БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА
МАТЕМАТИКА

К. Надь

Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля

STATE VECTOR SPACES WITH INDEFINITE METRIC IN QUANTUM FIELD THEORY

by

K. L. NAGY

Akadémiai Kiadó, Budapest 1966

БИБЛИОТЕКА СБОРНИКА «МАТЕМАТИКА»

К. НАДЬ

Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля

Перевод с английского
А. С. ХОЛЕВО

Под редакцией
Б. В. МЕДВЕДЕВА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1969

УДК 517.5/9

В монографии, основанной на работах автора, рассматриваются общие свойства пространств состояний с индефинитной метрикой в приложении к физическим теориям. Затронуты вопросы, связанные с вероятностной интерпретацией и аналитическими свойствами амплитуд в теории поля.

Книга рассчитана на читателя, обладающего известной физико-математической культурой.

Она будет полезна физикам-теоретикам и математикам, интересующимся приложениями к физике.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3
25-69

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Предложение привлечь для описания состояний системы в квантовой теории поля функциональные пространства с индефинитной метрикой было впервые сформулировано Дираком в 1942 году. Оно было, конечно, продиктовано желанием найти новый способ „борьбы с расходимостями“, которая была в те годы даже более актуальной, чем сейчас. Самым грубым образом возникающую проблему можно описать примерно так. При вычислениях по квантовомеханическим правилам приходится проводить суммирования по полной системе состояний (часто говорят о сумме по промежуточным состояниям). При переходе к квантовой теории поля, где мы имеем дело с квантовомеханическими системами с бесконечным числом степеней свободы, такие суммы оказываются во многих важных случаях расходящимися, так как число возможных состояний данной энергии растет с энергией слишком быстро, не компенсируясь в должной степени падением вероятностей перехода в такие состояния. Именно в этом обстоятельстве лежат по существу корни всех трудностей с бесконечностями.

Особенно неприятный случай подстерегает нас тогда, когда мы сталкиваемся с такими суммами по полной системе, у которых все члены положительны — это получается, если мы имеем дело не с произведениями пар матричных элементов, а с квадратами модуля; так бывает в том случае, когда начальное и конечное состояния одинаковы, т. е. во всех задачах, связанных с самодействием. Теперь не могут уже помочь никакие ухищрения со специальными искусственными предписаниями о порядке выполнения действий — расходящийся ряд с положительными членами останется расходящимся независимо от порядка суммирования.

Тут-то и приходит на помощь введение индефинитной метрики. Если угодно, мы вводим в теорию поля индефинитную метрику, чтобы сделать абсолютно расходящиеся интегралы условно расходящимися; затем можно будет сделать их условно сходящимися надлежаще подобранным специальным порядком действий и останется только отделаться от самой индефинитной метрики. Иногда это удается сделать с помощью предельного перехода — тогда говорят, следуя Паули и Вилларсу, о „формалистических" теориях или о промежуточной регуляризации, которая может сопровождаться „вычитаниями". Иногда — в „реалистических" теориях — оставляют „нефизические" состояния с неположительной нормой до самого конца — тогда приходится прибегать к специальным ухищрениям, чтобы эти состояния не могли проявиться при физических процессах.

За прошедшую после появления первой работы Дирака четверть века с лишним и теми и другими теориями много занимались, но все найденные результаты разбросаны по журнальной литературе. Насколько нам известно, предлагаемая теперь русскому читателю книга Надя является первой монографией по этому вопросу. Думаю, что она будет полезна и физикам-теоретикам и математикам, интересующимся приложениями к квантовой теории поля.

Б. В. Медведев

ПРЕДИСЛОВИЕ

Хотя золотая пора индефинитной метрики в теории поля, свидетелями которой мы были в 1958—60 гг., по-видимому, уже миновала, не подлежит сомнению тот факт, что некоторые хорошо известные в теории поля типы операторных алгебр[1]) обладают тем особым свойством, что они либо вовсе не могут быть представлены в гильбертовом пространстве, либо допускают такое представление лишь с дополнительными трудностями. Это обстоятельство не позволяет рассматривать их как обычные квантово-механические конструкции в ортодоксальном смысле. С другой стороны, исследование структуры подобных алгебр тотчас же приводит нас от представлений в гильбертовом пространстве к представлениям в пространстве с индефинитной метрикой. Грубо говоря, если коммутатор или антикоммутатор

$$[a(k),\ a(k')^*]_\pm$$

оказывается, к несчастью, не обычной δ-функцией Дирака, а величиной, не являющейся положительно определенной, то мы как раз „включаем“ индефинитную метрику.

В историческом аспекте концепция индефинитной метрики в теории поля не нова. Ее полезность впервые была отмечена в начале сороковых годов Дираком [1943] и Паули [1943]. В современных физических теориях индефинитная метрика, по-видимому, либо возникает, так сказать, по необходимости, либо умышленно берется в качестве отправного пункта.

---

[1]) Операторные алгебры называются также кольцами операторов. — *Прим. перев.*

Так, было обнаружено, что в ряде физических теорий, если не прибегать к индефинитной метрике, возникают внутренние противоречия. В качестве примеров можно отметить квантовую электродинамику (формализм Гупта — Блейлера), векторные мезонные теории, теории квантового гравитационного поля, метод регуляризации Паули — Вилларса, теории с лагранжианами с высшими производными, модель Ли и многие другие модели. В другой группе работ (модель Фруассара и другие модели, единая полевая теория элементарных частиц Гейзенберга, предложения Боголюбова и Маркова, модели Сударшана) индефинитная метрика вводилась с самого начала либо для того, чтобы подчеркнуть некоторые характерные особенности, либо, что гораздо более важно, в попытках разрешить старые проблемы расходимости, существующие уже около полувека. В этом случае индефинитная метрика использовалась, чтобы избежать следствий теоремы Челлена — Лемана, гласящей, что в условиях лоренцевой инвариантности, спектральности и положительной определенности метрики ренормированные пропагаторы обладают по крайней мере теми же особенностями, что и голые. Так возникают расходимости в теориях с лагранжианами, пока не применяются нелокальные формфакторы или аналогичные ухищрения. Индефинитная метрика, однако, не предполагает положительной определенности, что позволяет применить подходящую процедуру вычитания и, таким образом, сделать все конечным. С другой стороны, только благодаря подобной компенсации можно получить конечные результаты в моделях более высоких порядков или в методе регуляризации Паули — Вилларса, упомянутых в первой группе работ. Следовательно, все (релятивистские) обрезающие теории в конечном счете существенно эквивалентны методам индефинитной метрики.

Пока все шло хорошо. Но в построениях, использующих индефинитную метрику, когда появляется отрицательный квадрат нормы, неизбежно возникает вопрос вероятностной интерпретации. Эту проблему необходимо тщательно специально исследовать в каждом конкретном случае. Мы хотим здесь подчеркнуть, что аргументы, основанные на обычном рассмотрении лагранжианов, бывают иногда поверхностны; на самом деле суждение об интерпретируемости требует знания точного решения — следует ли говорить, что в большинстве случаев это неразрешимая задача. И все же в рамках обычных аксиоматических методов можно построить вероятностно интерпретируемые теории с индефинитной метрикой. В этом случае может возникнуть единственный вопрос: для чего мы идем на дополнительное усложнение, — несомненно, что в аксиоматике все конечно с самого начала. Тем не менее индефинитная метрика применяется в некоторых современных теориях, так что с методологической точки зрения, по-видимому, эта книга не будет бесполезной.

Мне очень приятно выразить искреннюю благодарность проф. Г. Марксу, который побудил меня написать эту монографию, Венгерской Академии наук и сотрудникам ее издательства, благодаря которым книга вышла в свет.

Цель этой книги состоит в том, чтобы попытаться суммировать исследования в данной области в простой и сжатой форме. Глава 1 посвящена общим свойствам пространств с индефинитной метрикой. В главе 2 рассматриваются многочисленные примеры из теории поля. Глава 3 содержит обзор проблем, связанных с вероятностной интерпретацией, а в главе 4 обсуждаются спектральные представления пропагаторов и дисперсионные соотношения. Для квантовофизических величин в книге используются широко принятые обозначения; поэтому они не поясняются, за исключением специфических случаев. Четырехмерный вектор координат (4-вектор импульса) и обычный трехмерный вектор координат (3-вектор импульса) не различаются в написании. Мы надеемся, что такие обозначения не приведут к какой-либо двусмысленности. Местами изложение следует обзорной статье автора (*Nuovo Cimento Suppl.*, **17** (1960), 92).

Я весьма признателен профессорам Ф. Каройхази и Г. Марксу за их полезную критику и дискуссии. Я особенно благодарен д-ру Я. Бонару, моему коллеге-математику, который дал мне весьма ценные советы. Ясно, однако, что его пожелания, касающиеся математической строгости рассуждений, не могли быть осуществлены в сколь-нибудь полной мере.

К. Л. Н.

Глава I

ПРОСТРАНСТВА СОСТОЯНИЙ С ИНДЕФИНИТНОЙ МЕТРИКОЙ

Эта глава служит элементарным математическим введением в теорию векторных пространств состояний с индефинитной метрикой. В физической периодике предлагались различные способы изложения этих вопросов (Гейзенберг [1957a], Конисн и Огимото [1959], Хебер [1961], Ульманн [1959c], Шлидер [1960], Рехенберг и Лагалли [1961], Асколи и Минарди [1958a], Гупта [1957], Пандит [1959]). Мы придерживаемся способа изложения Гупта [1957] и Пандита [1959], который представляется наиболее удобным. Бесконечномерность и даже несепарабельность векторных пространств в теории поля приводят к дополнительным трудностям.

Наше изложение материала рассчитано на то, чтобы помочь читателю добиться понимания основных концепций пространств с индефинитной метрикой на том же уровне, на каком может быть достигнуто понимание гильбертова пространства в физических теориях из какого-либо вводного курса квантовой теории поля. Такая цель, быть может, оправдывает недостаток элегантности и строгости в чисто математическом тексте. Хотя математическая структура геометрических свойств подобных пространств может считаться изученной, понимание свойств операторов все еще далеко от ясности, достигнутой для гильбертовых пространств. Математические исследования были начаты советскими и финскими математиками, что объясняет термин „пространства Неванлинны“, встречающийся в литературе[1]). В ка-

---

[1]) Первой математической работой, посвященной геометрии пространств с индефинитной метрикой, является работа Л. С. Понтрягина „Эрмитовы операторы в пространстве с индефинитной метрикой“, *Изв. АН СССР, сер. матем.*, 8 (1944), 243—280. — *Прим. перев.*

честве отправной точки для более подробного математического изучения можно рекомендовать следующие работы: Неванлинна [1956], Мальцев [1956], Лоухиваара [1958], Гинзбург и Иохвидов [1962], Лангер [1962], Шайбе [1960].

1.1. Векторное пространство

Пространство $\hat{H}$, состоящее из элементов $|\hat{A}\rangle$, $|\hat{B}\rangle, \ldots$, называется *гильбертовым*, если

(a) $\hat{H}$ линейно;

(b) любым двум элементам $|\hat{A}\rangle$ и $|\hat{B}\rangle$ соответствует (комплексное) число $\langle\hat{A}|\hat{B}\rangle$ со свойствами

(i) $$\langle\hat{A}|\hat{B}\rangle = \{\langle\hat{B}|\hat{A}\rangle\}^*;$$

(ii) $$\langle\hat{A}\{\alpha|\hat{B}\rangle + \beta|\hat{C}\rangle\} = \alpha\langle\hat{A}|\hat{B}\rangle + \beta\langle\hat{A}|\hat{C}\rangle;$$

(iii) $$\langle\hat{A}|\hat{A}\rangle \geqslant 0;$$

(iv) $\langle\hat{A}|\hat{A}\rangle = 0$ тогда и только тогда, когда $|\hat{A}\rangle = 0$ (число $\sqrt{\langle\hat{A}|\hat{A}\rangle} = \||\hat{A}\rangle\|$ называется *нормой* вектора $|\hat{A}\rangle$; звездочка * означает комплексное сопряжение; α и β — (комплексные) числа);

(c) пространство $\hat{H}$ полно.

Свойство (c) означает, что предел любой сходящейся последовательности принадлежит этому пространству. Более точно, если последовательность $\{|\hat{A}_n\rangle\}$ такова, что для любого ε[1]) существует N_1, обладающее свойством

$$\||\hat{A}_n\rangle - |\hat{A}_m\rangle\| < \varepsilon \text{ для всех } n,\ m > N_1,$$

то найдется элемент $|\hat{A}\rangle$ такой, что для любого ε существует N, обладающее свойством

$$\||\hat{A}\rangle - |\hat{A}_n\rangle\| < \varepsilon \quad \text{для всех} \quad n > N.$$

Пусть $\mathfrak{H}$ — множество элементов $\{|h_i\rangle\}$ из $\hat{H}$. Замкнутая линейная оболочка $\bar{\mathfrak{H}}$ множества $\mathfrak{H}$ состоит из

---

[1]) Предполагается $\varepsilon > 0$. — *Прим. перев.*

линейных комбинаций элементов, принадлежащих $\mathfrak{H}$, и их предельных точек. Таким образом, $\mathfrak{H} \subset \overline{\mathfrak{H}}$ и $\overline{\overline{\mathfrak{H}}} = \overline{\mathfrak{H}}$. Если существует счетное подмножество $\mathfrak{H}$ в $\hat{H}$ такое, что

$$\overline{\mathfrak{H}} = \hat{H},$$

то пространство называется *сепарабельным*. Если такого подмножества не существует, то пространство называется *несепарабельным*. Другими словами, сепарабельное пространство может быть натянуто на счетное число базисных векторов, а в несепарабельном пространстве число базисных векторов более чем счетно. При решении или при постановке некоторых важных задач квантовой теории поля иногда приходится вводить несепарабельные пространства (см., например, Хааг [1961]) с базисом мощности континуума; см. также § 2.11.

Обратимся теперь к индефинитной метрике.

Пространство H, состоящее из элементов $|A\rangle$, $|B\rangle$, ..., называется *векторным пространством с индефинитной метрикой*, если нарушаются свойства (b) (iii) и (iv) (свойство (c) теряет тогда прямой смысл и его, вообще говоря, следует опустить), т. е. если

(a) H линейно;

(b) каждым $|A\rangle$ и $|B\rangle$ соответствует (комплексное) число $\langle A|B\rangle$, обладающее свойствами

(i) $$\langle A|B\rangle = \{\langle B|A\rangle\}^*,$$

(ii) $$\langle A|\{\alpha|B\rangle + \beta|C\rangle\} = \alpha\langle A|B\rangle + \beta\langle A|C\rangle.$$

В пространстве с индефинитной метрикой в общем случае существуют элементы $|A\rangle$ с $\langle A|A\rangle > 0$ и элементы $|B\rangle$ с $\langle B|B\rangle < 0$ (а, следовательно, также и элементы $|C\rangle \neq 0$ такие, что $\langle C|C\rangle = 0$).

$\langle A|B\rangle$ называется *скалярным произведением* $|A\rangle$ и $|B\rangle$. Если $\langle A|B\rangle = 0$, то говорят, что $|A\rangle$ и $|B\rangle$ *ортогональны*. $\langle A|A\rangle$ равно квадрату нормы $|A\rangle$. Из (i) следует, что $\langle A|A\rangle$ — вещественное число. Если $\langle A|A\rangle \neq 0$, то $|A\rangle$ всегда можно нормировать на ± 1 (в том смысле, что $\langle A|A\rangle = \pm 1$).

Если (iii) и (iv) нарушаются таким образом, что всегда $\langle A|A\rangle \geqslant 0$ (или всегда $\langle A|A\rangle \leqslant 0$), но $\langle A|A\rangle = 0$

по крайней мере для одного $|A\rangle \neq 0$, то H называется *векторным пространством с семидефинитной (полуопределенной) метрикой*. Если существует по крайней мере один элемент $|A\rangle \neq 0$ с $\langle A|A\rangle = 0$, ортогональный также ко всем остальным векторам, то H называется *векторным пространством с вырожденной метрикой*.

Если в H существуют два линейных подпространства, H_+ и H_-, такие, что для любых ненулевых векторов $|A\pm\rangle \in H_\pm$ имеем $\langle A\pm|A\pm\rangle \gtrless 0$, $\langle A+|A-\rangle = 0$ и для любого $|A\rangle \in H$ существует единственное представление в виде

$$|A\rangle = |A+\rangle + |A-\rangle,$$

то пространство H называется *разложимым*. Разложимость, конечно, исключает вырожденный случай.

В разложимом пространстве можно ввести новое скалярное произведение по формуле

$$\langle A|B\rangle_{\mathrm{New}} = \langle A+|B+\rangle - \langle A-|B-\rangle.$$

По отношению к $\langle A|B\rangle_{\mathrm{New}}$ пространство H является (возможно, неполным) гильбертовым пространством. С помощью нового скалярного произведения можно определить сходимость, полноту, сепарабельность и т. д. Разложение H в „прямую сумму" H_+ и H_-, разумеется, не единственно. Однако, если предположить, что по крайней мере для одного разложения

(c) H полно по отношению к $\langle A|B\rangle_{\mathrm{New}}$,

то можно доказать (Гинзбург и Иохвидов [1962]), что утверждение (c) справедливо для любого разложения.

Все известные до сих пор примеры пространств векторов состояний в физических теориях поля с индефинитной метрикой, по-видимому, принадлежат этому классу, т. е. удовлетворяют условиям (a), (b), (c). Таким образом, для сепарабельного пространства существует счетное множество ортонормированных базисных векторов $\{|n\rangle\}$,

$$\langle i|j\rangle = N_i\delta_{ij}, \quad N_i = \pm 1. \tag{1.0}$$

1.2. Операторы

Оператор P преобразует одни векторы пространства в другие (здесь мы не можем вдаваться в такие вещи, как область определения и область значений оператора и т. п.). Оператор P в H называется *линейным*, если

$$P\{\alpha|A\rangle+\beta|B\rangle\}=\alpha P|A\rangle+\beta P|B\rangle.$$

Оператор P^* называется *сопряженным* к P, если для любых $|A\rangle$, $|B\rangle\in H$

$$\langle A|P^*|B\rangle=\{\langle B|P|A\rangle\}^*.$$

Отсюда $P^{**}=P$ и

$$\{PQ\}^*=Q^*P^*.$$

Если $P|p\rangle=p|p\rangle$, где p — число, то $|p\rangle$ называется *собственным вектором*, а p — *собственным значением* оператора P. Среднее значение $\overline{P}$ оператора P в состоянии $|A\rangle$ определяется равенством $\overline{P}=\langle A|P|A\rangle$.

Если $P^*=P$, то говорят, что P *самосопряжен* или *эрмитов*. Слова „сопряженный“, „эрмитов“ и т. д. следует, строго говоря, понимать в том смысле, что операторы являются таковыми в рассматриваемом векторном пространстве с индефинитной метрикой. В некоторых работах, начиная с Гейзенберга, такие операторы отмечаются приставкой „псевдо“, отличающей их от соответствующих операторов в гильбертовом пространстве.

Для эрмитова оператора без труда получаем

$$(p-p^*)\langle p|p\rangle=0,\quad \text{если}\quad P|p\rangle=p|p\rangle, \tag{1.1}$$

$$(p_1^*-p_2)\langle p_1|p_2\rangle=0,$$
$$\text{если}\ P|p_1\rangle=p_1|p_1\rangle\ \text{ и }\ P|p_2\rangle=p_2|p_2\rangle, \tag{1.2}$$

$$\overline{P}\ \text{— вещественное число.} \tag{1.3}$$

Так как здесь $\langle p|p\rangle$ может быть и нулем, то p не обязательно вещественно [1]).

[1]) Средние значения в состояниях с комплексными собственными значениями равны нулю, т. е. вещественны, поскольку такие состояния обязательно обладают нулевой нормой. — *Прим. ред.*

Оператор, удовлетворяющий соотношениям $U^*U = UU^* = 1$, называется *унитарным*. Унитарное преобразование

$$|A\rangle' = U|A\rangle, \quad P' = UPU^{-1}$$

обладает свойствами

$$P'|p\rangle' = p|p\rangle',$$

$${}'\langle p|P'|p\rangle' = \langle p|P|p\rangle, \quad \text{если} \quad P|p\rangle = p|p\rangle$$ [1]).

Если $\{|i\rangle\}$ — ортонормированный базис и тензорное произведение $|A\rangle\langle B|$ векторов определяется обычным образом, то единичный оператор можно записать в виде

$$1 = \sum_i |i\rangle N_i \langle i|. \tag{1.4}$$

Это позволяет представлять $|A\rangle$ и P матрицами

$$c_i = N_i \langle i|A\rangle, \quad P_{ij} = N_i \langle i|P|j\rangle \tag{1.5}$$

так, что представители будут подчиняться правилам матричного умножения. В самом деле,

$$(PQ)_{nm} = N_n \langle n|PQ|m\rangle = N_n \sum \langle n|P|i\rangle N_i \langle i|Q|m\rangle = \sum P_{ni}Q_{im}.$$

В силу (1.5)

$$(P_{ij})^* = N_i \langle j|P^*|i\rangle.$$

Таким образом, если $P = P^*$, то

$$(P_{ij})^* = N_i N_j P_{ij}.$$

Если $UU^* = 1$, то, как обычно, $\sum_l U_{kl}(U_{il})^* = \delta_{kl}$ [2]).

---

[1]) Инвариантность среднего значения оператора P в состоянии $|p\rangle$ относительно унитарного преобразования U имеет место независимо от того, является ли $|p\rangle$ собственным вектором оператора P. В самом деле,

$${}'\langle p|P'|p\rangle' = \langle p|U^*UPU^{-1}U|p\rangle = \langle p|P|p\rangle.$$ — *Прим. перев.*

[2]) Надо различать выражения $(P_{ij})^*$ и $(P^*)_{ij}$. Легко подсчитать, что

$$(P_{ij})^* = N_i N_j (P^*)_{ji}, \quad (P^*)_{il} = N_i N_l (P_{li})^*,$$

поэтому условие унитарности записывается в форме

$$\sum_l U_{kl} N_l (U_{il})^* = \delta_{kl} N_l = N_k \delta_{kl}.$$

— *Прим. ред.*

В представлении (1.5) уравнение $P|p\rangle = p|p\rangle$ приобретает известную матричную форму. Действительно, умножая его на $\sum_i |i\rangle N_i \langle i|$ и затем на $\langle j|$, получаем

$$\sum_i P|i\rangle N_i \langle i|p\rangle = p \sum_i |i\rangle N_i \langle i|p\rangle,$$

$$\sum_i \langle j|P|i\rangle c_i = pN_j c_j,$$

или

$$\sum_i P_{ji} c_i = pc_j.$$

Вот для чего в (1.5) были введены знаковые множители N_i.

Очень важно знать, когда собственные векторы оператора P образуют полную систему. В случае конечномерного (n-мерного) пространства на этот вопрос можно дать следующий ответ (Пандит [1959]).

Определим *минимальный многочлен* $m(P)$ оператора P как многочлен наименьшей степени, для которого

$$m(P) = 0.$$

Тогда для того, чтобы собственные векторы P образовывали полную систему, необходимо и достаточно, чтобы его минимальный многочлен был представим в виде

$$m(P) = (P - p_1) \ldots (P - p_k), \tag{1.6}$$

где $p_i \neq p_j$ при $i \neq j$. При этом все p_i являются собственными значениями.

По крайней мере один многочлен M со свойством $M(P) = 0$ всегда существует — это *характеристический многочлен* оператора P. Его можно записать как

$$M(P) = (P - p_1)^{\alpha_1} \ldots (P - p_k)^{\alpha_k}, \quad \alpha_1 + \ldots + \alpha_k = n,$$

где α_i — целые числа. Поэтому минимальный многочлен имеет вид

$$m(P) = (P - p_1)^{\beta_1} \ldots (P - p_k)^{\beta_k} \quad (\beta_i \leqslant \alpha_i).$$

Главным подпространством линейного оператора P, отвечающим (вещественному или комплексному) числу p, называется множество векторов $\{|i\rangle\}$ (содержащееся в линейном пространстве, в котором определен оператор P), для которых существует положительное целое число $l(|i\rangle)$ такое, что

$$(P-p)^{l(|i\rangle)}|i\rangle = 0.$$

Таким образом, приведенная выше форма минимального многочлена отражает тот известный факт, что конечномерное линейное пространство есть прямая сумма главных подпространств произвольного линейного оператора.

Возникает следующий вопрос: образуют ли собственные векторы эрмитова оператора полную систему? Если нет, то по крайней мере один из показателей $\beta_i = k > 1$. Тогда существует хотя бы один вектор $|A\rangle \neq 0$ такой, что

$$(P-p_i)^k |A\rangle = 0, \quad \text{но} \quad (P-p_i)^{k-1}|A\rangle = |B\rangle \neq 0. \qquad (1.7)$$

Вектор $|B\rangle$ удовлетворяет уравнению

$$(P-p_i)|B\rangle = 0.$$

Возможны два случая: p_i комплексно или вещественно. В первом случае в силу (1.1)

$$\langle B|B\rangle = 0.$$

Во втором случае

$$\langle B|B\rangle = \langle A|(P-p_i)^{2(k-1)}|A\rangle = 0, \qquad \text{ибо} \qquad 2(k-1) \geqslant k.$$

В гильбертовом пространстве из равенства нормы $|B\rangle$ нулю следует $|B\rangle = 0$. Поэтому в (конечномерном) гильбертовом пространстве собственные векторы эрмитова оператора всегда образуют полную систему. В случае индефинитной метрики это утверждение уже неверно. Необходимым условием того, что собственные векторы эрмитова оператора не образуют полной системы, является существование хотя бы одного собственного вектора с нулевой нормой.

Сформулированная выше теорема дает метод отыскания базиса векторов состояний, частично состоящего из собственных векторов, даже в этом случае.

Мы просто должны найти линейно независимые векторы главных подпространств. Рассмотрим вопрос более подробно. Прежде всего, мы считаем решенной задачу о собственных значениях

$$(P-p)|p\rangle=0.$$

Таким образом, все собственные векторы и собственные значения эрмитова оператора предполагаются найденными. Ради простоты исключим возможность вырождения собственных состояний и будем помнить о невырожденности метрики. Будем классифицировать собственные векторы в первую очередь по их собственным значениям. Рассмотрим те, у которых собственные значения вещественны. У них может быть как нулевая, так и ненулевая норма. Оператор проектирования на подпространство собственных векторов с ненулевой нормой есть, конечно, сумма

$$\sum \frac{|p_i\rangle\langle p_i|}{\langle p_i|p_i\rangle}, \tag{1.8}$$

распространенная на все собственные векторы такого типа. Рассматриваем теперь один из собственных векторов с нулевой нормой (если такие вообще имеются); таким образом,

$$(P-p_j)|p_j,\ 1\rangle=0, \quad \langle p_j,\ 1|p_j,\ 1\rangle=0.$$

Далее следует определить, существует ли вектор $|p_j,\ 2\rangle$, удовлетворяющий соотношению

$$(P-p_j)|p_j,\ 2\rangle=|p_j,\ 1\rangle, \tag{1.9}$$

т. е. решить это уравнение относительно $|p_j,\ 2\rangle$. В принятом предположении о невырожденности такой вектор $|p_j,\ 2\rangle$ должен существовать, так как в противном случае вектор $|p_j,\ 1\rangle$ был бы ортогонален ко всем состояниям. Это следует из (1.2) и того факта, что главные подпространства, отвечающие несопряженным собственным значениям, ортогональны. В самом деле, $|p_j,\ 2\rangle$ ортогонален ко всем остальным $|p_i\rangle$, а также ко всем векторам $|p_i, 2\rangle$, $p_i \neq p_j$ (если таковые существуют), так как в силу (1.9)

$$\begin{gathered}(p_i^* - p_j)\langle p_i | p_j, 2\rangle = \langle p_i | p_j, 1\rangle = 0, \\ (p_i^* - p_j)\langle p_i, 2 | p_j, 2\rangle = \langle p_i, 1 | p_j, 2\rangle + \langle p_i, 2 | p_j, 1\rangle = 0.\end{gathered} \tag{1.10}$$

(Строго говоря, надо рассматривать и другие возможные векторы $|p_i, 3\rangle$, $|p_i, 4\rangle$, которые определяются ниже; доказательство ортогональности в этом случае также весьма просто.) Таким образом, мы нашли новые линейно независимые векторы $|p_j, 2\rangle$.

Определив их, следует идти дальше и решать, существует ли вектор, удовлетворяющий уравнению

$$(P - p_j)|p_j, 3\rangle = |p_j, 2\rangle, \tag{1.11}$$

и т. д. Предположим, что $|p_j, 3\rangle$ не существует, т. е. что минимальный многочлен содержит множитель $(P - p_j)^2$. Тогда в силу невырожденности должно быть

$$\langle p_j, 1 | p_j, 2\rangle \neq 0.$$

С другой стороны, можно считать, что норма $|p_j, 2\rangle$ равна нулю. В самом деле, это не запрещено требованием невырожденности, а (1.9) явно не определяет $|p_j, 2\rangle$ однозначно. Ведь если $|p_j, 2\rangle$ удовлетворяет (1.9), то этому же уравнению удовлетворяет вектор $|p_j, 2\rangle'$, определенный равенством

$$|p_j, 2\rangle' = |p_j, 2\rangle + \alpha|p_j, 1\rangle.$$

Поэтому, найдя α из уравнения

$$\begin{aligned}{}'\langle p_j, 2 | p_j, 2\rangle' = 0 = \\ = \langle p_j, 2 | p_j, 2\rangle + \alpha\langle p_j, 2 | p_j, 1\rangle + \alpha^*\langle p_j, 1 | p_j, 2\rangle,\end{aligned}$$

можно нормировать $|p_j, 2\rangle'$ на нуль. Опуская штрих, получаем в итоге, что оператор проектирования имеет вид

$$\frac{|p_j, 2\rangle\langle p_j, 1|}{\langle p_j, 1 | p_j, 2\rangle} + \frac{|p_j, 1\rangle\langle p_j, 2|}{\langle p_j, 2 | p_j, 1\rangle}. \tag{1.12}$$

Отметим, что (1.12) можно, конечно, переписать в обычной форме (1.4). В самом деле, вводя векторы

$$| p_j +\rangle = | p_j, 1\rangle + \frac{| p_j, 2\rangle}{2\langle p_j, 1 | p_j, 2\rangle},$$
$$| p_j -\rangle = | p_j, 1\rangle - \frac{| p_j, 2\rangle}{2\langle p_j, 1 | p_j, 2\rangle},$$

получаем

$$\langle p_j \pm | p_j \pm\rangle = \pm 1, \quad \langle p_j + | p_j -\rangle = 0$$

и (1.12) принимает вид

$$| p_j +\rangle\langle p_j + | - | p_j -\rangle\langle p_j - |, \tag{1.13}$$

но и $| p_j +\rangle$ и $| p_j -\rangle$ удовлетворяют соотношению (1.9).

Обратимся к случаю, когда существуют $| p_j, 1, 2, 3\rangle$, но $| p_j, 4\rangle$ не существует, т. е. минимальный многочлен содержит множитель $(P - p_j)^3$. Тогда

$$\begin{aligned} &(P - p_j)| p_j, 1\rangle = 0, \qquad \langle p_j, 1 | p_j, 1\rangle = 0,\\ &(P - p_j)| p_j, 2\rangle = | p_j, 1\rangle,\\ &(P - p_j)| p_j, 3\rangle = | p_j, 2\rangle. \end{aligned} \tag{1.14}$$

В силу третьего соотношения

$$\langle p_j, 1 |(P - p_j)| p_j, 3\rangle = \langle p_j, 1 | p_j, 2\rangle,$$

а в силу первого $\langle p_j, 3 |(P - p_j)| p_j, 1\rangle = 0$. Следовательно, $\langle p_j, 1 | p_j, 2\rangle = 0$. Но в таком случае $\langle p_j, 1 | p_j, 3\rangle \neq 0$, так как метрика не вырождена. Аналогично, в силу второго и третьего соотношений $\langle p_j, 2 | p_j, 2\rangle = \langle p_j, 1 | p_j, 3\rangle$. Далее, $\langle p_j, 2 | p_j, 3\rangle$ и $\langle p_j, 3 | p_j, 3\rangle$ можно считать равными нулю, не противореча невырожденности метрики, и этого снова можно реально достичь, используя неоднозначность определения векторов $| p_j, 2\rangle$ и $| p_j, 3\rangle$. Таким образом, окончательно оператор проектирования принимает вид

$$\frac{| p_j, 1\rangle\langle p_j, 3 |}{\langle p_j, 3 | p_j, 1\rangle} + \frac{| p_j, 3\rangle\langle p_j, 1 |}{\langle p_j, 1 | p_j, 3\rangle} + \frac{| p_j, 2\rangle\langle p_j, 2 |}{\langle p_j, 2 | p_j, 2\rangle}. \tag{1.15}$$

Первые два члена также могут быть приведены к обычной форме введением двух подходящих векторов.

Если последовательность $|p_j, 1\rangle$, $|p_j, 2\rangle$, $|p_j, 3\rangle$ на этом не закончится, мы можем продолжить шаг за шагом определение состояний, порождаемых $|p_j, 1\rangle$.

Заметим, что бывает иногда удобнее определять $|p_j, 1, 2, 3, \ldots\rangle$ вместо (1.14) уравнениями

$$\begin{aligned}
&(P - p_j)|p_j, 1\rangle = 0, \qquad\qquad \langle p_j, 1|p_j, 1\rangle = 0,\\
&(P - p_j)|p_j, 2\rangle = \alpha p_j|p_j, 1\rangle, \\
&(P - p_j)|p_j, 3\rangle = \beta p_j|p_j, 2\rangle,
\end{aligned} \tag{1.14$'$}$$

где α и β — безразмерные числа, сохраняющие (физическую) размерность векторов и отражающие явно некоторые возможные свойства инвариантности уравнения.

Обратимся к комплексным собственным значениям. Каждый собственный вектор имеет нулевую норму и ортогонален всем другим собственным векторам, за исключением, возможно, одного, соответствующего комплексно сопряженному собственному значению (1.1), (1.2). Предположим сначала, что такая пара собственных векторов $|p_k\rangle$, $|p_k^*\rangle$ существует, но $|p_k, 2\rangle$, $|p_k^*, 2\rangle$ уже нет. Тогда

$$\frac{|p_k\rangle\langle p_k^*|}{\langle p_k^*|p_k\rangle} + \frac{|p_k^*\rangle\langle p_k|}{\langle p_k|p_k^*\rangle} \tag{1.16}$$

является оператором проектирования. Если же такой пары не существует, то следует снова применить процедуру решения уравнения типа (1.9).

Таким образом, решая уравнения типа (1.14), можно определить некое множество векторов. По построению и по исходной теореме о полноте для конечномерного пространства это множество образует полную систему. Поэтому разложением единичного оператора будет

$$\begin{aligned}
1 &= \sum\{(1.8) + [(1.12) \text{ или } (1.15) + \ldots] + (1.16) + \ldots\} = \\
&= \sum\{(1.8) + (1.13) + \text{Аналогичные члены} + \ldots\},
\end{aligned}$$

где слова „аналогичные члены“ означают (1.15), (1.16), ..., выраженные через $|+\rangle$, $|-\rangle$ аналогично (1.12) и (1.13). Некоторые слагаемые, конечно, могут отсутствовать. Если задача собственных значений вырождена, то нашу задачу следует решать шаг за шагом, вводя подходящие ортогональные линейные комбинации и т. д.

Таким образом, решение уравнений типа (1.14′) сводится к нахождению элементов главных линейных подпространств, и в случае конечномерного пространства прямая сумма главных подпространств для всех собственных значений эрмитова оператора дает все пространство.

В бесконечномерном пространстве эти рассуждения, вообще говоря, осложняются[1]), но в отдельных случаях может возникать в точности описанная выше ситуация. Предыдущее рассмотрение приобретает особенное значение, если P — гамильтониан физической системы. В этом случае все состояния, исключая лишь суперпозицию подходяще выбранных собственных состояний с положительно определенной нормой, соответствующих вещественным собственным значениям, являются нефизическими или, как иногда говорят, „духами“[2]). В частности, состояние $|p_l, 2\rangle$ из (1.9) называют, следуя Гейзенбергу, „дипольным духом“, так что состояние $|p_l, n\rangle$ из последовательности (1.14) можно было бы назвать „мультипольным духом“ (духом n-го мультипольного порядка). Наконец, состояние, отвечающее комплексному собственному значению, будем называть „комплексным духом“.

В заключение коснемся коммутирующих операторов. В обычной квантовой теории доказывается, что если два оператора L и M обладают одной и той же

---

[1]) См. Иохвидов И. С., Крейн М. Г., Спектральная теория операторов в пространствах с индефинитной метрикой, *Труды ММО*, 5 (1958), 367—432; 8 (1959), 413—496. — *Прим. перев.*

[2]) Это название перенесено из спектроскопии, где „духами“ называют линии, которых на самом деле в спектре нет и которые появляются лишь из-за дефектов дифракционной решетки. — *Прим. ред.*

полной системой собственных векторов, то они коммутируют и обратно. Доказательство общеизвестно и не зависит от метрики, но надежности ради проведем его здесь для того случая, когда система векторов, связанная с оператором, содержит мультипольные духи. Достаточно доказать теорему только для дипольных духов — для духов более высокого порядка доказательство совершенно аналогично. В первой части теоремы утверждается, что если операторы имеют общую систему векторов, то они коммутируют. Пусть

$$L\,|D\rangle = l\,|D\rangle + \alpha\,|E\rangle, \qquad M\,|D\rangle = m\,|D\rangle + \beta\,|E\rangle.$$

Применяя M к первому, а L ко второму уравнению и вычитая, получаем

$$(LM - ML)\,|D\rangle = 0.$$

Отсюда в предположении полноты следует коммутативность. Обратно, пусть требуется в предположении $LM = ML$ показать, что из равенства

$$L\,|D\rangle = l\,|D\rangle + \alpha\,|E\rangle$$

следует, что $|D\rangle$ есть дипольный дух оператора M. Но, действительно,

$$LM\,|D\rangle = ML\,|D\rangle = lM\,|D\rangle + \alpha M\,|E\rangle = lM\,|D\rangle + \alpha'\,|E\rangle;$$

таким образом, $M\,|D\rangle$ есть дипольный дух оператора L с тем же собственным значением, что и $|D\rangle$. Тогда в случае невырожденности

$$M\,|D\rangle = a\,|D\rangle + b\,|E\rangle,$$

что и доказывает требуемое утверждение. В вырожденном случае это доказывается примерно так же, с небольшими изменениями. Таким образом, коммутирующие операторы сохраняют свою обычную роль и в этом случае.

1.3. η-формализм

В литературе часто заменяют формализм предыдущего параграфа методом, при котором в гильбертовом пространстве вводится некоторый *метрический* *оператор* η. Мы собираемся теперь проследить связь между этими двумя подходами.

Построим гильбертово пространство $\hat{H}$ так, чтобы существовало взаимно однозначное соответствие между векторами $\{|A\rangle\}$ пространства H и векторами $\{|\hat{A}\rangle\}$ пространства $\hat{H}$; пусть это соответствие будет линейным, так что если $|A\rangle \to |\hat{A}\rangle$ и $|B\rangle \to |\hat{B}\rangle$, то

$$\alpha|A\rangle + \beta|B\rangle \to \alpha|\hat{A}\rangle + \beta|\hat{B}\rangle \tag{1.17}$$

для любых $|A\rangle$ и $|B\rangle$. В силу этого соответствия билинейная форма $\langle A|B\rangle$ определяет оператор η в гильбертовом пространстве $\hat{H}$ по формуле

$$\langle A|B\rangle = \langle\hat{A}|\,\eta\,|\hat{B}\rangle. \tag{1.18}$$

Оператор $\hat{P}$, соответствующий линейному оператору P, определяется соотношением

$$\langle A|P|B\rangle = \langle\hat{A}|\eta\hat{P}|\hat{B}\rangle. \tag{1.19}$$

Оператор $\hat{P}^+$, сопряженный к $\hat{P}$ в $\hat{H}$, удовлетворяет, как обычно, равенству

$$\{\langle\hat{A}|\hat{P}|\hat{B}\rangle\}^* = \langle\hat{B}|\,\hat{P}^+\,|\hat{A}\rangle.$$

Так как число $\langle A|A\rangle = \langle\hat{A}|\eta|\hat{A}\rangle$ вещественно, то $\eta^+ = \eta$. Оператор η называется *метрическим оператором*. Он всегда действует в $\hat{H}$, поэтому значок $\widehat{\ }$ опускается. Из (1.19) следует, что

$$\bar{P} = \langle A|\,P\,|A\rangle = \langle\hat{A}|\eta\hat{P}|A\rangle.$$

Определив операторы $\hat{P}$ и $\hat{P}^+$, мы можем легко выразить оператор $\hat{P}^*$ через $\hat{P}^+$. В самом деле,

$$\langle A|P^*|B\rangle = \{\langle B|P|A\rangle\}^* = \{\langle\hat{B}|\,\eta\hat{P}\,|\hat{A}\rangle\}^* =$$
$$= \langle\hat{A}|\,\hat{P}^+\eta\,|\hat{B}\rangle = \langle A|\eta\eta^{-1}\hat{P}^+\eta\,|\hat{B}\rangle.$$

Так как $|A\rangle$ и $|B\rangle$ произвольны, то из (1.19) можно усмотреть, что оператор, соответствующий P^*, равен

$$\hat{P}^* = \eta^{-1}\hat{P}^+\eta. \tag{1.20}$$

Поэтому, если оператор P эрмитов в H $(P = P^*)$, то из (1.20) следует, что $\hat{P}$ будет эрмитовым в $\hat{H}$ $(\hat{P} = \hat{P}^+)$ тогда и только тогда, когда $[\hat{P}, \eta] = 0$. В качестве базиса в H рассмотрим ортонормированную систему $\{|i\rangle\}$, $\langle i|j\rangle = N_i\delta_{ij}$. Мы выберем ее произвольно, но фиксируем раз и навсегда и рассмотрим гильбертово пространство $\hat{H}$, порожденное ортонормированной системой $\{|\hat{i}\rangle\}$, $\langle\hat{i}|\hat{j}\rangle = \delta_{ij}$. Тогда в силу (1.18)

$$N_j\delta_{ij} = \langle\hat{i}|\eta|\hat{j}\rangle,$$

т. е. в этом представлении оператор η диагонален и его собственные значения $N_j = \pm 1$.

Если ввести новую ортонормированную систему в H

$$|i\rangle' = U|i\rangle, \quad UU^* = 1, \quad '\langle i|j\rangle' = N_i\delta_{ij},$$

то система

$$|\hat{i}\rangle' = \hat{U}|\hat{i}\rangle$$

не будет, вообще говоря, ортонормированной, так как согласно (1.19) и (1.20) $\hat{U}^*\hat{U} = \eta^{-1}\hat{U}^+\eta\hat{U}$ (но не $\hat{U}^+\hat{U}$) равно 1. Обратно, если исходить из систем $|i\rangle'$ и $|\hat{i}\rangle'$, то система $|\hat{i}\rangle$ не будет, вообще говоря, ортонормированной. Этот факт иногда вызывал недоразумения.

Важнейшим аргументом в пользу указанного формализма является то, что с ним мы работаем в гильбертовом пространстве и, значит, можем непосредственно применять все разработанные для гильбертова пространства теоремы. Так, например, если оператор P эрмитов в H и одновременно $\hat{P}$ эрмитов в $\hat{H}$ (т. е. если $[\hat{P}, \eta] = 0$), то их собственные векторы образуют полную систему и их собственные значения вещественны.

В теории относительности вместо явного введения метрического тензора можно определить соответственно ковариантные v_l и контравариантные $v^l = g^{lr}v_r$ компоненты векторов. Скалярное произведение равно $v_l w^l = v^l w_l$. У нас матричные элементы метрических операторов играют ту же самую роль, что и метрический тензор g_{ik} в теории относительности. Таким образом, для векторов состояний могут быть определены ковариантные и контравариантные компоненты и могут быть разработаны соответствующие правила вычислений. Этот формализм также встречается в литературе (Гейзенберг [1957а], Кониси и Огимото [1958—1959]).

В § 2.1 мы приведем простой пример использования η-формализма, но в целом будем его избегать.

1.4. Физические постулаты

Нам надо теперь связать рассмотренное выше пространство с индефинитной метрикой, т. е. пространство, представляющее собой прямую сумму ортогональных подпространств с положительным и отрицательным квадратами норм, с физическими системами. Это можно сделать с помощью следующих постулатов:

(i) каждое состояние физической системы описывается некоторым элементом

$$|A\rangle \in H \quad \text{с} \quad \langle A|A\rangle = 0,\ +1,\ -1;$$

(ii) физические величины представляются линейными операторами в H;

(iii) если в состоянии $|A\rangle$ измеряется физическая величина, представляемая оператором A, то „среднее значение“ ее измерения равно $\bar{P} = \langle A|P|A\rangle$ или же $\bar{P}/\langle A|A\rangle$. Выбор одного из этих выражений — это пока что вопрос только удобства, ибо мы просто определяем термин, поскольку эти величины еще не имеют прямой вероятностной интерпретации (см. ниже), причем со вторым выражением могут даже возникнуть затруднения, если $\langle A|A\rangle = 0$.

Из сформулированных постулатов вытекают такие следствия.

(a) Так как $\bar{P}$ должно быть вещественным, то физические величины должны представляться эрмитовыми операторами.

(b) Если $\langle A|A\rangle = 0$, но $\langle A|P|A\rangle \neq 0$, то $\bar{P}$ не определено, так как $|A\rangle$ можно умножить на любое число.

(c) Пусть $f(P)$ — произвольная функция от P, которая может быть разложена по степеням P в области, содержащей все собственные значения p_l оператора P, $P|p_l\rangle = p_l|p_l\rangle$, и пусть $\{|p_l\rangle\}$ — полная система ортонормированных векторов. Тогда

$$\langle A|f(P)|A\rangle = \sum_m N_m f(p_m)|\langle p_m|A\rangle|^2.$$

Но среднее значение измерения величины $f(P)$ равно

$$\overline{f(P)} = \sum_m W_m f(p_m),$$

где W_m — вероятность значения p_m. В силу произвольности функции f

$$W_m = N_m|\langle p_m|A\rangle|^2 \text{ или } W_m = N_m \frac{|\langle p_m|A\rangle|^2}{\langle A|A\rangle}, \quad N_m = \pm 1.$$

Из (b) и (c) следует, что для состояний с нулевым или отрицательным квадратом нормы при этом возникнут затруднения.

(d) В обычной квантовой теории величина, представляемая эрмитовым оператором, считается *наблюдаемой*, если его собственные векторы образуют полную систему. Здесь мы называем эрмитов оператор *(квази)наблюдаемым*, если замыкание прямой суммы его главных линейных подпространств совпадает со всем пространством состояний. В противном случае существовали бы векторы, никак не связанные с каким бы то ни было собственным значением, т. е. с какими бы то ни было результатами измерений.

В этом свете трудно представить себе, что возможные комплексные значения и соответствующие собственные векторы могли бы играть какую-нибудь роль. Так или иначе, мы сохраним эту возможность, но будем прибегать к ней лишь эпизодически и поверхностно. Впрочем, совсем недавно были высказаны противоположные взгляды (Танака [1963]).

Наконец, мы хотим подчеркнуть, что и в случае мультипольных духов с вещественными собственными значениями после того, как предпринято измерение и получено собственное значение p_n, состоянием системы должен быть собственный вектор $|p_n, 1\rangle$. В самом деле, рассмотрим для простоты случай, когда главное линейное подпространство двумерно:

$$(P - p_n)|p_n, 1\rangle = 0, \qquad \langle p_n, 1|p_n, 1\rangle = 0,$$
$$(P - p_n)|p_n, 2\rangle = p_n|p_n, 1\rangle,$$
$$\langle p_n, 2|p_n, 2\rangle = 0, \qquad \langle p_n, 1|p_n, 2\rangle \neq 0.$$

Тогда для вектора $|A\rangle = \alpha|p_n, 1\rangle + \beta|p_n, 2\rangle$

$$\frac{\bar{P}}{\langle A|A\rangle} = (\alpha^*\beta p_n\langle p_n, 1|p_n, 2\rangle + \beta^*\alpha p_n\langle p_n, 2|p_n, 1\rangle + \\ + \beta^*\beta p_n\langle p_n, 2|p_n, 1\rangle) \times \\ \times (\alpha^*\beta\langle p_n, 1|p_n, 2\rangle + \beta^*\alpha\langle p_n, 2|p_n, 1\rangle)^{-1},$$

что стремится к p_n при $\beta \to 0$.

Итак, мы видим, что все типы духов делают возможность вероятностной интерпретации сомнительной. Мы займемся этими вопросами в четвертой главе.

Глава 2

ПРИМЕРЫ ИЗ ТЕОРИИ ПОЛЯ

В этой главе рассматриваются полевые теории (в основном уже упомянутые в предисловии) с индефинитной метрикой. Здесь мы коснемся только методов разработки этих теорий и их свойств, в то время как трудности, связанные с вероятностной интерпретацией, будут рассмотрены позже.

2.1. Осциллятор

Так как свободные поля в квантовой теории эквивалентны набору гармонических осцилляторов, мы рассмотрим сначала осцилляторы, приводящие к дефинитной или индефинитной метрике, избежав таким образом необходимости повторений при обсуждении сходных вопросов.

2.1.1. *Нормальный осциллятор*

Поведение физической системы в классической физике может быть полностью определено с помощью известного лагранжева формализма. Для гармонического осциллятора любая величина в конечном счете выражается через комплексное переменное a. Например, гамильтониан H равен

$$H = Ea^*a, \tag{2.0}$$

где a^* комплексно сопряжено к a.

Переход к квантовой теории через введение канонических переменных начинается с установления правил коммутации. В данном случае мы полагаем

$$aa^* - a^*a = [a, a^*] = 1, \quad [a, a] = [a^*, a^*] = 0. \tag{2.1}$$

Из теоремы фон Неймана следует, что алгебра символов a, a^* (состоящая из элементов вида $P =$

$= \alpha a + \beta a^* + \gamma aa + \ldots$, где α, β, γ и т. д. — c-числа), характеризующаяся приведенными соотношениями коммутации, имеет единственное с точностью до унитарной эквивалентности неприводимое представление в алгебру операторов в гильбертовом пространстве, при котором символам a^* и a соответствуют сопряженные друг другу операторы. Неприводимость понимается в смысле леммы Шура: оператор, коммутирующий как с a, так и с a^*, должен быть кратен единичному. Базис гильбертова пространства можно построить, введя *состояние вакуума* $|0\rangle$ с минимальной энергией, обладающее свойствами

$$a|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1, \tag{2.2}$$

и ортонормированную систему $\{|n\rangle\}$:

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2}(a^*)^n|0\rangle. \tag{2.3}$$

Скалярное произведение $|m\rangle$ на $|n\rangle$ равно

$$\langle m|n\rangle = (m!\,n!)^{-1/2}\langle 0|a^m a^{*n}|0\rangle = \delta_{nm}$$

(мы воспользовались равенствами (2.1) и (2.2)). Оператор H, разумеется, эрмитов, и

$$H|n\rangle = nE|n\rangle.$$

Пространство состояний гильбертово, и эрмитовость и пр. понимается в обычном смысле.

Указанное представление, конечно, полностью эквивалентно представлению в пространстве (L^2) квадратично интегрируемых функций.

Полагая

$$x = \frac{1}{\sqrt{2}}(a + a^*), \qquad p = \frac{1}{i\sqrt{2}}(a - a^*),$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2}}(x + ip), \quad a^* = \frac{1}{\sqrt{2}}(x - ip),$$

получаем

$$[x, p] = i, \quad [x, x] = [p, p] = 0.$$

Таким образом, x и p могут быть представлены операторами

$$x \to x, \quad p \to -i\frac{d}{dx}, \quad H \to \frac{E}{2}\left(-\frac{d^2}{dx^2} + x^2 - 1\right).$$

Решение уравнения

$$H\Psi_n = E\Psi_n$$

дает нам собственные значения $E_n = nE$ и собственные функции осциллятора

$$\Psi_n(x) = e^{-x^2/2} H_n(x), \quad \int \Psi_n^* \Psi_m \, dx = \delta_{nm},$$

где $H_n(x)$ — (нормированные) полиномы Эрмита;

$$H_n(x) = \frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n! \pi}} e^{x^2} \frac{d^n e^{-x^2}}{dx^n},$$

т. е. соответствие имеет вид

$$a, \ a^* \rightleftarrows x, \quad p = -i \frac{d}{dx}, \quad |n\rangle \rightleftarrows \Psi_n(x).$$

2.1.2. *Осциллятор, приводящий к индефинитной метрике*

В этом случае лагранжев формализм приводит вместо (2.0) и (2.1) к соотношениям

$$H = -Ea^*a, \tag{2.4}$$

$$[a, a^*] = -1, \quad [a, a] = [a^*, a^*] = 0. \tag{2.5}$$

Здесь, очевидно, представляются две возможности.

Во-первых, наша алгебра символов может быть представлена как алгебра операторов в гильбертовом пространстве. Именно, после $a \to a^*$, $a^* \to a$ (2.5) принимает вид (2.1). Таким образом, состояние вакуума $|0\rangle_{\mathrm{I}}$ может быть определено соотношениями

$$a^* |0\rangle_{\mathrm{I}} = 0, \quad {}_{\mathrm{I}}\langle 0 | 0\rangle_{\mathrm{I}} = 1,$$

а ортогональная система —

$$|n\rangle = (n!)^{-1/2} (a)^n |0\rangle_{\mathrm{I}},$$

что дает

$$\langle n | m\rangle = \delta_{nm}.$$

И в этом случае мы получаем гильбертово пространство, но собственные значения энергии становятся отрицательными. Следуя Хаагу [1961], можно было бы сказать, что кинематический аспект допускает, а динамический не допускает интерпретации с помощью гильбертова пространства. В последующих работах по теории поля эта возможность была исключена также и по иным причинам (что касается квантовой электродинамики, см., например, Ма [1949]); в других теориях не достигается желаемый эффект регуляризации и т. п., поэтому приходится избрать вторую возможность, связанную с индефинитной метрикой.

В самом деле, алгебра, характеризуемая соотношениями (2.5), может быть представлена как операторная алгебра в пространстве состояний с индефинитной метрикой, в которой a^* сопряжено к a (это же справедливо, конечно, и для алгебры, определяемой соотношением (2.1), но такой выбор представления разрушил бы описанную в п. 2.1.1 красивую физическую теорию). Базис неприводимого представления может быть определен соотношениями

$$a\,|\,0\rangle = 0, \qquad \langle 0\,|\,0\rangle = 1, \tag{2.6}$$

$$|\,n\rangle = (n\,!)^{-1/2}(a^*)^n\,|\,0\rangle; \tag{2.7}$$

таким образом, в силу (2.5)

$$\langle m\,|\,n\rangle = (m\,!\,n\,!)^{-1/2}\langle 0\,|\,a^m a^{*n}\,|\,0\rangle = (-1)^n\,\delta_{mn}, \tag{2.8}$$

т. е. пространство состояний имеет индефинитную метрику в смысле § 1.1. Здесь также

$$H\,|\,n\rangle = nE\,|\,n\rangle, \tag{2.9}$$

но

$$H_n = \langle n\,|\,H\,|\,n\rangle = (-1)^n\,nE. \tag{2.10}$$

Оператор H, очевидно, эрмитов. Единичный оператор представляется в виде

$$1 = \sum |\,n\rangle\,(-1)^n\,\langle n\,|. \tag{2.11}$$

Поэтому вектор состояния $|\,A\rangle$ разлагается по формуле

$$|\,A\rangle = \sum c_n\,|\,n\rangle, \qquad c_n = (-1)^n\,\langle n\,|\,A\rangle.$$

В силу (2.5) и (2.7)

$$a\,|n\rangle = -\sqrt{n}\,|\,n-1\rangle, \qquad a^*\,|n\rangle = \sqrt{n+1}\,|\,n+1\rangle. \tag{2.12}$$

Оператор H диагонален в этом представлении, поэтому главные подпространства, соответствующие каждому собственному значению, одномерны.

Отметим, что, насколько нам известно, аналог теоремы фон Неймана не имеет места в этом случае. А именно, естественное представление $(\{|n\rangle\})$, рассмотренное выше, и другое возможное представление

$$a|0\rangle^{(2)}=0, \qquad {}^{(2)}\langle 0|0\rangle^{(2)}=-1,$$

$$|n\rangle^{(2)}=(n!)^{-1/2}(a^*)^n|0\rangle^{(2)},$$

по-видимому, не будут унитарно эквивалентными. Физики предпочитают не иметь дела с последним представлением, так как оно приписало бы отрицательный квадрат нормы бесчастичному состоянию вакуума, что немедленно повлекло бы затруднения с вероятностной интерпретацией.

Покажем теперь, как можно описывать подобный осциллятор с помощью η-формализма. Обозначим через $\{|\widehat{n}\rangle\}$ полную ортонормированную систему векторов состояний в гильбертовом пространстве, соответствующую системе $\{|n\rangle\}$, $|n\rangle \to |\widehat{n}\rangle$,

$$\langle\widehat{m}|\widehat{n}\rangle=\delta_{mn}.$$

Тогда в силу соотношений

$$\langle m|n\rangle=(-1)^n\delta_{mn}=\langle\widehat{m}|\eta|\widehat{n}\rangle$$

имеем

$$\eta|\widehat{n}\rangle=(-1)^n|\widehat{n}\rangle, \qquad \eta_{mn}=(-1)^n\delta_{mn}.$$

Так как согласно (2.8) и (2.12)

$$\langle m|a^*|n\rangle=(-1)^m\sqrt{n+1}\,\delta_{m\,n+1},$$

то из (1.19) следует

$$\widehat{a^*}|\widehat{n}\rangle=\sqrt{n+1}\,|\widehat{n+1}\rangle,$$

ибо η диагонален. Применяя η к обеим частям равенства, находим, что

$$\eta a^*\eta^{-1}\eta|\widehat{n}\rangle=\eta\widehat{a^*}\eta^{-1}(-1)^n|\widehat{n}\rangle=$$
$$=\sqrt{n+1}(-1)^{n+1}|\widehat{n+1}\rangle=(-1)^{n+1}\widehat{a^*}|\widehat{n}\rangle,$$

откуда

$$\eta\widehat{a^*}\eta^{-1} = -\widehat{a^*}. \tag{2.13}$$

В силу (1.20)

$$\widehat{a} = \eta^{-1}\widehat{a^{*+}}\eta. \tag{2.14}$$

Полагая $\widehat{a^*} = \widehat{A^+}$ и $\widehat{a^{*+}} = \widehat{A}$, в соответствии с (2.13) и (2.14) получаем

$$\begin{aligned}-1 &= \widehat{a}\,\widehat{a^*} - \widehat{a^*}\,\widehat{a} = \eta^{-1}\widehat{A}\eta\widehat{A^+} - \widehat{A^+}\eta^{-1}\widehat{A}\eta = \\ &= \eta^{-1}\left(\widehat{A}\,\widehat{A^+} - \widehat{A^+}\,\widehat{A}\right)\eta, \quad \widehat{A}\,\widehat{A^+} - \widehat{A^+}\,\widehat{A} = 1. \end{aligned} \tag{2.15}$$

Исходя из оператора $\widehat{A}$, мы можем построить теперь систему $\{|\widehat{n}\rangle\}$, положив

$$\widehat{A}\,|\,\widehat{0}\rangle = 0, \quad \langle\widehat{0}\,|\,\widehat{0}\rangle = 1, \quad |\,n\rangle = (n!)^{-1/2}\left(\widehat{A^+}\right)^n|\,\widehat{0}\,\rangle, \tag{2.16}$$

и так как согласно (2.15) $\widehat{A^+}\widehat{A}\,|\,\widehat{n}\,\rangle = n\,|\,\widehat{n}\rangle$, мы видим, что

$$\eta = (-1)^{\widehat{A^+}\,\widehat{A}}. \tag{2.17}$$

Легко видеть, что этот выбор удовлетворяет всем необходимым требованиям и что

$$\widehat{H} = E\widehat{A^+}\widehat{A}. \tag{2.18}$$

Исходя из (2.15)—(2.18), но определив „физические" скалярное произведение и среднее значение по формулам (1.18), (1.19), мы должны прийти к тем же физическим результатам, что и без оператора η. Так работает η-формализм.

Представление чисел заполнения опять эквивалентно представлению в пространстве L^2 с теми же соотношениями, что и в п. 2.1.1, только снабженными всюду значком $\frown$:

$$\widehat{A},\ \widehat{A^+} \leftrightarrow \widehat{x},\ \widehat{p}, \qquad \widehat{H} \leftrightarrow \frac{E}{2}\left(-\frac{d^2}{d\widehat{x^2}} + \widehat{x^2} - 1\right),$$

$$|\,\widehat{n}\,\rangle \leftrightarrow \Psi_n(\widehat{x}), \qquad \eta = (-1)^{1/2\,(-d^2/d\widehat{x^2} + \widehat{x^2} - 1)}.$$

В случае осциллятора, квантованного правилами антикоммутации

$$aa^* + a^*a = \{a, a^*\} = -1, \quad \{a, a\} = \{a^*, a^*\} = 0, \qquad (2.19)$$
$$H = -Ea^*a,$$

положение вещей совершенно аналогично. Определив состояние вакуума $|0\rangle$ условиями

$$a|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1,$$

получим, что (принцип Паули) двумерное пространство, порожденное векторами

$$|0\rangle, \quad a^*|0\rangle,$$

будет пространством состояний с индефинитной метрикой. Здесь мы вообще не имеем никакого другого выбора, поскольку алгебра, характеризуемая таким антикоммутатором (отрицательного знака!), не имеет представлений в гильбертовом пространстве таких, что a^* сопряжено к a, а это необходимо, чтобы средние значения наблюдаемых были вещественны.

2.1.3. *Осциллятор с мультипольными духами*

Эта модель определяется гамильтонианом

$$H = \varepsilon E(a^*b + b^*a + \lambda^2 a^*a) \qquad (2.20)$$

и перестановочными соотношениями

$$[a, b^*] = [b, a^*] = \varepsilon, \quad \varepsilon = \pm 1, \qquad (2.21)$$
$$[a, a] = [a, a^*] = [b, b] = [b, b^*] = [a, b] = 0.$$

Соответствующая алгебра может быть представлена в пространстве с индефинитной метрикой, причем a^* и b^* будут сопряжены к a и b соответственно. Это пространство порождается системой базисных векторов

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1,$$
$$|n, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}(a^*)^n(b^*)^m|0\rangle, \qquad (2.22)$$
$$\langle n', m'|n, m\rangle = \varepsilon^{n+m}\delta_{n'm}\delta_{m'n}.$$

(Здесь были использованы перестановочные соотношения.) Заметим, что независимо от знака ε пространство состояний не будет гильбертовым. В самом деле, ведь есть много векторов с нулевой нормой.

Мы могли бы получить в этом случае и представление в гильбертовом пространстве, полагая a^* сопряженным к b, а b^* — сопряженным к a, но тогда для $\lambda^2 \neq 0$ оператор H не был бы эрмитовым. Если же $\lambda^2 = 0$, то такой выбор представления, конечно, наиболее естествен.

Вернемся к базисной системе и подсчитаем $H\,|n, m\rangle$. Простые выкладки дают

$$(H-(n+m)E)\,|n,\ m\rangle = \lambda^2 E\,\frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{n+1}}\,|n+1,\ m-1\rangle. \quad (2.23)$$

Посмотрим внимательнее, что же произошло. Член $\lambda^2 a^* a$ устранил $(n+m)$-кратное вырождение собственного значения $(n+m)E$. Для $n+m=N$ есть только один собственный вектор $|N, 0\rangle$ с нулевой нормой. Главное подпространство, соответствующее собственному значению NE, порождается векторами

$$\{\,|N-i,\ i\rangle\},\quad i=0,\ 1,\ \ldots,\ N.$$

Каждый из них ортогонален всякому вектору, принадлежащему подпространству, соответствующему любому другому собственному значению, и имеет нулевую норму, если N нечетно. Если же N четно, то $\langle N/2, N/2\,|\,N/2, N/2\rangle = \varepsilon$. Вообще

$$\langle N-i,\ i\,|\,N-j,\ j\rangle = \varepsilon^N \delta_{i\,N-j},$$

т. е. вектора, ортогонального всему пространству, не существует. Состояния $|N-i,\ i\rangle$ удовлетворяют соотношению

$$(H-NE)^{i+1}\,|N-i,\ i\rangle = 0 \quad \text{для любого } i.$$

Главное линейное подпространство, соответствующее собственному значению NE, $(N+1)$-мерно, и $|N-i, i\rangle$ — дух i-го порядка. Замыкание прямой суммы главных подпространств составляет все пространство; таким образом,

$$1 = \sum_{N=0}^{\infty}\sum_{i=0}^{N}|N-i,\ i\rangle\,\varepsilon^N\,\langle i,\ N-i\,|.$$

Вместо неортогональных духов можно ввести ортонормированные состояния, например, как это было сделано в (1.13). Другой выбор может быть основан на преобразовании операторов. Положим

$$A = \frac{1}{\sqrt{2}}(a+b), \quad B = \frac{1}{\sqrt{2}}(a-b).$$

Из перестановочных соотношений для a и b следует, что

$$[A, A^*] = -[B, B^*] = \varepsilon,$$

все остальные коммутаторы равны нулю, а гамильтониан равен

$$H = \frac{\varepsilon E}{2}\left((2+\lambda^2) A^*A - (2-\lambda^2) B^*B + \lambda^2 B^*A + \lambda^2 A^*B\right).$$

Состояние вакуума, удовлетворяющее соотношениям

$$A|0\rangle = B|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1,$$

останется прежним, а состояния

$$|n, m\rangle' = \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}} A^{*n}B^{*m}|0\rangle$$

образуют ортонормированный базис

$${}'\langle n', m'|n, m\rangle' = (-1)^n \varepsilon^{n+m}\delta_{n'n}\delta_{m'm},$$

откуда легко находим, что

$$|n, m\rangle = \frac{1}{2^{(n+m)/2}}\sum_{i,j}(-1)^j\binom{n}{i}\binom{n}{j}|n+m-i-j, \ i+j\rangle'.$$

Применяя гамильтониан, получаем

$$(H-(m+n)E)|n, m\rangle' =$$
$$= \frac{\lambda^2 E}{2}\Big((n-m)|n, m\rangle' + \sqrt{n(m+1)}|n-1, m+1\rangle' -$$
$$- \sqrt{m(n+1)}|n+1, m-1\rangle'\Big),$$

т. е. среди базисных векторов только состояние вакуума будет собственным. Однако базисные векторы не образуют настоящей системы мультипольных духов, так как некоторые их линейные комбинации будут собственными векторами.

Заметим, что H можно записать в виде

$$H = H_0 + \lambda^2 H_{\mathrm{Int}};$$

все векторы $|n, m\rangle$ или $|n, m\rangle'$ являются собственными векторами H_0, в то время как в отношении H ситуация отличается от рассмотренной выше; „возмущение“ $\lambda^2 H_{\mathrm{Int}}$ нарушает полноту системы собственных функций оператора H. Это явление впервые было обнаружено в модели Ли.

2.1.4. *Осциллятор с комплексными духами*

Простейшая модель этого типа обладает гамильтонианом

$$H = Ea^*b + E^*b^*a \tag{2.24}$$

с теми же коммутаторами, что и в предыдущем примере:

$$[a, b^*] = [b, a^*] = 1, \tag{2.25}$$

E — комплексное число. Квантование требует введения пространства с индефинитной метрикой. Базисная система остается прежней:

$$a\,|0\rangle = b\,|0\rangle = 0, \quad \langle 0\,|\,0\rangle = 1, \quad |n, m\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\, a^{*n} b^{*m}\,|\,0\rangle, \tag{2.26}$$

причем

$$(H - (En + E^*m))\,|\,n, m\rangle = 0.$$

Нормы векторов состояний обладают свойствами, указывающими на комплексность собственных значений; задача собственных значений невырождена, и число, комплексно сопряженное к собственному значению, также является собственным значением.

Добавляя к гамильтониану член $\lambda^2 a^* a$, можно найти комплексные и мультипольные духи. Собственное число nE принадлежит собственному вектору $|\,n, 0\rangle$, чего, однако, нельзя сказать о его комплексно сопряженном. Все собственные числа имеют вид nE.

2.1.5. *Осциллятор, взаимодействующий с фиксированным источником*

Здесь мы рассмотрим теорию взаимодействия,

$$H = \varepsilon (E a^* a + g(a + a^*)), \quad [a, a^*] = \varepsilon, \quad [a, a] = 0,$$

где g — вещественная постоянная связи. Соответствующее пространство состояний совпадает с пространством из п. 2.1.1 или 2.1.2; в случае $\varepsilon = 1$ оно гильбертово, в случае $\varepsilon = -1$ имеет индефинитную метрику;

$$_0\langle n' \mid n \rangle_0 = \varepsilon^n \delta_{n'n}, \quad \mid n \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} a^{*n} \mid 0 \rangle_0.$$

Индекс 0 означает, что речь идет о собственных функциях невозмущенной задачи. Гамильтониан можно диагонализовать каноническим преобразованием

$$c = a + \frac{g}{E}, \quad c^* = a^* + \frac{g}{E}, \quad [c, c^*] = \varepsilon,$$

откуда

$$H = \varepsilon \left(E c^* c - \frac{g^2}{E} \right).$$

Собственные векторы H равны

$$H \mid n \rangle = \left(nE - \varepsilon \frac{g^2}{E} \right) \mid n \rangle,$$

где

$$\mid n \rangle = U \mid n \rangle_0 = \frac{1}{\sqrt{n!}} c^{*n} \mid 0 \rangle, \quad c \mid 0 \rangle = 0, \quad \langle 0 \mid 0 \rangle = 1,$$

причем U — унитарный оператор,

$$U = \exp\left(\varepsilon \frac{g}{E} (a - a^*) \right),$$

$$c = U a U^{-1}, \quad c^* = U a^* U^{-1}.$$

Векторы $\mid n \rangle$ обладают теми же свойствами нормировки, что и $\mid n \rangle_0$. Используя явный вид U, можно без труда вычислить скалярные произведения при $m \geqslant n$

$$
{}_0\langle n\,|m\rangle = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}} \binom{n}{i} \left(\frac{-g}{E}\right)^{i} \left(\frac{g}{E}\right)^{m-n+i} \times
$$
$$
\times \prod_{k=1}^{n-i} (m-n+i+k\varepsilon) \exp(-\varepsilon g^2/2E^2);
$$

при $m < n$

$$
{}_0\langle n\,|\,m\rangle = \sum_{i=0}^{n} \frac{1}{\sqrt{n!\,m!}} \binom{m}{i} \left(\frac{g}{E}\right)^{i} \left(\frac{-g}{E}\right)^{n-m+i} \times
$$
$$
\times \prod_{k=1}^{m-i} (n-m+i+k\varepsilon) \exp(-\varepsilon g^2/2E^2).
$$

В частности,

$$
{}_0\langle 0\,|0\rangle = \exp(-\varepsilon(g^2/2E^2)).
$$

В случае индефинитной метрики скалярное произведение возрастает с усилением связи.

Рассмотрим теперь теорию взаимодействия для мультипольных духов ($\varepsilon = 1$),

$$
H = E(a^*b + b^*a + \lambda^2 a^*a) +
$$
$$
+ g_1\left(1 + \lambda^2 \frac{g_2}{g_1}\right)(a + a^*) + g_2(b + b^*),
$$

с коммутаторами и невозмущенной базисной системой $|n, m\rangle_0$, введенными в п. 2.1.3. Преобразования

$$
c = a + \frac{g_2}{E}, \qquad c^* = a^* + \frac{g_2}{E},
$$

$$
d = b + \frac{g_1}{E}, \qquad d^* = b^* + \frac{g_1}{E}
$$

дают

$$
H = E(c^*d + d^*c + \lambda^2 c^*c) - \frac{2g_1g_2}{E} - \lambda^2 \frac{g_2^2}{E}.
$$

Так как это выражение с точностью до аддитивной постоянной соответствует свободному осциллятору с мультипольными духами, то

$$\left(H-(n+m)E+\frac{2g_1g_2}{E}+\lambda^2\frac{g^2}{E}\right)|n,\ m\rangle = \\ = \lambda^2 E\,\frac{m\sqrt{m}}{\sqrt{n+1}}\,|n+1,\ m-1\rangle,$$

$$|n,\ m\rangle=\frac{1}{\sqrt{n!\,m!}}\,c^{*n}d^{*m}\,|0\rangle,$$

$$c\,|0\rangle=d\,|0\rangle=0,\quad \langle 0\,|\,0\rangle=1.$$

Переход

$$|n,\ m\rangle=U\,|n,\ m\rangle_0,\quad \begin{array}{l} c=UaU^{-1},\\ d=UbU^{-1}\end{array}$$

задается теперь унитарным оператором

$$U=\exp\left(\frac{g_1}{E}(a-a^*)+\frac{g_2}{E}(b-b^*)\right).$$

Таким образом, мультипольность в теории со взаимодействием носит тот же характер, что и в теории без взаимодействия. Можно вычислить и скалярные произведения $|n,\ m\rangle$ на $|n,\ m\rangle_0$, например

$${}_0\langle 0\,|\,0\rangle=\exp(-g_1g_2/E^2).$$

2.2. Поле с нерелятивистским коммутатором

Мы рассмотрим здесь в качестве простейшего примера применения индефинитной метрики в квантовой теории поля свободное скалярное (псевдоскалярное) поле с не δ-образным одновременным коммутатором.

Пусть уравнение поля и перестановочные соотношения задаются формулами

$$(\Box-\mu^2)\varphi=0,\quad [\varphi(\mathbf{x},\ t),\ \dot\varphi(\mathbf{x}',\ t)]=f(\mathbf{x}-\mathbf{x}'),$$

а прочие коммутаторы имеют обычный вид. Здесь предполагается, что

$$f(\mathbf{x})=f^*(\mathbf{x}),\quad f(\mathbf{x})=f(-\mathbf{x}).$$

Тогда фурье-образ $\tilde f(\mathbf{k})$ функции $f(\mathbf{x})$ будет удовлетворять соотношениям

$$\tilde f(\mathbf{k})=\tilde f^*(\mathbf{k}),\quad \tilde f(\mathbf{k})=\tilde f(-\mathbf{k}).$$

Поле φ удовлетворит уравнению поля и перестановочным соотношениям, если положить

$$\varphi(x) = \frac{1}{(2\pi)^{3/2}} \int \sqrt{\frac{|\tilde{f}(\mathbf{k})|}{2k_0}} \left(a(\mathbf{k}) e^{ikx} + a^*(\mathbf{k}) e^{-ikx}\right) d\mathbf{k},$$

$$k_0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2},$$

и

$$[a(\mathbf{k}),\ a^*(\mathbf{k}')] = \operatorname{sign} \tilde{f}(\mathbf{k})\, \delta(\mathbf{k} - \mathbf{k}').$$

4-импульс P_μ, определенный соотношением $[P_\mu, \varphi] = i\partial_\mu \varphi$, будет равен

$$P_\mu = \int k_\mu \operatorname{sign} \tilde{f}(\mathbf{k})\, a^*(\mathbf{k})\, a(\mathbf{k})\, d\mathbf{k};$$

для импульсов с $\tilde{f}(\mathbf{k}) = -1$ мы столкнемся с аномальными осцилляторами и придем, таким образом, к теории с индефинитной метрикой. Очевидно, что φ эрмитово и что

$$P_i^* = P_i, \quad P_0^* = P_0.$$

2.3. Свободное электромагнитное поле

Лагранжиан

$$L = -\frac{1}{2} \partial_\mu A_\nu \partial_\mu A_\nu$$

дает нам обычным способом

$$\Box A_\mu = 0,$$

$$[A_\mu(x),\ A_\nu(x')] = i\delta_{\mu\nu} D(x - x'), \tag{2.27}$$

$$P_\nu = \int_\sigma \left(\partial_\mu A_\rho \partial_\nu A_\rho - \frac{1}{2} \delta_{\mu\nu} \partial_\rho A_\sigma \partial_\rho A_\sigma\right) d\sigma_\mu.$$

Эти уравнения поля и перестановочные соотношения удовлетворяются, если положить [1])

$$A_\mu(x) = \sum \sqrt{\frac{1}{2|k|}} (a(k, \lambda) e^{ikx} + \tilde{a}(k, \lambda) e^{-ikx}) e_\mu(k, \lambda),$$

[1]) Читателю следует иметь в виду, что автор не различает здесь написание трехмерных и четырехмерных векторов, а также не выписывает нормирующих множителей. — *Прим. ред.*

где

$$e_\mu(k, \lambda) e_\mu(k, \lambda') = \delta_{\lambda\lambda'}, \qquad \sum_\lambda e_\mu(k, \lambda) e_\nu(k, \lambda) = \delta_{\mu\nu},$$

$$e_\mu(k, \lambda) k_\mu = \begin{cases} = 0, & \lambda = 1, 2, \\ = |k|, & \lambda = 3, \\ = i|k|, & \lambda = 4, \end{cases}$$

$\tilde{a}(k, i) = a^*(k, i)$ для $i = 1, 2, 3$, $a(k, 4) = -ia(k, 0)$,

$$\tilde{a}(k, 4) = -ia^*(k, 0),$$

$$[a(k, i), a^*(k', i')] = \delta_{ii'}\delta_{kk'},$$

$$[a(k, 0), a^*(k', 0)] = -\delta_{kk'}.$$

4-импульс P_μ выражается через a так:

$$P_\mu = \sum k_\mu \left\{ \sum_{i=1}^{3} a^*(k, i) a(k, i) - a^*(k, 0) a(k, 0) \right\}.$$

Из-за коммутатора для $a(k, 0)$ мы приходим к теории поля с индефинитной метрикой. Векторы состояния $|N_1, N_2, N_3, N_0\rangle$ строятся по образцу (2.7) и имеют норму

$$\langle N_1, N_2, N_3, N_0 | N_1', N_2', N_3', N_0' \rangle = (-1)^{N_0} \delta_{NN'}.$$

Ясно, что $\overset{*}{A_i} = A_i$, $\overset{*}{A_0} = A_0$.

Для того чтобы уравнения Максвелла выполнялись как уравнения для средних значений, надо наложить условие Лоренца, постулировав, что для описания физических состояний допустимы только такие векторы состояния, для которых

$$\partial_\mu A_\mu^{(+)} | L \rangle = 0. \tag{2.28}$$

При фиксированном k это условие разрешает для N_3, N_0 только следующее множество состояний (лоренцеву совокупность):

$$|0\rangle = |0, 0\rangle,$$

$$|1\rangle = |1, 0\rangle - |0, 1\rangle,$$

$$|2\rangle = |2, 0\rangle - \sqrt{2}\,|1, 1\rangle + |0, 2\rangle,$$

. . . .

Итак,

$$|L\rangle = \sum c_n |n\rangle.$$

Поскольку

$$\langle m|n\rangle = 0, \quad \text{если} \quad m \neq 0,\ n \neq 0,\ \langle 0|0\rangle = 1,$$

то

$$\langle L|L\rangle = c_0^* c_0 \geqslant 0,$$

отрицательные вероятности никогда не появляются на лоренцевой совокупности $\{|L\rangle\}$ и

$$\langle L|P_\mu|L\rangle = \left\langle L \left| \sum_{\lambda=1}^{2} k_\mu a^*(k, \lambda)\, a(k, \lambda) \right| L \right\rangle.$$

Метрика вырождена на подпространстве пространства H, порожденном системой $\{|L\rangle\}$, но не вырождена на всем пространстве H.

Причина, по которой здесь вводится индефинитная метрика, состоит, конечно, в том, что в классической теории A_4 мнимо. Поэтому сходная ситуация возникает во всех теориях, где основными полевыми величинами являются 4-векторы, тензоры и т. д., как это было показано (Гупта [1964]) для векторных мезонов и (Гупта [1952]) для гравитационного поля. В электродинамике рассмотренный выше подход называют формализмом Гупта — Блейлера (Гупта [1950], Блейлер [1950]).

2.4. Теории с лагранжианами с высшими производными

Ради простоты рассмотрим случай простого скалярного поля φ, удовлетворяющего уравнению

$$\left(1 - \frac{\Box}{\mu^2}\right) \Box\varphi = -\rho,$$

где ρ — (операторная) плотность источника. Подробно изучались и более сложные модели полей с высшими производными (Паис и Уленбек [1950], Меттьюз [1949], Филлипс [1955], Киббл и Полкингхорн [1958], Барут и Маллен [1962]). Выписанному уравнению поля соответствует плотность лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2}\partial_\nu\varphi\left(1 - \frac{\Box}{\mu^2}\right)\partial_\nu\varphi - \rho\varphi.$$

Вводя

$$\varphi^{(0)} = \left(1 - \frac{\Box}{\mu^2}\right)\varphi,$$

$$\varphi = \varphi^{(0)} - \varphi^{(1)},$$

$$\varphi^{(1)} = -\frac{\Box}{\mu^2}\varphi,$$

находим, что плотность лагранжиана L с точностью до четырехмерной дивергенции равна плотности лагранжиана

$$L' = -\frac{1}{2}\{\partial_\nu\varphi^{(0)}\partial_\nu\varphi^{(0)} - \partial_\nu\varphi^{(1)}\partial_\nu\varphi^{(1)} - \mu^2\varphi^{(1)}\} - \\ - \rho(\varphi^{(0)} - \varphi^{(1)}),$$

откуда получаются уравнения поля и перестановочные соотношения

$$\Box\varphi^{(0)} = -\rho, \quad [\varphi^{(0)}(x), \varphi^{(0)}(x')] = iD(x - x'),$$

$$(\Box - \mu^2)\varphi^{(1)} = -\rho, \quad [\varphi^{(1)}(x), \varphi^{(1)}(x')] = -i\Delta(x - x'),$$

$$(x - x')^2 > 0.$$

Если мы в качестве базисных состояний выберем состояния свободных частиц, то получим из-за отрицательного знака коммутатора $\varphi^{(1)}$ теорию с индефинитной метрикой:

$$\langle N_0, N_1 | N_0', N_1' \rangle = (-1)^{N_1}\delta_{NN'},$$

в которой и $\varphi^{(0)}$ и $\varphi^{(1)}$ эрмитовы. Как известно, теории поля с высшими производными, вообще говоря, автоматически приводят к регуляризованным пропагаторам. В самом деле, в нашем случае, например,

$$[\varphi(x), \varphi(x')] = i(D(x - x') - \Delta(x - x')),$$

откуда следует, что δ-образная сингулярность уже исключена.

2.5. Вспомогательные регуляризующие поля

Метод регуляризации Паули — Вилларса работает с подходящим образом регуляризованными пропагаторами. Подобные пропагаторы появляются в S-матрице, если подставить в гамильтониан взаимодействия вместо одного поля некоторую суперпозицию полей с разными массами:

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + \sum b_n \varphi_n(x) \quad \text{(бозоны)},$$

$$\psi(x) = \psi_0(x) + \sum c_n \psi_n(x) \quad \text{(фермионы)}.$$

Предпишем перестановочные соотношения

$$\{\psi_m(x),\ \bar{\psi}_n(x')\} = -i\varepsilon_n S(x - x';\ \varkappa_n^2)\,\delta_{mn},$$

$$[\varphi_m(x),\ \varphi_n(x')] = i\rho_n \Delta(x - x';\ \mu_n^2)\,\delta_{mn}.$$

Отсюда для полных полей получим [1])

$$\{\psi(x),\ \bar{\psi}(x')\} = -i \sum \varepsilon_n c_n^* c_n S(x - x';\ \varkappa_n^2),$$

$$[\varphi(x),\ \varphi(x')] = i \sum \rho_n b_n^2 \Delta(x - x';\ \mu_n^2).$$

Чтобы получилась сходящаяся теория, ε, ρ, c, b должны удовлетворять условиям Паули — Вилларса:

$$\sum \varepsilon_n c_n^* c_n = 0, \qquad \sum \varepsilon_n \varkappa_n^2 c_n^* c_n = 0, \ \ldots,$$

$$\sum \rho_n b_n^2 = 0, \qquad \sum \rho_n \mu_n^2 b_n^2 = 0, \ \ldots.$$

Из-за этих условий мы неизбежно получаем для ε и ρ отрицательные значения и, следовательно, принимая во внимание перестановочные соотношения, теорию с индефинитной метрикой (Гупта [1953]).

Этот метод регуляризации тесно связан с только что упоминавшимися теориями с высшими производными. В самом деле, например,

$$\prod_i (\Box - \mu_i^2)\,\varphi(x) = 0.$$

---

[1]) В следующих двух формулах суммирование по n включает и значение $n = 0$. — *Прим. ред.*

Регуляризованный пропагатор возникает и при суперпозиции полей с непрерывным распределением масс:

$$\varphi(x) = \int \sqrt{|\rho(\varkappa^2)|}\,\varphi(x, \varkappa^2)\, d\varkappa^2,$$

$$[\varphi(x, \varkappa^2),\ \varphi(x', \varkappa'^2)] = \operatorname{sign}\rho(\varkappa^2)\,\delta(\varkappa^2 - \varkappa'^2),$$

с условиями

$$\int \rho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 = 0, \qquad \int \varkappa^2 \rho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 = 0, \ \ldots .$$

Отметим, что для того, чтобы получилась конечная теория, в простейшем случае скалярной связи

$$H = g\bar{\psi}(x)\,\psi(x)\,\varphi \tag{2.29}$$

достаточно одного вспомогательного бозонного и двух фермионных полей (Медведев и Поливанов [1958]), и что если имеется хотя бы одно вспомогательное фермионное поле, то собственная энергия фермиона расходится линейно [1]), ибо различные массы надо подставлять и в числитель фермионного пропагатора.

2.6. Модель Иокоямы

Модель Иокоямы (Иокояма [1961—1962]) представляет собой типичный пример применения вспомогательных полей. С этой точки зрения она вполне эквивалентна методу регуляризации Паули — Вилларса, обеспечивающему сходимость. Основная разница заключается в тех аспектах модели, которые связаны с вероятностной интерпретацией. В рамках метода Паули — Вилларса унитарность S-матрицы для физических процессов достигается лишь в пределе, когда вспомогательные массы стремятся к бесконечности (что одновременно возвращает нас к исходной теории и к исходным расходимостям [2])). В модели

[1]) Это утверждение автора неточно. Следовало бы сказать, что автоматического исчезновения линейной расходимости в собственной энергии фермиона уже не происходит. — *Прим. ред.*

[2]) В некоторых специальных случаях регуляризация Паули — Вилларса устраняет расходимости таким образом, что они не восстанавливаются при стремлении вспомогательных масс к бесконечности. — *Прим. ред.*

Иокоямы сама структура S-матрицы выбирается некоторым определенным образом так, чтобы обеспечить компенсацию нефизических элементов S-матрицы. В этом разделе мы опишем только саму модель в ее позднейшей форме (Иокояма [1962]); основные моменты вероятностной интерпретации будут рассмотрены в четвертой главе.

В основе модели лежит лагранжиан

$$L = L_0 + L', \quad L' = L_1 + L_2 + L_3,$$

где свободный лагранжиан L_0 равен

$$L_0 = -\overline{\Psi}(\gamma_\mu \partial_\mu + \varkappa)\Psi - \sum_{l=1}^{2} \bar{\varphi}_l(\gamma_\mu \partial_\mu + \lambda_l)\varphi_l + \\ + \sum_{l=1}^{2} \bar{\varphi}'_l(\gamma_\mu \partial_\mu + \lambda_l)\varphi'_l + \frac{1}{2} A(\Box - \mu^2) A,$$

а лагранжиан взаимодействия L' состоит из членов

$$L_1 = f(\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}'_1)(\varphi_1 + \varphi'_1) A,$$
$$L_2 = g'(\bar{\varphi}_1 - \bar{\varphi}'_1)(\varphi_2 - \varphi'_2) + \text{Эрм. сопр.},$$
$$L_3 = g(\bar{\varphi}_2 + \bar{\varphi}'_2)\Psi + \text{Эрм. сопр.} .$$

Здесь Ψ и A означают физические поля (фермионное и бозонное соответственно). Все остальные (фермионные) поля — вспомогательные. Из лагранжиана сразу следует, что для полей Ψ, A и φ_l получаются обычные правила коммутации и, значит, гильбертова метрика. Противоположный знак при φ'_l в L_0 влечет обратный знак у антикоммутатора, т. е. приводит к теории с индефинитной метрикой:

$$\{\varphi_l(x), \bar{\varphi}_l(x')\} = -\{\varphi'_l(x), \bar{\varphi}'_l(x')\} = -iS_l(x - x').$$

Приметим одинаковые массы λ_l для полей φ_l и φ'_l.

Переходя к представлению взаимодействия, получаем гамильтониан взаимодействия

$$H(x) = -L'(x) = H_1(x) + H_2(x) + H_3(x)$$

и обычную S-матрицу в форме

$$S = T\left\{\exp\left[-i\int H(x)\,dx\right]\right\}.$$

Следовательно, диаграммами Фейнмана для элементарных вершин будут

$$H_1 \to \overset{1+1'}{\text{———}} \underset{-f}{\overset{\vdots A}{\times}} \overset{1+1'}{\sim\sim\sim}, \qquad H_2 \to \overset{2-2'}{\text{———}} \underset{-g'}{\times} \overset{1-1'}{\sim\sim\sim},$$

$$H_3 \to \overset{\Psi}{\text{—}} \underset{-g}{\times} \overset{2+2'}{\sim\sim\sim}.$$

Поэтому из антикоммутаторов

$$\{\varphi_i \pm \varphi'_i,\ \bar{\varphi}_i \pm \bar{\varphi}'_i\} = 0, \quad i = 1,\ 2,$$

легко можно видеть, что

(a) ни один из операторов H_1, H_2, H_3 не может прямо связываться с самим собой через нефизический пропагатор;

(b) между H_1 и H_3 нет прямой связи.

Так как число фермионов сохраняется, то можно двигаться по диаграмме, следуя фермионной линии, и найти, что неисчезающие связи возникают только из последовательностей

$$\to H_1 \to H_2 \to H_3 \to H_2 \to H_1 \to .$$

Поэтому простейшая вершина обычной теории заменяется теперь вершиной

$$k \text{——} \underset{-g}{\times} \overset{S_F^{\lambda_2}}{\sim\sim\sim} \underset{-g'}{\times} \overset{S_F^{\lambda_1}}{\sim\sim\sim} \underset{-f}{\overset{\vdots}{\times}} \overset{S_F^{\lambda_1}}{\sim\sim\sim} \underset{-g'}{\times} \overset{S_F^{\lambda_2}}{\sim\sim\sim} \underset{-g}{\times} \text{——} k',$$

что можно выразить математически так:

$$f \to f\,\Gamma(k,\ k') = f\,\Gamma(k)\,\Gamma(k'),$$

где

$$\Gamma(k) = \frac{4gg'}{(i\gamma_\mu k_\mu + \lambda_1)(i\gamma_\mu k_\mu + \lambda_2)}.$$

Импульсы, появляющиеся в знаменателе Г, гарантируют сходимость.

2.7. Модель Симодаиры

Эта модель, как и предыдущая, была придумана с той целью, чтобы получить поддающуюся интерпретации теорию, дающую с помощью вспомогательных полей конечные результаты. Конкретно, в ней рассматривается взаимодействие заряженного скалярного поля ψ с нейтральным скалярным полем φ' и вспомогательным скалярным полем φ (Симодаира [1960]). Лагранжиан модели равен

$$L = L_0 + L' + L'',$$

где

$$L_0 = -(\partial_\mu \psi^* \partial_\mu \psi + K^2 \psi^* \psi) + \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi \partial_\mu \varphi + \mu^2 \varphi^2) - \\ - \frac{1}{2}(\partial_\mu \varphi' \partial_\mu \varphi' + \mu'^2 \varphi'^2),$$

$$L' = g' \psi^* \psi \varphi', \quad L'' = gA(\partial)\, \psi^* B(\partial)\, \psi C(\partial)\, \varphi.$$

Так как вклад, отвечающий полю φ, входит в L_0 со знаком плюс, а это ведет к отрицательному знаку в коммутаторе свободного поля φ, мы получаем теорию с индефинитной метрикой. Член L' — это обычный член взаимодействия, а от члена L'', содержащего вспомогательное поле, можно ожидать желаемого эффекта регуляризации. В частных случаях (Симодаира [1960])

$$A(\partial) = B(\partial) = 1, \quad C(\partial) = \Box - \mu^2$$

и

$$C(\partial) = \frac{\Box - \mu^2}{\Box - l^2}, \quad l^2 \neq \mu^2, \tag{2.30}$$

модель была рассмотрена более подробно. Здесь возникают две дополнительные проблемы. Во-первых, поскольку лагранжиан взаимодействия содержит временны́е производные, определение канонически сопряженного импульса отличается от обычного. Во-вторых, приходится должным образом подбирать A, B и C, дабы компенсировать расходимости. Эти вопросы рассмотрены в указанной выше статье, где делается вывод, что выбор (2.30) может привести к конечной теории, так как фурье-образ выражения (2.30) при больших k ведет себя как ~ 1. Что касается интерпретации теории, то следует особо отметить, что надо опасаться только членов S-матрицы с комбинацией

$$C(\partial)\, \varphi(x) \tag{2.31}$$

под знаком нормального произведения (какой бы матричный элемент ни рассматривался), которые могли бы привести к рождению нефизических частиц.

2.8. Предложение Маркова

М. А. Марков ([1959]; также Марков и Комар [1959]) рассмотрел уравнения поля, в которые вместо обычной квадратичной формы $s^2 = -x_\mu^2$ подставлена модифицированная форма $s'^2 = -(x_\mu^2 + a^2)$. Здесь инвариант a^2 характеризует средний размер частицы поля, который может быть различным (и характерным) для различных семейств частиц. Так как подстановка

$$x'_\mu = x_\mu \frac{s'}{s}$$

приводит к s'^2, то для простейшего случая скалярного бозона массы нуль уравнение свободного поля было предложено в виде

$$\Box'\varphi = 0$$

и совершенно аналогично для более сложных частиц. Это приводит к тому выводу, что функциями Грина в этой теории будут обычные функции, в которых только всюду вместо s^2 стоит s'^2. Так, например,

$$D \to D(s'^2) = \frac{-\varepsilon(s'^2)}{2\pi}\,\delta(s'^2),$$

$$D^1 \to D^1(s'^2) = \frac{1}{(2\pi)^3}\int \delta(k_\mu^2)\, e^{ikx'}\, dk = \frac{1}{(2\pi)^2}\int_0^\infty \sin(s'^2\alpha)\, d\alpha,$$

$$\bar{D} \to \bar{D}(s'^2) = \frac{1}{(2\pi)^4} P \int \frac{e^{ikx'}}{k_\mu^2}\, dk = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\infty \cos(s'^2\alpha)\, d\alpha,$$

$$D_c \to D_c(s'^2) = \bar{D} + \frac{1}{2} iD^1 = \frac{1}{4\pi^2}\int_0^\alpha e^{i\alpha s'^2}\, d\alpha.$$

Отсюда $D^1(k)$, определяемая как

$$D^1(k) = \frac{1}{(2\pi)^4}\int D^1(x)\, e^{ikx}\, dx,$$

равна

$$D^1(k)=\frac{2}{(2\pi)^4}\int\cos\left(k_\mu^2\beta-\frac{a^2}{4\beta}\right)d\beta.$$

Однако, с другой стороны,

$$D^1(x)=\int D^1(k)\,e^{-ikx}\,dk=$$

$$=\int\int d\varkappa^2\delta(k^2+\varkappa^2)\,D^1(-\varkappa^2)\,e^{-ikx}\,dk=\int d\varkappa^2\rho(\varkappa^2)\,\Delta^1(\varkappa^2),$$

где

$$\rho(\varkappa^2)=(2\pi)^3D^1(-\varkappa^2)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\cos\left(-\varkappa^2\beta-\frac{a^2}{4\beta}\right)d\beta=$$

$$=\delta(\varkappa^2)-\frac{1}{2}a^2\,\mathrm{Re}\,\frac{H_1^{(1)}(a\varkappa)}{a\varkappa}.$$

Так как $\rho(\varkappa^2)$ может принимать и отрицательные значения, то, ссылаясь на теорему Лемана — Челлена [1952—1954], Марков настаивает, что получается теория с индефинитной метрикой.

Это, однако, нельзя утверждать с полной определенностью. Дело в том, что теория обладает 4-вектором энергии-импульса со свойством

$$[P_\mu,\ \varphi]=i\partial'_\mu\varphi,$$

которое также нарушает условия теоремы Лемана — Челлена и позволяет надеяться на объяснение ситуации без явного привлечения индефинитной метрики.

Необходимо ли в самом деле вводить здесь индефинитную метрику могло бы стать совсем ясным только после рассмотрения задач взаимодействия, где требуется явное использование определенного представления векторов состояний. Такие задачи не были, однако, затронуты в этой модели.

Можно, пожалуй, надеяться, что использование x'_μ или ($x_\mu +$ индефинитная метрика) откроет некоторые дополнительные возможности. Вид уравнения $\Box'\varphi=0$ показывает, что в x'_μ-пространстве частицы являются обычными свободными частицами, для которых пространство векторов состояний может быть реализовано как гильбертово пространство. (Это пространство будет, конечно, обладать весьма неприятными свойствами.) Если же, чтобы интерпретировать уравнения, мы обратимся к x_μ-пространству, то получим, по-видимому, частный случай теории Паули — Вилларса со специфическим видом $\rho(\varkappa^2)$.

2.9. Теория Гейзенберга

В теории элементарных частиц, предложенной Гейзенбергом (Гейзенберг [1957b]), можно найти указания на то, что уравнения поля должны быть дополнены допущением вида

$$\frac{1}{2} S'(p) = \int \rho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 \left[\frac{\gamma_\mu p_\mu + i\varkappa}{p^2 + \varkappa^2} - \frac{\gamma_\mu p_\mu + i\varkappa}{p^2} + \frac{\gamma_\mu p_\mu \varkappa^2}{(p^2)^2}\right] \qquad (2.32)$$

для фурье-образа вакуумного среднего

$$S'(x, x') = \langle 0 | \{\psi(x), \bar{\psi}(x')\} | 0 \rangle.$$

Этот результат следовало бы вывести, хотя бы в принципе, из самой теории.

Подобная форма S' требует квантования с помощью индефинитной метрики, ибо согласно Леману и Челлену в противном случае S' имело бы вид

$$S' \sim \int \rho(\varkappa^2)\, d\varkappa^2 S(\varkappa^2) \quad \text{с} \quad \rho(\varkappa^2) \geqslant 0.$$

Ниже мы убедимся, что предложенная форма S' по существу отвечает дипольному нефизическому состоянию.

2.10. Модель Фруассара

В этом параграфе мы рассмотрим пример релятивистской теории поля, предложенной Фруассаром [1959]. Его модель приводит к мультипольным духам и обобщает на случай поля результаты п. 2.1.3, касающиеся одиночного осциллятора.

За основу возьмем лагранжиан

$$L = -(\partial_\mu A \partial_\mu B + \mu^2 AB + \lambda^2 A^2),$$

где A и B — два скалярных поля. Этот лагранжиан ведет к уравнению поля

$$(\square - \mu^2) A = 0, \quad (\square - \mu^2) B = 2\lambda^2 A$$

и одновременны́м коммутаторам

$$[A, A] = [B, B] = [\dot{A}, A] = [A, B] = [\dot{B}, B] = 0,$$

$$[\dot{A}(x, t), B(x', t)] = [\dot{B}(x, t), A(x', t)] = -i\delta(x - x').$$

Решениями уравнений поля будут

$$\begin{aligned} A(x) &= A_0(x) = \sum \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \left(a(k) e^{ikx} + a^*(k) e^{-ikx}\right), \\ B(x) &= B_0(x) + \frac{\lambda^2}{\mu^2}(2 + x_\mu \partial_\mu) A_0(x), \\ B_0(x) &= \sum \sqrt{\frac{1}{2\omega}} \left(b(k) e^{ikx} + b^*(k) e^{-ikx}\right), \\ k_\mu^2 &= -\mu^2. \end{aligned} \tag{2.33}$$

Одновременны́е перестановочные соотношения удовлетворяются, если

$$\begin{gathered} [a, a] = [a, a^*] = [b, b] = [b, b^*] = [a, b] = 0, \\ [a(k), b^*(k')] = \delta_{kk'}. \end{gathered} \tag{2.34}$$

Отсюда

$$\begin{aligned} &[A(x), A(x')] = 0, \\ &[A(x), B(x')] = [B(x), A(x')] = i\Delta(x - x'), \\ &[B(x), B(x')] = 4i\lambda^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2} \Delta(x - x'), \end{aligned} \tag{2.35}$$

где использовано тождество

$$x_\mu \partial_\mu \Delta(x) = 2\left(-1 + \mu^2 \frac{\partial}{\partial \mu^2}\right) \Delta(x).$$

Оператор энергии-импульса можно определить условиями

$$[P_\mu, A(x)] = i\partial_\mu A(x), \quad [P_\mu, B(x)] = i\partial_\mu B(x). \tag{2.36}$$

В импульсном представлении он имеет вид

$$P_\mu = \sum k_\mu \left\{ a^*(k) b(k) + b^*(k) a(k) + \frac{\lambda^2}{\mu^2} a^*(k) a(k) \right\},$$

откуда следует, что

$$[P_\mu,\ B_0] = i\,\partial_\mu \left\{ B_0 + \frac{\lambda^2}{\mu^2} A_0 \right\}. \tag{2.37}$$

Определим теперь состояние вакуума $|0\rangle$ условием $P_\mu |0\rangle = 0$. Это условие выполняется, если, как обычно,

$$a|0\rangle = b|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1.$$

Применяя затем к вакууму $|0\rangle$ $a^*(k)$ и $b^*(k)$, получаем полную систему векторов состояния, образующую базис пространства.

Из перестановочных соотношений и из вида P_μ видно, что наше поле эквивалентно набору осцилляторов с мультипольными духами, рассмотренных в п. 2.1.3. Таким образом, в одночастичном секторе имеются собственные состояния $a^*|0\rangle$ и дипольные духи $b^*|0\rangle$, в то время как среди двухчастичных состояний есть собственные состояния $a^*a^*|0\rangle$, дипольные $a^*b^*|0\rangle$ и трипольные $b^*b^*|0\rangle$ духи и т. д. Модель Фруассара тесно связана с теориями с высшими производными (Вилларс [1960]) с равными массами. В самом деле, из уравнений поля получаем

$$(\Box - \mu^2)(\Box - \mu^2) B(x) = 0.$$

За этим формальным соотношением фактически скрывается предельный переход. Рассмотрим поле

$$\varphi(x) = \frac{4\lambda^2}{\delta^2} (\varphi_{\mu^2+\delta^2}(x) - \varphi_{\mu^2}(x)),$$

где $\varphi_{\mu^2+\delta^2}(x)$ и $\varphi_{\mu^2}(x)$ — свободные поля, отвечающие массам $\mu^2 + \delta^2$ и μ^2 соответственно. Пусть $\varphi_{\mu^2+\delta^2}$ квантуется обычным образом, а φ_{μ^2} — с обратным знаком в коммутаторе. В самом деле, в теориях с высшими производными, как мы уже видели в § 2.4, знаки коммутаторов для разных масс чередуются (Филлипс [1955]). Тогда

$$(\Box - (\mu^2 + \delta^2))(\Box - \mu^2)\varphi = 0,$$

$$[\varphi(x),\ \varphi(x')] = 4\lambda^2 i\,\frac{\Delta(x - x';\ \mu^2 + \delta^2) - \Delta(x - x';\ \mu^2)}{\delta^2},$$

в пределе коммутатор отличен от нуля и равен

$$[\varphi(x),\ \varphi(x')] = 4i\lambda^2 \frac{\partial}{\partial\mu^2} \Delta(x - x';\ \mu^2),$$

как и для поля $B(x)$.

Поля A и B можно также использовать как вспомогательные регуляризующие поля. Действительно, для поля

$$\varphi(x) = \varphi_0(x) + b_1 A(x) + b_2 B(x)$$

имеем

$$[\varphi(x),\ \varphi(x')] = i\Delta(x - x';\ \varkappa^2) + 2b_1 b_2 i \Delta(x - x';\ \mu^2) + \\ + 2b_2^2 i \lambda^2 \frac{\partial}{\partial\mu^2} \Delta(x - x';\ \mu^2).$$

Отсюда вытекает, что

$$[\varphi(x),\ \varphi(x')] = i \int \rho(m^2) \Delta(x - x';\ m^2)\, dm^2,$$

где

$$\rho(m^2) = \delta(m^2 - \varkappa^2) + 2b_1 b_2 \delta(m^2 - \mu^2) + b_2^2\, 2\lambda^2 \delta'(m^2 - \mu^2). \tag{2.38}$$

Если

$$2b_1 b_2 = -1, \qquad b_2^2 = \frac{\varkappa^2 - \mu^2}{2\lambda^2},$$

то мы получаем

$$\int \rho(m^2)\, dm^2 = 0, \qquad \int m^2 \rho(m^2)\, dm^2 = 0$$

— условия, аналогичные тем, которые использовались позднее в теории Гейзенберга (Гейзенберг [1957 b], Гейзенберг, Дюрр и др. [1959], Секин [1962], Ариф уз-Заман [1960]).

Изучив модель Фруассара, можно легко построить аналогичные модели, в которых возникают другие мультипольные духи (Надь [1961]). Модель, ведущая к трипольным нефизическим состояниям уже в одночастичном секторе, получается из лагранжиана

$$L = -\frac{1}{2}(\partial_\mu B\, \partial_\mu B + \mu^2 B^2) - (\partial_\mu A\, \partial_\mu C + \mu^2 AC) - \lambda^2 AB,$$

где A, B, C — вещественные скалярные поля. Соответствующие уравнения поля имеют вид

$$(\square - \mu^2) A = 0,$$

$$(\square - \mu^2) B = \lambda^2 A,$$

$$(\square - \mu^2) C = \lambda^2 B,$$

а одновременные коммутаторы равны

$$[\dot{B}(x, t), B(x', t)] = [\dot{A}(x, t), C(x', t)] = \\ = [\dot{C}(x, t), C(x', t)] = -i\delta(x - x').$$

Все остальные коммутаторы равны нулю. Решением уравнений поля будет

$$A(x) = A_0(x),$$

$$B(x) = B_0(x) + \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\left(\frac{1}{2} + x_\mu \partial_\mu\right) A_0(x),$$

$$C(x) = C_0(x) + \frac{3}{4}\left[\frac{\lambda^2}{\mu^2}\left(1 - \frac{\lambda^2}{2\mu^2}\right) - \frac{3}{2}\right] A_0(x) + \frac{3}{2} B_0(x) + \\ + \frac{\lambda^2}{2\mu^2} x_\mu \partial_\mu B_0(x) + \frac{\lambda^4}{8\mu^4} x_\mu x_\rho \partial_\mu \partial_\rho A_0(x),$$

где

$$A_0(x) = \sum \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (a(k) e^{ikx} + a^*(k) e^{-ikx}),$$

$$B_0(x) = \sum \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (b(k) e^{ikx} + b^*(k) e^{-ikx}),$$

$$C_0(x) = \sum \frac{1}{\sqrt{2\omega}} (c(k) e^{ikx} + c^*(k) e^{-ikx})$$

$$(k_0 = +\sqrt{\mathbf{k}^2 + \mu^2})$$

— свободные поля, удовлетворяющие уравнениям

$$(\square - \mu^2) A_0 = (\square - \mu^2) B_0 = (\square - \mu^2) C_0 = 0.$$

Коэффициенты в решениях для A, B и C подбираются таким образом, чтобы уравнения поля и одновременные перестановочные соотношения удовлетворялись бы при

$$[a, c^*] = [c, a^*] = [b, b^*] = \delta_{kk'},$$

в то время как остальные коммутаторы равны нулю. Из определений легко получаем, что

$$[A_0(x),\ C_0(x')]=[B_0(x),\ B_0(x')]=i\Delta(x-x'),$$
$$[A_0,\ A_0]=[A_0,\ B_0]=[B_0,\ C_0]=[C_0,\ C_0]=0,$$
$$[A,\ A]=[A,\ B]=0,$$
$$[A(x),\ C(x')]=[B(x),\ B(x')]=i\Delta(x-x'),$$
$$[B(x),\ C(x')]=i\lambda^2\frac{\partial}{\partial\mu^2}\Delta(x-x'),$$
$$[C(x),\ C(x')]=i\frac{3}{2}\lambda^2\left(1-\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\right)\frac{\partial}{\partial\mu^2}\Delta(x-x')+ \\ +i\frac{\lambda^4}{4}\frac{\partial^2}{(\partial\mu^2)^2}\Delta(x-x').$$

Коэффициенты решений определяются не единственным образом, так как, например, при $\lambda^2=0$ поле $C(x)=C_0(x)$ также удовлетворяет уравнениям. С этой точки зрения полученное решение нельзя назвать самым изящным. Однако этот факт лишь отражает произвол в определении дипольных и трипольных духов, который мы уже отмечали в § 1.2.

Определим 4-вектор энергии-импульса обычными требованиями

$$[P_\mu,\ A]=i\,\partial_\mu A,\quad [P_\mu,\ B]=i\,\partial_\mu B,\quad [P_\mu,\ C]=i\,\partial_\mu C.$$

Тогда из уравнений получаем

$$[P_\mu,\ A_0]=i\,\partial_\mu A_0,\quad [P_\mu,\ B_0]=i\,\partial_\mu\left(B_0+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}A_0\right),$$
$$[P_\mu,\ C_0]=i\partial_\mu\left\{C_0+\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\left(B_0-\frac{3}{2}A_0\right)\right\}.$$

Легко видеть, что в импульсном представлении P_μ дается выражением

$$P_\mu=\sum k_\mu\left\{a^*(k)\,c(k)+c^*(k)\,a(k)+b^*(k)\,b(k)+ \right.\\ \left. +\frac{\lambda^2}{2\mu^2}\left(b^*(k)\,a(k)+a^*(k)\,b(k)-\frac{3}{2}a^*(k)\,a(k)\right)\right\}.$$

Определим теперь формально состояние вакуума с минимальной энергией обычными условиями

$$a\,|\,0\rangle=b\,|\,0\rangle=c\,|\,0\rangle=0,\quad \langle 0\,|\,0\rangle=1,$$

а пространство состояний $|N_A, N_B, N_C\rangle$ — применением к нему операторов рождения. Тогда состояние $|0, k_\mu, 0\rangle = b^*(k)|0\rangle$ будет дипольным, а $|0, 0, k_\mu\rangle = c^*(k)|0\rangle$ — трипольным духом. В самом деле,

$$(P_\mu - k_\mu)|k_\mu, 0, 0\rangle = 0,$$

$$(P_\mu - k_\mu)|0, k_\mu, 0\rangle = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} k_\mu |k_\mu, 0, 0\rangle,$$

$$(P_\mu - k_\mu)|0, 0, k_\mu\rangle = \frac{\lambda^2}{2\mu^2} k_\mu \left(|0, k_\mu, 0\rangle - \frac{3}{2} |k_\mu, 0, 0\rangle \right).$$

Нормы состояний равны

$$\langle 1, 0, 0|0, 1, 0\rangle = \langle 0, 0, 1|0, 1, 0\rangle = \langle 1, 0, 0|1, 0, 0\rangle = \\ = \langle 0, 0, 1|0, 0, 1\rangle = 0,$$

$$\langle k_\mu, 0, 0|0, 0, k'_\mu\rangle = \langle 0, k_\mu, 0|0, k'_\mu, 0\rangle = \delta_{kk'}.$$

Это характерные черты теории с трипольными нефизическими состояниями. В секторах с большим числом частиц возникают точно так же, как и в модели Фруассара, духи более высоких порядков, например состояние $|0, 0, N_c\rangle$ является духом порядка $2N_c + 1$.

Рассматриваемая модель тесно связана с частным решением волнового уравнения шестого порядка с равными массами, ибо из уравнений поля следует, что

$$(\Box - \mu^2)^3 C = 0.$$

Совершенно очевидны пути других обобщений (для каких-либо иных теорий поля) в указанном направлении введения нефизических состояний высшей мультипольности.

2.11. Скалярное поле с фиксированым источником

Здесь будет рассмотрена модель (Сударшан [1961], Шнитцер [1961], Хорват [1962]), соответствующая гамильтониану

$$H = H^0 + H^1,$$
$$H^0 = m_0 + \varepsilon \sum \omega(k)\, a^*(k)\, a(k),$$
$$H^1 = \varepsilon g \sum \frac{\rho(k)}{\sqrt{2\omega(k)}} (a^*(k) + a(k)), \tag{2.39}$$

где

$$\omega(k) = \sqrt{k^2 + \mu^2}, \qquad [a(k),\ a^*(k')] = \varepsilon\delta_{kk'}. \qquad (2.40)$$

В этом случае имеется только один фиксированный нуклон с „голой“ массой m_0, размазанный в области, характеризуемой вещественной c-числовой функцией $\rho(k)$. Для точечного источника

$$\rho(k) \to \frac{1}{V}$$

$\varepsilon = \pm 1$, причем $+1$ соответствует обычным мезонам, а -1 — мезонам, приводящим к индефинитной метрике. Собственными векторами оператора H^0 являются безмезонное состояние

$$a(k)\,|0\rangle^0 = 0, \qquad {}^0\langle 0\,|\,0\rangle^0 = 1$$

и состояния, порождаемые применением операторов $a^*(k)$ к безмезонному состоянию $|0\rangle^0$,

$${}^0\langle k_1, \ldots k_n\,|\,k_1', \ldots k_n'\rangle^0 = \varepsilon^n \delta_{nn'}\delta_{kk'}.$$

Эти состояния образуют базис пространства векторов состояния.

Мы не рассматриваем случай $\mu^2 = 0$, т. е. инфракрасных расходимостей, одной из интереснейших проблем, исследованной недавно для дефинитной метрики (Борхерс и др. [1963]). По-видимому, принимая во внимание различия и аналогии между инфракрасными и ультрафиолетовыми расходимостями, будет нетрудно распространить полученные результаты и на этот случай.

Гамильтониан H можно, как и в задаче, рассмотренной в п. 2.1.5, диагонализировать каноническим преобразованием

$$c(k) = a(k) + \frac{g\rho(k)}{\omega\sqrt{2\omega}}, \qquad c^*(k) = a^*(k) + \frac{g\rho(k)}{\omega\sqrt{2\omega}}, \qquad (2.41)$$

где

$$[c(k),\ c^*(k')] = \varepsilon\delta_{kk'},$$

что ведет к

$$H(c,\ c^*) = m + \varepsilon\sum \omega(k)\,c^*(k)\,c(k)$$

с

$$m = m_0 - \varepsilon g^2 \sum \frac{\rho^2(k)}{2\omega^2}.$$

Отметим знаковый множитель ε в выражении для собственной массы. Благодаря ему m можно сделать конечной, если точечный источник будет связан и с обычными и с аномальными мезонами сразу.

Собственные векторы полного гамильтониана H можно теперь легко выписать, отправляясь от реального безмезонного состояния, определяемого соотношениями

$$c(k)|0\rangle = 0, \quad \langle 0|0\rangle = 1,$$

если применить к нему операторы рождения $c^*(k)$. Таким образом мы получаем пространство, натянутое на систему $\{|k_1, \ldots, k_n\rangle\}$. Эти векторы ортонормированы

$$\langle k_1, \ldots k_n | k'_1, \ldots, k'_n\rangle = \varepsilon^n \delta_{nn'} \delta_{kk'}.$$

Переход между состояниями

$$\{|k_1, \ldots, k_n\rangle^0\} = \{|\rangle^0\} \text{ и } \{|k_1, \ldots, k_n\rangle\} = \{|\rangle\}$$

единственным с точностью до фазового множителя образом осуществляется унитарной формой

$$U = \exp\left[\varepsilon g \sum \frac{\rho(k)}{\omega\sqrt{2\omega}}(a(k) - a^*(k))\right], \tag{2.42}$$

что дает

$$c(k) = Ua(k)U^{-1},$$

$$c^*(k) = Ua^*(k)U^{-1},$$

$$|k_1, \ldots, k_n\rangle = U|k_1, \ldots, k_n\rangle^0.$$

Вычислим сначала скалярное произведение двух безмезонных состояний $|0\rangle^0$ и $|0\rangle$. Из явного вида U и коммутаторов следует, что

$${}^0\langle 0|0\rangle = \exp\left(-\varepsilon g^2 \sum \frac{\rho(k)}{2\omega^3}\right).$$

Таким образом, если (например, для точечного источника)

$$\sum \frac{\rho^2}{2\omega^3} \to \infty,$$

то

$${}^0\langle 0|0\rangle = 0 \quad \text{для дефинитной метрики,}$$

$${}^0\langle 0|0\rangle = \infty \quad \text{для индефинитной метрики.}$$

В этих предельных случаях можно сосчитать и другие скалярные произведения, например для $\varepsilon = 1$

$$^0\langle m \mid n \rangle = {}^0\langle m \mid U \mid n \rangle^0 = 0,$$

а для $\varepsilon = -1$

$$^0\langle 0 \mid 0 \rangle = {}^0\langle 0 \mid n \rangle = \infty, \quad {}^0\langle n \mid 0 \rangle = (-1)^n \infty \text{ при } g > 0,$$

$$^0\langle 0 \mid 0 \rangle = {}^0\langle n \mid 0 \rangle = \infty, \quad {}^0\langle 0 \mid n \rangle = (-1)^n \infty \text{ при } g < 0.$$

Подобные результаты типичны для квантовой теории поля и возникают лишь в том случае, когда рассматриваемая система обладает бесконечным числом степеней свободы.

В случае дефинитной метрики следствия такого поведения скалярных произведений обсуждались неоднократно; сошлемся здесь лишь на статью Хаага [1961]. Для случая дефинитной метрики и счетного числа степеней свободы можно упомянуть следующее.

(i) Доказательство фон Неймана, согласно которому все неприводимые представления перестановочных соотношений в гильбертовом пространстве унитарно эквивалентны, перестает быть справедливым.

(ii) Приходится делать различие между каноническими преобразованиями, сохраняющими перестановочные соотношения, и унитарными преобразованиями. Последние образуют лишь узкий подкласс первых.

(iii) На основе представления чисел заполнения возникает весьма простое и общеизвестное (не неприводимое) представление операторной алгебры в несепарабельном гильбертовом пространстве. Базисные векторы описываются распределением целых чисел заполнения по различным парциальным волнам

$$\mid n_1, n_2, \ldots \rangle.$$

Заставляя n_l пробегать все целые числа, получаем базис мощности континуума, т. е. несепарабельное гильбертово пространство.

Описанная модель дает нам точный пример подобной ситуации. И $a(k)$ и $c(k)$ — каждый в своем пространстве $\{|\rangle^0\}$ и $\{|\rangle\}$ соответственно — представлены операторами (которые существуют и ведут себя хорошо) с одними и теми же коммутаторами; преобразование $a(k) \rightleftarrows c(k)$ является каноническим.

Однако каждый вектор из $\{|\rangle^0\}$ ортогонален каждому вектору из $\{|\rangle\}$, так что все матричные элементы ${}^0\langle m|U|n\rangle^0$ оператора U в пространстве, натянутом на систему векторов $\{|\rangle^0\}$, равны нулю.

В несепарабельном пространстве, натянутом на систему $\{|n_1, n_2, \ldots\rangle\}$, оба пространства, порожденные системами $\{|\rangle^0\}$ и $\{|\rangle\}$, являются малыми сепарабельными подпространствами. Разумеется,

$$|0\rangle^0 = |0, 0, \ldots\rangle$$

и

$$\{|\rangle^0\} = \{|n_1, n_2, \ldots\rangle\} \text{ при } \sum n_i < \infty.$$

Оператор U осуществляет изометричное отображение сепарабельного пространства, порожденного системой $\{|\rangle^0\}$, на пространство $\{|\rangle\}$; областью определения U является $\{|\rangle^0\}$, областью значений — $\{|\rangle\}$, поэтому, конечно, $\langle|U|\rangle^0 \neq 0$, например

$$\langle m|U|m\rangle^0 = \langle m|m\rangle = {}^0\langle m|m\rangle^0 = 1.$$

Аналогичная ортогональность имеет место и между векторами состояния $\{|\rangle\}$, относящимися к различным значениям константы связи g. Изменяя значения g, мы попадаем в различные (сепарабельные) подпространства большого несепарабельного пространства, причем так, что это большое пространство все еще полностью не исчерпывается.

На сегодня представляется, что такое специальное поведение не ограничивается этой моделью, но существенным образом возникает в любой теории с точечным взаимодействием и бесконечным числом степеней свободы. Обычно принято считать, что это не составляет серьезной трудности. Ведь при аксиоматическом изложении, основанном на in- и out-состояниях, можно сформулировать всю теорию в терминах состояний реальных частиц (аналогичных состояниям $\{|\rangle\}$ в данной модели), не имея необходимости даже упоминать о состояниях „голых“ частиц $\{|\rangle^0\}$.

В случае индефинитной метрики это последнее замечание, несомненно, справедливо. Однако все еще остается вопрос о том, как интерпретировать полученные явные формулы. Нам хотелось бы здесь подчеркнуть, что, например, соотношение

$$^0\langle 0\,|\,0\rangle = \infty$$

показывает, что и в случае индефинитной метрики ситуация аналогична; пространства, натянутые на состояния $\{|\rangle^0\}$ и $\{|\rangle\}$, порождают различные неэквивалентные представления перестановочных соотношений. Это утверждение является непосредственным следствием определений. Как было показано в § 1.1, понятие сходимости основывается на новом скалярном произведении $\langle A\,|\,B\rangle_{\mathrm{New}}$, т. е. на новой норме. Если скалярное произведение вектора на какой-нибудь базисный вектор оказывается в смысле нового скалярного произведения бесконечным, то такой вектор не может быть приближен рядом, сходящимся в смысле новой нормы (где отрицательные вклады надо брать с обратным знаком). Следовательно, этот вектор лежит, так сказать, вне векторного пространства. Может возникнуть вопрос, принадлежат ли неэквивалентные представления $\{|\rangle^0\}$ и $\{|\rangle\}$ некоторому общему несепарабельному пространству. В случае индефинитной метрики представление чисел заполнения $\{|n_1, \ldots, n_l, \ldots\rangle\}$ не имеет определенного смысла, если не выполняется условие

$$\sum n_l < +\infty \qquad \left(\langle n_1, \ldots\,|\,n_1, \ldots\rangle = (-1)^{\sum n_l}\right),$$

т. е. как раз для $\{|\rangle^0\}$. Возможно, что каким-нибудь другим способом общее несепарабельное пространство все-таки можно построить. Нам кажется, впрочем, что это не столь уже важно, ибо при аксиоматическом подходе мы всегда остаемся внутри одного и того же сепарабельного пространства; в большинстве случаев мы можем даже, если надо, на худой конец перескочить из одного представления в другое неэквивалентное.

Рассмотрим теперь задачу о поле Фруассара, взаимодействующем с фиксированным источником при помощи гамильтониана взаимодействия

$$H = \int \rho(x)(g_1 A(x) + g_2 B(x))\,dx.$$

Учитывая результаты, полученные в п. 2.1.5, легко найти каноническое преобразование, приводящее полный гамильтониан к виду

$$H = m + \sum \omega\left(c^*(k)\,d(k) + d^*(k)\,c(k) + \frac{\lambda^2}{\mu^2}\,c^*(k)\,c(k)\right),$$

где

$$m = m_0 - \frac{g_1 g_2}{4\pi} \int\int \rho(x)\,\rho(x')\,\frac{e^{-\mu|x-x'|}}{|x-x'|}\,dx\,dx' + \\ + \frac{g_2^2\lambda^2}{8\pi\mu^2}\int\int e^{-\mu|x-x'|}\rho(x)\,\rho(x')\,dx\,dx'.$$

Таким образом, система векторов состояния полного гамильтониана обладает той же структурой нефизических мультиполей, что и в случае свободного поля. Отметим появление экспоненциального потенциала в выражении для собственной массы. Рассматривая взамодействие обобщенного поля Фруассара с тремя полями A, B, C из § 2.9, можно получить даже еще менее сингулярные потенциалы.

Аналогично, нетрудно найти унитарный оператор, переводящий „голые" состояния в состояния „одетых" частиц. Его матричные элементы между состояниями „голых" и „одетых" частиц равны нулю или бесконечности, т. е. имеет место та же ситуация, что и в случае скалярного поля с индефинитной метрикой.

2.12. Модель Ли

Модель Ли была первой моделью в теории поля, пробудившей интерес к вопросам индефинитной метрики.

Паули и Челлен первыми подчеркнули [1955], что модель Ли в ее первоначальной форме (Ли [1954]) без обрезания приводит к противоречию. В самом деле, эта теория дает

$$|c|^2 = \frac{g^2}{g_0^2} = 1 - g^2 \int \frac{k^2\,dk}{2\omega(\omega - E)} = -\infty \quad \text{для конечных } g. \tag{2.43}$$

Здесь g_0 и g — соответственно „голая" и наблюдаемая константы связи, $|c|^2$ — вероятность нахождения одной „голой" V-частицы в „одетом" V-состоянии. Паули и Челлен показали, что, вводя индефинитную метрику, можно развить непротиворечивую теорию. Мы рассмотрим здесь эту модель в обозначениях Гейзенберга [1957a]. Гамильтониан модели равен

$$\begin{aligned} H = -m_V \int \psi_V^* \psi_V\,dp + \int \omega(k)\,a^*(k)\,a(k)\,dk - \\ - \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\,\delta(p - q - k)\,\{\psi_N^*(q)\,\psi_V(p)\,a^*(k) - \\ - \psi_V^*(p)\,\psi_N(q)\,a(k)\}\,dp\,dq\,dk. \end{aligned} \tag{2.44}$$

В этой формуле ψ_V, ψ_N и a обозначают операторы полей V-, N-частиц (фермионов) и Θ-частиц (бозонов), m_V — „голая" масса V-частицы; мы положили $m_N = 0$. Наконец, g_0 — „голая" константа связи, которая должна быть чисто мнимой, чтобы гамильтониан H был эрмитовым.

Гамильтониан (2.44) разрешает переход $V \rightleftarrows N + \Theta$, причем $N_1 = N_V + N_N$, $N_2 = N_V + N_\Theta$ сохраняются. Перестановочные соотношения предписываются в виде

$$\begin{aligned} \{\psi_V(p),\ \psi_V^*(p')\} &= -\delta(p - p'), \\ \{\psi_N(p),\ \psi_N^*(p')\} &= \delta(p - p'), \\ [a(k),\ a^*(k')] &= \delta(k - k'), \end{aligned} \tag{2.45}$$

остальные, как обычно, равны нулю. Состояние вакуума определяется условиями

$$\psi_V\,|0\rangle = \psi_N\,|0\rangle = a\,|0\rangle = 0, \qquad \langle 0\,|\,0\rangle = 1,$$

и состояния „голых" частиц получаются применением к нему операторов ψ_V^*, ψ_N^* и a^*. Вследствие отрицательного знака у антикоммутатора для ψ_V мы получаем теорию с индефинитной метрикой:

$$\langle N_V, N_N, N_\Theta | N'_V, N'_N, N'_\Theta \rangle = (-1)^{N_V} \delta_{NN'}.$$

Операторы со звездочкой эрмитово сопряжены к соответствующим операторам без нее, и

$$H = H^*,$$

если g_0 — мнимое число.

Теперь мы будем рассматривать состояния реальных частиц. Реальными состояниями вакуума и N-частицы

$$H|0\rangle = 0|0\rangle, \quad H|N\rangle = 0|N\rangle$$

будут соответствующие „голые" состояния, а реальное состояние V-частицы $|E\rangle$ надо найти из условия

$$H|E\rangle = E|E\rangle. \tag{2.46}$$

Вследствие сохранения N_1 и N_2 состояние $|E\rangle$ обязательно должно иметь форму

$$|E\rangle = \left(-c\psi_V^* + \psi_N^* \int \varphi(k) a^*(k)\,dk\right)|0\rangle, \tag{2.47}$$

подставляя которую в (2.46), находим, что

$$\begin{aligned} (m_V - E)c &= \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \varphi(k)\,dk, \\ (\omega - E)\varphi(k) &= c\frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}}. \end{aligned} \tag{2.48}$$

Если $E = \omega$, то мы получаем состояния (N, Θ)-рассеяния, обладающие положительной нормой; их можно легко выписать, но здесь мы не будем этим заниматься. Если $E \neq \omega$, то второе из уравнений (2.48) дает

$$\varphi(k) = c\frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}(\omega - E)}. \tag{2.49}$$

Подставляя это выражение в первое из уравнений (2.48), получаем уравнение для E

$$m_V - E = g_0^2 \int \frac{k^2\,dk}{2\omega(\omega - E)}.$$

Если ввести функцию

$$h(z)=\frac{z-m_V}{g_0^2}+\int\frac{k^2\,dk}{2\omega(\omega-z)},\tag{2.50}$$

то связанные собственные значения энергии V-частицы будут задаваться нулями функции h:

$$h(z)=0,\quad z\neq\omega.\tag{2.51}$$

Используя тождество

$$\frac{1}{\omega-z}\equiv\frac{1}{\omega}+\frac{z}{\omega^2}+\frac{z^2}{\omega^2(\omega-z)},\tag{2.52}$$

находим, что

$$\begin{gathered}h(z)=a+bz+G(z)z^2,\\ a=-\frac{m_V}{g_0^2}+\int\frac{k^2\,dk}{2\omega^2},\\ b=\frac{1}{g_0^2}+\int\frac{k^2\,dk}{2\omega^3},\quad G(z)=\int\frac{k^2dk}{2\omega^3(\omega-z)},\end{gathered}\tag{2.53}$$

где $G(z)$ — конечная функция. В этой модели предполагается, что параметры a и b конечны, поэтому g_0 и m_V ведут себя как

$$g_0^2\sim-\frac{2}{\log\hat{\omega}},\quad m_V\sim-\frac{\hat{\omega}}{\log\hat{\omega}}$$

($\hat{\omega}$ — энергия обрезания). Используя явное выражение для $h(z)$, получаем для вещественных z, меньших m_θ,

$$\frac{d^2h}{dz^2}>0,\quad \left.\frac{dh}{dz}\right|_{-\infty}=-\infty,\quad \left.\frac{dh}{dz}\right|_{m_\theta}=+\infty.$$

Таким образом, в зависимости от выбора значений a и b могут представляться три различных случая: уравнение (2.51) имеет

(a) два вещественных корня (случай одиночного духа);

(b) один кратный корень (случай дипольного духа);

(c) два комплексно сопряженных корня E и E_*, $E^*=E_*$.

Рассмотрим каждый случай отдельно.

(а) В случае одиночного нефизического состояния уравнение (2.51) дает два вещественных собственных значения E_+ и E_-, а (2.47), (2.49) — два собственных вектора $|E+\rangle$ и $|E-\rangle$; согласно (1.2) они ортого-

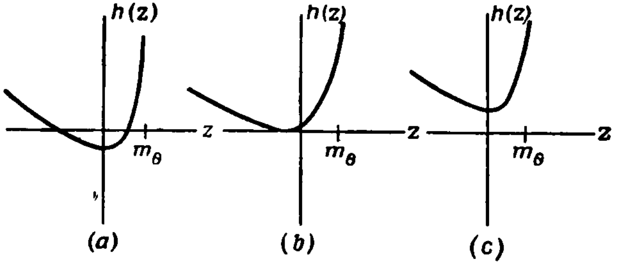

Рис. 1.

нальны, что можно проверить и непосредственным подсчетом. Из (2.45), (2.47) и (2.50) получаем

$$\langle E\pm|E\pm\rangle = |c_\pm g_0|^2 \frac{dh}{dz}\bigg|_{E_\pm}, \tag{2.54}$$

откуда следует, что, выбирая надлежащим образом $c_\pm$, можно потребовать, чтобы

$$\langle E\pm|E\pm\rangle = \pm 1.$$

Состояние $|E-\rangle$ называется нефизическим состоянием (духом).

Так как $(dh/dz)_E$ конечно, то

$$|c_\pm|^2 \sim \log\hat{\omega}.$$

(b) В случае дипольного духа имеется только один кратный корень, которому согласно (2.47) и (2.49) соответствует только одно собственное состояние $|E\rangle$. Как и в (2.54),

$$\langle E|E\rangle = |cg_0|^2 \frac{dh}{dz}\bigg|_E, \text{ но здесь } \frac{dh}{dz}\bigg|_E = 0.$$

Таким образом, мы нашли собственный вектор H с вещественным собственным значением и нулевой нормой. Вследствие (1.2) состояние $|E\rangle$ ортогонально всем прочим состояниям (собственным состояниям рассеяния), и поскольку метрика невырождена, непременно должно существовать состояние $|D\rangle$ вида (1.9):

$$(H-E)|D\rangle = |E\rangle. \tag{2.55}$$

Действительно, подставляя (2.47) и выражение

$$|D\rangle = \left(-d\psi_V^* + \psi_N^* \int \Phi(k)\, a^*(k)\, dk\right)|0\rangle$$

в (2.55), находим

$$\begin{aligned}(m_V - E)\,d &= \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \Phi(k)\, dk + c,\\ (\omega - E)\,\Phi(k) &= d\,\frac{g_0}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega}} + \varphi(k).\end{aligned} \tag{2.56}$$

Используя (2.49), получаем из (2.56)

$$\Phi(k) = \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega}\,(\omega - E)}\left(d + \frac{c}{\omega - E}\right). \tag{2.57}$$

Подставляя это выражение в первое уравнение (2.56), находим, что (2.55) удовлетворяется при произвольном d, если только

$$\left.\frac{dh}{dz}\right|_E = 0$$

(где опять было использовано определение (2.50)). Отсюда следует, что состояние вида (2.55) существует только в этом случае. Состояние $|D\rangle$ называется дипольным духом. Непосредственным подсчетом находим, что

$$\langle D|D\rangle = |cg_0|^2 \left\{ \frac{1}{6} \left.\frac{d^3h}{dz^3}\right|_E + \frac{1}{2}\left(\frac{d}{c} + \frac{d^*}{c^*}\right) \left.\frac{d^2h}{dz^2}\right|_E \right\}. \tag{2.58}$$

До сих пор d было произвольно. Его соответствующим выбором можно удовлетворить условию

$$\langle D|D\rangle = 0.$$

Так как метрика невырождена, то обязательно $\langle E|D\rangle \neq 0$. В самом деле,

$$\langle E|D\rangle = \frac{|cg_0|^2}{2} \left.\frac{d^2h}{dz^2}\right|_E > 0$$

и если

$$|c|^2 = \frac{2}{|g_0|^2 (d^2h/dz^2)|_E},$$

то

$$\langle E | D \rangle = 1.$$

Хотя состояния $|E\rangle$ и $|D\rangle$ и имеют оба нулевые нормы, такой выбор может оказаться полезной „нормировкой“. Если мы предположим, что есть и другие состояния типа (1.14), необходимые, чтобы сделать систему собственных состояний энергии полной, и будем, скажем, искать трипольный дух

$$(H - E)|T\rangle = |D\rangle,$$

подставляя сюда $|T\rangle$ в форме (2.47), то найдем, что подобное состояние могло бы существовать, только если E было бы тройным корнем функции $h(z)$. В нашем случае $d^2h/dz^2|_E > 0$, отсюда следует, что такого состояния $|T\rangle$ не существует. Таким образом, найденная система полна, и главное подпространство, соответствующее данному собственному значению, двумерно.

Если $|E'\rangle$ — собственное состояние, соответствующее собственному значению $E' \neq E$, то, конечно,

$$\langle E' | E \rangle = \langle E' | D \rangle = 0.$$

Поэтому оператор проектирования на подпространство $|E\rangle$, $|D\rangle$ имеет вид

$$P = \frac{|E\rangle \langle D|}{\langle D | E \rangle} + \frac{|D\rangle \langle E|}{\langle E | D \rangle}, \qquad (2.59)$$

и квадрат нормы любого вектора равен

$$\langle A | A \rangle = \langle A | P | A \rangle + C, \quad C \geqslant 0,$$

откуда видно, что квадрат нормы любого состояния $|A\rangle$ может быть отрицательным, лишь если $|A\rangle$ содержит как $|E\rangle$, так и $|D\rangle$. Из уравнения Шредингера

$$i \frac{d|t\rangle}{dt} = H |t\rangle$$

следует, что

$$|E, t\rangle = |E, 0\rangle e^{-iEt},$$

или

$$e^{-iHt}|E\rangle = e^{-iEt}|E\rangle. \tag{2.60}$$

Но

$$|D, t\rangle = \{|D, 0\rangle - it|E, 0\rangle\} e^{-iEt},$$

или

$$e^{-iHt}|D\rangle = e^{-iEt}(|D\rangle - it|E\rangle). \tag{2.61}$$

(c) В случае комплексных духов функция $h(z)$ имеет два комплексно сопряженных корня E и E_*, $E = E_*^*$, которым в силу (2.47) и (2.49) соответствуют два собственных состояния $|E\rangle$ и $|E_*\rangle$. Из (1.2) следует, что

$$\langle E|E\rangle = \langle E_*|E_*\rangle = 0.$$

В самом деле, например,

$$\langle E|E\rangle = |cg_0|^2 \left.\frac{\operatorname{Im} h(z)}{\operatorname{Im} E}\right|_E = 0.$$

Так как метрика невырождена, обязательно $\langle E_*|E\rangle \neq 0$,

$$\langle E_*|E\rangle = |cg_0|^2 \left.\frac{dh}{dz}\right|_E \neq 0.$$

Оператор проектирования опять имеет здесь вид

$$P = \frac{|E\rangle\langle E_*|}{\langle E_*|E\rangle} + \frac{|E_*\rangle\langle E|}{\langle E|E_*\rangle},$$

и квадрат нормы произвольного состояния может быть отрицательным, только если оно содержит как $|E\rangle$, так и $|E_*\rangle$. Аналогично,

$$\langle A|H|A\rangle = E\frac{\langle A|E\rangle\langle E_*|A\rangle}{\langle E_*|E\rangle} + \text{компл. сопр.} + \ldots .$$

Это может склонить нас к следующему утверждению: вероятность измерить комплексное значение E равна (комплексному) числу

$$w = \frac{\langle A|E\rangle\langle E_*|A\rangle}{\langle E_*|E\rangle},$$

но оно отлично от нуля, лишь если $|A\rangle$ содержит оба собственных состояния, а тогда оба члена вместе дают вещественную величину.

В заключение этого параграфа отметим, что рассмотрение собственных состояний рассеяния позволяет решить задачу $(N-\Theta)$-рассеяния точно. Вещественная константа связи может быть найдена из явного вида решения и выражена через ту же функцию h. Для случая дипольного духа

$$g^2 = \frac{2h''(E)}{3\,(h'''(E))^2}. \tag{2.62}$$

2.13. Видоизмененная модель с трипольным духом

Как мы уже видели на модели Ли, дипольное нефизическое состояние возникает в том случае, когда энергии нормального состояния и духа приблизительно совпадают, и остается лишь одно собственное состояние и диполь. Поэтому появления трипольного духа можно ожидать только при совпадении трех формально различных состояний. Такой случай легко реализуется (Надь [1960]) в модели, предложенной Теодоровичем [1959]. Рассмотрим для этого теорию с гамильтонианом

$$\begin{aligned} H = &- m_V \int \psi_V^* \psi_V \, dp + m \int \varphi^* \varphi \, dp + \int \omega(k) a^*(k) a(k) \, dk - \\ &- \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \delta(p-q-k) \{\psi_V^*(q) \psi_N(p) a^*(k) - \\ &- \psi_V^*(p) \psi_N(q) a(k)\} \, dp \, dq \, dk + e_0 \int \{\varphi^* \psi_V - \psi_V^* \varphi\} \, dp, \\ &\omega = \sqrt{k^2 + m_\Theta^2}, \end{aligned} \tag{2.63}$$

где ψ_V, ψ_N и a, как и раньше, суть операторы поля V-, N- и Θ-частиц, а оператор φ описывает некоторое новое фермионное поле с „голой“ массой m. Константы g_0 и e_0 чисто мнимые. Все перестановочные соотношения обычны, кроме соотношения для ψ_V, для которого

$$\{\psi_V(p),\ \psi_V^*(p')\} = -\delta(p-p'),$$

что и приводит к индефинитной метрике

$$\langle N_V,\ N_N,\ N_\varphi,\ N_\Theta | N_V',\ N_N',\ N_\varphi',\ N_\Theta' \rangle = (-1)^{N_V} \delta_{NN'}.$$

Реальными состояниями вакуума и N-частицы являются соответствующие „голые“ состояния; „одетые“ V-, φ-состояния можно определить из соотношения

$$H\,|\,E\rangle = E\,|\,E\rangle, \tag{2.64}$$

где $|\,E\rangle$ должно иметь вид

$$|\,E\rangle = \left(-\alpha\psi_V^* - \beta\varphi^* + \psi_N^* \int \Phi(k)\,a^*(k)\,dk\right)|\,0\rangle \tag{2.65}$$

(здесь учтены законы сохранения, вытекающие из вида гамильтониана). Соотношения (2.64) и (2.65) дают

$$\begin{gathered}(m_V - E)\,\alpha - e_0\beta = \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{g_0}{\sqrt{2\omega}}\,\Phi(k)\,dk,\\ (\omega - E)\,\Phi(k) = \alpha\frac{g_0}{\sqrt{2\pi}}\frac{1}{\sqrt{2\omega}},\\ e_0\alpha + (E - m)\beta = 0.\end{gathered} \tag{2.66}$$

При $E = \omega$ получаем состояние рассеяния, ибо в этом случае, как можно доказать, квадрат нормы положителен.

Нас интересуют связанные состояния реальных частиц, для которых E лежит вне интервала (m_θ, $+\infty$). Для этого случая

$$\beta = \frac{e_0\alpha}{m - E}, \qquad \Phi(k) = \frac{\alpha g_0}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega}\,(\omega - E)} \tag{2.67}$$

и собственные значения следует определять из уравнения

$$m_V - E + \frac{e_0^2}{E - m} = g_0^2 \int \frac{k^2\,dk}{2\omega\,(\omega - E)}\,. \tag{2.68}$$

Если снова воспользоваться тождеством (2.52) и ввести функцию

$$\begin{aligned} g(z) &= \frac{z - m_V}{g_0^2} + \int \frac{k^2\,dk}{2\omega\,(\omega - z)} + \frac{c}{m - z} = \\ &= a + bz + G(z)\,z^2 + c\,\frac{1}{m - z} = h(z) + c\,\frac{1}{m - z}, \end{aligned} \tag{2.69}$$

где

$$a = -\frac{m_V}{g_0^2} + \int \frac{k^2\,dk}{2\omega^2}, \qquad b = \frac{1}{g_0^2} + \int \frac{k^2\,dk}{2\omega^3}, \qquad c = \frac{e_0^2}{g_0^2},$$

$$G(z) = \int \frac{k^2\,dk}{2\omega^3\,(\omega - z)},$$

то можно показать, что собственные значения энергии, удовлетворяющие уравнению (2.68), суть нули функции $g(z)$. В этой модели a, b, c и m — конечные параметры, поэтому

$$c_0^2 \sim g_0^2 \sim \frac{-1}{\log \hat{\omega}}, \qquad m_V \sim -\frac{\hat{\omega}}{\log \hat{\omega}},$$

где $\hat{\omega}$ — энергия обрезания, а $h(z)$ — соответствующая функция модели Ли. Согласно (2.69) получаем четыре различных случая:

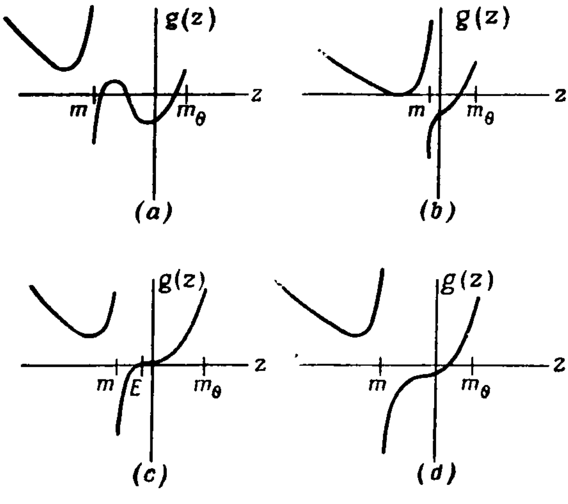

Рис. 2.

(a) одиночный дух,
(b) дипольный дух,
(c) трипольный дух,
(d) комплексный дух.

Так как E_i вещественны, то в силу (2.65), (2.67) и (2.69) получаем

$$\langle E_i | E_j \rangle = \delta_{ij} | a g_0 |^2 \left. \frac{dg}{dz} \right|_{E_i}.$$

Поэтому в случае (a) два состояния имеют положительный, а одно — отрицательный квадрат нормы.

Оно и будет нефизическим. В случае (b), как видно на рис. 2, имеются нормальное состояние и дипольный дух. В случае (c), подбирая надлежащим образом параметры, получаем только одно-единственное собственное значение E и один собственный вектор. Его норма равна нулю, так как в этом случае $dg/dz = 0$, а E является точкой перегиба, так что и $d^2g/dz^2|_E = 0$. Состояние $|E\rangle$ ортогонально состояниям рассеяния с вещественными собственными значениями, и в силу невырожденности метрики обязательно найдется по крайней мере одно состояние $|D\rangle$ такое, что

$$(H - E)|D\rangle = |E\rangle. \tag{2.70}$$

В самом деле, в силу (2.65) и равенства

$$|D\rangle = \left(-\gamma\psi_V^* - \delta\varphi^* + \psi_N^* \int \rho(k)\, a^*(k)\, dk\right)|0\rangle$$

имеем

$$\begin{aligned}
&(m_V - E)\gamma - e_0\delta = \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega}}\,\rho(k)\, dk + \alpha,\\
&(\omega - E)\,\rho(k) = \gamma\frac{g_0}{\sqrt{4\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{2\omega}} + \Phi(k),\\
&e_0\gamma + (E - m)\,\delta = -\beta.
\end{aligned} \tag{2.71}$$

Отсюда

$$\delta = \frac{e_0}{m - E}\left(\gamma + \frac{\alpha}{m - E}\right),$$

$$\rho(k) = \frac{g_0}{\sqrt{8\pi\omega}\,(\omega - E)}\left(\gamma + \frac{\alpha}{m - E}\right).$$

Подставляя эти соотношения в первое из уравнений (2.71), перенося все члены в левую часть и используя (2.69), получаем

$$g_0^2\left\{g(E)\,\gamma + \frac{dg}{dz}\Big|_E \alpha\right\},$$

что равно нулю, откуда следует, что дипольный дух существует при произвольных α и γ. Из приведенной формулы непосредственным вычислением находим

$$\langle E|D\rangle = \alpha^*\gamma\,|g_0|^2 \frac{dg}{dz}\Big|_E + \frac{|\alpha g_0|^2}{2}\,\frac{d^2g}{dz^2}\Big|_E = 0.$$

Таким образом, дипольные духи $|D\rangle$ и $|E\rangle$ ортогональны. Аналогично

$$\langle D|D\rangle = |\gamma g_0|^2 \frac{dg}{dz}\Big|_E + \frac{\alpha^*\gamma + \alpha\gamma^*}{2} |g_0|^2 \frac{d^2g}{dz^2}\Big|_E + \\ + \frac{|\alpha g_0|^2}{6} \frac{d^3g}{dz^3}\Big|_E > 0.$$

Поэтому, выбирая $|\alpha|^2$ так, чтобы

$$|\alpha|^2 = \frac{6}{|g_0|^2 \frac{d^3g}{dz^3}\Big|_E}, \tag{2.72}$$

можно нормировать $|D\rangle$ на $+1$. Интересно отметить, что нормировочный коэффициент α для $|E\rangle$ определяется нормировкой $|D\rangle$. Поскольку $|E\rangle$ и $|D\rangle$ ортогональны, из предположения о невырожденности метрики следует существование состояния $|T\rangle$, удовлетворяющего уравнению

$$(H - E)|T\rangle = |D\rangle.$$

Подставляя сюда, как и прежде, $|T\rangle$ и $|D\rangle$,

$$|T\rangle = \left(-\varepsilon\psi_V^* - \lambda\varphi^* + \psi_N^* \int \varkappa(k)\, a^*(k)\, dk\right)|0\rangle,$$

получаем

$$(m_V - E)\, e - c_0\lambda = \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \int \frac{1}{\sqrt{2\omega}} \varkappa(k)\, dk + \gamma,$$

$$(\omega - E)\varkappa(k) = \varepsilon \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \frac{1}{\sqrt{2\omega}} + \rho(k), \tag{2.73}$$

$$e_0\varepsilon + (E - m)\lambda = -\delta,$$

откуда

$$\lambda = \frac{e_0}{m - E}\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{m - E} + \frac{\alpha}{(m - E)^2}\right),$$

$$\varkappa(k) = \frac{g_0}{\sqrt{8\pi\omega}\,(\omega - E)}\left(\varepsilon + \frac{\gamma}{\omega - E} + \frac{\alpha}{(\omega - E)^2}\right).$$

Первое из уравнений (2.73) после переноса всех членов в левую часть дает

$$g_0^2\left(g(E)\varepsilon + \frac{dg}{dz}\Big|_E \gamma + \frac{1}{2} \frac{d^2g}{dz^2}\Big|_E \alpha\right).$$

Таким образом, $|T\rangle$ в самом деле существует при произвольных ε, γ и α. Непосредственные вычисления дают

$$\langle T|T\rangle = (\gamma\gamma^* + \varepsilon\alpha^* + \alpha\varepsilon^*)\frac{|g_0|^2}{6}\frac{d^3g}{dz^3}\Big|_E + \\ + (\alpha^*\gamma + \gamma\alpha^*)\frac{|g_0|^2}{24}\frac{d^4g}{dz^4}\Big|_E + \frac{|\alpha g_0|^2}{120}\frac{d^5g}{dz^5}\Big|_E. \quad (2.74)$$

Поэтому, выбирая подходящее значение ε, можно обратить $\langle T|T\rangle$ в нуль. Аналогично,

$$\langle T|D\rangle = |g_0|^2\left\{\frac{\alpha^*\gamma + \gamma^*\alpha}{6}\frac{d^3g}{dz^3}\Big|_E + \frac{|\alpha|^2}{24}\frac{d^4g}{dz^4}\Big|_E\right\},$$

и теперь, выбирая надлежащим образом γ, можно также добиться того, чтобы

$$\langle T|D\rangle = 0. \quad (2.75)$$

Наконец,

$$\langle E|T\rangle = \frac{|\alpha g_0|^2}{6}\frac{d^3g}{dz^3}\Big|_E.$$

Итак, придавая параметрам α, γ и ε значения согласно (2.72), (2.74) и (2.75) соответственно, получаем

$$\langle E|E\rangle = \langle T|T\rangle = \langle E|D\rangle = \langle T|D\rangle = 0,$$
$$\langle E|T\rangle = \langle D|D\rangle = 1.$$

Поскольку эти равенства получены непосредственным подсчетом, они, конечно, согласуются с общими результатами гл. 1.

Если предположить, что для полноты системы необходимо было бы добавить к ней еще одно состояние $|Q\rangle$, то было бы

$$(H-E)|Q\rangle = |T\rangle,$$

и, повторяя предыдущие рассуждения, мы получили бы, что такое состояние могло бы существовать тогда и только тогда, когда третья производная

$$\frac{d^3g}{dz^3}\Big|_E$$

также равнялась бы нулю, но в нашей модели она положительна, откуда следует, что система состояний $|E\rangle$, $|D\rangle$, $|T\rangle$ уже полна.

Аналогичным образом выводится, что эти состояния ортогональны собственным состояниям рассеяния $|E'\rangle$ с $E' \neq E$. Поэтому оператор проектирования на порожденное ими подпространство имеет вид

$$P = |D\rangle\langle D| + |E\rangle\langle T| + |T\rangle\langle E|.$$

Отсюда видно, что отрицательный квадрат нормы может быть только у состояний, содержащих как $|E\rangle$, так и $|T\rangle$.

В случае комплексного духа $g(z)$ имеет два комплексных корня E, E_* и один вещественный корень E_0. Здесь также E и E_* комплексно сопряжены. Соответствующие состояния обладают свойствами

$$\langle E_0 | E\rangle = \langle E_0 | E_*\rangle = \langle E | E\rangle = \langle E_* | E_*\rangle = 0,$$
$$\langle E | E_*\rangle \neq 0,$$

вытекающими и из общих соображений.

2.14. Другие теории

Помимо рассмотренных выше, было предложено много других модельных теорий, в которых используется квантование с индефинитной метрикой. Все они в том или ином смысле обобщают основные модели. Мы не можем описывать здесь все эти модели и отошлем читателя к соответствующей литературе (Танака [1962—1963], Сударшан [1961], Шнитцер [1961], Глазер и Челлен [1956], Асколи и Минарди [1959], Деннери и Кролл [1960], Бартон [1960], Матида [1955], Гольдштейн [1958], Скарфоне и Мак-Кинли [1960], Лопушанский [1959], Аронс и др. [1965], Калоджеро [1962]). Некоторые другие модельные теории не требуют, впрочем, индефинитной метрики (см. Бялыницкий-Бируля [1959], Вентцель [1942] или пример из § 2.11 ($\varepsilon = +1$)).

Основной вопрос, конечно, заключается в том, требуют, ли реальные теории поля квантования с индефинитной метрикой. Согласно Ландау и Померанчуку (Ландау и Померанчук [1955], Померанчук [1956], см. также Умезава и др. [1956]) противоречие типа (2.43) возникает также и в квантовой электродинамике. Вопрос о том, появляются ли духи в реальных релятивистских квантовых теориях поля, исследовался Челленом [1955—1957, 1959], Фордом [1957], Феррари и Иона-Лазинио [1958, 1960], но, несмотря на все усилия, эта проблема до сих пор полностью не выяснена.

Глава 3

ТРУДНОСТИ, СВЯЗАННЫЕ С ВЕРОЯТНОСТНОЙ ИНТЕРПРЕТАЦИЕЙ

В этой главе мы намереваемся обсудить трудности, связанные с индефинитной нормой. Основная проблема состоит, разумеется, в том, что согласно ортодоксальной точке зрения квантовая теория объясняет результаты эксперимента на основе понятия вероятности. Таким образом, с самого начала мы оказываемся перед альтернативой; либо вообще отказаться от общепринятой и установившейся вероятностной интерпретации, либо попытаться как-то сохранить возможность вероятностной интерпретации для реальных физических процессов. Поскольку первый вариант чересчур радикален и претенциозен, мы ограничимся рассмотрением одной лишь второй возможности.

При этом мы встречаемся с трудностями, отмеченными в § 1.4. Придерживаясь намеченной линии, следует решить сначала, какая часть всего пространства состояний описывает или может описывать действительно физические состояния, а затем доказать или опровергнуть возможность интерпретации. В худшем случае, если она будет опровергнута, мы можем попытаться выяснить, какого рода модификации могут привести к искомому свойству интерпретируемости. Наше изложение следует этой программе.

3.1. Разложение пространства состояний

Мы уже видели, что наличие состояний с отрицательным или нулевым квадратом нормы или мультипольных духов вызывает затруднения. Поэтому приходится как-то разлагать пространство состояний на „физическое“ и „нефизическое“ подпространства. Пусть $\{|i\rangle\}$ — базис нашего векторного пространства. Тогда

$$1 = \sum |i(+)\rangle\langle i(+)| - \sum |i(-)\rangle\langle i(-)|,$$

ибо по предположению пространство является прямой суммой двух подпространств с положительным и отрицательным квадратами норм соответственно. Здесь $|i(\pm)\rangle$ обозначают векторы из этих подпространств. Приведенная формула дает разложение всего пространства состояний в прямую сумму подпространств H_+ и H_-.

Это разложение, однако, очевидным образом неединственно. В самом деле, пусть, например,

$$|a(+)\rangle=\sqrt{2}\,|1(+)\rangle+|1(-)\rangle, \quad \langle a(+)|a(+)\rangle=1,$$
$$|a(-)\rangle=\sqrt{2}\,|1(-)\rangle+|1(+)\rangle, \quad \langle a(-)|a(-)\rangle=-1,$$
$$\langle a(+)|a(-)\rangle=0;$$

тогда наборы $\{|a+\rangle, |2+\rangle, \ldots\}$ и $\{|a-\rangle, |2-\rangle, \ldots\}$ осуществляют другое разложение. Итак, с чисто математической точки зрения невозможно отдать предпочтение тому или иному разложению. Следовательно, для того чтобы выделить некоторое определенное разложение, необходима некоторая добавочная информация.

Эту дополнительную информацию могут и должны дать (и действительно дают) физические соображения. Поскольку мы хотим аппроксимировать реальную картину мира возможно более близко, то в любой теории в любой модели обязательно должно быть указано, какие состояния считаются физическими. Решив, исходя из физических соображений, что подпространство H_p всего пространства H описывает физические состояния (Гейзенберг вместо H_p пишет $H_{\rm I}$), а дополнительное (не обязательно ортогональное) подпространство $H-H_p=H_n$ (или $H_{\rm II}$) — нефизические состояния, мы можем любой вектор представить в виде

$$|\rangle=|\rangle_p+|\rangle_n=P_p|\rangle+P_n|\rangle, \tag{3.0}$$

где P_p и P_n — операторы проектирования на физическое и нефизическое подпространства соответственно.

Мы будем называть разложение, основанное на физических принципах или физических соображениях, *естественным разложением*. Это означает, что выбирая другое разложение, мы получаем *другую* физическую теорию. Конечно, на подпространстве H_p квадрат нормы должен быть по меньшей мере положительно полуопределенным.

Такое естественное разложение, основанное на нашей „физической" интуиции, для существующих теорий находится на первый взгляд довольно просто. Приведем несколько примеров.

Те состояния осциллятора, которые относятся к возбуждениям, приводящим к индефинитной метрике, следует включить в H_n (разумеется, не обязательно только их). Таким образом, метрика на H_n, вообще говоря, индефинитна.

Если принять такой подход, то подходящими разложениями будут следующие.

Для электромагнитного поля в силу того обстоятельства, что продольные и скалярные фотоны ненаблюдаемы, векторы состояний

$|N_1, N_2, 0, 0\rangle$ порождают пространство H_p,

$|N_1, N_2, N_3, N_0\rangle$ порождают пространство H_n,

если хотя бы одно из чисел N_3 или $N_0 \neq 0$.

Состояние, удовлетворяющее этому условию Лоренца, называется элементом *лоренцевой совокупности*. Для такого состояния

$$|L\rangle = |L\rangle_p + |L\rangle_n, \quad {}_n\langle L \mid L\rangle_n = {}_n\langle L \mid L\rangle_p = 0. \tag{3.1}$$

В теориях с высшими производными, в частности в примере из § 2.4, $\varphi^{(1)}$ является вспомогательным регуляризующим полем, поэтому соответствующие ему частицы ненаблюдаемы. Следовательно,

$|N_0, 0\rangle$ порождают пространство H_p,

$|N_0, N_1\rangle$, $N_1 \neq 0$, порождают пространство H_n.

Физическими полями в методе регуляризации Паули — Вилларса являются только поля φ_0 и ψ_0, в модели Иокоямы — поля Ψ и A, в теории Симодаиры — поля ψ и φ'.

Относительно модели Фруассара можно утверждать, что 4-вектор энергии-импульса P_μ измерим. Поэтому его собственные векторы

$|N, 0\rangle$ порождают пространство H_p,

$|N, M\rangle$, $M \neq 0$, порождают H_n.

В модели Ли, основанной на „голых“ состояниях, можно предписать, что состояния „голых“ частиц

$|0, N_N, N_\Theta\rangle$ порождают пространство H_p,

$|N_V, N_N, N_\Theta\rangle$, $N_V \neq 0$, порождают H_n.

Здесь необходимо отметить следующее обстоятельство. Предыдущие разложения основывались на „голых“ состояниях. Для свободных полей это, без сомнения, естественные разложения, однако в теориях со взаимодействием „голые“ состояния теряют физический смысл и в качестве реальных состояний, которые могут описывать действительную физическую ситуацию, надо вместо них выбирать собственные состояния полного гамильтониана, полного 4-импульса. Поэтому разложение пространства состояний должно основываться именно на них.

Приведем примеры. Модель Ли (по крайней мере для нижних секторов) допускает явное решение. Таким образом, мы сразу получаем собственные векторы состояний полной энергии. Основываясь на их свойствах, можно уверенно и определенно предписать способ разложения пространства состояний. Аналогично, в теории Гейзенберга те точные состояния (собственные состояния или дипольные духи), которые дают аномальный вклад в пропагатор

$$\frac{\gamma_\mu p_\mu k^2}{(p^2)^2} - \frac{\gamma_\mu p_\mu + ik}{p^2},$$

следует взять в качестве элементов пространства H_n. Состояния, которые дают нормальный вклад, порождают пространство H_p.

Таким образом, для того чтобы выяснить, поддается теория вероятностной интерпретации или нет, а также установить естественное разложение на H_p и H_n, необходимо решить задачу на собственные значения (или мультипольные духи) для полного гамильтониана, что практически далеко не всегда относится к числу самых простых задач, не говоря уже о том, что системы собственных состояний невозмущенного и полного гамильтонианов принадлежат, вообще говоря, различным пространствам, как это было отмечено в § 2.11.

3.2. Интерпретируемые и неинтерпретируемые теории

До сих пор мы исследовали проблему физического разложения. Допустим, что она решена. Тогда теория (в представлении Шредингера или в представлении взаимодействия) будет интерпретируема с вероятностной точки зрения (Асколи и Минарди [1958, a, b], Ульманн [1959, a, b]), если разложение

$$|t\rangle = |t\rangle_p + |t\rangle_n,$$

где действительное физическое состояние в момент t_0 обозначается через $|t_0\rangle \in H_p$, для любого t удовлетворяет соотношению

$${}_n\langle t|t\rangle_n = {}_p\langle t|t\rangle_n = 0, \text{ так что } {}_p\langle t|t\rangle_p = \langle t_0|t_0\rangle.$$

Так как энергия наблюдаема, она представляется эрмитовым оператором, $H = H^*$. Поэтому согласно уравнению Шредингера норма сохраняется

$$i\frac{d|t\rangle}{dt} = H|t\rangle, \quad \langle t|t\rangle = \text{const}.$$

Но физическая часть вектора состояния — это только одна компонента всего вектора, поэтому она удовлетворяет другому уравнению (для удобства воспользуемся представлением взаимодействия):

$$i\frac{d|t\rangle_p}{dt} = (P_pH(t)P_p + W(t))|t\rangle_p,$$

$$\text{если } dP_p/dt = 0 \text{ и } |-\infty\rangle_n = 0, \tag{3.2}$$

где

$$W(t) = P_pH(t)P_nU(t)P_p(P_pU(t)P_p)^{-1}. \tag{3.3}$$

Здесь $H(t)$ — гамильтониан взаимодействия, $U(t)$ — оператор эволюции, $|t\rangle = U(t)|-\infty\rangle$, $U^*(t)U(t) = 1$, который предполагается существующим, по крайней мере формально, для полной теории. Оператор

$$(P_pU(t)P_p)^{-1}$$

определяется соотношением

$$(P_pUP_p)^{-1}P_pUP_p = P_pUP_p(P_pUP_p)^{-1} = P_p. \tag{3.4}$$

Оператор $P_p H(t) P_p$ эрмитов, а $W(t)$, вообще говоря, нет. Этим обусловлено изменение нормы $|t\rangle_p$ во времени. (Такая ситуация может, очевидно, возникнуть и в пространствах с дефинитной метрикой; ср., например, комплексный потенциал в ядре, когда рассматривается лишь один канал реакции) Решением уравнения (3.2) является, конечно,

$$|t\rangle_p = P_p U(t) P_p |-\infty\rangle_p. \tag{3.5}$$

От него мы в действительности и отправлялись при задании вида $W(t)$.

В теории S-матрицы постулат интерпретируемости должен выполняться только для $t_0 = -\infty$ и $t = +\infty$. Поэтому никаких проблем с отрицательной вероятностью рассеяния в теории не возникнет, если только

$${}_p\langle\, | P_p S^* P_p S P_p | \,\rangle_p = 1 \text{ коль скоро } {}_p\langle\, | \,\rangle_p = 1 \tag{3.6}$$

для произвольного элемента $|\,\rangle_p$ из H_p.

Покажем теперь, что задача осциллятора, квантовая электродинамика и модель Фруассара вероятностно интерпретируемы, а также обсудим модель Симодаиры, случай дипольного духа в модели Ли и теорию Гейзенберга.

Случай свободного осциллятора тривиален, так как собственные состояния стационарны. Задача осциллятора, взаимодействующего с фиксированным источником, также совсем проста. Этот источник вообще не рассеивает мезоны. Для квантовой электродинамики нетрудно показать, что если $|-\infty\rangle$ — элемент лоренцевой совокупности, то $|+\infty\rangle$ — также элемент этой совокупности (Гайтлер [1955]). Поэтому с учетом (3.1) должно выполняться (3.6).

В тех теориях, где необходимость введения индефинитной метрики была вызвана стремлением сохранить явную релятивистскую инвариантность уравнений, которая требует использования мнимых компонент поля, необходимо в каждом отдельном случае проверять, не нарушается ли вероятностная интерпретация.

Модель Фруассара интерпретируема, но, как и в случае осцилляторов, тривиальна.

Принимая во внимание разложение из предыдущего параграфа и тот факт, что $A(x)$ удовлетворяет уравнениям свободного поля, получаем, что состояния $|N, 0\rangle$ стационарны. В работе Фруассара [1959] обсуждается также случай, когда поля A и B являются некоторыми асимптотическими in- или out-полями для теории со взаимодействием. Если принять во внимание теорему сохранения 4-импульса, которой частицы поля B не подчиняются, то представляется возможным распространение вероятностной интерпретации и на этот случай. Ниже мы вернемся к этому вопросу еще раз.

Основное удобство модели Симодаиры состоит в том, что нефизическое вспомогательное поле φ фигурирует в S-матрице в виде (2.31), т. е.

$$f(\partial_\mu)(\Box - \mu^2)\varphi.$$

Поэтому вполне возможно, что частицы этого поля не появятся в начальном и конечном состояниях, но промежуточные состояния, в которых они находятся вне массовой оболочки, могут давать вклад в матрицу рассеяния физических частиц.

Случай дипольного духа в модели Ли интерпретируем лишь при условии, что в высших секторах не появляются связанные состояния с отрицательным квадратом нормы. В этом легче всего убедиться, рассматривая неперекрывающиеся волновые пакеты реальных частиц в начальных и конечных состояниях рассеяния, достаточно широкие, чтобы их можно было рассматривать асимптотически как собственные состояния полной энергии H с аддитивными собственными значениями. Если теперь в начальном состоянии нет волнового пакета, соответствующего дипольному духу (т. е. $|-\infty\rangle \in H_p$), то принцип сохранения энергии запрещает его появление в конечном состоянии, следовательно, дипольный дух не будет собственным состоянием оператора H. Таким образом, в соответствии с (2.59) отрицательные вероятности появиться не могут. Это остается справедливым и для видоизмененной модели Ли, но только в случае дипольных и трипольных духов. Если, однако, в высших секторах имеются связанные состояния с отрицательным квадратом нормы, то предыдущее рассуждение уже не проходит. Подобные связанные состояния были указаны Ваксом [1959] в случае так называемой „дейтонной“ проблемы, т. е. в секторе $\{VN, NN\Theta\}$. Аналогичный результат был получен Деннери и Кроллом [1960].

К теории Гейзенберга применимы те же рассуждения. Состояния, дающие добавку (2.32), не могут быть собственными функциями 4-вектора энергии-импульса, ибо в противном случае они давали бы вклад нормального типа. Поэтому они не могут появиться в конечном состоянии, если начальное состояние было нормальным. Здесь, однако, надо быть осторожным. Следует еще доказать, что эти аномальные вклады возникают из-за мультипольных духов. Мы еще вернемся к этому вопросу ниже.

Остальные теории, подробно рассмотренные в гл. 2 (за исключением теории Иокоямы) неинтерпретируемы в вероятностном смысле. Для большинства из них это очевидно. Мы рассмотрим здесь только случай комплексного духа в модели Ли (ср. Асколи и Минарди [1959]) с помощью тех же простых рассуждений, что и в случае дипольного духа. Теории Иокоямы мы коснемся позднее.

Рассмотрим рассеяние 3Θ на $2N$. В этом случае начальное собственное значение энергии вещественно. Следовательно, в конечном состоянии, помимо состояния $|2N, 3\Theta\rangle$, могут появиться волновые пакеты $|E\rangle$ и $|E_*\rangle$, сконцентрированные вокруг точек, скажем x_1 и x_2 соответственно и наоборот, плюс один Θ-пакет. Так как собственные значения E и E_* комплексно сопряжены, полная энергия вещественна. Суперпозиция этих состояний

$$c_1 |E(x_1), E_*(x_2), \Theta\rangle + c_2 | E(x_2), E_*(x_1), \Theta\rangle,$$

имеющих нулевую норму, но не ортогональных между собой, может дать любой положительный или отрицательный ненулевой квадрат нормы. Случай одиночного духа, конечно, еще проще благодаря тому, что в этом случае дух с отрицательным квадратом нормы имеет вещественное собственное значение энергии.

3.3. Замечания о формальной теории рассеяния

Выше мы описали обстоятельства, которые могут привести и во многих случаях действительно приводят к невозможности вероятностной интерпретации. Теперь, дабы продемонстрировать некоторые специфические особенности, которые могут встретиться и которые требуют известной осторожности, рассмотрим формальную теорию рассеяния более подробно.

Мы будем исходить из представления Гейзенберга. Чувствуется, что такой выбор диктуется не только соображениями удобства. Естественное разложение скорее должно базироваться на состояниях, принадлежащих полной энергии, чем на какой-нибудь другой наблюдаемой, не говоря уже о той роли, которую играет гейзенбергова картина в аксиоматическом подходе.

Итак, предположим, что полный гамильтониан H (квази)наблюдаем в смысле § 1.4, т. е. замыкание прямой суммы его главных линейных подпространств совпадает со всем пространством. Мы не будем рассматривать связанные состояния и комплексные собственные значения. Таким образом, состояния, принадлежащие непрерывному спектру, могут быть отнесены либо к in-, либо к out-семействам, причем все эти состояния можно считать „простыми“ с точки зрения их свойств до или после рассеяния ($t = -\infty$, $t = +\infty$) соответственно. (В гл. 4, посвященной аксиоматическим методам, такие состояния будут определены более точно на конкретном примере, здесь же мы остановимся на связи с адиабатической гипотезой.) Указанные две группы состояний связаны унитарным преобразованием с S-матрицей в качестве унитарного оператора.

В соответствии с нашими предположениями относительно H как in-, так и out-состояния могут быть сгруппированы следующим образом:

(a) собственные состояния с положительной нормой ($|E_i +\rangle$);

(b) с отрицательным квадратом нормы ($|E_i -\rangle$);

(c) с нулевой нормой ($|E_i\, 0\rangle$);

(d) мультипольные духи ($|E_l D\rangle$, $|E_l T\rangle$, ...).

Мы будем употреблять также более подробные обозначения $\left|E_n;\ n;\ \alpha;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle$, где $\alpha=(+,\ -,\ 0,\ D,\ T,\ \ldots)$, а n означает прочие квантовые числа, определяющие состояние. Если некоторые индексы опускаются, то это значит, что они несущественны. Группировка понимается здесь в строгом смысле, т. е. после надлежащей процедуры ортонормализации, так что состояния (c) и (d) обязательно будут появляться только одновременно. Выберем базисные векторы так, чтобы любой из них относился к одной из групп (a), (b), (c) или (d). В непрерывном спектре они нормированы на δ-функцию; так, в случае дипольного духа $\langle E_{nl}0|E_{ml}D\rangle = \delta(n-m)$, т. е. мы имеем следующие операторы проектирования:

$$\sum (|E_n\rangle\langle D_n| + |D_n\rangle\langle E_n|) \qquad \text{для диполя,}$$

$$\sum (|E_n\rangle\langle T_n| + |T_n\rangle\langle E_n| + |D_n\rangle\langle D_n|) \qquad \text{для триполя.}$$

Знак суммирования здесь имеет символический смысл: он обозначает интегрирование по непрерывным и суммирование по дискретным переменным. Далее,

$$|E_n;\ n;\ \alpha;\ \text{in}\rangle = S\,|E_n;\ n;\ \alpha;\ \text{out}\rangle.$$

В группе (a) естественное разложение выделяет векторы, описывающие только физические состояния. Тогда

$$\left|\begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle = \left|\begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle_p + \left|\begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle_n, \qquad {}_n\!\left\langle\begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right|\left.\begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle_p = 0.$$

Под естественным разложением in- и out-состояний мы понимаем, что всегда можно решить, содержат ли рассматриваемые состояния только лишь реальные, „одетые“ физические частицы (например, электроны и поперечные фотоны) как до, так и после рассеяния. В сомнительных случаях некоторые указания можно почерпнуть из того, в какое состояние переходит данное состояние при стремлении константы связи к нулю (Сударшан [1961], Шнитцер [1961]). Итак,

$$P_p\begin{pmatrix}\text{in}\\ \text{out}\end{pmatrix} = \sum \left|E_n;\ +;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle_{p\,p}\!\left\langle E_n;\ +;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right|$$

и вследствие полноты

$$P_n\begin{pmatrix}\text{in}\\ \text{out}\end{pmatrix} = 1 - P_p\begin{pmatrix}\text{in}\\ \text{out}\end{pmatrix} =$$

$$= \sum \left| E_n;\ +;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle_{n\ n}\left\langle E_n;\ +;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right| -$$

$$- \sum \left| E_n;\ -;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle\left\langle E_n;\ -;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right| +$$

$$+ \text{Члены, соответствующие группам (c) и (d).}$$

Здесь $|\ \rangle_n$ и $|\ \rangle_p$ обозначают соответственно нефизические и физические состояния группы (a). Для всех других состояний нижний индекс n опущен, так как все они рассматриваются как нефизические.

Разложение пространства основано на in-состояниях; таким образом, $P_p(\text{in})$ является оператором проектирования в H_p.

Теперь обратимся к вероятностной интерпретации. Состояние $|\text{in}\rangle_p$ из H_p может быть записано в виде

$$|\text{in}\rangle_p = \Big\{ \sum |E_m;\ +;\ \text{out}\rangle_{p\ p}\langle E_m;\ +;\ \text{out}| +$$

$$+ \sum |E_m;\ +;\ \text{out}\rangle_n\ {}_n\langle E_m;\ +;\ \text{out}| -$$

$$- \sum |E_m;\ -;\ \text{out}\rangle\langle E_m;\ -;\ \text{out}| +$$

$$+ \text{Члены вида} \begin{matrix}(1.12)\\ (1.15)\end{matrix}\Big\}|\text{in}\rangle_p.$$

В любом случае

$${}_p\langle \text{in}|\text{in}\rangle_p = 1.$$

Теория становится интерпретируемой, если

$$\sum {}_p\langle \text{in}|E_m;\ +;\ \text{out}\rangle_{p\ p}\langle E_m;\ +;\ \text{out}|\text{in}\rangle_p =$$

$$= {}_p\langle \text{in}|P_p(\text{out})\ |\text{in}\rangle_p =$$

$$= {}_p\langle \text{in}|P_p(\text{in})P_p(\text{out})P_p(\text{in})|\text{in}\rangle_p = 1, \quad (3.7)$$

или, поскольку $|\text{in}\rangle_p$ произвольно, если

$$P_p(\text{in})P_p(\text{out})P_p(\text{in}) = P_p(\text{in}). \quad (3.8)$$

В этом случае

$$\sum C_m^* C_m = 1, \quad \text{а } C_m = {}_p\langle E_m;\ +;\ \text{out}|\text{in}\rangle_p$$

равняется амплитуде вероятности перехода в физическое состояние $|E_m; +; \mathrm{out}\rangle_p$. Необходимость указанного условия не была подчеркнута Сударшаном [1961], поэтому его аргументацию интерпретируемости нельзя считать достаточно обоснованной. Для свободных полей и для полей с фиксированным источником соотношение (3.8) удовлетворяется при $P_p(\mathrm{out}) = P_p(\mathrm{in}) \to \to H_p = H_p(\mathrm{out}) = P_p(\mathrm{out})\, H$; эти поля тривиальным образом интерпретируемы, так как для них переходы между состояниями вообще отсутствуют.

Заметим, что условие (3.8) симметрично относительно in- и out-состояний в случае T- или TCP-инвариантной теории, когда специально заботятся о том, чтобы временно́е обращение всякого состояния из $H_p = H_p(\mathrm{in})$ обязательно попало бы в $H_p(\mathrm{out})$.

Условие (3.8) может быть представлено в одной из следующих эквивалентных форм, выбор какой-либо из которых диктуется соображениями удобства:

$$\begin{aligned} P_p(\mathrm{in})\, P_p(\mathrm{out})\, P_p(\mathrm{in}) &= P_p(\mathrm{in}),\\ P_p(\mathrm{in})\, P_n(\mathrm{out})\, P_p(\mathrm{in}) &= 0,\\ P_p(\mathrm{in})\, S^{-1} P_p(\mathrm{in})\, S P_p(\mathrm{in}) &= P_p(\mathrm{in}),\\ P_p(\mathrm{in})\, S^{-1} P_n(\mathrm{in})\, S P_p(\mathrm{in}) &= 0. \end{aligned} \tag{3.9}$$

Таким образом, выполнение условий (3.9), не говоря уже о тривиальном случае $P_p(\mathrm{in}) = P_p(\mathrm{out})$, приводит к интерпретируемой теории. Рассмотрим некоторые достаточные условия.

(i) Если система в добавление к физическим состояниям содержит только состояния типа (c) и (d), то теория интерпретируема.

Доказательство:

$$\begin{aligned} |E_n; +; \mathrm{in}\rangle_p = \sum c_k |E_k; +; \mathrm{out}\rangle_p + \sum d_k |E_k; 0; \mathrm{out}\rangle +\\ + \sum f_k |E_k; D; \mathrm{out}\rangle + \sum g_k |E_k; T; \mathrm{out}\rangle + \ldots, \end{aligned} \tag{3.10}$$

но $|E_n; +; \mathrm{in}\rangle_p$ — собственное состояние энергии, поэтому обязательно

$$f_k = g_k = \ldots = 0, \tag{3.11}$$

откуда и следует (3.9). Заметим, что из (3.11) вытекает, что

$$\langle E_k;\ 0;\ \mathrm{out}\ | E_n;\ +;\ \mathrm{in}\rangle_p = \langle E_k;\ 0;\ \mathrm{in} | S | E_n;\ +;\ \mathrm{in}\rangle_p = 0,$$

если система имеет только дипольные духи, и

$$\langle E_k;\ 0;\ \mathrm{out} | E_n;\ +;\ \mathrm{in}\rangle_p = \langle E_k;\ D;\ \mathrm{in} | E_n;\ +;\ \mathrm{out}\rangle_p = 0$$

для дипольных и трипольных духов и т. д.; при этом несущественно, будем ли мы причислять состояния с нулевой нормой к физическому подпространству.

(ii) Если

$$P_n(\mathrm{out}) = \sum (| E_m;\ +;\ \mathrm{out}\rangle_{n\,n}\langle E_m;\ +;\ \mathrm{out} | - \\ - | E_m;\ -;\ \mathrm{out}\rangle \langle E_m;\ -;\ \mathrm{out}\ |),$$

то удачная компенсация + и − состояний может привести к интерпретируемости.

Тривиальным примером случая (ii) может служить теория, где вместо поля $\varphi_0(x)$ появляется комбинация полей $\varphi_0+\varphi_1+\varphi_2$ типа Паули—Вилларса, причем φ_1 и φ_2 имеют одинаковые массы, коммутируют между собой и имеют коммутаторы противоположных знаков. Тогда S-матрица физических процессов (в которой фигурирует только поле φ_0) имеет тот же вид, что и в отсутствии вспомогательных полей. Таким образом, значения вероятностей не изменяются, несмотря на то что появляются ненулевые элементы матрицы, соответствующие переходам в нефизические состояния. Аналогичная компенсация происходит в квантовой электродинамике с продольными и скалярными фотонами.

(iii) Обратимся, наконец, к случаю комплексных собственных значений, который до сих пор исключался из рассмотрения.

Формально для комплексных собственных значений можно применять те же рассуждения, что и для мультипольных духов в случае (i); в правой части соотношения (3.10) не могут появиться собственные состояния или мультиполи с комплексными собственными значениями. Поэтому теория лишь с комплексными духами интерпретируема.

Имеется, однако, и определенное отличие от случая мультипольных духов. Именно, состояния рассеяния могут быть представлены в виде прямого произведения одночастичных состояний. Поэтому полное пространство состояний определено, коль скоро известны одночастичные состояния. Если теперь среди одночастичных состояний имеются только мультипольные духи, то состояния, содержащие в прямом произведении по крайней мере один мультипольный дух, также будут мультипольными духами и, следовательно, будут применимы рассуждения случая (i). В случае комплексных собственных значений, когда собственные числа появляются комплексно сопряженными парами, это уже не так. Прямое произведение двух собственных состояний, соответствующих комплексно сопряженным собственным значениям E и E^*, дает состояние с вещественным собственным значением $E = E + E^*$, так что его появление не исключено. С другой стороны, эти состояния не могут принадлежать H_p. Следовательно, теория не интерпретируема. Такая ситуация как раз возникает в случае комплексных духов в модели Ли, что было подтверждено непосредственным подсчетом (Танака [1963]). Поэтому фактически возможность вероятностной интерпретации допускает комплексные собственные числа лишь вместе с их мультиполями, в каковом случае собственное состояние должно принадлежать H_n. Чтобы не иметь постоянно в виду этот исключительный случай, мы вообще не будем рассматривать комплексные собственные значения. Итак, окончательно, нетривиальная теория интерпретируема, если имеет место (i), (ii), или (iii), или некоторая их комбинация.

Обратимся теперь к адиабатическому рассмотрению (Надь [1964]). Начнем, как обычно, с разбиения полного гамильтониана на невозмущенную часть H^0 и гамильтониан взаимодействия H^1:

$$H = H^0 + H^1.$$

В дальнейшем мы будем считать, что H^0 и H обладают одним и тем же непрерывным спектром и что H^1 не вызывает смещения энергетических уровней. Мы не будем также обращать внимания на то, что операторы одевания на самом деле не существуют и что векторы состояния гамильтонианов H и H^0 принадлежат различным пространствам, что в конечном счете приводит к ренормировочным константам в адиабатической S-матрице. Изменения, которые необходимо сделать при переходе к обычной теории поля, можно найти в литературе (Де Витт [1955]). Здесь, однако, возникают новые, гораздо более важные обстоятельства. В зависимости от действительного разложения H система векторов состояний типа (a), (b), (c), (d) может иметь одинаковую структуру для H^0 и H как при наличии, так и при отсутствии взаимно однозначного соответствия между возмущенными и невозмущенными векторами состояний. Более точно, как для H, так и для H^0 система собственных векторов может быть или полной, или — в случае, когда появляются мультипольные духи, — неполной. Итак, с учетом действительного разложения и рассматриваемой теории могут иметь место все четыре комбинации:

$$H \to \text{полн.}, \quad H^0 \to \text{полн.}; \quad H \to \text{полн.}, \quad H^0 \to \text{неполн.};$$

$$H \to \text{неполн.}, \quad H^0 \to \text{полн.}; \quad H \to \text{неполн.}, \quad H^0 \to \text{неполн.}$$

Четвертый случай будем рассматривать только при условии взаимно однозначного соответствия состояний (о смешанных случаях несколько слов будет сказано в конце этого параграфа). Тогда можно будет опустить члены, соответствующие состояниям нулевой нормы и мультиполям, и трактовать остальные состояния как частный вариант хорошо известного первого случая.

Итак, мы имеем

$$\begin{aligned}
&(H - E_n)|E_n\rangle = 0; && (H^0 - E_n)|E_n\rangle^0 = 0; \\
&(H - E_n)|D_n\rangle = E_n|E_n\rangle; && (H^0 - E_n)|D_n\rangle^0 = E_n|E_n\rangle^0; \quad (3.12)\\
&(H - E_n)|T_n\rangle = E_n|D_n\rangle; && (H^0 - E_n)|T_n\rangle^0 = E_n|D_n\rangle^0; \\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots && \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Применяя к обеим колонкам оператор $(H_0 - E_n)$, можно в конце концов прийти к (обобщенным) уравнениям Липпмана — Швингера ($\varepsilon \to +0$)

$$\left|E_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle = |E_n\rangle^0 + \frac{1}{E_n - H^0 \pm i\varepsilon} H^1 \left|E_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle_0,$$

$$\left|D_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle = |D_n\rangle^0 + \frac{1}{E_n - H^0 \pm i\varepsilon} H^1 \left|D_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle - \frac{E_n}{(E_n - H^0 \pm i\varepsilon)^2} H^1 \left|E_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle, \tag{3.13}$$

$$\left|T_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle = |T_n\rangle^0 + \frac{1}{E_n - H^0 \pm i\varepsilon} H^1 \left|T_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle - \frac{E_n}{(E_n - H^0 \pm i\varepsilon)^2} H^1 \left|D_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle + \frac{E_n^2}{(E_n - H^0 \pm i\varepsilon)^3} H^1 \left|E_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle,$$

. . . .

В частных случаях такие уравнения исследовались Гейзенбергом [1957a] и Солтом [1962]. Уравнения имеют следующие итерационные решения:

$$\left|E_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle = \left(1 + \frac{1}{E_n - H^0 \pm i\varepsilon} H^1 + \frac{1}{E_n - H^0 \pm i\varepsilon} H^1 \frac{1}{E_n - H^0 \pm i\varepsilon} H^1 + \ldots\right) |E_n\rangle^0 = A(H^0,\ H^1,\ E_n)\,|E_n\rangle^0,$$

$$\left|D_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle = A(H^0,\ H^1,\ E_n)\,|D_n\rangle^0 + E_n \frac{\partial}{\partial E_n} A(H^0,\ H^1,\ E_n)\,|E_n\rangle^0, \tag{3.14}$$

$$\left|T_n;\ {}^{\text{in}}_{\text{out}}\right\rangle = A(H^0,\ H^1,\ E_n)\,|T_n\rangle^0 + E_n \frac{\partial}{\partial E_n} A(H^0,\ H^1,\ E_n)\,|D_n\rangle^0 + \frac{E_n^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial E_n^2} A(H^0,\ H^1,\ E_n)\,|E_n\rangle^0,$$

. . . .

Докажем, что равенства

$$\begin{aligned} &\left|E_n;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle = U_\varepsilon(0,\ -\infty)\,|E_n\rangle^0,\\ &\left|D_n;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle = U_\varepsilon(0,\ -\infty)\,|D_n\rangle^0,\\ &\left|T_n;\ \begin{matrix}\text{in}\\ \text{out}\end{matrix}\right\rangle = U_\varepsilon(0,\ -\infty)\,|T_n\rangle^0,\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned} \tag{3.15}$$

также выполняются в данном случае. Здесь $U_\varepsilon(t,\ t_0)$ — обычный адиабатический оператор эволюции, удовлетворяющий уравнению

$$U_\varepsilon(t,\ t_0) = 1 - i\int_{t_0}^{t} e^{-|\varepsilon|t'} H^1(t')\,U_\varepsilon(t',\ t_0)\,dt', \tag{3.16}$$

где

$$H^1(t) = e^{iH_0t} H^1 e^{-iH_0t}.$$

В самом деле, в силу (3.15) для любого вектора

$$|\,\text{in}\rangle = |\,\rangle^0 - i\int_{-\infty}^{0} e^{-\varepsilon t'} e^{iH^0t'} H^1 e^{-iH^0t'}\,|t'\rangle\,dt'. \tag{3.17}$$

Так как из (3.12) вытекают равенства

$$e^{-iH^0t}\,|E_n\rangle^0 = |E_n\rangle^0\,e^{-iE_nt},$$

$$e^{-iH^0t}\,|D_n\rangle^0 = \left(|D_n\rangle^0 + |E_n\rangle^0\,E_n\frac{\partial}{\partial E_n}\right)e^{-iE_nt},$$

$$e^{-iH^0t}\,|T_n\rangle^0 = \left(|T_n\rangle^0 + |D_n\rangle^0\,E_n\frac{\partial}{\partial E_n} + |E_n\rangle^0\,\frac{E_n^2}{2}\,\frac{\partial^2}{\partial E_n^2}\right)e^{-iE_nt},$$

то итерационным решением уравнений (3.17) служит в точности (3.14).

Аналогично можно показать, что

$$|\,\text{out}\rangle = U_\varepsilon(0,\ +\infty)\,|\,\rangle^0.$$

Таким образом, для элемента $\langle \text{out} | \text{in} \rangle$ S-матрицы

$$\langle \text{out} | \text{in} \rangle = \langle \text{in} | S | \text{in} \rangle = \\ = (U_\varepsilon(0, +\infty) | m\rangle^0, \; U_\varepsilon(0, -\infty) | n\rangle^0) = \\ = {}^0\langle m | S_\varepsilon | n\rangle^0 = S_{m,n},$$

где S_ε — адиабатическая S-матрица.

$$S_\varepsilon = U_\varepsilon(+\infty, -\infty).$$

Используя известную формулу $U(t, 0) = e^{iH^0t}e^{-iHt}$, получаем

$$S_{m,n} = \lim_{t_2 \to +\infty} {}^0\langle m | e^{iH^0t_2} e^{-iHt_2} | n, \text{ in}\rangle.$$

Таким образом, для вектора $| n; \text{in}\rangle_p = | E_n; +; \text{in}\rangle \in H_p$ с учетом (3.13) имеем

$$S_{mn} = \lim_{t_2 \to +\infty} e^{i(E_m - E_n)t_2} \; {}^0\langle E_m | E_n; \text{in}\rangle_p = \\ = {}^0\langle E_m | E_n\rangle_p^0 + \lim_{t_2 \to +\infty} \frac{e^{i(E_m - E_n)t_2}}{E_n - E_m + i\varepsilon} \; {}^0\langle E_m | H^1 | E_n; \text{in}\rangle_p = \\ = {}^0\langle E_m | E_n\rangle_p^0 - 2\pi i \delta(E_m - E_n) R_{mn},$$

$$R_{mn} = {}^0\langle E_m | H^1 | E_n; \text{ in}\rangle_p = {}^0\langle E_m | R | E_n\rangle_p^0,$$

$$S_{mn}^{(D)} = \lim_{t_2 \to +\infty} \Big\{ {}^0\langle D_m | E_n; \text{ in}\rangle_p + \\ + {}^0\langle E_m | E_n; \text{ in}\rangle_p E_m \frac{\partial}{\partial E_m} \Big\} e^{i(E_m - E_n)t_2} = \\ = {}^0\langle D_m | E_n\rangle_p^0 - 2\pi i \delta(E_m - E_n) R_{mn}^{(D)} - \\ - 2\pi i E_m \delta'(E_m - E_n) R_{mn},$$

$$R_{mn}^{(D)} = {}^0\langle D_m | H^1 | E_n; \text{ in}\rangle_p = {}^0\langle D_m | R | E_n\rangle_p^0,$$

$$S_{mn}^{(T)} = \lim_{t_2 \to +\infty} \Big\{ {}^0\langle T_m | E_n; \text{ in}\rangle_p + {}^0\langle D_m | E_n; \text{ in}\rangle_p E_m \frac{\partial}{\partial E_m} + \\ + {}^0\langle E_m | E_n; \text{ in}\rangle_p \frac{E_m^2}{2} \frac{\partial^2}{\partial E_m^2} \Big\} e^{i(E_m - E_n)t_2} = \\ = {}^0\langle T_m | E_n\rangle_p^0 - 2\pi i \delta(E_m - E_n) R_{mn}^{(T)} - \\ - 2\pi i E_m \delta'(E_m - E_n) R_{mn}^{(D)} - 2\pi i \frac{E_m^2}{2} \delta''(E_m - E_n) R_{mn},$$

$$R_{mn}^{(T)} = {}^0\langle T_m | H^1 | E_n; \text{ in}\rangle_p = {}^0\langle D_m | R | E_n\rangle_p^0, \tag{3.18}$$

где R — матрица реакции. Для нефизических состояний $|E_m\rangle_n^0$, $|D_m\rangle^0$, $|T_m\rangle^0$, ... и всегда физических состояний $|E_n;\ \mathrm{in}\rangle_p$ имеем

$$ {}_n^0\langle E_m | E_n\rangle_p^0 = \langle D_m | E_n\rangle_p^0 = {}^0\langle T_m | E_n\rangle_p^0 = \ \dots\ = 0. $$

Из условия интерпретируемости (i) следует, что

$$ \delta(E_m - E_n) R_{mn} = 0 \text{ для дипольных духов,} $$

$$ \delta(E_m - E_n) R_{mn}^{(D)} = \delta'(E_m - E_n) R_{mn} = 0 \text{ для трипольных духов.} $$

Конечно, вне поверхности энергии R_{mn} не обязательно равны нулю. Рассматривая полную систему (a) — (d), получаем для R_{mn} интегральное уравнение

$$ \begin{aligned} R_{mn} &= {}^0\langle m | H^1 | E_n;\ \mathrm{in}\rangle_p = \\ &= {}^0\langle m | H^1 | E_n\rangle_p^0 + {}^0\langle m | H^1 \frac{1}{E_n - H^0 + i\varepsilon} H^1 | E_n;\ \mathrm{in}\rangle_p = \\ &= H_{mn}^1 + \sum_k \frac{H_{mk}^{1\,(+)} R_{kn}^{(+)}}{E_n - E_k + i\varepsilon} - \\ &\qquad - \sum_k \frac{H_{mk}^{1\,(-)} R_{kn}^{(-)}}{E_n - E_k + i\varepsilon} + \sum_k \frac{H_{mk}^{1\,(0)} R_{kn}^{(D)}}{E_n - E_k + i\varepsilon} + \\ &\qquad + \sum_k \frac{H_{mk}^{1\,(D)} R_{kn}^{(0)}}{E_n - E_k + i\varepsilon} - \sum_k E_k \frac{H_{mk}^{1\,(0)} R_{kn}^{(0)}}{(E_n - E_k + i\varepsilon)^2} \end{aligned} $$

в теории с духами не выше второго порядка. В теориях с более высокой мультипольностью духов появляются новые члены с высшими степенями $E_n/(E_n - E_k + i\varepsilon)$. Верхние индексы матричных элементов указывают характер промежуточных состояний.

Аналогичным образом, отправляясь от $H_{mn}^1 = {}_p^0\langle E_n | H^1 | E_m\rangle_p^0$, рассматривая полную in-систему и используя эрмитовость оператора H^1, получаем для физических элементов матрицы R

$$ R_{mn} = {}_p^0\langle E_m | H^1 | E_n;\ \mathrm{in}\rangle_p $$

уравнения Лоу

$$R_{mn} - R^*_{nm} = \sum_{\mp} (\mp 1) \sum_k{}' \left(\frac{R^{(\pm)}_{mk} R^{(\pm)*}_{nk}}{E_k - E_n - i\varepsilon} - \frac{R^{(\pm)*}_{nk} R^{(\pm)}_{mk}}{E_k - E_m + i\varepsilon} \right) +$$
$$+ \sum_k \left(\frac{R^{(D)}_{mk} R^{(0)*}_{nk} + R^{(0)}_{mk} R^{(D)*}_{nk}}{E_k - E_n - i\varepsilon} - \frac{R^{(D)*}_{nk} R^{(0)}_{mk} + R^{(0)*}_{nk} R^{(D)}_{mk}}{E_k - E_m + i\varepsilon} \right) -$$
$$- \sum_k E_k \left(\frac{R^{(0)}_{mk} R^{(0)*}_{nk}}{(E_k - E_n - i\varepsilon)^2} - \frac{R^{(0)*}_{nk} R^{(0)}_{mk}}{(E_k - E_m + i\varepsilon)^2} \right). \quad (3.19)$$

Из вида этого выражения можно установить свойства перекрестной симметрии и аналитичности. При $m = n$ получаем

$$2 \operatorname{Im} R_{nn} = -2\pi \sum_k \delta(E_k - E_n) \left\{ | R^{(+)}_{nk} |^2 - | R^{(-)}_{nk} |^2 + \right.$$
$$\left. + \left(R^{(D)}_{nk} R^{(0)*}_{nk} + R^{(0)}_{nk} R^{(D)*}_{nk} \right) \right\} -$$
$$- 2\pi \sum_k E_k \delta'(E_k - E_n) | R^{(0)}_{nk} |^2.$$

Стоит отметить, что последние два члена (лежащие на поверхности энергии) обращаются в нуль, ибо вследствие (i)

$R^0_{nk} \sim (E_k - E_n) \times$ (Регулярная функция на поверхности энергии),

поэтому при отсутствии собственных состояний с отрицательным квадратом нормы или при надлежащей компенсации (условие (iii)) получаем оптическую теорему

$$2 \operatorname{Im} R_{aa} \sim \sigma_p, \quad (3.20)$$

где σ_p — полное сечение рассеяния, учитывающее переходы только в физические состояния.

До сих пор благодаря предположению о взаимно однозначном соответствии все было просто и непосредственно. Об оставшихся двух смешанных случаях можно сказать немногое. Упомянем в этой связи, во-первых, пример модели Иокоямы (§ 2.6). Основываясь на теории возмущений в представлении взаимодействия (т. е. на адиабатическом рассмотрении), Иокояма показал, что его теория интерпретируема, так как имеет место компенсация типа (ii) матричных элементов вспомогательных полей φ_l и φ'_l, вполне понятная, поскольку соответствующие частицы имеют одинаковые массы, иными словами, дают вклады противоположного знака в S-матрицу. С другой стороны, Мунаката [1961] на несущественно видоизмененной модели, преобразованной так, чтобы получить диполь, явным вычислением показал, что даже в первом приближении по f (поле A рассматривалось как внешнее) вероятность переходов только в физические состояния не сохраняется. Он отметил, что наиболее вероятной причиной такого противоречия является неприменимость в данном случае метода диаграмм Фейнмана, в котором неявно предполагается, что собственные состояния гамильтониана образуют полную систему.

Этот пример показывает, что смешанные случаи очень интересны и их изучение чрезвычайно желательно.

В заключение мы хотим еще раз подчеркнуть, что решение вопроса, является ли некоторая теория в том виде, как она есть, интерпретируемой или нет, представляет собой нелегкую задачу. Мы думаем, что окончательный ответ может быть дан только после решения проблемы полного гамильтониана или эквивалентной проблемы, которое для некоторых моделей можно получить довольно просто, или даже после рассмотрения волновых пакетов, если это окажется необходимым. Понятно, конечно, что такая программа совершенно невыполнима для более или менее реалистичных теорий.

3.4. Некоторые пути получения интерпретируемых теорий

До сих пор рассматривались условия, определяющие интерпретируемость той или иной теории. Допустим, что для некоторой частной модели получен отрицательный ответ; даже в этом случае надлежащая модификация может обеспечить интерпретируемость теории. Такие модификации и будут рассмотрены ниже.

Для неинтерпретируемой теории не выполняется условие (3.6) или (3.9). Поэтому, если желательно получить теорию, допускающую вероятностную интерпретацию и в этом случае, то следует некоторым разумным образом построить „физическую“ S-матрицу, отличную от $P_p S P_p$ и обладающую требуемыми свойствами.

Достаточным условием выполнения (3.6) будет, конечно, равенство

$$\tilde{S}^* \tilde{S} = \tilde{S} \tilde{S}^* = P_p. \tag{3.21}$$

Для частного случая одиночного духа в модели Ли такая матрица $\tilde{S}$ (определяемая неоднозначно) была предложена Ферретти [1959]. В дальнейшем будут рассматриваться только модификации, имеющие совершенно общий характер и применимые независимо от специфической структуры рассматриваемой теории. Всюду дальше используется представление взаимодействия. Поэтому разложение пространства состояний будет основываться на состояниях голых частиц, как в примерах § 3.1.

Отправной пункт предложения Боголюбова, Медведева и Поливанова [1958 a,b] заключается в том, что в отличие от квантовой электродинамики, где нефизическая часть вектора состояния является произвольным элементом лоренцевой совокупности, в общем случае неинтерпретируемой теории можно считать, что нефизическая часть $|\,\rangle_n = P_n |\,\rangle$ вектора состояния при $t = -\infty$ определяется через физическую по формуле

$$|-\infty\rangle_n = N\,|-\infty\rangle_p, \qquad P_n N P_p = N \tag{3.22}$$

с подходящим оператором N. В этом случае

$$|+\infty\rangle_p = P_p\,|+\infty\rangle = P_p S\,(P_p + N)\,|-\infty\rangle_p,$$

т. е. физическая $\tilde{S}$-матрица равна

$$\tilde{S} = P_p S\,(P_p + N). \tag{3.23}$$

Оператор N должен быть подобран так, чтобы удовлетворялось соотношение (3.21). Боголюбов предложил следующую процедуру определения N. Норма полного вектора состояния согласно § 3.2 сохраняется. Норма физической составляющей будет сохраняться, если

$$|-\infty\rangle_n + |+\infty\rangle_n = 0. \tag{3.24}$$

Из определения физической и нефизической составляющих и из (3.22) следует, что

$$0 = |+\infty\rangle_n + N|-\infty\rangle_p = P_n S|-\infty\rangle + N|-\infty\rangle_p = \\ = \{P_n S(P_p + N) + N\}|-\infty\rangle_p,$$

откуда

$$N = -(P_n S P_n + P_n)^{-1} P_n S P_n$$

и физическая $\tilde{S}$-матрица равна

$$\tilde{S} = P_p S\left\{P_p - (P_n + P_n S P_n)^{-1} P_n S P_p\right\}. \tag{3.25}$$

Используя модель поля с гамильтонианом (2.29), Медведев и Поливанов показали, что с (3.25) можно получить конечную теорию.

Это приводит к некоторым результатам и соображениям (Надь [1958, 1960а]). Совершенно ясно, что N определяется не единственным образом. Точнее, для любой $\tilde{S}$, удовлетворяющей условию (3.21), можно построить соответствующий оператор N. В силу (3.23)

$$\tilde{S} - P_p S P_p = P_p S P_n P_n N P_p,$$

следовательно,

$$N = (P_p S P_n)^{-1}(\tilde{S} - P_p S P_p), \tag{3.26}$$

где $(P_p S P_n)^{-1}$ определяется из соотношения

$$(P_p S P_n)^{-1}(P_p S P_n) = P_n, \quad P_p S P_n (P_p S P_n)^{-1} = P_p, \tag{3.27}$$

и во всех случаях предполагается, что такие обратные операторы существуют. Если, например,

$$\tilde{S} = \pm P_p,$$

то

$$N = (P_p S P_n)^{-1}(\pm P_p - P_p S P_p),$$

и в этом случае в физическом канале ничего не происходит. В теории, предложенной Боголюбовым, то же самое справедливо для нефизических состояний. В силу (3.24)

$$\tilde{S}_n = -P_n \qquad (|+\infty\rangle_n = \tilde{S}_n|\infty\rangle_n).$$

Если выбрать нефизическую часть нелинейным образом, т. е. позволить оператору N быть нелинейным, то $\tilde{S}$ может быть представлена в виде P_pSP_p, наиболее простом, наиболее понятном и удобном для вычислений. Действительно, если

$$N|-\infty\rangle_p = (P_pSP_n)^{-1}(a-1)P_pSP_n|-\infty\rangle_p,$$

где

$$a = \frac{1}{\sqrt{_p\langle-\infty|P_pS^*P_pSP_p|-\infty\rangle_p}},$$

то

$$\tilde{S} = aP_pSP_p, \quad \text{причем} \quad _p\langle-\infty|\tilde{S}^*\tilde{S}|-\infty\rangle_p = 1.$$

В этом случае даже значения a не являются существенными, если мы интересуемся только относительными вероятностями [1]).

Используя указанный произвол в выборе N, можно показать (Надь и Ржевуский [1959]), что если к какой-либо теории с лагранжианом с высшими производными применить предложение Боголюбова, то она будет эквивалентна некоторой нелокальной теории в том смысле, что обе они дадут одинаковые вероятности рассеяния, если надлежащим образом выбрать оператор N. Подобную эквивалентность двух теорий всегда можно гарантировать, если одна из них работает с теми же самыми операторами поля (наряду с другими), что и вторая. Именно это обстоятельство служило причиной отмеченной выше эквивалентности. В самом деле, пусть (I) и (II) — теории, соответствующие операторам поля $\varphi_1, \ldots, \varphi_n$ (и S-матрице S_I) и $\varphi_1, \ldots, \varphi_n, \psi_1, \ldots, \psi_m$ (и S_{II}). Одинаковые буквы φ_i

[1]) Как было указано Фирцем в 1950 г., конструкции такого типа приводят к физически недопустимому реальному распространению нефизических частиц; см. Fierz M., *Helv. Phys. Acta*, 23 (1950), 73. — *Прим. ред.*

в обеих теориях обозначают операторы одного и того же типа с общими трансформационными свойствами, уравнениями поля и перестановочными соотношениями в представлении взаимодействия. Разложим теперь гильбертово пространство во второй теории следующим образом: каждое состояние, содержащее по крайней мере одну частицу полей ψ_l, принадлежит H_n, остальные состояния принадлежат H_p. Для простоты все состояния теории (I) будем считать физическими. Полагая

$$N = (P_p S_{\text{II}} P_n)^{-1} \{S_{\text{I}} - P_p S_{\text{II}} P_p\},$$

получаем

$$\tilde{S}_{\text{II}} = S_{\text{I}}, \tag{3.28}$$

т. е. так определенная физическая $\tilde{S}$-матрица дает в теории (II) для физически интерпретируемых процессов те же самые вероятности рассеяния, что и в теории (I).

Согласно приведенной выше формуле для N, приготовление начального состояния в таком варианте теории зависит от процесса, который мы будем рассматривать. Поэтому Максимов [1959] предложил иную процедуру для получения другой физической S-матрицы в виде $\tilde{S} = USU^*$, где роль оператора U заключается в том, чтобы проектировать состояния до и после рассеяния (задаваемого матрицей S) таким образом, чтобы норма физической части вектора состояния сохранялась. Максимову не удалось найти точное решение определяющего оператор U уравнения, полученного исходя из сформулированного требования. Поэтому его метод был применен только к модели Ли, и главным образом к примеру, рассмотренному в § 2.4.

Аналогичные соображения на более аксиоматической основе предложены Ульманном [1959b].

Рассмотренные выше предложения обеспечивают сохранение вероятности только для бесконечных промежутков времени. Некоторой модификацией можно добиться сохранения вероятности в любой момент времени. Для этого следует подставить в (3.2) вместо W некоторый эрмитов оператор. Вот простейшие варианты такой подстановки:

$$W \to W + W^* \quad \text{или} \quad W \to \frac{1}{2}(W + W^*), \tag{3.29}$$

причем второй способ в точности сохраняет остальные свойства теории. Решением в первом случае будет

$$|t\rangle_p = \{P_p U(t) P_p + V(t)\} |-\infty\rangle_p,$$

где добавка

$$V(t) = \sum_{n=1}^{\infty} V^n(t) =$$
$$= \sum_{n=1}^{\infty} \sum (-i)^n \int_{-\infty}^{t} dt_1 \int_{-\infty}^{t_1} dt_2 \ldots \int_{-\infty}^{t_{n-1}} dt_n G(t_1) \ldots G(t_n) \tag{3.30}$$

восстанавливает унитарность. Здесь $G(t)$ — один из операторов $W^*(t)$ или $\{P_p H(t) P_p + W(t)\}$ и второе суммирование распространяется на все $2^n - 1$ комбинаций, где по крайней мере одно G равно W^*. Из (3.3) и (3.30) легко усмотреть, что V по крайней мере второго порядка по константе связи g, а члены, пропорциональные g^n, происходят от суммы $V^{(1)} + \ldots + V^{(n)}$. Для члена второго порядка получаем, например,

$$V_2(t) = -(i)^2 \int_{-\infty}^{t} dt' \int_{-\infty}^{t'} dt'' P_p H(t'') P_n H(t') P_p =$$
$$= \frac{(i)^2}{2} P_p \int_{-\infty}^{t} \int_{-\infty}^{t} P^{-1} \{(P_p H(t') P_p) \cdot (P_p H(t'') P_p) -$$
$$- H(t') H(t'')\} dt'' dt' P_p,$$

где P^{-1} — оператор обратного упорядочения времени. При возрастании порядка сложность выражений быстро увеличивается.

Переходя к пределу при $t \to +\infty$, получаем физическую $\tilde{S}$-матрицу

$$\tilde{S} = P_p S P_p + V(+\infty),$$

которую можно представить, как и обычную S-матрицу, в виде, где вдобавок к нормальным произведениям операторов (только физических, т. е. возникающих из состояния вакуума, принадлежащего H_p) появляются комбинации различных S- и Δ-функций.

$\tilde{S}$-матрицу Боголюбова также можно построить с помощью процесса, все время сохраняющего норму. Если вместо (3.24) потребовать, чтобы

$$| t\rangle_n + | -\infty\rangle_n = 0,$$

то норма $| t\rangle_p$ сохраняется. Этому случаю соответствуют оператор

$$N(t) = -(P_n + P_n U(t) P_n)^{-1} P_n U(t) P_p$$

и физическая $\tilde{U}(t)$-матрица

$$\tilde{U}(t) = P_p U(t) \{P_p - (P_n + P_n U(t) P_n)^{-1} P_n U(t) P_p\},$$

для которой

$$\check{U}(t) U(t) = P_p.$$

Итак, норма $\check{U}(t) | -\infty\rangle_p$ сохраняется и $\check{U}(+\infty)$ в точности равно (3.25). Дифференцируя $\tilde{U}(t)$ по t и возвращаясь к уравнению Шредингера, можно вычислить и соответствующий сложный „гамильтониан“.

Мы видим, что число возможных модификаций весьма велико, практически неограничено. Более того, эти модификации не следуют из какого-либо принципа. Поэтому будет только честно относиться к ним с известным скептицизмом.

3.5. Нелокальность и индефинитная метрика

Стало уже общей фразой утверждение, что нелокальные взаимодействия и поля с индефинитной метрикой эквивалентны. Разумеется, это убеждение не лишено оснований. Помимо квантовой электродинамики, где примером может служить эквивалентность метода Гупта — Блейлера и включения в формализм мгновенных кулоновских взаимодействий, можно указать ряд других явных примеров такой эквивалентности в теории поля.

Для большинства теорий, модифицированных в смысле предыдущего параграфа, тоже можно явно показать подобную эквивалентность. В связи с этим достаточно заметить, что условие Боголюбова (3.24) определенно является нелокальным. Это можно явно показать на частных примерах. Кроме того, нелокальные теории обычно приводят к нарушению причинности: Славнов и Суханов [1959] исследовали вопрос с этой точки зрения. Они показали, что даже „слабое" условие причинности

$$\tilde{S}(g_2+g_1)\sim\tilde{S}(g_2)\tilde{S}(g_1) \tag{3.31}$$

не может выполняться в теориях типа Боголюбова, где требуется

(i) релятивистская инвариантность,

(ii) унитарность: $\tilde{S}\tilde{S}^{+}=P_p$,

(iii) возможность построения $\tilde{S}$ по S и P.

В условии (3.31) $g(x)$ служит мерой включения взаимодействия, g_1 и g_2 показывают, что взаимодействие включается в пространственно-временных областях Γ_1 и Γ_2 соответственно. Каждая точка Γ_2 „позднее" любой точки из Γ_1 и асимптотическая эквивалентность должна иметь место по крайней мере для областей, достаточно удаленных друг от друга по времени. Основное препятствие, мешающее получить причинную физическую матрицу рассеяния, состоит в том, что физическая часть вектора состояния является лишь одной его компонентой и, хотя изменение всего вектора состояния во времени причинно, нарушение причинности для одной этой компоненты вполне вероятно. В самом деле, $P_pS(g_2+g_1)P_p$ не равно, вообще говоря, $P_pS(g_2)P_pS(g_1)$, так как оператор проектирования в средней части последнего выражения может срезать такие внутренние линии диаграммы, которые представлены в $P_pS(g_2+g_1)P_p$.

В противовес сказанному выше можно, однако, привести некоторые контрпримеры. Для модифицированной модели возьмем следующий тривиальный случай. Обращаясь вновь к соображениям, приводящим к (3.28), положим S_{I} равной S-матрице локальной теории. Тогда теория (II) с индефинитной метрикой эквивалентна локальной теории.

Нетривиальный немодифицированный релятивистский контрпример дан также Симодаирой [1960] (пример из § 2.7 с $A = B = 1$, $C = (\square - \mu^2)$).

Нелокальные теории, подобные описанным выше, — это теории с нелокальным гамильтонианом, гамильтонианом с форм-фактором. Поэтому не удивительно, что одновременное требование унитарности и устранения расходимости (даже если эти требования налагаются в другом подходе к теории, начинающемся со введения индефинитной метрики) в большинстве случаев в конечном счете приводит к нелокальным взаимодействиям. Мы, однако, увидим в следующей главе, что индефинитная метрика, локальная причинность (коммутативность для пространственно-подобных расстояний) и интерпретируемость не приводят ни к каким очевидным противоречиям.

Глава 4

АКСИОМАТИЧЕСКИЕ МЕТОДЫ

Мы уже убедились в том, что при построении многих теорий нужно или можно использовать индефинитную метрику. Подойдем теперь к вопросу с противоположной точки зрения. Предположим, что в некоторой теории используется индефинитная метрика и рассмотрим вытекающие отсюда следствия. Нашей программой-максимум в этом направлении будет найти, по крайней мере в принципе, критерий, позволяющий определить, есть ли духи в той или иной настоящей теории.

Инструментом нам будут служить обычные „аксиоматические" методы теории поля. Поэтому все дальнейшее рассмотрение проводится в представлении Гейзенберга, обладающем тем дополнительным преимуществом, что разложение пространства состояний можно основывать на системе собственных состояний полного гамильтониана. Итак, мы будем исходить из соответствующим образом модифицированных основных положений, сформулированных в книге Швебера [1961]. Мы только переменим сигнатуру, т. е. будем брать в p^2 нулевую компоненту 4-вектора p с положительным знаком.

(i) Выполняются постулаты квантования в смысле § 1.4, т. е. состояния физических систем могут быть представлены элементами некоторого пространства с индефинитной метрикой H, определенного как в § 1.4, причем (квази)наблюдаемым соответствуют самосопряженные операторы в H.

(ii) Теория инвариантна относительно всех необходимых преобразований симметрии.

(iii) Спектр энергии-импульса и соответствующая система состояний „разумны".

(iv) Теория локальна.

(v) Выполняется асимптотическое условие.

Таким образом, пока видоизменено только положение (i). Положение (ii) охватывает группу Пуанкаре как наиболее важный случай преобразований, откуда следует существование инфинитезимальных операторов сдвига P_μ таких, что

$$\begin{aligned} &[P_\mu, P_\nu] = 0, \quad P_i^* = P_i, \quad P_0^* = P_0, \\ &[P_\mu, F(x)] = i\partial_\mu F(x), \end{aligned} \tag{4.0}$$

для любого оператора поля $F(x)$. Коммутативность P_μ приводит к обычной системе состояний. Мы принимаем эту систему в качестве базиса, порождающего пространство H (условие спектральности).

Что касается положения (iii), то оно будет расшифровываться в дальнейшем.

Упомянем только, что в связи с пропагаторами нам придется рассмотреть случаи

(a) комплексных собственных значений,

(b) вещественных собственных состояний с отрицательным квадратом нормы.

Фактически мы будем требовать следующее.

(iiia) Существует единственное инвариантное состояние $|0\rangle$, $\langle 0|0\rangle = 1$, соответствующее собственному значению $p_\mu = 0$ и называемое состоянием вакуума.

(iiib) Все прочие собственные значения оператора P_μ лежат внутри верхнего светового конуса.

(iiic) Нет собственных состояний с отрицательным квадратом нормы.

Касаясь условия (iiia), отметим, что одним из интереснейших результатов, полученных аксиоматическими методами в теории поля с индефинитной метрикой, является доказанное Рее и Шлидером [1962] утверждение, что (iiia) можно получить при тех же предположениях, что и в обычной теории поля (Борхерс [1962]), отказавшись лишь от требования дефинитности метрики. Далее, в (iiib — c) состояния с нулевой нормой и их мультипольные духи определенно не исключаются, и нашей главной задачей будет изучение влияния этих состояний. Что касается положительных собственных значений, следует иметь в виду осцилляторы из § 2.1, где было показано, что, хотя знаки средних значений собственных чисел и могут меняться, знак собственных значений все время остается неизменным.

Положение (iv) мы принимаем без изменений; положение (v) будет надлежащим образом обобщено на случай мультипольных духов.

В заключение главы мы рассмотрим при этих положениях теории поля с индефинитной метрикой, которые вероятностно интерпретируемы в силу условия (i) § 3.3. Для этого и были введены рассмотренные выше положения.

4.1. Спектральное представление пропагаторов

Функции Грина играют центральную роль в вычислительных методах теории поля, и поэтому мы рассмотрим здесь различные возможные вклады в пропагаторы, возникающие из-за нефизических состояний. Для удобства возьмем простейший пропагатор

$$\langle 0 \,|\, A(x),\ B(x) \,|\, 0\rangle \qquad (\Delta^{(+)'} \text{ или } S^{(+)'}).$$

Мы не всегда будем выписывать индексы $(+), \ldots,$ так как соотношения между пропагаторами разного рода останутся такими же, как и в обычной теории.

В соответствии с общими выводами гл. 1 возможны два случая:

(i) система собственных функций P_μ полна;

(ii) эта система не полна.

Рассмотрим сначала случай (i). Здесь также имеются две возможности:

(a) все собственные значения P_l, P_0 вещественны,

(b) некоторые из этих собственных значений комплексны.

Обратимся сначала к случаю (a).

В силу невырожденности метрики всегда можно ортонормировать собственные векторы, соответствующие собственному значению p_μ, на ± 1. В самом деле, если по крайней мере один собственный вектор $|\,p\rangle^0$ имеет нулевую норму, то в предположении невырожденности метрики всегда можно найти хотя бы один вектор $|p\rangle'$, не ортогональный к $|p\rangle^0$. В соответствии с (1.2) $|p\rangle'$ должен отвечать тому же собственному значению p_μ. Комбинируя эти два вектора, всегда можно построить два ортогональных собственных вектора с нормами $+1$ и -1. Процедура ортонормирования не может оборваться, так как мы предположили невырожденность метрики. Теперь, учитывая, что в данном случае разложение единицы будет иметь вид

$$\sum |p, \alpha\rangle (\pm 1) \langle p, \alpha|$$

(здесь α обозначает прочие индексы, определяющие состояние), получаем, как обычно,

$$\Delta^{(+)'} = \langle 0 | \varphi(x) \varphi(x') | 0 \rangle = \int \rho(\varkappa^2) \Delta^+ (x - x'; \varkappa^2)\, d\varkappa^2,$$

где теперь, однако,

$$\rho(\varkappa^2) \gtrless 0.$$

Если существует одночастичное состояние стабильной частицы $p^2 = \mu^2$ с нормой ± 1, то, конечно, $\rho = \pm \delta(\varkappa^2 - \mu^2) + \sigma(\varkappa^2)$.

Рассмотрим теперь случай (b) и фиксированное комплексное собственное значение p. Соответствующий собственный вектор $|p\rangle$ в силу (1.1) имеет нулевую норму. В предположении невырожденности метрики необходимо существует по крайней мере один вектор, не ортогональный к $|p\rangle$. Согласно (1.1) он отвечает собственному значению p^*. Таким образом, если метрика невырождена, то и p и p^* являются собственными значениями. Оператор проектирования на соответствующее подпространство имеет вид (ср. (1.16))

$$P \sim \frac{|p\rangle \langle p_*|}{\langle p_* | p\rangle} + \frac{|p_*\rangle \langle p|}{\langle p | p_*\rangle},$$

где $P_\mu |p_*\rangle = p^*_\mu |p_*\rangle$ и в силу комплексности p пропагатор Δ' будет такого типа, как для нестабильной частицы.

В случае (ii) существуют те же две возможности (a) и (b). Рассматривая только вещественные собственные значения (Надь [1960 b, 1961]), в силу (1.9) получаем, что обязательно существует хотя бы один собственный вектор с нулевой нормой:

$$(P_\mu - p_\mu)|p\rangle = 0, \quad \langle p|p\rangle = 0, \quad p_\mu^2 > 0, \quad p_0 > 0. \tag{4.1}$$

Чтобы сделать векторное пространство полным, приходится добавить состояние типа (1.9) (дипольный дух), определяемый соотношениями

$$(P_\mu - p_\mu)|pD\rangle = c_\mu|p\rangle, \quad \langle pD|pD\rangle = 0, \tag{4.2}$$

где в силу релятивистской инвариантности

$$c_\mu = f(p^2)\,p_\mu, \tag{4.3}$$

что, очевидно, является релятивистским обобщением определения дипольного духа. В силу невырожденности метрики

$$\langle pD|p'\rangle = a(p^2)\,\delta_{pp'}, \quad a \neq 0, \tag{4.4}$$

но так как оба вектора имеют нулевую норму, в выборе f и a допускается определенный произвол. Тем не менее fa вещественно, ибо $\langle pD|P|pD\rangle$ должно быть вещественным. В этом случае оператор проектирования на соответствующее подпространство имеет вид

$$P = \sum\left\{\frac{|pD\rangle\langle p|}{a^*} + \frac{|p\rangle\langle pD|}{a}\right\} \tag{4.5}$$

и, значит, вклад этих состояний в Δ' равен

$$\Delta' \sim \left\{\langle 0|A(x)|pD\rangle\frac{1}{a}\langle p|B(x')|0\rangle + \right.$$
$$\left. + \langle 0|A(x)|p\rangle\frac{1}{a^*}\langle pD|B(x')|0\rangle\right\}.$$

Из (4.0) и (4.1), как обычно, получаем

$$\langle 0|A(x)|p\rangle = \langle 0|A(0)|p\rangle\,e^{ipx}. \tag{4.6}$$

Но в силу (4.0) и (4.2)

$$\langle 0|A(x)|pD\rangle =$$
$$= \{\langle 0|A(0)|pD\rangle - ic_\mu x_\mu\langle 0|A(0)|p\rangle\}\,e^{ipx}, \tag{4.7}$$

откуда видна необычная зависимость от x, наблюдавшаяся уже в модели Ли (2.61) и теории Гейзенберга.

Подставляя матричные элементы в выражение для Δ', получаем

$$\Delta'(x-x') = \sum e^{ip(x-x')}\left\{\langle 0\,|A(0)\,|\,pD\rangle \frac{1}{a^*}\langle p\,|\,B(0)\,|\,0\rangle + \right.$$
$$\left. + \langle 0\,|\,A(0)\,|\,p\rangle \frac{1}{a}\langle p\,|\,B(0)\,|0\rangle\right\} +$$
$$+ \sum ip_\mu(x-x')_\mu\, e^{ip(x-x')}\left\{\frac{fa}{a^*a}\langle 0\,|\,A(0)|\,p\rangle\langle p|\,B(0)|\,0\rangle\right\}. \tag{4.8}$$

Здесь из-за соображений инвариантности случаи скалярных (псевдоскалярных) бозонов и фермионов приходится рассматривать отдельно. В первом случае, когда $A(x)=B(x)=\varphi(x)$, вводя спектральные плотности

$$\rho_1(-p^2) = \frac{1}{a^*}\sum\langle 0\,|\,\varphi(0)\,|\,pD\rangle\langle p\,|\varphi(0)\,|0\rangle + \text{компл. сопр.} \tag{4.9}$$

и

$$\rho_2(-p^2) = \frac{fa}{a^*a}\sum\langle 0\,|\varphi(0)\,|\,p\rangle\langle p|\,\varphi(0)|\,0\rangle, \tag{4.10}$$

получаем

$$\Delta'(x) = \int\{\rho_1(\varkappa^2)\,\Delta(x;\,\varkappa^2) + \rho_2(\varkappa^2)\,x_\mu\partial_\mu\Delta(x;\,\varkappa^2)\}\,d\varkappa^2. \tag{4.11}$$

По определению ρ_1 и ρ_2 будут вещественными, но не положительно определенными функциями, $\operatorname{sign}\rho_2 = \operatorname{sign} fa$. Переходя к импульсному представлению и используя тождество после формулы (2.35), находим

$$\Delta'(p) = \int\left(\rho_1'(\varkappa^2)\frac{1}{p^2-\varkappa^2} + \rho_2'(\varkappa^2)\frac{\varkappa^2}{(p^2-\varkappa^2)^2}\right)d\varkappa^2,$$

где

$$\rho_1' = \rho_1 - 2\rho_2, \qquad \rho_2' = -2\rho_2$$

— снова функции, не являющиеся положительно определенными.

В случае фермионов с $A(x)=\psi(x)$, $B(x)=\bar\psi(x)$ в силу требований инвариантности необходимо приравнять суммы в (4.9) и (4.10) выражениям

$$-\left[\left(i\gamma_\mu p_\mu - \sqrt{-p_\mu^2}\right)\rho_1(-p_\mu^2) + \rho_2(-p_\mu^2)\right]$$

и

$$-\left[\left(i\gamma_\mu p_\mu - \sqrt{-p_\mu^2}\right)\rho_3(-p_\mu^2) + \rho_4(-p_\mu^2)\right]$$

соответственно. Подставляя эти выражения, получаем окончательно

$$S'(x) = \int [S(x;\,\varkappa^2)\,\rho_1(\varkappa^2) + \Delta(x;\,\varkappa^2)\,\rho_2(\varkappa^2) + \\ + x_\mu\partial_\mu\{S(x;\,\varkappa^2)\,\rho_3(\varkappa^2) + \Delta(x;\,\varkappa^2)\,\rho_4(\varkappa^2)\}]\,d\varkappa^2. \quad (4.12)$$

Каждая из функций ρ_i вещественна, но может быть отрицательной, и неравенства Лемана

$$0 \leqslant \rho_2(\varkappa^2) \leqslant 2\varkappa\rho_1(x^2)$$

могут нарушаться. Налагая добавочное условие инвариантности Тушека $\rho_2 \equiv \rho_4 \equiv 0$ и определяя надлежащим образом ρ_1, ρ_3, получаем

$$S(x) = \int \{\rho_1(\varkappa^2) + \rho_3(\varkappa^2)\,x_\mu\partial_\mu\}\,\gamma_\nu\partial_\nu\Delta(x;\,\varkappa^2)\,d\varkappa^2.$$

Поскольку

$$x_\mu\partial_\mu S(x;\,\varkappa^2) = -2S(x;\,\varkappa^2) - i\gamma_\mu\partial_\mu\Delta(x;\,\varkappa^2) - \\ - 2\varkappa^2 \int \frac{\gamma k + i\varkappa}{(k^2 - \varkappa^2)^2}\,e^{ikx}\,dk,$$

легко найти фурье-образы этих пропагаторов. Следует отметить, что пропагатор теории Гейзенберга (2.32) при некоторых дополнительных ограничениях на ρ, частично наложенных в последних работах (Гейзенберг, Дюрр и др. [1959], Секин [1962], Ариф уз-Заман [1960]) как раз соответствует дипольному случаю.

Вклад, соответствующий трипольным духам, также легко вычисляется (Надь [1960c]). В этом случае мы имеем набор состояний

$$\begin{aligned} &(P_\mu - p_\mu)|\,p\rangle = 0, && \langle p\,|\,p'\rangle = 0, \quad p^2 > 0, \quad p_0 > 0, \\ &(P_\mu - p_\mu)|\,Dp\rangle = c_\mu\,|\,p\rangle, && \langle Dp\,|\,Dp'\rangle = \varepsilon\delta_{pp'}, \qquad (4.13) \\ &(P_\mu - p_\mu)|\,Tp\rangle = C_\mu\,|\,Dp\rangle, && \langle Tp\,|\,Tp'\rangle = 0. \end{aligned}$$

Здесь в силу релятивистской инвариантности

$$c_\mu = f(p^2)\,p_\mu, \quad C_\mu = g(p^2)\,p_\mu, \quad C_\mu c_\nu = C_\nu c_\mu. \quad (4.14)$$

Вследствие индефинитности метрики $\varepsilon = \pm 1$. Состояния $|\,p\rangle$ и $|\,Tp\rangle$ не ортогональны:

$$\langle Tp\,|\,p'\rangle = a\delta_{pp'},$$

но $|\,Dp\rangle$ ортогонально к $|\,p\rangle$ и к $|\,Tp\rangle$.

В соответствии с общими результатами из уравнений, определяющих состояния, получаем

$$\langle Tp \,|(P_\mu - p_\mu)|\, Dp\rangle = c_\mu \langle Tp \,|\, p\rangle.$$

Таким образом,

$$g(p^2)\,\varepsilon = f^*(p^2)\,a^*.$$

Оператор проектирования на соответствующее подпространство имеет вид (ср. (1.15))

$$P = \sum \left\{ |\,Dp\rangle \frac{1}{\varepsilon} \langle Dp\,| + |\,p\rangle \frac{1}{a} \langle Tp\,| + |\,Tp\rangle \frac{1}{a^*} \langle p\,| \right\},$$

и вклад этих состояний в Δ' для скалярных полей составит

$$\Delta' \sim \sum \Big\{ \langle 0\,|\varphi(x)|\,Dp\rangle \frac{1}{\varepsilon} \langle Dp\,|\varphi(x')\,|0\rangle + \\ + \langle 0\,|\varphi(x)\,|\,p\rangle \frac{1}{a} \langle Tp\,|\varphi(x')|\,0\rangle + \\ + \langle 0\,|\varphi(x)|\,Tp\rangle \frac{1}{a^*} \langle p\,|\,\varphi(x')|\,0\rangle \Big\}.$$

Матричные элементы для собственных состояний и дипольных духов те же, что и прежде, а для трипольного духа

$$\langle 0|\,\varphi(x)|\,Tp\rangle = \Big\{ \langle 0|\,\varphi(0)\,|Tp\rangle + \\ + iC_\mu x_\mu \Big(\langle 0|\,\varphi(0)\,|Dp\rangle + \frac{ic_\lambda x_\lambda}{2} \langle 0|\,\varphi(0)\,|\,p\rangle \Big) \Big\} e^{ipx}.$$

Подставляя эти матричные элементы и вновь налагая условия релятивистской инвариантности, получаем

$$\Delta'(x) \sim \int \{\Delta(x;\ \varkappa^2)\,\rho_1(\varkappa^2) + x_\mu \partial_\mu \Delta(x;\ \varkappa^2)\,\rho_2(\varkappa^2) + \\ + x_\mu x_\gamma \partial_\mu \partial_\gamma \Delta(x;\ \varkappa^2)\,\rho_3(\varkappa^2)\}\, d\varkappa^2,$$

где снова использовано равенство $g\varepsilon = f^* a^*$. Каждая из функций ρ_i вещественна и может быть отрицательной. Переходя к фурье-образам, получаем

$$\Delta'(p) \sim \int \rho_1(\varkappa^2) \frac{1}{p^2 - \varkappa^2}\, d\varkappa^2 + \int \rho_2(\varkappa^2) \frac{\varkappa^2}{(p^2 - \varkappa^2)^2}\, d\varkappa^2 + \\ + \int \rho_3(\varkappa^2) \frac{\varkappa^4}{(p^2 - \varkappa^2)^3}\, d\varkappa^2.$$

Аналогично можно вычислить вклады, соответствующие духам более высоких порядков. При этом в x-пространстве появляются произведения новых производных Δ на расстояние, которым в импульсном пространстве соответствуют высшие степени $p^2-\varkappa^2$ в знаменателе.

В случае неполной системы собственных функций с комплексными собственными значениями появляются еще и пропагаторы такого типа, как для нестабильных частиц с возрастающими степенями в знаменателях.

Вернемся к случаю мультипольного духа. В соответствии с (4.9) или (4.10) спектральные функции будут, как и в обычном случае, комбинациями матричных элементов. Поэтому помимо того, что они могут быть отрицательными, их поведение определяется плотностями состояний. Поэтому для одночастичных состояний они имеют лишь особенности типа δ-функций (а не δ' и ее высших производных), а для непрерывного спектра являются гладкими функциями своих аргументов. Следовательно, наиболее общая форма функции Грина в импульсном пространстве для скалярных полей в теориях с мультиполями порядка не выше M такова:

$$\Delta'_F(k^2)=\sum_{n=1}^{M}\int\limits_0^\infty \frac{\rho_n(m^2)}{(k^2-m^2+i\varepsilon)^n}\,dm^2; \tag{4.15}$$

здесь ρ_n — вещественные функции, не являющиеся положительно определенными; они имеют δ-образные особенности для одночастичных состояний, а в остальном (для непрерывного спектра) являются гладкими.

Отсюда вытекает дисперсионное соотношение для Δ'_F. В самом деле, рассмотрим функцию комплексного переменного ξ

$$\Delta'_F(\xi)=\sum_{n=1}^{M}\int\limits_0^\infty \frac{\rho_n(m^2)}{(\xi-m^2)^n}\,dm^2, \tag{4.16}$$

для которой

$$\lim_{\xi\to k^2+i\varepsilon}\Delta'_F(\xi)=\Delta'_F(k^2).$$

Так как все ρ_i вещественны, то, как обычно,

$$(\Delta'_F(\xi))^* = \Delta'_F(\xi^*).$$

Эта функция аналитична всюду, кроме вещественной оси, где она может иметь полюсы до M-го порядка и разрезы, соответствующие непрерывному спектру. Из известного символического тождества

$$\frac{1}{(\xi'-\xi+i\varepsilon)^{n+1}} = P\frac{1}{(\xi'-\xi)^{n+1}} - i\pi\frac{(-1)^n}{n!}\delta^{(n)}(\xi'-\xi)$$

следует, что

$$\operatorname{Im}\Delta'_F(k^2+i\varepsilon) = -\pi\sum_{n=1}^{M}\frac{(-1)^{n-1}}{(n-1)!}\rho_n^{(n-1)}(k^2). \qquad (4.17)$$

Последнее выражение равно также скачку функции $\Delta'_F(\xi)$ на вещественной оси, умноженному на $2i$,

$$\Delta'_F(k^2+i\varepsilon) - \Delta'_F(k^2-i\varepsilon) = 2i\operatorname{Im}\Delta'_F(k^2+i\varepsilon).$$

Найдя $\rho_1(k^2)$ из (4.17) и подставив его в (4.15), после интегрирования по частям получим дисперсионное соотношение в обычной форме

$$\Delta'_F(k^2) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{\operatorname{Im}\Delta'_F(k'^2)}{k'^2-k^2-i\varepsilon}\,dk'^2. \qquad (4.18)$$

Итак, обобщение предположений в вышеизложенной форме не нарушает справедливости такого важного соотношения. Попутно здесь может возникнуть явление естественного вычитания, неявно заложенного в самих предположениях. Это наверняка имеет место при подходящих функциях ρ, так как они не обязаны быть положительно определенными. Такое изменение может привести к тому, что будет иметь смысл простое дисперсионное соотношение, в то время как при обычных предположениях иногда потребовалось бы вычитание.

Прежде чем обратиться к изучению дисперсионных соотношений для амплитуд рассеяния, мы хотели бы рассмотреть некоторые типы пропагаторов, полученные в реальных теориях в тех или иных разумных приближениях. Например, в соответствии с результатами Челлена — Лемана мезонный пропагатор в теории, не содержащей духов, должен иметь форму

$$\Delta'_F = \frac{1}{p^2 - \varkappa^2} + \int \frac{\sigma(\varkappa^2)\, d\varkappa^2}{p^2 - \varkappa^2 + i\varepsilon},$$

где $\sigma(\varkappa^2)$ — вещественная положительная функция при $0 < \varkappa_0^2 < \varkappa^2 < \infty$. Поэтому пропагатор имеет полюс при $p^2 = \varkappa^2$ и линию ветвления, идущую из $\varkappa_0^2$ в $+\infty$. Применяя известное приближение, в котором рассматриваются только те диаграммы для мезонного пропагатора, которые могут быть представлены включением произвольного числа нуклонных петель второго порядка, можно получить выражение для Δ'_F, имеющее дополнительный полюс. Отмечалось, что Δ'_F, полученное таким образом, можно записать в виде суммы „хорошей" (в смысле теоремы Челлена — Лемана) части и некоторого добавочного члена. Последний называется духовым вкладом (Феррари и Иона-Лазинио [1958, 1960], Редмонд [1958], Редмонд и Урецкий [1958], Боголюбов и др. [1959]). Причиной появления этого вклада (ибо точное решение, конечно, неизвестно) может быть одно из трех:

(i) он является следствием теории поля;

(ii) точное решение в обычной теории поля не определено, так что можно добавить новые постулаты, которые устранят ненужный вклад;

(iii) этот вклад появляется в результате плохого приближения.

Случаи (ii) и (iii), когда с помощью надлежащей процедуры духовый вклад может быть устранен, не представляют для нас интереса. В случае (i) мы предположительно имеем дело с индефинитной метрикой. В этом случае, если неприятный вклад будет исключен, то пропагатор, полученный таким образом, будет отвечать теории поля, отличающейся от исходной [1]). В связи с последней возможностью Медведев и Поливанов [1959] (см. также Огимото и Ямамото [1960]) показали для одиночного духа в модели Ли,

[1]) Весьма существенно, что новая теория, которой будет отвечать модифицированный пропагатор, оказывается нелокальной. — *Прим. ред.*

что, исключая из пропагатора духовый вклад, можно получить новый пропагатор, соответствующий гамильтониану с функцией обрезания $f(\omega)$, для которого противоречие типа (2.43) не возникает, т. е.

$$|c| = \frac{g^2}{g_0^2} = 1 - g^2 \int \frac{f(\omega)\, k^2\, dk}{2\omega (E - \omega)} > 0.$$

4.2. Дисперсионные соотношения

Наряду с принципами соответствия, основанными на теоретико-групповом подходе, дисперсионные соотношения до сих пор являются единственными точными соотношениями в любой настоящей теории поля. Поэтому рассмотрим влияние модифицированных предположений на дисперсионные соотношения для амплитуд рассеяния.

Мы остановимся только на тех соотношениях, которые могут быть выведены из основных предположений, так что представления Мандельштама не будут рассматриваться. При таких ограничениях нам кажется достаточным рассмотреть рассеяние вперед, из которого уже можно будет заключить об основном характере изменений. Инструментом нам будет служить LSZ-формулировка аксиоматической теории, а дисперсионные соотношения будут рассмотрены в свете обзорных статей Лемана [1959] и Тирринга [1959].

Для определенности при формулировке асимптотических и спектральных условий мы явно пользуемся моделью Фруассара. Впрочем, мы увидим, что это ограничение несущественно.

Итак, мы будем рассматривать взаимодействие четырех полей (Надь [1962]): мезонного поля φ (массы m), нуклонного ψ (массы M) (которое ради простоты считается скалярным), взаимодействующих между собой и с полями Фруассара A и B (массы μ) из § 2.10. Таким образом, мы имеем две полные системы состояний — in- и out-состояния — $\left| N_\varphi, N_\psi, N_A, N_B, {}^{\text{in}}_{\text{out}} \right\rangle$, которые характеризуются числом различных частиц и операторами поля $\varphi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}$, $\psi_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}$, $A_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}$, $B_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}$. Операторы

$A_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}$ и $B_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}$ определяются подстановкой в (2.33) $a_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}$ и $b_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}$ вместо a и b, удовлетворяющих (2.34). Условие причинности и асимптотическое условие имеют обычный вид для всех полей (φ, ψ, A, $B \to \Omega$):

$$[\Omega_i(x), \Omega_j(x')] = 0 \text{ для пространственно-подобных } x - x',$$

$$\lim_{t \to \mp\infty} \langle \alpha | \Omega^\alpha(t) - \Omega^\alpha_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}(t) | \beta \rangle = 0, \tag{4.19}$$

где $\Omega^\alpha(t)$ — оператор поля, усредненный по некоторому объему с нормируемым решением уравнений поля. В силу (4.0) для любого оператора поля

$$[P_\mu, \Omega] = i\partial_\mu \Omega, \quad \left[P_\mu, \Omega_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}\right] = i\partial_\mu \Omega_{\substack{\text{in}\\\text{out}}}.$$

Теперь как следствие теоремы (i) § 3.3 легко получаем, что переход в нефизические состояния отсутствует. В самом деле, пусть состояние системы описывается нормированным вектором $| N_\varphi, N_\psi, 0, 0; \text{in}\rangle$. Это состояние, представленное через out-состояния, имеет в общем случае вид

$$| N_\varphi, N_\psi, 0, 0; \text{in}\rangle =$$
$$= \sum c(N'_\varphi, N'_\psi, N'_A, N'_B; \text{out}) | N'_\varphi, N'_\psi, N'_A, N'_B; \text{out}\rangle.$$

Левая часть является собственным состоянием энергии, в то время как правая будет таковым лишь при условии $N'_B = 0$ (см. (4.0), (2.37)). Но тогда

$$\langle N_\varphi, N_\psi, N_A, 0 | N'_\varphi, N'_\psi, N'_A, 0\rangle = 0 \text{ при } N'_A \neq 0.$$

Таким образом,

$$\langle N_\varphi, N_\psi, 0, 0; \text{in} | N_\varphi, N_\psi, 0, 0; \text{in}\rangle = 1 =$$
$$= \sum | c(N_\varphi, N_\psi, 0, 0) |^2. \tag{4.20}$$

S-матрица, определяемая равенствами

$$S_{\alpha, \beta} = \langle \alpha; \text{in} | S | \beta; \text{in}\rangle = \langle \alpha; \text{out} | \beta; \text{in}\rangle, \tag{4.21}$$

обладает матричными элементами отличными от нуля между состояниями, содержащими только реальные мезоны и нуклоны, и поэтому вследствие (4.20) сохраняет норму. В силу этого свойства выполняется оптическая теорема для амплитуды рассеяния вперед в реальных процессах, как мы уже видели в § 3.3:

$$\sigma_t = \frac{4\pi}{k} \operatorname{Im} T(k_0), \quad k_0 > m.$$

Чтобы вывести из рассмотренных свойств теории дисперсионные соотношения для амплитуды рассеяния вперед $T(k_0)$, например, в простейшей форме

$$\operatorname{Re} T(k_0) = \frac{P}{\pi} \int_0^\infty \operatorname{Im} T(k_0') \left[\frac{1}{k_0' - k_0} + \frac{1}{k_0' + k_0}\right] dk_0',$$

надо исследовать лишь свойства $\operatorname{Im} T(k_0)$ в нефизической области. Как обычно,

$$\operatorname{Im} T(k_0) = \frac{1}{2} \int dx e^{ikx} \langle p_0 | \left[j\left(\frac{x}{2}\right), j\left(\frac{-x}{2}\right)\right] | p_0 \rangle, \tag{4.22}$$

где

$$(\Box + \mu^2)\varphi(x) = j(x),$$

$$|p_0\rangle = |0, 1, 0, 0\rangle, \quad p_0 = \{M, 0, 0, 0\}.$$

Вставляя в матричный элемент единичный оператор, который в нашем случае равен

$$1 = |0\rangle\langle 0| + \sum_n \int dp |p, n\rangle\langle p, n| +$$
$$+ \sum_n \int dp (|p, nE\rangle\langle p, nD| + \text{Эрм. сопр.}), \tag{4.23}$$

где

$$|p, n\rangle = |N_\varphi, N_\psi, 0, 0\rangle, \quad |p, nE\rangle = |N_\varphi, N_\psi, 1, 0\rangle,$$
$$|p, nD\rangle = |N_\varphi, N_\psi, 0, 1\rangle,$$

можно найти мнимую часть $T(k)$. Состояния, содержащие более одной частицы A или B, были пока исключены из (4.23), и совершенно неважно, являются они in- или out-состояниями. Рассмотрение матричных элементов показывает, что от нефизической области возникают некоторые вклады. Из второго члена получаем обычный однонуклонный вклад

$$\operatorname{Im} T(k_0) = \frac{(2\pi)^4}{2} g^2 \delta\left(k_0 - \frac{m^2}{2M}\right).$$

Третий член с учетом (4.6) и (4.7) для j дает

$$\frac{2}{(2\pi)^4} \operatorname{Im} T(k_0) = \\ = \sum_n \int dp \Big\{ [\langle p_0 | j(0) | p, nE\rangle \langle p, nD | j(0) | p_0\rangle + \\ + \text{компл. сопр.}] - \frac{\lambda^2}{\mu^2} |\langle p_0 | j(0) | p, nE\rangle|^2 p_\mu \frac{\partial}{\partial p_\mu} \Big\} \times \\ \times \{\delta(k + p - p_0) - \delta(k - p + p_0)\}, \quad (4.24)$$

так же, как в предыдущем случае для пропагаторов. В нефизической области получаем вклад с

$$k_0 = \frac{-M^2 - m^2 + M_n^2}{2M},$$

если есть дипольный дух с надлежащим $M_n = p^2$.

Теперь нам придется различать два случая. Предположим сначала, что A и B — нуклоны. Тогда вследствие сохранения числа нуклонов представляются три возможности.

(i) Если $\mu > M + m$, то добавочные вклады вообще отсутствуют.

(ii) Если $M + m > \mu > M$, то в силу (4.24) имеем

$$\operatorname{Im} T(k_0) = \frac{(2\pi)^4}{2} \left(2 g_0 g_D + 3 \frac{\lambda^2}{\mu^2} g_0^2\right) \delta\left(k_0 - \frac{M^2 + m^2 - \mu^2}{2M}\right) + \\ + \frac{(2\pi)^4}{2} g_0^2 \frac{\lambda^2}{\mu^2} \left(2k_0 - \frac{\mu^2}{k_0}\right) \delta' \left(k_0 - \frac{M^2 + m^2 - \mu^2}{2M}\right),$$

где

$$M_n = \mu,$$
$$g_0 = \langle p_0 | j(0) | 0, 0, p, 0\rangle,$$
$$g_D = \langle p_0 | j(0) | 0, 0, 0, p\rangle.$$

(iii) Если $M > \mu$, то добавку в (4.24) в нефизической области дает целый континуум состояний. Эта добавка не может быть вычислена без дополнительной информации о свойствах взаимодействия и совсем не связана с экспериментальными сечениями. В случаях (i) и (ii) члены, опущенные в (4.23), не дают никакого вклада.

Если частицами Фруассара являются мезоны, то добавка отсутствует при $\mu > m$. При $\mu < m$ немедленно возникает ситуация (iii).

В заключение подчеркнем еще раз, что обращение к модели Фруассара не было необходимым. Мы использовали асимптотическое условие (4.19) лишь для физических полей при выводе явных выражений для $T(k)$ или $\operatorname{Im} T(\boldsymbol{k})$ (4.22) из редукционной формулы. Фактически требовалась только модификация условия спектральности, которая в рассмотренном выше случае дипольного духа сохраняет возможность вероятностной интерпретации, указывая в то же время на возможность добавочных вкладов в нефизической области.

Теперь мы проверим эти результаты на примере дипольного духа в точно решаемой модели Ли (Надь [1963]). Для этой модели метод дисперсионных соотношений применялся неоднократно (Гольдбергер и Трейман [1959], де Селлес и Фелдман [1959—1960], Амадо [1961]), но в каждой из этих статей появление духов исключалось функцией обрезания. В обозначениях Гольдбергера и Треймана [1959] матричные элементы $(N-\Theta)$-рассеяния равны

$$S_{\omega\omega'} = \langle N, \Theta_\omega, \text{out} \mid N, \Theta_{\omega'}, \text{in}\rangle =$$
$$= \delta(k-k') + 2\pi i \delta(\omega-\omega') \frac{1}{2\omega(2\pi)^3} \mathfrak{M}(\omega),$$

где

$$\mathfrak{M}(\omega) = i \int_{-\infty}^{+\infty} dt\, \Theta(-t) e^{-i\omega t} \langle N \mid [j, j^*(t)] \mid N\rangle,$$
$$j = \frac{g_0}{\sqrt{4\pi}} \psi_N^* \psi_V, \qquad j^*(t) = e^{iHt} \frac{-g_0}{\sqrt{4\pi}} \psi_V^* \psi_N e^{-iHt}. \tag{4.25}$$

В силу теоремы Титчмарша имеем дисперсионное соотношение

$$\mathfrak{M}(\omega) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\omega' \operatorname{Im} \mathfrak{M}(\omega')}{\omega' - \omega - i\varepsilon}.$$

Вклад в $\operatorname{Im}\mathfrak{M}(\omega)$, соответствующий состояниям рассеяния, приводит к обычному члену

$$\operatorname{Im}\mathfrak{M}(\omega)=\frac{1}{4\pi}(\omega^2-\mu^2)^{1/2}|\mathfrak{M}(\omega)|^2\Theta(\omega-\mu). \quad (4.26)$$

Вклад собственного состояния и дипольного духа в среднее значение

$$\langle N|jPj^*(t)|N\rangle,$$

где P дается выражением (2.59), равен в силу соотношений § 2.12

$$\langle N|jPj^*(t)|N\rangle=e^{iEt}\left(-\frac{g^2}{4\pi}+\frac{it}{2\pi h''(E)}\right). \quad (4.27)$$

Итак, из (4.26) и (4.27) получаем

$$\operatorname{Im}\mathfrak{M}(\omega)=-\frac{g^2}{4}\delta(\omega-E)+(h''(E))^{-1}\delta'(\omega-E)+\\+\frac{1}{4\pi}(\omega^2-\mu^2)^{1/2}|\mathfrak{M}(\omega)|^2\Theta(\omega-\mu).$$

Это полностью согласуется с результатами, полученными ранее для релятивистской теории поля. Заметим, что из-за отсутствия других однофермионных промежуточных состояний коэффициент при δ-функции вновь равен ренормированной константе связи, а коэффициент при δ'-функции является другим конечным параметром, характеризующим модель.

В заключение да позволено нам будет сказать, что, если дисперсионные соотношения не выполняются в некоторой теории в их обычной форме, то это может быть обусловлено нефизическими состояниями, даже если теория и допускает вероятностную интерпретацию. В этом случае, однако, нефизические состояния должны иметь специально подобранные собственные значения, которые обязательно дают вклады в нефизической области. Вклады духов в физической области запрещены в силу сохранения нормы, которое следует в данном случае мультипольных духов из сохранения энергии. Для одночастичных дипольных духов типичны вклады, пропорциональные δ и δ' (полюсы первого и второго порядков). Духи более высоких порядков могут давать в дисперсионных соотношениях также полюсы высших порядков. Однако вычеты в этих полюсах, вообще говоря, не совпадают с обычными константами связи.

Наконец, мы хотим отметить, что наше рассмотрение практически не затрагивает аксиоматических методов, понимаемых в более строгом смысле (формулировка Вайтмана, алгебраический подход и т. д.).

БИБЛИОГРАФИЯ

Амадо (Amado R. D.) [1961]: *Phys. Rev.*, **122**, 696.

Ариф уз-Заман (Arif-Uz-Zaman) [1960]: *Zeits. Naturf.*, **16a**, 225.

Аронс и др. (Arons M. E. et al.) [1965]: *Phys. Rev.*, **137**, 1085.

Асколи и Минарди (Ascoli R., Minardi E.) [1958a]: *Nucl. Phys.*, **9**, 242.

— — [1958b]: *Nuovo Cimento*, **8**, 951.

— — [1959]: *Nuovo Cimento*, **14**, 1254.

Бартон (Barton G.) [1960]: *Nuovo Cimento*, **17**, 864.

Барут и Маллен (Barut A. O., Mullen G. H.) [1962]: *Ann. of Phys.*, **20**, 203.

Бельинфанте (Belinfante F. J.) [1949]: *Phys. Rev.*, **76**, 226.

Блейлер (Bleuler K.) [1950]: *Helv. Phys. Acta*, **23**, 567.

Боголюбов Н. Н. [1958a]: CERN Conference Reports, 129.

Боголюбов Н. Н., Медведев Б. В. и Поливанов М. К. [1958b]: препринт № Р 176, Дубна; *Научные доклады высшей школы, сер. физ.-мат.*, **1**, 137.

Боголюбов Н. Н., Логунов А. А. и Ширков Д. В. [1959]: *ЖЭТФ*, **37**, 805.

Борхерс (Borchers H. J.) [1962]: *Nuovo Cimento*, **24**, 214.

Борхерс и др. [1963]: *Nuovo Cimento*, **29**, 148.

Бялыницкий-Бируля (Białynicki-Birula I.) [1959]: *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **7**, 77.

Вакс В. Г. [1959]: *ЖЭТФ*, **37**, 467.

Вентцель (Wentzel G.) [1942]: *Helv. Phys. Acta*, **15**, 111.

Вилларс (Villars F.) [1960]: Memorial volume to W. Pauli, New York; русский перевод в сб. «Теоретическая физика 20 века», ИЛ, 1962.

Де Витт (De Witt B. S.) [1955]: *Phys. Rev.*, **100**, 905.

Гайтлер (Heitler W.) [1955]: Quantum Theory of Radiation, Oxford; русский перевод: Гайтлер В., Квантовая теория излучения, ИЛ, 1956.

Гейзенберг (Heisenberg W.) [1957a]: *Nucl. Phys.*, **4**, 532; русский перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля», ИЛ, 1959.

— [1957b]: *Rev Mod. Phys.*, **29**, 269; русский перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля».

Гейзенберг, Дюрр и др. (Durr H. P., Heisenberg W. et al.) [1959]: *Zeits. Naturf.*, **14a**; 441; русский перевод в сб. «Нелинейная квантовая теория поля».

Гинзбург Ю. П. и Иохвидов И. С. [1962]: *УМН*, **17**, 3.

Глазер (Glaser V.) [1958]: *Nuovo Cimento*, **9**, 990.
Глазер и Челлен (Källén G.) [1956]: *Nucl. Phys.*, **2**, 706.
Гольдбергер и Трейман (Goldberger M. L., Treiman S. B.) [1959]: *Phys. Rev.*, **113**, 1663.
Гольдштейн (Goldstein J. S.) [1958]: *Nuovo Cimento*, **9**, 504.
Гупта (Gupta S. N.) [1950]: *Proc. Phys. Soc.*, **A63**, 681.
— [1951]: *Proc. Phys. Soc.*, **A64**, 695.
— [1952]: *Proc. Phys. Soc.*, **A65**, 161, 608.
— [1953]. *Proc. Phys. Soc.*, **A66**, 129.
— [1957]: *Canad. J. Phys.*, **35**, 961.
Деннери и Кролл (Dennery P., Kroll N.) [1960]: *Nucl. Phys.*, **21**, 276.
Дирак (Dirac P. A. M. M.) [1943]: Comm. Dublin Inst. Adv. Studies, A, 1.
Иокояма (Yokoyama K.) [1961]: *Progr. Theor. Phys.*, **26**, 131, 272.
— [1962]: *Progr. Theor. Phys.*, **27**, 373.
Калоджеро (Calogero F.) [1962]: *Nuovo Cimento*, **24**, 614.
Камефучи (Kamefuchi S.) [1964]: *Nuovo Cimento*, **33**, 1639.
Киббл и Полкингхорн (Kibble T. W. V., Polkinghorne J. S.) [1958]: *Nuovo Cimento*, **10**, 417.
Кониси и Огимото (Konisi G., Ogimoto T.) [1958]: *Progr. Theor. Phys.*, **20**, 868.
— — [1959]: *Progr. Theor. Phys.*, **21**, 727.
Лангер (Langer H.) [1962]: *Math. Ann.*, 146, 60.
Ландау Л. Д. и Померанчук И. Я. [1955]: *ДАН СССР*, **102**, 489.
Леман (Lehmann H.) [1954]: *Nuovo Cimento*, **11**, 342.
— [1959]: *Suppl. Nuovo Cimento*, **14**, 153.
Ли (Lee T. D.) [1954]: *Phys. Rev.*, **95**, 1329.
Лопушанский (Lopuszanski J.) [1959]: *Physica*, **25**, 745; в работе приведена обширная библиография.
Лоухиваара (Louhivaara I. S.) [1958]: *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, A. 1., 252.
Ма (Ma S. T.) [1949]: *Phys. Rev.*, **75**, 535.
Максимов Л. А. [1959]: *ЖЭТФ*, **36**, 465.
Мальцев А. И. [1956]: Основы линейной алгебры, М., Гостехиздат.
Марков М. А. [1959]: *Nucl. Phys.*, **10**, 140.
Марков М. А. и Комар А. А. [1959]: *Nucl. Phys.*, **12**, 190.
Матида (Machida S.) [1955]: *Progr. Theor. Phys.*, **14**, 407.
Медведев Б. В. и Поливанов М. К. [1958]: препринт № Р 184, Дубна; *Научные доклады высшей школы, сер. физ.-мат.*, 1, 203.
— — [1959]: *ДАН СССР*, **127**, 537.
Меттьюз (Matthews P. T.) [1949]: *Proc. Cambr. Phys. Soc.*, **45**, 441.
Мунаката (Munakata Y.) [1961]: *Progr. Theor. Phys.*, **27**, 361.

Надь (Nagy K. L.) [1958]: *Nuovo Cimento*, **10**, 1071.
— [1960a]: *Acta Phys. Hung.*, **11**, 193.
— [1960b]: *Nuovo Cimento*, **15**, 993.
— [1960c]: *Nuovo Cimento*, **17**, 384.
— [1961]: *Acta Phys. Hung.*, **13**, 21.
— [1962]: *Acta Phys. Hung.*, **14**, 15.
— [1963]: *Acta Phys. Hung.*, **15**, 199.
— [1964]: *Acta Phys. Hung.*, **17**, 97.
Надь и Ржевусский (Rzewuski J.) [1959]: *Bull. Acad. Polon. Sci.*, **7**, 93.
Неванлинна (Nevanlinna R.) [1952]: *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, A. I., 108, 113, 115.
— [1956]: *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, A. I., 222.
Огимото и Ямамото (Ogimoto T., Yamamoto Y.) [1960]: *Progr. Theor. Phys.*, **23**, 218.
Паис и Уленбек (Pais A., Uhlenbeck G. E.) [1950]: *Phys. Rev.*, **79**, 145.
Пандит (Pandit L. K.) [1959]: *Suppl. Nuovo Cimento*, **11**, 157.
Паули (Pauli W.) [1943]: *Rev. Mod. Phys.*, **15**, 175.
Померанчук И. Я. [1956]: *Nuovo Cimento*, **3**, 1186.
Редмонд (Redmond P. J.) [1958a]: *Phys. Rev.*, **112**, 1404.
— [1958b]: *Phys. Rev. Lett.*, **1**, 398.
Редмонд и Урецкий (Uretsky F. L.) [1958]: *Phys. Rev. Lett.*, **1**, 147.
Рее и Шлидер (Reeh H., Schlieder S.) [1962]: *Nuovo Cimento*, **26**, 32.
Рехенберг и Лагалли (Rechenberg H., Lagally K.) [1961]: Einführung in die Theorie der Elementarteilchen, Lecture notes on Sommersemester von Prof. W. Heisenberg, München.
Секин (Sekine K.) [1962]: *Cahier de Physique*, **143**, 261.
Де Селлес и Фелдман (De Selles P., Feldman G.) [1959/1960]: *Nucl. Phys.*, **14**, 517.
Симодаира (Shimodaira H.) [1960]: *Nucl. Phys.*, **17**, 486.
Скарфоне и Мак-Кинли (Scarfone L. M., MacKinley W. A.) [1960]: *Nuovo Cimento*, **17**, 678.
Славнов Д. А. и Суханов А. Д. [1959]: *ЖЭТФ*, **36**, 1472.
Солт (Solt G.) [1962]: Неопубликованная диссертация.
Сударшан (Sudarshan E. C. G.) [1961]: *Phys. Rev.*, **123**, 2183.
Танака (Tanaka S.) [1962]: *Progr. Theor. Phys.*, **27**, 221.
— [1963]: *Progr. Theor. Phys.*, **29**, 104.
Теодорович Е. В. [1959]: *ДАН СССР*, **126**, 1236.
Тирринг (Thirring W. E.) [1958]: *Ann. Phys.*, **9**, 91.
— [1959]: *Suppl. Nuovo Cimento*, **14**, 385.
Ульманн (Uhlmann A.) [1959a]: *Nucl. Phys.*, **9**, 588.
— [1959b]: *Nucl. Phys.*, **12**, 103.
— [1959c]: *Wiss. Zeits. Univ. Jena*, **8**, 361.

Умезава и др. (Umezawa et al.) [1956]: *Nuovo Cimento*, **3**, 772.
Феррари и Иона-Лазинио (Ferrari E., Jona-Lasinio G.) [1958]: *Nuovo Cimento*, **10**, 310.
— — [1960]: *Nuovo Cimento*, **16**, 867.
Ферретти (Ferretti B.) [1959]: *Nuovo Cimento*, **12**, 393.
Филлипс (Phillips R. B. N.) [1955]: *Nuovo Cimento*, **1**, 822.
Форд (Ford K. W.) [1957]: *Phys. Rev.*, **105**, 320.
Фруассар (Froissart M.) [1959]: *Suppl. Nuovo Cimento*, **14**, 197.
Хааг (Haag R.) [1961]: Lectures in Theoretical Physics, Sommer Institute for Th. Phys., Boulder; New York.
Хебер (Heber G.) [1961]: Vorlesungen über ausgewählte Kapitel der Quantenfeldtheorie, Berlin.
Хорват (Horváth L.) [1962]: Неопубликованная диссертация.
Челлен (Källén G.) [1952]: *Helv. Acta*, **25**, 417.
— [1955]: CERN Publications T/Gk, **3**.
— [1956]: CERN Symposium, **2**, 187.
— [1957]: CERN Publications, 57—43.
— [1959]: *Suppl. Nuovo Cimento*, **14**, 105.
Челлен и Паули [1955]: *Mat. Phys. Medd.*, **30**, 7; русский перевод: *УФН*, **60** (1956), 425.
Шайбе (Scheibe E.) [1960]: *Ann. Acad. Sci. Fennicae*, A. 1., 294.
Швебер (Schweber S. S.) [1961]: An Introduction to Relativistic Quantum Field Theory, New York; русский перевод: Швебер С., Введение в релятивистскую квантовую теорию поля, ИЛ, 1963.
Шлидер (Schlieder S.) [1960]: *Zeits. Naturf.*, 15a, 448.
Шнитцер (Schnitzer J.) [1961]: *Phys. Rev.*, **123**, 2193.

УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

К. НАДЬ

Пространства состояний с индефинитной метрикой в квантовой теории поля

Редакторы *В. И. Авербух, Г. М. Ильичева*, Художник *А. Д. Смеляков*.
Художественный редактор *В. И. Шаповалов*
Технический редактор *Н. Д. Толстякова*

Сдано в производство 21/V 1969 г. Подписано к печати 2/IX 1969 г.
Бумага № 2 84×108[1]/32=2,13 бум. л. 7,14 печ. л. Уч.-изд. л. 5,83
Изд. № 1/4616. Цена 40 коп. Зак. 183. Темплан 1969 г. изд-ва „Мир", пор. № 25.

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР», Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР
Измайловский проспект, 29