_4^4 = -g_{\mu 4} / \sqrt{-g_{44}} = -\gamma_\mu,$$

где мы положили

$$\gamma_\mu \equiv g_{\mu 4} / \sqrt{-g_{44}}. \quad (8.63)$$

Более того, из (8.47) при $i = \mu$, $k = \nu$ следует равенство

$$\check{A}_\mu^\lambda \check{A}_\nu^\lambda = g_{\mu\nu} + \check{A}_\mu^4 \check{A}_\nu^4,$$

что приводит к следующим выражениям для компонент пространственного метрического тензора:

$$\gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} + \gamma_\mu \gamma_\nu. \quad (8.64)$$

Таким образом, метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$, определяющий пространственную геометрию в системе отсчета R , в общем случае не равен пространственной части $g_{\mu\nu}$ — 4-тензора g_{ik} . Это будет иметь место только при

$$g_{\mu 4} = 0 \quad \text{или} \quad \gamma_\mu = 0. \quad (8.65)$$

В системе координат, где в каждой точке выполняются соотношения (8.65), временная ось везде ортогональна пространственным координатным кривым. Поэтому такая система называется *времениортогональной*.

Теперь рассмотрим стандартные часы C , покоящиеся в данной точке A системы отсчета R . Линейный элемент мировой линии этих часов имеет вид

$$ds^2 = g_{44} (dx^4)^2, \quad (8.66)$$

поскольку для покоящихся часов $dx^\mu = 0$. Если $t = x^4/c$ — время, показываемое координатными часами в точке A , то приращение $d\tau_0$ времени по часам C определяется выражением $ds^2 = -c^2 d\tau_0^2$ (см. § 4.5). Это следует немедленно из инвариантности ds^2 , если ввести мгновенно инерциальную систему покоя I^0 часов C . Величина ds^2 , выраженная через пространственно-временные координаты (X^{0i}) этой системы, имеет вид $ds^2 = -c^2 (dT^0)^2$, так как $dX^{0\mu} = 0$. Кроме того, поскольку время T^0 само измеряется стандартными часами в системе покоя I^0 , то $dT^0 = d\tau_0$ и (8.66) можно записать следующим образом:

$$d\tau_0^2 = -g_{44} dt^2. \quad [(8.66)']$$

Следовательно, функция $\sqrt{-g_{44}}$ определяет соотношение между скоростью хода стандартных часов C и координатных часов в рассматриваемой точке. Итак, величину g_{44} можно найти экспериментально, измеряя в каком-либо месте отношение скорости хода двух часов. Прделав эту процедуру в каждой точке системы отсчета и во все моменты времени, определим $g_{44}(x^i)$ как функцию от пространственно-временных координат (x^i) .

Метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ задающий, в соответствии с (8.62), пространственную геометрию в R , также может быть получен прямыми измерениями с помощью метода, аналогичного рассмотренному в § 8.6, для двухмерного случая. Чтобы найти шесть независимых компонент $\gamma^{\mu\nu}$, достаточно в каждой точке и во все моменты времени просто измерить длины шести выбранных должным образом линейных элементов (dx^μ) .

Если бы мы смогли найти метод измерения величины γ_μ , то тем самым метрический тензор g_{ik} был бы полностью определен. Рассмотрим с этой целью световой сигнал, испущенный из точки A с координатами (x^μ) в момент времени t и прибывающий в соседнюю точку B $(x^\mu + dx^\mu)$ в момент времени $t + dt$. Мировая линия этого сигнала описывается уравнением

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = 0, \quad (8.67)$$

поскольку в инерциальной системе I скорость сигнала равна c . Отсюда следует, что инвариант $ds^2 = \eta_{ik} dX^i dX^k = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - c^2 dT^2 = 0$.

Используя (8.63), (8.64) и (8.62), уравнение (8.67) запишем в виде $g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu + 2 g_{\mu 4} dx^\mu dx^4 + g_{44} (dx^4)^2 = 0$. Разделив его на dt^2 , получим

$$\omega^2 = \{c \sqrt{-g_{44}} - \gamma_\mu \omega^\mu\}^2, \quad (8.68)$$

где $\omega^\mu = dx^\mu/dt$ — компоненты скорости светового сигнала, а

$$\omega = d\sigma/dt = (\gamma_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu)^{1/2} \quad (8.69)$$

— величина его скорости. Пусть e^μ — единичный вектор в направлении распространения сигнала, т. е.

$$\omega^\mu = \omega e^\mu; \quad \gamma_{\mu\nu} e^\mu e^\nu = 1. \quad (8.70)$$

Тогда в соответствии с (8.64) и (8.52) имеем

$$(\gamma_\mu e^\mu)^2 = \gamma_{\mu\nu} e^\mu e^\nu - g_{\mu\nu} e^\mu e^\nu < 1, \quad (8.71)$$

а из (8.68) для скорости светового сигнала получаем

$$\omega(e^\mu) = c^*/(1 + \gamma_\mu e^\mu), \quad (8.72)$$

где

$$c^* = c(-g_{44})^{1/2}. \quad (8.73)$$

Как видно из (8.72), скорость светового сигнала зависит от направления его распространения. Теперь измерением скорости светового сигнала в трех различных направлениях e^μ с помощью (8.72) можно определить три величины γ_μ . В принципе, таким методом можно экспериментально определить все величины $\gamma_{\mu\nu}$, γ_μ , g_{44} , т. е. компоненты метрического тензора g_{ik} в данной системе пространственно-временных координат.

Величина c^* — скорость в направлении, перпендикулярном 3-вектору γ_μ , когда $\gamma_\mu e^\mu = 0$. Время Δt , необходимое для прохождения светового сигнала из точки $p(x^\mu)$ в бесконечно близкую точку $x^\mu + dx^\mu$ на расстоянии $d\sigma$ от p и обратно, равно

$$\Delta t = (1 + \gamma_\mu e^\mu) d\sigma/c^* + (1 - \gamma_\mu e^\mu) d\sigma/c^* = l/c^*, \quad (8.74)$$

где $l = 2d\sigma$ — полное расстояние, пройденное световым сигналом. Таким образом, c^* равна средней скорости светового сигнала и может быть найдена из эксперимента типа опыта Физо (см. § 1.6), если время измеряется координатными часами в p , а обе точки расположены так близко, что γ_μ , c^* можно считать постоянными вдоль пути. Сдругой стороны, если время и расстояние измеряются с помощью покоящихся стандартных часов и стандартной измерительной линейки, то тот же эксперимент для средней скорости сигнала даст значение c , поскольку в соответствии с (8.66')

$$\Delta\tau_0 = (-g_{44})^{1/2} \Delta t. \quad (8.75)$$

Снова это справедливо лишь в тех случаях, когда c^* и γ_μ практически постоянны вдоль пути светового сигнала. На больших расстояниях, когда g_{44} , γ_μ сильно изменяются, опыт Физо дает различные значения для средней скорости света (см. § 12.4). Выраженный через величины $\gamma_{\mu\nu}$, γ_μ и c^* , определенные формулами (8.63), (8.64) и (8.73), линейный элемент ds имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - (c^* dt - \gamma_\mu dx^\mu)^2, \quad (8.76)$$

или с учетом (8.62)

$$ds^2 = d\sigma^2 - (c^* dt - \gamma_\mu dx^\mu)^2. \quad (8.76')$$

§ 8.9. Пространственная геометрия во вращающейся системе отсчета

Рассмотрим снова введенную в § 8.3 вращающуюся систему координат. Из (8.1) — (8.3) и (8.10) получим преобразования (8.42) или соответствующие им обратные преобразования в форме

$$\left. \begin{aligned} X &= r \cos(\vartheta + \omega t); & Y &= r \sin(\vartheta + \omega t); \\ Z &= z; & T &= t; \\ x^i &= (r, \vartheta, z, ct). \end{aligned} \right\} \quad (8.77)$$

Дифференцируя и подставляя значения (dX, dY, dZ, dT) в выражение для интервала $ds^2 = dX^2 + dY^2 + dZ^2 - c^2 dT^2$, получаем

$$ds^2 = dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + dz^2 + 2\omega r^2 d\vartheta dt - (c^2 - r^2 \omega^2) dt^2 = g_{ih} dx^i dx^h. \quad (8.78)$$

Таким образом,

$$g_{11} = 1, \quad g_{22} = r^2; \quad g_{33} = 1; \quad g_{44} = -(1 - r^2 \omega^2 / c^2); \quad g_{24} = g_{42} = \omega r^2 / c. \quad (8.79)$$

Все остальные компоненты g_{ih} равны нулю. В результате с учетом (8.63) и (8.64) находим, что

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= (0, \omega r^2 / \sqrt{c^2 - r^2 \omega^2}, 0) = (\omega r^2 / \sqrt{c^2 - r^2 \omega^2}) \delta_{\mu 2}; \\ \gamma_{11} &= 1; \quad \gamma_{22} = r^2 / (1 - r^2 \omega^2 / c^2); \quad \gamma_{33} = 1; \quad \gamma_{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu. \end{aligned} \right\} \quad (8.80)$$

Следовательно, вычислив с помощью (8.62) и (8.80) линейный элемент $d\sigma^2$, снова получим выражение (8.7). Кроме того, (8.66') вместе с (8.79) для g_{44} опять приводит к (8.9).

Пространственная геометрия, определяемая линейным элементом $d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} d^\mu dx^\nu$, неевклидова. В плоскости $z = Z = 0$, т. е. на вращающемся диске, имеем лишь две координаты $(x^1, x^2) = (r, \vartheta)$, и геодезические определяются уравнениями (8.39), в которых g_{ik} и ds заменяются на $\gamma_{\mu\nu}$ и $d\sigma$ соответственно, т. е.

$$\frac{d}{d\sigma} \left(\gamma_{\mu\nu} \frac{dx^\nu}{d\sigma} \right) = (\partial \gamma_{\nu\lambda} / \partial x^\mu) (dx^\nu / d\sigma) (dx^\lambda / d\sigma) / 2, \quad (8.81a)$$

$$\gamma_{\mu\nu} (dx^\mu / d\sigma) (dx^\nu / d\sigma) = 1. \quad (8.81b)$$

В нашем случае из второго уравнения (8.81 a) с учетом (8.80) имеем

$$d [r^2 / (1 - \omega^2 - r^2 / c^2) d\vartheta / d\sigma] / d\sigma = 0.$$

Интегрируя, получаем

$$[r^2 / (1 - r^2 \omega^2 / c^2)] \dot{\vartheta} = \alpha, \quad (8.82)$$

где α — постоянная интегрирования, а $\dot{\vartheta} = d\vartheta / d\sigma$.

Следовательно,

$$\dot{\vartheta} = \alpha (1 - r^2 \omega^2 / c^2) / r^2. \quad (8.83)$$

Далее, из (8.81 б) находим, что

$$\begin{aligned} \dot{r}^2 + [r^2 / (1 - r^2 \omega^2 / c^2)] \dot{\vartheta}^2 &= 1, \\ \dot{r} &= \pm \sqrt{1 + \alpha^2 \omega^2 / c^2 - \alpha^2 / r^2}. \end{aligned} \quad (8.84)$$

В результате

$$\frac{dr}{d\vartheta} = \frac{\dot{r}}{\dot{\vartheta}} = \pm \frac{r^2 \sqrt{1 + \frac{\alpha^2 \omega^2}{c^2} - \frac{\alpha^2}{r^2}}}{\alpha \left(1 - \frac{r^2 \omega^2}{c^2}\right)}. \quad (8.85)$$

Если α равна нулю, то из (8.82) $\dot{\vartheta} = 0$, т. е. радиус-вектор с $\vartheta = \text{const}$ является геодезической. На рис. 17 в евклидовой плоскости изображены некоторые из

геодезических на вращающемся диске. Здесь точки на вращающемся диске с координатами r, ϑ считаются точками с полярными координатами r, ϑ . Поэтому геодезические на вращающемся диске изображаются такими кривыми в неподвижной плоскости X, Y , с которыми в момент времени $t = T = = n2\pi/\omega$ они совпадают. Радиус r^* диска определяется условием (8.4), т. е.

$$r^* = c/\omega. \quad (8.86)$$

Для геодезических OB и OA $\alpha = 0$. Геодезическая AB , выходящая из точки $(r_0, 0)$ при $\dot{r} = 0$, соответствует $\alpha \neq 0$, что следует из (8.83), (8.84):

$$\alpha = \dot{\vartheta}_0 r_0^2 / (1 - r_0^2 \omega^2 / c^2) = r_0 / \sqrt{1 - r_0^2 \omega^2 / c^2}. \quad (8.87)$$

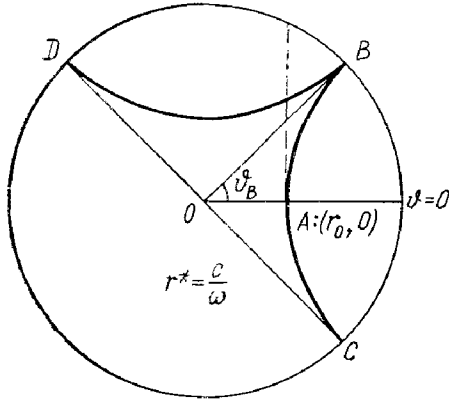


Рис. 17.

С увеличением ϑ радиус-вектор r также увеличивается в соответствии с (8.85), причем здесь $dr/d\vartheta$ больше, чем в предельном случае $c \rightarrow \infty$, для которого

$$dr/d\vartheta = r(r^2 - \alpha^2)^{1/2}/\alpha. \quad (8.88)$$

Пунктирная линия на рис. 17 определяется уравнением (8.88). Если бы геометрия на вращающемся диске была евклидова, то эта линия являлась бы геодезической. Если $r \rightarrow r^* = c/\omega$, то, согласно (8.83), $\dot{\vartheta} \rightarrow 0$ и поэтому OB является касательной к геодезической AB в точке B .

Рассмотрим две геодезические $x_1^\mu = x_1^\mu(\sigma)$, $x_2^\mu = x_2^\mu(\sigma)$, пересекающиеся в одной точке. Угол θ между этими кривыми

в точке пересечения определяется из (8.19). Следовательно, с учетом (8.80) и (8.83) имеем

$$\cos \theta = \pm \sqrt{(1 + \alpha_1^2 \omega^2 / c^2 - \alpha_1^2 / r_1^2)(1 + \alpha_2^2 \omega^2 / c^2 - \alpha_2^2 / r_2^2) + \alpha_1 \alpha_2 (1 - r^2 \omega^2 / c^2) / r^2}, \quad (8.89)$$

где α_1 и α_2 — значения постоянной α для этих двух геодезических. Данное выражение можно использовать везде, кроме точки O . Рассмотрим теперь треугольник OAB . В точке O угол между двумя сторонами треугольника равен $\theta_0 = \vartheta_B < \pi/2$, так как в центре диска геометрия евклидова. Угол между геодезическими AO и AB найдем из (8.89), полагая

$\alpha_1 = 0$; $\alpha_2 = \alpha = r_0 / \sqrt{1 - r_0^2 \omega^2 / c^2}$, тогда $\cos \theta_A = -\sqrt{\{1 + \alpha^2 (\omega^2 / c^2 - 1/r_0^2)\}} = 0$, т. е. $\theta_A = \pi/2$.

И наконец, угол θ_B между геодезическими BA и BO найдем из (8.89), полагая $\alpha_1 = 0$, $\alpha_2 = -\alpha$, $r = r^* = c/\omega$:

$$\cos \theta_B = \sqrt{\{1 + \alpha^2 (\omega^2 / c^2 - \omega^2 / c^2)\}} = 1, \quad \theta_B = 0.$$

Следовательно,

$$\theta_{OAB} = \theta_0 + \theta_A + \theta_B = \vartheta_B + \pi/2 < \pi,$$

т. е. сумма углов треугольника на вращающемся диске меньше π . И только если треугольник расположен близко к центру, сумма его углов равна примерно π . На вращающемся диске существует даже треугольник с суммой углов, равной нулю, например треугольник CBD , образованный геодезическими CB , BD и DC .

Таким образом, для всех треугольников на вращающемся диске сумма их углов лежит в пределах от 0 до π . Пространственная геометрия, определяемая наблюдателем на вращающемся диске, соответствует геометрии на поверхности отрицательной кривизны в трехмерном евклидовом пространстве.

Во вращающейся системе иногда удобно использовать другую совокупность пространственных координат (x, y, z) , связанных с цилиндрическими координатами преобразованиями

$$x = r \cos \vartheta; y = r \sin \vartheta; r^2 = x^2 + y^2. \quad (8.90)$$

В этих координатах линейный элемент (8.79) принимает форму

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2\omega(-ydx + xdy)dt - (1 - r^2\omega^2/c^2)c^2 dt^2. \quad (8.91)$$

§ 8.10. Мировые линии свободных частиц и световых лучей

Рассмотрим материальную частицу, движущуюся лишь под действием гравитационных полей, возникающих в ускоренной системе отсчета с координатами (x^i) . Поскольку предполагается, что эти поля устранимы, их можно исключить преобразованием к псевдодекартовым координатам (X^i) инерциальной системы I , с которой мы начали рассмотрение § 8.7. В этой системе движение частицы равномерное, так что ее мировая линия — прямая, определяемая из уравнения

$$d^2 X^i / d\lambda^2 = 0, \quad (8.92)$$

где λ — произвольный параметр, являющийся линейной функцией от собственного времени τ частицы. Другими словами, мировая линия свободно падающей частицы является геодезической в 4-пространстве. В произвольной системе криволинейных координат (x^i) уравнения для геодезической проще всего получить из вариационного принципа (8.21), (8.29), где теперь индексы i, k пробегают значения от 1 до 4, т. е.

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} d\lambda = 0. \quad (8.93)$$

Соответствующие уравнения Эйлера (8.30) следующие:

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{ik} \frac{dx^k}{d\lambda} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda}, \quad i = 1, 2, 3, 4 \quad (8.94)$$

с интегралом (8.31), т. е.

$$\left(\frac{ds}{d\lambda} \right)^2 \equiv g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} = \text{const}. \quad (8.95)$$

В отличие от случая, рассмотренного в § 8.5, метрический тензор в 4-пространстве не является положительно определенным. Поэтому постоянная в правой части (8.95) может быть положительной, отрицательной и равной нулю, и соответствующие геодезические линии будем называть пространственноподобными, времениподобными и нулевыми. Интеграл в (8.93) не является инвариантом при произвольных преобразованиях параметра λ . Поэтому уравнение (8.94) также изменяется при введении нового параметра $\lambda' = f(\lambda)$. В результате вместо (8.94) будем иметь

$$\frac{d}{d\lambda'} \left(g_{ik} \frac{dx^k}{d\lambda'} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda'} \frac{dx^l}{d\lambda'} - \frac{d^2 \lambda'}{d\lambda^2} \left(\frac{d\lambda}{d\lambda'} \right)^2 g_{ik} \frac{dx^k}{d\lambda'}. \quad (8.94')$$

Таким образом, уравнение (8.94) для геодезических справедливо лишь для некоторого класса специальных параметров, связанных друг с другом линейными преобразованиями.

Для пространственноподобных геодезических, когда постоянная в (8.94) положительна, всегда можно соответствующим выбором параметра сделать ее равной единице. Это соответствует выбору в качестве параметра длины дуги геодезической.

Мировая линия материальной частицы всегда времениподобна, т. е. вдоль этой кривой $ds^2 < 0$. Поэтому лишь времениподобные геодезические в 4-пространстве могут описывать движение частицы. Когда постоянная в правой части (8.94) отрицательна, всегда можно выбрать параметр λ так, чтобы эта постоянная равнялась $-c^2$. Это соответствует выбору в качестве параметра λ собственного времени τ частицы, которое можно определять с помощью движущихся вместе с частицей стандартных часов. В этом случае (8.94) и (8.95) имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(g_{ik} \frac{dx^k}{d\tau} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\tau} \frac{dx^l}{d\tau}; \\ g_{ik} \frac{dx^i}{d\tau} \frac{dx^k}{d\tau} &= -c^2. \end{aligned} \right\} \quad (8.96)$$

Эти уравнения определяют мировые линии свободно падающих частиц в устраняемом гравитационном поле системы x^i , так как, используя эти уравнения в системе координат (X^i) , с которой мы начали данное рассмотрение, получаем частные релятивистские уравнения (8.92), поскольку в этих координатах метрический тензор постоянен и равен η_{ik} .

Для времениподобных геодезических вместо вариационного принципа (8.93) можно использовать другой:

$$\delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} \left(-g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda = 0, \quad (8.97)$$

т. е. тот, который применялся в § 8.5. Соответствующие уравнения Эйлера имеют вид

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left\{ g_{ik} \frac{dx^k}{d\lambda} \left(-g_{lm} \frac{dx^l}{d\lambda} \frac{dx^m}{d\lambda} \right)^{-1/2} \right\} = \\ = \frac{1}{2} \left(-g_{mn} \frac{dx^m}{d\lambda} \frac{dx^n}{d\lambda} \right)^{-1/2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (8.98)$$

Когда λ равен одному из частных параметров, для которого справедливы (8.94) и (8.95), уравнения (8.98) и (8.94) эквивалентны. Однако уравнения (8.98) справедливы при любом выборе параметра. Это следует также из того, что подынтегральное выражение в (8.97) — однородная функция первой степени от $dx^i/d\lambda$, поэтому интеграл

$$\int \left(-g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda} \frac{dx^k}{d\lambda} \right)^{1/2} d\lambda = \int \left(-g_{ik} \frac{dx^i}{d\lambda'} \frac{dx^k}{d\lambda'} \right)^{1/2} d\lambda' \quad (8.99)$$

не изменяется при любом преобразовании параметра. И наконец, нулевые геодезические, для которых

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(g_{ik} \frac{dx^k}{d\lambda} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda}; \\ g_{ik} (dx^i/d\lambda) (dx^k/d\lambda) &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.100)$$

представляют собой мировые линии световых лучей, поскольку в системе координат (X^i) уравнения (8.100) сводятся к уравнениям

$$\left. \begin{aligned} d^2 X^i / d\lambda^2 &= 0; \\ (dX^\mu / d\lambda) (dX^\mu / d\lambda) - (dX^4 / d\lambda)^2 &= 0, \end{aligned} \right\} \quad (8.101)$$

которые описывают прямолинейное движение точки со скоростью c в инерциальной системе.

Как мы выясним позднее (гл. 9, 10), уравнения для мировых линий материальных частиц и световых лучей, выведенные здесь для случая устраняемых гравитационных полей, справедливы и в более общем случае неустраняемых гравитационных полей.

§ 8.11. Динамические гравитационные потенциалы

В § 8.8 и 8.9 мы видели, что гравитационное поле в произвольной ускоренной системе координат (x^i) влияет на пространственные и временные измерения, производимые с помощью стандартных измерительных линеек и стандартных часов. Пространственная геометрия, например, описывается пространственным тензором $\gamma_{\mu\nu}$, определяемым из соотношения (8.64). Теперь введем величины, описывающие динамическое действие гравитационных полей. Для этого используем пробное тело с произвольной массой, помещая его в ту точку нашей системы отсчета, где мы хотим измерить гравитационное поле. Ускорение, сообщаемое частице гравитационным полем, определяет напряженность этого поля.

Полагая в (8.96) $i = \mu = 1, 2, 3$, для частицы, покоящейся в некоторый момент времени, получаем

$$g_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{d\tau^2} + \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu 4} \frac{dx^4}{d\tau} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{44}}{\partial x^\mu} \left(\frac{dx^4}{d\tau} \right)^2. \quad (8.102)$$

Далее, из (8.76) имеем

$$-c^2 d\tau^2 = ds^2 = dt^2 \{u^2 - (c^* - \gamma_\mu u^\mu)^2\},$$

т. е.

$$d\tau = dt \{((-g_{44})^{1/2} - \gamma_\mu u^\mu/c)^2 - u^2/c^2\}^{1/2}, \quad (8.103)$$

где

$$\tau, u^\mu = dx^\mu/dt, \quad u = d\sigma/dt = (\gamma_{\mu\nu} u^\mu u^\nu)^{1/2} \quad (8.104)$$

— собственное время, компоненты скорости и величина скорости частицы соответственно. Следовательно,

$$g_{\mu 4} \frac{dx^4}{d\tau} = \gamma_\mu \sqrt{-g_{44}} c \frac{dt}{d\tau} = c \gamma_\mu \left\{ \left(1 - \frac{\gamma_\nu u^\nu}{c^*} \right)^2 - \frac{u^2}{c^{*2}} \right\}^{-1/2}, \quad (8.105)$$

и для частицы, покоящейся в данный момент, из (8.103), (8.105) получаем

$$\left. \begin{aligned} \frac{d}{d\tau} \left(g_{\mu 4} \frac{dx^4}{d\tau} \right) &= (-g_{44})^{-1/2} \left\{ c^2 \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial x^4} + \frac{\gamma_\mu \gamma_\nu}{\sqrt{-g_{44}}} \frac{d^2 x^\nu}{dt^2} \right\}; \\ d^2 x^\nu / d\tau^2 &= -(1/g_{44}) (d^2 x^\nu / dt^2). \end{aligned} \right\} \quad (8.106)$$

В результате, подставляя (8.103) и (8.106) в (8.102), имеем

$$\gamma_{\mu\nu} \frac{d^2 x^\nu}{dt^2} = -\frac{\partial}{\partial x^\mu} \left(-\frac{c^2 g_{44}}{2} \right) - c \sqrt{-g_{44}} \frac{\partial \gamma_\mu}{\partial t}. \quad (8.107)$$

Левая часть в (8.107) представляет собой гравитационное ускорение пробной частицы, причем

$$a_\mu = \gamma_{\mu\nu} d^2 x^\nu / dt^2 \quad (8.108)$$

— ковариантные компоненты ускорения частицы с нулевой скоростью в криволинейных координатах нашей системы отсчета (см. § 9.2). Таким образом, динамическое действие гравитационного поля описывается функциями

g_{44} и γ_μ .

Если положить

$$g_{44} = -(1 + 2\chi/c^2), \quad (8.109)$$

то из (8.107) получим

$$a_\mu = -\partial\chi/\partial x^\mu - c^* \partial\gamma_\mu/\partial t, \quad (8.110)$$

где

$$c^* = c \sqrt{1 + 2\chi/c^2} \quad (8.111)$$

есть средняя скорость света, определяемая соотношением (8.73).

Учитывая аналогию (8.110) с силой, действующей на покоящуюся заряженную частицу, выраженной через электромагнитные потенциалы, величины χ и γ_μ будем называть гравитационными скалярным и векторным потенциалами соответственно. Скалярный потенциал выбран таким образом, чтобы при $\chi = 0$, g_{44} имело частное релятивистское значение — 1.

Если γ_μ не зависит от времени, то гравитационное ускорение равно градиенту скалярного потенциала:

$$a_\mu = -\partial\chi/\partial x^\mu. \quad (8.112)$$

Это имеет место, например, во вращающейся системе координат. В этом случае из (8.79) и (8.109) имеем

$$\chi = -r^2\omega^2/2. \quad (8.113)$$

Следовательно, гравитационное ускорение частицы с нулевой скоростью направлено от центра вдоль радиуса и равно $r\omega^2$, что соответствует обычному выражению для центробежной силы.

§ 8.12. Скорость хода движущихся стандартных часов в гравитационном поле

Из формул (8.103) и (8.109) мы имеем следующее выражение для собственного времени частицы, движущейся в гравитационном поле с гравитационными потенциалами (γ_μ , χ):

$$d\tau = dt \left\{ (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} - \gamma_\mu u^\mu/c^2 - u^2/c^2 \right\}^{1/2}. \quad (8.114)$$

Поскольку τ — время, измеренное стандартными часами, движущимися вместе с частицей, (8.114) определяет скорость хода движущихся стандартных часов в сравнении со скоростью хода координатных часов рассматриваемой системы. Если система координат времениортогональная, то $\gamma_\mu = 0$ и

$$d\tau = dt (1 + 2\chi/c^2 - u^2/c^2)^{1/2}. \quad (8.115)$$

Формулы (8.114) и (8.115) обобщают формулу (2.38) и выражают замедление (или ускорение) хода движущихся часов при наличии гравитационного поля.

Для часов, покоящихся в нашей системе отсчета, имеем

$$d\tau_0 = dt \sqrt{1 + 2\chi/c^2}, \quad (8.116)$$

что соответствует (8.66') и (8.109). Таким образом, ход стандартных часов зависит от скалярного потенциала в той точке, где эти часы установлены; он более замедлен там, где меньше гравитационный потенциал. Следует заметить, что подобное утверждение имеет смысл только тогда, когда задана определенная система координат, поскольку формулы (8.114) и (8.115) дают лишь соотношение между ходом стандартных часов и координатных часов в точке установки стандартных часов. На вращающемся диске в соответствии с (8.116) и (8.113) имеем

$$d\tau_0 = dt \sqrt{1 + 2\chi/c^2} = dt \sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}, \quad (8.117)$$

т. е. стандартные часы, удаленные от центра, идут медленнее стандартных часов в центре, показывающих время $t = T$. Это замедление хода стандартных часов при $r > 0$ будет различным образом интерпретироваться наблюдателями в фиксированной системе I и во вращающейся системе S . Наблюдатель в I объяснит это запаздывание движением часов. В этой системе гравитационное поле отсутствует, т. е. $\chi = \gamma_\mu = 0$, но скорость часов $u = r\omega$. Поэтому в системе I соотношение (8.114) приводит к формуле

$$d\tau_0 = dt \sqrt{1 - u^2/c^2} = dt \sqrt{1 - r^2\omega^2/c^2}. \quad (8.118)$$

С другой стороны, в системе S скорость $u = 0$, но присутствует гравитационное поле $\chi = -r^2\omega^2/2$ и (8.114) снова приводит к тем же соотношениям (8.117) или (8.118). Таким образом, наблюдатель в S запаздывание стандартных часов объяснит действием гравитационного поля во вращающейся системе.

§ 8.13. Преобразование координат в фиксированной системе отсчета

Пусть (x^i) — пространственно-временные координаты, соответствующие некоторой системе отсчета R . С помощью преобразований (8.59) можно внутри той же системы R ввести новые пространственно-временные координаты. Такие преобразования дают просто другой способ упорядочивания точек в системе R вместе с произвольным изменением хода и размещения координатных часов. Это, естественно, не может привести к изменению пространственной геометрии в R , определенной с помощью стандартных измерительных линеек, т. е. интервал ds , определяемый соотношениями (8.62), (8.64) и (8.63), должен быть инвариантом при таких преобразованиях. Формальное доказательство этого утверждения приведено в § 9.16.

Поскольку в данном случае система отсчета не изменяется, гравитационное поле следует считать неизменным. Однако, в соответствии с (8.57), гравитационные потенциалы (χ, γ_μ) , описываемые формулами (8.109) и (8.63), будут трансформироваться. Преобразования такого вида аналогичны калибровочным преобразованиям (5.23) для электромагнитных потенциалов, при которых сами потенциалы изменяются, а электромагнитное поле, определяемое этими потенциалами, остается неизменным. Во многих случаях можно с помощью таких «калибровочных преобразований» гравитационных потенциалов привести их к более простому виду. Во-первых, преобразованиями вида

$$x'^\mu = x^\mu; \quad x'^4 = x'^4(x^i) = f(x^i) \quad (8.119)$$

всегда можно добиться того, чтобы в системе (x'^i) скалярный потенциал обратился в нуль. Для этого необходимо лишь выбрать новую временную переменную $t' = x'^4/c$ так, чтобы новые координатные часы имели такую же скорость хода, что и покоящиеся стандартные часы. С учетом (8.66') и (8.116) новая временная переменная определяется из соотношения

$$t' = \tau_0 = \int_0^{t'} \sqrt{-g_{44}} dt + \psi(x^\mu) = \int_0^{t'} \sqrt{1 + 2\chi/c^2} dt + \psi(x^\mu), \quad (8.120)$$

где интегрирование производится при неизменных значениях пространственных координат x^μ , а $\psi(x^\mu)$ — произвольная функция от x^μ . При таком выборе t' , учитывая, что (8.116) справедливо и в новой системе координат, получаем

$$dt' = dt_0 = dt' \sqrt{1 + 2\chi'/c^2} = dt' \sqrt{-g'_{44}},$$

т. е.

$$\chi' = 0; \quad g'_{44} = -1. \quad (8.121)$$

В качестве примера используем преобразование (8.120), где $\psi = 0$ во вращающейся системе отсчета. Поскольку в этой системе $t = T$, новая временная переменная t' в (8.120) будет определяться, очевидно, преобразованием (8.9), от которого мы отказались из практических соображений (§ 8.3). Однако в принципе допустимо и использование временной координаты t из (8.9). Несложное вычисление показывает, что в этой новой системе координат линейный элемент ds имеет форму

$$ds^2 = \left\{ 1 - \frac{r^2 \omega^4 t^2/c^2}{(1 - r^2 \omega^2/c^2)^2} \right\} dr^2 + r^2 d\vartheta^2 + dz^2 - \frac{2r^3 \omega^3 t/c^2}{(1 - r^2 \omega^2/c^2)^{3/2}} dr d\vartheta - \frac{2r\omega^2 t}{1 - r^2 \omega^2/c^2} dr dt + \frac{2\omega r^2}{\sqrt{1 - r^2 \omega^2/c^2}} d\vartheta dt - c^2 dt^2. \quad (8.122)$$

В новой системе координат мы имеем более сложную зависимость компонент g_{ik} от t , но получаем упрощение в том, что скалярный потенциал исчезает. Из (8.63), (8.64) и (8.109) получаем в этой системе

$$\gamma_{\mu} = \left\{ \begin{array}{l} -\frac{r\omega^2 t/c}{1-r^2\omega^2/c^2}, \quad \frac{\omega r^2/c}{(1-r^2\omega^2/c^2)^{1/2}}, \quad 0 \}; \quad \chi = 0; \\ \gamma_{11} = 1; \quad \gamma_{22} = r^2/(1-r^2\omega^2/c^2); \quad \gamma_{33} = 1; \\ \gamma_{\mu\nu} = 0 \quad \text{при} \quad \mu \neq \nu. \end{array} \right\} \quad (8.123)$$

Следовательно, пространственный метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ остается неизменным, что и должно быть при чисто временных преобразованиях. Однако векторный потенциал имеет несколько более сложный вид [см. (8.80)], поскольку γ_1 не равен нулю и зависит от времени.

Данный пример показывает, что преобразование (8.120), при котором скалярный потенциал исчезает, не обладает особыми преимуществами. Более выгодно было бы преобразованиями вида (8.119) исключить векторный потенциал γ_{μ} , поскольку тогда новая система координат будет времениортогональной и все формулы значительно упростятся. Поэтому попробуем найти такие преобразования (8.119), чтобы

$$\gamma'_{\mu} = 0 \quad (\mu = 1, 2, 3). \quad (8.124)$$

Для удобства в каждой системе координат введем четырехкомпонентную величину σ_i :

$$\sigma_i = \{\gamma_{\mu} (-g_{44})^{-1/2}, -1\} = g_{i4}/(-g_{44}). \quad (8.125)$$

Тогда выражение (8.76') для линейного элемента можно записать в виде

$$ds^2 = d\sigma^2 + g_{44} (\sigma_i dx^i)^2. \quad (8.126)$$

Поскольку при преобразовании (8.119) ds^2 и $d\sigma^2$ инвариантны, $g'_{44} (dx'^4)^2 = g_{44} (\sigma_i dx^i)^2$ или

$$dx'^4 = (\partial f / \partial x^i) dx^i = \Lambda \sigma_i dx^i, \quad (8.127)$$

где

$$\Lambda^2 = g_{44}/g'_{44} \neq 0. \quad (8.127')$$

Из (8.127) имеем четыре уравнения

$$\partial f / \partial x^i = \Lambda \sigma_i, \quad (8.128)$$

которые после исключения Λ приводят к следующим трем уравнениям для определения функции $f(x)$ в (8.119):

$$\partial f / \partial x^{\mu} + \sigma_{\mu} \partial f / \partial x^4 = 0. \quad (8.129)$$

Система дифференциальных уравнений (8.129) имеет решение при выполнении некоторых условий совместности. Пусть

$$\hat{\partial}_{\mu} \equiv \partial / \partial x^{\mu} + \sigma_{\mu} \partial / \partial x^4 \quad (8.130)$$

— три дифференциальных оператора. Тогда (8.129) запишется в виде

$$\hat{\partial}_{\mu} f(x) = 0. \quad (8.131)$$

Умножая это уравнение на оператор $\hat{\partial}_{\nu}$ и вычитая из него уравнение, полученное перестановкой индексов μ и ν , получаем

$$[\hat{\partial}_{\mu}, \hat{\partial}_{\nu}] f(x) = 0, \quad (8.132)$$

где $[\hat{\partial}_\mu, \hat{\partial}_\nu]$ — коммутатор операторов $\hat{\partial}_\mu$ и $\hat{\partial}_\nu$. Поскольку дифференциальные операторы $\partial/\partial x^i$ в (8.130) коммутируют, (8.132) можно привести к виду

$$\frac{\partial f}{\partial x^4} (\hat{\partial}_\mu \sigma_\nu - \hat{\partial}_\nu \sigma_\mu) = 0. \quad (8.133)$$

Кроме того, учитывая, что $\partial f/\partial x^4 = -\Lambda \neq 0$, из (8.125), (8.128) и (8.127') имеем следующие условия интегрируемости уравнений (8.129):

$$\hat{\partial}_\mu \sigma_\nu - \hat{\partial}_\nu \sigma_\mu = 0. \quad (8.134)$$

Это общие условия, которым должны удовлетворять динамические гравитационные потенциалы, чтобы векторный потенциал с помощью преобразований (8.119) можно было обратить в нуль [279, 280]. Условия (8.134) можно записать также в виде

$$\omega_{\mu\nu} = 0, \quad (8.134')$$

где

$$\omega_{\mu\nu} = c^* (\partial_\mu \sigma_\nu - \partial_\nu \sigma_\mu)/2 \quad (8.135)$$

является инвариантом относительно всех преобразований типа (8.119) и имеет простой физический смысл (см. § 9.16 и 9.6).

Для вращающейся системы отсчета с метрическим тензором (8.79), (7.80) или (8.122), (8.123) с помощью (8.135), (8.125) и (8.130) легко показать, что компонента

$$\omega_{12} = -\omega_{21} = r\omega/(1 - r^2\omega^2/c^2)^{3/2} \quad (8.136)$$

отлична от нуля при $r > 0$. Таким образом, во вращающейся системе отсчета условия (8.134) не выполняются, и невозможно ввести времениортогональную систему координат.

В данной системе отсчета R гравитационное поле называется *стационарным*, если соответствующим выбором пространственно-временных координат в R можно добиться, чтобы все компоненты g_{ih} , т. е. $\gamma_{\mu\nu}$, χ , γ_μ , не зависели от времени. Такая система координат сама называется *стационарной*. Если одновременно с этим γ_μ обратится в нуль, то такое гравитационное поле и соответствующая система координат называются *статическими*. Следовательно, гравитационное поле в равномерно вращающейся системе стационарное; система координат с метрическим тензором (8.78) — стационарная, а система (8.122) — нестационарная.

§ 8.14. Другие простые примеры ускоренных систем отсчета

Пусть снова $X^i = (X, Y, Z, cT)$ — пространственно-временные координаты в инерциальной системе I . Тогда преобразования Галилея (1.2)

$$x = X - vT; \quad y = Y; \quad z = Z; \quad t = T \quad (8.137)$$

определяют новую систему отсчета I' , являющуюся, очевидно, инерциальной системой, движущейся относительно I в направлении оси X со скоростью v , поскольку каждая точка $(x, y, z) = \text{const}$ системы I' движется с той же скоростью v . Если положить $(x^i) = (x, y, z, ct)$, то интервал ds будет иметь вид

$$ds^2 = g_{ih} dx^i dx^h = \eta_{ih} dX^i dX^h = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2v dx dt - c^2 dt^2 (1 - v^2/c^2), \quad (8.138)$$

т. е. $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$; $g_{14} = g_{41} = v/c$; $g_{44} = -(1 - v^2/c^2)$

(все остальные компоненты g_{ih} равны нулю). Следовательно, система координат (x^i) не времениортогональная и из (8.63), (8.64) и (8.109) имеем

$$\begin{aligned} \gamma_\mu &= (v/\sqrt{c^2 - v^2}, 0, 0); \quad \chi = -v^2/2; \\ \gamma_{11} &= 1/(1 - v^2/c^2); \quad \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1; \quad \gamma_{\mu\nu} = 0 \quad \text{при } \mu \neq \nu. \end{aligned} \quad (8.139)$$

Поскольку гравитационные потенциалы постоянные, гравитационное поле, определяемое соотношением (8.110), в I' отсутствует и преобразованиями (8.59) с f в форме (8.120) можно исключить потенциалы. Вводя новые координаты $X'^i = (X', Y', Z', cT')$ по формулам

$$\left. \begin{aligned} X' &= x/\sqrt{1-v^2/c^2}; & Y' &= Y; & Z &= z; \\ T' &= \sqrt{1-v^2/c^2}t - vx/c^2\sqrt{1-v^2/c^2}; \\ ds^2 &= dX'^2 + dY'^2 + dZ'^2 - c^2 dT'^2, \end{aligned} \right\} \quad (8.140)$$

получаем

$$g'_{ik} = \eta_{ik}; \quad \gamma'_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}; \quad \gamma'_\mu = 0; \quad \chi' = 0. \quad (8.141)$$

Координаты (X'^i) являются лоренцевыми координатами в I' ; они связаны с (X^i) специальными преобразованиями Лоренца.

В качестве другого примера рассмотрим ускоренную систему, определяемую преобразованиями

$$X = x + gt^2/2; \quad Y = y, \quad Z = z; \quad T = t. \quad (8.142)$$

Каждая точка в системе отсчета (x^i) имеет постоянное ускорение g относительно системы I в направлении оси X . Простые вычисления дают

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 + 2gtdxdt - c^2 dt^2 (1 - g^2 t^2/c^2), \quad (8.143)$$

т. е. $g_{11} = g_{22} = g_{33} = 1$; $g_{14} = g_{41} = gt/c$, $c^2 g_{44} = -c^2 (1 - g^2 t^2/c^2)$,

все остальные компоненты g_{ik} равны нулю. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\mu &= (gt/c\sqrt{1-g^2 t^2/c^2}, 0, 0), \quad \chi = -g^2 t^2/2; \\ \gamma_{11} &= 1/(1-g^2 t^2/c^2); \quad \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1; \quad \gamma_{\mu\nu} = 0 \quad \text{при } \mu \neq \nu. \end{aligned} \right\} \quad (8.144)$$

Эта система координат соответствует физически реализуемой системе отсчета только при $t = T < c/g$, так как в этом случае скорость gt точек рассматриваемой системы отсчета относительно I меньше c , а $g_{44} < 0$. Пространственная геометрия этой системы определяется пространственным линейным элементом

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\nu dx^\mu = dx^2/(1-g^2 t^2/c^2) + dy^2 + dz^2. \quad (8.145)$$

Эта геометрия неевклидова вследствие лоренцева сокращения измерительных линеек в движущейся системе. Поскольку в данном случае $\omega_{\mu\nu} = 0$ (8.135), преобразованиями (8.119) можно исключить векторный потенциал. Интегрируя уравнения (8.129), находим, что преобразования

$$x' = x; \quad y' = y; \quad z' = z; \quad t' = t \exp[-g(x + gt^2/2)/c^2] \quad (8.146)$$

приводят к желаемому результату, т. е. если ds^2 записан в форме (8.126), то в новых координатах имеем

$$ds^2 = dx'^2/(1-g^2 t'^2/c^2) + dy'^2 + dz'^2 + g'_{44} c^2 dt'^2. \quad (8.147)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} g'_{44} &= -\exp[2g(1+gt^2/2)/c^2]/(1-g^2 t^2/c^2) = -\exp(2gX/c^2)/(1-g^2 T^2/c^2); \\ \gamma'_\mu &= 0; \quad \gamma'_{\mu\nu} = \gamma_{\mu\nu}; \quad \chi' = -c^2(g'_{44} + 1)/2. \end{aligned} \right\} \quad (8.148)$$

Используя преобразования (8.146), легко проверить, что (8.147) совпадает с (8.143).

В рассматриваемой ускоренной системе гравитационное поле не статическое. В соответствии с (8.145) здесь даже пространственная геометрия зависит от времени, т. е. расстояние между двумя соседними точками изменяется с течением времени. Это очевидно, поскольку измерительные линейки в ускоренной системе по мере увеличения скорости gt относительно

I будут все в большей степени подвергаться лоренцеву сокращению. Хотя с точки зрения наблюдателя в I наша система отсчета жесткая, наблюдатель в самой ускоренной системе обнаружит, что точки этой системы удаляются друг от друга в направлении оси x .

При малых значениях t и x , т. е. с учетом лишь членов первого порядка малости по gt/c и gx/c^2 , имеем

$$t' = t(1 - gx/c^2); g'_{44} = -(1 + 2gx'/c^2); \chi' = gx'$$

и из (8.112) получаем

$$a'_\mu = -\partial\chi'/\partial x'^\mu = -(g, 0, 0), \quad (8.149)$$

т. е. в данном приближении гравитационное поле постоянно.

§ 8.15. Жесткие системы отсчета с произвольно движущимся началом

Система отсчета называется *жесткой*, если расстояние между двумя точками системы, измеренное покоящейся относительно нее измерительной линейкой, не меняется со временем. Следовательно, равномерно вращающаяся система, рассмотренная в § 8.9, жесткая, а система, рассмотренная в конце § 8.14, нежесткая. Пусть относительно системы I движется произвольным образом частица с координатами $X_i = (X, Y, Z, icT)$. Ее мировая линия может быть описана уравнениями

$$X_i = f_i(\tau), \quad (8.150)$$

где τ — собственное время частицы. Попытаемся ввести такую систему координат $(x^i) = (x, y, z, ct)$, которая будет релятивистским аналогом классической жесткой системы декартовых осей, движущихся вместе с частицей так, что частица все время находится в начале координат, а пространственные оси все время имеют одинаковые направления. В § 4.14 мы определили последовательные мгновенно инерциальные системы покоя частицы $S'(\tau)$, полученные с помощью последовательных инфинитезимальных преобразований Лоренца без вращений пространственных осей. В этом случае преобразования от фиксированной системы (X_i) к координатам x^i в $S'(\tau)$ даются формулами (4.143), где коэффициенты $\alpha_{ih}(\tau)$ определяются из дифференциальных уравнений (4.139), (4.140).

Теперь, если определим систему (x^i) , полагая в (4.143)

$$x^\mu = x'_\mu; \quad x^i = 0; \quad t = \tau, \quad (8.151)$$

получим, что одновременные положения точек в системе (x^i) в момент времени t совпадают с одновременными положениями точек в системе $S'(\tau)$ в момент времени $x'_4 = 0$ и эти совпадающие точки в обеих системах имеют одинаковые значения пространственных координат. Следовательно, преобразования от переменных (X_i) к переменным (x^i) имеют вид

$$X_i = f_i(t) + x^\nu \alpha_{\nu i}(t), \quad (8.152)$$

где коэффициенты α_{ih} являются решениями уравнений (4.139). Эти уравнения полностью определяются движением (8.150) частицы, которая все время находится в начале $x^\mu = 0$ системы (x^i) . Дифференцируя (8.152) и учитывая (4.139), получаем

$$\begin{aligned} dX_i &= \{\dot{f}_i(t) + x^\nu \dot{\alpha}_{\nu i}(t)\} dt + dx^\nu \alpha_{\nu i}(t) = \\ &= (U_i + x^\nu \alpha_{\nu i} \xi_{li}) dt + dx^\nu \alpha_{\nu i}. \end{aligned} \quad (8.153)$$

Подставляя (8.153) в выражение для интервала и используя (4.141), находим, что

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= dX_i dX_i = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 (1 + g_\nu x^\nu/c^2)^2; \\ x^i &= (x^\mu, ct) = (x, y, z, ct), \end{aligned} \right\} \quad (8.154)$$

где

$$g_v = g_v(t) = \alpha_{vi} \dot{U}_i = \alpha_{vi} \ddot{x}_i \quad (8.155)$$

зависят только от t и полностью определяются движением начала нашей системы координат (x^i) относительно системы (X_i) . Величины g_v равны компонентам ускорения частицы в ее мгновенной системе покоя $S'(t)$ [см. (4.42), (4.42')].

Система координат (x^i) , заданная соотношениями (8.152), времениортогональна. Соответствующая система отсчета — жесткая, поскольку расстояние между двумя точками этой системы (x, y, z) и $(x + dx, y + dy, z + dz)$ дается выражением

$$d\sigma^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2. \quad (8.156)$$

Следовательно, в этой системе пространственная геометрия евклидова, а (x, y, z) — пространственные декартовы координаты. Здесь векторный потенциал равен нулю, а для скалярного потенциала имеем выражение

$$\chi = -\frac{c^2}{2} (g_{44} + 1) = \frac{c^2}{2} \left\{ \left(1 + \frac{g_{\mu} x^{\mu}}{c^2} \right)^2 - 1 \right\} = (\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) \left(1 + \frac{\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}}{2c^2} \right). \quad (8.157)$$

Таким образом, очевидно, что зависимость скалярного потенциала от пространственных переменных всегда одинакова, но коэффициенты $\mathbf{g} = \mathbf{g}(t)$ различны при различных движениях начала. Гравитационное ускорение в этой системе определяется формулой

$$\mathbf{a} = -\text{grad } \chi = -\mathbf{g} (1 + \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}/c^2). \quad (8.158)$$

Поэтому в окрестности начала координат системы, где $(\mathbf{g} \cdot \mathbf{x}) \ll c^2$, гравитационное поле однородно, а гравитационное ускорение $\mathbf{a} = -\mathbf{g} = -\mathbf{g}(t)$ есть функция t и однозначно определяется движением начала $\mathbf{x} = 0$ относительно I . Скорость хода стандартных часов, покоящихся в точке \mathbf{x} , определяется из (8.116) и (8.157):

$$d\tau_0 = dt (1 + \mathbf{g} \cdot \mathbf{x}/c^2). \quad (8.159)$$

В начале координат $\mathbf{x} = 0$ имеем $\tau_0 = t$, т. е. координатные часы в этом месте являются стандартными часами.

Можно показать, что рассмотренный здесь тип ускоренной системы отсчета и вращающаяся система (§ 8.9) представляют собой единственно возможные жесткие системы отсчета для случая устранимых гравитационных полей.

§ 8.16. Жесткие системы отсчета, движущиеся в направлении оси X

Если начало O системы (x^i) движется в направлении оси X системы (X_i) , коэффициенты α_{ik} определяются формулами (4.157), (4.150) и преобразования (8.152) сводятся к соотношениям

$$\left. \begin{aligned} X &= c \int_0^t \text{sh } \theta dt + x \text{ch } \theta(t); \\ Y &= y; \quad Z = z; \\ T &= \int_0^t \text{ch } \theta dt + x \text{sh } (\theta(t))/c, \end{aligned} \right\} \quad (8.160)$$

которые также получаются из (4.158) с учетом (8.151). Используя (4.157), (4.149), для вектора (8.155) получаем выражение

$$\mathbf{g} = (g, 0, 0); \quad g(t) = c \, d\theta/dt. \quad (8.161)$$

Тогда (8.154) примет вид

$$ds^2 = dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 (1 + gx/c^2)^2. \quad (8.162)$$

В исследуемом случае гравитационное поле параллельно оси x . Условия (8.52) выполняются везде, за исключением плоскости $x = -c^2/g$, где $g_{44} = 0$. В дальнейшем будем рассматривать явления лишь в области $1 + gx/c^2 > 0$.

В частности, если движение начала O гиперболическое с постоянным ускорением g , то в соответствии с (4.162) имеем

$$\theta(t) = gt/c, \quad (8.163)$$

т. е.

$$g(t) = c \, d\theta/dt = g = \text{const.}$$

В этом случае гравитационное поле статическое, а гравитационный потенциал равен

$$\chi = -(c^2/2)(g_{44} + 1) = gx(1 + gx/2c^2). \quad (8.164)$$

Тогда преобразования (8.160) принимают вид

$$\left. \begin{aligned} X &= (c^2/g)(\text{ch } gt/c - 1) + x \text{ch } gt/c; \\ Y &= y; \quad Z = z; \\ T &= (c/g) \text{sh } gt/c + x \text{sh } (gt/c)/c. \end{aligned} \right\} \quad (8.165)$$

Исключая t , получаем

$$\left. \begin{aligned} X &= (c^2/g) [\{(1 + gx/c^2)^2 + g^2 T^2/c^2\}^{1/2} - 1]; \\ Y &= y; \quad Z = z. \end{aligned} \right\} \quad (8.166)$$

Отсюда видно, что каждая точка данной системы отсчета с постоянными значениями x, y, z относительно системы I совершает гиперболическое движение в направлении оси X , начинающееся из точки $X = x, Y = y, Z = z$, в момент времени $T = 0$ с нулевой скоростью. Ускорение этого движения равно

$$\gamma = g/(1 + gx/c^2) \quad (8.167)$$

(см. § 3.4), а скорость в момент времени T определяется с учетом (8.165) формулой

$$v = dX/dT = gT/\{(1 + gx/c^2)^2 + g^2 T^2/c^2\}^{1/2} = c \text{th } (gt/c). \quad (8.168)$$

Следовательно, скорость точек отсчета данной системы относительно I зависит от x , и с точки зрения наблюдателя в I система отсчета R , соответствующая системе координат (x^i) , не будет жесткой. Расстояние между двумя точками отсчета (x, y, z) и $(x + dx, y, z)$, измеренное наблюдателем в I , в соответствии с (8.166) и (8.168) равно

$$dX = \frac{1 + gx/c^2}{\{(1 + gx/c^2)^2 + g^2 T^2/c^2\}^{1/2}} dx = \frac{dx}{\text{ch } (gt/c)} = \sqrt{1 - v^2/c^2} dx, \quad (8.169)$$

где $v = v(T)$ — скорость системы R относительно I в рассматриваемом месте. Таким образом, с точки зрения наблюдателя в I , каждый участок системы R сокращается в соответствии с формулой Лоренца.

Для малых значений t и x , когда можно пренебречь величинами второго порядка малости и выше по gx/c^2 и gt/c , система отсчета R совпадает с системой отсчета, рассмотренной в конце § 8.14.

Рассмотрим теперь движение свободной частицы в гравитационном поле системы (x^i) . Мировая линия такой частицы определяется из уравнений (8.96) с $g_{i\bar{k}}$ в форме (8.162). Тогда при $i = 1, 2, 3$ из (8.96) имеем

$$d^2 x/d\tau^2 = -(1 + gx/c^2) g (dt/d\tau)^2; \quad d^2 y/d\tau^2 = d^2 z/d\tau^2 = 0. \quad (8.170)$$

Если частица начинает свое движение из точки на оси x с нулевой начальной скоростью, то последнее уравнение в (8.170) дает $y = z = 0$.

Из (8.115) и (8.164) получаем следующее соотношение между собственным временем частицы и временной переменной t системы (x^i) :

$$d\tau = dt \sqrt{\{(1 + gx/c^2)^2 - u^2/c^2\}}, \quad (8.171)$$

где

$$u = |dx/dt|$$

— скорость частицы. Соотношение (8.171) эквивалентно последнему уравнению (8.96). Используя в качестве независимой переменной t вместо τ , из (8.170) получаем

$$\frac{d^2 x}{dt^2} - \frac{2g/c^2}{1 + gx/c^2} \left(\frac{dx}{dt}\right)^2 + g(1 + gx/c^2) = 0. \quad (8.172)$$

Решение этого уравнения с начальными условиями

$$x = x_0; \quad dx/dt = 0 \quad \text{при} \quad t = t_0 \quad (8.172')$$

следующее:

$$\dot{x} = \frac{c^2}{g} \left\{ \left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right) \frac{1}{\operatorname{ch} g(t-t_0)/c} - 1 \right\}. \quad (8.173)$$

Скорость частицы в момент времени t равна

$$\frac{dx}{dt} = -c \left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right) \frac{\operatorname{sh} g(t-t_0)/c}{\operatorname{ch}^2 g(t-t_0)/c}. \quad (8.174)$$

С увеличением t скорость сначала тоже увеличивается, достигая максимума $u_{\text{макс}} = c(1 + gx_0/c^2)/2$, а затем снова стремится к нулю при $t \rightarrow \infty$. Если $x_0 > c^2/g$, скорость частицы больше c . Однако u всегда меньше скорости света, которая, в соответствии с (8.72) и (8.162), равна $\omega = c^* = c(1 + gx/c^2)$.

Подставляя выражения (8.173) и (8.174) для x и u в уравнение (8.171) и интегрируя его по координатному времени t , получаем

$$\tau = \left(1 + \frac{gx_0}{c^2}\right) \int_{t_0}^t \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 g(t-t_0)/c} = \left(\frac{c}{g} + \frac{x_0}{c}\right) \operatorname{th} g(t-t_0)/c. \quad (8.175)$$

Наконец, если начало системы (x^i) движется с постоянной скоростью v относительно I в направлении оси X , то $\dot{f}_i = 0$ и вектор g_{μ} в (8.155) тоже равен нулю. Таким образом, в системе R гравитационное поле отсутствует, что и должно быть, поскольку эта система в данном случае является инерциальной системой, движущейся с постоянной скоростью v . Кроме того, поскольку U_i постоянная и $f_i(t) = U_i t$, преобразования (8.152) совпадают в рассматриваемом случае со специальными преобразованиями Лоренца.

§ 8.17. Парадокс часов

Теперь мы в состоянии дать полное решение парадокса часов, уже упоминавшегося в § 2.6 и сыгравшего важную роль в первых обсуждениях логических основ теории относительности [65, 77, 132, 135, 148, 166].

Рассмотрим два экземпляра стандартных часов C_1 и C_2 , покоящихся в начале O_1 инерциальной системы S_1 с пространственно-временными координатами (X, Y, Z, T) (рис. 18). В момент времени $T = 0$ часы C_2 начинают ускоряться в направлении оси X под действием постоянной силы F . Когда часы C_2 достигают точки A , они имеют скорость v . После этого действие силы F прекращается, и часы движутся прямолинейно с постоянной скоростью v , пока не достигнут точки B . Здесь на них опять начинает действовать сила, равная по величине силе F , но противоположная по направлению, в результате чего часы C_2 прибывают в точку C , обладая нулевой скоростью, и ускорятся об-

ратно до точки B , где достигают скорости v , а действие силы прекращается. Между точками B и A они движутся с постоянной скоростью v . В точке A на часы C_2 опять начинает действовать сила F , под действием которой часы C_2 снова прибывают в точку O_1 , обладая нулевой скоростью.

Пусть $\Delta'T$, $\Delta''T$ и $\Delta'''T$ — отрезки времени, в течение которых часы C_2 проходят расстояния O_1A , AB и BC соответственно. Из соображений симметрии движение часов от C до A является обратным движению от A до C и, кроме того, $\Delta'''T = \Delta'T$. Пусть $\Delta\tau_1$ и $\Delta\tau_2$ — время, измеренное часами C_1 и C_2 между двумя встречами; τ_1 и τ_2 — собственное время часов C_1 и C_2 соответственно. Поскольку часы C_1 все время покоятся в точке O_1 , $\Delta\tau_1$ равно полному приращению ΔT переменной T системы S_1 между двумя встречами. Следовательно,

$$\Delta\tau_1 = \Delta T = 2(\Delta'T + \Delta''T + \Delta'''T) = 2(2\Delta'T + \Delta''T). \quad (8.176)$$

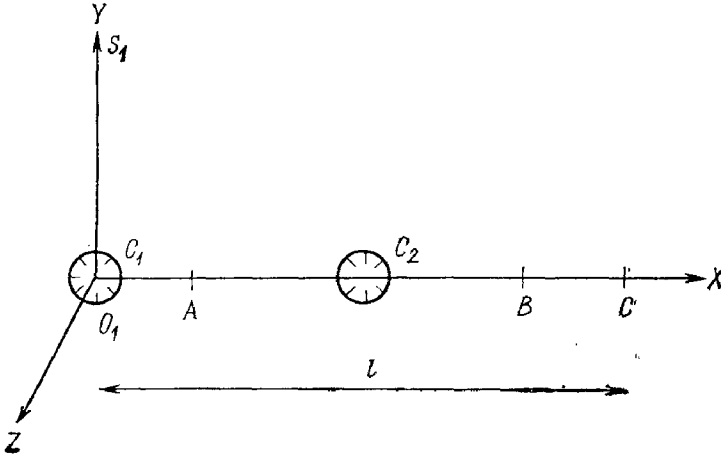


Рис. 18.

Аналогично имеем

$$\Delta\tau_2 = 2(\tau'_2 + \tau''_2 + \tau'''_2) = 2(2\tau'_2 + \tau''_2), \quad (8.177)$$

где τ'_2 , τ''_2 и τ'''_2 — отрезки собственного времени часов C_2 , в течение которых они проходят расстояния O_1A , AB и BC соответственно. Движение часов C_2 на участке O_1A гиперболическое и описывается уравнением (3.47), т. е.

$$X = (c^2/g) \{ [1 + (gT/c)^2]^{1/2} - 1 \}, \quad (8.178)$$

где $g = F/m_0$, а m_0 — масса покоя часов C_2 . Следовательно,

$$u = dX/dT = gT/\sqrt{1 + (gT/c)^2}. \quad (8.179)$$

Поэтому

$$v = g\Delta'T/\sqrt{1 + (g\Delta'T/c)^2} \quad (8.180)$$

или

$$g\Delta'T = v/\sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (8.181)$$

Теперь, используя (8.179), по формуле (2.38) СТО, справедливой в инерциальной системе S_1 , можно вычислить τ'_2 :

$$\tau'_2 = \int_0^{\Delta'T} \sqrt{1 - u^2/c^2} dT = \int_0^{\Delta'T} dT/\sqrt{1 + (gT/c)^2} = \frac{c}{g} \text{Arsh}(g\Delta'T/c).$$

В соответствии с (8.181) это выражение можно записать в виде

$$g \Delta' T / c = v/c \sqrt{1 - v^2/c^2} = \text{sh}(g\tau_2'/c) = \text{sh}(g\tau_2''/c) \quad (8.182)$$

или

$$\text{th} \frac{g\tau_2'}{c} = \text{sh}(g\tau_2'/c) / \sqrt{1 + \text{sh}^2(g\tau_2'/c)} = v/c. \quad (8.183)$$

Аналогично из (2.38) получим

$$\tau_2'' = \Delta'' T \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (8.184)$$

Теперь, если при постоянном значении v все больше и больше увеличивать силу F , то ускорение $g = F/m_0$ будет также увеличиваться. Если $g \rightarrow \infty$ при постоянной v , из формулы (8.182) следует, что $\Delta' T = \Delta'' T$ и $\tau_2' = \tau_2''$ стремятся к нулю. В пределе, когда часам C_2 мгновенно сообщается скорость v , из (8.176), (8.177) и (8.184) имеем

$$\Delta\tau_1 = 2\Delta'' T; \quad \Delta\tau_2 = 2\tau_2'' = 2\Delta'' T \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (8.185)$$

т. е.

$$\Delta\tau_2 = \Delta\tau_1 \sqrt{1 - v^2/c^2}, \quad (8.186)$$

как это и должно быть. Движущиеся часы C_2 отстают от неподвижных часов C_1 . Кроме того, в пределе при $g \rightarrow \infty$ максимальное расстояние между часами

$$l = v \Delta'' T. \quad (8.187)$$

Такой же результат получится, если весь процесс рассматривать в жесткой системе отсчета S_2 с координатами (x, y, z, t) , движущейся вместе с часами C_2 так, что часы C_2 все время находятся в начале координат системы S_2 . Когда S_2 движется ускоренно относительно S_1 или далеких звезд, в S_2 возникает гравитационное поле. В промежуток времени $0 < t < \tau_2' = \Delta' t$ поле описывается скалярным потенциалом (8.164). В интервале $\tau_2' < t < \tau_2' + \tau_2''$ величиной $\Delta'' t = \frac{1}{2}\tau_2''$ скалярный потенциал $\chi = 0$ и в интервале $\tau_2' + \tau_2'' < t < \tau_2' + \tau_2'' + \tau_2''$ величиной $\Delta''' t = \tau_2'' = \tau_2' = \Delta' t$ потенциал $\chi = -gx (1 - gx/2c^2)$. В течение первого периода $\Delta' t$ часы C_1 свободно падают в отрицательном направлении оси x , в соответствии с уравнением движения (8.173). В течение периода $\Delta'' t$ они движутся равномерно со скоростью $-v$, и, наконец, в течение периода $\Delta''' t$ они достигают точки с координатой $x_0 = -l$, обладая нулевой скоростью. Поскольку в этот момент времени системы S_1 и S_2 покоятся относительно друг друга, максимальное расстояние между двумя часами в обеих системах отсчета одинаково. После этого часы C_1 совершают обратное движение к началу координат системы S_2 . Во время всего процесса часы C_2 покоятся в начале системы S_2 , так как гравитационная сила уравновешивается внешней силой F .

Приращение собственного времени часов C_1 можно теперь вычислить с помощью общей формулы (8.115), учитывая приведенное выше выражение для χ . В (8.172) — (8.175) мы дали решение уравнений движения (8.172) и выражение для собственного времени. Если $\tau_1', \tau_1'', \tau_1'''$ — приращения собственного времени часов C_1 в промежутках $\Delta' t, \Delta'' t, \Delta''' t$ соответственно, то, очевидно, имеем

$$\Delta\tau_1 = 2(\tau_1' + \tau_1'' + \tau_1'''). \quad (8.188)$$

Аналогично, поскольку C_2 покоятся в начале $x = 0$, где χ все время равен нулю, то

$$\Delta\tau_2 = 2(\Delta' t + \Delta'' t + \Delta''' t) = 2(2\Delta' t + \Delta'' t) = 2(2\tau_2' + \tau_2''). \quad (8.189)$$

Далее, поскольку часы C_1 начинают двигаться из начала с нулевой скоростью, мы можем найти τ'_1 из формулы (8.175), полагая в ней $x_0 = 0$ и $t - t_0 = \Delta t = \tau'_2$. В результате с учетом (8.183) получаем

$$\tau'_1 = c/g \operatorname{th}(g\tau'_2/c) = v/g. \quad (8.190)$$

В течение промежутка времени Δt часы C_1 движутся с постоянной скоростью в пространстве, где гравитационное поле отсутствует. Поэтому, используя (8.184), имеем

$$\tau'_1 = \Delta t \sqrt{1 - v^2/c^2} = \tau'_2 \sqrt{1 - v^2/c^2} = \Delta T (1 - v^2/c^2). \quad (8.191)$$

Наконец, из формулы (8.175) находим τ''_1 , полагая g равным $-g$, $x_0 = -l$, $t - t_0 = \Delta t = \tau''_2 = \tau'_2$:

$$\tau''_1 = (c/g + l/c) \operatorname{th} g\tau'_2/c = (c/g + l/c) v/c. \quad (8.192)$$

Когда $g \rightarrow \infty$ при постоянном значении v , из (8.190) получим, что $\tau'_1 \rightarrow 0$, а также и $\Delta t = \tau''_2 = \tau'_2 \rightarrow 0$. Однако τ''_1 имеет конечный предел:

$$\tau''_1 = lv/c^2. \quad (8.193)$$

Этот удивительный результат обусловлен влиянием на ход часов C_1 гравитационного скалярного потенциала $\chi = -gx (1 - gx/2c^2)$, который при $g \rightarrow \infty$ становится бесконечным. Таким образом, в пределе при $g \rightarrow \infty$ из (8.188) — (8.193) и (8.184) — (8.187) получаем

$$\left. \begin{aligned} \Delta\tau_1 &= 2 \{ \Delta T (1 - v^2/c^2) + \Delta T v^2/c^2 \} = 2\Delta T; \\ \Delta\tau_2 &= 2\tau'_2 = 2\Delta T \sqrt{1 - v^2/c^2}, \end{aligned} \right\} \quad (8.194)$$

т. е. то же, что и в (8.185). Этот результат, представляющий собой решение парадокса часов, не удивителен, поскольку собственное время — инвариант, имеющий одно и то же значение в любой системе координат.

В приведенном здесь решении парадокса часов содержится еще один парадокс [137]. Рассмотрим скорость часов C_1 относительно системы S_2 в момент времени $t = \Delta t = \tau'_2$. Полагая в (8.174) $x_0 = 0$ и $t = t_0 + \tau'_2$, для скорости часов C_1 как раз перед этим моментом, получаем выражение

$$u_- = dx/c\dot{t} = -c (\operatorname{sh} g\tau'_2/c) / \operatorname{ch}^2 g\tau'_2/c = -v (1 - v^2/c^2)^{1/2}. \quad (8.195)$$

С другой стороны, сразу же после этого момента времени система S_2 становится инерциальной системой, и скорость часов C_1 будет иметь величину

$$u_+ = -v. \quad (8.196)$$

Сравнивая (8.195) и (8.196), видим, что в момент исчезновения гравитационного поля скорость часов C_1 относительно S_2 резко меняется. Эффект точно такой, как будто часы C_1 получили импульс в направлении отрицательной оси. Полное решение этого парадокса дано в § 10.3.

Наконец, рассмотрим более простой пример аналогичного явления, иллюстрирующий влияние гравитационного векторного потенциала на ход движущихся часов. Пусть часы C_2 под действием центральной силы F совершают в инерциальной системе S_1 равномерное движение по окружности. Если радиус окружности R , а постоянная угловая скорость ω , то скорость часов равна $R\omega$, а приращение их собственного времени τ_2 за один оборот, в соответствии с формулой (2.38), равно

$$\tau_2 = T \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2} = (2\pi/\omega) \sqrt{1 - R^2\omega^2/c^2}. \quad (8.197)$$

Соответствующее приращение собственного времени часов C_1 , покоящихся на окружности вращения, имеет величину

$$\tau_1 = T = 2\pi/\omega. \quad (8.198)$$

Рассмотрим теперь этот же процесс с точки зрения наблюдателя во вращающейся системе отсчета S_2 (§ 8.9). В этой системе часы C_2 покоятся в точке ($r = R$, $\vartheta = \theta$), а часы C_1 вращаются с угловой скоростью $d\vartheta/dt = -\omega$ по окружности радиуса $r = R$. Часы C_1 свободно падают под действием гравитационного поля с потенциалами (8.80) и (8.113):

$$\chi = -r^2\omega^2/2; \quad \gamma_{\mu} = (0, \omega r^2/c \sqrt{1-r^2\omega^2/c^2}, 0). \quad (8.199)$$

Легко видеть, что $r = \text{const}$ и $d\vartheta/dt = -\omega$ есть решение уравнений движения (8.96) с g_{ik} в форме (8.79). Часы C_2 все время остаются в покое, так как гравитационная сила уравновешивается силой F . За время $t = 2\pi/\omega$ собственное время покоящихся часов τ_2 получит в соответствии с формулой (8.116) приращение

$$\tau_2 = (2\pi/\omega) \sqrt{1+2\chi/c^2} = (2\pi/\omega) \sqrt{1-r^2\omega^2/c^2}, \quad (8.200)$$

т. е. такое же, как и в (8.197).

Чтобы найти соответствующее приращение собственного времени часов C_1 , воспользуемся общей формулой (8.114). Поскольку $u^\mu = dx^\mu/dt = (0, -\omega, 0)$, из (8.80) получим $u^2 = ds^2/dt^2 = \gamma_{\mu\nu} (dx^\mu/dt) (dx^\nu/dt) = \gamma_{22}\omega^2 = r^2\omega^2/(1-r^2\omega^2/c^2)$. Кроме того, с учетом (8.199) имеем $\gamma_{\mu}u^\mu = -r^2\omega^2/c \sqrt{1-r^2\omega^2/c^2}$.

В результате из (8.114) находим, что

$$\begin{aligned} \tau_1 = (2\pi/\omega) \{ & (\sqrt{1-r^2\omega^2/c^2} + r^2\omega^2/c^2 \sqrt{1-r^2\omega^2/c^2})^2 - \\ & - r^2\omega^2/c^2 (1-r^2\omega^2/c^2) \}^{1/2} = 2\pi/\omega. \end{aligned} \quad (8.201)$$

Таким образом, эффекты влияния гравитационного поля и скорости часов C_1 на собственное время τ_1 , описываемые формулой (8.114), взаимно компенсируются и для τ_1 и τ_2 получаем те же выражения, что и раньше.

Однако физическая интерпретация этого эффекта для каждого из рассмотренных двух случаев совершенно различна. В системе S_1 эффект объясняется исключительно влиянием скорости частицы, в то время как в системе S_2 данное явление объясняется совместным действием гравитационного поля и движения.

Вычисление приращений собственного времени τ_1 и τ_2 можно провести также и во вращающейся системе с метрическим тензором (8.122), (8.123). Результат, конечно, будет тем же самым, что и в (8.200), (8.201), однако эффекты влияния на величину τ_1 гравитационных потенциалов и движения, компенсирующих друг друга, уже не такие, как в S_2 .

НЕУСТРАНИМЫЕ ГРАВИТАЦИОННЫЕ ПОЛЯ. ТЕНЗОРНОЕ ИСЧИСЛЕНИЕ В РИМАНОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ ОБЩЕГО ТИПА

§ 9.1. Четырехмерная формулировка общего принципа относительности и принципа эквивалентности

В предыдущей главе мы рассматривали лишь такие гравитационные поля, которые можно было исключить преобразованием к лоренцевым координатам инерциальной системы I (см. § 8.7). Мы выяснили, что в произвольной системе координат (x_i^t) действие гравитационного поля описывается метрическим тензором g_{ik} , определяющим линейный элемент в пространстве — времени:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k. \quad (9.1)$$

Таким образом, устранимые гравитационные поля характеризуются тем свойством, что соответствующим выбором пространственно-временных координат интервал во всех точках 4-пространства может быть приведен к виду

$$ds^2 = \eta_{ik} dX^i dX^k. \quad (9.2)$$

Другими словами, в этом случае пространство является плоским псевдоевклидовым пространством.

Однако, в соответствии с принципом эквивалентности, нет существенной разницы между устранимыми и неустраенимыми полями; оба типа полей должны подчиняться одинаковым фундаментальным законам. Допустим поэтому, что поля, обусловленные наличием больших масс (например, Земли или Солнца), описываются в 4-пространстве метрическим тензором g_{ik} так же, как и устранимые искусственно созданные поля. В частности, предположим, что и мировые линии свободных (т. е. свободно падающих) частиц и световых лучей, движущихся в неустраенимых гравитационных полях, являются геодезическими в 4-пространстве, которые определяются теми же уравнениями (8.96) и (8.100), как и в случае устранимых полей. Единственное отличие тогда будет в том, что неустраенимые поля нельзя полностью исключить с помощью преобразований пространственно-временных координат, т. е. ds^2 не может быть приведен к виду (9.2) одновременно во всех точках 4-пространства.

В этом случае 4-пространство является искривленным с произвольной римановой геометрией.

Однако, как мы увидим в § 9.6, существует бесконечное множество способов для выбора так называемой геодезической системы координат (\dot{x}^i) , для которой в данной точке 4-пространства первые производные $\partial g_{ik} / \partial x^i$ метрического тензора равны нулю, а значения g_{ik} равны η_{ik} . Геометрически это означает, что в бесконечно малой окрестности каждой точки пространство можно считать плоским по аналогии с двухмерным случаем, когда кривую поверхность в малой окрестности рассматриваемой точки можно заменить касательной плоскостью. Такие системы пространственно-временных координат (\dot{x}^i) часто называют локально лоренцевыми, а соответствующие системы отсчета — локальными инерциальными системами, так как в случае неустраенимых гравитационных полей они играют в определенных пределах ту же роль, что и инерциальные системы в случае устранимых полей. Поэтому при любом выборе пространственно-временных координат (x^i) , т. е. при любом упорядочи-

вании событий в физическом пространстве, величины g_{ik} всегда могут быть определены экспериментально с помощью методов, рассмотренных в § 8.8.

В соответствии с общим принципом относительности, законы природы должны быть выражены в виде форм-инвариантных уравнений. Следовательно, если какой-либо закон описывается уравнением в форме

$$F(A, B, \dots, \partial A/\partial x^i, \partial B/\partial x^i, \dots) = 0, \quad (9.3)$$

где A, B, \dots — физические величины, то в другой произвольной координатной системе (x'^i) мы имеем такое же функциональное соотношение между физическими величинами, т. е.

$$F(A', B', \dots, \partial A'/\partial x'^i, \partial B'/\partial x'^i, \dots) = 0. \quad (9.3')$$

Единственное отличие от случая, рассмотренного в § 4.3, заключается в том, что среди физических величин A, B, \dots , входящих в это уравнение, теперь фигурируют и гравитационные величины g_{ik} .

В области, где пространство — время почти плоское (если ограничиться лоренцевой системой координат), метрический тензор g_{ik} представляет собой постоянный тензор Минковского η_{ik} , а соотношения (9.3') и (9.3) сводятся к соотношениям (4.21), (4.21'). Следовательно, специальный принцип относительности является частным случаем общего принципа относительности.

В СТО ковариантность законов природы при преобразованиях Лоренца очень изящно выражается с помощью четырехмерного тензорного исчисления. Чтобы получить аналогичное представление законов природы в ОТО, мы должны сделать обобщение тензорного исчисления, развитого в гл. 4 для псевдодекартовых систем координат.

В случае устранимых гравитационных полей такое обобщение представляет собой довольно тривиальное распространение понятий вектора и тензора на общие криволинейные системы координат, сама же геометрия пространства — времени остается такой же, как и в СТО. Однако в общем случае неустраанимых полей сама структура пространства — времени уже другая, и необходимо развитие тензорного исчисления уже в римановом пространстве. Формально различие между этими двумя случаями не очень велико, и, как мы увидим, большая часть тензорных соотношений, справедливых для криволинейных координат в плоском пространстве, может быть использована и в произвольном кривом пространстве.

§ 9.2. Контравариантные и ковариантные компоненты 4-вектора

Пусть (x^i) — произвольная система криволинейных координат в 4-пространстве. Тогда геометрия этого пространства будет полностью определена, если заданы компоненты g_{ik} метрического тензора как функции пространственно-временных координат. Предположим, что в каждой точке g_{ik} удовлетворяет соотношениям (8.52). Это означает, что определитель

$$g = |g_{ik}| = \begin{vmatrix} g_{11} & g_{12} & g_{13} & g_{14} \\ g_{21} & g_{22} & g_{23} & g_{24} \\ g_{31} & g_{32} & g_{33} & g_{34} \\ g_{41} & g_{42} & g_{43} & g_{44} \end{vmatrix} \quad (9.4)$$

отрицателен. Пусть A_{ik} — алгебраическое дополнение элемента g_{ik} i -й строки и k -го столбца. Тогда по известной формуле теории определителей имеем

$$\left. \begin{aligned} g &= \sum_k g_{ik} A_{ik} \\ (\text{нет суммирования по } i) \\ \text{и } \sum_l g_{il} A_{kl} &= 0, \quad i \neq k. \end{aligned} \right\} \quad (9.5)$$

Определяя теперь симметричную матрицу элементов g^{ik} условием

$$g^{ik} = A_{ik}/g = g^{ki}, \quad (9.6)$$

в соответствии с (9.6) имеем

$$g_{il} g^{kl} = g_{li} g^{lk} = \delta_i^k, \quad (9.7)$$

где

$$\delta_i^k = \delta_{ik} = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k \\ 0 & \text{при } i \neq k \end{cases}. \quad (9.8)$$

Если ввести новую систему координат с помощью преобразования

$$x'^i = x'^i(x^l), \quad (9.9)$$

то, как и в случае плоского пространства [см. (8.54) — (8.58)], получим

$$\left. \begin{aligned} dx'^i &= \alpha_k^i dx^k = (dx'^i/dx^k) dx^k; \\ dx^l &= \check{\alpha}_k^l dx'^k = (dx^l/dx'^k) dx'^k; \end{aligned} \right\} \quad (9.10)$$

$$\alpha_i^l \check{\alpha}_k^l = \check{\alpha}_i^l \alpha_k^l = \delta_k^l; \quad (9.11)$$

$$\left. \begin{aligned} g'_{ik} &= \check{\alpha}_i^l \check{\alpha}_k^m g_{lm}; \\ g_{ik} &= \alpha_i^l \alpha_k^m g'_{lm}. \end{aligned} \right\} \quad (9.12)$$

Вследствие соотношений (9.10), (9.12) выражение для интервала инвариантно:

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = g'_{ik} dx'^i dx'^k. \quad (9.13)$$

Всегда можно выбрать такие преобразования (9.9), чтобы в данной точке 4-пространства тензор g'_{ik} стал равным тензору η_{ik} Минковского. Однако в общем случае получить этот результат одновременно во всех точках нельзя, поскольку коэффициенты α_k^i не могут быть выбраны произвольным образом, а должны удовлетворять условиям интегрируемости:

$$\partial \alpha_k^i / \partial x^j = \partial \alpha_j^i / \partial x^k, \quad (9.14)$$

вытекающим из определения α_k^i в (9.10). Этого можно добиться лишь для случая плоского пространства, когда функции g_{ik} удовлетворяют специальным условиям (см. § 9.13).

В некоторой точке (x^i) вектор определяется как величина, которая в каждой системе координат имеет четыре компоненты a^i с тем же законом преобразования, что и дифференциалы координат в (9.10), т. е.

$$a'^i = \alpha_k^i a^k. \quad (9.15)$$

Обратные преобразования с учетом (9.11) имеют вид

$$a^i = \check{\alpha}_k^i a'^k. \quad (9.15')$$

Поскольку коэффициенты α_k^i и $\check{\alpha}_k^i$ являются функциями координат (x^i) , формулы преобразований (9.15) и (9.15') имеют определенный смысл лишь в той точке, где определен вектор a^i .

В системах криволинейных координат у одного и того же вектора мы должны различать контравариантные компоненты a^i с формулой преобразования (9.15) и ковариантные компоненты, определяемые в каждой системе координат соотношениями

$$a_i = g_{ik} a^k. \quad (9.16)$$

В соответствии с (9.7) обратные соотношения имеют вид

$$a^i = g^{ik} a_k. \quad (9.17)$$

Операции (9.16) и (9.17) называются *опусканием* и *поднятием* индексов. В декартовой системе координат евклидова пространства $g_{ik} = \delta_{ik}$, и разницы между ковариантными и контравариантными компонентами нет.

Из (9.12), (9.15) и (9.11) получаем следующие формулы преобразования для ковариантных компонент:

$$a'_i = g'_{ik} a'^k = \check{\alpha}_i^l \check{\alpha}_k^m \alpha_n^k g_{lm} a^n = \check{\alpha}_i^l \delta_n^m g_{lm} a^n = \check{\alpha}_i^l g_{lm} a^m$$

или

$$a'_i = \check{\alpha}_i^k a_k; \quad (9.18)$$

$$a_i = \alpha_i^k a'_k. \quad (9.19)$$

В плоском (3 + 1)-пространстве можно использовать псевдодекартовы координаты, тогда соотношения между ковариантными и контравариантными компонентами вектора в этой системе принимают простой вид

$$a_i = \eta_{ik} a^k = (a^1, a^2, a^3, -a^4) \quad (9.20)$$

или $a^i = (a_1, a_2, a_3, -a_4) = \eta^{ik} a_k$, т. е. в этом случае

$$\eta^{ik} = \eta_{ik} \quad (9.21)$$

в соответствии с (9.7) и (8.41). Если бы в СТО мы использовали вещественное представление векторов, то в гл. 4 следовало бы различать ковариантные и контравариантные компоненты. Именно для того, чтобы избежать такого небольшого усложнения, и была введена мнимая временная компонента, вследствие чего пространство стало формально евклидовым. В любом случае легко перейти от мнимого к вещественному представлению. Необходимо лишь помнить, что контравариантные компоненты вектора в вещественном представлении получаются из компонент мнимого представления отбрасыванием множителя i у четвертой компоненты. Тогда ковариантные компоненты определяются из (9.20).

Если ввести четырехкомпонентную величину ε_i :

$$\varepsilon_i = (1, 1, 1, -1), \quad (9.22)$$

то соотношения (9.20) и (9.21) примут вид

$$\begin{aligned} a_i &= \varepsilon_i a^i; & a^i &= \varepsilon_i a_i; \\ \eta_{ik} &= \eta^{ik} = \varepsilon_i \delta_{ik}, \end{aligned} \quad (9.23)$$

где круглая скобка после индекса указывает на отсутствие суммирования по этому повторяющемуся индексу.

В вещественном представлении однородные преобразования Лоренца (4.3) являются линейными преобразованиями вида

$$x'^i = A_k^i x^k; \quad x^i = \check{A}_k^i x'^k, \quad (9.24)$$

где коэффициенты A_k^i удовлетворяют условиям ортогональности:

$$A_l^i A_m^k \eta_{ik} = \eta_{lm}, \quad (9.25)$$

или

$$\varepsilon_l A_l^i A_k^i = \varepsilon_i \delta_{ik}.$$

Последние уравнения вместе с (9.12) выражают тот факт, что при лоренцевых преобразованиях метрический тензор $g_{ik} = \eta_{ik}$ плоского пространства не меняется. Кроме того, A_k^i и \check{A}_k^i связаны соотношениями (9.11):

$$A_l^i \check{A}_k^l = \check{A}_l^i A_k^l = \delta_k^i. \quad (9.11')$$

Умножая последнее уравнение в (9.25) на \check{A}_m^i , с помощью (9.11') получаем

$$\varepsilon_m A_k^m = \varepsilon_k \check{A}_m^k,$$

т. е.

$$\check{A}_i^k = \varepsilon_i \varepsilon_k A_k^i, \quad A_k^i = \varepsilon_i \varepsilon_k \check{A}_i^k. \quad (9.26)$$

Таким образом, преобразование Лоренца можно определить как линейное преобразование, в котором коэффициенты A_k^i и соответствующие коэффициенты обратного преобразования \check{A}_k^i связаны соотношением (9.26).

Как и в § 4.13, введем четыре взаимно ортогональных направляющих единичных вектора $e_{(k)}^i$ осей x'^k . Три из них, соответствующие $k = \nu = 1, 2, 3$, пространственно подобны, а $e_{(4)}^i$ — времениподобный и равен V^i/c , где V^i — 4-скорость системы S' относительно S . Тогда

$$e_{(k)}^i e_{(l) i} = \eta_{kl}; \quad e_{(4)}^i = V^i/c. \quad (9.27)$$

Поскольку $e_{(k)}^i = \delta_k^i$, из (9.15') имеем

$$\check{A}_k^i = \check{A}_l^i e_{(k)}^l = e_{(k)}^i; \quad \check{A}_4^i = e_{(4)}^i = V^i/c. \quad (9.28)$$

Введем дополнительно векторы

$$e^{(k) i} \equiv \varepsilon_k e_{(k)}^i; \quad e_i^{(k)} = \varepsilon_k e_{(k) i}. \quad (9.29)$$

Тогда (9.27) можно переписать в виде

$$e^{(k) i} e_i^{(l)} = \delta_k^l. \quad (9.27')$$

Сравнивая это соотношение с (9.11') и учитывая (9.28), находим, что

$$A_k^i = e_k^{(i)}. \quad (9.30)$$

В итоге (9.11') можно записать в форме

$$e_i^{(i)} e_{(k)}^l = e_{(l) i}^i e_k^{(l)} = \delta_k^i. \quad (9.31)$$

Совокупность векторов $e_{(k)}^i$ со свойствами (9.31) называется *ортогональной тетрадой*.

Из (9.20) видно, что норма вектора, определяемая в мнимом представлении формулой (4.25), в вещественном представлении принимает вид

$$a^2 = a_i a^i, \quad (9.32)$$

а поскольку данное выражение инвариантно при всех координатных преобразованиях, оно справедливо и в криволинейных координатах. В результате из (9.18), (9.15) и (9.11) получим

$$a_i a'^i = \check{\alpha}_i^l \alpha_m^i a_l a^m = \delta_m^l a_l a^m = a_i a^i. \quad (9.33)$$

Следовательно, формулу (9.32) можно принять в качестве определения нормы вектора и в общем римановом пространстве. В соответствии с (9.16) и (9.17) выражение (9.32) можно представить в различных формах:

$$a^2 = a_i a^i = g_{ik} a^i a^k = g^{ik} a_i a_k. \quad (9.34)$$

Аналогично скалярное произведение двух векторов a и b определяется инвариантом

$$a_i b^i = g_{ik} a^i b^k = a^i b_i = g^{ik} a_i b_k. \quad (9.35)$$

§ 9.3. Тензорная алгебра

Теперь обобщение тензорного исчисления, развитого в § 4.7—4.12 для декартовой системы координат, на общие криволинейные координаты риманова пространства очевидно. Тензором ранга n в 4-пространстве называется величина с 4^n компонентами, преобразующаяся по каждому индексу как век-

тор, т. е. в соответствии с (9.15) для контравариантных индексов или по (9.18) — для ковариантных индексов. Связь между ковариантными и контравариантными компонентами тензора осуществляется с помощью общих правил (9.10) и (9.17) поднятия и опускания индексов.

Следовательно, формулы преобразования для ковариантных и контравариантных компонент тензора ранга 2 имеют вид

$$t'^{ik} = \alpha_i^i \alpha_m^k t^{lm}; \quad (9.36)$$

$$t'_{ik} = \tilde{\alpha}_i^l \tilde{\alpha}_k^m t_{lm}, \quad (9.37)$$

а связь между ковариантными и контравариантными компонентами в каждой системе координат определяется соотношениями

$$\left. \begin{aligned} t_{ik} &= g_{il} g_{km} t^{lm}; \\ t^{ik} &= g^{im} g^{kl} t_{ml}. \end{aligned} \right\} \quad (9.38)$$

Учитывая (9.11) и (9.12), видим, что соотношения (9.30) — (9.38) совместны. Кроме ковариантных и контравариантных компонент тензора, можно ввести также и смешанные компоненты:

$$\left. \begin{aligned} t_i^k &= g^{kl} t_{il} = g_{il} t^{lk}; \\ t^i_k &= g^{il} t_{lk} = g_{kl} t^{il}, \end{aligned} \right\} \quad (9.39)$$

преобразующиеся по формулам

$$\left. \begin{aligned} t_i^k &= \tilde{\alpha}_i^l \alpha_m^k t_{l.}^m; \\ t^i_k &= \alpha_i^l \tilde{\alpha}_k^m t_{.m}^l. \end{aligned} \right\} \quad (9.40)$$

В общем случае t_i^k отлична от t^k_i .

Все свойства симметрии, например

$$t^{ik} = \pm t^{ki}, \quad (9.41)$$

инвариантны. Вследствие (9.38) и (9.39), соотношения (9.41) эквивалентны следующим:

$$t_{ik} = \pm t_{ki}; \quad t_i^k = \pm t^k_i. \quad (9.42)$$

Таким образом, смешанные компоненты t_i^k и t^k_i симметрического тензора равны и могут быть обозначены просто через t_i^k .

Из сравнения (9.12) с (9.37) видно, что величины g_{ik} сами являются ковариантными компонентами симметрического тензора ранга 2, так называемого метрического тензора. Кроме того, из (9.7) следует, что смешанные компоненты этого тензора g_i^k определяются символом Кронекера δ_i^k , а его контравариантные компоненты соответствуют величинам g^{ik} , определяемым формулой (9.6).

Теперь, как и в случае декартовых координат, рассмотренном § в 4.9, образуем новые тензоры с помощью операций сложения, прямого умножения и свертки. При сложении двух тензоров ранга n получим новый тензор того же ранга, а при умножении тензоров рангов n и m получим тензор ранга $(n + m)$. Однако следует заметить, что эти операции имеют смысл только в том случае, если оба тензора берутся в одной точке 4-пространства. Наконец, операция свертки, которая в случае криволинейных координат заключается в приравнивании верхних и нижних индексов с последующим суммированием, уменьшает ранг тензора на две единицы. Свертка тензора ранга 2 дает тензор нулевого ранга, т. е. инвариант

$$t_i^i = \tilde{\alpha}_i^l \alpha_m^i t_{l.}^m = \delta_m^l t_{l.}^m = t_{l.}^l, \quad (9.43)$$

который с помощью (9.39) можно представить в различных формах:

$$t_{i\cdot}^i = g_{ik} t^{ki} = g^{ik} t_{ik} = t_{\cdot k}^k. \quad (9.44)$$

Пример комбинирования операций прямого умножения и свертки дает соотношение (9.35).

§ 9.4. Псевдотензоры. Дуальные тензоры

Пусть $\alpha = |\alpha_i^k|$ и $\check{\alpha} = |\check{\alpha}_i^k|$ — определители матриц коэффициентов преобразований α_i^k и $\check{\alpha}_i^k$. Тогда по правилу умножения определителей из (9.11) получим

$$\alpha\check{\alpha} = 1, \quad (9.45)$$

а из (9.12)

$$g' = |g'_{ik}| = \check{\alpha} \cdot g \cdot \check{\alpha} = \check{\alpha}^2 g = g/\alpha^2,$$

т. е.

$$\sqrt{-g'} = |\check{\alpha}| \sqrt{-g} = (1/|\alpha|) \sqrt{-g}, \quad (9.46)$$

где $|\alpha|$ и $|\check{\alpha}|$ — абсолютные значения определителей α и $\check{\alpha}$.

Теперь псевдотензор определяется как величина, компоненты которой преобразуются как компоненты тензора и умножаются при этом на знак $\check{\alpha}/|\alpha| = \check{\alpha}'/|\check{\alpha}'|$ определителя преобразования. Если α , а следовательно, и $\check{\alpha}$ положительны, то псевдотензор преобразуется как тензор того же ранга. Из (9.45) следует (см. § 4.11), что величина A_{jklm} , компоненты которой в каждой системе координат равны символу Леви-Чивита ε_{iklm} , преобразуется по формуле

$$A'_{iklm} = \check{\alpha}'^r_i \check{\alpha}'^s_k \check{\alpha}'^t_l \check{\alpha}'^u_m A_{rstu}. \quad (9.47)$$

Следовательно, в соответствии с (9.46) величины

$$e_{iklm} = \sqrt{-g} \varepsilon_{iklm} \quad (9.48)$$

являются ковариантными компонентами антисимметрического псевдотензора ранга 4. Поскольку в соответствии с (3.7) определитель $|g^{ik}|$ матрицы g^{ik} равен g^{-1} , для контравариантных компонент псевдотензора (9.48) имеем

$$e^{iklm} = g^{ir} g^{ks} g^{lt} g^{mu} (-g)^{1/2} \varepsilon_{rstu} = (\sqrt{-g}/g) \varepsilon_{iklm},$$

т. е.

$$e^{iklm} = -(-g)^{-1/2} \varepsilon_{iklm}. \quad (9.49)$$

Как и в § 4.12, мы можем теперь, используя псевдотензор (9.48), с каждым антисимметрическим тензором ранга $n \leq 4$ связать дуальный псевдотензор ранга $(4 - n)$. Следовательно, если F^{ik} — контравариантные компоненты антисимметрического тензора, то ковариантные и контравариантные компоненты дуального псевдотензора определяются соотношениями

$$\left. \begin{aligned} F^*_{ik} &= e_{iklm} F^{lm}/2 = (-g)^{1/2} \varepsilon_{iklm} F^{lm}/2; \\ F^{*ik} &= e^{iklm} F_{lm}/2 = -(-g)^{-1/2} \varepsilon_{iklm} F^{lm}/2, \end{aligned} \right\} \quad (9.50)$$

т. е.

$$\left. \begin{aligned} F^*_{23} &= \sqrt{-g} F^{14}; & F^*_{31} &= \sqrt{-g} F^{24}; & F^*_{12} &= \sqrt{-g} F^{34}; \\ F^*_{14} &= \sqrt{-g} F^{23}; & F^*_{24} &= \sqrt{-g} F^{31}; & F^*_{34} &= \sqrt{-g} F^{12}. \end{aligned} \right\} \quad (9.50')$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} F^{ik} &= \varepsilon_{iklm} F^*_{lm}/2 \sqrt{-g} = -e^{iklm} F^*_{lm}/2; \\ F_{ik} &= -\varepsilon_{iklm} F^{*lm}/2 = -\sqrt{-g} \varepsilon_{iklm} F^{*lm}/2. \end{aligned} \right\} \quad (9.51)$$

Два инфинитезимальных вектора $dx^i, \delta x^i$ определяют параллелограмм, описываемый антисимметрическим тензором с контравариантными компонентами

$$d\sigma^{ik} = dx^i \delta x^k - dx^k \delta x^i. \quad (9.52)$$

Инвариантная площадь параллелограмма $d\sigma$ определяется формулой

$$d\sigma^2 = 1/2 d\sigma_{ik} d\sigma^{ik}. \quad (9.53)$$

Соответствующий дуальный псевдотензор

$$\left. \begin{aligned} d\sigma_{ik}^* &= \sqrt{-g} dS_{ik}^* \\ dS_{ik}^* &= \varepsilon_{iklm} dx^l \delta x^m \end{aligned} \right\} \quad (9.54)$$

ортогонален векторам dx^i и δx^i , т. е.

$$d\sigma_{ik}^* dx^i = d\sigma_{ik}^* \delta x^i = 0. \quad (9.55)$$

Три инфинитезимальных вектора $dx^i, \delta x^i, \Delta x^i$ определяют трехмерный параллелепипед, описываемый антисимметрическим тензором

$$d\Sigma^{ikl} = \begin{vmatrix} dx^i & \delta x^i & \Delta x^i \\ dx^k & \delta x^k & \Delta x^k \\ dx^l & \delta x^l & \Delta x^l \end{vmatrix}. \quad (9.56)$$

С другой стороны, этот параллелепипед можно описать дуальным псевдовектором

$$\left. \begin{aligned} d\Sigma_i &= (1/3!) \varepsilon_{iklm} d\Sigma^{klm} = \sqrt{-g} dS_i; \\ dS_i &= (1/3!) \varepsilon_{iklm} d\Sigma^{klm} = \varepsilon_{iklm} dx^k \delta x^l \Delta x^m, \end{aligned} \right\} \quad (9.57)$$

ортогональным векторам $dx^i, \delta x^i, \Delta x^i$, т. е.

$$d\Sigma_i dx^i = d\Sigma_i \delta x^i = d\Sigma_i \Delta x^i = 0. \quad (9.58)$$

Объем $d\Sigma$ по аналогии с (4.120) равен

$$(d\Sigma)^2 = \varepsilon d\Sigma_i d\Sigma_i. \quad (9.59)$$

И наконец, четыре инфинитезимальных вектора $dx^{(1)i}, dx^{(2)i}, dx^{(3)i}, dx^{(4)i}$ определяют четырехмерный параллелепипед с помощью тензора

$$d\Omega^{iklm} = \begin{vmatrix} d^{(1)} x^i & d^{(1)} x^k & d^{(1)} x^l & d^{(1)} x^m \\ d^{(2)} x^i & d^{(2)} x^k & d^{(2)} x^l & d^{(2)} x^m \\ d^{(3)} x^i & d^{(3)} x^k & d^{(3)} x^l & d^{(3)} x^m \\ d^{(4)} x^i & d^{(4)} x^k & d^{(4)} x^l & d^{(4)} x^m \end{vmatrix}, \quad (9.60)$$

который имеет лишь одну не равную нулю независимую компоненту. Соответствующий дуальный псевдоскаляр

$$d\Omega = (1/4!) \varepsilon_{iklm} d\Omega^{iklm} = \sqrt{-g} \varepsilon_{iklm} d^{(1)} x^i d^{(2)} x^k d^{(3)} x^l d^{(4)} x^m. \quad (9.61)$$

Для преобразований с положительным α псевдоскаляр $d\Omega$ — инвариант и изменяет знак при преобразованиях с отрицательным α . Если векторы $d^{(r)} x^i$ ($r = 1, 2, 3, 4$) лежат в положительных направлениях координатных кривых так, что

$$d^{(1)} x^i = (dx^1, 0, 0, 0); \quad d^{(2)} x^i = (0, dx_2, 0, 0) \text{ и т. д.}, \quad (9.62)$$

то соответствующий четырехмерный объемный элемент сводится к

$$\left. \begin{aligned} d\Omega &= \sqrt{-g} dx; \\ dx &= dx^1 dx^2 dx^3 dx^4. \end{aligned} \right\} \quad (9.63)$$

Теперь в некоторой области Ω 4-пространства рассмотрим инвариантную функцию $L(x)$. Это значит, что при произвольных координатных преобразованиях

$$\mathcal{L}(x) = L'(x'). \quad (9.64)$$

Тогда интеграл

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} L(x) \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4 \quad (9.65)$$

является инвариантом. В самом деле, по теореме Якоби имеем

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} L(x) \sqrt{-g} dx = \int_{\Omega} L(x) \sqrt{-g} (dx/dx') dx', \quad (9.66)$$

где якобиан

$$dx/dx' = \|\partial x^i / \partial x'^k\| = |\check{\alpha}|. \quad (9.67)$$

Используя (9.46) и (9.64), из (9.66) получаем

$$\mathcal{L} = \int L'(x') \sqrt{-g'} dx', \quad (9.68)$$

что и требовалось доказать.

Если положить

$$\mathfrak{L} = \sqrt{-g} L(x), \quad (9.69)$$

то инвариантный интеграл (9.65) примет вид

$$\mathcal{L} = \int_{\Omega} \mathfrak{L}(x) dx. \quad (9.70)$$

По этой причине $\mathfrak{L}(x)$ называется *скалярной плотностью* веса 1 или тензорной плотностью нулевого ранга. В соответствии с (9.46) ее закон преобразования следующий:

$$\mathfrak{L}'(x') = |\check{\alpha}| \mathfrak{L}(x) = (1/|\alpha|) \mathfrak{L}(x). \quad (9.71)$$

Тензорная плотность веса n определяется как величина, для которой в формуле преобразования $|\check{\alpha}|$ заменяется на $|\check{\alpha}|^n$. Аналогично тензорной плотностью произвольного ранга и веса 1 называется величина, компоненты которой преобразуются как компоненты тензора и умножаются при этом на $|\check{\alpha}| = 1/|\alpha|$. Если a^i , t^{ik} и т. д. — тензоры ранга 1, 2 и т. д., то

$$a^i = \sqrt{-g} a^i; \quad a^{ik} = \sqrt{-g} t^{ik} \text{ и т. д.} \quad (9.72)$$

— тензорные плотности ранга 1, 2 и т. д. соответственно. Опускание индексов производится по тем же правилам, что и для тензоров.

Из (9.49) следует, что

$$-\sqrt{-g} \epsilon^{iklm} = \epsilon_{iklm} \quad (9.73)$$

является контравариантной псевдотензорной плотностью ранга 4. При интегрировании по инфинитезимальной области $d\Omega$ в окрестности точки (x^i) тензорная плотность дает тензор в этой точке. Например, $dA^i = \int_{d\Omega} a^i dx$ является вектором. Но интеграл $A^i = \int_{\Omega} a^i dx$ по конечной области, в общем случае, может не быть вектором, поскольку преобразование векторной плотности a^i в различных точках различно. И только в прямоугольных координатах плоского пространства этот интеграл снова представляет собой вектор. В этом случае A^i называется свободным вектором, так как он не связан с ка-

кой-либо точкой пространства. Например, полный 4-импульс замкнутой ограниченной системы в СТО (см. § 6.2) является свободным вектором.

В трехмерном пространстве с положительно определенным метрическим тензором $\gamma_{\mu\nu}$, когда определитель $\gamma = |\gamma_{\mu\nu}| > 0$, с помощью трехмерного псевдотензора с каждым антисимметрическим тензором ранга $n \leq 3$ можно связать псевдотензор ранга $(3 - n)$:

$$\epsilon_{\mu\nu\lambda} = \gamma^{1/2} \epsilon_{\mu\nu\lambda}; \quad \epsilon^{\mu\nu\lambda} = \gamma^{-1/2} \epsilon_{\mu\nu\lambda}. \quad (9.74)$$

Теперь ковариантные и контравариантные компоненты аксиального вектора \mathbf{H} , дуального к антисимметрическому тензору $H^{\mu\nu}$, $H_{\mu\nu}$ равны

$$\left. \begin{aligned} H_{\mu} &= \epsilon_{\mu\nu\lambda} H^{\nu\lambda}/2 = \gamma^{1/2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} H^{\nu\lambda}/2; \\ H^{\mu} &= \epsilon^{\mu\nu\lambda} H_{\nu\lambda}/2 = \gamma^{-1/2} \epsilon_{\mu\nu\lambda} H_{\nu\lambda}/2 \end{aligned} \right\}$$

или

$$\left. \begin{aligned} (H_1, H_2, H_3) &= \sqrt{\gamma} (H^{23}, H^{31}, H^{12}); \\ (H^1, H^2, H^3) &= -\sqrt{\gamma} (H_{23}, H_{31}, H_{12}), \end{aligned} \right\} \quad (9.74')$$

т. е.

$$H^{\mu\nu} = \epsilon^{\mu\nu\lambda} H_{\lambda}, \quad H_{\mu\nu} = \epsilon_{\mu\nu\lambda} H^{\lambda}.$$

В частности, если $H^{\mu\nu}$ имеет форму $H^{\mu\nu} = a^{\mu}b^{\nu} - a^{\nu}b^{\mu}$, где \mathbf{a} и \mathbf{b} —3-векторы, то соответствующий дуальный вектор является векторным произведением $\mathbf{a} \times \mathbf{b}$ с компонентами:

$$\left. \begin{aligned} (\mathbf{a} \times \mathbf{b})_{\mu} &= \sqrt{\gamma} (a^2 b^3 - a^3 b^2, a^3 b^1 - a^1 b^3, a^1 b^2 - a^2 b^1); \\ (\mathbf{a} \times \mathbf{b})^{\mu} &= \frac{1}{\sqrt{\gamma}} (a_2 b_3 - a_3 b_2, -a_1 b_3 + a_3 b_1, a_1 b_2 - a_2 b_1). \end{aligned} \right\} \quad (9.74'')$$

§ 9.5. Геодезические линии. Формулы Кристоффеля

Как известно, геодезические линии определяются уравнением (8.30):

$$\frac{d}{d\lambda} \left(g_{ik} \frac{dx^k}{d\lambda} \right) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda}, \quad (9.75)$$

где λ — специальный инвариантный параметр. Уравнение (9.75) можно записать также в виде

$$g_{ik} \frac{d^2 x^k}{d\lambda^2} + \left(\frac{\partial g_{ik}}{\partial x^l} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} \right) \frac{dx^k}{d\lambda} \frac{dx^l}{d\lambda} = 0.$$

Умножая это уравнение на g^{mi} и учитывая (9.7), получаем

$$d^2 x^m/d\lambda^2 + \frac{1}{2} g^{mi} (\partial g_{ik}/\partial x^i + \partial g_{il}/\partial x^k - \partial g_{kl}/\partial x^i) dx^k/d\lambda \cdot dx^l/d\lambda = 0$$

или

$$d^2 x^i/d\lambda^2 + \Gamma_{kl}^i (dx^k/d\lambda) (dx^l/d\lambda) = 0, \quad (9.76)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{kl}^i &= g^{im} \Gamma_{m, kl}; \\ \Gamma_{i, kl} &= (\partial g_{ik}/\partial x^l + \partial g_{il}/\partial x^k - \partial g_{kl}/\partial x^i)/2 = g_{im} \Gamma_{kl}^m. \end{aligned} \right\} \quad (9.77)$$

Величины Γ_{kl}^i , $\Gamma_{i, kl}$ в (9.77) представляют собой *трехиндексные символы Кристоффеля*. Они удовлетворяют, очевидно, соотношениям

$$\Gamma_{kl}^i = \Gamma_{lk}^i; \quad \Gamma_{i, kl} = \Gamma_{i, lk}; \quad \partial g_{ik}/\partial x^i = \Gamma_{i, kl} + \Gamma_{k, il}. \quad (9.78)$$

Связь между Γ_{kl}^i и $\Gamma_{i,kl}$ такая же, как и между контравариантными и ковариантными компонентами тензора; но, как мы увидим далее, символы Кристоффеля преобразуются не как тензоры. Поскольку уравнения (9.75) или (9.76) представляют собой уравнения Эйлера, соответствующие инвариантному вариационному принципу (8.93), они должны выполняться в любой системе координат. Поэтому, дифференцируя формулы (9.10), получаем

$$\begin{aligned} \frac{dx^i}{d\lambda} &= \check{\alpha}_r^i \frac{dx^{r'}}{d\lambda}; \quad \frac{d^2 x^i}{d\lambda^2} = \check{\alpha}_r^i \frac{d^2 x^{r'}}{d\lambda^2} + \frac{\partial \check{\alpha}_r^i}{\partial x'^s} \frac{dx^{r'}}{d\lambda} \frac{dx'^s}{d\lambda} = \\ &= \left(-\check{\alpha}_r^i \Gamma_{kl}^{r'} + \frac{\partial \check{\alpha}_k^i}{\partial x'^l} \right) \frac{dx'^k}{d\lambda} \frac{dx'^l}{d\lambda}. \end{aligned} \quad (9.79)$$

Здесь уравнения (9.76) использовались в системе координат (x'^i) . Подставляя (9.79) в (9.76), находим, что

$$\left(-\check{\alpha}_r^i \Gamma_{kl}^{r'} + \frac{\partial \check{\alpha}_k^i}{\partial x'^l} + \Gamma_{rs}^i \check{\alpha}_k^r \check{\alpha}_l^s \right) \frac{dx'^k}{d\lambda} \frac{dx'^l}{d\lambda} = 0,$$

а поскольку это уравнение должно выполняться при любых значениях переменных $dx'^k/d\lambda$, то выражение внутри скобок, симметричное относительно k и l , должно равняться нулю. Умножая полученное соотношение на α_i^m и учитывая (9.11), приходим к формуле Кристоффеля:

$$\Gamma_{kl}^i = \alpha_r^i \partial \check{\alpha}_k^r / \partial x'^l + \alpha_r^i \check{\alpha}_k^s \check{\alpha}_l^t \Gamma_{st}^r. \quad (9.80)$$

При линейных (аффинных) преобразованиях, когда коэффициенты $\check{\alpha}_k^i$, α_k^i — постоянные, первый член в правой части (9.80) равен нулю, и символы Кристоффеля преобразуются как компоненты тензора. При более общих преобразованиях это будет не так, поэтому Γ_{kl}^i , $\Gamma_{i,kl}$ называются *аффинными* тензорами.

Если g_{ik} — постоянные (например, в случае псевдодекартовых координат плоского пространства), символы Кристоффеля (9.77) равны нулю.

§ 9.6. Локальные псевдодекартовы координаты и локальные инерциальные системы

В общем случае ввести систему координат, в которой компоненты метрического тензора были бы везде постоянными, нельзя, но, как мы далее увидим, такие системы всегда можно получить локально, т. е. в малой окрестности каждой точки 4-пространства. Выберем произвольную систему S координат (x^i) с метрическим тензором $g_{ik}(x)$, и пусть x_P^i — координаты события P . Рассмотрим совокупность четырех взаимноортогональных единичных векторов (тетрада) в точке P . Пусть $e_{(a)}^i$ ($a = 1, 2, 3, 4$) — контравариантные компоненты a -го вектора тетрады. Один из этих векторов $e_{(4)}^i$ — времениподобный, а остальные три $e_{(a)}^i$ — пространственноподобны. Из (9.16) ковариантные компоненты векторов тетрады равно $e_{(a)i} = g_{ik} e_{(a)}^k$, где $g_{ik} = g_{ik}(P)$ — значения компонент метрического тензора в точке P . Ортонормированность векторов тетрады выражается соотношениями

$$e_{(a)}^i e_{(b)i} = g_{ik} e_{(a)}^i e_{(b)}^k = \eta_{ab}. \quad (9.81)$$

Здесь

$$\eta_{ab} = \eta^{ab} = \varepsilon_a \delta_{ab}, \quad (9.82)$$

а ε_a — четырехкомпонентная величина (9.22). Вместе с векторами $e_{(a)}^i$ введем векторы

$$e^{(a)i} = \eta^{ab} e_{(b)}^i = \varepsilon_a e_{(a)}^i; \quad e_i^{(a)} = \varepsilon_a e_{(a)i}, \quad (9.83)$$

помощью которых соотношения (9.81) могут быть представлены в форме

$$e_{(a) i} e^{(b) i} = e_{(a)}^i e_i^{(b)} = \delta_{ab}, \quad e^{(a) i} e_i^{(b)} = \eta^{ab}. \quad (9.84)$$

Пусть

$$e = |e_{(a) i}| \quad (9.85)$$

— детерминант с элементом $e_{(a) i}$ в a -й строке и i -м столбце. Тогда из первого уравнения (9.84) при $a = b$ следует, что $e^{(a) i}$ равно алгебраическому дополнению элемента $e_{(a) i}$, деленному на e [ср. с аналогичными уравнениями (9.4) — (9.8)]. Поэтому

$$e_{(a) i} e^{(a) k} = \delta_i^k; \quad e_{(a) i} e_k^{(a)} = g_{ik}; \quad e_{(a)}^i e^{(a) k} = g^{ik}. \quad (9.86)$$

Кроме того, поскольку определитель $|e_i^{(a)}|$ равен $-e$, из (9.83) и второго уравнения (9.86) получим

$$-e^2 = g; \quad e = (-g)^{1/2}. \quad (9.87)$$

Во всех этих соотношениях метрический тензор берется в точке P .

Данная тетрада $e_{(a)}^i$ (или $e_i^{(a)}$) «генерирует» в точке P новую систему $\check{S}(P)$ координат \check{x}^i с помощью следующих формул преобразования:

$$\check{x}^i = e_k^{(i)} (x^k - x_P^k); \quad (9.88)$$

$$x^i = x_P^i + e_{(k)}^i \check{x}^k. \quad (9.89)$$

Коэффициенты этих преобразований постоянные:

$$\alpha_{ik}^i \equiv \partial \check{x}^i / \partial x^k = e_k^{(i)}; \quad \check{\alpha}_{ik}^i = \partial x^i / \partial \check{x}^k = e_{(k)}^i. \quad (9.90)$$

Из первого уравнения (9.12) получаем следующее выражение для метрического тензора в \check{S} :

$$\check{g}_{ik}(\check{x}) = e_{(i)}^l e_{(k)}^m g_{lm}(x), \quad (9.91)$$

причем в соответствии с (9.81) в точке P имеем

$$\check{g}_{ik}(P) = e_{(i)}^l e_{(k)}^m g_{lm}(P) = \eta_{ik}. \quad (9.92)$$

Поэтому система $\check{S}(P)$ координат \check{x} (отмеченная знаком $\check{\sim}$) прямоугольна в точке P , т. е. локально псевдодекартова в этой точке. В общем случае $\check{g}_{ik}(\check{x})$, определяемый формулой (9.91), удовлетворяет условиям (8.52) только внутри некоторой конечной области в окрестности точки P . По причинам, уже упоминавшимся в § 8.7, ограничимся использованием координат \check{x}^i лишь внутри этой области.

Все точки системы отсчета \check{R} , соответствующей $\check{S}(P)$, движутся относительно системы S с одинаковой постоянной скоростью $v^\mu = dx^\mu/dt$; в результате, дифференцируя (9.89) и полагая $\check{d}x^\mu = 0$, получаем

$$\left. \begin{aligned} dx^i &= e_{(a)}^i d\check{x}^a, \\ v^\mu/c &= dx^\mu/dx^4 = e_{(a)}^\mu/e_{(a)}^4. \end{aligned} \right\} \quad (9.93)$$

Аналогично для 4-скорости частицы $U^i = dx^i/d\tau$ имеем выражение $U^i = e_{(k)}^i d\check{x}^k/d\tau$, т. е.

$$U^i = e_{(k)}^i \check{U}^k; \quad \check{U}^i = e_k^{(i)} U^k. \quad (9.94)$$

С помощью лоренцева вращения первоначальной тетрады получим новую тетраду $\lambda_{(a)}^i, \lambda_i^{(a)}$ в точке P_i :

$$\lambda_{(a)}^i = A_b^a e_i^{(b)}; \quad \lambda_i^{(a)} = \check{A}_a^b e_i^{(b)}, \quad (9.95)$$

где коэффициенты вращения A^a_b , \check{A}^b_a удовлетворяют тем же соотношениям (9.11'), (9.26), что и коэффициенты преобразования Лоренца. Легко видеть, что векторы новой тетрады $\check{\lambda}^i_{(a)}$ также удовлетворяют тем же соотношениям (9.81), (9.84) и (9.86), что и векторы первоначальной тетрады.

По аналогии с (9.88) и (9.89) тетрада $\check{\lambda}^i_{(a)}$ генерирует новую систему локально псевдоевклидовых координат (\check{y}^i):

$$\check{y}^i = \lambda^i_k (x^k - x^k_P); \quad x^i = x^i_P + \lambda^i_{(k)} \check{y}^k. \quad (9.96)$$

Согласно (9.96), (9.95), (9.89) и (9.84) связь между \check{x}^i и \check{y}^i дается преобразованиями Лоренца:

$$\check{y}^i = \lambda^i_l (x^l - x^l_P) = A^i_m e_l^{(m)} e^l_{(k)} \check{x}^k = A^i_k \check{x}^k. \quad (9.96')$$

Соответствующим поворотом (9.95) тетрады всегда можно четвертому тетрадно-му вектору придать любое времениподобное направление в пространстве — времени.

Пусть, в частности, $e^i_{(a)}$ — тетрада в точке P , у которой вектор $e^i_{(4)}$ лежит в направлении временной линии системы S , т. е. $e^\mu_{(4)} = 0$. Тогда из (9.81) — (9.84) и (9.86) для этой тетрады получим

$$\left. \begin{aligned} e^i_{(4)} &= -e^{(4)}_i = \delta^i_4 / \sqrt{-g_{44}}; \\ e_{(4)}^i &= -e_i^{(4)} = g_{i4} / \sqrt{-g_{44}} = \{\gamma_{i\mu}, -(1 + 2\chi/c^2)^{1/2}\}; \\ e^{(\mu)}_4 &= e_{(\mu)4} = 0; \\ e^{(\lambda)}_\mu e^\nu_{(\lambda)} &= \delta^\nu_\mu; \quad e^{(\lambda)}_\mu e^{(\lambda)}_\nu = g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}; \\ e_{(\lambda)\mu} e^{(\lambda)}_\nu &= g_{\mu\nu} + \gamma_\mu \gamma_\nu = \gamma_{\mu\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (9.97)$$

Величины

$$\gamma^{\mu\nu} = g^{\mu\nu} \quad (9.98)$$

являются контравариантными компонентами пространственного метрического тензора, удовлетворяющими трехмерному аналогу соотношений (9.7), поскольку в соответствии с (8.64), (8.63) и (9.7) имеем

$$\gamma^{\mu\lambda} \gamma_{\nu\lambda} = g^{\mu\lambda} (g_{\nu\lambda} - g_{\nu 4} g_{\lambda 4} / g_{44}) = g^{\mu\lambda} g_{\nu\lambda} + g^{\mu 4} g_{\nu 4}$$

или

$$\gamma^{\mu\lambda} \gamma_{\nu\lambda} = \delta^\mu_\nu. \quad (9.98')$$

Пусть $\check{S}(P) : \check{x}^i$ — система координат, образованная тетрадой $e^i_{(a)}$. Полагая в (9.96) $\check{y}^i = \check{x}^i$, $\check{\lambda}^i_k = e^i_k$ и используя (9.97), получаем

$$\check{x}^\mu = e^{(\mu)}_\nu (x^\nu - x^\nu_P); \quad \check{x}^4 = e^{(4)}_\nu (x^\nu - x^\nu_P), \quad (9.99)$$

т. е. линейные калибровочные преобразования (8.59). Таким образом системы отсчета \check{R} и R совпадают. Этот результат согласуется с формулами (9.93) и показывает, что относительная скорость двух систем отсчета равна нулю, поскольку в данном случае пространственные компоненты тетрадного вектора $e^i_{(4)}$ равны нулю.

Если U^i — 4-скорость частицы в точке P , то можно выбрать тетраду $e^i_{(a)}$, где

$$e^i_{(4)} = U^i / c. \quad (9.100)$$

Тогда локальная псевдодекартова система $\check{S}^0(P)$ с координатами \check{x}^{0i} , образованная этой тетрадой, является мгновенной системой покоя частицы, поскольку из (9.94) и (9.100) имеем $\check{U}^{0i} = e_k^{(i)} U^k = c e_k^{(i)} e_{(4)}^k = c \delta_4^i$. Преобразование от $\check{S}(P)$ к $\check{S}^0(P)$ является, очевидно, преобразованием Лоренца с постоянными коэффициентами:

$$\left. \begin{aligned} \partial \check{x}^{0i} / \partial \check{x}^k &\equiv A_k^i = e_k^{(i)} e_{(k)}^i; \\ \partial \check{x}^k / \partial \check{x}^{0i} &\equiv \check{A}_i^k = e_i^{(k)} e_{(i)}^k = \varepsilon_i \varepsilon_k e_i^{(i)} e_{(k)}^i = \varepsilon_i \varepsilon_k A_k^i. \end{aligned} \right\} \quad (9.101)$$

Теперь пусть $S : x^i$ и $S' : x'^i$ — две системы координат, соответствующие двум системам отсчета R и R' . В системе S введем локальную псевдодекартову систему $\check{S}(P)$ с координатами \check{x}^i , образованную тетрадой $e_k^{(i)}(R)$ в точке P , удовлетворяющей соотношениям (9.97). В системе S' введем другую локальную псевдодекартову систему $\check{S}'(P)$ с координатами \check{x}'^i , образованную другой тетрадой $e_k^{(i)'}(R')$ в точке P , удовлетворяющей в \check{S}' соотношениям типа (9.97). Тогда система отсчета \check{R}' , соответствующая $\check{S}'(P)$, будет совпадать с R' , т. е. $\check{R}' = R'$, $\check{R}_0 = R$. Преобразование $\check{x}^i \rightarrow \check{x}'^i$ в общем случае нелинейно, но в точке P коэффициенты преобразования должны удовлетворять соотношениям (9.25), (9.26). Это непосредственно следует из того, что обе системы $\check{S}(P)$ и $\check{S}'(P)$ псевдодекартовы в точке P , т. е. $\check{g}_{ih}(P) = \eta_{ih} = \check{g}'_{ik}(P)$. Легко видеть, что коэффициенты преобразования в точке P имеют вид:

$$\left. \begin{aligned} \partial \check{x}'^i / \partial \check{x}^k &\equiv A_k^i = e_k^{(i)}(R') e_{(k)}^i(R); \\ \partial \check{x}^k / \partial \check{x}'^i &\equiv \check{A}_i^k = e_i^{(k)}(R) e_{(i)}^k(R') = \varepsilon_i \varepsilon_k A_k^i. \end{aligned} \right\} \quad (9.102)$$

В момент времени $\check{t} = 0$ 4-скорость начала $\check{x}' = 0$ системы R' относительно $\check{S}(P)$ равна

$$\check{V}^i = c \check{A}_4^i = -c \varepsilon_i A_4^i \quad (9.103)$$

[см. (9.17), (9.28)], а соответствующая 3-скорость определяется выражением

$$\check{v}^\mu = c \check{V}^\mu / \check{V}^4 = c \check{A}_4^\mu / \check{A}_4^4. \quad (9.103')$$

Поскольку система отсчета \check{R}' совпадает с R' , то \check{V}^i можно интерпретировать также как 4-скорость системы R' относительно $\check{S}(P)$ в точке P .

В системе $\check{S}(P)$ метрический тензор имеет простую псевдодекартову форму (9.92) только в точке P . В соответствии с (9.91) метрический тензор $\check{g}_{ih}(x)$ зависит от (\check{x}^i) , поэтому в общем случае даже первые производные $\partial \check{g}_{ih}(P) / \partial \check{x}^i$ в точке P не равны нулю. Следовательно, в $\check{S}(P)$ также присутствует гравитационное поле, и система \check{S} не обладает наиболее существенными свойствами инерциальных систем. Однако преобразования (9.88) представляют собой очень ограниченный класс преобразований, приводящих к локальным псевдоевклидовым системам координат в точке P . Фактически любое преобразование вида

$$\check{x}^i = e_k^{(i)}(x^k - x_P^k) + \psi^i(x), \quad (9.104)$$

где $\psi^i(x)$ — произвольные функции, первые производные которых равны нулю в точке P , приводит к системе с локальными свойствами (9.92). Таким

образом, бесконечным числом способов можно выбрать функции $\psi^i(x)$ так, чтобы в новой системе первые производные метрического тензора в точке P равнялись нулю. Это достигается, например, с помощью преобразования

$$\dot{x}^i = e_r^{(i)}(x^r - x_P^r) + \frac{1}{2} e_r^{(i)} \Gamma_{st}^r(P) (x^s - x_P^s) (x^t - x_P^t), \quad (9.105)$$

которое с учетом (9.86) можно записать в виде

$$e_{(r)}^i \dot{x}^r = x^i - x_P^i + \Gamma_{st}^i(P) (x^s - x_P^s) (x^t - x_P^t) / 2. \quad (9.106)$$

Дифференцируя (9.106) по \dot{x}^k , получаем

$$e_{(k)}^i = \check{\alpha}_k^i + \Gamma_{st}^i(P) \check{\alpha}_k^s (x^t - x_P^t); \quad \check{\alpha}_k^i \equiv \partial x^i / \partial \dot{x}^k.$$

Еще одно дифференцирование по \dot{x}^l дает

$$0 = \partial \check{\alpha}_k^i / \partial \dot{x}^l + \Gamma_{st}^i(P) \{ \partial \check{\alpha}_k^s / \partial \dot{x}^l (x^t - x_P^t) + \check{\alpha}_k^s \check{\alpha}_l^t \}.$$

Поэтому в точке P , где $x^i = x_P^i$, имеем

$$\check{\alpha}_k^i(P) = e_{(k)}^i; \quad \partial \check{\alpha}_k^i / \partial \dot{x}^l + \Gamma_{st}^i(P) \check{\alpha}_k^s \check{\alpha}_l^t = 0. \quad (9.107)$$

Тогда с помощью (9.80) в новой системе для символов Кристоффеля получим выражения

$$\check{\Gamma}_{kl}^i(P) = 0; \quad \check{\Gamma}_{i,kl}(P) = 0. \quad (9.108)$$

Это значит, в соответствии с (9.78), что в точке P первые производные метрического тензора равны нулю. Таким образом, в системе $\check{S}(P)$ имеем

$$\check{g}_{ih}(P) = \eta_{ih}; \quad \partial \check{g}_{ih}(P) / \partial \dot{x}^l = 0. \quad (9.109)$$

Любая геодезическая, проходящая через точку P , в том числе и мировые линии свободно падающих частиц и световые лучи, в системе $\check{S}(P)$ описывается уравнениями (9.76) с символами Кристоффеля (9.109). Следовательно, в точке P уравнения геодезических линий $d^2 \dot{x}^i / d\lambda^2 = 0$ совпадают по форме с (8.92) для мировых линий свободно падающих частиц в лоренцевой системе координат СТО. В малой окрестности точки P , где можно пренебречь величинами второго порядка малости по \dot{x}^i , метрический тензор можно считать постоянным. Гравитационное поле локально отсутствует, а система \check{S} называется *локальной инерциальной системой с локальными лоренцевыми координатами*. В СТО координаты Лоренца совпадают с псевдодекартовыми координатами. Однако в ОТО следует различать локальную псевдодекартову систему $\check{S}(P)$, в которой (9.92) выполняется лишь в точке P , и соответствующую локальную лоренцеву систему $\check{S}(P)$, где метрический тензор также «локально постоянный».

Принцип эквивалентности Эйнштейна, изложенный не очень строго в § 8.2, теперь может быть точно сформулирован следующим образом: *в каждой точке P все законы природы, выраженные через локальные лоренцевы координаты \dot{x}^i , имеют ту же форму, что и в СТО*. Тогда простым координатным преобразованием эти же законы можно выразить и в общей системе координат, где присутствуют гравитационные поля. (Необходимое для этого развитие тензорного анализа в римановом пространстве будет продолжено в следующих параграфах.) Лоренцево вращение (9.95) тетрады в (9.105) приводит к новой локальной лоренцевой системе координат, связанной с первоначальной преобразованием Лоренца. Если тетрада удовлетворяет условию (9.100), то для частицы с 4-скоростью U^i в точке P преобразование (9.105) приводит к локальной инерциальной системе покоя $\check{S}^0(P)$. Если же в (9.105) используем тетраду $e_k^{(i)}$ типа (9.97), то получаем систему $\check{S}(P)$ с локальными лоренцевыми координатами

натами \dot{x}^i . Система отсчета \dot{R} в отличие от системы \check{R}^0 не совпадает с R , поскольку преобразование (9.105) с $e_k^{(i)} = \dot{e}_k^i$ не является калибровочным преобразованием. Точки отсчета системы \dot{R} в общем случае движутся относительно S , но при $t = t_P$ скорость начала \dot{O} системы \dot{R} равна нулю. Уравнение движения точки \dot{O} относительно S мы получаем из первых трех уравнений (9.106), полагая в них $e_{(r)}^i = \dot{e}_{(r)}^i$ и $\dot{x}^\mu \equiv \dot{x}^\mu = 0$. С учетом (9.107) это дает:

$$x^\mu - x_P^\mu + \frac{1}{2} \Gamma_{st}^\mu(P) (x^s - x_P^s) (x^t - x_P^t) = 0. \quad (9.110)$$

Из уравнения (9.110) следует, что $x^\mu = x_P^\mu$ при $t = t_P = x_P^4/c$, т. е. \dot{O} проходит через точку x_P^μ системы R в момент времени t_P . Кроме того, дифференцируя (9.110) дважды по t и полагая в полученных уравнениях $x^i = x_P^i$, находим скорость $u^\mu = dx^\mu/dt$ и ускорение $a^\mu = d^2x^\mu/dt^2$ начала \dot{O} в момент времени t_P :

$$u^\mu = 0; \quad a^\mu = -c^2 \Gamma_{44}^\mu(P). \quad (9.111)$$

Выражая символы Кристоффеля через потенциалы (γ_μ, χ) и $\gamma_{\mu\nu}$, получаем (см. приложение 4)

$$\Gamma_{44}^\mu = c^{-2} \gamma^{\mu\nu} (\partial\chi/\partial x^\nu + c^* \partial\gamma_\nu/\partial t). \quad (9.112)$$

Из сравнения (9.111), (9.112) с формулами (8.108), (8.110) видно, что начало \dot{O} свободно падает в гравитационном поле системы R , а в момент времени t_P покоится, т. е. обладает нулевой скоростью. Точки системы \dot{R} в малой окрестности \dot{O} представляют собой свободно падающий «лифт Эйнштейна», в котором отсутствует гравитационное поле. Следует заметить, однако, что этот лифт как целое в общем случае не будет покоиться при $t = t_P$, а будет подвергаться относительно R деформациям растяжения и кручения. Исследование этого вопроса оставляем читателю (сравните с упражнением в конце этого параграфа).

Если в правые части уравнений (9.105) прибавить произвольные функции $\psi^i(x)$, удовлетворяющие условиям

$$\partial\psi^i/\partial x^k(P) = 0; \quad \partial^2\psi^i/\partial x^k\partial x^l(P) = 0, \quad (9.113)$$

то получится дополнительно множество локальных лоренцевых систем координат. Вблизи точки P добавление функции ψ^i окажет влияние в метрическом тензоре лишь на величины второго порядка относительно (x^i) , ответственные за «приливные эффекты». Соответствующим выбором $\psi^i(x)$ (например, используя нормальные римановы координаты) можно придать этим величинам удобную форму, но в случае неустранимого гравитационного поля их нельзя исключить полностью. Однако в дальнейшем (§ 9.9) мы увидим, что всегда можно ввести такую систему координат \dot{S} , в которой метрический тензор и его первые производные принимают значения (9.109) в каждой точке P данной времениподобной кривой в 4-пространстве.

Упражнение

Исследовать в окрестности точки P движение системы отсчета R относительно системы $\dot{R}(P)$ соответствующих системам координат, связанных преобразованиями (9.105) с тетрадой $e_{(k)}^i = \dot{e}_{(k)}^i$, удовлетворяющей (9.97). Движение точки (x^μ) системы R

относительно $\dot{S}(P)$ получается исключением величины $(x^{\lambda} - x_P^{\lambda})$ из четырех уравнений (9.105), что приводит к трем уравнениям в форме $\dot{x}^{\mu} = f^{\mu}(x^{\nu}, \dot{t})$. Тогда скорость и ускорение точки (x^{μ}) относительно \dot{S} будут иметь вид

$$\dot{u}^{\mu} = \partial f^{\mu}(x^{\nu}, \dot{t}) / \partial \dot{t}; \quad \ddot{a}^{\mu} = \partial^2 f^{\mu}(x^{\nu}, \dot{t}) / \partial \dot{t}^2.$$

Для малых значений $(x^{\mu} - x_P^{\mu})$ ускорение \ddot{a}^{μ} в момент времени $\dot{t} = 0$ в первом приближении по $x^{\mu} - x_P^{\mu}$ равно

$$\ddot{a}^{\mu} = -e_v^{(\mu)} a^{\nu}(\dot{O}) / [1 + 2\chi(P)/c^2], \quad (9.114)$$

где $a^{\nu}(\dot{O})$ — ускорение (9.111) начала \dot{O} системы $\dot{S}(P)$ относительно S . Множители $e_v^{(\mu)}$ и $(1 + 2\chi(P)/c^2)^{-1}$ обусловлены, соответственно, различными ориентациями осей и разностью хода времени в системах \dot{S} и S , а знак минус означает просто, что ускорение системы R относительно \dot{R} противоположно по направлению ускорению \dot{R} относительно R . Ускорение (9.114) одинаково во всех точках, где $(x^{\mu} - x_P^{\mu})$ мало, в отличие от скорости, которая при $\dot{t} = 0$ равна

$$\dot{u}^{\mu} = \dot{x}^{\nu} \varepsilon_{\nu}^{\mu}, \quad (9.115)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \varepsilon_{\nu}^{\mu} &= e_{\nu}^{(\lambda)} \varepsilon_{\lambda}^{\alpha} e_{\alpha}^{(\mu)}; \\ \varepsilon_{\lambda}^{\alpha} &= (c^2/c^*) \{ \Gamma_{\lambda 4}^{\alpha} + c \Gamma_{44}^{\alpha} \gamma_{\lambda}/c^* \} (P). \end{aligned} \right\} \quad (9.115')$$

Выраженный через $\gamma_{\mu\nu}, \gamma_{\mu}, \chi$ пространственный тензор $\varepsilon_{\lambda}^{\alpha}$ принимает следующую форму (см. приложение 4):

$$\varepsilon_{\lambda}^{\alpha} = (d_{\lambda\nu} + \omega_{\lambda\nu}) \gamma^{\nu\alpha}, \quad (9.116)$$

где $\omega_{\lambda\nu}$ — пространственный антисимметрический тензор (8.135), а

$$d_{\lambda\nu} = (c/2c^*) (\partial \gamma_{\lambda\nu} / \partial t). \quad (9.117)$$

$d_{\lambda\nu}$ и $\omega_{\lambda\nu}$ являются пространственными тензорами относительно полной группы калибровочных преобразований (8.59) (см. § 9.16). Эти тензоры, входящие в выражение для u^{μ} в (9.115), соответствуют расширению и жесткому вращению системы отсчета R относительно \dot{S} .

Следовательно, введенный в § 8.113 пространственный тензор $\omega_{\mu\nu}$ описывает вращение системы отсчета R относительно локальной инерциальной системы. Как мы увидим в § 10.2, 10.3, это вращение вызывает в общем выражении для гравитационной силы, действующей на свободно падающую частицу, появление члена, аналогичного силе Кориолиса.

§ 9.7. Параллельный перенос векторов

Пусть a^i — контравариантные компоненты вектора в точке (x^i) . С помощью формул Кристоффеля легко показать, что величины $a^{*i} = a^i + d_P a^i$, где

$$d_P a^i = -\Gamma_{kl}^i dx^k a^l, \quad (9.118)$$

преобразуются как контравариантные компоненты вектора в точке $(x^i + dx^i)$. Из (9.80), (9.10) и (9.11) получаем

$$\begin{aligned} d_P a^i &= -\Gamma_{kl}^i dx'^k a'^l = -\Gamma_{kl}^i \alpha_m^{k1} \alpha_n^l dx^m a^n = \\ &= [-\alpha_r^i (\partial \check{\alpha}_k^r / \partial x'^i) \alpha_n^l \alpha_m^k - \alpha_r^i \Gamma_{mn}^r] dx^m a^n. \end{aligned} \quad (9.119)$$

Кроме того, дифференцирование (9.11) дает

$$\alpha_k^l \partial \check{\alpha}_i^l / \partial x^n + \check{\alpha}_i^l \partial \alpha_k^l / \partial x^n = 0. \quad (9.120)$$

Отсюда с учетом (9.11) и (9.14) первый член в круглых скобках (9.119) можно записать в виде

$$-\alpha_r^i \partial \check{\alpha}_{ik}^r / \partial x'^l \partial x'^l / \partial x^n \alpha_m^k = -\alpha_r^i \partial \check{\alpha}_{ik}^r / \partial x^n \alpha_m^k = \alpha_r^i \check{\alpha}_{ik}^r \partial \alpha_m^k / \partial x^n = \partial \alpha_n^i \partial x^m.$$

Теперь все выражение (9.119) принимает форму $d_P a^i = (\partial \alpha_n^i / \partial x^m) \times dx^m a^n + \alpha_r^i d_P a^r$, так что, пренебрегая величинами второго порядка малости по dx^i , получаем следующую формулу преобразования для величин $a^i + d_P a^i$:

$$\begin{aligned} a'^i + d_P a'^i &= [\alpha_n^i(x) + (\partial \alpha_n^i / \partial x^m) dx^m] a^n + \\ &+ \alpha_n^i d_P a^n = \alpha_n^i(x + dx) (a^n + d_P a^n), \end{aligned} \quad (9.121)$$

где $\alpha_n^i(x + dx)$ — коэффициенты преобразования в точке $(x^i + dx^i)$. Из (9.121) следует, что величины $a'^i = a^i + d_P a^i$ представляют собой контравариантные компоненты вектора в точке $(x^i + dx^i)$.

В плоском пространстве вектор a'^i совпадает с вектором, полученным путем параллельного переноса вектора a^i из точки (x^i) в точку $(x^i + dx^i)$, поскольку при введении псевдодекартовых координат символы Кристоффеля, а с ними и величины $d_P a^i$ исчезают, и вектор a'^i становится равным вектору a^i . При использовании криволинейных координат в плоском пространстве контравариантные компоненты векторов a^i и a'^i будут отличаться на величину $d_P a^i$, определяемую формулой (9.118). Поэтому в римановом пространстве естественно определить параллельный перенос вектора также формулой (9.118).

В системе локальных координат Лоренца, как и в псевдодекартовой системе координат псевдоевклидова пространства, компоненты a^i вектора в рассматриваемой точке при параллельном переносе не изменяются. Из (9.118) следует, что норма вектора, в также скалярное произведение двух векторов a^i и b^i в точке (x^i) не изменяются при параллельном переносе, поскольку в соответствии с (9.118)

$$\begin{aligned} d_P (g_{ik} a^i b^k) &= (\partial g_{ik} / \partial x^l) dx^l a^i b^k - g_{ih} \Gamma_{is}^l dx^s a^i b^k - g_{ih} a^i \Gamma_{is}^k dx^s b^s = \\ &= dx^l a^i b^k (\partial g_{ik} / \partial x^l - g_{rh} \Gamma_{il}^r - g_{ir} \Gamma_{kl}^r) = 0. \end{aligned} \quad (9.122)$$

Здесь мы использовали тождество

$$\partial g_{ik} / \partial x^l - g_{rh} \Gamma_{il}^r - g_{ir} \Gamma_{kl}^r \equiv 0, \quad (9.123)$$

вытекающее из (9.77) и (9.78).

Далее, с учетом (9.118) имеем другое тождество:

$$0 = d_P (a_i b^i) \equiv d_P a_i b^i - a_i \Gamma_{kl}^i dx^k b^l \equiv (d_P a_i - \Gamma_{ik}^l dx^k a_l) b^i.$$

Поскольку вектор b^i произвольный, то отсюда получаем следующую формулу для изменения ковариантных компонент вектора при параллельном переносе:

$$d_P a_i = \Gamma_{ik}^l dx^k a_l = \Gamma_{i, ik} dx^k a^l. \quad (9.124)$$

С помощью этой формулы находим, что

$$0 = d_P (g^{ik} a_i b_k) = dx^l a_i b_k (\partial g^{ik} / \partial x^l + g^{ir} \Gamma_{lr}^k + g^{kr} \Gamma_{lr}^i),$$

и поскольку это равенство должно выполняться при любых dx^i , a_i , b_i , то

$$\partial g^{ik} / \partial x^l + g^{ir} \Gamma_{lr}^k + g^{kr} \Gamma_{lr}^i \equiv 0. \quad (9.125)$$

Умножая (9.123) на g^{ik} и используя (9.7), получаем

$$\Gamma_{ik}^k = (1/2) g^{kl} \partial g_{kl} / \partial x^i = -(1/2) g_{kl} \partial g^{kl} / \partial x^i. \quad (9.126)$$

Кроме того, с помощью известной формулы для производной определителя, используя (9.6) и (9.7), находим, что

$$\partial g / \partial x^i = A_{kl} \partial g_{kl} / \partial x^i = g g^{kl} \partial g_{kl} / \partial x^i = -g g_{kl} \partial g^{kl} / \partial x^i. \quad (9.127)$$

Следовательно,

$$\Gamma_{ik}^k = (1/2g) (\partial g / \partial x^i) = \partial / \partial x^i \ln \sqrt{|g|}. \quad (9.128)$$

Рассмотрим снова геодезическую, определяемую уравнением (9.76). Поскольку λ — инвариантный параметр,

$$U^i = dx^i / d\lambda \quad (9.129)$$

является вектором, касательным к геодезической. Тогда (9.76) можно переписать в виде

$$dU^i / d\lambda = -\Gamma_{kl}^i (dx^k / d\lambda) U^l. \quad (9.130)$$

Сравнивая (9.130) с (9.118), видим, что с помощью параллельного переноса вдоль геодезической получаются различные векторы U^i . Этим свойством геодезические линии напоминают прямые линии в евклидовом пространстве. Таким образом, геодезическая линия, соединяющая две точки, является не только линией со стационарным значением длины, но и «наипрямеей» линией. Поэтому норма вектора U^i не изменяться вдоль геодезической, т. е. $g_{ik} U^i U^k$ не зависит от λ в соответствии с (8.31).

Если это свойство геодезических записать для ковариантных компонент U_i вектора $dx^i / d\lambda$, то согласно (9.124) и (9.78) получим

$$dU_i / d\lambda = \Gamma_{i, ik} U^k U^l = (\Gamma_{i, ik} + \Gamma_{k, il}) U^k U^l / 2 = (\partial g_{kl} / \partial x^i) U^k U^l / 2. \quad (9.131)$$

Это равенство совпадает с уравнением (9.57).

Формула (9.118) определяет изменение компонент вектора, обусловленное его инфинитезимальным параллельным переносом вдоль вектора dx^i . Тогда полное изменение вектора a^i , обусловленное его параллельным переносом вдоль конечной кривой, можно получить с помощью интегрирования. В плоском пространстве полное изменение вектора a^i в результате параллельного переноса по замкнутому контуру должно быть равно нулю. Это особенно очевидно в декартовой или псевдодекартовой системах координат, в которых компоненты вектора a^i вообще не изменяются при параллельном переносе. Результирующий вектор в этом случае после прохождения по замкнутому контуру должен просто совпасть с исходным. Этот вывод не должен измениться и тогда, когда перенос осуществляется в криволинейной системе координат. В искривленном пространстве результирующий вектор a^{*i} , вообще говоря, будет отличен от исходного вектора a^i , причем разность $a^{*i} - a^i$ зависит от выбора замкнутой кривой (см. § 9.13). Таким образом, если данный вектор переносить параллельно из точки P_1 в точку P_2 вдоль некоторой кривой, соединяющей эти две точки, то результирующий вектор a^{*i} зависит от формы этой линии, если пространство искривленное, и не зависит, если пространство плоское. Фактически это единственное существенное различие между плоским и искривленным пространствами.

§ 9.8. Абсолютная производная. Перенос Ферми—Уолкера

Рассмотрим в 4-пространстве произвольную кривую C , заданную в параметрическом представлении $x^i = x^i(\lambda)$. Если λ — инвариантный параметр, то вектор $U^i(\lambda) = dx^i / d\lambda$ является касательным вектором к кривой. Теперь предположим, что с каждой точкой $x^i(\lambda)$ связан некоторый вектор $a^i(\lambda)$, т. е., что на кривой C определено векторное поле. Тогда обычная производная $da^i(\lambda) / d\lambda$ в общем случае не будет вектором, поскольку $da^i = a^i(\lambda + d\lambda) - a^i(\lambda)$

является разностью компонент векторов $a^i(P')$ и $a^i(P)$ в двух различных точках P' и P кривой C . Однако абсолютная производная, определяемая формулой

$$Da^i(\lambda)/d\lambda \equiv da^i/d\lambda + \Gamma_{ki}^i U^k a^i, \quad (9.132)$$

является, очевидно, вектором в точке P с координатами $x^i(\lambda)$. В самом деле, из (9.118) следует, что

$$\frac{Da^i}{d\lambda} = \lim_{P' \rightarrow P} \frac{a^i(P') - a^i(P) - (a^{*i}(P') - a^i(P))}{\Delta\lambda} = \lim_{P' \rightarrow P} \frac{a^i(P') - a^{*i}(P')}{\Delta\lambda}, \quad (9.132')$$

где $a^*(P')$ — вектор, полученный параллельным переносом вектора $a^i(P)$ в точку P' , с координатами $x^i(\lambda + \Delta\lambda)$. В локальной лоренцевой системе координат точки P абсолютная производная совпадает с обычной производной.

Аналогично в соответствии с (9.124) абсолютные производные от ковариантных компонент a_i определяются формулой

$$Da_i(\lambda)/d\lambda \equiv da_i/d\lambda - \Gamma_{L, ik} U^k a^i = da_i/d\lambda - \Gamma_{ik}^i U^k a_i \quad (9.133)$$

и являются ковариантными компонентами вектора с контравариантными компонентами $Da^i/d\lambda$, т. е.

$$Da_i/d\lambda = g_{ik} Da^k/d\lambda. \quad (9.134)$$

Это соотношение легко получить с помощью формул (9.16), (9.78) и определений (9.132), (9.133). Из (9.132) и (9.133) получим также следующее правило дифференцирования скалярного произведения $a_i b^i$ двух векторов a^i и b^i на C :

$$da_i b^i/d\lambda = b^i Da_i/d\lambda + a_i Db^i/d\lambda. \quad (9.135)$$

Теперь уравнения (9.130), (9.131) для геодезической можно переписать в виде

$$DU^i/d\lambda = 0; \quad DU_i/d\lambda = 0, \quad (9.136)$$

где λ — специальный параметр типа, упоминавшегося в § 8.10. Уравнения (9.136) выполняются также для мировых линий свободно падающих частиц и световых лучей.

В самом общем случае говорят, что вектор $a^i(\lambda)$ подвергается *параллельному переносу* вдоль кривой, если

$$Da^i(\lambda)/d\lambda = Da_i(\lambda)/d\lambda = 0. \quad (9.137)$$

Соотношения (9.137) инвариантны при произвольных преобразованиях параметра λ . Очевидно, что норма вектора, как и скалярное произведение двух векторов a^i и b^i , не изменяется при параллельном переносе, так как из (9.135), (9.137) и соответствующих формул для b^i имеем

$$Da_i b^i/d\lambda = Da_i/d\lambda b^i + a_i Db^i/d\lambda = 0.$$

Следовательно, в каждой точке P кривой C тетрада $e_{(a)}^i(P)$, удовлетворяющая соотношениям (9.81), (9.84), (9.86), получается параллельным переносом из точки O на C , вдоль этой кривой тетрады $e_{(a)}^i(O)$.

Однако Ферми [89] и Уолкер [262] указали, что параллельный перенос не является единственным переносом, обладающим таким важным свойством. Для времениподобных кривых (таких, как мировые линии произвольно движущихся частиц) в качестве параметра λ можно выбрать собственное время τ . Тогда U^i будет 4-скоростью частицы. В этом случае говорят, что вектор $a^i(\tau)$ подвергается *переносу Ферми — Уолкера* вдоль C , если он удовлетворяет следующим уравнениям:

$$Da^i/d\tau = W^{ik} a_k; \quad Da_i/d\tau = W_{ik} a^k. \quad (9.138)$$

Здесь W^{ik} — антисимметрический тензор:

$$\left. \begin{aligned} W^{ik} = -W^{ki} = c^{-2}(U^i A^k - U^k A^i); \\ A^i \equiv DU^i/d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (9.139)$$

который полностью определяется формой кривой или движением частицы. A^i в (9.139) представляет собой 4-ускорение, которое в локальной лоренцевой системе сводится к соответствующей величине в СТО (§ 4.5).

В соответствии с (4.41) 4-скорость удовлетворяет инвариантному соотношению

$$U_i U^i = -c^2, \quad (9.140)$$

которое после дифференцирования и с использованием (9.134) дает

$$DU_i U^i/d\tau = U^i DU_i/d\tau + U_i DU^i/d\tau = 2U_i DU^i/d\tau = 0$$

или

$$U_i A^i = 0. \quad (9.141)$$

В результате

$$W^{ik} U_k = c^{-2} U^k U_k A^i = A^i = DU^i/d\tau, \quad (9.142)$$

т. е. вдоль мировой линии C 4-скорость U^i претерпевает перенос Ферми — Уолкера. Легко видеть, что этот вид переноса, как и параллельный перенос, оставляет неизменным скалярное произведение двух векторов $a^i(\tau)$ и $b^i(\tau)$, так как из (9.135), (9.138) и (9.139) следует, что

$$\begin{aligned} da_i b^i/d\tau &= b^i Da_i/d\tau + a_i Db^i/d\tau = W_{il} a^l b^i + a_i W^{il} b_l = \\ &= (W^{ik} + W^{ki}) a_i b_k = 0. \end{aligned}$$

Таким образом, из тетрады $e_{(a)}^i(O)$ в точке O на кривой C с помощью переноса Ферми — Уолкера получим тетраду $e_{(a)}^i(P)$ в любой точке P этой кривой. Такая процедура на кривой C дает возможность получить частный тип тетрадного поля, обладающего тем свойством, что если вектор $e_{(a)}^i(O)$ в точке O параллелен 4-скорости, то это будет выполняться и на всей кривой C . Поэтому для этого тетрадного поля во всех точках на C имеем

$$\left. \begin{aligned} e_{(a)}^i &= U^i/c; \quad e_{(a)}^i U_i = 0; \\ W^{ik} e_{(a)k} &= c^{-2} U^i (A^k e_{(a)k}). \end{aligned} \right\} \quad (9.143)$$

Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \frac{De_{(a)}^i}{d\tau} &= W^{ik} e_{(a)k} = c^{-2} U^i (A^k e_{(a)k}); \\ \alpha &= 1, 2, 3. \end{aligned} \right\} \quad (9.144)$$

Если C — мировая линия свободно падающей частицы, то это геодезическая, для которой справедливо уравнение (9.136) при $\lambda = \tau$. Тогда в (9.139) тензор W^{ik} обращается в нуль, а уравнения (9.138) совпадут с (9.137). В этом случае перенос Ферми — Уолкера — просто параллельный перенос. Таким образом, различие между обоими видами переноса проявляется лишь при $A^i = DU^i/d\tau$, отличном от нуля, т. е. когда частица подвергается также действию и негравитационных сил, например электромагнитных сил.

§ 9.9. Локальные жесткие невращающиеся системы отсчета с произвольно движущимся началом. Прецессия Фоккера

Теперь попытаемся для общего случая искривленного пространства—времени найти систему координат (x^i) , являющихся обобщением координат, введенных в § 8.15. При рассмотрении плоского пространства — времени мы начинали с системы действительных лоренцевых координат (X^i) . В этих координатах

натах движение частицы описывается ее мировой линией C с параметрическим представлением:

$$X^i = f^i(\tau); \quad dX^i/d\tau = \dot{f}^i(\tau) = U^i(\tau); \quad A^i = DU^i/d\tau, \quad (9.145)$$

а преобразование к новым координатам $\check{x}^i = (\check{x}, \check{y}, \check{z}, \check{c}\check{t})$ дается формулами (8.152), которые в вещественном представлении имеют вид

$$X^i = f^i(\tau) + \check{A}_k^i(\tau) \check{x}^k. \quad (9.146)$$

Здесь $\check{A}_k^i(\tau)$ — коэффициенты преобразования Лоренца от системы (X^i) к мгновенной инерциальной системе покоя частицы. Это преобразование определяется как результат последовательных инфинитезимальных преобразований Лоренца без вращения. Следовательно, коэффициенты \check{A}_k^i должны удовлетворять уравнениям (4.139), (4.140), которые в вещественном представлении принимают форму

$$\left. \begin{aligned} d\check{A}_k^i/d\tau &= \check{A}_k^i (\dot{U}_i U^i - \dot{U}^i U_i)/c^2 = W^i_{\cdot i} \check{A}_k^i; \\ W^{ik} &= c^{-2} (U^i A^k - A^i U^k). \end{aligned} \right\} \quad (9.147)$$

Здесь W^{ik} — компоненты тензора (9.139) в лоренцевой системе координат. Если выразить в соответствии с (9.28) \check{A}_k^i через компоненты тетрады $e_{(k)}^i(\tau) = A_k^i(\tau)$, то получаются следующие уравнения для перемещения тетрады вдоль C :

$$de_{(k)}^i/d\tau = W^i_{\cdot l} e_{(k)}^l, \quad (9.148)$$

которые совпадают с уравнениями (9.138), (9.139) для случая плоского пространства с лоренцевой системой координат. Следовательно, вдоль C тетрады $e_{(k)}^i$ претерпевают перенос Ферми — Уолкера.

В системе \check{S} с координатами (\check{x}^i) , определяемыми формулой (9.146), частица все время покоится в начале $x^\mu = 0$ координат соответствующей системы отсчета \check{R} , а временная координата \check{t} совпадает с собственным временем τ частицы. В \check{S} метрика определяется соотношениями (8.154), (8.155). В малой окрестности начала координат, где можно пренебречь величинами второго порядка относительно (x^μ) , метрика принимает вид

$$\check{g}_{il} = \eta_{ik} - \delta_{i4} \delta_{k4} 2g_\lambda(\check{t}) \check{x}^\lambda/c^2, \quad (9.149)$$

где $g_\lambda(\check{t})$ — функции только от \check{t} . Они равны пространственным компонентам 4-ускорения $\check{A}_i(\tau)$ частицы в системе \check{S} , которые даются формулами

$$\check{A}_i(\tau) = \check{A}_i^k A_k = e_{(i)}^k A_k. \quad (9.150)$$

Чтобы получить $g_\lambda(\check{t})$, мы должны в $\check{A}_i(\tau)$ заменить τ на \check{t} , т. е.

$$g_\lambda(\check{t}) = \check{A}_\lambda(\check{t}). \quad (9.151)$$

Рассмотрим движение частицы в неустранимом гравитационном поле, когда на нее дополнительно действуют негравитационные силы, т. е. случай искривленного пространства — времени. В произвольной системе S координат (x^i) мировая линия C частицы снова описывается уравнениями типа (9.145). Но теперь 4-ускорение равно абсолютной производной от скорости U^i . Как и в случае плоского пространства, определим на C поле тетрад, подвергаемых переносу Ферми — Уолкера, причем для простоты выберем их в форме (9.143), так чтобы

$$e_{(4)}^i(\tau) = U^i(\tau)/c; \quad e_{(4)}^i A_i = 0; \quad e_{(v)}^i U_i = 0. \quad (9.152)$$

Тогда формула переноса для $e_{(v)}^i$ определяется уравнениями (9.144), т. е.

$$De_{(v)}^i(\tau)/d\tau = W^{il} e_{(v)l} = c^{-2} U^l (A^l e_{(v)l}). \quad (9.153)$$

Для данной мировой линии величины U^l и A^i можно считать известными функциями от τ и при заданных начальных значениях $e_{(v)}^i(0)$ векторы тетрады $e_{(v)}^i(\tau)$ однозначно определять из уравнений (9.153). Тогда величины

$$g_v(\tau) = e_{(v)}^i(\tau) A_i(\tau) \quad (9.154)$$

также можно считать известными функциями.

Теперь выберем систему координат $\check{x}^i = (\check{x}^\mu, c\check{t})$ со следующими свойствами.

1. Кривая C определяется уравнениями $\check{x}^\mu = 0$ и $\check{t} = \tau$, т. е. частица все время находится в начале \check{O} системы отсчета \check{R} , а временная переменная \check{t} равна собственному времени частицы.

2. Локально, т. е. в малой пространственной окрестности частицы, где можно пренебречь величинами второго порядка малости по (\check{x}^λ) , метрика при любом \check{t} имеет форму (9.149).

Такая система \check{S} получается, например, с помощью преобразований

$$x^i = f^i(\check{t}) + e_{(l)}^i(\check{t}) \check{x}^\lambda - (1/2) \Gamma_{(\lambda\mu)}^i(\check{t}) \check{x}^\lambda \check{x}^\mu, \quad (9.155)$$

где $e_{(l)}^i(\tau)$ — решение уравнений (9.153), а $\Gamma_{(\lambda\mu)}^i(\tau)$ определяется формулой

$$\Gamma_{(lm)}^i(\tau) = e_{(l)}^r e_{(m)}^s \Gamma_{rs}^i(P) = \Gamma_{(mi)}^i(\tau). \quad (9.156)$$

Здесь $\Gamma_{kl}^i(P)$ — значение символов Кристоффеля в точке P на C с координатами $x^i = f^i(\tau)$, которые также можно считать известными функциями от τ .

Система координат (9.155) удовлетворяет, очевидно, условию 1. Кроме того, с помощью (9.132), (9.154), (9.152) и (9.156) уравнения (9.153) можно записать в виде

$$de_{(v)}^i(\tau)/d\tau = -\Gamma_{rs}^i(P) U^r e_{(v)}^s + c^{-2} U^i g_v = -c \Gamma_{(4v)}^i + c^{-2} U^i g_v. \quad (9.157)$$

Коэффициенты $\check{\alpha}_k^i = \partial x^i / \partial \check{x}^k$ найдем, дифференцируя (9.155) по \check{x}^k . Таким способом с помощью (9.157) в первом приближении по \check{x}^λ получим

$$\check{\alpha}_k^i = e_{(k)}^i(\check{t}) - \Gamma_{(k\lambda)}^i(\check{t}) \check{x}^\lambda + \delta_{k4} c^{-2} e_{(4)}^i(\check{t}) g_\lambda(\check{t}) \check{x}^\lambda. \quad (9.158)$$

В начале $\check{x}^\mu = 0$ системы \check{R} , т. е. на мировой линии частицы при любом \check{t} ,

$$\check{\alpha}_k^i(P) = e_{(k)}^i; \quad \alpha_k^i(P) = \partial \check{x}^i / \partial x^k(P) = e_k^{(i)}. \quad (9.159)$$

Поэтому с учетом (9.152) и (9.154) компоненты 4-скорости и 4-ускорения частицы в системе \check{S} имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \check{U}^i &= \alpha_k^i U^k = c e_k^{(i)} e_{(4)}^k = c \delta_4^i; \\ \check{A}_k &= \check{\alpha}_k^i A_i = e_{(k)}^i A_i = (g_v, 0). \end{aligned} \right\} \quad (9.160)$$

Для точки (\check{x}^i) , достаточно близкой к C (при малых \check{x}^μ):

$$\check{g}_{ih}(\check{x}) = \check{\alpha}_i^l \check{\alpha}_k^m g_{lm}(x). \quad (9.161)$$

Здесь $\check{\alpha}_i^l$ определяются из (9.156), а переменные (\check{x}) и (x) связаны соотношениями (9.155).

Для любого точечного события P на C с координатами

$$\left. \begin{aligned} \check{x}^i &= (0, 0, 0, ct); \\ x^i &= f^i(\check{t}) \end{aligned} \right\} \quad (9.162)$$

в системах \check{S} и S соответственно из (9.161), (9.159) и (9.81) имеем

$$\check{g}_{ih}(P) = e_{(i)}^l e_{(k)}^m g_{lm}(P) = \eta_{ih}. \quad (9.163)$$

Таким образом, во всех точках кривой C система \check{S} — локально псевдоевклидова. Если пожелать, чтобы система \check{S} обладала лишь этим свойством, то последний член в правой части преобразований (9.155) можно отбросить. Однако, как мы сейчас увидим, введение последнего члена позволяет в системе \check{S} локально исключить внешнее гравитационное поле.

Для любой точки вблизи точки P (9.162) на C , используя разложение в ряд Тэйлора и пренебрегая всеми величинами второго порядка малости по \check{x}^λ , получаем

$$g_{lm}(x) = \bar{g}_{lm} + (x^n - f^n(\check{t})) \partial \bar{g}_{lm} / \partial x^n = \bar{g}_{lm} + e_{(\lambda)}^n(\check{t}) \check{x}^\lambda \partial \bar{g}_{lm} / \partial x^n, \quad (9.164)$$

где черточки указывают, что функции берутся в точке (9.162). Подставляя (9.158) и (9.164) в (9.161), в первом приближении по \check{x}^λ для метрики в \check{S} в окрестности \check{O} и при любом \check{t} получаем выражение

$$\begin{aligned} \check{g}_{ih} &= e_{(i)}^l e_{(k)l} + [(\partial \bar{g}_{lm} / \partial x^n) e_{(i)}^l e_{(k)}^m e_{(\lambda)}^n - e_{(i)l} \Gamma_{(k)\lambda}^l - e_{(k)l} \Gamma_{(i)\lambda}^l] \check{x}^\lambda + \\ &+ c^{-2} (\delta_{i4} e_{(4)l}^l + \delta_{k4} e_{(4)l}^l) g_{\lambda} \check{x}^\lambda. \end{aligned} \quad (9.165)$$

С помощью формулы (9.156) для $\Gamma_{(lm)}^i$ и с учетом (9.78) выражение в скобках во втором члене правой части (9.165) принимает вид

$$(\partial \bar{g}_{lm} / \partial x^n - \bar{\Gamma}_{l,mn} - \bar{\Gamma}_{m,ln}) e_{(i)}^l e_{(k)}^m e_{(\lambda)}^n = 0.$$

Использование тетрадных соотношений (9.81) в результате дает

$$\check{g}_{ih} = \eta_{ih} - \delta_{i4} \delta_{k4} \cdot 2g_{\lambda}(\check{t}) \check{x}^\lambda / c^2. \quad (9.166)$$

Таким образом, локально, т. е. в окрестности \check{O} в \check{R} , метрика в \check{S} имеет ту же форму (9.149), что и в случае плоского пространства — времени. Это означает, что в системе \check{S} выполняются оба условия 1 и 2. Пространственная метрика $\gamma_{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu}$ — евклидова, а гравитационные силы устранимы и обусловлены ускорением системы отсчета \check{R} . Неустранимое внешнее гравитационное поле исключено преобразованием (9.155). Его действие описывается лишь величинами второго порядка малости по \check{x}^λ .

Система \check{S} координат (\check{x}^i) не является полностью геодезической на кривой C , поскольку на C не все символы Кристоффеля равны нулю. Однако легко видеть, что единственные не равные нулю компоненты $\check{\Gamma}_{kl}^i$ следующие:

$$\check{\Gamma}_{4\lambda}^4 = \check{\Gamma}_{\lambda 4}^4 = \check{\Gamma}_{44}^{\lambda} = g_{\lambda}(\check{t}) / c^2. \quad (9.167)$$

Пусть P — произвольная точка на мировой линии C с координатами в системе \check{S} :

$$\check{x}_P^i = \delta_4^i ct. \quad (9.168)$$

Тогда с помощью преобразования вида (9.105) получим систему $\hat{S}(\tau)$ координат $(\hat{x}_{(\tau)}^i)$, геодезическую в точке P . Если в (9.105) выбрать $e_r^{(i)} = \delta_r^i$, то координаты

натные кривые в обеих системах \check{S} и $\check{S}(\tau)$ в точке P совпадут и преобразование (9.105) примет вид

$$\check{x}_{(\tau)}^i = x^i - \check{x}_P^i + \check{\Gamma}_{st}^i(P) (\check{x}^s - \check{x}_P^s) (\check{x}^t - \check{x}_P^t) / 2. \quad (9.169)$$

Учитывая (9.167) и (9.168), в результате имеем

$$\left. \begin{aligned} \check{x}_{(\tau)}^\mu &= \check{x}^\mu + (1/2c^2) g_\mu(\tau) (\check{x}^4 - c\tau)^2; \\ \check{x}_{(\tau)}^4 &= \check{x}^4 - c\tau + g_\lambda(\tau) \check{x}^\lambda (\check{x}^4 - c\tau) / c^2. \end{aligned} \right\} \quad (9.170)$$

Система $\check{S}(\tau)$ в точке P — геодезическая. Заменяя в (9.170) τ на $(\tau + d\tau)$, получаем преобразование, приводящее к системе $\check{S}(\tau + d\tau)$ координат $(\check{x}_{(\tau+d\tau)}^i)$, геодезической в точке P' с координатами $\check{x}_{P'}^i = \delta_4^i c(\tau + d\tau)$. Вычитая из полученных формул преобразования соотношения (9.170) и пренебрегая величинами второго порядка малости по $d\tau$, находим, что

$$\left. \begin{aligned} \check{x}_{(\tau+d\tau)}^\mu - \check{x}_{(\tau)}^\mu &= -g_\mu(d\tau/c) (\check{x}^4 - c\tau) + \dot{g}_\mu d\tau (\check{x}^4 - c\tau)^2 / 2c^2; \\ \check{x}_{(\tau+d\tau)}^4 - \check{x}_{(\tau)}^4 &= -cd\tau - g_\lambda d\tau \check{x}^\lambda / c + \dot{g}_\mu (d\tau \check{x}^\mu / c^2) (\check{x}^4 - c\tau). \end{aligned} \right\} \quad (9.171)$$

Теперь, если рассматривать лишь точки вблизи P или P' , величины

$$\check{x}^i - \check{x}_P^i = (\check{x}^\mu, \check{x}^4 - c\tau) \quad (9.172)$$

можно считать малыми первого порядка. Тогда с помощью (9.170) уравнения (9.171) можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \check{x}_{(\tau+d\tau)}^\mu &= \check{x}_{(\tau)}^\mu - (v^\mu/c) \check{x}_{(\tau)}^4 + O_2; \\ \check{x}_{(\tau+d\tau)}^4 &= -cd\tau + \check{x}_{(\tau)}^4 - v_\nu \check{x}_{(\tau)}^\nu / c + O_2. \end{aligned} \right\} \quad (9.173)$$

Здесь через O_2 мы обозначили совокупность членов второго порядка малости и положили:

$$v^\mu = v_\mu = g_\mu(\tau) d\tau. \quad (9.174)$$

С точностью до малых второго порядка соотношения между локальными лоренцевыми системами $\check{S}(\tau + d\tau)$ и $\check{S}(\tau)$ даются инфинитезимальными преобразованиями Лоренца без вращения, причем v^μ — (инфинитезимальная) скорость начала системы $\check{R}(\tau + d\tau)$ относительно $\check{S}(\tau)$ [см. (4.128), (4.129)]. Постоянная $-cd\tau$ представляет собой расстояние между началами временных осей систем $\check{S}(\tau)$ и $\check{S}(\tau + d\tau)$. Поскольку при любом $t = \tau$ пространственные координатные кривые, проходящие через начало \check{O} системы \check{R} , совпадают с соответствующими кривыми в $\check{S}(\tau)$, система отсчета \check{R} является корректным релятивистским обобщением ньютоновской невращающейся системы отсчета.

Поэтому мы можем предположить, что точечный компас (типа рассмотренного в § 2.8), расположенный в начале \check{O} системы \check{R} , все время показывает одну и то же направление относительно координатных осей в \check{R} . Физически такой компас можно реализовать с помощью гироскопа, помещенного в начале \check{O} так, чтобы в \check{S} он не подвергался действию крутящего момента. Показываемое компасом направление описывается пространственноподобным вектором с постоянными компонентами

$$\check{e}^i = (\check{e}^\mu, 0); \quad \check{e}^\mu \check{e}_\mu = \check{e}^\mu \check{e}^\mu = 1. \quad (9.175)$$

Компоненты этого вектора в исходной системе S являются функциями от τ , определяемыми формулами (9.159):

$$\left. \begin{aligned} e^i(\tau) &= \check{\alpha}_{k^i}^i \check{e}^k = e_{(v)}^i(\tau) \check{e}^v; \\ \check{e}^v &= e_{(v)}^v e^v. \end{aligned} \right\} \quad (9.176)$$

Их изменение в зависимости от времени определяется уравнениями (9.157), которые с учетом (9.176) и (9.160) дают

$$de^i(\tau)/d\tau = -c\Gamma_{(4\nu)}^i \check{e}^\nu - c^{-2} U^i (g_\nu \check{e}^\nu) = -c\Gamma_{(4\nu)}^i e_i^{(\nu)} e^l + c^{-2} U^i A_i e^l. \quad (9.177)$$

Следовательно, единичный вектор e^i , описывающий направление гироскопа, прецессирует в системе S . Эта прецессия (9.177) состоит из двух частей. Вторая часть, являющаяся 4-вектором

$$(de^i/d\tau)_{\text{Томас}} \equiv c^{-2} U^i A_i e^l, \quad (9.178)$$

представляет собой общерелятивистскую форму прецессии Томаса (4.147). Первая часть

$$(de^i/d\tau)_{\text{Фоккер}} \equiv -c\Gamma_{(4\nu)}^i e_i^{(\nu)} e^l = -c\Gamma_{(4\nu)}^i \check{e}^\nu, \quad (9.178')$$

очевидно, не 4-вектор, но она описывает реальный эффект, присутствующий даже в случае свободного падения частицы. Впервые этот эффект корректно рассмотрен Фоккером [95], и поэтому назван прецессией Фоккера. (В § 12.1 мы дадим детальное исследование этого эффекта для одного частного случая.)

Для свободно падающей частицы, мировая линия C которой является геодезической, 4-ускорение A^i равно нулю. Тогда и $g_\nu = 0$, а перенос (9.153), (9.152) тетрады $e_{(k)}^i$ является параллельным переносом. В этом случае преобразование (9.155) приводит к системе координат $\check{x}^i = \dot{x}^i$, которая для всех точек кривой C будет локально лоренцевой.

§ 9.10. Тензорный анализ. Ковариантное дифференцирование

Как и в случае плоского псевдоевклидова пространства СТО, мы говорим о тензорном (псевдотензорном) поле ранга n в общем римановом пространстве, если с каждой точкой в этом пространстве связан тензор (псевдотензор) ранга n . Как и в § 4.16, из такого поля дифференцированием можно получить новое тензорное поле ранга $(n + 1)$. Из тензорного поля нулевого ранга, т. е. из скалярного поля

$$\varphi'(x') = \varphi(x), \quad (9.179)$$

можно таким образом получить векторное поле $\text{grad } \varphi$ с ковариантными компонентами

$$\text{grad}_i \varphi = \partial\varphi/\partial x^i. \quad (9.180)$$

Тогда с помощью (9.10) и (9.179) получим

$$\partial\varphi'/\partial x'^i = (\partial\varphi/\partial x^k) (\partial x^k/\partial x'^i) = \check{\alpha}_i^k \partial\varphi/\partial x^k, \quad (9.181)$$

откуда следует, что $\partial\varphi/\partial x^i$ — действительно ковариантные компоненты вектора.

Однако если мы попытаемся таким способом из векторного поля a^i образовать тензорное поле ранга 2 дифференцированием формул преобразования (9.15), то получим

$$\partial a'^i/\partial x'^k = a^l \partial\alpha_l^i/\partial x'^k + \alpha_l^i \check{\alpha}_k^m \partial a^l/\partial x^m. \quad (9.182)$$

Отсюда видно, что $\partial a^i/\partial x^k$ являются смешанными компонентами тензора только тогда, когда коэффициенты постоянные. С другой стороны, из формулы Кристоффеля (9.80) и соотношений (9.11), (9.14) и (9.120) следует

$$\Gamma_{kr}^i a'^r = (-\partial\alpha_l^i/\partial x'^k + \alpha_l^i \check{\alpha}_k^s \Gamma_{sr}^l) a^l. \quad (9.183)$$

Складывая (9.182) и (9.183), находим, что величины

$$a_{;k}^i = \partial a^i/\partial x^k + \Gamma_{kr}^i a^r \quad (9.184)$$

преобразуются по закону:

$$a_{;k}^i \equiv \partial a^i / \partial x^k + \Gamma_{kr}^i a^r = \alpha_i^l \tilde{\alpha}_k^m a_{;m}^l.$$

Таким образом, с помощью операции *ковариантного дифференцирования* (9.184) контравариантных компонент вектора мы получаем смешанные компоненты тензорного поля второго ранга.

Эту операцию геометрически можно описать следующим образом. Пусть $a^i(P)$ и $a^i(P')$ — два вектора некоторого векторного поля в двух близких точках P и P' с координатами (x^i) и $(x^i + dx^i)$. Разности $da^i = a^i(P') - a^i(P) = dx^k \partial a^i / \partial x^k$ не могут быть компонентами вектора, поскольку $a^i(P)$ и $a^i(P')$ относятся к двум разным точкам. Однако если $a^{*i}(P')$ — вектор, полученный параллельным переносом a^i из точки P в точку P' , то разность $a^i(P') - a^{*i}(P) = a^i(P') - a^i(P) - \{a^{*i}(P') - a^i(P)\} = (\partial a^i / \partial x^k + \Gamma_{kr}^i a^r) dx^k = a_{;k}^i dx^k$ является инфинитезимальным вектором в точке P' . С точностью до малых второго порядка по (dx^k) величина $a_{;k}^i dx^k$ является также инфинитезимальным вектором в точке P , и поскольку это справедливо для любого инфинитезимального вектора dx^i , то величины $a_{;k}^i$ должны быть смешанными компонентами тензора ранга 2.

Рассматривая аналогичным образом ковариантные компоненты a_i векторного поля и используя при этом (9.124), вместо (9.118), находим, что величины

$$a_{i;k} \equiv \partial a_i / \partial x^k - \Gamma_{ik}^r a_r \quad (9.185)$$

являются ковариантными компонентами тензора. В геодезической системе и, в частности, в декартовой системе координат плоского пространства, где символы Кристоффеля равны нулю, ковариантное дифференцирование (9.184) и (9.185) совпадает с обычным дифференцированием.

Теперь рассмотрим векторы a^i векторного поля, связанные с точками кривой C , заданной в параметрическом представлении $x^i = x^i(\lambda)$. Они образуют векторное поле $a^i(\lambda)$, определенное на C , а абсолютные производные (9.132), (9.133) можно тогда в соответствии с (9.184), (9.185) представить в виде

$$\left. \begin{aligned} Da^i(\lambda)/d\lambda &= da^i/d\lambda + \Gamma_{kl}^i a^l dx^k/d\lambda = (\partial a^i / \partial x^k + \Gamma_{kl}^i a^l) dx^k/d\lambda = \\ &= a_{;k}^i dx^k/d\lambda; \\ Da^i/d\lambda &= da_i/d\lambda - \Gamma_{ik}^l a_l dx^k/d\lambda = a_{i;k} dx^k/d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (9.186)$$

Операцию ковариантного дифференцирования можно применить также и к тензорным полям более высокого ранга. Рассмотрим, например, тензорное поле ранга 2 с контравариантными компонентами t^{ik} . Поскольку каждый индекс отдельно преобразуется по тому же правилу, что и вектор, величины

$$t_{;l}^{ik} \equiv \partial t^{ik} / \partial x^l + \Gamma_{lr}^i t^{rk} + \Gamma_{lr}^k t^{ir} \quad (9.187)$$

с двумя контравариантными индексами и одним ковариантным индексом являются смешанными компонентами тензора ранга 3. Это можно проверить (точно так же, как и в случае векторного поля) с помощью формул преобразования для тензоров и символов Кристоффеля. Аналогично величины

$$\left. \begin{aligned} t_{ik;l} &\equiv \partial t_{ik} / \partial x^l - \Gamma_{il}^r t_{rk} - \Gamma_{kl}^r t_{ir} \\ t_{;l}^i &\equiv \partial t_{;k}^i / \partial x^l + \Gamma_{lr}^i t_{rk} - \Gamma_{kl}^r t_{;r}^i \end{aligned} \right\} \quad (9.188)$$

являются, соответственно, чисто ковариантными и смешанными компонентами тензора третьего ранга. Эти правила ковариантного дифференцирования можно

распространить и на тензорное поле ранга n . В этом случае количество членов, содержащих символы Кристоффеля, также равно n . Если же положить

$$\varphi_{;i} \equiv \partial\varphi/\partial x^i, \quad (9.189)$$

то данное правило можно применить и к тензорному полю нулевого ранга. Поскольку скалярное произведение $a_i b^i$ двух векторных полей $a^i b^i$ является скалярным полем, имеем

$$\begin{aligned} (a_i b^i)_{;k} &= b^i \partial a_i / \partial x^k + a_i \partial b^i / \partial x^k = (\partial a_i / \partial x^k - \Gamma_{ik}^r a_r) b^i + \\ &+ a_i (\partial b^i / \partial x^k + \Gamma_{kr}^i b^r) = a_{i;k} b^i + a_i b^i_{;k}, \end{aligned} \quad (9.190)$$

т. е. известное правило дифференцирования произведения выполняется и для ковариантного дифференцирования. Легко видеть, что это правило применимо к произведению любых двух тензоров произвольного ранга, например:

$$\left. \begin{aligned} (t_{ik} a^l)_{;m} &= t_{ik;m} a^l + t_{ik} a^l_{;m}; \\ (t_{ik} a^k)_{;l} &= t_{ik;l} a^k + t_{ik} a^k_{;l}; \\ (t^{ik} a_k)_{;l} &= t^{ik}_{;l} a_k + t^{ik} a_{k;l}. \end{aligned} \right\} \quad (9.191)$$

Теперь тождества (9.123) и (9.125) можно представить в форме

$$g_{ik;l} \equiv 0; \quad g^i_k{}_{;l} \equiv 0, \quad (9.192)$$

т. е. ковариантные производные метрического тензора равны нулю. Поэтому при ковариантном дифференцировании формул (9.16) и (9.17) получим

$$a_{l;l} = g_{ik;l} a^k + g_{ik} a^k_{;l} = g_{ik} a^k_{;l}; \quad a^i_{;l} = g^{ik} a_{k;l}. \quad (9.193)$$

т. е. величины $a_{i;k}$ и $a^i_{;k}$ являются компонентами одного и того же тензора ранга 2. Таким же способом можно показать, что величины $t^i_{;l}$, $t^i_{;k;l}$, $t_{ik;l}$, определяемые в (9.187) и (9.188), являются компонентами одного и того же тензора ранга 3.

Чтобы получить обобщение дифференциальных операторов, введенных в § 4.16 для частного случая псевдоевклидова пространства, достаточно в соответствующих формулах § 4.16 обычное дифференцирование заменить ковариантным дифференцированием. Тогда для ротора векторного поля a_i получим

$$\text{rot}_{ik} \{a\} = a_{k;i} - a_{i;k} = \partial a_k / \partial x^i - \partial a_i / \partial x^k. \quad (9.194)$$

Здесь величины, содержащие символы Кристоффеля, сократились. Ковариантное выражение для дивергенции вектора получается сверткой тензора $a^i_{;k}$, т. е.

$$\text{div} \{a^i\} = a^i_{;i} = \partial a^i / \partial x^i + \Gamma_{ir}^i a^r, \quad (9.195)$$

что с учетом (9.128) можно представить следующим образом:

$$\text{div} \{a^i\} = \frac{\partial a^i}{\partial x^i} + \frac{a^i}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} \sqrt{|g|} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} a^i). \quad (9.196)$$

В $(3+1)$ -пространстве g — отрицательно, т. е. $|g| = -g$, а для пространства с положительно определенной метрикой $g > 0$ и $|g| = g$. Теперь ковариантное выражение для оператора Δ' Адамара принимает вид

$$\square \psi = \text{div} \{\text{grad} \psi\} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^i} (\sqrt{|g|} g^{ik} \partial \psi / \partial x^k). \quad (9.197)$$

Контравариантные компоненты дивергенции тензорного поля T^{ik} имеют вид

$$\begin{aligned} \operatorname{div}^i \{T\} &\equiv T^i{}_{;k} = \partial T^{ik} / \partial x^k + \Gamma_{kr}^i T^{rk} + \Gamma_{kr}^k T^{ir} = \\ &= \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{|g|} T^{ik}) + \Gamma_{kl}^i T^{kl}, \end{aligned} \quad (9.198 \text{ а})$$

а ковариантные компоненты

$$\operatorname{div}_i \{T\} = T^k{}_{;k} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{|g|} T_i^k) - \Gamma_{r, is} T^{rs}. \quad (9.198 \text{ б})$$

Для симметрического тензора с учетом (9.78) это выражение сводится к

$$\operatorname{div}_i \{T\} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{|g|} T_i^k) - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{rs}}{\partial x^i} T^{rs}. \quad (9.199)$$

Для антисимметрического тензора F^{ik} вследствие симметричности Γ_{kl}^i последний член в формуле (9.198а) будет равен нулю, следовательно,

$$\operatorname{div}^i \{F\} = \frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{|g|} F^{ik}). \quad (9.200)$$

Далее, для ротора антисимметрического тензора получим следующее выражение:

$$\operatorname{rot}_{ikl} \{F\} = F_{ik;l} + F_{kl;i} + F_{li;k} = \partial F_{ih} / \partial x^l + \partial F_{kl} / \partial x^i + \partial F_{li} / \partial x^k. \quad (9.201)$$

Здесь величины, содержащие символы Кристоффеля, сократились. Операторы *градиента* и *ротора* увеличивают ранг тензорного поля, а оператор дивергенции уменьшает его на единицу. Из формул (9.180), (9.194), (9.196), (9.200) и (9.201) получаем далее следующие тождества для скалярного, векторного и антисимметрического тензорного полей соответственно:

$$\operatorname{rot} \{\operatorname{grad} \varphi\} = \operatorname{rot} \{\operatorname{rot} \{a\}\} = \operatorname{div} \{\operatorname{div} F\} = 0. \quad (9.202)$$

Все рассмотренные здесь ковариантные операции можно применить также и к псевдотензорным полям. В результате получаются псевдотензорные поля меньшего или большего ранга. Ротор антисимметрического тензора F_{ik} является тензором, дуальным к дивергенции псевдотензорного поля:

$$F^{*ik} = e^{iklm} F_{lm} / 2, \quad (9.203)$$

т. е.

$$\operatorname{rot}_{ikl} \{F\} = e_{iklm} \operatorname{div}^m \{F^{*}\}, \quad (9.204)$$

что легко проверяется с помощью формул (9.49), (9.200) и (9.201).

В трехмерном пространстве аналогичным образом с помощью (9.74') находим следующие соотношения между дивергенцией и ротором антисимметрического тензора $H_{\mu\nu}$ и его дуальным аксиальным вектором \mathbf{H} :

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{div} \mathbf{H} &= \gamma^{-1/2} \partial \gamma^{1/2} H^\mu / \partial x^\mu = (1/2 \gamma^{-1/2}) \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial H_{\nu\lambda} / \partial x^\mu = \\ &= (1/3!) e^{\mu\nu\lambda} (\partial H_{\nu\lambda} / \partial x^\mu + \partial H_{\lambda\mu} / \partial x^\nu + \\ &+ \partial H_{\mu\nu} / \partial x^\lambda) \equiv (1/3!) e^{\mu\nu\lambda} \operatorname{rot}_{\mu\nu\lambda} \{H_{\mu\lambda}\}; \\ \operatorname{div}^\mu \{H^{\mu\nu}\} &\equiv \gamma^{-1/2} \partial (\gamma^{1/2} H^{\mu\nu}) / \partial x^\nu = \gamma^{-1/2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \partial H_\lambda / \partial x^\nu = \\ &= e^{\mu\nu\lambda} (\partial H_\lambda / \partial x^\nu - \partial H_\nu / \partial x^\lambda) / 2 \equiv \operatorname{rot}^\mu H. \end{aligned} \right\} \quad (9.205)$$

§ 9.11. Ковариантное дифференцирование тензорных плотностей

Пусть $a^i(x)$ — векторное поле с плотностью $a^i(x)$ (степени 1), определяемой в соответствии с (9.72):

$$a^i(x) = \sqrt{-g} a^i(x). \quad (9.206)$$

Когда ковариантная производная $a^i_{;k}$ определяется как плотность ковариантной производной a^i , т. е.

$$a^i_{;k} \equiv \sqrt{-g} a^i_{,k}. \quad (9.207)$$

Обозначим обычную частную производную по x^k символом $,_k$ в отличие от ковариантной производной, которая обозначается символом $_{;k}$.

Тогда из (9.207), (9.184) и (9.206) имеем

$$a^i_{;k} = \sqrt{-g} (a^i_{,k} + \Gamma^i_{kr} a^r) = a^i_{,k} + \Gamma^i_{kr} a^r - a^i (-g)^{1/2}_{,k},$$

или с учетом (9.128)

$$a^i_{;k} = a^i_{,k} + \Gamma^i_{kr} a^r - a^i \Gamma^r_{kr}. \quad (9.208)$$

Данное выражение для ковариантной производной тензорной плотности ранга 1 легко обобщить на тензорную плотность произвольного ранга. Для тензорной плотности ранга 2 имеем, например:

$$\left. \begin{aligned} t^{ik}_{;l} &\equiv \sqrt{-g} t^{ik}_{,l} = t^{ik}_{,l} + \Gamma^i_{lr} t^{rk} + \Gamma^k_{lr} t^{ir} - t^{ik} \Gamma^r_{lr}; \\ t^k_{;l} &\equiv \sqrt{-g} t^k_{,l} = t^k_{,l} - \Gamma^k_{lr} t^r - \Gamma^r_{lr} t^k - t^k \Gamma^r_{lr}. \end{aligned} \right\} \quad (9.209)$$

Аналогично, если ранг равен 0, т. е. для скалярной плотности

$$\varrho(x) = \sqrt{-g} L(x), \quad (9.210)$$

имеем

$$\varrho(x)_{;i} \equiv \sqrt{-g} L(x)_{,i} = \sqrt{-g} L(x)_{,i} - \varrho(x) \Gamma^r_{ir}. \quad (9.211)$$

Здесь мы использовали (9.128) и (9.189). В частном случае скаляр $L(x)$ может быть одинаковым во всем пространстве. Тогда, выбирая $L(x) = 1$, из (9.210) находим, что

$$\varrho(x) = \sqrt{-g} \quad (9.212)$$

является скалярной плотностью, что также вытекает из (9.46) и (9.71). В соответствии с (9.212) эта скалярная плотность имеет нулевую ковариантную производную, т. е.

$$(-g)_{;i}^{-1/2} = 0. \quad (9.213)$$

Поэтому все формулы (9.207) — (9.211) для ковариантного дифференцирования тензорных плотностей можно получить из соотношений (9.69), (9.72), пользуясь обычным правилом дифференцирования произведения.

Дивергенция тензорной плотности определяется как плотность дивергенции соответствующего поля. Ротор тензорной плотности определяется аналогично. Таким образом, в соответствии с (9.196) или (9.208) дивергенция векторной плотности является скалярной плотностью:

$$\operatorname{div} \{a\} \equiv a^i_{;i} = (-g)^{1/2} \operatorname{div} \{a\} = a^i_{,i}, \quad (9.214)$$

т. е. в данном случае ковариантное дифференцирование может быть заменено обычным дифференцированием. То же самое справедливо и для случая антисимметричной тензорной плотности ранга 2, поскольку в соответствии с (9.200) или (9.209) имеем

$$\operatorname{div}^i \{F\} \equiv F^{ik}_{;k} = (-g)^{1/2} \operatorname{div} \{F\} = F^{ik}_{,k}. \quad (9.215)$$

В общем случае дивергенция тензорной плотности ранга 2 имеет более сложный вид. Для симметричной тензорной плотности, например, имеем в соответствии с (9.199):

$$\operatorname{div}_i \{t\} \equiv t_{i;k}^k = (-g)^{1/2} \operatorname{div}_i \{T\} = t_{i,k}^k - t^{rs} g_{rs,i}/2. \quad (9.216)$$

Этот результат легко получить также из (9.209), учитывая (9.78) и симметричность $\mathfrak{F}^{ik} = \mathfrak{F}^{ki}$.

§ 9.12. Интегральные теоремы

Теперь обобщение гауссовых теорем (4.191), (4.194) очевидно. Если Ω — область в 4-пространстве с трехмерной границей Σ , то в соответствии с (9.63) для любого векторного поля a^i с плотностью a^i имеем

$$\int_{\Omega} \operatorname{div} (a) d\Omega = \int_{\Omega} \operatorname{div} \{a\} dx = \int_{\Sigma} \epsilon a^i dS_i \quad (9.217)$$

или, используя (9.57) и (9.214):

$$\int_{\Omega} a^i_{,i} dx = \int_{\Sigma} \epsilon a^i dS_i \equiv \int_{\Sigma} \epsilon a^i \epsilon_{ikhlm} dx^k \delta x^l \Delta x^m. \quad (9.218)$$

Чтобы знак в правой части уравнения (9.218) был правильным, инфинитезимальные векторы dx^k , δx^l , Δx^m , лежащие в трехмерном пространстве Σ и входящие в определение (9.57) dS_i и $d\Sigma_i$, должны выбираться так, чтобы вектор $d\Sigma_i$ был направлен из области Ω .

Теорема Гаусса выражает интеграл в 4-пространстве через интеграл по области трехмерного пространства. Аналогично обобщенная теорема Стокса преобразует интеграл по двумерной поверхности f в интеграл по замкнутой кривой s , ограничивающей поверхность f . Тогда для любого векторного поля a^i имеем

$$\int_f \operatorname{rot}_{ik} \{a\} d\sigma^{ik} = \int_s a_i dx^i. \quad (9.219)$$

Однако для случая 4-пространства справедлива еще одна теорема, аналогичная теоремам Гаусса и Стокса, которая преобразует интеграл по трехмерному пространству (гиперповерхности) Σ в интеграл по ее двумерной границе σ . Так, например, для произвольного антисимметрического тензорного поля $F^{ik} = -F^{ki}$ с плотностью \mathfrak{F}^{ik} имеем

$$(1/3!) \int_{\Sigma} \operatorname{rot}_{ihl} \{F\} d\Sigma^{ihl} = \int_{\sigma} F_{ik} d\sigma^{ik} \quad (9.220)$$

и

$$\int_{\Sigma} (\partial \mathfrak{F}^{ik} / \partial x^k) dS_i = \int_{\sigma} \mathfrak{F}^{ik} dS_{ik}^*, \quad (9.221)$$

где dS_i , $d\sigma^{ik}$, dS_{ik}^* — величины, определяемые формулами (9.57), (9.52) и (9.54). Как и в (9.218), мы должны в (2.219) — (2.221) выбрать инфинитезимальные векторы, определяющие объемный и пространственные элементы [247, 248]. Теоремы (9.220) и (9.221), имеющие формы теорем Стокса и Гаусса соответственно, тесно связаны. Фактически согласно (9.204), (9.54), (9.57) уравнение (9.220) в применении к тензорному полю F^{ik} эквивалентно уравнению (9.221) в применении к дуальному тензору F^{*ik} .

Поскольку a^i и F^{ik} — тензорные поля, интегралы (9.217) — (9.221) инвариантны (или псевдоинвариантны) при произвольных координатных преобразованиях. Однако, вследствие того, что эти уравнения получены с помощью правила интегрирования по частям (см. доказательство теоремы Гаусса в трехмерном пространстве в приложении 1), они будут выполняться в любой системе координат, даже если a^i и $F^{ik} = -F^{ki}$ не имеют тензорных свойств. Конечно, тогда интегралы (9.217) — (9.221) уже не будут инвариантными, но сами уравнения все еще будут выполняться. Поэтому если T_i^k — 16 произволь-

ых функций от (x) , занумерованных с помощью индексов i и k , то справедливы следующие четыре уравнения, соответствующие (9.218):

$$\int_{\Omega} T_{i,k}^k dx = \int_{\Sigma} T_{i,k}^k \cdot \varepsilon dS_k. \quad (9.222)$$

Точно так же для совокупности 24 функций $\psi_i^{kl}(x) = -\psi_i^{lk}$ по аналогии с (9.221) имеем

$$\int_{\Sigma} \psi_{i,l}^{kl} dS_k = \int_{\sigma} \psi_i^{kl} dS_{kl}^*. \quad (9.223)$$

Поскольку мы ничего не предполагали о трансформационных свойствах функций T_i^k и ψ_i^{kl} , интегралы в этих уравнениях преобразуются совершенно произвольным образом. Однако необходимо заметить, что если даже T_i^k , ψ_i^{kl} — тензорные плотности, так что $T_i^k dS_k$ и $\psi_i^{kl} df_{kl}^*$ в каждой точке области интегрирования векторы, то интегралы в правых частях (9.222) и (9.223) в общем случае не будут преобразовываться как векторы. Это будет выполняться лишь в плоском пространстве с прямоугольными координатами. В общем случае такие интегралы уже не имеют простого геометрического смысла.

§ 9.13. Тензор кривизны

Пусть a_k — произвольное векторное поле, а $a_{k;l}$ — тензор ранга 2, полученный ковариантным дифференцированием a_k :

$$a_{k;l} = \partial a_k / \partial x^l - \Gamma_{kl}^r a_r = \partial a_k / \partial x^l - \Gamma_{r,kl} a^r. \quad (9.224)$$

Аналогичным образом можно записать и тензор ранга 3, полученный ковариантным дифференцированием тензора $a_{k;l}$:

$$a_{k;l;m} = \partial a_{k;l} / \partial x^m - \Gamma_{km}^r a_{r;l} - \Gamma_{lm}^r a_{k;r} = \partial a_{k;l} / \partial x^m - \Gamma_{r,km} a_{l;r}^r - \Gamma_{lm}^r a_{k;r}, \quad (9.225)$$

где $a_{l;r}^r$ находится из (9.184) или (9.193). Подставляя первое выражение (9.224) в первое равенство (9.225), получаем выражение для $a_{k;l;m}$, которое будет линейной функцией от a_i и его первых и вторых производных. Однако если из этого выражения вычесть соответствующее выражение для $a_{k;m;l}$, полученное изменением порядка ковариантного дифференцирования, то производные от a_i сократятся и будем иметь

$$a_{k;l;m} - a_{k;m;l} = -R^l{}_{klm} a_i, \quad (9.226)$$

где коэффициенты при a_i следующие:

$$R^l{}_{klm} = \partial \Gamma_{kl}^l / \partial x^m - \partial \Gamma_{km}^l / \partial x^l + \Gamma_{rm}^l \Gamma_{kl}^r - \Gamma_{rl}^i \Gamma_{km}^r. \quad (9.227)$$

Теперь, используя в (9.224) и (9.225) вторые равенства, аналогичным образом получаем

$$a_{k;l;m} - a_{k;m;l} = -R_{ihlm} a^i, \quad (9.228)$$

где

$$\begin{aligned} R_{ihlm} &= \partial \Gamma_{i,kl} / \partial x^m - \partial \Gamma_{i,km} / \partial x^l + \Gamma_{il}^r \Gamma_{r,km} - \Gamma_{im}^r \Gamma_{r,kl} = \\ &= \frac{1}{2} (\partial^2 g_{il} / \partial x^k \partial x^m + \partial^2 g_{km} / \partial x^i \partial x^l - \partial^2 g_{im} / \partial x^k \partial x^l - \partial^2 g_{kl} / \partial x^i \partial x^m) + \\ &\quad + g^{rs} (\Gamma_{r,il} \Gamma_{s,km} - \Gamma_{r,im} \Gamma_{s,kl}). \end{aligned} \quad (9.229)$$

Поскольку для любого векторного поля a_i левые части в (9.226) и (9.228) — тензоры, величины $R^l{}_{klm}$ и R_{ihlm} должны быть компонентами одного и того же тензора четвертого ранга, т. е.

$$R^l{}_{klm} = g^{in} R_{nhlm}. \quad (9.230)$$

Тензор R_{iklm} называется *тензором кривизны Римана — Кристоффеля*. Правила (9.226) выражают правило коммутации для ковариантного дифференцирования векторного поля. Соответствующее правило ковариантного дифференцирования тензорного поля t_{ik} имеет вид

$$t_{kl; m; n} - t_{kl; n; m} = -R^i{}_{kmn} t_{il} - R^i{}_{lmn} t_{ki}. \quad (9.231)$$

Геометрический смысл тензора кривизны становится очевидным, если рассмотреть параллельный перенос вектора a^i вдоль контура инфинитезимального параллелограмма, определяемого двумя инфинитезимальными векторами (dx^i) и (δx^i) . Как уже говорилось в § 9.7, вектор a^{*i} , полученный в результате этого процесса, в общем случае отличен от вектора a^i . С помощью закона параллельного переноса (9.118) и (9.124) простыми вычислениями легко проверить, что разности $\Delta a^i = a^{*i} - a^i$, $\Delta a_i = a_i^* - a_i$ между компонентами этих векторов определяются выражениями

$$\Delta a^i = R^i{}_{klm} a^k d\sigma^{lm}/2; \quad \Delta a_i = R_{iklm} a^k d\sigma^{lm}/2, \quad (9.232)$$

где $d\sigma^{lm} = dx^l \delta x^m - dx^m \delta x^l$.

В плоском пространстве, где можно ввести систему координат, в которой компоненты метрического тензора постоянны, очевидно, имеем

$$R_{iklm} = 0. \quad (9.233)$$

Таким образом, это уравнение — необходимое условие, чтобы пространство было плоским. Это условие является и достаточным; так как если (9.233) выполняется во всех точках, то можно найти такое преобразование (9.9), которое приводит к компонентам g'_{ih} , не зависящим от пространственно-временных переменных (x'^i) (см. приложение 5).

Из (9.229) непосредственно следует, что тензор кривизны удовлетворяет алгебраическим соотношениям

$$R_{iklm} = -R_{ikhml} = -R_{kilm} = R_{lmik}; \quad (9.234 \text{ а})$$

$$R_{iklm} + R_{ilmk} + R_{imkl} = 0. \quad (9.234 \text{ б})$$

Кроме того, тензор кривизны удовлетворяет ряду дифференциальных тождеств, которые можно получить следующим образом [21]. Учитывая общее правило для ковариантного дифференцирования свертки произведения тензоров, из (9.226) ковариантным дифференцированием получаем

$$a_{k; l; m; n} - a_{k; m; l; n} = -R^i{}_{klm; n} a_i - R^i{}_{klm} a_{i; n}.$$

Складывая это равенство с двумя другими, полученными из него циклической перестановкой индексов l, m, n , получаем

$$\begin{aligned} & (a_{k; l; m; n} - a_{k; l; n; m}) + (a_{k; m; n; l} - a_{k; m; l; n}) + (a_{k; n; l; m} - a_{k; n; m; l}) = \\ & = -(R^i{}_{klm; n} + R^i{}_{kmn; l} + R^i{}_{knl; m}) a_i - (R^i{}_{klm} a_{i; n} + R^i{}_{kmn} a_{i; l} + R^i{}_{knl} a_{i; m}). \end{aligned} \quad (9.235)$$

Каждое выражение в круглых скобках в левой части (9.235) можно преобразовать с помощью формулы (9.231), примененной к тензорам $a_{k; l}$, $a_{k; m}$, $a_{k; n}$ соответственно. При этом получим шесть величин, три из которых взаимно сокращаются с учетом (9.234б), а оставшиеся три сокращаются попарно с величинами во второй скобке в правой части (9.235). В результате имеем

$$(R^i{}_{klm; n} + R^i{}_{kmn; l} + R^i{}_{knl; m}) a_i = 0.$$

Поскольку это равенство справедливо для произвольного векторного поля a_i , приходим к *тождествам Бианки*

$$R^i{}_{klm; n} + R^i{}_{kmn; l} + R^i{}_{knl; m} = 0. \quad (9.236)$$

С учетом тождеств (9.234) число алгебраических независимых компонент тензора кривизны равно 20 в четырехмерном пространстве, 6 в трехмерном и 1 в двухмерном пространстве.

§ 9.14. Свертки тензора кривизны

Свертка тензора $R^i{}_{klm}$ четвертого ранга является тензором второго ранга, который с учетом (9.234а) может быть записан в нескольких формах:

$$R_{ih} \equiv R^r{}_{irk} = -R^r{}_{ikr} = -R^r{}_{i \cdot rk} = R^r{}_{rk \cdot i} = R^r{}_{kri}. \quad (9.237)$$

Отсюда очевидно, что этот *свернутый тензор кривизны* симметричен, т. е.

$$R_{ih} = R_{hi}. \quad (9.238)$$

Последующей сверткой тензора R_{ih} получим скалярную кривизну

$$R = R_i^i = g^{ik} R_{ih}. \quad (9.239)$$

Свертывая тождества Бианки (9.236) по индексам i и l и используя соотношения (9.237) и (9.234а), имеем $R_{hm}; n + R^l{}_{kmn}; i - R_{hn}; m = 0$ или $R^k{}_{m; n} - R^k{}_{\cdot mn}; i - R^k{}_{n; m} = 0$. Последующее свертывание по k и m дает $R_{;n} - -2 R^k{}_{n; k} = 0$. Умножая эту формулу на g^{in} и используя (9.192) и правило ковариантного дифференцирования произведения, получаем

$$(R^{ik} - g^{ik} R/2); k = 0. \quad (9.240)$$

Это уравнение показывает, что ковариантная дивергенция симметрического тензора

$$R^{ik} - g^{ik} R/2 \quad (9.241)$$

равна нулю. Этот тензор имеет лишь 10 независимых компонент.

Из (9.237), (9.227) и (9.128) получим следующие явные выражения для R_{ih} :

$$\begin{aligned} R_{ih} = & \partial \Gamma_{il}^i / \partial x^k - \partial \Gamma_{ik}^i / \partial x^l + \Gamma_{il}^r \Gamma_{kr}^i - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{lr}^i = \partial^2 \ln \sqrt{|g|} / \partial x^i \partial x^k - \\ & - \partial \Gamma_{ik}^i / \partial x^l + \Gamma_{il}^r \Gamma_{kr}^i - \Gamma_{ik}^r \partial \ln \sqrt{|g|} / \partial x^r. \end{aligned} \quad (9.242)$$

§ 9.15. Специальные системы координат в конечной области пространства — времени

В § 9.6 было показано, что всегда можно ввести такие локальные системы координат $\tilde{S}(P)$ или $\hat{S}(P)$, в которых метрический тензор в произвольной точке P или даже в малой окрестности P имеет частную релятивистскую форму. Кроме того, в § 9.9 мы видели, что можно выбрать также систему \tilde{S} , в которой \tilde{g}_{ik} имеет заданную величину в окрестности любой заданной времениподобной кривой. Исследуем теперь возможность развития этой идеи до глобального уровня или, по крайней мере, на конечную область пространства — времени.

Поскольку общее координатное преобразование

$$x'^i = f^i(x^k) \quad (9.243)$$

содержит четыре произвольные функции, то интуиция подсказывает, что всегда можно найти такие системы S' , в которых $g'_{ik}(x')$ удовлетворяет четырем специальным независимым условиям. Эти условия могут иметь форму дифференциальных уравнений первого порядка или же выражать определенные требования к четырем из десяти функций $g'_{ik}(x')$.

В § 8.13 мы видели, что некоторые из условий последнего типа накладываются с помощью обыкновенных калибровочных преобразований. Например, чисто временное преобразование (8.120), которое означает, что координатные часы в S' являются стандартными часами, приводит к тому, что

$$g'_{44} = -1; \quad \chi' = 0. \quad (9.244)$$

С другой стороны, в § 8.13 было показано также, что в общем случае нельзя калибровочным преобразованием все компоненты векторного потенциала обратить в нуль. Это возможно только тогда, когда пространственный тензор вращения $\omega_{\mu\nu}$ везде равен нулю.

Однако в случае общих преобразований (9.243) мы можем определить бесчисленное множество систем S' , в которых

$$g'_{\mu 4} = g'_{4\mu} = 0; \quad \gamma'_i = 1. \quad (9.245)$$

Проще всего это демонстрируется с помощью следующих геометрических рассуждений. Заметим прежде всего, что из (9.245) имеем

$$g'^{\mu 4} = 0; \quad g'^{44} = (g'_{44})^{-1}; \quad (9.246)$$

$$g'^{il} g'_{4l} = g'^{i4} g'_{44} = \delta_4^i. \quad (9.247)$$

Кроме того, вследствие (9.245) и (9.246) система S' времениортогональна; это означает, что мировые линии точек системы отсчета R' , т. е. временные линии

$$x'^{\mu} = \text{const}, \quad (9.248)$$

везде ортогональны гиперповерхностям

$$f^4(x) = x'^4 = \text{const}. \quad (9.249)$$

Поэтому любой линейный элемент $dx'^i = (dx'^{\mu}, 0)$, лежащий в касательной плоскости к гиперповерхности (9.249) в точке P , ортогонален линейному элементу $\delta x'^i = (0, 0, 0, \delta x'^4)$, направленному по касательной к кривой (9.248), проходящей через точку P .

Теперь можно следующим образом сконструировать систему S' типа (9.245), (9.246). Выберем произвольную функцию $f^4(x)$ так, чтобы она удовлетворяла единственному условию

$$g^{lm} (\partial f^4 / \partial x^l) \cdot (\partial f^4 / \partial x^m) = (\text{grad}_l f^4) (\text{grad}^l f^4) < 0. \quad (9.250)$$

Тогда уравнения (9.249) при всех возможных значениях постоянных x'^4 определяют в 4-пространстве семейство пространственноподобных поверхностей Σ . Теперь построим кривые N , нормальные к этому семейству. Они образуют трехпараметрическое семейство времениподобных кривых N , поскольку вектор dx^l , касательный к кривой N , проходящей через некоторую точку (x) , пропорционален $\text{grad}^l f^4(x)$, являющемуся в соответствии с (9.250) времениподобным вектором. Если кривые N не пересекаются, то через каждую точку 4-пространства проходит лишь одна поверхность Σ и одна кривая N . Каждая поверхность Σ определяется постоянным значением x'^4 в (9.249). Аналогично кривые N , составляющие трехпараметрическое семейство нормальных кривых, характеризуются тремя произвольными непрерывными параметрами x'^{μ} . Следовательно, каждая точка P в 4-пространстве характеризуется четырьмя числами (x'^{μ}, x'^4) , соответствующими кривой N и поверхности Σ , проходящим через эту точку. Таким образом, мы получили систему S' координат (x'^i) , которая является времениортогональной системой типа (9.245). Если несколько кривых N пересекаются, то точки пересечения являются сингулярными точками системы S' , но вне конечной окрестности этих точек система S' — регулярная. В последующем изложении мы часто будем использовать такие системы ввиду упрощений, возникающих благодаря отсутствию в них векторного потенциала.

При заданных функциях $f^4(x)$ система координат S' определяется с точностью до чисто пространственных преобразований (x'^{μ}) . Поэтому параметры (x'^{μ}) , характеризующие каждую кривую N , могут быть выбраны совершенно произвольно. В качестве таких параметров можно выбрать координаты

наты (x^μ) точки пересечения кривой N с поверхностью Σ (9.249), соответствующей $x'^4 = 0$, т. е.

$$x'^\mu = x^\mu \text{ при } x'^4 = 0. \quad (9.251)$$

В этом случае система S' полностью определяется выбором функции $f^4(x)$. Из формулы преобразования (9.36) для тензора имеем

$$g'^{44} = (\partial f^4 / \partial x^i) (\partial f^4 / \partial x^m) g^{im} = (\text{grad}_i f^4) (\text{grad}^i f^4); \quad (9.252)$$

$$g'^{\mu 4} = (\partial f^\mu / \partial x^i) (\partial f^4 / \partial x^m) g^{im} = (\partial f^\mu / \partial x^i) (\text{grad}^i f^4). \quad (9.253)$$

Таким образом, функции $f^\mu(x)$ являются решением системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка с граничными условиями (9.251), согласно которым

$$f^\mu(x) = x^\mu \quad (9.254)$$

на гиперповерхности

$$f^4(x) = 0. \quad (9.255)$$

Произвольность в выборе определяющих параметров кривых N и функций $f^4(x)$ показывает, что для данного метрического тензора в S существует бесконечное количество времениортогональных систем S' .

Самое простое преобразование $S \rightarrow S'$ получается при следующем выборе функции $f^4(x)$:

$$f^4(x) = x^4. \quad (9.256)$$

Тогда формула (9.243) при $i = 4$ имеет вид

$$x'^4 = x^4 \quad (9.257)$$

и преобразование заключается лишь в изменении системы отсчета; при этом компонента g'^{44} метрического тензора преобразуется как скаляр. Фактически из (9.252) и (9.256) имеем

$$g'^{44} = \delta_i^4 \delta_m^4 g^{im} = g^{44}. \quad (9.258)$$

Из данного геометрического рассмотрения следует с очевидностью существование целого класса систем S' . Однако для определения функций f^4 в (2.243) или функций $\tilde{f}^i(x')$ в обратных преобразованиях

$$x^i = \tilde{f}^i(x'^k) \quad (9.259)$$

при заданном $g_{ik}(x)$ в S более удобно и физически более поучительно рассмотреть движение точек отсчета системы R' относительно S в трехмерном физическом пространстве. Для случая (9.157), когда временная переменная не изменяется, это движение можно описать движением (безмассовой) жидкости, которая в любой точке (x^μ) в R и в любой момент времени t движется со скоростью

$$u^\mu(x^\mu, t) = dx^\mu / dt = c g^{\mu 4} / g^{44}. \quad (9.260)$$

Поскольку правые части в (9.260) — известные функции от x^μ и t , дифференциальные уравнения (9.260) вместе с начальными условиями полностью определяют движение каждой «частицы» жидкости. Легко видеть, что скорость u^μ всегда меньше скорости света, поскольку если dx^i — линейный элемент мировой линии частицы, т. е.

$dx^i = (u^i dt, c dt) = c dt g^{i4} / g^{44}$, то имеем $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = c^2 dt^2 g_{ih} g^{i4} g^{k4} / (g^{44})^2 = c^2 dt^2 / g^{44} < 0$, так что dx^i — времениподобный вектор. Следовательно, различные частицы жидкости могут быть выбраны в качестве точек отсчета в допустимой системе отсчета R' (см. § 8.7).

Пусть теперь

$$x^\mu = \tilde{f}^\mu(x_0^\nu, t) \quad (9.261)$$

— решение системы уравнений (9.260) при начальных условиях

$$\tilde{f}^\mu(x_0^\nu, 0) = x_0^\mu. \quad (9.262)$$

Оно описывает движение частицы из начальной точки (x_0^ν) при $t = 0$. Если заменить теперь аргументы x_0^ν и t в функциях \tilde{f}^μ в (9.261) на x'^μ и $t' = x'^4/c$ соответственно, то уравнения

$$\left. \begin{aligned} x^\mu &= \tilde{f}^\mu(x'^\nu, t'); \\ x^4 &= x'^4 \end{aligned} \right\} \quad (9.263)$$

будут представлять собой искомые формулы преобразований. В самом деле, во-первых, (9.263) соответствует (9.257) и начальным условиям (9.251), так как при $x'^4 = 0$ с учетом (9.262) имеем

$$x^\mu = \tilde{f}^\mu(x'^\nu, 0) = x'^\mu. \quad (9.264)$$

Во-вторых, с помощью (9.23), (9.261) и (9.260) получим

$$\left. \begin{aligned} \partial x^\mu / \partial x'^4 &= (1/c) \partial \tilde{f}^\mu(x'^\nu, t') / \partial t' = g^{\mu 4} / g^{44}; \\ \partial x^4 / \partial x'^i &= \delta_i^4. \end{aligned} \right\} \quad (9.265)$$

В результате с учетом (9.7) имеем

$$\begin{aligned} g'_{\mu 4} &= (\partial x^i / \partial x'^\mu) (\partial x^m / \partial x'^4) g_{im} = (\partial x^\lambda / \partial x'^\mu) \{ (g^{\beta 4} / g^{44}) g_{\lambda\beta} + g_{\lambda 4} \} = \\ &= (\partial x^\lambda / \partial x'^\mu) (g^{m 4} g_{\lambda m}) / g^{44} = 0. \end{aligned} \quad (9.266)$$

Таким образом, мы получили преобразование, приводящее к времениортогональной системе координат S' . Кроме того, система S' обладает тем свойством, что во всех точках $g'^{44} = g^{44}$. С другой стороны, пространственные компоненты метрического тензора имеют вид

$$g'_{\mu\nu} = (\partial x^i / \partial x'^\mu) (\partial x^m / \partial x'^\nu) g_{im} = [\partial \tilde{f}^\lambda(x'^\mu, t') / \partial x'^\mu] [\partial \tilde{f}^\alpha(x'^\nu, t') / \partial x'^\nu] g_{\lambda\alpha}. \quad (9.267)$$

Поэтому $g'_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}$ лишь при

$$x^4 = x'^4 = 0. \quad (9.268)$$

В общем случае $g'_{\mu\nu}$ — более сложные функции от времени, даже если $g_{\mu\nu}$ от времени и не зависят.

Рассмотренное преобразование не определяет однозначно все свойства функций $f^i(x)$ и $\tilde{f}^i(x')$ в (9.243) и (9.259). Поэтому соответствующим выбором этих функций можно определить целый класс систем S' , в которых скалярный и векторный потенциалы равны нулю, т. е.

$$\left. \begin{aligned} \gamma'_\mu &= \chi = 0; \\ g'_{\mu 4} &= 0; \quad g'^{44} = -1. \end{aligned} \right\} \quad (9.269)$$

Координаты в таких системах называются *гауссовыми* координатами.

Упражнение

Показать, что такую систему можно получить:

1) полагая, что точки отсчета x'^μ в R' — свободно падающие частицы со следующими начальными координатами и скоростями:

$$x^\mu = x'^\mu; \quad u^\mu(x'^\nu, 0) = c g^{\mu 4} / g^{44}, \quad (9.270)$$

где $t = t' = 0$;

2) используя в S' в качестве координатных часов стандартные часы, движущиеся вместе с точками отсчета.

Доказательство

Движение точек отсчета (x'^μ) описывается уравнениями (8.96) или уравнениями

$$DV^i/d\tau \equiv dV^i/d\tau + \Gamma_{kl}^i V^k V^l = 0, \quad (9.271)$$

где $V^i = dx^i/d\tau$ — 4-скорость, а τ — собственное время, т. е. координатное время t' в S' . В соответствии с (9.270) начальная 4-скорость V_0^i равна:

$$V_0^i = -c [g^{i4} / (-g^{44})^{1/2}]_0, \quad (9.272)$$

где []₀ указывает, что функция в скобках берется при $x^4 = 0$. Пусть

$$x^i = \check{f}^i(x'^\nu, \tau) = \check{f}^i(x'^\nu, t') \quad (9.273)$$

решение системы (9.271) с начальными условиями

$$\check{f}^i(x'^\nu, 0) = \left\{ \begin{array}{l} x'^\mu \text{ при } i = \mu \\ 0 \text{ при } i = 4; \end{array} \right\} \quad (9.274)$$

$$\partial \check{f}^i(x'^\nu, 0) / \partial t' = U_0^i = -c [g^{i4} / (-g^{44})^{1/2}]_0.$$

Тогда рассматриваемую задачу можно сформулировать следующим образом: показать, что преобразование

$$x^i = \check{f}^i(x'^\nu, x'^4/c) \quad (9.275)$$

приводит к гауссовой системе координат. По тем же соображениям, что использовались при выводе (9.266), из (9.274) следует, что при $x'^4 = x^4 = 0$

$$g'_{\mu 4}(x'^\nu, 0) = 0. \quad (9.276)$$

Кроме того, при всех значениях (x'^i)

$$g'_{44} = -1. \quad (9.277)$$

Это вытекает из формулы (8.66), поскольку t' — время, показываемое стандартными часами, покоящимися в R' . Наконец, легко видеть, что производная по времени от $g'_{\mu 4}$ везде равна нулю, т. е.

$$\partial g'_{\mu 4} / \partial x'^4 = 0. \quad (9.278)$$

Это следует из уравнения (9.271), если его записать в координатах системы S' , поскольку скорость V'^i покоящейся в S' частицы равна, очевидно, $V'^i = c\delta_4^i$, $dV'^i/d\tau = 0$. Поэтому $\Gamma_{44}^i = 0$, что вместе с (9.277) приводит к (9.278). Из (9.276) — (9.278) видно, что преобразования (9.275) определяют систему (9.269).

Геометрически систему типа (9.269) в 4-пространстве можно представить следующим образом. Поверхности (9.249) — параллельные, т. е. расстояние между двумя соседними поверхностями Σ , соответствующими значениям x'^4 и $(x'^4 + dx'^4)$, такое же, что и между всеми соответствующими точками на обеих поверхностях, и равно dx'^4 . Кроме того, кривые N , нормальные к семейству поверхностей Σ , т. е. мировые линии точек отсчета $x'^4 = \text{const}$ — времени-подобные геодезические.

В соответствии с (9.252) и (9.269) функция $f^4(x)$ в (9.243) является решением следующего дифференциального уравнения в частных производных:

$$(\text{grad}_i f^4)(\text{grad}^i f^4) = g^{ik}(\partial f^4 / \partial x^i)(\partial f^4 / \partial x^k) = -1. \quad (9.279)$$

В примере, рассмотренном в упражнении, функция $f^4(x)$ обладала тем специальным свойством, что при всех x^μ она равнялась нулю, когда $x^4 = 0$. Однако это не необходимое условие. Любое решение (9.279) можно использовать для построения гауссовой системы.

Вместо того, чтобы придавать четырем компонентам метрического тензора определенные значения, можно потребовать, чтобы компоненты метрического тензора удовлетворяли четырем дифференциальным условиям. Важным примером таких координатных условий являются соотношения де Дондера

$$\{(-g)^{1/2} g^{ik}\}_{,k} = 0, \quad (9.280)$$

значительно упрощающие многие вычисления в ОТО. Системы координат (x^i) , удовлетворяющие условиям де Дондера, были названы Фоком [93] *гармоническими* координатами. Он утверждал, что такие координаты имеют особое физическое значение. Мы не присоединяемся к такой точке зрения, выделяющей преимущественный класс координатных систем. В соответствии с общим принципом относительности, все системы с одинаковым основанием применимы для нашего описания природы. Это дает нам в каждом случае возможность выбора такой системы координат, которая обеспечивает наиболее простое описание рассматриваемого частного физического явления.

Упражнение

Показать, что четыре функции $f^i(x^k)$ в преобразовании (9.243), связывающие произвольную систему S с системой S' гармонических координат, являются решениями уравнения

$$\square \psi(x) = 0, \quad (9.281)$$

где \square — ковариантный оператор Д'Аламбера (9.197).

Другим полезным примером координатных условий являются соотношения Эйнштейна:

$$g^{kl} \partial g_{kl} / \partial x^i = 0. \quad (9.282)$$

В соответствии с (9.126) и (9.127) их можно представить в виде $\Gamma_{ik}^k = 0$, $\partial g / \partial x^i = 0$, т. е. $g = \text{const}$. Постоянную всегда можно положить равной -1 . Поэтому условия (9.282) эквивалентны требованию, чтобы определитель g метрического тензора везде был равен -1 ;

$$g = -1. \quad (9.282')$$

§ 9.16. Калибровочно-инвариантные величины. Стандартные 4-тензоры.

В предыдущих параграфах мы рассматривали множество величин, которые для полной группы общих пространственно-временных преобразований являлись векторами и тензорами. Однако часто приходится иметь дело с величинами, которые ведут себя как тензоры при более ограниченной группе преобразований. Например, упоминавшиеся в § 9.5 аффинные тензоры являются тензорами лишь относительно линейных преобразований. Теперь исследуем подгруппу преобразований (8.59), названных в § 8.13 калибровочными преобразованиями. Чтобы избежать ненужных усложнений, рассмотрим лишь такие преобразования, для которых $\alpha_4^4 = \partial x'^4 / \partial x^4 > 0$, т. е. откажемся от использования часов, идущих в обратном направлении. Таким образом, рассматриваемые калибровочные преобразования имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x'^{\mu} &= x'^{\mu}(x^{\nu}); \quad x'^4 = x'^4(x^i); \\ \alpha_4^{\mu} &= \tilde{\alpha}_4^{\mu} = 0; \quad \alpha_4^4 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.283)$$

При таких преобразованиях система отсчета R , соответствующая системе координат S , не изменяется, так как преобразования (9.283) просто вводят другое упорядочивание точек отсчета и изменяют скорость и установку хода координатных часов. Калибровочные преобразования (9.283) могут быть составлены из чисто пространственного преобразования

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}); \quad x'^4 = x^4, \quad (9.284)$$

которому предшествовало произвольное изменение масштаба времени

$$x'^{\mu} = x^{\mu}; \quad x'^4 = x'^4(x^i). \quad (9.285)$$

При преобразованиях (9.284) пространственные компоненты A^{μ} и A_{μ} 4-вектора $A_i = g_{ik} A^k$ преобразуются как контравариантные и ковариантные компоненты 3-вектора соответственно, но в общем случае они являются компонентами двух различных 3-векторов, поскольку A_{μ} равно $\gamma_{\mu\nu} A^{\nu}$ лишь в частном случае. Наша цель — построить калибровочно-инвариантные величины. Для этого удобно в каждой системе координат S ввести следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^i &= \delta_{i4} / (-g_{44})^{1/2} = \{0, 0, 0, (1 + 2\chi/c^2)^{-1/2}\}; \\ \Gamma_i &= g_{ik} \Gamma^k = g_{i4} / (-g_{44})^{1/2} = \{\gamma_{\mu}, -(1 + 2\chi/c^2)^{1/2}\}, \end{aligned} \right\} \quad (9.286)$$

где γ_μ и χ — гравитационные потенциалы (8.63), (8.109). Величины Γ_i связаны, очевидно, с величинами σ_i , определенными в (8.125), соотношениями

$$\Gamma_i = (-g_{44})^{1/2} \sigma_i = -\Gamma_4 \sigma_i; \quad \sigma_i = \Gamma^4 \Gamma_i = (\sigma_\mu, -1). \quad (9.287)$$

Закон преобразования для величин (9.286) очень сложен, но для группы калибровочных преобразований Γ^i и Γ_i являются контравариантными и ковариантными компонентами 4-вектора. Это легко показать, если вспомнить, что калибровочные преобразования не изменяют систему отсчета. Каждая система отсчета R в 4-пространстве описывается семейством мировых линий точек отсчета $x^\mu = \text{const}$ или соответствующим полем касательных времениподобных единичных векторов, направленных в будущее. Эти единичные векторы равны V_R^i/c , где V_R^i — 4-скорости точек отсчета системы R . Тогда Γ^i и Γ_i являются компонентами этих единичных векторов в любой внутренней системе координат S в R , поскольку пространственные компоненты Γ^μ равны нулю и

$$\Gamma_i \Gamma^i = \Gamma_4 \Gamma^4 = -1. \quad (9.288)$$

Поэтому, вследствие того, что мировые линии точек отсчета при калибровочных преобразованиях не меняются, величины Γ_i и Γ^i должны преобразовываться в этом случае как компоненты (фиксированного) 4-векторного поля V_R^i/c . Это легко показать и непосредственно, пользуясь определениями (9.286) и формулами преобразования (9.12) для g_{ik} в частном случае (9.283). Величины, подобные Γ_i , которые ведут себя при калибровочных преобразованиях как 4-тензоры, будем называть *ограниченными* 4-тензорами.

Из любого векторного поля с компонентами A^i и $A_i = g_{ik} A^k$ можно построить калибровочно-инвариантную величину:

$$[A] \equiv A^i \Gamma_i = A_i \Gamma^i = A_4 \Gamma^4 = A_4 (-g_{44})^{-1/2}. \quad (9.289)$$

Поскольку Γ_i — ограниченный 4-вектор, скалярное произведение (9.289) — инвариант относительно преобразований (9.283). Проектируя вектор A_i на гиперплоскость, ортогональную к Γ_i , получим ограниченный 4-вектор с компонентами

$$\left. \begin{aligned} A_\perp^i &= A^i + (A_k \Gamma^k) \Gamma^i = A^i + \delta_{i4} A_4 (\Gamma^4)^2; \\ A_\perp^i &= A_i + (A_k \Gamma^k) \Gamma_i = A_i + A_4 \Gamma^4 \Gamma^i. \end{aligned} \right\} \quad (9.290)$$

Этот спроектированный вектор, естественно, ортогонален Γ^i :

$$A_\perp^i \Gamma_i = A_\perp^i \Gamma^i = A_\perp^4 \Gamma^4 = 0. \quad (9.291)$$

Следовательно,

$$A_\perp^4 = 0; \quad (9.292)$$

$$A_\perp^4 = -(\Gamma_4)^{-1} \Gamma_\mu A_\perp^\mu = \sigma_\nu A_\perp^\nu. \quad (9.293)$$

В соответствии с (9.290) пространственные составляющие спроектированного 4-вектора имеют вид

$$A_\perp^\mu = A^\mu; \quad A_\perp^\mu = A_\mu + \Gamma^4 \Gamma_\mu A_4. \quad (9.294)$$

При калибровочных преобразованиях (9.283), когда $\alpha_\mu^\mu = 0$, они преобразуются как компоненты 3-вектора, так как с учетом (2.292) имеем

$$\left. \begin{aligned} A_\perp'^\mu &= \alpha_k^\mu A_\perp^k = \alpha_\nu^\mu A_\perp^\nu; \\ A_\perp'^\mu &= \check{\alpha}_\mu^k A_\perp^k = \check{\alpha}_\mu^\nu A_\perp^\nu. \end{aligned} \right\} \quad (9.295)$$

Величины, подобные A_\perp^i и A_\perp^μ , которые не изменяются при временных преобразованиях (9.285) и ведут себя как 3-векторы при чисто пространственных пре-

образованиях (9.284), будем называть калибровочно-инвариантными 3-векторами. Из (9.290) и (9.293) имеем далее

$$A_{\perp}^{\perp} = g_{\mu k} A_{\perp}^k = g_{\mu\nu} A_{\perp}^{\nu} + \gamma_{\mu} \gamma_{\nu} A_{\perp}^{\nu} = \gamma_{\mu\nu} A_{\perp}^{\nu}, \quad (9.296)$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — пространственный метрический тензор (8.64). Итак, получаем теорему о том, что пространственные компоненты спроектированного 4-вектора являются компонентами одного и того же калибровочно-инвариантного 3-вектора.

Из величин (9.289), (9.284) можно собразовать две 4-компонентные величины \bar{A}^i и \bar{A}_i :*

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}^i &= (A_{\perp}^{\mu}, -[A]) = (A^{\mu}, -\Gamma_k A^k); \\ \bar{A}_i &= (A_{\mu}^{\perp}, [A]) = (A_{\mu} + \Gamma^4 \Gamma_{\mu}, A_4 \Gamma^4 A_4). \end{aligned} \right\} \quad (9.297)$$

В каждой точке 4-пространства они линейно выражаются друг через друга с помощью следующих соотношений:

$$\bar{A}_i = \bar{g}_{ik} \bar{A}^k; \quad \bar{A}^i = \bar{g}^{ik} \bar{A}_k, \quad (9.298)$$

где \bar{g}_{ik} и \bar{g}^{ik} — симметричные 4×4 -матрицы с компонентами

$$\left. \begin{aligned} \bar{g}_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\nu}; \quad \bar{g}_{i4} = \bar{g}_{4i} = -\delta_{i4} = \eta_{i4}; \\ \bar{g}^{\mu\nu} &= \gamma^{\mu\nu}; \quad \bar{g}^{i4} = \bar{g}^{4i} = -\delta_{i4} = \eta^{i4}. \end{aligned} \right\} \quad (9.299)$$

Это непосредственно следует из (9.297), (9.296) и (9.98'). Кроме того,

$$\bar{g}^{il} \bar{g}_{kl} = \bar{g}^{li} \bar{g}_{lk} = \delta_k^i. \quad (9.300)$$

Формально \bar{g}_{ik} аналогичны метрике инерциальной системы с криволинейными пространственными координатами; однако следует помнить, что здесь $\gamma_{\mu\nu}$ могут зависеть также от времени и описывают в общем случае неевклидово трехмерное пространство.

Таким образом, любому векторному полю A_i мы можем сопоставить четырехкомпонентное поле \bar{A}_i , которое в любой точке 4-пространства связано с компонентами векторного поля линейными соотношениями

$$\bar{A}^i = \Pi_k^{[i]} A^k; \quad \bar{A}_i = \Pi_{[i]}^k A_k. \quad (9.301)$$

Сравнивая с (9.297), находим, что

$$\left. \begin{aligned} \Pi_k^{[i]} &= \delta_{ik} - \delta_{i4} (\delta_{k4} + \Gamma_k); \\ \Pi_{[i]}^k &= \delta_{ik} + (\delta_{i4} + \Gamma_i) \Gamma^4 \delta_{k4}. \end{aligned} \right\} \quad (9.302)$$

Из (9.298) и (9.301) непосредственно следует, что эти Π -функции удовлетворяют соотношениям

$$\Pi_k^{[i]} = \bar{g}^{il} \Pi_{[l]}^m g_{mk}; \quad \Pi_{[i]}^k = \bar{g}_{il} \Pi_m^{[l]} g^{mk}, \quad (9.303)$$

т. е. индексы в скобках опускаются и поднимаются с помощью матрицы (9.299), а другие индексы являются тензорными индексами. Кроме того, из (9.302) имеем

$$\Pi_i^{[j]} \Pi_{[k]}^i = \Pi_{[l]}^i \Pi_k^{[l]} = \delta_k^j. \quad (9.304)$$

Следовательно, инверсия соотношений (9.301) дает

$$A^i = \Pi_{[k]}^i \bar{A}^k; \quad A_i = \Pi_i^{[k]} \bar{A}_k. \quad (9.305)$$

* Величины A_i тесно связаны, но не тождественны «физическим» компонентам, введенным Шмутцером [219, 220].

Величины \bar{A}^i, \bar{A}_i , конечно, не 4-векторы, но, как мы позже увидим, они имеют во многих случаях более простую физическую интерпретацию, чем соответствующие 4-векторы. Более того, в некотором смысле их трансформационные свойства проще. Самое важное, что они инвариантны относительно калибровочных преобразований, т. е. их пространственные компоненты \bar{A}^μ, \bar{A}_μ преобразуются как компоненты 3-вектора, а их временные компоненты $\bar{A}^4 = -\bar{A}_4$ при таких преобразованиях не меняются. Следовательно, если A^i — вектор в точке P 4-пространства, а $\check{\check{S}}(P)$ локальная псевдодекартова система координат (9.99), то в этой системе компоненты соответствующей величины $\check{\check{A}}^i$ имеют вид

$$\check{\check{A}}^i = \{e_{(v)}^{\mu} [R] \bar{A}^\nu, \bar{A}^4\}. \quad (9.306)$$

Кроме того, поскольку согласно (9.92) $\check{g}_{ik}(P) = \eta_{ik}$,

$$\check{\check{\Gamma}}^i(P) = \delta_{i4}. \quad (9.307)$$

Это означает, что в $\check{\check{S}}(P)$ величины $\check{\check{A}}^i$ совпадают с компонентами соответствующего 4-вектора, т. е.

$$\check{\check{A}}^i = \check{A}^i. \quad (9.308)$$

От любой другой системы ($S' : R'$) мы также можем перейти к локальной системе $\check{S}'(P)$, образованной тетрадой $e_k^{(i)} [R']$. В соответствии с рассуждениями на стр. 227, преобразования от $\check{S}(\check{P})$ к $\check{S}'(P)$ являются преобразованиями Лоренца с коэффициентами A_k^i, \check{A}_i^k , определяемыми формулами (9.102). Поэтому с учетом (9.308) имеем

$$\check{\check{A}}'^i = A_k^i \check{\check{A}}^k. \quad (9.309)$$

Соотношения между компонентами $\check{\check{A}}'^i$ и \bar{A}'^i в системах $\check{S}'(P)$ и S' выражаются формулами, аналогичными (9.306). Соответствующие обратные соотношения имеют вид

$$\bar{A}'^i = \{e_{(v)}^{\mu} [R'] \check{\check{A}}'^\nu, \check{\check{A}}'^4\}. \quad (9.310)$$

Из (9.310), (9.309) и (9.306) видно, что в любой точке P преобразования величин \bar{A}^i являются преобразованиями (9.309) вместе с пространственными преобразованиями (9.306) и (9.310). Формально преобразования \bar{A}^i такие же, как и в СТО, когда обычные декартовы координаты заменяются пространственными криволинейными координатами. Величины \bar{A}_i и \bar{A}^i , связанные друг с другом соотношениями (9.298), будем называть контравариантными и ковариантными компонентами одного и того же *стандартного 4-вектора*.

Истинный вектор в римановом пространстве преобразуется в соответствии с формулой (9.15), (9.15')

$$A'^i = \alpha_k^i A^k; \quad A^i = \check{\alpha}_k^i A'^k, \quad (9.311)$$

где коэффициенты

$$\alpha_k^i = \partial x'^i / \partial x^k; \quad \check{\alpha}_k^i = \partial x^i / \partial x'^k \quad (9.312)$$

удовлетворяют соотношениям (9.11). Закон преобразования для соответствующего стандартного вектора можно записать в форме

$$\bar{A}'^i = \bar{\alpha}_k^i \bar{A}^k; \quad \bar{A}^i = \check{\bar{\alpha}}_k^i \bar{A}'^k, \quad (9.313)$$

где стандартные коэффициенты преобразования удовлетворяют соотношениям

$$\bar{\alpha}_i^i \bar{\alpha}_k^i = \bar{\alpha}_i^i \bar{\alpha}_k^i = \delta_k^i, \quad (9.314)$$

аналогичным (9.11). В соответствии с (9.301) и (9.305) оба типа коэффициентов связаны формулами

$$\bar{\alpha}_k^i = \Pi_i^{[i]} \alpha_m^i \Pi_{[k]}^m; \quad \check{\alpha}_k^i = \Pi_i^{[i]} \check{\alpha}_m^i \Pi_{[k]}^m, \quad (9.315)$$

где $\Pi_k^{[i]}$ и $\Pi_{[i]}^k$ — функции, полученные из (9.302) заменой Γ_i и Γ_i' в системе S' . С помощью соотношений, обратных (9.11), (9.304) и (9.314), формулы (9.315) можно переписать в виде

$$\Pi_k^{[i]} = \bar{\alpha}_i^i \Pi_m^{[i]} \check{\alpha}_k^m; \quad \Pi_{[i]}^k = \alpha_i^k \Pi_{[m]}^i \check{\alpha}_i^m. \quad (9.316)$$

Эти соотношения представляют собой закон преобразования для Π -функций. Для калибровочных преобразований (9.283) выражения (9.315) сводятся к

$$\bar{\alpha}_v^\mu = \alpha_v^\mu; \quad \check{\alpha}_v^\mu = \check{\alpha}_v^\mu; \quad \bar{\alpha}_4^i = \bar{\alpha}_4^i = \check{\alpha}_4^i = \check{\alpha}_4^i = \delta_{i4}, \quad (9.317)$$

так как пространственная часть стандартного 4-вектора является калибровочно-инвариантным 3-вектором, а временная часть не меняется при калибровочных преобразованиях. Для общих координатных преобразований $\bar{\alpha}_k^i$, $\check{\alpha}_k^i$ имеют более сложный вид, хотя и более простой, чем соответствующие коэффициенты α_k^i , $\check{\alpha}_k^i$. Согласно (9.306), (9.309), (9.310) коэффициенты $\bar{\alpha}_k^i$ состоят из лоренцевых коэффициентов A_k^i и коэффициентов вида (9.317), соответствующих простым калибровочным преобразованиям (см. также упражнение 2 в конце этого параграфа). Однако, в отличие от α_k^i и $\check{\alpha}_k^i$, определяемых формулами (9.312), стандартные коэффициенты $\bar{\alpha}_k^i$, $\check{\alpha}_k^i$ не имеют вида частных производных (за исключением тривиального случая чисто пространственных преобразований).

Пусть A^i и B^i — два произвольных вектора. С помощью (9.304), (9.305) и (9.298) их скалярное произведение можно записать в следующей форме:

$$A_i B^i = \Pi_i^{[i]} \Pi_{[m]}^i \bar{A}_i \bar{B}^m = \delta_{im} \bar{A}_i \bar{B}^m$$

или

$$A_i B^i = \bar{A}_i \bar{B}^i = g_{ik} \bar{A}^i \bar{B}^k. \quad (9.318)$$

Таким образом, скалярное произведение двух векторов равно скалярному произведению соответствующих стандартных векторов. Поскольку эта величина — инвариант из (9.313), имеем

$$\bar{g}_{ik} \bar{A}^i \bar{B}^k = g_{lm} \bar{A}^l \bar{B}^m = \bar{g}_{lm} \bar{\alpha}_i^l \bar{\alpha}_k^m \bar{A}^i \bar{B}^k = \bar{g}'_{ik} \bar{A}^i \bar{B}^k,$$

что для произвольных \bar{A}^i , \bar{B}^k приводит к преобразованиям

$$\bar{g}'_{ik} = \bar{\alpha}_i^l \bar{\alpha}_k^m \bar{g}_{lm}; \quad (9.319)$$

$$\bar{g}_{ik} = \bar{\alpha}_i^l \bar{\alpha}_k^m g'_{lm}. \quad (9.320)$$

Эти формулы совершенно аналогичны соответствующим формулам (9.12) для метрического тензора.

Используя (9.305), равенство (9.318) можно переписать как

$$\bar{g}_{ik} \bar{A}^i \bar{B}^k = g_{lm} A^l B^m = g_{lm} \Pi_{[i]}^l \Pi_{[k]}^m \bar{A}^i \bar{B}^k,$$

которое для произвольных \bar{A}^i , \bar{B}^k дает

$$\bar{g}_{ik} = \Pi_{[i]}^l \Pi_{[k]}^m g_{lm}. \quad (9.321)$$

Это соотношение между \bar{g}_{ik} и метрическим тензором легко получается непосредственно из (9.286), (9.289) и (9.302). С помощью (9.298), (9.319) и (9.313), (9.314) получим следующий закон преобразования для ковариантных компонент стандартного вектора:

$$\bar{A}'_i = \bar{\alpha}_i^k \bar{A}_k; \quad \bar{A}_i = \bar{\alpha}_i^k A'_k, \quad (9.322)$$

что аналогично (9.18), (9.19).

Величина \bar{g}_{ik} , которую будем называть стандартным метрическим тензором, является частным примером стандартного тензора ранга 2. Стандартный тензор ранга n определяется как n -индексная величина (с 4^n компонентами), которая по каждому индексу преобразуется как стандартный вектор, т. е. в соответствии с (9.313) для контравариантных индексов и с (9.322) для ковариантных. Связь между ковариантными и контравариантными компонентами дается с помощью правил (9.298) опускания и поднятия индексов. Таким образом, по аналогии с (9.36), (9.38) для стандартного тензора ранга 2 имеем

$$\bar{A}'^{ik} = \bar{\alpha}_i^l \bar{\alpha}_m^k \bar{A}^{lm}; \quad \bar{A}'_{ik} = \bar{\alpha}_i^l \bar{\alpha}_k^m \bar{A}_{lm}; \quad (9.323)$$

$$\bar{A}_{ik} = \bar{g}_{il} \bar{g}_{km} \bar{A}^{lm}; \quad \bar{A}^{ik} = \bar{g}^{il} \bar{g}^{km} \bar{A}_{lm}. \quad (9.324)$$

Все правила и соотношения, полученные в § 9.3 для тензорной алгебры, можно теперь непосредственно перенести в алгебру стандартных тензоров. Для этого достаточно в формулах в § 9.3 величины g_{ik} , α_i^k , $\check{\alpha}_k^i$ заменить на \bar{g}_{ik} , $\bar{\alpha}_k^i$, $\check{\alpha}_k^i$, соответственно. Сложение двух стандартных тензоров ранга n дает новый стандартный тензор того же ранга, а прямое произведение двух стандартных тензоров рангов m и n дает стандартный тензор ранга $(m + n)$. Наконец, свертка по верхнему и нижнему стандартным индексам уменьшает ранг стандартного тензора на 2. При этом стандартный тензор нулевого ранга является инвариантом и равен соответствующему тензору нулевого ранга, как это мы уже видели на примере скалярного произведения (9.318) двух векторов.

С помощью Π -функций (9.302) любому тензору применительно к каждому индексу можно сопоставить стандартный тензор этого же ранга. Например, тензору A_{ik} второго ранга можно сопоставить следующий стандартный тензор ранга 2:

$$\bar{A}_{ik} = \Pi_{[i]}^l \Pi_{[k]}^m A_{lm}; \quad \bar{A}^{ik} = \Pi_i^{[i]} \Pi_m^{[k]} A^{lm}. \quad (9.325)$$

Таким образом, (9.321) означает, что \bar{g}_{ik} является соответствующим сопряженным стандартным тензором для метрического тензора g_{ik} . Из (9.316) непосредственно следует, что величины \bar{A}_{ik} , \bar{A}^{ik} в (9.325) преобразуются в соответствии с формулами (9.323) для ковариантных и контравариантных компонент стандартного тензора. Кроме того, из (9.321) видно, что \bar{A}_{ik} и \bar{A}^{ik} связаны друг с другом соотношениями (9.324). Подставляя (9.299) в (9.324), получаем

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}_{\mu\nu} &= \gamma_{\mu\lambda} \gamma_{\nu\alpha} \bar{A}^{\lambda\alpha}; & \bar{A}_{\mu 4} &= -\gamma_{\mu\lambda} \bar{A}^{\lambda 4} = \gamma_{\mu\lambda} \bar{A}^{\lambda 4}; \\ \bar{A}_{4\nu} &= -\gamma_{\nu\alpha} \bar{A}^{4\alpha} = \gamma_{\nu\alpha} \bar{A}^{\mu 4}; & \bar{A}_{44} &= \bar{A}^{44}. \end{aligned} \right\} \quad (9.326)$$

Когда координатные преобразования являются калибровочными преобразованиями, стандартные коэффициенты сводятся к (9.317), а преобразования (9.323) принимают форму

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}'^{\mu\nu} &= \alpha_\lambda^\mu \alpha_\alpha^\nu \bar{A}^{\lambda\alpha}; & \bar{A}'_{\mu\nu} &= \check{\alpha}_\mu^\lambda \check{\alpha}_\nu^\alpha \bar{A}_{\lambda\alpha}; \\ \bar{A}'^{\mu 4} &= \alpha_\lambda^\mu \bar{A}^{\lambda 4}; & \bar{A}'_{\mu 4} &= \check{\alpha}_\mu^\lambda \bar{A}_{\lambda 4}; \\ \bar{A}'^{4\nu} &= \alpha_\alpha^\nu \bar{A}^{4\alpha}; & \bar{A}'_{4\nu} &= \check{\alpha}_\nu^\alpha \bar{A}_{4\alpha}; \\ \bar{A}'^{44} &= \bar{A}^{44} = \bar{A}'_{44} = \bar{A}_{44}. \end{aligned} \right\} \quad (9.327)$$

Это приводит к следующему обобщению теоремы на стр. 253 для векторов: пространственные компоненты стандартного тензора, т. е. $\bar{A}_{\mu\nu}$, $\bar{A}^{\mu\nu}$, являются компонентами одного и того же калибровочно-инвариантного 3-тензора, а $\bar{A}_{\mu 4}$ и $\bar{A}^{\mu 4}$ являются компонентами калибровочно-инвариантного 3-вектора. Аналогично $\bar{A}_{4\nu}$ и $\bar{A}^{\nu 4}$ также являются компонентами (в общем случае другого) калибровочно-инвариантного 3-вектора, а $\bar{A}_{44} = \bar{A}^{44}$ — калибровочный инвариант. Применительно к стандартному метрическому тензору (9.299) эта теорема утверждает, что $\gamma_{\mu\nu}$, $\gamma^{\mu\nu}$ — калибровочно-инвариантный 3-тензор, т. е. $\gamma_{\mu\nu}$ — инвариант относительно временных преобразований (9.285). Как уже упоминалось в § 8.13, это ясно из физических соображений, поскольку пространственный метрический тензор, в принципе, можно определить с помощью измерений стандартной измерительной линейкой (см. § 8.8) и результат таких измерений, естественно, не зависит от регулировки координатных часов.

В гауссовой системе координат, где $g_{i4} = -\delta_{i4}$, имеем $\Gamma^i = -\Gamma_i = \delta_{i4}$, $\Pi_k^{[i]} = \Pi_{[i]}^k = \delta_{ik}$ и компоненты тензора и соответствующего сопряженного стандартного тензора совпадают; но в любой другой системе координат оба вида тензоров имеют совершенно различные компоненты. Однако соотношения между тензорами и их сопряженными стандартными тензорами [см., например, (9.301), (9.325)] такие, что стандартный тензор, соответствующий тензору, образованному путем сложения, умножения и свертывания нескольких тензоров, равен стандартному тензору, полученному тем же образом из соответствующих стандартных тензоров. Следовательно, любое ковариантное соотношение между тензорами справедливо и для соответствующих сопряженных стандартных тензоров. В частности, стандартный тензор должен иметь те же свойства симметрии, что и соответствующий тензор. Кроме того, поскольку тензор нулевого ранга, т. е. инвариант, равен своему сопряженному стандартному тензору того же ранга, т. е.

$$\psi = \bar{\psi}, \quad (9.328)$$

линейный элемент ds^2 , выраженный через стандартные величины, имеет вид

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \bar{g}_{ik} \bar{dx}^i \bar{dx}^k. \quad (9.329)$$

Здесь

$$\bar{dx}^i = \Pi_k^{[i]} dx^k = (dx^\mu, -\Gamma_k dx^k) \equiv (dx^\mu, c \hat{dt}) \quad (9.330)$$

— стандартный вектор, соответствующий вектору dx^i . Стандартный временной дифференциал, определяемый формулой

$$\hat{dt} = \bar{dx}^4/c = -\Gamma_k dx^k/c, \quad (9.331)$$

в общем случае не полный дифференциал, т. е. он не является дифференциалом глобальной временной переменной \hat{t} , но линейный элемент, выраженный через \hat{dt} , имеет особенно простую форму. В действительности, из (9.229), (9.329), (9.330) имеем

$$ds^2 = \gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu - (d\bar{x}^4)^2 = d\sigma^2 - c^2 \hat{dt}^2. \quad (9.332)$$

Градиент скаляра ψ есть вектор с компонентами

$$A_i = \partial\psi/\partial x^i \equiv \partial_i \psi. \quad (9.333)$$

Сопряженный стандартный вектор в соответствии с (9.301) и (9.328) равен

$$\bar{A}_i = \bar{\partial}_i \bar{\psi} = \bar{\partial}_i \psi, \quad (9.334)$$

где $\bar{\partial}_i$ — дифференциальный оператор:

$$\bar{\partial}_i = \Pi_{[i]}^k \partial_k = \partial_i + (\delta_{i4} + \Gamma_i) \Gamma^4 \partial_4. \quad (9.335)$$

Его компоненты с учетом (9.287), (9.288) следующие:

$$\bar{\partial}_i = (\hat{\partial}_\mu, \Gamma^4 \partial / \partial x^4). \quad (9.336)$$

Здесь $\hat{\partial}_\mu$ — оператор (8.130). Из теоремы на стр. 253 следует, что $\hat{\partial}_\mu$ и $\Gamma^4 \partial / \partial x^4$ — калибровочно-инвариантные операторы.

Если A — ограниченный тензор, то соответствующая сопряженная величина, получаемая по формулам (9.301) и (9.325), является *ограниченным стандартным тензором*, т. е. стандартным тензором относительно лишь калибровочных преобразований. Такие величины будем выделять «шляпкой» вместо черточки, которой обозначаются полные стандартные тензоры. Тривиальный пример — сопряженный стандартный вектор ограниченного 4-вектора Γ^l . Он имеет постоянные компоненты

$$\hat{\Gamma}^i = \Pi_k^{[i]} \Gamma^k = \delta_{i4}; \quad \hat{\Gamma}^i = \Pi_{[i]}^k \Gamma_l = \delta_{i4} = \bar{g}_{i4}. \quad (9.337)$$

Более важный пример дает ограниченный антисимметрический тензор

$$\Omega_{ik} = c(\Gamma_{k,i} - \Gamma_{i,k})/2 = c(\partial_i \Gamma_k - \partial_k \Gamma_i)/2 \quad (9.338)$$

и его сопряженный ограниченный стандартный тензор

$$\begin{aligned} \hat{\Omega}_{ik} &= \Pi_{[i]}^l \Pi_{[k]}^m (c/2) (\partial_l \Gamma_m - \partial_m \Gamma_l) = (c/2) (\Pi_{[k]}^l \bar{\partial}_i \Gamma_l - \Pi_{[i]}^l \bar{\partial}_k \Gamma_l) = \\ &= (c/2) \Gamma_l (\bar{\partial}_i \Pi_{[k]}^l - \bar{\partial}_k \Pi_{[i]}^l). \end{aligned} \quad (9.339)$$

Последнее равенство следует из (9.337), поскольку обычное правило дифференцирования произведения справедливо и для оператора $\bar{\partial}_i$. Кроме того, из (9.302) имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\partial}_i \Pi_{[k]}^l &= \delta_{i4} \bar{\partial}_i \sigma_k + \delta_{k4} \delta_{i4} \bar{\partial}_i \Gamma^4; \\ \bar{\partial}_i \Pi_{[l]}^{[k]} &= \delta_{k4} \bar{\partial}_i \Gamma_l, \end{aligned} \right\} \quad (9.340)$$

где σ_i определяется из (9.287). Следовательно,

$$\hat{\Omega}_{ik} = (c^*/2) (\bar{\partial}_i \sigma_k - \bar{\partial}_k \sigma_i) + (c\Gamma^4/2) (\delta_{k4} \bar{\partial}_i \Gamma_4 - \delta_{i4} \bar{\partial}_k \Gamma_4). \quad (9.341)$$

Здесь мы использовали соотношение

$$\Gamma_4 \bar{\partial}_i \Gamma^4 + \Gamma^4 \partial_i \Gamma_4 = 0, \quad (9.342)$$

вытекающее из (9.288).

Пространственная часть в (9.341) является, очевидно, тензором пространственных вращений (9.135), т. е.

$$\hat{\Omega}_{\mu\nu} = \omega_{\mu\nu}. \quad (9.343)$$

Поэтому, согласно теореме на стр. 257, $\omega_{\mu\nu}$ должен быть калибровочно-инвариантным 3-тензором в соответствии со своим физическим смыслом (см. упражнение в § 9.6). Оставшиеся ненулевые компоненты $\hat{\Omega}_{ik}$ равны:

$$\hat{\Omega}_{\mu 4} = -\hat{\Omega}_{4\mu} = (c\Gamma^4/2) (\Gamma_{4,\mu} - \Gamma_{\mu,4}). \quad (9.344)$$

По той же теореме величина

$$\hat{a}_\mu \equiv 2c\hat{\Omega}_{\mu 4} = c^2 \Gamma^4 (\Gamma_{4,\mu} - \Gamma_{\mu,4}) \quad (9.345)$$

представляет собой калибровочно-инвариантный 3-вектор.

Все дифференциальные операторы в § 9.10 имеют свои сопряженные аналоги в стандартном тензорном анализе. Мы уже рассмотрели сопряженный

оператор градиента. Аналогично мы можем определить ковариантное дифференцирование стандартных тензорных полей, дивергенцию и ротор стандартных векторов, параллельный перенос стандартных векторов и т. д. В упражнении 1 этого параграфа приведены соответствующие формулы. Здесь мы рассмотрим лишь стандартный аналог абсолютной производной вектора. Как и в § 9.8, введем векторное поле $A_i(\lambda)$, определенное на кривой $x^i = x^i(\lambda)$ с инвариантным параметром λ . Абсолютная производная от A_i есть вектор (9.133):

$$DA_i/d\lambda = dA_i/d\lambda - A^l \Gamma_{l, ik} U^k; \quad U^k = dx^k/d\lambda. \quad (9.346)$$

Соответствующий сопряженный стандартный вектор

$$\begin{aligned} \overline{DA}_i/d\lambda &\equiv \overline{D}\overline{A}_i/d\lambda = \Pi_{[i]}^r (dA_r/d\lambda - A^t \Gamma_{t, rs} U^s) = \\ &= d\overline{A}_i/d\lambda - A^t (g_{tr} \partial_s \Pi_{[i]}^r + \Pi_{[i]}^r \Gamma_{t, rs}) U^s \end{aligned} \quad (9.347)$$

можно представить в форме

$$\overline{D}\overline{A}_i/d\lambda = d\overline{A}_i/d\lambda - \overline{A}^l \tilde{\Gamma}_{l, ik} \overline{U}^k, \quad (9.348)$$

где

$$\tilde{\Gamma}_{l, ik} = \bar{g}_{lm} \Pi_r^{[m]} \Pi_{[k]}^s \partial_s \Pi_{[i]}^r + \Pi_{[l]}^t \Pi_{[i]}^r \Pi_{[k]}^s \Gamma_{t, rs}. \quad (9.349)$$

В стандартном векторном анализе величины $\tilde{\Gamma}_{l, ik}$ играют ту же роль, что и символы Кристоффеля в обычном векторном анализе. В соответствии с (9.77) символы Кристоффеля равны

$$\Gamma_{t, rs} = (\partial_s g_{tr} + \partial_r g_{ts} - \partial_t g_{rs})/2. \quad (9.350)$$

Поэтому из (9.335), (9.321) и (9.304) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{l, ik} &= \bar{\Gamma}_{l, ik} - (1/2) \{ g_{tr} \bar{\partial}_k (\Pi_{[l]}^t \Pi_{[i]}^r) + g_{ts} \bar{\partial}_i (\Pi_{[l]}^t \Pi_{[k]}^s) - \\ &- g_{rs} \bar{\partial}_l (\Pi_{[i]}^r \Pi_{[k]}^s) \} - \bar{g}_{lm} \Pi_{[i]}^r \bar{\partial}_k \Pi_{[r]}^{[m]}, \end{aligned} \quad (9.351)$$

где

$$\bar{\Gamma}_{l, ik} = (\bar{\partial}_k \bar{g}_{li} + \bar{\partial}_i \bar{g}_{lk} - \bar{\partial}_l \bar{g}_{ik})/2 = \bar{\Gamma}_{lki} \quad (9.352)$$

получаются из символов Кристоффеля расстановкой черточек над всеми величинами в (9.350). Кроме того, снова используя (9.321), (9.304) и (9.340), последний член в фигурных скобках формулы (9.351) представим в виде

$$\begin{aligned} g_{rs} \bar{\partial}_l (\Pi_{[i]}^r \Pi_{[k]}^s) &= g_{rs} \Pi_{[i]}^r \bar{\partial}_l \Pi_{[k]}^s + g_{rs} \Pi_{[k]}^s \bar{\partial}_l \Pi_{[i]}^r = \\ &= \bar{g}_{im} \Pi_s^{[m]} \bar{\partial}_l \Pi_{[k]}^s + \bar{g}_{km} \Pi_r^{[m]} \bar{\partial}_l \Pi_{[i]}^r = -(\bar{g}_{im} \Pi_{[k]}^r + \bar{g}_{km} \Pi_{[i]}^r) \bar{\partial}_l \Pi_r^{[m]} = \\ &= (\bar{g}_{i4} \Pi_{[k]}^r + \bar{g}_{k4} \Pi_{[i]}^r) \bar{\partial}_l \Gamma_r. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения получаются и для других членов в фигурных скобках этой формулы. Подставляя эти выражения в (9.351), имеем

$$\tilde{\Gamma}_{l, ik} = \bar{\Gamma}_{l, ik} + (\hat{\Omega}_{li} \hat{\Gamma}_k + \hat{\Omega}_{lk} \hat{\Gamma}_i - \hat{\Omega}_{ik} \hat{\Gamma}_l)/c, \quad (9.353)$$

где снова использовали (9.340) и (9.337), (9.339).

Таким образом, величины $\tilde{\Gamma}_{i, kl}$, заменяющие символы Кристоффеля в стандартном тензорном анализе, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{i, kl} &= \bar{\Gamma}_{i, kl} + \hat{\Omega}_{ikl}; \\ \hat{\Omega}_{ikl} &\equiv (\hat{\Omega}_{ik} \hat{\Gamma}_l + \hat{\Omega}_{il} \hat{\Gamma}_k - \hat{\Omega}_{kl} \hat{\Gamma}_i)/c = -\hat{\Omega}_{kil}. \end{aligned} \right\} \quad (9.354)$$

Здесь $\hat{\Omega}_{ik}$ — ограниченный стандартный тензор (9.341) с компонентами (9.343) — (9.345). По аналогии с последней формулой (9.78)

$$\tilde{\Gamma}_{i, kl} + \tilde{\Gamma}_{k, il} = \bar{\Gamma}_{i, kl} + \bar{\Gamma}_{k, il} = \bar{\partial}_l \bar{g}_{ik}. \quad (9.355)$$

В то время как $\Gamma_{i,kl}$ и $\bar{\Gamma}_{i,kl}$ симметричны по k и l , $\hat{\Omega}_{ihl}$ и $\tilde{\Gamma}_{i,kl}$ — несимметричны.

Контравариантные компоненты стандартного вектора (9.348) равны

$$\bar{D}\bar{A}^i/d\lambda = \bar{g}^{im}\bar{D}\bar{A}_m/d\lambda = \bar{D}\bar{A}^i/d\lambda = \Pi_k^{i1}DA^k/d\lambda. \quad (9.356)$$

Используя те же соображения, что и при выводе формул (9.348), (9.354), из (9.346) легко получаем, что

$$\bar{D}\bar{A}^i/d\lambda = dA^i/d\lambda + \bar{A}^l\tilde{\Gamma}_{lk}^i\bar{U}^k, \quad (9.357)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{kl}^i &= \bar{g}^{im}\tilde{\Gamma}_{m,kl} = \bar{\Gamma}_{kl}^i + \hat{\Omega}^i{}_{kl}; \\ \bar{\Gamma}_{kl}^i &= \bar{g}^{im}\bar{\Gamma}_{m,kl}. \end{aligned} \right\} \quad (9.358)$$

По аналогии с (9.126) — (9.128) имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{\Gamma}_{ki}^i &= \bar{g}^{il}\bar{\Gamma}_{l,ki} = \bar{g}^{il}(\bar{\Gamma}_{l,ik} + \bar{\Gamma}_{i,lk})/2 = (1/2)\bar{g}^{il}\bar{\partial}_k\bar{g}_{il}; \\ \bar{\Gamma}_{ki}^i &= (-\bar{g})^{-1/2}\bar{\partial}_k(-\bar{g})^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (9.359)$$

Здесь $\bar{g} = |\bar{g}_{ik}|$ — определитель матрицы компонент стандартного метрического тензора, причем из (9.29) следует, что

$$\bar{g} = -\gamma, \quad (9.360)$$

где $\gamma = |\gamma_{\mu\nu}|$ — определитель матрицы компонент пространственного метрического тензора. Далее, из (9.321) находим, что

$$\bar{g} = \Pi g \Pi, \quad (9.361)$$

где

$$\Pi = |\Pi_{[i]}^k| = \Gamma^4 = (-g_{44})^{-1/2}$$

— определитель матрицы (9.302). Следовательно,

$$g = \Pi^{-2}\bar{g} = g_{44}\gamma. \quad (9.362)$$

С другой стороны, свертыванием величины $\hat{\Omega}^i{}_{kl}$ в выражении (9.358) для $\tilde{\Gamma}_{kl}^i$ получим ограниченный стандартный вектор с нулевой четвертой компонентой:

$$\hat{\Omega}^i{}_{ki} = -(2/c)\hat{\Omega}_{ki}\hat{\Gamma}^i = -(2/c)\hat{\Omega}_{k4} = (\hat{a}_v/c^2, 0). \quad (9.363)$$

С учетом (9.354) и (9.358) стандартные абсолютные производные (9.348) и (9.357) можно записать также в следующей форме:

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}\bar{A}_i/d\lambda &= \hat{D}A_i/d\lambda - \bar{A}^l\hat{\Omega}_{li}{}^k\bar{U}^k; \\ \bar{D}\bar{A}^i/d\lambda &= \hat{D}\bar{A}^i/d\lambda + A^l\hat{\Omega}^i{}_{lk}\bar{U}^k, \end{aligned} \right\} \quad (9.364)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \hat{D}\bar{A}_i/d\lambda &\equiv d\bar{A}_i/d\lambda - \bar{A}^l\bar{\Gamma}_{l,ik}\bar{U}^k = \bar{g}_{ik}\hat{D}\bar{A}^k/d\lambda; \\ \hat{D}\bar{A}^i/d\lambda &\equiv d\bar{A}^i/d\lambda + \bar{A}^l\bar{\Gamma}_{lk}^i\bar{U}^k = \bar{g}^{ik}\hat{D}\bar{A}_k/d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (9.365)$$

Выражения (9.365) совершенно аналогичны формулам (9.132), (9.133) для абсолютных производных вектора. В отличие от стандартных векторов $\bar{D}\bar{A}_i/d\lambda$, $\bar{D}\bar{A}^i/d\lambda$, величины $\hat{D}\bar{A}_i/d\lambda$, $\hat{D}\bar{A}^i/d\lambda$ являются компонентами лишь ограниченного стандартного вектора. Это следует из того, что вторые члены в правых частях формул (9.364) представляют собой ковариантные и контра-

вариантные компоненты ограниченного стандартного вектора. Таким образом, $\hat{D}\bar{A}_i/d\lambda$, $\hat{D}\bar{A}^i/d\lambda$ — стандартные векторы лишь относительно ограниченной группы преобразований (9.283). Поэтому мы их будем называть калибровочно-инвариантными производными стандартного вектора. Пространственная часть $\hat{D}\bar{A}_\mu/d\lambda = \gamma_{\mu\nu}\hat{D}\bar{A}^\nu/d\lambda$ является калибровочно-инвариантным 3-вектором, а временная часть $\hat{D}\bar{A}_4/d\lambda = -\hat{D}\bar{A}^4/d\lambda$ — калибровочный инвариант.

Упражнение 1. Стандартный тензорный анализ

С помощью формул, приведенных в тексте, показать, что сопряженная ковариантная производная векторного поля — стандартный тензор.

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}^i_{;k} &\equiv \bar{A}^i|_k = \bar{\partial}_k \bar{A}^i + \bar{A}^l \tilde{\Gamma}^i_{lk}; \\ \bar{A}_{i;k} &\equiv \bar{A}_{i|k} = \bar{\partial}_k \bar{A}_i - \bar{A}^l \tilde{\Gamma}_{l,ik} = \bar{g}_{ik} \bar{A}^l|_k. \end{aligned} \right\} \quad (9.366)$$

Аналогично для тензорного поля ранга 2

$$\left. \begin{aligned} \bar{A}^{ik}_{;l} &\equiv \bar{A}^{ik}|_l = \bar{\partial}_l \bar{A}^{ik} + \bar{A}^{mk} \tilde{\Gamma}^i_{ml} + \bar{A}^{im} \tilde{\Gamma}^k_{ml}; \\ \bar{A}^k_{i;l} &\equiv \bar{A}^k_{i|l} = \bar{\partial}_l \bar{A}^k_i - \bar{A}^k_m \tilde{\Gamma}^m_{il} + \bar{A}^m_i \tilde{\Gamma}^k_{ml} = \bar{g}_{ir} \bar{A}^r_k|_l \\ \bar{A}_{ikj;l} &\equiv \bar{A}_{ik|l} = \bar{\partial}_l \bar{A}_{ik} - \bar{A}_{mk} \tilde{\Gamma}^m_{il} - \bar{A}_{im} \tilde{\Gamma}^m_{kl} = \bar{g}^r_{ir} \bar{g}_{ks} \bar{A}^r_{i|l}. \end{aligned} \right\} \quad (9.367)$$

и т. д.

Очевидно, что

$$\bar{g}_{ik|l} = 0, \quad \bar{g}^{ik}_{;l} = 0.$$

Это формулы, сопряженные с (9.192). Стандартная дивергенция векторного поля является скаляром, который в соответствии с (9.366), (9.358) — (9.360) равен

$$\overline{\text{div}} \{A\} = \bar{A}^i_{;i} = \bar{\partial}_i \bar{A}^i + \bar{A}^i \tilde{\Gamma}^i_{ik} = \gamma^{-1/2} \bar{\partial}_i (\gamma^{1/2} \bar{A}^i) - \hat{a}_\mu \bar{A}^\mu / c^2. \quad (9.368)$$

Аналогичные выражения для стандартных векторов

$$\overline{\text{div}}^i \{F\} = \bar{F}^i_{;k}; \quad \overline{\text{div}}_i \{T\} = \bar{T}^k_{i;k} \quad (9.369)$$

соответствуют дивергенции (9.200) и (9.199) антисимметрического и симметрического тензоров. Из (9.357), (9.348) и (9.366) для стандартных векторов $\bar{A}_i(\lambda)$ на данной кривой по аналогии с (9.186) имеем

$$\left. \begin{aligned} \bar{D}\bar{A}^i/d\lambda &= \bar{A}^i|_k \bar{U}^k; \\ \bar{D}\bar{A}_i/d\lambda &= \bar{A}_{i|k} \bar{U}^k \bar{U}^i = d\bar{x}^i/d\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (9.370)$$

Параллельный перенос и перенос Ферми—Уолкера для стандартных векторов определяются стандартными уравнениями, сопряженными с уравнениями (9.137) и (9.138) соответственно.

Упражнение 2. Геометрическая иллюстрация различия между тензорами и стандартными тензорами

В § 9.6 и на стр. 254 $e_{(n)}^\mu$ представляла собой совокупность тетрадных векторов в фиксированной точке P . Кроме общих тетрадных соотношений (9.81) — (9.86), эти векторы в точке P удовлетворяют еще специальным условиям (9.97). Представим теперь, что с каждой точкой в 4-пространстве мы связали тетраду такого типа. Это семейство тетрад образует тетрадное поле $\lambda_{(a)}^i(x)$. Из сравнения первого уравнения системы (9.97) и (9.286) находим, что

$$\lambda_{(4)}^i = \Gamma^i = V_R^i / c = \lambda_{(4)}^i [R], \quad (9.371)$$

где V_R^i — поле 4-скоростей точек отсчета в системе отсчета R . Поскольку рассматриваемое тетрадное поле зависит от R , обозначим его $\lambda_{(a)}^i [R]$. Конечно, этим тетрадное поле не будет определено однозначно, так как при любом вращении тетрады, оставляющем неизменным $\lambda_{(4)}^i [R]$, оно будет также удовлетворять условию (9.371) и соотношениям (9.84), (9.86), т. е.

$$\lambda_{(a)}^i [R] \lambda_{(b)}^j [R] = \delta_{ab}^i; \quad \lambda_{(a)}^i [R] \lambda_{(a)}^j [R] = \delta_{ij}^i. \quad (9.372)$$

Для фиксированной системы отсчета R эти векторные соотношения выполняются в любой точке и в любой системе координат. Следовательно, компоненты $\lambda_{(a)}^{''i} [R]$ тетрады в произвольной системе координат S'' также будут удовлетворять соотношениям типа (9.372). Кроме того,

$$\lambda_{(4)}^{''i} [R] = V_{R'}^{''i} / c, \quad (9.373)$$

где $V_{R'}^{''i}$ — компоненты 4-скоростей точек отсчета системы R в координатной системе S'' . В общем случае $V_{R'}^{''i}$ не равна величине $\Gamma^{''i}$ в S'' . Это равенство имеет место лишь тогда, когда S'' является внутренней системой координат в R , т. е. если S'' связана с S калибровочным преобразованием.

В любой другой системе отсчета R' аналогичным образом можно ввести тетрадное поле, удовлетворяющее тетрадным соотношениям (9.372) и для которого

$$\lambda_{(4)}^i [R'] = V_{R'}^i / c, \quad (9.374)$$

где $V_{R'}^i$ — поле 4-скоростей точек отсчета R' . Во внутренней системе координат S' системы отсчета R' снова имеем

$$V_{R'}^i / c = \Gamma'^i, \quad (9.375)$$

но в общей системе S Γ^i отличается от $V_{R'}^i / c$. Векторные поля $\lambda_{(a)}^i [R']$ и $\lambda_{(a)}^i [R]$ в каждой точке связаны лоренцевым вращением типа (9.95). Следовательно,

$$\lambda_i^{(a)} [R'] = A_b^a \lambda_i^{(b)} [R]; \quad \lambda_{(a)}^i [R'] = \check{A}_a^b \lambda_{(b)}^i [R], \quad (9.376)$$

где A_b^a и \check{A}_a^b — инвариантные скаляры, определяемые формулами

$$\left. \begin{aligned} A_b^a &= \lambda_i^{(a)} [R'] \lambda_{(b)}^i [R]; \\ \check{A}_a^b &= \lambda_{(a)}^i [R'] \lambda_{(b)}^i [R]; \\ \check{A}_a^b &= \varepsilon_a \varepsilon_b A_b^a. \end{aligned} \right\} \quad (9.377)$$

Применяя к векторам $\lambda_{(a)}^i [R]$ и $\lambda_{(a)}^i [R']$ преобразования (9.311) и используя тетрадные соотношения (9.372), легко находим, что коэффициенты (9.312) можно представить в форме

$$\left. \begin{aligned} \alpha_k^i &= \lambda_{(a)}^i [R] \lambda_k^{(a)} [R] = \lambda_{(a)}^i [R'] \lambda_k^{(a)} [R']; \\ \check{\alpha}_k^i &= \lambda_{(a)}^i [R] \lambda_k^{(a)'} [R] = \lambda_{(a)}^i [R'] \lambda_k^{(a)'} [R'] \end{aligned} \right\} \quad (9.378)$$

или с учетом (9.376)

$$\alpha_k^i = \lambda_{(a)}^i [R'] A_b^a \lambda_k^{(b)} [R]; \quad \check{\alpha}_k^i = \lambda_{(a)}^i [R] \check{A}_b^a \lambda_k^{(b)'} [R']. \quad (9.379)$$

Эти формулы показывают, что в любой точке преобразование вектора состоит из преобразования Лоренца, которому предшествует и за которым следует более общее пространственно-временное преобразование. И наоборот, преобразование сопряженного стандартного вектора состоит, как мы видели на стр. 356, из того же преобразования Лоренца, заключенного между двумя преобразованиями лишь пространственных компонент.

Это различие между $\check{\alpha}_k^i$ в (9.313) и α_k^i в (9.311) проявляется более четко при рассмотрении стандартных векторных полей $\bar{\lambda}_{(a)}^i [R]$, $\bar{\lambda}_{(a)}^i [R']$, сопряженных к тетрадным векторам $\lambda_{(a)}^i [R]$, $\lambda_{(a)}^i [R']$. По аналогии с (9.378) и (9.379) легко находим, что

$$\left. \begin{aligned} \bar{\alpha}_k^i &= \bar{\lambda}_{(a)}^i [R] \bar{\lambda}_k^{(a)} [R] = \bar{\lambda}_{(a)}^i [R'] \bar{\lambda}_k^{(a)} [R']; \\ \bar{\alpha}_k^i &= \bar{\lambda}_{(a)}^i [R'] A_b^a \bar{\lambda}_k^{(b)} [R]. \end{aligned} \right\} \quad (9.380)$$

Показать, что в последнем выражении компоненты сопряженных тетрадных векторов имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \bar{\lambda}_{(a)}^i [R'] &= (\lambda_{(a)}^i [R'], 0); \quad \bar{\lambda}_{(4)}^i [R'] = \check{\Gamma}'^i = \delta_{i4}; \\ \bar{\lambda}_k^{(B)} [R] &= (\lambda_k^{(B)} [R], 0); \quad \bar{\lambda}_k^{(4)} [R] = -\check{\Gamma}_k = \delta_{k4}. \end{aligned} \right\} \quad (9.381)$$

И наконец, показать, что Π -функции, определенные формулами (9.302), можно представить в виде

$$\Pi_k^{[i]} = \bar{\lambda}_{(a)}^i [R] \lambda_k^{(a)} [R]; \quad \Pi_{[i]}^k = \bar{\lambda}_{(a)}^i [R] \lambda_{(a)}^k [R], \quad (9.382)$$

а стандартный метрический тензор имеет форму

$$\bar{g}_{ik} = \eta_{ab} \bar{\lambda}_i^{(a)} [R] \bar{\lambda}_k^{(b)} [R]; \quad \bar{g}^{ik} = \eta^{ab} \bar{\lambda}_{(a)}^i [R] \bar{\lambda}_{(b)}^k [R]. \quad (9.383)$$

ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ НА ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 10.1. Фундаментальные уравнения механики точки

Теперь с помощью формализма тензорного исчисления и принципа эквивалентности, сформулированного в § 9.6, можно однозначно обобщить все физические законы СТО. Поскольку мы полагаем, что тензорные уравнения СТО выполняются в локальной инерциальной системе с локальными лоренцевыми пространственно-временными координатами, то проблема отыскания фундаментальных уравнений физики (например, механики и электродинамики) в присутствии гравитационных полей сводится к чисто геометрической задаче в 4-пространстве.

Рассмотрим сначала движение частицы с постоянной собственной массой m_0 в заданном внешнем гравитационном поле под действием негравитационной 4-силы F_i . Это означает, что мы пренебрегаем влиянием (обычно малым) собственного гравитационного поля частицы и что g_{ik} можно рассматривать как известную функцию от координат x^i . Кроме того, поскольку m_0 считается постоянной, F_i удовлетворяет ковариантному уравнению

$$F_i U^i = 0, \quad (10.1)$$

соответствующему соотношению (4.57) СТО. Здесь

$$U^i = dx^i/d\tau \quad (10.2)$$

— 4-скорость частицы, а τ — собственное время.

Тогда мировая линия частицы описывается ковариантным уравнением

$$DP_i/d\tau = F_i. \quad (10.3)$$

Здесь

$$P_i = \overset{\circ}{m}_0 U_i; \quad P^i = \overset{\circ}{m}_0 U^i \quad (10.4)$$

— 4-импульс, а $DP_i/d\tau$ — абсолютная производная (9.133) при $a_i = P_i$ и $\lambda = \tau$.

Поскольку P^i пропорционален U^i , $DP_i/d\tau$ с учетом (9.78) приводится к виду

$$\begin{aligned} DP_i/d\tau &= dP_i/d\tau - (1/2) P^l (\Gamma_{l, ik} + \Gamma_{k, il}) U^k = \\ &= dP_i/d\tau - (1/2) g_{kl, i} U^k P^l. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Из (10.4) и (9.40) следует, что P_i удовлетворяет соотношению

$$P_i P^i = -\overset{\circ}{m}_0^2 c^2. \quad (10.6)$$

В локально лоренцевой системе координат уравнение (10.3) совпадает с частнорелятивистским уравнением (4.55) в соответствии с принципом эквивалентности.

В § 9.16 было показано, что любое векторное соотношение эквивалентно соответствующему соотношению между сопряженными стандартными векто-

рами. Следовательно, уравнения (10.1) — (10.6) можно заменить следующими стандартными векторными уравнениями:

$$\bar{F}_i \bar{U}^i = 0; \quad (10.7)$$

$$\bar{U}^i = d\bar{x}^i/d\tau; \quad (10.8)$$

$$\bar{P}_i = \dot{m}_0 \bar{U}_i; \quad \bar{P}_i = \dot{m}_0 \bar{U}_i; \quad (10.9)$$

$$\bar{P}_i \bar{P}^i = -\dot{m}_0^2 c^2; \quad (10.10)$$

$$\overline{D}\bar{P}_i/d\tau = \bar{F}_i. \quad (10.11)$$

Как мы увидим в следующем параграфе, физическая интерпретация этих уравнений несколько проще, чем интерпретация векторных уравнений (10.1) — (10.6), с которыми будем иметь дело в дальнейшем.

Удобно ввести следующее обозначение для контравариантных компонент P^i стандартного 4-импульса:

$$\bar{P}^i = (p^\mu, E/c). \quad (10.12)$$

Тогда из (9.297) имеем

$$p^\mu \equiv \bar{P}^\mu = P^\mu; \quad (10.13)$$

$$E \equiv c\bar{P}^4 = -c\Gamma_k P^k = -c\Gamma^4 P_4 = H/(-g_{44})^{1/2}, \quad (10.14)$$

где мы положили

$$H \equiv -cP_4 = E(1 + 2\kappa/c^2)^{1/2}. \quad (10.15)$$

Далее, из (9.297), (9.298), (9.299) получаем

$$\bar{P}_i = (p_\mu, -E/c). \quad (10.16)$$

Здесь

$$p_\mu = P_\mu - \gamma_\mu E/c = \gamma_{\mu\nu} p^\nu, \quad (10.17)$$

где p^μ и P_μ — компоненты калибровочно-инвариантного 3-вектора \mathbf{p} , а E — калибровочный инвариант, в отличие от H , зависящего от масштаба времени.

Используя (10.12) и (10.16), соотношение (10.16) приведем к виду

$$|\mathbf{p}|^2 - (E/c)^2 = -\dot{m}_0^2 c^2, \quad (10.18)$$

где

$$|\mathbf{p}|^2 = p_\mu p^\mu = \gamma_{\mu\nu} p^\mu p^\nu \quad (10.19)$$

— норма 3-вектора \mathbf{p} . С учетом (10.15) выражение (10.18) эквивалентно соотношению

$$|\mathbf{p}|^2 - (H/c^*)^2 = -\dot{m}_0^2 c^2. \quad (10.20)$$

Используя формулу (9.364) при $\bar{A}^i = \bar{P}_i$, фундаментальное уравнение (10.11) запишем в виде

$$\hat{D}\bar{P}_i/d\tau = \hat{K}_i + \bar{F}_i, \quad (10.21)$$

где \hat{K}_i — ограниченный стандартный вектор:

$$\hat{K}_i \equiv \bar{P}^l \hat{\Omega}_{liR} \bar{U}^k = 2\bar{P}^4 \hat{\Omega}_{iR} \bar{U}^k/c. \quad (10.22)$$

Здесь мы использовали (9.354), (9.337) и (10.4). Очевидно, что по аналогии с (10.7)

$$\hat{K}_i \bar{U}^i = 0. \quad (10.23)$$

Учитывая (9.343) — (9.345), для компонент \hat{K}_i получаем выражение

$$\hat{K}_i = (\hat{m}_0 \bar{U}^4/c) (\hat{a}_\mu \bar{U}^4/c + 2\omega_{\mu\nu} \bar{U}^\nu, -\hat{a}_\nu \bar{U}^\nu/c). \quad (10.24)$$

Здесь \hat{a}_μ — величина (9.345), которая с помощью (9.236) может быть записана в виде

$$\hat{a}_\mu = a_\mu c^2/c^{*3} = a_\mu / (-g_{44}) = (1 + 2\chi/c^2)^{-1} a_\mu, \quad (10.25)$$

где

$$a_\mu = -\partial\chi/\partial x^\mu - c^* \partial\gamma_\mu/\partial t \quad (10.26)$$

— гравитационное (координатное) ускорение (8.110) покоящейся частицы.

Калибровочно-инвариантная производная от \bar{P}_i в левой части уравнения (10.21) с учетом (9.365), (9.352) и (10.9) равна

$$\bar{D}\bar{P}_i/d\tau = d\bar{P}_i/d\tau - (1/2) (\bar{\partial}_i \bar{g}_{kl}) \bar{P}^k \bar{U}^l, \quad (10.27)$$

по аналогии с (10.5). Поскольку лишь пространственная часть стандартного метрического тензора (9.299) имеет ненулевые производные, (10.27) можно записать также в виде

$$\bar{D}\bar{P}_i/d\tau = d\bar{P}_i/d\tau - (\bar{\partial}_i \gamma_{\nu\lambda}) p^\nu \bar{U}^\lambda / 2. \quad (10.28)$$

§ 10.2. Физическая интерпретация уравнений механики точки. Стандартные уравнения движения. Стандартная одновременность

В предыдущем параграфе мы вывели различные формы уравнений, описывающих мировую линию движущейся частицы в четырехмерном пространственно-временном континууме. Это пространство является математическим построением. Чтобы дать физическую интерпретацию величин, входящих в эти уравнения, их необходимо представить в форме обычных уравнений движения в трехмерном физическом пространстве. В связи с этим напомним, что физическая величина определяется той инструкцией, в соответствии с которой она измеряется. В эту инструкцию, наряду с порядком проведения эксперимента, должно входить описание используемых инструментов и правила пользования ими. Это фундаментальное положение остается в силе и в теории относительности. Однако в дорелятивистской физике считалось само собой разумеющимся, что физическое пространство имеет метрику трехмерного евклидова пространства. В философии Канта даже постулировалось, что это является априори необходимым предположением, без которого немислимо разумное описание природы.

С появлением релятивистской теории ситуация резко изменилась. В этой теории геометрия математического 4-пространства существенно зависит от распределения и движения материи в физическом пространстве. Более того, само физическое пространство вообще не имеет определенной метрики. Геометрическая структура физического пространства может быть задана в определенном смысле лишь относительно определенной системы отсчета. Это так даже в случае СТО. Однако здесь по крайней мере пространственная геометрия в любой инерциальной системе I , определенная с помощью стандартной измерительной линейки, покоящейся в I , всегда евклидова. В ОТО, где мы имеем дело с произвольно движущимися системами отсчета R и произвольными распределениями масс, пространственная геометрия, установленная с помощью стандартных измерительных линеек, покоящихся относительно R , в общем случае неевклидова. Как мы уже видели в гл. 8 и 9, пространственное расстояние $d\sigma$ между двумя близкими точками отсчета в R с координатами (x^μ) и $(x^\mu + dx^\mu)$ определяется квадратической формой

$$d\sigma^2 = \gamma_{\mu\nu}(x) dx^\mu dx^\nu, \quad (10.29)$$

где $\gamma_{\mu\nu}$ — калибровочно-инвариантный 3-тензор, обычно зависящий и от (x^μ) и от координатного времени t . Таким образом, в общем случае пространственная геометрия в R не только неевклидова, но зависит и от времени. Тем не менее, в любой системе отчета R с пространственно-временными координатами (x^i) уравнения, приведенные в предыдущем параграфе, можно записать в форме обычных уравнений движения, где изменение импульса частицы равно пространственному вектору силы, а изменение кинетической энергии равно работе этой силы.

Прежде всего мы должны точно определить смысл импульса и кинетической энергии в присутствии гравитационного поля. Пусть P — точечное событие в 4-пространстве, соответствующее прибытию частицы в некоторую точку отсчета системы R в некоторый момент времени, а x_p^i — координаты P в системе S . Тогда с помощью преобразований (9.99) можно ввести в точке P локальную псевдодекартову систему $\check{S}(P)$. Поскольку системы отсчета R и \check{R} покоятся относительно друг друга (фактически они совпадают, если не считать, что в них координаты точек отсчета различны), импульс и кинетическая энергия частицы относительно R и \check{R} должны быть равными. Преобразования (9.99) являются калибровочными преобразованиями. Поэтому калибровочно-инвариантные пространственные и временные составляющие \mathbf{p} и E/c стандартного 4-вектора \check{P}^i должны быть равны соответствующим величинам в локальной системе $\check{S}(P)$. Однако в соответствии с (9.308) стандартные компоненты \check{P}^i в системе $\check{S}(P)$ совпадают с компонентами \check{P}^i 4-импульса, и, поскольку эта система псевдодекартова (в P), пространственная часть 4-импульса равна импульсу, а временная часть (умноженная на c) равна кинетической энергии (плюс собственная энергия частицы относительно \check{R}).

Эти рассуждения приводят нас к выводу, что 3-вектор \mathbf{p} , определенный в (10.13), (10.17), представляет собой импульс частицы в R или S , а величина E , определенная в (10.14), должна представлять собой кинетическую энергию в S (для краткости E будем называть кинетической энергией, хотя она включает в себя и постоянную собственную энергию m_0c^2). Вместо локальной псевдодекартовой системы $\check{S}(P)$ с тем же успехом можно использовать локальную лоренцеву систему $\check{S}(P)$, определенную преобразованием (9.105), с тетрадой $e_k^{(i)}$, удовлетворяющей соотношениям (9.97). В любой точке P локальная инерциальная система \check{R} покоится относительно \hat{R} и R .

Чтобы найти выражение для гравитационной силы и ее работы, необходимо знать изменение \mathbf{p} и E во времени. Здесь результат зависит от выбора временного параметра. В первом издании этой книги в качестве такого параметра использовалось координатное время t , что приводило к «координатной» форме уравнений движения. Эта форма уравнений, которая будет рассматриваться в следующем параграфе, не калибровочно-инвариантна, поскольку параметр t изменяется с изменением масштаба времени. В настоящем параграфе мы имеем дело с так называемой стандартной формой уравнений движения, которая была независимо разработана Зельмановым [287] и Каттанео [42—47]. Формально стандартные уравнения проще координатных уравнений тем, что они описывают соотношения лишь между калибровочно-инвариантными величинами.

Узловой момент в стандартном представлении — использование в качестве временного параметра временного дифференциала $d\hat{t}$ (9.331). Поскольку $d\hat{t}$ — калибровочный инвариант, он равен координатному временному дифференциалу в локальной псевдодекартовой системе $\check{S}(P)$, где координатные часы в P являются стандартными часами, покоящимися в \check{R} и R . Из определения

$\hat{d}t$ в S следует, что он связан с координатным временем соотношением

$$\hat{d}t = dt (-\Gamma_k dx^k/dt)/c = dt (c^* - \gamma_\mu U^\mu)/c, \quad (10.30)$$

где

$$u^\mu = dx^\mu/dt \quad (10.31)$$

— координатная скорость. В отличие от U^μ , являющейся 3-вектором лишь относительно чисто пространственных преобразований, стандартная скорость с компонентами

$$\hat{u}^\mu = \bar{d}x^\mu/\hat{d}t = dx^\mu/\hat{d}t = cu^\mu/(c^* - \gamma u) \quad (10.32)$$

является калибровочно-инвариантным 3-вектором,

Поскольку $ds^2 = -c^2 d\tau^2$, из (9.332) получим

$$-c^2 d\tau^2 = (\hat{u}^2 - c^2) \hat{d}t^2, \quad (10.33)$$

где

$$\hat{u}^2 = \gamma_{\mu\nu} \hat{u}^\mu \hat{u}^\nu, \quad (10.34)$$

следовательно,

$$\hat{d}t/d\tau \equiv \hat{\Gamma} = 1/\sqrt{1 - \hat{u}^2/c^2}. \quad (10.35)$$

Формально калибровочно-инвариантная величина $\hat{\Gamma}$ совпадает с лоренцевым множителем в СТО. Поэтому, сравнивая (10.35) с (4.34), видим, что $\hat{d}t$ совершенно аналогичен временному дифференциалу dt в инерциальной системе. С помощью (9.330), (10.8) и (10.35) для стандартной 4-скорости получим выражение

$$\bar{U}^i = \bar{d}x^i/d\tau = (\hat{d}t/d\tau) (\bar{d}x^i/\hat{d}t) = (\hat{\Gamma} \hat{u}^\mu, \hat{\Gamma} c), \quad (10.36)$$

которое аналогично формулам (4.39) СТО. Умножая \bar{U}^i на \hat{m}_0 , получаем стандартный 4-импульс (10.9), а учитывая (10.12) и (10.36), находим выражения для импульса p и кинетической энергии E :

$$p = \hat{m} \hat{u}; \quad E = \hat{m} c^2, \quad (10.37)$$

где стандартная масса \hat{m} определяется формулой

$$\hat{m} = \hat{m}_0 \hat{\Gamma} = \hat{m}_0 / \sqrt{1 - \hat{u}^2/c^2}. \quad (10.38)$$

С помощью (10.7), (10.23) и (10.36) величины \bar{F}_i и \hat{K}_i можно записать в виде

$$\left. \begin{aligned} \bar{F}_i &= \hat{\Gamma} \hat{\mathcal{F}}_i; \quad \hat{\mathcal{F}}_i = (\hat{\mathcal{F}}_\mu, -\hat{\mathcal{F}}_\mu \hat{u}^\mu/c); \\ \hat{K}_i &= \hat{\Gamma} \hat{\mathcal{R}}_i; \quad \hat{\mathcal{R}}_i = (\hat{\mathcal{R}}_\mu, -\hat{\mathcal{R}}_\mu \hat{u}^\mu/c), \end{aligned} \right\} \quad (10.39)$$

где мы положили

$$\hat{\mathcal{F}}_\mu = \bar{F}_\mu/\hat{\Gamma}; \quad \hat{\mathcal{R}}_\mu = \hat{K}_\mu/\hat{\Gamma}. \quad (10.40)$$

Поскольку $\bar{U}^4/c = \hat{\Gamma}$, с учетом (10.24) и (10.38) имеем

$$\left. \begin{aligned} \hat{\mathcal{R}}_\mu &= \hat{m} \hat{G}_\mu, \quad \text{где } \hat{G}_\mu = \hat{a}_\mu + 2\omega_{\mu\nu} \hat{u}^\nu; \\ \hat{a}_\mu &= c^2 a_\mu/c^{*2}; \quad \omega_{\mu\nu} = c^* (\hat{\partial}_\mu \sigma_\nu - \hat{\partial}_\nu \sigma_\mu)/2. \end{aligned} \right\} \quad (10.41)$$

Разделив уравнение (10.21) на $\hat{\Gamma} = \hat{d}t/d\tau$, получим

$$\hat{D}\bar{P}_i/\hat{d}t = \hat{\mathcal{R}}_i + \hat{\mathcal{F}}_i, \quad (10.42)$$

где в соответствии с (10.28), (10.36) и (10.39)

$$\hat{D}\bar{P}_i/d\hat{t} \equiv d\bar{P}_i/d\hat{t} - (\bar{\partial}_i \gamma_{\nu\lambda}) p^\nu \hat{u}^\lambda / 2. \quad (10.43)$$

При $i = \mu = 1, 2, 3$ (10.42) дает

$$\hat{D}p_\mu/d\hat{t} = \hat{\mathcal{K}}_\mu + \hat{\mathcal{F}}_\mu. \quad (10.44)$$

Левая часть этого уравнения является калибровочно-инвариантным изменением импульса за единицу стандартного времени. Таким образом, величины $\hat{\mathcal{K}}_\mu$ и $\hat{\mathcal{F}}_\mu$ следует интерпретировать как гравитационную и негравитационную стандартные силы соответственно. Из (10.41) видно, что гравитационная сила пропорциональна \hat{m} , в соответствии с равенством (пассивной) гравитационной массы и инертной массы, определенной в (10.37), (10.38) как отношение импульса к скорости.

В случае свободного падения мгновенно покоящейся частицы, когда $\hat{\mathcal{F}}_\mu = 0$, $\hat{u}^\mu = 0$, уравнение (10.44) принимает вид

$$d\hat{u}_\mu/d\hat{t} = \gamma_{\mu\nu} d\hat{u}^\nu/d\hat{t} = \hat{a}_\mu. \quad (10.45)$$

Из (10.45) видно, что \hat{a}_μ в (10.41) является стандартным гравитационным ускорением покоящейся частицы. Вторая величина в выражении (10.41) для $\hat{\mathcal{K}}_\mu$ имеет характер кориолисовой силы. Формально $\hat{\mathcal{K}}_\mu$ аналогична силе Лоренца (5.80), действующей на заряженную частицу. При такой аналогии m , \hat{a}_μ и $2c\omega_{\mu\nu}$ соответствуют электрическому заряду e , вектору электрического поля E_μ и магнитному тензору поля $H_{\mu\nu}$. В следующем параграфе будет показано, что эта аналогия полна в случае слабого поля.

При $i = 4$ с учетом (10.16), (10.39), (10.43) и (9.336) из уравнения (10.42) имеем

$$\hat{D}\bar{P}_4/d\hat{t} \equiv -(1/c) dE/d\hat{t} - \Gamma^4 \gamma_{\mu\lambda} p^\mu \hat{u}^\lambda / 2 = -(\hat{\mathcal{K}}_\mu + \hat{\mathcal{F}}_\mu) \hat{u}^\mu / c,$$

или

$$dE/d\hat{t} = -d_{\nu\lambda} p^\nu \hat{u}^\lambda + (\hat{\mathcal{K}}_\mu + \hat{\mathcal{F}}_\mu) \hat{u}^\mu, \quad (10.46)$$

где

$$d_{\nu\lambda} = (c/2c^*) \partial \gamma_{\nu\lambda} / dt \quad (10.47)$$

— калибровочно-инвариантный тензор растяжения (9.117). Первая величина в правой части уравнения (10.46) описывает стандартное изменение кинетической энергии в единицу стандартного времени, обусловленное растяжением системы отсчета, а оставшаяся величина представляет собой работу гравитационной и негравитационной сил в единицу стандартного времени. Полная (стандартная) работа, совершенная этими силами за время перемещения частицы от точки 1 до точки 2 ее траектории, равна:

$$\hat{A}(1,2) = \int_1^2 (\hat{\mathcal{K}}_\mu + \hat{\mathcal{F}}_\mu) \hat{u}^\mu d\hat{t} = \int_1^2 (\hat{\mathcal{K}}_\mu + \hat{\mathcal{F}}_\mu) dx^\mu. \quad (10.48)$$

Все рассматриваемые в этом параграфе величины являются калибровочно-инвариантными и очень похожи на соответствующие величины СТО. Единственное различие состоит лишь в том, что здесь пространственный метрический тензор может зависеть от времени и описывает в общем случае неевклидову геометрию.

В противоположность величине \bar{F}_i , являющейся стандартным 4-вектором, гравитационная величина \hat{K}_i является стандартным 4-вектором лишь относительно калибровочных преобразований. При общих координатных преобразованиях \hat{K}_i преобразуется более сложным образом. Наиболее существенное различие между \bar{F}_i и \hat{K}_i состоит в том, что гравитационная 4-сила может быть

исключена соответствующим преобразованием. Если мы введем гауссовы координаты (9.269), то в этой системе будем иметь

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^i &= \delta_{i4}; \quad d\hat{t} = dt; \quad \hat{u}^\mu = u^\mu; \\ \mathfrak{R}_\mu &= 0; \quad \bar{F}_i = F_i; \\ \hat{D}p_\mu/d\hat{t} &= D^{(3)} p_\mu/dt, \end{aligned} \right\} \quad (10.49)$$

где

$$D^{(3)} p_\mu/dt = dp_\mu/dt - \gamma_{\nu\lambda, \mu} p^\nu u^\lambda / 2 \quad (10.50)$$

— пространственный аналог четырехмерной абсолютной производной (10.5). Геометрически эта величина определяется следующим образом:

$$D^{(3)} p_\mu/dt = \lim_{\Delta t \rightarrow 0} [p_\nu(t + dt) - p_\mu^*] / \Delta t, \quad (10.51)$$

где p_μ^* — 3-вектор, полученный (мгновенным) параллельным переносом вектора $p_\mu(t)$ из точки (x^μ) в точку $(x^\mu + dx^\mu) = (x^\mu + u^\mu \Delta t)$. Следовательно, в гауссовой системе координат динамическое действие гравитационного поля можно исключить в конечной области пространства — времени, так что эффект влияния гравитационного поля чисто геометрический и целиком описывается пространственным метрическим тензором.

Фактически для свободно падающей частицы, когда $\mathfrak{F}_\mu = 0$, из (10.44), (10.46) и (10.49) имеем

$$\left. \begin{aligned} D^{(3)} p_\mu/dt &= 0; \\ dE/dt &= -d_{\nu\lambda} p^\nu u^\lambda. \end{aligned} \right\} \quad (10.52)$$

Следовательно, 3-вектор p_μ изменяется вдоль траектории в соответствии с правилом параллельного переноса. Однако норма его изменяется со временем, если система отсчета не жесткая. В этом случае, если $d_{\nu\lambda} = 0$, а $\gamma_{\mu\lambda}$ не зависит от времени, E , \hat{u} и \hat{m} — постоянные, а уравнения движения сводятся к

$$D^{(3)} u_\mu/dt = 0. \quad (10.53)$$

Тогда траектория частицы — геодезическая в физическом пространстве, т. е. частица движется с постоянной скоростью по «прямейшей» для данной геометрии линии. Такое движение совершенно аналогично движению частицы по фиксированной гладкой двумерной поверхности в инерциальной системе, где единственной силой, действующей на частицу, является нормальная реакция поверхности. Единственное существенное отличие состоит в том, что при нашем рассмотрении частица движется по трехмерной искривленной поверхности. Если пространственный метрический тензор зависит от времени, что обычно имеет место в случае гауссовой системы координат [см. § 9.15], движение частицы в гравитационном поле аналогично движению частицы в инерциальной системе по изменяющейся гладкой поверхности. Таким образом, если динамические потенциалы равны нулю, то действие гравитационного поля имеет характер «нормальной реакции» искривленного трехмерного пространства.

Возможность исключения гравитационной силы \mathfrak{R} хотя и интересна с теоретической точки зрения, но обычно не столь нужна, поскольку соответствующая система отсчета в общем случае не жесткая, что в большинстве случаев приводит к большим усложнениям при исследовании физических явлений. Однако при исследовании космологических проблем (см. § 12.7 и 12.8) мы используем эту возможность.

Как мы подчеркивали в § 9.16, стандартный временной дифференциал (9.331) обычно не является полным дифференциалом глобальной временной переменной \hat{t} . Поэтому \hat{t} , подобно собственному времени τ , имеет определенный

смысл только по отношению к определенному движению частицы. Однако τ имеет простой операционный смысл, так как определяется по показаниям стандартных часов, движущихся вместе с частицей. Мы увидим теперь, что \hat{t} можно также операционно определить вдоль мировой линии частицы.

Для этого представим, что в каждой точке отсчета системы R расставлены неподвижные относительно этих точек стандартные часы, т. е. так же, как и в случае инерциальной системы I , который рассматривался в § 2.2. В том случае все стандартные часы можно было синхронизовать с помощью световых сигналов, испущенных из произвольно выбранного центра синхронизации. Было показано, что такая синхронизация часов в I удовлетворяет двум специальным условиям: она не зависит от времени ее проведения и от выбора центра синхронизации. Однако если подобный метод применить в произвольной системе отсчета R , то эти условия уже не будут выполняться, т. е. нельзя найти однозначный способ синхронизации покоящихся в R стандартных часов. Тем не менее, эти часы можно использовать для измерения стандартных временных промежутков \hat{dt} следующим образом.

Пусть p и p' — две точки отсчета в R , через которые частица проходит в моменты координатного времени t и $(t + dt)$ соответственно, и пусть $d\sigma$ — расстояние между ними, измеренное стандартной измерительной линейкой в момент времени t . В этот момент из точки p в точку p' пошлем световой сигнал. Тогда в соответствии с (8.72) сигнал прибудет в точку p' в момент координатного времени $(t + \delta t)$, где

$$\delta t = d\sigma (1 + \gamma e)/c^*, \quad (10.54)$$

а e — единичный 3-вектор, направленный из p в p' . С помощью стандартных часов, помещенных в точке p' , можно измерить промежуток времени $d'\tau_0$ между моментами прибытия в точку p' светового сигнала и частицы. Поскольку соответствующий координатный временной промежуток равен $(dt - \delta t)$, из (8.116) с учетом (10.30) получаем

$$\begin{aligned} d'\tau_0 &= (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} (dt - \delta t) = (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} \{dt - d\sigma (1 + \gamma e)/c^*\} = \\ &= -d\sigma/c + dt (c^* - \gamma \mathbf{u})/c = -d\sigma/c + \hat{dt}. \end{aligned} \quad (10.55)$$

При замене в этом выражении значения потенциала в точке p' его значением в точке p в координатных дифференциалах можно пренебречь величинами второго порядка малости. Из (10.55) получим формулу

$$\hat{dt} = d'\tau_0 + d\sigma/c, \quad (10.56)$$

которая выражает \hat{dt} через измеренные величины $d\sigma$ и $d'\tau_0$.

Стандартная скорость частицы $\hat{\mathbf{u}} = |\hat{\mathbf{u}}|$ согласно (10.32) есть

$$\hat{\mathbf{u}} = c\mathbf{u}/(c^* - \gamma \mathbf{u}). \quad (10.57)$$

В соответствии с (8.68) координатная скорость светового сигнала

$$\omega = c^* - \gamma \mathbf{w}. \quad (10.58)$$

Полагая в (10.57) $\mathbf{u} = \mathbf{w}$, получаем, что стандартная скорость света $\hat{\omega}$ равна c везде и во всех направлениях:

$$\hat{\omega} = c\omega/(c^* - \gamma \mathbf{w}) = c\omega/\omega = c. \quad (10.59)$$

Следовательно, последний член в правой части (10.56) равен стандартному промежутку времени, в течение которого световой сигнал проходит расстояние от p до p' , и величина \hat{dt} в произвольной системе отсчета является наиболее близким аналогом временного дифференциала dt в уравнениях движения в инерциальной системе. Для любого точечного события P \hat{dt} равен координатным временным дифференциалам в локальных системах отсчета $\check{S}(P)$ и $\check{S}'(P)$.

Это справедливо для всех других величин, рассматриваемых в настоящем параграфе, за исключением гравитационной силы. В то время как $\hat{\xi}$ в точке P представляет собой один и тот же 3-вектор для систем $\hat{\mathcal{S}}(P)$ и S , в локальной лоренцевой системе $\hat{\mathcal{S}}(P)$ он равен нулю, поскольку в этой системе производные от гравитационных потенциалов равны нулю. Следует также помнить, что локальные системы $\hat{\mathcal{S}}(P)$ и $\hat{\mathcal{S}}(P)$ изменяются от точки к точке.

В СТО, как это было показано в § 2.2, однозначным образом и глобально можно в каждой инерциальной системе определить понятие одновременности двух событий, хотя одновременность имеет различный смысл в разных инерциальных системах. Как было указано выше, обычно в произвольной движущейся системе отсчета R это сделать невозможно. Конечно, когда в R мы ввели внутреннюю систему координат S , то формально можем назвать два события одновременными, если они характеризуются одинаковым значением параметра t . Однако эта «координатная одновременность» — не калибровочно-инвариантное понятие, т. е. она имеет разный смысл в различных внутренних системах координат (за исключением случая, когда временные масштабы отличаются лишь постоянным множителем).

Интуитивно ясно, что более удобно так определить понятие одновременности, чтобы она зависела лишь от системы отсчета. Это можно сделать для событий в двух близких точках. «Стандартная одновременность» двух событий P и P' с координатами (x^i) и $(x^i + dx^i)$ определяется условием, чтобы соответствующий стандартный временной дифференциал (9.331) равнялся нулю, т. е.

$$cd\hat{t} = -\Gamma_k dx^k = 0. \quad (10.60)$$

Поскольку $d\hat{t}$ — калибровочный инвариант, определенная таким образом одновременность будет зависеть лишь от системы отсчета. Но если мы попытаемся распространить это определение на пространственно удаленные события, соединяя два события кривой и используя правило (10.60) для каждого инфинитезимального отрезка этой кривой, то найдем, что полученная таким путем одновременность зависит от соединяющей кривой. Таким образом, в произвольной системе отсчета невозможно глобально определить стандартную одновременность двух событий.

Однако, если система отсчета R такая, что условие

$$\omega_{\mu\nu} = 0 \quad (10.61)$$

выполняется во всех точках, можно ввести внутреннюю времениортогональную систему координат S^* , для которой $\Gamma_\mu = 0$ (см. § 8.13). В этой системе из условия (10.60) следует, что $d\hat{t} = 0$, т. е. стандартная одновременность эквивалентна координатной одновременности, определенной глобально. Это означает, что стандартная одновременность также может быть глобально определена в любой системе отсчета R , где выполняется (10.61). Но даже и в этом случае координатное время t в S^* , имеющее одинаковое значение для двух одновременных событий, не будет являться временем, регистрируемым покоящимися в R стандартными часами.

Упражнение

Показать, что (10.61) является и необходимым условием возможности глобального определения в системе отсчета стандартной одновременности [174].

§ 10.3. Координатная форма уравнений движения

В предыдущем параграфе мы выяснили, что уравнения движения частицы можно записать так, чтобы в них входили лишь калибровочно-инвариантные величины. Более того, эти стандартные уравнения очень похожи на соответствующие уравнения СТО. Однако стандартный временной дифференциал $d\hat{t}$,

лаграющий существенную роль в таком описании, не является полным дифференциалом. Это приводит к тому, что стандартные уравнения в отличие от координатных уравнений, которые мы будем рассматривать в данном параграфе, не могут быть записаны в лагранжевой или гамильтоновой формах. Использование координатного времени в качестве временного параметра в некотором отношении дает возможность более глубоко понять сложные проблемы физики.

Хотя координатное время и не имеет обычно простого операционного смысла, существуют важные случаи, когда t может быть операционно определено. В качестве примера рассмотрим (практически) статическое гравитационное поле, когда мы можем ввести систему координат S , в которой g_{ik} не зависит от времени и $g_{\mu 4} = 0$. По временной шкале t частота монохроматической волны одинакова во всем пространстве. Это обстоятельство используется для регулировки хода координатных часов в различных точках системы отсчета S путем наблюдения частоты данной спектральной линии, испущенной из регулировочного центра \mathfrak{D} . Момент пуска координатных часов в произвольной точке отсчета p можно определить с помощью светового сигнала, который испускается из \mathfrak{D} в точку p и возвращается обратно. В статическом случае оба отрезка пути светового сигнала равны и не меняются со временем. Поэтому, если t_1 — время испускания сигнала, отсчитываемое по координатным часам в \mathfrak{D} , а t_2 — соответствующее время возвращения сигнала, то часы в p должны быть поставлены на время $(t_1 + t_2)/2$ и пущены в момент прибытия сигнала в точку p .

В таком методе время t определяется, конечно, лишь с точностью до произвольного линейного преобразования. Если существуют области пространства, где R практически можно считать инерциальной системой (например, области пустого пространства, достаточно удаленные от всех космических тел), то центр регулировки \mathfrak{D} удобно поместить там. Тогда, если в качестве координатных часов в \mathfrak{D} взять стандартные часы, временная переменная t будет определена однозначно. Определяемое таким путем время t часто называется *мировым временем*.

Возвращаясь к общему случаю, введем координатный множитель Лоренца

$$\Gamma = dt/d\tau \quad (10.62)$$

вместо стандартного множителя Лоренца (10.35). Из (8.103) для Γ получим следующее выражение:

$$u^\mu = dx^\mu/dt; \quad u^2 = \gamma_{\mu\nu} u^\mu u^\nu; \quad (10.63)$$

$$U^i = \Gamma dx^i/dt = (\Gamma u^i, \Gamma c); \quad (10.64)$$

$$\Gamma = \{[(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} - \gamma_\mu u^\mu/c]^2 - u^2/c^2\}^{-1/2}. \quad (10.65)$$

Учитывая (10.30), (10.32), (10.35), (10.62), имеем

$$\hat{\Gamma} | \Gamma = \hat{d}t/dt = (c^* - \gamma\mathbf{u})|c; \quad \hat{\mathbf{u}} = \mathbf{u}\Gamma/\hat{\Gamma}. \quad (10.66)$$

Поэтому, введя вместо (10.38) величину

$$m = \hat{m}\Gamma/\hat{\Gamma} = \hat{m}_0 \Gamma, \quad (10.67)$$

из (10.37) получим следующие выражения для импульса и кинетической энергии:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{u}; \quad E = mc(c^* - \gamma\mathbf{u}). \quad (10.68)$$

Отношение m между \mathbf{p} и координатной скоростью \mathbf{u} часто называется *координатной массой*.

Теперь, умножая уравнения (10.42), (10.43) на $\hat{\Gamma}/\Gamma$, приходим к координатной форме уравнений движения:

$$\hat{D}\bar{P}_i/dt = \mathfrak{R}_i + \mathfrak{F}_i; \quad (10.69)$$

$$\hat{D}\bar{P}_i/dt \equiv d\bar{P}_i/dt - (\bar{\partial}_i \gamma_{\nu\lambda}) p^\nu u^\lambda / 2, \quad (10.70)$$

где

$$\mathfrak{F}_i = -\hat{\mathfrak{F}}\hat{\Gamma}/\Gamma = \bar{F}_i/\Gamma; \quad \mathfrak{R}_i = \hat{\mathfrak{R}}_i \hat{\Gamma}/\Gamma = \hat{K}_i/\Gamma. \quad (10.71)$$

Пространственные части \mathfrak{F}_μ и \mathfrak{R}_μ этих величин называются координатными силами, а временные части, в соответствии с (10.39) и (10.71), имеют вид

$$\mathfrak{F}_4 = -\mathfrak{F}_\mu \hat{u}^\mu / c; \quad \mathfrak{R}_4 = -\mathfrak{R}_\mu \hat{u}^\mu / c. \quad (10.72)$$

Из (10.71), (10.41) и (10.67) для гравитационной силы получим выражение в форме

$$\mathfrak{R}_\mu = mG_\mu, \quad (10.73)$$

где

$$G_\mu = \hat{G}_\mu \hat{\Gamma}^2 / \Gamma^2. \quad (10.74)$$

С учетом (10.66), (10.41), (10.25) последняя величина записывается как

$$G_\mu = (1 - \gamma\mathbf{u}/c^*)^2 a_\mu + 2(c^* - \gamma\mathbf{u}) \omega_{\mu\nu} u^\nu / c, \quad (10.75)$$

и снова гравитационная сила \mathfrak{R} оказывается пропорциональной инертной массе m .

Пространственная часть уравнений (10.69) имеет вид

$$\hat{D}p_\mu/dt = \mathfrak{R}_\mu + \mathfrak{F}_\mu; \quad (10.76)$$

$$Dp_\mu/dt = D^{(3)}p_\mu/dt - \gamma_\mu d_{\nu\lambda} p^\nu u^\lambda / c, \quad (10.77)$$

а для $i = 4$ получим

$$dE/dt = -d_{\nu\lambda} p^\nu u^\lambda + (\mathfrak{R}_\mu + \mathfrak{F}_\mu) \hat{u}^\mu. \quad (10.78)$$

В общем случае \mathfrak{R}_μ является более сложной функцией скорости и динамических потенциалов χ и γ_μ . Однако в следующих важных случаях уравнения движения и выражения для \mathfrak{R}_μ , G_μ имеют очень простой вид.

1. Если частица покоится в данный момент и $\mathfrak{F} = 0$. Тогда уравнения (10.76) сводятся к

$$du/dt = \mathbf{a}, \quad (10.79)$$

где \mathbf{a} — ускорение покоя с компонентами a_μ , определяемыми формулами (8.110) или (10.26).

2. Если система координат времениортогональна, когда $\gamma_\mu = 0$.

В этом случае G_μ и уравнения движения имеют ту же форму, что и в теории Ньютона:

$$\left. \begin{aligned} G_\mu &= -\partial\chi/\partial x^\mu; \\ D^{(3)}p_\mu/dt &= -m\partial\chi/\partial x^\mu + \mathfrak{F}_\mu. \end{aligned} \right\} \quad (10.80)$$

Это справедливо и в случае сильных гравитационных полей. В § 9.15 было показано, что всегда можно ввести времениортогональную систему координат. Необходимо лишь помнить при этом, что пространственная геометрия в выражении для $D^{(3)}p_\mu/dt$ в общем случае неевклидова.

3. В стационарном случае, когда g_{ik} не зависит от времени. Тогда имеем

$$\left. \begin{aligned} D^{(3)}p_\mu/dt &= mG_\mu + \mathfrak{F}_\mu; \\ G_\mu &= -(1 - \gamma\mathbf{u}/c^*)^2 \partial\chi/\partial x^\mu + 2\omega_{\mu\nu} u^\nu (c^* - \gamma\mathbf{u})/c; \\ \omega_{\mu\nu} &= -(c^*/2) (\partial\sigma_\mu/\partial x^\nu - \partial\sigma_\nu/\partial x^\mu). \end{aligned} \right\} \quad (10.81)$$

Если, кроме того, скорость мала и поле слабое, т. е. если u/c , χ/c , γ_μ являются малыми первого порядка, из (10.31) получим

$$\left. \begin{aligned} G_\mu &= -\partial\chi/\partial x^\mu + 2\omega_{\mu\nu} u^\nu; \\ \omega_{\mu\nu} &= (c/2) (\partial\gamma_\nu/\partial x^\mu - \partial\gamma_\mu/\partial x^\nu), \quad m = \dot{m}_0. \end{aligned} \right\} \quad (10.82)$$

Если эти уравнения применить к частице, движущейся относительно вращающейся системы координат (8.91), то первый член в выражении (10.82) для G_μ будет представлять собой обычное центростремительное ускорение, а второй член — кориолисово ускорение.

4. В общем случае слабого поля, когда $\chi/c^2 \ll 1$ и $\gamma_\mu \ll 1$; тогда в первом приближении имеем

$$\left. \begin{aligned} \hat{D} p_\mu/dt &= m (-\partial\chi/\partial x^\mu - c\partial\gamma_\mu/\partial t + 2\omega_{\mu\nu} u^\nu) + \mathfrak{F}_\mu; \\ \omega_{\mu\nu} &= (c/2) (\partial\gamma_\nu/\partial x^\mu - \partial\gamma_\mu/\partial x^\nu); \\ m &= \dot{m}_0/(1 - u^2/c^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.83)$$

Здесь гравитационная сила аналогична лоренцевой силе, действующей на частицу с зарядом $e = m$, которая движется в электромагнитном поле с потенциалами $\mathbf{A} = c^2\boldsymbol{\gamma}$, $\phi = \chi$.

Координатная масса (10.67), (10.65) частицы, движущейся так медленно, что величинами $\gamma_\mu u^\mu/c$ и u^2/c^2 можно пренебречь, равна массе покоя:

$$m_0 = \dot{m}_0 / \sqrt{1 + 2\chi/c^2}. \quad (10.84)$$

Она зависит от значения скалярного гравитационного потенциала χ в том месте, где частица находится в данный момент. Это особенно интересно, если рассматривать (практически) статическую вселенную, подобную нашей. Тогда мировое время t имеет тот самый операционный смысл, который обсуждался в начале этого параграфа. В соответствии с уравнениями (10.80), которые в этом случае описывают движение по отношению к мировому времени, инертность медленно движущейся частицы, т. е. ее сопротивление действию силы \mathfrak{F}_μ , определяется массой покоя m_0 .

Из (10.84) следует, что m_0 увеличивается по мере приближения частицы к большому телу, подобному нашему Солнцу, так как χ при этом принимает увеличивающиеся отрицательные значения. Это соответствует принципу Маха, согласно которому инерция частицы обусловлена наличием других тел. Из этого принципа следует, что собственная масса частицы, т. е. значение m_0 , когда частица достаточно удалена от всех звезд, также является результатом взаимодействия частицы с удаленными звездами нашей Вселенной. Эйнштейн надеялся, что применение его теории ко всей Вселенной как к целому сможет дать основу для понимания природы собственной массы частицы, в соответствии с точкой зрения Маха. Хотя эта надежда не оправдалась, зависимость (10.84) массы m_0 от гравитационного поля соседних масс указывает на то, что в идеях Маха есть некоторая доля истины. В последние годы многие исследователи пытались эти идеи Маха полностью включить в обобщенные варианты теории Эйнштейна [108, 35, 58, 281, 282, 104], но содержание всех этих работ выходит за рамки данной книги.

В предыдущем параграфе мы выразили компоненты \bar{P}^i , \bar{P}_i стандартного 4-импульса через физические величины \mathbf{p} и E . Физическая интерпретация контравариантных компонент 4-импульса P^i вытекает теперь из (10.62), (10.67) и (10.68):

$$P^i = \dot{m}_0 (dt/d\tau) dx^i/dt = m dx^i/dt = (p^i, mc), \quad (10.85)$$

где m — координатная масса. Ковариантные компоненты P_i находятся с помощью (10.15) и (10.17):

$$\left. \begin{aligned} P_i &= (P_\mu, -H/c); \\ P_\mu &= p_\mu + \gamma_\mu E/c; \quad H = E \sqrt{1 + 2\chi/c^2}. \end{aligned} \right\} \quad (10.86)$$

Физический смысл этих величин станет ясным в следующем параграфе.

Упражнение. Решение парадокса Лэффера [172]

При исследовании парадокса часов в § 8.17 было показано, что скорость часов C_1 относительно системы S_2 в момент времени $t = \tau'_2$ меняется скачком от значения $u_- = -v\sqrt{1 - v^2/c^2}$ до значения $-v$ [см. (8.195), (8.196)]. Этот парадокс объясняется, если рассмотреть импульс и кинетическую энергию часов C_1 в S_2 непосредственно перед моментом времени τ'_2 ; гравитационное поле в S_2 описывается с учетом (8.162), (8.173), (8.183) формулами

$$\begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu}; \quad \gamma_\mu = 0 \quad \text{и} \quad 1 + 2\chi/c^2 = \\ &= (1 + gx/c^2)^2 = [\text{ch}(g\tau'_2/c)]^{-2} = 1 - \text{th}^2(g\tau'_2/c) = 1 - v^2/c^2. \end{aligned}$$

Показать, что координатная масса часов C_1 в S_2 в соответствии с (10.65), (10.67) тогда равна $m_- = \dot{m}_0/(1 - v^2/c^2)$. Следовательно, импульс и кинетическая энергия определяются как

$$\begin{aligned} p_- &= m_- u_- = -\dot{m}_0 v/(1 - v^2/c^2)^{1/2}; \\ E_- &= m_- cc^* = \dot{m}_0 c^2/(1 - v^2/c^2)^{1/2}. \end{aligned}$$

Непосредственно после τ'_2 , когда S_2 является инерциальной системой, имеем $m_+ = \dot{m}_0/(1 - v^2/c^2)^{1/2}$, $u_+ = -v$.

В результате $p_+ = p_-$, $E_+ = E_-$, т. е. при $t = \tau'_2$, когда потенциал меняется скачком, импульс и кинетическая энергия непрерывны. Следовательно, причиной скачка координатной скорости является резкое изменение координатной массы от m_- до m_+ при $t = \tau'_2$.

В отличие от координатной скорости u , стандартная скорость \check{y} (10.32), очевидно, всегда непрерывна.

§ 10.4. Лагранжева и гамильтонова формы уравнений движения

В этом параграфе мы покажем, что уравнения движения (10.76) свободной частицы можно записать в лагранжевой форме [168]. В гл. 8 мы видели, что мировая линия свободной частицы может быть получена из вариационных принципов (8.93) и (8.97). Поскольку в последнем из этих уравнений подинтегральное выражение является однородной функцией первой степени от производной $dx^i/d\lambda$, вариационный принцип (8.97) выполняется при любом выборе параметра λ . Если выбрать λ равным t и умножить (8.97) на $-\dot{m}_0 c$, то принцип Лагранжа примет следующую форму:

$$\delta \int_{t_1}^{t_2} L(u^\mu, x^\mu, t) dt = 0, \quad (10.87)$$

где

$$L = -\dot{m}_0 c [-g_{ik} (dx^i/dt) (dx^k/dt)]^{1/2} = -\dot{m}_0 c^2 d\tau/dt, \quad (10.88)$$

или в соответствии с (10.62) и (10.65)

$$L = -\dot{m}_0 c^2/\Gamma = -\dot{m}_0 c \{(c^* - \gamma_\mu u^\mu)^2 - \gamma_{\mu\nu} u^\mu u^\nu\}^{1/2}. \quad (10.89)$$

Здесь c^* , γ_μ и $\gamma_{\mu\nu}$ — известные функции от x^μ и t . В (10.87) функции $x^\mu = x^\mu(t)$, описывающие траекторию в системе отсчета R , варьируются так, чтобы $\delta x^\mu(t) = 0$ при $t = t_1$ и $t = t_2$. Соответствующие уравнения Лагранжа следующие:

$$d(\partial L/\partial u^\mu)/dt = \partial L/\partial x^\mu. \quad (10.90)$$

Канонический импульс получается дифференцированием функции $L(u^\mu, x^i)$ по скоростям u^μ , что с учетом (10.67) и (10.65) дает

$$\frac{\partial L(u^\mu, x^i)}{\partial u^\mu} = \dot{m}_0 c \left\{ (c^* - \gamma_\nu u^\nu) u_\mu + \gamma_{\mu\nu} u^\nu \right\} / \left\{ (c^* - \gamma_\nu u^\nu)^2 - u^2 \right\}^{1/2} = m u_\mu + m (c^* - \gamma_\nu u^\nu) \gamma_\mu. \quad (10.91)$$

Кроме того, используя (10.68) и (10.86), видим, что пространственные ковариантные компоненты 4-импульса равны компонентам канонического импульса, т. е.

$$P_\mu = p_\mu + E \gamma_\mu / c = \partial L(u^\mu, x^i) / \partial u^\mu. \quad (10.92)$$

Канонический импульс отличается от импульса p величиной, пропорциональной гравитационному векторному потенциалу γ , что аналогично выражению из СТО

$$p = p + eA/c$$

для канонического импульса частицы с зарядом e в электромагнитном поле с векторным потенциалом A . В соответствии с (10.92) уравнение Лагранжа (10.90) можно представить в форме

$$dP_\mu / dt = \partial L / \partial x^\mu. \quad (10.93)$$

Лагранжиан (10.89) можно теперь записать в виде

$$L = -m \left\{ (c^* - \gamma u)^2 - u^2 \right\}, \quad (10.94)$$

где m — координатная масса. Поэтому соответствующий гамильтониан равен

$$H \equiv P_\mu u^\mu - L = m u^2 + m (c^* - \gamma u) (\gamma u) + m \left\{ (c^* - \gamma u)^2 - u^2 \right\},$$

или с учетом (10.68) и (10.15)

$$H = m c^* (c^* - \gamma u) = E \sqrt{1 + 2\chi/c^2} = -c P_4. \quad (10.95)$$

Таким образом, величина H в (10.15) равна гамильтониану и может интерпретироваться как полная энергия частицы в гравитационном поле. В стационарном случае, когда g_{ik} не зависит от времени, $L(u^\mu, x^\mu)$ и H являются постоянными. В общем случае обычным путем с помощью уравнений Лагранжа (10.90) получим

$$dH/dt = -\partial L(u^\mu, x^\mu, t) / \partial t. \quad (10.96)$$

Уравнения (10.93) и (10.96) можно объединить в одно четырехкомпонентное уравнение

$$dP_i/dt = \partial L(u^\mu, x^i) / \partial x, \quad (10.97)$$

которое с точностью до множителя Γ^{-1} совпадает с уравнением (10.3) при $F_i = 0$. Поэтому при наличии негравитационной силы уравнение (10.97) следует заменить уравнением

$$dP_i/dt - \partial L(u^\mu, x^i) / \partial x^i = \tilde{\mathcal{F}}_i, \quad (10.98)$$

где

$$\tilde{\mathcal{F}}_i = F_i / \Gamma. \quad (10.99)$$

Учитывая (10.1), компоненты $\tilde{\mathcal{F}}_i$ можно записать в виде

$$\tilde{\mathcal{F}}_i = (\tilde{\mathcal{F}}_\mu, -\tilde{\mathcal{F}}_\mu u^\mu / c), \quad \tilde{\mathcal{F}}_\mu = F_\mu / \Gamma. \quad (10.100)$$

Таким образом, чтобы описать все аспекты негравитационного действия, мы ввели три различных 3-вектора: стандартную силу $\hat{\mathcal{F}}$ (10.44), (10.39), координатную силу \mathcal{F} (10.76), (10.71) и вектор $\tilde{\mathcal{F}}$ (10.100). Стандартная сила описывает изменение импульса за единицу стандартного времени, обусловленное

действием негравитационной силы. Координатная сила описывает соответствующее изменение за единицу координатного времени. Поэтому \mathfrak{F} и $\tilde{\mathfrak{F}}$ пропорциональны друг другу, причем коэффициент пропорциональности равен отношению (10.66) стандартного и координатного временных дифференциалов. Теперь из уравнений (10.98) при $i = \mu = 1, 2, 3$ видно, что $\tilde{\mathfrak{F}}$ описывает изменение канонического импульса P_μ за единицу координатного времени, обусловленное негравитационным действием. Поэтому $\tilde{\mathfrak{F}}$ будем называть канонической силой. Из определений (10.71) и (10.100) двух сил \mathfrak{F} и $\tilde{\mathfrak{F}}$ и соотношения (9.297) между \bar{F}_μ и F_μ получим следующую зависимость между координатной и канонической силами:

$$\mathfrak{F} = \tilde{\mathfrak{F}} - \gamma(\tilde{\mathfrak{F}}\mathbf{u})/c^*, \quad (10.101)$$

откуда

$$\tilde{\mathfrak{F}}\mathbf{u} = (\mathfrak{F}\mathbf{u})(1 - \gamma\mathbf{u}/c^*)^{-1}. \quad (10.102)$$

Из (10.98) при $i = 4$ получаем закон сохранения энергии H :

$$dH/dt = -\partial L(u^\mu, x^\mu, t)/\partial t + \tilde{\mathfrak{F}}_\mu u^\mu. \quad (10.103)$$

Таким образом, изменение полной энергии H , обусловленное действием негравитационной силы на отрезке траектории частицы между точками 1 и 2, равно работе канонической силы:

$$\tilde{A}_{н.г}(1,2) = \int_1^2 \tilde{\mathfrak{F}}_\mu u^\mu dt = \int_1^2 \tilde{\mathfrak{F}}_\mu dx^\mu. \quad (10.104)$$

С учетом (10.46) и (10.48) соответствующее изменение кинетической энергии равно работе стандартной силы

$$\hat{A}_{н.г}(1,2) = \int_1^2 \hat{\mathfrak{F}}_\mu dx^\mu. \quad (10.105)$$

В общем случае $\hat{A}_{н.г}(1,2) \neq \tilde{A}_{н.г}(1,2)$.

В СТО динамическое воздействие на частицу с постоянной собственной массой может быть описано одним вектором силы и ее работой. Причиной введения в СТО нескольких 3-векторов и их соответствующих работ является нелинейность энергий и сил как функций от гравитационных потенциалов. Однако во времени ортогональной системе координат (или при малых скоростях, когда можно пренебречь величинами порядка $\gamma\mathbf{u}/c^*$), все эти трудности значительно уменьшаются, поскольку каноническая сила совпадает с координатной силой:

$$\tilde{\mathfrak{F}} = \mathfrak{F}; \quad \tilde{\mathfrak{F}}\mathbf{u} = \mathfrak{F}\mathbf{u}; \quad \tilde{A}_{н.г}(1,2) = A_{н.г}(1,2) \equiv \int_1^2 \mathfrak{F}_\mu dx^\mu. \quad (10.106)$$

Для частицы, покоящейся в данной системе отсчета, H сводится к энергии покоя H_0 частицы в поле, которая с учетом (10.95), (10.69) и (10.84) равна

$$H_0 = m_0 c^2 = \dot{m}_0 c^2 (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} = E_0 (1 + 2\chi/c^2)^{1/2}, \quad (10.107)$$

где

$$E_0 = m_0 c c^* = \dot{m}_0 c^2 = \dot{E}_0 \quad (10.108)$$

— собственная энергия частицы. Если скорость частицы мала, то, разлагая H в ряд по u/c и ограничиваясь величинами второго порядка малости, получаем

$$H = H_0 + m_0 u^2/2. \quad (10.109)$$

Таким образом, при нерелятивистских скоростях H равна сумме энергии покоя частицы в поле и нерелятивистской кинетической энергии частицы с массой

полю m_0 . В случае слабого поля, когда $\chi/c^2 \ll 1$, (10.109) сводится к ньютоновскому выражению для энергии частицы в поле плюс собственная энергия, т. е.

$$H = \dot{m}_0 c^2 + \dot{m}_0 u^2/2 + \dot{m}_0 \chi. \quad (10.110)$$

Последняя величина в (10.110) представляет собой ньютоновскую потенциальную энергию. Соответствующая формула при условии больших скоростей и сильных полей имеет вид

$$H = E + V, \quad (10.111)$$

где потенциальная энергия

$$V = E \{(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} - 1\} \quad (10.112)$$

в общем случае зависит не только от координат, но и от скоростей, но для покоящейся частицы уравнение (10.112) принимает вид

$$V_0 = \dot{m}_0 c^2 \{(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} - 1\} = H_0 - \dot{m}_0 c^2 = m_0 c^{*2} - \dot{m}_0 c^2. \quad (10.113)$$

В стационарном поле эта *потенциальная энергия покоя* имеет простой физический смысл. Чтобы понять его, вычислим работу, которую необходимо произвести против гравитационной силы, при адиабатическом, т. е. бесконечно медленном перемещении частицы с собственной массой \dot{m}_0 из фиксированного положения 1 в другое фиксированное положение 2 в жесткой системе отсчета R , соответствующей стационарной координатной системе S . В соответствии с уравнениями (10.76) и (10.77) это означает, что мы должны приложить к частице негравитационную силу \mathfrak{F} , которая в любой момент времени почти уравновешивает гравитационную силу \mathfrak{R} , т. е.

$$\mathfrak{F} + \mathfrak{R} \simeq 0, \quad \hat{\mathbf{u}} \approx 0. \quad (10.114)$$

Тогда из (10.78) следует, что кинетическая энергия частицы во всех точках ее траектории практически равна нулю, т. е. $E = \dot{m}_0 c^2$. Интегрируя (10.13) и учитывая, что L не зависит от времени, а $\mathbf{u} \approx 0$, т. е. $\mathfrak{F}_\mu = \mathfrak{F}_\mu$, получаем

$$H_0(2) - H_0(1) = V_0(2) - V_0(1) = \int_1^2 \mathfrak{F}_\mu dx^\mu. \quad (10.115)$$

Таким образом, потенциальная энергия покоя в любой точке стационарного поля равна работе координатной силы на адиабатическом перемещении частицы из фиксированной точки, где $\chi = 0$, в эту точку. Это согласуется с (10.114) и (10.173), (10.75), (10.84), которые для адиабатического перемещения дают

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{F}_\mu &= -\mathfrak{R}_\mu = m_0 \partial\chi/\partial x^\mu = \dot{m}_0 c^2 \partial(1 + 2\chi/c^2)^{1/2}/\partial x^\mu; \\ A_{\text{н.г}}(1, 2) &= \int_1^2 \mathfrak{F}_\mu dx^\mu = \dot{m}_0 c^2 \{(1 + 2\chi_2/c^2)^{1/2} - (1 + 2\chi_1/c^2)^{1/2}\} \end{aligned} \right\} \quad (10.116)$$

Заметим, что работа стандартной силы не равна $A_{\text{н.г}}(1, 2)$. Вместо (10.116) для адиабатического процесса с учетом (10.44), (10.41), (10.38) и (10.25), (10.26) получаем

$$\hat{\mathfrak{F}}_\mu = -\hat{\mathfrak{R}}_\mu = -\dot{m}_0 \hat{a}_\mu = [\dot{m}_0/(1 + 2\chi/c^2)] \partial\chi/\partial x^\mu. \quad (10.117)$$

В результате

$$\hat{A}_{\text{н.г}}(1, 2) = \int_1^2 \hat{\mathfrak{F}}_\mu dx^\mu = \dot{m}_0 c^2 \ln [(1 + 2\chi_2/c^2)^{1/2}/(1 + 2\chi_1/c^2)^{1/2}], \quad (10.118)$$

что отличается от $A_{н.г}$ (1, 2), за исключением приближения слабого поля, когда обе эти величины равны \dot{m}_0 ($\chi_2 - \chi_1$).

Теперь от лагранжевой формы уравнений движения мы можем обычным путем перейти к гамильтоновой форме. С помощью (10.91) и (10.92) в выражении (10.99) можно исключить скорость u^μ и получить гамильтониан $H = H(P_\mu, x^\mu, t)$ как функцию от сопряженных канонических переменных (P_μ, x^μ) и t . Тогда уравнения движения можно записать в гамильтоновой форме $dP_\mu/dt = -\partial H/\partial x^\mu$; $dx^\mu/dt = \partial H/\partial P_\mu$ и соответствующим выбором контактного преобразования использовать метод интегрирования Гамильтона — Якоби.

До сих пор мы предполагали, что собственная масса \dot{m}_0 постоянна. Однако все предыдущие рассуждения можно легко распространить и на случай переменной \dot{m}_0 . Тогда вместо (10.3) имеем

$$DP_i/d\tau = F_i^*, \quad (10.119)$$

где F_i^* — обобщенная 4-сила вида (4.68), для которой $F_i^* U^i \neq 0$.

§ 10.5. Распространение световых сигналов. Принцип Ферма

В § 8.10 было показано, что мировая линия светового сигнала в вакууме описывается уравнениями (8.100), где специальный параметр λ определен лишь с точностью до произвольного линейного преобразования. Полагая

$$dx^i/d\lambda = P^i, \quad (10.120)$$

уравнения (9.100) можно записать в форме

$$dP_i/d\lambda - (1/2) g_{kl, i} (dx^k/d\lambda) P^l \equiv DP_i/d\lambda = 0; \quad (10.121)$$

$$g_{ik} P^i P^k = P_i P^i = 0. \quad (10.122)$$

Сравнение этих уравнений с (10.3), (10.5) и (10.6) показывает, что движение светового сигнала в гравитационном поле соответствует движению свободно падающей частицы с 4-импульсом P_i и нулевой собственной массой, которую можно назвать «световой частицей».

Уравнения (10.121), (10.122) эквивалентны сопряженным стандартным векторным уравнениям

$$\bar{D} \bar{P}_i/d\lambda = 0; \quad (10.123)$$

$$\bar{g}_{ik} \bar{P}^i \bar{P}^k = \bar{P}_i \bar{P}^i = 0, \quad (10.124)$$

которые аналогичны (10.11) и (10.10). Здесь

$$\left. \begin{aligned} \bar{P}^i &\equiv (p^\mu, E/c) = d\bar{x}^i/d\lambda = (dt/d\lambda) dx^\mu/dt; \\ \bar{P}_i &= (p_\mu, -E/c) \end{aligned} \right\} \quad (10.125)$$

— стандартный 4-импульс световой частицы. Из (9.330) и (10.30) имеем

$$d\bar{x}^i/dt = (dx^\mu/dt, cd\hat{t}/dt) = (\omega^\mu, c^* - \gamma_\mu \omega^\mu), \quad (10.126)$$

где $\omega^\mu = dx^\mu/dt$ — координатная скорость световой частицы. Подставляя (10.125) и (10.126) в (10.124) и используя (9.299), получаем

$$\gamma_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu - (c^* - \gamma_\mu \omega^\mu)^2 = 0$$

или

$$\omega = \sqrt{\gamma_{\mu\nu} \omega^\mu \omega^\nu} = c^* - \gamma \omega \quad (10.127)$$

в соответствии с (8.68). Положим

$$m = dt/d\lambda, \quad (10.128)$$

тогда из (10.125)—(10.127) получим следующие выражения для импульса и кинетической энергии световой частицы:

$$\mathbf{p} = m\mathbf{w}; \quad E = mc\omega. \quad (10.129)$$

Следовательно, m представляет собой (релятивистскую) координатную массу световой частицы. Аналогично, полагая

$$\hat{m} = \hat{d}t/d\lambda, \quad (10.130)$$

получаем

$$\bar{\mathbf{p}} = \hat{m} \hat{\mathbf{w}}; \quad E = \hat{m}c^2, \quad (10.131)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \hat{\omega}^\mu &= dx^\mu/d\hat{t} = c\omega^\mu/(c^* - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{w}) = c\omega^\mu/\omega; \\ \hat{\omega} &= |\hat{\mathbf{w}}| = c \end{aligned} \right\} \quad (10.132)$$

— стандартная скорость, а \hat{m} — стандартная масса световой частицы.

Умножение (10.123) на $d\lambda/d\hat{t}$ приводит к стандартным уравнениям движения, соответствующим уравнениям (10.42), (10.43) для частицы с конечной собственной массой. Однако для нас более интересна координатная форма уравнений, получаемая умножением (10.23) на $d\lambda/dt$. Это дает по аналогии с (10.69)

$$\hat{D}\bar{P}_i/dt = \mathfrak{R}_i, \quad (10.133)$$

где \mathfrak{R}_i получается из (10.73), (10.75) и (10.72), если положить: $u^\mu = \omega^\mu$, $\hat{u}^\mu = \hat{\omega}^\mu$, а $c^* - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{u} = c^* - \boldsymbol{\gamma}\mathbf{w} = \omega$. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{R}_\mu &= m(\omega^2 a_\mu/c^{*2} + 2\omega_{\mu\nu} \omega^\nu \omega/c); \\ \mathfrak{R}_4 &= -\mathfrak{R}_\mu \hat{\omega}^\mu/c = -\mathfrak{R}_\mu \omega^\mu/\omega = -E(a_\mu \omega^\mu)/(cc^{*2}). \end{aligned} \right\} \quad (10.134)$$

Здесь мы использовали также (10.129) и (10.132). По аналогии с (10.76)—(10.78) четыре уравнения (10.133) можно расписать более подробно:

$$D^{(3)} p_\mu/dt = \gamma_\mu d_{\nu\lambda} p^\nu \omega^\lambda/c + \mathfrak{R}_\mu; \quad (10.135)$$

$$dE/dt = -d_{\nu\lambda} p^\nu \omega^\lambda + E(a_\mu \omega^\mu)/c^{*2}. \quad (10.136)$$

Для световой частицы соотношения (10.18) и (10.20) принимают особенно простой вид, поскольку в этом случае правые части этих соотношений обращаются в нуль. В результате с учетом (10.129) имеем

$$\mathbf{p} = \frac{E}{c} \frac{\mathbf{w}}{\omega} = \frac{E}{c} \mathbf{e} = \frac{H}{c^*} \mathbf{e}, \quad (10.137)$$

где \mathbf{e} — единичный направляющий вектор движения, а

$$H = -cP_4 = E(1 + 2\chi/c^2)^{\frac{1}{2}} = mc^* \omega \quad (10.138)$$

— полная энергия (10.15) световой частицы с учетом ее взаимодействия с гравитационным полем.

Пусть теперь g_{ik} не зависит от времени, $d_{\nu\lambda} = 0$. В этом случае H — постоянная. Это также следует из уравнения (10.136), которое в данном случае сводится к

$$dE/dt = -E(\partial\chi/\partial x^\mu) dx^\mu/dt/c^{*2} = -(E/c^*) dc^*/dt.$$

или

$$dcH/dt = c^* dE/dt + E dc^*/dt = 0. \quad (10.139)$$

Тогда, используя (10.134), (10.138), (10.137) и то обстоятельство, что H — постоянная, уравнение (10.135) записываем в виде

$$D^{(3)}(e_\mu/c^*)/dt = -(\omega/c^{*3})\partial\chi/\partial x^\mu + 2\omega_{\mu\nu}\omega^\nu/cc^*, \quad (10.140)$$

где в соответствии с (8.135) и (8.130)

$$2\omega_{\mu\nu}/c^* = \sigma_{\nu, \mu} - \sigma_{\mu, \nu}. \quad (10.141)$$

В стационарном случае траектория световой частицы, луча света, является кривой, не зависящей от времени в R . Как мы теперь увидим, ее можно определить из вариационного принципа, аналогичного принципу Ферма.

Пусть

$$x^\mu = x^\mu(\lambda) \quad (10.142)$$

есть уравнение траектории луча в параметрическом представлении с произвольным параметром λ , а 1 и 2 — две произвольные точки на луче, соответствующие значениям λ_1 и λ_2 этого параметра. Положим $u^\mu = dx^\mu/d\lambda$ и рассмотрим следующую функцию F от $x^\mu(\lambda)$ и $u^\mu(\lambda) = dx^\mu/d\lambda$:

$$F(u^\mu, x^\mu) = (V\gamma_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda + \gamma_\nu u^\nu)/c^*. \quad (10.143)$$

Тогда можно показать, что функции $x^\mu(\lambda)$ в (10.142) удовлетворяют следующему вариационному принципу:

$$\left. \begin{aligned} \delta \int_1^2 F(u^\mu, x^\mu) d\lambda &= 0; \\ \delta x^\mu(\lambda_1) &= \delta x^\mu(\lambda_2) = 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.144)$$

Уравнения Эйлера $d(\partial F/\partial u^\mu)/d\lambda = \partial F/\partial x^\mu$, соответствующие этому принципу, дают, поскольку $\gamma_\mu/c^* = \sigma_\mu/c$:

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\lambda} \left(\frac{\gamma_{\mu\nu}u^\nu}{c^* V\gamma_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda} + \frac{\sigma_\mu}{c} \right) &= \frac{1}{2} \frac{\gamma_{\nu\lambda, \mu} u^\nu u^\lambda}{c^* V\gamma_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda} - \\ &\quad - \frac{V\gamma_{\nu\lambda}u^\nu u^\lambda}{c^{*2}} \frac{\partial c^*}{\partial x^\mu} + \sigma_{\nu, \mu} u^\nu/c. \end{aligned}$$

Это можно записать также в виде

$$D^{(3)}(e_\mu/c^*)/d\lambda = -(u/c^{*3})\partial\chi/\partial x^\mu + (\sigma_{\nu, \mu} - \sigma_{\mu, \nu})u^\nu/c, \quad (10.145)$$

где

$$u^2 = \gamma_{\mu\nu}u^\mu u^\nu$$

есть норма 3-вектора u^μ , а

$$e_\mu = \gamma_{\mu\nu}u^\nu/u = \gamma_{\mu\nu}dx^\nu/d\sigma \quad (10.146)$$

— единичный 3-вектор, касательный к кривой.

Поскольку $F(u^\mu, x^\mu)$ — однородная функция от $\partial x^\mu/\partial\lambda$ первой степени, вариационный принцип (10.144) и уравнения Эйлера (10.145) инвариантны относительно произвольных преобразований параметра λ . Если выбрать $\lambda = t$, то (10.145) совпадут с уравнениями (10.140) для светового луча. Таким образом, траектория луча определяется вариационным принципом (10.144), который имеет простой физический смысл.

В соответствии с (10.143)

$$F(u^\mu, x^\mu) d\lambda = \{V\gamma_{\mu\nu}dx^\mu dx^\nu + \gamma_\nu dx^\nu\}/c^* = d\sigma(1 + \gamma_\nu e^\nu)/c^*, \quad (10.147)$$

где $e^\nu = dx^\nu/d\sigma$ — контравариантные компоненты 3-вектора (10.146). Поэтому, используя (8.72), видим, что вариационный интеграл

$$\int_{\lambda_1}^{\lambda_2} F(u^\mu, x^\mu) d\lambda = \int_1^2 \frac{d\sigma}{\omega(e)} = t_2 - t_1 \equiv \Delta t \quad (10.148)$$

равен (координатному) времени, в течение которого световой сигнал проходит путь от точки 1 до точки 2. В соответствии с принципом (10.144) для действительной траектории светового луча это время является экстремальным (обычно минимальным). Это и есть *принцип Ферма*. Удивительно, что этот, сформулированный в XVII в. принцип все еще используется, по крайней мере формально, в наиболее современной теории распространения света. Однако необходимо заметить, что имеют место и существенные различия между принципом (10.144) и классическим принципом Ферма. Во-первых, геометрия физического пространства в R в общем случае неевклидова. Во-вторых, временной промежуток Δt в (10.144), (10.148) является промежуток координатного времени, измеренным координатными часами в S . Если Δt заменим промежутком стандартного времени, то с помощью (10.132) получим

$$\Delta \hat{t} = \int_1^2 d\sigma/\tilde{\omega} = \int_1^2 d\sigma/c, \quad (10.149)$$

а соответствующий вариационный принцип

$$\delta(\Delta \hat{t}) = (1/c) \delta \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (d\sigma/d\lambda) d\lambda = (1/c) \int_{\lambda_1}^{\lambda_2} (\gamma_{\nu\lambda} u^\nu u^\lambda)^{1/2} d\lambda = 0 \quad (10.150)$$

приводит к уравнениям геодезической в физическом пространстве

$$D^{(3)} e_\mu/d\lambda \equiv d(u_\mu/u)/dt - (1/2) \gamma_{\nu\lambda, \mu} u^\nu u^\lambda/u = 0. \quad (10.151)$$

Таким образом, вариационный принцип (10.150), в котором координатное время заменено стандартным временем, не дает правильного описания распространения светового сигнала, за исключением тех областей, где гравитационные потенциалы χ и γ_μ одинаковы, т. е. когда отсутствует гравитационная сила. В общем случае луч света не является «напрямейшей» линией, причем это отклонение определяется гравитационной силой. Комбинируя (10.144) и (10.147), принцип Ферма можно представить в форме

$$\delta \int (n/c) d\sigma = 0, \quad (10.152)$$

где

$$n(x^\mu, e) = (1 + \gamma_\nu e^\nu)/(1 + 2\chi/c^2)^{1/2}. \quad (10.153)$$

Таким образом, распространение света в *вакууме* при наличии стационарного гравитационного поля аналогично распространению света в неоднородной не-изотропной преломляющей среде с показателем преломления (10.153). Эта аналогия не всегда является полной, поскольку распространение света в гравитационном поле с $\gamma_\mu \neq 0$ не удовлетворяет оптическому принципу обратимости, согласно которому луч света в преломляющей среде распространяется по одной и той же траектории в прямом и обратном направлениях. Такое несоответствие следует из выражения (10.153) для n , которое меняется при замене e на $-e$, в отличие от показателя преломления обычной среды, который даже в не-изотропном случае не меняется при замене $e \rightarrow -e$. Однако в статическом гравитационном поле, например в поле Солнца (см. § 12.2), $\gamma_\mu = 0$, $\chi < 0$. Тогда

$$n(x^\mu) = (1 + 2\chi/c^2)^{-1/2} > 0, \quad (10.154)$$

и аналогия с неоднородной, но изотропной средой без дисперсии будет полной (см. также § 10.9). Это и есть причина одного из трех эйнштейновских эффектов — отклонения луча света в гравитационном поле Солнца (см. § 12.3).

§ 10.6. Распространение световых волн. Фотоны

В предыдущем параграфе было показано, что распространение световых сигналов эквивалентно движению световых частиц. Такое описание, которое похоже на корпускулярную теорию света Ньютона, конечно, не полно, так как оно не учитывает волновые свойства света. Чтобы объяснить, например, явление интерференции, необходимо ввести понятие волны, характеризующейся определенной частотой и длиной волны. Вспомним, что в СТО плоская монохроматическая волна в любой инерциальной системе описывается следующим образом [см. (2.67) и (4.43)]:

$$\psi = A \cos 2\pi F, \quad (10.155)$$

где ψ может обозначать любую компоненту тензора электромагнитного поля, а фаза F является линейной функцией лоренцевых координат X^i :

$$-F = K_i X^i + \delta. \quad (10.156)$$

Здесь

$$K_i = -\partial F / \partial X^i = (n\nu/\omega(\mathbf{n}), -\nu/c) = (\mathbf{n}/\lambda, -\nu/c) \quad (10.157)$$

— постоянный волновой 4-вектор; δ — постоянная;

$$\nu = -cK_4 = \partial F / \partial T \quad (10.158)$$

— частота; λ — длина волны; $\omega(\mathbf{n})$ — фазовая скорость в направлении \mathbf{n} 3-вектора K_μ . В вакууме, где $\omega = c$, 4-вектор K_i , очевидно, является нулевым вектором, поскольку в этом случае

$$K_i K^i = \eta^{ik} K_i K_k = (\nu/c)^2 |\mathbf{n}|^2 - (\nu/c)^2 = 0. \quad (10.159)$$

Плоская волна (10.155) характеризуется тем, что волновой вектор K_i и амплитуда A везде одинаковы. Для световой волны в однородной среде формула (10.155) является решением уравнений, следующих из уравнений Максвелла, но в случае неоднородной среды это не так. Конечно, решение волнового уравнения всегда можно записать в форме

$$\psi = A(X) \cos 2\pi F(X), \quad (10.160)$$

где амплитуда $A(X)$ в общем случае уже не постоянна, а $F(X)$ не является линейной функцией X^i , т. е. волна уже не плоская. Однако во многих важных случаях волна (10.160) обладает тем свойством, что $A(X)$ и компоненты отрицательного градиента от $F(X)$

$$K_i = -\partial F(X) / \partial X^i \quad (10.161)$$

практически постоянны в некоторой области Ω в окрестности произвольной точки P с координатами X_P^i . Тогда, разлагая функции F и A в ряд Тейлора по $\xi = X^i - X_P^i$, получаем, что внутри Ω волну ψ можно представить в виде

$$\psi = A(P) \cos 2\pi (-K_i(P) \xi^i - \delta), \quad (10.162)$$

где $A(P)$, $\delta = -F(P)$ и $K_i(P)$ — значения величин A , $-F$ и K_i в точке P . Сравнение (10.162), с (10.155)—(10.158) показывает, что ψ внутри Ω представляет собой плоскую волну с частотой

$$\nu(P) = -cK_4(P) = \partial F(P) / \partial T, \quad (10.163)$$

так что величина $\lambda(P)^{-1}$ равна длине 3-вектора $K_\mu(P)$. Величины $A(P)$, $K_i(P)$ являются медленно меняющимися функциями P , и если размеры области Ω , внутри которой они могут рассматриваться как постоянные величины, достаточно большие по сравнению с λ и c/ν , то мы находимся в сфере применения *геометрической оптики*. Необходимое условие для этого — однородность (практически) среды внутри области Ω . Для данной (сплошной) среды это условие

всегда выполняется при достаточно коротких длинах волн. В геометрической оптике фазовая функция $-2\pi F(x)$ называется *эйконалом*.

Теперь рассмотрим случай плоской монохроматической волны в *вакууме*. В лоренцевой системе координат она описывается волновыми функциями (10.155) — (10.158), где $\omega = c$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}$ и постоянные A , δ и K_i удовлетворяют соотношению (10.159). Если с помощью общего преобразования (8.42) ввести произвольную систему S координат (x^i) , то волновая функция ψ в S будет иметь вид

$$\psi = A(x) \cos 2\pi F(x), \quad (10.164)$$

где $F(x)$ — (нелинейная) функция от x^i , полученная из линейной функции (10.156) заменой лоренцевых координат. Отрицательный градиент скаляра $F(x)$ с ковариантными компонентами

$$K_i = -\partial F / \partial x^i \quad (10.165)$$

является нулевым вектором, поскольку в новой системе S с метрическим тензором g_{ih} соотношение (10.159) принимает вид

$$K_i K^i = g^{ik} (\partial F / \partial x^i) \partial F / \partial x^k = 0. \quad (10.166)$$

Сравнение (10.164) с (10.160) показывает, что распространение световой волны в S , где присутствует устранимое гравитационное поле, аналогично распространению световой волны в инерциальной системе при наличии неоднородной преломляющей среды. Единственное отличие в том, что пространственная геометрия в системе отсчета R , соответствующей S , может быть неевклидовой. Согласно основному постулату ОТО, нет существенной разницы между устранимыми и неустранимыми гравитационными полями. Поэтому (10.164) — (10.166) можно рассматривать как общие выражения, описывающие распространение монохроматической волны в гравитационном поле. Во многих важных случаях и в подходящих системах координат величины A , K_i , g_{ih} в областях Ω , больших по сравнению с длиной волны, практически постоянны, и можно применять приближение геометрической оптики.

Пусть теперь P и P' — два близких точечных события с координатами (x^i) и $(x^i + dx^i)$. Тогда разность фаз в этих точках

$$dF = (\partial F / \partial x^i) dx^i = -K_i dx^i = -K_\mu dx^\mu - cK_4 dt. \quad (10.167)$$

Для двух событий в фиксированной точке отсчета, т. е. при $dx^\mu = 0$, это дает

$$dF = -cK_4 dt. \quad (10.168)$$

Поскольку dF в этом случае равна количеству волн, прошедших через данную точку отсчета в течение промежутка координатного времени dt , величину

$$v = -cK_4 = \partial F / \partial t \quad (10.169)$$

будем называть *координатной частотой*. В области применения геометрической оптики v — медленно меняющаяся функция координат.

Пусть \bar{K}_i — сопряженный стандартный волновой вектор. Тогда в соответствии с (9.334) при $\psi = -F(x)$

$$\bar{K}_i = -\bar{\partial}_i F, \quad (10.170)$$

где $\bar{\partial}_i$ — оператор (9.336). Используя (9.138) и (9.299), формулу (10.166) можно привести к виду

$$\bar{K}_i \bar{K}^i = \bar{g}_{ih} \bar{K}^i \bar{K}^h = \gamma_{\mu\nu} \bar{K}^\mu \bar{K}^\nu - (\bar{K}_4)^2 = 0. \quad (10.171)$$

Пространственная часть стандартного волнового вектора есть калибровочноинвариантный вектор \mathbf{k} с длиной

$$k = \sqrt{\gamma_{\nu\lambda} k^\nu k^\lambda}, \quad (10.172)$$

и из (10.171) следует, что $\bar{K}^4 = k$. В результате

$$\left. \begin{aligned} \bar{K}^i &= (k^\mu, k); \\ \bar{K}_i &= -\bar{\partial}_i F = (k_\mu, -k). \end{aligned} \right\} \quad (10.173)$$

Используя (9.336) и (8.130), а также (10.165), (10.169) и (10.173), получаем

$$k = \bar{\partial}_4 F = \Gamma^4 \partial F / \partial x^4 = (1/c^*) \partial F / \partial t = v/c^*; \quad (10.174)$$

$$k_\mu = -\partial F / \partial x^\mu - \gamma_\mu \bar{\partial}_4 F = K_\mu - \gamma_\mu k = K_\mu - \gamma_\mu v/c^*. \quad (10.175)$$

Теперь разность фаз (10.167) можно записать с учетом (9.318) и (9.330) в виде

$$dF = -\bar{K}_i \hat{d}x^i = -k_\mu dx^\mu + kc \hat{d}t. \quad (10.176)$$

При $dx^\mu = 0$ это дает вместо (10.168)

$$dF = kc \hat{d}t, \quad (10.177)$$

откуда следует, что

$$\hat{v} = ck = v/(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} \quad (10.178)$$

есть частота волны в стандартной временной шкале. При $dx^\mu = 0$ стандартный дифференциал времени (9.331) сводится к дифференциалу $d\tau_0$, измеренному покоящимися стандартными часами, так как

$$\hat{d}t = -\Gamma_4 dx^4/c = dt \sqrt{1 + 2\chi/c^2} = d\tau_0. \quad (10.179)$$

Таким образом, *стандартная частота* (10.178) равна частоте волны, измеренной с помощью стандартных часов.

Фазовая скорость в направлении пространственного вектора dx^μ находится из условия $dF = 0$. Если n^μ — единичный вектор в направлении dx^μ , то

$$dx^\mu = d\sigma n^\mu \quad (10.180)$$

и (10.176) принимает вид

$$\int dF = -(k_\mu n^\mu) d\sigma + kc \hat{d}t. \quad (10.181)$$

Приравнивая это выражение нулю, найдем *стандартную фазовую скорость* в направлении \mathbf{n} :

$$\hat{\omega}(\mathbf{n}) \equiv d\sigma/\hat{d}t = kc/k_\mu n^\mu. \quad (10.182)$$

Групповая скорость, которая в вакууме совпадает со скоростью светового сигнала, равна фазовой скорости в направлении луча \mathbf{e} . Поэтому если в (10.182) положить $\mathbf{n} = \mathbf{e}$, то $\hat{\omega}(\mathbf{e})$ должна совпадать со стандартной скоростью светового сигнала, которая в соответствии с (10.59) равна c . Отсюда следует, что

$$k_\mu e^\mu/k = 1,$$

или

$$k_\mu = ke_\mu = (\hat{v}/c) e_\mu = (v/c^*) e_\mu, \quad (10.183)$$

т. е. калибровочно-инвариантный 3-вектор \mathbf{k} коллинеарен направляющему вектору \mathbf{e} луча. Подставляя (10.183) в (10.182), получаем, что

$$\hat{\omega}(\mathbf{n}) = c/(\mathbf{e}\mathbf{n}). \quad (10.184)$$

Из этого выражения видно, что стандартная фазовая скорость минимальна в направлении луча. Соответствующую *координатную фазовую скорость* можно получить с помощью общего соотношения (10.57), связывающего стандарт-

ную и координатную скорости, но ее легко определить и из выражения (10.167), полагая $dF = 0$.

Теперь рассмотрим два события P и P' в двух близких точках отсчета p и p' , для которых разность координат dx^μ определяется формулой (10.180). Если события P и P' одновременны в смысле стандартной одновременности (10.60), то фазовая разность (10.176) в соответствии с (10.183) и (10.184)

$$dF = -k_\mu dx^\mu = -(\hat{\mathbf{v}}/c) (\mathbf{en}) d\sigma = -(\hat{\mathbf{v}}/\hat{v}) \hat{\omega}(\mathbf{n}) d\sigma. \quad (10.185)$$

В «стандартном мгновенном снимке» волны эта величина представляет собой разность фаз в точках p и p' . Для тех значений $d\sigma$, при которых dF — целое число внутри Ω , волновая функция ψ одна и та же в точках p и p' . Наименьшее из таких значений $d\sigma$ следующее:

$$\lambda(\mathbf{n}) = \hat{\omega}(\mathbf{n})/\hat{v} = c/\hat{v}(\mathbf{en}). \quad (10.186)$$

Величина $\lambda(\mathbf{n})$ имеет минимум при $\mathbf{n} = \mathbf{e}$, где \mathbf{e} — направление луча, а соответствующее значение $\hat{\lambda}(\mathbf{n})$ представляет собой (стандартную) длину волны

$$\hat{\lambda} \equiv \lambda(\mathbf{e}) = \hat{\omega}(\mathbf{e})/\hat{v} = c/\hat{v}. \quad (10.187)$$

Из (10.173), (10.178), (10.183) и (10.187) получим следующие выражения для компонент стандартного волнового вектора:

$$\bar{K}_i = (e_\mu \hat{v}/c, -\hat{v}/c) = (e_\mu/\hat{\lambda}, -\hat{v}/c). \quad (10.188)$$

Это выражение аналогично частно релятивистской формуле (10.157) для вакуума, в котором $\omega = c$, $\mathbf{n} = \mathbf{e}$. Величины \hat{v} , $\hat{\lambda}$, \mathbf{k} — калибровочно-инвариантны, в отличие от координатной частоты, которая, конечно, зависит от масштаба времени. $\hat{\lambda}$ и \hat{v} являются спектроскопическими длиной волны и частотой. Они определяются обычным путем с помощью стандартной измерительной линейки и стандартных часов, покоящихся в нашей системе отсчета. В локальных системах $\dot{S}(P)$, $\dot{S}(P)$ вектор \bar{K}_i совпадает с волновым 4-вектором K_i .

В § 10.5 распространение света описывалось как движение световых частиц без учета волновых свойств. Поскольку в определениях (10.120) и (10.123) 4-импульса P_i и массы m специальный параметр λ определяется лишь с точностью до произвольного линейного преобразования, эти формулы содержат произвольный постоянный множитель. Учитывая, что P_i и \bar{K}_i в (10.165) — нулевые векторы, этот множитель может быть определен с помощью ковариантного условия

$$P_i = hK_i, \quad (10.189)$$

где h — универсальная постоянная. Если h — постоянная Планка, то световая частица с 4-импульсом P_i совпадает с фотоном, введенным Эйнштейном для объяснения фотоэффекта. Это следует из принципа эквивалентности, если векторное уравнение (10.189) записать в локальной лоренцевой системе $\dot{S}(P)$ (4.52). В области применения геометрической оптики фотоны можно считать классическими частицами, чего в более общем случае сделать нельзя. Хотя соотношение (10.189) всегда справедливо, фотоны в общем случае будут иметь типичные квантовомеханические свойства бозонов.

Полагая в (10.189) $i = 4$ и используя (10.138), (10.169), получаем следующее выражение для полной энергии H фотона в гравитационном поле:

$$H = h\nu, \quad (10.190)$$

где ν — координатная частота. В стационарном случае H — постоянная. Это согласуется с тем, что в таком случае координатная частота ν одинакова

во всех точках траектории луча. Сопряженное с (10.189) стандартное векторное уравнение следующее:

$$\bar{P}_i = h\bar{K}_i. \quad (10.191)$$

Из этого уравнения с помощью (10.125), (10.173), (10.178), (10.188) получим следующие выражения для импульса \mathbf{p} и энергии E фотона:

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{p} &= h\mathbf{k} = h\hat{\nu}\mathbf{e}/c = h\nu\mathbf{e}/c^*; \\ E &= hc\mathbf{k} = h\hat{\nu}. \end{aligned} \right\} \quad (10.192)$$

Здесь $\hat{\nu}$ — стандартная частота, а \mathbf{e} — направляющий вектор луча. Формулы (10.190), (10.192) соответствуют соотношениям (10.137) для световой частицы.

§ 10.7. Доплеровский и эйнштейновский сдвиги спектральных линий

В частно релятивистском рассмотрении эффекта Доплера (§ 2.9 и 2.11) мы пользовались лишь инвариантностью фазы волны, не обращая внимания на реальные процессы испускания света источником. Фактически формулы (2.70)—(2.72) являются прямым следствием 4-векторного характера волнового числа, выраженного соотношением (4.44). Аналогично можно рассмотреть эффект Доплера в ОТО, основываясь на общей инвариантности фазы и на стандартном 4-векторном характере величины \bar{K}_i в (10.188) (см. уравнение (a) на стр. 291). Однако в данном разделе мы выведем эффекты Доплера и Эйнштейна путем непосредственного анализа процесса испускания фотонов атомом, а также влияния движения атома и гравитационного поля на этот процесс.

Рассмотрим сначала произвольный процесс взаимодействия частиц, когда частицы до и после процесса можно считать свободными. Если область Ω в 4-пространстве, где происходит процесс, настолько мала, что гравитационное поле в Ω практически постоянное, то из принципа эквивалентности следует, что в таком процессе сумма 4-импульсов частиц сохраняется. Это выражается 4-векторным уравнением

$$(\Sigma P_i)_{\text{нач}} = (\Sigma P_i)_{\text{кон}} \quad (10.193)$$

или сопряженным стандартным уравнением

$$(\Sigma \bar{P}_i)_{\text{нач}} = (\Sigma \bar{P}_i)_{\text{кон}}. \quad (10.194)$$

Теперь рассмотрим частный случай испускания фотонов атомом. В соответствии с основными положениями квантовой механики, атом может существовать в серии различных энергетических состояний, а фотоны испускаются при переходе атома с одного энергетического уровня на другой, более низкий.

Пусть \hat{E}_0 — полная энергия начального состояния, когда атом покоится в некоторой инерциальной системе, а \bar{E}_0 — соответствующая энергия конечного состояния. В соответствии с теоремой Эйнштейна (§ 3.5), собственные массы атома в этих состояниях имеют значения

$$\hat{m}_0 = \hat{E}_0/c^2; \quad \bar{m}_0 = \bar{E}_0/c^2. \quad (10.195)$$

При известных скоростях атома в этих двух состояниях соответствующие импульсы и кинетические энергии получаются из (10.37), (10.38) или из (10.66)—(10.69). Если (\mathbf{p}, E) и $(\bar{\mathbf{p}}, \bar{E})$ — значения этих величин в начальном и конечном состояниях соответственно, то четыре закона сохранения (10.194) для рассматриваемого процесса, в соответствии с (10.16) и (10.192), принимают вид

$$\mathbf{p} = \bar{\mathbf{p}} + h\hat{\nu}\mathbf{e}/c = \bar{\mathbf{p}} + h\nu\mathbf{e}/c^*; \quad (10.196)$$

$$E = \bar{E} + h\hat{\nu}. \quad (10.197)$$

Аналогично уравнение (10.193) при $i = 4$ с учетом (10.15) и (10.190) дает

$$H = \bar{H} + h\nu, \quad (10.198)$$

где H и \bar{H} — соответствующие полные энергии атома в гравитационном поле, в том месте, где происходит процесс. Из соотношений (10.18) и (10.195) имеем

$$|\mathbf{p}|^2 - (E/c)^2 = -m_0^2 c^2 = -(\dot{E}_0/c)^2. \quad (10.199)$$

Аналогично в конечном состоянии

$$|\bar{\mathbf{p}}|^2 - (\bar{E}/c)^2 = -(\bar{\dot{E}}_0/c)^2. \quad (10.200)$$

Исключая из этого уравнения $\bar{\mathbf{p}}$ и \bar{E} , с помощью (10.196), (10.197) получаем

$$|\mathbf{p} - h\hat{\mathbf{v}}\mathbf{e}/c|^2 - (E - h\hat{\nu})^2/c^2 = -(\bar{\dot{E}}_0/c)^2.$$

Решая это равенство относительно $\hat{\nu}$ и используя (10.199), находим, что

$$\hat{\nu} = (\dot{E}_0^2 - \bar{\dot{E}}_0^2)/2hE(1 - c\mathbf{p}\mathbf{e}/E). \quad (10.201)$$

Если \hat{u} стандартная скорость атома до процесса, то из (10.37), (10.38) и (10.95)

$\mathbf{p}/E = \hat{\mathbf{u}}/c^2$, $E = \dot{E}_0/\sqrt{1 - \hat{u}^2/c^2}$. Поэтому (10.201) можно записать в виде

$$\hat{\nu} = \hat{\nu}_0 (1 - \hat{u}^2/c^2)^{1/2} / (1 - \hat{u}\mathbf{e}/c). \quad (10.202)$$

Здесь

$$\left. \begin{aligned} \hat{\nu}_0 = \frac{\dot{E}_0^2 - \bar{\dot{E}}_0^2}{2h\dot{E}_0} = \frac{\dot{E}_0 + \bar{\dot{E}}_0}{2\dot{E}_0} \frac{\Delta\dot{E}_0}{h} = \left(1 - \frac{\Delta\dot{E}_0}{2\dot{E}_0}\right) \frac{\Delta\dot{E}_0}{h} \\ \Delta\dot{E}_0 = \dot{E}_0 - \bar{\dot{E}}_0. \end{aligned} \right\} \quad (10.203)$$

Очевидно, что $\hat{\nu}_0$ — стандартная частота фотонов, испускаемых первоначально покоящимся атомом. Поскольку стандартная частота есть частота, измеряемая покоящимися стандартными часами, то $\hat{\nu}$ и $\hat{\nu}_0$ должны совпадать с частотами $\dot{\nu}$ и $\dot{\nu}_0$ излучающего атома, находящегося в инерциальной системе и обладающего соответствующими начальными скоростями. Поэтому формула (10.202) для доплер-эффекта в произвольной системе S и в присутствии гравитационного поля формально совпадает с формулой (2.90) СТО.

Величина $\hat{\nu}_0$ в (10.203) определяет стандартные линии спектра испускания первоначально покоящегося атома. Эта величина не зависит, конечно, от гравитационного поля. С учетом отдачи атома в процессе испускания $\hat{\nu}_0$ в общем случае не будет равной $\Delta\dot{E}_0/h$, а несколько меньшей. Однако для оптического спектра, когда $\Delta\dot{E}_0$ имеет величину порядка нескольких электрон-вольт и мала по сравнению с собственной энергией атома, имеющей величину $\sim 10^9$ эв, эффектом отдачи можно пренебречь, и (10.203) совпадает с формулой Бора для частоты испускания

$$\hat{\nu}_0 = \Delta\dot{E}_0/h. \quad (10.204)$$

С другой стороны, в γ -волновом диапазоне испускания свободного атомного ядра эта приближенная формула уже недостаточно точная (см. § 12.1).

В предыдущих рассуждениях мы использовали закон сохранения (10.197) кинетической энергии. Если мы теперь вместо этого используем выражение

(10.198) для полной энергии в гравитационном поле и соотношение (10.20), то получим формулу эффекта Доплера для координатной частоты:

$$v = v_0 (1 - \hat{u}^2/c^2)^{1/2} / (1 - \hat{u}e/c). \quad (10.205)$$

Здесь

$$v_0 = \left. \begin{aligned} & \left((H_0 + \bar{H}_0) / 2H_0 \right) \Delta H_0 / h = (1 - \Delta H_0 / 2H_0) \Delta H_0 / h; \\ & \Delta H_0 = H_0 - \bar{H}_0, \end{aligned} \right\} \quad (10.206)$$

а H_0 и \bar{H}_0 — энергии покоя (10.107) атома в гравитационном поле для начального и конечного стационарных состояний соответственно. При пренебрежении эффектом отдачи (10.206) сводится к

$$v_0 = \Delta H_0 / h. \quad (10.207)$$

Формулу (10.205) можно получить также из формулы (10.202), умножая ее на $\sqrt{1 + 2\chi/c^2}$ и учитывая соотношение (10.178) между координатной и стандартной частотами, где χ — гравитационный потенциал в точке испускания.

Стандартная частота (10.202) есть частота, измеренная с помощью спектроскопа, помещенного вблизи источника. Однако если измерительный инструмент размещен на некотором расстоянии от источника, где гравитационный потенциал χ имеет существенно другое значение, то начинает проявляться еще один эффект — эффект Эйнштейна. Мы рассмотрим лишь случай стационарного гравитационного поля, когда можно ввести систему координат S , в которой g_{ik} не зависит от времени. Пусть χ_1 — скалярный потенциал в точке излучения, а χ_2 — скалярный потенциал в точке наблюдения. Тогда наблюдаемая частота уже не будет равна частоте (10.202), так как на пути от точки 1 до точки 2 фотон ведет себя как свободно падающая световая частица. В отличие от полной энергии (10.190) фотона в гравитационном поле, которая в стационарном случае постоянна

$$hv = \text{const}, \quad (10.208)$$

кинетическая энергия

$$h\hat{v} = hv / (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} \quad (10.209)$$

изменяется с изменением χ . Поэтому если $v(1, 2)$ — стандартная частота излучения в точке 1, измеренная в точке 2, то из (10.209) и (10.202) имеем

$$\hat{v}(1, 2) = \hat{v} \left(\frac{1 + 2\chi_1/c^2}{1 + 2\chi_2/c^2} \right)^{1/2} = \hat{v}_0 \frac{(1 - \hat{u}^2/c^2)^{1/2}}{1 - \hat{u}e/c} \left(\frac{1 + 2\chi_1/c^2}{1 + 2\chi_2/c^2} \right)^{1/2}, \quad (10.210)$$

при $\hat{u} = 0$ получим

$$\hat{v}_0(1, 2) = \hat{v}_0 \left[(1 + 2\chi_1/c^2) / (1 + 2\chi_2/c^2) \right]^{1/2} \quad (10.211)$$

т. е. формулу, описывающую эффект Эйнштейна. В общем случае, когда действуют оба эффекта (эффект Доплера и эффект Эйнштейна), имеем формулу (10.210).

В то время как стандартная частота $\hat{v}_0(1, 2)$ есть частота света, испущенного покоящимся атомом в точке 1 и измеренная в точке 2, \hat{v}_0 — соответствующая частота, измеренная в точке излучения. Таким образом, эффект Эйнштейна можно определить экспериментально, сравнивая спектральные линии источника в точке 1 и аналогичного источника в точке 2. В соответствии с (10.211) относительный сдвиг частот равен

$$\frac{\Delta \hat{v}_0}{\hat{v}_0} \equiv \frac{\hat{v}_0(1, 2) - \hat{v}_0}{\hat{v}_0} = \left(\frac{1 + 2\chi_1/c^2}{1 + 2\chi_2/c^2} \right)^{1/2} - 1, \quad (10.212)$$

Он имеет одинаковую величину для всех линий спектра. Это будет «голубое смещение», если $\chi_1 > \chi_2$, и «красное смещение», если $\chi_1 < \chi_2$. В дальнейшем будем считать, что $\chi/c^2 \ll 1$. Тогда из (10.212) получим

$$\delta\hat{\nu}_0/\hat{\nu}_0 = (\chi_1 - \chi_2)/c^2. \quad (10.213)$$

С помощью (10.107) и (10.115) относительный сдвиг частоты (10.212) можно также выразить через энергии покоя произвольного тела в точках 1 и 2 или через негравитационную координатную работу $A_{н.г}$ (2,1) при адиабатическом перемещении тела из точки 2 в точку 1:

$$\left. \begin{aligned} \frac{\hat{\Delta}\nu_0}{\hat{\nu}_0} &= \frac{H_0(1) - H_0(2)}{H_0(2)} = \frac{A_{н.г}(2,1)}{H_0(2)}; \\ A_{н.г}(2,1) &= \int_2^1 \hat{\mathcal{F}}_\mu dx^\mu. \end{aligned} \right\} \quad (10.214)$$

С другой стороны, эту же величину можно выразить через соответствующую стандартную работу при адиабатическом перемещении, так как из (10.118) и (10.212) имеем

$$\Delta\hat{\nu}_0/\hat{\nu}_0 = \exp(\hat{A}_{н.г}(2,1)/\dot{M}_0 c^2) - 1, \quad (10.215)$$

где

$$\hat{A}_{н.г}(2,1) = \int_2^1 \hat{\mathcal{F}}_\mu dx^\mu,$$

а \dot{M}_0 (произвольная) собственная масса тела. В приближении слабого поля выражения (10.214) и (10.215) в соответствии с (10.213) имеют вид

$$\delta\hat{\nu}_0/\nu_0 = \int_2^1 \hat{\mathcal{F}}_\mu dx^\mu / \dot{M}_0 c^2 = \int_2^1 \hat{\mathcal{F}}_\mu dx^\mu / \dot{M}_0 c^2 = (\chi_1 - \chi_2)/c^2. \quad (10.216)$$

Из (10.215) с очевидностью следует калибровочная инвариантность величины $\delta\hat{\nu}_0/\hat{\nu}_0$.

В данном случае эффект Эйнштейна объясняется потерей или приобретением фотоном кинетической энергии при его свободном падении от точки 1 до точки 2. Другую, по-видимому, более простую интерпретацию эффекта Эйнштейна можно получить, если рассматривать координатную частоту вместо стандартной [168]. Поскольку во время движения $h\nu$ — постоянная величина (10.208), на участке движения от точки 1 до точки 2 координатная частота фотона не меняется. Однако согласно (10.206) координатная частота ν_0 определяется энергией покоя атома в гравитационном поле, в то время как стандартная частота $\hat{\nu}_0$ в (10.203) определяется соответствующей собственной энергией. Поэтому координатная частота фотонов, испущенных при некотором переходе атома из одного состояния в другое, зависит от гравитационного поля в точке испускания. Если $\nu_0(1)$ и $\nu_0(2)$ — координатные частоты излучения покоящихся атомов в точках 1 и 2, то с помощью (10.107), (10.108) и (10.203), (10.206) получим

$$\nu_0(1) = \hat{\nu}_0 (1 + 2\chi_1/c^2)^{1/2} = \nu_0(2) [(1 + 2\chi_1/c^2)/(1 + 2\chi_2/c^2)]^{1/2}. \quad (10.217)$$

Поскольку в любой точке координатная частота пропорциональна соответствующей стандартной частоте, их относительные сдвиги должны быть равными. В самом деле, учитывая, что на пути фотона от точки 1 до точки 2 дополнительного сдвига координатной частоты не происходит, из (10.217) получаем

$$\frac{\Delta\nu_0}{\nu_0} \equiv \frac{\nu_0(1) - \nu_0(2)}{\nu_0(2)} = \left(\frac{1 + 2\chi_1/c^2}{1 + 2\chi_2/c^2} \right)^{1/2} - 1, \quad (10.218)$$

что согласуется с (10.212).

В соответствии с этой интерпретацией эффект Эйнштейна обусловлен изменением полной энергии покоя H_0 при адиабатическом перемещении атома из одной точки в другую с различными скалярными гравитационными потенциалами. Согласно (10.115) в каждом стационарном энергетическом состоянии изменение H_0 равно негравитационной (координатной) работе при адиабатическом перемещении атома в этом состоянии. Поскольку работа зависит от собственной массы атома, она будет различной для различных состояний атома, что является причиной зависимости $\Delta H_0 = H_0 - \bar{H}_0$, а следовательно и ν_0 , от положения источника в гравитационном поле.

Эффект Доплера определяется как часть полного сдвига частоты, которая обусловлена движением источника, а эффект Эйнштейна — как часть, обусловленная разницей гравитационного потенциала в точке испускания и в точке наблюдения. Следовательно, разделение этих двух эффектов не является релятивистски инвариантным. Может случиться так, что сдвиг частоты в одной системе координат будет чисто доплеровским, а в другой — чисто эйнштейновским эффектом.

Рассмотрим, например, источник света, движущийся в инерциальной системе с постоянной угловой скоростью ω по круговой орбите радиуса r . В лоренцевой системе координат $\chi = 0$ везде, и сдвиг частоты является чисто доплеровским эффектом. Если наблюдатель находится в центре круговой орбиты, то скорость источника $\hat{u} = u$ перпендикулярна направлению e светового луча, и, в соответствии с (10.210), наблюдаемая частота $\hat{\nu} = \nu$ равна

$$\hat{\nu} = \hat{\nu}_0 (1 - \hat{u}^2/c^2)^{1/2} = \hat{\nu}_0 (1 - r^2\omega^2/c^2)^{1/2}, \quad (10.219)$$

что представляет собой формулу СТО для поперечного доплер-эффекта (§ 2.11). С другой стороны, во вращающейся системе координат, соответствующей метрике (8.78) — (8.90), источник все время покоится, но потенциал χ_1 в точке расположения источника равен $-r^2\omega^2/2$, в то время как потенциал χ_2 в точке наблюдения равен нулю. В этой системе сдвиг частоты — чисто эйнштейновский эффект, но наблюдаемая частота $\hat{\nu}$, определяемая из (10.210), конечно, снова равна частоте (10.219).

Рассмотрим две произвольные системы координат S и S' с соответствующими системами отсчета R и R' . Пусть $V^i(x) = V^i[R']$ — поле 4-скоростей точек отсчета системы R' относительно системы S . Сопряженное поле стандартных векторов согласно (10.36) следующее:

$$\bar{V}^i = (\hat{v}^\mu / \sqrt{1 - \hat{v}^2/c^2}, c / \sqrt{1 - \hat{v}^2/c^2}); \quad \bar{V}'^i = c\delta_{i4}, \quad (10.220)$$

где \hat{v}^μ — стандартные скорости точек отсчета системы R' относительно S . Если A_i — произвольный вектор, то из (9.227) и (10.220) для инвариантного скалярного произведения $A_i V^i$ имеем

$$A_i V^i = \bar{A}_i \bar{V}^i = \bar{A}^i \bar{V}_i = c\bar{A}'_4 = -c\bar{A}'^4$$

или

$$\bar{A}'_4 = (\bar{A}_4 + \bar{A}_\mu \hat{v}^\mu / c) / (1 - \hat{v}^2/c^2)^{1/2}; \quad (10.221a)$$

$$\bar{A}'^4 = (\bar{A}^4 - \bar{A}^\mu \hat{v}_\mu / c) / (1 - \hat{v}^2/c^2)^{1/2}. \quad (10.221b)$$

При $A_i = K_i$ из (10.188) и (10.221 а) получим следующую формулу преобразования стандартной частоты:

$$\hat{\nu}' = \hat{\nu} (1 - e\hat{v}/c) (1 - \hat{v}^2/c^2)^{1/2}. \quad (a)$$

Если система S' — система покоя источника излучения, то $\hat{\nu}' = \hat{\nu}_0$ и $\hat{v}^\mu = \hat{u}^\mu$ — стандартная скорость источника. Тогда, решая (а) относительно $\hat{\nu}$, снова получаем формулу (10.202).

Выбирая $A^i = dx^i$, из (10.221б) и (9.330) получаем формулу преобразования стандартного времени частицы

$$d\hat{t}' = d\hat{t} (1 - \hat{u}\hat{v}/c^2) / (1 - \hat{v}^2/c^2)^{1/2}. \quad (б)$$

При $A_i = P_i$ из (10.221б) и (10.12) или (10.125) получим закон преобразования кинетической энергии частицы

$$E' = (E - \mathbf{p}\hat{v}) / (1 - \hat{v}^2/c^2)^{1/2}, \quad (в)$$

что аналогично соотношению (3.37) в СТО.

Наконец, полагая A_i равным 4-скорости частицы, из (10.36) и (10.221в) получаем соотношение

$$(1 - \hat{v}\hat{u}/c^2)(1 - \hat{u}'^2/c^2)^{1/2} = (1 - \hat{v}^2/c^2)^{1/2}(1 - \hat{u}^2/c^2)^{1/2}, \quad (г)$$

которое аналогично формуле (2.56) в СТО. Когда скорости \hat{u} и \hat{v} в каждой точке параллельны, т. е. при $\hat{v}\hat{u} = \hat{v}\hat{u}$, из (г) имеем

$$\hat{u}' = (\hat{u} - \hat{v}) / (1 - \hat{u}\hat{v}/c^2); \quad \hat{u} = (\hat{u}' + \hat{v}) / (1 + \hat{u}'\hat{v}/c^2), \quad (д)$$

что аналогично (2.49).

§ 10.8. Механика сплошных сред

С помощью метода, развитого в § 10.1—10.7, все физические законы СТО теперь легко записываются в общей ковариантной форме.

В гл. 6 было показано, что в СТО замкнутая система может быть описана симметрическим тензором энергии T_{ik} , удовлетворяющим условию (6.1), которое в действительном представлении можно записать в форме

$$\text{div}_i \{T^{ik}\} = \partial T_i^k / \partial x^k = 0. \quad (10.222)$$

Физический смысл различных компонент T_{ik} был объяснен в § 6.1. Поскольку предполагается, что условие (10.222) справедливо в любой локально инерциальной системе, общая ковариантная форма законов сохранения энергии и импульса должна иметь вид [см. (9.199)]

$$T_{i;k} = 0,$$

или

$$\frac{1}{V|g|} \frac{\partial}{\partial x^k} (V|g| T_i^k) = \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} T^{kl}. \quad (10.223)$$

В то время как в инерциальной системе законы сохранения для замкнутых систем выражаются уравнениями в форме суммы частных производных, мы видим, что в общем случае правая часть (10.223) этому не удовлетворяет. Когда система находится в гравитационном поле, она не замкнута, поскольку гравитационное поле само дает вклад в полную энергию и импульс. (В § 11.9 мы еще вернемся к этому вопросу.)

В произвольной системе координат S компоненты тензора T_i^k можно получить из компонент тензора \hat{T}_i^k в локальной инерциальной системе S^0 с помощью формулы преобразования тензоров. Для достаточно малой и легкой островной части полной системы в \hat{S} применимы методы, развитые в § 6.2, 6.3. В частности, если эта область настолько мала, что \hat{g}_{ik} может везде в ней считаться постоянным, собственный центр масс этой части области определяется однозначно. Относительно \hat{S} центр масс движется с постоянной скоростью, и, следовательно, его движение относительно S будет аналогично движению свободно падающей частицы [96, 167].

Первые три уравнения (10.223) представляют собой закон сохранения импульса, а четвертое — закон сохранения энергии. В стационарном случае правая часть в (10.223) при $i = 4$ равна нулю. Следовательно,

$$(1/V|g|) \partial (V|g| T_4^k) / \partial x^k = 0. \quad (10.224)$$

В соответствии с (9.362) имеем

$$|g| = -g_{44} \gamma = \gamma (1 + 2\chi/c^2). \quad (10.225)$$

Тогда уравнение (10.224) можно записать в виде

$$(1/\gamma)\partial\{\sqrt{\gamma}(1+2\chi/c^2)^{1/2}T_4^k\}/\partial x^k=0. \quad (10.226)$$

Теперь, полагая

$$S^\mu = -c(1+2\chi/c^2)^{1/2}T_4^\mu; \quad h = -(1+2\chi/c^2)^{1/2}T_4^4 \quad (10.227)$$

и имея в виду, что в стационарном случае $\sqrt{\gamma}$ не зависит от времени, (10.226) можно представить в форме

$$\operatorname{div} \mathbf{S} + \partial h / \partial t = 0,$$

$$\text{где} \quad \operatorname{div} \mathbf{S} = (1/\sqrt{\gamma})\partial(\sqrt{\gamma}S^\mu)/\partial x^\mu \quad (10.228)$$

— трехмерная дивергенция пространственного вектора \mathbf{S} .

Уравнение (10.228) выражает закон сохранения энергии, если h и \mathbf{S} интерпретировать как плотность энергии и плотность тока соответственно. В локально инерциальной системе уравнения (10.227) эквивалентны уравнениям (6.2) и (6.3). Как мы сейчас увидим, (каноническая) плотность импульса

$$g_{\mu} = \frac{1}{c}(1+2\chi/c^2)^{1/2}T_{\mu}^4. \quad (10.229)$$

С помощью сформулированного на стр. 227 принципа эквивалентности общековариантное выражение для тензора энергии в S можно получить из соответствующего частного релятивистского выражения, справедливого в \hat{S} , простым преобразованием координат. Таким образом, для чисто механической системы из (6.79)—(6.81) и (6.110), (6.111) имеем:

$$T_i^k = \theta_i^k + S_i^k = \dot{\mu}^0 U_i U^k + \dot{p}_{(\sigma)}^0 h_i^{(\sigma)} h^{(\sigma)k}. \quad (10.230)$$

Здесь $U^i(x)$ есть 4-скорость материи, а $\dot{\mu}^0(x)$, $\dot{h}^0(x)$, связанные соотношением

$$\dot{\mu}^0 = \dot{h}^0/c^2, \quad (10.231)$$

— инвариантные плотности массы и энергии соответственно, измеренные в локально инерциальной системе покоя \hat{S}^0 . Кроме того, $\dot{p}_{(\sigma)}^0(x)$ — собственные значения относительного тензора напряжений $\dot{i}_{\mu\nu}^0$ в \hat{S}^0 , рассматриваемые как скалярные функции координат (x^i) в S . $h_i^{(\sigma)}$ — соответствующие собственные векторы, которые вместе с U_i/c образуют тетрадное поле со свойствами (9.81), (9.84), (9.86) [см. уравнения (а), (б), (г) на стр. 138].

Для идеальной жидкости из (6.130) имеем

$$T_i^k = (\dot{\mu}^0 + \dot{p}/c^2) U_i U^k + \dot{p} \delta_i^k, \quad (10.232)$$

что можно получить также из (10.230), когда все три собственных значения $\dot{p}_{(\sigma)}^0$ равны нормальному давлению $\dot{p}(x)$, измеренному в локально инерциальной системе. Подставляя (10.232) в (10.223), получаем фундаментальные уравнения движения идеальной жидкости, например, в форме общей ковариантной записи частного релятивистских уравнений (6.135), (6.130):

$$\left. \begin{aligned} (\dot{\mu}^0 U^k)_{;k} &= -\dot{p} U^k_{;k}/c^2; \\ (\dot{\mu}^0 + \dot{p}/c^2) D U_i / d\tau &= -\dot{p} / \partial x^i - (U^i/c^2) d\dot{p}/d\tau, \end{aligned} \right\} \quad (10.233)$$

где $D/d\tau$ — абсолютная производная (9.186).

Полагая в (10.232), (10.233) $\dot{p} = 0$, получаем тензор энергии и уравнения движения некогерентной материи

$$T_i^k = \theta_i^k = \dot{\mu}^0 U_i U^k; \quad (10.234)$$

$$(\dot{\mu}^0 U^k)_{;k} = 0; \quad (10.235)$$

$$\dot{\mu}^0 D U_i / d\tau = 0. \quad (10.236)$$

Эти уравнения представляют собой обобщение уравнений (4.234), (4.215) и (4.219), когда единственными силами, действующими на материю, являются гравитационные силы. Уравнение (10.235) показывает, что собственная масса в этом случае сохраняется, а из сравнения (10.236) с (9.136) видно, что каждая «пылинка» некогерентной материи движется как свободно падающая частица.

Рассмотрим теперь очень малое количество материи объемом $\delta\dot{V}^0 = d\dot{x}^{01}d\dot{x}^{02}d\dot{x}^{03}$ в локально инерциальной системе \dot{S}^0 . Поскольку время в \dot{S}^0 есть собственное время τ , учитывая инвариантность четырехмерного объемного элемента (9.63), имеем: $c(-g)^{1/2}dx^1dx^2dx^3dt = cd\dot{x}^{01}d\dot{x}^{02}d\dot{x}^{03}d\tau$. Тогда, используя (10.225) и (10.62), для объема материальной частицы в S , получаем $\delta V \equiv \gamma^{1/2}dx^1dx^2dx^3 = (\delta\dot{V}^0/(1 + 2\chi/c^2)^{1/2})d\tau/dt$, или

$$\delta V = \delta\dot{V}^0/\Gamma(1 + 2\chi/c^2)^{1/2}, \quad (10.237)$$

где Γ — координатный множитель Лоренца (10.65) (см. также упражнение 2 на стр. 297).

Выражение (10.237) представляет собой обобщение формулы (2.34) для лоренцева сокращения при наличии гравитационного поля. При $u^k = 0$ имеем

$$\delta V = \delta\dot{V}^0, \quad (10.238)$$

т. е. объем малой частицы среды, покоящейся в S , равен ее объему, измеренному в \dot{S}^0 , в соответствии со свойствами (идеальной) стандартной измерительной линейки, сформулированными на стр. 182.

Величина, аналогичная g_i в (6.21), согласно (10.227) и (10.229) определяется следующим образом:

$$g_i \equiv (g_\mu, -h/c) = T_i^4(1 + 2\chi/c^2)^{1/2}/c. \quad (10.239)$$

В случае некогерентной материи

$$g_i = \dot{\mu}^0 U_i U^4 (1 + 2\chi/c^2)^{1/2}/c = \dot{\mu}^0 \Gamma(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} U_i. \quad (10.240)$$

Умножая (10.240) на объем δV , получаем величину

$$\delta G_i \equiv g_i \delta V = (g_\mu \delta V, -h\delta V/c), \quad (10.241)$$

которая в соответствии с (10.237) равна 4-вектору

$$\delta P_i = \dot{\mu}^0 \delta\dot{V}^0 U_i = \delta \dot{m}_0 U_i = (\delta P_\mu, -\delta H/c). \quad (10.242)$$

Здесь $\delta \dot{m}_0 = \dot{\mu}^0 \delta\dot{V}^0$ — постоянная и инвариантная собственная масса, а δP_i — 4-импульс частицы. В § 10.4 мы видели, что пространственные ковариантные компоненты 4-импульса равны компонентам канонического импульса. Поэтому g_μ в (10.229) представляет собой плотность канонического импульса. Аналогично можно утверждать, что h есть плотность гамильтониана или плотность энергии материи с учетом и ее взаимодействия с гравитационным полем. Поскольку $\delta \dot{m}_0$ в данном случае постоянна, при $F_i = 0$ (10.236) эквивалентно (10.3). Следовательно, все рассуждения § 10.1—10.4, в которых использовалось (10.3), можно применить к каждой инфинитезимальной части некогерентной материи.

В случае упругой среды 4-импульс малой части равен

$$\delta G_i = g_i \delta V = T_i^4(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} \delta V/c. \quad (10.243)$$

Эта величина, аналогичная (6.69), конечно, не 4-вектор. Однако вклад в величину g_i , обусловленный лишь тензором θ_i^4 , определяется выражением

$$\delta P_i = \theta_i^4(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} \delta V/c = \dot{\mu}^0 \delta\dot{V}^0 U_i = \delta \dot{m}_0 U_i \quad (10.244)$$

типа (10.242), являющимся 4-вектором. δP_i есть «инкрузивный» 4-импульс, удовлетворяющий уравнениям (а), (б) на стр. 136, записанным в общековариантной форме

$$\left. \begin{aligned} D\delta P_i/d\tau &= \delta F_i^* = f_i^* \delta \dot{V}^0; \\ f_i^* &= -S_{i;k}^k, \quad \delta F_i^* U^i \neq 0. \end{aligned} \right\} \quad (10.245)$$

Эти уравнения, являющиеся простым следствием уравнений (10.223) с T_i^k , определяемым формулой (10.230), имеют форму уравнений (10.119). Отсюда следует, что малая часть материи движется подобно частице, на которую кроме гравитационной силы действует обобщенная сила типа (4.68). Наконец, для материи с внутренней теплопроводностью из (7.117), (7.118), (7.119), (7.127) получим

$$T_i^k = M_i^k + H_i^k, \quad (10.246)$$

где M_i^k определяется формулой (10.230), а

$$H_i^k = (U_i Q^k + Q_i U^k)/c^2. \quad (10.247)$$

Здесь Q_i — 4-вектор, который в локально инерциальной системе покоя \dot{S}^0 имеет форму (7.115), т. е.

$$\dot{Q}_i^0 = (\dot{Q}^0, 0), \quad (10.248)$$

где \dot{Q}^0 — вектор потока тепла в \dot{S}^0 .

Формулировка основ частно релятивистской термодинамики, данная в § 7.10, 7.11, может быть непосредственно перенесена в ОТО. Первый закон термодинамики содержится в уравнениях (10.223), где T_i^k определяется по формуле (10.246). Из рассуждений § 7.10 следует, что 4-импульс тепла, подведенного к инфинитезимальной части материи в течение инфинитезимального процесса, происходящего в области $\delta\Omega$ 4-пространства в окрестности точечного события $P: (x^i)$, есть 4-вектор:

$$\delta Q_i = (\delta Q_\mu, -\delta Q/c). \quad (10.249)$$

Что касается энергии и импульса, то подвод тепла создает такой же эффект, как и добавление к системе новой частицы с собственной массой $\delta\dot{Q}^0/c^2$, каноническим импульсом δQ_μ и (гамильтоновой) энергией $\delta Q = -c\delta Q_4$.

Пусть $\dot{T}^0(x)$, и

$$\theta^0(x) = 1/\dot{T}^0(x) \quad (10.250)$$

— собственная температура и холод, рассматриваемые как скалярные функции от (x^i) . \dot{T}^0 — абсолютная температура Кельвина, измеренная в локально инерциальной системе покоя \dot{S}^0 . По аналогии с (7.133) введем 4-векторное поле холода

$$\theta^i(x) = \theta^0 U^i. \quad (10.251)$$

Тогда если δS — (инвариантная) энтропия частицы в точке (x^i) , то второй закон (7.186) для инфинитезимального процесса выражается соотношением

$$d(\delta S) \geq -\theta^i \delta Q_i, \quad (10.252)$$

где знак равенства применим лишь для обратимых процессов.

При изучении материальных систем часто удобно вводить *сопутствующую* систему отсчета R , в которой каждая материальная точка сплошной среды отождествляется с точкой отсчета системы R . Пусть $S: (x^i)$ — внутренняя система координат в R (все такие системы связаны калибровочными преобразованиями).

Тогда 4-скорость U^i материи в каждой точке (x^i) касается мировой линии точки отсчета. Следовательно,

$$U^i = c\Gamma^i = c\delta_{i4}\Gamma^4 = c\delta_{i4}/(-g_{44})^{1/2}, \quad (10.253)$$

[см. (9.286), (9.238)], а вектор холода имеет компоненты

$$\theta^i = \theta^0 c\delta_{i4}/(-g_{44})^{1/2}. \quad (10.254)$$

В сопутствующей системе второй закон (10.252) принимает простой вид $d(\delta S) \geq \theta^0 c\delta Q_4/(-g_{44})^{1/2}$, или в соответствии с (10.249), (10.250)

$$d(\delta S) \geq \delta Q/\dot{T}^0 (1 + 2\chi/c^2)^{1/2}. \quad (10.255)$$

Если конечная термодинамическая система не подвергается возмущениям, то она рано или поздно придет в состояние теплового равновесия. В течение этого процесса энтропия системы все время увеличивается, пока не достигнет максимального значения в конечном равновесном состоянии. В соответствии с нерелятивистской термодинамикой это состояние характеризуется одинаковой температурой во всех точках системы. Однако, как впервые показал Толман [260, 186], в ОТО это не так; т. е. собственная температура в каждой точке среды зависит от гравитационного потенциала χ в этой точке.

По определению, тепловое равновесное состояние среды означает, что можно ввести сопутствующую систему, в которой все физические величины, в том числе и g_{ik} , не зависят от временной переменной. Теперь рассмотрим виртуальный процесс, в котором от точки A к другой точке B подводится инфинитезимальное количество тепла $|\delta Q|$. Пусть (\dot{T}_A^0, χ_A) и (\dot{T}_B^0, χ_B) — собственная температура и гравитационный потенциал в точках A и B соответственно. Поскольку гравитационное поле стационарно, из закона сохранения энергии следует, что

$$\delta Q_B = |\delta Q| = -\delta Q_A. \quad (10.256)$$

[Строго говоря, перенос тепловой энергии изменяет распределение масс, что в соответствии с общими уравнениями поля (см. § 11.1) изменяет метрическое поле. Однако, поскольку δQ — бесконечно мало, этот эффект приведет к изменению в (10.256) лишь на величину второго порядка малости.] Кроме того, поскольку энтропия — аддитивная величина, из (10.255) получим следующее выражение для изменения полной энтропии системы в течение этого процесса:

$$dS = d(\delta S_A) + d(\delta S_B) \geq |\delta Q| \left\{ 1/\dot{T}_B^0 (1 + 2\chi_B/c^2)^{1/2} - 1/\dot{T}_A^0 (1 + 2\chi_A/c^2)^{1/2} \right\}. \quad (10.257)$$

В результате, если

$$\dot{T}_A^0 (1 + 2\chi_A/c^2)^{1/2} > \dot{T}_B^0 (1 + 2\chi_B/c^2)^{1/2}, \quad (10.258)$$

увеличение энтропии положительно. Это означает, что энтропия еще не достигла своего максимума. Тогда виртуальный процесс будет реальным процессом. Подвод тепла от точки A в точку B будет происходить до тех пор, пока обе величины в (10.258) не станут равными. Поэтому необходимым условием термического равновесия является то, чтобы величина

$$T = \dot{T}^0 (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} \quad (10.259)$$

была одинаковой во всех точках среды. Это и есть *теорема Толмана*.

Упражнение 1

В произвольной системе температурный вектор Арзелье [уравнение (е) на стр. 172] равен

$$T^i = \dot{T}^0 U^i. \quad (10.260)$$

Показать, что:

1) величина

$$T \equiv -T_k/c = g_{ik} T^k/c \quad (10.261)$$

в сопутствующей системе совпадает с величиной (10.259);

2) T является общерелятивистской аналогией температуры Отта [уравнение (г) на стр. 171];

3) второй закон (10.252) для обратимых процессов принимает классическую форму $d(\delta S) = \delta Q_{обр}/T$ [заметим, что в соответствии с уравнением (а) на стр. 171 $\delta Q_i^{обр}$ пропорционально U_i]. Таким образом, в любой системе координат S наиболее естественно

в качестве температуры определить величину (10.261). Однако это не является необходимостью, а в общем случае даже не совсем удобно. Более простое и более полное описание термического состояния в S дает вектор холода (см. § 7.12).

Упражнение 2

Показать методом, аналогичным использованному на стр. 91, что (псевдо) инвариантность величины

$$-d \Sigma_i U^i/c = \varepsilon_{iklm} dx^i \delta x^k \Delta x^l U^m/c = -d \bar{\Sigma}_i^0 \bar{U}^{0i}/c \quad (10.262)$$

при

$$dx^4 = \delta x^4 = \Delta x^4 = 0 \quad (10.263)$$

приводится к формуле преобразования (10.237) для объема

$$\delta V = \gamma^{1/2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} dx^\mu \delta x^\nu \Delta x^\lambda \quad (10.264)$$

инфинитезимального параллелепипеда, движущегося со скоростью u . Показать, используя (9.360), (9.361), что для (псевдо) тензора ε_{iklm} (9.48) стандартный сопряженный тензор $\bar{\varepsilon}_{iklm}$ равен:

$$\bar{\varepsilon}_{iklm} = \gamma^{1/2} \varepsilon_{iklm}. \quad (10.265)$$

Поэтому

$$-d \Sigma_i U^i/c = -d \bar{\Sigma}_i \bar{U}^i/c = \bar{\varepsilon}_{iklm} \bar{d}x^i \bar{\delta}x^k \bar{\Delta}x^l \bar{U}^m/c = -d \bar{\Sigma}_i^0 \bar{U}^{0i}, \quad (10.266)$$

где \bar{U}^m , $\bar{d}x^i$ и т. д. — определяются формулами (10.36) и (9.330). Полагая в (10.266)

$$\bar{d}x^4 = \bar{\delta}x^4 = \bar{\Delta}x^4 = 0, \quad (10.267)$$

получаем

$$\bar{\delta V} = \delta \hat{V}^0/\hat{\Gamma}, \quad (10.268)$$

где

$$\bar{\delta V} = \gamma^{1/2} \varepsilon_{\mu\nu\lambda} \bar{d}x^\mu \bar{\delta}x^\nu \bar{\Delta}x^\lambda, \quad (10.269)$$

а $\hat{\Gamma}$ — стандартный множитель Лоренца (10.35). В соответствии с (10.263) δV в (10.264) представляет собой объем мгновенно зафиксированного (в смысле координатной одновременности) движущегося параллелепипеда. Аналогично $\bar{\delta V}$ — объем мгновенно зафиксированного (в смысле стандартной одновременности) (см. стр. 271) движущегося тела. Заметим, что в \hat{S}^0 стандартная одновременность совпадает с координатной одновременностью. Очевидно, что в соответствии с (10.237), (10.268) и (10.66)

$$\delta V = \bar{\delta V} \hat{\Gamma} \cdot \Gamma (1 \div 2\gamma/c^2)^{1/2} = \bar{\delta V} (c^* - \gamma u)/c^*. \quad (10.270)$$

Показать, что импульс δP и кинетическая энергия δE инфинитезимальной частицы определяются формулой

$$\bar{\delta P}_i = (\delta p_{\mu}, -\delta E/c) = \bar{\theta}_i^k \bar{\delta V}/c, \quad (10.271)$$

где $\bar{\theta}_i^k$ — сопряженный стандартный тензор, соответствующий тензору кинетической энергии $\theta_i^k = \dot{\mu}^0 U_i U^k$.

Упражнение 3

В сопутствующей системе отсчета 4-скорость материи определяется выражением (10.253). Показать, что в такой системе:

$$1) U_i^i = d_{\mu}^{\mu} = \gamma^{\mu\nu} d_{\mu\nu}, \quad (a)$$

где $d_{\mu\nu}$ — тензор растяжения (10.47);

$$2) DU_i/d\tau = (-\hat{a}_{\mu}, 0), \quad (6)$$

где \hat{a}_{μ} — стандартное ускорение покоя (10.25), (10.26);

3) для жидкости с учетом (10.233)

$$(\dot{\mu}^0 + \dot{\rho}/c^2) \hat{a}_\mu = \hat{\partial}_\mu \dot{\rho}; \quad (в)$$

$$c\gamma^{-1/2} (\dot{\mu}^0 \gamma^{1/2})_{,4} = -\dot{\rho} \gamma^{\mu\nu} (\partial \gamma_{\mu\nu} / \partial t) / 2c^2. \quad (г)$$

§ 10.9. Уравнения электромагнитного поля

Для простоты ограничимся рассмотрением электродинамики в вакууме, так как обобщение макроскопической теории для случая материальной среды производится по тому же принципу. С помощью общеквариантных выражений (9.200), (9.201) для дивергенции и ротора антисимметрического тензора уравнения Максвелла (5.9), (5.13), (5.16) в произвольной системе координат S можно записать следующим образом:

$$\partial F_{ik} / \partial x^i + \partial F_{kl} / \partial x^i + \partial F_{li} / \partial x^k = 0; \quad (10.272a)$$

$$\frac{1}{V|g|} \frac{\partial}{\partial x^k} (V|g| F^{ik}) = s^i; \quad (10.272б)$$

$$s^i = \dot{\rho}^0 U^i / c. \quad (10.273)$$

Здесь $F^{ik} = -F^{ki}$ — тензор электромагнитного поля; s^i — плотность 4-тока; $\dot{\rho}^0$ — плотность заряда, измеренная в локальной инерциальной системе; U^i — 4-скорость электрического заряда. В любой локально инерциальной системе \dot{S} уравнения (10.272) сводятся к уравнениям (5.13), (5.16) или (5.1). Учитывая антисимметричность тензора F^{ik} , из (10.272б) получаем выражение

$$\text{div} \{s^i\} = \frac{1}{V|g|} \frac{\partial}{\partial x^i} (V|g| s^i) = \frac{1}{V|g|} \frac{\partial^2}{\partial x^i \partial x^k} (V|g| F^{ik}) = 0, \quad (10.274)$$

которое представляет собой общую форму уравнения неразрывности для электрического заряда.

Теперь рассмотрим систему, которая при $t = x^4/c$ целиком находится внутри конечного трехмерного объема V . Умножая (10.274) на $V|g|$ и интегрируя по пространственным переменным x^1, x^2, x^3 , находим, что

$$\frac{d}{dx^4} \int_V V|g| s^4 dx^1 dx^2 dx^3 = 0. \quad (10.275)$$

Таким образом, величина

$$e = \int_V (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} s^4 V \sqrt{\gamma} dx^1 dx^2 dx^3 = \int_V (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} s^4 dV \quad (10.276)$$

не изменяется со временем и должна интерпретироваться как полный электрический заряд системы. Следовательно,

$$\rho = (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} s^4 = (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} \Gamma \dot{\rho}^0 \quad (10.277)$$

есть плотность заряда в системе S . Теперь рассмотрим заряд $\rho \delta V$ элементарного объема δV ; если $\delta \dot{V}^0$ — соответствующий объем в локальной системе покоя, то из (10.277) и (10.273) получим

$$\rho dV = \dot{\rho}^0 d\dot{V}^0, \quad (10.278)$$

т. е. электрический заряд малой частицы не зависит от системы координат.

Инвариантность полного заряда следует также непосредственно из уравнения неразрывности (10.274). Рассмотрим две произвольные системы координат S и S' и интегралы

$$e = \int_{x^4=a} V \bar{g} s^4 dx^1 dx^2 dx^3; \quad (10.279)$$

$$e' = \int_{x'^4=b} V |g'| s'^4 dx'^1 dx'^2 dx'^3 \quad (10.280)$$

по двум областям пространства при $x^4 = \text{const} = a$ и $x'^4 = \text{const} = b$ соответственно. Учитывая, что эти интегралы не зависят от времени, не изменяя значений e и e' , b можно выбрать так, чтобы области $x'^4 = b$ и $x^4 = a$ не пересекались внутри трубки в 4-пространстве, где плотность заряда отлична от нуля. Тогда можно ввести третью систему координат S'' , совпадающую с S внутри области $x^4 = a$ и с S' внутри области $x'^4 = b$. Поскольку уравнение (10.275) выполняется и в системе S'' ,

$$\int_{x''^i=x'^i=a} V|g''| s''^4 dx''^1 dx''^2 dx''^3 = \int_{x''^i=x'^i=b} V|g''| s''^4 dx''^1 dx''^2 dx''^3. \quad (10.281)$$

Учитывая, что $x''^i = x^i$ на гиперповерхности $x^4 = a$, и $x''^i = x'^i$ в области $x'^4 = b$ соответственно, из (10.281) получаем

$$e = e', \quad (10.282)$$

т. е. инвариантность полного заряда доказана.

Из (10.273), (10.277) и (10.64) имеем

$$s^i = (\rho u^\mu / c \sqrt{1 + 2\chi/c^2}, \rho / \sqrt{1 + 2\chi/c^2}), \quad (10.283)$$

так что уравнение непрерывности (10.274) можно записать в виде

$$\frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial}{\partial x^\mu} (V \bar{\gamma} \rho u^\mu) + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial (V \bar{\gamma} \rho)}{\partial t} = 0,$$

или

$$\text{div } \rho \mathbf{u} + \frac{1}{\sqrt{\gamma}} \frac{\partial (V \bar{\gamma} \rho)}{\partial t} = 0. \quad (10.284)$$

Когда пространственная метрика не зависит от времени, (10.284) представляет собой трехмерную форму уравнения неразрывности. В жесткой системе отсчета, где $\partial \gamma / \partial t = 0$, из (10.284) получим $\text{div } \rho \mathbf{u} + \partial \rho / \partial t = 0$.

Для полного выяснения физического смысла компонент тензора F^{ik} уравнения Максвелла (10.272) представим в трехмерной векторной форме. Как и в случае уравнения движения частицы, уравнения Максвелла можно записать в двух эквивалентных формах — стандартной и координатной. В данном случае координатная форма дает самое простое описание, а для дальнейшего упрощения предположим, что наша система координат времени ортогональна, т. е.

$$\gamma_{\mu} = g_{\mu 4} = 0; \quad \gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu}; \quad -g_{44} = 1 + 2\chi/c^2, \quad (10.285)$$

чего, как показано в § 9.15, всегда можно достичь соответствующим выбором пространственно-временных координат.

Теперь введем два антисимметрических пространственных тензора $H^{\mu\nu}$ и $B^{\mu\nu}$ и два вектора D^μ и E^μ :

$$F^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} / \sqrt{1 + 2\chi/c^2} = B^{\mu\nu}; \quad F^{\mu 4} = -D^\mu / \sqrt{1 + 2\chi/c^2} = -E^\mu / (1 + 2\chi/c^2). \quad (10.286)$$

Эти величины связаны соотношениями

$$B^{\mu\nu} = H^{\mu\nu} / \sqrt{1 + 2\chi/c^2}; \quad \mathbf{D} = \mathbf{E} / \sqrt{1 + 2\chi/c^2}. \quad (10.287)$$

Тогда, используя (10.285) и (10.286), из (9.38) и соответствующих соотношений для пространственных тензоров получаем

$$\left. \begin{aligned} F_{\mu\nu} &= g_{\mu l} g_{\nu m} F^{lm} = g_{\mu l} g_{\nu a} F^{\lambda a} = \gamma_{\mu l} \gamma_{\nu a} B^{\lambda a} = B_{\mu\nu} = H_{\mu\nu} / \sqrt{1 + 2\chi/c^2}; \\ E_{\mu 4} &= g_{\mu l} g_{4m} F^{lm} = \gamma_{\mu\nu} (1 + 2\chi/c^2) D^\nu / \sqrt{1 + 2\chi/c^2} = \\ &= D_\mu (1 + 2\chi/c^2)^{\frac{1}{2}} = E_\mu \end{aligned} \right\} \quad (10.288)$$

В этих обозначениях уравнения (10.272) можно записать в трехмерной тензорной форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_{\mu\nu\lambda} \{B_{\mu\nu}\} &= 0; \quad \text{rot}_{\mu\nu} \mathbf{E} = -(1/c) \partial B_{\mu\nu} / \partial t; \\ \text{div}^\mu \{H^{\mu\nu}\} &= (1/\sqrt{\gamma}) (1/c) \partial (\sqrt{\gamma} D^\mu) / \partial t = \rho u^\mu / c; \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho, \end{aligned} \right\} \quad (10.289)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \text{rot}_{\mu\nu\lambda} \{B_{\mu\nu}\} &= \partial B_{\mu\nu} / \partial x^\lambda + \partial B_{\nu\lambda} / \partial x^\mu + \partial B_{\lambda\mu} / \partial x^\nu; \\ \text{rot}_{\mu\nu} \mathbf{E} &= \partial E_\nu / \partial x^\mu - \partial E_\mu / \partial x^\nu; \\ \text{div}^\mu \{H^{\mu\nu}\} &= (1/\sqrt{\gamma}) \partial (\sqrt{\gamma} H^{\mu\nu}) / \partial x^\nu; \\ \text{div} \mathbf{D} &= (1/\sqrt{\gamma}) \partial (\sqrt{\gamma} D^\mu) / \partial x_\mu \end{aligned} \right\} \quad (10.290)$$

— трехмерные ковариантные дифференциальные операторы. Определяя в соответствии с (9.74') аксиальные векторы \mathbf{B} , \mathbf{H} , дуальные к антисимметрическим тензорам $B_{\mu\nu}$, $H^{\mu\nu}$, получаем

$$\left. \begin{aligned} B^1 &= (1/\sqrt{\gamma}) B_{23}; \quad B^2 = (1/\sqrt{\gamma}) B_{31}; \quad B^3 = (1/\sqrt{\gamma}) B_{12}; \\ H_1 &= \sqrt{\gamma} H^{23}; \quad H_2 = \sqrt{\gamma} H^{31}; \quad H_3 = \sqrt{\gamma} H^{12}. \end{aligned} \right\} \quad (10.291)$$

Учитывая (9.74'') и (9.205), уравнения Максвелла (10.289), (10.283) представляем в обычной форме:

$$\left. \begin{aligned} \text{rot} \mathbf{E} &= -(1/c) \cdot (1/\sqrt{\gamma}) \partial (\sqrt{\gamma} \mathbf{B}) / \partial t; \quad \text{div} \mathbf{B} = 0; \\ \text{rot} \mathbf{H} &= -(1/\sqrt{\gamma}) \partial (\sqrt{\gamma} \mathbf{D}) / \partial t = \rho \mathbf{u} / c; \quad \text{div} \mathbf{D} = \rho, \end{aligned} \right\} \quad (10.292)$$

где $\text{rot} \mathbf{E}$ и $\text{rot} \mathbf{H}$ — векторы, дуальные тензорам $\text{rot}_{\mu\nu} \mathbf{E}$ и $\text{rot}_{\mu\nu} \mathbf{H}$ соответственно. В жесткой системе отсчета, где γ не зависит от времени, векторные уравнения (10.292) совпадают с феноменологическими уравнениями Максвелла в материальной среде, а поскольку соотношения (10.287) можно представить в виде

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}; \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}; \quad (10.293)$$

$$\epsilon = \mu = 1/\sqrt{1 + 2\chi/c^2}, \quad (10.294)$$

то мы видим, что гравитационное поле помимо воздействия на пространственную геометрию дополнительно создает тот же эффект, что и покоящаяся сплошная среда с диэлектрической и магнитной постоянными (10.294).

§ 10.10. Электромагнитные силы и тензор энергии

Электромагнитная 4-сила, действующая на частицу с зарядом e , в соответствии с (5.85) равна

$$F_i = (e/c) F_{ik} U^k. \quad (10.295)$$

Компоненты этого вектора с учетом (10.64) и (10.288) можно записать в виде

$$F_i = (e/c) (F_{\mu\nu} U^\nu + F_{\mu 4} U^4, \quad F_{4\nu} U^\nu) = e\Gamma (E_\mu + B_{\mu\nu} u^\nu/c, \quad -E_\nu u^\nu/c). \quad (10.296)$$

Для рассматриваемого здесь случая, когда $\gamma = 0$, канонический импульс P_μ (10.92) равен импульсу P_μ в (10.68). Кроме того, из (10.101) видно, что каноническая сила \mathfrak{F} равна координатной силе \mathfrak{F} . Поэтому в соответствии с (10.99) и (10.100) имеем $F_i = \Gamma (\mathfrak{F}_\mu, \quad -\mathfrak{F}_\mu u^\mu/c)$. Сравнение этого выражения с (10.296) показывает, что электромагнитная сила, действующая на движущуюся заряженную частицу, равна

$$\mathfrak{F}_\mu = e (E_\mu + B_{\mu\nu} u^\nu/c). \quad (10.297)$$

Эту формулу с помощью (10.291) можно записать в виде

$$\mathfrak{F} = e (\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}/c), \quad (10.298)$$

где $\mathbf{u} \times \mathbf{B}$ — векторное произведение (9.74'').

Лировая линия частицы описывается уравнениями (10.3), которые в данном случае эквивалентны уравнениям движения (10.80), (10.103), где сила \mathfrak{F} определяется в (10.298) и

$$\tilde{\mathfrak{F}}_{\mu} u^{\mu} = \mathfrak{F}\mathbf{u} = e\mathbf{E}\mathbf{u}.$$

Когда внешнее гравитационное поле статическое, то уравнение (10.103) упрощается:

$$dH/dt = \mathfrak{F}\mathbf{u} = e\mathbf{E}\mathbf{u}. \quad (10.299)$$

В случае непрерывного распределения заряженной материи сила, действующая на элемент dV , определяется формулой (10.298), где $e = \rho dV$. Поэтому плотность силы \mathbf{f} должна быть равной

$$\mathbf{f} = \rho(\mathbf{E} + \mathbf{u} \times \mathbf{B}/c). \quad (10.300)$$

Это выражение формально совпадает с выражением для силы (7.74), определенной из тензора энергии Минковского для материальной заряженной среды в отсутствие тока проводимости.

Соответствующая 4-сила (5.93) равна

$$f_i = F_{ik} s^k, \quad (10.301)$$

что с учетом (10.283), (10.288), (10.295) приводит к выражению

$$f_i = \{\mathbf{f}/(1 + 2\chi/c^2)^{\frac{1}{2}}, \quad -(\mathbf{f}\mathbf{u})/c^*\}, \quad (10.302)$$

которое можно представить в следующем, аналогичном (4.218) виде:

$$\tilde{f}_i = \{\mathbf{f}, \quad -(\mathbf{f}\mathbf{u})/c\}, \quad (10.303)$$

где $\tilde{f}_i = \sqrt{-g} f_i$; $\mathbf{f} = \gamma^{1l} f$ — векторные плотности.

Поскольку в локально инерциальной системе справедливы уравнения (5.105), (5.106), в произвольной системе S имеем

$$\begin{aligned} f_i &= -\text{div}_i \{S_i^k\} \equiv -S_{i;k}^k = \\ &= -\frac{1}{\sqrt{|g|}} \frac{\partial}{\partial x^k} (\sqrt{|g|} S_i^k) + \frac{1}{2} \frac{\partial g_{kl}}{\partial x^i} S^{kl}, \end{aligned} \quad (10.304)$$

где

$$S_i^k = S_{i;k}^k = S_{;i}^k = F_{il} F^{kl} - \delta_i^k (1/4) (F_{lm} F^{lm}) \quad (10.305)$$

— электромагнитный тензор энергии. Формула (10.304) является следствием уравнений поля (10.272) и соотношения (10.301).

Подставляя (10.286), (10.288) и (10.291) в (10.305), получаем выражения для различных компонент тензора S_i^k :

$$S_{\mu}^{\nu} = -t_{\mu}^{\nu}/\sqrt{1 + 2\chi/c^2}; \quad t_{\mu}^{\nu} = H_{\mu} B^{\nu} + E_{\mu} D^{\nu} - \delta_{\mu}^{\nu} (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B})/2; \quad (10.306)$$

$$S_{\mu}^4 = -(\mathbf{E} \times \mathbf{H})_{\mu}/\sqrt{1 + 2\chi/c^2}; \quad S_4^4 = -(\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B})/2\sqrt{1 + 2\chi/c^2}; \quad (10.307)$$

$$S_{\mu}^4 = (\mathbf{D} \times \mathbf{B})_{\mu}/\sqrt{1 + 2\chi/c^2}, \quad (10.308)$$

где $\mathbf{E} \times \mathbf{H}$ и $\mathbf{D} \times \mathbf{B}$ — векторные произведения (9.74").

Из (10.227), (10.229) и (10.307) получим следующие выражения для электромагнитной плотности потока энергии, плотности энергии и плотности импульса:

$$\mathbf{S} = c(\mathbf{E} \times \mathbf{H}); \quad h = (\mathbf{D}\mathbf{E} + \mathbf{H}\mathbf{B})/2; \quad (10.309)$$

$$\mathbf{g} = (\mathbf{D} \times \mathbf{B})/c. \quad (10.310)$$

Эти выражения полностью согласуются с формулами (7.70), (7.71), (7.72), следующими из формулы для тензора энергии Минковского (7.68) материальной среды.

В случае статического гравитационного поля его влияние на электромагнитное поле эквивалентно влиянию покоящейся среды с ϵ и μ , определяемыми в (10.294).

Вводя обычным способом скорость распространения электромагнитной энергии u^* , из (10.309) получим

$$u^{*\mu} = S^\mu/h = 2c (\mathbf{E} \times \mathbf{H})^\mu / (\mathbf{E}\mathbf{D} + \mathbf{H}\mathbf{B}). \quad (10.311)$$

Отсюда скорость электромагнитной волны u^* равна

$$u^* = c/n = c/(\epsilon\mu)^{1/2} = c^*, \quad (10.312)$$

в соответствии с (10.154) и выражением (8.72) для скорости светового сигнала, когда $\gamma = 0$.

В глобальном масштабе пространственная геометрия неевклидова, но в достаточно малой области пространства (но все еще большей по сравнению с длиной волны) величины $\gamma_{\mu\nu}$ и $n = (1 + 2\chi/c^2)^{-1/2}$ могут считаться постоянными. Поэтому в этой области можно ввести декартову систему координат. Тогда внутри этой области формулы (7.90) будут являться решением уравнений поля (10.292) и будут справедливы выражения (7.93), (7.95) и (7.96) для \mathbf{S} , h , и u^* .

Упражнение

Показать, что уравнения поля (10.292) выполняются и вне времени-ортогональной системе координат и что соотношения между (\mathbf{D}, \mathbf{B}) и (\mathbf{E}, \mathbf{H}) в этом случае будут определяться вместо (10.293) и (10.294) следующими выражениями:

$$\mathbf{D} = \{\mathbf{E} + (\mathbf{H} \times \boldsymbol{\gamma})\} / (1 + 2\chi/c^2)^{1/2};$$

$$\mathbf{B} = \{\mathbf{H} - (\mathbf{E} \times \boldsymbol{\gamma})\} / (1 + 2\chi/c^2)^{1/2}.$$

ОСНОВНЫЕ ЗАКОНЫ ГРАВИТАЦИИ В ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

§ 11.1. Уравнения гравитационного поля и законы механики

В предыдущих разделах мы рассмотрели влияние заданного гравитационного поля на физические явления. Теперь обратимся к более важной проблеме в гравитационной теории, а именно к нахождению общих уравнений, определяющих переменные гравитационного поля ($\gamma_{\mu\nu}$, γ_μ , χ) или g_{ik} , создаваемые данным распределением масс. После ряда попыток эта проблема была окончательно решена Эйнштейном в 1915 г. [72, 73]. В теории гравитации Ньютона соответствующая задача формулируется в виде уравнения Пуассона

$$\Delta\chi = 4\pi k\mu, \quad (11.1)$$

где

$$k = 6,664 \cdot 10^{-11} \text{ м}^3 \text{ кг}^{-1} \text{ сек}^{-2} \quad (11.2)$$

есть гравитационная постоянная. Это уравнение дает возможность определить гравитационный потенциал χ , когда плотность массы μ дана как функция пространственных координат.

Учитывая эквивалентность массы и энергии, мы должны предположить, что любое распределение энергии (например, электромагнитное поле) должно порождать гравитационное поле. Плотность энергии произвольной физической системы определяется компонентой T_{44} тензора энергии T_{ik} системы, в то время как потенциал $\chi = c^2 (-1 - g_{44})/2$ связан с компонентой g_{44} метрического тензора. Таким образом, уравнение (11.1) отражает тот факт, что некоторый дифференциальный оператор второго порядка, действующий на g_{44} , должен быть пропорционален компоненте T_{44} . Поскольку уравнения гравитационного поля должны быть ковариантными, а различные компоненты T_{ik} перемешиваются координатными преобразованиями, естественно предположить, что общие полевые уравнения должны иметь вид

$$M_{ik} = -\kappa T_{ik}, \quad (11.3)$$

где κ — универсальная постоянная, а M_{ik} — тензор второго ранга, зависящий только от метрического тензора g_{ik} и его первых и вторых производных. Уравнение (11.3) в случае слабого поля должно переходить в уравнение Пуассона (11.1), поэтому тензор M_{ik} должен быть линейным по вторым производным g_{ik} , а в этом случае единственное возможное выражение для M_{ik} имеет вид

$$M_{ik} \equiv R_{ik} + c_1 R g_{ik} + c_2 g_{ik}, \quad (11.4)$$

где c_1 и c_2 — константы, а R_{ik} и R — свернутые формы тензора кривизны Римана—Кристоффеля, определенные выражениями (9.239) и (9.242).

Вследствие симметрии тензоров в (11.3) и (11.4) система (11.3) включает в себе десять нелинейных дифференциальных уравнений второго порядка. Рассмотрим сначала частный случай пустого пространства, когда $T_{ik} = 0$, а (11.3) сводится к

$$M_{ik} = 0. \quad (11.5)$$

Простой анализ показывает, что эти десять уравнений не могут быть независимы [13]. Если бы они были независимы, то в выбранной системе координат

(x^i) можно было бы определить однозначно функции $g_{ik}(x^i)$ на всем 4-пространстве, если g_{ik} и $\partial g_{ik}/\partial x^i$ даны на гиперповерхности

$$x^4 = \text{const} = a. \quad (11.6)$$

Введем новую координатную систему x'^i преобразованием

$$x'^i = x'^i(x); \quad x^i = x^i(x'); \quad (11.7)$$

тогда преобразованные функции

$$g_{ik} = (\partial x^l / \partial x'^i) \cdot (\partial x^m / \partial x'^k) g_{lm} \quad (11.8)$$

должны удовлетворять уравнениям

$$M'_{ik} = 0, \quad (11.9)$$

причем, учитывая ковариантность уравнений (11.5), M'_{ik} должен так же выражаться через g'_{ik} , $\partial g'_{ik}/\partial x'^i$, $\partial^2 g'_{ik}/\partial x'^i \partial x'^m$, как M_{ik} выражается через g_{ik} , $\partial g_{ik}/\partial x^i$, $\partial^2 g_{ik}/\partial x^i \partial x^m$. Следовательно, используя прежние рассуждения, видим, что уравнения (11.9) позволяют определить однозначно функции $g'_{ik}(x')$ по значениям g'_{ik} , $\partial g'_{ik}/\partial x'^i$ на гиперповерхности $x^4 = x^4(x') = a$; и если мы выберем преобразование (11.7) таким, что $x'^i = x^i$ вблизи гиперповерхности $x^4 = a$, но произвольно в остальном, то получим, что на этой гиперповерхности

$$g'_{ik} = g_{ik}, \quad \partial g'_{ik}/\partial x'^i = \partial g_{ik}/\partial x^i.$$

Следовательно, $g'_{ik}(x')$ должны быть такими же функциями переменных (x'^i) , что и $g_{ik}(x^i)$ от (x^i) . Однако это противоречит (11.8), откуда видно, что зависимость g'_{ik} от (x'^i) в точках, достаточно удаленных от поверхности $x^4 = a$, будет, вообще говоря, отличаться по виду от зависимости между g_{ik} и (x^i) .

Следовательно, если уравнения поля ковариантны, мы должны принять, что величины M_{ik} в левой части уравнений (11.5) и (11.3) связаны четырьмя тождествами. Это значит, что решения g_{ik} уравнений поля (11.5) содержат четыре произвольные функции, соответствующие четырем произвольным функциям в преобразованиях (11.7). Это вносит произвол только в наше описание пространства — времени, но не в физическую систему, порождающую гравитационное поле. В самом деле, как ясно из § 9.15, всегда возможно надлежащим выбором пространственно-временных координат обратить четыре функции g_{i4} в $(-\delta_{ij})$ во всем пространстве — времени. Шесть независимых уравнений, остающихся после введения четырех тождеств относительно M_{ik} , оказываются достаточными для определения остальных шести компонент метрического тензора g_{ik} .

Как мы видели в § 10.8, теоремы сохранения энергии и импульса замкнутой материальной системы в произвольной системе координат имеют вид

$$T^k_{i;k} = \text{div}_i \{T^k_i\} = 0. \quad (11.10)$$

Таким образом, если мы примем, что четыре тождества, включающие компоненты тензора M_{ik} , должны иметь вид

$$M^k_{i;k} \equiv 0, \quad (11.11)$$

то теорема сохранения для материальных систем окажется следствием уравнений (11.3) точно так же, как сохранение электрического заряда (10.274) следовало из уравнений Максвелла (10.272 б).

Примем поэтому, что дифференциальные операторы M_{ik} в левой части уравнений поля удовлетворяют четырем тождествам (11.11). В соответствии с (9.192) и (9.240) из (11.4) получим

$$M^k_{i;k} = (1/2 + c_1) (Rg^k_i)_{;k}$$

Положив это выражение тождественно равным нулю, имеем

$$c_1 = -1/2.$$

Тогда, считая $c_2 = -\lambda$, где λ — универсальная постоянная, приходим к уравнению

$$M_{ik} \equiv R_{ik} - (1/2) R g_{ik} - \lambda g_{ik}. \quad (11.4')$$

Уравнения поля (11.3) должны, следовательно, принять вид

$$M_{ik} \equiv R_{ik} - R g_{ik}/2 - \lambda g_{ik} = -\kappa T_{ik}. \quad (11.12)$$

Это уравнение можно записать в смешанных компонентах:

$$M_i^k \equiv R_i^k - R \delta_i^k/2 - \lambda \delta_i^k = -\kappa T_i^k. \quad (11.13)$$

Свертывая (11.13) и замечая, что $R_i^i = R$, $\delta_i^i = 4$, получаем

$$R + 4\lambda = \kappa T, \quad (11.14)$$

где

$$T \equiv T_i^i \quad (11.15)$$

есть инвариант, полученный свертыванием тензора энергии—импульса T_{ik} . Исключая с помощью (11.14) R , уравнения поля (11.12) запишем в новой форме:

$$R_{ik} + \lambda g_{ik} = -\kappa (T_{ik} - T g_{ik}/2). \quad (11.16)$$

Дивергенция тензора в левой части уравнения (11.13) тождественно равна нулю, поэтому законы сохранения (10.223) оказываются следствиями уравнений гравитационного поля. Это замечательная особенность теории Эйнштейна. Как было показано в § 10.8, законы сохранения (10.223) содержат в себе и уравнения движения материи. В простейшем случае некогерентной материи тензор T_i^k определяется (10.234), а уравнения (10.223) переходят в (10.235) и (10.236). Эти последние уравнения являются уравнениями движения свободно падающих частиц, выведенными с помощью принципа эквивалентности. Однако теперь мы видим, что эти уравнения являются следствием уравнений гравитационного поля, откуда следует, что эйнштейновские полевые уравнения совместимы с принципом эквивалентности.

Аналогично для упругих тел, T_i^k которых определяется в (10.230), законы сохранения (10.223) приводят к уравнениям движения (10.245) для произвольно малой части вещества, для которой, помимо гравитационной силы, следует учитывать еще упругую 4-силу δF_i^* . Уравнения движения для упругих тел оказываются следствием уравнений гравитационного поля. Можно ожидать, что это будет справедливо и при наличии других сил. Как было подчеркнуто в начале § 6.1, конечная скорость распространения любых взаимодействий приводит к необходимости рассмотрения промежуточного поля для описания взаимодействия двух разделенных тел. Возникающая при этом соответствующая 4-сила должна быть равна дивергенции тензора энергии — импульса промежуточного поля. С другой стороны, этот тензор вносит вклад в полный тензор T_i^k , стоящий в правой части уравнения гравитационного поля. Например, в случае электромагнитных сил, действующих на заряженное упругое тело, тензор T_i^k должен быть суммой выражений (10.230) и (10.305). Тогда закон сохранения (10.223), вытекающий из (11.13), снова приведет к уравнению движения для малой части тела в форме выражения (10.245). Однако теперь, как видим, в правой части уравнения должна стоять сумма упругой силы $f_i^* \delta \dot{V}^0$ и электромагнитной силы $f_i \delta \dot{V}^0$ из (10.304).

В теории гравитации Ньютона законы движения источников гравитационного поля не зависят от уравнений, определяющих само поле. Фактически движение источников произвольно в этой теории. Но в общей теории относительности уравнения гравитационного поля определяют как само поле, так и движение источников этого поля, если даны, конечно, начальные условия. Это

войство гравитационных уравнений, связывающих неразделимо законы механики и законы гравитации, является самой замечательной особенностью теории Эйнштейна, которая, в силу ее внутренней непротиворечивости и убедительности, вызывает высокую степень уверенности в справедливости физических следствий, вытекающих из формализма теории.

Вместе с уравнениями состояния материи десять уравнений (11.12) достаточны для определения всех неизвестных (при заданном начальном состоянии). В простейшем случае идеальной жидкости T_{ik} дается выражением (10.232), тогда уравнения решаются относительно неизвестных g_{ik} , U^i , $\dot{\mu}^0$ и \dot{p} . Уравнение состояния связывает $\dot{\mu}^0$ и \dot{p} (см. § 6.6) так, что на самом деле только одна из этих переменных оказывается неизвестной. Далее, поскольку все U^i являются функциями компонент скорости \mathbf{u} , лишь три компоненты из U^i независимы. Наконец, как было сказано ранее, четыре компоненты g_{ik} могут быть заданы надлежащим выбором системы координат, например, гауссовой системы, в которой $g_{i4} = -\delta_{i4}$. В результате общее число независимых неизвестных величин в десяти уравнениях (11.12) оказывается равным $1+3+6 = 10$.

Уравнения поля (11.12) достаточны для полного описания физической системы (при заданных начальных условиях). Это легко можно видеть на примере сопутствующей системы координат, в которой $\mathbf{u} = 0$. В этом случае правая часть (11.12) содержит только одну независимую переменную, скажем \dot{p} . Выбором соответствующей временной координаты, не нарушающим сопутствующий характер системы отсчета, компоненту g_{44} можно фиксировать произвольно. Например, можно положить $g_{44} = -1$ преобразованием типа (8.120). Девять оставшихся g_{ik} совместно с \dot{p} (или $\dot{\mu}^0$) полностью определяются затем из десяти уравнений (11.12), если заданы начальные условия.

§ 11.2. Линейное приближение слабого поля

Уравнения поля (11.12) и (11.16) являются нелинейными уравнениями в частных производных относительно g_{ik} . В случае слабых гравитационных полей уравнения можно аппроксимировать линейными дифференциальными уравнениями [74]. В этом случае можно ввести такую систему пространственно-временных координат, в которой метрический тензор имеет вид

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}, \quad (11.17)$$

где η_{ik} есть постоянный метрический тензор (8.41) или (9.23) в специальной теории относительности, а h_{ik} и их первые и вторые производные являются малыми величинами первого порядка.

В нулевом приближении, когда все h_{ik} исчезают, система координат лоренцева. Произвольное преобразование Лоренца приводит к новой координатной системе типа (11.17). Символы Кристоффеля (9.77), соответствующие (11.17), являются малыми величинами первого порядка, поэтому в тензоре кривизны (9.227), (9.242) можем пренебречь членами, содержащими квадраты компонент символов Кристоффеля. В результате получим

$$\begin{aligned} R_{ik} &= \frac{\partial \Gamma_{ir}^r}{\partial x^k} - \frac{\partial \Gamma_{ik}^r}{\partial x^r} = \\ &= \frac{\eta^{rs}}{2} \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial h_{si}}{\partial x^r} + \frac{\partial h_{sr}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ir}}{\partial x^s} \right) - \frac{\eta^{rs}}{2} \frac{\partial}{\partial x^r} \left(\frac{\partial h_{si}}{\partial x^k} + \frac{\partial h_{sk}}{\partial x^i} - \frac{\partial h_{ik}}{\partial x^s} \right) = \\ &= \frac{\eta^{rs}}{2} \frac{\partial^2 h_{ik}}{\partial x^r \partial x^s} + \frac{1}{2} \left(\frac{\partial^2 h}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_i^r}{\partial x^r \partial x^k} - \frac{\partial^2 h_k^r}{\partial x^i \partial x^r} \right), \end{aligned} \quad (11.18)$$

где мы положили

$$h_i^r = \eta^{rs} h_{is}; \quad h = h_r^r = \eta^{rs} h_{rs}. \quad (11.19)$$

Рассмотрим теперь случай статического распределения материи. Это значит, что среди систем координат типа (11.17) найдется такая, в которой все h_{ik} и компоненты тензора энергии-импульса не зависят от t . Для компоненты R_{44} из (11.18) имеем

$$R_{44} = (\eta^{\mu\nu}/2) \cdot \partial^2 h_{44} / \partial x^\mu \partial x^\nu = -\Delta\chi/c^2, \quad (11.20)$$

где χ — скалярный гравитационный потенциал, определенный в (8.109), а Δ — декартова форма оператора Лапласа. Если материя покоится, можно пренебречь малыми добавками упругих напряжений в тензоре энергии — импульса, и в первом приближении получим

$$\left. \begin{aligned} T_{ik} &= \eta_{il} \eta_{km} \dot{\mu}^0 U^l U^m = \delta_{i4} \delta_{k4} \dot{\mu}^0 c^2; \\ T &= T^i_i = \dot{\mu}^0 U_i U^i = \dot{\mu}^0 c^2; \\ T_{44} - 1/2 g_{44} T &= T_{44} - 1/2 \eta_{44} T = \dot{\mu}^0 c^2/2. \end{aligned} \right\} \quad (11.21)$$

Для $i = k = 4$ из (11.16) находим

$$\Delta\chi - \lambda c^2 g_{44} = \kappa c^4 \dot{\mu}^0/2. \quad (11.22)$$

Поскольку уравнение Пуассона является хорошей аппроксимацией в случае статических и квазистатических гравитационных полей в пределах Солнечной системы, мы можем заключить, что постоянная λ мала, так что в (11.22) член с λ должен исчезать при исследовании всех гравитационных явлений в пределах нашей планетной системы. Член с λ имеет значение лишь при исследовании космологических проблем, во всех же остальных случаях его можно полагать равным нулю. Тогда уравнения поля (11.12) принимают вид

$$R_{ik} - g_{ik} R/2 = -\kappa T_{ik}. \quad (11.23)$$

Из уравнений (11.22) и (11.1) видно, что константа κ должна быть связана с гравитационной постоянной k соотношением

$$\kappa c^2 = 8\pi k/c^2 = 1,87 \cdot 10^{-26} \text{ м, кг}^{-1}. \quad (11.24)$$

Возвращаясь к случаю произвольного слабого поля, прежде всего замечаем, что система координат, соответствующая (11.17) с малыми h_{ik} , все еще имеет большую степень произвола. Кроме преобразований Лоренца возможны еще преобразования

$$x'^i = x^i + \xi^i, \quad (11.25)$$

где $\xi^i(x^l)$ — функции первого порядка малости. Эти преобразования приводят к новому метрическому тензору, но сохраняющему вид (11.17). Поскольку левая часть (11.23) составлена из величин первого порядка малости, то же должно быть справедливо и для правой части, а это значит, что в приближении слабого поля величины R_{ik} и T_{ik} можно рассматривать как инварианты относительно преобразований (11.25). Следовательно, компоненты T_{ik} можно приравнять соответствующим компонентам \hat{T}_{ik} в лоренцевой метрике η_{ik} [в (11.21) мы это фактически и сделали].

Выражение (11.18) для R_{ik} можно переписать в форме

$$R_{ik} = \square h_{ik}/2 - (1/2) [\partial \cdot (\partial \chi^i_k / \partial x^i) / \partial x^k] - (1/2) [\partial \cdot (\partial \chi^i_i / \partial x^i) / \partial x^k], \quad (11.26)$$

где

$$\chi^k_i = h^k_i - \delta^k_i h/2; \quad \chi_{ik} = h_{ik} - \eta_{ik} h/2; \quad h = h^i_i. \quad (11.27)$$

Величины χ_{ik} , χ^k_i преобразуются как компоненты тензора при линейных преобразованиях пространственно-временных координат. С другой стороны,

всегда возможно с помощью преобразования типа (11.25) убедиться, что χ_i^k удовлетворяет четырем уравнениям [14]

$$\partial \chi_i^k / \partial x^k = 0, \quad (11.28)$$

которые в случае слабого поля тождественны условиям де Дондера (9.280).

Тогда для R_{ik} и R имеем

$$R_{ik} = \square h_{ik}/2; \quad R = R_i^i = \square h/2 \quad (11.29)$$

и уравнения поля (11.23) сводим к виду

$$\square \chi_{ik} = -2\kappa \dot{T}_{ik}, \quad (11.30)$$

где \square — релятивистский оператор Д'Аламбера (СТО).

Эти уравнения совпадают по форме с уравнениями (5.26) для электромагнитных потенциалов, поэтому и решения (11.30), исчезающие на бесконечности, должны быть аналогичны «запаздывающим» потенциалам (5.46)

$$\chi_{ik}(x^\mu, t) = (2\kappa/4\pi) \int (\dot{T}_{ik}(x'^\mu, t-r/c)/r) dx'^1 dx'^2 dx'^3, \quad (11.31)$$

$$\text{где } r = \sqrt{\left\{ \sum_{\mu=1, 2, 3} (x^\mu - x'^\mu)^2 \right\}}.$$

Если теперь мы сможем убедиться, что функции, определенные в (11.31), удовлетворяют также условиям (11.28), то их можно считать приближенным решением уравнений поля (11.23). Но такая проверка должна быть совершенно аналогична проверке справедливости калибровки Лоренца для электромагнитных потенциалов. А эта последняя основана на законе сохранения электрического заряда [см. (5.41)]. В нашем случае справедливость (11.28) следует из закона сохранения энергии и импульса, который в приближении слабого поля имеет вид

$$\partial \dot{T}_i^k / \partial x^k = 0. \quad (11.32)$$

Из (11.31) можно найти также явный вид величины h_{ik} . Сначала из (11.27) находим

$$\chi_i^i = h_i^i - 2h = -h; \quad h_{ik} = \chi_{ik} + \eta_{ik} h/2 = \chi_{ik} - \eta_{ik} \chi_i^i/2, \quad (11.33)$$

а затем с учетом (11.31) получим

$$\chi_i^i = (\kappa/2\pi) \int \dot{T}' d^{(3)} x' / r$$

и

$$h_{ik} = \frac{\kappa}{2\pi} \int [(\dot{T}'_{ik} - (1/2) \eta_{ik} \dot{T}') / r] d^{(3)} x', \quad (11.34)$$

где штрих в \dot{T}'_{ik} и \dot{T}' означает, что эти величины определены в точке (x'^μ) элемента объема $d^3 x' = dx'^1 dx'^2 dx'^3$ в запаздывающее время $(t - r/c)$.

Запаздывающие потенциалы (11.31), исчезающие на бесконечности, не единственные решения уравнений (11.30). Опережающие потенциалы или комбинация тех и других, например

$$\chi_{ik} = (\kappa/4\pi) \int \{[\dot{T}'_{ik}(x'^\mu, t-r/c) + \dot{T}'_{ik}(x'^\mu, t+r/c)]/r\} d^3 x', \quad (11.31')$$

также являются приемлемыми решениями (11.30), по крайней мере с математической точки зрения. Соответствующие решения (см. § 5.5) обычно в электродинамике отбрасываются из соображений причинности. В самом деле, хорошо известно, что электромагнитные сигналы распространяются с конечной скоростью c , и в заданной точке пространства в данный момент времени поле может определяться только тем источником, который излучил его в момент времени $(t - r/c)$. В случае гравитационного поля не так очевидно, что опережающие потенциалы или смешанные потенциалы типа (11.31) должны быть автоматически отброшены. В этом отношении положение станет более ясным лишь тогда, ког-

да будут экспериментально обнаружены переносящие энергию гравитационные волны, испускаемые и поглощаемые материальными системами. Во всяком случае, для стационарных систем гравитационное поле не зависит от того, вычислено ли оно по формуле (11.31) или по формуле (11.31').

§ 11.3. Простейшие случаи применения линейных уравнений слабого поля

Рассмотрим сначала статическое распределение материи, когда плотность массы $\dot{\mu}^0 = \dot{\mu}^0(x, y, z)$ является заданной функцией пространственных координат $x^\mu = (x, y, z)$. В этом случае в соответствии с (11.21) и (11.34) имеем

$$\begin{aligned} \hat{T}_{ik} &= \delta_{i4} \delta_{k4} \cdot \dot{\mu}^0 c^2; & \hat{T} &= -\dot{\mu}^0 c^2; \\ h_{44} &= \frac{\kappa c^2}{4\pi} \int \frac{\dot{\mu}^0(x'y'z') dx' dy' dz'}{|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|}; & & \\ & & h_{\mu 4} &= 0; \end{aligned} \quad (11.35)$$

$$h_{\mu\nu} = (\kappa c^2 / 4\pi) \int \dot{\mu}^0(x'y'z') dx' dy' dz' \delta_{\mu\nu} / (|\mathbf{x} - \mathbf{x}'|) = h_{44} \delta_{\mu\nu}$$

и для гравитационного потенциала, принимая во внимание (11.24), получаем обычное выражение ньютоновской теории

$$\chi = -(c^2/2) h_{44} = -\kappa \int \mu^0(\mathbf{x}') dV' / |\mathbf{x} - \mathbf{x}'|. \quad (11.36)$$

Следовательно, линейный элемент имеет вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= (h_{ik} + h_{ih}) dx^i dx^k = (1 - 2\chi/c^2) (dx^2 + dy^2 + dz^2) - \\ & - (1 + 2\chi/c^2) c^2 dt^2, \end{aligned} \quad (11.37)$$

где χ дано в (11.36).

Пространственная часть линейного элемента

$$d\sigma^2 = (1 - 2\chi/c^2) (dx^2 + dy^2 + dz^2) \quad (11.38)$$

показывает, что геометрия лишь приближается к евклидовой, т. е. координаты (x, y, z) здесь не точно совпадают с декартовыми. Никаким преобразованием пространственных координат их нельзя свести к декартовым точно. Но отклонения от евклидовой геометрии в большинстве случаев слишком малы, чтобы их можно было измерить. На поверхности Земли, например, $2\chi/c^2 \cong 10^{-9}$.

Для системы материальных частиц с массами M_1^0, M_2^0, \dots , находящихся в точках $\mathbf{X}_1, \mathbf{X}_2, \dots$ соответственно, из (11.36) имеем

$$\chi(\mathbf{x}) = -k [M_1^0 / |\mathbf{x} - \mathbf{X}_1| + M_2^0 / |\mathbf{x} - \mathbf{X}_2| + \dots]. \quad (11.39)$$

Гравитационный потенциал и линейный элемент в случае единичной частицы, как легко видеть, обладают сферической симметрией, а именно:

$$\begin{aligned} ds^2 &= (1 + 2kM^0/c^2 r) (dx^2 + dy^2 + dr^2) - (1 - 2kM^0/c^2 r) c^2 dt^2; & (11.40) \\ & & r = |\mathbf{x} - \mathbf{X}|. \end{aligned}$$

Аналогично можно рассмотреть с помощью решений линеаризованных уравнений Эйнштейна (11.34) случай стационарного движения материи. Тирринг и Ленз [257] подсчитали, например, влияние вращения астрономического тела на создаваемое ими гравитационное поле, а следовательно, и на движение спутников данного тела. Эффекты оказались, однако, слишком малыми [233], и мы не рассматриваем их здесь.

Но есть один эффект подобного типа, который хотя и мал, однако имеет большое теоретическое значение, поскольку он проливает свет на природу и происхождение центробежных и кориолисовых сил, возникающих во вращающихся системах отсчета S . В соответствии с идеей Эйнштейна, лежащей в основе общей теории относительности (ср. с § 8.1), эти силы являются гравитационными силами, обязанными вращению удаленных небесных тел относительно

ю S , и эти устранимые гравитационные поля должны удовлетворять тем же общим полевым уравнениям, каким удовлетворяют поля неустранимые. Приближенное решение (11.34) для слабых полей не позволяет непосредственно изучить эффекты от удаленных небесных масс, но можно ожидать, что вращающийся сферический слой однородно распределенной материи даст тот же эффект внутри слоя, что и удаленные небесные тела.

Если слой покоится, потенциал χ , определяемый выражением (11.36), постоянен внутри слоя и равен $\chi = -kM_0/R$, т. е.

$$2\chi/c^2 = -(\chi c^2/4\pi)(M^0/R), \quad (11.41)$$

где M^0 — полная масса, а R — радиус слоя.

Не считая констант $(1 - 2\chi/c^2)$ и $(1 + 2\chi/c^2)$, которые можно устранить простым изменением масштаба пространственной и временной координат, линейный элемент (11.37) имеет внутри слоя ту же форму, что и в СТО. Если слой движется с постоянной скоростью, то надлежащим преобразованием Лоренца линейный элемент внутри слоя снова можно свести к релятивистскому. Это непосредственно вытекает из (11.34), если использовать выражение \hat{T}_{ik} для равномерно и прямолинейно движущейся материи. Ясно, что в этом случае удаленные небесные тела не создают в инерциальных системах никаких гравитационных сил.

В случае вращающегося слоя материи, как показал Тирринг [255, 256], поле внутри слоя [см. (11.30)] подобно полю во вращающейся системе координат, следовательно, создаваемые гравитационные силы подобны силам центробежным и кориолисовым.

Интересно, что зависимость от угловой скорости гравитационной силы, действующей на пробную частицу внутри слоя, точно такая же, как и во вращающейся системе, но движущейся в противоположном направлении относительно системы инерциальной. Векторные потенциалы γ_μ , приводящие к силам типа кориолисовых, даже зависят от координат обычным образом. С другой стороны, скалярный потенциал имеет такую форму, что приводит, помимо обычных центробежных сил, к исчезающей компоненте силы вдоль оси вращения. Чисто радиальный характер центробежной силы означает, что приближенные уравнения (11.30), для единственности решения которых требуется точная формулировка граничных условий на бесконечности, не в состоянии адекватно описать динамику мира в целом. Это и не удивительно, поскольку некоторые из наиболее характерных особенностей точных уравнений (11.12) теряются в их приближенном варианте; например, существенно нелинейный характер уравнений исчезает в случае слабого поля. Кроме того, уравнения (11.12) содержат λ -член, важный в космологических задачах. Указанные обстоятельства существенно меняют проблему постановки граничных условий (см. § 12.6). В любом случае, однако, силы, действующие на пробную частицу внутри слоя, слишком малы, чтобы быть измеренными. Это и объясняет отрицательный результат эксперимента, выполненного Фридендером в 1896.

Упражнение

Рассмотреть массивное кольцо с массой M и радиусом R , вращающееся по часовой стрелке в плоскости x, y с постоянной угловой скоростью ω . Используя (11.34), вычислить гравитационный потенциал h_{ik} в точке (x, y, z) на расстоянии r от центра, где $r \ll R$.

Показать, что зависящие от ω части векторного и скалярного потенциалов определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} \gamma_\mu &= (M\omega c^2/4\pi R) (\omega/c) \{-y, x, 0\}; \\ \chi &= -(M\omega c^2/16\pi R) (\omega^2/2) (x^2 + y^2 - 2z^2). \end{aligned} \right\} \quad (11.42)$$

За исключением члена $(-2z^2)$ в последнем выражении, зависимость γ_μ и χ от координат оказывается такой же, как и в системе координат, вращающейся относительно оси z против часовой стрелки, когда линейный элемент дается формулой (8.91). Это выражение

наводит на мысль о связи констант κ , c^2 , массы Вселенной M и среднего расстояния R до космических тел, выражаемой соотношением

$$M\kappa c^2/4\pi R \approx 1 \quad (11.43)$$

(ср. с § 12.6).

Наконец, если рассмотреть с помощью (11.30) и (11.34) нестационарное движение материи, то возникает тесная аналогия с волновыми уравнениями теории электромагнетизма, из которой, вообще говоря, следует, что произвольно флуктуирующая материя генерирует переносящие энергию гравитационные волны, распространяющиеся со скоростью света [77]. Вопрос о том, насколько этот строгий результат, полученный, однако, в рамках приближенной линейной теории, будет справедлив в полной нелинейной теории (11.23), не выяснен и в последние годы очень широко обсуждается в литературе. Мы вернемся к нему в § 11.11.

Упражнение

Рассмотреть произвольно флуктуирующую островную материальную систему. Вычислить функцию $\chi_{ik}(x^\mu, t)$ на большом расстоянии $R = (x^\mu x^\mu)^{1/2}$ от системы. Для точки (x^μ) в направлении $n^\mu = x^\mu/R$ имеем

$$r = R - \mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' + O_1, \quad (11.44)$$

где $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}' = n^\nu x'^\nu = n_\nu x'^\nu$, а O_n есть член, содержащий n -ю степень отношения средних размеров системы l к расстоянию до нее R . Следовательно,

$$\chi_{ik}(x^\mu, t) = (\kappa/2\pi R) a_{ik}(u, \mathbf{n}) + O_2, \quad (11.45)$$

где

$$\left. \begin{aligned} a_{ik}(u, \mathbf{n}) &= \int \hat{T}_{ik}(x'^\lambda, u + \mathbf{n}x') d^{(3)}x'; \\ u &= ct - R. \end{aligned} \right\} \quad (11.46)$$

Вычислим $a_{ik}(u, \mathbf{n})$ в «волновой зоне» системы, если $R \gg \lambda \gg l$ и $\lambda \sim T_{ik}^0(\partial \hat{T}_{ik}(x'^\lambda, u)/\partial u)^{-1}$ есть величина порядка «длины волны» излучения.

Используя (11.32), получаем

$$\partial \hat{T}_i^\nu(x'^\nu, u)/\partial x'^\nu + \partial \hat{T}_i^4(x'^\nu, u)/\partial u = 0, \quad (11.47)$$

откуда следует, что 4-импульс нулевого порядка для системы

$$\hat{P}_i = (1/c) \int \hat{T}_i^4(x'^\nu, u) d^{(3)}x'$$

не зависит от времени, т. е. $d\hat{P}_i/du = 0$. Соответствующим преобразованием Лоренца можно перейти к такой системе, в которой \hat{P}_i имеет вид

$$\hat{P}_i^0 = -\hat{m}^0 c \delta_{i4}; \quad \hat{m}^0 = -\hat{P}_4^0/c = \hat{H}^0/c. \quad (11.48)$$

Пусть

$$\left. \begin{aligned} D_\mu(u) &= (1/c^2) \int \hat{T}_{44}(x', u) x'^\mu d^{(3)}x'; \\ D_{\mu\nu}(u) &= (1/c^2) \int \hat{T}_{44}(x', u) x'^\mu x'^\nu d^{(3)}x' \end{aligned} \right\} \quad (11.49)$$

есть моменты первого и второго порядка нашей системы. Тогда, учитывая (11.47), покажем, что в системе (11.48)

$$\dot{D}_\mu = c(d/du)(D_\mu(u)) = \dot{P}_\mu = 0.$$

В волновой зоне интеграл (11.46) может быть выражен через $\mathbf{n} \cdot \mathbf{x}'$. Показать, что в первом приближении величины $a_{ik}(u)$ определяются формулами

$$\left. \begin{aligned} a_{\mu\nu} &= \ddot{D}_{\mu\nu}/2; \quad a_{\mu 4} = -\ddot{D}_{\mu\nu} n^\nu/2; \\ a_{44} &= \dot{m}^0 c^2 + \ddot{D}_{\mu\nu} n^\mu n^\nu/2, \end{aligned} \right\} \quad (11.50)$$

где точки означают дифференцирование

$$d/dt = cd/du.$$

§ 11.4. Эквивалентные системы координат. Сферическая симметрия

Рассмотрим произвольную систему координат (x^i) и метрику $g_{ik} = g_{ik}(x^l)$. Введем новую систему координат преобразованием

$$x'^i = x'^i(x^l), \quad (11.51)$$

тогда преобразованные компоненты метрического тензора

$$g'_{ik}(x'^r) = (\partial x^l / \partial x'^i) \cdot (\partial x^m / \partial x'^k) g_{lm}(x^s) \quad (11.52)$$

уже не будут теми же функциями (x'^i) , что и g_{ik} от переменных (x^l) , т. е. метрический тензор не является форм-инвариантной функцией координат.

Системы координат (x^i) и (x'^i) , в которых метрический тензор является форм-инвариантной функцией пространственно-временных координат при преобразованиях (11.51), можно назвать *эквивалентными*, поскольку все физические процессы будут протекать в них совершенно одинаково. Существование эквивалентных систем координат налагает определенные условия на гравитационное поле, так как функции $g_{ik}(x^l)$ должны, очевидно, удовлетворять функциональным уравнениям

$$g_{ik}(x'^r(x^s)) = (\partial x^l / \partial x'^i) (\partial x^m / \partial x'^k) g_{lm}(x^s). \quad (11.53)$$

В некоторых случаях g_{ik} оказываются инвариантными относительно целой группы преобразований. Это имеет место, например, для всех устранимых гравитационных полей. Введем псевдодекартовы координаты X^i преобразованиями

$$X^i = f^i(x^l), \quad (11.54)$$

тогда

$$ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k = \eta_{ik} dX^i dX^k. \quad (11.55)$$

Далее, выполняя преобразование Лоренца

$$X'^i = A^i_k X^k \quad (11.56)$$

и вводя новые пространственно-временные координаты (x'^l) , преобразованием

$$X'^i = f^i(x'^l) \quad (11.57)$$

с теми же функциями, что и в (11.54), получаем

$$g_{ik} dx^i dx^k = \eta_{ik} dX^i dX^k = \eta_{ik} dX'^i dX'^k = g'_{ik} dx'^i dx'^k,$$

а поскольку η_{ik} являются постоянными, то g'_{ik} должны быть теми же функциями от (x'^l) , что и g_{ik} от (x^l) . Преобразование $x'^l = x'^l(x^l)$, определенное в (11.54), (11.56) и (11.57), которое может быть названо обобщенным преобразованием Лоренца, связывает, следовательно, две эквивалентные системы координат, и компоненты g_{ik} метрического тензора устранимого гравитационного поля оказываются форм-инвариантными относительно группы *обобщенных преобразований Лоренца*.

В случае неустраняемого гравитационного поля, вообще говоря, невозможно ввести такие пространственно-временные координаты x^i , чтобы g_{ik} оказались форм-инвариантными относительно группы четырехмерных ортогональных преобразований, однако в некоторых частных, но важных случаях гравитационные потенциалы оказываются форм-инвариантными относительно подгруппы пространственных ортогональных преобразований. Такие системы можно совершенно естественно назвать *сферически симметричными*. Положив $x^i = (x, ct) = (x, y, z, ct)$, получим, что g_{ik} инвариантны относительно произвольных ортогональных преобразований трех переменных (x, y, z) при постоянном t . Вообще координаты (x, y, z) не будут декартовы, пространственная геометрия не будет евклидовой, тем не менее линейный элемент $ds^2 = g_{ik} dx^i dx^k$ может

быть в этом случае функцией только от хорошо установленных форм-инвариантов группы трехмерных вращений евклидова пространства. Эти инварианты таковы:

$$\left. \begin{aligned} r &= (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad dr, \\ dx^2 + dy^2 + dz^2 &= dr^2 + r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2, \\ x dx + y dy + z dz &= r dr, \quad dt \text{ и } t. \end{aligned} \right\} \quad (11.58)$$

Поскольку линейный элемент есть квадратичная форма в дифференциалах, то наиболее общее выражение для ds^2 в системе со сферической симметрией имеет вид

$$ds^2 = F(r, t) dr^2 + G(r, t) (r^2 d\theta^2 + r^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2H(r, t) dr dt + L(r, t) dt^2, \quad (11.59)$$

где F, G, H, L являются функциями только от r и t .

Это выражение может быть далее упрощено при надлежащем выборе координат. Вводя новую переменную r' преобразованием

$$r'^2 = r^2 G(r, t), \quad (11.60)$$

получаем следующее выражение линейного элемента в новых переменных:

$$ds^2 = M(r', t) dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) + 2N(r', t) dr' dt + O(r', t) dt^2. \quad (11.61)$$

Величины $\omega_{\mu\nu}$ из (8.135) в нашем случае, очевидно, равны нулю. Следовательно, простым преобразованием координатного времени можно обратить в нуль векторные потенциалы, и, поскольку $N(r', t)$ не зависит от θ и φ , этого можно достигнуть преобразованием вида

$$t' = f(r', t), \quad (11.62)$$

которое не действует на остальные члены в (11.61). Опуская штрихи, запишем теперь линейный элемент в новой, стандартной форме:

$$ds^2 = a dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - bc^2 dt^2, \quad (11.63)$$

где

$$a = a(r, t); \quad b = b(r, t) = 1 + 2\chi/c^2 \quad (11.64)$$

являются функциями r и t такими, что с учетом (8.52) они остаются положительными при всех r и t .

§ 11.5. Статические системы со сферической симметрией

Если система статическая и сферически симметричная, то функции a и b не зависят от t . В этом случае компоненты тензора M_{ik} , определяемые (11.4), легко вычисляются. Полагая $x^i = (r, \theta, \varphi, ct)$, имеем

$$g_{11} = a(r); \quad g_{22} = r^2; \quad g_{33} = r^2 \sin^2 \theta; \quad g_{44} = -b. \quad (11.65)$$

Остальные компоненты равны нулю. Координатная система ортогональна; неисчезающие компоненты g^{ik} следующие:

$$\left. \begin{aligned} g^{11} &= 1/g_{11} = 1/a; & g^{22} &= 1/g_{22} = 1/r^2; \\ g^{33} &= 1/g_{33} = 1/r^2 \sin^2 \theta; & g^{44} &= 1/g_{44} = -1/b, \end{aligned} \right\} \quad (11.66)$$

а символы Кристоффеля (9.77) вычисляются по формуле

$$\Gamma_{kl}^i = (1/2g_{ii}) (\delta_{ik} \partial g_{ii} / \partial x^l + \delta_{il} \partial g_{ii} / \partial x^k - \delta_{kl} \partial g_{kk} / \partial x^i) \quad (11.67)$$

(по i и k суммирование нет!).

Поскольку g_{ik} не зависит от φ и x^4 , то не равны нулю лишь символы

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{11}^1 &= a'/2a; & \Gamma_{22}^1 &= -r/a; & \Gamma_{33}^1 &= -r \sin^2 \theta/a; & \Gamma_{44}^1 &= b'/2a; \\ \Gamma_{12}^2 &= 1/r; & \Gamma_{33}^2 &= -\sin \theta \cos \theta; \\ \Gamma_{13}^3 &= 1/r; & \Gamma_{23}^3 &= \text{ctg } \theta; & \Gamma_{14}^4 &= b'/2b \end{aligned} \right\} \quad (11.68)$$

(штрихи означают дифференцирование по r).

Используя (11.68) в (9.242), вычислим величины R_{ik} и $R = R_i^i$. И наконец, тензор M_{ik} , а также M_i^k получаем из (11.4). Непосредственные выкладки показывают, что все недиагональные элементы этого тензора равны нулю, а четыре диагональные компоненты M_1^1 , M_2^2 , M_3^3 и M_4^4 являются функциями только от r . Из трансформационных свойств компонент тензора относительно вращений следует, что M_2^2 и M_3^3 равны. Однако согласно тождеству (11.11) даже три величины M_1^1 , $M_2^2 = M_3^3$ и M_4^4 не являются независимыми. Как легко видеть, в случае статической системы со сферической симметрией система уравнений (11.11) сводится к одному уравнению, с помощью которого компонента $M_2^2 = M_3^3$ может быть выражена через компоненты M_1^1 , M_4^4 и через dM_1^1/dr . Непосредственные вычисления дают

$$M_1^1 = -b'/abr + (1/r^2)(1 - 1/a) - \lambda; \quad (11.69a)$$

$$M_4^4 = a'/a^2r + (1/r^2)(1 - 1/a) - \lambda; \quad (11.69б)$$

$$M_2^2 = M_3^3 = -(1/2a) \{ (b'/b)' - a'b'/2ab + (b'/b)^2/2 + b'/br - a'/ar \} - \lambda. \quad (11.69в)$$

Эти явные выражения для компонент тензора M_i^k согласуются с тождествами (11.11).

§ 11.6. Внешнее решение Шварцшильда

В пустом пространстве, окружающем материальную частицу с массой M , $T_i^k = 0$, следовательно, уравнения поля (11.13) должны иметь вид

$$-b'/abr - (1/r^2)(1 - 1/a) - \lambda = 0; \quad (11.70a)$$

$$a'/a^2r + (1/r^2)(1 - 1/a) - \lambda = 0; \quad (11.70б)$$

$$-(1/2a) \{ (b'/b)' - a'b'/2ab + (b'/b)^2/2 + b'/br - a'/ar \} - \lambda = 0, \quad (11.70в)$$

причем последнее уравнение должно быть следствием первых двух. Из (11.70a) и (11.70б) легко получаем

$$(a'b + ab')/a^2br = 0,$$

т. е.

$$(ab)' = 0 \quad (11.71)$$

или

$$ab = \text{const.} \quad (11.72)$$

Полагая

$$y = 1/a, \quad (11.73)$$

из (11.70б) находим после умножения на $(-r^2)$

$$ry' + y - 1 + \lambda r^2 = 0 \quad (11.74)$$

или

$$(yr)' = 1 - \lambda r^2. \quad (11.75)$$

После интегрирования имеем

$$ry = r - \lambda r^3/3 - \alpha, \quad (11.76)$$

(α — постоянная интегрирования) или

$$y = 1 - \alpha/r - \lambda r^2/3. \quad (11.77)$$

Из (11.73) и (11.77) получаем следующее решение уравнения (11.70б):

$$a = (1 - \alpha/r - \lambda r^2/3)^{-1}. \quad (11.78)$$

Пространственный линейный элемент, который в нашем случае равен пространственной части (11.63), имеет вид

$$d\sigma^2 = dr^2 (1 - \alpha/r - \lambda r^2/3)^{-1} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (11.79)$$

Если пренебречь малым λ -членом, то $d\sigma^2$ в пределе больших r будет стремиться к обычному линейному элементу евклидова пространства в полярных координатах. Интересно, что условие сферической симметрии оказывается достаточным для получения предельного перехода к евклидову пространству без использования явных граничных условий на бесконечности. Этот результат, конечно, отчасти связан с нормировкой (11.60) переменной r , которая уже выбрана такой, что геометрия на $r = \text{const}$, такая же, как и на сфере евклидова пространства радиусом r . В истинном пространстве (11.79) переменная r уже не является радиальным расстоянием, так как расстояние между точками (r_1, θ, φ) и (r_2, θ, φ) теперь определяется по формуле

$$l = \int_{r_1}^{r_2} (1 - \alpha/r - \lambda r^2/3)^{-1/2} dr. \quad (11.80)$$

Наблюдатель, находящийся на большом расстоянии от центрального тела, будет пытаться построить картину поля в евклидовом пространстве. В этой картине r играет роль расстояния от центра, а расстояние l , измеряемое стандартными измерительными стержнями, уже не представляет ценности для астрономии. Поэтому координаты (r, θ, φ) можно считать обычными полярными координатами, которые используются в небесной механике. В соответствии с (11.72) имеем

$$b = \text{const}/a = \text{const} \cdot (1 - \alpha/r - \lambda r^2/3). \quad (11.81)$$

Простым изменением масштаба времени можно выбрать константу равной единице и получить в окончательной форме внешнее решение Шварцшильда [221]:

$$ds^2 = dr^2 / (1 - \alpha/r - \lambda r^2/3) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - \alpha/r - \lambda r^2/3) c^2 dt^2, \quad (11.82)$$

или, если пренебречь λ -членом, который становится существенным лишь при очень больших r ,

$$ds^2 = dr^2 / (1 - \alpha/r) + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - \alpha/r) c^2 dt^2. \quad (11.83)$$

Это выражение справедливо вне сферического распределения материи, причем, поскольку при $r = r_0$ имеет место сингулярность, определяемая уравнением

$$1 - \alpha/r_0 = 0, \quad (11.84)$$

сама материя должна быть распределена в области с радиусом, большим по сравнению с критическим (11.84). Только в этом случае координаты Шварцшильда удовлетворяют условиям (8.52). Сингулярность при $r = r_0$ не может быть полностью устранена выбором других «статических» координат. Линейный элемент можно записать в другой форме, если выбрать, например, «изотропные» координаты r', θ, φ, t с помощью преобразования

$$r = r' (1 + \alpha/4r')^2; \quad r' = \frac{1}{2} \{ (r^2 - \alpha r)^{1/2} + r - \alpha/2 \}. \quad (11.85)$$

В этом случае линейный элемент принимает вид

$$ds^2 = \left(1 + \frac{\alpha}{4r'}\right)^4 (dr'^2 + r'^2 d\theta^2 + r'^2 \sin^2 \theta d\varphi^2) - \frac{(1 - \alpha/4r')^2}{(1 + \alpha/4r')^2} c^2 dt^2. \quad (11.86)$$

Сингулярная точка $r_0 = \alpha$ имеет теперь новую координату $r'_0 = \alpha/4$, и видно, что в (11.86) сингулярность в пространственной части элемента отсутствует, но имеет место в g_{44} . Как было показано Серини [225], Эйнштейном [80] и Паули [82], несингулярных решений уравнений гравитационного поля для пустого пространства, которые были бы стационарны и имели бы на бесконечности $g_{44} = -1 + \text{const}/r$, не существует. Как мы сейчас увидим, требуемая форма g_{44} просто означает, что мы имеем дело с полем вне массового источника. Скалярный потенциал, который, разумеется, является инвариантом относительно преобразований (11.85), имеет следующий вид в двух системах координат (11.83) и (11.86) соответственно:

$$\left. \begin{aligned} \chi &= (-g_{44} - 1) c^2/2 = -\alpha c^2/2r; \\ \chi' &= (-g'_{44} - 1) c^2/2 = -\alpha c^2/2r' (1 + \alpha/4r')^2. \end{aligned} \right\} \quad (11.87)$$

На больших расстояниях, когда поле слабое, оба эти выражения сводятся к ньютоновской форме ($-\alpha c^2/2r = \alpha c^2/2r'$), которая показывает, что константа α может быть связана с активной гравитационной массой M , генерирующей поле, соотношением

$$\alpha = 2kM/c^2 = \kappa c^2 M/4\pi. \quad (11.88)$$

Все известные системы в природе имеют положительную активную гравитационную массу M , поэтому наложим условие

$$\alpha > 0, \quad (11.89)$$

хотя, как легко видеть, уравнениям поля не противоречит и отрицательный знак перед α .

В области, где поле уже слабое, метрику (11.86) можно представить в виде

$$ds^2 = (1 \mp \alpha/r') (dx^2 + dy^2 + dz^2) - (1 - \alpha/r') c^2 dt^2, \quad (11.90)$$

где мы положили

$$x = r' \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r' \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r' \cos \theta. \quad (11.91)$$

Принимая во внимание (11.88), видим, что выражение (11.91) тождественно статическому решению (11.40) линейно аппроксимированных уравнений поля (11.30).

Как было впервые замечено Леметром [140], сингулярность в линейном элементе может быть устранена, если ввести нестатическую систему координат r' , θ , φ , t' преобразованием

$$r = (9\alpha/4)^{1/3} \cdot (r' - ct')^{2/3}; \quad c dt' = c dt + (\alpha/r)^{1/2} dr/(1 - \alpha r). \quad (11.92)$$

В этом случае линейный элемент (11.83) принимает вид

$$ds^2 = \alpha dr'^2/r + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - c^2 dt'^2, \quad (11.93)$$

где зависимость r от r' и t' определяется (11.92). Сравнение (11.93) с (9.269) показывает, что новая система координат является гауссовой, т. е. динамическое действие гравитационного поля в ней устранено, а динамические потенциалы ($\gamma_{\mu\nu}$, χ) равны нулю. Движение какой-либо планеты в этой системе описывается уравнением (10.52), т. е. ковариантные компоненты вектора импульса частицы в момент ($t' \mp dt'$) получаются из соответствующих значений в момент t' параллельным сдвигом в пространстве с линейным элементом:

$$d\sigma^2 = \frac{\alpha}{r} dr'^2 \mp r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2).$$

Учитывая, что r зависит от времени, мы не получаем при этом жесткой системы отсчета, и движение планет в этой координатной системе выглядит очень сложно.

Упражнение 1

Проверить, что мировые линии пробных частиц в системе координат Леметра S' (11.92), т. е. точки с постоянными значениями (r', θ, φ) , удовлетворяют уравнениям (9.271) с $\tau = t'$. Хотя начальные условия при $t' = 0$ отличаются от (9.270), этот факт означает, что система отсчета R' , соответствующая S' , состоит из свободно падающих пробных частиц, и что координатные часы в S' являются стандартными часами, покоящимися в R' . Проверить, что функция $ct' = f^4(x)$ в (11.92) с производными

$$\partial f^4(x)/\partial x^i = \{(\alpha/r)^{1/2}/(1-\alpha/r), 0, 0, 1\}$$

удовлетворяет уравнению (9.279).

Упражнение 2

Показать, что преобразованием

$$\rho = r - \alpha/2; \quad x^\mu = (\rho \sin \theta \cos \varphi, \rho \sin \theta \sin \varphi, \rho \cos \theta) \quad (a)$$

можно получить «гармоническую» систему координат $x^i = (x^\mu, ct)$, соответствующую решению Шварцшильда (11.83).

Проверку можно выполнить в такой последовательности.

1) метрика в новых координатах имеет вид

$$g_{\mu\nu} = (1 + \alpha/2\rho)^2 \delta_{\mu\nu} + [\rho + \alpha/2]/(\rho - \alpha/2) (\alpha^2/4\rho^2) x^\mu x^\nu,$$

$$g_{i4} = -\delta_{i4} (\rho - \alpha/2) (\rho + \alpha/2); \quad (б)$$

$$2) g = -(1 + \alpha/2\rho)^2; \quad (в)$$

$$3) (-g)^{1/2} g^{\mu\nu} = \delta_{\mu\nu} - \alpha^2 x^\mu x^\nu / 4\rho^4,$$

$$(-g)^{1/2} g^{i4} = -\delta_{i4} (1 + \alpha/2\rho)^3 / (1 - \alpha/2\rho); \quad (г)$$

$$4) \{(-g)^{1/2} g^{ik}\}, k=0. \quad (д)$$

Последнее уравнение показывает, что условия де Дондера (9.280) удовлетворяются, так что система координат, определяемая уравнением (а), гармоническая.

Упражнение 3

Показать, что преобразования

$$x'^\mu = \{(\rho + \alpha/2)/\rho\} x^\mu; \quad \rho' = (x'^\mu x'^\mu)^{1/2} = \rho + \alpha/2$$

приводят к системе координат $x'^i = (x'^\mu, ct)$ типа (9.282), (9.282'). Метрический тензор в такой системе будет иметь вид

$$\left. \begin{aligned} g'_{\mu\nu} &= \delta_{\mu\nu} + \alpha x'^\mu x'^\nu / \rho'^2 (\rho' - \alpha); \\ g'_{i4} &= -\delta_{i4} (1 - \alpha/\rho'); \\ g' &= -1. \end{aligned} \right\} \quad (e)$$

§ 11.7. Внутреннее решение Шварцшильда для идеальной жидкости

Тензор энергии — импульса идеальной жидкости дан в (10.232) и имеет вид

$$T_i^k = (\dot{\mu}^0 + \dot{p}/c^2) U_i U^k + \dot{p} \delta_i^k. \quad (11.94)$$

Исходя из уравнений поля (11.13)

$$M_i^k = -\kappa T_i^k \quad (11.95)$$

и выражения (11.69) для тензора M_i^k , получаем, что статическое сферически симметричное поле типа (11.63) возможно, только если скорость u^μ материи равна нулю и если собственная плотность массы $\dot{\mu}^0$ и давление \dot{p} являются функ-

диями только от r . Поскольку мы используем сопутствующую систему координат, то в соответствии с (10.253) имеем

$$\left. \begin{aligned} U^i &= (0, 0, 0, c/\sqrt{b}); & U_i &= g_{ik} U^k = (0, 0, 0, -c\sqrt{b}); \\ T_i^k &= -(\dot{\mu}^0 + \dot{p}/c^2) c^2 \delta_{i4} \delta_{k4} + \dot{p} \delta_i^k; \\ \dot{\mu}^0 &= \dot{\mu}^0(r); & \dot{p} &= \dot{p}(r). \end{aligned} \right\} \quad (11.96)$$

Используя теперь закон сохранения

$$T_{i;k}^k = (1/\sqrt{|g|}) \partial(\sqrt{|g|} T_i^k)/\partial x^k - \Gamma_{is}^r T_r^s = 0, \quad (11.97)$$

для $i = 1$ получаем

$$(1/\sqrt{|g|}) \partial(\sqrt{|g|} \dot{p})/\partial r + \Gamma_{14}^4 (\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p}) - \Gamma_{1r}^r \dot{p} = 0,$$

или, принимая во внимание (11.68) и (9.128),

$$d\dot{p}/dr + (\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p}) b'/2b = d\dot{p}/dr + [(\dot{\mu}^0 + \dot{p}/c^2)/(1 + 2\chi/c^2)] d\chi/dr = 0. \quad (11.98)$$

Это уравнение, тождественное уравнению (в), с. 298 дает зависимость давления от скалярного гравитационного потенциала в равновесной жидкости, находящейся в собственном гравитационном поле (жидкость удерживается в равновесии собственным гравитационным полем).

Уравнения поля (11.95) снова сводятся лишь к двум независимым уравнениям, из которых мы можем выбрать

$$M_1^1 = -\kappa T_1^1; \quad M_4^4 = -\kappa T_4^4. \quad (11.99)$$

Остальные уравнения из (11.95) оказываются следствиями (11.99), если учесть (11.98). Из (11.69а,б), (11.96) и (11.99) имеем

$$b'/abr - (1 - 1/a)/r^2 + \lambda = \kappa \dot{p}; \quad (11.100a)$$

$$a'/a^2 r + (1 - 1/a)/r^2 - \lambda = \kappa \dot{\mu}^0 c^2. \quad (11.100б)$$

Уравнения (11.98), (11.100) совместно с уравнением состояния материи, связывающим \dot{p} и $\dot{\mu}^0$, определяют внутреннее состояние материи и гравитационное поле жидкости.

Для простоты примем, что жидкость практически несжимаема. Тогда собственная плотность массы остается постоянной, и решение (11.100б) можно получить из решения (11.78) уравнения (11.70б) заменой $\lambda \rightarrow \lambda + \kappa \dot{\mu}^0 c^2$. Поскольку наше решение должно быть регулярно при $r \rightarrow 0$, константа интегрирования α в (11.78) должна быть приравнена нулю. Тогда

$$a = [1 - (\lambda + \kappa \dot{\mu}^0 c^2) r^2/3]^{-1} = (1 - r^2/R^2)^{-1}, \quad (11.101)$$

где

$$R^2 = (\lambda + \kappa \dot{\mu}^0 c^2)/3. \quad (11.102)$$

Учитывая, что $\dot{\mu}^0 = \text{const}$, интегрируем (11.98) и сразу же получаем, что

$$(\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p}) \sqrt{b} = \text{const}.$$

Складывая уравнения (11.100а), (11.100б) и умножая на \sqrt{b} , имеем

$$b'/a \sqrt{br} + a' \sqrt{b}/a^2 r = \text{const}.$$

Подставляя в это выражение (11.101), получаем

$$\sqrt{b} + R^2 [(1 - r^2/R^2)/r] (d\sqrt{b}/dr) = A, \quad (11.103)$$

где $A = \text{const}$. Если положить $y = \sqrt{b}$ и ввести вместо r новую переменную

$x = (1 - r^2/R^2)^{1/2}$, то (11.103) можно преобразовать в уравнение

$$y - xdy/dx = A, \quad (11.104)$$

решая которое, получаем

$$y = A - Bx,$$

где B — константа интегрирования. Следовательно,

$$b = y^2 = \{A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}\}^2. \quad (11.105)$$

Наконец, используя (11.101) и (11.105) совместно с (11.100а), получаем следующее выражение для \dot{p} , измеряемого в локально инерциальной системе:

$$\dot{p} = \{3B \sqrt{1 - r^2/R^2} - A\}/R^2 \{A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}\} + \lambda. \quad (11.106)$$

Линейный элемент в случае внутреннего решения Шварцшильда имеет вид [222]

$$ds^2 = dr^2/(1 - r^2/R^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2) - \{A - B \sqrt{1 - r^2/R^2}\}^2 c^2 dt^2. \quad (11.107)$$

Пространственная геометрия определяется линейным элементом

$$d\sigma^2 = dr^2/(1 - r^2/R^2) + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2). \quad (11.108)$$

Следовательно, геометрия на поверхности $r = r_1 = \text{const}$ такая же, как и на сфере радиуса r_1 в евклидовом пространстве, но r_1 не есть расстояние до $r = 0$, измеряемое стандартным стержнем, так как расстояние теперь определяется по формуле

$$l_1 = \int_0^{r_1} \frac{dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} = R \arcsin \frac{r_1}{R} = r_1 \left(1 + \frac{1}{6} \left(\frac{r_1}{R} \right)^2 + \frac{3}{40} \left(\frac{r_1}{R} \right)^4 + \dots \right). \quad (11.109)$$

Объем этой сферы есть

$$V_1 = \int_0^{r_1} \int_0^\pi \int_0^{2\pi} \sqrt{\gamma} dr d\theta d\varphi = \int \int \int \frac{r^2 \sin \theta}{\sqrt{1 - r^2/R^2}} dr d\theta d\varphi = 4\pi \int_0^{r_1} \frac{r^2 dr}{\sqrt{1 - r^2/R^2}}, \quad (11.110)$$

т. е.

$$V_1 = \frac{4\pi R^3}{2} \left\{ \arcsin \frac{r_1}{R} - \frac{r_1}{R} \sqrt{1 - \frac{r_1^2}{R^2}} \right\} = \frac{4\pi r_1^3}{3} \left\{ 1 + \frac{3}{10} \left(\frac{r_1}{R} \right)^2 + \dots \right\}.$$

Рассмотрим заполненное жидкостью пространство внутри сферы $r = r_1$ с $\dot{\mu}^0 = \text{const}$. Для $r < r_1$ имеем тогда решение (11.107), в то время как для $r > r_1$ должно быть справедливо внешнее решение Шварцшильда (11.82). Учитывая это, можно определить константы A и B , так как на $r = r_1$ решения (11.107) и (11.82) должны совпадать. Далее, \dot{p} на поверхности сферы должно быть равно нулю. Пренебрежем λ -членом, который внутри Солнечной системы приводит к пренебрежимо малым эффектам, и условие сшивания запишем в виде системы уравнений

$$\begin{aligned} 1 - \frac{\alpha}{r_1} &= 1 - \frac{r_1^2}{R^2} = \{A - B \sqrt{1 - r_1^2/R^2}\}^2; \\ 3B \sqrt{1 - r_1^2/R^2} - A &= 0; \quad R^2 = 3/\chi \dot{\mu}^0 c^2; \end{aligned}$$

решение которой есть

$$\left. \begin{aligned} A &= \frac{3}{2} \sqrt{1 - r_1^2/R^2}; \quad B = 1/2; \quad R^2 = 3/\chi \dot{\mu}^0 c^2; \\ \alpha &= r_1^3/R^2 = \chi c^2 \dot{\mu}^0 r_1^3/3 = (2k\dot{\mu}^0/c^2) \cdot 4\pi r_1^3/3. \end{aligned} \right\} \quad (11.111)$$

Сравнение с (11.88) показывает, что гравитационное поле, создаваемое сферическим распределением жидкости, на больших расстояниях такое же, как и поле источника с массой

$$M = (4\pi/3) r_1^3 \dot{\mu}^0, \quad (11.112)$$

т. е. на больших расстояниях совпадает с полем ньютоновской жидкости, заполняющей с постоянной плотностью сферу радиуса r_1 в евклидовом пространстве.

В соответствии с (11.110) действительный объем сферы больше, чем $4\pi r_1^3/3$; с другой стороны, $\dot{\mu}^0$ есть плотность массы, измеренная в локально инерциальной системе, и отличается от плотности, измеренной в используемой здесь системе координат. В § 11.11 мы покажем, что величина M точно равна полной энергии системы, деленной на c^2 . Во всяком случае, различие между действительным V_1 из (11.110) и $4\pi r_1^3/3$ мало, и во всех астрономических расчетах не учитывается. Для Солнца, например,

$$\dot{\mu}^0 = 1,4 \cdot 10^3 \text{ кг м}^{-3}; \quad r_1 = 6,95 \cdot 10^8 \text{ м}, \quad (11.113)$$

следовательно,

$$\left. \begin{aligned} R &= 3,5 \cdot 10^{11} \text{ м}; \\ r_1/R &\approx 2 \cdot 10^{-3}; \\ (V_1 - 4\pi r_1^3/3)/(4\pi r_1^3/3) &\approx 10^{-6}. \end{aligned} \right\} \quad (11.114)$$

Это значит, что различие между l_1 из (11.109) и радиальной координатой r_1 слишком мало, чтобы быть обнаруженным в астрономических измерениях. Видно также, что условие $r_1 > r_0 = \alpha$ (условие применимости внешнего решения Шварцшильда) заведомо выполняется. Из (11.111) имеем $\alpha/r_1 = r_1^2/R^2 \approx 10^{-6} < 1$. Как и в случае пустого пространства, можно ввести изотропные координаты. Для произвольных функций $a(r)$, $b(r)$ из (11.63) введем преобразование $r' = r'(r)$, удовлетворяющее дифференциальному уравнению

$$dr'/r' = \sqrt{a(r)} dr/r, \quad (11.115)$$

общее решение которого есть

$$r' = C \exp \left\{ \int_0^r (\sqrt{a(r)} dr/r) \right\}, \quad (11.116)$$

где C — произвольная константа. Тогда линейный элемент приобретает вид

$$\begin{aligned} ds^2 &= \frac{r^2}{r'^2} \{ dr'^2 + r'^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) \} - bc^2 dt^2 = \\ &= \frac{r}{r'^2} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - bc^2 dt^2, \end{aligned} \quad (11.117)$$

где (x, y, z) взяты из (11.91).

В случае $a(r)$ из (11.101) получаем

$$r' = Cr/R [1 + \sqrt{1 - r^2/R^2}]; \quad r = r' 2CR / (C^2 + r'^2), \quad (11.118)$$

и линейный элемент внутри несжимаемой жидкости приводится к виду

$$\begin{aligned} ds^2 &= 4C^2 R^2 (dx^2 + dy^2 + dz^2) / (C^2 + r'^2)^2 - \\ &- [A - B (C^2 - r'^2) / (C^2 + r'^2)]^2 c^2 dt^2. \end{aligned} \quad (11.119)$$

Константу C можно определить из условий сшивки (11.118) и (11.85) на границе жидкости.

Решение Шварцшильда является одним из немногих точных решений уравнений гравитационного поля, нашедших широкое применение в астрономии.

Рейсснер [203] и Вейль [273, 276] решили задачу нахождения гравитационного поля, порождаемого электромагнитной энергией заряженной частицы. Они получили линейный элемент в виде

$$ds^2 = (1 - \alpha/r + \kappa e^2/r^2)^{-1} dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - \alpha/r + \kappa e^2/r^2) c^2 dt^2. \quad (11.120)$$

Отношение двух величин, зависящих от заряда и массы соответственно, с учетом (11.88) есть

$$\kappa e^2/r\alpha = 4\pi e^2/rMc^2. \quad (11.121)$$

В случае электрона эти два члена становятся одинаковыми по порядку величины на расстояниях, соответствующих классическому радиусу электрона $a = e^2/Mc^2$. Однако оба эти члена дают пренебрежимо малый вклад во взаимодействие электронов по сравнению с кулоновскими силами.

Другие точные решения уравнений поля для случая произвольного цилиндрически симметричного распределения материи были получены Вейлем [273, 275] и Леви-Чивита [141—143]. В последнее время целый класс точных решений уравнений Эйнштейна был получен А. З. Петровым [194], Элерсом и Кундтом [64], Таубом [250—253] и другими.

§ 11.8. Вариационный принцип для гравитационного поля

Пусть Ω — произвольная область 4-пространства. Рассмотрим четырехмерный инвариантный интеграл

$$J_1 = \int_{\Omega} R d\Omega = \int_{\Omega} R_{ik} g^{ik} \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 dx^4, \quad (11.122)$$

где $R = R_{ik} g^{ik}$ есть скаляр кривизны и

$$R_{ik} = \partial \Gamma_{il}^l / \partial x^k - \partial \Gamma_{ik}^l / \partial x^l + \Gamma_{il}^r \Gamma_{kr}^l - \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rl}^l \quad (11.123)$$

есть свернутый тензор кривизны. Подынтегральное выражение в (11.122) есть алгебраическая функция g_{ik} и их производных. Поскольку контравариантные компоненты g^{ik} однозначно определяются через g_{ik} , подынтегральное выражение можно представить и как функцию g^{ik} и их производных. Рассмотрим вариацию δg^{ik} и предположим, что она произвольна внутри области Ω , но исчезает вместе со своими производными на границе Ω . Тогда соответствующая вариация J_1 будет

$$\delta J_1 = \int \delta R_{ik} \sqrt{-g} g^{ik} dx + \int R_{ik} \delta (\sqrt{-g} g^{ik}) dx. \quad (11.124)$$

Варьируя (11.123), получаем

$$\delta R_{ik} = \partial \delta \Gamma_{il}^l / \partial x^k - \partial \delta \Gamma_{ik}^l / \partial x^l + \delta \Gamma_{il}^r \Gamma_{kr}^l + \Gamma_{il}^r \delta \Gamma_{kr}^l - \delta \Gamma_{ik}^r \Gamma_{rl}^l - \Gamma_{ir}^r \delta \Gamma_{kl}^l. \quad (11.125)$$

В то время как символы Кристоффеля Γ_{kl}^i преобразуются по закону (9.80), который отличается от закона преобразования тензоров, вариация $\delta \Gamma_{kl}^i$, которая является не чем иным, как разностью между двумя символами Кристоффеля в одной и той же точке, преобразуется как тензор. Следовательно, ковариантная произвольная

$$(\delta \Gamma_{kl}^i)_{;m} = \partial \delta \Gamma_{kl}^i / \partial x^m + \Gamma_{mr}^i \delta \Gamma_{kl}^r - \Gamma_{km}^r \delta \Gamma_{rl}^i - \Gamma_{lm}^r \delta \Gamma_{kr}^i \quad (11.126)$$

также будет тензором. Это дает возможность записать тензор δR_{ik} в простой форме

$$\delta R_{ik} = (\delta \Gamma_{il}^l)_{;k} - (\delta \Gamma_{ik}^l)_{;l}. \quad (11.127)$$

Это тензорное соотношение можно легко проверить, если ввести геодезическую систему координат, в которой $\Gamma_{kl}^i = 0$, так как в этой системе правые части выражений (11.125) и (11.127) становятся тождественными.

Умножив (11.127) на $\sqrt{(-g)}g^{ik}$, получим с помощью (9.191), (9.192) и (9.196)

$$\begin{aligned} \sqrt{(-g)} g^{ik} \delta R_{ik} &= \sqrt{(-g)} \{ (g^{ik} \delta \Gamma_{il}^l)_{;k} - (g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l)_{;l} \} = \\ &= \sqrt{(-g)} (g^{il} \delta \Gamma_{lk}^k - g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l)_{;l} = \frac{\partial}{\partial x^l} \{ \sqrt{(-g)} (g^{il} \delta \Gamma_{ik}^k - g^{ik} \delta \Gamma_{ik}^l) \}. \end{aligned}$$

Следовательно, подынтегральное выражение в первом интеграле (11.124) имеет форму обычной дивергенции, и интеграл можно преобразовать к поверхностному по Ω . Поскольку на поверхности Ω вариации δg^{ik} и их первые производные исчезают, первый интеграл в (11.124) также равен нулю.

Далее, из (9.127) имеем

$$\begin{aligned} \delta \sqrt{(-g)} &= -\delta g / \sqrt{(-g)} = - (g g^{ik} / 2 \sqrt{(-g)}) \delta g_{ik} = \\ &= -\sqrt{(-g)} g_{ik} \delta g^{ik} / 2; \end{aligned} \quad (11.128)$$

$$\delta \{ \sqrt{(-g)} g^{ik} \} = \sqrt{(-g)} (\delta g^{ik} - g^{ik} g_{lm} \delta g^{lm} / 2), \quad (11.129)$$

и подынтегральное выражение второго интеграла в (11.124) принимает вид

$$R_{ik} \delta \{ \sqrt{(-g)} g^{ik} \} = \sqrt{(-g)} (R_{ik} - \frac{1}{2} R g_{ik}) \delta g^{ik}.$$

Следовательно, вариация интеграла J_1

$$\delta J_1 = \int (R_{ik} - R g_{ik} / 2) \delta g^{ik} \sqrt{(-g)} dx. \quad (11.130)$$

Аналогично, принимая во внимание (11.128), получаем, что

$$\delta \int 2\lambda \sqrt{(-g)} dx = - \int \lambda g_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{(-g)} dx. \quad (11.131)$$

Складывая (11.130) и (11.131), видим, что вариация инварианта

$$J = \int (R + 2\lambda) \sqrt{(-g)} dx \quad (11.132)$$

равна

$$\delta J = \int M_{ik} \delta g^{ik} \sqrt{(-g)} dx, \quad (11.133)$$

где M_{ik} есть тензор, стоящий в левой части (11.12). Таким образом, уравнения гравитационного поля для пустого пространства

$$M_{ik} = 0 \quad (11.134)$$

эквивалентны вариационному принципу

$$\delta J = 0 \quad (11.135)$$

при любых вариациях δg^{ik} , лишь бы они вместе со своими первыми производными обращались в нуль на границе Ω .

Ясно, что (11.130) и (11.133) будут справедливы и в случае, если из J_1 и J вычтеть любой интеграл, подынтегральное выражение которого имеет форму обычной дивергенции. Такие выражения всегда можно преобразовать в интегралы по поверхности Ω , которые, как мы видели, не дают вклада в δJ_1 и δJ . Теперь вклад в $R \sqrt{(-g)} = R_{ik} g^{ik} \sqrt{(-g)}$, вносимый первыми двумя членами (11.123), может быть записан в виде

$$\begin{aligned} (\partial \Gamma_{il}^l / \partial x^k - \partial \Gamma_{ik}^l / \partial x^l) \sqrt{(-g)} g^{ik} &= \partial \{ \sqrt{(-g)} g^{ik} \Gamma_{il}^l \} / \partial x^k - \\ &- \partial \{ \sqrt{(-g)} g^{ik} \Gamma_{ik}^l \} / \partial x^l - (\partial \{ \sqrt{(-g)} g^{ik} / \partial x^k \} \Gamma_{il}^l + \\ &+ \partial \{ \sqrt{(-g)} g^{ik} \} / \partial x^l) \Gamma_{ik}^l, \end{aligned} \quad (11.136)$$

где первые два члена, как обычные дивергенции, исчезают. Далее, подставив вместо $\partial g^{ik}/\partial x^l$ выражение (9.125), содержащее символы Кристоффеля, и используя соотношение

$$\partial \sqrt{-g}/\partial x^l = \sqrt{-g} \Gamma_{lr}^r,$$

получим, что последние два члена в (11.136) сводятся к $2\mathfrak{L}$, где

$$\mathfrak{L} \equiv \sqrt{-g} g^{ik} (\Gamma_{ik}^r \Gamma_{rl}^l - \Gamma_{il}^r \Gamma_{kr}^l). \quad (11.137)$$

Поскольку вклад в $R\sqrt{-g}$ от последних двух членов (11.123) есть $-\mathfrak{L}$, из (11.130) и (11.133) можно получить

$$\delta \int \mathfrak{L} dx = \int \sqrt{-g} (R_{ik} - Rg_{ik}/2) \delta g^{ik} dx \quad (11.138)$$

и

$$\delta \int \mathfrak{S} dx = \int \sqrt{-g} M_{ik} \delta g^{ik} dx, \quad (11.139)$$

где

$$\mathfrak{S} \equiv \mathfrak{L} + 2\lambda \sqrt{-g}. \quad (11.140)$$

Интегралы $\int \mathfrak{L} dx$ и $\int \mathfrak{S} dx$ не инвариантны. Тем не менее, поскольку они определяются выражениями (11.137) и (11.140), одинаковыми во всех системах координат, соотношения (11.138) и (11.139) имеют ковариантный смысл.

В отличие от J_1 и J выражения \mathfrak{L} и \mathfrak{S} не содержат вторых производных от метрического тензора, они являются функциями лишь g^{ik} и их первых производных

$$g_{,l}^{ik} \equiv \partial g^{ik}/\partial x^l. \quad (11.141)$$

Так как $\delta g_{,l}^{ik} = \partial \delta g^{ik}/\partial x^l$, то очевидно, что

$$\begin{aligned} \delta \int \mathfrak{L} dx &= \int (\delta g^{ik} \partial \mathfrak{L}/\partial g^{ik} + \delta g_{,l}^{ik} \partial \mathfrak{L}/\partial g_{,l}^{ik}) dx = \\ &= \int \{ \partial \mathfrak{L}/\partial g^{ik} - \partial (\partial \mathfrak{L}/\partial g_{,l}^{ik})/\partial x^l \} \delta g^{ik} dx. \end{aligned} \quad (11.142)$$

Аналогично

$$\delta \int \mathfrak{S} dx = \int \{ \partial \mathfrak{S}/\partial g^{ik} - \partial (\partial \mathfrak{S}/\partial g_{,l}^{ik})/\partial x^l \} \delta g^{ik} dx. \quad (11.143)$$

Поскольку выражения (11.138) и (11.142) для $\delta \int \mathfrak{L} dx$ должны быть равны при любой δg^{ik} внутри произвольной области Ω , в каждой точке мы должны иметь

$$\sqrt{-g} \left(R_{ik} - \frac{1}{2} Rg_{ik} \right) = \partial \mathfrak{L}/\partial g^{ik} - \partial (\partial \mathfrak{L}/\partial g_{,l}^{ik})/\partial x^l. \quad (11.144)$$

Аналогично, сравнивая (11.139) и (11.143), получаем

$$\sqrt{-g} M_{ik} = \partial \mathfrak{S}/\partial g^{ik} - \partial (\partial \mathfrak{S}/\partial g_{,l}^{ik})/\partial x^l. \quad (11.145)$$

Используя этот метод, рассматривали g^{ik} , $g_{,l}^{ik}$ как независимые, пренебрегая, таким образом, соотношениями симметрии $g^{ik} = g^{ki}$, $g_{,l}^{ik} = g_{,l}^{ki}$. Такая процедура допустима, лишь бы только в результате дифференцирования правых частей (11.144) и (11.145) получались величины, симметричные по индексам i и k . Хотя \mathfrak{L} и \mathfrak{S} имеют, вообще говоря, сложные законы преобразования (они являются аффинными тензорными плотностями), ковариантные производные от правых частей (11.144) и (11.145) преобразуются как тензорные плотности.

Если при постоянных $g_{,l}^{ik}$ все переменные g^{ik} умножить на λ , то величины g_{ik} , $\sqrt{-g}$ и Γ_{kl}^l , как легко видеть из (9.7), (9.4) и (9.77), умножатся на λ^{-1} , λ^{-2} и λ^{-1} соответственно. Следовательно, величина \mathfrak{L} будет умножена на λ^{-3} ,

т. е. \mathfrak{E} есть однородная функция g^{ik} степени (-3) . Из теоремы Эйлера следует уравнение

$$(\partial \mathfrak{E} / \partial g^{ik}) g^{ik} = 3 \mathfrak{E}. \quad (11.146)$$

Кроме того, \mathfrak{E} является однородной функцией $g_{,i}^{ik}$ степени 2, поэтому

$$(\partial \mathfrak{E} / \partial g_{,i}^{ik}) g_{,i}^{ik} = 2 \mathfrak{E}. \quad (11.147)$$

§ 11.9. Комплекс энергии — импульса и законы сохранения энергии и импульса для изолированных систем

В § 10.9 было показано, что сохранение электрического заряда есть следствие ковариантного соотношения $\text{div} \{s^i\} = 0$. Это связано с тем обстоятельством, что равенство нулю ковариантной дивергенции 4-вектора эквивалентно исчезновению обычной дивергенции от векторной плотности. Последовательно интегрируя по пространственным координатам, приходим к заключению, что полный заряд системы постоянен во времени.

Закон сохранения энергии и импульса в виде (10.223) или в виде

$$\partial \{ \sqrt{(-g)} T_i^k \} / \partial x^k = (\partial g_{kl} / \partial x^i) \sqrt{(-g)} T^{kl} / 2 \equiv k_i \quad (11.148)$$

в общем случае не эквивалентен, однако, исчезновению обычной дивергенции, и интегрирование по пространственным координатам не приводит в этом случае к сохранению соответствующих величин. Только в случае стационарной системы, рассмотренной в § 10.8, правая часть (11.148) исчезает при $i = 4$, и интегрирование по пространственным координатам приводит к интегралу движения, который может быть интерпретирован как полная энергия. Неисчезающий член в (11.148) свидетельствует, что система не является вполне замкнутой. Этот член аналогичен плотности внешней 4-силы, действующей на незамкнутую систему специальной теории относительности (гл. 7). В случае электромагнитных сил с помощью уравнений Максвелла можно записать плотность 4-силы в виде дивергенции тензора энергии — импульса электромагнитного поля. Аналогично, используя уравнения поля (11.12), член

$$k_i \equiv (\partial g_{kl} / \partial x^i) \sqrt{(-g)} T^{kl} / 2 \quad (11.149)$$

в правой части (11.148) можно записать в ковариантной форме

$$k_i = -\partial \tau_i^k / \partial x^k; \quad \tau_i^k = \sqrt{(-g)} t_i^k, \quad (11.150)$$

где t_i^k есть комбинация 4^2 величин, зависящих от компонент метрического тензора и их первых производных. Величины k_i и t_i^k не преобразуются, конечно, как тензоры, но уравнения (11.148), (11.149) и (11.150) интегрированием по пространственным переменным будут, как мы увидим позже, приводить к сохранению величин с простыми законами преобразования и имеющих ясный физический смысл [72, 73, 78, 128].

Чтобы проверить (11.150), запишем сначала (11.149) в виде

$$k_i = -(\partial g^{kl} / \partial x^i) \sqrt{(-g)} T_{kl} / 2, \quad (11.149')$$

используя правило опускания индексов и соотношение (9.7). Принимая во внимание (11.12), (11.149) и (11.145), получаем

$$\begin{aligned} k_i &= -\frac{1}{2} \sqrt{(-g)} T_{kl} \frac{\partial g^{kl}}{\partial x^i} = \frac{1}{2\kappa} \sqrt{(-g)} M_{lm} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} = \\ &= \frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g^{lm}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_{,k}^{lm}} \right) \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \right\} = \\ &= \frac{1}{2\kappa} \left\{ \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g^{lm}} \frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} + \frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_{,k}^{lm}} \frac{\partial^2 g^{lm}}{\partial x^i \partial x^k} - \frac{\partial}{\partial x^k} \left[\left(\frac{\partial \mathfrak{S}}{\partial g_{,k}^{lm}} \right) \left(\frac{\partial g^{lm}}{\partial x^i} \right) \right] \right\}. \end{aligned}$$

Поскольку \mathfrak{S} есть функция только g^{lm} и $g_{,k}^{lm}$, а

$$\partial^2 g^{lm} / \partial x^i \partial x^k = \partial g_{,k}^{lm} / \partial x^i,$$

сумма первых двух членов в скобках есть просто $\partial \mathfrak{S} / \partial x^i$.

Следовательно, h_i имеет вид, как в (11.150), где

$$\begin{aligned} \tau_i^k &= V(\overline{-g}) t_i^k = (1/2\kappa) \{ (\partial \mathfrak{S} / \partial g_{,k}^{lm}) g_{,i}^{lm} - \delta_i^k \mathfrak{S} \} = \\ &= (1/2\kappa) \{ (\partial \mathcal{L} / \partial g_{,k}^{lm}) g_{,i}^{lm} - \delta_i^k \mathcal{L} - \delta_i^k 2\lambda V(\overline{-g}) \}. \end{aligned} \quad (11.151)$$

Используя (11.150) и (11.148), получаем закон сохранения энергии и импульса в виде

$$\partial T_i^k / \partial x^k = 0, \quad (11.152)$$

где

$$T_i^k = \mathfrak{T}_i^k + \tau_i^k, \quad \mathfrak{T}_i^k = V(\overline{-g}) T_i^k. \quad (11.153)$$

Если пренебречь малым членом λ , как мы это будем делать впоследствии, то τ_i^k сводится к

$$\tau_i^k = (1/2\kappa) \{ (\partial \mathcal{L} / \partial g_{,k}^{lm}) g_{,i}^{lm} - \delta_i^k \mathcal{L} \} = V(\overline{-g}) t_i^k. \quad (11.154)$$

Эта величина исчезает в локально инерциальной системе отсчета, т. е. гравитационное поле локально уничтожается. Закон сохранения в форме (11.152) и (11.153) предполагает, следовательно, что плотность энергии, импульса и потока энергии полной материальной системы плюс гравитационное поле могут быть записаны соответственно в виде

$$\left. \begin{aligned} h &= -(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} (T_4^4 + t_4^4) = -T_4^4/\gamma^{1/2}; \\ g_\mu &= (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} (T_\mu^4 + t_\mu^4)/c = T_\mu^4/c\gamma^{1/2}; \\ S^\mu &= -c(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} (T_4^\mu + t_4^\mu) = -cT_4^\mu/\gamma^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.155)$$

Однако такая интерпретация t_i^k с физической точки зрения встречает затруднения, так как t_i^k не есть тензор, т. е. g_μ и S^μ не будут преобразовываться как 3-векторы при нелинейном преобразовании пространственных координат, а h не будет инвариантом относительно этих преобразований. Следовательно, распределение гравитационной энергии в данной системе отсчета зависит от выбора (x^i) в данной точке, а это значит, что искомые величины не имеют определенного физического смысла.

Тем не менее, можно показать, что интегралы от g_μ и h по физическому пространству, по крайней мере, для островных систем обладают всеми физическими свойствами полных энергии и импульса системы.

Для доказательства этой очень важной теоремы существенно, что:

1) τ_i^k и T_i^k суть аффинные тензорные плотности веса 1, т. е. они преобразуются как тензорные плотности при линейных координатных преобразованиях;

2) τ_i^k есть однородная квадратическая функция частных производных $g_{,i}^{jk}$ или $g_{,i^k, l}$ метрического тензора.

Теперь рассмотрим островную систему, т. е. систему, тензор энергии — импульса T_i^k в которой исчезает всюду вне мировой трубки с конечными пространственными размерами в 4-пространстве. В этом случае мы можем предположить, что пространство — время асимптотически плоское на большом пространственном удалении от трубки. Это значит, что возможно введение системы координат

$$x^i = (x, y, z, ct), \quad r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}, \quad (11.156)$$

в которой

$$g_{ik} \rightarrow \eta_{ik} \quad \text{при} \quad r \rightarrow \infty. \quad (11.157)$$

Такая система называется *асимптотически лоренцевой*. (Бесконечность в (11.157) означает область, где r велико по сравнению с пространственными размерами материальной системы, но мало по сравнению с космологическими расстояниями, где может уже играть существенную роль λ -член.)

Островная система не обязательно должна быть изолированной. Хотя, по определению, материальная система в нашем случае не может испускать материальных сигналов типа электромагнитного излучения, тем не менее она может быть связана с внешним миром испусканием гравитационного излучения, зависящим от способа устремления g_{ik} к плоской метрике η_{ik} при $r \rightarrow \infty$. Островная система считается *изолированной*, если можно ввести такую координатную систему (11.156), в которой метрика

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik} \quad (11.158)$$

имеет асимптотические свойства

$$h_{ik} = O_1, \quad g_{ih, l} = h_{ih, l} = O_2. \quad (11.159)$$

Здесь O_n с положительным n означает член, в котором $r^n O_n$ остается конечным при $r \rightarrow \infty$; член O_n может быть также равным нулю. В отличие от величин h_{ik} в (11.17) h_{ik} в (11.158) не обязательно должны быть малыми.

Пусть Σ — произвольная пространственноподобная трехмерная бесконечная гиперповерхность и пусть $\mathfrak{F}_i(\Sigma)$ суть следующие интегралы по Σ :

$$\mathfrak{F}_i(\Sigma) = -(1/c) \int_{\Sigma} \mathbf{T}_i^k dS_k. \quad (11.160)$$

Здесь

$$dS_k = \varepsilon_{klmn} dx^l \delta x^m \Delta x^n$$

есть величина (9.57), ортогональная к dx^l , δx^m , Δx^n на Σ . Чтобы фиксировать знак dS_k , условимся, что dS_k направлен в будущее, т. е.

$$dS^4 = g^{4k} dS_k > 0. \quad (11.161)$$

Пусть далее Ω есть область 4-пространства, ограниченная двумя пространственноподобными гиперповерхностями Σ_1 и Σ_2 и «гиперцилиндром» C , состоящим из точек с большим значением $R = \text{const}$ переменной $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ (см. рис. 15, с $\Sigma_3 = C$). Интегрируя уравнение (11.152) по Ω и используя теорему Гаусса (9.222), получаем

$$(1/c) \int_{\Omega} \mathbf{T}_i^k dx = -(1/c) \int_{\Sigma_1} \mathbf{T}_i^k dS_k - (1/c) \int_{\Sigma_2} \mathbf{T}_i^k dS_k + (1/c) \int_C \mathbf{T}_i^k dS_k = 0. \quad (11.162)$$

Здесь dS_k направлено из области Ω .

Если радиус R цилиндра C устремить к бесконечности, то последний интеграл в (11.162), как легко видеть, исчезает. Это следует из того, что $\mathfrak{F}_i^k = 0$ и $\tau_i^k = O_4$ на C , согласно (11.159) и условию 2 в начале доказательства. Следовательно, $\mathbf{T}_i^k = O_4$ на C , и, поскольку область интегрирования в последнем интеграле (11.162) по крайней мере порядка O_3 , этот интеграл исчезает при $R \rightarrow \infty$. Далее, так как dS_k направлен из Ω , т. е. на Σ_1 и Σ_2 в противоположные стороны, то из (11.162) вытекает, что

$$\mathfrak{F}_i(\Sigma_1) = \mathfrak{F}_i(\Sigma_2), \quad (11.163)$$

откуда следует, что величины (11.160) не зависят от выбора Σ .

Если Σ в (11.160) — гиперповерхность с $t = \text{const}$, то можно выбрать

$$dx^t = \delta_{i1} dx^1; \quad dx^m = \delta_{m2} dx^2; \quad \Delta x^n = \delta_{n3} dx^3,$$

что дает

$$\left. \begin{aligned} dS_k &= \varepsilon_{k123} dx^1 dx^2 dx^3 = -\delta_{k4} dx^1 dx^2 dx^3; \\ dS^4 &= g^{4k} dS_k = -g^{44} dx^1 dx^2 dx^3 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.164)$$

Следовательно, интегралы (11.160) сводятся к

$$\mathfrak{S}_i(\Sigma) = P_i, \quad (11.165)$$

где P_i — пространственные интегралы

$$P_i = (1/c) \int \mathbf{T}_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 = (P_\mu, -H/c), \quad (11.166)$$

причем согласно (11.155)

$$\left. \begin{aligned} P_\mu &= (1/c) \int \mathbf{T}_\mu^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \int g_\mu dV; \\ H &= - \int \mathbf{T}_4^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \int h dV. \end{aligned} \right\} \quad (11.167)$$

В отличие от g_μ и h , которые, как мы видели, не имеют физического смысла, выражения (11.166) и (11.167) могут быть интерпретированы как полные импульс и энергия системы, так как совершенно очевидно, что они удовлетворяют следующим условиям:

- 1) величины P_i не зависят от времени;
- 2) они преобразуются как ковариантные компоненты 4-вектора при произвольных линейных преобразованиях координат;
- 3) они инвариантны относительно всех тех преобразований координат, которые не изменяют значений координат на пространственной бесконечности.

В частности, условие 2 справедливо для преобразований Лоренца. Условие 1 следует непосредственно из (11.165) и (11.163), если Σ_1 и Σ_2 выбраны как гиперповерхности $t = t_1$ и $t = t_2$ соответственно, причем постоянные t_1 и t_2 произвольны.

Далее, учитывая условие 1 на стр. 325, находим, что величина $\mathbf{T}_i^k dS_k$ преобразуется как 4-вектор относительно линейных преобразований

$$x'^i = A_i^k x^k; \quad x^k = \check{A}_i^k x'^i,$$

т. е.

$$\mathbf{T}_i'^t dS_l' = \check{A}_i^k \mathbf{T}_k^t dS_l, \quad (11.168)$$

а интеграл по гиперповерхности Σ дает

$$\mathfrak{S}_i'(\Sigma) = \check{A}_i^k \mathfrak{S}_k(\Sigma). \quad (11.169)$$

Следовательно, если Σ_1 и Σ_2 — две гиперповерхности с $t' = \text{const}$ и $t = \text{const}$ соответственно, то из (11.165), (11.169) и (11.163) получаем условие

$$P_i' = \mathfrak{S}_i'(\Sigma_1) = \check{A}_i^k \mathfrak{S}_k(\Sigma_1) = \check{A}_i^k \mathfrak{S}_k(\Sigma_2) = \check{A}_i^k P_k, \quad (11.170)$$

т. е. условие 2 на стр. 327. Наконец, при преобразовании

$$\begin{aligned} x'^a &= f(x^i), \\ f^i(x) &\rightarrow x^i; \quad g_{ik}' \rightarrow g_{ih}; \quad g_{ik}', l \rightarrow g_{ih, l} \quad \text{для } l \rightarrow \infty \end{aligned} \quad (11.171)$$

гиперповерхность Σ_1 с постоянной $x^4 = a$ совпадает на пространственной бесконечности с поверхностью Σ_2 с постоянной $x'^4 = a$. Мы можем поэтому ввести третью систему координат x''^i , которая на поверхности Σ_1 и в ее окрестности совпадает с первоначальной системой (x^i) , а на поверхности Σ_2 и в ее окрестности совпадает с (x'^i) . Поскольку соотношения (11.163) и (11.165) справедливы в любой из введенных систем координат, получаем

$$P_i = \mathfrak{S}_i(\Sigma_1) = \mathfrak{S}_i''(\Sigma_1) = \mathfrak{S}_i''(\Sigma_2) = \mathfrak{S}_i'(\Sigma_2) = P_i',$$

что является условием 3 на стр. 327.

В следующем параграфе мы увидим, что лоренцев 4-вектор P_i , определенный в (11.166), является времениподобным, а это значит, что P_i обладает всеми свойствами полного 4-импульса замкнутой островной системы специ-

альной теории относительности. Хотя мы не можем в общем случае дать вполне определенную физическую интерпретацию распределению гравитационной части энергии и импульса, все же следует подчеркнуть, что эти величины вносят значительный вклад в подинтегральное выражение T_i^k в интегралах (11.166). Если в этих интегралах пренебречь величинами τ_i^k , то результирующее выражение не будет удовлетворять свойствам 1—3. Следовательно, τ_i^k играют существенную роль. Мы будем называть эту систему величин *комплексом энергии — импульса* гравитационного поля. По аналогии аффинная тензорная плотность \mathbf{T}_i^k носит название комплекса энергии — импульса полной системы.

Может показаться удивительной невозможность непротиворечивого определения количества гравитационной энергии, заключенной в малом объеме. Однако эта трудность идет, прежде всего, от невозможности измерения гравитационной энергии. В случае линейных полей специальной теории относительности энергия, содержащаяся в малом объеме V , может быть измерена введением в эту область такого прибора, который уничтожает поле внутри V без какого бы то ни было влияния на поле вне V . Тогда энергия, необходимая для уничтожения поля внутри V , приравнивается к собственной энергии самого поля. Например, в случае электрического поля мы можем внести в малую область V конденсатор, который, будучи предварительно заряженным до определенного потенциала, может уничтожить поле между обкладками, в то время как поле вне конденсатора никаких изменений не претерпевает. Работа, затраченная на предварительную зарядку конденсатора, дает представление об энергии исследуемого электрического поля. Этот метод основан на том факте, что уравнение поля линейно, и всякая суперпозиция полей снова приводит к новому решению уравнений Максвелла. В случае гравитационного поля эта процедура неприменима, так как мы имеем дело с зарядами только одного знака, а уравнения гравитационного поля существенно нелинейны.

§ 11.10. Суперпотенциал. Полные энергия и импульс изолированной системы

В приложении 6 (уравнение 15) точное выражение для комплекса энергии — импульса гравитационного поля (11.154) дано в виде

$$\tau_i^k = (1/2\kappa) \{ \Gamma_{lm}^k (V(\overline{-g}) g^{lm})_{,i} - \Gamma_{ms}^s (V(\overline{-g}) g^{km})_{,i} - \delta_i^k \mathcal{E} \}. \quad (11.172)$$

Там также показано (уравнения 16 и 18), что τ_i^k могут быть выведены из \mathcal{E} в другой форме

$$\tau_i^k = (1/\kappa) (g_{,i}^{km} \partial \mathcal{E} / \partial g_{,i}^{km} + g^{km} \partial \mathcal{E} / \partial g^{im}). \quad (11.173)$$

В отличие от τ_i^k , которые являются функцией только метрического тензора, полный комплекс энергии — импульса \mathbf{T}_i^k зависит также и от тензора энергии — импульса T_i^k . Но, учитывая уравнения поля (11.23), мы можем представить T_i^k так, чтобы он тоже зависел только от метрического тензора. Используя (11.153), (11.144) и (11.173), получаем

$$\begin{aligned} \mathbf{T}_i^k &= -(V(\overline{-g})/\kappa) g^{km} (R_{im} - g_{im} R/2) + \tau_i^k = \\ &= -(g^{km}/\kappa) \{ \partial \mathcal{E} / \partial g^{im} - (\partial \mathcal{E} / \partial g_{,i}^{im})_{,i} \} + (1/\kappa) (g_{,i}^{km} \partial \mathcal{E} / \partial g_{,i}^{km} + g^{km} \partial \mathcal{E} / \partial g^{im}) = \\ &= (1/\kappa) (g^{km} \partial \mathcal{E} / \partial g_{,i}^{im})_{,i}. \end{aligned}$$

Следовательно, \mathbf{T}_i^k приобретает вид обычной дивергенции

$$\mathbf{T}_i^k = s_{i,l}^{kl}, \quad (11.174)$$

где

$$s_i^{kl} = (g^{km}/\kappa) \cdot \partial \mathcal{E} / \partial g_{,i}^{km}. \quad (11.175)$$

Выражение для \mathbf{T}_i^k , полученное Толменом [259], можно привести к более удобному виду. В самом деле, $s_{i,l}^{kl}$ есть функция метрического тензора и его

производных и тождественно удовлетворяет условию

$$(s_i^{kl}, l)_{,k} = 0, \quad (11.176)$$

вытекающему из (11.174) и (11.152). Следовательно, \mathbf{T}_i^k можно записать теперь в виде

$$\mathbf{T}_i^k = \psi_i^{kl}, \quad (11.177)$$

где *суперпотенциал*

$$\psi_i^{kl} = -\psi_i^{lk} \quad (11.178)$$

антисимметричен по индексам k и l . Эта возможность впервые была замечена Фрейдом [98]. Точное выражение для суперпотенциала дано в приложении 6 (уравнение 22) и имеет вид

$$\psi_i^{kl} = (g_{in}/2\kappa\sqrt{-g}) g^{nmkl}, \quad (11.179)$$

где

$$g^{iklm} = (-g)(g^{il}g^{km} - g^{im}g^{kl}) \quad (11.180)$$

есть истинная тензорная плотность веса 2, удовлетворяющая тем же условиям симметрии (9.234), которым удовлетворяет тензор кривизны, а именно:

$$\left. \begin{aligned} g^{iklm} &= -g^{ikml} = -g^{kilm} = g^{lmik}; \\ g^{iklm} + g^{ilmk} + g^{imkl} &= 0. \end{aligned} \right\} \quad (11.181)$$

Суперпотенциал является поэтому только аффинной тензорной плотностью веса 1. Вводя (11.177) в (11.160) с помощью (9.223), получаем

$$\mathfrak{F}_i(\Sigma) = -(1/c) \int_{\Sigma} \psi_i^{kl} dS_k = \lim_{R \rightarrow \infty} (1/2c) \int_{\Phi(R)} \psi_i^{kl} dS_{kl}^*, \quad (11.182)$$

где $\Phi(R)$ есть двумерное пересечение Σ и цилиндра C с постоянным $r = R$. Поскольку $\Phi(R)$ лежит на пространственной бесконечности, то выражение (11.182) для $\mathfrak{F}_i(\Sigma)$ инвариантно относительно группы преобразований (11.171). Для 4-импульса (11.166) получим по аналогии, если учесть, что $\psi_i^{44} = 0$,

$$P_i = (1/c) \int \mathbf{T}_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 = (1/c) \int \psi_i^{4\lambda} dx^1 dx^2 dx^3. \quad (11.183)$$

На основании теоремы Гаусса, справедливой в случае трехмерного пространства, можем записать

$$\begin{aligned} P_i &= \lim_{R \rightarrow \infty} (1/c) \int_f \psi_i^{4\lambda} df_{\lambda} = \lim_{R \rightarrow \infty} (1/c) \int_f \psi_i^{4\lambda} \varepsilon_{\lambda\mu\nu} dx^{\mu} dx^{\nu} = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (1/c) \int_f \psi_i^{4\lambda} n_{\lambda} df, \end{aligned} \quad (11.183')$$

где интегрирование выполняется на «сфере» f с большим «радиусом» R . Здесь dx^{μ} и dx^{ν} есть 3-векторы, лежащие на сфере; $n_{\lambda} = x^{\lambda}/r$; $df = r^2 d\omega = r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$, а θ, φ — полярные координаты, связанные с (x, y, z) обычными соотношениями (11.191). Выражение (11.183) следует также из (11.182), если считать Σ гиперповерхностью с $t = \text{const}$.

Рассмотрим снова изолированную островную физическую систему. Из систем координат (11.156)—(11.159) выберем такую, чтобы тело покоилось в ней как целое. Для большинства изолированных систем (хотя и не для всех, см. § 11.11) такая «глобально покоящаяся система» обладает тем свойством, что метрика в ней на больших расстояниях сферически симметрична и статична. Более точно, метрика сферически симметрична с точностью до O_1 и не зависит от времени с точностью до O_2 . Согласно (11.90) это значит, что координа-

гы в глобально покоящейся системе могут быть выбраны с асимптотическими свойствами типа

$$\left. \begin{aligned} g_{ik} &= (\varepsilon_i + \alpha/r) \delta_{ik} + O_2 + O_3; \\ g &= -(1 + 2\alpha/r) + O_2 + O_3; \\ g^{ik} &= (\varepsilon_i - \alpha/r) \delta_{ik} + O_2 + O_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.184)$$

Здесь не зависящие от времени члены O_2 и их производные $(O_2)_{,i}$ имеют вид

$$O_2 = f(\theta, \varphi)/r^2; \quad (O_2)_{,i} = O_3.$$

(С другой стороны, мы могли бы выбрать такие координаты, в которых метрика на больших расстояниях имела бы вид (е), стр. 317).

Глобально покоящаяся система, конечно, не является системой покоя для каждой частицы системы в отдельности, т. е. она не является сопутствующей системой типа рассмотренной в § 10.8. Очевидно, существует целый класс таких систем координат, поскольку любые преобразования вида (11.171) и любые ортогональные преобразования пространственных координат (x, y, z) дают новый экземпляр глобально покоящейся системы. Члены O_3 и высшие степени $1/r$ не обязательно должны быть не зависящими от времени.

Вводя (11.184) в (11.179) и (11.180), легко находим следующие асимптотические свойства суперпотенциала:

$$\Psi_i^{kl} = -(\alpha/2\kappa r^2) (1 - \varepsilon_i) (\delta_i^k n^l - \delta_i^l n^k) + O_3, \quad (11.185)$$

где $n^i = \partial r / \partial x^i = (x^i/r, 0)$.

Следовательно, 4-импульс (11.183) тела в глобально покоящейся системе есть

$$P_i^0 = \lim_{r \rightarrow \infty} (1/c) \int \left(-\frac{\alpha}{\kappa r^2} \delta_{i4} + O_3 \right) r^2 d\omega = -4\pi\alpha\delta_{i4}/\kappa c. \quad (11.186)$$

Сравнение с (11.166) показывает, что полный импульс равен нулю, оправдывая название этой системы, а полная энергия в соответствии с (11.89)

$$H^0 = 4\pi d/\kappa > 0. \quad (11.187)$$

Из свойства 2, на стр. 327, замечаем, что лоренцевы преобразования с относительной скоростью v_i дают новую систему координат, в которой импульс и энергия равны соответственно

$$P_\mu = (H^0/c^2 / \sqrt{1 - v^2/c^2}) v_\mu; \quad H = H^0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}. \quad (11.188)$$

Отношение импульса к скорости дает выражение для инертной массы M :

$$M = M_0 / \sqrt{1 - v^2/c^2}; \quad M_0 = H^0/c^2; \quad H = M c^2. \quad (11.189)$$

Эти формулы находятся в полном соответствии с соотношениями СТО (3.55), (3.58). Они возникают как следствие законов сохранения, которые, в свою очередь, являются следствиями уравнений гравитационного поля Эйнштейна. С учетом (11.177) подынтегральное выражение \mathbf{T}_i^4/c в (11.166) можно выразить только через переменные гравитационного поля. В некотором смысле полный 4-импульс изолированной системы может быть интерпретирован, как собственная гравитационная энергия и импульс, а законы преобразования (11.188) и (11.189) для импульса, энергии и массы — как следствия трансформационных свойств переменных гравитационного поля относительно преобразований Лоренца. Это обстоятельство лишний раз подчеркивает тесную связь между гравитационными и механическими свойствами материи.

Активная гравитационная масса M_0^{a-g} изолированной системы в глобально покоящейся системе координат связана с константой α в (11.184) уравнением (11.88). Далее, используя (11.187) и (11.189), получаем

$$M_0^{a-g} = 4\pi\alpha/\kappa c^2 = H^0/c^2 = M_0. \quad (11.190)$$

Следовательно, активная гравитационная масса равна инертной массе и равна пассивной гравитационной массе, что и должно быть, если справедлив принцип эквивалентности. Тождество этих трех типов масс является фундаментальной отличительной чертой теории гравитации Эйнштейна.

§ 11.11. Неизолированные островные системы. Гравитационное излучение

В предыдущем параграфе свойства 1—3 4-импульса изолированной системы были выведены как следствие асимптотической формы (11.159) метрики, в которой последний интеграл (11.162) исчезает при $R \rightarrow \infty$. Мы рассмотрим теперь систему, в которой h_{ik} и $g_{ik,l}$ имеют порядок O_1 при больших r , т. е.

$$h_{ik} = O_1; \quad g_{ik,l} = O_1. \quad (11.191)$$

В этом случае последний интеграл (11.162) остается конечным, и 4-импульс не будет зависеть от времени лоренцевым 4-вектором, а это значит, что система не является полностью изолированной.

Пусть Σ_1 и Σ_2 — гиперповерхности $t = t_1$ и $t = t_2$ соответственно, причем

$$t_2 > t_1, \quad (11.192)$$

а C — гиперцилиндр радиуса $r = R$ с $T_i^k = 0$, т. е. находящийся вне материальной трубки. В этом случае из (11.162) получаем

$$P_i(V, t_2) - P_i(V, t_1) = - (1/c) \int_C \tau_i^k dS_k. \quad (11.193)$$

Здесь

$$P_i(V, t) = (i/c) \int_f T_i^k(x^\mu, t) dx^1 dx^2 dx^3 = (1/c) \int_f \psi_i^{4\lambda} df_\lambda \quad (11.194)$$

есть 4-импульс, определенный в области V внутри сферы f радиуса R в момент времени t , а

$$dS_k = \varepsilon_{klmn} dx^l \delta x^m \Delta x^n$$

в соответствии с (9.57). На C мы можем выбрать

$$dx^t = (dx^\lambda, 0); \quad \delta x^m = (\delta x^\mu, 0); \quad \Delta x^n = (0, 0, 0, cdt),$$

где 3-векторы dx^λ , δx^μ определены на поверхности f . Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} dS_k &= \varepsilon_{k\lambda\mu\nu} dx^\lambda \delta x^\mu cdt = (cdtdf_\nu, 0); \\ df_\nu &= \varepsilon_{\nu\lambda\mu} dx^\lambda \delta x^\mu. \end{aligned} \right\} \quad (11.195)$$

Приращение 4-импульса $P_i(V, t)$ за промежуток времени (t_1, t_2) , согласно (11.193), равно

$$\Delta P_i = P_i(V, t_2) - P_i(V, t_1) = - \int_{t_1}^{t_2} dt \int_f \tau_i^k df_k. \quad (11.196)$$

Если промежуток времени бесконечно мал, т. е. $t_1 = t$, $t_2 = t + dt$, то

$$-dP_i(V, t)/dt = \int_f \tau_i^\nu df_\nu. \quad (11.197)$$

Таким образом, интеграл в правой части дает гравитационный 4-импульс, покидающий сферу в единицу времени. Поскольку $H = -cP_4$, то (11.197) при $i = 4$ дает

$$-dH/dt = -c \int_f \tau_4^v df_v, \quad (11.198)$$

т. е. величину

$$\mathcal{E}^v = -c\tau_4^v \quad (11.199)$$

следует интерпретировать как плотность потока гравитационной энергии на больших расстояниях от материальной системы. Если мы сможем сконструировать приемник гравитационного излучения, то для него \mathcal{E}^v будет вполне измеримой физической величиной. Аналогично τ_{μ}^v следует интерпретировать как плотность потока гравитационного импульса. На больших расстояниях (11.199) согласуется с (11.155), так как

$$\mathcal{E}^v = \gamma^{1/2} S^v. \quad (11.200)$$

С помощью (11.194) и (11.197) мы можем вычислить потерю 4-импульса в результате гравитационного излучения, если нам известна метрика на большом удалении от островной системы.

Первое определение потери гравитационной энергии, выполненное Эйнштейном [77], было основано на приближении слабого поля (11.13) (см. упражнение в конце настоящего параграфа). Полученная таким путем величина оказывается очень малой для всех реальных астрономических объектов даже за космологические промежутки времени. Хотя подобные вычисления и дают разумное по порядку значение энергии, неясно, можно ли вообще применять линеаризованную теорию Эйнштейна к исследованию проблемы гравитационного излучения. Ведь хорошо известно, что решения нелинейной системы уравнений не могут быть аппроксимированы линейными решениями в больших областях пространства — времени. Исходя из этого, Бонди, Ван-дер-Бург и Метцнер [29] попытались установить точную форму метрики на больших расстояниях от осесимметричной системы без падающего излучения. Их исследование было затем обобщено Саксом [212] на случай произвольной островной системы. Мы рассмотрим для простоты только аксиальную симметрию. (За подробностями рассуждений мы отсылаем читателей к оригинальным работам этих авторов.)

В пустом пространстве, вне материи, уравнения поля (11.23) имеют вид

$$R_{ik} = 0. \quad (11.201)$$

Хотя в общей теории относительности, как хорошо известно, все системы координат равноправны, существует, тем не менее, особый класс систем, в которых граничные условия имеют особенно простой вид. Бонди и др. вводят координатную систему

$$\bar{x}^i = (r, \theta, \varphi, u), \quad (11.202)$$

удовлетворяющую следующим свойствам.

1. Преобразование $\varphi \rightarrow \varphi + \alpha$ описывает вращение на угол α относительно оси симметрии, т. е. \bar{g}_{ik} не зависит от φ .
2. Поверхность $du = dr = 0$ имеет площадь $4\pi r^2$.
3. Кривая $du = d\theta = d\varphi = 0$ представляет выходящий световой луч.

Поскольку для света $ds^2 = \bar{g}_{ik} d\bar{x}^i d\bar{x}^k = 0$, из свойства 3 получаем

$$\bar{g}_{11} = 0, \quad (11.203)$$

т. е. система координат (11.202) не удовлетворяет условиям (8.52) и (11.158). Поэтому нужно использовать асимптотическую лоренцову систему координат

$$x^i = (x, y, z, ct), \quad (11.204)$$

полученную из (11.202) преобразованием

$$\left. \begin{aligned} x &= r \sin \theta \cos \varphi; \quad y = r \sin \theta \sin \varphi; \quad z = r \cos \theta; \\ x^4 &= ct = u + r; \quad u = x^2 - r = ct - r. \end{aligned} \right\} \quad (11.205)$$

Соответствующие преобразования коэффициентов есть

$$\left. \begin{aligned} \partial r / \partial x^i &= n_i; \quad \partial \theta / \partial x^i = m_i / r; \\ \partial \varphi / \partial x^i &= l_i / r \sin \theta; \quad \partial u / \partial x^i = \mu_i, \end{aligned} \right\} \quad (11.206)$$

где введены величины:

$$\left. \begin{aligned} n_i &= n^i = (\sin \theta \cos \varphi, \sin \theta \sin \varphi, \cos \theta, 0) = (x^\mu/r, 0); \\ m_i &= m^i = (\cos \theta \cos \varphi, \cos \theta \sin \varphi, -\sin \theta, 1); \\ l_i &= l^i = (-\sin \varphi, \cos \varphi, 0, 0); \\ \mu_i &= \varepsilon_i \mu^i = (-\sin \theta \cos \varphi, -\sin \theta \sin \varphi, -\cos \theta, 1) = -(\eta_{i4} + n_i), \end{aligned} \right\} (11.207)$$

удовлетворяющие соотношениям

$$\left. \begin{aligned} n_i n^i &= m_i m^i = l_i l^i = 1, \quad \mu_i \mu^i = 0; \\ n_i m^i &= n_i l^i = m_i l^i = m_i \mu^i = l_i \mu^i = 0; \quad n_i \mu^i = -1, \\ n_{\mu} &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda} m^\nu l^\lambda; \quad m_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} l^\nu n^\lambda; \quad l_{\mu} = \varepsilon_{\mu\nu\lambda} n^\nu m^\lambda. \end{aligned} \right\} (11.208)$$

Кроме условий 1--3, мы должны еще потребовать, чтобы решение (11.201) не содержало входящих гравитационных волн. Если мы положим

$$g_{ik} = \eta_{ik} + h_{ik}, \quad (11.209)$$

то это последнее условие можно сформулировать так: 4. Для больших r , h_{ik} есть разложение в ряд по степеням $1/r$ вида

$$h_{ik} = \alpha_{ik}/r + \beta_{ik}/r^2 + \dots, \quad (11.210)$$

где коэффициенты α_{ik} , β_{ik} и т. д. являются функциями только θ , φ и u . Условие 4 эквивалентно условию излучения Зоммерфельда:

$$\partial (rh_{ik})/\partial r_{(\mu, \theta, \varphi) = \text{const}} \rightarrow 0 \text{ для } r \rightarrow \infty. \quad (11.211)$$

В дальнейшем нам не потребуется точный вид g_{ik} , достаточно будет знать их до второго порядка по $1/r$. Полагая

$$y_{ik} = \alpha_{ik}/r = O_1; \quad z_{ik} = \beta_{ik}/r^2 = O_2, \quad (11.212)$$

имеем с учетом (11.209) и (11.210)

$$g_{ik} = \eta_{ik} + y_{ik} + z_{ik} + O_3. \quad (11.213)$$

Как показали Бонди и др. [29, 178], наиболее общая форма α_{ik} и β_{ik} в случае аксиальной симметрии такова:

$$\begin{aligned} \alpha_{ik}(u, \theta, \varphi) &= 2N(m_i m_k - l_i l_k) + A\mu_i \mu_k + (N_\theta + 2N \operatorname{ctg} \theta)(m_i \mu_k + \mu_i m_k); \\ \beta_{ik}(u, \theta, \varphi) &= 2N^2(m_i m_k + l_i l_k) + \frac{1}{2} N^2(\mu_i n_k + n_i \mu_k) + (B_\theta + B \operatorname{ctg} \theta)\mu_i \mu_k - \\ &\quad - (2B + NN_\theta)(m_i \mu_k + \mu_i m_k). \end{aligned} \quad (11.214)$$

Здесь $N(u, \theta)$, $A(u, \theta)$ и $B(u, \theta)$ — функции от u и θ , зависящие от типа рассматриваемой материальной системы, а B_θ и N_θ — частные производные по θ . Величины N , A и B можно назвать функциями интегрирования по аналогии с постоянной интегрирования в решении Шварцшильда α (11.83). Однако они не являются независимыми. Чтобы удовлетворить всем уравнениям (11.201), их нужно связать уравнениями

$$\left. \begin{aligned} A_u &= -2N_u^2 + C_u; \\ -3B_u &= A_\theta/2 + 3NN_{u\theta} + 4NN_u \operatorname{ctg} \theta + N_u N_\theta, \end{aligned} \right\} (11.215)$$

где

$$\begin{aligned} C &= N_{\theta\theta} + 3N_\theta \operatorname{ctg} \theta - 2N = (N_\theta \sin \theta + 2N \cos \theta)_\theta / \sin \theta = \\ &= \{(N \sin^2 \theta)_\theta / \sin \theta\}_\theta / \sin \theta, \end{aligned} \quad (11.216)$$

а каждый индекс (u , θ и т. д.) означает частную производную по соответствующей переменной.

Если дана $N(u, \theta)$, то функции A и B можно получить, интегрируя (11.215), и вся информация о системе, следовательно, определяется только N , которую Бонди и др. назвали функцией информации. При больших r скалярный потенциал, вытекающий из (11.212) и (11.214), есть

$$\chi = -c^2(g_{44} + 1)/2 = -Ac^2/2r + O_2. \quad (11.217)$$

Сравнение с (11.87) показывает, что функция $A(\theta, u)$ играет ту же роль, что и константа α в (11.83), связанная с массой (или энергией) уравнением (11.88). Как мы увидим,

$$\alpha(u) = (1/4\pi) \int A(u, \theta) d\omega = \int_0^\pi A(u, \theta) \sin \theta d\theta / 2 \quad (11.218)$$

связана с полной энергией (или массой) в общем случае. Поэтому мы будем называть $A(u, \theta)$ *массовой функцией*.

Легко проверить, что метрика (11.212) — (11.214) удовлетворяет требованиям 1—4, т. е. уравнения $(u, \theta, \varphi) = \text{const}$ или $x^\mu = \text{const}$ или $x^\mu = cn^\mu t + x_0^\mu$ с постоянными $n^\mu = x^\mu/r$ и x_0^μ описывают движение выходящего светового сигнала в соответствии с (8.100). Далее, площадь параллелограмма на сфере $r = \text{const}$, $t = \text{const}$, натянутого на два бесконечно малых вектора, соответствующих приращениям $d\theta$ и $d\varphi$ переменных θ и φ , равна $r^2 \sin \theta d\theta d\varphi$. А теперь убедимся в том, что эта метрика удовлетворяет уравнениям поля (11.201) с точностью до необходимого нам порядка.

Для произвольных функций $\Psi(r, \theta, \varphi, u)$ переменных \bar{x}^i имеем, учитывая (11.206),

$$\partial\Psi/\partial x^i = \Psi_{,i} = \Psi_u \mu_i + \Psi_r n_i + \Psi_\theta m_i/r + \Psi_\varphi l_i/r \sin \theta. \quad (11.219)$$

В частности,

$$\left. \begin{aligned} y_{ik, l} &= \mu_l (\alpha_{ik})_u / r + [-\alpha_{ik} n_l + (\alpha_{ik})_\theta m_i + (\alpha_{ik})_\varphi l_i / \sin \theta] / r^2; \\ z_{ik, l} &= (z_{ik})_u \mu_l + O_3 = \mu_l (\beta_{ik})_u / r^2 + O_3. \end{aligned} \right\} \quad (11.220)$$

Чтобы убедиться в регулярности метрики на оси симметрии, удостоверимся в том, что g_{ik} не зависят от φ , когда $\sin \theta$ стремится к нулю. Из уравнений (11.213) и (11.214) видно, что для этого необходимо, чтобы $N/\sin^2 \theta$ оставалось конечным, т. е. чтобы

$$N \simeq f(u) \sin^2 \theta \quad \text{при} \quad \sin \theta \rightarrow 0. \quad (11.221)$$

Как и в (11.207) мы поднимаем индексы в y_{ik} , z_{ik} , α_{ik} и β_{ik} с помощью постоянной матрицы η^{ik} . Тогда легко видеть, что контравариантные компоненты метрики g^{ik} , определяемые (9.7), можно разложить в ряд

$$g^{ik} = \eta^{ik} - y^{ik} - z^{ik} + y^{ir} y_r^k + O_3, \quad (11.222)$$

а детерминант g равен

$$\sqrt{-g} = 1 - N(u, \theta)^2 / 2r^2 + O_3. \quad (11.223)$$

Далее, из (11.214) и (11.208) следует, что

$$\left. \begin{aligned} \alpha_i^i &= 0; \quad \alpha_{ik} \mu^k = 0; \quad (\alpha_{ik})_u \mu^k = 0; \quad \mu_i \mu^i = 0; \\ (\alpha_{ik})_u (\alpha^{ik})_u &= 8N_u^2; \quad (\beta_{ik})_u \mu^k = -NN_u \mu_i. \end{aligned} \right\} \quad (11.224)$$

Кроме того, из (11.207) следует, что

$$\left. \begin{aligned} (n_i)_\theta &= -(\mu_i)_\theta = m_i; \quad (n_i)_\varphi = -(\mu_i)_\varphi = l_i \sin \theta; \\ (m_i)_\theta &= -n_i; \quad (m_i)_\varphi = l_i \cos \theta; \\ (l_i)_\theta &= 0; \quad (l_i)_\varphi = -(m_i \cos \theta + n_i \sin \theta). \end{aligned} \right\} \quad (11.224')$$

С помощью этих соотношений можно определить асимптотические выражения для τ_i^k , ψ_i^{kl} и $\Gamma_{i,l}^k = \Psi_{,i,l}^k$ с точностью до членов порядка O_2 [178]. При вычислении τ_i^k с этой точностью нам потребуются выражения $g_{ik, l}$ только с точностью до первого порядка, так как они входят в τ_i^k во второй степени. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} \Gamma_{kl}^i &= (1/2) \eta^{im} (y_{mk, l} + y_{ml, k} - y_{kl, m}) + O_2 = \\ &= (1/2 r) \{ (\alpha_k^i)_u \mu_l + (\alpha_l^i)_u \mu_k - (\alpha_{kl})_u \mu^i \} + O_2; \\ \Gamma_{ms}^s &= O_2; \quad (\sqrt{-g})_{,i} g^{lm}, i = -y_{,i}^{lm} + O_2 = \\ &= -(\alpha^{lm})_u \mu_i / r + O_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.225)$$

Здесь мы использовали (11.213), (11.220) и (11.222) — (11.224). Далее, подставляя (11.225) в (11.137) и (11.172) и используя (11.224), получаем

$$\begin{aligned} \mathcal{L} &= O_3, \quad \tau_{i,l}^k = (1/2\kappa) \Gamma_{lm}^k (\sqrt{-g})_{,i} g^{lm} + O_3 = \\ &= (-1/4\kappa r^2) \{ (\alpha_l^k)_u \mu_m + (\alpha_m^k)_u \mu_l - (\alpha_{lm})_u \mu^k \} (\alpha^{lm})_u \mu_i + O_3 = \\ &= (1/4\kappa r^2) (\alpha_{lm})_u (\alpha^{lm})_u \mu_i \mu^k + O_3, \end{aligned}$$

откуда следует, снова с учетом (11.224), что

$$\tau_i^k = 2N_u^2 \mu_i \mu^k / \kappa r^2 + O_3. \quad (11.226)$$

При достаточно больших r мы можем пренебречь членом O_3 , тогда согласно (11.207) для плотности потока гравитационной энергии (11.199) получим

$$\mathfrak{S}^v = -c\tau_4^v = 2N_u^2 c n^v / \kappa r^2. \quad (11.227)$$

Обозначим теперь через dx^λ и δx^μ два бесконечно малых 3-вектора, касательных к сфере радиуса R и направленных в сторону увеличения θ и φ соответственно. Тогда из (11.205), (11.207), (11.208) и (11.195) получим, что

$$\left. \begin{aligned} dx^\lambda &= R m^\lambda d\theta; & \delta x^\mu &= R \sin \theta \cdot l^\mu d\varphi; \\ df_\nu &= \varepsilon_{\nu\lambda\mu} dx^\lambda dx^\mu = n_\nu R^2 \sin \theta d\theta d\varphi = n_\nu R^2 d\omega, \end{aligned} \right\} \quad (11.228)$$

и поток гравитационной энергии через натянутую на эти векторы площадку оказывается равным

$$S d\omega = 2N_u^2 c d\omega / \kappa = 2N_u^2 c \cdot \sin \theta d\varphi / \kappa. \quad (11.229)$$

Полная энергия, покидающая сферу в единицу времени, есть интеграл по всем направлениям

$$-dH/dt = \int S d\omega = (4\pi c / \kappa) \int_0^\pi N_u^2 \sin \theta d\theta. \quad (11.230)$$

Правая часть этого выражения полностью определяется функцией информации и, как видно, никогда не должна быть отрицательной. Как следует из решения Бонди и др., система непрерывно теряет энергию в результате гравитационного излучения, если только N зависит от времени. Если же N не зависит от времени, то и A также не зависит от времени, т. е. $(\alpha_{ik})_u = 0$, а из (11.220) следует, что $g_{ik, l} = 0_2$, и мы, очевидно, приходим к случаю (11.159) замкнутой системы.

По аналогии получим, что поток гравитационного импульса через df_ν есть

$$\tau_\mu^v df_\nu = n_\mu S d\omega / c = |n_\mu (2N_u^2 / \kappa) \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (11.231)$$

откуда видно, что гравитационное излучение вызывает механическую отдачу системы точно так же, как и электромагнитное излучение. Из (11.197) и (11.231) находим, что

$$-dP_\mu / c dt = (2/\kappa) \iint N_u^2 n_\mu \sin \theta d\theta d\varphi. \quad (11.232)$$

Так как в случае аксиальной симметрии N_u не зависит от φ , то из (11.207), (11.230) и (11.232) получаем, что

$$-dP_i / dt = (0; 0; (4\pi/\kappa) \int_0^\pi N_u^2 \cos \theta \sin \theta d\theta; - (4\pi/\kappa) \int_0^\pi N_u^2 \sin \theta d\varphi). \quad (11.233)$$

Аналогичным образом можно вывести асимптотическое выражение для ψ_i^{kl} и $T_i^k = \psi_i^{kl}$; для этого нужно рассмотреть члены второго порядка в (11.220). После довольно длинных вычислений получаем

$$T_i^k = 2N_u^2 \mu_i \mu^k / \kappa r^2 + O_3 \quad (11.234)$$

и

$$\psi_i^{kl} \mu_i = (1/2\kappa r^2) \{ (C - 2A) \mu_i \mu^k - (N_\theta + 2N \operatorname{ctg} \theta) m_i \mu^k \} + O_3. \quad (11.235)$$

Из первого уравнения следует, что метрика (11.212) — (11.214) удовлетворяет уравнениям поля (11.201) с точностью до членов O_2 , а из (11.23), (11.153), (11.226) и (11.234) следует, что

$$\sqrt{(-g)} (R_i^k - 1/2\delta_i^k R) = -\kappa \sqrt{(-2)} T_i^k = -\kappa (T_i^k - \tau_i^k) = 0, \quad (11.236)$$

если пренебречь членами порядка O_3 .

Далее, из (11.235), (11.194) и (11.228) получаем следующее выражение для 4-импульса внутри большой сферы:

$$\begin{aligned} P_i(V, t) &= (1/c) \int_f \psi_i^{4\lambda} df_\lambda = (1/c) \int_f \psi_i^{4\lambda} n_\lambda R^2 d\omega = \\ &= - (1/c) \int \psi_i^{4l} \mu_l R^2 d\omega = (1/2\kappa c) \iint \{ (C - 2A) \mu_i - \\ &\quad - (N_\theta + 2N \operatorname{ctg} \theta) m_i \} \sin \theta d\theta d\varphi + O_1. \end{aligned} \quad (11.237)$$

При достаточно больших R (например, когда сфера находится в волновой зоне) можно пренебречь O_1 ; 4-импульс $P_i(u)$ системы в этом случае определяется только оставшимися членами. Как и в предыдущем случае, аксиальная симметрия порождает условие

$$P_1 = P_2 = 0, \quad (11.238)$$

а компонента импульса, параллельная оси симметрии, оказывается равной

$$P_3 = (2\pi/\kappa c) \left[\int_0^\pi A \cos \theta \sin \theta d\theta - \frac{1}{2} \int_0^\pi ((N_0 \sin \theta + 2N \cos \theta)_0 \cos \theta - (N_0 \sin \theta + 2N \cos \theta) \sin \theta) d\theta \right],$$

где использовано (11.216).

Последний интеграл в этом выражении равен нулю, поскольку с учетом (11.221)

$$\int_0^\pi ((N_0 \sin \theta + 2N \cos \theta) \cos \theta)_0 d\theta = (N_0 \sin \theta + 2N \cos \theta) \cos \theta \Big|_0^\pi = 0.$$

Следовательно,

$$P_3(u) = (2\pi/\kappa c) \int_0^\pi A \cos \theta \sin \theta d\theta. \quad (11.239)$$

Для полной энергии $H = -cP_4$

$$H(u) = (2\pi/\kappa) \int_0^\pi A \sin \theta d\theta = (4\pi/\kappa) \alpha(u), \quad (11.240)$$

причем $\alpha(u)$ определено в (11.218). Сравнивая (11.240) и (11.187), видим, что усредненное по всем направлениям значение массовой функции $A(u, \theta)$ играет ту же роль, что и константа α в случае изолированных систем. Дифференцируя (11.238) — (11.240) по u и используя (11.215), мы снова возвращаемся к (11.233), поскольку $d/du = c^{-1}(d/dt)$ и

$$\int_0^\pi C \sin \theta d\theta = \int_0^\pi C \cos \theta \sin \theta d\theta = 0. \quad (11.241)$$

Если информационная функция симметрична относительно xy -плоскости $\theta = \pi/2$, т. е. если

$$N(u, \theta) = N(u, \pi - \theta), \quad (11.242)$$

то из (11.233) следует, что

$$dP_\mu/dt = 0. \quad (11.243)$$

Если такой симметрией обладает и массовая функция

$$A(u, \theta) = A(u, \pi - \theta), \quad (11.244)$$

то из (11.238) и (11.239) получаем, что

$$P_\mu = 0. \quad (11.245)$$

А это означает, что система глобально покоится. Однако из этого вовсе не следует, что она изолирована, поскольку $\alpha(u)$ и $H(u)$ в (11.240) могут быть убывающими функциями переменной $u = ct - R$. Как известно, необходимым и достаточным условием изолированности системы является временная независимость функции информации.

Из (11.215) видно, что N и A являются функциями только θ , т. е.

$$N = N(\theta), \quad A = A(\theta). \quad (11.246)$$

Если A удовлетворяет, кроме того, и (11.244), т. е.

$$A(\theta) = A(\pi - \theta), \quad (11.247)$$

то получаем (11.245), систему, глобально покоящуюся и изолированную. Однако метрика (11.212) — (11.214) с (11.246) и (11.247) не эквивалентна в общем случае метрике (11.184). Они будут эквивалентны только тогда, когда

$$A = \alpha. \quad (11.248)$$

В этом случае из (11.215) следует, что B , α_{iR} и β_{iR} также не зависят от времени, т. е. метрика (11.213) стационарна с точностью до O_2 . Далее, легко видеть, что надлежащим преобразованием координат, которое асимптотически есть калибровка (9.283), метрика

(11.213) приводится к (11.184). Прежде всего, мы можем обратить N в нуль без изменения A так называемым чистым α -преобразованием типа рассмотренного Бонди и др. [29]; после чего применим

$$x'^{\mu} = (1 - \alpha/2r) x^{\mu}; \quad t' = t + \alpha \ln r/c. \quad (11.249)$$

В частности, отсюда следует, что P_i — инвариантны не только относительно преобразований (11.171), но также и относительно α -преобразований или же всех тех преобразований, которые имеют асимптотический вид (11.249). Это можно показать и непосредственно, исследуя трансформационные свойства ψ_i^{kl} . Кроме того, если в (11.246) и (11.247) массовая функция зависит только от θ , то из (11.215) следует, что B есть линейная функция u , с коэффициентами, зависящими от θ . Следовательно, метрика (11.212) — (11.213) зависит от времени с точностью до O_2 , а члены порядка O_1 не удовлетворяют требованиям сферической симметрии. Это значит, что в природе могут существовать изолированные, неизлучающие системы, метрика которых в глобально покоящейся системе координат не сводится к (11.184).

Для изолированных систем $N_u = 0$ и P_i , как было показано, удовлетворяют свойствам 1—3 на стр. 327, т. е. P_i есть лоренцев 4-вектор относительно асимптотически лоренцевых преобразований. В общем случае излучающей системы трансформационные свойства оказываются более сложными [178]. Однако, если гравитационное излучение существует вообще, энергия излучения во всех практически реализуемых случаях будет очень малой, так что 4-импульс любой островной системы можно считать с высокой точностью лоренцевым 4-вектором (см. упражнение ниже).

Предыдущий анализ осесимметричных систем может быть обобщен на случай островных систем общего вида, рассмотренных Саксом [179]. В этом случае возникают уже две информационные функции или одна комплексная функция $N(u, \theta, \varphi)$, а потеря 4-импульса определяется формулой (11.233), в которой N_u^2 следует заменить на $|N_u|^2$ — квадрат модуля производной от комплексной функции N по u .

Хотя из исследований Бонди и др., Сакса и др. и вытекает, что гравитационное излучение существует, полной уверенности в этом еще нет. Никому еще не удалось продолжить асимптотическое решение (11.213), справедливое для пустого пространства, внутрь флуктуирующей материальной системы, которая генерирует это асимптотическое поле. В отличие от статистического сферически симметричного случая, где возможно сшивание внешнего и внутреннего решений Шварцшильда, для реальной жидкости нет уверенности в том, что решение (11.213) является асимптотическим для любой реальной островной системы. Кроме того, необходимо иметь в виду, что решения Бонди и Сакса не общие, поскольку они исключают поступающее извне гравитационное излучение. До тех пор пока не будет установлено экспериментально существование гравитационных волн, нельзя использовать принцип причинности и отбрасывать решения типа (11.31), состоящие из смеси входящих и исходящих волн. Поэтому важные работы Вебера [264, 265] по конструированию генераторов и приемников гравитационного излучения имеют принципиальное значение. Вебер уже показал, что существуют флуктуации гравитационного поля на расстояниях порядка длины волны [266—268], однако этого все еще недостаточно для нас, так как в этой зоне эффекты запаздывания исчезающе малы. Тем не менее, существуют указания на то (хотя также не очень убедительные), что эффекты гравитационного излучения в волновой зоне имеют космическое происхождение [266, 269, 270].

Без продолжения асимптотического решения (11.213) внутрь реальной материальной системы нельзя вычислить информационную функцию N и зависимость интенсивности гравитационного излучения от конкретных свойств системы. Однако мы можем допустить, что вычисления, выполненные в рамках линейного приближения (11.45), дают, по крайней мере, правильный порядок интенсивности излучения. Если это верно, то она во всех практических случаях будет исчезающе малой.

Упражнение

В приближении слабого поля (11.45) на больших расстояниях r от островной системы имеем

$$\chi_{ik} = (\kappa/2\pi r) a_{ik}(u, \theta, \varphi) + O_2, \quad u = ct - r, \quad (11.250)$$

где a_{ik} в волновой зоне вычисляется по (11.50). Далее, из (11.33)

$$h_{ik} = (\kappa/2\pi r) \left(a_{ik} - \frac{1}{2} \eta_{ik} a \right), \quad a = a_i^i \quad (11.251)$$

и в том же приближении

$$g^{ik} = \eta^{ik} - h^{ik}, \quad (11.252)$$

где подъем индексов у h_{ik} , a_{ik} и χ_{ik} выполнен с помощью η^{ik} . Здесь h_{ik} и χ_{ik} — функции от (r, θ, φ, u) порядка O_1 по $1/r$. Следовательно,

$$\left. \begin{aligned} h_{ik, l} &= (h_{ik})_{,l} + O_2; \\ \chi_{i, k}^k &= (\kappa/4\pi r) \left(a_i^k \right)_{,k} + O_2. \end{aligned} \right\} \quad (11.253)$$

Поскольку $\chi_{i,k}^k = 0$ в соответствии с (11.28), то $(a_i^k)_u \mu_k = 0$, что согласуется с (11.50) для a_{ik} . Показать, что \mathfrak{Q} и τ_i^k имеют асимптотический вид

$$\begin{aligned} \mathfrak{Q} = O_3; \quad \tau_i^k &= (\kappa/8\pi 2\pi r^2) \left\{ (a_{lm})_u (a^{lm})_u - \frac{1}{2} (a_u)^2 \right\} \mu_i \mu^k + O_3 = \\ &= (\kappa/8\pi c^2 8\pi r^2) \left\{ (\ddot{D}_{\lambda\mu})^2 - 2(\ddot{D}_{\lambda\mu} n^\lambda n^\mu)^2 + (\ddot{D}_{\lambda\mu} n^\lambda n^\mu)^2 - \right. \\ &\quad \left. - (\ddot{D} - \ddot{D}_{\lambda\mu} n^\lambda n^\mu)^2 \right\} \mu_i \mu^k / 2 + O_3, \end{aligned} \quad (11.254)$$

где $D_{\mu\nu}$ определяется по (11.49), а $D = D_\mu^\mu$.

Далее, вводя понятие квадрупольного момента

$$\mathfrak{Q}_{\mu\nu} = 3D_{\mu\nu} - \delta_{\mu\nu} D; \quad \mathfrak{Q}_\mu^\mu = 0, \quad (11.255)$$

можно показать, что

$$\tau_i^k = (k/36\pi c^6 r^2) \left\{ (\ddot{\mathfrak{Q}}_{\lambda\mu})^2 / 2 - (\ddot{\mathfrak{Q}}_{\lambda\mu} n^\lambda n^\mu)^2 + (\ddot{\mathfrak{Q}}_{\lambda\mu} n^\lambda n^\mu)^2 / 4 \right\} \mu_i \mu^k + O_3, \quad (11.256)$$

где k — гравитационная постоянная Ньютона.

Показать, используя (11.197), (11.228) и (11.256), что полный импульс в этом приближении постоянен, в то время как потеря энергии равна

$$-dH/dt = (k/45c^5) (\ddot{\mathfrak{Q}}_{\lambda\mu} \ddot{\mathfrak{Q}}_{\lambda\mu}). \quad (11.257)$$

Заметим, что среднее по направлениям произведение компонент единичного вектора n^μ равно нулю для любого нечетного числа сомножителей и что

$$\left. \begin{aligned} \overline{n^\mu n^\nu} &= \delta_{\mu\nu} / 3; \\ \overline{n^\mu n^\nu n^\lambda n^\kappa} &= (\delta_{\mu\nu} \delta_{\lambda\kappa} + \delta_{\mu\lambda} \delta_{\nu\kappa} + \delta_{\mu\kappa} \delta_{\nu\lambda}) / 15. \end{aligned} \right\} \quad (11.258)$$

Рассмотреть двойную звезду с массами m_1 и m_2 , вращающимися со скоростью ω в плоскости xy под действием ньютоновского притяжения. Вычислить ее квадрупольный момент как функцию времени и показать, что потеря энергии за оборот согласно (11.257) равна

$$-\Delta H = (64\pi/5) k \mu^2 r^4 \omega^5 / c^5, \quad (11.259)$$

где r — расстояние между массами системы, а $\mu = m_1 m_2 / (m_1 + m_2)$ — приведенная масса. В ньютоновском приближении энергия связи системы равна

$$E = k (m_1 + m_2) \mu / 2r. \quad (11.260)$$

Следовательно,

$$-\Delta H / E = (128\pi/5) [\mu / (m_1 + m_2)] (v/c)^5, \quad (11.261)$$

где $v = r\omega$ — относительная скорость. Эта величина оказывается чрезвычайно малой для всех известных двойных звезд и существенно возрастает лишь в исключительных случаях.

§ 11.12. Другие формы комплекса энергии — импульса

Подняв индекс i в (11.153) и (11.177), получим

$$g^{im} T_m^k = \mathfrak{Q}^{ik} + g^{im} \tau_m^k = g^{im} \psi_{m,l}^{kl} = (g^{im} \psi_m^{kl})_{,l} - g_{,l}^{im} \psi_m^{kl}.$$

Это выражение можно переписать в виде

$$T^{ik} = \mathfrak{T}^{ik} + \tau^{ik} = \psi_{,l}^{ikl}, \quad (11.262)$$

где введены определения

$$\left. \begin{aligned} T^{ik} &\equiv g^{im} T_m^k + g_{,l}^{im} \psi_m^{kl} = \mathfrak{T}^{ik} + \tau^{ik}; \\ \tau^{ik} &\equiv g^{im} \tau_m^k + g_{,l}^{im} \psi_m^{kl} \end{aligned} \right\} \quad (11.263)$$

и

$$\psi^{ikl} = -\psi^{ljk} = g^{im} \psi_m^{kl} = (1/2\kappa (-g)^{1/2}) g_{,m}^{ikl}. \quad (11.264)$$

$$T_{,k}^{ik} = 0, \quad (11.265)$$

вытекающее из (11.262) и (11.264), есть не что иное, как закон сохранения в форме, предложенной Бергманом и Томсоном [22]. Уравнения (11.263), (11.264) можно рассматривать как правила подъема индексов у комплексов T_i^k и τ_i^k и у суперпотенциала ψ_i^{kl} . Очевидно, что T^{ik} и τ^{ik} удовлетворяют условиям 1—2 на стр. 325. Следовательно, величины $\mathfrak{S}^i(\Sigma)$ и P^i , получаемые из (11.160) и (11.166) заменой T^{ik} на T_i^k , удовлетворяют свойствам (11.163), (11.165) и 1—3 (см. стр. 327), (11.183), т. е. величины

$$P_i = (1/c) \int T^{i4} dx^1 dx^2 dx^3 = \lim_{R \rightarrow \infty} (1/c) \int_{\mathcal{F}} \psi^{i4\lambda} n_\lambda df \quad (11.266)$$

представляют собой контравариантные компоненты свободного 4-вектора относительно произвольных линейных преобразований.

В глобально покоящейся системе координат с метрикой (11.184) асимптотическая форма ψ^{ikl} проста:

$$\begin{aligned} \psi^{ikl} &= \eta^{im} \psi_m^{kl} + O_3 = \varepsilon_i \psi_i^{kl} + O_3 = \\ &= (\alpha/2\kappa r^2) (1 - \varepsilon_i) (\delta^{ik} n^l - \delta^{il} n^k) + O_3. \end{aligned} \quad (11.267)$$

Следовательно, в этой системе величины из (11.266), по аналогии с (11.186), имеют вид

$$P^{0i} = (4\pi\alpha/\kappa c) \delta_4^i = \varepsilon_i P_i^0,$$

а это означает, что P^i и P_i являются соответственно контравариантными и ковариантными компонентами вектора 4-импульса в произвольной системе координат, если эта последняя получена из глобально покоящейся асимптотически линейным преобразованием. В частности, в асимптотически плоской лоренцевой системе типа (11.156)—(11.159)

$$P^i = \eta^{ik} P_k = (P^\mu, H/c), \quad P^\mu = P. \quad (11.268)$$

Если умножить (11.262) на $\sqrt{-g}$ и переставить члены, то можно получить комплекс энергии—импульса Ландау—Лифшица [130], а именно:

$$\theta^{ik} = \sqrt{-g} (\mathfrak{S}^{ik} + \mathfrak{t}^{ik}) = \varphi^{ikl}, \quad (11.269)$$

где

$$\left. \begin{aligned} \mathfrak{t}^{ik} &= \tau^{ik} + \psi^{ikl} \cdot (\partial(-g)^{1/2}/\partial x^l) / \sqrt{-g} = \tau^{ik} - \psi^{ikl} g_{,l}^{rs} g_{rs}/2; \\ \varphi^{ikl} &= \sqrt{-g} \psi^{ikl} = (1/2\kappa) g_{,m}^{ikl} = -\varphi^{ilk}. \end{aligned} \right\} \quad (11.270)$$

θ^{ik} удовлетворяют условиям 1 и 2 на стр. 325.

Из (11.269) и (11.270) можно снова получить закон сохранения в виде

$$\theta_{,k}^{ik} = 0. \quad (11.271)$$

Из (11.269) видно, что θ^{ik} — аффинная тензорная плотность веса 2 и

$$P_{L.L}^i = (1/c) \int \theta^{i4} dx^1 dx^2 dx^3 = \lim_{R \rightarrow \infty} (1/c) \int_{\mathcal{F}} \varphi^{i4\lambda} n_\lambda df \quad (11.272)$$

являются контравариантными компонентами векторной плотности веса 1 относительно линейных преобразований, и $P_{L.L}^i$ есть 4-вектор относительно только лоренцевых вращений. Это — недостаток такой формы комплекса энергии—импульса. При использовании же асимптотически лоренцевой

системы координат уравнения (11.272) дают правильное значение 4-импульса системы:

$$P_{L.L}^i = P^i. \quad (11.273)$$

В этом можно убедиться, например, вычисляя $P_{L.L}^i$ в системе с метрикой (11.184) [суперпотенциал φ^{ikl} здесь асимптотически тождествен ψ^{ikl} из (11.267)]. Более того, θ^{ik} имеет в этом случае преимущество в симметрии по i и k , т. е. мы имеем, учитывая (11.269), (11.270) и (11.181),

$$\theta^{ik} = (1/2\kappa) g_{,m,l}^{imkl} = (1/2\kappa) g_{,m,l}^{klim} = \theta^{ki}. \quad (11.274)$$

Остановимся теперь на трех различных интегральных выражениях (11.183), (11.266) и (11.272) — (11.273) для полного 4-импульса изолированной системы. Они различаются только распределением энергии и импульса по пространству — времени, которое, вообще говоря, не поддается даже точному определению. Однако, если рассматривать только распределение энергии, глобально покоящаяся система уже является некоторым исключением. Как показано в приложении 6 [уравнение (27)], суперпотенциал можно записать в виде где

$$\psi_i^{kl} = \chi_i^{kl} - \xi_i^{kl}, \quad (11.275)$$

$$\left. \begin{aligned} \chi_i^{kl} &= \left(\sqrt{(-g)}/\kappa \right) (g_{in,m} - g_{im,n}) g^{km} g^{ln}; \\ \xi_i^{kl} &= \psi_i^{kl} - \delta_i^k \psi_r^{rl} + \delta_i^l \psi_r^{rk}. \end{aligned} \right\} \quad (11.276)$$

В глобально покоящейся системе типа (11.184) получаем следующее асимптотическое выражение для ξ_i^{kl} из (11.185):

$$\xi_i^{ik} = (\alpha/\kappa r^2) (1 - \delta_{44}) (\delta_i^k n^l - \delta_i^l n^k) + O_3. \quad (11.277)$$

т. е.

$$\xi_i^{4l} = O_3.$$

Следовательно, ξ_i^{kl} не дает какого-либо вклада в P_i системы, поэтому при вычислении P_i можно заменить T_i^k комплексом

$$\hat{T}_i^k = \chi_{i,l}^{kl}, \quad (11.278)$$

т. е. величины

$$\hat{P}_i = (1/c) \int \hat{T}_i^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \int_f \chi_i^{4\lambda} n_\lambda df \quad (11.279)$$

равны P_i

$$\hat{P}_i = P_i \quad (11.280)$$

в любой глобальной системе координат с асимптотической метрикой (11.184).

Комплекс \hat{T}_i^k , определенный в (11.278) и (11.276), обладает тем замечательным свойством, что \hat{T}_4^k преобразуется как векторная плотность при ка- либровочных преобразованиях

$$\left. \begin{aligned} x'^\mu &= x'^\mu(x^k); \\ t' &= t + f(x^\nu), \end{aligned} \right\} \quad (11.281)$$

которые не меняют темпа хода координатных часов.

С помощью (11.281), где $\partial x^l / \partial x'^4 = \delta_{4l}$, величина $a_n \equiv g_{4n}/\kappa$ преобразуется как 4-вектор, а из (9.194) и (9.200) видно, что \hat{T}_4^k есть плотность дивергенции от ротора этого вектора:

$$\hat{T}_4^k = \sqrt{(-g)} \operatorname{div}^k \{ \operatorname{rot} \{ a \} \}. \quad (11.282)$$

Следовательно,

$$d\hat{H} \equiv -\hat{T}_4^4 dx^1 dx^2 dx^3 = \hat{h}\gamma^{1/2} dx^1 dx^2 dx^3 = \hat{h}dV \quad (11.283)$$

есть инвариант относительно произвольных чисто пространственных преобразований, и $d\hat{H}$ можно интерпретировать как энергию, содержащуюся в бесконечно малом объеме dV . Это утверждение справедливо в любой системе, связанной с исходной (11.171), а полная энергия

$$H = \hat{H} = -\int \hat{T}_4^4 dx^1 dx^2 dx^3 \quad (11.284)$$

может быть вычислена даже в такой системе координат, которая не является асимптотически прямолинейной, например в полярной системе.

Комплекс \hat{T}_i^k можно записать и в другой форме, особенно удобной для стационарных систем. Из (11.275), (11.276) и (11.278) получаем

$$\hat{T}_i^k = 2T_i^k - \delta_i^k T + \psi_{r,i}^{rk},$$

где

$$T = T_i^i = V(-g) T^i_i + \tau_i^i = V(-g) T - \mathcal{L}/\kappa.$$

Здесь мы использовали (11.153), (11.154) и (11.147). Следовательно,

$$\hat{T}_i^k = V(-g) (2T_i^k - \delta_i^k T) + (1/\kappa) (\partial\mathcal{L}/\partial g_{ik}^{lm}) g_{ik}^{lm} + \psi_{r,i}^{rk}. \quad (11.285)$$

Когда материальная система стационарна (например, в случае осесимметричного тела, вращающегося относительно оси симметрии), можно пользоваться стационарной системой координат, в которой все g_{ik} не зависят от времени. В этом случае плотность энергии

$$\hat{h} = -\hat{T}_4^4 / \gamma^{1/2} \quad (11.286)$$

в соответствии с (11.285) имеет следующий вид:

$$\hat{h} \equiv \hat{\mu}c^2 = (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} (T_\mu^\mu - T_4^4). \quad (11.287)$$

Эта плотность энергии равна нулю вне материи, и полная энергия (11.284) выражается интегралом, взятым только по пространству, занятому материей.

Для покоящейся несжимаемой жидкости, рассмотренной в § 11.7, из (11.96), (11.107) и (11.108) получим

$$\left. \begin{aligned} T_\mu^\mu = 3\dot{p}; \quad T_4^4 = -\dot{\mu}^0 c^2; \quad (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} = A - B(1 - r^2/R^2)^{1/2}; \\ \gamma^{1/2} = r^2 \sin\theta / (1 - r^2/R^2)^{1/2}; \quad dV = r^2 \sin\theta dr d\theta d\varphi / (1 - r^2/R^2)^{1/2}. \end{aligned} \right\} \quad (11.288)$$

Используя (11.111), (11.106) и (11.287), имеем

$$\hat{\mu} = \{A - B(1 - r^2/R^2)^{1/2}\} (3\dot{p}/c^2 + \dot{\mu}^0) = \dot{\mu}^0 (1 - r^2/R^2)^{1/2}, \quad (11.289)$$

а интегрируя по пространству, занятому материей из (11.112), находим полную гравитационную массу M , равную

$$\int \hat{\mu} dV = 4\pi \int_0^{r_1} \dot{\mu}^0 r^2 dr = 4\pi r_1^3 \dot{\mu}^0 / 3 = M,$$

откуда следует, что $\hat{\mu}$ можно интерпретировать как плотность гравитационной массы. В соответствии с (11.289) $\hat{\mu}$ уменьшается с ростом r , в отличие от собственной массы $\dot{\mu}^0$, которая в случае несжимаемой жидкости остается постоянной. Поскольку $\hat{\mu}$ и \hat{h} инвариантны относительно чисто пространственных преобразований, мы нашли бы для них те же самые значения, пожелай мы вос-

пользоваться изотропной системой (11.119), гармонической системой или любой другой системой пространственных координат.

Учитывая эти удовлетворительные свойства комплекса \hat{T}_i^k и суперпотенциала χ_i^{kl} , хотелось бы вообще, заменить T_i^k на \hat{T}_i^k и считать последний истинным комплексом энергии — импульса [171, 172, 185]. Но это было бы не верно. Дело в том, что \hat{T}_i^k изолированного тела в асимптотически лоренцевой системе (11.158), (11.159) является асимптотически порядка O_3 вместо O_4 . Следовательно, величины (11.279) не преобразуются как 4-вектор относительно линейных преобразований, т. е. \hat{P}_i совпадает с 4-импульсом только в глобально покоящейся системе [175].

Мы видели, что полный 4-импульс любой асимптотически лоренцевой системы определяется одним из интегралов (11.183), (11.266) или (11.272), а его распределение по пространству — времени однозначно не определено. С точки зрения общего принципа относительности не совсем удовлетворительно, что величины, определяющие P_i или P_i^i , являются 4-векторами только относительно асимптотически линейных преобразований. Ранее мы установили, что 4-импульс частицы, которую можно рассматривать как островную систему малой пространственной протяженности, является 4-вектором в произвольной системе пространственно-временных координат. Поскольку различие между «малой» и «большой» системами — понятие трудноопределимое, естественно было бы потребовать, чтобы удовлетворительная теория давала выражение для 4-импульса любой изолированной системы, который являлся бы свободным 4-вектором относительно произвольных пространственно-временных преобразований. Можно показать, что для удовлетворения этого требования необходимо, чтобы суперпотенциал был истинной (не только аффинной) тензорной плотностью ранга 3 [182]. Ясно, однако, что такой объект невозможно сконструировать из метрического тензора g_{ik} и его первых производных $g_{ik, l}$, а следовательно, нельзя удовлетворить указанным требованиям. В ряде статей автора настоящей монографии [176, 178 — 181] был указан путь преодоления этих трудностей. а именно: описывать гравитационное поле не метрическим тензором $g_{ik}(x)$, а тетрадным полем $h_{(a)}^i(x)$. Связь между ними в каждой точке дается формулами (9.81) и (9.86)

$$h_{(a)}^i h_k^{(a)} = g_{ik}.$$

В этих статьях было показано, что возможно так определить суперпотенциал $U_i^{kl} = -U_i^{lk}$ через $h_{(a)}^i$ и их первые производные $h_{(a),k}^i$, чтобы он являлся тензорной плотностью, а соответствующий комплекс энергии — импульса $\bar{T}_i^k = U_i^{kl}$ и интегралы $\bar{P}_i = (1/c) \int \bar{T}_i^k dx^1 dx^2 dx^3$ удовлетворяли бы всем необходимым физическим требованиям. Далее, было показано, что \bar{P}_i в асимптотически лоренцевых системах координат типа рассмотренных в (11.158), (11.159) и (11.212) — (11.214) равны P_i , вытекающим из эйнштейновских выражений (11.183) и (11.183'). После того как общековариантные выражения \bar{P}_i получены с помощью тетрадного формализма, можно забыть о тетрадах вовсе и перейти к вычислению P_i в системах координат, в которых справедливы комплексы (11.183), (11.266) и (11.272), зависящие только от метрики. Таким путем можно прийти к компонентам 4-импульса изолированной системы, используя закон преобразования 4-вектора.

§ 11.13. Угловой момент изолированных систем

Полный угловой момент материальной системы плюс ее гравитационное поле удобнее всего описывать комплексом (11.269), имея в виду свойства симметрии θ^{ik} . Из (11.271) и (11.274) следует, что величина

$$M^{ikl} = x^i \theta^{kl} - x^k \theta^{il} \quad (11.290)$$

удовлетворяет закону сохранения

$$M_{,l}^{ikl} = 0. \quad (11.291)$$

Вводя (11.269) в (11.290), получаем

$$M^{ikl} = x^i \varphi_{,m}^{klm} - x^k \varphi_{,m}^{ilm} = (x^i \varphi^{klm} - x^k \varphi^{ilm})_{,m} - \varphi^{kli} + \varphi^{ilk}.$$

Далее, из (11.270), используя (11.181), находим

$$\varphi^{ilk} - \varphi^{kli} = (1/2\kappa) (g^{imlk} - g^{kml i})_{,m} = (1/2\kappa) (g^{imlk} + g^{tklm})_{,m} = (1/2\kappa) g_{,m}^{iklm}.$$

Итак, M^{ikl} имеет вид обычной дивергенции суперпотенциала, т. е.

$$M^{ikl} = K_{,m}^{iklm}, \quad (11.292)$$

где

$$K^{iklm} = x^i \varphi^{klm} - x^k \varphi^{ilm} + (1/2\kappa) g^{iklm}. \quad (11.293)$$

Суперпотенциал (11.293) обладает свойствами симметрии

$$K^{iklm} = -K^{ikml} = -K^{kil m} = K^{kiml}, \quad (11.294)$$

откуда видно, что закон сохранения (11.291) тождественно следует из (11.292).

По аналогии с (11.160) определим теперь интегралы на бесконечной пространственноподобной гиперповерхности

$$\mathfrak{F}^{ik}(\Sigma) = -\frac{1}{c} \int_{\Sigma} M^{ikl} dS_l, \quad (11.295)$$

где dS_l удовлетворяет условиям (11.161). Если Σ — поверхность $t = \text{const}$, то по аналогии с (11.165), (11.166), (11.183) и (11.183') имеем

$$\mathfrak{F}^{ik}(\Sigma) = M^{ik}, \quad (11.296)$$

где

$$M^{ik} = (1/c) \int (x^i \theta^{k4} - x^k \theta^{i4}) dx^1 dx^2 dx^3, \quad (11.297)$$

или, если учесть (11.292) и (11.294),

$$\begin{aligned} M^{ik} &= (1/c) \int M^{ik4} dx^1 dx^2 dx^3 = (1/c) \int K_{,\lambda}^{ik4\lambda} dx^1 dx^2 dx^3 = \\ &= \lim_{R \rightarrow \infty} (1/c) \int_{\mathcal{C}} K^{ik4\lambda} df_{\lambda} = \lim_{R \rightarrow \infty} (1/c) \int_{\mathcal{C}} K^{ik4\lambda} n_{\lambda} R^2 d\omega. \end{aligned} \quad (11.298)$$

Если Ω обозначает снова область 4-пространства, ограниченную двумя пространственноподобными гиперповерхностями Σ_1 и Σ_2 и гиперцилиндром \mathcal{C} с радиусом $R \rightarrow \infty$, то, интегрируя (11.291) по Ω , получаем по аналогии с (11.162)

$$\mathfrak{F}^{ik}(\Sigma_2) - \mathfrak{F}^{ik}(\Sigma_1) + \lim_{R \rightarrow \infty} \frac{1}{c} \int_{\mathcal{C}} M^{ikl} dS_l = 0. \quad (11.299)$$

В последнем интеграле dS_l определяется в (11.195). Следовательно,

$$X^{ik} \equiv \lim_{R \rightarrow \infty} (1/c) \int_{\mathcal{C}} M^{ikl} dS_l = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} M^{ik\lambda} df_{\lambda} dt = \lim_{R \rightarrow \infty} \int_{\mathcal{C}} M^{ik\lambda} n_{\lambda} R^2 d\omega dt. \quad (11.300)$$

Рассмотрим снова изолированную материальную систему в асимптотически лоренцевой системе координат типа (11.158), (11.159). Если метрика на пространственной бесконечности такова, что предел интеграла (11.300) равен нулю, т. е.

$$X^{ik} = 0, \quad (11.301)$$

то из (11.299) по аналогии с (11.163) получим

$$\mathfrak{F}^{ik}(\Sigma_{\mu}) = \mathfrak{F}^{ik}(\Sigma_2). \quad (11.302)$$

По тем же соображениям, что приведены на стр. 327, из (11.302) следует, что величина (11.297) удовлетворяет свойствам, аналогичным 1—3 (стр. 327), а именно свойству 4: M^{ik} не зависит от времени. Эта величина преобразуется как свободный контравариантный 4-тензор относительно лоренцевых преобразований и инвариантна относительно преобразований (11.171), не меняющих метрику на пространственной бесконечности.

Эти свойства и сама форма интеграла (11.297) показывают, что M^{ik} является 4-тензором полного момента материи и гравитационного поля.

Учитывая (11.269), M^{ik} можно разбить на две части

$$M^{ik} = (1/c) \int (x^i \mathfrak{T}^{k4} - x^k \mathfrak{T}^{i4}) \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3 + \\ + (1/c) \int (x^i \mathfrak{t}^{k4} - x^k \mathfrak{t}^{i4}) \sqrt{-g} dx^1 dx^2 dx^3, \quad (11.303)$$

которые можно было бы интерпретировать как описывающие материю и гравитационное поле соответственно. К сожалению, такая интерпретация не имеет ясного физического смысла, поскольку оба интеграла в (11.303) сильно зависят от выбора координат внутри системы. Только сумма M^{ik} удовлетворяет всем свойствам 4 при условии выполнения (11.301), что следует проверять каждый раз. Это обстоятельство — еще одна иллюстрация тесной связи материи и гравитационного поля в теории Эйнштейна.

В качестве примера рассмотрим решение уравнений поля, найденное Керром [125, 126], которое описывает метрику пространства — времени вне вращающейся массы. В определенной асимптотически лоренцевой системе координат

$$x^i = (x, y, z, ct) = (r \sin \theta \cos \varphi, r \sin \theta \sin \varphi, r \cos \theta, ct) \quad (11.304)$$

линейный элемент Керра имеет вид

$$\left. \begin{aligned} ds^2 &= dx^2 + dy^2 + dz^2 - c^2 dt^2 + [\alpha \rho^3 / (\rho^4 + a^2 z^2)] (d\Phi)^2; \\ d\Phi &= \rho (x dx + y dy) / (\rho^2 + a^2) + a (x dy - y dx) / (\rho^2 + a^2) + \\ &\quad + z dz / \rho - c dt, \end{aligned} \right\} \quad (11.305)$$

где α и a — постоянные интегрирования, а ρ связано с $r = (x^2 + y^2 + z^2)^{1/2}$ алгебраическим уравнением

$$\rho^4 - (r^2 - a^2) \rho^2 - a^2 z^2 = 0. \quad (11.306)$$

Форма $d\Phi$ и ds^2 говорит о том, что метрика Керра обладает аксиальной симметрией, но не обладает симметрией отражения.

Непосредственное вычисление R_{ik} в этой метрике показывает, что уравнения поля (11.201) удовлетворяются, однако решение до сих пор еще не продолжено внутрь материи, порождающей это поле. Полагая, что такое продолжение возможно, т. е., что решение Керра описывает метрику вне реальной системы, вычислим 4-импульс P^i и угловой 4-момент M^{ik} источника метрики Керра по уравнениям (11.272), (11.266) и (11.298). Для этого нам необходимо знать только асимптотическую форму метрики (11.305).

Для больших r , малых a/r из (11.306) и (11.305) получим

$$\left. \begin{aligned} \rho &= r (1 - a^2 \sin^2 \theta / 2r^2) = r (1 + O_2); \\ \alpha \rho^3 / (\rho^4 + a^2 z^2) &= \alpha / r + O_3; \\ d\Phi &= -\mu_i dx^i + (a \sin \theta / r) l_i dx^i + O_2, \end{aligned} \right\} \quad (11.307)$$

где μ_i и l_i — величины, определенные в (11.207).

Из (11.307) и (11.305) находим компоненты метрического тензора

$$\left. \begin{aligned} g_{ik} &= \eta_{ik} + y_{ik} + z_{ik} + O_3; \\ y_{ik} &= \alpha_{ik} / r; \quad z_{ik} = \beta_{ik} / r^2; \\ \alpha_{ik} &= \alpha \mu_i \mu_k; \quad \beta_{ik} = -\alpha a \sin \theta (\mu_i l_k + l_i \mu_k). \end{aligned} \right\} \quad (11.308)$$

Выражение для α_{ik} есть частный случай (11.214) при $N = 0$ и $A = \alpha = \text{const}$. Следовательно, рассматриваемая метрика аксиально симметрична и симметрична относительно отражений с точностью до O_1 . Поскольку массовая функция постоянна, из соображений, изложенных на стр. 336,

$$P^i = (4\pi\alpha/c) \delta_{i4}, \quad (11.309)$$

что и следовало ожидать. С другой стороны, член z_{ik} порядка O_2 аксиально симметричен, но не симметричен относительно отражений. По этой причине члены такого типа не содержатся в (11.214) (конечно, это лишь частный случай общей метрики, рассмотренной Саксом [212]).

Производные величин y_{ik} и z_{ih} в (11.308) можно получить из (11.220), а прямыми вычислениями — асимптотические выражения для φ^{ikl} (11.270) и K^{iklm} (11.293), соответствующие метрике Керра (11.308). Находим

$$\varphi^{i4\lambda} n_\lambda = (\alpha/\kappa r^2) (\delta_4^i + n^i) + O_3. \quad (11.310)$$

Поскольку среднее значение \bar{n}^i по всем направлениям равно нулю, выражение (11.272) сводится к (11.309) для P^i . Далее, среднее по всем направлениям значение подинтегрального выражения в (11.298) равно

$$\overline{K^{ik4\lambda} n_\lambda} = (3\alpha a/2\kappa r^2) \overline{\sin \theta (n^i l^k - n^k l^i)} + O_3$$

и

$$M^{ik} = (3\alpha a/2\kappa c) \int (n^i l^k - n^k l^i) \sin \theta d\omega. \quad (11.311)$$

Следовательно,

$$M^{i4} = M^{4k} = 0, \quad (11.312)$$

и для вектора углового момента получаем выражение

$$\begin{aligned} M_\mu &= \varepsilon_{\mu\nu\lambda} M^{\nu\lambda}/2 = (3\alpha a/2\kappa c) \int \varepsilon_{\mu\nu\lambda} n^\nu l^\lambda \sin \theta d\omega = \\ &= (3\alpha a/2\kappa c) \iint (-m_\mu) \sin^2 \theta d\theta d\varphi = \delta_{\mu 3} (3\alpha a/2\kappa c) 2\pi \int_0^\pi \sin^2 \theta d\theta, \end{aligned}$$

или

$$M_\mu = \delta_{\mu 3} 4\pi\alpha a/\kappa c = M c a \delta_{\mu 3}, \quad (11.313)$$

где M — полная масса (11.88). Итак, вектор углового момента материальной системы, порождающей внешнюю метрику (11.305), направлен по оси симметрии, а его модуль

$$|M| = M c |a|. \quad (11.314)$$

Покажем, наконец, что условие (11.301) удовлетворяется в нашем случае. Во-первых, легко видеть, что $\theta^{i\nu} n_\nu$ есть величина порядка O_5 при больших r . Запишем

$$0^{i\nu} n_\nu = (O_5)^i. \quad (11.315)$$

Поскольку $x^i = r n^i + x^4 \delta_4^i$, на цилиндре C (11.300) имеем

$$\begin{aligned} M^{ik\lambda} n_\lambda &= x^i \theta^{k\lambda} n_\lambda - x^k \theta^{i\lambda} n_\lambda = \\ &= n^i (O_4)^k - n^k (O_4)^i + x_4 (\delta_4^i (O_5)^k - \delta_4^k (O_5)^i), \end{aligned}$$

где мы положили

$$R^n (O_m)^k = (O_{m-n})^k.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} X^{ik} &= \lim_{R \rightarrow \infty} \int_C \{n^i (O_2)^k - n^k (O_2)^i\} d\omega dt + \\ &+ \lim_{R \rightarrow \infty} (1/c) \int_C \{\delta_4^i (O_3)^k - \delta_4^k (O_3)^i\} d\omega x^4 dx^4. \end{aligned} \quad (11.316)$$

Поскольку протяженность цилиндра C в пространственноподобном направлении возрастает не быстрее r , интегралы в (11.316) будут порядка O_1 . Поэтому условие (11.301) удовлетворяется, и M^{ik} имеет все свойства типа 4 на стр. 343.

4-Тензор углового момента M^{ik} удовлетворяет и соотношению

$$M^{ik} P_k = 0. \quad (11.317)$$

В глобально покоящейся системе координат условие (11.317) есть просто следствие (11.309) и (11.312). Поэтому, учитывая трансформационные свойства 1—4, видим, что (11.317) должно иметь место в произвольной асимптотически лоренцевой системе координат.

**ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНАЯ ПРОВЕРКА
ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ.
КОСМОЛОГИЧЕСКИЕ ПРОБЛЕМЫ**

**§ 12.1. Эйнштейновское, или гравитационное, смещение
спектральных линий**

В то время как следствия СТО проверены с высокой степенью точности в многочисленных экспериментах, экспериментальное подтверждение общей теории относительности на протяжении полувека ограничивалось всего лишь тремя классическими эйнштейновскими эффектами: красное смещение спектральных линий излучения небесных тел, сдвиг перигелия Меркурия и отклонение света гравитационным полем Солнца. Учитывая трудность точного исследования физических условий на небесных телах, эти подтверждения теории можно считать до некоторой степени неопределенными, и долгое время казалось невероятным, чтобы стала возможной какая бы то ни была проверка общей теории относительности в земных или околоземных условиях. Однако во второй половине пятидесятых годов ситуация в этом отношении резко изменилась. Огромный прогресс экспериментальной техники и запуск космических аппаратов открыли совершенно новые, неожиданные возможности проверки общей теории относительности.

Наиболее простой из трех классических эффектов — эйнштейновское смещение спектральных линий излучения атомов в стационарном гравитационном поле, наблюдаемое в точке с гравитационным потенциалом, отличным от потенциала в месте излучения. Теоретически этот эффект был детально рассмотрен в § 10.7. Его можно рассматривать как смещение либо спектроскопической стандартной частоты $\hat{\nu}_0$, либо координатной частоты ν_0 . В любом случае относительное смещение выражается формулами (10.212), (10.218):

$$\Delta \hat{\nu}_0 / \hat{\nu}_0 = \Delta \nu_0 / \nu_0 = [(1 + 2\chi_1/c^2)/(1 + 2\chi_2/c^2)]^{1/2} - 1. \quad (12.1)$$

Излучающие атомы, как это легко показать [168], обладают свойствами идеальных стандартных часов высокой точности. Следовательно, уравнение (12.1) можно рассматривать также и как следствие формулы (8.116)*

$$d\tau_0 = dt (1 + 2\chi/c^2)^{1/2}, \quad (12.2)$$

из которой следует связь хода покоящихся в гравитационном поле стандартных часов с ходом координатных часов в стационарной системе координат.

В гравитационном поле Солнца в соответствии с (11.83) и (11.88) имеем

$$2\chi/c^2 = -\alpha/r = -2kM/c^2 r, \quad (12.3)$$

где масса Солнца

$$M = 1,983 \cdot 10^{33} \text{ г}. \quad (12.4)$$

Если положить r равным обычному астрономическому значению радиуса Солнца r , т. е.

$$r_1 = 6,95 \cdot 10^{10} \text{ см}, \quad (12.5)$$

* Эта формула, являющаяся следствием принципа эквивалентности, служила важным предметом обсуждения в дискуссии Эйнштейна и Бора по принципам квантовомеханического описания [27].

то для (12.3) получим значение

$$2\chi_1/c^2 = -4,24 \cdot 10^{-6}. \quad (12.6)$$

Координата r оказывается не равной точно расстоянию, вычисленному стандартными астрономическими методами в предположении, что пространство евклидово, а свет распространяется прямолинейно. Разница, однако, получается очень маленькой, а поскольку $2\chi/c^2$ — величина малая, ошибка, возникающая при замене r на r_1 , оказывается величиной высшего порядка малости. Рассматривая (12.1) в терминах малых величин χ_1/c^2 и χ_2/c^2 , для смещения спектральных линий излучения с поверхности Солнца, регистрируемого на Земле, получаем величину

$$\Delta\hat{v}_0/\hat{v}_0 = \Delta v_0/v_0 = (\chi_1 - \chi_2)/c^2 = -2,12 \cdot 10^{-6}. \quad (12.7)$$

Здесь мы воспользовались формулой (12.6) и пренебрегли величиной χ_2 , которая примерно в сто раз меньше χ_1 .

В соответствии с (12.7) спектральные линии, излученные атомами у поверхности Солнца, должны слегка сместиться в красную сторону по сравнению с тем же спектром, но излученным «земными» атомами. Этот интересный эффект, предсказанный Эйнштейном [69], качественно согласовался с наблюдениями излучения Солнца и тяжелого спутника Сириуса, где эффект оказался в тридцать раз больше [8, 100, 216]. Однако количественное соответствие было не совсем хорошее. Нужно принять во внимание, что формула (12.7) выведена для случая излучающих атомов, находящихся в покое. Чтобы учесть движение атомов, нужно (12.7) заменить формулой, вытекающей из (10.210), которая содержит комбинацию эффектов Доплера и Эйнштейна. Действительное смещение спектральных линий, как было показано, содержит суперпозицию обоих этих эффектов. В то время как излучение края солнечного диска хорошо описывается формулой (12.7), свет от центра диска смещен в красную сторону на величину, равную одной трети значения (12.7) [6, 7, 23, 26, 90, 99, 150]. Этот краевой эффект легко объяснить, если предположить, что излучающие атомы принадлежат к той части фотосферы Солнца, которая совершает радиальное движение от центра. С другой стороны, ясно, что количественная проверка формулы красного смещения будет оставаться неточной до тех пор, пока мы не разберемся детально в кинематике фотосферы.

Как уже было сказано выше, эффект смещений линий есть не что иное, как подтверждение зависимости хода стандартных часов от гравитационного поля и скорости, выраженной формулой (12.2) или, в более общем виде, формулой (8.114). Поэтому запуск космических аппаратов и конструирование точных атомных часов открыли новые возможности измерения этого эффекта путем сравнения хода часов, находящихся на спутнике, с ходом идентичных земных часов. Эта возможность обсуждалась в ряде статей [105, 170, 230] в тот самый период, когда был запущен первый в мире советский искусственный спутник. Однако прежде чем стала возможной реализация подобного эксперимента, Мёссбауэр в 1958 г. сделал открытие, позволившее более точно проверить теорию Эйнштейна в земных условиях.

Смещение спектральных линий в гравитационном поле Земли, конечно, гораздо меньше, чем в поле Солнца. Если источник света помещен на высоте 22,5 м над наблюдателем (как это и было в реализованном эксперименте), то вместо (12.7) можно записать

$$\Delta v_0/v_0 = (\chi_1 - \chi_2)/c^2 = 22,5 (a/c^2) = 2,47 \cdot 10^{-15}. \quad (12.8)$$

Здесь $a = 9,81 \text{ м} \cdot \text{сек}^{-2}$ — гравитационное ускорение на поверхности Земли [ср. с (8.110)].

Чтобы проверить эту формулу, необходимо с высокой степенью точности измерять частоту (или энергию) фотонов. Один из методов — регистрирование резонансного поглощения фотонов от источника 1 в поглотителе 2, состоя-

щем из того же материала, что и источник. Другой метод — использование фотонов с хорошо определенной энергией. Для этого целесообразно использовать источник γ -излучения, так как γ -линии обычно более узки, чем в оптическом диапазоне. Однако спектральные линии нормального γ -излучения свободных ядер все еще относительно широкие вследствие теплового доплер-эффекта. Более того, отдача ядер, описываемая формулами (10.203) и (10.206), вызывает смещение линий много больше их ширины, так что никакого резонансного поглощения не возникает. Как было показано Мёссбауэром [188], оба эти эффекта могут быть нейтрализованы, если использовать ядра в больших кристаллах, поглощающих импульс отдачи. В таких условиях ширина линий практически равна «естественной» ширине, а центр линии вычисляется по формуле (10.207).

Используя эффект Мёссбауэра в источнике излучения и его приемнике, заставляя источник двигаться так, чтобы компенсировать гравитационное смещение эффектом Доплера, Паунд с сотрудниками проверили формулу (12.8) с погрешностью 1% [199, 200]. Формула (10.213) для эйнштейновского смещения оказалась в очень хорошем согласии с экспериментом. Нужно помнить, однако, что эта формула справедлива с точностью до χ/c^2 . Чтобы проверить точную формулу (11.218), нужно уметь измерять относительное смещение частоты с точностью до $(\chi/c^2)^2$. На поверхности Земли $(\chi/c^2)^2 \approx 10^{-18}$, а мы не располагаем способами измерения таких величин, по крайней мере в настоящее время.

Эйнштейновское смещение можно проверить и в непостоянных гравитационных полях. Крэншоу, Шиффер и Уайтхед [53, 54] выполнили эксперимент, в котором источник и поглотитель были укреплены на быстро вращающемся роторе на расстояниях от центра r_s и r_a соответственно. Во вращающейся с постоянной скоростью системе координат S^* , определяемой формулой (8.77), скалярный гравитационный потенциал в соответствии с (8.79) и (8.109) есть

$$\chi = -r^2\omega^2/2, \quad (12.9)$$

где ω — угловая частота диска. Смещение частоты в устранимом гравитационном поле в соответствии с (10.213) равно

$$\Delta\nu_0/\nu_0 = \omega^2 (r_a^2 - r_s^2)/2c^2. \quad (12.10)$$

Для $r_a > r_s$ смещение происходит в сторону больших частот. Поглощение или, вернее, преобразование γ -квантов регистрировалось на шести фиксированных скоростях: 100, 200, 300, 400, 450 и 500 об/сек с погрешностью 0,1%. Соответствующее экспериментальное смещение частоты, как было показано, подчинялось формуле

$$\Delta\nu_0/\nu_0 = k\omega^2 (r_a^2 - r_s^2)/2c^2, \quad (12.11)$$

где

$$k = 1,001 \pm 0,002, \quad (12.12)$$

причем теоретическое значение $k = 1$. Этот эксперимент совместно с экспериментами Паунда можно рассматривать как точное доказательство эквивалентности устранимого и неустраняемого гравитационных полей.

Вычисление смещения частоты по формуле (12.10) производилось во вращающейся системе координат S^* . Мы можем конечно, вычислить это смещение и в лабораторной системе, которую в данном случае можно рассматривать как инерциальную систему без гравитационного поля. С этой точки зрения смещение частоты есть чисто релятивистский эффект Доплера (СТО). Обозначим ν_s и ν_a частоты излучения, измеренные в инерциальных системах отсчета, покоящихся вместе с источником и поглотителем соответственно. Тогда, если \mathbf{u}_s и \mathbf{u}_a — векторы скорости по отношению к системе S , из (2.90) для частоты ν в S мы получим

$$\nu = \nu_s (1 - u_s^2/c^2)^{1/2} / (1 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_s/c) = \nu_a (1 - u_a^2/c^2)^{1/2} / (1 - \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_a/c), \quad (12.13)$$

где \mathbf{e} определяет направление луча относительно S . Поскольку векторы скорости \mathbf{u}_s и \mathbf{u}_a касательные к круговым траекториям и

$$u_s = r_s \omega, \quad u_a = r_a \omega, \quad (12.14)$$

простой геометрический анализ показывает, что направление \mathbf{e} ортогонально направлению относительной скорости $\mathbf{u} = \mathbf{u}_s - \mathbf{u}_a$. Следовательно,

$$\mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_s = \mathbf{e} \cdot \mathbf{u}_a, \quad (12.15)$$

и из (12.13) получаем

$$v_a = v_s \left[(1 - u_s^2/c^2) / (1 - u_a^2/c^2) \right]^{1/2}. \quad (12.16)$$

Здесь v_a и v_s — частоты излучения, измеряемые стандартными часами, движущимися совместно с поглотителем и источником соответственно, т. е. они тождественны стандартной частоте \hat{v}_0 во вращающейся системе S^* в месте нахождения источника и поглотителя. Следовательно,

$$\begin{aligned} \Delta \hat{v}_0 / \hat{v}_0 &= \Delta v_0 / v_0 \equiv (v_a - v_s) / v_s = \left[(1 - u_s^2/c^2) / (1 - u_a^2/c^2) \right]^{1/2} - 1 = \\ &= \frac{1}{2c^2} (u_a^2 - u_s^2). \end{aligned} \quad (12.17)$$

Используя (12.14), видим, что (12.17) тождественно (12.10).

С этой точки зрения рассмотренные эксперименты могут служить еще одним подтверждением релятивистского эффекта Доплера (2.90). Уже в тридцатых годах Айвсу удалось проверить формулу (2.90) в оптических экспериментах (см. стр. 16, 49). Мандельберг и Виттен [151] повторили эксперимент Айвса, но уже с более высокой точностью. Для эффекта второго порядка они нашли эмпирическую формулу

$$\Delta v/v = -kv^2/c^2, \quad (12.18)$$

где

$$k = 0,498 \pm 0,025, \quad (12.19)$$

причем теоретическое значение $k = 1/2$. Сравнение (12.18) и (12.19) с (12.11), (12.12) и (12.17) показывает, что эксперименты Крэншоу и др., в которых был использован эффект Мёссбауэра, обладают значительно более высокой точностью.

Эти эксперименты ни в коем случае не обнаруживают какого бы то ни было эфирного ветра, поэтому их можно рассматривать как новую проверку специальной теории относительности. В соответствии с теорией мирового эфира, формула (12.17) для смещения частоты должна содержать член, зависящий от абсолютной скорости лабораторной системы. Пусть S_e — абсолютная инерциальная система, в которой эфир покоится, а S , как и прежде, лабораторная система, движущаяся относительно S_e с абсолютной скоростью \mathbf{v} . Рассмотрим плоскую монохроматическую световую волну, характеризующуюся нормально \mathbf{n} , частотами ν и ν_e относительно S и S_e соответственно. Тогда согласно (1.20) имеем

$$\nu = \nu_e (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c). \quad (12.20)$$

Обозначим через S_s инерциальную систему, в которой источник излучения покоится. Применяя к ней (12.20), получаем

$$\nu_s = \nu_e (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s/c), \quad (12.21)$$

где ν_s — собственная частота, а \mathbf{v}_s — абсолютная скорость источника. Тогда

$$\nu = \nu_s (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}/c) / (1 - \mathbf{n} \cdot \mathbf{v}_s/c). \quad (12.22)$$

Разлагая по v/c и v_s/c , получаем с точностью до величин второго порядка

$$\nu = \nu_s \{ 1 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s)/c + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s)^2/c^2 + (\mathbf{n} \cdot \mathbf{v})(\mathbf{n} \cdot \mathbf{u}_s)/c^2 \}, \quad (12.23)$$

где

$$\mathbf{u}_s = \mathbf{v}_s - \mathbf{v} \quad (12.24)$$

есть скорость источника относительно лабораторной системы S . Формула (12.23) с точностью до обозначений совпадает с (1.23).

В нерелятивистской теории направление нормали n инвариантно; однако в экспериментах более подходящей величиной является вектор направления потока энергии e . Как показано в § 1.6, скорость луча $w = we$ в S связана со скоростью $w_e = ce$ в S_e обычной теоремой сложения скоростей частицы. Следовательно,

$$w_e = ce = we + v; \quad (12.25)$$

$$w = (c^2 - v^2 + (v \cdot e)^2)^{1/2} - v \cdot e \quad (12.26)$$

[ср. с (1.32)–(1.35)];

$$n = we/c + v/c = (1 - v \cdot e/c) e + v/c + O(v^2/c^2). \quad (12.27)$$

Подставив в (12.23) уравнение (12.27), получим формулу Доплера, следующую из теории эфира, по крайней мере, с точностью до членов второго порядка:

$$v = v_s \{1 + e \cdot u_s/c + (e \cdot u_s)^2/c^2 + v \cdot u_s/c^2\}. \quad (12.28)$$

По аналогии с (12.13) получим

$$v = v_a \{1 + e \cdot u_a/c + (e \cdot u_a)^2/c^2 + v \cdot u_a/c^2\}, \quad (12.29)$$

где v_a — частота, измеренная в системе покоя поглотителя, а u_a — скорость последнего в S . Исключая v из (12.28) и (12.29) и используя (12.15), для величин второго порядка находим

$$v_a = v_s \{1 + v \cdot u/c^2\}, \quad u = u_s - u_a, \quad (12.30)$$

или

$$(v_a - v_s)/v_s = v \cdot u/c^2, \quad (12.31)$$

что заменяет (12.17) в абсолютной теории. Это смещение частоты зависит линейно от абсолютной скорости лаборатории v , а также от u_s и u_a . Однако такая зависимость в экспериментах Крэншоу и др. не была обнаружена. Более того, наблюдался совсем другой тип зависимости от u_s и u_a , а именно тот, который следует из релятивистской теории (12.17).

Имея в виду далеко идущие следствия специального принципа относительности, чрезвычайно важно проанализировать в деталях те немногие эксперименты, которые были выполнены с целью его подтверждения. Классический интерферометрический эксперимент Майкельсона, на котором основывалась специальная теория относительности, был выполнен в конце прошлого века. Его результаты оспаривались Миллером, но даже более поздние измерения Иосса [121] позволили указать лишь верхний предел эфирного ветра, равный 1,5 км/сек, т. е. не более 1/20 орбитальной скорости Земли. В 1955 г. Эссен [87, 88] выполнил эксперимент, который можно трактовать как микроволновый аналог эксперимента Майкельсона. Эссен пришел к ожидаемому нулевому результату, причем с точностью более высокой, чем в оптических измерениях.

Тем не менее, очень желательно обратиться к другим прямым проверкам принципа относительности с тем, чтобы получить ясный и прямой ответ на вопрос: существует эфир или нет? На Международном конгрессе по фундаментальным константам (Турин, 1956 г.) было заявлено, что эксперимент такого рода можно выполнить с помощью двух мазеров с противоположно направленными молекулярными пучками [170]. Например, пучок возбужденных молекул аммиака направляется в резонатор. При достаточно высокой интенсивности пучка можно получить очень высокую монохроматичность излучения в резонаторе, обязанную вынужденным микроволновым переходам в молекулах. Поскольку молекулы входят в резонатор с конечной скоростью, частота испускаемого ими излучения, в соответствии с эффектом Доплера, зависит от направления излучения. Из теории мазеров следует, что характеристическая частота мазерных колебаний ν_m определяется доплеровской частотой излучения, испущенного перпендикулярно к молекулярному пучку [129, 177].

Для той же частоты из теории мирового эфира следует формула (12.28), и если положить в ней $e \cdot u_s = 0$, то

$$\nu_m = v_s \{1 + v \cdot u_s/c^2\}, \quad (12.32)$$

где v_s — собственная частота, а u_s — скорость молекул в пучке. Если теперь взять два тождественных мазера с противоположно направленными пучками, то из теории эфира следует величина относительной разности частот, равная $2|v \cdot u_s|/c^2$. Ее можно измерить рассматривая интерференцию характеристических частот мазера. Поворот мазеров на 180° приведет к разности в частоте биений $4v_s|v \cdot u_s|/c^2$. С другой стороны, совершенно ясно, что из релятивистской формулы Доплера (12.13) при $e \cdot u_s = 0$ такой эффект вообще не следует. Такой эксперимент был выполнен Седерхолмом, Блендом, Хейвенсом и Таунсом [236] и, как ожидалось, дал нулевой результат. Имея в виду высокую точность измерений (10^{-12}), экспериментаторы заявили, что скорость эфира не может превышать 1/30 км/сек, т. е. они в 45 раз снизили верхний предел скорости эфира, указанный до этого в оптических экспериментах. Заметим, что теперь скорость эфира не может превышать 0,001 орбитальной скорости Земли.

Уже было указано, что эксперимент Крэншоу и др. находится в явном несоответствии с формулой (12.30) абсолютной теории. Небольшое изменение оборудования позволяет превратить этот эксперимент в нулевой, что гораздо удобнее для указания верхнего

Упражнение

Показать, что четыре функции $f^i(x^k)$ в преобразовании (9.243), связывающие произвольную систему S с системой S' гармонических координат, являются решениями уравнения

$$\square \psi(x) = 0, \quad (9.281)$$

где \square — ковариантный оператор Д'Аламбера (9.197).

Другим полезным примером координатных условий являются соотношения Эйнштейна:

$$g^{kl} \partial g_{kl} / \partial x^i = 0. \quad (9.282)$$

В соответствии с (9.126) и (9.127) их можно представить в виде $\Gamma_{ik}^k = 0$, $\partial g / \partial x^i = 0$, т. е. $g = \text{const}$. Постоянную всегда можно положить равной -1 . Поэтому условия (9.282) эквивалентны требованию, чтобы определитель g метрического тензора везде был равен -1 ;

$$g = -1. \quad (9.282')$$

§ 9.16. Калибровочно-инвариантные величины. Стандартные 4-тензоры.

В предыдущих параграфах мы рассматривали множество величин, которые для полной группы общих пространственно-временных преобразований являлись векторами и тензорами. Однако часто приходится иметь дело с величинами, которые ведут себя как тензоры при более ограниченной группе преобразований. Например, упоминавшиеся в § 9.5 аффинные тензоры являются тензорами лишь относительно линейных преобразований. Теперь исследуем подгруппу преобразований (8.59), названных в § 8.13 калибровочными преобразованиями. Чтобы избежать ненужных усложнений, рассмотрим лишь такие преобразования, для которых $\alpha_4^4 = \partial x'^4 / \partial x^4 > 0$, т. е. откажемся от использования часов, идущих в обратном направлении. Таким образом, рассматриваемые калибровочные преобразования имеют вид

$$\left. \begin{aligned} x'^{\mu} &= x'^{\mu}(x^{\nu}); \quad x'^4 = x'^4(x^i); \\ \alpha_4^{\mu} &= \tilde{\alpha}_4^{\mu} = 0; \quad \alpha_4^4 > 0. \end{aligned} \right\} \quad (9.283)$$

При таких преобразованиях система отсчета R , соответствующая системе координат S , не изменяется, так как преобразования (9.283) просто вводят другое упорядочивание точек отсчета и изменяют скорость и установку хода координатных часов. Калибровочные преобразования (9.283) могут быть составлены из чисто пространственного преобразования

$$x'^{\mu} = x'^{\mu}(x^{\nu}); \quad x'^4 = x^4, \quad (9.284)$$

которому предшествовало произвольное изменение масштаба времени

$$x'^{\mu} = x^{\mu}; \quad x'^4 = x'^4(x^i). \quad (9.285)$$

При преобразованиях (9.284) пространственные компоненты A^{μ} и A_{μ} 4-вектора $A_i = g_{ik} A^k$ преобразуются как контравариантные и ковариантные компоненты 3-вектора соответственно, но в общем случае они являются компонентами двух различных 3-векторов, поскольку A_{μ} равно $\gamma_{\mu\nu} A^{\nu}$ лишь в частном случае. Наша цель — построить калибровочно-инвариантные величины. Для этого удобно в каждой системе координат S ввести следующие величины:

$$\left. \begin{aligned} \Gamma^i &= \delta_{i4} / (-g_{44})^{1/2} = \{0, 0, 0, (1 + 2\chi/c^2)^{-1/2}\}; \\ \Gamma_i &= g_{ik} \Gamma^k = g_{i4} / (-g_{44})^{1/2} = \{\gamma_{\mu}, -(1 + 2\chi/c^2)^{1/2}\}, \end{aligned} \right\} \quad (9.286)$$

Поскольку гравитационное поле статично, энергия частицы H , определяемая формулой (10.95), постоянна. Следовательно,

$$H/\dot{m}_0 c^2 \equiv \Gamma(1 + 2\chi/c^2) \equiv \Gamma(1 - \alpha/r) = D \quad (12.43)$$

есть первый интеграл уравнения движения, где D — постоянная интегрирования, равная энергии системы, деленной на $\dot{m}_0 c^2$.

Из (12.42 б) видим, что

$$\theta = \pi/2 \quad (12.44)$$

есть второй интеграл уравнения движения.

Учитывая сферическую симметрию задачи, можем рассматривать любую плоскость как $\theta = \pi/2$, т. е. орбита частицы может лежать в любой плоскости, проходящей через центр. Используя (12.44) и (12.42 в), получаем еще один интеграл

$$\Gamma r^2 \dot{\varphi} = CD, \quad (12.45)$$

где C — другая постоянная интегрирования. Это уравнение, если учесть (12.43), можно переписать в виде

$$r^2 \dot{\varphi} / (1 - \alpha/r) = C. \quad (12.46)$$

Даже для Меркурия — планеты, ближайшей к Солнцу, отношение α/r является очень малой величиной порядка

$$\alpha/r = 2kM/c^2 r \approx 5 \cdot 10^{-8}, \quad (12.47)$$

а для других планет α/r еще меньше. Следовательно, во всех реальных расчетах гравитационное поле можно считать слабым, а поскольку $u^2/c^2 \ll 1$, то в качестве первого приближения для H в (12.43) можно использовать (10.110). Далее, используя (12.39), (12.37) и (12.44) для (12.43) получим в этом приближении

$$(\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2)/2 - kM/r = \text{const}, \quad (12.48)$$

т. е. обычный интеграл энергии в теории Ньютона. В этом же приближении (12.46) сводится к

$$r^2 \dot{\varphi} = C, \quad (12.49)$$

т. е. к закону сохранения углового момента. Орбиты, следующие из (12.48) и (12.49), представляют собой эллипсы

$$r = p \{1 + \varepsilon \cos(\varphi - \varphi_0)\}^{-1}, \quad p = \alpha(1 - \varepsilon^2), \quad (12.50)$$

где ε — эксцентриситет, а

$$r_1 = p/(1 - \varepsilon) = \alpha(1 + \varepsilon), \quad r_2 = p/(1 + \varepsilon) = \alpha(1 - \varepsilon), \quad (12.51)$$

причем r_1 и r_2 соответствуют афелию и перигелию планеты. Для Меркурия имеем

$$\varepsilon = 0,2056, \quad p = 5,786 \cdot 10^{10} \text{ м}. \quad (12.52)$$

В случае сильных полей уравнение (12.48) должно быть заменено уравнением энергии (12.43), и вместо (12.49) мы получим интеграл (12.46).

Чтобы определить орбиту в общем случае, введем величину $\rho = 1/r$ вместо r . Из (12.46) имеем

$$\dot{r} = (dr/d\varphi) \dot{\varphi} = (dr/d\rho) (d\rho/d\varphi) (C/r^2) (1 - \alpha/r) = -(d\rho/d\varphi) C (1 - \alpha\rho). \quad (12.53)$$

С помощью формул (12.39), (12.44), (12.46) и (12.53) для скорости частицы получим формулу

$$u^2 = C^2 (1 - \alpha\rho) \{ (d\rho/d\varphi)^2 + \rho^2 - \alpha\rho^3 \}. \quad (12.54)$$

Использование выражения (12.38) для Γ и возведение в квадрат уравнения энергии (12.43) дает

$$(1 - \alpha\rho)^2 = D^2(1 - \alpha\rho - u^2/c^2). \quad (12.55)$$

Подставляя выражение (12.54) вместо u^2 и решая относительно $(d\rho/d\varphi)^2$, получаем дифференциальное уравнение для орбиты частицы

$$(d\rho/d\varphi)^2 = A + B\rho - \rho^2 + \alpha\rho^3, \quad (12.56)$$

где A и B — константы. С учетом (12.47) последний член в этом уравнении называется малым по сравнению с ρ^2 , и, если пренебречь им, уравнение (12.56) сводится к уравнению, которое можно получить из ньютоновских уравнений (12.48) и (12.49), а именно:

$$(d\rho/d\varphi)^2 = A + B\rho - \rho^2. \quad (12.57)$$

Легко видеть, что (12.50) есть решение этого приближенного уравнения. Максимальное и минимальное значения ρ , соответствующие перигелию и афелию, просто корни квадратного уравнения

$$A + B\rho - \rho^2 = 0. \quad (12.58)$$

Пусть ρ_1 и ρ_2 — два корня, которые должны быть вещественными и положительными в случае, если орбита находится целиком внутри конечной области пространства. Тогда в соответствии с (12.51) имеем

$$\rho_1 = (1 - \varepsilon)/p, \quad \rho_2 = (1 + \varepsilon)/p. \quad (12.59)$$

Уравнение (12.57) можно теперь переписать в форме

$$(d\rho/d\varphi) = \pm \sqrt{\{(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)\}}. \quad (12.60)$$

Откуда для $\varphi_2 - \varphi_1$ при изменении ρ от ρ_1 до ρ_2 получим интеграл

$$\begin{aligned} \varphi_2 - \varphi_1 &= \int_{\rho_1}^{\rho_2} d\rho / \sqrt{\{(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)\}} = \\ &= \arcsin \left\{ \left[\rho - \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2) \right] / \frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1) \right\} \Big|_{\rho_1}^{\rho_2} = \pi \end{aligned} \quad (12.61)$$

в соответствии с решением (12.50).

Возвращаясь к точному уравнению (12.56), видим, что правая часть его — полином третьей степени, и уравнение, получаемое при условии $d\rho/d\varphi = 0$, имеет три корня ρ_1 , ρ_2 , ρ_3 . При малых значениях α два из них, например ρ_1 и ρ_2 , можно примерно приравнять двум корням (12.59) уравнения (12.58), и поскольку

$$\rho_1 + \rho_2 + \rho_3 = 1/\alpha, \quad (12.62)$$

то ρ_3 должен быть очень большим при малом α . Корни ρ_1 и ρ_2 поэтому снова дают минимальный и максимальный параметры орбиты планеты. Вместо (12.60) имеем теперь

$$\begin{aligned} d\rho/d\varphi &= \pm \{ \alpha(\rho - \rho_1)(\rho - \rho_2)(\rho - \rho_3) \}^{1/2} = \\ &= \pm \left[(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho) \{ 1 - \alpha(\rho_1 + \rho_2) \} \{ 1 - \alpha\rho / [1 - \alpha(\rho_1 + \rho_2)] \} \right], \end{aligned} \quad (12.63)$$

где использовано уравнение

$$\alpha\rho_3 = 1 - \alpha(\rho_1 + \rho_2),$$

вытекающее из (12.62). Поскольку $\alpha\rho$ и $\alpha(\rho_1 + \rho_2)$ — малые величины, в первом приближении по α получим

$$d\varphi = \pm \left[d\rho / \{ (\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho) \}^{1/2} \right] \{ 1 + \alpha(\rho_1 + \rho_2)/2 \} \{ 1 + \alpha\rho/2 \},$$

а для $\varphi_2 - \varphi_1$ при изменении ρ от ρ_1 до ρ_2 имеем

$$\varphi_2 - \varphi_1 = \left\{ 1 + \frac{\alpha(\rho_1 + \rho_2)}{2} \right\} \int_{\rho_1}^{\rho_2} \frac{1 + \alpha\rho/2}{\{(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)\}^{1/2}} d\rho = \left\{ 1 + \frac{\alpha(\rho_1 + \rho_2)}{2} \right\} \times$$

$$\times \left[-\frac{\alpha}{2} \{(\rho - \rho_1)(\rho_2 - \rho)\}^{1/2} + \left(1 + \frac{\alpha}{4}(\rho_1 + \rho_2) \right) \arcsin \frac{\rho - \frac{1}{2}(\rho_1 + \rho_2)}{\frac{1}{2}(\rho_2 - \rho_1)} \right]_{\rho_1}^{\rho_2}.$$

Следовательно, различие в φ между двумя последовательными перигелиями составляет

$$2(\varphi_2 - \varphi_1) = 2 \left(1 + \frac{\alpha(\rho_1 + \rho_2)}{2} \right) \left(1 + \frac{\alpha}{4}(\rho_1 + \rho_2) \right) \pi =$$

$$= 2\pi \left\{ 1 + \frac{3\alpha}{4}(\rho_1 + \rho_2) \right\}; \quad (12.64)$$

т. е. отличается от величины 2π , полученной из (12.61), на разность

$$\Delta\varphi = (3\pi\alpha/2)(\rho_1 + \rho_2). \quad (12.65)$$

Этот результат можно интерпретировать как смещение перигелия орбиты при каждом последовательном обороте планеты. Поскольку (12.65) дает очень малое значение смещения, то вместо ρ_1 и ρ_2 можно рассматривать их приближенные значения (12.59). Тогда, используя (12.52), для Меркурия получим смещение перигелия, равное $42,9''$ за столетие. Это значение хорошо согласуется с данными наблюдений, если из них вычесть эффект, обязанный влиянию на орбиту Меркурия других планет [51]. Смещения перигелиев Венеры и Земли еще меньше, так что различие между экспериментальным и теоретическим значениями лежит в пределах экспериментальной погрешности [23]. Сравнительно недавно наблюдения астероида Икар показали, что его движение подчиняется предсказаниям общей теории относительности с погрешностью 20% [228]. В литературе обсуждалась также возможная роль гравитационного квадрупольного момента Солнца, вывод о существовании которого следовал из наблюдений видимой сплюснутости Солнца [59, 61]. Видимо, запуск искусственных планет (спутников Солнца) позволит в будущем провести решающие измерения этих эффектов.

Вместо формы Шварцшильда линейного элемента (11.83) мы могли бы использовать метрику (11.86), соответствующую изотропным координатам (11.85), или любую другую, например метрику Леметра (11.93). В этих координатах уравнения движения будут выглядеть несколько сложнее, но конечный результат — значение для смещения перигелия, естественно, будет то же, что и в (12.65).

§ 12.3. Гравитационное отклонение света

Третий классический эйнштейновский эффект — отклонение луча света гравитационным полем Солнца. Поскольку это поле статично, траектория луча, в соответствии с выводами § 10.5, определяется принципом Ферма, т. е. уравнениями (10.145) и (10.146), которые в частном случае (12.36) принимают вид

$$\frac{D^{(3)}(\gamma_{\mu\nu} \dot{x}^\nu/c^*)}{d\sigma} = \frac{d(g_{\mu\nu} \dot{x}^\nu/c^*)}{d\sigma} - \frac{1}{2} \frac{\partial g_{\nu\lambda}}{\partial x^\mu} \dot{x}^\nu \dot{x}^\lambda = - \frac{1}{c^{*3}} \frac{\partial \chi}{\partial x^\mu}, \quad (12.66)$$

где

$$\dot{x}^\mu = dx^\mu/d\sigma; \quad c^* = c(1 - \alpha/r)^{1/2}; \quad d\sigma = g_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu. \quad (12.67)$$

Как и в предыдущем параграфе, найдем, что

$$\theta = \pi/2; \quad r^2 \dot{\varphi}/c^* = C \quad (12.68)$$

являются интегралами уравнения (12.66) при $\mu = 2, 3$. Далее, из (12.67), (12.36) и (12.68) получим

$$g_{\mu\nu} \dot{x}^\mu \dot{x}^\nu = \dot{r}^2/(1 - \alpha/r) + r^2 \dot{\varphi}^2 = \dot{r}^2/(1 - \alpha/r) + C^2 c^2 (1 - \alpha/r)/r^2 = 1. \quad (12.69)$$

Вводя $\rho = 1/r$ в качестве новой переменной в (12.69), имеем

$$\begin{aligned} \dot{r} = dr/d\sigma = (dr/d\varphi) (d\varphi/d\sigma) &= -(1/\rho^2) (d\rho/d\varphi) C c^* \rho^2 = -C c (1 - \alpha\rho)^{1/2} (d\rho/d\varphi), \\ (d\rho/d\varphi)^2 &= 1/c^2 C^2 - \rho^2 + \alpha\rho^3 \equiv 1/\Delta^2 - \rho^2 + \alpha\rho^3, \end{aligned} \quad (12.70)$$

где положили $\Delta = cC$.

Теперь рассмотрим луч света, движущийся из бесконечности ($\rho = 0$) вдоль направления $\varphi = 0$. Пренебрегая в (12.70) малой величиной $\alpha\rho^3$, легко интегрируем это уравнение. Получаем

$$\varphi = \int_0^\rho \Delta d\rho \{1 - (\Delta\rho)^2\}^{-1/2} = \arcsin(\Delta\rho),$$

т. е.

$$\rho = (1/\Delta) \sin \varphi, \quad r = \Delta/\sin \varphi. \quad (12.71)$$

Если изобразить полученную траекторию на евклидовой плоскости, где координаты ρ и φ имеют смысл обычных полярных координат, то (12.71) будет представлять собой прямую линию, отстоящую от центра $r = 0$ на расстояние Δ при $\varphi = \pi/2$ и уходящую на бесконечность при $\varphi \rightarrow \pi$.

Точное уравнение (12.70) может быть записано в виде

$$d\rho/d\varphi = (1/\Delta^2 - \rho^2 + \alpha\rho^3)^{1/2} = (1/\Delta) (1 - \sigma^2)^{1/2}, \quad (12.72)$$

где вместо ρ мы ввели новую переменную

$$\sigma = \Delta\rho (1 - \alpha\rho)^{1/2}. \quad (12.73)$$

Поскольку $\alpha\rho$ — малая величина, можно записать

$$\sigma = \Delta\rho (1 - \alpha\rho/2); \quad \Delta\rho = \sigma (1 + \alpha\rho/2) = \sigma (1 + \alpha\sigma/2\Delta). \quad (12.74)$$

Следовательно, $\Delta d\rho = d\sigma (1 + \alpha\sigma/\Delta)$, и из (12.72)

$$\varphi = \int_0^\rho \frac{\Delta d\rho}{(1 - \sigma^2)^{1/2}} = \int_0^\sigma \frac{d\sigma (1 + \alpha\sigma/\Delta)}{(1 - \sigma^2)^{1/2}} = \arcsin \sigma - \frac{\alpha}{\Delta} (1 - \sigma^2)^{1/2} + \frac{\alpha}{\Delta}. \quad (12.75)$$

В соответствии с (12.72) максимальное значение ρ_m , т. е. наибольшее приближение к Солнцу, соответствует $\sigma = 1$. Соответствующее значение φ при этом равно

$$\varphi_m = \pi/2 + \alpha/\Delta. \quad (12.76)$$

Следовательно, в изображении на евклидовой плоскости траектория будет представлять теперь слегка искривленную линию с отклонением:

$$\psi = 2(\varphi_m - \pi/2) = 2\alpha/\Delta. \quad (12.77)$$

Это — отклонение луча света, наблюдаемое с Земли, которая считается бесконечно далекой от Солнца. Из (12.74) находим соответствующее максимальное значение ρ_m

$$\rho_m = (1/\Delta) (1 + \alpha/2\Delta).$$

Пренебрегая членами второго порядка малости по α , из (12.77) имеем

$$\psi = 2\alpha\rho_m = 2\alpha/r_m = 4kM/c^2 r_m. \quad (12.78)$$

Для луча света, касающегося края солнечного диска, из (12.4), (12.5) и (12.78) получим значение отклонения, равное 1,75. Этот эффект, предсказанный Эйнштейном, был проверен экспериментально во время наблюдения полного солнечного затмения по отклонению от звезд света, идущего вблизи Солнца. Соответствие между формулой Эйнштейна (12.77) и данными наблюдений казалось удовлетворительным [40, 41], но поскольку лишь небольшое число наблюдений указывают на эффект, лежащий как раз в границах экспериментальных погрешностей, то нельзя придавать слишком большое значение количественному согласию. В частности, нельзя проверить $(1/r)$ -зависимость эффекта отклонения. С другой стороны, можно с определенностью утверждать, что отклонение света не равно минимальному значению $0,87''$, которое получается, если пренебречь искривлением физического пространства вблизи Солнца.

Отклонение света (12.77) частично обязано изменению скорости света c^* , а частично — искривлению физического пространства — времени. Если считать пространственную геометрию евклидовой, то уравнение (12.69) необходимо заменить уравнением

$$\dot{r}^2 + r^2 \dot{\varphi}^2 = 1. \quad (12.79)$$

И тогда вместо (12.70) мы получим уравнение

$$(d\rho/d\varphi)^2 = 1/\Delta^2 (1 - \alpha\rho) - \rho^2,$$

интегрирование которого с точностью до первого порядка по α дает отклонение

$$\psi = \alpha/\Delta, \quad (12.80)$$

т. е. только половину значения (12.77).

С другой стороны, если скорость света считать постоянной и равной c , а для описания пространственной геометрии взять метрический тензор $\gamma_{\mu\nu}$ из (12.36) и (12.37), то траектория светового луча будет «прямейшей» линией. В этом случае уравнения (12.68) и (12.70) заменяются уравнениями

$$r^2 \ddot{\varphi} = Cc; \quad (d\rho/d\varphi)^2 = (1 - \alpha\rho)(1/\Delta^2 - \rho^2)$$

соответственно. Интегрирование этих уравнений дает тогда значение отклонения

$$\psi = \alpha/\Delta \quad (12.81)$$

в первом порядке по α . Складывая оба эффекта (12.80) и (12.81), вновь возвращаемся к формуле Эйнштейна (12.77).

§ 12.4. Дальнейшие проверки общей теории относительности

В гл. 10 мы видели, что гравитационное поле в рамках общей теории относительности, в отличие от теории тяготения Ньютона, должно влиять на характер любых физических процессов. Поэтому в принципе должно существовать бесконечное число явлений, по которым можно проверить утверждение ОТО. Практически, однако, влияние гравитационного поля оказывается в большинстве случаев пренебрежимо малым.

Шапиро [227] предложил новый способ проверки ОТО, основанный на измерении запаздывания радарных сигналов в пределах Солнечной системы, вызванного изменением скорости распространения радиолокационного сигнала

$$c^* = c(1 + 2\chi/c^2)^{1/2} \quad (12.82)$$

и неевклидовостью пространства в пределах Солнечной системы. Была предложена идея произвести радиолокацию Меркурия и Венеры и измерить время задержки эхосигнала при различных положениях планет. Если положение планет таково, что сигнал будет проходить вблизи Солнца, то задержка его окажется, в соответствии с выводами ОТО, настолько большой, что измерение ее становится вполне доступным для современной техники.

Расчет этого эффекта наиболее удобно проводить в гармонических координатах (уравнения а, б на стр. 317). Записывая r вместо ρ , в первом порядке по α/r имеем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{\mu\nu} = g_{\mu\nu} = (1 + \alpha/r) \delta_{\mu\nu}; \quad g_{44} = 0; \\ 1 + 2\chi/c^2 = -g_{44} = 1 - \alpha/r. \end{aligned} \right\} \quad (12.83)$$

При подсчете времени запаздывания искривлением траектории можно пренебречь, так как этот эффект дает вклад лишь второго порядка по α/r . При надлежащем выборе осей координат траекторию сигнала от Земли до планеты можно записать в виде

$$y = \Delta = \text{const}, \quad z = 0, \quad r = (x^2 + y^2)^{1/2}, \quad (12.84)$$

где Δ — наименьшее расстояние от луча до Солнца. (Это Δ отличается от Δ в § 12.3 на $\alpha/2 = 1,5 \cdot 10^3$ м вследствие отличия r в координатах Шварцшильда от r в гармонических координатах). В соответствии с (12.83) для бесконечно малого участка траектории (12.84) имеем

$$d\sigma = (\gamma_{\mu\nu} dx^\mu dx^\nu)^{1/2} = (1 + \alpha/r)^{1/2} dx = dx (1 + \alpha/2r) \quad (12.85)$$

и для соответствующего координатного времени пролета этого участка

$$dt = d\sigma/c^* = dx (1 + \alpha/2r)/c (1 - \alpha/r)^{1/2} = (dx/c) (1 + \alpha/r). \quad (12.86)$$

Обозначим через (x_e, t_e) координаты (x, t) сигнала, испускаемого с Земли, а через (x_p, t_p) — координаты принимаемого сигнала. Если пренебречь движением Земли за время от испускания до приема сигнала, то для полной задержки сигнала ($x_e < x_p$) получим значение

$$t = 2 \int_{t_e}^{t_p} dt = 2(x_p - x_e)/c + (2\alpha/c) \int_{x_e}^{x_p} dx/(x^2 + \Delta^2)^{1/2}.$$

Следовательно,

$$t = t_N + (2\alpha/c) \ln \{ [x_p + (x_p^2 + \Delta^2)^{1/2}] / [x_e + (x_e^2 + \Delta^2)^{1/2}] \}, \quad (12.87)$$

где

$$t_N = 2(x_p - x_e)/c \quad (12.88)$$

есть время запаздывания в инерциальной системе с лоренцевыми координатами (x, y, z, ct) . Если пренебречь неевклидовостью пространства и учесть только изменение c^* , можно получить «избыточную задержку»

$$\Delta t \equiv t - t_N = (\alpha/c) \ln \{ [x_p + (x_p^2 + \Delta^2)^{1/2}] / [x_e + (x_e^2 + \Delta^2)^{1/2}] \}, \quad (12.89)$$

т. е. только половину значения (12.87), требуемого общей теорией относительности.

В нашем случае координатное время t равно мировому времени (см. § 10.3), которое можно отождествить с сидерическим временем Солнечной системы. Экспериментально время измеряется с помощью атомных часов, которые считаются стандартными вследствие их высокой точности [168]. В соответствии с (8.115) отсчет по часам, находящимся на Земле в состоянии покоя, равен

$$\tau = t (1 + 2\chi/c^2 - u_e^2/c^2)^{1/2} = t (1 - \alpha/2r_e - u_e^2/2c^2)^{1/2}, \quad (12.90)$$

где $r_e = (x_e^2 + \Delta^2)^{1/2}$, а $u_e \approx 3 \cdot 10^4$ м/сек — орбитальная скорость Земли. (Влиянием гравитационного поля Земли пренебрегаем.) Из (12.87) и (12.90) с точностью до величин первого порядка по α/r и u_e^2/c^2 получаем

$$\Delta t \equiv \tau - t_N = (2\alpha/c) \ln \left\{ \frac{|x_p + (x_p^2 + \Delta^2)^{1/2}|}{|x_e + (x_e^2 + \Delta^2)^{1/2}|} \right\} - (\alpha/c) (x_p - x_e) / (x_e^2 + \Delta^2)^{1/2} - (u_e^2/c^2) (x_p - x_e) / c. \quad (12.91)$$

Если планета находится вблизи верхнего соединения, то

$$x_e = -|x_e|, \quad x_p = |x_p|, \quad \Delta^2 \ll (x_e^2, x_p^2), \quad (12.92)$$

и (12.91) сводится к уравнению

$$\Delta t = (2\alpha/c) \ln [4 |x_e x_p| / \Delta^2] - (\alpha/c) (|x_e| + |x_p|) / x_e - (u_e^2/c^2) (|x_e| + |x_p|) / c. \quad (12.93)$$

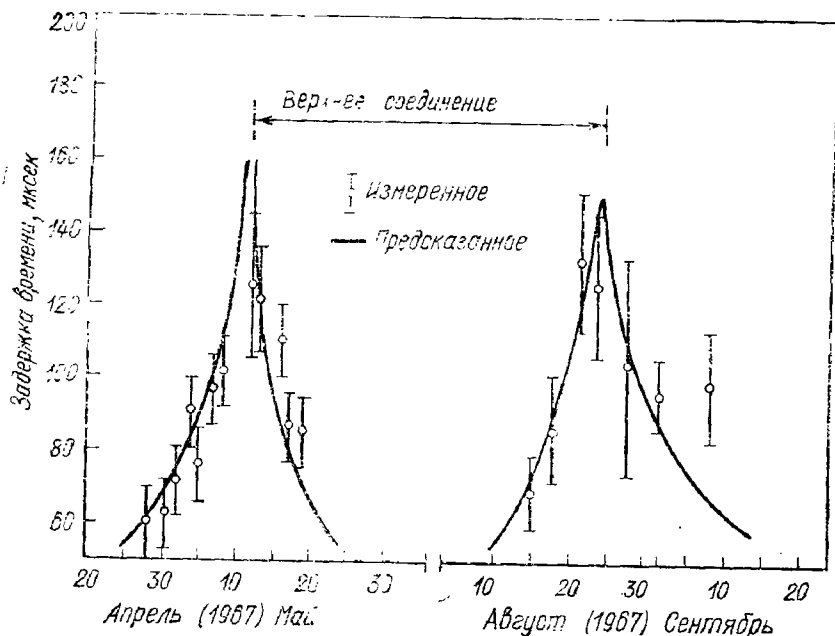


Рис. 19.

Чтобы получить порядок величины запаздывания, можно в (12.93) положить $|x_e|$ и $|x_p|$ равными обычным астрономическим радиусам орбит Земли и планеты соответственно. В случае Меркурия находим, что последние два члена в правой части (12.93) имеют порядок 10^{-5} , а поскольку $\Delta^2 \ll 4 |x_e x_p|$, ими можно пренебречь по сравнению с первым членом. Например, если Δ — двойной радиус Солнца (12.5), то для запаздывания получим

$$\Delta t = 1,6 \cdot 10^{-4} \text{ сек.} \quad (12.94)$$

Для всех других положений, удовлетворяющих (12.92), Δt значительно меньше (12.94).

Запаздывание времени t можно вычислить, используя гармонические координаты. Если вычисления выполняются в первоначальных координатах Шварцшильда, то для t получается выражение, отличающееся от (12.87) [227, 228], однако лишь потому, что координаты r и x в двух координатных системах отличаются друг от друга в соответствии с уравнением (а) на стр. 317 на величину порядка α . Но основной логарифмический член одинаков в обоих выражениях, а остальные члены в выражении для Δt в координатах Шварцшильда того же типа и того же порядка, что и два других члена в правой части (12.93). Следовательно, полагая новые $|x_e|$ и $|x_p|$ равными астрономическим

оператор градиента. Аналогично мы можем определить ковариантное дифференцирование стандартных тензорных полей, дивергенцию и ротор стандартных векторов, параллельный перенос стандартных векторов и т. д. В упражнении 1 этого параграфа приведены соответствующие формулы. Здесь мы рассмотрим лишь стандартный аналог абсолютной производной вектора. Как и в § 9.8, введем векторное поле $A_i(\lambda)$, определенное на кривой $x^i = x^i(\lambda)$ с инвариантным параметром λ . Абсолютная производная от A_i есть вектор (9.133):

$$DA_i/d\lambda = dA_i/d\lambda - A^t \Gamma_{t, ik} U^k; \quad U^k = dx^k/d\lambda. \quad (9.346)$$

Соответствующий сопряженный стандартный вектор

$$\begin{aligned} \overline{DA}_i/d\lambda &\equiv \overline{D}\overline{A}_i/d\lambda = \Pi_{[i]}^r (dA_r/d\lambda - A^t \Gamma_{t, rs} U^s) = \\ &= d\overline{A}_i/d\lambda - A^t (g_{tr} \partial_s \Pi_{[i]}^r + \Pi_{[i]}^r \Gamma_{t, rs}) U^s \end{aligned} \quad (9.347)$$

можно представить в форме

$$\overline{D}\overline{A}_i/d\lambda = d\overline{A}_i/d\lambda - \overline{A}^t \tilde{\Gamma}_{t, ik} \overline{U}^k, \quad (9.348)$$

где

$$\tilde{\Gamma}_{t, ik} = \bar{g}_{im} \Pi_r^{[m]} \Pi_{[k]}^s \partial_s \Pi_{[i]}^r + \Pi_{[i]}^t \Pi_{[i]}^r \Pi_{[k]}^s \Gamma_{t, rs}. \quad (9.349)$$

В стандартном векторном анализе величины $\tilde{\Gamma}_{t, ik}$ играют ту же роль, что и символы Кристоффеля в обычном векторном анализе. В соответствии с (9.77) символы Кристоффеля равны

$$\Gamma_{t, rs} = (\partial_s g_{tr} + \partial_r g_{ts} - \partial_t g_{rs})/2. \quad (9.350)$$

Поэтому из (9.335), (9.321) и (9.304) имеем

$$\begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{t, ik} &= \bar{\Gamma}_{t, ik} - (1/2) \{ g_{tr} \bar{\partial}_k (\Pi_{[i]}^t \Pi_{[i]}^r) + g_{ts} \bar{\partial}_i (\Pi_{[i]}^t \Pi_{[k]}^s) - \\ &- g_{rs} \bar{\partial}_l (\Pi_{[i]}^r \Pi_{[k]}^s) \} - \bar{g}_{im} \Pi_{[i]}^r \bar{\partial}_k \Pi_r^{[m]}, \end{aligned} \quad (9.351)$$

где

$$\bar{\Gamma}_{t, ik} = (\bar{\partial}_k \bar{g}_{li} + \bar{\partial}_l \bar{g}_{ik} - \bar{\partial}_i \bar{g}_{lk})/2 = \bar{\Gamma}_{lki} \quad (9.352)$$

получаются из символов Кристоффеля расстановкой черточек над всеми величинами в (9.350). Кроме того, снова используя (9.321), (9.304) и (9.340), последний член в фигурных скобках формулы (9.351) представим в виде

$$\begin{aligned} g_{rs} \bar{\partial}_l (\Pi_{[i]}^r \Pi_{[k]}^s) &= g_{rs} \Pi_{[i]}^r \bar{\partial}_l \Pi_{[k]}^s + g_{rs} \Pi_{[k]}^s \bar{\partial}_l \Pi_{[i]}^r = \\ &= \bar{g}_{im} \Pi_{[i]}^s \bar{\partial}_l \Pi_{[k]}^m + \bar{g}_{km} \Pi_r^{[m]} \bar{\partial}_l \Pi_{[i]}^r = -(\bar{g}_{im} \Pi_{[k]}^m + \bar{g}_{km} \Pi_{[i]}^m) \bar{\partial}_l \Pi_r^{[m]} = \\ &= (\bar{g}_{ia} \Pi_{[k]}^a + \bar{g}_{ka} \Pi_{[i]}^a) \bar{\partial}_l \Gamma_r. \end{aligned}$$

Аналогичные выражения получаются и для других членов в фигурных скобках этой формулы. Подставляя эти выражения в (9.351), имеем

$$\tilde{\Gamma}_{t, ik} = \bar{\Gamma}_{t, ik} + (\hat{\Omega}_{ti} \hat{\Gamma}_k + \hat{\Omega}_{tk} \hat{\Gamma}_i - \hat{\Omega}_{ik} \hat{\Gamma}_t)/c, \quad (9.353)$$

где снова использовали (9.340) и (9.337), (9.339).

Таким образом, величины $\tilde{\Gamma}_{i, kl}$, заменяющие символы Кристоффеля в стандартном тензорном анализе, имеют вид

$$\left. \begin{aligned} \tilde{\Gamma}_{i, kl} &= \bar{\Gamma}_{i, kl} + \hat{\Omega}_{ikl}; \\ \hat{\Omega}_{ikl} &\equiv (\hat{\Omega}_{ih} \hat{\Gamma}_l + \hat{\Omega}_{il} \hat{\Gamma}_k - \hat{\Omega}_{hl} \hat{\Gamma}_i)/c = -\hat{\Omega}_{kil}. \end{aligned} \right\} \quad (9.354)$$

Здесь $\hat{\Omega}_{ik}$ — ограниченный стандартный тензор (9.341) с компонентами (9.343) — (9.345). По аналогии с последней формулой (9.78)

$$\tilde{\Gamma}_{i, kl} + \tilde{\Gamma}_{k, il} = \bar{\Gamma}_{i, kl} + \bar{\Gamma}_{k, il} = \bar{\partial}_l \bar{g}_{ik}. \quad (9.355)$$

При $\tau = 0$ пространственные части $e_{\nu}^{\mu}(0)$ всех тетрад $e_{(\nu)}^i(0)$ (12.99) являются тремя 3-векторами, лежащими вдоль направлений трех пространственных координатных осей. Однако спустя один оборот, т. е. при $t = 2\pi/\omega$ и $\tau = 2\pi/\Gamma\omega$, величины $e_{(\nu)}^{\mu}(2\pi/\Gamma\omega)$ уже не тождественны трем векторам $e_{(\nu)}^{\mu}(0)$, что и является физическим содержанием эффекта, открытого Фоккером.

Введем систему координат \hat{S} , определенную в (9.155), которая в нашем случае является свободно падающей локально лоренцевой системой $\hat{S} : (\hat{x}^{\mu}, \hat{c}^i)$ с гироскопом, помещенным в начале координат $\hat{x}^{\mu} = 0$, соответствующей локально инерциальной системе \hat{R} . Последняя может быть реализована с помощью спутника, несущего гироскоп по круговой орбите вокруг центрального тела. Ориентация гироскопа постоянна по отношению к пространственным координатным осям \hat{R} , которые, однако, прецессируют по отношению к внешнему миру. Иначе говоря, направления к «неподвижным» звездам должны прецессировать по отношению к осям \hat{R} .

В системе отсчета R , соответствующей шварцшильдовым координатам S , гироскоп описывает круговую орбиту. Обозначим через p_0 точку на орбите, которую гироскоп проходит в момент $t = \tau = 0$. Световой луч от определенных фиксированных звезд, проходящий в p_0 , описывается волновым 4-вектором (10.165) с компонентами $K_i(p_0) = K_i(0)$ в S . В момент времени $t = \Gamma\tau$ гироскоп проходит через точку p , в которой тот же волновой вектор имеет компоненты $K_i(p) = K_i(\tau)$, в общем случае отличные от $K_i(0)$. Однако в моменты времени

$$t = t_n \equiv n2\pi/\omega, \quad \tau = \tau_n \equiv n2\pi/\Gamma\omega, \quad (12.100)$$

соответствующие n полным оборотам гироскопа, когда он снова оказывается в p_0 , в статической системе S

$$K_i(\tau_n) = K_i(0). \quad (12.101)$$

С другой стороны, компоненты $K_i(\tau)$ волнового вектора в системе \hat{S} уже не принимают первоначальных значений после n оборотов. В соответствии с (9.159) имеем для них

$$\hat{K}_k(\tau) = \tilde{\alpha}_k^i K_i(\tau) = e_{(k)}^i(\tau) K_i(\tau). \quad (12.102)$$

Подставляя выражение (12.99) для $e_{(k)}^i(\tau)$ при $\tau = \tau_n$ и $\tau = 0$ в формуле (12.102) и используя (12.101), легко получаем соотношения между $\hat{K}_k(\tau_n)$ и $\hat{K}_k(0)$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{K}_1(\tau_n) &= \hat{K}_1(0) \cos n\vartheta + \hat{K}_3(0) \sin n\vartheta; \\ \hat{K}_3(\tau_n) &= -\hat{K}_1(0) \sin n\vartheta + \hat{K}_3(0) \cos n\vartheta; \\ \hat{K}_2(\tau_n) &= \hat{K}_2(0), \quad \hat{K}_4(\tau_n) = \hat{K}_4(0); \end{aligned} \right\} \quad (12.103)$$

$$\vartheta = 2\pi(1 - \Gamma^{-1}) > 0. \quad (12.104)$$

Мы использовали при этом (12.100), из которого следуют выражения

$$\begin{aligned} \omega\tau_n &= n2\pi/\Gamma = n2\pi - n\vartheta; \\ \cos \omega\tau_n &= \cos n\vartheta; \quad \sin \omega\tau_n = -\sin n\vartheta. \end{aligned} \quad (12.105)$$

Поскольку система \hat{S} лоренцева в точке, где помещен гироскоп, \hat{K}_i тождествен волновому вектору \hat{e}_i , а из (10.188) находим выражение для единичного вектора \hat{e}_i , определяющего направление луча в \hat{S} :

$$\hat{e}_{\mu}(\tau) = -\hat{K}_{\mu}(\tau)/\hat{K}_4. \quad (12.106)$$

Итак, формулы (12.103) ведут к следующим соотношениям между направлением луча света $\hat{e}_{\mu}(\tau_n)$ и первоначальным направлением $\hat{e}_{\mu}(0)$:

$$\left. \begin{aligned} \hat{e}_1(\tau_n) &= \hat{e}_1(0) \cos n\vartheta + \hat{e}_3 \sin n\vartheta; \\ \hat{e}_3(\tau_n) &= -\hat{e}_1(0) \sin n\vartheta + \hat{e}_3 \cos n\vartheta; \\ \hat{e}_2(\tau_n) &= \hat{e}_2(0). \end{aligned} \right\} \quad (12.107)$$

Следовательно, после n оборотов гироскопа внешний мир (направление на «неподвижные» звезды) кажется повернутым на угол $n\vartheta$ относительно оси x_2 . Направление прецессии идет от оси x_3 к оси x_1 . Конечно, этот эффект можно выразить как прецессию

гироскопа в противоположном направлении, т. е. в направлении вращения по орбите. Эта прецессия Фоккера, таким образом, имеет направление, противоположное прецессии Томаса [см. (2.66)].

Угол прецессии за один оборот есть величина первого порядка по α/r ,

$$\vartheta = 2\pi \{1 - (1 - 3\alpha/2r)^{1/2}\} = 3\pi\alpha/2r. \quad (12.108)$$

Если гироскоп укреплен на искусственном спутнике, не слишком удаленном от Земли, то величина прецессии Томаса будет порядка

$$\psi \equiv n\vartheta \approx 7''/\text{год}. \quad (12.109)$$

Начиная с момента опубликования статьи Шиффа [218], в США была развернута интенсивная программа исследований с целью обнаружения этого эффекта в недалеком будущем.

Вопреки значительному прогрессу в экспериментальных исследованиях, достигнутому в последнее десятилетие, прямых проверок ОТО все еще очень мало. Здесь уместно напомнить, что общая теория относительности является не только естественным, но и убедительным обобщением хорошо подтвержденной экспериментально специальной теории относительности. Кроме того, поскольку теория Эйнштейна содержит теорию тяготения Ньютона в качестве первого приближения, все многочисленные астрономические наблюдения, согласующиеся, конечно, с теорией Ньютона, в некотором смысле мы можем рассматривать уже как косвенное доказательство справедливости общей теории относительности. Тот факт, что различия между этими двумя теориями выступают лишь как малые поправки в физике Солнечной системы, говорит о хорошей применимости теории Ньютона в этой области. Однако в космологических вопросах, когда рассматривается структура и движение больших частей Вселенной, мы встретимся уже со значительными расхождениями между ними и выбор между теориями станет более необходимым. Учитывая, однако, внутреннюю согласованность и общность исходных постулатов теории Эйнштейна, следует ожидать, что она является более надежной базой в решении трудных космологических проблем.

§ 12.5. Космологические модели

Давно известно [189, 223, 224], что теория гравитации Ньютона встречается с принципиальными трудностями при попытках объяснения структуры Вселенной в целом. Поскольку общая теория относительности, как ожидалось, должна приводить к результатам, существенно отличающимся от выводов теории Ньютона именно на космологических расстояниях, то совершенно естественно исследовать все новые возможности, которые открывает в космологии общерелятивистская теория. Эта сторона теории впервые была исследована Эйнштейном [76, 79] сразу же после установления основных уравнений теории, и с тех пор релятивистская космология стала предметом исследования многих авторов. Мы не будем пытаться дать детальный обзор этих исследований, а сосредоточим внимание на анализе классических космологических моделей, предложенных Эйнштейном [76], де Ситтером [233, 234] и А. А. Фридманом [102].

Все эти модели основаны на предположении, что пространство—время Вселенной с глобальной точки зрения однородно и изотропно. Конечно, материя распределена не однородно: она в основном заключена в звездах, которые имеют тенденцию образовывать галактики. Однако во всей области пространства, которая доступна наблюдениям в современные телескопы, все эти скопления материи распределены по пространству довольно равномерно, поэтому самое простое предположение о материи Вселенной как об однородно распределенной идеальной жидкости оказывается в то же время и хорошим отправным пунктом для приближения к действительности. В моделях Эйнштейна и де Ситтера Вселенная, кроме того, считается статической системой, т. е. возможно введение сопутствующей системы координат

$x^i = (r, \theta, \varphi, ct)$, в которой линейный элемент имеет статическую и сферически симметричную форму (11.63)

$$ds^2 = a(r) dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - b(r) c^2 dt^2, \quad (12.110)$$

где a и b — функции только от r . С учетом принятой однородности Вселенной можно говорить, что любая точка пространства может быть взята в качестве начала $r = 0$ пространственной системы координат.

Функции $a(r)$ и $b(r)$ связаны с собственной плотностью массы $\dot{\mu}^0$ и собственным давлением \dot{p} уравнениями (11.100) и (11.98) для идеальной жидкости

$$d\dot{p}/dr + (\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p}) b'/2b = 0; \quad (12.111)$$

$$b'/abr - (1/r^2)(1 - 1/a) + \lambda = \kappa \dot{p}; \quad (12.112a)$$

$$a'/a^2 r + (1/r^2)(1 - 1/a) - \lambda = \kappa \dot{\mu}^0/c^2. \quad (12.112b)$$

Здесь \dot{p} и $\dot{\mu}^0$ — постоянные величины вследствие предположения об однородности пространства. Будем искать возможные регулярные решения уравнений.

Поскольку $d\dot{p}/dr = 0$, (12.111) сводится к уравнению

$$(\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p}) b' = 0, \quad (12.113)$$

из которого следует, что либо

$$b' = 0, \quad (12.114)$$

либо

$$\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p} = 0. \quad (12.115)$$

Эти альтернативные условия приводят соответственно к решениям Эйнштейна и де Ситтера [258].

§ 12.6. Вселенная Эйнштейна

Условие (12.114) требует, чтобы величина b была постоянной и при надлежащем выборе временной координаты t была равна

$$b = 1. \quad (12.116)$$

Подставляя (12.114) в (12.112 а) и решая это уравнение относительно a , получаем

$$a = 1/[1 - (\lambda - \kappa \dot{p}) r^2] = 1/(1 - r^2/R^2), \quad (12.117)$$

где введена новая константа R с помощью соотношения

$$1/R^2 = \lambda - \kappa \dot{p}. \quad (12.118)$$

Далее, учитывая (12.117) и (12.112 б), получаем

$$\lambda = \kappa (\dot{\mu}^0 c^2 + 3\dot{p})/2, \quad (12.119)$$

откуда следует соотношение

$$1/R^2 = \kappa (\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p})/2. \quad (12.120)$$

Плотность $\dot{\mu}^0$ существенно положительна, и даже допуская, что силы натяжения в жидкости стремятся к отрицательному значению \dot{p} , при разумных свойствах материи модуль \dot{p} не должен превышать $\dot{\mu}^0 c^2$. Следовательно, константы λ и $1/R^2$ должны быть также положительны, а R будет реальной длиной.

ВЛИЯНИЕ ГРАВИТАЦИОННЫХ ПОЛЕЙ НА ФИЗИЧЕСКИЕ ЯВЛЕНИЯ

§ 10.1. Фундаментальные уравнения механики точки

Теперь с помощью формализма тензорного исчисления и принципа эквивалентности, сформулированного в § 9.6, можно однозначно обобщить все физические законы СТО. Поскольку мы полагаем, что тензорные уравнения СТО выполняются в локальной инерциальной системе с локальными лоренцевыми пространственно-временными координатами, то проблема отыскания фундаментальных уравнений физики (например, механики и электродинамики) в присутствии гравитационных полей сводится к чисто геометрической задаче в 4-пространстве.

Рассмотрим сначала движение частицы с постоянной собственной массой m_0 в заданном внешнем гравитационном поле под действием негравитационной 4-силы F_i . Это означает, что мы пренебрегаем влиянием (обычно малым) собственного гравитационного поля частицы и что g_{ik} можно рассматривать как известную функцию от координат x^i . Кроме того, поскольку m_0 считается постоянной, F_i удовлетворяет ковариантному уравнению

$$F_i U^i = 0, \quad (10.1)$$

соответствующему соотношению (4.57) СТО. Здесь

$$U^i = dx^i/d\tau \quad (10.2)$$

— 4-скорость частицы, а τ — собственное время.

Тогда мировая линия частицы описывается ковариантным уравнением

$$DP_i/d\tau = F_i. \quad (10.3)$$

Здесь

$$P_i = \dot{m}_0 U_i; \quad P^i = \dot{m}_0 U^i \quad (10.4)$$

— 4-импульс, а $DP_i/d\tau$ — абсолютная производная (9.133) при $a_i = P_i$ и $\lambda = \tau$.

Поскольку P^i пропорционален U^i , $DP_i/d\tau$ с учетом (9.78) приводится к виду

$$\begin{aligned} DP_i/d\tau &= dP_i/d\tau - (1/2) P^l (\Gamma_{l, ik} + \Gamma_{h, il}) U^k = \\ &= dP_i/d\tau - (1/2) g_{hl, i} U^h P^l. \end{aligned} \quad (10.5)$$

Из (10.4) и (9.40) следует, что P_i удовлетворяет соотношению

$$P_i P^i = -\dot{m}_0^2 c^2. \quad (10.6)$$

В локально лоренцевой системе координат уравнение (10.3) совпадает с частнорелятивистским уравнением (4.55) в соответствии с принципом эквивалентности.

В § 9.16 было показано, что любое векторное соотношение эквивалентно соответствующему соотношению между сопряженными стандартными векто-

евклидовом пространстве (которое, конечно, не имеет ничего общего с четырехмерным пространственно-временным континуумом). В самом деле, положив

$$x^0 = R(1 - r^2/R^2)^{1/2}; \quad (12.130)$$

$$\left. \begin{aligned} x^1 = x &= r \sin \theta \cos \varphi; \\ x^2 = y &= r \sin \theta \sin \varphi; \\ x^3 = z &= r \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (12.131)$$

получим

$$(x^0)^2 + (x^1)^2 + (x^2)^2 + (x^3)^2 = R^2, \quad (12.132)$$

и линейный элемент (12.129) в этом случае принимает вид

$$d\sigma^2 = (dx^0)^2 + (dx^1)^2 + (dx^2)^2 + (dx^3)^2. \quad (12.133)$$

Форм-инвариантность (12.132) и (12.133) относительно произвольных вращений в R_4 иллюстрирует однородный и изотропный характер трехмерного пространства (12.132) постоянной кривизны $K = 1/R^2$. Следовательно, физическое пространство в рамках модели Эйнштейна является замкнутым и конечным, но не ограниченным.

Вводя полярные координаты ψ, θ, φ на сфере (12.132)

$$\left. \begin{aligned} x^0 &= R \cos \psi; \quad r = R \sin \psi; \\ x^1 &= R \sin \psi \sin \theta \cos \varphi; \quad x^2 = R \sin \psi \sin \theta \sin \varphi; \\ x^3 &= R \sin \psi \cos \theta, \end{aligned} \right\} \quad (12.134)$$

линейный элемент (12.129) или (12.193) с (12.132) преобразуем к виду

$$d\sigma^2 = R^2 (d\psi^2 + \sin^2 \psi d\theta^2 + \sin^2 \psi \sin^2 \theta d\varphi^2). \quad (12.135)$$

Каждой точке на гиперсфере соответствует свой набор (ψ, θ, φ) в интервале

$$0 \leq \psi < \pi, \quad 0 \leq \theta < \pi, \quad 0 \leq \varphi < 2\pi. \quad (12.136)$$

Рассмотрим сферу $r = R \sin \psi = \text{const}$ с центром в 3-пространстве (12.129), (12.135). Если в (12.135) положим $d\theta = d\varphi = 0$ и проинтегрируем, получим стандартную длину σ ее радиуса. Итак,

$$\sigma = R\psi. \quad (12.137)$$

Расстояние до противоположной точки $\psi = \pi$ равно

$$L = \pi R, \quad (12.138)$$

а полное расстояние по большому кругу замкнутой модели Эйнштейна есть $2\pi R$. Детерминант $\gamma = |\gamma_{\mu\nu}|$, соответствующий линейному элементу (12.135), равен $\gamma = R^6 \sin^4 \psi \sin^2 \theta$, а полный объем и собственная масса Вселенной, если учесть (10.238), соответственно равны

$$V = \int_0^\pi d\psi \int_0^\pi d\theta \int_0^{2\pi} R^3 \sin^2 \psi \sin \theta d\varphi = 2\pi^2 R^3; \quad (12.139)$$

$$M_0 = \dot{\mu}^0 V = 2\pi^2 R^3 \dot{\mu}^0. \quad (12.140)$$

Из оценки величины левой части (11.43), принимая во внимание среднее значение $L/2 = \pi R/2$, получим

$$M \kappa^2 / (4\pi L/2) = R^2 \kappa \dot{\mu}^0 c^2 \approx 1, \quad (12.141)$$

если, кроме того, учтем (12.121) и (12.123). Соотношение (12.141) согласуется с (11.43), т. е. тем самым подтверждаются рассуждения § 11.3 о природе центробежных и кориолисовых сил.

Поскольку система координат S , соответствующая линейному элементу (12.125), есть статическая сопутствующая гауссова система, в которой

$$\gamma_{\mu} = \chi = 0, \quad (12.142)$$

для частоты света, излученного источником, неподвижным относительно S , из (10.209), (10.212) и (10.220) получим

$$\mathbf{v} = \hat{\mathbf{v}}, \quad \Delta \hat{\mathbf{v}}_0 / \hat{\mathbf{v}}_0 = \Delta v_0 / v_0 = 0. \quad (12.143)$$

Таким образом, кроме малого эффекта Доплера, обязанного собственным движениям удаленных небесных тел, мы не должны ожидать какого-либо иного систематического сдвига спектральных линий от этих тел. В действительности же, из работ Хаббла [116], Хаббла и Хьюмаса [118] следует наличие вполне определенного красного смещения спектральных линий, причем оно возрастает линейно с расстоянием. Это значит, что космологическая модель Эйнштейна, несмотря на ряд ее положительных особенностей, дает лишь приближенное описание реальной Вселенной.

Введем новую переменную r' преобразованием

$$r = r' \{1 + r'^2 / 4R^2\}^{-1}, \quad (12.144)$$

тогда линейный элемент (12.129) можно привести к изотропному виду, соответствующему (11.86) решению Шварцшильда. Опуская штрихи, т. е. подставляя в (12.129) выражение

$$r \rightarrow r \{1 + r^2 / 4R^2\}^{-1}, \quad \theta \rightarrow \theta, \quad \varphi \rightarrow \varphi, \quad (12.145)$$

получаем

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{(1 + r^2 / 4R^2)^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + r^2 / 4R^2)^2}, \quad (12.146)$$

где (x, y, z) связаны с новыми переменными (r, θ, φ) уравнениями вида (12.131). Далее, подставляя $r \rightarrow Rr$, $x \rightarrow Rx$, $y \rightarrow Ry$, $z \rightarrow Rz$, приводим линейный элемент к виду

$$d\sigma^2 = R^2 \frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{(1 + r^2 / 4)^2} = R^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + r^2 / 4)^2}. \quad (12.147)$$

Уравнения (12.129) и (12.133) вместе с (12.132), (12.135) и (12.146) являются различными формами линейного элемента в пространстве постоянной кривизны $1/R^2$. Для $R \rightarrow \infty$ они включают и случай евклидова пространства. Однако они не исчерпывают возможности описания однородной и изотропной Вселенной. Она может быть описана также пространством постоянной отрицательной кривизны $K = -1/R^2$. Метрику такого пространства можно получить из (12.129) и (12.146) заменой $R^2 \rightarrow -R^2$, а из (12.135) — заменой тригонометрических функций $\cos \psi$, $\sin \psi$ соответствующими гиперболическими функциями. В этом случае переменная ψ пробегает все значения в интервале $0 \leq \psi < \infty$, т. е. пространство постоянной отрицательной кривизны является открытым, в противоположность закрытому сферическому пространству.

Линейный элемент пространства постоянной кривизны можно записать в обобщенном виде для (12.146) и (12.147) соответственно

$$d\sigma^2 = \frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{(1 + \zeta r^2 / 4R^2)^2} = \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + \zeta r^2 / 4R^2)^2}; \quad (12.148)$$

$$d\sigma^2 = R^2 \frac{dr^2 + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2)}{(1 + \zeta r^2 / 4R^2)^2} = R^2 \frac{dx^2 + dy^2 + dz^2}{(1 + \zeta r^2 / 4)^2}, \quad (12.149)$$

где

$$\zeta = (+1, 0, -1). \quad (12.150)$$

$$\kappa = \zeta/R^2 \quad (12.151)$$

может быть положительной, отрицательной или равной нулю в зависимости от значения ζ в (12.150). Но только значение $\zeta = +1$ совместимо с уравнениями поля в статическом случае. Это соответствует космологической модели Эйнштейна, для которой R^2 определяется формулой (12.120).

§ 12.7. Вселенная де Ситтера

Кроме решения, соответствующего модели Эйнштейна [условие (12.114)], имеется другое статическое, однородное и изотропное решение общих уравнений поля, подчиняющееся условию (12.115), т. е.

$$\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p} = 0. \quad (12.152)$$

Суммируя уравнения (12.112 а) и (12.112 б), получаем

$$(ab)' = \kappa (\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p}) a^2 b r = 0, \text{ или } ab = \text{const.}$$

Тривиальным изменением масштаба временной координаты эта константа всегда может быть сведена к единице, т. е.

$$ab = 1. \quad (12.153)$$

Вводя $y = 1/a$, уравнение (12.112б) перепишем в виде $(yr)' \equiv y'r + y = +1 - (\lambda + \kappa \dot{\mu}^0 c^2) r^2$ и, интегрируя его, получаем

$$yr = r - (\lambda + \kappa \dot{\mu}^0 c^2)/3 r^3 + \text{const.} \quad (12.154)$$

Поскольку y регулярно при $r = 0$, константа в правой части (12.154) должна быть равна нулю. Тогда из (12.153) имеем

$$b = 1/a = y = 1 - r^2/R^2, \quad (12.155)$$

где мы положили

$$1/R^2 = (\lambda + \kappa \dot{\mu}^0 c^2)/3. \quad (12.156)$$

Используя (12.155) в (12.110), получаем затем линейный элемент де Ситтера

$$ds^2 = dr^2 (1 - r^2/R^2)^{-1} + r^2 (d\theta^2 + \sin^2 \theta d\varphi^2) - (1 - r^2/R^2) c^2 dt^2. \quad (12.157)$$

Компоненты пространственного метрического тензора такие же, как и в модели Эйнштейна (12.127), по крайней мере в том случае, когда λ положителен. Однако динамические потенциалы теперь не все равны нулю, и мы имеем

$$\gamma_\mu = 0, \quad \chi = -r^2 c^2 / 2R^2. \quad (12.158)$$

Следовательно, свободная частица испытывает действие гравитационной силы центробежного типа

$$\mathbf{K} = -m \text{grad } \chi = m (rc^2/R^2, 0, 0), \quad (12.159)$$

а это значит, что закон инерции не выполняется для больших пространственных областей модели де Ситтера. Только в областях, где $r^2/R^2 \ll 1$ линейный элемент (12.157) сводится к линейному элементу специальной теории относительности, закон инерции будет приближенно выполняться.

Уравнение движения свободной частицы можно теперь получить из (10.76) и (10.77), используя выражение для гравитационной силы из (12.159). Более удобно, однако, использовать возможность, рассмотренную в § 9.15 и состоящую в исключении динамических потенциалов введением гауссовых координат

на. Это возможно, если ввести новые переменные $r', \theta', \varphi', t'$ с помощью преобразования

$$\begin{aligned} r' &= r(1 - r^2/R^2)^{-1/2} e^{-ct/R}, \quad \theta' = \theta, \quad \varphi' = \varphi, \\ t' &= t + (R/2c) \ln(1 - r^2/R^2). \end{aligned} \quad (12.160)$$

Как было показано Леметром [138] и независимо от него Робертсоном [206], это преобразование ведет к новой записи линейного элемента:

$$ds^2 = e^{2ct'/R} (dr'^2 + r'^2 d\theta'^2 + r'^2 \sin^2 \theta' d\varphi'^2) - c^2 dt'^2, \quad (12.161)$$

которая легко проверяется непосредственными вычислениями. Наконец, определяя новые пространственные координаты (x', y', z') , связанные с $(r', \theta', \varphi', t')$ обычными формулами перехода от сферической системы координат к декартовой, линейный элемент (12.161) можно записать по-иному, т. е.

$$ds^2 = e^{2ct'/R} (dx'^2 + dy'^2 + dz'^2) - c^2 dt'^2. \quad (12.162)$$

Новые координаты (x', y', z', t') принимают все значения в интервале от $-\infty$ до $+\infty$. В отличие от первоначальной системы координат $S: (r, \theta, \varphi, t)$, новая система (S') не является сопутствующей материи μ^0 , рождающей гравитационное поле в мире де Ситтера.

В системе S' мы имеем

$$\left. \begin{aligned} \gamma_{11} = \gamma_{22} = \gamma_{33} = 1/\gamma^{11} = 1/\gamma^{22} = 1/\gamma^{33} = e^{2ct'/R}; \\ \gamma_{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu} = 0 \text{ при } \mu \neq \nu, \\ \gamma_\mu = 0, \quad \chi = 0, \end{aligned} \right\} \quad (12.163)$$

а пространственные символы Кристоффеля все равны нулю.

Таким образом, временная переменная t' указывает время, отсчитываемое стандартными часами, покоящимися относительно S' . В любое фиксированное t' пространственная геометрия евклидова, координаты (x', y', z') являются обычными декартовыми координатами, если не считать общего множителя $e^{2ct'/R}$, а расстояние от начала $r' = 0$ до точки (r', θ', φ') , измеряемое стандартными масштабными стержнями, есть

$$\sigma = e^{ct'/R} r'. \quad (12.164)$$

Гравитационная сила равна нулю, и уравнения движения свободной частицы даются формулами (10.52)

$$D^{(3)} p_\mu/dt' = dp_\mu/dt' = dm e^{2ct'/R} \dot{x}'^\mu/dt' = 0. \quad (12.165)$$

Это значит, что

$$\dot{x}'^\mu = 0, \quad x'^\mu = x_0'^\mu = \text{const}$$

есть решение этих уравнений, т. е. свободная частица, первоначально находившаяся в покое, будет продолжать покоиться в системе S' . В момент t' стандартное расстояние $\sigma(1, 2)$ между двумя частицами с постоянными координатами $x_1'^\mu$ и $x_2'^\mu$ есть

$$\sigma(1, 2) = e^{ct'/R} [(x_1'^\mu - x_2'^\mu)(x_1'^\mu - x_2'^\mu)]^{1/2}, \quad (12.166)$$

а относительное изменение этого расстояния подчиняется условию

$$(d\sigma/dt')/\sigma = c/R. \quad (12.167)$$

Если мы предположим, что галактики покоятся в системе S' (не принимая во внимание их малые индивидуальные скорости), т. е. примем известную в свое время гипотезу Вейля [277, 278], то получим описание, близкое к действительному поведению систем галактик в реальной Вселенной, которая, согласно законам Хаббла, расширяется однородно и изотропно.

В первоначальной сопутствующей системе координат S движение галактики определяется из (12.160) решением первого уравнения относительно r

$$r^2 = r'^2 \{e^{-2ct/R} + r'^2/R^2\}^{-1}, \quad (12.168)$$

где r' — величина, постоянная для любой галактики. Тогда, в соответствии с гипотезой Вейля, галактики являются свободно падающими частицами, причем их движение начинается из точки $r = 0$ в момент времени $t = -\infty$ и стремится к экватору $\psi = \pi/2$ гиперсферы (12.132) с $r = R$ и $t \rightarrow \infty$.

Распространение световых сигналов в S' описывается формулами (10.135), (10.137), где $\gamma_\mu = \mathfrak{R}_\mu = 0$. С учетом изотропии модели находим, что любой радиус-вектор $(\theta', \varphi') = \text{const}$ есть возможная траектория светового луча. Его скорость (10.127) в S' есть

$$\omega = \{\gamma_{\mu\nu} (dx'^\mu/dt') \cdot (dx'^\nu/dt')\}^{1/2} = c. \quad (12.169)$$

Следовательно, движение луча вдоль радиуса-вектора определяется уравнением $e^{ct'/R} dr'/dt' = \pm c$, т. е.

$$dr'/dt' = \pm e^{-ct'/R}. \quad (12.170)$$

Интегрируя его, найдем для светового луча, испущенного галактикой в точке $p_1 : (r'_1, \theta'_1, \varphi'_1)$, в момент времени t'_1 в направлении к началу

$$r' = r'_1 + R(e^{-ct'/R} - e^{-ct'_1/R}). \quad (12.171)$$

До тех пор, пока

$$r'_1 < R e^{-ct'_1/R}, \quad (12.172)$$

сигнал не достигнет начала. Таким образом, хотя мир, описываемый линейным элементом (12.162), явно бесконечен, наблюдатель, находящийся в начале, никогда не сможет получить какую-либо информацию из области, лежащей вне горизонта (12.172). В момент времени t'_1 наибольшее расстояние внутри наблюдаемого мира, доступное наблюдателю, есть, в соответствии с (12.164) и (12.172)

$$\sigma_h = e^{ct'_1/R} e^{-ct'_1/R} R = R, \quad (12.173)$$

и оно не зависит от времени. Далее, поскольку (12.162) — инвариант относительно смещения начала, то утверждение становится справедливым для любого наблюдателя, покоящегося в S' ; положение горизонта будет, конечно, разным для различных наблюдателей.

В S' кинетическая энергия световой частицы меняется в соответствии с (10.136), где $a_\mu = 0$, а тензор (10.47) определяется формулой

$$d_{\nu\lambda} = (1/2) \partial \gamma_{\nu\lambda} / \partial t' = (c/R) \gamma_{\nu\lambda}. \quad (12.174)$$

Используя (10.137) и (12.169), получаем

$$dE/dt' = -(c/R) (E/c^2) \gamma_{\nu\lambda} \omega^\nu \omega^\lambda = -cE/R, \quad (12.175)$$

решение которого есть

$$E(t') = E(t'_1) e^{-c(t'-t'_1)/R}. \quad (12.176)$$

Когда галактика испускает сигнал, находясь внутри области, очерченной горизонтом (12.172), световой луч достигнет начала за время t'_0 , которое следует из (12.171), где нужно положить $r' = 0$. Умножая последнее уравнение на $e^{ct'_1/R}/R$ и используя (12.164), имеем

$$e^{-c(t'_0-t'_1)/R} = 1 - \sigma/R, \quad (12.177)$$

где

$$\sigma = r'_1 \cdot e^{ct'_1/R} \quad (12.178)$$

есть расстояние до галактики в момент излучения сигнала, кинетическая энергия которого в момент прихода в начало равна

$$E(t'_0) = E(t'_1)(1 - \sigma/R), \quad (12.179)$$

что меньше его начальной энергии.

Будем считать, что световая частица—фотон. Тогда из (10.192) следует, что его энергия равна произведению постоянной Планка на стандартную частоту (равную координатной частоте в S'). Поделив (12.179) на h , получим соотношение, связывающее частоту $\hat{\nu}_0$ сигнала, испущенного галактикой, покоящейся в S' , и частоту $\hat{\nu}$ сигнала, наблюдаемого в начале:

$$\hat{\nu} = \hat{\nu}_0(1 - \sigma/R). \quad (12.180)$$

Следовательно, спектральные линии галактики оказываются сдвинутыми в красную сторону на величину

$$\Delta\hat{\nu}_0/\hat{\nu}_0 \equiv (\hat{\nu} - \hat{\nu}_0)/\hat{\nu}_0 = -\sigma/R. \quad (12.181)$$

С точки зрения наблюдателя, находящегося в S' , этот космологический эффект не является ни эффектом Доплера, ни эффектом Эйнштейна согласно рассуждениям § 10.7, так как в S' источники покоятся, а гравитационный потенциал всюду исчезает. Для него это скорее эффект разбегания, обязанный изменению во времени пространственной части метрического тензора, который приводит к изменению кинетической энергии частицы точно так же, как если бы частица двигалась в инерциальной системе, но по поверхности переменной формы. Но формулу красного смещения (12.181) можно переписать в виде, напоминающем нерелятивистскую формулу Доплера. Хотя в рамках гипотезы Вейля скорость источника относительно S' равна нулю, его расстояние σ до наблюдателя увеличивается с течением времени в соответствии с (12.178). Определим скорость v галактики относительно наблюдателя как производную по времени от σ :

$$v = d\sigma/dt'_1 = c\sigma/R. \quad (12.182)$$

Из (12.173) видно, что эта скорость меньше c для всех галактик, лежащих в пределах горизонта. Учитывая (12.181) и (12.182), для космологического красного смещения получаем формулу

$$\Delta\hat{\nu}_0/\hat{\nu}_0 = -v/c. \quad (12.183)$$

Это выражение формально тождественно нерелятивистской формуле Доплера (2.90) в инерциальной системе.

Модель Вселенной де Ситтера совместно с гипотезой Вейля соответствует наблюдаемым данным, если для постоянной Хаббла H принять величину c/R , или

$$R = c/H. \quad (12.184)$$

Тогда (12.182) и (12.183) будут представлять собой точные записи законов Хаббла для расширения Вселенной и наблюдаемого красного смещения в спектрах удаленных галактик.

В 1929 г. Хаббл получил значение

$$H = 540 \text{ кмсек}^{-1} \text{ Мпс}^{-1}, \quad (12.185)$$

которое позже неоднократно пересматривалось в связи с изменением шкалы космологических расстояний. Не так давно Сэндейдж [215] предложил новое значение для постоянной Хаббла

$$H = 75,3 \text{ кмсек}^{-1} \text{ Мпс}^{-1} \approx 2,4 \cdot 10^{-18} \text{ сек}^{-1}. \quad (12.185')$$

С этим новым значением из модели де Ситтера можно найти радиус наблюдаемого мира (12.173)

$$R = c/H \simeq \frac{1}{8} \cdot 10^{27} \text{ м} \simeq 10^{10} \text{ св. год}, \quad (12.184')$$

который по порядку величины совпадает с радиусом, следующим из модели Эйнштейна (12.124).

Хотя модель де Ситтера приводит к естественному и правильному объяснению наблюдаемого красного смещения спектральных линий, ее трудно признать реалистической моделью по ряду соображений. В соответствии с (12.152) плотность и давление классической материи, как это следует из (12.157), должны удовлетворять уравнению

$$\dot{\mu}^0 c^2 + \dot{p} = 0. \quad (12.186)$$

Поскольку $\dot{\mu}^0 c^2 \gg 0$, из (12.186) следует, что \dot{p} отрицательно и очень велико. Даже если принять существование сил натяжения в идеальной жидкости, заполняющей модель де Ситтера, то и в этом случае величина их порядка ($-\dot{\mu}^0 c^2$) была бы совершенно неприемлемой для любого из известных нам видов материи. Следовательно, (12.186) будет справедливо только в случае, если мы примем плотность материи равной нулю или, во всяком случае, такой, которая значительно меньше наблюдаемой плотности материи во Вселенной. Таким образом, модель де Ситтера соответствует пустой Вселенной, не содержащей заметного количества материи, а звезды и галактики в такой модели следует рассматривать как пробные тела, не дающие вклад в космологическое гравитационное поле. Эта точка зрения противоречит основным постулатам ОТО, в соответствии с которыми, например, центробежные силы и силы Кориолиса обязаны движению удаленных небесных тел относительно вращающейся системы. В то время как устранимые гравитационные поля находят свое естественное объяснение в модели Эйнштейна, модель де Ситтера не дает такого объяснения. Поля в ней должны быть признаны фиктивными точно так же, как фиктивные силы в теории Ньютона.

Эти соображения позволяют предположить, что модель Эйнштейна является лучшим приближением к действительности, чем модель де Ситтера, даже несмотря на ее неспособность объяснить красное смещение. Если мы хотим сконструировать модель, обладающую всеми достоинствами моделей Эйнштейна и де Ситтера и не имеющую их недостатков, то вынуждены будем прийти к тому, что метрический тензор в ней должен существенно зависеть от времени. Такие модели в настоящее время очень интенсивно исследуются, а первая нестатическая модель Вселенной была предложена А. А. Фридманом в 1922 г.

§ 12.8. Нестатические модели однородной изотропной Вселенной

Как было показано в § 12.6, линейный элемент

$$ds^2 = d\sigma^2 - c^2 dt^2, \quad (12.187)$$

где

$$\begin{aligned} d\sigma^2 &= R^2(t) \{dr^2 + r^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\} / (1 + \zeta r^2/4)^2 = \\ &= R^2(t) (dx^2 + dy^2 + dz^2) / (1 + \zeta r^2/4)^2 \end{aligned} \quad (12.188)$$

и $R(t)$ — произвольная функция t , описывает нестатическую однородную изотропную Вселенную. В каждый фиксированный момент времени физическое пространство является пространством постоянной кривизны

$$K = \zeta/R^2(t). \quad (12.189)$$

В то же время Робертсоном [207, 208] и Уолкером [263] с помощью методов теории групп было показано, что во Вселенной такого типа всегда возможно

звести сопутствующую систему координат S , в которой линейный элемент принимает вид (12.187), (12.188). Координатные часы в этой системе совпадают со стандартными. При $\zeta = +1$ физическое пространство замкнуто и сферическое, при $\zeta = 0$ оно евклидово, а при $\zeta = -1$ является открытым гиперболическим пространством.

Введем новую переменную ψ вместо r преобразованием

$$\psi = \int_0^r \frac{dr}{1 + \zeta r^2/4} = \begin{cases} 2 \operatorname{arctg}(r/2) & \text{для } \zeta = 1, 0 \leq \psi < \pi \\ r & \zeta = 0, 0 \leq \psi < \infty \\ 2 \operatorname{arcth}(r/2) & \zeta = -1, 0 \leq \psi < \infty \end{cases}, \quad (12.190)$$

тогда линейный элемент (12.188) примет следующий вид:

$$d\sigma^2 = R^2(t) \{d\psi^2 + \rho^2(d\theta^2 + \sin^2\theta d\varphi^2)\}, \quad (12.191)$$

где мы положили

$$\rho = \begin{cases} \sin \psi, & \zeta = +1 \\ \psi, & \zeta = 0 \\ \operatorname{sh} \psi, & \zeta = -1 \end{cases}. \quad (12.191')$$

В момент t стандартное расстояние от начала $\psi = 0$ до точки (ψ, θ, φ) , измеряемое с помощью стандартных измерительных стержней вдоль геодезической $(\theta, \varphi) = \operatorname{const}$, в соответствии с (12.191) будет равно

$$\sigma(t) = R(t) \psi. \quad (12.192)$$

Следовательно, для частицы \underline{r} (галактики), находящейся на определенном расстоянии, имеем

$$(d\sigma/dt)/\sigma = \dot{R}/R = H(t), \quad (12.193)$$

где

$$H(t) = \dot{R}/R \quad (12.194)$$

есть показатель расширения Вселенной, описываемой линейным элементом Робертсона—Уолкера (12.187), (12.188). Функция $H(t)$ является постоянной Хаббла, которая, однако, может быть функцией времени. Поэтому впредь мы будем называть ее просто коэффициентом Хаббла. Из (12.193) получаем стандартную скорость галактики, движущейся относительно наблюдателя

$$v(t) \equiv d\sigma/dt = H(t) \sigma(t), \quad (12.195)$$

т. е. приходим непосредственно к закону Хаббла.

Учитывая изотропию, принятую для данной модели, находим, что, как и в случае модели де Ситтера, любой радиус-вектор есть возможная траектория световой частицы, т. е. $(\theta, \varphi) = \operatorname{const}$ являются решениями уравнений движения (10.135). Далее, поскольку $\omega = (\gamma_{\mu\nu}\omega^\mu\omega^\nu)^{1/2} = c$ в нашем случае, из (12.191) для световой частицы получаем $R(t) d\psi/dt = -c$, т. е.

$$\psi(t) - \psi_1 = -c \int_{t_1}^t dt/R(t), \quad (12.196)$$

где t_1 — момент излучения частицы галактикой при $\psi = \psi_1$. Далее, по аналогии с (12.175) из (10.136) находим кинетическую энергию этой частицы E :

$$(1/E) \cdot dE/dt = -\dot{R}/R. \quad (12.197)$$

Здесь мы использовали выражение для тензора расширения $d_{\nu\lambda}$, вытекающее из (12.187), (12.188) и (12.191):

$$d_{\nu\lambda} = (\partial\gamma_{\nu\lambda}/\partial t)/2 = (\dot{R}/R) \gamma_{\nu\lambda}. \quad (12.198)$$

Интегрируя (12.197), получаем

$$E(t)R(t) = E(t_1)R(t_1) = \text{const.} \quad (12.199)$$

Если световой частицей является фотон, испущенный в момент t_1 галактикой, покоящейся в S , то (12.199), деленное на постоянную Планка, дает связь между стандартными частотами $\hat{\nu}(t)$ и $\hat{\nu}(t_1)$ в моменты времени t и t_1 соответственно

$$\hat{\nu}(t)R(t) = \hat{\nu}(t_1)R(t_1). \quad (12.200)$$

Соответствующее соотношение (10.187) для стандартных длин волн имеет вид

$$\hat{\lambda}(t)/\hat{\lambda}(t_1) = R(t)/R(t_1). \quad (12.201)$$

Следовательно, в момент приема t_0 в точке $\psi = 0$ мы должны наблюдать относительный сдвиг спектральных линий

$$z \equiv (\hat{\lambda}(t_0) - \hat{\lambda}(t_1))/\hat{\lambda}(t_1) = (R(t_0) - R(t_1))/R(t_1) = (\sigma(t_0) - \sigma(t_1))/\sigma(t_1), \quad (12.202)$$

где $\sigma(t_1)$ и $\sigma(t_0)$ — стандартные расстояния от наблюдателя до галактики в моменты излучения и приема соответственно. Время t_0 получается из (12.196) при $\psi = 0$, т. е.

$$\psi_1 = c \int_{t_1}^{t_0} dt/R(t). \quad (12.203)$$

В расширяющейся Вселенной, где $R(t_0) > R(t_1)$, z положительно, и наблюдаемое смещение линий должно быть красным.

Если положить

$$R(t_0) = R_0, \quad R(t_1) = R_1, \quad R_0 - R_1 = \Delta, \quad (12.204)$$

то (12.202) можно переписать в виде

$$R_1 = R_0(1+z)^{-1}. \quad (12.205)$$

Для большинства наблюдаемых галактик (но не для недавно открытых квазаров) смещение очень мало, так что (12.205) можно разложить в ряд:

$$\left. \begin{aligned} R_1 &= R_0(1 - z + z^2 + \dots); \\ \Delta &= R_0 - R_1 = R_0(z - z^2 + \dots), \end{aligned} \right\} \quad (12.206)$$

где R_0 — современное значение функции расширения $R(t)$. Теперь (12.203) можно также переписать в виде

$$\psi_1 = c \int_{R_1}^{R_0} dR/R\dot{R} \equiv f(R_1), \quad (12.207)$$

причем при фиксированном R_0 интеграл (12.207) можно рассматривать как функцию R_1 . Значения интеграла $f(R_1)$ и первых его двух производных при $R_1 = R_0$ следующие:

$$\left. \begin{aligned} f(R_0) &= 0; \quad f'(R_0) = -c/R_0\dot{R}_0; \\ f''(R_0) &= \frac{c}{R_0^2\dot{R}_0^2} (\dot{R}_0 + R_0 d\dot{R}_0/dR_0) = c(\dot{R}_0^2 + R_0\ddot{R}_0)/R_0^2\dot{R}_0^3. \end{aligned} \right\} \quad (12.208)$$

Для малых z отношение Δ/R_0 также мало, так что с учетом (12.206) $f(R_1)$ можно записать в виде ряда Тэйлора

$$f(R_1) = f(R_0) - f'(R_0)\Delta + f''(R_0)\Delta^2/2 + \dots \quad (12.209)$$

Следовательно, из (12.207) и (12.209) для стандартного расстояния до галактики в настоящее время

$$\sigma_0 = R_0\psi_1 \quad (12.210)$$

получаем

$$\sigma_0 = R_0 \psi_1 = (c/\dot{R}_0) \Delta + (c(R_0 \ddot{R}_0 + \dot{R}_0^2)/2R_0 \dot{R}_0^3) \Delta^2 + \dots \quad (12.211)$$

Вводя (12.206) в (12.211), находим выражение

$$\sigma_0 = \frac{cR_0}{\dot{R}_0} z + \frac{c(R_0^2 \ddot{R}_0 - R_0 \dot{R}_0^2)}{2\dot{R}_0^3} z^2 + \dots, \quad (12.212)$$

связывающее расстояние, смещение z и величины R , \dot{R} и \ddot{R} в данный момент времени. Решая (12.212) относительно z , получаем

$$z = (\dot{R}_0/cR_0) \sigma_0 - [(R_0 \ddot{R}_0 - \dot{R}_0^2)/2c^2 R_0^2] \sigma_0^2 + \dots \quad (12.213)$$

Коэффициент Хаббла (12.194) и его производная в настоящее время равны

$$H_0 = \dot{R}_0/R_0; \quad \dot{H}_0 = (R_0 \ddot{R}_0 - \dot{R}_0^2)/R_0^2, \quad (12.214)$$

следовательно, формула (12.213) для смещения может быть переписана в виде

$$z = H_0 \sigma_0/c - \dot{H}_0 \sigma_0^2/2c^2 + \dots \quad (12.215)$$

Первый член в этом выражении соответствует закону Хаббла, так как скорость (12.195) в данный момент равна $v_0 = H_0 \sigma_0$.

Для большинства наблюдаемых галактик z — малая величина, поэтому для них справедливы приближенные выражения (12.212) и (12.215). Тогда смещение z можно трактовать для них как меру их удаленности от наблюдателя. С другой стороны, для ряда открытых уже в шестидесятые годы пекулярных объектов (квазаров) смещение z оказывается достаточно большим. Действительно, для многих из них смещения имеют тенденцию группироваться около значения 2. Из формулы типа (12.212) можно заключить, что все эти объекты находятся на невероятно больших расстояниях от нас. Однако из точных формул (12.201) и (12.202), которые должны в этом случае применяться, уже нельзя сделать такого заключения. В самом деле, как заметил И. С. Шкловский в 1967 г., можно найти достаточно простое объяснение этому явлению, если предположить, что $R(t)$ в период излучения света квазаром была стационарна и равнялась примерно одной трети от современного значения R_0 .

Как мы заметили в начале этого параграфа, всегда можно в однородной изотропной модели ввести сопутствующую систему координат S , в которой линейный элемент принимает вид (12.187), (12.188). Поскольку $R(t)$ может быть произвольной функцией t , эти формулы на самом деле удовлетворяют большому числу различных космологических моделей. При $R = \text{const}$, и $\zeta = +1$, например, мы получаем линейный элемент (12.125), (12.147) модели Эйнштейна. Формально элемент де Ситтера (12.161), (12.162) в системе координат S' также можно получить из (12.187) и (12.188), полагая $R(t) = e^{Ht}$; $\zeta = 0$;

$$H = \dot{R}/R = \text{const}. \quad (12.216)$$

Однако нужно помнить, что система S' , определенная в (12.160), не является сопутствующей фоновой материи модели де Ситтера, поскольку последняя, как показано выше, практически пуста. Если предположить, что $R(t)$ и ζ удовлетворяют (12.216) в сопутствующей системе с реальной материей, то можно получить линейный элемент

$$ds^2 = e^{2Ht} (dx^2 + dy^2 + dz^2) - c^2 dt^2 \quad (12.216')$$

теории Бонди—Гоулда [30]. Эта модель привлекательна тем, что Вселенная в ней оказывается однородной не только по пространству, но и по времени. Однако формула (12.216) не является решением уравнений Эйнштейна ни при каком физически разумном уравнении состояния вещества, как мы увидим в следующем параграфе, где наложим ограничения на $R(t)$, вытекающие из уравнений ОТО.

§ 12.9. Модели Вселенной, совместимые с ОТО. Вселенная Фрийдмана

Метрический тензор линейного элемента Робертсона—Уолкера (12.187), (12.188) имеет вид

$$g_{\mu\nu} = R^2(t) (1 + \zeta r^2/4)^{-2} \delta_{\mu\nu}, \quad g_{44} = -1, \quad g_{\mu 4} = 0. \quad (12.217)$$

Вычисление левой части уравнений поля (11.25) и (12.217) элементарно, но несколько длинно. Читателю предоставляется возможность проверить самому, что

$$\left. \begin{aligned} R_{\mu\nu} - g_{\mu\nu} R/2 - \lambda g_{\mu\nu} &= (2\ddot{R}/Rc^2 + \dot{R}^2/R^2c^2 + \zeta/R^2 - \lambda) g_{\mu\nu}; \\ R_{\mu 4} - g_{\mu 4} R/2 - \lambda g_{\mu 4} &= 0; \\ R_{44} - g_{44} R/2 - \lambda g_{44} &= -3(\dot{R}^2/R^2c^2 + \zeta/R^2) + \lambda. \end{aligned} \right\} (12.218)$$

В сопутствующей системе координат с метрикой (12.217) тензор энергии—импульса идеальной жидкости сводится к

$$T_{ik} = (\dot{\mu}^0 + \dot{p}/c^2) c^2 \delta_{i4} \delta_{k4} + \dot{p} g_{ik}, \quad (12.219)$$

т. е.

$$T_{\mu\nu} = \dot{p} g_{\mu\nu}, \quad T_{\mu 4} = 0, \quad T_{44} = \dot{\mu}^0 c^2, \quad (12.220)$$

где \dot{p} и $\dot{\mu}^0$ — функции только от t , если мир однороден. Вводя (12.218) и (12.220) в уравнения поля (11.12), получаем соотношения

$$2\ddot{R}/R + \dot{R}^2/R^2 + \zeta c^2/R^2 = (\lambda - \kappa \dot{p}) c^2; \quad (12.221)$$

$$\dot{R}^2/R^2 + \zeta c^2/R^2 = (\lambda + \kappa \dot{\mu}^0 c^2) c^2/3, \quad (12.222)$$

которые совместно с уравнением состояния идеальной жидкости позволяют определить R , \dot{p} и $\dot{\mu}^0$ как функции t .

Умножив (12.222) на R^3 , продифференцировав его, вычтя из него (12.221), умноженное на $\dot{R}R^2$, найдем уравнение

$$d(\dot{\mu}^0 c^2 R^3)/dt = -\dot{p} dR^3/dt. \quad (12.223)$$

Это уравнение, являющееся следствием уравнений (12.221) и (12.222), тождественно закону сохранения (10.233), который в сопутствующей системе координат имеет вид уравнений (в) и (г) на стр. 298. В нашем случае уравнение (в) удовлетворяется тождественно, а поскольку

$$\left. \begin{aligned} (1/2) \gamma^{\mu\nu} \partial \gamma_{\mu\nu} / \partial t &= 3\dot{R}/R; \\ \gamma^{1/2} &= R^3/(1 + \zeta r^2/4)^3, \end{aligned} \right\} (12.224)$$

уравнение (г) принимает вид

$$\partial(\dot{\mu}^0 c^2 \gamma^{1/2})/\partial t = -\dot{p} \partial \gamma^{1/2}/\partial t, \quad (12.225)$$

т. е. тождественно (12.223).

Рассмотрим теперь фиксированную область в сопутствующей системе отсчета с соответствующими дифференциалами пространственных координат dx^1, dx^2 и dx^3 . Ее объем есть $\delta V = \gamma^{1/2} dx^1 dx^2 dx^3 = \delta V^0$. Тогда уравнение (12.225) после умножения на $dx^1 dx^2 dx^3$ перепишем в виде

$$d(\dot{h}^0 \delta V)/dt = -\dot{p} d\delta V/dt, \quad (12.226)$$

где $\dot{h}^0 = \dot{\mu}^0 c^2 = \dot{h}$ — плотность энергии в S . Сравнение с (6.138) и (6.141) показывает, что мы имеем дело с адиабатическим изменением, при котором энтропия сохраняется.

Функция $R(t)$ в линейном элементе (12.216') имеет вид (12.216). Вводя (12.216) в уравнения поля (12.221), (12.222), получаем $H^2 = \dot{R}^2/R^2 = (\lambda + \mu^0 c^2) c^2/3 = (\lambda - \kappa \dot{p}) c^2/3$, или $\dot{p} = -\mu^0 c^2$. Такое большое отрицательное значение давления материи во Вселенной совершенно нереально, и это говорит о том, что теория стационарной Вселенной требует принципиального, хотя количественно и незначительного изменения уравнений поля Эйнштейна.

Решение уравнений (12.221), (12.222) или эквивалентных им уравнений (12.222) и (12.223) зависит от принятого уравнения состояния материи, т. е. от соотношения между \dot{p} и μ^0 . Мы не будем обсуждать все возможные решения, а остановимся опять только на тех предположениях, на которых основаны классические модели Эйнштейна — де Ситтера [83] и Фридмана [102]. Эти авторы ввели несколько упрощающих предположений.

Вначале было предположено, что космологическая постоянная λ , в любом случае являющаяся малой величиной, вообще равна нулю. Основанием для такого предположения послужило то обстоятельство, что нестатическая космологическая модель с конечной плотностью материи во всем физическом пространстве реализуется в теории и без λ -члена, в отличие от статической модели Эйнштейна, не существующей без λ -члена. В самом деле, если бы хаббловское разбегание галактик было открыто в момент создания общей теории относительности, то во введении λ -члена вообще не было бы необходимости. Затем было принято допущение, что давление \dot{p} настолько мало по сравнению с $\mu^0 c^2$, что им вообще можно пренебречь в формуле (12.219), а следовательно, и в уравнениях (12.221)—(12.223). Во всяком случае, в нашу эпоху это условие выполняется. Тогда уравнения (12.223) и (12.226) выражают не что иное, как сохранение энергии, или массы, в заданной области физического пространства. Интегрируя (12.223), получаем

$$(\kappa c^2/3) \mu^0 R^3 = M, \quad (12.227)$$

где M — константа, а (12.222) сводится к выражению

$$\dot{R}/c = \pm (M/R - \xi)^{1/2}. \quad (12.228)$$

В случае расширяющейся Вселенной (знак плюс) имеем решение

$$ct = \int_0^R dR/(M/R - \xi)^{1/2}. \quad (12.229)$$

В (12.229) за начало отсчета переменной t выбран момент времени, когда $R = 0$. Если бы мы выбрали в (12.228) знак минус, то получили бы сжимающуюся Вселенную.

Рассмотрим сначала случай $\xi = 0$, когда физическое пространство в любой момент времени евклидово. Интегрируя (12.229), получаем

$$R(t) = (9M/4)^{1/3} (ct)^{2/3}. \quad (12.230)$$

Следовательно,

$$H(t) = \dot{R}/R = 2/3t, \quad \dot{H}(t) = -2/3t^2 = -(3/2) H^2. \quad (12.231)$$

Это решение, в котором коэффициент Хаббла непрерывно уменьшается со временем, является космологической моделью Эйнштейна — де Ситтера. Такая Вселенная начинает свою эволюцию с «Большого взрыва» в $t = 0$, когда $R = 0$, а $\dot{R} = \infty$. В настоящее время t_0 коэффициент $H_0 = H(t_0)$ может быть найден из наблюдений, поэтому, используя (12.231) и (12.186), можно указать «возраст» Вселенной:

$$t_0 = 2/3H_0 \simeq 2,7 \cdot 10^{17} \text{ сек} \simeq 9 \cdot 10^9 \text{ лет}. \quad (12.232)$$

Далее, из (12.227), (12.230) и (12.232) следует значение средней плотности материи в нашу эпоху

$$\dot{\mu}^0 = 3M/\kappa c^2 R_0^3 = 4/3\kappa c^2 (ct_0)^2,$$

или

$$\dot{\mu}^0 = 3H_0^2/\kappa c^4 = 3H_0^2/8\pi k \approx 10^{-26} \text{ кг/м}^{-3}. \quad (12.233)$$

Физическое пространство Вселенной Эйнштейна — де Ситтера бесконечно и не имеет горизонта, аналогичного рассмотренному в § 12.7. Горизонт пространства де Ситтера, представленный в (12.172) и (12.173), был определен как наиболее удаленное место, из которого находящийся в начальной точке наблюдатель может принять еще информацию через какой угодно промежуток времени в будущем. Поэтому его можно назвать *горизонтом будущего*. Во Вселенной, начавшейся с Большого взрыва, можно установить уже несколько типов горизонтов, в частности *горизонт прошлого* [204]. В случае Вселенной Эйнштейна — де Ситтера (12.196) принимает вид

$$r = r_1 - c(4/9M)^{1/3} \int_{t_1}^t dt/(ct)^{2/3} = r_1 - 3(4/9M)^{1/3} \{(ct)^{1/3} - (ct_1)^{1/3}\}. \quad (12.234)$$

Здесь мы использовали (12.230) и (12.190), где $\psi = r$ при $\zeta = 0$. Следовательно, полагая в (12.234) $t_1 = 0$, мы видим, что никакая информация не достигнет наблюдателя в точке $r = 0$ за любое время от прошлого до настоящего момента t_0 , если только

$$r_1 < 3(4/9M)^{1/3} (ct_0)^{1/3} \equiv r_{\text{hor}}. \quad (12.235)$$

Галактики с $r > r_{\text{hor}}$ просто не будут наблюдаться в телескопы, установленные в точке $r = 0$. В нашу эпоху расстояние до горизонта прошлого составляет в соответствии с (12.192), (12.230) и (12.235) величину

$$\sigma_0 = R_0 r_{\text{hor}}^* = 3ct_0. \quad (12.236)$$

Относительно наблюдателя горизонт раздвигается со скоростью $3c$, следовательно, в бесконечном будущем мы можем, в принципе, получить информацию от всех галактик Вселенной. (Обратите внимание, что скорость $3c$ не является скоростью переноса информации, так как последняя всегда должна быть меньше или равна c в любой системе координат). Один из двух типов горизонтов имеет место в большинстве моделей Вселенной, совместимых с ОТО, а в некоторых из них содержатся оба типа горизонтов одновременно.

Рассмотрим теперь кратко случай $\xi = \pm 1$. При $\xi = +1$ физическое пространство в любой момент времени t является замкнутым сферическим пространством с линейным элементом (12.191). Из (12.229) получим в этом случае

$$ct = M \{\arcsin (R/M)^{1/2} - (R/M - R^2/M^2)^{1/2}\}. \quad (12.237)$$

Кривая, построенная по (12.237), есть циклоида с параметрическим представлением

$$R = (M/2)(1 - \cos \eta), \quad ct = (M/2)(\eta - \sin \eta). \quad (12.238)$$

Здесь R растет от нуля при $\eta = t = 0$ до максимального значения M при $\eta = \pi$, $ct = M\pi/2$. Затем кривая падает до нуля, и при $\eta = 2\pi$, $ct = M\pi$ возникает снова ситуация Большого взрыва.

Аналогично при $\xi = -1$ получаем, что физическое пространство является открытым гиперболическим пространством

$$ct = M \{(R/M + R^2/M^2)^{1/2} - \text{arcth} (R/M)^{1/2}\} \quad (12.239)$$

с параметрическим представлением

$$R = (M/2)(ch \eta - 1), \quad ct = (M/2)(sh \eta - \eta). \quad (12.240)$$

Здесь коэффициент Хаббла

$$H = \dot{R}/R = c \cdot \text{ch}(\eta/2)/M \text{sh}^4(\eta/2) \quad (12.241)$$

непрерывно уменьшается со временем.

Ни одна из функций $R(t)$, полученных при рассмотренных нами предположениях, не удовлетворяет требованиям И. С. Шкловского (см. стр. 373), выдвинутым для объяснения аномально больших z для квазаров. Однако некоторые из более общих космологических моделей с $\lambda \neq 0$ удовлетворяют этим требованиям [28, 205].

§ 12.10. Соотношения между наблюдаемыми астрономическими величинами

Стандартное расстояние $\sigma(t)$ (12.192) от Земли до небесного тела является сугубо теоретической величиной. Оно определяется как длина, измеренная набором измерительных стержней, которые в один и тот же момент времени t укладываются вдоль пространственной геодезической тела. Ясно, что астрономы используют несколько иные способы измерения расстояний. Для не слишком удаленных объектов они могут зарегистрировать оптический параллакс, а в наше время становится возможным измерение расстояний радиолокационными методами (по крайней мере, в пределах Солнечной системы). Расстояния до более удаленных объектов определяются с помощью наблюдений видимых величин и светимостей объектов. В случае галактик этот метод дает наиболее надежные результаты.

Пусть B — абсолютная, или собственная, светимость излучающего объекта. Она определяется как количество энергии, прошедшей через единичную площадку сферы единичного радиуса в единицу времени. Видимая светимость b есть та же величина, но зарегистрированная в месте наблюдения. Она связана с видимой звездной величиной m соотношением

$$m = -2,5 \ln b + \text{const.} \quad (12.242)$$

Теперь рассмотрим сферу

$$\psi = \text{const} = \psi_1 \quad (12.243)$$

в пространстве с метрикой (12.191). Астрономическое расстояние L , измеренное по видимой светимости, равно

$$L = (B/b)^{1/2}. \quad (12.244)$$

Это и есть стандартное расстояние, если, конечно, объект покоится относительно инерциальной системы наблюдателя. В момент времени t площадь сферы есть

$$f = 4\pi R(t)^2 \rho_1^2, \quad (12.245)$$

где ρ_1 связано с ψ_1 уравнением (12.191'). В соответствии с (9.74), (9.74''), параллелограмм, построенный на инфинитезимальных 3-векторах

$$dx^\mu = (0, d\theta, 0), \quad \delta x^\mu = (0, 0, d\varphi),$$

описывается вектором

$$df_\mu = e_{\mu\nu\lambda} dx^\nu dx^\lambda = (\gamma_1^{1/2} d\theta d\varphi, 0, 0), \quad (12.246)$$

где

$$\gamma_1 = R^6 \rho_1^4 \sin^2 \theta \quad (12.247)$$

есть детерминант $|\gamma_{\mu\nu}|$ метрического тензора в (12.191). Площадь df элемента есть

$$df = (\gamma^{\mu\nu} df_\mu df_\nu) = (\gamma^{11} df_1^2)^{1/2},$$

или

$$df = R^2 \rho_1^2 \sin \theta d\theta d\varphi, \quad (12.248)$$

откуда после интегрирования по всем направлениям следует (12.245). Для сферы единичного радиуса $\sigma = R\psi_1 = 1$, $\psi_1 = R^{-1}$ чрезвычайно мало и $\psi_1 = \rho_1$, если учесть (12.191). Следовательно, $R\rho_1 = R\psi_1 = 1$, и площадь единичной сферы (12.245) в соответствии с утверждением, что в достаточно малой области физического пространства справедлива евклидова геометрия, есть

$$f(1) = 4\pi. \quad (12.249)$$

Рассмотрим теперь источник в начале координат, излучающий $n(1)$ фотонов частоты $\hat{\nu}(1) = \nu(1)$ в единицу времени. Энергия, которая уносится фотонами в единицу времени, составляет

$$E(1) = n(1) \hat{h}\hat{\nu}(1), \quad (12.250)$$

т. е. равна потоку энергии через единичную сферу, окружающую источник. Фотоны, излученные в $t = t_1$, достигнут сферы (12.243) в момент времени t_0 , определяемый уравнением (12.203). Поскольку ψ_1 — константа, дифференцируя это уравнение, получаем

$$dt_0/R_0 - dt_1/R_1 = 0. \quad (12.251)$$

Если $n(0)$ обозначить число фотонов, проходящих сквозь сферу в единицу времени, то

$$n(1) dt_1 = n(0) dt_0, \quad (12.252)$$

так как число фотонов $n(1) dt_1$, излученных в интервале $(t_1, t_1 + dt_1)$, равно числу фотонов $n(0) dt_0$, пересекающих сферу в интервале $(t_0, t_0 + dt_0)$. Из (12.251) и (12.252) следует уравнение

$$n(0) = n(1) dt_1/dt_0 = n(1) R_1/R_0. \quad (12.253)$$

Согласно (12.200) для энергии фотонов, достигающих сферы в момент t_0 :

$$\hat{h}\hat{\nu}(0) = \hat{h}\hat{\nu}(1) R_1/R_0. \quad (12.254)$$

Таким образом, из (12.253), (12.254) и (12.250) получаем поток энергии через сферу

$$E(0) = n(0) \hat{h}\hat{\nu}(0) = n(1) \hat{h}\hat{\nu}(1) (R_1/R_0)^2, \text{ или} \\ E(0) = E(1) (R_1/R_0)^2. \quad (12.255)$$

Поскольку соотношение между $E(0)$ и $E(1)$ не зависит от частоты, оно справедливо и для полного потока энергии от источника с произвольным спектром излучения. Таким образом, из (12.245), (12.249) и (12.255) следует, что видимая и абсолютная светимость источника связаны между собой

$$b = E(0)/f(0) = (E(1)/4\pi) \cdot R_1^2/\rho_1^2 R_0^4 = BR_1^2/\rho_1^2 R_0^4. \quad (12.256)$$

Вселенная однородна и изотропна, поэтому соотношение (12.256) будет справедливым и тогда, когда излучающая галактика находится в точке $(\psi_1, \theta, \varphi)$, а наблюдатель помещен в начало системы отсчета. Тогда расстояние до галактики, определенное по видимой светимости, можно найти по формуле

$$L = (B/b)^{1/2} = \rho_1 R_0^2/R_1 = \sigma_0 (\rho_1/\psi_1) R_0/R_1 = \sigma_0 (\rho_1/\psi_1) (1+z). \quad (12.257)$$

Здесь мы использовали (12.210) и (12.202). Из (12.191), (12.212) и из формул разложения $\sin \psi$ и $\operatorname{sh} \psi$ в ряд получаем

$$\frac{\rho_1}{\psi_1} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-\xi)^n \psi_1^{2n}}{(2n+1)!} = 1 - \frac{\xi}{6} \psi_1^2 + \dots = 1 - \frac{\xi}{6} \frac{c^2}{R_0^2} z^2 + \dots \quad (12.258)$$

Сравнивая (12.257) и (12.258), находим связь между L — расстоянием до галактики, полученным по видимой светимости, и стандартным расстоянием σ_0 . При малых z L и σ_0 совпадают. Используя разложение σ_0 в ряд (12.212) и пренебрегая членами порядка z^3 , получаем

$$L = (cR_0/\dot{R}_0)z + (cR_0(R_0\ddot{R}_0 + \dot{R}_0^2)/2\dot{R}_0^3)z^2 + \dots, \quad (12.259)$$

или обращая,

$$\begin{aligned} z &= (\dot{R}_0/cR_0)L - (R_0\ddot{R}_0 + \dot{R}_0^2)L^2/2c^2R_0^2 + \dots, \\ &= H_0L/c - (\dot{H}_0 + 2H_0^2)L^2/2c^2 + \dots \end{aligned} \quad (12.260)$$

Индекс кривизны ζ , имеющий место в (12.258), в (12.260) появится только в члене третьего порядка по z .

Непосредственно измеряемыми астрофизическими величинами являются видимая звездная величина m и видимая светимость b . Если допустить, что абсолютная светимость B примерно одинакова для всех галактик на протяжении всей истории наблюдений, то $L = (B/b)^{1/2}$ можно рассматривать как наблюдаемую величину, и соотношения (12.259) и (12.260) проверить при измерении величин b и z . В принципе, такие наблюдения позволяют найти H_0 и \dot{H}_0 и даже сделать некоторые выводы о кривизне физического пространства реальной Вселенной, беря разложение до третьего порядка. Однако в действительности возможно было только определить H_0 с достаточной степенью точности. Даже знак \dot{H}_0 еще не был экспериментально установлен. (См. литературу на стр. 394. — *Прим. ред.*)

Астрономы имеют еще одну возможность проверки теорин, заключающуюся в подсчете числа галактик с красным смещением, меньшим данного z в заданном телесном угле ω . Это число N является функцией z (или ψ_1), т. е. пропорционально ω , но не зависит от направления, что следует из предположения об изотропии Вселенной. В соответствии с (12.247) элемент объема пространства равен

$$dV = \gamma^{1/2} d\psi d\theta d\varphi = R^3 \rho^2 d\psi d\omega, \quad (12.261)$$

где

$$d\omega = \sin \theta d\theta d\varphi \quad (12.262)$$

— бесконечно малый угол. Интегрируя по θ и φ внутри ω и по ψ от 0 до ψ_1 , получаем для конечного объема в момент наблюдения

$$V_0 = \omega R_0^3 \int_0^{\psi_1} \rho^2 d\psi. \quad (12.263)$$

Умножая V_0 на нынешнюю плотность галактик n_0 , одинаковую по всему пространству (однородность), для искомого числа галактик находим

$$N = n_0 V_0 = n_0 \omega R_0^3 \int_0^{\psi_1} \rho^2 d\psi. \quad (12.264)$$

Интегрирование в (12.264) легко выполнить, если использовать разложение (12.258)

$$\int_0^{\psi_1} \rho^2 d\psi = \int_0^{\psi_1} \psi^2 (1 - \zeta\psi^2/3 + \dots) d\psi = \psi_1^3 \left(1 - \frac{\zeta}{5} \psi_1^2 + \dots \right) / 3. \quad (12.265)$$

Следовательно,

$$N = \frac{n_0 \omega \sigma_0^3}{3} (1 - \zeta \sigma_0^2 / 5 R_0^2 + \dots). \quad (12.266)$$

Наконец, с помощью (12.212) получим функцию $N(z)$ в виде ряда по степеням z :

$$N(z) = n_0 \omega c^3 (z^3/3H_0^3 + \dot{H}_0 z^4/2H_0^5 + \dots), \quad (12.267)$$

которая может быть, в принципе, использована для независимого определения H_0 и \dot{H}_0 . Чтобы получить информацию о ζ , нужно использовать высшие члены этого разложения.

1. Теорема Гаусса

Пусть V — конечная область, ограниченная замкнутой поверхностью f в трехмерном евклидовом пространстве, а $f(x_1, x_2, x_3)$ — заданная функция декартовых координат x_1, x_2, x_3 , определенная на этой области. Рассмотрим объемный интеграл $\int_V (\partial f / \partial x_1) dx_1 dx_2 dx_3$

на V . Полагая поверхность f выпуклой, так что прямая, параллельная оси x_1 (при постоянных x_2 и x_3), пересекает ее только в двух точках, этот интеграл можно, интегрируя по x_1 , привести к виду

$$\int_V (\partial f / \partial x_1) dx_1 dx_2 dx_3 = \int_{f_1} (f^+ - f^-) dx_2 dx_3, \tag{1}$$

где интегрирование в правой части выполнено по проекции f_1 поверхности f на плоскость (x_2, x_3) , а f^+ и f^- — значения f в точках p^+ и p^- . Пусть, далее, df^+ и df^- — поверхностные элементы f в точках p^+ и p^- соответственно, проекции которых на плоскость (x_2, x_3) равны элементу $(dx_2 dx_3)$. Если $p^+ = (n_1^+, n_2^+, n_3^+)$ и $p^- = (n_1^-, n_2^-, n_3^-)$ — единичные векторы в направлении внешних нормалей к df^+ и df^- и если $x_1^+ > x_1^-$, то очевидно

$$n_1^+ df^+ = -n_1^- df^- = dx_2 dx_3. \tag{2}$$

Следовательно, (1) можно переписать в виде

$$\int_V (\partial f / \partial x_1) dV = \int_f f \cdot n_1 df, \tag{3}$$

где интегрирование справа распространено на всю поверхность f , а n_1 есть x_1 -компонента вектора внешней нормали n . Легко видеть, что (3) справедливо и в том случае, когда ограничивающая поверхность f невыпуклая, т. е. когда соответствующая прямая пересекает поверхность в большем числе точек. Аналогично если $g(x_1, x_2, x_3)$ и $h(x_1, x_2, x_3)$ — две другие заданные в области функции пространственных координат, то

$$\left. \begin{aligned} \int_V (\partial g / \partial x_2) dV &= \int_f g \cdot n_2 df; \\ \int_V (\partial h / \partial x_3) dV &= \int_f h \cdot n_3 df. \end{aligned} \right\} \tag{3'}$$

Если, в частности, f, g и h являются компонентами $a_1(x), a_2(x), a_3(x)$ векторного поля $a = (a_\mu)$, то в дополнение к условиям (3) и (3') имеем

$$\int_V (\partial a_\mu / \partial x_\mu) dV = \int_f (a_\mu n_\mu) df \tag{4}$$

или

$$\int_V \operatorname{div} a dV = \int_f (a \cdot n) df = \int_f a_n df, \tag{4'}$$

где a_n — компонента вектора a в направлении внешней нормали. Уравнение (4') дает возможность преобразовывать объемные интегралы в поверхностные; оно выражает теорему Гаусса (4.191). Из вывода ясно, что (4) справедливо для любых трех функций $a_\mu(x)$, которые не обязательно должны быть компонентами вектора.

Далее, если $t_{\mu\nu}(x)$ — трехмерное тензорное поле ранга 2, то, полагая $t_{\mu 1} = f, t_{\mu 2} = g$ и $t_{\mu 3} = h$, получаем из (3) и (3')

$$\int_V (\partial t_{\mu\nu} / \partial x_\nu) dV = \int_f (t_{\mu\nu} n_\nu) df. \tag{5}$$

т. е. уравнение (4.196). И снова ясно, что (5) будет справедливо, даже если девять функций $t_{\mu\nu}(x)$ не будут компонентами какого-либо тензора.

2. Преобразование 4-плотности тока

В соответствии с уравнениями (5.4) и (5.4') формулы преобразования, связанные с плотностями 4-тока s_i и s'_i в двух инерциальных системах отсчета S и S' должны быть такими, чтобы условие

$$\partial s'_i / \partial x'_i = 0 \quad (1)$$

несомненно следовало из условия

$$\partial s_i / \partial x_i = 0 \quad (1')$$

для всех возможных распределений заряда и тока. Преобразование, следовательно, должно иметь вид

$$s'_i = f_i(s_1, s_2, s_3, s_4), \quad (2)$$

где функции f_i удовлетворяют условиям

$$\partial f_i / \partial x'_i = (\partial f_i / \partial s_k) (\partial s_k / \partial x_l) (\partial x_l / \partial x'_i) \equiv (\partial f_i(s_m) / \partial s_k) s_{k,l} = 0 \quad (3)$$

при всех изменениях двенадцати переменных s_i и $s_{k,l} \equiv \partial s_k / \partial x_l$, что дает

$$s_i, i = 0. \quad (4)$$

Умножая (4) на лагранжев множитель λ , который может быть функцией переменных (s_i), и вычитая полученное уравнение из (3), приходим к уравнению

$$[(\partial f_i / \partial s_k) \alpha_{il} - \lambda \delta_{k,l}] s_{k,l} = 0, \quad (5)$$

которое должно оставаться справедливым при произвольных вариациях s_i и $s_{k,l}$.

Варьируя переменные $s_{k,l}$, получаем

$$(\partial f_i / \partial s_k) \alpha_{il} = \lambda(s_r) \delta_{kl} \quad (6)$$

или, используя соотношения ортогональности (4.14),

$$(\partial f_i / \partial s_k) = \lambda(s_r) \alpha_{ik}. \quad (6')$$

Из уравнений (6), дифференцируя по s_m , находим $(\partial^2 f_i / \partial s_k \partial s_m) \alpha_{il} = (\partial \lambda / \partial s_m) \delta_{kl}$, а поскольку левая часть симметрична по индексам k и m , то $(\partial \lambda / \partial s_m) \delta_{kl} = (\partial \lambda / \partial s_k) \delta_{ml}$.

Полагая $m = l \neq k$ в этом уравнении, получаем

$$\partial \lambda / \partial s_k = 0, \quad (7)$$

т. е. λ не должно зависеть от s_i . Интегрирование (6) дает $f_i(s_k) = \lambda \alpha_{ik} s_k + \beta_{ik}$, где β_{ik} и λ — константы. Если плотность электрического заряда в S равна нулю (т. е. $s_i = 0$), то она должна быть равна нулю и в S' . Следовательно, $\beta_{ik} = 0$, и преобразования (2) примут вид

$$s'_i = \lambda \alpha_{ik} s_k. \quad (8)$$

Из (4.11), (5.3) и уравнений (8) теперь следует $s'_i s'_i = \lambda^2 s_k s_k$, или

$$\rho'^2 (1 - u'^2/c^2) = \lambda^2 \rho^2 (1 - u^2/c^2). \quad (9)$$

Используя те же аргументы, что и при выводе (2.8) и (2.14), найдем, что квадрат λ должен быть равен единице, т. е.

$$\lambda^2 = 1, \quad \lambda = \pm 1. \quad (10)$$

В классической формулировке электродинамики плотность заряда является скаляром относительно отражений (4.94), а это значит, что в (10) мы должны выбрать верхний знак. Тогда (8) ведут к преобразованию (5.5), показывающему, что плотность 4-тока является 4-вектором. Как было показано ранее в книге, заряд является инвариантом, а F_{ik} преобразуется как тензор при преобразованиях Лоренца.

Однако в соответствии с (10) можно было бы положить λ равным детерминанту преобразования (4.15), т. е.

$$\lambda = a. \quad (11)$$

Тогда в соответствии с уравнениями (8) s_i оказалась бы псевдотензором ранга 1 (см. § 4.10), а заряд частицы изменял бы знак при пространственных отражениях (4.94). Кроме того, из (5.16) следует, что F_{ik} теперь есть псевдотензор, а это значит, что \mathbf{H} становится полярным вектором, в то время как \mathbf{E} — вектор аксиальный. Хотя этот вывод и кажется странным с точки зрения общепринятых соглашений, на самом деле мы не можем сейчас еще экспериментально определить, какая из двух возможностей соответствует действительности. В самом деле, действие поля на заряженную пробную частицу

одинаково в обоих случаях, что видно из выражения для 4-силы $f_i = F_{ik} s_k$, которая остается истинным 4-вектором в обоих вариантах описания заряда. Тензор энергии (5.106) также остается тензором ранга 2. Тем не менее, возможность (11) следует учитывать, имея в виду последние результаты по несохранению четности.

3. Плоские волны в однородной изотропной среде

В покоящейся системе однородная изотропная среда, характеризующаяся электрической и магнитной константами ϵ и μ соответственно, удовлетворяющая условию $\rho = J = 0$, описывается уравнениями Максвелла (7.31) и (7.32), которые можно представить в виде

$$\operatorname{div} \mathbf{H} = \operatorname{div} \mathbf{E} = 0; \quad (1)$$

$$\epsilon \dot{\mathbf{E}} = c \operatorname{rot} \mathbf{H}, \quad \mu \dot{\mathbf{H}} = -c \operatorname{rot} \mathbf{E}; \quad (2)$$

$$\mathbf{D} = \epsilon \mathbf{E}, \quad \mathbf{B} = \mu \mathbf{H}. \quad (3)$$

В случае плоских волн, когда плоскость волны перпендикулярна оси x в декартовой системе координат (x, y, z) , векторы поля являются функциями только x и t . Из (1) и (2) в этом случае имеем

$$\partial E_x / \partial x = \partial H_x / \partial x = \dot{E}_x = \dot{H}_x = 0,$$

а поскольку постоянные поля несущественны в оптике, можно положить

$$E_x = H_x = 0. \quad (4)$$

Компоненты по y и z уравнения (2) имеют вид

$$\epsilon \partial E_y / \partial t = -c \partial H_z / \partial x; \quad \epsilon \partial E_z / \partial t = c \partial H_y / \partial x; \quad (5)$$

$$\mu \partial H_y / \partial t = c \partial E_z / \partial x; \quad \mu \partial H_z / \partial t = -c \partial E_y / \partial x. \quad (6)$$

Дифференцируя одно из этих уравнений по t и используя оставшиеся, видим, что функции E_y, E_z, H_y, H_z удовлетворяют волновому уравнению

$$\partial^2 \psi / \partial t^2 = \omega^2 \partial^2 \psi / \partial x^2, \quad (7)$$

где

$$\omega = c / \sqrt{(\epsilon \mu)} \quad (8)$$

— постоянная величина.

Общее решение (7) имеет вид $\psi = f_1(t - x/\omega) + f_2(t + x/\omega)$, где f_1 и f_2 — произвольные функции. Две составляющие в этом решении соответствуют распространению волны вдоль x в противоположных направлениях. Рассматривая волну, распространяющуюся в сторону увеличения оси x , допустим, что

$$E_y = \epsilon^{-1/2} f(t - x/\omega), \quad E_z = \epsilon^{-1/2} g(t - x/\omega), \quad (9)$$

где f и g — произвольные функции аргумента $(t - x/\omega)$. Интегрируя затем (6), находим

$$H_y = -\mu^{-1/2} g(t - x/\omega), \quad H_z = \mu^{-1/2} f(t - x/\omega) \quad (10)$$

Уравнения (4), (9) и (10) представляют собой наиболее общие выражения для волны, движущейся в положительную сторону x . Вводя три единичных вектора $\mathbf{n} = (1, 0, 0)$, $\mathbf{e}^{(1)} = (0, 1, 0)$ и $\mathbf{e}^{(2)} = (0, 0, 1)$, можем далее записать

$$\left. \begin{aligned} \mathbf{E} &= \epsilon^{-1/2} f(t - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})/\omega) \mathbf{e}^{(1)} + \epsilon^{-1/2} g(t - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})/\omega) \mathbf{e}^{(2)}; \\ \mathbf{H} &= -\mu^{-1/2} g(t - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})/\omega) \mathbf{e}^{(1)} + \mu^{-1/2} f(t - (\mathbf{x} \cdot \mathbf{n})/\omega) \mathbf{e}^{(2)}, \end{aligned} \right\} \quad (11)$$

и эта форма остается справедливой, если система координат вращается так, что \mathbf{n} уже не лежит на новой оси x . Векторы $\mathbf{e}^{(1)}$ и $\mathbf{e}^{(2)}$ тогда являются произвольными, но постоянными единичными векторами, перпендикулярными друг другу и вектору \mathbf{n} .

4. Символы Кристоффеля в терминах $\gamma_{\mu\nu}$, γ_μ , χ и их производных

Легко проверить, что метрический тензор g_{ik} можно записать в виде

$$g_{ik} = \bar{g}_{ik} + \delta_{i4} \delta_{k4} - \Gamma_i \Gamma_k, \quad (1)$$

где \bar{g}_{ik} — стандартный тензор (9.299), а Γ_i — 4-вектор (9.286), являющийся функцией $\gamma_{\mu\nu}$, γ_μ , χ . В соответствии с (9.98), пространственная часть g^{ik} равна контравариантному пространственному метрическому тензору

$$g^{\mu\nu} = \gamma^{\mu\nu}. \quad (2)$$

То да, положив в (9.7) $i = 4, k = \kappa$, найдем, что

$$g^{\mu 4} = \gamma^{\mu\nu} \gamma_{\nu} / (1 + 2\chi/c^2)^{1/2} = \gamma^{\mu\nu} \Gamma^4 \Gamma_{\nu}. \quad (3)$$

По аналогии из (9.7) с условием $i = k = 4$ получим

$$g^{44} = -(1 - \gamma^{\mu\nu} \gamma_{\mu} \gamma_{\nu}) / (1 + 2\chi/c^2), \quad (4)$$

а из (1)

$$g_{ik,l} = (\bar{g}_{ik})_{,l} - \Gamma_i \Gamma_{k,l} - \Gamma_k \Gamma_{i,l}. \quad (5)$$

Первый член в правой части (5) исчезает, если один из двух индексов i и k равен 4. Подставляя (5) в (9.77), находим следующую формулу для символов Кристоффеля:

$$\Gamma_{i,k,l} = \Gamma_{i,k,l}^* - (1/2) \Gamma_i (\Gamma_{k,l} + \Gamma_{l,k}) - (1/2) \Gamma_k (\Gamma_{i,l} - \Gamma_{l,i}) - (1/2) \Gamma_l (\Gamma_{i,k} - \Gamma_{k,i}), \quad (6)$$

где

$$\Gamma_{i,k,l}^* = (1/2) \{ (\bar{g}_{ik})_{,l} + (\bar{g}_{il})_{,k} - (\bar{g}_{kl})_{,i} \} \quad (7)$$

и

$$\Gamma_{kl}^i = g^{im} \Gamma_{m,kl}^* - (1/2) \Gamma^i (\Gamma_{k,l} + \Gamma_{l,k}) - (1/2) \Gamma_k g^{im} (\Gamma_{m,l} - \Gamma_{l,m}) - (1/2) \Gamma_l g^{im} (\Gamma_{m,k} - \Gamma_{k,m}). \quad (8)$$

Здесь $\Gamma_{i,k,l}^*$ — символы, полученные со стандартной метрикой \bar{g}_{ik} ; они исчезают, если два из трех индексов i, k, l равны 4. Поскольку $\Gamma^{\mu} = 0$, из (8) при $i = \mu, k = l = 4$ находим

$$\Gamma_{44}^{\mu} = -\Gamma_4 g^{\mu m} (\Gamma_{m,4} - \Gamma_{4,m}) = -\gamma^{\mu\nu} \Gamma_4 (\Gamma_{\nu,4} - \Gamma_{4,\nu}) = -c^{-2} \gamma^{\mu\nu} (\partial\chi/\partial x^{\nu} + c^* \partial\gamma_{\nu}/\partial t), \quad (9)$$

где использованы выражения (9.286) для Γ_{ν} . Формула (9) тождественна (9.112).

Далее, из (3), (9.288) и (8) при $i = \mu, k = \nu, l = 4$ находим

$$\begin{aligned} \Gamma_{\nu 4}^{\mu} &= (1/2) g^{\mu\lambda} \bar{g}_{\lambda\nu,4} - (1/2) \Gamma_{\nu} g^{\mu\lambda} (\Gamma_{\lambda,4} - \Gamma_{4,\lambda}) - \\ &- (1/2) \Gamma_4 g^{\mu\lambda} (\Gamma_{\lambda,\nu} - \Gamma_{\nu,\lambda}) - (1/2) \Gamma_4 g^{\mu 4} (\Gamma_{4,\nu} - \Gamma_{\nu,4}) = \\ &= (1/2) \gamma^{\mu\nu} \gamma_{\mu\nu,4} - (1/2) \gamma^{\mu\lambda} \{ \Gamma_4 (\Gamma_{\lambda,\nu} - \Gamma_{\nu,\lambda}) + \\ &+ \Gamma_{\nu} (\Gamma_{\lambda,4} - \Gamma_{4,\lambda}) - \Gamma_{\lambda} (\Gamma_{4,\nu} - \Gamma_{\nu,4}) \}. \end{aligned} \quad (10)$$

И наконец, из (9), (10) и (9.115') получаем

$$\begin{aligned} e_{\nu}^{\mu} &= c\Gamma^4 (\Gamma_{\nu 4}^{\mu} + \Gamma_{44}^{\mu} \Gamma^4 \Gamma_{\nu}) = \gamma^{\mu\lambda} (c/2c^*) \partial\gamma_{\lambda\nu}/\partial t + (\gamma c^{\mu\lambda}/2) \{ (\Gamma_{\lambda,\nu} - \Gamma_{\nu,\lambda}) + \\ &+ \Gamma^4 \Gamma_{\lambda} (\Gamma_{4,\nu} - \Gamma_{\nu,4}) + (\Gamma_{\lambda,4} - \Gamma_{4,\lambda}) \Gamma^4 \Gamma_{\nu} \}. \end{aligned} \quad (11)$$

Первый член в этом выражении есть $\gamma^{\mu\lambda} d_{\lambda\nu}$, где $d_{\lambda\nu}$ — тензор (9.117), а оставшиеся члены равны $\gamma^{\mu\lambda} \omega_{\nu\lambda}$, где $\omega_{\nu\lambda} = \hat{\Omega}_{\nu\lambda}$ — тензор пространственных вращений (8.135), (9.343). Легче всего в этом убедиться, используя связь (9.339) между $\hat{\Omega}_{\nu\lambda}$ и Ω_{lm} и выражение

$$\Pi_{[\nu]}^l = \delta_{\nu l} + \Gamma_{\nu} \Gamma^4 \delta_{l4}, \quad (12)$$

вытекающие из (9.302). Следовательно, (11) тождественно (9.116).

5. Условия для плоского пространства

Плоское пространство — это пространство, в каждой точке которого можно ввести геодезическую систему координат. Если это условие выполнено, то

$$R_{iklm} = 0 \quad (1)$$

справедливо во всех точках, причем R_{iklm} — тензор кривизны (9.229). Теперь покажем, что (1) является и достаточным условием.

Если тензор кривизны исчезает всюду, то из (9.232) следует, что результат параллельного переноса некоторого вектора не зависит от пути переноса. В этом случае можно построить единое тетрадное поле $h_i^{(a)}(x)$, $h_{(a)}^i(x)$ во всем пространстве по данной тет-

раде $h_{(a)}^i(0), h_i^{(a)}(0)$ в точке 0 параллельным переносом векторов тетрады в произвольную точку (x) . Это поле удовлетворяет условиям (9.81), (9.84) и (9.86), всюду, т. е.

$$h_{(a)}^i h_{(b)}^k g_{ik} = \eta_{ab} \quad (2)$$

и

$$h_{(a)}^i h_i^{(b)} = \delta_b^a, \quad h_i^{(a)} h_{(a)}^k = \delta_i^{(k)}. \quad (3)$$

Далее, из уравнений (9.137) и (9.186) следует, что $h_i^{(a)}(x)$ и $h_{(a)}^i(x)$ должны быть решениями дифференциальных уравнений

$$h_{(a);k}^i = 0, \quad h_i^{(a);k} = 0. \quad (4)$$

Из последних уравнений получаем

$$\partial h_i^{(a)}/\partial x^k = \Gamma_{ik}^l h_l^{(a)} = \partial h_k^{(a)}/\partial x^i, \quad (5)$$

где учтена симметрия Γ_{ik}^l по нижним индексам.

Легко видеть, что преобразование $x'^i = x'^i(x^k)$ приводит к геодезической системе координат (x'^i) , если коэффициенты преобразования положим равными

$$\alpha_k^i = h_k^{(i)}(x), \quad \check{\alpha}_k^i = h_i^{(k)}(x). \quad (6)$$

Эти коэффициенты удовлетворяют условиям (9.11) вследствие тетрадных уравнений (3). Такой выбор возможен, поскольку из (5) следует, что условия интегрируемости (9.14) при $\alpha_k^i = h_k^{(i)}$ удовлетворяются. Для метрического тензора g'_{ik} в системе (x'^i) из (9.12), (6) и (2) получим

$$g'_{ik} = \check{\alpha}_i^l \check{\alpha}_k^m g_{lm} = h_{(l)}^i h_{(k)}^m g_{lm} = \eta_{ik}, \quad (7)$$

т. е. компоненты тензора постоянные, а сама система (x'^i) — лоренцева.

6. Производные от функции \mathcal{L} через $g_{,k}^{lm}$ и g^{lm} и выражения для суперпотенциала

В соответствии с (11.137) функцию \mathcal{L} можно записать в виде

$$\mathcal{L} = \sqrt{(-g)} (A - B), \quad (1)$$

где

$$A = g^{ik} \Gamma_{ik}^t \Gamma_{ts}^s, \quad B = g^{lr} \Gamma_{lm}^k \Gamma_{rk}^m. \quad (2)$$

Поскольку g^{ik} и g_{ik} считаются постоянными при дифференцировании по $g_{,k}^{lm}$, то

$$\partial \mathcal{L} / \partial g_{,k}^{lm} = \sqrt{(-g)} (\partial A / \partial g_{,k}^{lm} - \partial B / \partial g_{,k}^{lm}); \quad (3)$$

$$\partial A / \partial g_{,k}^{lm} = g^{ir} \Gamma_{ir}^l \partial \Gamma_{ts}^s / \partial g_{,k}^{lm} + \Gamma_{rs}^s \partial (g^{it} \Gamma_{it}^r) / \partial g_{,k}^{lm}. \quad (4)$$

Из (9.126) получаем

$$\Gamma_{ts}^s = - (1/2) g_{lm} g_{,t}^{lm}, \quad (5)$$

т. е.

$$\partial \Gamma_{ts}^s / \partial g_{,k}^{lm} = - (1/2) g_{lm} \delta_t^k. \quad (6)$$

Далее, свертывая (9.125) по индексам k и l , имеем

$$g^{it} \Gamma_{it}^r = - \partial g^{rm} / \partial x^m - g^{rk} \Gamma_{kt}^t = - (g_{,m}^{rm} + g_{,m}^{mr}) / 2 + g^{rk} g_{lm} g_{,k}^{lm} / 2. \quad (7)$$

Следовательно, выражение

$$\partial (g^{it} \Gamma_{it}^r) / \partial g_{,k}^{lm} = - (\delta_l^r \delta_m^k + \delta_m^r \delta_l^k) / 2 + g^{rk} g_{lm} / 2 \quad (8)$$

симметрично по l и m [см. текст после (11.145)]. Используя (4)—(8), получаем

$$\partial A / \partial g_{,k}^{lm} = - (1/2) g^{rs} \Gamma_{rs}^k g_{lm} + \Gamma_{rs}^s \{ - (1/2) (\delta_l^r \delta_m^k + \delta_m^r \delta_l^k) + (1/2) g^{rk} g_{lm} \}. \quad (9)$$

Чтобы найти соответствующую производную от B , рассмотрим вариацию переменных $g_{,k}^{lm}$ при постоянных g^{ik} . Соответствующая вариация B равна

$$\delta B = \Gamma_{lm}^k \delta (g^{lr} \Gamma_{rk}^m + g^{mr} \Gamma_{rk}^l).$$

Если в последнем члене вариации B сделать циклическую перестановку индексов k, l, r, m , то это выражение с учетом (9.125) можно привести к виду

$$\delta B = -\Gamma_{lm}^k \delta g_{,k}^{lm}.$$

Следовательно,

$$\partial B / \partial g_{,k}^{lm} = -\Gamma_{lm}^k, \quad (10)$$

откуда, используя (3) и (9), находим искомую формулу

$$\delta \mathcal{L} / \partial g_{,k}^{lm} = \sqrt{(-g)} \left\{ \Gamma_{lm}^k - (\delta_l^k \Gamma_{mr}^k + \delta_m^k \Gamma_{lr}^r) / 2 - (g^{rs} \Gamma_{rs}^k / 2 - g^{rk} \Gamma_{rs}^s) g_{lm} \right\}. \quad (11)$$

Аналогичным образом можно найти производную от \mathcal{L} по g^{lm} . Однако гораздо удобнее исходить из (11.144), в соответствии с которым

$$\partial \mathcal{L} / \partial g^{lm} = \sqrt{(-g)} (R_{lm} - R g_{lm} / 2) + \partial / \partial x^k (\partial \mathcal{L} / \partial g_{,k}^{lm}). \quad (12)$$

Последний член можно получить из (11) дифференцированием по x^k , в то время как первый член можно взять из (9.242), (9.239). Кроме компонент метрического тензора и символов Кристоффеля, эти выражения содержат также производные от символов Кристоффеля. Поскольку \mathcal{L} и левая часть (12) не содержат последних, все члены справа, содержащие производные от символов Кристоффеля, нужно вычеркнуть. Дифференцируя (11) по x^k , получаем выражение, содержащее только $\sqrt{(-g)}$, g^{rs} , g_{lm} . Следовательно, правая часть (12) должна зависеть только от компонент метрического тензора и символов Кристоффеля. После длительных выкладок приходим к результату

$$\begin{aligned} \partial \mathcal{L} / \partial g^{lm} = \sqrt{(-g)} \left\{ \Gamma_{ls}^r \Gamma_{mr}^s - \Gamma_{lr}^r \Gamma_{ms}^s - \right. \\ \left. - (1/2)(g^{rs} \Gamma_{rs}^k - g^{rk} \Gamma_{rs}^s) (\Gamma_{m, lk} + \Gamma_{l, mk}) \right\} - 1/2 g_{lm} \mathcal{L}. \end{aligned} \quad (13)$$

Выражения (11) и (13) для производных от \mathcal{L} по $g_{,k}^{lm}$ и g^{lm} , как легко видеть, согласуются с (11.146) и (11.147).

Если теперь подставить (11) и (13) в (11.154) и использовать соотношение

$$(\sqrt{-g})_{,i} = -(1/2) \sqrt{-g} g_{lm} g_{,i}^{lm} = (1/2) \sqrt{-g} g^{lm} g_{lm, i} = \sqrt{-g} \Gamma_{ir}^r, \quad (14)$$

вытекающее из (9.126) и (9.128), то можно получить явный вид формулы для $\tau_{,i}^k$.

$$\tau_{,i}^k = (1/2\kappa) \left\{ \Gamma_{lm}^k (\sqrt{-g} g_{,i}^{lm})_{,i} - \Gamma_{ms}^s (\sqrt{-g} g^{km})_{,i} - \delta_i^k \mathcal{L} \right\}. \quad (15)$$

Вычислим теперь величину

$$A_i^k = (1/\kappa) \left\{ (\partial \mathcal{L} / \partial g_{,i}^{lm}) g_{,i}^{km} + g^{km} \partial \mathcal{L} / \partial g^{lm} \right\}. \quad (16)$$

Используя (9.125), (11) и (13), после длинных выкладок получим

$$\begin{aligned} A_i^k = (\sqrt{-g} / 2\kappa) \left\{ -\Gamma_{lm}^k (g^{lr} \Gamma_{ir}^m + g^{mr} \Gamma_{ir}^l) + \Gamma_{mr}^r (g^{ks} \Gamma_{is}^m + g^{ms} \Gamma_{is}^k) + \right. \\ \left. + \Gamma_{ir}^r (g^{lm} \Gamma_{lm}^k - g^{km} \Gamma_{ms}^s) \right\} - \delta_i^k \mathcal{L} / 2\kappa. \end{aligned} \quad (17)$$

Если снова учесть (9.125) и (14), станет ясным, что полученное выражение тождественно правой части (15), поэтому

$$A_i^k = \tau_{,i}^k. \quad (18)$$

Рассмотрим теперь величину s_i^{kl} из (11.175). Подставляя (11) в (11.175), находим

$$\begin{aligned} s_i^{kl} = (g^{km} / \kappa) \partial \mathcal{L} / \partial g_{,i}^{ln} = (g^{km} / \kappa) \left\{ \Gamma_{lm}^l - (\delta_l^l \Gamma_{mn}^n + \delta_m^l \Gamma_{ln}^n) / 2 - \right. \\ \left. - (g^{rs} \Gamma_{rs}^l - g^{rl} \Gamma_{rs}^s) g_{lm} / 2 \right\}. \end{aligned} \quad (19)$$

Чтобы выразить s_i^{kl} через метрический тензор и первые производные от его компонент, подставим в (19) выражения (14) и (9.77). Далее, используя (9.7) и уравнение

$$g_{il, n} g^{lk} = -g_{il} g_{,n}^{lk} \quad (20)$$

вытекающее из (9.7), после длительных, хотя и не слишком трудных вычислений найдем выражение

$$s_i^{kl} = \psi_i^{kl} + (1/2\kappa) [\delta_i^l \sqrt{-g} g^{km} - \delta_i^m \sqrt{-g} g^{kl}]_{,m} \quad (21)$$

где

$$\psi_i^{kl} = (g_{in}/2\kappa \sqrt{-g}) [(-g) (g^{kn} g^{lm} - g^{ln} g^{km})]_{,m} \quad (22)$$

Подробные вычисления можно найти в приложении к статье [171]. Поскольку выражение внутри квадратных скобок в (21) антисимметрично по l и m , то последний член (21) не дает вклада в $s_{i,l}^{kl}$. Следовательно,

$$\tilde{T}_{i.}^k = \psi_{i,l}^{kl} \quad (23)$$

что тождественно (11.177).

С помощью (20) уравнение (22) для ψ_i^{kl} можно переписать также в виде

$$\psi_i^{kl} = \chi_i^{kl}/2 + (1/2\kappa) \{ \delta_i^k (-g g^{lm})_{,m} / \sqrt{-g} - \delta_i^l (-g g^{km})_{,m} / \sqrt{-g} \}, \quad (24)$$

где мы положили

$$\begin{aligned} \chi_i^{kl} &= (\sqrt{-g}/\kappa) g_{in,m} (g^{km} g^{ln} - g^{kn} g^{lm}) = \\ &= (\sqrt{-g}/\kappa) (g_{in,m} - g_{im,n}) g^{km} g^{ln}. \end{aligned} \quad (25)$$

Далее, сворачивая эту величину и используя (20) и (14), получаем

$$\psi_r^i = -\chi_r^i = (1/\kappa) (-g g^{lm})_{,m} / \sqrt{-g}, \quad (26)$$

в результате чего (24) можно переписать в виде

$$2\psi_i^{kl} = \chi_i^{kl} + \delta_i^k \psi_r^l - \delta_i^l \psi_r^k. \quad (27)$$

1. Abraham M. Ann. Physik, 1903, Bd 10, S. 105.
2. Abraham M. Phys. Z., 1904, Bd 5, S. 576.
3. Abraham M. Rend. Circolo mat. Palermo, 1909, v. 28.
4. Abraham M. Ann. Physik, 1914, Bd 44, S. 537.
5. Abraham M., Fecker R. Theorie der Elektrizität. Leipzig, 6 Aufl. Teubner, 1933, Bd 2.
6. Adam M. G. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1958, Vol. 118, p. 61.
7. Ibid., 1959, Vol. 119, p. 460.
8. Adams W. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A. 1925, Vol. 111, p. 382.
9. Airy G. B. Proc. Roy. Soc., 1871, Vol. A20, p. 35.
10. Airy G. B. Philos. Mag., 1872, Vol. 43, p. 310.
11. Airy G. B. Proc. Roy. Soc., 1873, A21, p. 121.
12. Anderson C. D. Science, N. Y., 1932, Vol. 16, p. 238.
13. Anderson C. D. Phys. Rev., 1933, Vol. 43, p. 491.
14. Anderson C. D., Nedermayer S. H. Phys. Rev., 1933, Vol. 43, p. 1034.
15. Arzelies H. Nuovo Cimento, 1965, Vol. 35, p. 792.
16. Bainbridge K. T., Jordan E. B. Phys. Rev., 1937, Vol. 51, p. 384.
17. Beauregard O. C. de. Relativité restreinte. Paris, Gauthier—Villars, 1949.
18. Beck F. Z. Phys., 1953, Bd 134, S. 136.
19. Belinfante F. G. Physica's Grav, 1939, Vol. 6, p. 887.
20. Ibid., 1940, Vol. 7, p. 305.
21. Bergmann P. G. Introduction to the theory of relativity. N. Y., Prentice Hall, 1942, p. 169. [См. Бергман П. Г. Введение в теорию относительности. Пер. с англ. Под ред. В. Л. Гинзбурга. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1947.]
22. Bergmann P. G., Thomson R. Phys. Rev., 1953, Vol. 89, p. 400.
23. Bertotti B., Brill D., Krotkov R. Gravitation. N. Y., Wiley and Sons, 1962, p. 1.
24. Bethe H., Livingston M. S. Revs. Mod. Phys., 1937, Vol. 9, p. 370.
25. Blackett P. M. S., Occhialini G. P. S. Proc. Roy. Soc., 1933, Vol. A139, p. 699.
26. Blamont J. E., Roddier F. Phys. Rev. Lett., 1961, Vol. 7, p. 437.
27. Bohr N. In: A. Einstein: philosopher-scientist. Library of living philosophers, Illinois, Edvanston, 1949, Vol. 5, p. 201.
28. Bondi H. Cosmology. Cambridge University Press, 1961.
29. Bondi H., van der Burg M. G. J., Metzner A. W. K. Proc. Roy. Soc., 1962, Vol. A269, p. 21.
30. Bondi H., Gold T. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1948, Vol. 108, p. 252.
31. Born M. Ann. Physik, 1909a, Bd 28, S. 571.
32. Ibid., 1909b, Bd 30, S. 1.
33. Born M. Proc. Roy. Soc., 1934, Vol. A143, p. 410.
34. Bradley J. Philos. Trans. Roy. Soc. London A, 1728, Vol. 35, p. 637.
35. Brans G., Dicke R. H. Phys. Rev., 1961, Vol. 124, p. 925.
36. Brevik J. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1967, Vol. 36, N 3.
37. Ibid., 1970a, Vol. 37, N 11; 1970b, Vol. 37, N 13.
38. Broglie L. de. Thèse. Paris, 1924.
39. Bucherer A. H. Verhandl. dt. phys. Ges., 1908, Bd 6, S. 688.
40. Campbell W. W., Trumpler R. Univ. Calif. Publ. Astr. Lick Obs. Bull., 1923, Vol. 11, p. 41.
41. Ibid., 1928, Vol. 13, p. 130.
42. Cattaneo C. Nuovo cimento, 1958, Vol. 10, p. 318.
43. Ibid., 1959a, Vol. 11, p. 733.
44. Ibid., 1959b, Vol. 13, p. 237.
45. Cattaneo C. Atti Accad. naz. Lincei Rend, 1959c, Vol. 27, p. 54.
46. Cattaneo C. Ann. mat. pura ed appl., 1959d, Vol. 48, p. 361.
47. Cattaneo C. C. r. Acad. sci., Paris, 1963, Vol. 256, p. 3974.
48. Gedarholm C. J., Bland G. F., Havens B. L. e. a. Phys. Rev. Lett., 1958, Vol. 1, p. 342.
49. Champeny D. C., Isak G. R., Khan A. M. Phys. Rev. Lett., 1963, Vol. 7, p. 241.

50. **Champion F. C.** Proc. Roy. Soc., 1932, Vol. A136, p. 630.
51. **Chazy J. C. r.** Acad. sci., Paris, 1926, Vol. 182, p. 1134.
52. **Cockroft J. D., Walton G. T. S.** Proc. Roy. Soc., 1932, Vol. A137, p. 229.
53. **Cranshaw T. E.** Proceedings of the International School of Physics, Varenna, London. Academic Press, 1961, p. 208.
54. **Cranshaw T. E., Schiffer S. P., Whitehead A. N.** Phys. Rev. Lett., 1960, Vol. 4, p. 163.
55. **Curie J., Joliot F. C. r.** Acad. sci., Paris, 1933, Vol. 196, p. 1581.
56. **Dällenbach W.** Dissertation, Zürich, 1918.
57. **Dällenbach W.** Ann. Physik, 1919, Bd 58, S. 523.
58. **Dicke R. H.** Mach's principle and equivalence. Proceedings of the International School of Physics, Varenna, London, Academic Press, 1961.
59. **Dicke R. H.** Nature, 1964, Vol. 202, p. 432.
60. **Dicke R. H.** A Rev. Astr. Astrophys., 1970, Vol. 8, p. 297.
61. **Dicke R. H., Goldenberg, Mark H.** Phys. Rev. Lett., 1967, Vol. 18, p. 313.
62. **Dirac P. A. M.** The principles of quantum mechanics. Oxford, Clarendon Press, 1947,
63. **Eckart C.** Phys. Rev., 1940, Vol. 58, p. 919.
64. **Ehlers J., Kundt W.** Gravitation. N. Y., Wiley and Sons, 1962.
65. **Einstein A.** Ann. Physik, 1905a, Bd. 17, S. 891.
66. **Ibid.**, 1905b, Bd 18, S. 639.
67. **Einstein A.** Jb Radioakt. Elektronik, 1970a, Bd 4, S. 411.
68. **Einstein A.** Ann. Physik, 1907b, Bd 23, S. 37.
69. **Ibid.**, 1911, Bd 35, S. 898.
70. **Ibid.**, 1912, Bd 38, S. 355, 443.
71. **Einstein A.** Phys. Z., 1913, Bd 14, S. 1249.
72. **Einstein A.** Sber. preuss. Akad. Wiss., 1915, S. 788, 799, 831, 844.
73. **Einstein A.** Ann. Physik, 1916a, Bd 49, S. 769.
74. **Einstein A.** Sber. preuss. Akad. Wiss., 1916b, S. 688.
75. **Einstein A.** Über die spezielle und die allgemeine Relativitätstheorie. Braunschweig, Vieweg und Sohn, 1917a.
76. **Einstein A.** Sber. preuss. Akad. Wiss., 1917b, S. 142.
77. **Einstein A.** Naturwissenschaften, 1918a, Bd 6, S. 697.
78. **Einstein A.** Sber. preuss. Akad. Wiss., 1918b, S. 448.
79. **Einstein A.** Ann. Physik, 1918c, Bd 55, S. 241.
80. **Einstein A.** Revta Inst. Fis. Univ. nac. Tucumán, 1941, Vol. A2, p. 11.
81. **Einstein A., Lamb J.** Ann. Physik, 1908, Bd 26, S. 541.
82. **Einstein A., Pauli W.** Ann. Math., 1943, Vol. 44, p. 131.
83. **Einstein A., de Sitter W.** Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1932, Vol. 18, p. 213.
84. **Eötvös R. von** Math. naturw. Ber. Ung., 1890, Bd 8, S. 65.
85. **Eötvös R. von.** Ann. Physik, 1896, Bd 59, S. 354.
86. **Eötvös R. von., Pékar D., Fekete E.** Ann. Physik, 1922, Bd 68, S. 11.
87. **Essen L.** Nature, 1955, Vol. 175, p. 793.
88. **Ibid.**, 1957, Vol. 180, p. 1061.
89. **Fermi E.** Atti Accad. naz. Lincei Rend., 31, 1922, N 1, 21, 51.
90. **Finlay-Freundlich E.** Philos. Mag., 1954, Vol. 45, p. 303.
91. **Fizeau H. C. r.** Acad. sci., Paris, 1851, Vol. 33, p. 349.
92. **Fizeau H.** Ann. Phys. Chem., 1853, Vol. 3, p. 457.
93. **Fock V.** The theory of space, time and gravitation. London, Pergamon Press, 1959. [См. Фок В. А. Теория пространства, времени и тяготения. Изд. 2-е. М., Физматгиз, 1961.]
94. **Fokker A. D.** Philos. Mag., 1920a, Vol. 39, p. 404.
95. **Fokker A. D.** Proc. Sect. Sci. K. ned. Akad. Wet., 1920b, Bd 23, S. 729.
96. **Fokker A. D.** Relativitätstheorie. Groningen, Noordhoff, 1929, S. 170.
97. **Fresnel A. J.** Ann. Chim. Phys., 1818, Vol. 9, p. 57.
98. **Freud Ph. von.** Amer. J. Math., 1939, Vol. 40, p. 417.
99. **Freundlich E., Brunn A. V., Brück H. Z.** Astrophys., 1950, Vol. 1, p. 43.
100. **Freundlich E., Ledermann W.** Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1944, Vol. 104, 1944, Vol. 104, p. 1, 40.
101. **Friedländer B. J.** Absolute and relative Bewegung, Berlin, Simion, 1896.
102. **Friedman A. Z.** Phys., 1922, Bd. 10, S. 377; 1924, Bd 21, S.326. [См. Фридман А. А. УФН, 1967, т. 93, N 2, с. 280.]
103. **Gerlach W.** Handb. Phys., 1926, Vol. 22, p. 61.
104. **Gilman R. C.** A completely covariant integral theory of inertia and gravitation and its Machian implications. Thesis, Palmer Physical Laboratory, Princeton University, 1969.
105. **Ginsburg V. L.** Fortschr. Phys., 1957, Bd 4, S. 16.
106. **Groot S. R. de., Suttorp L. G.** Physica's Grav., 1967, Vol. 37, p. 284, 297.
107. **Groot S. R. de.** Physica's Grav., 1968, Vol. 39, p. 28, 41, 67, 77.
108. **Gürsey F.** Ann. Phys., 1959, Vol. 24, p. 211.
109. **Guye Ch. E., Lavanchy Ch.** Archs Sci. phys. nat., 1916, Vol. 41, p. 286, 353, 441.
110. **Hasenöhrl F.** Sber. Akad. Wiss. Wien, 1907, Bd 116, S. 1391.
111. **Heisenberg W.** Ann. Physik, 1938, Bd 32, S. 20.

112. Ferglotz G. Ann. Physik, 1911, Bd. 36, S. 493.
113. Hilbert D. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1915, S. 395.
114. *Ibid.*, 1917, S. 53.
115. Hoek M. Archs néerl. Sci., 1868, Vol. 3, p. 180.
116. Hubble E. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1929, Vol. 15, p. 168.
117. Hubble E. Astrophys. J., 1934, Vol. 79, p. 8.
118. Hubble E., Humason M. L. Astrophys. J., 1931, Vol. 74, p. 43.
119. Illingworth K. K. Phys. Rev., 1927, Vol. 30, p. 692.
120. Ives H. E., Stilwell G. R. J. Opt. Soc. America, 1938, Vol. 28, p. 215.
121. Joss G. Ann. Physik, 1930, Bd 7, S. 385.
122. Jüttner F. Ann. Physik, 1911, Bd 34, S. 856.
123. Kaufmann W. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1901, S. 143.
124. Kennedy R. J. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1926, Vol. 12, p. 621.
125. Kerr R. P. Phys. Rev. Lett., 1963, Vol. 11, p. 237.
126. Kerr R. P., Schild A. Atti Conv. Relatività gen., 1965, p. 222.
127. Kibble T. W. Nuovo cimento, 1966, Vol. B41, p. 72.
128. Klein F. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1918, S. 394.
129. Kroll N. M., Lamb W. E., Carnahan C. W. Proc. I. R. E., 1962, Vol. 50, p. 1694.
130. Landau L., Lifshitz E. The classical theory of fields. Reading, Mass. Addison-Wesley, 1951. [См. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Теория поля. Изд. 6-е, М., «Наука», 1973.]
131. Landsberg P. T. Proc. Roy. Soc., 1966, Vol. 89, p. 1007.
132. Langevin P. Scientia, Paris, 1911, Vol. 10, p. 31.
133. Langevin P. J. phys. theor. appl., 1913, Vol. 3, p. 553.
134. Laue M. von. Ann. Physik, 1911, Bd 35, S. 524.
135. Laue M. von. Phys. Z., 1912, Bd 13, S. 118.
136. Laue M. von. Die Relativitätstheorie, Braunschweig, Vieweg und Sohn, 3 Aufl., Bd 1, S. 29.
137. Leffert C. B., Donahue T. M. Ann. J. Phys., 1958, Vol. 26, p. 514.
138. Lemaître G. J. Math. and Phys., 1925, Vol. 4, p. 188.
139. Lemaître G. Ann. Soc. roy. Sci. med. nat. Brux., 1927, Vol. A47, p. 49.
140. *Ibid.*, 1933, Vol. A53, p. 51.
141. Levi-Civita T. Atti Accad. Naz. Lincei Rend., 1917, Vol. 5, N 26.
142. *Ibid.*, 1918, Vol. 5, N 27.
143. *Ibid.*, 1919, Vol. 5, N 28.
144. Lewis G. N., Tolman R. C. Philos. Mag., 1909, Vol. 18, p. 510.
145. Lodge O. Philos. Trans. Roy. Soc., London A, 1893, Vol. 184, p. 727.
146. Lorentz H. A. Verh. K. Akad. Wet., 1892, Bd 1, S. 74.
147. Lorentz H. A. Versl. gewone Vergad. Vis. — en natuurk. Afd. K. Akad. Wet. Amst., 1911, Vol. 20, p. 87.
148. Lorentz H. A. Das Relativitätsprinzip. Leipzig, Teubner, 1914.
149. Lorentz H. A. The theory of electrons. Leipzig, Teubner, 1916. [См. Лоренц Г. А. Теория электронов. Пер. с англ. Под ред. Т. П. Кравца. Изд. 2-е. М., Гостехиздат, 1956.]
150. Mc Vittie G. C. General relativity and cosmology. N. Y., Wiley and Sons, 1956. [См. Мак Витти Г. Общая теория относительности и космология. Пер. с англ. Под ред. В. В. Судакова. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1961.]
151. Mandelberg H. J., Witten L. J. Opt. Soc. America, 1962, Vol. 52, p. 529.
152. Marx G., Györgöi. Ann. Physik, 1955, Bd 16, S. 211.
153. Michelson A. A. Amer. J. Sci., 1881, Vol. 22, p. 20.
154. Michelson A. A., Morley E. W. Amer. J. Sci., 1886, Vol. 31, p. 377.
155. Michelson A. A. Amer. J. Sci., 1887, Vol. 34, p. 333.
156. Mie G. Ann. Physik, 1912a, Bd 37, S. 511.
157. *Ibid.*, 1912b, Bd 39, S. 1.
158. *Ibid.*, 1913, Bd 40, S. 1.
159. Miller D. C. Revs Mod. Phys., 1933, Vol. 5, p. 203.
160. Minkowski H. Nachr. Ges. Wiss. Göttingen, 1908, S. 53.
161. Minkowski H. Raum und Zeit. — Phys. Z., 1909, Bd 10, S. 104.
162. Minkowski H. Math. Ann., 1910, Bd 68, S. 472.
163. Minkowski H. Das Relativitätsprinzip. — Ann. Physik, 1915, Bd 47, S. 927.
164. Minkowski H., Born M. Math. Ann., 1910, Bd 68, S. 526.
165. Mitskevich N. V. Ann. Physik, 1961, Bd 12, S. 118.
166. Møller C. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1943, Vol. 20, N 19.
- 166a. Møller C. Commun. Dublin Inst. Advanced Stud. A, 1949, Vol. A, N 5.
167. Møller C. Ann. Inst. Henri Poincaré, 1950, Vol. 11, fasc. 5, p. 251.
168. Møller C. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1955, Vol. 30, N 10.
169. Møller C. Helv. phys. acta, 1956, p. 9, 54.
170. Møller C. Nuovo cimento, 1957, Vol. 6, p. 381.
171. Møller C. Ann. Physik, 1958, Bd 4, S. 347.
172. Møller C. Amer. J. Phys., 1959a, Vol. 27, p. 491.
173. Møller C. Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk., 1959b, Vol. 31, N 14.
174. Møller C. Selected problems in general relativity. Lecture notes. Brandeis University, Waltham, Mass. ed. Stachel and L. Pande, 1960.

175. Møller C. *Ann. Physik*, 1961a, Bd 12, S. 118.
176. Møller C. *Mat. Fys. Skr. Dan. Vid. Selsk.*, 1961b, Vol. 1, N 10.
177. Møller C. *Proc. Roy. Soc.*, 1962, Vol. A270, p. 306.
178. Møller C. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, 1964a, Vol. 34, N 3.
179. Møller C. Conservation laws in the tetrad theory of gravitation. *Proceedings of the Conference on the Theory of Gravitation*. Warszawa and Jablonna. Paris, Gauthier-Villars, 1964b, p. 31.
180. Møller C. *Nucl. Phys.*, 1964c, Vol. 57, p. 330.
181. Møller C. Energy and momentum carried by gravitational waves. *Proceedings of Galilei Conference*, Firenze, 1965a.
182. Møller C. *Proc. Internat. Conf. Elem. Particles*, Kyoto, 1965, 1965b, p. 213.
183. Møller C. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, 1966, Vol. 35, N 3.
184. *Ibid.*, 1967, Vol. 36, N 1.
185. *Ibid.*, 1968a, Vol. 36, N 16.
186. Møller C. *Thermodynamics in the special and general theory of relativity. Old and new problems in elementary particle physics*. London, Academic Press, 1968b.
187. Møller C. *Mat. Fys. Medd. Dan. Vid. Selsk.*, 1969, Vol. 37, N 4.
188. Mössbauer R. L. *Z. Phys.*, 1958, Bd 151, S. 124.
189. Neumann C. *K. sächs. Ges. Wiss. Leipzig*, 1874, Bd 26, S. 97.
190. Neumann G. *Ann. Physik*, 1914, Bd 45, S. 529.
191. Ott H. *Z. Phys.*, 1963, Bd 175, S. 70.
192. Papapetrou A. *Praktika Acad. Athenon*, 1939, Vol. 14, p. 540.
193. Pauli W. *Encyklopädie der mathematischen Wissenschaften*, 1920, Bd 2, S. 667. [см. Паули В. Теория относительности. Пер. с нем. М.—Л., Гостехиздат, 1947.]
194. Петров А. S. *Einstein-Räume*. Berlin, Akademie-Verlag, 1964. [См. Петров А. З. Пространства Эйнштейна. М., Физматгиз, 1961.]
195. Planck M. *Sber. preuss. Akad. Wiss.*, 1907, S. 542.
196. Planck M. *Ann. Physik*, 1908, Bd 76, S. 1.
197. Poincaré H. *C. r. Acad. sci.*, Paris, 1905, Vol. 140, p. 1504.
198. Poincaré H. *Rend. Circ. do mat. Palermo*, 1906, Vol. 21, p. 129.
199. Pound R. V., Rebka G. A. *Phys. Rev. Lett.*, 1960, Vol. 4, p. 337.
200. Pound R. V., Snider J. L. *Phys. Rev. Lett.*, 1964, Vol. 13, p. 539.
201. Pryce M. H. L. *Proc. Soc.*, 1948, Vol. A195, p. 62.
202. Rasetti F., Meitner L., Philipp K. *Naturwissenschaften*, 1933, Bd 21, S. 286.
203. Reissner H. *Ann. Physik*, 1916, Bd 50, S. 106.
204. Rindler W. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1956, Vol. 116, p. 662.
205. Rindler W. *Essential relativity*. N. Y., Van Nostrand—Reinhold Co., 1969.
206. Robertson H. P. *Philos. Mag.*, 1928, Vol. 5, p. 839.
207. Robertson H. P. *Proc. Nat. Acad. sci. U. S. A.*, 1929, Vol. 15, p. 822.
208. Robertson H. P. *Revs. mod. Phys.*, 1933, Vol. 5, p. 62.
209. Roll P. C., Krotkov R., Dicke R. H. *Ann. Physik*, 1969, Bd 26, S. 442.
210. Rosenfeld L. *Mem. Acad. roy. Belgique Cl. sci.*, 1940, Vol. 6, p. 30.
211. Rosenfeld L. *Theory of Electrons*. Amsterdam, North-Holland, 1951.
212. Sachs R. K. *Proc. Roy. Soc.*, 1962, Vol. A270, p. 103.
213. Sagnac G. *C. R. Acad. sci.*, Paris, 1913, Vol. 157, p. 708, 1410.
214. Sagnac G. *J. phys. theor. appl.* (5), 1914, Vol. 4, p. 177.
215. Sandage A. *Astrophys. J.*, 1968, Vol. 152, p. L149.
216. St. John. *Astrophys. J.*, 1928, Vol. 67, p. 195.
217. Scheye A. *Ann. Physik* (4), 1909, Bd 30, S. 805.
218. Schiff L. J. *Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A.*, 1960, Vol. 46, p. 871.
219. Schmutzer E. *Z. Naturforsch.*, 1964, Bd A19, S. 665.
220. Schmutzer E. *Relativistische Physik*. Leipzig, Teubner, 1968.
221. Schwarzschild K. *Sber. preuss. Akad. Wiss.*, 1916a, S. 189.
222. *Ibid.*, 1916b, S. 424.
223. Seeliger H. von. *Astron. Nachr.*, 1895, Bd 137, S. 129.
224. Seeliger H. von. *Sber. bayer. Akad. Wiss.*, 1896, Bd 26, S. 373.
225. Serini R. *Atti Accad. naz. Lincei Rend.* (5), 1918, Vol. 27, p. 235.
226. Shamir J., Fox R. *Nuovo cimento*, 1969, Vol. 82B, p. 258.
227. Shapiro I. I. *Phys. Rev. Lett.*, 1964, Vol. 13, p. 789.
228. Shapiro I. I., Ash M. E., Smith W. B. *Phys. Rev. Lett.*, 1968, Vol. 20, p. 1517.
229. Shapiro I. I., Pettengill G. H., Ash M. E. *e. a. Phys. Rev. Lett.*, 1968, Vol. 20, p. 1265.
230. Singer S. F. *Phys. Rev.*, 1956, Vol. 104, p. 11.
231. Sitter W. de. *Monthly Notices Roy. Astron. Soc.*, 1916a, Vol. 76, p. 699.
232. *Ibid.*, 1916b, Vol. 77, p. 155.
233. Sitter W. de. *Proc. Sect. Sci. K. ned. Akad. Wet.*, 1917a, Vol. 19, p. 1217.
234. *Ibid.*, 1917b, Vol. 20, p. 229.
235. Smith N. M., jr. *Phys. Rev.*, 1939, Vol. 56, p. 548.
236. Söderholm L. *Nuovo cimento*, 1968, Vol. B57, p. 173.
237. Sommerfeld A. *Ann. Physik*, 1910a, Bd 32, S. 749.
238. *Ibid.*, 1910b, Bd 33, S. 649.
239. *Ibid.*, 1910c, Bd 33, S. 670.

240. Southers L. Proc. Roy. Soc., 1910, Vol. A84, p. 325.
241. Stark J. Ann. Physik, 1906, Bd 21, S. 40.
242. Stark J., Hermann W., Kinoshita S. Ann. Physik, 1906, Bd 21, S. 462.
243. Stark J., Siegel K. Ann. Physik, 1906, Bd 21, S. 457.
244. Stokes C. G. Philos. Mag., 1845, Vol. 27, p. 9.
245. Stokes C. G. Math. phys. Pap., 1880, Vol. 1, p. 134.
246. Synge J. L. Proc. Roy. Irish Acad. A, 1950, Vol. 53, N 6, 83.
247. Synge J. L. Relativity: the general theory. Amsterdam, North-Holland, 1960, § 10. [См. Синг Дж. Л. Общая теория относительности. Пер. с англ. Под ред. А. З. Петрова. М., Изд-во иностр. лит-ры, 1963.]
248. Synge J. L., Schild A. Tensor calculus. University of Toronto Press, 1956, p. 274.
249. Tamm Ig. Journal of Physics (Moscow), 1939, Vol. 1, p. 439.
250. Taub A. H. Ann. Math., 1959, Vol. 53, p. 472.
251. Taub A. H. Phys. Rev., 1956, Vol. 103, p. 454.
252. Ibid., 1957, Vol. 107, p. 884.
253. Taub A. H. Ann. Inst. Henri Poincaré, 1968, Vol. 9, p. 153.
254. Thomas L. W. Philos. Mag., 1927, Vol. 3, p. 1.
255. Thirring H. Phys. Z., 1918, Bd 19, S. 33.
256. Ibid., 1921, Bd 22, S. 29.
257. Thirring H., Lense J. Phys. Z., 1918, Bd 19, S. 156.
258. Tolman R. C. Proc. Nat. Acad. Sci. U. S. A., 1929, Vol. 15, p. 297.
259. Tolman R. C. Phys. Rev., 1930, Vol. 35, p. 875.
260. Tolman R. C. Relativity, thermodynamics and cosmology. Oxford, Clarendon Press, 1934. [См. Толман Р. Относительность, термодинамика и космология. Пер. с англ. Под ред. Я. А. Смородинского. М., «Наука», 1971.]
261. Truesdei C. Six lectures on modern natural philosophy. N. Y., Springer, 1966, p. 72.
262. Walker A. G. Proc. Roy. Soc. Edinb., 1932, Vol. 52, p. 345.
263. Walker A. G. Monthly Notices Roy. Astron. Soc., 1933, Vol. 94, p. 159.
264. Weber J. Phys. Rev., 1960, Vol. 117, p. 306.
265. Weber J. Relativity, groups and topology. N. Y., Gordon and Breach, 1964, p. 875.
266. Weber J. Phys. Rev. Lett., 1966, Vol. 17, p. 1228.
267. Weber J. Physics of the moon. American Astronautical Society. California, Hawthorne, 1967.
268. Weber J. Phys. Rev. Lett., 1968, Vol. 21, p. 395.
269. Ibid., 1969, Vol. 22, p. 1320.
270. Ibid., 1970, Vol. 24, p. 276.
271. Weber J., Larson J. V. J. Geophys. Res., 1966, Vol. 71, p. 6005.
272. Weber W., Kohlrausch R. Ostwalds Klass. exakt. Wiss., 1856, N 142.
273. Weyl H. Ann. Physik, 1917, Bd 54, S. 117.
274. Weyl H. Raum—Zeit—Materie. Berlin, Springer, 1918.
275. Weyl H. Ann. Physik, 1919, Bd 59, S. 185.
276. Weyl H. Raum—Zeit—Materie. Berlin, Springer, 3 Aufl, 1920.
277. Weyl H. Phys. Z., 1923, Bd 24, S. 230.
278. Weyl H. Philos. Mag. 1930, Vol. 9, p. 936.
279. Weysenhoff J. von. Z. Phys., 1935, Bd 95, S. 391.
280. Ibid., 1937, Bd 107, S. 64.
281. Wheeler J. Gravitation and relativity. N. Y., Benjamin, 1964a.
282. Wheeler J. Relativity, groups and topology. N. Y., Gordon and Breach, 1964b.
283. Yukawa H. Proc. Math. Phys. Soc. Japan., 1935, Vol. 17, p. 48.
284. Zeeman P. Versl. genowe Vergad. wis. en naturk. Afd. K. Akad. Wet. Amst., 1914, Bd 23, S. 245.
285. Ibid., 1915, Bd 24, S. 18.
286. Zeeman P. Proc. Sect. Sci. K. ned. Akad. Wet., 1917, Bd 20, S. 542.
287. Zelmanof A. L. Dokl. Akad. Nauk SSSR, 1956, Vol. 107, p. 815. [См. «Докл. АН СССР», 1956, т. 107, с. 815.]

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЙ СПИСОК ЛИТЕРАТУРЫ

(составлен научным редактором перевода)

ИСТОРИЯ ТЕОРИИ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

1. Лауэ Макс. Статьи и речи. Сб. Составитель У. И. Франкфурт. Ред. Л. С. Фрейдман. М., «Наука», 1969.
2. Франкфурт У. И. Специальная и общая теория относительности. М., «Наука», 1968. (Большой список литературы).
3. Франкфурт У. И., Френк А. М. Оптика движущихся тел. М., «Наука», 1972.
4. Визгии В. П. Развитие взаимосвязи принципов инвариантности с законами сохранения в классической физике. М., «Наука», 1972. (Большой список литературы).
5. Иваненко Д. 50 лет советских работ по гравитации. — «Изв. вузов. Физика». Изд-во Томского ун-та, 1967, № 10, с. 30.
6. Иваненко Д. Главные периоды истории исследования гравитации. — «Вопросы истории естествознания и техники». М., «Наука», 1974, № 2—3, с. 42—48.
7. Tonnelat M. A. Histoire du Principe de Relativité. Paris, Flammarion, 1971. (Большой список литературы).
8. Harvey A. L. Amer. J. Phys., 1965, Vol. 33, p. 449. (Работы Абрагама, Нордстрема и др. предшественников ОТО).
9. McCormmach R. Einstein, Lorentz and the electron theory. In: Historical Studies in the Physical Sciences. Ed. R. McCormmach, University of Pennsylvania Press, Philadelphia, 1970, Vol. 2, p. 41.
10. Кудрявцев П. С. Курс истории физики. М., «Просвещение», 1974.

КЛАССИКИ РЕЛЯТИВИЗМА

1. Принцип относительности. Сборник работ классиков релятивизма. (Г. А. Лоренц, А. Пуанкаре, А. Эйнштейн, Г. Минковский.) Ред. и примеч. В. К. Фредерикса и Д. Иваненко. М.—Л., ОНТИ, 1935. (Установление СТО и ОТО).
2. Принцип относительности. М., Атомиздат, 1973. (Кроме предшественников и классиков СТО, комментариев из сборника 1935 г., здесь опубликованы статьи В. Паули, Эд. Уиттекера, М. Борна, Д. Холтона, Дж. Кесуани и составителя сборника А. А. Тяпкина по истории установления специальной теории относительности.)
3. Пуанкаре А. Научные труды. М., «Наука», 1973, т. 3. (Основные статьи по СТО и релятивизации гравитации с комментариями.)
4. Эйнштейн А. Собр. научн. трудов. В 4-х т. Пер. с нем. Под ред. И. Е. Тамма, А. Я. Смородинского, Б. Г. Кузнецова. М., «Наука». (Т. 1. Работы по СТО и ОТО, 1965; Т. 2. Единая теория поля, 1966. Работы Эйнштейна, цитируемые в книге Меллера, опубликованы в сборниках «Принцип относительности», 1935 г. и 1973 г. и переизданы в Т. 1. собр. научн. трудов.)
5. Hilbert D. Gött. Nachr., 1915, S. 395; 1917, S. 53.

МОНОГРАФИИ

1. Петров А. З. Новые методы в общей теории относительности. М., «Наука», 1966.
2. Уилер Дж. А. Гравитация, нейтрино и Вселенная. Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., Изд-во иностр. лит., 1962. (С доп. статьями Дж. Мак Витти и Ф. Хойля.)
3. Эддингтон А. С. Теория относительности. Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М.—Л., ГТТИ, 1934. (Основы ОТО; единые теории Вейля, Эддингтона.)
4. Скобельцын Д. В. Парадокс близнецов. М., «Наука», 1966.
5. Тредер Г. Ю. Теория гравитации и принцип эквивалентности. Пер. с нем. Под ред. Д. Иваненко. М., Атомиздат, 1973. (Принципы ОТО в историческом аспекте; новая теория Тредера.)
6. Иваницкая О. С. Обобщенные преобразования Лоренца и их применение. Минск, «Наука и техника», 1969.
7. Швингер Ю. Частицы, источники, поля. Пер. с англ. Под ред. А. М. Бродского. М., «Мир», 1973.

8. Б. Лумберг В. А. Релятивистская небесная механика. М., «Наука», 1972.
9. Гредер Г. Ю. Относительность инерции. Пер. с англ. Под ред. К. П. Станюковича, М., Атомиздат, 1975.
10. Lichnerowicz A. Théories relativistes de la Gravitation et de l'électromagnétisme. Masson, Paris, 1955.
11. Weinberg S. Gravitation and Cosmology. John Wiley, N. Y., 1972. (Готовится русский перевод. М., «Мир».)

СБОРНИКИ

1. Новейшие проблемы гравитации. Сб. переводов с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., Изд-во иностр. лит., 1963. (Статьи Меллера, Инфельда, Дирака, Пирани, Гупта, Бонди и др. Большой список литературы.)
2. Гравитация и относительность. Ред. Х. Цзю и В. Гоффман. Пер. с англ. Под ред. А. З. Петрова. М., «Мир», 1965. (Статьи Дикке, Вебера, Уилера и др.)
3. Теория групп и элементарные частицы. Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., «Мир», 1967. (Статьи Гюрши, Фрондел и др.)
4. Гравитация и теория относительности. Вып. 9. Под ред. А. П. Широкова. Изд. Казанского ун-та, 1973. (Авт.: В. И. Башков, В. Р. Кайгородов, Н. М. Петрова, Т. М. Кучина, Р. С. Сингатуллин, В. И. Голиков и др.)
5. Эйнштейновские сборники. Серия сборников, нумеруемых по годам. Составитель У. И. Франкфурт. М., «Наука». (Обзорные статьи по СТО, ОТО; переписка, дискуссии на конференциях и т. д.)
 1966. Эйнштейновский сборник. Под ред. И. Е. Тамма, Б. Г. Кузнецова. (Холтон: к генезису специальной теории относительности и др.)
 1967. Под ред. И. Е. Тамма, Г. И. Наана. (Козн: беседа с Эйнштейном; Наан: типы бесконечного и др.)
 1968. Под ред. И. Е. Тамма, Г. И. Наана. (Хель: к истории принципа Маха и др.)
 1969—1970. Под ред. И. Е. Тамма, Г. И. Наана. (Меллер: релятивистская термодинамика; Дикке: теория гравитации и наблюдения и др.)
 1971. Под ред. И. Е. Тамма, Г. И. Наана. (Переписка Эйнштейна и Борна; В. И. Родичев: системы отсчета; Я. А. Смородинский: геометрия Лобачевского и кинематика Эйнштейна и др.)
 1972. Под ред. В. Л. Гинзбурга, Г. И. Наана. М., «Наука», 1974. (Тер-Хаар, Вергеланд: термодинамика и статистическая механика в СТО; Гольдберг: к истории СТО. и др.)
 1973. Отв. ред. В. Л. Гинзбург. (Статьи по тахионам Сударшана и др.; Чандрасекар: об ОТО; Арзелье: история ОТО и др.). М., «Наука», 1974.
6. Wheeler J. A. Magic without magic. Ed. J. R. Klauder, W. H. Freeman Co. St. Francisco, 1972. (Сб. статей в честь 60 летия Дж. А. Уилера. Авт.: Вебер, Фейнман, Дикке, Пенроуз, де Витт, Я. Б. Зельдович, И. М. Халатников, Торн, Бергман и др.)
7. Gravitation. Ed. L. Witten. N. Y., John Wiley, 1962. (Фундаментальные обзоры главных проблем классической и квантовой ОТО: Бертогги, Брилл, Траутман, Пирани, Элерс и др.)

ТАХИОНЫ — ЧАСТИЦЫ СВЕРХСВЕТОВЫХ СКОРОСТЕЙ

1. Терлецкий Я. П. Парадоксы теории относительности. М., «Наука», 1966.
2. Юдин В. В. «Изв. вузов. Физика», Изд-во Томского ун-та, 1970, № 11, с. 131.
3. Sudarshan V. C., Dhar J. Phys. Rev., 1968, Vol. 174, p. 1808.
4. Magnani R., Recami F. Nuovo cimento Rivista, 1974, Vol. 4, N 2.

НОВЫЕ РЕШЕНИЯ И ПРОБЛЕМЫ КЛАССИЧЕСКОЙ ОТО

1. Дозморов И. И., Родичев В. И. «Изв. вузов СССР. Физика», Изд-во Томского ун-та, 1970, № 10, с. 32 (Метрика Керра и геоны.)
2. Буринский А. Я. ЖЭТФ, 1974, т. 66, с. 406.
3. Родичев В. И. Теория тяготения в ортогональном репере. М., «Наука», 1974.
4. Newman E. J., Winicour J. Math. Phys., 1974, Vol. 15, p. 426. (Метрика Керра.)
5. Plebanski J. Centro d. Investigation d. Inst. Politechnico Nac. Mexico. M. D. F., 1973. (Большая серия новых решений.)

ГРАВИТАЦИОННЫЕ ВОЛНЫ

1. Вебер Дж. Общая теория относительности и гравитационные волны. Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
2. Захаров В. Д. Гравитационные волны в теории тяготения Эйнштейна. М., «Наука», 1972.

3. **Weber J.** GRG (General Relativity and Gravitation), 1972, Vol. 3, p. 59; Phys. Rev. Lett., 1970, Vol. 25, p. 180.
4. **Bertotti B., Trevese D.** Nuovo cimento, 1972, Vol. 7B, p. 240; Astrophys. Lett., 1973, Vol. 14, p. 51.

ТОПОЛОГИЧЕСКИЙ АНАЛИЗ

1. **Гравитация и топология.** Сб. статей. Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., «Мир», 1966.
2. **Пенроуз Р.** Структура пространства—времени. Пер. с англ. Под ред. Я. Б. Зельдовича и И. Д. Новикова. М., «Мир», 1972.
3. **Доклады на гравитационно-топологическом симпозиуме в Берне, 1970.** GRG (General Relativity and Gravitation), Bern, 1971, Vol. 1. Lichnerowicz A., Carter B., Hawking S. W., Schmidt B., Kronheimer E. H., Seifert H. J.
4. **Hawking S. W., Penrose R.** Singularities, Causality and Cosmology. Cambridge University Press, 1972.
5. **Hawking S. W., Ellis C. F. R.** The Large scale structure of spacetime (Cambridge University Press, London, 1973).

МЕТОДОЛОГИЧЕСКИЕ ВОПРОСЫ

1. **Мостепаненко А. М.** Проблема универсальности основных свойств пространства и времени. Л., «Наука», 1969.
2. **Вяльцев А. Н.** Дискретное пространство — время. М., «Наука», 1966.
3. **Молчанов Ю., Турсунов А.** Проблемы пространства и времени в свете философских идей В. И. Ленина. М., «Коммунист», 1974, № 6, с. 163.
4. **Мостепаненко А. М., Мостепаненко М. В.** Четырехмерность пространства и времени. М. — Л., «Наука», 1966.
5. **Мостепаненко А. М.** Пространство и время в макро-, мега- и микромире. М., Изд-во политех. лит., 1974.
6. **Рейхенбах Т.** Направление времени. Пер. с англ. Под ред. М. Э. Омеляновского. М., Изд-во иностр. лит., 1962.
7. **Грюнбаум А.** Философские проблемы пространства и времени. Пер. с англ. Под ред. Ю. Б. Молчанова. М., «Прогресс», 1969.
8. **Свиридонов М. Н.** Необратимость времени. Канд. дис. М., Изд-во МГУ, 1974.
9. **Кузнецов Б. Г.** Принцип относительности в античной, классической и квантовой физике. М., Изд-во АН СССР, 1959 г.
10. **Havas P.** Rev. Mod. Phys., 1964, Vol. 36, p. 938.
11. **Albert Einstein.** Philosopher-Scientist. P. A. Schilpp, Ed., Edvanston — N. Y., Tudor, 1951. (Сб. статей. Авторы: Рейхенбах, Франк, Бриджмен, Лемэтр и др.)

НОВЫЕ ЭКСПЕРИМЕНТЫ В ОТО

1. **Брагинский В. Б.** Физические эксперименты с пробными телами. М., «Наука», 1970.
2. **Брагинский В. Б., Руденко В. Н.** Релятивистские гравитационные эксперименты. УФН, 1970, т. 100, с. 395.
3. **Сагитов М. У.** Постоянная тяготения и масса Земли. М., «Наука», 1969.
4. **Shapiro I.** Phys. Rev. Lett., 1971, Vol. 26, p. 27; GRG, 1972, Vol. 3, p. 135.
5. **Eötvös R.** Gesammelte Arbeiten (Herausg. P. Sefényi), Budapest, 1953 (Собрание трудов Р. Этвеша. Под ред. П. Шелени. Изд-во Венгерской Академии Наук.)

РЕЛЯТИВИСТСКАЯ АСТРОФИЗИКА И КОСМОЛОГИЯ

Основные вопросы

1. **Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.** Релятивистская астрофизика. М., «Наука», 1967
2. **Зельдович Я. Б., Новиков И. Д.** Теория тяготения и эволюция звезд. М., «Наука», 1971. (Основы ОТО, пульсары и т. д.)
3. **Озерной Л. М., Прилуцкий О. Ф., Розенталь И. Л.** Астрофизика высоких энергий. М., Атомиздат, 1973. (Проблемы астрофизики в связи с новейшей физикой элементарных частиц; электроны в Галактике; синхротронное излучение и т. д.)
4. **Пахольчик А.** Радиоастрофизика. Пер. с англ. Под ред. В. В. Виткевича. М., «Мир», 1973.
5. **Соколов А. А., Тернов И. М.** Синхротронное излучение. М., «Наука», 1971. (См. также «Изв. вузов СССР. Физика». Изд-во Томского ун-та, 1974, № 12, с. 5, 42.)
6. **Бербидж М., Бербидж Дж.** Квазары. Пер. с англ. Под ред. Н. С. Кардашева. М., «Мир», 1968.
7. **Пульсары.** Сб. статей (Хьюиш, Голд и др.) Пер. с англ. Под ред. В. В. Виткевича. М., «Мир», 1971.

8. **Шма Д.** Современная космология. Пер. с англ. Под ред. Н. С. Кардашева. М., «Мир», 1973.
9. **Зельманов А. Л.** Космология. — В сб.: Развитие астрономии в СССР. М., «Наука», 1967.
10. **Rees M., Ruffini R., Wheeler J. A.** Black holes, gravitational waves and Cosmology. N. Y., Gordon—Breach, 1972. (Готовится русский перевод. М., «Мир», 1975.)
11. **Press W. H., Eardley D. M.** Ann. Rev. Astron. and Astrophys., 1975, Vol. 13. (Черные дыры).
12. **Thorne K. S.** Astrophys. J., 1969, Vol. 158, p. 997; 1969, 1968, Vol. 148, p. 51.
13. **Gravitational Radiation and Gravitational Collapse.** Ed. C. Dewitt—Morette (J. B. Bardeen, Я. Б. Зельдович и др. Доклады Коперниканского юбилейного конгресса, Варшава, 1973.)
14. **Mavridés S.** L'univers relativiste. Masson, Paris, 1973.
(Согласно последнему анализу Сэндэйджа, лучшее значение постоянной Хаббла лежит вблизи 50 км/млс-сек), а не очень точные определения ее производной указывают на замедление расширения Вселенной.)

Уравнение состояния сверхплотной материи и астрофизика

1. **Проблемы современной космологии.** Изд. 2. М., «Наука», 1972, Сб. под ред. В. А. Амбарцумяна. (Саакян Г. С. Теория сверхплотных небесных тел и др.)
2. **Уилер Дж. А. и др.** Теория гравитации и гравитационный коллапс. Пер. с англ. М., «Мир», 1972.
3. **Максюков Н. И.** «Изв. вузов СССР. Физика». Изд-во Томского ун-та, 1974, № 2, с. 41.
4. **Hagedorn A.** Nuovo Cimento A, 1968, Vol. 56, p. 1027.

Кварки в звездах

1. **Иваненко Д., Курдгелаидзе Д. Ф.** «Астрофизика», Ереван, 1965, т. I, с. 479. Nuovo Cimento, 1969, Vol. 2, p. 13.
2. **De Sabbata V.** Nuovo cimento, 1966, Vol. 45, p. 513.
3. **Dashen R.** Astrophys. J., 1971, Vol. 9, p. 163.

КВАНТОВАЯ ГРАВИТАЦИЯ И ЭЛЕМЕНТАРНЫЕ ЧАСТИЦЫ

1. **Салам А.** Вычисление перенормировочных констант. — В сб.: Квантовая гравитация и топология. Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., «Мир», 1973.
2. **Блохинцев Д. И.** Пространство и время в микромире. М., «Наука», 1970.
3. **Гейзенберг В.** Введение в единую полевую теорию элементарных частиц. Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., «Мир», 1959.
4. **Иваненко Д.** Acta Phys. Acad. Sci. (Budapest), 1972, Vol. 32, p. 341; Tensor, 1972, Vol. 25, p. 161 (Яран); «Изв. вузов СССР. Физика». Изд-во Томского ун-та, 1974, N 12, с. 35; А. Соколов, Д. Иваненко. «Квантовая теория поля». ч. 2. ГТТИ, 1952.
5. **Марков М. А.** ЖЭТФ, 1966, т. 48, с. 9.
6. **Брилл Д., Гоуди Р.** Квантование общей теории относительности. — В сб.: Квантовая гравитация и топология. Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., «Мир», 1973. (Фундаментальный обзор. Канонический формализм, суперпространство и др.)
7. **Wheeler J. A.** Summary and perspectives, is physics, legislated by cosmogony. In: Quantum Gravity. Eds R. Penrose, C. Isham, D. Sciama. Clarendon Press, Oxford, 1975.
8. **Поктекорво Б. М.** «Изв. вузов СССР. Физика». Изд-во Томского ун-та, 1974, № 12, с. 18.

ОБОБЩЕНИЯ ОТО

Компенсационная трактовка гравитации как калибровочного поля

1. **Элементарные частицы и компенсирующие поля.** Пер. с англ. Под ред. Д. Иваненко. М., «Мир», 1964. (Авт.: Янг — Миллс, Утияма, Киббл, Сакураи.)
2. **Фролов Б. Н.** «Вестн. Моск. ун-та», 1963, № 5, с. 48; 1964, № 2, с. 56.
3. **Сарданашвили Г. А.** «Изв. вузов СССР. Физика», Изд-во Томского ун-та, 1974, № 12, с. 128
4. **Коноплева Н. П., Попов В. Н.** Калибровочные поля. М., Атомиздат, 1972.
5. **Fock V. A., Ivanenko D.** Comptes Rendues Acad. Sci., Paris, 1929, Vol. 188, p. 1480.
6. **Bade W. L., Jehle H.** Rev. Mod. Phys., 1953, Vol. 25, p. 714. (Спиноры в римановой геометрии, обзор.)

Ослабление константы тяготения и скалярно-тензорная теория

1. **Горелик Г. Е.** «Изв. вузов СССР. Физика». Изд-во Томского ун-та, 1973, № 1, с. 56.
2. **Dirac P. A. M.** Proc. Roy. Soc. London A, 1938, Vol. 165, p. 199.
3. **Ibid**, 1974, Vol. 338, p. 466.

- Jordan P. *Schwerkraft und Weltall* (2 Aufl. Vieweg, Braunschweig, 1955); *Z. Phys.*, 1960, Bd 157, S. 112.
5. Jordan P. *Die Expansion der Erde*. Vieweg, Braunschweig, 1966.

Кручение

1. Пономарев В. Н. *Bull. Acad. Pol. Sci.*, 1971, Vol. 19, p. 545; Канд. дисс. М., Вести. Моск. ун-та, 1974, № 5.
2. Родичев В. И. *ЖЭТФ*, 1961, т. 40, с. 1469.
3. Cartan E. *Comptes Rendues, Paris*, 1922, Vol. 174, p. 593; *Ann. Ecole. Norm. Super*, 1923, Vol. 40, p. 325. *Oeuvres. Paris*, Vol. 1, 2.
4. Ivanenko D. *Gravitation and unified picture of matter. Atti d. Convegno s. Relativita Generale. Firenze 1964* (Barbera Ed. 1965.)
5. Trautman A. *Bull. Acad. Polon. Sci. (math., astr., phys.)*, 1972, Vol. 20, p. 185, p. 103, p. 895.
6. Hehl F. W. *GRG (General Relativity and Gravitation) Bern*, 1973, Vol. 4, p. 333; *Abhandl. d. Braunsch. Wiss. Ges.*, 1966, Bd 18, S. 98; *Z. Phys.*, 1965, Bd 187, S. 478.

Геометризованные „единые“ теории

1. Эйнштейн А. *Собр. научн. тр. М., «Наука», 1966, т. 2.*
2. Rosen N. *Ann. der Phys.*, 1940, Bd 57, S. 147; *GRG*, 1974, Vol. 5, p. 49 (би-метризм). Пугачев Я. И. *«Изв. вузов СССР. Физика»*. Изд-во Томского ун-та, 1961, № 1, с. 31 (би-метризм).
3. Kaluza T. *Berlin Ber.*, 1921, S. 966. (Пятимерие.)

Матричная линейная геометрия

1. Фок В. А., Иваненко Д. *Z. Phys.*, 1929, Bd 54, S. 798.
2. Mimura Y., Takeo N. *Wave geometry I, II. Sci. Reports № 4*, 1962; 1967. (Hiroshima University, Japan.)

Каталог „жизнеспособных“ в пост-квантовском приближении теорий

1. Иваненко Д. «Каталог теорий гравитации». Доп. статья в книге Г.-Ю. Тредера. *Теория гравитации и принцип эквивалентности*. Пер. с нем. М., Атомиздат, 1973.
2. Sexl R. *Fortschritte d. Phys.*, 1957, Bd 15, S. 269.
3. Will C. M. *Astrophys. J.*, 1971, Vol. 169, p. 141; *Proc. 56th Course School «Enrico Fermi», V. Bertotti, Ed.*, 1972. (Обзор новейших обобщений ОТО, сравнение с экспериментом.)
4. OAP — 289 (1972) (Orange aid preprint series in nuclear, atomic and relativistic astrophysics (California Institute of Technology, Pasadena, USA). (Выпуск № 289 важной серии препринтов работ по современной астрофизике.)

ТРУДЫ КОНФЕРЕНЦИЙ

1. *Тезисы докладов и программа 1-й советской гравитационной конференции*. Под ред. Д. Иваненко. М., Изд-во МГУ, 1961.
2. *Тезисы докладов 2-й советской гравитационной конференции*. Под ред. М. М. Мирианашвили. Изд-во Тбилисского ун-та, 1965.
3. *Современные проблемы гравитации*. Сб. трудов 2-й советской гравитационной конференции. Под ред. Д. Иваненко. Изд-во Тбилисского ун-та, 1968.
4. *Тезисы докладов 3-й советской гравитационной конференции*. Изд-во Ереванского ун-та, 1972.
5. *Тезисы докладов 5-й Международной конференции по гравитации и общей теории относительности GR5 (GR-5)*, русское и англ. изд. Тбилисского ун-та, 1968. Ред. В. А. Фок.
6. *Atti d. Convegno S. Relativita Generale. Barbera Ed. Firenze, 1965*. Доклады юбилейной Галилеевской конференции 1964 г. (Авт.: Меллер, Тоннела, Розен, Жехеньо, В. А. Фок, Боннор, Бонди Лихнерович, Мерсье, Д. Д. Иваненко, Керр и Шильд, Тредер и др.)
7. *Proc. Conference on Experimental tests of Gravitation Theories (Nasa—JPL Technical Memorandum 33—499. Ed. R. W. Davies, 1971)*.
8. *Relativity Conference in the Midwest, Cincinnati, Ohio, 1969. Plenum Publ. L. Witten, Ed.*, 1970. Статьи Э. Гута по истории эйнштейновской ОТО, Фишера и де Витта о суперпространстве и др.
9. Доклады 6-й Международной гравитационной конференции. GR-6. Копенгаген, 1971. Опубликованы в журн. *GRG* т. 2 и 3 (1972); *M. Camesind GRG*, 1971, Vol. 2, p. 387. (Общий обзор); А. Траутман. *GRG*, 1972, Vol. 3, p. 167 (резюме).
10. Доклады 7-й Международной гравитационной конференции. GR-7, Tel Aviv, 1974. (Auth.: M. Rees, W. H. Press, P. Chrzanowski, L. L. Smarr, F. Hehl, R. Utiyama e. a.) Публикация в журн. *GRG* 1975, Vol. 6, № 1.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие к переводу	5
Предисловие ко второму изданию.	7
Из предисловия к первому изданию	8
Глава 1. Основы специальной теории относительности. Исторический обзор	10
§ 1.1. Принцип относительности в механике. Преобразования Галилея	10
§ 1.2. Специальный принцип относительности.	12
§ 1.3. Инвариантность фазы плоской волны.	13
§ 1.4. Преобразование характеристик плоской волны.	14
§ 1.5. Эффект Доплера.	15
§ 1.6. Скорость света в вакууме	16
§ 1.7. Скорость света в преломляющих средах.	19
§ 1.8. Эксперименты Хука и Физо.	20
§ 1.9. Электронная теория Лоренца.	22
§ 1.10. Соответствие между теорией эфира и принципом относительности для всех эффектов первого порядка. Принцип Ферма	23
§ 1.11. Аберрация света	25
§ 1.12. Эксперимент Майкельсона	26
§ 1.13. Гипотеза о сокращении.	27
§ 1.14. Справедливость принципа относительности для всех физических явлений	28
Глава 2. Релятивистская кинематика	29
§ 2.1. Одновременность событий.	29
§ 2.2. Относительность одновременности.	30
§ 2.3. Специальные преобразования Лоренца	32
§ 2.4. Общие преобразования Лоренца	35
§ 2.5. Сокращение размеров движущихся тел.	38
§ 2.6. Запаздывание движущихся часов. Парадокс часов	40
§ 2.7. Преобразование скоростей частиц.	42
§ 2.8. Последовательные преобразования Лоренца. Прецессия Томаса.	44
§ 2.9. Преобразование параметров волны в теории относительности.	46
§ 2.10. Групповая скорость в движущихся средах.	47
§ 2.11. Эффект Доплера, аберрация света и эффект увлечения в теории относительности.	49
Глава 3. Релятивистская механика	53
§ 3.1. Масса и импульс частицы	53
§ 3.2. Сила, работа, кинетическая энергия.	55
§ 3.3. Преобразование силы, импульса и энергии.	56
§ 3.4. Гиперболическое движение. Движение электрически заряженной частицы в постоянном магнитном поле	58
§ 3.5. Эквивалентность массы и энергии.	60
§ 3.6. Неупругие столкновения. Масса замкнутой системы частиц.	64
§ 3.7. Экспериментальное подтверждение релятивистской механики	66
Глава 4. Четырехмерная формулировка теории относительности: тензорное исчисление	71
§ 4.1. Четырехмерное представление преобразований Лоренца	71
§ 4.2. Лоренцево сокращение и замедление хода движущихся часов в четырехмерном представлении.	74
§ 4.3. Ковариантность законов природы в четырехмерной формулировке	75
§ 4.4. Четырехмерный линейный элемент, или интервал. 4-векторы.	76

§ 4.5.	4-скорость, 4-ускорение. Волновой вектор. Четырехмерная групповая скорость.	77
§ 4.6.	4-импульс и 4-сила. Основные уравнения механики точки в четырехмерной векторной форме.	80
§ 4.7.	Тензоры второго ранга.	83
§ 4.8.	Угловой момент и момент силы в четырехмерной форме.	86
§ 4.9.	Тензоры произвольного ранга.	86
§ 4.10.	Псевдотензоры	87
§ 4.11.	Символ Леви-Чивита	87
§ 4.12.	Дуальные тензоры.	88
§ 4.13.	Инфинитезимальные преобразования Лоренца. Преобразования без вращения.	92
§ 4.14.	Последовательные преобразования Лоренца.	93
§ 4.15.	Последовательные системы покоя при произвольном прямолинейном и равномерном вращательном движении частицы.	95
§ 4.16.	Тензорные и псевдотензорные поля. Тензорный анализ.	97
§ 4.17.	Теорема Гаусса для четырехмерного пространства.	99
§ 4.18.	Основные уравнения механики для некогерентной материи.	101
§ 4.19.	Тензор кинетической энергии.	106
Глава 5.	Электродинамика в вакууме.	108
§ 5.1.	Фундаментальные уравнения электродинамики в вакууме. 4-плотность тока электрического заряда	108
§ 5.2.	Ковариантность уравнений электродинамики при преобразованиях Лоренца. Тензор электромагнитного поля	110
§ 5.3.	4-Потенциал. Калибровочные преобразования.	111
§ 5.4.	Интегральное представление 4-потенциала.	112
§ 5.5.	Запаздывающие потенциалы. Потенциалы Лиенара — Вихерта для точечного заряда.	113
§ 5.6.	Поле равномерно движущегося точечного заряда	116
§ 5.7.	Электромагнитные силы, действующие на заряженную материю.	118
§ 5.8.	Вариационный принцип в электродинамике.	119
§ 5.9.	Электромагнитный тензор энергии.	121
§ 5.10.	Полный тензор энергии.	123
Глава 6.	Общая теория замкнутых систем. Механика упругих сред. Теория поля.	124
§ 6.1.	Законы сохранения для замкнутых систем.	124
§ 6.2.	4-Импульс, 4-тензор углового момента для замкнутых островных систем.	126
§ 6.3.	Центр масс.	128
§ 6.4.	Фундаментальные уравнения механики упругих сред.	131
§ 6.5.	Тензор напряжений и тензор энергии. Трансформационные свойства	136
§ 6.6.	Идеальная жидкость.	139
§ 6.7.	Скалярные мезонные поля. Общая теория поля.	142
Глава 7.	Незамкнутые системы. Электродинамика диэлектриков и парамагнетиков. Термодинамика.	145
§ 7.1.	Общие свойства незамкнутых систем	145
§ 7.2.	Статические незамкнутые системы	147
§ 7.3.	Электростатические системы. Классические модели электрона.	148
§ 7.4.	Основные уравнения электродинамики стационарной материи.	150
§ 7.5.	Уравнения Минковского для равномерно движущихся сред.	151
§ 7.6.	Материальные соотношения в четырехмерной формулировке. Граничные условия.	154
§ 7.7.	Электромагнитный тензор энергии и плотность 4-силы.	155
§ 7.8.	Скорость распространения энергии световой волны в движущейся преломляющей среде	159
§ 7.9.	Сплошная среда с внутренней теплопроводностью.	162
§ 7.10.	Первый закон релятивистской термодинамики. Трансформационные свойства 4-импульса подведенного тепла.	167
§ 7.11.	Второй закон релятивистской термодинамики.	170
§ 7.12.	Термодинамические потенциалы однородных изотропных сред.	172
§ 7.13.	Идеальный газ. Излучение черного тела.	174
Глава 8.	Основы общей теории относительности.	179
§ 8.1.	Общий принцип относительности.	179
§ 8.2.	Принцип эквивалентности.	180
§ 8.3.	Равномерно вращающаяся система координат. Пространство и время в общей теории относительности.	182
§ 8.4.	Неевклидова геометрия. Метрический тензор.	184

§ 8.5.	Геодезические линии.	186
§ 8.6.	Непосредственное измерение метрики. Геометрия n -мерного пространства.	188
§ 8.7.	Общие ускоренные системы отсчета. Наиболее общие допустимые преобразования координат.	189
§ 8.8.	Пространственные измерения и измерения времени в произвольной системе отсчета. Экспериментальное определение коэффициентов g_{ik}	192
§ 8.9.	Пространственная геометрия во вращающейся системе отсчета.	195
§ 8.10.	Мировые линии свободных частиц и световых лучей.	197
§ 8.11.	Динамические гравитационные потенциалы.	199
§ 8.12.	Скорость хода движущихся стандартных часов в гравитационном поле.	200
§ 8.13.	Преобразование координат в фиксированной системе отсчета	201
§ 8.14.	Другие простые примеры ускоренных систем отсчета	203
§ 8.15.	Жесткие системы отсчета с произвольно движущимся началом.	205
§ 8.16.	Жесткие системы отсчета, движущиеся в направлении оси X	206
§ 8.17.	Парадокс часов.	208
Глава 9. Неустраняемые гравитационные поля. Тензорное исчисление в римановом пространстве общего типа		
§ 9.1.	Четырехмерная формулировка общего принципа относительности и принципа эквивалентности.	213
§ 9.2.	Контравариантные и ковариантные компоненты 4-вектора	214
§ 9.3.	Тензорная алгебра.	217
§ 9.4.	Псевдотензоры. Дуальные тензоры.	219
§ 9.5.	Геодезические линии. Формулы Кристоффеля	222
§ 9.6.	Локальные псевдодекارتовы координаты и локальные инерциальные системы.	223
§ 9.7.	Параллельный перенос векторов	229
§ 9.8.	Абсолютная производная. Перенос Ферми—Уолкера.	231
§ 9.9.	Локальные жесткие невращающиеся системы отсчета с произвольно движущимся началом. Прецессия Фоккера	233
§ 9.10.	Тензорный анализ. Ковариантное дифференцирование.	238
§ 9.11.	Ковариантное дифференцирование тензорных плотностей.	241
§ 9.12.	Интегральные теоремы.	243
§ 9.13.	Тензор кривизны.	244
§ 9.14.	Свертки тензора кривизны.	246
§ 9.15.	Специальные системы координат в конечной области пространства—времени.	246
§ 9.16.	Калибровочно-инвариантные величины. Стандартные 4-тензоры.	251
Глава 10. Влияние гравитационных полей на физические явления.		
§ 10.1.	Фундаментальные уравнения механики точки.	263
§ 10.2.	Физическая интерпретация уравнений механики точки. Стандартные уравнения движения. Стандартная одновременность.	265
§ 10.3.	Координатная форма уравнений движения.	271
§ 10.4.	Лагранжева и гамильтонова формы уравнений движения.	275
§ 10.5.	Распространение световых сигналов. Принцип Ферма	279
§ 10.6.	Распространение световых волн. Фотоны.	283
§ 10.7.	Доплеровский и эйнштейновский сдвиги спектральных линий	287
§ 10.8.	Механика сплошных сред.	292
§ 10.9.	Уравнения электромагнитного поля.	298
§ 10.10.	Электромагнитные силы и тензор энергии.	300
Глава 11. Основные законы гравитации в общей теории относительности.		
§ 11.1.	Уравнения гравитационного поля и законы механики.	303
§ 11.2.	Линейное приближение слабого поля.	306
§ 11.3.	Простейшие случаи применения линейных уравнений слабого поля	309
§ 11.4.	Эквивалентные системы координат. Сферическая симметрия.	312
§ 11.5.	Статические системы со сферической симметрией.	313
§ 11.6.	Внешнее решение Шварцшильда.	314
§ 11.7.	Внутреннее решение Шварцшильда для идеальной жидкости.	317
§ 11.8.	Вариационный принцип для гравитационного поля.	321
§ 11.9.	Комплекс энергии—импульса и законы сохранения энергии и импульса для изолированных систем	324
§ 11.10.	Суперпотенциал. Полные энергия и импульс изолированной системы.	328
§ 11.11.	Неизолированные островные системы. Гравитационное излучение.	331
§ 11.12.	Другие формы комплекса энергии—импульса.	338
§ 11.13.	Угловой момент изолированных систем.	342

Глава 12. Экспериментальная проверка общей теории относительности. Космологические проблемы.	346
§ 12.1. Эйнштейновское, или гравитационное, смещение спектральных линий.	346
§ 12.2. Смещение перигелия Меркурия.	351
§ 12.3. Гравитационное отклонение света.	354
§ 12.4. Дальнейшие проверки общей теории относительности.	356
§ 12.5. Космологические модели.	361
§ 12.6. Вселенная Эйнштейна.	362
§ 12.7. Вселенная де Ситтера.	366
§ 12.8. Нестатические модели однородной изотропной Вселенной.	370
§ 12.9. Модели Вселенной, совместимые с ОТО. Вселенная Фридмана	374
§ 12.10. Соотношения между наблюдаемыми астрономическими величинами.	377
Приложение	380
1. Теорема Гаусса.	380
2. Преобразование 4-плотности тока.	381
3. Плоские волны в однородной изотропной среде.	382
4. Символы Кристоффеля в терминах $\gamma_{\mu\nu}$, γ_{μ} , χ и их производных	382
5. Условия для плоского пространства.	383
6. Производные от функции \mathcal{L} через $g^{lm}_{,k}$ и g^{lm} и выражения для суперпотенциала.	384
Список литературы.	387
Дополнительный список литературы (составлен научным редактором перевода)	392

Кристиан Мёллер

ТЕОРИЯ ОТНОСИТЕЛЬНОСТИ

Редактор *Г. П. Паршина*

Художественный редактор *А. Т. Кирьянов*

Технический редактор *И. Н. Подшебякин*

Корректор *Е. Д. Рагулина*

Сдано в набор 8/X 1974 г. Подписано к печати 18/IV 1975 г. Формат 70×108^{1/16}.
 Бумага типографская № 2. Усл. печ. л. 35. Уч. изд. л. 31,88. Тираж 11000 экз.
 Зак. изд. 72110. Зак. тип. 1174. Цена 3 р. 54 к.
 Атомиздат 103031 Москва, К-31, ул. Жданова, 5

Московская типография № 4 Союзполиграфпрома при Государственном комитете
 Совета Министров СССР по делам издательств, полиграфии и книжной торговли
 Москва, И-41, Б. Переяславская ул., дом 46