М. НАГУМО

ЛЕКЦИИ ПО СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

近代的偏微分方程式論

大阪大学教授・理学博士
南　雲　道　夫
著

共立出版株式会社

М. НАГУМО

ЛЕКЦИИ ПО СОВРЕМЕННОЙ ТЕОРИИ УРАВНЕНИЙ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ

Перевод с японского

В. И. БУРЕНКОВА, Э. Э. ПЕЙСАХОВИЧ
и Э. Л. ПРЕСМАНА

Под редакцией

А. А. ДЕЗИНА

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва 1967

УДК 517.944

Эта небольшая книга, написанная видным японским специалистом, входит в серию „Современная математика", выпускаемую японским издательством „Кёрицу". В ней очень сжато рассмотрены важнейшие вопросы современной теории уравнений и систем уравнений эллиптического и гиперболического типа. В основе изложения лежит функционально-аналитический подход, который позволяет весьма отчетливо выделить принципиальные основы теории; в частности, широко применяется теория операторов в гильбертовом пространстве.

Книга, несомненно, будет полезна для всех, интересующихся теорией уравнений в частных производных и функциональным анализом. Она доступна студентам старших курсов механико-математических факультетов университетов, а также физикам и инженерам.

Редакция литературы по математическим наукам

Инд. 2-2-3

ОТ РЕДАКТОРА ПЕРЕВОДА

Как указывает сам автор, было бы наивным предполагать, что в книге подобного объема может быть сделана попытка охватить сколько-нибудь обширный раздел того, что принято называть „современной теорией уравнений в частных производных". Задача предлагаемых лекций — послужить введением в одну из важных глав той части этой теории, которая связана с использованием методов функционального анализа.

В лекциях изложены теоремы существования и единственности обобщенных решений граничных задач для эллиптических и гиперболических уравнений, получаемые методом так называемых „энергетических неравенств", слабых и сильных расширений дифференциальных операторов и „осреднений", позволяющих устанавливать эквивалентность указанных расширений. Одновременно исследуются дифференциальные свойства полученных решений.

Основоположниками такого подхода являются С. Л. Соболев и К. О. Фридрихс, но непосредственно использованы автором лишь работы последнего. Указанный подход позволяет сразу приступить к изучению достаточно общих линейных операторов с переменными коэффициентами в отличие от методов, базирующихся на преобразовании Фурье, когда основой являются постоянные коэффициенты, а переход к переменным идет через „теорию возмущений" [7].

Книга задумана как учебник, предназначенный для лиц, знакомых с элементами функционального анализа и не сталкивавшихся с дифференциальными операторами. Тем не менее содержащийся в ней материал не излагался ни в одной из имеющихся на русском языке монографий. Близкими по духу являются некоторые разделы недавно вышедшей книги [6], но и тут нет сколько-нибудь существенных пересечений.

Как всякий учебник, написанный известным математиком, книга содержит и оригинальные построения, принадлежащие автору. (Это относится в основном к гл. 4 и, естественно, приводит к большей сложности излагаемого материала.) Некоторым общим недостатком изложения является чрезмерно тяжеловесная порой система обозначений. Но это не нарушает общего впечатления большой методической продуманности.

В дополнениях к главам и в послесловии автором даются небольшие обзоры, содержащие дополнительные литературные указания. Эти разделы несколько расширены при переводе в двух направлениях: указаны работы, непосредственно связанные со специальной проблематикой глав, и (поскольку книга рассчитана на неофита) перечислен ряд монографий, отражающих некоторые незатронутые направления. Расширения второго рода должны послужить утешением для читателей, не нашедших в книге как раз тех разделов современной теории, которые их волнуют . . . Всюду отдавалось предпочтение литературе на русском языке.

Наконец, читателю, желающему во всяком курсе видеть наряду с эллиптическими и гиперболическими также и параболические уравнения, следует иметь в виду, что трактовка таковых в духе главы 3 имеется в дополнении II книги [6]. Ссылки на работы, содержащие другой подход, основанный на сведéнии к симметричным системам (см. гл. 4), даны в тексте.

А. А. Дезин

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ АВТОРА

По-видимому, название этой маленькой книги „Лекции по современной теории уравнений в частных производных“ звучит слишком громко.

Исследования по теории дифференциальных уравнений в частных производных, проводимые в Европе и Америке, очень обширны, и относящаяся сюда литература чрезвычайно велика. Однако в Японии, к сожалению, литература по этому вопросу немногочисленна. Дело, по-видимому, в сложности предмета, в отсутствии простых методов исследования, в трудности общей теории.

В последние годы, особенно начиная примерно с 1950 г., в теории уравнений в частных производных стали широко применяться функциональные методы (в особенности — теория гильбертовых пространств и теория обобщенных функций). Сложилась новая тенденция в этом направлении.

К сожалению, автор в силу своих недостаточных знаний вряд ли в состоянии развивать эту общую тенденцию. Он использует при изложении (присовокупляя свои соображения) в качестве основы работы Фридрихса (по эллиптическим уравнениям) и Лакса (по гиперболическим уравнениям) как работы, материал которых, при небольшом объеме, ясен для понимания.

Что касается предварительных сведений из функционального анализа, то предполагается, что читателю известны лишь самые элементарные факты теории гильбертовых пространств (такие, как, например, теорема Рисса о линейных функционалах).

Скорее всего, то, что излагалось автором подробно с целью внести бо́льшую ясность, на самом деле внесло только дополнительную сложность. Автор должен принести по этому поводу свои извинения.

М. Нагумо

Глава 1

ФУНКЦИОНАЛЬНЫЕ ПРОСТРАНСТВА

В этой главе очень кратко изложены необходимые предварительные сведения о функциональных пространствах, в частности о гильбертовых пространствах. Приведенные здесь теоремы можно найти в других книгах этой серии [1]) (в частности, в книге по функциональному анализу), поэтому многие доказательства опущены [2]).

Для проведения промежуточных выкладок очень удобно иметь дело с семейством функций C_0^k и C_0^∞, но дальнейшая теория строится на основе гильбертова пространства L^2 и появляется необходимость расширить дифференциальные операторы, определенные на C_0^k или C_0^∞, до замкнутых операторов в гильбертовом пространстве. Поэтому приводятся некоторые сведения о замкнутых операторах. Подробно теория расширения дифференциальных операторов изложена во второй главе. В конце первой главы вводятся пространства $\mathfrak{L}^p$, которые являются более широкими пространствами функций, чем L^p. Эти пространства понадобятся для описания локальных свойств дифференциальных операторов.

1.1. Функциональные пространства

1.1.1. Пространства $C[G]$ и $C^k[G]$. Пусть x — точка $(x_1, \ldots, x_m)$ m-мерного евклидова пространства E^m, а G—некоторое множество в E^m. Обозначим через $C[G]$ совокупность непрерывных функций, определенных на G, а через

[1]) Имеется в виду серия „Лекции по современной математике", выпущенная изд-вом „Кёрицу". Она состоит из 25 книг по различным разделам математики. — *Прим. перев.*

[2]) Материал, предполагаемый известным в этой главе, можно найти также в книгах [1] — [4]. — *Прим. перев.*

$C^k[G]$ — множество функций, определенных на G и таких, что все производные до порядка k включительно [1]) существуют и непрерывны. Следовательно, запись $u \in C[G]$ означает, что $u(x)$ — непрерывная функция, определенная на G; запись $u \in C^k[G]$ означает, что $u(x)$ и все ее производные до порядка k включительно существуют и непрерывны на G. Наконец, $C^\infty[G]$ — совокупность бесконечно дифференцируемых функций [2]).

Пусть G—открытое множество в E^m. Если $u \in C[G]$, то замыкание [3]) множества точек x, для которых $u(x) \neq 0$, обозначается через $S(u)$ и называется *носителем* функции $u(x)$:

$$S(u) = \{x : u(x) \neq 0\}^a.$$

Функция $u(x)$ равна нулю на открытом множестве $G - S(u)$. Далее, $C_0[G]$ обозначает совокупность таких функций u из $C[G]$, что их носитель $S(u)$ компактен и $S(u) \subset G$. Функция, принадлежащая $C_0[G]$, равна нулю в окрестности границы G и в окрестности бесконечно удаленной точки (вне достаточно большого шара). Обозначим через $C_0^k[G]$ совокупность функций, принадлежащих как $C_0[G]$, так и $C^k[G]$, т. е. $C_0^k[G] = C^k[G] \cap C_0[G]$. Если $u(x) \in C_0^k[G]$, то, положив $u(x) = 0$ для всех тех $x \in E^m$, которые не принадлежат G, можно считать, что $u(x)$ определена на всем пространстве E^m и $u \in C_0^k[E^m]$. Следовательно, можно считать, что $u(x)$ определена на любом открытом множестве G', содержащем G, и $u \in C_0^k[G']$.

1.1.2. Пространства $L^p[G]$. Пусть p — некоторое число, $p \geqslant 1$. Обозначим через $L^p[G]$ совокупность функций $u(x)$, измеримых [4]) на G $(G \subset E^m)$ и таких, что

$$\int_G |u(x)|^p\, dx < \infty.$$

---

[1]) Допускается $k = 0$. В этом случае полагаем $C^0 \equiv C$.

[2]) $C^\infty[G] = \bigcap_{n=1}^{\infty} C^n[G]$.

[3]) Замыкание множества $\{\cdot\}$ (множество, полученное присоединением к множеству $\{\cdot\}$ совокупности его предельных точек) будем обозначать $\{\cdot\}^a$.

[4]) Мера и интеграл понимаются в смысле Лебега.—*Прим. ред.*

Если $u \in L^p[G]$, то определим норму $\|u\|_p$ функции u следующим образом:

$$\|u\|_p = \left(\int_G |u(x)|^p \, dx\right)^{1/p}.$$

Когда ясно, о каком p идет речь, вместо $\|u\|_p$ будем сокращенно писать $\|u\|$. Эта норма обладает следующими свойствами (доказательства опущены):

1) $\|u\| \geqslant 0$ для всех u; условия $\|u\| = 0$ и $u(x) = 0$ почти всюду (кроме, быть может, множества меры нуль) эквивалентны,

2) $\|u_1 + u_2\| \leqslant \|u_1\| + \|u_2\|$,

3) $\|cu\| = |c| \cdot \|u\|$, где c — константа.

Если определить расстояние между произвольными функциями u и v из $L^p[G]$ как $\|u - v\|$, то $L^p[G]$ превращается в метрическое пространство. Если $\|u - v\| = 0$, т. е. $u(x) = v(x)$ почти всюду, то считают, что u и v как элементы из $L^p[G]$ совпадают. Пространство $L^p[G]$ является полным метрическим пространством. Это означает, что если $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность, т. е.

$$\lim_{n, n' \to \infty} \|u_n - u_{n'}\| = 0,$$

то существует единственная функция $u \in L^p[G]$, для которой

$$\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0.$$

Более того, $\{u_n(x)\}$ содержит подпоследовательность, которая сходится к $u(x)$ почти всюду. (Если последовательность $\{u_n(x)\}$ такова, что $\sum_{n=1}^{\infty} \|u_n - u_{n+1}\| < \infty$, то она сама сходится к $u(x)$ почти всюду и $\lim_{n \to \infty} \|u_n - u\| = 0$.)

Чаще всего из пространств $L^p[G]$ употребляются пространства, соответствующие $p = 1$ и $p = 2$. В этой книге главным образом рассматривается случай $p = 2$. Если $u, v \in L^2[G]$, то интеграл[1] $\int_G u(x)\overline{v(x)}\,dx$ определен и конечен.

[1] Через $\overline{v(x)}$ обозначена функция, комплексно сопряженная к $v(x)$.

Соотношение

$$(u,\ v)_G = \int\limits_G u(x)\overline{v(x)}\,dx$$

определяет величину $(u,\ v)_G$, которую называют *скалярным* (*внутренним*) произведением функций u и v на G. Если нет необходимости явно указывать G, то пишут просто $(u,\ v)$. Скалярное произведение обладает следующими свойствами:

а) $(u,\ u) \geqslant 0$ для всех u; из того, что $(u,\ u) = 0$, следует, что $u(x) = 0$ (как элемент из $L^2[G]$);

б) $(u,\ v) = \overline{(v,\ u)}$;

в) $\left(\sum\limits_{\mu=1}^{k} a_\mu u_\mu,\ \sum\limits_{\nu=1}^{l} b_\nu v_\nu\right) = \sum\limits_{\mu=1}^{k}\sum\limits_{\nu=1}^{l} a_\mu \bar{b}_\nu (u_\mu,\ v_\nu)$, где a_μ, b_ν — константы;

г) $(u,\ u) = \|u\|^2$;

д) $|(u,\ v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\|$ (неравенство Шварца);

е) если $\lim\limits_{n\to\infty} \|u_n - u\| = 0$ и $\lim\limits_{n\to\infty} \|v_n - v\| = 0$, то $\lim\limits_{n\to\infty} (u_n,\ v_n) = (u,\ v)$.

1.1.3. Связь между L^2 и C_0. Если G — открытое множество в E^m, то для произвольной функции $u \in L^2[G]$ существует такая последовательность функций $\{\varphi_n\}$ из $C_0[G]$, что

$$\lim_{n\to\infty} \|\varphi_n - u\| = 0.$$

Это означает, что $C_0[G]$ плотно в $L^2[G]$, т. е. $(C_0)^a = L^2$ [1]. Более того, можно считать, что $\varphi_n \in C_0^\infty[G]$, т. е. $\left(C_0^\infty\right)^a = L^2$. Теперь можно доказать следующую теорему.

Теорема 1.1.1 *Если $u \in L^2[G]$ (G — открытое множество в E^m) и соотношение*

$$(u,\ \varphi) = 0$$

выполняется для любой функции $\varphi \in C_0^k[G]$ (k может равняться ∞), то почти всюду в G

$$u(x) = 0.$$

---

[1]) $(\cdot)^a$ обозначает замыкание по норме L^2. Пространство L^2 можно заменить на L^p.

Доказательство. Если выбрать $\varphi_n \in C_0^k$ так, чтобы $\|\varphi_n - u\| \to 0$ при $n \to \infty$, то

$$\lim_{n\to\infty} (u, \varphi_n) = (u, u) = \|u\|^2$$

и $\|u\| = 0$. Поэтому $u(x) = 0$ почти всюду. ▌[1])

Замечание. Если в теореме 1.1.1 $u \in L^2[G] \cap C[G]$, то $u(x) \equiv 0$ всюду в G.

1.2. Нормированные пространства. Линейные операторы

Каждое из рассматривавшихся выше семейств функций C, L^p и т. д. обладает тем свойством, что линейная комбинация с числовыми коэффициентами функций из этого семейства снова является функцией из этого семейства. Всякое множество $\mathfrak{F}$, обладающее этим свойством, т. е. такое множество, для которого

$$\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu u_\nu\right) \in \mathfrak{F},$$

где $u_\nu \in \mathfrak{F}$ и c_ν — некоторые числа, называется *линейным* или *векторным пространством.* Если в качестве c_ν допускаются только действительные числа, то множество $\mathfrak{F}$ называется *действительным* векторным пространством. Если же допускаются произвольные комплексные числа, то множество $\mathfrak{F}$ называется *комплексным* векторным пространством. Элементы u пространства $\mathfrak{F}$ называются точками этого пространства. Линейное пространство $\mathfrak{F}$ называется *нормированным,* если каждому элементу u из $\mathfrak{F}$ поставлено в соответствие такое действительное число $\|u\|$, называемое *нормой* элемента u, что выполняются следующие свойства:

1) $\|u\| \geqslant 0$; из равенства $\|u\| = 0$ следует $u = 0$ (как элемент пространства $\mathfrak{F}$),

2) $\|u_1 + u_2\| \leqslant \|u_1\| + \|u_2\|$,

3) $\|cu\| \leqslant |c| \cdot \|u\|$, где c — константа.

Если при этом определить расстояние между двумя элементами u и v пространства $\mathfrak{F}$ по формуле

$$\rho(u, v) = \|u - v\|,$$

[1]) Здесь и в дальнейшем знаком ▌ обозначается конец доказательства. В оригинале стоит иероглиф, который читается „овари“ и в переводе с японского означает „конец“. — *Прим. перев.*

то оно удовлетворяет трем аксиомам расстояния, так как

$$\rho(u, u) = 0; \quad \rho(u, v) = \rho(v, u);$$
$$\rho(u, w) \leqslant \rho(u, v) + \rho(v, w).$$

Говорят, что нормированное пространство $\mathfrak{F}$ является полным, если оно полно в смысле введенного выше расстояния, т. е. если каждая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу этого пространства. Полное нормированное пространство называется *банаховым* пространством. Как было отмечено выше, L^p $(p \geqslant 1)$ — банахово пространство. Если G — ограниченное замкнутое множество в E^m (компакт) и для функций $u \in C[G]$ определена норма по формуле

$$\|u\| = \max_{x \in G} |u(x)|,$$

то $C[G]$ также банахово пространство. При этом сходимость в смысле этой нормы эквивалентна равномерной сходимости на G.

Вообще если $\mathfrak{F}_0$ — линейное подпространство банахова пространства $\mathfrak{F}$, замкнутое в $\mathfrak{F}$, то $\mathfrak{F}_0$ само является банаховым пространством (с той же нормой).

Пусть $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — линейные пространства. Рассмотрим оператор (отображение) T, действующий из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F}'$:

$$v = Tu \quad (u \in \mathfrak{F}, \ v \in \mathfrak{F}').$$

Если при этом для любых элементов $u_\nu \in \mathfrak{F}$ и произвольных чисел c_ν справедливо равенство

$$T\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu u_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu T u_\nu,$$

то T называется линейным оператором из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F}'$.

Пусть теперь $\mathfrak{F}$ и $\mathfrak{F}'$ — нормированные пространства. Линейный оператор из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F}'$ называется *ограниченным* линейным оператором, если существует такое число c, что

$$\|Tu\|' \leqslant c\|u\|$$

для любых $u \in \mathfrak{F}$ ($\| \quad \|'$ обозначает норму в пространстве $\mathfrak{F}'$). Ограниченность линейного оператора T, действующего из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{F}'$, эквивалентна его непрерывности[1]).

Пример 1. Пусть $\alpha(x)$ — ограниченная непрерывная на G функция (G — некоторый компакт). Определим оператор T, переводящий функцию $u \in C[G]$ в функцию, снова принадлежащую $C[G]$, формулой

$$(Tu)(x) = \alpha(x)\, u(x).$$

Линейность так определенного оператора T очевидна, а ограниченность следует из неравенства

$$\|Tu\| \leqslant \max_{x \in G} |\alpha(x)| \cdot \|u\|.$$

Оператор, определенный тем же равенством, но действующий из $L^p[G]$ в $L^p[G]$ ($p \geqslant 1$), также является ограниченным оператором, так как приведенное выше неравенство остается справедливым и в этом случае.

Пример 2. Пусть $\alpha(x, y)$ — непрерывная функция для $(x, y) \in G \times G$ и

$$\int\limits_{G \times G}\int |\alpha(x, y)|^2\, dx\, dy < \infty.$$

Если для функций $u \in L^2[G]$ определить оператор T формулой

$$(Tu)(x) = \int\limits_G \alpha(x, y)\, u(y)\, dy,$$

то T будет линейным ограниченным оператором, отображающим $L^2[G]$ в себя. Линейность очевидна, а так как

$$\|Tu\|^2 = \int\limits_G \left| \int\limits_G \alpha(x, y)\, u(y)\, dy \right|^2 dx \leqslant$$
$$\leqslant \int\limits_G \left\{ \int\limits_G |\alpha(x, y)|^2\, dy \cdot \int\limits_G |u(y)|^2\, dy \right\} dx,$$

[1]) Непрерывность оператора T означает, что из сходимости последовательности $\{u_n\}$ в $\mathfrak{F}$ к элементу u следует сходимость последовательности $\{Tu_n\}$ в $\mathfrak{F}'$ к элементу Tu.

то

$$\|Tu\|^2 \leqslant \int\limits_{G \times G}\int |\alpha(x, y)|^2 \, dy \, dx \cdot \|u\|^2,$$

и, следовательно, оператор T ограничен.

Упражнение. Пусть G — ограниченное замкнутое множество в E^m и $u \in C^k[G]$. Определим оператор T формулой [1])

$$(Tu)(x) = \sum_{0 \leqslant i_k \leqslant m} a_{i_1 \dots i_k}(x) \, \partial_{i_1} \, \dots \, \partial_{i_k} u(x),$$

где функции $a_{i_1 \dots i_k}(x)$ непрерывны на G. Доказать, что оператор T, действующий из $C^k[G]$ в $C[G]$, является ограниченным оператором, если под нормой $\|u\|$ в $C^k[G]$ понимать выражение

$$\max_{x \in G} |u(x)| + \sum_{0 \leqslant i_k \leqslant m} \max_{x \in G} \left| \partial_{i_1} \, \dots \, \partial_{i_k} u(x) \right|.$$

1.3. Функционалы. Гильбертовы пространства

1.3.1. Функционалы. Пусть $\mathfrak{K}$ обозначает множество всех действительных или всех комплексных чисел. Если в качестве нормы элемента, принадлежащего $\mathfrak{K}$, взять его абсолютную величину, то $\mathfrak{K}$ становится банаховым (полным нормированным) пространством. Ограниченный линейный оператор, действующий из $\mathfrak{K}$-нормированного [2]) пространства $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{K}$, называется *линейным функционалом* на $\mathfrak{F}$. Таким образом, оператор $\varphi(u)$ называется линейным функционалом на $\mathfrak{F}$, если $\varphi(u)$ обладает следующими свойствами:

α) если $u \in \mathfrak{F}$, то $\varphi(u) \in \mathfrak{K}$;

β) если $u_\nu \in \mathfrak{F}$, $c_\nu \in \mathfrak{K}$, то

$$\varphi\left(\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu u_\nu\right) = \sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi(u_\nu);$$

γ) существует такое неотрицательное число c, что $|\varphi(u)| \leqslant c\|u\|$ для всех $u \in \mathfrak{F}$.

---

[1]) Определение оператора ∂_i см. на стр. 26. — *Прим. ред.*

[2]) Под $\mathfrak{K}$-нормированным пространством понимается следующее: если $\mathfrak{K}$ — поле действительных чисел, то $\mathfrak{F}$ — действительное нормированное пространство; если же $\mathfrak{K}$ — поле комплексных чисел, то $\mathfrak{F}$ — комплексное нормированное пространство.

Минимальное возможное значение постоянной c в неравенстве γ) называется *нормой* функционала. Другими словами,

$$\|\varphi\| = \sup_{u \neq 0} \left\{ \frac{|\varphi(u)|}{\|u\|} \right\}. \tag{1.1}$$

Из определения нормы вытекает, что

$$|\varphi(u)| \leqslant \|\varphi\| \cdot \|u\|.$$

Множество всех линейных функционалов на $\mathfrak{F}$ является банаховым пространством относительно так определенной нормы. Это пространство называется пространством, сопряженным к пространству $\mathfrak{F}$, и обозначается $\mathfrak{F}^*$.

Пусть $\mathfrak{F}_0$ — линейное подпространство пространства $\mathfrak{F}$ и φ_0 — линейный функционал на $\mathfrak{F}_0$. Функционал $\varphi_0(u)$ можно расширить[1]) до функционала $\varphi(u)$ на пространстве $\mathfrak{F}$ так, чтобы $\|\varphi\|_{\mathfrak{F}^*} = \|\varphi_0\|_{(\mathfrak{F}_0)^*}$. Для произвольного элемента $u_0 \in \mathfrak{F}$ существует такой функционал $\varphi_0 \in \mathfrak{F}^*$, что $\|\varphi_0\| = 1$ и $\varphi_0(u_0) = \|u_0\|$. Отсюда следует, что наряду с (1.1) можно написать

$$\|u\| = \sup_{\varphi \neq 0} \left\{ \frac{|\varphi(u)|}{\|\varphi\|} \right\}. \tag{1.2}$$

В выражении для линейного функционала $\varphi(u)$ зафиксируем теперь u и будем считать, что сам функционал φ меняется и пробегает все пространство $\mathfrak{F}^*$. Так как элемент u фиксирован, а функционал φ является переменным, то эту зависимость естественно обозначить как $u(\varphi)$. При этом $u(\varphi)$ становится линейным функционалом на $\mathfrak{F}^*$. В силу формулы (1.2) норма функционала $u(\varphi)$ совпадает с нормой u как элемента пространства $\mathfrak{F}$. Из того что $u(\varphi)$ является линейным функционалом на $\mathfrak{F}^*$, следует, что $u(\varphi)$ является элементом из $\mathfrak{F}^{**}$. Следовательно, можно считать, что $\mathfrak{F}$ включается в $\mathfrak{F}^{**}$ без изменения нормы, т. е. $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{F}^{**}$. Если $\mathfrak{F}$ — полное пространство (банахово), то оно замкнуто в $\mathfrak{F}^{**}$ и, следовательно, является замкнутым линейным подпространством в $\mathfrak{F}^{**}$.

1.3.2. Гильбертовы пространства. Пусть в комплексном линейном пространстве $\mathfrak{H}$ каждой паре элементов u и v по-

[1]) Теорема Хана — Банаха о продолжении линейных функционалов. — *Прим. перев.*

ставлено в соответствие комплексное число (u, v), называемое *скалярным произведением*, которое обладает свойствами а), б) и в) (см. 1.1.2). Если при этом определить норму элемента u равенством

$$\|u\| = \sqrt{(u, u)},$$

то она удовлетворяет аксиомам нормы 1), 2), 3) (см. 1.2) и выполняются условия г), д), е). Если, кроме того, $\mathfrak{H}$ полно, оно называется *гильбертовым пространством*. Очевидно, что $L^2[G]$ является гильбертовым пространством.

Если $(u, v) = 0$, то и $(v, u) = 0$; в этом случае говорят, что элементы u и v взаимно ортогональны, и пишут $u \perp v$. Для гильбертовых пространств $\mathfrak{H}$ справедливы следующие теоремы.

Теорема 1.3.1 *Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое линейное подпространство пространства $\mathfrak{H}$, не совпадающее со всем $\mathfrak{H}$. Тогда существует такой элемент $\varphi \in \mathfrak{H}$, что $\varphi \perp \mathfrak{M}$ и* $\|\varphi\| = 1$. (Доказательство опущено.)

Зафиксируем теперь элемент ψ, принадлежащий $\mathfrak{H}$. Тогда скалярное произведение (u, ψ) при переменном u будет линейным функционалом на $\mathfrak{H}$. Если обозначить

$$(u, \psi) = \varphi(u), \qquad \varphi \in \mathfrak{H}^*, \tag{1.3}$$

то $\|\varphi\| = \|\psi\|$. И обратно, для произвольного функционала φ на пространстве $\mathfrak{H}$ справедлива следующая *теорема Рисса*.

Теорема 1.3.2. *Пусть $\varphi(u)$, $\varphi \in \mathfrak{H}^*$, — линейный функционал на $\mathfrak{H}$. Тогда существует такой элемент $\psi \in \mathfrak{H}$, что*

$$\varphi(u) = (u, \psi), \quad u \in \mathfrak{H}. \tag{1.4}$$

(Доказательство опущено.)

Теорема 1.3.3. $\mathfrak{H}^{**} = \mathfrak{H}$, *т. е. между элементами пространства $\mathfrak{H}$ и элементами пространства $\mathfrak{H}^{**}$, являющимися линейными функционалами на $\mathfrak{H}^*$, можно установить взаимно однозначное линейное соответствие, например, следующим образом: пусть $\varphi(u)$ — функционал на $\mathfrak{H}$, причем u фиксирован, а φ произвольно меняется в $\mathfrak{H}^*$; тогда, обозначив $\varphi(u) = u(\varphi)$, получим линейный функционал на $\mathfrak{H}^*$, который и ставится в соответствие элементу u.*

Доказательство. Согласно теореме 1.3.2, для функционалов $\varphi_\nu \in \mathfrak{H}^*$ существуют такие элементы $\psi_\nu \in \mathfrak{H}$, что $\varphi_\nu(u) = (u, \psi_\nu)$, причем для произвольных комплексных чисел c_ν в силу условия в) выполняется равенство

$$\sum_{\nu=1}^{n} c_\nu \varphi_\nu(u) = \left(u, \sum_{\nu=1}^{n} \bar{c}_\nu \psi_\nu\right).$$

Таким образом, между функционалами $\varphi \in \mathfrak{H}^*$ и элементами $\psi \in \mathfrak{H}$, связанными формулой (1.4), установлено взаимно однозначное антилинейное соответствие, т. е.

$$\sum c_\nu \varphi_\nu \longleftrightarrow \sum \bar{c}_\nu \psi_\nu.$$

При этом, согласно (1.3), $\|\varphi\| = \|\psi\|$. Если теперь $l(\varphi)$ — произвольный линейный функционал на $\mathfrak{H}^*$ ($l \in \mathfrak{H}^{**}$, $\varphi \in \mathfrak{H}^*$), то $\overline{l(\varphi)}$ является линейным функционалом относительно $\psi \in \mathfrak{H}$. Поэтому по теореме Рисса существует такой элемент $u \in \mathfrak{H}$, что

$$\overline{l(\varphi)} = (\psi, u)$$

для всех $\psi \in \mathfrak{H}$. Следовательно,

$$l(\varphi) = (u, \psi) = u(\varphi). \blacksquare$$

Выше пространства $\mathfrak{H}$ предполагались комплексными линейными пространствами. В случае действительных линейных пространств для скалярного произведения выполняются условия а), б) и в) с действительными коэффициентами a_μ, b_ν (т. е. $\bar{a}_\mu = a_\mu$, $\bar{b}_\nu = b_\nu$). Норма определяется точно так же, как в случае комплексных пространств. Если $\mathfrak{H}$ к тому же является полным пространством, то оно называется *действительным гильбертовым пространством*. (В отличие от него пространства, введенные в начале этого пункта, называются *комплексными гильбертовыми пространствами*.) Для действительных гильбертовых пространств справедливы все приведенные выше теоремы, если ограничиться в них только действительными числами.

1.4. Замкнутые операторы

Вообще говоря, линейные операторы могут и не быть непрерывными (ограниченными). В частности, неограниченным является важный для математического анализа оператор дифференцирования (рассматриваемый как оператор, действующий из подпространства C^k пространства C в C). Однако этот оператор можно расширить до замкнутого оператора. О замкнутых операторах и пойдет речь в этом параграфе.

Пусть $\mathfrak{B}$ и $\mathfrak{B}'$ — банаховы пространства и пусть $\mathfrak{F}$ — линейное подмножество пространства $\mathfrak{B}$. Если для линейного оператора T, действующего из $\mathfrak{F}$ в $\mathfrak{B}'$, из соотношений

$$\begin{gathered} \| u_n - u \| \to 0, \quad \| Tu_n - v \| \to 0, \\ u_n \in \mathfrak{F}, \quad u \in \mathfrak{B}, \quad v \in \mathfrak{B}', \end{gathered} \tag{1.5}$$

следует, что $u \in \mathfrak{F}$ и $Tu = v$, то говорят, что T — *замкнутый* оператор на $\mathfrak{F}$. Это эквивалентно утверждению, что линейное множество $\{\langle u, Tu \rangle : u \in \mathfrak{F}\}$ в произведении пространств $\mathfrak{B} \times \mathfrak{B}'$ (называемое *графиком* оператора T) замкнуто.

Пусть теперь линейный оператор T, действующий из $\mathfrak{F}$ $(\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B})$ в $\mathfrak{B}'$, не замкнут, но его можно сделать замкнутым, расширив область определения $\mathfrak{F}$. В этом случае оператор T называется *замыкаемым* [1]).

Теорема 1.4.1. *Для того чтобы линейный оператор T, действующий из $\mathfrak{F}$ $(\mathfrak{F} \subset \mathfrak{B})$ в $\mathfrak{B}'$, был замыкаемым, необходимо и достаточно, чтобы из* [2])

$$u_n \in \mathfrak{F}, \quad u_n \to 0, \quad Tu_n \to v \in \mathfrak{B}'$$

следовало $v = 0$.

Доказательство. Необходимость очевидна ($v = T0 = 0$). Докажем достаточность. Если, кроме последовательности $\{u_n\}$, удовлетворяющей условиям (1.5), рассмотреть другую последовательность $\{u'_n\}$, удовлетворяющую тем же условиям

$$u'_n \in \mathfrak{F}, \quad u'_n \to u \in \mathfrak{B}, \quad Tu'_n \to v' \in \mathfrak{B}',$$

---

[1]) У автора использован термин „предзамкнутый". — *Прим. перев.*

[2]) Запись $u_n \to u_0$ означает, что $\| u_n - u_0 \| \to 0$.

то

$$(u'_n - u_n) \in \mathfrak{F}, \quad (u'_n - u_n) \to 0,$$
$$T(u'_n - u_n) \to (v' - v) \in \mathfrak{B}',$$

и, следовательно, $v' - v = 0$. Обозначим через $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ совокупность таких $u \in \mathfrak{B}$, что существует последовательность $\{u_n\}$, удовлетворяющая условиям (1.5). Для $u \in \bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ определим оператор $\bar{T}$ следующим образом: $\bar{T}u = v$ (где v взято из условий (1.5)). Оператор $\bar{T}$ определен на $\bar{\bar{\mathfrak{F}}}$ однозначно и является расширением оператора T, определенного на $\mathfrak{F}$.

Переходя к пределу, легко видеть, что так определенный оператор $\bar{T}$ является линейным. Для доказательства замкнутости оператора $\bar{T}$ рассмотрим такую последовательность $\{u_n\}$, что

$$u_n \in \bar{\bar{\mathfrak{F}}}, \quad u_n \to u \in \mathfrak{B}, \quad \bar{T}u_n \to v \in \mathfrak{B}'.$$

Для этих u_n, согласно определению оператора $\bar{T}$, существуют такие u'_n, что

$$u'_n \in \mathfrak{F}, \quad \|u'_n - u_n\| < \frac{1}{n}, \quad \|Tu'_n - \bar{T}u_n\| < \frac{1}{n}. \tag{1.6}$$

Отсюда

$$u'_n \in \mathfrak{F}, \quad u'_n \to u, \quad Tu'_n \to v,$$

и, следовательно,

$$u \in \bar{\bar{\mathfrak{F}}}, \quad \bar{T}u = v. \blacksquare$$

З а м е ч а н и е. Замкнутый оператор $\bar{T}$, построенный в приведенном доказательстве, является минимальным замкнутым расширением замыкаемого оператора T и называется обычно его *замыканием*.

1.5. Функциональное пространство $\mathfrak{L}^p$

В этом параграфе речь пойдет о функциональных классах $\mathfrak{L}^p$, которые являются более широкими классами функций, чем L^p. Пусть p — некоторое число, $p \geqslant 1$, и G — некоторое множество в m-мерном евклидовом пространстве E^m. Через $\mathfrak{L}^p[G]$ обозначим совокупность таких измеримых на G

функций, что для любого компактного подмножества G_1 множества G выполняется соотношение [1])

$$\|u\|_{G_1}=\left(\int\limits_{G_1}|u(x)|^p\,dx\right)^{1/p}<+\infty.$$

Множество $\mathfrak{L}^p[G]$ является линейным пространством, но не нормированным. Если же рассматривать функции из $\mathfrak{L}^p[G]$ на некотором подмножестве $G_1 \prec G$ (запись $G_1 \prec G$ означает, что G_1^a — компакт и $G_1^a \subset G$), то мы получим банахово пространство $L^p[G_1]$ с нормой $\|u\|_{G_1}$.

Определим теперь сходимость в пространстве $\mathfrak{L}^p[G]$. Если u_n, $u \in \mathfrak{L}^p[G]$ и для любого открытого множества G_1, $G_1 \prec G$, справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\|u_n-u\|_{G_1}=0,$$

то будем говорить, что последовательность $\{u_n\}$ сходится в $\mathfrak{L}^p[G]$ к элементу u, и будем обозначать это следующим образом:

$$u_n \to u \qquad (\mathfrak{L}^p[G]).$$

Если само G — открытое множество, то $\mathfrak{L}^p[G]$ полно в смысле этой сходимости, т. е. если последовательность $\{u_n\}$, $u_n \in \mathfrak{L}^p[G]$, такова, что для любого открытого множества G_1, $G_1 \prec G$,

$$\lim_{n,\,n'\to\infty}\|u_n-u_{n'}\|_{G_1}=0,$$

то существует такой элемент $u \in \mathfrak{L}^p[G]$, что $u_n \to u\,(\mathfrak{L}^p[G])$. При этом $u=u(x)$ определяется однозначно с точностью до множества меры нуль. Докажем это [2]). Возьмем последовательность открытых множеств G_ν, такую, что $G_\nu \prec G_{\nu+1}$

---

[1]) Может оказаться, что $u \in \mathfrak{L}^p[G]$, но $\left(\int\limits_G|u(x)|^p dx\right)^{1/p}=\infty$.

и $\bigcup\limits_{\nu=1}^{\infty} G_\nu = G$, и рассмотрим последовательность натуральных чисел $n_i (n_i < n_{i+1})$, для которой

$$\| u_{n_i} - u_{n_{i+1}} \|_{G_i} < 2^{-i}.$$

Отсюда следует, что при $i \geqslant \nu$

$$\| u_{n_i} - u_{n_{i+1}} \|_{G_\nu} < 2^{-i}.$$

В силу полноты пространства $L^p [G_\nu]$ существует такая функция u_ν, определенная на G_ν, что

$$\lim_{i\to\infty} \| u_{n_i} - u_\nu \|_{G_\nu} = 0.$$

Понятно, что u_ν совпадает с $u_{\nu-1}$ на $G_{\nu-1}$ (с точностью до множества меры нуль). Так как объединение G_ν по ν от 1 до ∞ составляет все открытое множество G, то тем самым на всем G определена функция u, принадлежащая $\mathfrak{L}^p [G]$ и такая, что для любого ν

$$\lim_{i\to\infty} \| u_{n_i} - u \|_{G_\nu} = 0.$$

Учитывая, что $\lim\limits_{n,\, n'\to\infty} \| u_n - u_{n'} \|_{G_\nu} = 0$, получаем, что и

$$\lim_{n\to\infty} \| u_n - u \|_{G_\nu} = 0.$$

Так как для любого открытого множества G_*, $G_* \prec G$, существует такое ν, что $G_* \prec G_\nu$, то тем самым доказано, что $u_n \to u\, (\mathfrak{L}^p [G])$. ▮

Определение замкнутого линейного оператора можно распространить и на случай пространств $\mathfrak{L}^p$, не являющихся нормированными пространствами. Для этого вместо (1.5) нужно написать

$$u_n \in \mathfrak{F} \quad (\mathfrak{F} \subset \mathfrak{L}^p [G]), \quad u_n \to u \quad (\mathfrak{L}^p), \quad Tu_n \to v \quad (\mathfrak{L}^p). \qquad (1.7)$$

Точно так же распространяются на случай пространств $\mathfrak{L}^p$ определение замыкаемого оператора и теорема 1.4.1. При этом в условии теоремы 1.4.1 нужно считать, что

$$u_n \in \mathfrak{F} \quad (\mathfrak{F} \subset \mathfrak{L}^p), \qquad u_n \to 0 \ (\mathfrak{L}^p), \qquad Tu_n \to v \ (\mathfrak{L}^p).$$

1.6. Дополнения к главе 1

При написании этой главы были использованы книги [58], [59], [35].

Слабая сходимость. Говорят, что последовательность $\{u_n\}$ в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ слабо сходится к элементу $u_\infty \in \mathfrak{H}$, если для любого элемента $v \in \mathfrak{H}$

$$\lim_{n\to\infty} (u_n, v) = (u_\infty, v).$$

Всякая ограниченная последовательность в гильбертовом пространстве содержит слабо сходящуюся подпоследовательность, а именно, если для некоторого положительного числа c

$$\|u_n\| < c,$$

то при соответствующем выборе подпоследовательности n_i $(n_{i+1} > n_i)$ найдется такой элемент $u_\infty \in \mathfrak{H}$, что для любого $v \in \mathfrak{H}$

$$\lim_{i\to\infty} \left(u_{n_i}, v\right) = (u_\infty, v).$$

Доказательство[1]) можно найти в книгах [1] — [4].

---

[1]) Высказанное утверждение обычно выражают словами: „ограниченное множество гильбертова пространства слабо компактно“. — *Прим. ред.*

Глава 2

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

В этой главе подробно излагается теория расширения дифференциальных операторов. Изложение в основном следует методу К. О. Фридрихса. Рассматриваются расширения двух видов: слабые и сильные. Для доказательства совпадения слабого и сильного расширений используются, следуя Фридрихсу, операторы осреднения (mollifiers). Доказательство совпадения проводится для пространств $\mathfrak{L}^2$, а не для L^2. В последнем случае потребовались бы некоторые дополнительные условия на область определения функций (соответствующая регулярность). Этот вопрос подробно не рассматривается. Поясняется только, что $\mathfrak{L}^2$ можно заменить на L^2 (без дополнительных условий) лишь в случае, когда областью определения является все евклидово пространство. Хотя в последующих главах за основу берется пространство L^2, а не $\mathfrak{L}^2$, и с этой точки зрения изложение в терминах $\mathfrak{L}^2$ не является необходимым для дальнейших глав, предлагаемый подход кажется автору весьма полезным, так как дает хорошее представление о некоторых основных идеях теории дифференциальных операторов[1]).

В начале главы говорится о сопряженных дифференциальных операторах. При этом выясняется, что очень удобно иметь дело с функциональными пространствами C_0^k и C_0^∞.

---

[1]) Утверждение, что в дальнейшем за основу берется L^2, не совсем верно. Например, результаты § 3.4, относящиеся к свойствам решений эллиптических уравнений, существенно опираются на то, что определение слабого расширения ∂_i (от которого зависит определение пространства $\mathfrak{D}^k$) дано для $\mathfrak{L}^2$. Это в свою очередь приводит к тому, что установленные свойства решения являются свойствами „внутри области“, а не „вплоть до границы“. (Ср. [11].) — *Прим. ред.*

2.1. Сопряженные дифференциальные операторы

Рассмотрим функцию $u=u(x)$, где $x=(x_1, \ldots, x_m)$ — независимое переменное, а m — некоторое натуральное число. Для простоты ограничимся случаем, когда $u(x)$ принимает только действительные значения. Символом ∂_i будем обозначать операцию дифференцирования по переменному x_i,

$$\partial_i u = \frac{\partial u}{\partial x_i}.$$

Будем считать, что все рассматриваемые функции определены на некотором открытом множестве G в m-мерном евклидовом пространстве. Определим для двух действительнозначных функций $u(x)$ и $v(x)$ скалярное произведение следующим образом [1]):

$$(u, v) = \int_G u(x)\, v(x)\, dx.$$

Пусть $a=a(x)\in C^1[G]$, $u\in C^1[G]$ и $v\in C_0^1[G]$. Интегрируя по частям и учитывая, что функция v равна нулю в окрестности границы области G, получим

$$\int_G a\partial_i u \cdot v\, dx = -\int_G u \cdot \partial_i(av)\, dx.$$

В случае более гладких функций интегрирование по частям можно провести несколько раз. Так, для функций $a\in C^k[G]$, $u\in C^k[G]$, $v\in C_0^k[G]$ имеем

$$\int_G a\partial_{i_1}\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_k} u \cdot v\, dx = (-1)^k \int_G u \cdot \partial_{i_1}\partial_{i_2} \ldots \partial_{i_k}(av)\, dx. \tag{2.1}$$

Отсюда вытекает, что если дифференциальные операторы P и P^* определены при помощи равенств [2])

$$Pu = a_0(x)\, u + \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{1\leqslant i\leqslant m} a_{i_1 \ldots i_\varkappa}(x)\, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa} u \tag{2.2}$$

$$P^*v = a_0(x)\, v + \sum_{\varkappa=1}^{k} (-1)^\varkappa \sum_{1\leqslant i\leqslant m} \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa}(a_{i_1 \ldots i_\varkappa} v), \tag{2.3}$$

---

[1]) $dx = dx_1 \ldots dx_m$.

[2]) Запись $1\leqslant i\leqslant m$ означает, что $i_1, \ldots, i_k$ меняются независимо от 1 до m.

где $a(x)$ — некоторые фиксированные функции, для которых

$$a_0 \in C[G], \quad a_{i_1 \ldots i_\varkappa} \in C^\varkappa[G],$$

то, согласно (2.1), (2.2) и (2.3), для произвольных $u \in C^k[G]$ и $v \in C_0^k[G]$ имеет место равенство

$$(Pu, v) = (u, P^* v) \quad (u \in C^k, \ v \in C_0^k). \tag{2.4}$$

Оператор P^* называют оператором, формально сопряженным к дифференциальному оператору P. Понятно, что оператор P^* можно записать в той же форме, что и оператор P, т. е.

$$P^* v = b_0 v + \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} b_{i_1 \ldots i_\varkappa}(x)\, \partial_{i_1 \ldots i_\varkappa} v, \tag{2.5}$$

где $b_{i_1 \ldots i_\varkappa} \in C^\varkappa[G]$.

Теорема 2.1.1. *Пусть P^* — оператор, формально сопряженный к дифференциальному оператору P. Тогда оператор $(P^*)^*$, формально сопряженный к оператору P^*, совпадает с оператором P.*

Доказательство. Рассмотрим сначала такие операторы P и P', что при любых u, $v \in C_0^\infty[G]$ выполняется равенство

$$(Pu, v) = (u, P' v) \quad (u, \ v \in C_0^\infty). \tag{2.6}$$

Докажем, что P' совпадает с P^*. Действительно, из (2.4) и (2.6) следует, что

$$(u, P' v - P^* v) = 0 \quad (u, \ v \in C_0^\infty),$$

где u — произвольная функция из $C_0^\infty[G]$. Поэтому

$$(P' - P^*) v = P' v - P^* v = 0$$

для любых $v \in C_0^\infty[G]$. Если теперь записать P' и P^* в виде (2.5), то отсюда следует, что P' и P^* совпадают (см. замечание к теореме 1.1.1).

Но, согласно (2.4), для произвольных u, $v \in C_0^\infty[G]$ имеет место

$$(P^* v, u) = (v, Pu) \quad (u, \ v \in C_0^\infty)$$

и

$$(P^* v, u) = (v, P^{**} u),$$

поэтому оператор P совпадает с оператором $(P^*)^*$, формально сопряженным к P^*. ▌

Замечание 1. Если для дифференциального оператора P вида (2.2) при любых $u \in C_0^\infty[G]$ выполняется равенство $Pu = 0$, то все коэффициенты a_0, $a_{i_1 \dots i_\varkappa}$ равны нулю в G. Действительно, возьмем произвольную точку x^0 из G, тогда существует такая функция $\omega(x)$ из $C_0^\infty[G]$, что $\omega(x) = 1$ в некоторой окрестности точки x^0. Отсюда, если положить

$$u = \omega(x)\left(x_{i_1} - x_{i_1}^0\right) \dots \left(x_{i_\varkappa} - x_{i_\varkappa}^0\right),$$

то $u \in C_0^\infty[G]$ и

$$(Pu)_{x=x^0} = \mu a_{i_1 \dots i_\varkappa}(x^0),$$

где μ — некоторое натуральное число. Следовательно, $a_{i_1 \dots i_\varkappa}(x^0) = 0$. Взяв $u = \omega(x)$, получим, что $(Pu)_{x=x^0} = a_0(x^0)$, откуда $a_0(x^0) = 0$. Так как x^0 — произвольная точка из G, то все коэффициенты в формуле (2.2) тождественно равны нулю в G.

Замечание 2. Формула (2.4) верна как при $u \in C^k$, $v \in C_0^k$, так и при $u \in C_0^k$, $v \in C^k$. Однако она, вообще говоря, неверна, если и u, и v принадлежат C^k. Для того чтобы она оставалась верной, необходимы дополнительные условия на поведение функций u и v при приближении к границе открытого множества G.

Упражнение 1. Непосредственными вычислениями проверить, что $P^{**} = P$ для дифференциальных операторов второго порядка ($k = 2$).

Упражнение 2. Показать, что всякий дифференциальный оператор P второго порядка, такой, что P совпадает с P^* (такие операторы называются формально самосопряженными), можно представить в виде

$$Pu = \sum_{i,\, j=1}^{m} \partial_i (a_{ij} \partial_j u) + cu \quad (a_{ij} = a_{ji} \in C^2).$$

2.2. Сопряженные матричные дифференциальные операторы первого порядка

Для удобства и краткости записи матрицу

$$\begin{pmatrix} a_{11} & \dots & a_{1l} \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ \cdot & & \cdot \\ a_{k1} & \dots & a_{kl} \end{pmatrix},$$

имеющую k строк и l столбцов, будем обозначать

$$\begin{pmatrix} a_{\varkappa\lambda} & \begin{matrix} \varkappa \downarrow 1, \dots, k \\ \lambda \to 1, \dots, l \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Здесь запись $\varkappa \downarrow 1, \dots, k$ означает, что $\varkappa = 1$ — первая строка, ..., $\varkappa = k$ есть k-я строка, а запись $\lambda \to 1, \dots, l$ означает, что $\lambda = 1$ — первый столбец, ..., $\lambda = l$ есть l-й столбец матрицы. Вектор считается матрицей, состоящей из единственного столбца.

Набор функций $u_1(x), \dots, u_l(x)$ от переменных $x = (x_1, \dots, x_m)$ (вообще говоря, $l \neq m$) запишем в виде

$$u = u(x) = (u_\lambda(x) \quad \lambda \downarrow 1, \dots, l)$$

и рассмотрим матрицы A_i, B порядка (k, l), элементами которых являются функции от переменного x:

$$\begin{aligned} A_i &= \begin{pmatrix} a_{i\varkappa\lambda}(x) & \begin{matrix} \varkappa \downarrow 1, \dots, k \\ \lambda \to 1, \dots, l \end{matrix} \end{pmatrix}, \\ B &= \begin{pmatrix} b_{\varkappa\lambda}(x) & \begin{matrix} \varkappa \downarrow 1, \dots, k \\ \lambda \to 1, \dots, l \end{matrix} \end{pmatrix}, \end{aligned} \tag{2.7}$$

где $a_{i\varkappa\lambda} \in C^1[G]$, $b_{\varkappa\lambda} \in C[G]$. Введем теперь оператор T, переводящий l-мерный вектор u, принадлежащий как функция от x классу $(C^1[G])^l$ [1]), в k-мерный вектор v, принадлежащий

[1]) Если все l компонент u_λ ($\lambda = 1, \dots, l$) вектора u принадлежат классу $C^p[G]$, то будем записывать это $u \in (C^p[G])^l$. Когда ясно, о каком l идет речь, будем просто писать $u \in C^p[G]$.

как функция от x классу $(C[G])^k$, задаваемый формулой

$$v = Tu = \sum_{i=1}^{m} A_i \partial_i u + Bu, \tag{2.8}$$

т. е.

$$v_\varkappa = \sum_{i=1}^{m} \sum_{\lambda=1}^{l} a_{i\varkappa\lambda} \partial_i u_\lambda + \sum_{\lambda=1}^{l} b_{\varkappa\lambda} u_\lambda \qquad (\varkappa = 1, \ldots, k).$$

Оператор T является линейным оператором. При этом k не обязательно равно l.

Пусть A_i^*, B^* обозначают матрицы, сопряженные к матрицам A_i и B соответственно, т. е.

$$A_i^* = \begin{pmatrix} a_{i\varkappa\lambda} & \begin{matrix} \lambda \downarrow 1, \ldots, l \\ \varkappa \to 1, \ldots, k \end{matrix} \end{pmatrix}, \quad B^* = \begin{pmatrix} b_{\varkappa\lambda} & \begin{matrix} \lambda \downarrow 1, \ldots, l \\ \varkappa \to 1, \ldots, k \end{matrix} \end{pmatrix}. \tag{2.9}$$

Определим теперь скалярное произведение (v, w) для k-мерных векторов v и w, компонентами которых являются функции от x, заданные на G:

$$(v, w) = \int_G \left(\sum_{\varkappa=1}^{k} v_\varkappa w_\varkappa \right) dx. \tag{2.10}$$

Согласно (2.8), при произвольном w

$$(v, w) = \sum_{i=1}^{m} (A_i \partial_i u, w) + (Bu, w),$$

где $v, w \in (C_0^1)^k$. Интегрируя по частям и учитывая, что $w \in (C_0^1)^k$, получаем

$$(A_i \partial_i u, w) = \int_G \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{\lambda=1}^{l} a_{i\varkappa\lambda} \partial_i u_\lambda \cdot w_\varkappa \, dx =$$

$$= - \int_G \sum_{\lambda=1}^{l} u_\lambda \partial_i \left(\sum_{\varkappa=1}^{k} a_{i\varkappa\lambda} w_\varkappa \right) dx = - \left(u, \partial_i \left(A_i^* w\right)\right).$$

Так как очевидно, что $(Bu, w) = (u, B^* w)$, то

$$(v, w) = \left(u, - \sum_{i=1}^{m} \partial_i \left(A_i^* w\right) + B^* w\right). \tag{2.11}$$

Отсюда, если определить оператор T^* формулой

$$T^*w = -\sum_{i=1}^{m} \partial_i (A_i^* w) + B^* w, \tag{2.12}$$

то из (2.8), (2.11) и (2.12) следует, что

$$(Tu, w) = (u, T^*w) \quad \left(u \in (C^1)^l,\ w \in (C_0^1)^k\right) \tag{2.13}$$

для произвольных $u \in (C^1)^l$, $w \in (C_0^1)^k$. Дифференциальный оператор T^* называется оператором, формально сопряженным к оператору T. Из (2.12) и из того, что $A_i \in C^1$, следует, что [1])

$$T^* = -\sum_{i=1}^{m} A_i^* \partial_i + \left(B^* - \sum_{i=1}^{m} \partial_i A_i^* \cdot \right). \tag{2.14}$$

Так как $(A_i^*)^* = A_i$ и $(B^*)^* = B$, то понятно, что

$$(T^*)^* = T. \tag{2.15}$$

Замечание. Равенство (2.13) справедливо также, если $u \in C_0^1$, а $w \in C^1$, но, вообще говоря, может не выполняться, если и u, и w принадлежат C^1.

2.3. Сильные расширения дифференциальных операторов

Пусть G — открытое множество в m-мерном евклидовом пространстве и пусть в $C^k[G]$ задан дифференциальный оператор T формулой

$$Tu = a_0(x)\, u + \sum_{\varkappa=1}^{k} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} a_{i_1 \ldots i_\varkappa}(x)\, \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa} u, \tag{2.16}$$

где $a_{i_1 \ldots i_\varkappa} \in C^\varkappa[G]$, $u \in C^k[G]$. Оператор T можно рассматривать как линейный оператор, действующий из линейного подмножества $C^\infty[G]$ пространства $\mathfrak{L}^2[G]$ в $\mathfrak{L}^2[G]$ (или в $C[G]$). Для того чтобы расширить оператор T, потребуется следующая лемма.

---

[1]) Точка $\cdot$ в записи $\partial_i A_i^* \cdot$ означает, что оператор ∂_i действует только на A_i^*.

Лемма 2.3.1. *Оператор T, рассматриваемый на C^∞, является замыкаемым (в $\mathfrak{L}^2$) оператором.*

Доказательство. Пусть $u_n \in C^\infty$ и $u_n \to 0\,(\mathfrak{L}^2)$, $Tu_n \to v\,(\mathfrak{L}^2)$. Если воспользоваться оператором T^*, формально сопряженным к оператору T, то для произвольных $w \in C_0^\infty$

$$(Tu_n,\ w) = (u_n,\ T^*w).$$

Следовательно [1],

$$(Tu_n,\ w)_{S(w)} = (u_n,\ T^*w)_{S(w)}.$$

Из компактности носителя $S(w)$ функции w следует, что если $\| u_n - 0 \|_{S(w)} \to 0$ и $\| Tu_n - v \|_{S(w)} \to 0$, то

$$(v,\ w)_{S(w)} = (0,\ T^*w)_{S(w)} = 0.$$

Следовательно, $(v,\ w) = 0$ для любых $w \in C_0^\infty$ и, значит, $v = 0$. ▮

Из (1.4) и (1.5) следует, что оператор T, являющийся линейным замыкаемым оператором, можно расширить до замкнутого линейного оператора $T_{(s)}$ [2], определенного на линейном подмножестве $\mathfrak{F}_{(s)}$ пространства $\mathfrak{L}^2$, следующим образом: если

$$u_n \in C^\infty, \quad u_n \to u\,(\mathfrak{L}^2), \quad Tu_n \to v\,(\mathfrak{L}^2),$$

то будем считать, что

$$u \in \mathfrak{F}_{(s)}, \quad T_{(s)}u = v.$$

Тем самым оператор $T_{(s)}$ определен однозначно и с областью определения $\mathfrak{F}_{(s)}$ он является минимальным замкнутым расширением оператора T. Этот оператор называется *сильным расширением* оператора T.

Выше речь шла о расширении до замкнутого дифференциального оператора любого порядка, применяемого к скалярным функциям, но совершенно аналогично можно расширить до замкнутого и матричный дифференциальный оператор

---

[1] Если $G_1 \subset G$, то $(u,\ v)_{G_1} = \int\limits_{G_1} u(x)\, v(x)\, dx$.

[2] Буква s, которой отмечается определяемое расширение, — начальная буква слова „strong" — „сильный" (*англ.*). — *Прим. ред.*

первого порядка, применяемый к вектор-функциям. Если, воспользовавшись обозначениями предыдущего параграфа, записать

$$T = \sum_{i=1}^{m} A_i \partial_i + B, \tag{2.17}$$

то T является линейным оператором, действующим из пространства $(C^\infty)^l$, принадлежащего $(\mathfrak{L}^2)^l$, в пространство $(C)^k$, принадлежащее $(\mathfrak{L}^2)^k$ [1]. Замыкаемость этого оператора доказывается так же, как и выше. Таким образом, если [2]

$$u_n \in (C^\infty)^l, \quad u_n \to u \quad ((\mathfrak{L}^2)^l), \quad Tu_n \to v \quad ((\mathfrak{L}^2)^k),$$

то будем считать, что

$$u \in \mathfrak{F}^l_{(s)}, \quad T_{(s)}u = v.$$

Тем самым оператор $T_{(s)}$ определен однозначно и с областью определения $\mathfrak{F}^l_{(s)}$ он является минимальным замкнутым расширением оператора T. Этот оператор $T_{(s)}$ называется *сильным расширением* оператора T.

Замечание. Очевидно, что как в случае дифференциального оператора любого порядка, применяемого к скалярным функциям, так и в случае матричного дифференциального оператора первого порядка, применяемого к вектор-функциям, можно, поступая совершенно аналогично вышеизложенному, расширить оператор T (рассматриваемый как оператор, заданный на $C^\infty[G] \cap L^2[G]$) до замкнутого линейного оператора $T_{[s]}$, действующего из линейного подмножества пространства $L^2[G]$ в пространство $L^2[G]$. При этом область определения $\mathfrak{F}_{[s]}$ оператора $T_{[s]}$ уже, чем область определения $\mathfrak{F}_{(s)}$ оператора $T_{(s)}$. Если же сузить область определения функций, к которым применим оператор $T_{(s)}$, до некоторого множества G_1 ($G_1 \prec G$), то оператор $T_{(s)}$ будет совпадать с оператором $T_{[s]}$ относительно функций, определенных на G_1.

---

[1]) Линейные пространства $(C^\infty)^l$, $(C)^k$ не являются, однако, подпространствами в $(\mathfrak{L}^2)^l$, $(\mathfrak{L}^2)^k$, не будучи замкнутыми подмножествами этих пространств. — *Прим. ред.*

[2]) Запись $u \in (\mathfrak{L}^2)^l$ означает, что для всех l компонент вектора u имеем $u_\lambda \in \mathfrak{L}^2$ ($\lambda = 1, \ldots, l$). Когда ясно, о каком l идет речь, будем просто писать $u \in \mathfrak{L}^2$.

2.4. Слабые расширения дифференциальных операторов

Пусть T — дифференциальный оператор, определенный формулой (2.16) в § 2.3, и пусть T^* — дифференциальный оператор, формально сопряженный к T. Тогда для произвольных $u \in C^\infty$ и $w \in C_0^\infty$ имеет место равенство

$$(Tu, w) = (u, T^* w). \tag{2.18}$$

Рассмотрим расширение оператора T, полученное из формулы (2.18). Более точно, если для некоторых u, $v \in \mathfrak{L}^2$ равенство

$$(u, T^* w) = (v, w) \quad (w \in C_0^\infty) \tag{2.19}$$

справедливо для любых $w \in C_0^\infty$, то будем считать, что[1])

$$u \in \mathfrak{F}_{(w)}, \quad T_{(w)} u = v. \tag{2.20}$$

При этом очевидно, что $\mathfrak{F}_{(w)} \supset C^\infty$ и если $u \in C^\infty$, то $T_{(w)} u = Tu$. Такое расширение $T_{(w)}$ оператора T определяется однозначно. В самом деле, из соотношений

$$(u, T^* w) = (v, w) \quad \text{и} \quad (u, T^* w) = (v', w) \quad (w \in C_0^\infty)$$

следует, что $(v - v', w) = 0$ для любого $w \in C_0^\infty$, а поэтому должно выполняться равенство $v = v'$. Так определенный оператор $T_{(w)}$ называется *слабым расширением* оператора T. Непосредственно из определения оператора $T_{(w)}$ имеем:

$$\text{если} \quad v \in \mathfrak{F}_{(w)}, \quad \text{то} \quad (u, T^* w) = (T_{(w)} u, w) \quad (w \in C_0^\infty), \tag{2.21}$$

откуда легко следует линейность оператора $T_{(w)}$. Кроме того, оператор $T_{(w)}$ является замкнутым оператором (действующим из линейного подмножества $\mathfrak{F}_{(w)}$ пространства $\mathfrak{L}^2$ в пространство $\mathfrak{L}^2$). Действительно, если

$$u_n \in \mathfrak{F}_{(w)}, \quad u_n \to u \, (\mathfrak{L}^2), \quad T_{(w)} u_n \to v \, (\mathfrak{L}^2),$$

то для произвольного $w \in C_0^\infty$

$$(u_n, T^* w) = (T_{(w)} u_n, w) \quad (w \in C_0^\infty).$$

Но написанное скалярное произведение можно рассматривать как скалярное произведение на носителе $S(w)$ функции w,

---

[1]) Буква w, которой отмечается определяемое расширение, — начальная буква слова „weak" — „слабый" (*англ.*). — *Прим. ред.*

а так как $S(w)$ является компактным множеством, то под знаком скалярного произведения можно перейти к пределу.

Таким образом, для произвольного $w \in C_0^\infty$

$$\left(u,\ T^* w\right) = (v,\ w) \quad \left(w \in C_0^\infty\right)$$

и, значит, $u \in \mathfrak{F}_{(\mathrm{w})}$ и $v = T_{(\mathrm{w})} u$.

Следовательно, оператор $T_{(\mathrm{w})}$, так же как и оператор $T_{(\mathrm{s})}$, является замкнутым линейным оператором, расширяющим оператор T. Так как оператор $T_{(\mathrm{s})}$ — минимальное замкнутое расширение оператора T, то $\mathfrak{F}_{(\mathrm{s})} \subset \mathfrak{F}_{(\mathrm{w})}$ и потому оператор $T_{(\mathrm{w})}$ либо является расширением также и оператора $T_{(\mathrm{s})}$, либо совпадает с последним (т. е. $\mathfrak{F}_{(\mathrm{s})} = \mathfrak{F}_{(\mathrm{w})}$). Область определения $\mathfrak{F}_{(\mathrm{w})}$ оператора $T_{(\mathrm{w})}$ — слабого расширения оператора T — шире, чем область определения $\mathfrak{F}_{(\mathrm{s})}$ оператора $T_{(\mathrm{s})}$ — сильного расширения оператора T. Поэтому хотя это и звучит несколько странно, слабое расширение является „широким“, а сильное — „узким“.

Поступая совершенно аналогично, можно определить слабое расширение для матричного линейного оператора первого порядка

$$T = \sum_{i=1}^{m} A_i \partial_i + B,$$

действующего из $(C^\infty)^l$ в $(C)^k$. А именно, если для некоторых $u \in (\mathfrak{L}^2)^l$ и $v \in (\mathfrak{L}^2)^k$ равенство

$$\left(u,\ T^* w\right) = (v,\ w) \quad \left(w \in \left(C_0^\infty\right)^k\right)$$

имеет место при любых $w \in \left(C_0^\infty\right)^k$, то будем считать, что $u \in \mathfrak{F}^l_{(\mathrm{w})}$ и $T_{(\mathrm{w})} u = v$. Тем самым оператор $T_{(\mathrm{w})}$ определен однозначно и является замкнутым линейным оператором, расширяющим оператор T. При этом очевидно, что

$$\left(C^\infty\right)^l \subset \mathfrak{F}^l_{(\mathrm{s})} \subseteq \mathfrak{F}^l_{(\mathrm{w})}$$

и

$$\text{если} \quad u \in \mathfrak{F}^l_{(\mathrm{w})}, \quad \text{то} \quad (u,\ T^* w) = \left(T_{(\mathrm{w})} u,\ w\right) \quad \left(w \in \left(C_0^\infty\right)^k\right).$$

Заметим, что если $u \in C^\infty$, то для дифференциального оператора порядка k значение функции Tu в точке $x = x_0$ определяется значениями функции $u(x)$ в сколь угодно малой окрестности точки x_0. Это свойство сохраняется и для дифференциальных операторов $T_{(w)}$ и $T_{(s)}$, расширяющих оператор T.

Действительно, если в (2.19) рассматривать только функции w, носитель которых $S(w)$ принадлежит некоторой произвольной, но фиксированной окрестности U точки $x_0 (U \in G)$, то для таких $w \in C_0^\infty [U]$ имеет место равенство

$$\left(u,\ T^* w\right)_U = \left(T_{(w)} u,\ w\right)_U \quad \left(w \in C_0^\infty [U]\right),$$

и, следовательно, значение функции $T_{(w)} u$ в точке $x \in U$ определяется только значением функции u в точке $x \in U$. Но $\mathfrak{F}_{(s)} \subset \mathfrak{F}_{(w)}$, и из того, что $u \in \mathfrak{F}_{(s)}$, следует, что $T_{(s)} u = T_{(w)} u$. Поэтому этим свойством обладает также оператор $T_{(s)}$. Для случая матричных операторов первого порядка, применяемых к вектор-функциям, дело обстоит совершенно аналогично. Указанное свойство дифференциальных операторов называется свойством *локальности*.

Итак, область определения оператора $T_{(s)}$ принадлежит области определения оператора $T_{(w)}$, и задача состоит в том, чтобы выяснить, совпадают ли эти области определения, а значит, и сами операторы. В случае постоянных коэффициентов для дифференциальных операторов высших порядков можно доказать, что операторы $T_{(s)}$ и $T_{(w)}$ совпадают; для матричных дифференциальных операторов первого порядка это утверждение можно доказать в предположении, что $A_i \in C^1$, $B \in C$ (К. О. Фридрихс). В последующих параграфах приводится решение поставленной задачи.

Упражнение. Показать, что для дифференциального оператора первого порядка $T = \sum A_i \partial_i + B$ справедливо утверждение: если $u \in \mathfrak{F}_{(w)}$ и $\alpha \in C^1$, то $\alpha u \in \mathfrak{F}_{(w)}$ и $T(\alpha u) = \alpha T u + \sum \partial_i \alpha \cdot A_i$.

2.5. Операторы осреднения

2.5.1. Интегральные операторы. Для доказательства совпадения операторов $T_{(s)}$ и $T_{(w)}$ применяются операторы осреднения[1]). Так как операторы осреднения являются частным случаем интегральных операторов, то рассмотрим сначала некоторые общие свойства интегральных операторов.

---

[1]) В английской терминологии *mollifiers*.

Пусть измеримая функция $h(x, x')$ определена для (x, x'), где $x \in G$, $x' \in G$. Рассмотрим оператор H, действующий на функции $u \in L^2[G]$ по формуле

$$Hu(x) = \int_G h(x, x')\, u(x')\, dx'. \tag{2.22}$$

Такой оператор называется *интегральным оператором с ядром* $h(x, x')$.

Если, кроме того, существуют такие числа α и α', что

$$\int_G |h(x, x')|\, dx' \leqslant \alpha \quad (x \in G), \qquad \int_G |h(x, x')|\, dx \leqslant \alpha' \quad (x' \in G), \tag{2.23}$$

то формула (2.22) определяет линейный оператор H, действующий из $L^2[G]$ в $L^2[G]$. Действительно, согласно (2.22),

$$|Hu(x)|^2 \leqslant \left(\int_G |h(x, x')| \cdot |u(x')|\, dx' \right)^2 =$$
$$= \left(\int_G \sqrt{|h(x, x')|} \cdot \sqrt{|h(x, x')|} \cdot |u(x')|\, dx' \right)^2 \leqslant$$
$$\leqslant \int_G |h(x, x')\, dx' \cdot \int_G |h(x, x')| \cdot |u(x')|^2\, dx'$$

(интегралы имеют смысл для почти всех $x \in G$) и, следовательно,

$$\int_G |Hu(x)|^2\, dx \leqslant \alpha \int_G \int_G |h(x, x')| \cdot |u(x')|^2\, dx' \cdot dx.$$

Поэтому

$$\|Hu\|^2 \leqslant \alpha\alpha' \|u\|^2 \qquad (\alpha\alpha' < \infty). \tag{2.24}$$

Из (2.24) следует, что H — ограниченный оператор, действующий из $L^2[G]$ в $L^2[G]$. Линейность оператора H легко следует из (2.22).

Если $u, v \in L^2[G]$, то можно записать равенство

$$(Hu, v) = \int_G \left(\int_G h(x, x')\, u(x')\, dx' \right) v(x)\, dx =$$
$$= \int_G u(x') \left(\int_G h(x, x')\, v(x)\, dx \right) dx'.$$

При этом если определить интегральный оператор H^* формулой

$$H^*v(x)=\int_G h(x', x)\,v(x')\,dx' \qquad (x\in G), \tag{2.25}$$

то для любых u, $v\in L^2$

$$(Hu, v)=(u, H^*v) \qquad (u, v\in L^2). \tag{2.26}$$

Так определенный оператор H^* называется интегральным оператором, сопряженным к оператору H. Для оператора H^* справедливо неравенство, аналогичное (2.24):

$$\| H^*v\|^2\leqslant \alpha\alpha'\,\| v\|^2 \qquad (v\in L^2).$$

Ядро оператора H^* получается из ядра оператора H, если в последнем заменить x на x' и x' на x. Если, в частности, ядро интегрального оператора является симметричной функцией переменных x и x', т. е. $h(x, x')=h(x', x)$, то в этом случае сопряженный интегральный оператор совпадает с исходным интегральным оператором, т. е. $H^*=H$.

2.5.2. Операторы осреднения. Определим теперь операторы осреднения. Пусть $j(x)$ — функция, определенная в m-мерном евклидовом пространстве E^m, такая, что

$$\left.\begin{array}{l} j(x)\in C_0^\infty\left[E^m\right]; \quad j(x)\geqslant 0; \quad j(-x)=j(x); \\ \text{если } |x|>1, \text{ то } j(x)=0 \text{ и } \displaystyle\int_{E^m} j(x)\,dx=1. \end{array}\right\} \tag{2.27}$$

В качестве $j(x)$ можно взять, например, функцию

$$j(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{\gamma}\exp\left(\dfrac{-1}{1-|x|^2}\right) & \text{при } |x|<1,\\ 0 & \text{при } |x|\geqslant 1, \end{cases}$$

где

$$\gamma=\int_{|x|<1}\exp\left(\frac{-1}{1-|x|^2}\right)dx.$$

Для достаточно малого $\delta > 0$ определим функцию $j_\delta(x, x')$ формулой [1])

$$j_\delta(x, x') = \delta^{-m} j\left(\frac{x - x'}{\delta}\right). \tag{2.28}$$

Пусть $G_{(\delta)}$ обозначает открытое множество, состоящее из тех точек множества G, которые отстоят от границы G на расстоянии, большем чем δ. Тогда имеют место соотношения

$$\int_G j_\delta(x, x')\,dx' = 1 \quad \text{для} \quad x \in G_{(\delta)} \tag{2.29}$$

и

$$\int_G |j_\delta(x, x')|\,dx' \leqslant 1 \quad (x \in G), \quad \int_G |j_\delta(x, x')|\,dx \leqslant 1 \quad (x' \in G). \tag{2.30}$$

Определим теперь интегральный оператор J_δ, действующий на функции $u \in L^2[G]$, формулой

$$J_\delta u(x) = \int_G j_\delta(x, x')\,u(x')\,dx'. \tag{2.31}$$

Так же, как из условий (2.23) было получено неравенство (2.24), из условий (2.30) можно получить

$$\|J_\delta u\| \leqslant \|u\|. \tag{2.32}$$

Далее, из определения оператора J_δ следует

$$\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa} J_\delta u(x) = \int_G \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa} j_\delta(x, x') \cdot u(x')\,dx' \tag{2.33}$$

и поэтому, если $u \in L^2[G]$, то $J_\delta u \in C^\infty[G]$. Определенный таким образом оператор J_δ и называют оператором *осреднения.*

---

[1]) При $m > 1$ запись $j\left(\frac{x - x'}{\delta}\right)$ носит условный характер. Но нетрудно убедиться, что можно представить себе $j\left(\frac{x - x'}{\delta}\right)$, например, как произведение $j\left(\frac{x_1 - x_1'}{\delta}\right) \ldots j\left(\frac{x_m - x_m'}{\delta}\right)$. — *Прим. ред.*

Теорема 2.5.1. *Если* $u \in L^2[G]$, *то* $\lim\limits_{\delta \to 0} \| J_\delta u - u \| = 0$.

Доказательство. Пусть сначала $u \in C_0[G]$, и пусть G_0 — такое открытое множество, что $S(u) \subset G_0 \prec G$. Из равномерной непрерывности функции u на G_0^a следует, что для любого $\varepsilon > 0$ существует такое достаточно малое $\delta > 0$, что как только $|x - x'| < \delta$ и $x, x' \in G_0^a$, то

$$|u(x') - u(x)| < \varepsilon. \tag{2.34}$$

Но если δ достаточно мало, то $G_0^a \subset G_\delta$. Поэтому если $x \in C_0^a$, то, согласно (2.29),

$$u(x) = \int\limits_G j_\delta(x, x') u(x)\, dx',$$

и, следовательно, если $x \in G_0^a$, то

$$J_\delta u(x) - u(x) = \int\limits_G j_\delta(x, x')(u(x') - u(x))\, dx' =$$
$$= \int\limits_{|x'-x|<\delta} j_\delta(x, x')(u(x') - u(x))\, dx'$$

(так как $j_\delta(x, x') = 0$ для $|x - x'| \geqslant \delta$). Учитывая (2.34), получаем отсюда, что если δ достаточно мало и $x \in G_0^a$, то

$$|J_\delta u(x) - u(x)| < \int\limits_{|x'-x|<\delta} \varepsilon \cdot j_\delta(x, x')\, dx' = \varepsilon. \tag{2.35}$$

Если теперь $x \in G - G_0^a (\subset G - S(u))$, то $u(x) = 0$. Но для достаточно малых δ имеем $G_{0(\delta)} \supset S(u)$ и потому для $x \in G - G_0^a$

$$J_\delta u(x) = \int\limits_{|x'-x|<\delta} j_\delta(x, x') u(x')\, dx' = 0,$$

а тогда для $x \in G - G_0^a$ при достаточно малом δ получаем

$$|J_\delta u(x) - u(x)| = 0. \tag{2.36}$$

Из (2.35) и (2.36) следует, что для $u \in C_0[G]$

$$\lim_{\delta \to 0} \| J_\delta u - u \| = 0.$$

Если теперь $u \in L^2[G]$, то существует такое $u_0 \in C_0[G]$, что $\| u_0 - u \| < \varepsilon/3$. Взяв достаточно малое δ и воспользовавшись этой функцией u_0, получим

$$\| J_\delta u - u \| \leqslant \| J_\delta (u - u_0) \| + \| J_\delta u_0 - u_0 \| + \| u_0 - u \| \leqslant$$
$$\leqslant 2 \| u - u_0 \| + \| J_\delta u_0 - u_0 \| < \varepsilon. \blacksquare$$

Замечание 1. Если $u \in \mathfrak{L}^2[G]$, то для некоторых $x \in G$ выражение $(J_\delta u)(x)$ может и не иметь смысла, однако если $x \in G_{(\delta)}$, то ясно, что выражение это имеет смысл и

$$J_\delta u \in C^\infty [G_{(\delta)}] \quad (\subset \mathfrak{L}^2 [G_{(\delta)}]).$$

Пусть G_0 и G_1 — произвольные открытые множества, причем $G_0 \prec G_1 \prec G$. При достаточно малом δ ($\delta > 0$) имеем $G_0^a \subset G_{1\,(\delta)}$. Пусть $u \in \mathfrak{L}^2[G]$; обозначим через $u'(x)$ такую функцию, которая совпадает с $u(x)$ для $x \in G_1$ и равна нулю, когда $x \in G - G_1$. Так как

$$\| J_\delta u - u \|_{G_0} = \| J_\delta u' - u' \|_{G_0} \leqslant \| J_\delta u' - u' \|_G,$$

то понятно, что при $\delta \to 0$

$$\| J_\delta u - u \|_{G_0} \to 0.$$

Замечание 2. Пусть $u \in \mathfrak{L}^2[G]$, $w \in C_0[G_{(\delta)}]$. Так как $J_\delta u \in L^2[S(w)]$, $u \in L^2[U_\delta(S(w))]$ [1]) и $J_\delta w \in C_0[G]$, то

$$(J_\delta u, w) = (J_\delta u, w)_{S(w)} =$$
$$= \int\limits_{S(w)} w(x) \left(\int\limits_{|x'-x|<\delta} j_\delta(x, x') u(x')\, dx' \right) dx =$$
$$= \int\limits_{U_\delta(S(w))} u(x') \left(\int\limits_{S(w)} j_\delta(x, x') w(x)\, dx \right) dx' =$$
$$= (u, J_\delta^* w)_{U_\delta(S(w))} = (u, J_\delta^* w).$$

Учитывая, что $j_\delta(x, x') = j_\delta(x', x)$, получаем $J_\delta^* w = J_\delta w$, поэтому, если $u \in \mathfrak{L}^2[G]$, $w \in C_0[G_\delta]$, то

$$(J_\delta u, w) = (u, J_\delta w).$$

[1]) $U_\delta(S(w)) = \{x\colon |x - y| < \delta,\ y \in S(w)\}$.

2.6. Случай дифференциальных операторов с постоянными коэффициентами

Лемма 2.6.1. *Если T — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами и $w \in C_0^\infty[G]$, то*

$$TJ_\delta w = J_\delta Tw \quad \left(w \in C_0^\infty\right). \tag{2.37}$$

Доказательство. Сначала докажем, что $\partial_i J_\delta w = J_\delta \partial_i w$. Действительно, из равенства[1] $\partial_i j_\delta(x, x') = -\partial'_i j_\delta(x, x')$ следует, что

$$\partial_i J_\delta w = \int_G \partial_i j_\delta(x, x') w(x')\,dx' = -\int_G \partial'_i j_\delta(x, x') w(x')\,dx' =$$
$$= \int_G j_\delta(x, x') \partial'_i w(x')\,dx' = J_\delta\,\partial_i w.$$

При $k > 1$, повторно применяя полученное равенство, получаем

$$\partial_{i_1 \ldots i_\varkappa} J_\delta w = J_\delta\,\partial_{i_1 \ldots i_\varkappa} w$$

для любого $\varkappa$, $0 < \varkappa \leqslant k$. ∎

Лемма 2.6.2. *Пусть $T_{(\mathrm{w})}$ — слабое расширение дифференциального оператора T с постоянными коэффициентами; тогда для любого $u \in \mathfrak{F}_{(\mathrm{w})}$ (области определения оператора $T_{(\mathrm{w})}$) и для любого $x \in G_\delta$ справедливо равенство*

$$(TJ_\delta u)(x) = (J_\delta T_{(\mathrm{w})} u)(x). \tag{2.38}$$

Доказательство. Так как $J_\delta u \in C^\infty[G_{(\delta)}]$, то при произвольном $w \in C_0^\infty[G_{(\delta)}]$

$$(TJ_\delta u, w) = (J_\delta u, T^* w) = (u, J_\delta T^* w).$$

Оператор T^* — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, поэтому, согласно лемме 2.6.1, $J_\delta T^* w = T^* J_\delta w$. Из того, что $u \in \mathfrak{F}_{(\mathrm{w})}$ и $J_\delta w \in C_0^\infty[G]$, следует, что

$$(u, J_\delta T^* w) = (u, T^* J_\delta w) = (T_{(\mathrm{w})} u, J_\delta w) = (J_\delta T_{(\mathrm{w})} u, w),$$

а значит,

$$(TJ_\delta u, w) = (J_\delta T_{(\mathrm{w})} u, w).$$

---

[1]) ∂' означает дифференцирование по переменной x'.

Поскольку w — произвольная функция, принадлежащая $C_0^\infty[G_{(\delta)}]$, лемма доказана. ▮

Теорема 2.6.1. *Пусть T, $T_{(\mathrm{w})}$, $\mathfrak{F}_{(\mathrm{w})}$ — те же, что и в лемме* 2.6.2, *а G_0 — произвольное открытое множество, такое, что $G_0 \prec G$. Тогда для $u \in \mathfrak{F}_{(\mathrm{w})}$*

$$\| J_\delta u - u \|_{G_0} \to 0, \quad \| T(J_\delta u) - T_{(\mathrm{w})} u \|_{G_0} \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Доказательство. Так как $u \in \mathfrak{L}^2[G]$, $T_{(\mathrm{w})} u \in \mathfrak{L}^2[G]$, то, согласно замечанию 1 из § 2.5,

$$\| J_\delta u - u \|_{G_0} \to 0, \quad \| J_\delta T_{(\mathrm{w})} u - T_{(\mathrm{w})} u \|_{G_0} \to 0$$

при $\delta \to 0$. Но если δ ($\delta > 0$) достаточно мало, то $G_0 \subset G_{(\delta)}$ и, следовательно, в силу леммы 2.6.2 $(J_\delta T_{(\mathrm{w})} u)(x) = (T J_\delta u)(x)$ для $x \in G_0$. ▮

Лемма 2.6.3. *Пусть T — дифференциальный оператор на G, заданный формулой* (2.2) *из* § 2.1, *коэффициенты которого — непрерывные на G функции. Если $u \in \mathfrak{L}^2[G]$ и, кроме того, для любого открытого множества G_0, такого, что $G_0 \prec G$, функция u принадлежит $\mathfrak{F}_{(\mathrm{s})}[G_0]$, то $u \in \mathfrak{F}_{(\mathrm{s})}[G]$.*

Доказательство. Пусть последовательность открытых множеств $\{G_n\}$ такова, что $G_n \prec G_{n+1}$ и $\bigcup_{n=1}^{\infty} G_n = G$. По предположению леммы $u \in \mathfrak{F}_{(\mathrm{s})}[G_{n+1}]$. Из определения семейства функций $\mathfrak{F}_{(\mathrm{s})}[G_{n+1}]$ следует, что существуют такие функции $u_{(n)}$, для которых

$$u_{(n)} \in C^\infty[G_{n+1}], \quad \| u_{(n)} - u \|_{G_n} < \frac{1}{n}, \quad \| T u_{(n)} - T_{(\mathrm{s})} u \|_{G_n} < \frac{1}{n},$$

Тогда если определить функции $u'_{(n)}$ соотношениями

$$u'_{(n)}(x) = u_{(n)}(x) \quad \text{для} \quad x \in G_n, \quad u'_n(x) = 0 \quad \text{для} \quad x \in G - G_n,$$

то

$$\left.\begin{aligned} & u'_{(n)} \in L^2[G] \cap C^\infty[G_n], \quad \| u'_{(n)} - u \|_{G_n} < \frac{1}{n}, \\ & \| T u'_{(n)} - T_{(\mathrm{s})} u \|_{G_n} < \frac{1}{n}, \quad J_\delta u'_{(n)} \in G^\infty[G]. \end{aligned}\right\} \tag{2.39}$$

Если положить оператор T в теореме 2.6.1 равным $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa}$, то в силу того, что $G_{n-1} \Subset G_n$, получим

$$\| J_\delta u'_{(n)} - u'_{(n)} \|_{G_{n-1}} \to 0,$$

$$\| \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa} J_\delta u'_{(n)} - \partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa} u'_{(n)} \|_{G_{n-1}} \to 0$$

при $\delta \to 0$. Но коэффициенты при $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa}$ у оператора T ограничены на G_{n-1}, поэтому

$$\| TJ_\delta u'_{(n)} - Tu'_{(n)} \|_{G_{n-1}} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Значит, можно выбрать такие достаточно малые положительные числа δ_n, стремящиеся к 0 при $n \to \infty$, что

$$\| J_{\delta_n} u'_{(n)} - u'_{(n)} \|_{G_{n-1}} < \frac{1}{n}, \quad \| TJ_{\delta_n} u'_{(n)} - Tu'_{(n)} \|_{G_{n-1}} < \frac{1}{n}. \qquad (2.40)$$

Поэтому если положить $J_{\delta_n} u'_{(n)} = u_n$, то из (2.39), (2.40) и из того, что $G_{n-1} \subset G_n$, следует, что

$$u_n \in C^\infty[G], \quad \| u_n - u \|_{G_{n-1}} < \frac{2}{n}, \quad \| Tu_n - T_{(s)} u \|_{G_{n-1}} < \frac{2}{n}.$$

Каково бы ни было открытое множество G_0 ($G_0 \Subset G$), при достаточно большом n справедливо включение $G_0 \subset G_{n-1}$, откуда вытекает, что

$$u_n \to u \, (\mathfrak{L}^2), \quad Tu_n \to T_{(s)} u \, (\mathfrak{L}^2) \quad \text{при} \quad n \to \infty.$$

Следовательно, $u \in \mathfrak{F}_{(s)}[G]$. ▌

Теорема 2.6.2. *Если T — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, то $T_{(w)} = T_{(s)}$.*

Доказательство. Семейство функций $\mathfrak{F}_{(s)}$ принадлежит $\mathfrak{F}_{(w)}$, и если $u \in \mathfrak{F}_{(s)}[G]$, то $T_{(s)} u = T_{(w)} u$. Но согласно теореме 2.6.1, если $u \in \mathfrak{F}_{(w)}[G]$, то $u \in \mathfrak{F}_{(s)}[G_0]$ для любого открытого множества G_0 ($G_0 \Subset G$). Следовательно, в силу леммы 2.6.3 функция u принадлежит $\mathfrak{F}_{(s)}[G]$, т. е. $\mathfrak{F}_{(w)} = \mathfrak{F}_{(s)}$, а тогда и $T_{(w)} = T_{(s)}$. ▌

Если $G = E^m$, то $G_{(\delta)} = G$. Поэтому из леммы 2.6.2 и теоремы 2.5 получаем

Следствие 2.6. *Если T — дифференциальный оператор с постоянными коэффициентами, $G = E^m$, $u \in \mathfrak{F}_{(\mathrm{w})} \cap L^2$ и $T_{(\mathrm{w})}u \in L^2$, то*

$$\| J_\delta u - u \|_{E^m} \to 0$$

при $\delta \to 0$.

2.7. Случай матричных дифференциальных операторов первого порядка

2.7.1. Матричные интегральные операторы. Пусть ξ и η — векторы размерности l и k соответственно, а K — матрица порядка $(k \times l)$:

$$\xi = (\xi_\lambda \quad \lambda \downarrow 1, \ldots, l), \quad \eta = (\eta_\varkappa \quad \varkappa \downarrow 1, \ldots, k),$$

$$K = \left(K_{\varkappa\lambda} \begin{matrix} \varkappa \downarrow 1, \ldots, k \\ \lambda \to 1, \ldots, l \end{matrix} \right).$$

Если $\eta = K\xi$, $|\xi| = \sqrt{\sum_{\lambda=1}^{l} |\xi_\lambda|^2}$, $|\eta| = \sqrt{\sum_{\varkappa=1}^{k} |\eta_\varkappa|^2}$ и, кроме того,

$$(K)_1 = \max_{\varkappa} \sum_{\lambda=1}^{l} |K_{\varkappa\lambda}|, \quad (K)_2 = \max_{\lambda} \sum_{\varkappa=1}^{k} |K_{\varkappa\lambda}|, \tag{2.41}$$

то выполняется неравенство

$$|\eta|^2 \leqslant (K)_1 (K)_2 |\xi|^2. \tag{2.42}$$

В самом деле,

$$|\eta|^2 = \sum_{\varkappa=1}^{k} \left| \sum_{\lambda=1}^{l} K_{\varkappa\lambda}\xi_\lambda \right|^2 \leqslant \sum_{\varkappa=1}^{k} \left(\sum_{\lambda=1}^{l} \sqrt{|K_{\varkappa\lambda}|} \cdot \sqrt{|K_{\varkappa\lambda}|} \cdot |\xi_\lambda| \right)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \sum_{\varkappa=1}^{k} \left(\sum_{\lambda=1}^{l} |K_{\varkappa l}| \cdot \sum_{\lambda=1}^{l} |K_{\varkappa\lambda}| \cdot |\xi_\lambda|^2 \right) \leqslant (K)_1 (K)_2 |\xi|^2.$$

Пусть теперь K будет функцией, определенной для точек (x, x') из $G \times G$, т. е.

$$K(x, x') = \left(K_{\varkappa\lambda}(x, x') \begin{matrix} \varkappa \downarrow 1, \ldots, k \\ \lambda \to 1, \ldots, l \end{matrix} \right).$$

Рассмотрим преобразование

$$v(x)=\int_G K(x,\ x')\,u(x')\,dx',$$

переводящее вектор $u\in(L^2[G])^l$ в вектор $v\in(L^2[G])^k$. При этом

$$v_\varkappa(x)=\int_G\sum_{\lambda=1}^{l}K_{\varkappa\lambda}(x,\ x')\,u_\lambda(x')\,dx' \qquad (\varkappa=1,\ \ldots,\ k).$$

Далее это преобразование мы будем обозначать $v=K[u]$. Оператор $K[\cdot]$ называется *интегральным* оператором *с матричным ядром* $K(x,\ x')$. Определим норму векторов $u\in(L^2)^l$, $v\in(L^2)^k$ формулами

$$\|u\|_G=\sqrt{\int_G|u(x)|^2\,dx}=\sqrt{\int_G\sum_{\lambda=1}^{l}|u_\lambda(x)|^2\,dx},$$

$$\|v\|_G=\sqrt{\int_G|v(x)|^2\,dx}=\sqrt{\int_G\sum_{\varkappa=1}^{k}|v_\varkappa(x)|^2\,dx}.$$

Лемма 2.7.1. *Пусть в обозначениях* (2.4.1)

$$(K)(x,\ x')=\sqrt{(K(x,\ x'))_1\cdot(K(x,\ x'))_2},$$

и пусть

$$\left.\begin{aligned}((K))_1&=\sup_{x\in G}\int_G(K)(x,\ x')\,dx',\\ ((K))_2&=\sup_{x'\in G}\int_G(K)(x,\ x')\,dx.\end{aligned}\right\}\tag{2.43}$$

Тогда справедливо неравенство

$$\|K[u]\|_G^2\leqslant((K))_1\cdot((K))_2\cdot\|u\|_G^2,\tag{2.44}$$

аналогичное неравенству (2.42).

Доказательство. Положим $v=K[u]$. Из неравенства (2.42) следует, что

$$|v(x)|\leqslant\int_G|K(x,\ x')\,u(x')|\,dx'\leqslant\int_G(K)(x,\ x')\,|u(x')|\,dx'.$$

Теперь, воспользовавшись рассуждениями § 2.5, при помощи которых из неравенств (2.23) было выведено неравенство (2.24), получим, что $\|v\|^2 \leqslant ((K))_1 ((K))_2 \|u\|_2$. ▌

Из этой леммы вытекает, что если $((K))_1 < \infty$ и $((K))_2 < \infty$, то $K[\cdot]$ — ограниченный линейный оператор, действующий из $(L^2)^l$ в $(L^2)^k$. Для функций

$$u \in (L^2)^l, \quad v = K[u], \quad w \in (L^2)^k$$

имеем [1])

$$(v, w) = (K[u], w) =$$

$$= \int_G \sum_{\varkappa=1}^{k} \left(\int_G \sum_{\lambda=1}^{l} K_{\varkappa\lambda}(x, x') u_\lambda(x')\, dx' \right) w_\varkappa(x)\, dx =$$

$$= \int_G \sum_{\lambda=1}^{l} u_\lambda(x') \left(\int_G \sum_{\varkappa=1}^{k} K_{\varkappa\lambda}(x, x') w_\varkappa(x)\, dx \right) dx' =$$

$$= \int_G u(x) \left(\int_G K^*(x', x) w(x')\, dx' \right) dx.$$

Здесь $K^*(x, x')$ — матрица, сопряженная к матрице $K(x, x')$. Если ввести оператор $K^*[w]$ формулой

$$K^*[w](x) = \int_G K^*(x', x) w(x')\, dx', \tag{2.45}$$

то будет справедливо равенство

$$(K[u], w) = (u, K^*[w]) \quad \left(u \in (L^2)^l, \ w \in (L^2)^k\right). \tag{2.46}$$

Для произвольных $u, w \in \mathfrak{L}^2$ это равенство, как и в скалярном случае, может не иметь места, но если $K(x, x') \in C[G \times G]$ и $K(x, x') = 0$ при условии $|x - x'| \geqslant \delta > 0$, то точно так же, как в п. 2.5.2, устанавливается, что равенство (2.46) выполняется для функций $u \in (\mathfrak{L}^2[G])^l$, $w \in C_0[G_\delta]^k$, а именно

$$(K[u], w) = (u, K^*[w]) \quad (u \in (\mathfrak{L}^2[G])^l, \ w \in C_0[G_{(\delta)}]^k). \tag{2.47}$$

[1]) См. формулу (2.10)

Рассмотрим частный случай, когда $K(x, x') = k(x, x') \cdot 1$, где $k(x, x')$ — скалярная функция, а 1 — единичная матрица. В этом случае

$$K[u](x) = \int_G k(x, x') u(x') dx.$$

Такой интегральный оператор называется *скалярным* интегральным оператором и является линейным оператором, действующим из $(L^2)^l$ в $(L^2)^l$, причем размерность l может быть любой. В качестве примера возьмем функцию $j_\delta(x, x')$, введенную в п. 2.5.2, и определим (используя обозначения п. 2.5.2) оператор J_δ при помощи равенства

$$(J_\delta u)(x) = \int_G j_\delta(x, x') u(x') dx'. \tag{2.48}$$

Оператор J_δ называется оператором *осреднения*.

Так как $j_\delta(x, x') = j_\delta(x', x)$, то из (2.46) и (2.47) следует, что справедливы равенства

$$(J_\delta u, w) = (u, J_\delta w) \quad (u \in (L^2)^l,\ w \in (L^2)^k), \tag{2.49}$$

$$(J_\delta u, w) = (u, J_\delta w) \quad (u \in \mathfrak{L}^2[G]^l,\ w \in C_0[G_{(\delta)}]^k). \tag{2.50}$$

Понятно, что теорема 2.5 и замечание 1 п. 2.5.2 верны и при условиях этого параграфа (надо только заменить пространство L^2 пространством $(L^2)^l$).

2.7.2. Совпадение операторов $T_{(w)}$ и $T_{(s)}$. Пусть $T = \sum_{i=1}^{m} A_i \partial_i + B$, где матрицы A_i и B удовлетворяют условиям § 2.2. Оператор T не является дифференциальным оператором с постоянными коэффициентами, и, вообще говоря, равенство $(TJ_\delta - J_\delta T_{(w)}) u(x) = 0$ не выполняется для функций $u \in \mathfrak{F}_{(w)}$ даже в $G_{(\delta)}$. Тем не менее $(TJ_\delta - J_\delta T_{(w)}) u \to 0$ при $\delta \to 0$. На основании этого и доказывается совпадение операторов $T_{(w)}$ и $T_{(s)}$. Сначала докажем ряд лемм.

Лемма 2.7.2. *Пусть* $T^0 = \sum_{i=1}^{m} A_i \partial_i$. *Если* $u \in \mathfrak{F}^l_{(w)}$, *то для* x *из* $G_{(\delta)}$ *справедливо равенство*

$$\left(T^0 J_\delta - J_\delta T^0_{(w)}\right) u(x) = \sum_{i=1}^{m} \partial'_i \left\{ (A'_i - A_i) J_\delta \right\} \cdot u(x), \tag{2.51}$$

где $\partial_i'\{(A_i' - A_i)J_\delta\}\cdot$ — *интегральный оператор с ядром* $\partial_i'\{(A_i(x') - A_i(x))\,j_\delta(x, x')\}$ [1]).

Доказательство. Прежде всего заметим, что

$$T^0J_\delta = \sum_{i=1}^{m} A_i\partial_iJ_\delta\cdot, \tag{2.52}$$

т. е. оператор T^0J_δ — интегральный оператор с ядром $\sum\limits_{i=1}^{m} A_i(x)\,\partial_i j_\delta(x, x')$. Рассмотрим далее оператор $J_\delta T^0_{(\mathrm{w})}$. Для произвольной функции $w \in (C_0^\infty[G_{(\delta)}])^k$ функция $J_\delta w$ принадлежит $(C_0^\infty[G])^k$, поэтому если, кроме того, $u \in \mathfrak{F}^l_{(\mathrm{w})}$, то

$$(J_\delta T^0_{(\mathrm{w})}u,\ w) = (T^0_{(\mathrm{w})}u,\ J_\delta w) = (u,\ T^{0*}J_\delta w).$$

Это означает, что оператор $T^{0*}J_\delta$ — интегральный оператор с ядром $\sum\limits_{i=1}^{m} -\partial_i\{A_i^*(x)\,j_\delta(x, x')\}$.

Следовательно,

$$(J_\delta T^0_{(\mathrm{w})}u,\ w) = ((T^{0*}J_\delta)^*\,u,\ w), \tag{2.53}$$

где

$$(T^{0*}J_\delta)^* = \sum_{i=1}^{m} -\partial_i'(A_i'J_\delta)\cdot, \tag{2.54}$$

т. е. оператор $(T^{0*}J_\delta)^*$ — интегральный оператор с ядром $\sum\limits_{i=1}^{m} -\partial_i'\{A_i(x')\,j_\delta(x, x')\}$. Но w — произвольная функция из класса $(C_0^\infty[G_{(\delta)}])^k$, поэтому если $u \in \mathfrak{F}^l_{(\mathrm{w})}$, то из (2.52), (2.53) и (2.54) следует, что

$$(T^0J_\delta - J_\delta T^0_{(\mathrm{w})})\,u(x) = \sum_{i=1}^{m} (A_i\partial_iJ_\delta\cdot + \partial_i'(A_i'J_\delta)\cdot)\,u(x),$$

где $x \in G_{(\delta)}$. Наконец, $\partial_iJ_\delta\cdot = -\partial_i'J_\delta\cdot$, и, поскольку A_i не зависит от x', лемма доказана. ∎

---

[1]) $\partial'\{\ldots\}\cdot$ означает, что оператор ∂' применяется только к выражению $\{\ldots\}$. Так как j_δ — скалярная функция, то ее можно переставлять с матрицами A_i.

Лемма 2.7.3. *Если функции $\partial_i A_i(x)$ ограничены на множестве G, то для любой функции u из $L^2[G]$*

$$\| \partial_i' \{(A_i' - A_i) J_\delta\} \cdot u \| \to 0.$$

Доказательство. Докажем сначала, что операторы $\partial_i' \{(A_i' - A_i) J_\delta\} \cdot$ ограничены. Из ограниченности функций $\partial_j A_i(x)$ следует, что существует такая константа c, что

$$\sqrt{(\partial_j A_i(x))_1 (\partial_j A_i(x))_2} \leqslant c \tag{2.55}$$

(здесь использованы обозначения (2.41)). Поэтому из (2.43) вытекает, что $((\partial_i' A_i' \cdot J_\delta))_1 \leqslant c$, $((\partial_i' A_i' \cdot J_\delta))_2 \leqslant c$, а значит, согласно лемме 2.7.1,

$$\| \partial_i' A_i' \cdot J_\delta u \| \leqslant c \| u \|. \tag{2.56}$$

Далее, если $|x - x'| \geqslant \delta$, то ядро оператора $(A_i' - A_i) \partial_i' J_\delta$, равно нулю, и поэтому рассматриваются только те x и x', для которых $|x - x'| < \delta$. Из ограниченности оператора $\partial_i A_i$ следует, что можно выбрать такую константу c', что

$$\sqrt{(A_i(x') - A_i(x))_1 (A_i(x') - A_i(x))_2} \leqslant c'\delta \quad (|x - x'| < \delta).$$

Если положить теперь

$$\int_G |\partial_i j(x)| \, dx = \gamma \quad (< +\infty),$$

то из того, что

$$\int |\partial_i' j_\delta(x, x')| \, dx = \int |\partial_i' j_\delta(x, x')| \, dx' = \delta^{-1} \gamma,$$

следует, что

$$(((A_i' - A_i) \partial_i' J_\delta \cdot))_1 \leqslant c'\gamma, \quad (((A_i' - A_i) \partial_i' J_\delta \cdot))_2 \leqslant c'\gamma.$$

Значит, согласно лемме 2.7.1, справедливо неравенство

$$\| (A_i' - A_i) \partial_i' J_\delta u \| \leqslant c'\gamma \| u \|. \tag{2.57}$$

Замечая, что $\partial_i' \{(A_i' - A_i) J_\delta\} \cdot = \partial_i' A_i' \cdot J_\delta + (A_i' - A_i) \partial_i' J_\delta \cdot$, и используя (2.56) и (2.57), получаем

$$\| \partial_i' \{(A_i' - A_i) J_\delta\} \cdot u \| \leqslant (c + c'\gamma) \| u \|. \tag{2.58}$$

Докажем теперь, что $\|\partial_i'\{(A_i'-A_i)J_\delta\}\cdot u\|$ стремится к нулю, если $u\in C_0^1[G]$. Интегрируя по частям, имеем

$$\partial_i'\{(A_i'-A_i)J_\delta\}\cdot u=$$
$$=\int\partial_i'\{(A_i(x')-A_i(x))j_\delta(x,\ x')\}\cdot u(x')\,dx'=$$
$$=-\int(A_i(x')-A_i(x))\,j_\delta(x,\ x')\,\partial_i'u(x')\,dx'=$$
$$=-(A_i'-A_i)J_\delta\cdot\partial_iu.$$

Очевидно, что

$$(((A_i'-A_i)J_\delta))_1\leqslant c'\delta,\quad (((A_i'-A_i)J_\delta))_2\leqslant c'\delta,$$

следовательно, по лемме 2.7.1

$$\|\partial_i'\{(A_i'-A_i)J_\delta\}\cdot u\|=\|(A_i'-A_i)J_\delta\,\partial_iu\|\leqslant c'\delta\,\|\partial_iu\|\to 0$$
$$(\delta\to 0).$$

Рассмотрим теперь случай, когда $u\in L^2[G]$. Так как для произвольного $\varepsilon>0$ существует такое $\tilde u$, что

$$\tilde u\in C_0^1[G],\quad \|\tilde u-u\|<\varepsilon,$$

то, согласно (2.58),

$$\|\partial_i'\{(A_i'-A_i)J_\delta\}\cdot u\|\leqslant\|\partial_i'\{(A_i'-A_i)J_\delta\}\cdot\tilde u\|+$$
$$+\|\partial_i'\{(A_i'-A_i)J_\delta\}\cdot(\tilde u-u)\|<$$
$$<\|\partial_i'\{(A_i'-A_i)J_\delta\}\cdot\tilde u\|+\varepsilon(c+c'\gamma).$$

Так как $\tilde u\in C_0^1[G]$, то, как было показано выше,

$$\|\partial_i'\{(A_i'-A_i)J_\delta\}\cdot\tilde u\|\to 0,$$

и ввиду того, что ε можно взять произвольно малым, утверждение леммы 2.7.3 доказано. ▌

Лемма 2.7.4. *Если матрица $B(x)$ ограничена и непрерывна на G, то для любой функции u из $L^2[G]$*

$$\|(BJ_\delta-J_\delta B)\,u\|\to 0\quad \text{при}\quad \delta\to 0.$$

Доказательство. Пусть сначала $u \in C_0[G]$. Если взять такую подобласть G_1 области G, что $S(u) \subset G_1 \prec G$, то для достаточно малых δ носитель $S(u) \subset G_{1(\delta)}$ и

$$\|(BJ_\delta - J_\delta B) u\| = \|(BJ_\delta - J_\delta B) u\|_{G_1}.$$

Но $BJ_\delta - J_\delta B = (B - B') J_\delta$, матрица $B(x)$ равномерно непрерывна на G_1 и $j_\delta(x, x') = 0$, если $|x - x'| > \delta$. Поэтому, выбрав достаточно малое δ, можно легко показать, что для произвольного $\varepsilon > 0$

$$\|(BJ_\delta - J_\delta B) u\|_{G_1} = \|(B - B') J_\delta u\|_{G_1} < \varepsilon \|u\|_{G_1}.$$

Тем самым лемма 2.7.4 доказана для функций u из $C_0[G]$.

Рассмотрим теперь случай, когда $u \in L^2$. Из ограниченности матрицы $B = B(x)$ следует, что оператор $BJ_\delta - J_\delta B$ ограничен равномерно по δ. Значит, если взять функцию $\tilde{u}$, принадлежащую $C_0[G]$, то

$$\|(BJ_\delta - J_\delta B) u\| \leqslant \|(BJ_\delta - J_\delta B) \tilde{u}\| + \|(BJ_\delta - J_\delta B)(\tilde{u} - u)\| \leqslant$$
$$\leqslant \|(BJ_\delta - J_\delta B) \tilde{u}\| + c \|\tilde{u} - u\|,$$

где c — некоторое фиксированное число. Из того, что величину $\|\tilde{u} - u\|$ можно сделать как угодно малой, и из предыдущего неравенства получаем, что

$$\|(BJ_\delta - J_\delta B) u\| \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0. \ \blacksquare$$

Теорема 2.7.1. *Если матрица B непрерывна и ограничена, а матрицы $\partial_i A$ ограничены в $G = E^m$, то из условий*

$$u \in \mathfrak{F}_{(w)} \cap L^2[E^m], \quad T_{(w)} u \in L^2[E^m]$$

следует, что при $\delta \to 0$

$$\|J_\delta u - u\|_{E^m} \to 0, \quad \|T J_\delta u - T_{(w)} u\|_{E^m} \to 0.$$

Доказательство. Если $G = E^m$, то $G_{(\delta)} = G$, и утверждение теоремы вытекает из лемм 2.7.2, 2.7.3 и 2.7.4. $\blacksquare$

Теорема 2.7.2. *Если G_0 — такое произвольное открытое множество, что $G_0 \prec G$, то для функций u из $\mathfrak{F}_{(w)}$*

$$\|J_\delta u - u\|_{G_0} \to 0, \quad \|T J_\delta u - T_{(w)} u\|_{G_0} \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Доказательство. Если взять такое открытое множество G_1, что $G_0 \prec G_1 \prec G$, то $G_0^a \subset G_{1(\delta)}$ для достаточно малых $\delta < 0$. Пусть функция u' такова, что для $x \in G_1$ имеет место равенство $u'(x) = u(x)$. Тогда $u' \in \mathfrak{F}_{(w)}[G_1] \cap L^2[G_1]$ и $(J_\delta u')(x) = (J_\delta u)(x)$ для $x \in G_0$. Поэтому из леммы 2.7.2, замечания 1 к § 2.5, а также из лемм 2.7.3 и 2.7.4 вытекает утверждение теоремы. ▌

Теорема 2.7.3. *При предположениях* п. 2.7.2 *имеем*

$$\mathfrak{F}_{(w)} = \mathfrak{F}_{(s)}, \quad T_{(w)} = T_{(s)}.$$

Доказательство. Для матричного дифференциального оператора справедлива лемма 2.6.3. Кроме того, согласно теореме 2.7.2, $\mathfrak{F}_{(w)}[G_0] = \mathfrak{F}_{(s)}[G_0]$ (здесь G_0 обозначает множество, введенное в теореме 2.7.2). Следовательно,

$$\mathfrak{F}_{(w)}[G] = \mathfrak{F}_{(s)}[G]. \ ▌$$

Следствие 2.7.1. *Если $u \in L^2$ и матрицы $\partial_i A$ непрерывны и ограничены на G, то при $\delta \to 0$*

$$\|\partial_i (AJ_\delta - J_\delta A) u\| \to 0.$$

Доказательство. При сделанных предположениях

$$\partial_i (AJ_\delta - J_\delta A) = \partial_i A \cdot J_\delta + A\, \partial_i J_\delta \cdot - A'\, \partial_i J_\delta \cdot =$$
$$= -(A' - A)\partial_i J_\delta \cdot + \partial_i A \cdot J_\delta = (A' - A)\partial_i' J_\delta \cdot + \partial_i A \cdot J_\delta =$$
$$= \partial_i' \{(A' - A) J_\delta\} \cdot + (\partial_i A \cdot - \partial_i' A' \cdot) J_\delta.$$

Согласно лемме 2.7.3, при $\delta \to 0$ имеем

$$\| \partial_i' \{(A' - A) J_\delta\} \cdot u \| \to 0.$$

Полагая в лемме 2.7.4 $B = \partial_i A \cdot$, получаем, что

$$\|(\partial_i A \cdot - \partial_i' A' \cdot) J_\delta u\| = \|(\partial_i A_i \cdot J_\delta - J_\delta \partial_i A_i \cdot) u\| \to 0.$$

Тем самым утверждение следствия 2.7.1 доказано. ▌

В заключение приведем еще одно следствие из теоремы 2.7.1.

Следствие 2.7.2. *В предположениях теоремы* 2.7.1 *существует такая последовательность функций u_n, что*

$$u_n \in C_0^\infty, \quad \|u_n - u\| \to 0, \quad \|Tu_n - T_{(w)} u\| \to 0.$$

Доказательство. В силу теоремы 2.7.1

$$\|J_\delta u - u\| \to 0, \quad \|TJ_\delta u - T_{(\mathrm{w})}u\| \to 0$$

при $\delta \to 0$.

Функция $J_\delta u$ принадлежит $C^\infty \cap L^2$, но, вообще говоря, не принадлежит C_0^∞. Возьмем такую функцию $\alpha \in C_0^\infty$, что $\alpha(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$, $\alpha(x) = 0$ при $|x| > 2$ и $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1$ для остальных x, и положим $\alpha_\rho(x) = \alpha(\rho^{-1}x)$.

Тогда $\alpha_\rho J_\delta u \in C_0^\infty$, и при $\rho \to \infty$

$$\|\alpha_\rho J_\delta u - J_\delta u\| \to 0, \quad \|T\alpha_\rho J_\delta u - TJ_\delta u\| \to 0,$$

поскольку $\partial_i(\alpha_\rho v) = \alpha_\rho \partial_i v + \partial_i \alpha_\rho \cdot v$, $|\partial_i \alpha_\rho| \leqslant c\rho^{-1}$ и $\alpha_\rho \to 1$ при $\rho \to \infty$.

Выбрав такие δ_n и ρ_n, что $\delta_n > 0$, $\delta_n \to 0$, $\rho_n \to \infty$, и положив $\alpha_{\rho_n} J_{\delta_n} u = u_n$, получим, что $u_n \in C_0^\infty$ и

$$\|u_n - u\| \to 0, \quad \|Tu_n - T_{(\mathrm{w})}u\| \to 0. \blacksquare$$

2.8. Дополнения к главе 2

В этой главе используются в основном идеи Фридрихса, но в отличие от него, из соображений удобства, изложение проводится для пространств $\mathfrak{L}^2$. В связи с этим операторы осреднения, применяемые в данной книге, приспособлены именно для пространств $\mathfrak{L}^2$ и не являются эффективными при исследовании свойств функций из $\mathfrak{F}_{(\mathrm{w})}$ и $\mathfrak{F}_{(\mathrm{s})}$ в окрестности границы области определения. Для того чтобы вести рассуждения для пространств L^2, понадобилось бы соответствующим образом видоизменить операторы осреднения. (При этом появляются дополнительные условия, главным образом на границу области определения.) Подробное изложение можно найти в статье Фридрихса [41].

Для матричных дифференциальных операторов высших порядков с постоянными коэффициентами в случае выпуклой области можно доказать совпадение слабого и сильного расширений, в том числе и для пространств L^2, используя вместо операторов осреднения некоторые их видоизменения. Для дифференциальных операторов высших порядков с переменными коэффициентами даже в случае пространств $\mathfrak{L}^2$ неизвестно, совпадают ли слабое и сильное расширения.

Дополнение редактора перевода. Существенным продвижением в вопросе об эквивалентности слабых и сильных расширений явилась работа [16], где операторы определены на системах функций, подчиненных определенным граничным условиям. Последней из известных редактору работ этого направления является работа [17]. Там можно найти дополнительную библиографию.

В общем случае остается нерешенным вопрос об эквивалентности расширений в окрестности точки, в которой меняется число граничных условий. Этот вопрос неизбежно возникает при рассмотрении, в духе гл. 4 настоящей книги, так называемых смешанных граничных задач.

Некоторые отрицательные результаты, относящиеся к эквивалентности расширений для операторов высшего порядка с переменными коэффициентами, получены в [20].

Весьма интересное применение рассмотренных в этой главе методов к проблемам теории функций многих комплексных переменных можно найти в [21].

Глава 3

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ЭЛЛИПТИЧЕСКОГО ТИПА

В этой главе введенные ранее расширения дифференциальных операторов используются при доказательстве теоремы существования решения граничной задачи (задачи Дирихле) для линейного дифференциального уравнения в частных производных второго порядка эллиптического типа. Сначала на основании теоремы Лакса — Мильграма (которая является аналогом для билинейных функционалов теоремы Рисса) очень просто доказывается существование обобщенного решения, принадлежащего семейству функций $\mathfrak{D}_0$. Затем, следуя методу Фридрихса, доказывается, что это обобщенное решение является решением и в обычном смысле (классическим решением). При этом дифференцируемость решения понимается сначала в обобщенном смысле, а затем на основании теоремы Соболева делаются выводы о дифференцируемости в обычном смысле.

При помощи этого метода исследуются также дифференциальные свойства решений в зависимости от предположений относительно дифференциальных свойств коэффициентов уравнения и правой части. Такой подход является новым, и хотя он уступает по точности классическим результатам, однако является очень общим и единообразным методом и его можно с успехом применять не только для уравнений 2-го порядка, но и для уравнений высших порядков, а также для систем уравнений.

В этой главе сначала исследуются свойства функций из совокупности $\mathfrak{D}_0$, затем рассматривается вопрос о существовании обобщенного решения, принадлежащего $\mathfrak{D}_0$, после чего изучаются дифференциальные свойства решений. При этом важную роль играют операторы осреднения, введенные Фридрихсом.

Кроме того, используется теория Рисса — Шаудера для исследования вопроса о существовании обобщенного решения и для исследования взаимосвязи между свойствами исходного и сопряженного к нему уравнений. Теория Рисса—Шаудера является обобщением фредгольмовской теории интегральных уравнений на случай банаховых пространств.

3.1. Семейство функций $\mathfrak{D}$

Пусть G — открытое множество m-мерного евклидова пространства. Для функции $u = u(x)$, определенной при $x \in G$ ($u \in C^\infty[G]$), будем писать

$$(\partial_i u \ i \to 1, \ \ldots, \ m) = Du. \tag{3.1}$$

Оператор D является дифференциальным оператором, переводящим скалярную функцию $u(x)$ в векторную функцию Du. Если $D_{(w)}$ и $D_{(s)}$ означают соответственно слабое и сильное расширения оператора D, то, согласно результатам предыдущей главы, $D_{(w)} = D_{(s)}$. В дальнейшем для обозначения этих расширенных дифференциальных операторов мы будем писать просто D.

Через $\mathfrak{D}[G]$ или просто $\mathfrak{D}$ будем обозначать совокупность действительнозначных функций u, принадлежащих области определения расширенного оператора D и таких, что

$$\|u\| < \infty; \quad \|Du\| = \left(\sum_{i=1}^{m} \|\partial_i u\|^2\right)^{1/2} < \infty$$

(где $\|\cdot\|$ означает норму в пространстве $L^2[G]$).

Для функций u, принадлежащих $\mathfrak{D}$, определим новую норму формулой

$$|||u||| = \sqrt{\|u\|^2 + \|Du\|^2}. \tag{3.2}$$

Легко проверить, что при так определенной норме $\mathfrak{D}$ становится линейным нормированным пространством. Кроме того, $\mathfrak{D}$ является полным пространством. В самом деле, если $\{u_n\}$ — фундаментальная последовательность из $\mathfrak{D}$ (такая, что из n, $n_1 \to \infty$ следует $|||u_n - u_{n_1}||| \to 0$), то, согласно (3.2), $\|u_n - u_{n_1}\| \to 0$, $\|Du_n - Du_{n_1}\| \to 0$ при n, $n_1 \to \infty$ и, следовательно, существуют $u \in L^2[G]$ и $v \in L^2[G]^m$ такие, что $\|u_n - u\| \to 0$, $\|Du_n - v\| \to 0$. Но так как расширенный оператор D замкнут[1]), то $v = Du$. Поэтому $\|u_n - u\| \to 0$, $\|Du_n - Du\| \to 0$. Следовательно, $|||u_n - u||| \to 0$, т. е. пространство $\mathfrak{D}$ полно.

Для произвольных u, $v \in \mathfrak{D}$ определим скалярное произведение формулой[2])

$$[u, v] = (u, v)_G + (Du, Dv)_G. \tag{3.3}$$

Тогда $[u, u] \equiv |||u|||^2$. Так как $[u, v]$ полностью удовлетворяет аксиомам скалярного произведения, то $\mathfrak{D}$ можно рассматривать как действительное гильбертово пространство.

Очевидно, что $C_0^\infty[G]$ принадлежит $\mathfrak{D}$. Обозначим через $\mathfrak{D}_0$ замыкание $C_0^\infty[G]$ в $\mathfrak{D}$ (т. е. совокупность пределов по норме (3.2) последовательностей элементов из $C_0^\infty[G]$).

Семейство функций $\mathfrak{D}_0$ является замкнутым линейным подпространством пространства $\mathfrak{D}$ и поэтому само является действительным гильбертовым пространством. Рассмотрим свойства пространства $\mathfrak{D}_0$, в частности свойства его элементов вблизи границы множества G.

Пусть часть границы Γ множества G можно представить в виде

$$x_m = \gamma(x_1, \ldots, x_{m-1}), \tag{3.4}$$

где $\gamma(x_1, \ldots, x_{m-1})$ — непрерывная функция, определенная для $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \Gamma_0$ (Γ_0 — компакт).

Будем предполагать, что область, описываемая неравенствами

$$\begin{gathered}\gamma(x_1, \ldots, x_{m-1}) < x_m < \bar{\gamma}(x_1, \ldots, x_{m-1}),\\ (x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \Gamma_0,\end{gathered} \tag{3.5}$$

лежит внутри G (здесь γ, $\bar{\gamma} \in C[\Gamma_0]$).

---

[1]) Расширенный оператор D, будучи оператором в $\mathfrak{L}^2$, замкнут в $\mathfrak{L}^2$, но так как $L^2[G] \subset \mathfrak{L}^2[G]$, то D замкнут и в L^2.

[2])
$$(u, v)_G = \int_G u(x)\, v(x)\, dx;$$
$$(Du, Dv)_G = \int_G \left\{ \sum_{i=1}^m \partial_i u(x) \cdot \partial_i v(x) \right\} dx.$$

Теорема 3.1.1. *Пусть* $u \in \mathfrak{D}_0[G]$. *Тогда в области* (3.5) *функция* $u(x)$ *как функция от* x_m *непрерывна для почти всех* $(x_1, \ldots, x_{m-1}) \in \Gamma_0$ *и* $u \to 0$ *при* $x_m \to \gamma$.

Доказательство. Для удобства будем писать $(x_1, \ldots \ldots, x_{m-1}) = x'$. Если $u \in C_0^\infty[G]$, то, положив

$$\sup_{\gamma < \xi < \bar{\gamma}} |u(x', \xi)| = |\bar{u}|(x'); \quad \max_{x' \in \Gamma_0} \{\bar{\gamma}(x') - \gamma(x')\} = h, \tag{3.6}$$

покажем, что

$$\int_{\Gamma_0} |\bar{u}|(x')^2 \, dx' \leqslant h \|Du\|^2. \tag{3.7}$$

Действительно, для $\gamma \leqslant x_m \leqslant \bar{\gamma}$ имеем

$$u(x) = \int_{\gamma(x')}^{x_m} \partial_m u(x', \xi_m) \, d\xi_m$$

и, следовательно,

$$u(x)^2 \leqslant (x_m - \gamma) \int_{\gamma(x')}^{\bar{\gamma}(x')} (\partial_m u)^2 \, d\xi_m.$$

Поэтому

$$|\bar{u}|(x')^2 \leqslant h \int_{\gamma(x')}^{\bar{\gamma}(x')} |Du|^2 \, d\xi_m.$$

Взяв $(m-1)$-кратный интеграл по x' от обеих частей этого соотношения, получим (3.7).

Выше говорилось, что если $u \in \mathfrak{D}_0$, то существует такая последовательность u_n, что

$$u_n \in C_0^\infty[G], \quad |||u_n - u||| \to 0. \tag{3.8}$$

Далее, можно выбрать такую подпоследовательность, что $|||u_{n+1} - u_n||| < 2^{-n}$ и, следовательно, из (3.2) получим

$$\|u_{n+1} - u_n\| < 2^{-n}, \quad \|Du_{n+1} - Du_n\| < 2^{-n}. \tag{3.9}$$

Согласно п. 1.1.2, из (3.9) и (3.8) следует, что для почти всех $x \in G$

$$\lim_{n \to \infty} u_n(x) = u(x). \tag{3.10}$$

Здесь левая часть имеет смысл для всех x, поэтому можно считать, что равенство (3.10) выполнено для всех x (после того, как функция $u(x)$ изменена на множестве меры нуль).

Если применить (3.7) к разности $u_{n+1}-u_n$, принадлежащей $\mathfrak{D}_0$, то, согласно (3.9), получим

$$\int\limits_{\Gamma_0} |\overline{u_{n+1}-u_n}|(x')^2\,dx' < h\cdot 4^{-n}.$$

Поэтому[1])

$$\int\limits_{\Gamma_0} |\overline{u_{n+1}-u_n}|(x')\,dx' \leqslant \sqrt{\operatorname{mes}(\Gamma_0)\,h}\cdot 2^{-n}.$$

Если положить $\sum\limits_{\nu=n}^{\infty} |\overline{u_{\nu+1}-u_\nu}|(x') = w_n(x')$, то $w_n(x') \geqslant \geqslant w_{n+1}(x') \geqslant 0$ и, кроме того,

$$\int\limits_{\Gamma_0} w_n(x')\,dx' \leqslant \sqrt{\operatorname{mes}(\Gamma_0)\,h}\cdot 2^{-n+1} \to 0$$

при $n\to\infty$. Поэтому для почти всех $x'\in\Gamma_0$

$$\lim_{n\to\infty} w_n(x') = 0.$$

Однако так как $|\overline{u_{n'}-u_n}|(x') \leqslant w_n(x')$ при $n' > n$, то для почти всех $x'\in\Gamma_0$ последовательность $u_n(x', x_m)$ сходится равномерно относительно x_m для x_m, удовлетворяющих неравенствам $\underline{\gamma}(x') \leqslant x_m \leqslant \overline{\gamma}(x')$.

Следовательно, функция $u(x', x_m) = \lim\limits_{n\to\infty} u_n(x', x_m)$ является непрерывной функцией от x_m для почти всех $x'\in\Gamma_0$ и $u\to 0$ при $x_m\to\gamma$. ∎

З а м е ч а н и е. Если вместо пространства $\mathfrak{D}_0$ рассматривать пространство $\mathfrak{D}$, то справедливо утверждение, близкое к теореме 3.1.1. А именно, если $u\in\mathfrak{D}$, то в области (3.5) функция $u(x)$ как функция от x_m является для x_m, удовлетворяющих неравенствам $\underline{\gamma}(x') \leqslant x_m \leqslant \overline{\gamma}(x')$, непрерывной функцией для почти всех $x'\in\Gamma_0$. Далее, из того, что

[1]) mes (Γ_0) означает лебегову меру множества Γ_0.

$x_m \to \gamma$ $(\bar{\gamma})$, следует, что существует конечный предел для $u(x', x_m)$ для почти всех $x' \in \Gamma_0$.

Для доказательства этого утверждения предположим сначала, что $u \in C^\infty \cap \mathfrak{D}$. Возьмем достаточно малое фиксированное число $\delta > 0$ и рассмотрим такую функцию $\sigma = \sigma(x)$ из $C^\infty[G]$, что $0 \leqslant \sigma(x) \leqslant 1$, $\sigma(x) = 1$ для $|x_m - \bar{\gamma}(x')| \geqslant \delta$ и $\sigma(x) = 0$ для $x_m = \bar{\gamma}(x')$. Тогда, положив

$$\sup_{\gamma < \xi < \bar{\gamma} - \delta} u|(x', \xi)| = |\bar{u}|(x'),$$

из неравенства

$$|\bar{u}|(x')^2 \leqslant h \int\limits_{\gamma(x')}^{\bar{\gamma}(x')} |D(\sigma u)|^2 \, dx_m$$

получим неравенство

$$\int\limits_{\Gamma_0} |\bar{u}|(x')^2 \, dx' \leqslant c_1 \|Du\|^2 + c_2 \|u\|^2.$$

Отсюда аналогично тому, как это делалось при доказательстве теоремы 3.1.1, для $u \in \mathfrak{D}$ устанавливается непрерывность по x_m для почти всех $x' \in \Gamma_0$ функции $u(x', x_m)$ при x_m, удовлетворяющих неравенствам $\gamma(x') \leqslant x_m \leqslant \bar{\gamma}(x') - \delta$. Точно так же функция $u(x', x_m)$ непрерывна по x_m для почти всех $x' \in \Gamma_0$ при $\gamma(x') + \delta \leqslant x_m \leqslant \bar{\gamma}(x')$, а следовательно, и при $\gamma(x') \leqslant x_m \leqslant \bar{\gamma}(x')$.

Лемма 3.1.1. *Если G — ограниченная область в m-мерном евклидовом пространстве, то функции u из $\mathfrak{D}_0[G]$ удовлетворяют неравенству*[1]

$$\|u\| \leqslant m^{-1/2} \operatorname{diam}(G) \|Du\|.$$

Доказательство. Пусть область G расположена внутри прямоугольника $a_i \leqslant x_i \leqslant b_i$ $(i = 1, \ldots, m)$; $b_i - a_i = \operatorname{diam}(G)$.

[1]) diam (G) означает диаметр множества G.

Если $u \in C_0^\infty[G]$, то, считая, что $u \in C_0^\infty[a_i \leqslant x_i \leqslant b_i, i = 1, \ldots, m]$, можно написать

$$u(x) = \int_{a_i}^{x_i} \partial_i u \, dx_i.$$

Следовательно,

$$u(x)^2 \leqslant (b_i - a_i) \int_{a_i}^{b_i} (\partial_i u)^2 \, dx_i.$$

Взяв m-кратный интеграл по $x_1, \ldots, x_m$ от обеих частей этого неравенства, получим

$$\int_G u(x)^2 \, dx \leqslant (b_i - a_i)^2 \int_G (\partial_i u)^2 \, dx.$$

Складывая полученные неравенства для $i = 1, \ldots, m$, имеем

$$m \| u \|^2 \leqslant \operatorname{diam}(G)^2 \| Du \|^2. \tag{3.11}$$

Далее, если $u \in \mathfrak{D}_0$, то существует такая последовательность $\{u_n\}$, что

$$u_n \in C_0^\infty[G], \quad \| u_n - u \| \to 0, \quad \| Du_n - Du \| \to 0.$$

Поэтому, подставляя в (3.11) вместо u функции u_n и переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем утверждение леммы. ∎

3.2. Существование обобщенных решений

3.2.1. Обобщенная задача Дирихле. Дифференциальный оператор D переводит скалярную функцию $u \in C^1$ в векторную функцию $Du \in (C)^m$. В свою очередь дифференциальный оператор D^*, сопряженный к оператору D, переводит векторную функцию $v \in (C^1)^m$ в скалярную функцию $D^* v \in C$.

Так как сопряженным дифференциальным оператором к дифференциальному оператору D^* является оператор D, то расширенный оператор $D^* = D^*_{(\mathrm{w})}$ можно задать формулой

$$\begin{cases} (v, Dw) = (v', w) \text{ для всех } w \in C_0^\infty[G]; \\ \text{если } v \in (\mathfrak{L}^2[G])^m, \ v' \in \mathfrak{L}^2[G], \text{ то } v' = D^* v. \end{cases} \tag{3.12}$$

В дальнейшем мы будем понимать дифференциальный оператор D^* именно в этом смысле, а через $\mathfrak{D}^*$ будем обозначать область определения (содержащуюся в $\mathfrak{L}^2[G]$) оператора D^*.

Пусть далее A, b, c обозначают функции от x с областью определения G, причем A — матрица порядка $(m \times m)$, b есть m-мерный вектор, а c — скалярная функция, т. е.

$$A = \left(a_{ij}(x) \quad \begin{matrix} i \downarrow 1, \ldots, m \\ j \to 1, \ldots, m \end{matrix} \right), \quad b = (b_i(x) \ \ i \downarrow 1, \ldots, m),$$
$$c = c(x).$$

Если $v \in \mathfrak{D}$, $ADv \in \mathfrak{D}^*$, то будем писать $v \in \mathfrak{E}$ и для $v \in \mathfrak{E}$ определим дифференциальный оператор второго порядка формулой [1])

$$\Phi v = D^* A D v + b \cdot Dv + cv. \tag{3.13}$$

Если теперь определить билинейную форму $B[v, w]$, соответствующую дифференциальному оператору Φ, формулой

$$B[v, w] = (ADv, Dw) + (b \cdot Dv + cv, w) \quad (v, w \in \mathfrak{D}), \tag{3.14}$$

то из (3.12) и (3.13) следует, что [2])

$$\Phi v = \varphi \rightleftarrows B[v, w] = (\varphi, w) \quad \left(\text{для всех } w \in C_0^\infty\right). \tag{3.15}$$

В частности, если $A \in C^1$, $v \in C^2$, то Φ является обычным дифференциальным оператором второго порядка, т. е.

$$\Phi v = -\sum_{i=1}^{m} \partial_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \, \partial_j v \right) + \sum_{i=1}^{m} b_i \cdot \partial_i v + cv.$$

Далее, если считать, что искомой является функция v (принадлежащая $\mathfrak{L}^2$), то при выполнении соотношения

$$\Phi v = \varphi, \qquad v \in \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{E}, \tag{3.16}$$

говорят, что v является решением обобщенной задачи Дирихле с нулевыми граничными значениями (см. теорему 3.1.1).

---

[1]) $b \cdot Dv$ обозначает скалярное произведение векторов b и Dv, равное $\sum_{i=1}^{m} b_i \partial_i v$.

[2]) $A \rightleftarrows B$ означает, что утверждения A и B эквивалентны.

Для решения задачи Дирихле с произвольными граничными значениями рассматривают функцию $v_0 \in \mathfrak{E}$ (и принадлежащую $\mathfrak{D}$, см. замечание к теореме 3.1.1), такую, что она принимает заданные значения на границе области G (предполагается, что граничные значения таковы, что такая функция v_0 существует). Затем решают уравнение

$$\Phi(v - v_0) = \varphi - \Phi v_0, \qquad v - v_0 \in \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{E}, \tag{3.17}$$

с нулевыми граничными значениями. Легко видеть, что при этом решение v задачи (3.17) не зависит от выбора функции v_0.

Пусть далее матрица A симметрична (т. е. $a_{ij} = a_{ji}$). Если билинейная форма

$$\xi A \xi = \sum_{i,\,j=1}^{m,\,m} a_{ij}\xi_i\xi_j$$

(где ξ — действительный вектор) имеет постоянный знак (для $\xi \neq 0$), то Φ называют *эллиптическим* дифференциальным оператором. Для исследования вопроса о существовании решения задачи Дирихле (3.16) для эллиптического дифференциального уравнения нам понадобится следующая лемма.

Лемма 3.2.1. *Если A, b, c — непрерывные*[1]) *функции от x на $\overline{G}$ и если существуют такие фиксированные числа α, $\overline{\alpha}$, β, γ, $\overline{\gamma}$, что для любых $x \in G$ выполняются условия*

$$\overline{\alpha}|\xi|^2 \geqslant \xi A \xi \geqslant \alpha|\xi|^2, \quad \alpha > 0, \quad |b| \leqslant \beta, \quad \overline{\gamma} \geqslant c \geqslant \gamma, \tag{3.18}$$

и[2])

$$\left.\begin{array}{l} \text{если } m^{-1}(\operatorname{diam}(G))^2 \geqslant s^2 \text{ для какого-нибудь } s, \\ \text{то } \alpha - \beta s + \gamma s^2 > 0, \end{array}\right\} \tag{3.19}$$

то существуют такие числа δ, $\overline{\delta}$, что выполняются неравенства

$$|B[u, w]| \leqslant \overline{\delta} |||u||| \cdot |||w||| \quad (u, w \in \mathfrak{D}), \tag{3.20}$$

$$B[u, u] \geqslant \delta |||u|||^2 \quad (u \in \mathfrak{D}_0), \quad \delta > 0. \tag{3.21}$$

---

[1]) Можно считать, что A, b, c — измеримые функции.

[2]) Если множество G не ограничено, т. е. $\operatorname{diam}(G) = +\infty$, то в этом случае считаем $\gamma > 0$.

Доказательство. Не ограничивая общности, будем считать, что $\beta, \bar{\gamma} \geqslant 0$ и $|c| \leqslant \bar{\gamma}$ на множестве G. Так как из (3.18) следует, что $|\xi A \xi'| \leqslant \bar{\alpha} |\xi| \cdot |\xi'|$, то

$$(ADu, Dw) \leqslant \int_G \bar{\alpha} |Du| \cdot |Dw| \, dx \leqslant \bar{\alpha} \| Du \| \cdot \| Dw \|.$$

Из (3.18) вытекает также, что

$$|(b \cdot Du + cu, w)| \leqslant \int_G (|b \cdot Du| + |cu|) |w| \, dx \leqslant$$
$$\leqslant (\beta \| Du \| + \bar{\gamma} \| u \|) \| w \|.$$

Поэтому, учитывая формулу (3.14) для $B[u, w]$, имеем

$$|B[u, w]| \leqslant \bar{\alpha} \| Du \| \cdot \| Dw \| + \beta \| Du \| \cdot \| w \| +$$
$$+ \bar{\gamma} \| u \| \cdot \| w \| \leqslant (\bar{\alpha} + \beta + \bar{\gamma}) ||| u ||| \cdot ||| w |||.$$

Если здесь положить $\bar{\alpha} + \beta + \bar{\gamma} = \bar{\delta}$, то получим неравенство (3.20). Далее, из (3.18) имеем

$$(ADu, Du) \geqslant \alpha \| Du \|^2,$$
$$(b \cdot Du + cu, u) \geqslant -\beta \| Du \| \cdot \| u \| + \gamma \| u \|^2.$$

Следовательно,

$$B[u, u] \geqslant \alpha \| Du \|^2 - \beta \| Du \| \cdot \| u \| + \gamma \| u \|^2.$$

Из леммы 3.1.1 вытекает, что для $u \in \mathfrak{D}_0[G]$

$$\| u \|^2 \leqslant m^{-1} (\mathrm{diam}(G))^2 \| Du \|^2.$$

Согласно условию (3.19), если выполнено неравенство $m^{-1}(\mathrm{diam}(G))^2 t^2 \geqslant s^2$, то существует такое число $\delta > 0$, что $\alpha t^2 - \beta st + \gamma s^2 \geqslant \delta (s^2 + t^2)$. Отсюда следует неравенство (3.21). ▌

3.2.2. Существование решения задачи Дирихле

Теорема 3.2.1. *Если для билинейной формы $B[u, w]$, соответствующей дифференциальному оператору Φ, существуют такие числа δ и $\bar{\delta}$, что для произвольных $u, w \in \mathfrak{D}_0$ выполняются неравенства*

$$\left.\begin{aligned} &|B[u, w]| \leqslant \bar{\delta} ||| u ||| \cdot ||| w |||, \\ &B[u, u] \geqslant \delta ||| u |||^2, \quad \delta > 0, \end{aligned}\right\} \qquad (*)$$

то для любой функции φ *из* L^2 *существует, и притом единственное, решение уравнения*

$$\Phi v = \varphi, \qquad v \in \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{E},$$

причем

$$|||v||| \leqslant \delta^{-1} \|\varphi\|. \qquad (**)$$

Для доказательства этой теоремы докажем предварительно лемму (принадлежащую Лаксу и Мильграму)[1]).

Лемма 3.2.2. *Пусть* $B(u, v)$ — *билинейный функционал в действительном гильбертовом пространстве* $\mathfrak{H}$, *т. е. для произвольных действительных чисел* a_μ, b_ν *и для любых* u_μ, $v_\nu \in \mathfrak{H}$ *справедливо равенство*

$$B\left(\sum_\mu a_\mu u_\mu, \sum_\nu b_\nu v_\nu\right) = \sum_\mu \sum_\nu a_\mu b_\nu B(u_\mu, v_\nu),$$

и пусть существуют такие числа δ, $\bar{\delta}$, *что для любых* u, $v \in \mathfrak{H}$ *выполняются неравенства*

$$|B(u, v)| \leqslant \bar{\delta} \|u\| \cdot \|v\|, \quad B(u, u) \geqslant \delta \|u\|^2, \quad \delta > 0, \qquad (3.22)$$

где $\|\cdot\|$ — *норма в* $\mathfrak{H}$. *Тогда для любого элемента* $w \in \mathfrak{H}$ *существует такой элемент* $v \in \mathfrak{H}$, *что*[2])

$$B(u, v) = (u, w) \quad \text{для всех} \quad u \in \mathfrak{H}. \qquad (3.23)$$

Доказательство. Если фиксировать $v \in \mathfrak{H}$, то $B(u, v)$ становится линейным функционалом относительно u (согласно (3.22), ограниченным). Обозначим этот функционал через $\varphi_v(u)$. Тогда, согласно теореме Рисса, существует, и притом единственный, элемент $w \in \mathfrak{H}$ такой, что

$$B(u, v) = \varphi_v(u) = (u, w) \text{ для всех } u \in \mathfrak{H}. \qquad (3.24)$$

При этом из (3.22) следует, что $\|\varphi_v\| \leqslant \bar{\delta}\|v\|$, а значит, $\|w\| \leqslant \bar{\delta}\|v\|$.

Если положить $w = Tv$, то оператор T будет линейным ограниченным оператором, действующим из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}$. Более

[1]) Впервые лемма такого типа в подобной ситуации была использована М. И. Вишиком [22]. — *Прим. ред.*

[2]) Отображение $v = T^{-1}w$, сопоставляющее элементу w элемент v, является линейным ограниченным отображением.

того, оператор, обратный к T, тоже ограничен. Это следует из того, что если в (3.24) положить $u=v$, то из (3.22) получим

$$\|v\|\cdot\|w\| \geqslant (v, w) = B(v, v) \geqslant \delta\|v\|^2$$

и, следовательно, $\delta^{-1}\|w\| \geqslant \|v\|$.

Отсюда, если последовательность $w_n = Tv_n$ сходится, то и v_n также сходится, значит, $T\mathfrak{H}$ — замкнутое линейное подпространство пространства $\mathfrak{H}$. Если $T\mathfrak{H} \neq \mathfrak{H}$, то существует такое $\varphi \in \mathfrak{H}$ $(\varphi \neq 0)$, что $\varphi \perp T\mathfrak{H}$ и, следовательно,

$$B(\varphi, v) = (\varphi, Tv) = 0 \quad (\text{для всех} \quad v \in \mathfrak{H}).$$

Поэтому $0 = B(\varphi, \varphi) \geqslant \delta\|\varphi\|^2$, т. е. $\varphi = 0$, что противоречит условию. Отсюда $T\mathfrak{H} = \mathfrak{H}$, т. е. для произвольного w существует такой элемент $v \in \mathfrak{H}$, что выполняется равенство (3.23). ∎

Доказательство теоремы 3.2.1. Если $u, v \in \mathfrak{D}_0$, то, обозначив их скалярное произведение через $[u, v]$ и норму через $|||u|||$, согласно (3.2) и (3.3), получим, что $\mathfrak{D}_0$ является действительным гильбертовым пространством.

Докажем сначала, что для $\varphi \in L^2[G]$ существует такое $w \in \mathfrak{D}_0$, что

$$[u, w] = (u, \varphi) \text{ для всех } u \in \mathfrak{D}_0. \tag{3.25}$$

Если зафиксировать φ, то в силу неравенства

$$|(u, \varphi)| \leqslant \|u\|\cdot\|\varphi\| \leqslant |||u|||\cdot\|\varphi\|$$

$(u, \varphi) = \psi(u)$ будет ограниченным линейным функционалом в $\mathfrak{D}_0$. Поэтому, согласно теореме Рисса, существует такая функция $w \in \mathfrak{D}_0$, что $\psi(u) = [u, w]$ (w удовлетворяет равенству (3.25)).

Далее, рассматривая в лемме 3.2.2 в качестве $\mathfrak{H}$ пространство $\mathfrak{D}_0$, а в качестве $B(u, v)$, (u, v) и $\|\cdot\|$ — соответственно $B[v, u]$, $[v, u]$ и $|||\cdot|||$, получаем ввиду $(*)$, что существует такое $v \in \mathfrak{D}_0$, что

$$B[v, u] = [w, u] \text{ для всех } u \in \mathfrak{D}_0.$$

Следовательно, в силу (3.25)

$$B[v, u] = (\varphi, u) \text{ для всех } u \in \mathfrak{D}_0.$$

Согласно (3.15) (учитывая, что $C_0^\infty \subset \mathfrak{D}_0$), функция v является решением уравнения $\Phi v = \varphi$.

Неравенство (**) получается из следующей цепочки неравенств:

$$\|\varphi\| \cdot \|v\| \geqslant (\varphi, v) = B[v, v] \geqslant \delta \||v\||^2 \geqslant \delta \||v\|| \cdot \|v\|.$$

Если существуют два решения задачи, то, поскольку их разность v' удовлетворяет равенству $B[v', u] = (0, u) = 0$ (для всех $u \in \mathfrak{D}_0$), имеем $0 = B[v', v'] \geqslant \delta \||v'\||^2$, и, следовательно, $v' = 0$. ▌

Объединяя лемму 3.2.1 и теорему 3.2.1, получаем следующую теорему.

Теорема 3.2.2. *При выполнении условий* (3.18) *и* (3.19) *леммы* 3.2.1 (*если G не ограничено, то, кроме того,* $\gamma > 0$) *существует, и притом единственное, решение v уравнения*

$$\Phi v = \varphi, \qquad v \in \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{E}.$$

Следствие 3.2. *Пусть $b \equiv 0$ и существуют такие числа α, $\bar{\alpha}$, γ, $\bar{\gamma}$, что*

$$\bar{\alpha}|\xi|^2 \geqslant \xi A \xi > \alpha|\xi|^2, \quad \alpha > 0, \quad \bar{\gamma} \geqslant c \geqslant \gamma.$$

Кроме того, если множество G ограничено, то пусть $\alpha + \gamma m^{-1}(\mathrm{diam}(G))^2 > 0$, *а если G не ограничено, то пусть $\gamma > 0$. Тогда для любой функции φ из $L^2[G]$ существует, и притом единственное, решение $v \in \mathfrak{D}_0 \cap \mathfrak{E}$ уравнения $\Phi v = \varphi$.*

Замечание. Для существования решения задачи Дирихле существенным является наличие неравенств (*) для билинейной формы $B[u, v]$, соответствующей дифференциальному оператору Φ. При наличии неравенств (*) матрица A не обязана быть симметричной. Если матрица A не является симметричной, то положим

$$B[u, v] = (ADu, Dv) + (b \cdot Du, v) + (u, b' \cdot Dv) + (cu, v), \tag{3.26}$$

где функция b' связана с дифференциальным оператором Φ и множеством $\mathfrak{E}$ следующим образом:

$$\begin{cases} u \in \mathfrak{E} \text{ означает, что } u \in \mathfrak{D} \text{ и } ADu + b'u \in \mathfrak{D}^*, \\ \Phi u = D^*(ADu + b'u) + b \cdot Du + cu. \end{cases} \tag{3.27}$$

При этих предположениях утверждение (3.15) и теорема 3.2.1 остаются справедливыми. Лемма 3.2.1 также остается верной, если добавить условие $|b'| \leqslant \beta'$ и заменить в (3.18) неравенство $\bar{\alpha}|\xi|^2 \geqslant \xi A \xi$ неравенством $|\xi A \xi'| \leqslant \bar{\alpha}|\xi||\xi'|$, а в (3.19) неравенство $\alpha - \beta s + \gamma s^2 > 0$ неравенством $\alpha - (\beta + \beta') s + \gamma s^2 > 0$.

Если $A \in C^1$, $b' \in C^1$, $v \in C^2$, то

$$\Phi v = -\sum_{i=1}^{m} \partial_i \left(\sum_{j=1}^{m} a_{ij} \partial_j v \right) + \sum_{i=1}^{m} (b_i - b'_i) \partial_i v + \left(c - \sum_{i=1}^{m} \partial_i b'_i \right) v,$$

как это следует из предыдущей формулы.

3.3. Применение теории Рисса — Шаудера

3.3.1. Сопряженные дифференциальные операторы. Рисс и Шаудер распространили теорию Фредгольма для интегральных уравнений на случай банаховых пространств. Чтобы применить ее к задаче Дирихле, рассмотрим прежде всего дифференциальные уравнения, сопряженные к дифференциальным уравнениям эллиптического типа [1]). Пусть $B[u, v]$ и Φ задаются формулами (3.26) и (3.27) из предыдущего параграфа. Определим для Φ сопряженный дифференциальный оператор Φ^* формулой

$$\Phi^* v = D^* (A^* D v + b v) + b' \cdot D v + c v, \qquad (3.28)$$

где A^* — матрица, транспонированная к матрице A.

Пусть $v \in \mathfrak{D}$ и $A^* D v + b v \in \mathfrak{D}^*$, в этом случае будем писать $v \in \mathfrak{E}^*$. Справедливо утверждение, аналогичное (3.15): если $v \in \mathfrak{E}^*$, то

$$\Phi^* v = \varphi \rightleftarrows B[w, v] = (w, \varphi) \ \left(\text{для всех } w \in C_0^\infty\right) \qquad (3.29)$$

(следует обратить внимание на то, что v и w поменялись местами).

---

[1]) Так как A, b и b' не предполагаются дифференцируемыми, то здесь нельзя непосредственно воспользоваться рассуждениями § 2.1.

Будем говорить, что u принадлежит $\mathfrak{E}_0$, если $u \in \mathfrak{E} \cap \mathfrak{D}_0$ и $\Phi u \in L^2$. Если $v \in \mathfrak{E}^* \cap \mathfrak{D}_0$ и $\Phi^* v \in L^2$, то будем говорить, что v принадлежит $\mathfrak{E}_0^*$. Имеет место следующая лемма.

Лемма 3.3.1. *Пусть A, b, b', c ограничены в G. Если $u \in \mathfrak{E}_0$, $v \in \mathfrak{E}_0^*$, то*

$$(\Phi u, v) = (u, \Phi^* v).$$

Доказательство. Если $v \in \mathfrak{D}_0$, то можно выбрать такую последовательность v_n, что $v_n \in C_0^\infty$ и $|||v_n - v||| \to 0$. Если $u \in \mathfrak{E}_0^*$, то из (3.15) имеем $(\Phi u, v_n) = B[u, v_n]$. Так как $\|v_n - v\| \to 0$, $\|Dv_n - Dv\| \to 0$, то, переходя к пределу в (3.26), получаем

$$(\Phi u, v) = B[u, v] \qquad (u \in \mathfrak{E}_0, \quad v \in \mathfrak{D}_0) \tag{3.30}$$

и аналогично получаем

$$(u, \Phi^* v) = B[u, v] \quad \left(u \in \mathfrak{D}_0, \ v \in \mathfrak{E}_0^*\right). \tag{3.31}$$

Из (3.30) и (3.31) следует утверждение леммы. ∎

Если выполнены неравенства (*), то, согласно теореме 3.2.1, для любого $u' \in L^2$ существует, и притом единственное, u такое, что

$$\Phi u = u', \qquad u \in \mathfrak{E}_0.$$

Если обозначить это соответствие $u = Tu'$, то

$$\Phi u = u' \, (u \in \mathfrak{E}_0) \rightleftarrows u = Tu' \quad (u' \in L^2). \tag{3.32}$$

В силу неравенств (**) оператор T является линейным ограниченным оператором, действующим из L^2 в $\mathfrak{D}_0$. Далее, если выполняются неравенства (*), то для произвольного $v' \in L^2$ существует, и притом единственное, v такое, что

$$\Phi^* v = v', \quad v \in \mathfrak{E}_0^*.$$

Обозначим это соответствие $v = T^* v'$; тогда

$$\Phi^* v = v' \left(v \in \mathfrak{E}_0^*\right) \rightleftarrows v = T^* v' \left(v' \in L^2\right), \tag{3.33}$$

т. е. T^* является линейным ограниченным оператором, действующим из L^2 в $\mathfrak{D}_0$. Для операторов T и T^* справедливо следующее утверждение.

Лемма 3.3.2. *Пусть* A, b, b', c *ограничены в* G *и выполнено условие* $(*)$ *теоремы* 3.2.1, *тогда*

$$(Tu', v') = (u', T^*v') \quad (u', v' \in L^2). \tag{3.34}$$

Доказательство. Согласно (3.32), (3.33) и лемме 3.3.1, имеем

$$(Tu', v') = (u, \Phi^* v) = (\Phi u, v) = (u', T^* v'). \; \blacksquare$$

3.3.2. Полная непрерывность оператора T. В дальнейшем будем предполагать, что выполняется условие $(*)$ теоремы (3.2.1) и функции A, b, b', c ограничены в G. Из неравенства $(**)$ следует, что оператор T, рассматриваемый как линейный оператор, действующий из L^2 в $\mathfrak{D}_0$, ограничен. Так как $\|u\| < |||u|||$, то T — линейный ограниченный оператор также и из L^2 в L^2. Оказывается, что если область G ограничена, то оператор T (рассматриваемый как оператор из L^2 в L^2) вполне непрерывен. Для T^* справедливо аналогичное утверждение. Полная непрерывность оператора T означает, что если $\sigma = \{u : \|u\| \leqslant 1\}$ — единичный шар в L^2, а $T\sigma$ — образ единичного шара при отображении T, то множество $(T\sigma)^a$, являющееся замыканием по норме L^2 множества $T\sigma$, компактно. Для доказательства полной непрерывности оператора T потребуется следующая лемма.

Лемма 3.3.3. *Пусть* Q — *куб со стороной* l, *т. е.*

$$Q = \{x : a_i \leqslant x_i \leqslant b_i;\ i = 1, \ldots, m\},$$

где $(b_i - a_i) = l$. *Для функций* u *из* $\mathfrak{D}[Q]$ *справедливо неравенство*

$$\|u\|_Q^2 \leqslant l^{-m} \left(\int_Q u\, dx \right)^2 + \frac{m}{2} l^2 \|Du\|_Q^2. \tag{3.35}$$

Доказательство. Пусть сначала $u \in C^\infty[Q]$. Обозначим для удобства $(x_1, \ldots, x_{i-1})$ через $x_{<i}$, а $(x_{i+1}, \ldots, x_m)$ через $x_{i<}$. Тогда для любых $x', x'' \in Q$

$$u(x'') - u(x') = \sum_{i=1}^{m} \int_{x_i'}^{x_i''} \partial_i u(x''_{<i}, x_i, x'_{i<})\, dx_i.$$

Используя неравенство Шварца для сумм и для интегралов, получаем

$$\{u(x'')-u(x')\}^2 \leqslant m\sum_{i=1}^{m} l\int_{a_i}^{b_i}\left\{\partial_i u\left(x''_{<i},\ x_i,\ x'_{i<}\right)\right\}^2 dx_i.$$

Возьмем $2m$-кратный интеграл по x'', x' от обеих частей этого неравенства:

$$\int_Q\int_Q \{u(x'')-u(x')\}^2\,dx''\,dx' \leqslant$$

$$\leqslant ml^{m+2}\sum_{i=1}^{m}\int_Q\left\{\partial_i u\left(x''_{<i},\ x_i,\ x'_{i<}\right)\right\}^2 dx''_{<i}\,dx_i\,dx'_{i<}.$$

Так как левая часть здесь равна $2l^m\|u\|_Q^2-2\left(\int_Q u\,dx\right)^2$, а правая равна $ml^{m+2}\|Du\|_Q^2$, то отсюда вытекает (3.35). Для доказательства леммы для произвольных $u\in\mathfrak{D}[Q]$ достаточно в (3.35) перейти к пределу для последовательности функций $u_n\in C^\infty[Q]$, сходящейся к u. ▌

Лемма 3.3.4. *Если область G ограничена, то оператор T, рассматриваемый как оператор из L^2 в L^2, вполне непрерывен.*

Доказательство. Согласно неравенству (∗∗), $\|u'\|\leqslant 1$ влечет $|||Tu'|||\leqslant\delta^{-1}$. Кроме того, $Tu'\in\mathfrak{D}_0$. Поэтому достаточно показать, что замыкание $\{u\in\mathfrak{D}_0;\ |||u|||\leqslant\delta^{-1}\}^a$ компактно в L^2. Так как область G ограничена, ее можно включить в некоторый куб Q. Пусть $u\in\mathfrak{D}_0[G]$. Если положить $u(x)\equiv 0$ для $x\in Q-G$, то можно считать, что $u\in\mathfrak{D}_0[Q]$. Так как $\mathfrak{D}_0[Q]\subset\mathfrak{D}[Q]$, то достаточно показать, что замыкание $\mathfrak{M}^a$ множества $\mathfrak{M}=\{u\in\mathfrak{D}[Q]:|||u|||\leqslant\delta^{-1}\}$ компактно в L^2. Для этого в свою очередь достаточно показать, что для произвольного $\varepsilon>0$ найдется конечное число таких функций φ_ν из L_2 $(\nu=1,\ \ldots,\ N)$, что для любой функции u из $\mathfrak{M}$ существует φ_ν, для которой $\|u-\varphi_\nu\|<\varepsilon$.

Разобьем куб Q на равные кубы q_i $(i=1,\ \ldots,\ k)$ с ребрами длины η такой, что

$$m\eta^2\delta^{-1}<\frac{\varepsilon^2}{2}. \tag{3.36}$$

Положим

$$\eta^{-m}\int_{q_i} u\,dx = c_i.$$

Так как

$$\int_{q_i} (u - c_i)\,dx = 0,$$

то из леммы 3.3.3 следует, что

$$\| u - c_i \|_{q_i}^2 \leqslant \frac{m}{2}\eta^2 \| Du \|_{q_i}^2.$$

Обозначим через χ_i такую функцию, что $\chi_i(x) = 1$, если $x \in q_i$, и $\chi_i(x) = 0$, если $x \in Q - q_i$. Тогда

$$\| u - \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_i \|_Q^2 =$$

$$= \sum_{i=1}^{k} \| u - c_i \|_{q_i}^2 \leqslant \frac{m}{2}\eta^2 \| Du \|_Q^2 \leqslant \frac{m}{2}\eta^2 \cdot ||| u |||^2 < \frac{\varepsilon^2}{4}$$

(здесь учтено неравенство (3.36) и то, что $u \in \mathfrak{M}$). Таким образом,

$$\| u - \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_i \|_Q < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Заметим, что

$$| c_i | \leqslant \eta^{-m} \left| \int_{q_i} u\,dx \right| \leqslant \eta^{-m/2} \left(\int_{q_i} u^2\,dx \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant \eta^{-m/2} ||| u ||| \leqslant \eta^{-m/2}\delta^{-1}.$$

Выберем теперь функции φ_ν $(\nu = 1, \ldots, N)$ следующим образом:

$$\varphi_\nu = \sum_{i=1}^{k} c_{\nu_i}\chi_i, \quad | c_{\nu_i} | \leqslant \eta^{-m/2}\delta^{-1}.$$

При таком выборе функций φ_ν при любых c_i $(i=1, \ldots, k)$ таких, что $|c_i| \leqslant \eta^{-m/2}\delta^{-1}$, справедливо неравенство

$$\left\| \sum_{i=1}^{k} c_i\chi_i - \varphi_\nu \right\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

поэтому для любой функции $u \in \mathfrak{M}$ существует такая функция $\varphi_\nu \in L_2$ $(1 \leqslant \nu \leqslant N)$, что $\| u - \varphi_\nu \| < \varepsilon$. ▌

3.3.3. Применение теории Рисса — Шаудера. Пусть λ — произвольное число. Определим операторы $\Phi_\lambda = \Phi + \lambda$ и $\Phi_\lambda^* = \Phi^* + \lambda$, т. е.

$$\Phi_\lambda u = \Phi u + \lambda u \qquad (u \in \mathfrak{C}_0),$$
$$\Phi_\lambda^* v = \Phi^* v + \lambda v \quad (v \in \mathfrak{C}_0^*).$$

Тогда из (3.32) и (3.33) следует, что для $\varphi, \psi \in L^2$

$$\left.\begin{aligned} \Phi_\lambda u = \varphi\,(u \in \mathfrak{C}_0) &\rightleftarrows u' + \lambda T u' = \varphi \quad (u' \in L^2), \\ \Phi_\lambda^* v = \psi\,(v \in \mathfrak{C}_0^*) &\rightleftarrows v' + \lambda T^* v' = \psi \quad (v' \in L^2). \end{aligned}\right\} \tag{3.37}$$

Согласно (3.34), оператор T^* является оператором, сопряженным к оператору T.

Если область G ограничена, то T — линейный вполне непрерывный оператор и, следовательно, согласно теории Рисса — Шаудера, справедливы следующие утверждения:

a) для значений λ, отличных от собственных значений λ_n оператора T (множество собственных значений не более чем счетно и не имеет предельных точек в конечной части плоскости), при произвольных $\varphi, \psi \in L^2$ существует, и притом единственное, решение каждого из уравнений

$$u' + \lambda T u' = \varphi, \tag{3.38}$$

$$v' + \lambda T^* v' = \psi; \tag*{(3.38)*}$$

b) если λ равно собственному значению оператора T, то каждое из однородных уравнений

$$u' + \lambda T u' = 0, \tag{3.39}$$

$$v' + \lambda T^* v' = 0, \tag*{(3.39)*}$$

соответствующих уравнениям (3.38) и (3.38)*, имеет одно и то же число k (где $1 \leqslant k < \infty$) линейно независимых решений (собственных функций):

c) если λ равно собственному значению оператора T, то для того, чтобы уравнение (3.38) имело решение u', необходимо и достаточно, чтобы функция φ была ортогональна всем решениям (собственным функциям) уравнения (3.39)* (из них линейно независимы k функций).

В частности, разрешимость уравнения (3.38) для произвольных φ эквивалентна тому, что уравнение (3.39) имеет только нулевое решение, т. е. λ не равно собственному значению (теорема Рисса).

Согласно (3.37), уравнения (3.38) и (3.38)* эквивалентны соответственно уравнениям

$$\Phi_\lambda u = \varphi \quad (u \in \mathfrak{C}_0), \tag{3.40}$$

$$\Phi_\lambda^* v = \psi \quad (v \in \mathfrak{C}_0^*). \tag*{(3.40)*}$$

Поэтому если λ не равно собственному значению, то уравнения (3.40) и (3.40)* однозначно разрешимы при произвольных φ, $\psi \in L^2$, а если равно, то соответствующие однородные уравнения (уравнения, в которых $\varphi = 0$ и $\psi = 0$) имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений (называемых собственными функциями уравнений (3.40) и (3.40)* соответственно).

Итак, следующие утверждения равносильны:

Уравнение $\Phi_\lambda u = \varphi$ $(u \in \mathfrak{C}_0)$ *разрешимо для произвольного* φ;

Единственным решением уравнения $\Phi_\lambda u = 0$ *является* $u = 0$.

Если λ равно собственному значению, то, согласно (3.37) и утверждению c), разрешимость уравнения $\Phi_\lambda u = \varphi$ эквивалентна тому, что $(\varphi, v_i') = 0$ для линейно независимых решений v_i' $(i = 1, \ldots, k)$ уравнения (3.39)*. Однако так как $v_i' = \Phi^* v_i = \Phi_\lambda^* v_i - \lambda v_i = -\lambda v_i$ $(\lambda \neq 0)$, то утверждение „уравнение $\Phi_\lambda u = \varphi$ разрешимо" равносильно утверждению „$(\varphi, v_i) = 0$ для всех линейно независимых решений v_i $(i = 1, 2, \ldots, k)$ уравнения $\Phi_\lambda^* v = 0$".

Теорема 3.3.1. *Пусть область G ограничена и функции A, b, b', c ограничены в G. Если существует такое* *число* α, *что* [1])

$$\xi A \xi \geqslant \alpha |\xi|^2, \quad \alpha > 0,$$

то справедливы следующие утверждения:

a) „$\Phi u = \varphi$ $(u \in \mathfrak{E}_0)$ *разрешимо для произвольного* $\varphi \in L^2$“ $\rightleftarrows$ „*Единственным решением уравнения* $\Phi u = 0$ *является* $u = 0$“

b) „$\Phi u = 0$ *и* $\Phi^* v = 0$ *имеют одинаковое (конечное) число линейно независимых решений*“.

c) „$\Phi u = \varphi$ $(u \in \mathfrak{E}_0)$ *имеет решение*“ $\rightleftarrows$ „$(\varphi, v_i) = 0$ $(i = 1, \ldots, k)$ *для всех линейно независимых решений* v_i *уравнения* $\Phi^* v = 0$ $(v \in \mathfrak{E}_0^*)$“.

Доказательство. Если λ достаточно велико, то билинейная форма $B_\lambda [u, v]$, соответствующая дифференциальному оператору Φ_λ, удовлетворяет условиям $(*)$ теоремы 3.2.1 [леммы 3.2.1]. Но так как $\Phi = (\Phi_\lambda)_{-\lambda}$, то утверждения a), b), c) справедливы. ∎

3.4. Дифференциальные свойства решений; семейства $(\mathfrak{D}^k)$

Решение u уравнения $\Phi u = \varphi$ $(a \in \mathfrak{E}_0)$ принадлежит пространству $\mathfrak{D}$, однако не ясно, дифференцируемо ли оно в обычном смысле. Так как существование второй производной не является очевидным, то функцию u нельзя считать решением дифференциального уравнения в обычном смысле. Однако если A, b, c — достаточно гладкие функции, то можно надеяться, что решение также будет иметь вторые производные и будет решением в обычном смысле.

Чтобы исследовать этот вопрос, введем прежде всего семейство функций $(\mathfrak{D}^k)$. Для удобства записи будем $\varkappa$-кратный оператор дифференцирования $\partial_{i_1} \ldots \partial_{i_\varkappa}$ обозначать сокращенно $\partial^\varkappa_{(i)}$. Семейство функций, определенных на G и принадлежащих области определения слабого расширения оператора $\partial^\varkappa_{(i)}$, будем обозначать $(\partial^\varkappa_{(i)})[G]$ или просто $(\partial^\varkappa_{(i)})$. Если $(i) = (i_1, \ldots, i_\varkappa)$, то будем писать $|(i)| = \varkappa \leqslant k$. Символ $(\mathfrak{D}^k)$ будет обозначать совокупность функций, принадлежащих се-

---

[1]) Условия $(*)$ теоремы 3.2.1 могут не выполняться полностью.

мействам $(\partial^{\varkappa}_{(i)})$ для всех (i) таких, что $|(i)|=\varkappa\leqslant k$, т. е. $(\mathfrak{D}^k)=\bigcap\limits_{\varkappa\leqslant k}\ \bigcap\limits_{|(i)|=\varkappa}(\partial^{\varkappa}_{(i)})$.

Лемма 3.4.1.

$$u\in(\partial^{\varkappa}_{(i)})\cap(\partial^{\varkappa+\lambda}_{(i,\ j)})\rightleftarrows u\in(\partial^{\varkappa}_{(i)}),\ \partial^{\varkappa}_{(i)}u\in(\partial^{\lambda}_{(j)}).$$

При этом

$$\partial^{\varkappa+\lambda}_{(i,\ j)}u=\partial^{\lambda}_{(j)}(\partial^{\varkappa}_{(i)}u).$$

Кроме того, если $u\in(\partial^{\varkappa}_{(i)})\cap(\partial^{\lambda}_{(j)})\cap\partial^{\varkappa+\lambda}_{(i,\ j)}$, *то*

$$\partial^{\varkappa+\lambda}_{(i,\ j)}u=\partial^{\lambda}_{(j)}(\partial^{\varkappa}_{(i)}u)=\partial^{\varkappa}_{(i)}(\partial^{\lambda}_{(j)}u).$$

Лемма 3.4.1 вытекает непосредственно из определения слабого расширения дифференциального оператора. Подробное проведение доказательства предоставляется читателю.

Лемма 3.4.2. *Если* $A,\ b\in C^{\varkappa}$, $Du\in(\mathfrak{D}^{\varkappa})$, $\varkappa\leqslant k$, *то*

$$\partial^{\varkappa}_{(i)}(A\,Du)=A\partial^{\varkappa}_{(i)}\,Du+\sum_{|(i)|\leqslant k-1}A_{\nu(i)}\partial^{\nu}_{(i)}\,Du,$$

$$\partial^{\varkappa}_{(i)}(b\cdot Du)=b\cdot\partial^{\varkappa}_{(i)}\,Du+\sum_{|(i)|\leqslant\varkappa-1}b_{\nu(i)}\partial^{\nu}_{(i)}\,Du,$$

при этом функции $A_{\nu(i)}$, $b_{\nu(i)}$ *принадлежат* $C^{\varkappa-\nu}\subset C^1$.

Доказательство. Если $u\in C^{\infty}$, то утверждение леммы очевидно. Если $Du\in(\mathfrak{D}^{\varkappa})$, то достаточно воспользоваться свойством оператора осреднения J_{δ}, а именно, если $\nu\leqslant\varkappa$, то $\partial^{\nu}_{(i)}J_{\delta}\,Du\to\partial^{\nu}_{(i)}\,Du$ при $\delta\to 0$. ▮

Дальнейшее изложение этого параграфа посвящено доказательству следующей теоремы.

Теорема 3.4.1. *Если* $A,\ b,\ b',\ c\in C^k$, $\varphi\in(\mathfrak{D}^{k-1})$, $\xi A\xi>\alpha|\xi|^2$ (*где* $\alpha>0$ *не зависит от* ξ) *и* $\Phi u=\varphi\,(u\in\mathfrak{C})$, *то* $u\in(\mathfrak{D}^{k+1})$, $k\geqslant 1$.

Для доказательства этой теоремы потребуется

Лемма 3.4.3. *При предположениях теоремы* 3.4.1, *если* $u\in(\mathfrak{D}^{\varkappa})$ $(\varkappa\leqslant k)$, *то для любого такого открытого множества* G_0, *что* $G_0\prec G$,

$$\|\partial^{\varkappa}_{(i)}J_{\delta}\,Du-\partial^{\varkappa}_{(i)}J_{\delta'}\,Du\|_{G_0}\to 0$$

при $\delta,\ \delta'\to 0$.

Доказательство. Для $\varkappa=0$ лемма очевидна. Пусть $\varkappa \geqslant 1$ и G_1 — такая произвольная область, что $G_0 \prec G_1 \prec G$. Если $v \in \mathfrak{L}^2[G]$, то $\|J_\delta v - v\|_{G_1} \to 0$ при $\delta \to 0$. Положим $J_\delta - J_{\delta'} = J''$, тогда

$$\|J''v\|_{G_1} \to 0 \quad \text{при} \quad \delta,\ \delta' \to 0. \tag{3.41}$$

Равенство $\Phi u = \varphi$ эквивалентно равенству

$$B[u,\ w] = (\varphi,\ w)$$

для произвольных $w \in C_0^\infty[G]$. Если взять $\delta,\ \delta' > 0$ достаточно малыми, то из того, что $J''w \in C_0^\infty[G]$, следует, что $B[u,\ J''w] = (\varphi,\ J''w)$, т. е.[1])

$$(ADu,\ DJ''w) + (b \cdot Du,\ J''w) + (cu,\ J''w) = (\varphi,\ J''w).$$

Так как $S(w) \subset G_{(\delta)} \cap G_{(\delta')}$, то $DJ''w = J''Dw$. Значит,

$$(J''ADu,\ Dw) + (J''b \cdot Du,\ w) + (J''cu,\ w) = (J''\varphi,\ w). \tag{3.42}$$

Обозначим через $\sigma(x)$ функцию, обладающую следующими свойствами: $\sigma \in C_0^\infty[G]$; $0 \leqslant \sigma(x) \leqslant 1$; $\sigma(x)=1$ для $x \in G_0$; $\sigma(x)=0$ для $x \in G - G_1$. Положим

$$w = \bar{\partial}^{\varkappa}_{(i)} \sigma^2 \partial^{\varkappa}_{(i)} J'' u \quad \left(\bar{\partial}^{\varkappa}_{(i)} = \partial^{\varkappa *}_{(i)} = (-1)^{\varkappa} \partial^{\varkappa}_{(i)}\right). \tag{3.43}$$

Так как $w \in C_0^\infty$ (поскольку $S(w) \subset G_1^a$), то при достаточно малых δ и δ' справедливо равенство (3.42). В дальнейшем мы будем считать, что $G_1 \subset G_{(\delta)} \cap G_{(\delta')}$. Согласно обозначениям (3.43),

$$Dw = \bar{\partial}^{\varkappa}_{(i)} D\left(\sigma^2 \partial^{\varkappa}_{(i)} J'' u\right),$$

поэтому

$$\begin{aligned}(J''A\,Du,\ Dw) &= \left(J''A\,Du,\ \bar{\partial}^{\varkappa}_{(i)} D\left(\sigma^2 \partial^{\varkappa}_{(i)} J'' u\right)\right) = \\ &= \left(\partial^{\varkappa}_{(i)} J''A\,Du,\ D\left(\sigma^2 \partial^{\varkappa}_{(i)} J'' u\right)\right).\end{aligned} \tag{3.44}$$

Если равенство имеет место для всех $x \in G_1$, то мы будем писать $\underset{G_1}{=}$

[1]) Для простоты изложения рассматривается случай $b'=0$. При $b' \neq 0$ основные идеи доказательства остаются без изменений.

Полагая $\partial_{(i)}^{\varkappa}=\partial_{(i)}^{\varkappa-1}\partial_{i'}=\partial_{i'}\partial_{(i)}^{\varkappa-1}$ и учитывая, что $ADu\in(\mathfrak{D}^{\varkappa-1})$, получаем

$$\partial_{(i)}^{\varkappa}J''A\,Du \underset{G_1}{=} \partial_{i'}J''\partial_{i}^{\varkappa-1}A\,Du,$$

откуда

$$\partial_{(i)}^{\varkappa-1}A\,Du=A\partial_{(i)}^{\varkappa-1}Du+\sum_{|(i)|\leqslant\varkappa-2}A_{\nu(i)}\partial_{(i)}^{\nu}Du,$$

$$\partial_{i'}J''\sum_{|(i)|\leqslant\varkappa-2}A_{\nu(i)}\partial_{(i)}^{\nu}Du \underset{G_1}{=} \sum_{|(i)|\leqslant\varkappa-2}J''\partial_{i'}A_{\nu(i)}\partial_{(i)}^{\nu}Du=$$
$$=\sum_{|(i)|\leqslant\varkappa-1}J''A'_{\nu(i)}\partial_{(i)}^{\nu}Du,$$

где $A_{\nu(i)}$, $A'_{\nu(i)}\in C^{\varkappa-1-\nu}$. Итак,

$$\partial_{(i)}^{\varkappa}J''A\,Du \underset{G_1}{=} \partial_{i'}J''A\partial_{(i)}^{\varkappa-1}Du+\sum_{|(i)|\leqslant\varkappa-1}J''A'_{\nu(i)}\partial_{(i)}^{\nu}Du. \quad (3.45)$$

Так как $A'_{\nu(i)}\partial_{(i)}^{\nu}Du\in\mathfrak{L}^2$, то $\|J''A'_{\nu(i)}\partial_{(i)}^{\nu}Du\|_{G_1}\to0$ при δ, $\delta'\to0$.

В дальнейшем, если $\|u_{(\delta,\,\delta')}-v_{(\delta,\,\delta')}\|_{G_1}\to0$ при δ, $\delta'\to0$, мы будем писать $u_{(\delta,\,\delta')}\approx v_{(\delta,\,\delta')}$.

Из (3.45) следует, что при δ, $\delta'\to0$

$$\partial_{(i)}^{\varkappa}J''A\,Du\approx\partial_{i'}J''A\partial_{(i)}^{\varkappa-1}Du.$$

Так как $\partial_{(i)}^{\varkappa-1}Du\in\mathfrak{L}^2[G]$, то в силу следствия 2.7 и условия $\partial_{i'}A\cdot J''\partial_{(i)}^{\varkappa-1}Du\approx0$ имеем

$$\partial_{i'}J''A\partial_{(i)}^{\varkappa-1}Du\approx\partial_{i'}AJ''\partial_{(i)}^{\varkappa-1}Du\approx A\partial_{i'}J''\partial_{(i)}^{\varkappa-1}Du.$$

Следовательно,

$$\partial_{(i)}^{\varkappa}J''A\,Du\approx A\partial_{i'}J''\partial_{(i)}^{\varkappa-1}Du \underset{G_1}{=} A\partial_{(i)}^{\varkappa}J''\,Du. \quad (3.46)$$

Так как $u\in(\mathfrak{D}^{\varkappa})$, то $\partial_{(i)}^{\varkappa}J''u \underset{G_1}{=} J''\partial_{(i)}^{\varkappa}u\approx0$, поэтому

$$\sigma^{-1}D\left(\sigma^2\partial_{(i)}^{\varkappa}J''u\right) \underset{G_1}{=} \sigma\partial_{(i)}^{\varkappa}DJ''u+2D\sigma\cdot\partial_{(i)}^{\varkappa}J''u\approx\sigma\partial_{(i)}^{\varkappa}J''Du. \quad (3.47)$$

Из (3.44), (3.46) и (3.47), учитывая ограниченность матрицы A в области G_1, получаем[1])

$$(J''A\,Du,\ Dw)=\left(A\sigma\partial_{(i)}^{\varkappa}J''\,Du,\ \sigma\partial_{(i)}^{\varkappa}J''\,Du\right)+$$
$$+o\left(\|\sigma\partial_{(i)}^{\varkappa}J''\,Du\|_{G_1}\right). \quad (3.48)$$

---

[1]) Запись $f=o(\|\ \|)$ означает, что $f/\|\ \|\to0$ при δ, $\delta'\to0$.

Используя обозначения (3.43), имеем

$$(J''b \cdot Du,\ w) = \left(\sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''b \cdot Du,\ \sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''u\right). \tag{3.49}$$

Аналогично тому, как было получено (3.46), получаем

$$\partial^{\varkappa}_{(i)}J''b \cdot Du \approx b \cdot \partial^{\varkappa}_{(i)}J''\, Du.$$

Так как $\partial^{\varkappa}_{(i)}J''u \underset{G_1}{=} J''\partial^{\varkappa}_{(i)}u \approx 0$, а вектор b ограничен в G_1, то из (3.49) следует, что

$$(J''b \cdot Du,\ w) = o\left(\|\sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\, Du\|_{G_1}\right). \tag{3.50}$$

Наконец, вновь используя обозначения (3.43), мы можем записать

$$(J''cu,\ w) = \left(\sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''cu,\ \sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''u\right),$$

и опять аналогично тому, как было получено (3.46), получаем

$$\partial^{\varkappa}_{(i)}J''cu \approx c\partial^{\varkappa}_{(i)}J''u.$$

Значит,

$$\partial^{\varkappa}_{(i)}J''u \underset{G_1}{=} J''\partial^{\varkappa}_{(i)}u \approx 0.$$

Поэтому

$$(J''cu,\ w) \to 0 \quad \text{при } \delta,\ \delta' \to 0. \tag{3.51}$$

Так как $\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\varphi \underset{G_1}{=} J''\partial^{\varkappa}_{(i)}\varphi \approx 0$ для любых $\varkappa \leqslant k-1$, то

$$(J''\varphi,\ w) = \left(\sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\varphi,\ \sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''u\right) \to 0 \quad \text{при } \delta,\ \delta \to 0. \tag{3.52}$$

Если $\varkappa = k$, то, записывая $\bar{\partial}^{\varkappa}_{(i)} = \bar{\partial}^{\varkappa-1}_{(i)}\bar{\partial}_{i'}$, имеем

$$(J''\varphi,\ w) = \left(\partial^{\varkappa-1}_{(i)}J''\varphi,\ \bar{\partial}_{i'}\sigma^2\partial^{\varkappa}_{(i)}J''u\right).$$

Так как $\bar{\partial}_{i'}\sigma^2\partial^{\varkappa}_{(i)}J''u \underset{G_1}{=} -2\sigma\partial_{i'}\sigma \cdot \partial^{\varkappa}_{(i)}J''u - \sigma^2\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\,\partial_{i'}u$,

$$\partial_{i'}\sigma \cdot \partial^{\varkappa}_{(i)}J''u \approx 0,\quad \partial^{\varkappa-1}_{(i)}J''\varphi \approx 0,$$

$$\|\sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\,\partial_{i'}u\|_{G_1} \leqslant \|\sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\, Du\|_{G_1},$$

то

$$(J''\varphi,\ w) = o\left(\|\sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\, Du\|_{G_1}\right). \tag{3.53}$$

И, наконец,

$$\left(A\sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\, Du,\ \sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\, Du\right) \geqslant \alpha\|\sigma\partial^{\varkappa}_{(i)}J''\, Du\|^2_{G_1} \quad (\alpha > 0). \tag{3.54}$$

Поэтому из (3.42), (3.48), (3.50), (3.51), (3.52), а также из (3.53) и (3.54) следует, что

$$\alpha \| \sigma\partial_{(i)}^{\varkappa} J'' Du \|_{G_1}^2 = o\left(\| \sigma\partial_{(i)}^{\varkappa} J'' Du \|_{G_1} \right) + o(1) \quad \text{при } \delta,\ \delta' \to 0.$$

Учитывая, что $\alpha > 0$ — некоторая постоянная, а $\sigma(x) = 1$ на G_0, получаем

$$\| \partial_{(i)}^{\varkappa} J'' Du \|_{G_0} \leqslant \| \sigma\partial_{(i)}^{\varkappa} J'' Du \|_{G_1} \to 0. \blacksquare$$

Доказательство теоремы 3.4.1. Из леммы 3.4.3 вытекает, что если $u \in (\mathfrak{D}^{\varkappa})\ (\varkappa \leqslant k)$, то для произвольной области G_0 ($G_0 < G$) выражение $\partial_{(i)}^{\varkappa} J_\delta Du$ сходится в $L^2[G_0]$ при $\delta \to 0$, т. е. существует такая функция $v \in L^2[G_0]$, что $\partial_{(i)}^{\varkappa} J_\delta Du \to v$. Так как $J_\delta Du \to Du$ и оператор $\partial_{(i)}^{\varkappa}$ замкнут, то $Du \in (\partial_{(i)}^{\varkappa})$ и $v = \partial_{(i)}^{\varkappa} Du$. Это справедливо для всех (i) таких, что $|(i)| = \varkappa$. Следовательно, $Du \in (\mathfrak{D}^{\varkappa})$, т. е. $u \in (\mathfrak{D}^{\varkappa+1})$.

При $\varkappa = 1$ очевидно, что $u \in (\mathfrak{D})^{\varkappa}$. По индукции имеем $u \in (\mathfrak{D}^{\varkappa+1})$. $\blacksquare$

3.5. Теорема Соболева и ее применение к исследованию дифференциальных свойств решений

Ясно, что $C^k \subset (\mathfrak{D}^k)$, но $C^k \neq (\mathfrak{D}^k)$. С. Л. Соболев доказал, что если $k > m/2 + l$, то $(\mathfrak{D}^k)[G] \subset C^l[G]$, где G — некоторая область в m-мерном евклидовом пространстве[1]).

Сейчас мы переходим к доказательству этого утверждения.

Для функций $u \in (\mathfrak{D}^k)$ таких, что $\partial_{(i)}^{\varkappa} u \in L^2[G]$ для всех (i), для которых $|(i)| = k$, определим $\| D^k u \|_G$ формулой[2])

$$\| D^k u \|_G = \Big(\sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \| \partial_{(i)}^k u \|_G^2 \Big)^{1/2}.$$

Будем писать $u \in \mathfrak{D}^k[G]$, если $u \in (\mathfrak{D}^k)$ и $\| D^{\varkappa} u \|_G < \infty$ при всех $\varkappa \leqslant k$.

Лемма 3.5.1. *Если $k > m/2$ и $u \in C^k[G] \cap \mathfrak{D}^k[G]$, то существуют такие числа $\gamma_{m,k,\nu}$, зависящие только от*

---

[1]) Сформулированное утверждение является весьма частным случаем доказанной С. Л. Соболевым теоремы. См. [5]. — *Прим. ред.*

[2]) Запись $1 \leqslant i \leqslant m$ означает, что $1 \leqslant i_\nu \leqslant m$ ($\nu = 1, \ldots, k$).

m, k и ν, что для всех $x \in G_{(\rho)}$ [1]) *выполняется неравенство*

$$|u(x)| \leqslant \sum_{\nu \leqslant k} \gamma_{m,k,\nu} \rho^{\nu - m/2} \| D^{\nu} u \|_G \quad (x \in G_{(\rho)}).$$

Доказательство. 1. Докажем, что для функций $u \in C_0^k[G]$ имеет место представление

$$u(x^0) = \frac{-1}{\Omega_m (k-1)!} \int_G |x - x^0|^{-m} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \prod_{\nu=1}^{k} (x_{i_\nu} - x^0_{i_\nu}) \partial^k_{(i)} u(x)\, dx, \tag{3.55}$$

где $x^0 \in G$, а Ω_m — площадь поверхности единичного m-мерного шара.

Можно считать, что $u \in C_0^k[E^m]$. Обозначим через $\varphi(r)$ среднее значение функции $u(x)$ на сфере $|x - x^0| = r$, т. е.

$$\varphi(r) = \frac{1}{\Omega_m} \int_{|\xi|=1} u(x^0 + r\xi)\, d_\xi \Omega. \tag{3.56}$$

Так как $\varphi(0) = u(x^0)$, $\varphi(r) \in C_0^k[0 \leqslant r < \infty]$, то после интегрирования по частям получим

$$u(x^0) = -\int_0^\infty \varphi'(r)\, dr = -\int_0^\infty \frac{r^{k-1}}{(k-1)!} \varphi^{(k)}(r)\, dr. \tag{3.57}$$

Из (3.56) вытекает, что

$$\varphi^{(k)}(r) = \frac{1}{\Omega_m} \int_{|\xi|=1} \partial_r^k u(x^0 + r\xi)\, d_\xi \Omega =$$

$$= \frac{1}{\Omega_m} \int_{|\xi|=1} \left\{ \left(\sum_{i=1}^{m} \xi_i \partial_i \right)^k u(x) \right\}_{x = x^0 + r\xi} d_\xi \Omega,$$

---

[1]) $G_{(\rho)} = \{x : |x - x'| < \rho \Rightarrow x' \in G\}$. [Символ $\Rightarrow$ означает равномерную сходимость. — *Ред.*]

где ∂_r обозначает производную по r. Тогда, согласно (3.57),

$$u(x^0)=$$
$$=-\frac{1}{\Omega_m}\int_0^\infty \frac{r^{k-m}}{(k-1)!}\int_{|\xi|=1}\left\{\left(\sum_{i=1}^m \xi_i\partial_i\right)^k u(x)\right\}_{x=x^0+r\xi} r^{m-1}d_\xi\Omega\cdot dr=$$
$$=-\frac{1}{(k-1)!\,\Omega_m}\int_{E^m}|x-x^0|^{k-m}\left\{\left(\sum_{i=1}^m \xi_i\partial_i\right)^k u(x)\right\}_{\xi=\frac{(x-x^0)}{|x-x^0|}} dx.$$

Мы видим, что правая часть последнего равенства совпадает с правой частью равенства (3.55).

2. Если $u(x)=0$, когда $|x-x^0|\geqslant\rho$, то

$$|u(x^0)|\leqslant C_{m,\,k}\rho^{k-m/2}\,\|D^k u\|_G, \tag{3.58}$$

где $C_{m,\,k}$ — некоторые числа, зависящие только от m и k.

Из неравенства

$$\left|\sum_{1\leqslant i\leqslant m}\prod_{\nu=1}^k (x_{i_\nu}-x^0_{i_\nu})\,\partial^k_{(i)}u(x)\right|\leqslant$$
$$\leqslant\left(\sum_{i=1}^m (x_i-x^0_i)^2\right)^{k/2}\left(\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|\partial^k_{(i)}u|^2\right)^{1/2}$$

и из (3.55) следует, что

$$|u(x^0)|\leqslant[\Omega_m(k-1)!]^{-1}\times$$
$$\times\int_{|x-x^0|<\rho}|x-x^0|^{k-m}\left\{\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|\partial^k_{(i)}u(x)|^2\right\}^{1/2}dx\leqslant$$
$$\leqslant[\Omega_m(k-1)!]^{-1}\left(\int_{|x-x^0|<\rho}|x-x^0|^{2(k-m)}\,dx\right)^{1/2}\|D^k u\|_G=$$
$$=[\Omega_m(k-1)!]^{-1}\left\{\Omega_m(2k-m)^{-1}\rho^{2k-m}\right\}^{1/2}\|D^k u\|_G.$$

Таким образом, неравенство (3.58) доказано.

3. Обозначим через α функцию, обладающую следующими свойствами: $\alpha\in C_0^\infty[E^m]$, $\alpha(0)=1$ и $\alpha(x)=0$, если $|x|\geqslant 1$. Положим $\alpha_\rho(x)=\alpha(\rho^{-1}(x-x^0))$. Если $x^0\in G_{(\rho)}$ и $u\in C^k[G]\cap\mathfrak{D}^k[G]$, то $\alpha_\rho u\in C_0^k[G]$, причем $\alpha_\rho u(x)=0$, когда

$|x-x^0|\geqslant\rho$, и $\alpha_\rho u(x^0)=u(x^0)$. Согласно пункту 2, имеем

$$|u(x^0)|\leqslant C_{m,k}\rho^{k-m/2}\|D^k(\alpha_\rho\cdot u)\|. \qquad (3.59)$$

Полагая здесь $\max\limits_{1\leqslant i\leqslant m}\max\limits_x|\partial_{(i)}^\nu\alpha|=a_{m\nu}$, получаем

$$\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|\partial_{(i)}^k(\alpha_\rho u)|^2\leqslant\sum_{\nu=0}^k C'_{k,\nu}a_{m,k-\nu}^2\rho^{-2(k-\nu)}\sum_{1\leqslant i\leqslant m}|\partial_{(i)}^\nu u|^2.$$

Следовательно,

$$\|D^k(\alpha_\rho u)\|\leqslant\sum_{\nu=0}^k C''_{k,\nu}a_{m,k-\nu}\rho^{-k+\nu}\|D^\nu u\|.$$

Из этого неравенства и неравенства (3.59) вытекает утверждение леммы. ▌

Теперь мы в состоянии доказать теорему Соболева.

Теорема 3.5.1. *Если $l<k-m/2$, то $(\mathfrak{D}^k)\subset C^l$.*

Доказательство. Пусть $u\in(\mathfrak{D}^k)[G]$. Можно выбрать (см. теорему 2.6.1) такую последовательность u_n, что, какова бы ни была область G_0 ($G_0\Subset G$), для нее $u_n\in C^k(G_0)$ и при $n,\ n'\to\infty$

$$\|D^\nu(u_n-u_{n'})\|_{G_0}\to 0\quad(0\leqslant\nu\leqslant k). \qquad (3.60)$$

Через $\bar{\varkappa}$ обозначим наибольшее из целых чисел $\varkappa$ таких, что $\varkappa<k-m/2$. Если $\varkappa\leqslant\bar{\varkappa}$, то в силу леммы 3.5.1, примененной к $\partial_i^{(\varkappa)}(u_n-u_{n'})$, и неравенства $\|D^\nu\partial_{(i)}^\varkappa u\|_{G_0}\leqslant\|D^{\nu+\varkappa}u\|_G$ получим, что

$$|\partial_{(i)}^\varkappa(u_n-u_{n'})(x)|\leqslant\sum_{\nu=0}^{k-\varkappa}\gamma_{m,k-\varkappa,\nu}\delta^{-k-\varkappa+\nu}\|D^{\nu+k}(u_n-u_{n'})\|_{G_0}$$

для $x\in G_{0(\delta)}$. Поэтому, согласно (3.60), последовательность $\partial_i^{(\varkappa)}u_n(x)$ сходится равномерно на $G_{0(\delta)}$. В силу произвольности выбора числа $\delta>0$ и области $G_0\Subset G$ существует такая функция u_∞, что $u_\infty\in C^{\bar{\varkappa}}[G]$, и последовательность $\partial_i^\varkappa u_n(x)$ сходится к $\partial_i^\varkappa u_\infty(x)$ на G равномерно в слабом смысле (т. е. сходится равномерно на любой подобласти $G_0\Subset G$). С другой стороны, так как $\|u_n-u\|_{G_0}\to 0$, то $u(x)=u_\infty(x)$ для почти всех $x\in G$. ▌

Замечание. Из доказательства ясно, что вложение $(\mathfrak{D}^k) \subset C^l$ надо понимать следующим образом: для любой функции $u \in (\mathfrak{D}^k)$ существует такая функция u_∞, что $u_\infty \in C^l$ и $u(x) = u_\infty(x)$ почти всюду на G.

Теорема 3.5.2. *Если* $k > m/2 + l$; A, b, b', $c \in C^k$, $\varphi \in (\mathfrak{D}^{k-1})$, $\xi A \xi > \alpha |\xi|^2$ ($\alpha > 0$ *не зависит от* ξ) *и* $\Phi u = \varphi$ ($u \in \mathfrak{D}$), *то* $u \in C^{l+1}$.

Доказательство немедленно получается из теорем 3.4.1 и 3.4.2.

Следствие 3.5. *Если* A, b, b', c, $\varphi \in C^\infty$, $\xi A \xi > \alpha |\xi|^2$ ($\alpha > 0$ *не зависит от* ξ) *и* $\Phi u = \varphi (u \in \mathfrak{D})$, *то* $u \in C^\infty$.

3.6. Дополнения к главе 3

Согласно § 3.2, если дифференциальный оператор является самосопряженным (в этом случае билинейная форма $B[u, v]$ симметрична, т. е. $B[u, v] = B[v, u]$) и соответствующая квадратичная форма $B[u, u]$ положительно определена, т. е. $B[u, u] > 0$ при $u \neq 0$, то можно определить скалярное произведение функций u и v как $B[u, v]$. В этом случае нормой функции u является число $\sqrt{B[u, u]}$, и множество таких функций u, для которых $B[u, u] < \infty$ представляет собой гильбертово пространство. Следовательно, используя теорему Рисса, можно доказать существование обобщенного решения (здесь нет необходимости применять теорему Лакса — Мильграма). Тем самым существование обобщенного решения в предположениях $\xi A \xi > 0$ ($\xi \neq 0$), $b = 0$ и $c(x) > 0$ (или $c(x) \to \infty$ при $x \to 0$ и $c(x) \to 0$ при $|x| \to \infty$) доказывается для произвольной области. Однако тогда вместо семейства функций $\mathfrak{D}_0$ нужно рассмотреть замыкание пространства $C_0^\infty[G]$ по норме $\sqrt{B[u, u]}$. В связи с этим следует отметить, что граничные значения понимаются в другом смысле, чем в случае, когда рассматривалось семейство функций $\mathfrak{D}_0$.

Далее, если положить $B[u, u] - 2(\varphi, u) = F[u]$, то решение $u = u_0$ уравнения $\Phi u = \varphi$ минимизирует функционал $F[u]$. В самом деле,

$$
\begin{aligned}
F[u] - F[u_0] &= B[u, u] - B[u_0, u_0] - 2(\varphi, u - u_0) = \\
&= B[u, u - u_0] + B[u - u_0, u_0] - 2(\varphi, u - u_0) = \\
&= B[u - u_0, u - u_0] + 2\{B[u_0, u - u_0] - (\varphi, u - u_0)\}.
\end{aligned}
$$

Так как для всех $w \in \mathfrak{D}_0$

$$\Phi u_0 = \varphi \rightleftarrows B[u_0, w] = (\varphi, w),$$

то выражение в фигурных скобках обращается в нуль и, следовательно,

$$F[u] - F[u_0] = B[u - u_0, u - u_0],$$

откуда и вытекает, что при $u = u_0$ функционал $F[u]$ принимает минимальное значение. Этот факт есть не что иное, как обобщение известного в теории гармонических функций принципа Дирихле.

Выше говорилось о доказательстве существования решения уравнения $\Phi u = \varphi$ с помощью теоремы Рисса. Однако доказательство теоремы Рисса использует тот факт, что в гильбертовом пространстве существует элемент (ортогональная проекция), реализующий кратчайшее расстояние до гиперплоскости. Следовательно, приведенное выше доказательство есть не что иное, как доказательство существования решения с помощью принципа Дирихле. Но на основании только этого принципа нельзя сделать выводы о дифференцируемости решения, поэтому в классической теории этот принцип не мог полностью дать ответ на вопрос о существовании классического решения. Для полного исследования этого вопроса потребовалось, с одной стороны, использовать расширенные дифференциальные операторы, а с другой — понадобился общий метод исследования дифференциальных свойств решения. Метод Фридрихса, описанный в этой главе, может быть использован также для исследования систем уравнений высших порядков. Метод Фридрихса изложен в его статье [42].

Вопрос о существовании обобщенного решения был, по-видимому, впервые рассмотрен в 1937 году С. Л. Соболевым для полигармонического уравнения $\Delta^n u = 0$.

Изложение теории Рисса—Шаудера[1]) можно найти в книгах [1] — [4].

Если в дополнение к условиям следствия 3.5 потребовать, чтобы функции A, b, b', c, φ были аналитическими, то из-

---

[1]) Относимой обычно к спектральной теории вполне непрерывных операторов. — *Прим. ред.*

вестно, что решение u также будет аналитической функцией. См., например, [45], [46].

В книге К. Миранды [47] подробно изложены многочисленные результаты по теории дифференциальных уравнений эллиптического типа.

Что касается более поздних работ, то нужно обратить внимание на исследования Ф. Браудера и Ф. Джона, опубликованные в сборнике Contributions to the theory of partial differential equations, Annals of Mathematics Studies, № 33, а также на работы, публикуемые в математических журналах (особенно в журнале Communications on Pure and Applied Mathematics (сокращенно CPAM)), в частности на работы [43] и [44].

Дополнение редактора перевода. Наиболее исчерпывающие результаты, относящиеся к свойствам обобщенных решений эллиптических уравнений, можно найти в работе [11]. Изложение вариационной теории — в [5], [29].

Очень хорошо изложены многие вопросы теории эллиптических операторов в [6]. Рассмотрения с точки зрения спектральной теории проводятся в [10], [30].

В последнее время все большее внимание привлекает переход от дифференциальных операторов эллиптического типа к более широким классам „псевдодифференциальных" операторов. Соответствующая техника является далеко идущим обобщением методов, основывающихся на преобразовании Фурье [31], [32].

Глава 4

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ УРАВНЕНИЯ В ЧАСТНЫХ ПРОИЗВОДНЫХ ГИПЕРБОЛИЧЕСКОГО ТИПА

Фридрихс предложил сведѐние дифференциальных уравнений в частных производных второго порядка гиперболического типа к симметричным системам дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка. Он доказал теорему существования обобщенного решения задачи Коши и исследовал его дифференциальные свойства. Лакс, рассматривая симметричные системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка, предполагал периодическую зависимость от всех пространственных переменных и установил существование решения и его дифференциальные свойства. В методе Фридрихса при исследовании дифференциальных свойств решение дифференциального уравнения рассматривается как предел решений конечно-разностных уравнений. В принципе это весьма естественный метод, но он приводит к сложным выкладкам. В методе Лакса используется необычное на первый взгляд понятие $(-k)$-нормы. В нем, однако, хорошо отражены характерные черты современных методов исследования дифференциальных уравнений.

В этой главе изложение ведется в основном согласно Лаксу. Но при этом рассмотрения проводятся во всем пространстве E^{m+1} или (при изучении задачи Коши) в полупространстве, без предположения о периодичности рассматриваемых функций. Для того чтобы было легче понять сущность метода, мы проводим сначала доказательство существования обобщенного решения без исследования дифференциальных свойств.

Для симметричных систем уравнений при выполнении условий регулярной гиперболичности[1]) доказывается существова-

[1]) То есть равномерное (во всем пространстве) выполнение условий гиперболичности для коэффициентов уравнения. — *Прим. ред.*

ние обобщенного решения во всем пространстве. При этом существование решения задачи Коши выводится из так называемого энергетического неравенства, справедливого для регулярных гиперболических уравнений. Для доказательства существования решения, имеющего первые частные производные, а также для исследования дифференциальных свойств решения предварительно вводятся пространства функций $\mathfrak{D}^k$ (с конечной k-нормой) и пространства функций $\mathfrak{D}^{-k}$ (с конечной $(-k)$-нормой).

Семейство функций, порождающее пространство $\mathfrak{D}^{-k}$, совпадает с семейством функций, порождающих пространство $\mathfrak{D}^0 = L^2$, однако норма в $\mathfrak{D}^{-k}$ вводится таким образом, что пространство $\mathfrak{D}^{-k}$ можно отождествить с некоторой частью пространства, сопряженного к пространству $\mathfrak{D}^k$. При этом важную роль играют дифференциальные операторы Λ_k (являющиеся некоторым обобщением оператора Лапласа Δ), которые устанавливают связь между k-нормой и $(-k)$-нормой. Ввиду того что мы используем только те предварительные сведения, которые изложены в гл. 1, при доказательствах используется не преобразование Фурье, а операторы осреднения (что упрощает доказательство существования, но создает определенные трудности при исследовании дифференциальных свойств).

В конце этой главы говорится об областях зависимости решения от начальных данных и в связи с этим указывается, как из результатов, полученных для всего пространства, получить результаты для части пространства.

4.1. Дифференциальные уравнения в частных производных второго порядка гиперболического типа и симметричные системы дифференциальных уравнений в частных производных первого порядка

Пусть $(t, x) = (t, x_1, \ldots, x_m)$ — независимые переменные, а a_{ij}, b_i, c, f и u — функции, зависящие от (t, x). Дифференцирование по переменной x_i будем обозначать символом ∂_i, а дифференцирование по переменной t — символом ∂_t.

Рассмотрим дифференциальное уравнение в частных производных второго порядка

$$\partial_t^2 u - \sum_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}\partial_i\partial_j u + b_0\partial_t u + \sum_{i=1}^{m} b_i\partial_i u + cu = f. \tag{4.1}$$

Будем говорить, что уравнение (4.1) является регулярным гиперболическим уравнением, если квадратичная форма

$$\xi A \xi = \sum a_{ij}\xi_i\xi_j$$

не обращается в нуль для любых $\xi \neq 0$. Если положить

$$\partial_t u = u_0, \quad \partial_i u = u_i \quad (i = 1, \ldots, m),$$

то $\partial_i u_0 = \partial_t u_i$, и мы получим систему дифференциальных уравнений первого порядка

$$\begin{cases} \partial_t u = u_0, \\ \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\partial_t u_i - \sum\limits_{i=1}^{m} a_{ij}\partial_t u_0 = 0, \\ \partial_t u_0 + \sum\limits_{i,\,j=1}^{m} a_{ij}\partial_i u_j + \sum\limits_{i=0}^{m} b_i u_i + cu = f. \end{cases} \tag{4.2}$$

Введем теперь следующие обозначения:

$$1_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A = \left(a_{ij} \;\; \begin{matrix} i \downarrow 1, \ldots, m \\ j \to 1, \ldots, m \end{matrix}\right), \quad A^{(i)} = \left(\begin{matrix} 0 \\ a_{i_\nu} \end{matrix} \;\; \nu \to 1, \ldots, m\right),$$

$$A^{(i)*} = (0 \;\; a_{i\nu} \;\; \nu \downarrow 1, \ldots, m), \qquad B = \left(\begin{matrix} 0 & 0 \\ c & b_i \end{matrix} \;\; i \to 0, 1, \ldots, m\right);$$

O_{kl} — матрица порядка $(k \times l)$, состоящая только из нулей;

$$\widehat{A}_0 = \begin{pmatrix} 1_2 & O_{2,\,m} \\ O_{m,\,2} & A \end{pmatrix}, \quad \widehat{A}_i = \begin{pmatrix} O_{2,\,2} & A^{(i)} \\ A^{(i)*} & O_{m,\,m} \end{pmatrix}, \quad \widehat{B} = \begin{pmatrix} B \\ O_{m,\,m+2} \end{pmatrix},$$

$$\widehat{u} = \left(\begin{matrix} u \\ u_i \end{matrix} \;\; i \downarrow 0, 1, \ldots, m\right), \quad \widehat{f} = \begin{pmatrix} 0 \\ f \\ O_{m,\,1} \end{pmatrix}.$$

Вместо ∂_t будем писать ∂_0. Тогда систему уравнений (4.2) можно записать в матричном виде

$$\sum_{i=0}^{m} \widehat{A}_i\partial_i\widehat{u} + \widehat{B}\,\widehat{u} = \widehat{f}. \tag{4.3}$$

Все матрицы $\hat{A}_i$ симметричны $(\hat{A}_i^* = \hat{A}_i)$. (Матрица $\hat{B}$, вообще говоря, не симметрична.) Такое матричное дифференциальное уравнение в частных производных будем называть *симметричной системой уравнений*. Если $\hat{A}_0$ — знакоопределенная матрица, то систему (4.3) мы будем называть *симметричной гиперболической системой уравнений*.

Пусть функции u, u_0, $u_i \in C^2$ являются таким решением системы (4.2), что при $t = 0$ они удовлетворяют начальному условию $u_i(0, x) = \partial_i u(0, x)$. Так как определитель матрицы A не обращается в нуль, то из (4.2) вытекает, что $\partial_t u_i = \partial_i u_0 = \partial_i \partial_t u$. Следовательно, $\partial_t (u_i - \partial_i u) = 0$. Но при $t = 0$ справедливо равенство $u_i - \partial_i u = 0$, поэтому $u_i = \partial_i u$. Значит, u является решением уравнения (4.1).

Так как $\partial_0 = \partial_t$, то, полагая в (4.3) $\hat{u} = e^{\lambda t}\hat{v}$, получаем

$$\sum_{i=0}^{m} \hat{A}_i \partial_i \hat{v} + (\hat{B} + \lambda \hat{A}_0)\hat{v} = e^{-\lambda t}\hat{f}. \tag{4.4}$$

Эта система уравнений отличается от системы (4.3) тем, что вместо $\hat{B}$ взято $\hat{B} + \lambda \hat{A}_0$, а вместо $\hat{f}$ взято $e^{-\lambda t}\hat{f}$.

4.2. Существование обобщенного решения симметричной гиперболической системы дифференциальных уравнений в частных производных

В этом параграфе мы не будем различать переменные t и x и, рассматривая общую симметричную систему уравнений, включаем t в число переменных x. Пусть G — открытое множество в m-мерном евклидовом пространстве, A_i и B — матрицы порядка $(l \times l)$, элементы которых — непрерывные на G функции; матрицы A_i симметричны; матрицы $\partial_\nu A_i$ ($\nu = 1, \ldots, m$; $i = 1, \ldots, l$) и B непрерывны и ограничены на G. Определим дифференциальные операторы Φ и Φ_λ формулами

$$\Phi u = \sum_{i=1}^{m} A_i \partial_i u + Bu, \quad \Phi_\lambda u = \Phi u + \lambda A_0 u \tag{4.5}$$

(здесь u представляет собой l-мерный вектор, компонентами которого являются зависящие от x функции). Положим

$\sum\limits_{i=1}^{m} \partial_i A_i = \partial A$ и будем считать, что существуют такие константы a и c, что выполнены неравенства

$$\xi A_0 \xi \geqslant a\,|\,\xi\,|^2, \quad a > 0, \quad \left|\xi\left(B - \frac{1}{2}\partial A\right)\xi\right| \leqslant c\,|\,\xi\,|^2. \tag{4.6}$$

При этих предположениях справедлива следующая теорема.

Теорема 4.2.1. *Пусть на G выполнены неравенства (4.6) и $\lambda a > c$. Тогда для любой функции f из $L^2[G]$ уравнение*

$$\Phi_\lambda u = f \quad (u \in L^2[G])$$

имеет по крайней мере одно решение $u \in L^2[G]$.

Здесь Φ_λ обозначает расширение дифференциального оператора Φ_λ, определенного формулами (4.5). Для доказательства этой теоремы докажем предварительно лемму.

Лемма 4.2.1. *Если $\lambda a > c$, то для любой функции w из $C_0^\infty[G]$ справедливо неравенство*

$$\|w\| \leqslant (\lambda a - c)^{-1} \left\|\Phi_\lambda^* w\right\| \quad \left(w \in C_0^\infty\right), \tag{4.7}$$

где Φ_λ^* — оператор, сопряженный к дифференциальному оператору Φ_λ.

Доказательство. Прежде всего покажем, что для $w \in C_0^\infty$ имеет место равенство

$$\sum_{i=1}^{m} (A_i \partial_i w,\ w) = -\frac{1}{2}(\partial A w,\ w). \tag{4.8}$$

Действительно,

$$(A_i \partial_i w,\ w) = (\partial_i w,\ A_i w) = (w,\ -\partial_i(A_i w)) =$$
$$= -(w,\ A_i \partial_i w) - (w,\ \partial_i A_i w),$$

поэтому

$$(A_i \partial_i w,\ w) = -\frac{1}{2}(\partial_i A_i w,\ w).$$

Отсюда мы получаем равенство (4.8), а из него следует, что

$$(\Phi_\lambda w,\ w) = \lambda (A_0 w,\ w) + \left(\left(B - \frac{1}{2}\partial A\right) w,\ w\right).$$

Следовательно, применяя неравенства (4.6), получаем

$$\left|(w,\ \Phi_\lambda^* w)\right| = \left|(\Phi_\lambda w,\ w)\right| \geqslant a\lambda \| w \|^2 - c \| w \|^2.$$

Далее,

$$\left|(w,\ \Phi_\lambda^* w)\right| \leqslant \| w \| \cdot \left\| \Phi_\lambda^* w \right\|,$$

поэтому $\| w \|^2 (\lambda a - c) \leqslant \| w \| \cdot \left\| \Phi_\lambda^* w \right\|$. Отсюда получаем неравенство (4.7).∎

Доказательство теоремы 4.2.1. По определению расширения оператора Φ_λ

$$\Phi_\lambda u = f \rightleftarrows (u,\ \Phi_\lambda^* w) = (f,\ w) \quad \text{для всех } w \in C_0^\infty, \tag{4.9}$$

поэтому достаточно доказать существование функции u, удовлетворяющей равенству в правой части (4.9). Обозначая $\Phi_\lambda^*(C_0^\infty) = \mathfrak{F}$, для любого $w' \in \mathfrak{F}$ в силу (4.7) однозначно получаем элемент $w = (\Phi_\lambda^*)^{-1} w' (\in C_0^\infty)$, причем $\|w\| \leqslant$ $\leqslant (\lambda a - c)^{-1} \|w'\|$.

Положим далее

$$(f,\ w) = \left(f,\ (\Phi_\lambda^*)^{-1} w'\right) = \psi_f(w'). \tag{4.10}$$

Поскольку

$$|\psi_f(w')| = |(f,\ w)| \leqslant \|f\| \cdot \|w\| \leqslant (\lambda a - c)^{-1} \|f\| \cdot \|w'\|,$$

$\psi_f(w')$ является линейным ограниченным функционалом на $\mathfrak{F}$. Так как $\mathfrak{F} \subset L^2$, то ψ_f можно продолжить без изменения нормы до линейного функционала на L^2. Полученный функционал также будем обозначать ψ_f. В силу теоремы Рисса об общем виде линейного функционала существует такой элемент u из L^2, что

$$\psi_f(w') = (u,\ w') \quad (w' \in L^2).$$

Так как $w' = \Phi_\lambda^* w$, где $w \in C_0^\infty$, то в силу (4.10) справедливо равенство

$$(f,\ w) = (u,\ \Phi_\lambda^* w) \quad (w \in C_0^\infty).$$

Согласно (4.9), $u \in L^2$ и есть искомое решение.∎

Замечание. Решение, полученное в теореме 4.2.1, не является, вообще говоря, единственным, так как функционал ψ_f можно продолжить на L^2 бесконечным числом различных способов. Это происходит потому, что нет начальных, граничных или каких-либо других условий.

Однако в случае, когда область G совпадает со всем m-мерным евклидовым пространством E^m, решение становится единственным. А именно, имеет место

Теорема 4.2.2. *Если $G=E^m$, то в условиях теоремы* 4.2.1 *уравнение*

$$\Phi_\lambda u = f \quad (u \in L^2[G])$$

имеет единственное решение u.

Доказательство. Существование решения u доказано в теореме 4.2.1. Будем доказывать единственность. Так как оператор Φ_λ линейный, то для доказательства единственности достаточно установить, что если $f=0$, то $u=0$.

Из доказательства леммы 4.2.1 вытекает, что для любой функции $w \in C_0^\infty$

$$|(\Phi_\lambda w,\ w)| \geqslant (\lambda a - c)\,\|w\|^2.$$

Следовательно, учитывая, что $|(\Phi_\lambda w,\ w)| \leqslant \|\Phi_\lambda w\| \cdot \|w\|$, приходим к неравенству

$$\|w\| \leqslant (\lambda a - c)^{-1}\,\|\Phi_\lambda w\| \qquad \left(w \in C_0^\infty\right). \tag{4.11}$$

Итак, $u \in L^2[E^m]$, $\Phi_\lambda u = f \in L^2[E^m]$, поэтому, согласно следствию 2.7.2, существует такая последовательность $\{u_n\}$, что $u_n \in C_0^\infty$ и, кроме того,

$$\|u_n - u\| \to 0, \quad \|\Phi_\lambda u_n - \Phi_\lambda u\| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty. \tag{4.12}$$

Неравенство (4.11) выполняется при $w = u_n$, поэтому, согласно (4.12), справедливо неравенство

$$\|u\| \leqslant (\lambda a - c)^{-1}\,\|\Phi_\lambda u\|. \tag{4.13}$$

Следовательно, если $\Phi_\lambda u = f = 0$, то $u = 0$. ▌

4.3. Задача Коши для симметричных гиперболических систем

В предыдущем параграфе символ $x=(x_0,\ x_1,\ \ldots,\ x_m)$ обозначал переменные $(t,\ x)=(t,\ x_1,\ \ldots,\ x_m) \in E^{m+1}$. Теперь для удобства будем снова вместо x_0 писать t. Пусть матрицы A_i, $\partial_j A_i$, B $(i, j = 0, 1, \ldots, m)$ порядка $(l \times l)$ имеют своими элементами непрерывные и ограниченные на E^{m+1} функции от (t, x) и, кроме того, матрицы A_i симметричны $\left(\overset{*}{A_i} = A_i\right)$, а матрица A_0 — положительная матрица $(\xi A_0 \xi > 0$ при $\xi \neq 0)$. Обозначим через $u_{(t)}$ l-мерный вектор $u(t, x)$, состоящий из функций, зависящих от (t, x) в случае, когда компоненты рассматриваются как функции от $x \in E^m$, а t считается параметром. Определим скалярные произведения $(u_{(t)}, v_{(t)})$ и $(u, v)_{(\tau, \tau')}$ формулами

$$(u_{(t)}, v_{(t)}) = \int\limits_{E^m} u(t, x) \cdot v(t, x)\, dx \qquad \left(uv = \sum_{\nu=1}^{l} u_\nu v_\nu\right),$$

$$(u, v)_{(\tau, \tau')} = \int\limits_{\tau}^{\tau'} (u_{(t)}, v_{(t)})\, dt.$$

Положим $B_\lambda = B + \lambda A_0$, тогда

$$\Phi_\lambda u = \Phi u + \lambda A_0 u = \sum_{i=0}^{m} A_i \partial_i u + B_\lambda u. \tag{4.14}$$

Если $u \in C_0^1[E^{m+1}]$ $\left(\text{а следовательно, } u_{(t)} \in C_0^1[E^m]\right)$, то

$$\frac{d}{dt}(A_0 u_{(t)}, u_{(t)}) = (\partial_t A_0 \cdot u_{(t)}, u_{(t)}) + (A_0 \partial_t u_{(t)}, u_{(t)}) +$$
$$+ (A_0 u_{(t)}, \partial_t u_{(t)}) = 2(A_0 \partial_t u_{(t)}, u_{(t)}) + (\partial_t A_0 \cdot u_{(t)}, u_{(t)}). \tag{4.15}$$

Аналогично тому, как было получено (4.8), можно получить

$$2 \sum_{i=1}^{m} (A_i \partial_i u_{(t)}, u_{(t)}) = -(\partial_x A \cdot u_{(t)}, u_{(t)}), \tag{4.16}$$

где $\partial_x A = \sum\limits_{i=1}^{m} \partial_i A_i$. Но из (4.14) следует, что

$$(A_0 \partial_t u_{(t)}, u_{(t)}) = -\sum_{i=1}^{m} (A_i \partial_i u_{(t)}, u_{(t)}) -$$
$$- (B_\lambda u_{(t)}, u_{(t)}) + (\Phi_\lambda u_{(t)}, u_{(t)}),$$

поэтому, используя (4.15), (4.16) и полагая $\partial_t A_0 \cdot + \partial_x A \cdot = \partial A \cdot$, получаем

$$\frac{d}{dt}(A_0 u_{(t)}, u_{(t)}) = -((2B_\lambda - \partial A \cdot)\, u_{(t)}, u_{(t)}) + 2(\Phi_\lambda u_{(t)}, u_{(t)}).$$

Интегрируя это соотношение по t, имеем

$$(A_0 u_{(\tau')}, u_{(\tau')}) - (A_0 u_{(\tau)}, u_{(\tau)}) = \\ = -((2B_\lambda - \partial A\cdot)u, u)_{(\tau,\tau')} + 2(\Phi_\lambda u, u)_{(\tau,\tau')}. \quad (4.17)$$

Если задать норму формулами

$$\|u_{(t)}\| = \sqrt{(u_{(t)}, u_{(t)})}, \quad \|u\|_{(\tau,\tau')} = \sqrt{(u, u)_{(\tau,\tau')}},$$

то из (4.17) вытекает следующая лемма.

Лемма 4.3.1. *Если существуют такие числа c, a, $\bar{a}$, что*

$$\left|\xi\left(B - \frac{1}{2}\partial A\cdot\right)\xi\right| \leqslant c|\xi|^2, \quad a|\xi|^2 \leqslant \xi A_0 \xi \leqslant \bar{a}|\xi|^2 \quad (a>0)$$

и $u \in C_0^1[E^{m+1}]$, то для любого $\varepsilon > 0$ при $\tau \leqslant \tau'$ справедливо неравенство

$$a\|u_{(\tau')}\|^2 + (2(\lambda a - c) - \varepsilon)\|u\|^2_{(\tau,\tau')} \leqslant \\ \leqslant \bar{a}\|u_{(\tau)}\|^2 + \frac{1}{\varepsilon}\|\Phi_\lambda u\|_{(\tau,\tau')}. \quad (4.18)$$

(Оно называется *интегральным энергетическим неравенством.*)

Доказательство. Из наших предположений следует, что

$$a\|u_{(t)}\|^2 \leqslant (A_0 u_{(t)}, u_{(t)}) \leqslant \bar{a}\|u_{(t)}\|^2,$$

$$\left(\left(B_\lambda - \frac{1}{2}\partial A\cdot\right)u, u\right)_{(\tau,\tau')} \geqslant (\lambda a - c)\|u\|^2_{(\tau,\tau')},$$

$$2(\Phi_\lambda u, u)_{(\tau,\tau')} \leqslant 2\|\Phi_\lambda u\|_{(\tau,\tau')}\cdot\|u\|_{(\tau,\tau')} \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\|\Phi_\lambda u\|^2_{(\tau,\tau')} + \varepsilon\|u\|^2_{(\tau,\tau')},$$

поэтому из (4.17) следует (4.18).∎

Рассмотрим теперь свойства обобщенных решений уравнения $\Phi u = f$.

Пусть u является решением гиперболической системы уравнений $\Phi u = f$, где $f \in L^2[E^{m+1}]$. Для любого фиксированного t функция $u_{(t)}$ принадлежит $L^2[E^m]$, но при $t \to \pm\infty$ функция $u_{(t)}$ неограничена в $L^2[E^m]$. Поэтому мы не можем утверждать, что $u \in L^2[E^{m+1}]$. Обозначим через $\mathfrak{F}_\Phi$

множество таких функций u, что для любого конечного числа $\tau > 0$ функции u и Φu принадлежат пространству $L^2[x \in E^m, |t| < \tau]$. Выясним, при каких условиях решение u принадлежит множеству $\mathfrak{F}_\Phi$.

Лемма 4.3.2. *Если* $u \in \mathfrak{F}_\Phi$ *и выполняются условия леммы* 4.3.1, *то для любого* $\tau > 0$ *существует такая последовательность* $u_n \in C_0^\infty[E^{m+1}]$, *что при* $n \to \infty$

$$\| u_n - u \|_{(-\tau, \tau)} \to 0, \quad \| \Phi u_n - \Phi u \|_{(-\tau, \tau)} \to 0 \quad (4.19)$$

и

$$\| (u_n - u)_{(t)} \| \rightrightarrows 0 \quad \textit{почти всюду} \quad (-\tau \leqslant t \leqslant \tau). \quad (4.20)$$

Доказательство. Если $\sigma \in C_0^\infty[|t| < \infty]$ и $\sigma(t) = 1$ при $|t| < \tau$, то σu и $\Phi(\sigma u) \in L^2[E^{m+1}]$ (это следует из равенства $\Phi(\sigma u) = \sigma \Phi u + \sigma' A_0 u$). Поэтому, согласно следствию 2.7.2, можно выбрать такую последовательность функций $u_n \in C_0^\infty[E^{m+1}]$, что $\| u_n - \sigma u \| \to 0$ и $\| \Phi u_n - \Phi(\sigma u) \| \to 0$ при $n \to \infty$. Отсюда вытекает (4.19).

Соотношения (4.19) выполняются также, если вместо τ взять $\tau' > \tau$. Пусть $\sigma \in C_0^\infty$, $0 \leqslant \sigma(t) \leqslant 1$, $\sigma(t) = 1$ при $|t| < \tau$ и $\sigma(t) = 0$ при $|t| > \tau'$. Для любого λ, такого, что $\lambda a > c$, положим $e^{-\lambda t} \sigma u_n = v_n$. Тогда из равенства $\Phi_\lambda(v_n) = \Phi(\sigma u_n) = \sigma \Phi(u_n) + \sigma' A_0 u_n$ следует, что

$$\| v_n - v_{n'} \|_{(-\tau', \tau')} \to 0 \quad \text{и} \quad \| \Phi_\lambda (v_n - v_{n'}) \|_{(-\tau', \tau')} \to 0$$

при $n, n' \to \infty$. Следовательно, согласно лемме 4.3.1, выбирая $\varepsilon = 2(\lambda a - c)$ и учитывая, что $v_{n(-\tau')} = 0$, получаем, что при $|t| < \tau'$

$$\| (v_n - v_{n'})_{(t)} \| \leqslant \varepsilon^{-1/2} \| \Phi_\lambda (v_n - v_{n'}) \|_{(-\tau', \tau')} \to 0,$$

когда $n, n' \to \infty$.

Так как $u_n = e^{\lambda t} v_n$ при $|t| \leqslant \tau$, то $\| (u_n - u_{n'})_{(t)} \| \rightrightarrows 0$ $(-\tau \leqslant t \leqslant \tau)$ при $n, n' \to \infty$, т. е. при $|t| \leqslant \tau$ последовательность $u_n(t)$ сходится равномерно (в $L^2[E^m]$).

Далее, если выбрать $u_{n(i)}$ так, чтобы $\| u_{n(i)} - u_{n(i+1)} \|_{(-i,i)} < 2^{-i}$, то

$$\lim_{i \to \infty} u_{n(i)}(t, x) = u(t, x) \text{ почти всюду } \left((t, x) \in E^{m+1}\right), \quad (4.21)$$

следовательно, $\|(u_n - u)_{(t)}\| \rightrightarrows 0$ почти всюду при $|t| \leqslant \tau$. ∎

Замечание. В случае, когда доказано, что равенство (4.21) справедливо для всех (x, t), для которых сходится левая часть этого равенства, условие „почти всюду" в (4.20) лишнее, и запись $u_{(t)} \in L^2[E^m]$ имеет смысл для всех t. Полученная таким образом функция $u_{(t)}$ является непрерывной в смысле L^2 функцией от t (так как $u_{n(t)}$ — непрерывные в смысле L^2 функции от t). В дальнейшем мы увидим, что функции $u_{(t)}$, являющиеся решениями гиперболических уравнений, обладают этим свойством (если $u \in \mathfrak{F}_\Phi$).

Лемма 4.3.3. *Пусть выполнены условия леммы* 4.3.1, $\lambda a > c$, *и пусть функции* u *и* $\Phi_\lambda u$ *принадлежат* $L^2[E^{m+1}]$. *Тогда из равенства* $\Phi_\lambda u = 0$ *при* $t < 0$ *следует, что* $u_{(t)} = 0$ *при* $t < 0$.

Доказательство. Согласно лемме 4.2.2, можно выбрать такие функции u_n, что $u_n \in C_0^\infty[E^{m+1}]$ и

$$\|u_n - u\| \to 0, \qquad \|\Phi_\lambda u_n - \Phi_\lambda u\| \to 0$$

при $n \to \infty$. Положим $\varepsilon = 2(\lambda a - c)$ $(\varepsilon > 0)$. Так как, согласно лемме 4.3.1, $u_{n(\tau)} \to 0$ при $\tau \to -\infty$, то при $t \leqslant 0$

$$a \| u_{n(t)} \|^2 \leqslant \varepsilon^{-1} \| \Phi_\lambda u_n \|^2_{(-\infty, t)} \quad (t \leqslant 0).$$

Но

$$\| \Phi_\lambda u_n \|_{(-\infty, t)} \leqslant \| \Phi_\lambda u \|_{(-\infty, t)} + \| \Phi_\lambda u_n - \Phi_\lambda u \| \to 0,$$

следовательно, $\| u_{n(t)} \| \to 0$ при $t \leqslant 0$. Далее получим так же, как при доказательстве леммы 4.3.2, что $\|(u_n - u)_{(t)}\| \to 0$, поэтому $u_{(t)} = 0$ при $t \leqslant 0$. ∎

Лемма 4.3.4. *Пусть для некоторого* $a > 0$ *справедливы неравенства*

$$a |\xi|^2 \leqslant \xi A_0 \xi \leqslant \bar{a} |\xi|^2, \quad \left| \xi \left(B - \frac{1}{2} \partial A \cdot \right) \xi \right| \leqslant c |\xi|.$$

Тогда для любого $\tau > 0$ *существует постоянная* C_τ, *зависящая только от* a, $\bar{a}$, c *и* τ, *такая, что для всех* $u \in \mathfrak{F}_\Phi$

$$a \| u_{(t)} \|^2 + \| u \|^2_{(-\tau,\, t)} \leqslant C_\tau \left(\| u_{(0)} \|^2 + \| \Phi u \|^2_{(-\tau,\, \tau)} \right)$$
$$(-\tau \leqslant t \leqslant \tau).$$

Доказательство. Применяя леммы 4.3.1 и 4.3.2, получаем, что неравенство (4.18) справедливо для всех $u \in \mathfrak{F}_\Phi$. При этом можно заменить в левой части τ на t. Если $u = e^{\lambda t} v$, то $v \in \mathfrak{F}_{\Phi_\lambda}$, значит, при $0 \leqslant t \leqslant \tau$, полагая $\lambda a - c = 1$, $\varepsilon = 1$, получаем

$$a \| v_{(t)} \|^2 + \| v \|^2_{(0,\, t)} \leqslant \bar{a} \| v_{(0)} \|^2 + \| \Phi_\lambda v \|^2_{(0,\, \tau)}.$$

Следовательно, учитывая, что $\Phi u = e^{-\lambda t} \Phi_\lambda v$, $v_{(0)} = u_{(0)}$, получаем неравенство

$$a \| u_{(t)} \|^2 + \| u \|^2_{(0,\, \tau)} \leqslant e^{2\lambda\tau} \bar{a} \| u_{(0)} \|^2 + e^{4\lambda\tau} \| \Phi u \|^2_{(0,\, \tau)},$$

справедливое при $0 \leqslant t \leqslant \tau$. Точно так же при $-\tau \leqslant t \leqslant 0$ справедливо неравенство

$$a \| u_{(t)} \|^2 + \| u \|^2_{(-\tau,\, 0)} \leqslant e^{2\lambda\tau} \bar{a} \| u_{(0)} \|^2 + e^{4\lambda\tau} \| \Phi u \|^2_{(-\tau,\, 0)}.$$

Утверждение леммы вытекает из этих двух неравенств. ∎

Теорема 4.3.1. *Пусть матрицы* A_i, $\partial_j A_i$ *и* B *непрерывны и ограничены в* E^{m+1} *и существует такая постоянная* $a > 0$, *что* $\xi A_0 \xi \geqslant a |\xi|^2$. *Тогда задача*

$$\Phi u = f, \quad u_{(0)} = \varphi(x), \quad u \in \mathfrak{F}_\Phi$$

при произвольных $f \in L^2[E^{m+1}]$ *и* $\varphi \in L^2[E^m]$ *имеет решение и притом единственное.*

Доказательство. Пусть сначала $\varphi \in C_0^\infty$. Рассмотрим функцию $\sigma \in C_0^\infty[-\infty < t < \infty]$, $\sigma(0) = 1$, и обозначим $\sigma(t) \cdot \varphi(x) = \psi(t, x)$. Тогда $\psi \in C_0^\infty[E^{m+1}]$, $\psi_0 = \varphi$. Определим функцию $f_{(+)}$ следующим образом: $f_{(+)}(t, x) = f(t, x)$ при $t < 0$ и $f_{(+)}(t, x) = \Phi\psi(t, x)$ при $t < 0$, и положим $u = e^{\lambda t} v$. Тогда

$$\Phi u = f_{(+)} \rightleftarrows \Phi_\lambda v = e^{-\lambda t} f_{(+)}.$$

Будем считать, что здесь $\lambda a > c$ (см. лемму 4.3.1), тогда (так как $e^{-\lambda t} f_{(+)} \in L^2[E^{m+1}]$) правое уравнение имеет решение $v \in L^2[E^{m+1}]$ (см. теорему 4.2.1). Эта функция v удовлетворяет равенству $v = e^{-\lambda t}\psi(t, x)$ при $t \leqslant 0$, так как если $v - e^{-\lambda t}\psi = v'$, то $\Phi_\lambda v' = \Phi_\lambda v - e^{-\lambda t}\Phi\psi$, т. е. $\Phi_\lambda v' = 0$ при $t < 0$. Поэтому в силу леммы 4.3.3 $v' = 0$ при $t < 0$. Значит, уравнение $\Phi u = f_{(+)}$ имеет такое решение $u = u_{(+)}$, что $u_{(+)} = \psi(t, x)$ при $t \leqslant 0$.

Аналогично, если определить функцию $f_{(-)}$, которая при $t < 0$ совпадает с f, а при $t \geqslant 0$ с $\Phi\psi$, то уравнение $\Phi u = f_{(-)}$ имеет такое решение $u = u_{(-)}$, что $u_{(-)} = \psi(t, x)$ при $t \geqslant 0$. Если теперь положить $u = u_{(+)} + u_{(-)} - \psi$, то

$$\Phi u = f, \quad u_{(0)} = \psi_{(0)} = \varphi.$$

Теперь будем считать, что $\varphi \in L^2[E^m]$. Можно выбрать такие функции φ_n, что $\varphi_n \in C_0^\infty[E^m]$ и $\|\varphi_n - \varphi\|_{E^m} \to 0$ при $n \to \infty$.

Через u_n обозначим решение уравнения $\Phi_u = f$, удовлетворяющее условию $u_{(0)} = \varphi_n$ (по доказанному выше оно существует), тогда $\Phi(u_n - u_{n'}) = 0$.

Следовательно, согласно лемме 4.3.4,

$$a\,\|(u_n - u_{n'})_{(t)}\|^2 + \|u_n - u_{n'}\|^2_{(-\tau,\, t)} \leqslant C_\tau \|\varphi_n - \varphi_{n'}\|^2_{E^m},$$

поэтому при $n,\ n' \to \infty$

$$\|u_n - u_{n'}\|_{(-\tau,\, \tau)} \to 0, \quad \|(u_n - u_{n'})_{(t)}\| \rightrightarrows 0 \qquad (-\tau \leqslant t \leqslant \tau).$$

Значит, найдется такая функция u, что

$$\|u_n - u\|_{(-\tau,\, \tau)} \to 0, \quad \|(u_n - u)_{(t)}\| \rightrightarrows 0 \qquad (-\tau \leqslant t \leqslant \tau).$$

Но Φ — замкнутый линейный оператор и $\Phi u_n = f$, поэтому

$$\Phi u = f \ (u \in \mathfrak{F}_\Phi), \ u_0 = \varphi.$$

Теперь единственность решения рассматриваемой задачи станет очевидной, если применить лемму 4.3.4 к разности двух решений. ▌

4.4. Пространства $\mathfrak{D}^k$ и $\mathfrak{D}^{-k}$

До сих пор мы говорили только об обобщенных решениях. Для того чтобы выяснить, при каких условиях эти обобщенные решения становятся решениями в обычном смысле, займемся прежде всего в качестве подготовки изучением функциональных классов $\mathfrak{D}^k$ и $\mathfrak{D}^{-k}$.

Через $\mathfrak{D}^k[G]$ или просто $\mathfrak{D}^k$ будем обозначать совокупность функций u, определенных в области G, которые принадлежат функциональному классу $(\mathfrak{D}^k)$, введенному в § 3.4, т. е. таких функций u, у которых $\| \partial^k_{(i)} u \| < \infty$ для любого $\varkappa \leqslant k$. Для функций $u \in \mathfrak{D}^k$ определим k-норму $\| u \|_k$ формулой

$$\| u \|_k = \left(\sum_{k=0}^{k} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \| \partial^k_{(i)} u \|^2 \right)^{1/2}.$$

Если задать для функций $u, v \in \mathfrak{D}^k$ скалярное произведение

$$[u, v]_k = \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\partial^{\varkappa}_{(i)} u, \partial^{\varkappa}_{(i)} v \right),$$

то $[u, u]_k = \| u \|_k^2$. Очевидно, что $\mathfrak{D}^k$ превращается в гильбертово пространство относительно введенных нормы и скалярного произведения. В частности, $\mathfrak{D}^0 = L^2$ и $\| u \|_0 = \| u \|$. Легко видеть, что $\| u \|_{k-1} \leqslant \| u \|_k$, т. е. $\mathfrak{D}^k \subset \mathfrak{D}^{k-1}$.

Пусть далее $\mathfrak{D}^k_0$ — замыкание по норме $\mathfrak{D}^k$ множества C_0^∞, содержащегося в пространстве $\mathfrak{D}^k$. Запись $u \in \mathfrak{D}^k_0$ означает, что $u \in \mathfrak{D}^k$ и существует такая последовательность функций $u_n \in C_0^\infty$, что $\| u_n - u \|_k \to 0$. Множество $\mathfrak{D}^k_0$ является замкнутым линейным подпространством пространства $\mathfrak{D}^k$, следовательно, оно также является действительным гильбертовым пространством. Для m-мерного евклидова пространства E^m справедлива следующая лемма.

Лемма 4.4.1. *Если $G = E^m$, то $\mathfrak{D}^k_0 = \mathfrak{D}^k$.*

Доказательство. Используя операторы осреднения J_δ, получим для $u \in \mathfrak{D}^{\varkappa}$, согласно § 2.6, что при $\varkappa \leqslant k$

$$\| J_\delta u - u \| \to 0, \quad \| \partial^{\varkappa}_{(i)} J_\delta u - \partial^{\varkappa}_{(i)} u \| \to 0$$

при $\delta \to 0$. Значит, существует такая последовательность $\{u_n\}$, что $u_n \in C^\infty[E^m]$, $\| u_n - u \|_k \to 0$. Обозначим через α такую принадлежащую C_0^∞ функцию, что $0 \leqslant \alpha(x) \leqslant 1$, $\alpha(x) = 1$ при $|x| \leqslant 1$ и $\alpha(x) = 0$ при $|x| \geqslant 2$. Если $a_\rho(x) = a(\rho^{-1}x)$, то $a_\rho u_n \in C_0^\infty$. Для функций $v \in \mathfrak{D}^0$ имеем $\|\alpha_\rho v - v\| \to 0$ при $\rho \to \infty$. Так как $|\partial_{(i)}^{\varkappa} \alpha_\rho(x)| \leqslant \rho^{-\varkappa} \max |\partial_{(i)}^{\varkappa} \alpha(x)|$, то $\|\partial_{(i)}^{\varkappa} a_\rho v\| \to 0$ при $\rho \to \infty$, если $\varkappa \geqslant 1$. Таким образом, при $\rho \to \infty$

$$\|\alpha_\rho u_n - u_n\|_k \to 0.$$

Следовательно, если соответствующим образом выбрать последовательность $\rho_n \to \infty$, то

$$\alpha_{\rho_n} u_n \in C_0^\infty \quad \text{и} \quad \|\alpha_{\rho_n} u_n - u\|_k \to 0. \blacksquare$$

4.4.1. Определение пространств $\mathfrak{D}^{-k}$. Пусть $u \in \mathfrak{D}^k$, $v \in \mathfrak{D}^0$, тогда

$$|(u, v)| \leqslant \|u\| \cdot \|v\| \leqslant \|u\|_k \cdot \|v\|. \tag{4.22}$$

Поэтому, если при фиксированном v положить $(u, v) = \psi_v(u)$, то $\psi_v \in (\mathfrak{D}^k)^*$ (через $(\mathfrak{D}^k)^*$ обозначено пространство линейных функционалов на $\mathfrak{D}^k$). Если $\psi_v = \psi_{v'}$ для некоторых $v, v' \in \mathfrak{D}^0$, то

$$(v - v', u) = 0 \quad \text{для всех} \quad u \in \mathfrak{D}^k,$$

откуда следует, что $v = v'$. Таким образом, установлено взаимно однозначное соответствие между $v (\in \mathfrak{D}^0)$ и ψ_v из некоторого подмножества пространства $(\mathfrak{D}^k)^*$. Определим в $(\mathfrak{D}^k)$ норму $\|v\|_{-k}$ равенством

$$\|v\|_{-k} = \|\psi_v\|_k^*,$$

полагая, таким образом,

$$\|v\|_{-k} = \sup_{0 \neq u \in \mathfrak{D}^k} \left\{ \frac{|(u, v)|}{\|u\|_k} \right\}. \tag{4.23}$$

Норма $\|v\|_{-k}$ называется $(-k)$-нормой. Из (4.22) и (4.23) следует, что

$$\|v\|_{-k} \leqslant \|v\| \qquad (v \in \mathfrak{D}^0).$$

Снабдим каждый элемент пространства $\mathfrak{D}^0$ $(-k)$-нормой. Получившееся множество обозначим через $\mathfrak{D}^{-k}$; $\mathfrak{D}^0 = \mathfrak{D}^{-k}$ (это касается только элементов множеств, нормы отличаются), $\mathfrak{D}^{-k} \subset (\mathfrak{D}^k)^*$ (нормы совпадают) [1]). Из (4.23) следует, что

$$|(u, v)| \leqslant \|u\|_k \cdot \|v\|_{-k} \quad (u \in \mathfrak{D}^k,\ v \in \mathfrak{D}^{-k}). \tag{4.24}$$

Это — так называемое обобщенное неравенство Шварца.

Пространство $\mathfrak{D}^{-k}$ плотно в $(\mathfrak{D}^k)^*$. Покажем это. Так как $\mathfrak{D}^k$ — гильбертово пространство, то $(\mathfrak{D}^k)^{**} = \mathfrak{D}^k$. Следовательно, можно определить линейный функционал $u(\psi)$ в $\mathfrak{D}^*$ равенством $u(\psi) = \psi(u)$, где $u \in \mathfrak{D}^k$ — фиксированный элемент, а ψ — переменный элемент в $(\mathfrak{D}^k)^*$. Если бы $\mathfrak{D}^{-k}$ было не плотно в $(\mathfrak{D}^k)^*$, то существовал бы такой элемент $u \in \mathfrak{D}^k$, что

а) $u(\psi) = 0$, если $\psi \in \mathfrak{D}^{-k}$,

б) $u(\psi_0) \neq 0$, если $\psi_0 \in (\mathfrak{D}^k)^* - (\mathfrak{D}^{-k})^a$.

Так как для любого $v \in \mathfrak{D}^0$ функционал ψ_δ принадлежит $\mathfrak{D}^{-k}$, то из а) следует, что

$$(u, v) = \psi_v(u) = u(\psi_v) = 0 \qquad (v \in \mathfrak{D}^0),$$

поэтому $u = 0$ (как элемент из $\mathfrak{D}^k$). Это противоречит б), значит, $\mathfrak{D}^{-k}$ плотно в $(\mathfrak{D}^k)^*$.

Для элементов $u \in \mathfrak{D}^k$

$$\|u\|_k = \sup_{0 \neq \psi \in (\mathfrak{D}^k)^*} \left\{ \frac{\psi(u)}{\|\psi\|_k^*} \right\},$$

но $\mathfrak{D}^{-k}$ плотно в $(\mathfrak{D}^k)^*$, поэтому можно получить формулу (4.25), аналогичную формуле (4.23):

$$\|u\|_k = \sup_{0 \neq v \in \mathfrak{D}^{-k}} \left\{ \frac{|(u, v)|}{\|v\|_{-k}} \right\}. \tag{4.25}$$

Теорема 4.4.1. *Для любого линейного функционала $l \in (\mathfrak{D}^{-k})^*$, заданного на $\mathfrak{D}^{-k}$, существует такой фиксированный элемент u, что*

$$u \in \mathfrak{D}^k,\ l(v) = (u, v) \ \textit{для всех}\ v \in \mathfrak{D}^0 = \mathfrak{D}^{-k}.$$

При этом $\|l\|_{-k}^* = \|u\|_k$.

---

[1]) Так определенное $\mathfrak{D}^{-k}$ не является полным пространством. Пополнение $\mathfrak{D}^0$ по введенной $(-k)$-норме будет содержать „обобщенные функции" — элементы, не принадлежащие $\mathfrak{D}^0$. (Элементарный пример см. в [24].) — *Прим. ред.*

Доказательство. Так как $\mathfrak{D}^{-k}$ плотно в $(\mathfrak{D}^k)^*$, то функционал l можно однозначно продолжить до линейного функционала, определенного на $(\mathfrak{D}^k)^*$, поэтому можно считать, что $l \in (\mathfrak{D}^k)^{**}$. Так как $(\mathfrak{D}^k)^{**} = \mathfrak{D}^k$, то существует такой фиксированный элемент $u \in \mathfrak{D}^k$, что $l(\psi) = u(\psi) = \psi(u)$, где переменным является элемент $\psi \in (\mathfrak{D}^k)^*$. Значит, если $v \in \mathfrak{D}^0$ и $\psi_v \in \mathfrak{D}^{-k}$, то

$$l(v) = l(\psi_v) = \psi_v(u) = (u, v).$$

Кроме того, из (4.25) следует, что $\|u\|_k = \|l\|^*_{-k}$. ∎

4.4.2. Дифференциальный оператор Λ_k. Если u и $v \in C_0^\infty$, то

$$[u, v]_k = \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\partial^\varkappa_{(i)} u, \partial^\varkappa_{(i)} v\right) = \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} \left(\overline{\partial}^\varkappa_{(i)} \partial^\varkappa_{(i)} u, v\right),$$

где $\overline{\partial}^\varkappa_{(i)} = (-1)^\varkappa \partial^\varkappa_{(i)}$. Поэтому если определить оператор Λ_k формулой

$$\Lambda_k u = \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{1 \leqslant i \leqslant m} (-1)^\varkappa \left(\partial^\varkappa_{(i)}\right)^2 u, \tag{4.26}$$

то имеет место равенство

$$[u, v]_k = (\Lambda_k u, v) = (u, \Lambda_k v) \qquad \left(u, v \in C_0^\infty\right). \tag{4.27}$$

Слабое расширение дифференциального оператора Λ_k также будем обозначать через Λ_k.

Так как Λ_k — самосопряженный дифференциальный оператор $\left(\Lambda_k^* = \Lambda_k\right)$, то

$$\Lambda_k u = u' \rightleftarrows (u, \Lambda_k w) = (u', w) \text{ для всех } w \in C_0^\infty. \tag{4.28}$$

Если, в частности, $u \in \mathfrak{D}_0^k$, то для всех $w \in C_0^\infty$

$$\Lambda_k u = u' \rightleftarrows [u, w]_k = (u', w). \tag{4.29}$$

В самом деле, пусть для любого элемента $u \left(u \in \mathfrak{D}_0^k\right)$ последовательность $u_n \left(u_n \in C_0^\infty\right)$ выбрана так, что $\|u_n - u\|_k \to 0$. Из (4.27) вытекает, что

$$[u_n, w]_k = (u_n, \Lambda_k w) \quad \text{для всех} \quad w \in C_0^\infty.$$

Следовательно, переходя к пределу при $n \to \infty$, получаем

$$[u, w]_k = (u, \Lambda_k w) \quad \text{для всех} \quad w \in C_0^\infty,$$

откуда и вытекают соотношения (4.28) и (4.29).

Лемма 4.4.2. *Если* $u \in \mathfrak{D}^k$, $v \in \mathfrak{D}^0$ *и если* $\Lambda_k u = v$, *то*

$$\| v \|_{-k} = \| u \|_k.$$

Доказательство. Из (4.29) вытекает, что $[u, w]_k = (v, w)$ для всех $w \in C_0^\infty$. Так как C_0^∞ плотно в $\mathfrak{D}_0^k$, то

$$[u, w]_k = (v, w) \quad \text{для всех} \quad w \in \mathfrak{D}_0^k, \tag{4.30}$$

и, положив $(v, w) = \psi_v(w)$, получим $\psi_v \in (\mathfrak{D}^k)^*$ и $\| \psi_v \|_k^* = \| v \|_{-k}$. Равенство (4.30) означает, что $\psi_v(w) = [u, w]_k$. Следовательно, $\| \psi_v \|_k^* = \| u \|_k$, откуда $\| v \|_{-k} = \| u \|_k$. ∎

Лемма 4.4.3. *Если* $G = E^m$ *и* $v \in \mathfrak{D}^0$, *то существует такое* u, *что*

$$\Lambda_k u = v, \quad u \in \mathfrak{D}^{2k}. \tag{4.31}$$

Доказательство. Докажем сначала существование такого элемента u, что $\Lambda_k u = v$ и $u \in \mathfrak{D}_0^k (= \mathfrak{D}^k)$. Для этого, согласно (4.29), достаточно доказать существование такого элемента $u \in \mathfrak{D}_0^k$, что

$$[u, w]_k = (v, w) \qquad (w \in C_0^\infty). \tag{4.32}$$

Так как

$$|(v, w)| \leqslant \| v \| \cdot \| w \|_k \qquad (w \in \mathfrak{D}_0^k),$$

то функционал $\psi_v(w)$, определяемый равенством $\psi_v(w) = (v, w)$, принадлежит $(\mathfrak{D}_0^k)^*$. По теореме Рисса существует такой элемент u, что $\psi_v(w) = [u, w]_k$, следовательно, справедливо равенство (4.32).

Далее, для того чтобы доказать, что $u \in \mathfrak{D}^{2k}$, достаточно, исходя из того, что $u \in \mathfrak{D}^{k+\varkappa-1}$ $(1 \leqslant \varkappa \leqslant k)$, установить, что $u \in \mathfrak{D}^{k+\varkappa}$. Будем считать, что $\alpha_\rho \in C_0^\infty$ — функция, которая была использована при доказательстве леммы 4.4.1, тогда

$$|\alpha_\rho| \leqslant 1, \quad |\partial_{(i'')}^\mu \alpha_\rho(x)| \leqslant c_{(i'')}^\mu \rho^{-\mu} \quad (c_{(i'')}^\mu \text{ — постоянные}). \tag{4.33}$$

Если $\nu \leqslant k+\varkappa-1$, то $\partial^{\nu}_{(i')}u \in \mathfrak{D}^0$, поэтому для оператора осреднения J_δ справедливо неравенство

$$\| \partial^{\nu}_{(i')} J_\delta u \| \leqslant \| \partial^{\nu}_{(i')} u \| \leqslant \| u \|_\nu < \infty. \tag{4.34}$$

Значит, если положить $w = J_\delta \overline{\partial}^{\varkappa}_{(i)} \alpha_\rho^{2k} \partial^{\varkappa}_{(i)} J_\delta u$, то (§ 2.6)

$$\alpha_\rho^{2k} \partial^{\varkappa}_{(i)} J_\delta u \in C_0^\infty, \quad w \in C_0^\infty \quad \text{и} \quad \partial^{\lambda}_{(j)} w = J_\delta \overline{\partial}^{\varkappa}_{(i)} \partial^{\lambda}_{(j)} \alpha_\rho^{2k} \partial^{\varkappa}_{(i)} J_\delta u,$$

откуда

$$\left(\partial^{\lambda}_{(j)} u,\ \partial^{\lambda}_{(j)} w\right) = \left(\partial^{\varkappa+\lambda}_{(i,\ j)} J_\delta u,\ \partial^{\lambda}_{(j)} \alpha_\rho^{2k} \partial^{\varkappa}_{(i)} J_\delta u\right), \tag{4.35}$$

поэтому при $\mu \leqslant k$ имеем

$$\partial^{\lambda}_{(j)} \alpha_\rho^{2k} \partial^{\varkappa}_{(i)} J_\delta u = \alpha_\rho^{2k} \partial^{\lambda+\varkappa}_{(j,\ i)} J_\delta u + \alpha_\rho^{k} \sum_{\nu=0}^{\lambda-1} \sum_{(i') \subset (j)} \alpha^{(\lambda-\nu)}_{\rho,\ (i')} \partial^{\nu+\varkappa}_{(i,\ i')} u$$

и [см. (4.33)]

$$\left| \alpha^{(\lambda-\nu)}_{\rho,\ (i')} \right| \leqslant c^{(\lambda-\nu)}_{(i')} \rho^{-\lambda+\nu}.$$

Тогда из (4.33), (4.34), (4.35) при $\lambda \leqslant k$ и фиксированном $\delta > 0$ следует, что

$$\left| \left(\partial^{\lambda}_{(j)} u,\ \partial^{\lambda}_{(j)} w\right) \right| = \left\| \alpha_\rho^{k} \partial^{\varkappa+\lambda}_{(i,\ j)} J_\delta u \right\|^2 + o\left(\left\| \alpha_\rho^{k} \partial^{\varkappa+\lambda}_{(i,\ j)} J_\delta u \right\| \right)$$

при $\rho \to \infty$, откуда при $\lambda \leqslant k-1$ из неравенств (4.33) и (4.34) следует соотношение

$$\left| \left(\partial^{\lambda}_{(j)} u,\ \partial^{\lambda}_{(j)} w\right) \right| = O(1) \quad (\rho \to \infty) \quad (\delta > 0 \text{ фиксировано}). \tag{4.36}$$

При $\lambda = k$ и фиксированном $\delta > 0$

$$\left(\partial^{k}_{(j)} u,\ \partial^{k}_{(j)} w\right) = \left\| \alpha_\rho^{k} \partial^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} J_\delta u \right\|^2 + o\left(\left\| \alpha_\rho^{k} \partial^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} J_\delta u \right\| \right). \tag{4.37}$$

Далее, $(v,\ w) = \left(J_\delta v,\ \overline{\partial}^{\varkappa}_{(i)} \alpha_\rho^{2k} \partial^{\varkappa}_{(i)} J_\delta u\right)$,

$$\overline{\partial}^{\varkappa}_{(i)} \alpha_\rho^{2k} \partial^{\varkappa}_{(i)} J_\delta u = (-1)^{\varkappa} \alpha_\rho^{2k} \partial^{2\varkappa}_{(i,\ i)} J_\delta u + \alpha_\rho^{k} \sum_{\nu=0}^{\varkappa-1} \sum_{(i') \subset (i)} \alpha^{(\varkappa-\nu)}_{\rho,\ (i')} \partial^{\nu+\varkappa}_{(i',\ i)} J_\delta u,$$

поэтому в силу (4.33), (4.34) и неравенства $\| J_\delta v \| \leqslant \| v \|$ при фиксированном $\delta > 0$ имеем

$$|(v,\ w)| \leqslant \| v \| \cdot \left\| \alpha_\rho^{k} \partial^{2\varkappa}_{(i,\ i)} J_\delta u \right\| + o(1) \quad (\rho \to \infty).$$

Следовательно, при $\varkappa \leqslant k-1$

$$(v,\ w) = O(1) \quad (\rho \to \infty) \quad [\delta > 0 \text{ фиксировано}], \tag{4.38}$$

а при $\varkappa = k$

$$(v, w) = O\left(\left\| \alpha_\rho^k \partial^{2\varkappa}_{(i,\ i)} J_\delta u \right\|\right) \qquad (\rho \to \infty). \tag{4.38$'$}$$

Итак, из соотношений (4.32), (4.36), (4.37) и (4.38) или (4.38)$'$ в силу того, что

$$[u, w]_k = \sum_{\lambda=0}^{k} \sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \left(\partial^\lambda_{(j)} u,\ \partial^\lambda_{(j)} w\right),$$

получаем

$$\sum_{1 \leqslant j \leqslant m} \left\| \alpha_\rho^k \partial^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} J_\delta u \right\|^2 = O(1) \quad (\rho \to \infty) \quad [\delta > 0 \text{ фиксировано}].$$

Пусть сначала $\rho \to \infty$, тогда

$$\sum_{|(j)|=k} \left\| \partial^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} J_\delta u \right\|^2 = O(1) \quad (\delta \to 0).$$

Устремим δ к 0. Получим, что производные $\partial^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} J_\delta u$ ограничены в гильбертовом пространстве $\mathfrak{D}^0$, поэтому если выбрать соответствующим образом последовательность $\delta_n \to 0$, $\delta_n > 0$, то последовательность $\partial^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} J_{\delta_n} u$ слабо сходится к некоторой функции $v_{(i,\ j)} \in \mathfrak{D}^0$. Следовательно, из равенства

$$\left(\partial^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} J_{\delta_n} u,\ w\right) = \left(J_{\delta_n} u,\ \bar{\partial}^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} w\right) \qquad \left(w \in C_0^\infty\right)$$

вытекает равенство

$$\left(v_{(i,\ j)},\ w\right) = \left(u,\ \bar{\partial}^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} w\right) \qquad \left(w \in C_0^\infty\right).$$

Значит, $v_{(i,\ j)} = \partial^{\varkappa+k}_{(i,\ j)} u$, т. е. $u \in \mathfrak{D}^{k+\varkappa}$. ▮

Замечание. При доказательстве леммы 4.4.3 установить существование элемента $u \in \mathfrak{D}_0^k$ несколько сложнее, чем показать, что $u \in \mathfrak{D}^{2k}$ (вычисления похожи на выкладки, проведенные в § 3.4). Однако если воспользоваться преобразованием Фурье, то, положив

$$\varphi(\xi) = (2\pi)^{-m/2} \int_{E^m} e^{-i(\xi \cdot x)} v(x)\, dx,$$

можно записать решение уравнения (4.31) в виде

$$u(x) = (2\pi)^{-m/2} \int\limits_{E^m} e^{i(\xi\cdot x)} \varphi(\xi) \left(\sum_{\varkappa=0}^{k} |\xi|^{2\varkappa} \right)^{-1} d\xi,$$

и из теоремы Планшереля следует, что $u \in \mathfrak{D}^{2k}$.

Если в условиях леммы 4.4.3 предположить, что $v \in \mathfrak{D}^s$, то такими же рассуждениями можно показать, что $u \in \mathfrak{D}^{2k+s}$. (Еще проще использовать преобразование Фурье.) Кроме того, если $v \in C_0^\infty$, то $u \in C^\infty$. Это следует из теоремы Соболева.

4.5. Дифференциальные свойства решений симметричных гиперболических систем

Пусть обозначения A_i и B имеют тот же смысл, что и в § 4.2, и при $\varkappa \leqslant k$ $(k \geqslant 1)$ матрицы $\partial^{\varkappa}_{(j)} A_i$, $\partial^{\varkappa}_{(j)} B$ *непрерывны и ограничены на всем* E^m. Пусть далее

$$\Phi = \sum_{i=1}^{m} A_i \partial_i + B, \quad \Phi_\lambda = \Phi + \lambda 1.$$

Теорема 4.5.1. *Для достаточно больших* λ *и произвольной функции* $v \in \mathfrak{D}^k$ *существует такая функция* u, *что*

$$\Phi_\lambda u = v, \quad u \in \mathfrak{D}^k.$$

Докажем сначала две леммы.

Лемма 4.5.1. *Существуют такие числа* c_k, *что для любой функции* $v \in \mathfrak{D}^{2k}$

$$(\Phi_\lambda v, \Lambda_k v) \geqslant (\lambda - c_k) \| v \|_k^2. \tag{4.39}$$

Доказательство. Пусть сначала $v \in C_0^\infty$, тогда [см. (4.27)]

$$(\Phi_\lambda v, \Lambda_k v) = (\Phi v, \Lambda_k v) + \lambda (v, \Lambda_k v) = (\Phi v, \Lambda_k v) + \lambda \| v \|_k^2,$$

поэтому достаточно установить существование таких чисел c_k, что $|(\Phi v, \Lambda_k v)| \leqslant c_k \|v\|_k^2$. Далее,

$$(\Phi v, \Lambda_k v) = \sum_{\varkappa=0}^{k} \sum_{1 \leqslant i \leqslant n} \left\{ \sum_{j=1}^{m} \left(A_j \partial_j v, \bar{\partial}_{(i)}^{\varkappa} \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right) + \left(Bv, \bar{\partial}_{(i)}^{\varkappa} \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right) \right\}, \tag{4.40}$$

$$\left(A_j \partial_j v, \bar{\partial}_{(i)}^{\varkappa} \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right) = \left(\partial_{(i)}^{\varkappa} (A_j \partial_j v), \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right) =$$
$$= \left(A_j \partial_j \partial_{(i)}^{\varkappa} v, \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right) + \sum_{\nu < \varkappa} \sum_{(i', i'') = (i)} \left(\partial_{(i')}^{\varkappa-\nu} A_j \cdot \partial_{(i'', j)}^{\nu+1} v, \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right).$$

Так как $\left(A_j \partial_j \partial_{(i)}^{\varkappa} v, \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right) = -\frac{1}{2}\left(\partial_j A_j \cdot \partial_{(i)}^{\varkappa} v, \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right)$, то

$$\left(A_j \partial_j v, \bar{\partial}_{(i)}^{\varkappa} \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right) = -\frac{1}{2}\left(\partial_j A_j \cdot \partial_{(i)}^{\varkappa} v, \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right) +$$
$$+ \sum_{\nu < k} \sum_{(i', i'') = (i)} \left(\partial_{(i')}^{\varkappa-\nu} A_j \cdot \partial_{(i'', j)}^{\nu+1} v, \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right). \tag{4.41}$$

Кроме того,

$$\left(Bv, \bar{\partial}_{(i)}^{\varkappa} \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right) = \sum_{\nu \leqslant \varkappa} \sum_{(i', i'') = (i)} \left(\partial_{(i')}^{\varkappa-\nu} B \cdot \partial_{(i'')}^{\nu} v, \partial_{(i)}^{\varkappa} v\right). \tag{4.42}$$

Поскольку все матрицы $\partial_j A_j$, $\partial_{(i')}^{\varkappa-\nu} A_j \cdot$, $\partial_{(i')}^{\varkappa-\nu} B \cdot$ ограничены, из равенств (4.40), (4.41) и (4.42) следует существование таких чисел c_k, что

$$|(\Phi v, \Lambda_k v)| \leqslant c_k \|v\|_k^2.$$

Поэтому неравенство (4.39) справедливо для функций $v \in C_0^\infty$.

Если теперь $v \in \mathfrak{D}^{2k}$, то существует такая последовательность v_n, что $v_n \in C_0^\infty$ и $\|v_n - v\|_{2k} \to 0$, поэтому

$$\|\Phi_\lambda v_n - \Phi_\lambda v\| \to 0, \quad \|\Lambda_k v_n - \Lambda_k v\| \to 0, \quad \|v_n - v\|_k \to 0,$$

откуда и вытекает неравенство (4.39). ∎

Лемма 4.5.2. *Пусть* $\overset{*}{\Phi}_\lambda$ — *дифференциальный оператор, сопряженный к* Φ_λ, *а числа* c_k *определены в лемме* 4.5.1. *Тогда для любой функции* $w \in \mathfrak{D}^1$ *выполняется неравенство*

$$\|\Phi_\lambda^* w\|_{-k} \geqslant (\lambda - c_k) \|w\|_{-k}. \tag{4.43}$$

Доказательство. В силу леммы 4.4.3 для любой функции $w \in \mathfrak{D}^1$ существует функция v, для которой

$$\Lambda_k v = w, \quad v \in \mathfrak{D}^{2k}. \tag{4.44}$$

Тогда (см. лемму 4.5.1)

$$\left(v,\ \Phi_\lambda^* w\right)=\left(\Phi_\lambda v,\ \Lambda_k v\right)\geqslant\left(\lambda-c_k\right)\|v\|_k^2.$$

Согласно обобщенному неравенству Шварца (4.24),

$$\left|\left(v,\ \Phi_\lambda^* w\right)\right|\leqslant\|v\|_k\cdot\left\|\Phi_\lambda^* w\right\|_{-k},$$

следовательно,

$$\left\|\Phi_\lambda^* w\right\|_{-k}\geqslant\left(\lambda-c_k\right)\|v\|_k.$$

Из (4.44) и леммы 4.4.2 следует, что $\|v\|_k=\|w\|_{-k}$ и потому неравенство (4.43) справедливо. ▌

Доказательство теоремы 4.5.1. Пусть $\lambda>c_k$. Покажем, что для таких λ теорема верна.

Прежде всего по определению слабого расширения

$$\Phi_\lambda u=v \rightleftarrows \left(u,\ \Phi_\lambda^* w\right)=(v,\ w)\quad\left(w\in C_0^\infty\right). \tag{4.45}$$

Поэтому достаточно доказать, что для функции $v\in\mathfrak{D}^k$ существует функция $u\in\mathfrak{D}^k$, удовлетворяющая равенству, записанному в правой части (4.45). Положим

$$\Phi_\lambda^* w=w'\quad\left(w\in C_0^\infty\right). \tag{4.46}$$

Тогда в силу леммы 4.5.2

$$\|w'\|_{-k}\geqslant\left(\lambda-c_k\right)\|w\|_{-k}. \tag{4.47}$$

Следовательно, $|(u,\ w)|\leqslant\|u\|_k\cdot\|w\|_{-k}$ $(u\in\mathfrak{D}^k)$, а значит, $(u,\ w)=0$ для всех $u\in\mathfrak{D}^k$, откуда $w=0$. Если обозначить $\Phi_\lambda^*\left(C_0^\infty\right)=\mathfrak{F}$, то, согласно (4.46), каждому $w'\in\mathfrak{F}$ однозначно соответствует w. Тогда если положить

$$\psi_v(w')=\left(v,\ \left(\Phi_\lambda^*\right)^{-1}w'\right)\quad(w\in\mathfrak{F}),$$

то

$$|\psi_v(w')|=|(v,\ w)|\leqslant\|v\|_k\cdot\|w\|_{-k}\leqslant$$
$$\leqslant\left(\lambda-c_k\right)^{-1}\|v\|_k\cdot\|w'\|_{-k},$$

поэтому ψ_v является линейным функционалом на подмножестве $\mathfrak{F}$ пространства $\mathfrak{D}^{-k}$. Если через ψ_v обозначить также его продолжение на $\mathfrak{D}^{-k}$ с сохранением нормы, то, согласно теореме 4.4.1, существует такой элемент $u \in \mathfrak{D}^k$, что

$$\psi_v(w') = (u, w') \quad (w' \in \mathfrak{D}^{-k}).$$

Но $\mathfrak{F} \subset \mathfrak{D}^{-k}$, поэтому если обозначить $w' = \Phi_\lambda^* w$ $(w \in C_0^\infty)$, то $\psi_v(w') = (v, w)$, а значит, для определенного выше u выполняется равенство

$$(u, \Phi_\lambda^* w) = (v, w) \quad (w \in C_0^\infty). \blacksquare$$

Следствие 4.5. *Если $k > m/2 + p$ и $\lambda > c_k$, то для любой функции $v \in \mathfrak{D}^k$ существует такая функция u, что*

$$\Phi_\lambda u = v, \quad u \in C^p \cap \mathfrak{D}^k.$$

Доказательство вытекает из теоремы Соболева.

Производная решения $u \in \mathfrak{D}^1$ уравнения $\Phi_\lambda u = v$ $(v \in \mathfrak{D}^1)$ удовлетворяет уравнению, которое получается в результате формального дифференцирования обеих частей уравнения $\Phi_\lambda u = v$. Более подробно, справедлива следующая лемма.

Лемма 4.5.3. *Если $u, v \in \mathfrak{D}^1$ и $\Phi_\lambda u = v$, то производная $\partial_h u$ удовлетворяет уравнению*

$$\Phi_\lambda(\partial_h u) + \sum_{i=1}^{m} \partial_h A_i \cdot \partial_i u + \partial_h B \cdot u = \partial_h v \qquad (1 \leqslant h \leqslant m).$$

Доказательство. Обозначим через J_δ оператор осреднения, о котором говорилось в § 2.7. Так как $\Phi_\lambda u = v$, то

$$\partial_h J_\delta \Phi_\lambda u = \partial_h J_\delta v = J_\delta \partial_h v, \tag{4.48}$$

поэтому

$$\partial_h J_\delta A_i \partial_i u = \partial_h (A_i J_\delta \partial_i u) + \partial_h (J_\delta A_i - A_i J_\delta) \partial_i u.$$

Согласно следствию 2.7.1 $(\partial_i u \in L^2)$, $\| \partial_h (J_\delta A_i - A_i J_\delta) \partial_i u \| \to 0$ при $\delta \to 0$, а значит, [1]

$$\partial_h J_\delta A_i \partial_i u \approx \partial_h (A_i J_\delta \partial_i u) \quad (\delta \to 0)$$

и

$$\partial_h (A_i J_\delta \partial_i u) = A_i \partial_h J_\delta \partial_i u + \partial_h A_i \cdot J_\delta \partial_i u =$$
$$= A_i \partial_i J_\delta \partial_h u + \partial_h A_i \cdot J_\delta \partial_i u \approx A_i \partial_i J_\delta \partial_h u + \partial_h A_i \cdot \partial_i u.$$

[1]) Символ $\approx$ имеет тот же смысл, что и в доказательствах § 3.4

Поэтому

$$\partial_h J_\delta A_i \partial_i u \approx A_i \partial_i J_\delta \partial_h u + \partial_h A_i \cdot \partial_i u \tag{4.49}$$

и

$$\partial_h J_\delta B_\lambda u = J_\delta \partial_h (B_\lambda u) = J_\delta B_\lambda \partial_h u + J_\delta \partial_h B_\lambda \cdot u \approx J_\delta B_\lambda \partial_h u + \partial_h B_\lambda \cdot u.$$

Согласно лемме 2.7.4, $\|(J_\delta B_\lambda - B_\lambda J_\delta)\partial_h u\| \to 0$, и потому

$$\partial_h J_\delta B_\lambda u \approx B_\lambda J_\delta \partial_h u + \lambda_h B_\lambda \cdot u. \tag{4.50}$$

Из (4.49) и (4.50) вытекает, что

$$\partial_h J_\delta \Phi_\lambda u \approx \Phi_\lambda (J_\delta \partial_h u) + \sum_{i=1}^{m} \partial_h A_i \cdot \partial_i u + \partial_h B_\lambda \cdot u,$$

следовательно, учитывая (4.48), получаем

$$\Phi_\lambda (J_\delta \partial_h u) \approx -\left(\sum_{i=0}^{m} \partial_h A_i \cdot \partial u + \partial_h B_\lambda \cdot u\right) + \partial_h v.$$

Так как Φ_λ — замкнутый оператор и $J_\delta \partial_h u \approx \partial_h u$, то

$$\Phi_\lambda (\partial_h u) = -\left(\sum_{i=1}^{m} \partial_h A_i \cdot \partial_i u + \partial_h B_\lambda \cdot u\right) + \partial_h v. \ \blacksquare$$

Теперь определим $l^{[1]}$-мерный $(l^{[1]} = m + 1)$ вектор $u^{[1]}$ при помощи равенства

$$u^{[1]} = \begin{pmatrix} u & \\ \partial_\mu u & \mu \downarrow 1, \ldots, m \end{pmatrix}$$

и определим матрицы $A_i^{[1]}$, $B_\lambda^{[1]}$ порядка $(l^{[1]} \times l^{[1]})$ при помощи равенств

$$A_i^{[1]} = \begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu} A_i & \begin{matrix} \mu \downarrow 0, 1, \ldots, m \\ \nu \to 0, 1, \ldots, m \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$B^{[1]} = \begin{pmatrix} B & 0 & \mu \downarrow 1, \ldots, m \\ \partial_\mu B \cdot & \delta_{\mu\nu} B + \partial_\mu A_\nu \cdot & \nu \to 1, \ldots, m \end{pmatrix}.$$

Введем оператор $\Phi_\lambda^{[1]}$, действующий по формуле

$$\Phi_\lambda^{[1]} = \sum_{i=1}^{m} A_i^{[1]} \partial_i + B_\lambda^{[1]}.$$

Если $u, v \in \mathfrak{D}^1$ и $\Phi_\lambda u = v$, то, согласно лемме 4.5.3,

$$\Phi_\lambda^{[1]} u^{[1]} = v^{[1]}.$$

Вообще положим сначала $u_*^{[0]} = u$, $A_{i*}^{[0]} = A_i$, $B_*^{[0]} = B$, а затем

$$u_*^{[s]} = (\partial_\mu u_*^{[s-1]} \quad \mu \downarrow 1, \ldots, m),$$

$$A_*^{[s]} = \begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu} A_{i*}^{[s-1]} & \begin{matrix} \mu \downarrow 1, \ldots, m \\ \nu \rightarrow 1, \ldots, m \end{matrix} \end{pmatrix},$$

$$B_*^{[s]} = \begin{pmatrix} \delta_{\mu\nu} B_*^{[s-1]} + \partial_\mu A_{\nu*}^{[s-1]} & \begin{matrix} \mu \downarrow 1, \ldots, m \\ \nu \rightarrow 1, \ldots, m \end{matrix} \end{pmatrix}.$$

Находя отсюда последовательно $u_*^{[s]}$, $A_*^{[s]}$ и $B_*^{[s]}$, определим $u^{[s]}$, $A_i^{[s]}$ и $B^{[s]}$ при помощи равенств

$$u^{[s]} = \begin{pmatrix} u^{[s-1]} \\ u_*^{[s]} \end{pmatrix}, \quad A_i^{[s]} = \begin{pmatrix} A_i^{[s-1]} & 0 \\ 0 & A_{i*}^{[s]} \end{pmatrix},$$

$$B^{[s]} = \begin{pmatrix} B^{[s-1]} & 0 \\ \partial_\mu B_*^{[s-1]} & B_*^{[s]} \end{pmatrix}$$

и положим

$$\Phi_\lambda^{[s]} = \sum_{i=1}^{m} A_i^{[s]} \partial_i + B_\lambda^{[s]}.$$

Тогда если u, $v \in \mathfrak{D}^k$ и $\Phi_\lambda u = v$, то

$$\Phi_\lambda^{[k]} u^{[k]} = v^{[k]}. \tag{4.51}$$

Таким образом, мы получаем следующую лемму.

Лемма 4.5.4. *Если* $u \in \mathfrak{D}^k$, $\Phi_\lambda u = v \in \mathfrak{D}^k$, *то* u *удовлетворяет уравнению* (4.51).

Замечание. Если вместо $u \in \mathfrak{D}^k$ и $v \in \mathfrak{D}^k$ взять αu, где α — произвольная функция из класса C_0^∞ $[-\infty < x_0 < \infty]$, то $\alpha u \in \mathfrak{D}^k$, $\Phi(\alpha u) \in \mathfrak{D}^k$ и выполняется равенство (4.51).

4.6. Дифференциальные свойства решений задачи Коши для симметричных гиперболических систем

Мы будем считать, если специально не оговорено противное, что символы A_i, B, Φ_λ и т. д. имеют в этом параграфе тот же самый смысл, что и в § 4.3. Запись $A \in \bar{C}^k$

будет означать, что матрицы $\partial_{(i)}^{\varkappa} A$ $(0 \leqslant \varkappa \leqslant k)$ непрерывны и ограничены. Можно считать, что в равенстве

$$\Phi u = A_0 \partial_t u + \sum_{i=1}^{m} A_i \partial_i u + Bu$$

матрица A_0 является единичной матрицей 1. Для того чтобы доказать это, приведем сначала следующую лемму.

Лемма 4.6.1. *Пусть матрица A_0 симметрична и принадлежит классу $\overline{C}^k[G]$. Если найдется такое число $a > 0$, что $\xi A_0 \xi \geqslant a |\xi|^2$, то существует такая матрица A', что*

$$A_0 = A'^2, \quad A'^* = A' \in \overline{C}^k[G], \quad a^{1/2} |\xi|^2 \leqslant \xi A' \xi.$$

Доказательство. Мы изложим только идею доказательства. Матрица A_0 ограничена на G, поэтому можно выбрать такое число $\overline{a} > a$, что $\xi A_0 \xi \leqslant \overline{a} |\xi|^2$. Все собствен-

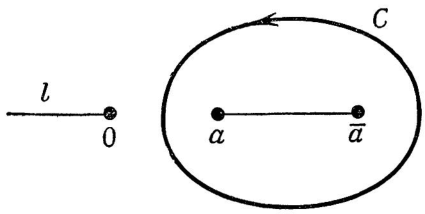

Рис. 1.

ные числа матрицы A_0 вещественны и содержатся в замкнутом отрезке $[a, \overline{a}]$. Пусть ζ — переменное в комплексной плоскости. Тогда матрица $(\zeta 1 - A_0)^{-1}$ регулярна вне отрезка $[a, \overline{a}]$. Пусть l — отрицательная полуось. Обозначим через C гладкую самонепересекающуюся замкнутую кривую, которая лежит вне отрезка $[a, \overline{a}]$ и не пересекается с l, и будем обходить ее против часовой стрелки (см. рисунок). Пусть $f(\zeta)$ и $g(\zeta)$ — функции, аналитические внутри кривой C и на самой кривой. Если определить $f(A_0)$ и $g(A_0)$ формулами

$$f(A_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)(\zeta \cdot 1 - A_0)^{-1}\, d\zeta,$$

$$g(A_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C g(\zeta)(\zeta \cdot 1 - A_0)^{-1}\, d\zeta,$$

то $f(A_0^*) = f(A_0)^*$ и $g(A_0^*) = g(A_0)^*$, т. е. матрицы $f(A_0)$ и $g(A_0)$ симметричны. Кроме того, $f(A_0)$, $g(A_0) \in \overline{C}^k[G]$. Далее,

$$A_0 = \frac{1}{2\pi i} \int_C (\zeta \cdot 1 - A_0)^{-1}\, d\zeta,$$

$$f(A_0)\, g(A_0) = \frac{1}{2\pi i} \int_C f(\zeta)\, g(\zeta)(\zeta \cdot 1 - A_0)^{-1}\, d\zeta.$$

Если положить $f(\zeta) = g(\zeta) = \sqrt{\zeta}$, то ясно, что оператор $\sqrt{A_0} = A'$ удовлетворяет всем условиям леммы. ∎

Теперь, если обозначить через A' оператор, о котором говорилось в лемме 4.6.1, то $A'^{-1} \in \overline{C}^k$. Значит, если положить $v = A'u$, то

$$\partial_t u = A'^{-1} \partial_t v - A'^{-1} \partial_t A' \cdot A'^{-1} v,$$

$$\partial_i u = A'^{-1} \partial_i v - A'^{-1} \partial_i A' \cdot A'^{-1} v.$$

Пусть $A_0 \in \overline{C}^{k+1}$, $A_i \in \overline{C}^k$ $(i = 1, \ldots, m)$, $B \in \overline{C}^k$. Используя введенный выше оператор A', обозначим

$$A'^{-1} A_i A'^{-1} = \widetilde{A}_i,$$

$$A'^{-1} B A'^{-1} - A^{-1} \partial_t A' \cdot A'^{-1} - \sum_{i=1}^{m} A^{-1} A_i \partial_i A' \cdot A'^{-1} = \widetilde{B}.$$

Тогда $\widetilde{A}_i = \widetilde{A}_i^*$, $\widetilde{A}_i \in \overline{C}^k$, $\widetilde{B} \in \overline{C}^k$, и уравнение $\Phi u = f$ примет вид

$$\widetilde{\Phi} u = \partial_t v + \sum_{i=1}^{m} \widetilde{A}_i \partial_i v + \widetilde{B} v = A'^{*-1} f.$$

Поэтому в дальнейшем будем считать, что $A_0 = 1$.

Если для произвольной функции $\alpha \in C_0^\infty$ $[-\infty < t < \infty]$ функция αu принадлежит $\mathfrak{D}^k[E^{m+1}]$, мы будем писать $u \in {}'\mathfrak{D}^k$.

Теорема 4.6.1. *Если* $A_i \in \overline{C}^k$, $B \in \overline{C}^k$, $f \in \mathfrak{D}^k$ *и* $\varphi = \varphi(x) \in \mathfrak{D}^k[E^m]$, *то функция* u, *являющаяся решением задачи*

$$\Phi u = f, \quad u_0 = \varphi, \quad u \in \mathfrak{F}_\Phi \tag{4.52}$$

(*существование такого решения следует из теоремы* 4.3.2), *принадлежит классу* '$\mathfrak{D}^k$', *а функция* $u_{(t)}$ — *классу*

$$\mathfrak{D}^k[E^m] \cap C[-\infty < t < \infty].$$

Доказательство. Существование и единственность решения задачи (4.52) установлены в теореме 4.3.1, поэтому достаточно установить, что это решение принадлежит '$\mathfrak{D}^k$'.

Пусть сначала A_i, $B \in \overline{C}^{2k}$, $f \in C_0^{2k}$ и $\varphi \in C_0^{2k}$. Обозначим для краткости $u_0^{(\varkappa)} = (\partial_t^\varkappa u)_{t=0}$ и построим такую функцию $\psi \in C_0^{k+1}$, что

$$\psi_0 = \varphi, \quad (\Phi\psi)_{(0)}^{(\varkappa)} = f_{(0)}^{(\varkappa)} \ (\varkappa = 0, 1, \ldots, k-1). \tag{4.53}$$

Используем для этого функцию $\sigma \in C_0^\infty[-\infty < t < \infty]$, которая равна 1 при $|t| < 1$. Положим

$$\psi = \sigma(t) \sum_{\nu=0}^{k} \frac{1}{\nu!} t^\nu \psi_\nu(x). \tag{4.54}$$

Тогда условия (4.53) эквивалентны условиям

$$\psi_0 = \varphi, \quad \psi_{\varkappa+1} + \sum_{\nu=0}^{\varkappa} C_\varkappa^\nu \Psi_{(0)}^{(\varkappa-\nu)} \psi_\nu = f_{(0)}^{(\varkappa)}, \tag{4.55}$$

где

$$\Psi_{(0)}^{(\mu)} = \sum_{i=1}^{m} A_{i\,(0)}^{(\mu)} \partial_i + B_{(0)}^{\mu}.$$

Отсюда получаем, что $\psi_\varkappa \in C_0^{2k-\varkappa+1}$ ($\varkappa = 1, \ldots, k$). В силу (4.54) функция ψ принадлежит C_0^{k+1} а, значит, $\Phi\psi \in C_0^k$.

Теперь будем считать, что $f_+ = \Phi\psi$ при $t < 0$ и $f_+ = f$ при $t \geqslant 0$. Тогда $e^{-\lambda t} f_+ \in \mathfrak{D}^k$ ($\lambda < 0$) и, следовательно, согласно теореме 4.5.1, при $\lambda > c_k$ уравнение

$$\Phi_\lambda v = e^{-\lambda t} f_+$$

имеет решение $v = v_+ \in \mathfrak{D}^k$. Если обозначить $u_+ = e^{\lambda t} v_+$, то точно так же, как при доказательстве теоремы 4.3.1, получим, что

$$\Phi u_+ = f_+; \quad u_+ = \psi \text{ при } t \leqslant 0 \text{ и } u_+ \in {}^{\backprime}\mathfrak{D}^{k\backprime}.$$

Пусть, далее $f_- = f$ при $t \leqslant 0$ и $f_- = \Phi\psi$ при $t > 0$. Тогда можно найти такую функцию u_-, что

$$\Phi u_- = f_-; \quad u_- = \psi \text{ при } t \geqslant 0 \text{ и } u_- \in {}^{\backprime}\mathfrak{D}^{k\backprime}.$$

Если положить $u = u_+ + u_- - \psi$, то

$$\Phi u = f, \quad u_{(0)} = \varphi, \quad u \in {}^{\backprime}\mathfrak{D}^{k\backprime}.$$

Пусть теперь $A_i \in \overline{C}^k$, $B \in \overline{C}^k$, $f \in \mathfrak{D}^k$ и $\varphi \in \mathfrak{D}^k[E^m]$. Можно выбрать матрицы $A_{i,n} = \overset{*}{A}_{i,n} \in \overline{C}^{2k}$, $B_n \in \overline{C}^{2k}$ таким образом, чтобы [1])

$$\partial^{\varkappa}_{(j)} A_{in} \rightrightarrows \partial^{\varkappa}_{(j)} A_i, \quad \partial^{\varkappa}_{(j)} B_n \rightrightarrows \partial^{\varkappa}_{(j)} B$$

для всех $\varkappa$, $0 \leqslant \varkappa \leqslant k$. Кроме того, можно выбрать последовательности $f_n \in C_0^\infty$ и $\varphi_n \in C_0^\infty[E^m]$ так, чтобы

$$\|f_n - f\|_k \to 0 \quad \text{и} \quad \|\varphi_n - \varphi\|_{k,(E^m)} \to 0.$$

Если теперь

$$\Phi_n = \sum_{i=1}^{m} A_{i,n} \partial_i + B_n,$$

то, согласно первой части доказательства, существуют такие функции u_n, что

$$\Phi_n u_n = f_n, \quad u_{n\,(0)} = \varphi_n, \quad u_n \in {}^{\backprime}\mathfrak{D}^{k\backprime}.$$

В силу леммы 4.5.4 имеем

$$\Phi_n^{[k]} u_n^{[k]} = f_n^{[k]}, \quad u_{n\,(0)}^{[k]} = \varphi_n^{[k]}.$$

Так как

$$A_{0,n}^{[k]} = 1^{[k]}, \quad \left| \xi \left(B_n^{[k]} - \frac{1}{2} \partial A_n^{[k]} \right) \xi \right| \leqslant c_k |\xi|^2,$$

---

[1]) Символ $\rightrightarrows$ обозначает равномерную сходимость, однако при $\varkappa = k$ мы будем иметь в виду обобщенную равномерную сходимость и, кроме того, равномерную ограниченность.

где c_k — постоянные, не зависящие от n, то, согласно лемме 4.3.4, существует такое число C_τ (зависящее лишь от τ), что

$$\left\| u_n^{[k]} \right\|_{(-\tau,\ \tau)}^2 \leqslant C_\tau \left(\left\| u_{n(0)}^{[k]} \right\|^2 + \left\| f_n^{[k]} \right\|_{(-\tau,\ \tau)}^2 \right).$$

Если теперь обозначить $G_\tau = \{(t,\ x) : |t| < \tau,\ x \in E^m\}$, то $\| u^{[k]} \|_{(-\tau,\ \tau)} = \| u \|_{k,\ (G_\tau)}$. Значит, последовательность $\{u_n\}$ ограничена в $\mathfrak{D}^k[G_\tau]$. Следовательно, если соответствующим образом выбрать подпоследовательность $\{n(\nu)\}$ $(n(\nu) < n(\nu+1))$, то последовательность $u_{n(\nu)}$ слабо сходится в $\mathfrak{D}^k[G_\tau]$. Обозначим через u_∞ предельную функцию. Для любой функции $w \in C_0^\infty[G_\tau]$

$$\left(f_{n(\nu)},\ w\right) = \left(\Phi_{n(\nu)} u_{n(\nu)},\ w\right) = \left(u_{n(\nu)},\ \Phi_{n(\nu)}^* w\right)$$

и $\Phi_{n(\nu)}^* w \rightrightarrows \Phi^* w$, поэтому в пределе при $\nu \to \infty$ получим

$$(f,\ w) = (u_\infty,\ \Phi^* w).$$

Так как $u_\infty \in \mathfrak{D}^k[G_\tau]$, а w — произвольная функция из $C_0^\infty[G_\tau]$, отсюда следует, что $\Phi u_\infty = f$.

Так как нормы $\| u_n \|_{k,\ (G_\tau)}$ $(k \geqslant 1)$ ограничены, то $\| (\Phi_n - \Phi) u_n \|_{(G_\tau)} \to 0$. Следовательно, при $n,\ n' \to \infty$ имеем

$$\left\| \Phi(u_n - u_{n'}) \right\|_{(G_\tau)} \leqslant \| f_n - f_{n'} \|_{(G_\tau)} + \\ + \left\| (\Phi_n - \Phi) u_n \right\|_{(G_\tau)} + \left\| (\Phi_{n'} - \Phi) u_n' \right\|_{(G_\tau)} \to 0.$$

Кроме того, $\left\| (u_n - u_{n'})_{(0)} \right\| = \| \varphi_n - \varphi_{n'} \| \to 0$. Поэтому в силу леммы 4.3.4

$$\left\| (u_n - u_{n'})_{(t)} \right\| \rightrightarrows 0 \qquad (-\tau < t < \tau),$$

а, значит, функция $u_{\infty(t)}$ непрерывна при $-\tau < t < \tau$ и $u_{\infty(0)} = \varphi$.

В силу единственности решения уравнения $\Phi u = f$, удовлетворяющего начальному условию $u_{(0)} = \varphi$, полученная функция u_∞ не зависит от τ. ∎

Следствие 4.6. *Пусть* $A_0 \in \overline{C}^{k+1}$, $A_i \in \overline{C}^k$, $B \in \overline{C}^k$, $f \in \mathfrak{D}^k$, $\varphi \in \mathfrak{D}^k[E^m]$, $k > (m+1)/2 + p$ *(p — неотрицатель-*

ное целое число). Тогда функция u, являющаяся решением задачи

$$\Phi u = f, \quad u_{(0)} = \varphi, \quad u \in \mathfrak{F}_\Phi,$$

принадлежит классу $C^p[E^{m+1}]$.

Доказательство следует из теоремы 4.6.1 и теоремы Соболева.

4.7. Область зависимости решения от начальных данных

Будем считать, что A_0, A_i, B и т. д. имеют тот же смысл, что и в предыдущем параграфе. Мы нашли решение u уравнения $\Phi u = f$, которое при $t = 0$ принимает начальное значение $\varphi (\in \mathfrak{D}^k[E^m])$. Можно было бы ожидать, что значения функции $u(P)$ в точках $P = (t, x)$ при $t \neq 0$ определяются значениями функции $\varphi(x)$ на E^m. Однако на самом деле значение $u(P)$ определяется только значениями функции $\varphi(x)$ из ограниченной части Γ_P пространства E^m. Это множество Γ_P называется *областью влияния* для точки P. Пусть Γ — некоторое множество в E^m. Множество G_Γ пространства E^{m+1}, состоящее из таких точек P, для которых $\Gamma_P \subset \Gamma$, называется *областью зависимости* решения от начальных данных для множества Γ. Значения $u(P)$ в точках из G_Γ определяются только значениями функции $\varphi(x)$ на Γ и не зависят от значений функции $\varphi(x)$ на $E^m - \Gamma$. Приведем следующую теорему об областях зависимости решения от начальных данных.

Теорема 4.7.1. *Пусть* $\Gamma = \{x : \alpha(x) > 0\} \subset E^m$, *где* $\alpha \in C_0^\infty[E^m]$, $\alpha(x) \geqslant 0$, *и* $G = \{(t, x) : |t| < \alpha(x)\} \subset E^{m+1}$. *Тогда если для любых точек* $(t, x) \in G^a$ *справедливо неравенство*

$$\left| \xi \left(\sum_{i=1}^{m} \partial_i \alpha \cdot A_i \right) \xi \right| < \xi A_0 \xi \qquad (\xi \neq 0), \tag{4.56}$$

то область G содержится в области зависимости решения от начальных данных для Γ.

Доказательство. Так как Φ — линейный оператор, то достаточно доказать, что из равенств $\Phi u = f = 0$ и $\varphi(x) = 0$ для точек $x \in \Gamma$ следует, что $u = 0$ при любых $(t, x) \in G$.

Прежде всего выберем такое положительное число τ, что $\alpha(x) \leqslant \tau$. Согласно лемме 4.3.2, существуют такие функции u_n, что

$$u_n \in C_0^\infty, \quad \| u_n - u \|_{(-\tau,\, \tau)} \to 0,$$
$$\| \Phi u_n \|_{(-\tau,\, \tau)} \to 0, \quad \| (u_n - u)_{(t)} \| \Rightarrow 0, \quad |t| \leqslant \tau. \tag{4.57}$$

Если выбрать в качестве независимых переменных переменные (t', x'), определяемые равенствами

$$t = \alpha(x) t', \quad x_i = x'_i, \tag{4.58}$$

то

$$\Phi' u_n = \alpha \Phi u_n,$$

где

$$\Phi' = A'_0 \partial_{t'} + \alpha \sum_{i=1}^m A_i \partial_{i'} + \alpha B \quad \left(A'_0 = A_0 - t' \sum_{i=1}^m \partial_i \alpha \cdot A_i \right).$$

Если, кроме того, положить $e^{-\lambda t'} \alpha u_n = v_n$, то

$$\Phi''_\lambda v_n = e^{-\lambda t'} \alpha^2 \Phi u_n, \tag{4.59}$$

где

$$\Phi'' = A'_0 \partial_{t'} + \alpha \sum_{i=1}^m A_i \partial_{i'} + \alpha \left(B - \sum_{i=1}^m \partial_i \alpha \cdot A_i \right),$$
$$\Phi''_\lambda = \Phi'' + \lambda A_0.$$

В силу (4.58) область G перейдет в область $\{ |t'| < 1,\ x' \in \Gamma \}$. Если $|t'| \leqslant 1$, $x \in \Gamma^a$, то из (4.56) вытекает, что

$$\xi A'_0 \xi \geqslant \xi A_0 \xi - \left| \xi \left(\sum_{i=1}^m \partial_i \alpha \cdot A_i \right) \xi \right| > 0$$

и если $x \in E^m - \Gamma$, то $A'_0 = A_0$. Поэтому существуют такие положительные постоянные a' и $\bar{a}'$, что для $|t'| \leqslant 1$, $x \in E^m$ справедливо неравенство

$$a' |\xi|^2 \leqslant \xi A'_0 \xi \leqslant \bar{a}' |\xi|^2 \quad (0 < a' < \bar{a}').$$

Если соответствующим образом выбрать постоянную c', то, согласно лемме 4.3.1, при $\lambda a' > c'$, $\varepsilon = \lambda a' - c'$ и при $0 \leqslant t' \leqslant 1$

$$a' \| v_{n\,(t')} \|^2 + \| v_n \|^2_{(0,\, 1)} \leqslant \bar{a}' \| v_{n\,(0)} \|^2 + \varepsilon^{-1} \| \Phi''_\lambda v_n \|_{(0,\, 1)}. \tag{4.60}$$

Поэтому из (4.59) и (4.57) следует, что $\|\Phi''_\lambda v_n\|_{(0,\ \tau)} \leqslant \tau^2 \|\Phi u_n\|_{(0,\ \tau)} \to 0$. Если $x \in E^m - \Gamma$, то $v_{n\,(0)} = 0$, значит, $\|v_{n\,(0)}\| \leqslant \tau \|u_{n\,(0)}\|_{(\Gamma)} \leqslant \tau \|(u_n - u)_{(0)}\| \to 0$. Из (4.60) следует, что $\|v_n\|_{(0,\ 1)} \to 0$. Пусть теперь $G_1 \prec G$. Обозначим через G_1^+ (G_1^-) ту часть в G_1, где $t \geqslant 0$ $(t \leqslant 0)$. Так как $G_1 \prec G$, то $\|u_n\|_{(G_1^+)} \to 0$. Следовательно, $u = 0$, когда $(t,\ x) \in G_1^+$. Точно так же $u = 0$ и тогда, когда $(t,\ x) \in G_1^-$. В силу произвольности области $G_1 \prec G$ функция u равна 0, когда $(t,\ x) \in G$. ▮

Замечание. В вышеприведенном доказательстве мы использовали только то, что функция f равна 0 в G. Значения матриц A_0, A_i, B и функций от них вне G не оказывают никакого влияния. Предположим теперь, что матрицы A_0, A_i, B и функции от них удовлетворяют всем прежним условиям, но только на G^a. Продолжим их на все пространство E^{m+1} так, чтобы эти условия выполнялись и на E^{m+1}; тогда существует решение u уравнения $\Phi u = f$, $u_{(0)} = \varphi$. При этом значение решения u в G не зависит от способа продолжения матриц A, B и т. д. на E^{m+1}. Таким образом, мы получили следующую теорему.

Теорема 4.7.2. *Пусть множества* Γ *и* G — *те же самые, что и в теореме* 4.7.1. *Если* $A_0 \in C^{k+1}[G^a]$, A_i, $B \in C^k[G^a]$, $f \in C^k[G^a]$, $\varphi \in C^k[E^m]$, $k > (m+1)/2 + p$ *и для точек* $(t,\ x) \in G^a$ *выполняется неравенство* (4.56), *то существует единственная функция* u, *для которой*

$$\Phi u = f, \quad u \in C^p[G], \quad u_{(0)} = \varphi \qquad (x \in \Gamma).$$

4.8. Дополнения к главе 4

В этой главе предлагается новый способ изложения теории гиперболических уравнений. За основу взяты работы [48], [49][1]).

Другие методы исследования гиперболических уравнений в частных производных, не изложенные в этой главе, можно найти в книге [50]. В этой книге около 240 страниц; считается, что она несколько трудна для чтения.

[1]) Автор скромно умалчивает о собственной работе [33]. — *Прим. ред.*

Отметим далее, что К. Иосида [51] разработал (на основе теории полугрупп) так называемый интегральный метод, применимый как к гиперболическим, так и к параболическим уравнениям.

Классические методы исследования свойств решений дают для гиперболических уравнений хорошие результаты в случае двух независимых переменных (в этом случае не используется понятие обобщенного решения). Однако, когда имеется более трех независимых переменных, понятие обобщенного решения становится существенным. В самом деле, хорошо известно, что если начальные условия принадлежат классу C^p, то даже для самого простого уравнения

$$\partial_t^2 u - \sum_{i=1}^{m} \partial_i^2 u = 0$$

может не существовать решения, принадлежащего классу C^p. Для того чтобы начальные данные и решение были функциями одного и того же класса, нужно рассмотреть пространства $\mathfrak{D}^k$ вместо пространств C^p. Это впервые было показано в работе [52]. (В этой статье рассматривалось уравнение $\partial_t^2 u - (\partial_x^2 u + \partial_y^2 u) = 0$.) На основании этих результатов становится понятной полезность использования для гиперболических уравнений общего вида теории гильбертовых пространств, в которой вместо пространств C^p рассматриваются пространства $\mathfrak{D}^k$.

Дополнение редактора перевода. Дальнейшее развитие теории симметричных систем первого порядка идет по линии отказа от требования гиперболичности (переход к симметричным положительным, в частности к параболическим, системам) и рассмотрения, помимо задачи Коши, граничных задач типа „смешанных“. Сюда относятся работы [15] — [19]. Элементарное введение — в [24].

Сходными методами могут быть рассмотрены и специальные классы эллиптических систем первого порядка, обобщающих систему уравнений Коши — Римана [25].

Работы Лере по теории гиперболических уравнений отражены в [27]. Эта книга подводит итоги целого этапа, берущего начало от работ Петровского. Последние исследования Лере, относящиеся к аналитической теории задачи Коши на комплексном многообразии, изложены в [13].

Следует также иметь в виду рассмотрение задачи Коши в книге [5] и развернутое исследование некоторых вопросов, связанных с распространением разрывов и представляющих большой физический интерес, в [34].

Работы Иосиды изложены в [35].

ПОСЛЕСЛОВИЕ

В конце каждой главы этой книги приведен соответствующий список литературы. Здесь мы укажем ряд книг общего характера. В европейской и американской литературе не так уж много подробных монографий по уравнениям в частных производных. Наиболее известными из них являются

[53] (эта книга затрагивает почти все вопросы теории дифференциальных уравнений (особое внимание обращено на связь с математической физикой)[1])),

[54] (в этой книге один из ведущих ученых в области дифференциальных уравнений в частных производных И. Г. Петровский осветил развитие этой теории, начиная с классических результатов и кончая самыми современными) и

[55] (здесь изложены результаты, относящиеся к дифференциальным уравнениям в частных производных первого порядка и к линейным дифференциальным уравнениям в частных производных второго порядка; эта книга дает хорошее представление о дифференциальных уравнениях в частных производных).

Названные выше книги могут служить хорошими учебными руководствами, подготавливающими читателя к изучению современных работ по дифференциальным уравнениям в частных производных.

Из сборников, в которых опубликованы новые результаты по теории дифференциальных уравнений в частных производных, можно порекомендовать [56], [57].

При исследовании общих дифференциальных операторов очень большую роль играет преобразование Фурье. В этом направлении целый ряд очень важных результатов получен Л. Хёрмандером, Л. Гордингом и другими. Имеются также и другие существенные результаты, которые автор не счел

---

[1]) См. также [9]. — *Прим. ред,*

возможным включить в эту книгу ввиду ее малого объема. Автор надеется, что эти сведения читатель сможет почерпнуть из других книг по дифференциальным уравнениям.

Автор сожалеет, что, не зная русского языка, он плохо знаком с целым рядом хороших статей по дифференциальным уравнениям в частных производных, опубликованных в советских журналах. Такие авторы, как С. Л. Соболев, М. И. Вишик и другие, несомненно, являются ведущими учеными в этой области.

В заключение автор хочет отметить японских математиков К. Иосиду и Т. Като, которые разработали новые методы в теории дифференциальных уравнений в частных производных.

Дополнение редактора перевода. Результаты Хёрмандера изложены в [7]. Вопросы общей теории операторов с постоянными коэффициентами (но не граничных задач!) на базе преобразования Фурье рассмотрены в [8]. Использование преобразования Фурье и обобщенных функций для выяснения структуры фундаментальных решений и исследования задачи Коши в негиперболическом случае (коэффициенты постоянны) даны в [27], [28]. Основы соответствующего аппарата изложены в [26].

Фундаментальные решения с «классической» точки зрения — в [36].

Широкий круг вопросов, связанных с использованием функциональных методов при рассмотрении граничных задач для дифференциальных операторов, охвачен в [10].

Работы Иосиды и Като примыкают, грубо говоря, к направлению обзора [37] и монографии [14] (в последней — исчерпывающая библиография). Переводы работ Като — [38], [39].

Среди общих курсов, появившихся за последние годы, следует отметить курс [23], где затронут широкий круг вопросов, выходящих за рамки стандартной программы, и довольно последовательно выдержана точка зрения теории аналитических функций (как основного аппарата исследования).

В заключение обратим внимание читателя на весьма полезный обзор [40].

ЛИТЕРАТУРА [1])

I

1. Люстерник Л. А., Соболев В. И., Элементы функционального анализа, «Наука», М., 1965.
2. Ахиезер Н. И., Глазман И. М., Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, «Наука», М., 1966.
3. Данфорд Н., Шварц Дж. Т., Линейные операторы. I, ИЛ, М., 1962.
4. Рисс Ф., Секефальви-Надь Б., Лекции по функциональному анализу, ИЛ, М., 1954.
5. Соболев С. Л., Некоторые применения функционального анализа в математической физике, ЛГУ, 1950.
6. Берс Л., Джон Ф., Шехтер М., Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1966.
7. Хёрмандер Л., Линейные дифференциальные операторы с частными производными, «Мир», М., 1965.
8. Трев Ж., Лекции по линейным уравнениям в частных производных с постоянными коэффициентами, «Мир», М., 1965.
9. Курант Р., Уравнения с частными производными, «Мир», М., 1964.
10. Березанский Ю. М., Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, «Наукова думка», Киев, 1965.
11. Агмон С., Дуглис А., Ниренберг Л., Оценки вблизи границы решений эллиптических уравнений в частных производных, ИЛ, М., 1962.
12. Гординг Л., Задача Коши для гиперболических уравнений, ИЛ, М., 1961.
13. Лере Ж., Гординг Л., Котаке С., Решение задачи Коши, «Мир», М., 1967.
14. Lions J. L., Equations differentiel-operationel et problems aux limites, Springer, 1961.
15. Friedrichs K. O., Symmetric positive linear differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **11** (1958), 333—418.
16. Lax P. D., Phillips R. S., Local boundary conditions for dissipative symmetric linear differential operators, *Commun. Pure Appl. Math.*, **13** (1960), 427—455.
17. Phillips R. S., Sarason L., Singular symmetric positive first order differential operators, *J. Math. Mech.*, **15**, № 2 (1965), 235—272.
18. Дезин А. А., Граничные задачи для некоторых симметричных линейных систем первого порядка, *Матем. сб.*, **49** (1959), 459—484.

---

[1]) Поскольку теории уравнений в частных производных посвящено множество работ на различных языках, библиография к русскому изданию этой книги начинается с наиболее доступных работ общего характера. Список работ, цитируемых автором, составляет ее вторую часть. — *Прим. ред.*

19. Галахов М. А., Неклассические граничные задачи для симметричных линейных систем с частными производными первого порядка, *Дифференциальные уравнения,* I, № 12 (1965), 1620—1627.
20. Hörmander L., Weak and strong extensions of differential operators, *Commun. Pure Appl. Math.,* **14** (1961), 371—379.
21. Хёрмандер Л., Оценки в L^2 и теоремы существования для оператора $\bar{\partial}$, *Математика,* **10 : 2** (1966), 59—116.
22. Вишик М. И., О сильно эллиптических системах дифференциальных уравнений, *Матем. сб.,* **29** (1951), 615—676.
23. Garabedian P. R., Partial differential equations, J. Wiley, New York, 1964.
24. Дезин А. А., Теоремы существования и единственности решений граничных задач для уравнений с частными производными в функциональных пространствах, *УМН,* **14,** № 3 (1959), 21—73.
25. Дезин А. А., Инвариантные дифференциальные операторы и граничные задачи, Труды Матем. ин-та им. В. А. Стеклова, т. 68, М., 1962.
26. Шварц Л., Математические методы для физических наук, «Мир», М., 1965.
27. Гельфанд И. М., Шилов Г. Е., Обобщенные функции, вып. 1—3, Физматгиз, 1958.
28. Шилов Г. Е., Математический анализ, Второй специальный курс, «Наука», М., 1965.
29. Михлин С. Г., Проблема минимума квадратичного функционала, ГИТТЛ, М.—Л., 1952.
30. Данфорд Н, Шварц Дж., Бейд У. Т., Бартл Р. Т., Линейные операторы. II, «Мир», М., 1966.
31. Агранович М. С., Эллиптические сингулярные интегродифференциальные операторы, *УМН,* **20,** № 5 (1965), 3—120.
32. Вишик М. И., Эскин Г. И., Уравнения в свертках в ограниченной области, *УМН,* **20,** № 3 (1965), 89—152.
33. Nagumo M., On linear hyperbolic sistem of partial differential equations in the whole space, *Proc. Japan Acad.,* **32** (1956), 703—706.
34. Маслов В. П., Теория возмущений и асимптотические методы, МГУ, 1965.
35. Yosida K., Functional analysis, Springer, 1964. (Русский перевод готовится к печати в изд-ве «Мир».)
36. Йон Ф., Плоские волны и сферические средние, ИЛ, М., 1958.
37. Вишик М. И., Ладыженская О. А., Граничные задачи для уравнений с частными производными и некоторых классов операторных уравнений, *УМН,* **2,** № 6 (1956), 41—97.
38. Като Т., Интегрирование эволюционного уравнения в банаховом пространстве, *Математика,* **2 : 4** (1958), 115—135.
39. Като Т., Абстрактные эволюционные уравнения параболического типа в пространстве Банаха и Гильберта, *Математика,* **8 : 4** (1964), 109—134.
40. Линейные уравнения математической физики, СМБ, «Наука», М., 1964.

II

41. Friedrichs K. O., The identity of weak and strong extensions of differential operators, *Trans. Amer. Math. Soc.*, **55** (1944), 132—151.
42. Friedrichs K. O., On the differentiability of solutions of linear elliptic differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **6** (1953), 299—325.
43. Nirenberg, Remarks on strongly elliptic partial differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 649—675.
44. Douglis A., Nirenberg L., Interior estimates for elliptic systems of partial differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **8** (1955), 503—538.
45. Rado T., Das Hilbertsche Theorem über den analytischen Character der Lösungen der partiellen Differentialgleichungen zweiter Ordnung., *Math. Zeit.*, **25** (1926).
46. Lewy H., Neuer Beweis des analytischen Characters der Lösungen elliptischer Differentialgleichungen., *Math, Ann.*, **101** (1929).
47. Миранда К., Уравнения с частными производными эллиптического типа, ИЛ, М., 1957.
48. Friedrichs K. O., Symmetric hyperbolic system of linear differential equations, *Commun. Pure Appl. Math.*, **7** (1954), 345—392.
49. Лакс П. Д., О задаче Коши для гиперболических уравнений и о дифференцируемости решений эллиптических уравнений, *Математика*, **1 : 1** (1957), 43—59.
50. Leray J., Hyperbolic differential equations. (Запись курса лекций, прочитанного в Принстоне.)
51. Yosida K., An operator-theoretical integration of temporally inhomogeneous wave equations, *J. Fac. Sci. Univ. of Tokyo*, **7**, № 4 (1957), 463—466.
52. Friedrichs K., Lewy H., Über forsetzbare Anfangsbedingungen bei hyperbolischen Differentialgleichungen in drei Veränderlichen, *Nachr. Ges. Göttingen*, **26** (1932), 135—143.
53. Курант Р., Гильберт Д., Методы математической физики, ГИТТЛ, 1951.
54. Петровский И. Г., Дифференциальные уравнения с частными производными, Физматгиз, М., 1961.
55. Duff, Partial differential equations, Toronto, 1956.
56. Proceedings of the symposium on spectral theory and differential problems, Stillwater, 1951.
57. Contributions to the theory of partial differential equations, Princeton, 1954.
58 Мимура Ю., Функциональный анализ, изд. «Кёрицу», серия «Лекции по современной математике», № 14 (на японском языке).
59. Иосида К., Теория гильбертовых пространств, изд. «Кёрицу» (на японском языке).

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

ИМЕННОЙ УКАЗАТЕЛЬ

ОГЛАВЛЕНИЕ

М. НАГУМО

Лекции по современной теории уравнений в частных производных

Редактор Л. Б. Штейнпресс Художник В. П. Заикин
Технический редактор В. П. Сизова Корректор Л. В. Байкова

Сдано в производство 20/XII 1966 г. Подписано к печати 24/III 1967 г.
Бумага $84\times108^1/_{32}$=2,13 бум. л. 7,14 печ. л. Уч.-изд. л. 6,09. Изд. № 1/3789
Цена 42 коп. Зак. 469

ИЗДАТЕЛЬСТВО «МИР»
Москва, 1-й Рижский пер., 2

Ленинградская типография № 2 имени Евгении Соколовой Главполиграфпрома Комитета по печати при Совете Министров СССР. Измайловский проспект, 29