Линейные дифференциальные операторы

М.А. Наймарк

М. А. НАЙМАРК

Линейные дифференциальные операторы

Издание второе, переработанное и дополненное

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ
ФИЗИКО-МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1969

517.2
Н 20
УДК 517.9

Линейные дифференциальные операторы, Наймарк М. А.

Книга посвящена основам теории обыкновенных линейных дифференциальных операторов и некоторым ее приложениям. Она состоит из двух частей.

В более элементарной первой части изложены: основные понятия и основные задачи теории дифференциальных операторов, асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций и теорема о разложении по собственным и присоединенным функциям, обобщения этих результатов на дифференциальные операторы в пространстве вектор-функций. В основном здесь применяются классические методы, в частности, методы теории аналитических функций.

Во второй части указанные методы сочетаются с методами функционального анализа. В ней изложены необходимые сведения из теории линейных операторов в гильбертовом пространстве в удобной для дальнейшего форме, основные факты теории симметрических дифференциальных операторов и их расширений, спектральная теория самосопряженных операторов, различные теоремы об индексе дефекта и спектре этих операторов, решение обратной задачи спектрального анализа для операторов второго порядка.

По сравнению с первым изданием книги изложение во многих местах переработано и дополнено новыми результатами и многочисленными литературными указаниями о различных усилениях ряда теорем в основном тексте. Добавлен ряд новых примеров, значительно расширена библиография и включено Добавление «Несамосопряженный дифференциальный оператор второго порядка на полуоси» о сингулярных несамосопряженных операторах второго порядка.

В книге 18 рис., библ. 384 названия.

2-2-3
78-69

ОГЛАВЛЕНИЕ

ПРЕДИСЛОВИЕ КО ВТОРОМУ ИЗДАНИЮ

За 14 лет, прошедших после выхода в свет первого издания этой книги, излагаемая в ней теория обогатилась многими новыми достижениями.

Автор стремился в какой-то мере отразить эти достижения во втором издании книги и в то же время сохранить элементарность и доступность изложения. Это последнее обстоятельство, а также ограничения на объем книги заставили автора в большинстве случаев приводить формулировки новых результатов или краткие литературные указания. Автор полагает, что эти литературные указания, а также значительно расширенная библиография дадут возможность читателю ориентироваться в современных вопросах теории.

При подготовке второго издания во многих местах был улучшен или заменен другим первоначальный текст; при этом были учтены изменения и добавления, сделанные в немецком и американском изданиях книги.

В работе над вторым изданием автору помогал В. Э. Лянце, и эта помощь вышла за рамки обычных обязанностей редактора; кроме того, В. Э. Лянце написал Добавление I, в котором изложены результаты автора по спектральной теории несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов, дополненные исследованиями В. Э. Лянце, а также прореферированы некоторые результаты других авторов. За эту помощь и за тщательное редактирование рукописи автор приносит В. Э. Лянце глубокую благодарность.

Автор искренне признателен всем коллегам, указавшим на содержащиеся в первом издании опечатки и неточности. Особенно автор признателен Г. М. Кесельману и Ф. С. Рофе-Бекетову за ценные советы.

М. А. Наймарк

Москва
октябрь 1968 г.

ИЗ ПРЕДИСЛОВИЯ К ПЕРВОМУ ИЗДАНИЮ

Многие вопросы математической физики приводят к задаче определения собственных значений и собственных функций дифференциальных операторов и разложения произвольной функции в ряд (или интеграл) по собственным функциям. Так, например, к такого рода вопросам приходят всегда, применяя метод Фурье для нахождения решения дифференциального уравнения в частных производных, удовлетворяющего данным начальным и краевым условиям. Поэтому дифференциальные операторы привлекали и привлекают большое внимание и имеется много работ, им посвященных.

Большинство из этих работ посвящено сформулированной выше основной проблеме — спектральному анализу дифференциальных операторов, т. е. исследованию спектра и разложению заданной функции по собственным функциям дифференциального оператора. Особенно возрос интерес к этой проблеме в последние десятилетия в связи с развитием квантовой механики. Спектральный анализ дифференциальных операторов является основным математическим аппаратом при решении многих задач квантовой механики. При этом запросы квантовой механики требуют детального исследования так называемых сингулярных дифференциальных операторов, например, операторов, заданных в бесконечном интервале. Такие операторы могут, вообще говоря, иметь не только дискретный, но и сплошной спектр, в связи с чем разложение по их собственным функциям в общем случае представляется в виде интеграла Стильтьеса.

Следует отметить, что за последнее время наиболее существенные результаты в этих вопросах были получены советскими математиками. Такие результаты, как доказательство существования разложения по собственным функциям сингулярного самосопряженного оператора произвольного четного порядка, решение обратной задачи Штурма — Лиувилля (см. главу VIII), полнота собственных и присоединенных функций для широких классов несамосопряженных дифференциальных операторов и многие другие, полностью или почти полностью принадлежат советским математикам.

Однако, несмотря на эти фундаментальные результаты, проблему спектрального разложения дифференциальных операторов еще нельзя считать исчерпанной. Здесь в первую очередь следует указать на задачу определения кратности спектра и индекса дефекта дифференциального оператора в зависимости от свойств его коэффициентов, на вопрос о правиле отбора и нормировки минимальной системы собственных функций в непрерывном спектре; особенно мало разработаны эти вопросы для случая оператора, порожденного системой дифференциальных выражений, т. е. дифференциального оператора в пространстве вектор-функций (см. главы V и VII).

Не менее важна и интересна задача разложения по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора; для случая регулярного дифференциального выражения (и вообще нерегулярных краевых условий) эта задача существенно продвинута в недавней работе М. В. Келдыша (см. Келдыш [1]), случай же несамосопряженного сингулярного дифференциального выражения до последнего времени не был предметом исследований.

В настоящей книге излагается теория линейных обыкновенных дифференциальных операторов произвольного порядка. В книге широко используются идеи и результаты функционального анализа, главным образом теория линейных операторов в гильбертовом пространстве. Для удобства читателя все необходимые сведения из функционального анализа приводятся в самой книге, так что, как полагает автор, книга доступна широкому кругу читателей. Многие вопросы теории линейных дифференциальных операторов можно излагать и не пользуясь функциональным анализом. Однако автор не считает целесообразным такое изложение, ибо только при использовании идей и методов функционального анализа возможно глубокое понимание теории, а также получение наиболее общих результатов.

Книга состоит из двух частей. В части первой, которую можно назвать элементарной теорией дифференциальных операторов, применение методов функционального анализа сведено к минимуму. В ней излагается теория дифференциальных операторов в конечном интервале, включая теорию несамосопряженных дифференциальных операторов, при условии достаточной гладкости их коэффициентов. Для ее понимания от читателя требуются лишь самые элементарные сведения из теории обыкновенных дифференциальных и интегральных уравнений и теории функций комплексного переменного.

Вторая часть книги посвящена изложению теории дифференциальных операторов как операторов в гильбертовом пространстве. Здесь от читателя, в дополнение к указанному выше, требуется еще знание самых основных сведений из теории интеграла Лебега.

Автор выражает благодарность М. И. Вишику, прочитавшему книгу в рукописи и сделавшему ряд ценных замечаний.

Москва
июль 1952 г.

М. А. Наймарк

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

ЭЛЕМЕНТАРНАЯ ТЕОРИЯ ЛИНЕЙНЫХ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

ГЛАВА I

ОСНОВНЫЕ ПОНЯТИЯ И ПРЕДЛОЖЕНИЯ

§ 1. Определение и основные свойства линейного дифференциального оператора

1. Общее определение линейного пространства и линейного оператора. *Линейным пространством* называется совокупность R элементов x, y, ..., такая, что:

1°. *В R определена сумма $x+y$ любых двух элементов x, $y \in R$, обладающая следующими свойствами*:

а$_1$) если x, $y \in R$, то $x+y \in R$;

б$_1$) $x+y=y+x$,

в$_1$) $(x+y)+z=x+(y+z)$,

г$_1$) В R существует «нулевой» элемент 0, такой, что для всех $x \in R$ $x+0=x$.

2°. *В R определено произведение λx элемента x на число λ, обладающее следующими свойствами*:

а$_2$) если $x \in R$, то $\lambda x \in R$;

б$_2$) $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$;

в$_2$) $1 \cdot x = x$;

г$_2$) $0 \cdot x = 0$ (слева — число 0, справа — нулевой элемент);

д$_2$) $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$;

е$_2$) $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

При этом элемент $(-1)x$ обозначается через $-x$. В силу свойств в$_2$), е$_2$) и г$_2$)

$$x+(-x)=(1+(-1))x=0x=0.$$

Элементы x, y, ... пространства R называются его *векторами*.

Отметим, что в этом определении совершенно безразлична природа элементов x, y, ...; точно так же безразлично, как именно определить сумму $x+y$ и произведение элемента x на число λ. Требуется только, чтобы эти понятия удовлетворяли всем перечисленным выше условиям. Поэтому каждый раз, когда встречаются две операции, удовлетворяющие этим условиям, мы вправе считать их операциями сложения и умножения на число, а совокупность элементов, для которых эти операции определены, линейным пространством.

Если в пространстве R допускается умножение на любое действительное число, то R называется действительным пространством; если же допускается умножение на любое комплексное число, то R называется комплексным пространством. Если не сделано никаких оговорок, мы будем считать R комплексным пространством. Выражение вида $\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_n x_n$ называется *линейной комбинацией* векторов $x_1, x_2, \ldots, x_n$; линейная комбинация называется *тривиальной*, если все числа $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ равны нулю, и *нетривиальной* в противном случае. Векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *линейно зависимыми*, если некоторая их нетривиальная линейная комбинация равна нулю, и *линейно независимыми*, если такой линейной комбинации не существует.

Пространство R называется *конечномерным* и притом n-мерным, если в нем есть n и не более n линейно независимых векторов; такие n векторов называются тогда *базисом* в R.

Если же в R есть сколько угодно линейно независимых векторов, то R называется *бесконечномерным*. Часть R' пространства R называется его *подпространством*, если всякая линейная комбинация элементов из R' есть также элемент из R'.

Пусть $\mathfrak{D}$ — некоторое подмножество в линейном пространстве R. Всякая функция A, которая каждому элементу x из $\mathfrak{D}$ ставит в соответствие некоторый элемент $x' = A(x)$ из R, называется *оператором* в пространстве R с областью определения $\mathfrak{D}$.

Часто, когда это не может привести к недоразумению, вместо $A(x)$ пишут Ax.

Если надо будет подчеркнуть, что $\mathfrak{D}$ есть область определения именно оператора A, то мы будем писать $\mathfrak{D}_A$ вместо $\mathfrak{D}$.

Совокупность всех векторов Ax, $x \in \mathfrak{D}_A$ называется *областью значений* оператора A и обозначается через $\mathfrak{R}_A$ или через $A\mathfrak{D}_A$.

Вообще, если $\mathscr{E}$ — произвольное множество, то $A\mathscr{E}$ обозначает совокупность всех векторов Ax, $x \in \mathscr{E}$, т. е. множество всех векторов, которые получаются при применении оператора A ко всем векторам множества $\mathscr{E}$.

Оператор A называется *линейным*, если $\mathfrak{D}_A$ — подпространство и если для любых векторов $x, y \in \mathfrak{D}_A$ и для любого числа λ

$$A(\lambda x) = \lambda A x,$$

$$A(x + y) = Ax + Ay.$$

Два оператора A и B в пространстве R считаются совпадающими тогда и только тогда, когда они имеют одну и ту же область определения $\mathfrak{D}$ и

$$Ax = Bx$$

для всех $x \in \mathfrak{D}$.

Оператор A называют *расширением* оператора B и пишут $A \supset B$ или $B \subset A$, если $\mathfrak{D}_A \supset \mathfrak{D}_B$ и если на $\mathfrak{D}_B$ операторы A и B совпадают, т. е.

$$Ax = Bx \text{ при любом } x \in \mathfrak{D}_B.$$

В этом случае оператор B называется также *сужением оператора A* на $\mathfrak{D}_B$.

В дальнейшем мы будем рассматривать только линейные операторы и не будем этого оговаривать особо, так что термин «оператор» будет всегда означать «линейный оператор».

2. Линейные дифференциальные выражения. *Линейным дифференциальным выражением* называется выражение вида

$$l(y) = p_0(x)\,y^{(n)} + p_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\,y. \tag{1}$$

Функции $p_0(x)$, $p_1(x)$, ..., $p_n(x)$ называются *коэффициентами*, а число n *порядком* дифференциального выражения.

В этой главе мы будем предполагать, что функции $\frac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x)$, $p_2(x)$, ..., $p_n(x)$ непрерывны в фиксированном конечном интервале $[a, b]$, а в некоторых случаях будем накладывать на них еще дополнительные условия.

Обозначим через $C^{(n)}$ совокупность всех функций $y(x)$, имеющих непрерывные производные до n-го порядка включительно в фиксированном замкнутом конечном интервале $[a, b]$.

Для любой функции $y \in C^{(n)}$ определено дифференциальное выражение $l(y)$, являющееся непрерывной функцией на отрезке $[a, b]$.

3. Краевые условия. Обозначим через

$$y_a,\ y'_a,\ \ldots,\ y_a^{(n-1)};\quad y_b,\ y'_b,\ \ldots,\ y_b^{(n-1)} \tag{2}$$

значения функции y и ее первых $n-1$ производных в точках a и b соответственно. Далее, обозначим через $U(y)$ линейную форму относительно переменных (2), так что $U(y)$ имеет вид

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \ldots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \ldots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}. \tag{3}$$

Если задано несколько таких форм $U_\nu(y)$, $\nu=1, 2, \ldots, m$, то равенства

$$U_\nu(y)=0, \quad \nu=1, 2, \ldots, m \tag{4}$$

называются *краевыми условиями.*

Обозначим через $\mathfrak{D}$ совокупность всех функций $y \in C^{(n)}$, удовлетворяющих краевым условиям вида (4).

Очевидно, что $\mathfrak{D}$ есть линейное подпространство в $C^{(n)}$, причем $\mathfrak{D}$ может совпадать с $C^{(n)}$ лишь тогда, когда условия (4) отсутствуют.

Пусть задано некоторое дифференциальное выражение $l(y)$ и некоторое многообразие $\mathfrak{D}$, определенное условиями вида (4). Каждой функции $y \in \mathfrak{D}$ поставим в соответствие функцию $u=l(y)$. Это соответствие есть линейный оператор с областью определения $\mathfrak{D}$. Обозначим его через L. Таким образом, если $y \in \mathfrak{D}$ и если $u=l(y)$, то, по определению оператора L,

$$u=Ly.$$

Оператор L называется *дифференциальным оператором, порожденным дифференциальным выражением* $l(y)$ *и краевыми условиями* (4).

Таким образом, и это в дальнейшем будет весьма существенно, *одно и то же дифференциальное выражение может порождать различные дифференциальные операторы в зависимости от выбора краевых условий* (4).

Если, в частности, условия (4) отсутствуют, то получается дифференциальный оператор с областью определения $\mathfrak{D}=C^{(n)}$, мы обозначим его через L_1. Он является, очевидно, расширением всех других операторов L, порожденных тем же дифференциальным выражением $l(y)$.

Оказывается, однако, что во многих вопросах удобно рассматривать не только этот наиболее широко определенный оператор L_1, но и описанные выше операторы, которые являются сужением оператора L_1.

Некоторые из форм $U_\nu(y)$ могут оказаться линейными комбинациями остальных. Тогда соответствующее такой форме равенство $U_\nu(y)=0$ является следствием остальных и может быть отброшено. Поэтому формы $U_\nu(y)$ можно с самого начала считать линейно независимыми. Как известно, это означает, что ранг матрицы, составленной из коэффициентов этих форм, должен быть равен m.

Если $m=2n$, то равенства (4) возможны лишь тогда, когда

$$y_a=y'_a=\ldots=y_a^{(n-1)}=y_b=y'_b=\ldots=y_b^{(n-1)}=0.$$

Дифференциальный оператор, порожденный этими условиями, обозначим через L_0.

Краевым условиям можно придать еще следующую геометрическую трактовку: будем кратко обозначать буквой η всю совокупность (2), так что

$$\eta = \left(y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}; \quad y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}\right).$$

Очевидно, η можно рассматривать как вектор $2n$-мерного пространства R_{2n}. Условия (4) выделяют из этого пространства некоторое подпространство $\mathfrak{M}$ размерности $2n-m$. Эти условия означают, что вектор η, соответствующий функции y, должен принадлежать подпространству $\mathfrak{M}$.

4. Однородная краевая задача. *Однородной краевой задачей* называется задача определения функции y из $C^{(n)}$, удовлетворяющей условиям:

$$l(y) = 0, \tag{5}$$

$$U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m. \tag{6}$$

Пусть L — оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y)$ и условиями (6); тогда однородная краевая задача сводится к нахождению в области определения $\mathfrak{D}$ оператора L функции y, на которой этот оператор обращается в нуль.

Очевидно, всякая однородная краевая задача имеет по крайней мере одно решение, именно $y \equiv 0$. Это решение называется *тривиальным*. Она может, однако, иметь еще другие «нетривиальные» решения, т. е. решения $y \not\equiv 0$.

Выясним, при каких условиях однородная краевая задача имеет нетривиальные решения.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения дифференциального уравнения $l(y) = 0$. Как известно из теории линейных дифференциальных уравнений (см., например, Степанов [1]), всякое решение уравнения $l(y) = 0$, в том числе решение краевой задачи, должно иметь вид

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — некоторые постоянные. Подставляя это выражение для y в условия (6), получим систему линейных однородных уравнений

$$\left.\begin{array}{l} c_1 U_1(y_1) + c_2 U_1(y_2) + \ldots + c_n U_1(y_n) = 0, \\ c_1 U_2(y_1) + c_2 U_2(y_2) + \ldots + c_n U_2(y_n) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ c_1 U_m(y_1) + c_2 U_m(y_2) + \ldots + c_n U_m(y_n) = 0 \end{array}\right\} \tag{7}$$

для определения постоянных $c_1, c_2, \ldots, c_n$. Обозначим через r ранг матрицы

$$U = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \ldots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \ldots & U_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \ldots & U_m(y_n) \end{pmatrix}. \qquad (8)$$

Тогда уравнения (7) имеют $n-r$ независимых решений относительно $c_1, c_2, \ldots, c_n$, которым соответствуют $n-r$ независимых решений y краевой задачи.

Таким образом:

I. *Если ранг матрицы U равен r, то однородная краевая задача имеет в точности $n-r$ независимых решений.*

В частности:

II. а) *Однородная краевая задача имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда ранг r матрицы U меньше порядка n дифференциального оператора.*

б) *Если $m < n$, то однородная краевая задача имеет нетривиальное решение.*

в) *Если $m = n$, то однородная краевая задача имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель (в этом случае квадратной) матрицы U равен нулю.*

Отметим, что *ранг матрицы U не зависит от выбора фундаментальной системы* $y_1, \ldots, y_n$. Действительно, переход от одной такой системы $y_1, \ldots, y_n$ к другой $\hat{y}_1, \ldots, \hat{y}_n$ осуществляется линейным преобразованием

$$\hat{y}_i = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} y_j, \qquad i = 1, 2, \ldots, n,$$

определитель которого отличен от нуля.

Так как при этом переходе матрица U умножается на матрицу (a_{ij}) $i, j = 1, \ldots, n$, то ранг матрицы U не изменяется.

Ранг матрицы U называется *рангом краевой задачи.*

Однородная краевая задача допускает следующее обобщение. Пусть $U_1(y)$, $U_2(y), \ldots, U_n(y)$ — линейно независимые линейные непрерывные функционалы *) в $C^{(n)}$, и пусть $l(y)$ — дифференциальное выражение n-го порядка.

Обобщенной однородной краевой задачей будем называть задачу определения функции y, удовлетворяющей условиям

$$l(y) = 0, \quad U_\nu(y) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Очевидно, что результаты этого пункта полностью переносятся на случай обобщенной краевой задачи.

---

*) В качестве нормы в $C^{(n)}$ можно взять $|y| = \sum_{k=0}^{n} \max_{a \leqslant x \leqslant b} |y^{(k)}(x)|$.

Некоторые частные случаи обобщенной краевой задачи рассмотрены в работах Тамаркина (см. Тамаркин [3]) и других авторов (см. Смогоржевский [1] и Камке [1]), ч. II, § 5, где приведена подробная литература), но в общей постановке она до сих пор не рассматривалась.

5. Формула Лагранжа; сопряженное дифференциальное выражение. Предположим теперь, что коэффициенты $p_k(x)$, $k=0, 1, 2, \ldots, n$, дифференциального выражения

$$l(y)=p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n(x)\,y$$

имеют в интервале $[a, b]$ непрерывные производные до $(n-k)$-го порядка включительно.

Пусть y и z — две произвольные функции из $C^{(n)}$. Интегрируя k раз по частям, получим *)

$$\int_a^b p_{n-k}\bar{z}y^{(k)}\,dx=[p_{n-k}\bar{z}y^{(k-1)}-(p_{n-k}\bar{z})'\,y^{(k-2)}+\ldots$$

$$\ldots+(-1)^{k-1}(p_{n-k}\bar{z})^{(k-1)}y\Big]_{x=a}^{x=b}+(-1)^k\int_a^b y\,(p_{n-k}\bar{z})^{(k)}\,dx. \qquad (9)$$

Положим здесь $k=n, n-1, \ldots, 0$ и просуммируем полученные равенства; мы придем тогда к формуле

$$\int_a^b l(y)\,\bar{z}\,dx=P(\eta, \zeta)+\int_a^b y\,\overline{l^*(z)}\,dx, \qquad (10)$$

где

$$l^*(z)=(-1)^n(\bar{p}_0z)^{(n)}+(-1)^{n-1}(\bar{p}_1z)^{(n-1)}+$$
$$+(-1)^{n-2}(\bar{p}_2z)^{n-2}+\ldots+\bar{p}_nz, \qquad (11)$$

и $P(\eta, \zeta)$ — некоторая билинейная форма относительно переменных

$$\eta=\left(y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}\right),$$
$$\zeta=\left(z_a, z'_a, \ldots, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \ldots, z_b^{(n-1)}\right).$$

Дифференциальное выражение $l^*(z)$, определенное формулой (11), называется *сопряженным* к дифференциальному выражению $l(y)$. Формула (10) называется *формулой Лагранжа.*

---

*) $\bar{z}$ обозначает комплексное число, сопряженное к z, или — функцию, значения которой являются сопряженными к соответствующим значениям $z(x)$.

Применяя предыдущие рассуждения к интегралу

$$\int_a^b l^*(z)\cdot\bar{y}\,dx,$$

мы придем к формуле вида

$$\int_a^b l^*(z)\cdot\bar{y}\,dx = Q(\eta,\,\zeta)+\int_a^b z\cdot\overline{l(y)}\,dx.$$

Следовательно, дифференциальное выражение $l(y)$ является сопряженным к $l^*(z)$:

$$l^{**}(y)=l(y).$$

Другими словами, *дифференциальные выражения* $l(y)$ и $l^*(y)$ *сопряжены друг другу.*

Из определения (11) сопряженного выражения непосредственно видно, что

$$(l_1+l_2)^*=l_1^*+l_2^*, \tag{12}$$

и, если λ — число,

$$(\lambda l)^*=\bar{\lambda}l^*. \tag{13}$$

Дифференциальное выражение $l(y)$ называется *самосопряженным*, если $l^*(y)=l(y)$. Из (12) и (13) следует

III. а) *Сумма самосопряженных дифференциальных выражений есть также самосопряженное дифференциальное выражение.*

б) *Произведение самосопряженного дифференциального выражения на вещественное число есть также самосопряженное дифференциальное выражение.*

Найдем общий вид всех самосопряженных дифференциальных выражений.

IV. *Всякое самосопряженное дифференциальное выражение есть сумма дифференциальных выражений вида*

$$l_{2\nu}(y)=(py^{(\nu)})^{(\nu)};\quad l_{2\nu-1}(y)=\frac{1}{2}\left[(ipy^{(\nu-1)})^{(\nu)}+(ipy^{(\nu)})^{(\nu-1)}\right],$$

где p — функция, принимающая только вещественные значения.

Доказательство. Рассмотрим интегралы

$$\int_a^b l_{2\nu}(y)\,\bar{z}\,dx,\qquad \int_a^b l_{2\nu-1}(y)\,\bar{z}\,dx,$$

где $y,\,z\in C^{(n)}$; интегрируя по частям, легко убедиться в том, что $l_{2\nu}(y)$, $l_{2\nu-1}(y)$ — самосопряженные дифференциальные выражения. Поэтому сумма выражений вида $l_{2\nu}(y)$ и $l_{2\nu-1}(y)$ есть также самосопряженное дифференциальное выражение.

Пусть, обратно,

$$l(y) = p_0 y^{(n)} + p_1 y^{(n-1)} + \ldots + p_n y$$

— самосопряженное дифференциальное выражение; докажем, что $l(y)$ есть сумма выражений вида $l_{2\nu}(y)$ и $l_{2\nu-1}(y)$.

По определению, $l(y)$ должно совпадать с сопряженным выражением

$$l^*(y) = (-1)^n (\bar{p}_0 y)^{(n)} + (-1)^{n-1} (\bar{p}_1 y)^{(n-1)} + \ldots + \bar{p}_n y =$$
$$= (-1)^n \bar{p}_0 y^{(n)} + \left[(-1)^n n\bar{p}_0' + (-1)^{n-1} \bar{p}_1\right] y^{(n-1)} + \ldots$$

Отсюда, в частности, следует, что

$$p_0 = (-1)^n \bar{p}_0. \qquad (14)$$

Пусть n четно, $n = 2\mu$; тогда из (14) следует, что $p_0 = \bar{p}_0$, т. е. p_0 принимает только вещественные значения.

Вычитая из $l(y)$ самосопряженное выражение

$$l_{2\mu}(y) = \left(p_0 y^{(\mu)}\right)^{(\mu)} = p_0 y^{(n)} + \mu p_0' y^{(n-1)} + \ldots,$$

получим самосопряженное выражение $l(y) - l_{2\mu}(y)$ порядка $n-1$.

Пусть n нечетно, $n = 2\mu - 1$; тогда из (14) следует, что $p_0 = -\bar{p}_0$. Следовательно, $p_0 = ip$, где p принимает только вещественные значения. Вычитая из $l(y)$ самосопряженное выражение

$$l_{2\mu-1}(y) = \frac{1}{2}\left[(ipy^{(\mu-1)})^{(\mu)} + (ipy^{(\mu)})^{(\mu-1)}\right] =$$
$$= (ip)\, y^{(2\mu-1)} + \frac{1}{2} nip' y^{(2\mu-2)} + \ldots = p_0 y^{(n)} + \frac{1}{2} np_0' y^{(n-1)} + \ldots,$$

получим самосопряженное выражение $l(y) - l_{2\mu-1}(y)$ порядка $n-1$. Из этих рассуждений следует, что, вычитая последовательно из $l(y)$ самосопряженные выражения вида $l_{2\nu}(y)$ и $l_{2\nu-1}(y)$, можно в конце концов получить самосопряженное выражение нулевого порядка, совпадающее с $l_0(y) = py$, где p — вещественная функция. Предложение IV тем самым доказано.

Если, в частности, $l(y)$ — самосопряженное дифференциальное выражение с вещественными коэффициентами, то оно не может иметь слагаемых вида $l_{2\mu-1}(y)$. Следовательно,

V. *Всякое самосопряженное дифференциальное выражение с вещественными коэффициентами обязательно четного порядка и имеет вид*

$$l(y) = (p_0 y^{(\mu)})^{(\mu)} + (p_1 y^{(\mu-1)})^{(\mu-1)} + \ldots + (p_{\mu-1} y')' + p_\mu y,$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_\mu$ — вещественные функции.

6. Сопряженные краевые условия; сопряженный оператор. Пусть $U_1, \ldots, U_m$ — линейно независимые формы переменных y_a, $y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}$; дополним их при $m < 2n$ какими-нибудь формами $U_{m+1}, \ldots, U_{2n}$ до линейно независимой системы $2n$ форм $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$. В силу линейной независимости этих форм переменные $y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}$ можно выразить в виде линейных комбинаций форм $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$.

Подставим эти выражения в билинейную форму $P(\eta, \zeta)$ в формуле Лагранжа (см. формулу (10)). Тогда $P(\eta, \zeta)$ станет линейной однородной формой от переменных $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$. Коэффициенты при переменных $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ являются линейными однородными формами от переменных $z_a, z'_a, \ldots, z_a^{(n-1)}$, $z_b, z'_b, \ldots, z_b^{(n-1)}$. Обозначим эти формы через

$$V_{2n}, V_{2n-1}, \ldots, V_1$$

соответственно. Тогда формула Лагранжа перепишется в виде

$$\int_a^b l(y) \cdot \bar{z}\, dx = U_1V_{2n} + U_2V_{2n-1} + \ldots + U_{2n}V_1 + \int_a^b y\overline{l^*(z)}\, dx. \tag{15}$$

Формы $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$ линейно независимы.

Для доказательства этого утверждения заметим прежде всего, что форма $P(\eta, \zeta)$ получается в результате применения двойной подстановки, отвечающей значениям $x = a$ и $x = b$. Следовательно, она имеет вид

$$P(\eta, \zeta) = P_b(\eta, \zeta) - P_a(\eta, \zeta),$$

где $P_a(\eta, \zeta)$ и $P_b(\eta, \zeta)$ содержат значения функций $y, y', \ldots, y^{(n-1)}$; $z, z', \ldots, z^{(n-1)}$ только при $x = a$ и только при $x = b$ соответственно.

Поэтому матрицей формы $P(\eta, \zeta)$ будет

$$\begin{pmatrix} -\Delta_a & 0 \\ 0 & \Delta_b \end{pmatrix}, \tag{16}$$

где Δ_a и Δ_b — матрицы формы $P_a(\eta, \zeta)$ и $P_b(\eta, \zeta)$ соответственно, а 0 — нулевая матрица.

Но из формулы (9) непосредственно видно, что каждая из матриц Δ_a, Δ_b имеет вид

$$\begin{Vmatrix} . & \ldots & . & (-1)^{n-1}p_0 \\ . & \ldots & (-1)^{n-2}p_0 & 0 \\ . & \ldots & \ldots & \ldots \\ . & \ldots & \ldots & \ldots \\ . \;\; -p_0 & \ldots & 0 & 0 \\ p_0 \quad 0 & \ldots & 0 & 0 \end{Vmatrix},$$

где p_0 следует брать при $x=a$ и $x=b$ соответственно. Элементы этой матрицы, стоящие над диагональю, не выписаны, так как их значения сейчас не играют роли. Следовательно, определитель каждой из них отличен от нуля. В силу (16) отсюда заключаем, что *определитель формы* $P(\eta, \zeta)$ также отличен от нуля.

Переход от переменных $y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}$ к переменным $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ есть линейное преобразование с определителем, отличным от нуля. Поэтому определитель матрицы формы P в переменных

$$U_1, U_2, \ldots, U_{2n} \quad \text{и} \quad z_a, z'_a, \ldots, z_a^{(n-1)}, z_b, \ldots, z_b^{(n-1)}$$

также отличен от нуля. Но эта матрица есть одновременно матрица коэффициентов форм $V_{2n}, V_{2n-1}, \ldots, V_1$. Следовательно, эти формы линейно независимы.

Краевые условия

$$V_1=0, \; V_2=0, \; \ldots, \; V_{2n-m}=0 \tag{17}$$

(а также всякие краевые условия, им эквивалентные) называются *сопряженными* к краевым условиям

$$U_1=0, \; U_2=0, \; \ldots, \; U_m=0. \tag{18}$$

Краевые условия называются *самосопряженными*, если они эквивалентны своим сопряженным условиям.

Дифференциальный оператор, порожденный выражением $l^*(y)$ и краевыми условиями (17), называется *сопряженным* к оператору L, порожденному выражением $l(y)$ и краевыми условиями (18). Оператор, сопряженный к L, обозначается через L^*.

Из формулы (15) и краевых условий (17) и (18) следует, что *для операторов* L *и* L^* *имеет место равенство*

$$\int_a^b Ly \cdot \bar{z}\, dx = \int_a^b y \cdot \overline{L^* z}\, dx. \tag{19}$$

Введем сокращенное обозначение

$$(y, z) = \int_a^b y(x)\overline{z(x)}\, dx;$$

тогда равенство (19) примет вид

$$(Ly, z) = (y, L^* z). \tag{20}$$

Из определения сопряженного оператора следует, что *оператор L является сопряженным к L^**:

$$L^{**} = L.$$

Оператор L называется *самосопряженным*, если $L^* = L$.

Из определения оператора L^* следует:

Оператор L самосопряженный тогда и только тогда, когда он порождается самосопряженным дифференциальным выражением и самосопряженными краевыми условиями.

В случае самосопряженного оператора L формула (20) принимает вид

$$(Ly, z) = (y, Lz). \tag{21}$$

7. Сопряженная краевая задача. Если L^* — оператор, сопряженный к L, то однородная краевая задача

$$L^*z = 0 \tag{22}$$

называется *сопряженной* к однородной краевой задаче

$$Ly = 0. \tag{23}$$

Более подробно краевая задача (22) записывается в виде

$$l^*(z) = 0, \tag{24}$$

$$V_\nu(z) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2n - m, \tag{25}$$

где $l^*(z)$ — дифференциальное выражение, сопряженное к $l(y)$, а (25) — краевые условия, сопряженные к условиям, порождающим оператор L.

Найдем соотношение между рангом исходной и сопряженной задач.

Пусть $z_1, z_2, \ldots, z_n$ — линейно независимые решения уравнения $l^*(z) = 0$ и пусть r' — ранг матрицы

$$\left\| \begin{matrix} V_1(z_1) & \ldots & V_1(z_n) \\ V_2(z_1) & \ldots & V_2(z_n) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ V_{2n-m}(z_1) & \ldots & V_{2n-m}(z_n) \end{matrix} \right\|. \tag{26}$$

Тогда сопряженная краевая задача (24), (25) имеет в точности $n - r'$ независимых решений.

С другой стороны, если y — любое решение исходной краевой задачи (23), то при $z = z_\nu$ интегралы в формуле Лагранжа обращаются в нуль. Кроме того, $U_1(y) = \ldots = U_m(y) = 0$. Следовательно, в этом случае формула Лагранжа примет вид

$$U_{m+1}(y)\,V_{2n-m}(z_\nu) + \ldots + U_{2n}(y)\,V_1(z_\nu) = 0.$$

Полагая здесь $\nu = 1, 2, \ldots, n$, получим, что формы $U_{m+1}(y), \ldots$ $\ldots, U_{2n}(y)$ удовлетворяют системе уравнений

$$\left.\begin{array}{l} U_{m+1}(y) V_{2n-m}(z_1) + \ldots + U_{2n}(y) V_1(z_1) = 0, \\ U_{m+1}(y) V_{2n-m}(z_2) + \ldots + U_{2n}(y) V_1(z_2) = 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ U_{m+1}(y) V_{2n-m}(z_n) + \ldots + U_{2n}(y) V_1(z_n) = 0. \end{array}\right\} \tag{27}$$

Эта система имеет по крайней мере $n-r$ независимых решений, именно $U_{m+1}(y_j), \ldots, U_{2n}(y_j)$, $j = 1, 2, \ldots, n-r$, где $y_1, \ldots, y_{n-r}$ — линейно независимые решения задачи (23). Следовательно, ранг матрицы системы (27) $\leqslant 2n - m - (n-r) = n - m + r$. Но матрица системы (27) с точностью до порядка строк и столбцов совпадает с матрицей (25), так что

$$r' \leqslant n - m + r. \tag{28}$$

Докажем, что здесь имеет место знак равенства. Для этого заметим, что рассматриваемые две краевые задачи являются взаимно сопряженными друг к другу; поэтому их можно поменять ролями. При этом r' и r меняются ролями, а m переходит в $2n-m$; следовательно, $r \leqslant n - (2n-m) + r'$, т. е.

$$r \leqslant m - n + r'. \tag{29}$$

Сравнивая (28) и (29), получим

$$r' = n - m + r. \tag{30}$$

VI. *Ранг r краевой задачи связан с рангом r' сопряженной задачи соотношением $r' = n - m + r$.* Если, в частности, $m = n$, то из формулы (30) следует, что $r' = r$. Таким образом:

VII. *Если число независимых краевых условий равно порядку дифференциального выражения, то ранг краевой задачи совпадает с рангом сопряженной краевой задачи.*

В частности:

VIII. *Если число независимых краевых условий равно порядку дифференциального выражения и если соответствующая однородная краевая задача имеет лишь тривиальное решение, то сопряженная краевая задача также имеет лишь тривиальное решение.*

Некоторые дополнительные сведения по материалу этого параграфа можно найти в главе X книги Коддингтон и Левинсон [1]

Здесь мы рассмотрели задачу с краевыми условиями, которые задаются на концах интервала $[a, b]$. Представляют также интерес задачи с краевыми условиями в произвольных n точках интервала $[a, b]$. По поводу этих, так называемых n-точечных задач см., например, главу IV книги Сансоне [1]. Отметим, что n-точечная задача является частным случаем обобщенной краевой задачи, сформулированной в конце п. 4°.

§ 2. Собственные значения и собственные функции дифференциального оператора

1. Определение собственного значения и собственной функции. Число λ называется *собственным значением* оператора L, если в области определения $\mathfrak{D}$ оператора L существует функция $y \not\equiv 0$, такая, что

$$Ly = \lambda y. \tag{1}$$

Эта функция y называется *собственной функцией оператора L, соответствующей собственному значению λ.*

Пусть $l(y)$ и

$$U_1(y) = 0, \ \ldots, \ U_m(y) = 0 \tag{2}$$

— дифференциальное выражение и краевые условия, порождающие оператор L. Так как собственная функция y должна принадлежать области определения оператора L, то она должна удовлетворять условиям (2). Кроме того, $Ly = l(y)$, следовательно, из (1) имеем

$$l(y) = \lambda y. \tag{3}$$

Таким образом:

Собственные значения оператора L суть те значения параметра λ, при которых однородная краевая задача

$$l(y) = \lambda y, \quad U_\nu(y) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, m, \tag{4}$$

имеет нетривиальные решения, эти нетривиальные решения являются соответствующими собственными функциями.

Линейная комбинация собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению λ, есть также собственная функция, соответствующая λ. Действительно, если

$$Ly_1 = \lambda y_1 \ \text{ и } \ Ly_2 = \lambda y_2,$$

то также

$$L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda (c_1 y_1 + c_2 y_2)$$

при любых постоянных c_1, c_2.

Так как однородное уравнение (3) при данном λ имеет не более n линейно независимых решений, то отсюда следует, что *совокупность всех собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, есть конечномерное пространство размерности $\leqslant n$.* Размерность этого пространства есть просто число линейно независимых решений краевой задачи (4) при данном собственном значении λ; это число называется *кратностью* собственного значения.

Найдем условия, определяющие собственные значения. Обозначим через

$$y_1(x, \lambda), \quad y_2(x, \lambda), \ \ldots, \ y_n(x, \lambda) \tag{5}$$

фундаментальную систему решений дифференциального уравнения (3), определенную начальными условиями

$$y_j^{(\nu-1)}(a, \lambda) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j \neq \nu, \\ 1 & \text{при} \quad j = \nu, \end{cases} \tag{6}$$
$$j, \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Из общих теорем о решениях линейных дифференциальных уравнений вытекает, что для любого фиксированного значения x из $[a, b]$ функции (5) будут целыми аналитическими функциями параметра λ.

Согласно результатам n° 4 § 1 краевая задача (4) тогда и только тогда имеет нетривиальное решение, когда ранг r матрицы

$$\mathfrak{U} = \begin{pmatrix} U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) \\ \cdot & \cdot \ \cdot \ \cdot \ \cdot & \cdot \\ U_m(y_1) & \ldots & U_m(y_n) \end{pmatrix}$$

меньше n.

Если $m < n$, то и $r < n$; в этом случае краевая задача (4) имеет нетривиальное решение при любом значении λ.

Следовательно, *при $m < n$ любое значение λ является собственным.*

Если $m \geqslant n$, то ранг матрицы $\mathfrak{U}$ будет меньше n тогда и только тогда, когда все определители n-го порядка матрицы $\mathfrak{U}$ равны нулю. Но каждый из этих определителей есть целая аналитическая функция от λ. Поэтому возможны только следующие случаи:

1°. *Все определители n-го порядка матрицы $\mathfrak{U}$ тождественно равны нулю. В этом случае любое значение λ по-прежнему является собственным.*

2°. *Хотя бы один из определителей n-го порядка матрицы $\mathfrak{U}$ не является тождественным нулем.* В этом случае собственными значениями могут быть лишь нули этого определителя и притом те, для которых обращаются в нуль все остальные определители n-го порядка матрицы $\mathfrak{U}$.

Но целая функция, не равная нулю, имеет не более счетного числа нулей (и может их вовсе не иметь), которые при этом не имеют конечной предельной точки. Следовательно, *в случае 2° оператор L имеет не более счетного числа собственных значений* (и может их вовсе не иметь), *которые при этом не могут иметь конечной предельной точки.*

Объединяя все эти случаи, мы получаем следующую альтернативу:

I. *Для всякого дифференциального оператора L имеют место только следующие две возможности.*

1°. *Всякое число λ есть собственное значение оператора L.*

2°. *Множество собственных значений оператора L не более чем счетно (в частности, оно может быть пустым) и не имеет конечных предельных точек.*

Наибольший интерес представляет случай $m=n$. В дальнейшем, если это специально не оговорено, мы будем рассматривать только этот случай.

Положим при $m=n$

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ U_n(y_1) & \ldots & U_n(y_n) \end{vmatrix}. \tag{7}$$

В силу предыдущего $\Delta(\lambda)$ — целая аналитическая функция переменного λ. Она называется *характеристическим определителем* оператора L (а также краевой задачи $Ly=0$).

Предыдущие рассуждения приводят в этом случае к следующим предложениям:

II. *Собственные значения оператора L суть нули функции $\Delta(\lambda)$. Если функция $\Delta(\lambda)$ тождественно равна нулю, то всякое число λ есть собственное значение оператора L.*

Если функция $\Delta(\lambda)$ не обращается тождественно в нуль, то оператор L имеет не более счетного числа собственных значений, которые при этом не могут иметь конечной предельной точки.

Если, в частности, функция $\Delta(\lambda)$ не имеет нулей, то оператор L не имеет собственных значений.

Собственное значение λ может быть кратным нулем функции $\Delta(\lambda)$.

III. *Если λ_0 есть нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$ кратности ν, то кратность собственного значения λ_0 не превосходит ν* *).

Доказательство. Пусть r — ранг матрицы определителя $\Delta(\lambda_0)$; тогда кратность собственного значения λ_0 есть $n-r$. С другой стороны, из известного правила дифференцирования определителей вытекает, что при $\lambda=\lambda_0$ все производные определителя $\Delta(\lambda)$ до $(n-r-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль. Так как λ_0 — нуль кратности ν, то отсюда заключаем, что $n-r-1\leqslant\nu-1$; следовательно, $n-r\leqslant\nu$.

Если, в частности, $\nu=1$, то $n-r\leqslant 1$; с другой стороны, $n-r\geqslant 1$, ибо $\Delta(\lambda_0)=0$; следовательно, $n-r=1$. Мы приходим к следующему результату:

---

*) Более точная спектральная характеристика числа ν дается в предложении VI n° 3 (см стр 29)

IV. *Если λ_0 есть простой нуль характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, то кратность собственного значения λ_0 оператора L равна единице.*

Собственное значение называется *простым*, если оно является *простым* нулем характеристического определителя $\Delta(\lambda)$.

2. Различные обобщения задачи о собственных значениях. В приложениях встречаются иногда более общие задачи о собственных значениях линейного дифференциального оператора. Рассмотрим, например, следующий случай.

Коэффициенты линейного дифференциального выражения $l(y)$ и, возможно, краевых условий $U_\nu(y)=0$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, зависят от некоторого комплексного параметра λ. Определить те значения λ, для которых краевая задача

$$l(y)=0,\quad U_\nu(y)=0,\quad \nu=1, 2, \ldots, n, \tag{8}$$

имеет нетривиальное решение y.

Эти значения параметра λ называются *собственными значениями краевой задачи* (8), а соответствующие нетривиальные решения y — ее *собственными функциями.*

Рассуждая так же, как и в n° 1, строим характеристический определитель $\Delta(\lambda)$ по формуле (7); *собственными значениями будут нули определителя* $\Delta(\lambda)$.

Если коэффициенты выражения $l(y)$ и краевых условий будут аналитическими функциями параметра λ, регулярными в некоторой области $\mathfrak{G}$ λ-плоскости, то и определитель $\Delta(\lambda)$ будет аналитической функцией λ, регулярной в области $\mathfrak{G}$. Поэтому имеют место следующие две возможности:

1°. $\Delta(\lambda)\equiv 0$ *в области* $\mathfrak{G}$; тогда каждое число $\lambda\in\mathfrak{G}$ есть собственное значение.

2°. $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$; *тогда в области $\mathfrak{G}$ существует не более счетного числа собственных значений, не имеющих предельных точек внутри области $\mathfrak{G}$.*

Если, в частности, коэффициенты выражения $l(y)$ и форм $U_\nu(y)$ — целые аналитические функции λ, то и $\Delta(\lambda)$ — целая функция; следовательно, в этом случае остаются справедливыми предложения, сформулированные в конце n° 2. Наиболее часто встречается тот случай, когда $l(y)=l_1(y)+\lambda l_2(y)$, где $l_1(y)$ и $l_2(y)$, а также формы $U_\nu(y)$ от λ не зависят. В этом случае коэффициенты выражения $l(y)$ являются линейными (следовательно, целыми) функциями параметра λ. Следовательно, и в этом случае справедливы предложения, сформулированные в n° 1.

Отметим следующий важный частный случай обобщенной задачи о собственных значениях:

$$l_1(y)+\lambda l_2(y)=0,\qquad U_\nu(y)=0,\ \nu=1, 2, \ldots, n,$$

где l_1, l_2 — самосопряженные дифференциальные выражения, а $U_\nu(y)=0$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, — самосопряженные краевые условия по отношению к каждому из дифференциальных выражений $l_1(y)$, $l_2(y)$. Эту задачу подробно рассмотрел Э. Камке (см. Камке [1–3]).

3. Присоединенные функции. Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$l(y)=0,\quad U_\nu(y)=0,\quad \nu=1, 2, \ldots, n,$$

в которой коэффициенты дифференциального выражения $l(y)$ и форм $U_\nu(y)$ являются аналитическими функциями параметра λ. Пусть λ_0 — собственное значение, а $\varphi(x)$ — соответствующая собственная функция этой задачи. Система функций $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_k(x)$ называется *цепочкой функций, присоединенных к собственной функции* $\varphi(x)$, если функции $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$, где $\varphi_0 = \varphi$, удовлетворяют при $\lambda = \lambda_0$ дифференциальным уравнениям

$$l(\varphi_q) + \frac{1}{1!}\frac{\partial l}{\partial\lambda}(\varphi_{q-1}) + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q l}{\partial\lambda^q}(\varphi_0) = 0, \quad q = 0, \ldots, k \tag{9}$$

и краевым условиям

$$U_\nu(\varphi_q) + \frac{1}{1!}\frac{\partial U_\nu}{\partial\lambda}(\varphi_{q-1}) + \ldots + \frac{1}{q!}\frac{\partial^q U_\nu}{\partial\lambda^q}(\varphi_0) = 0, \tag{10}$$

$$q = 0, \ldots, k, \ \nu = 1, \ldots, n.$$

Здесь $\dfrac{\partial^q l}{\partial\lambda^q}$ обозначает дифференциальное выражение, а $\dfrac{\partial^q U_\nu}{\partial\lambda^q}$ обозначает краевую форму с коэффициентами, равными производным порядка q по переменной λ от соответствующих коэффициентов l и U_ν.

Лемма А. *Пусть при* $a \leqslant x \leqslant b$ *функция* $\Phi(x, \lambda)$ *разлагается в степенной ряд*

$$\Phi(x, \lambda) = \varphi_0(x) + \varphi_1(x)(\lambda - \lambda_0) + \varphi_2(x)(\lambda - \lambda_0)^2 + \ldots, \tag{11}$$

сходящийся в некоторой окрестности точки λ_0. *Для того чтобы функции* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *удовлетворяли уравнениям* (9) *и* (10), *необходимо и достаточно, чтобы* λ_0 *было при* $a \leqslant x \leqslant b$ *нулем кратности* $> k$ *каждой из функций* $l(\Phi)$ *и* $U_1(\Phi), \ldots, U_n(\Phi)$.

Доказательство. Левая часть (9) равна коэффициенту при $(\lambda - \lambda_0)^q$ в разложении $l(\Phi)$ по степеням $\lambda - \lambda_0$; аналогично обстоит дело с левой частью (10).

Лемма Б. *Пусть функции* $\varphi_0, \ldots, \varphi_k$ *удовлетворяют уравнению* (9), *а функция* $\Phi(x, \lambda)$ *определяется формулой* (11). *Если* $y(x, \lambda)$ — *решение уравнения* $l(y) = 0$ $(a \leqslant x \leqslant b)$, *удовлетворяющее при* $x = a$ *тем же начальным условиям, что и функция* $\Phi(x, \lambda)$, *то в разложениях функций* $y(x, \lambda)$ *и* $\Phi(x, \lambda)$ *по степеням* $\lambda - \lambda_0$ *первые* $k + 1$ *членов совпадают.*

Доказательство. По условию

$$\left.\begin{aligned} &l(y(x, \lambda)) = 0, \\ &y^{(q)}(a, \lambda) = \Phi^{(q)}(a, \lambda), \quad q = 0, \ldots, n-1. \end{aligned}\right\} \tag{12}$$

Так как $\Phi^{(q)}(a, \lambda_0) = \varphi_0^{(q)}(a)$, то в силу теоремы единственности для решений дифференциальных уравнений, $y(x, \lambda_0) = \varphi_0(x)$. Совпадение следующих коэффициентов разложений доказывается аналогичным способом с помощью соотношений, получаемых из (12) дифференцированием по λ.

Следствие. *Пусть функция* $y(x, \lambda)$ *удовлетворяет условиям леммы* Б *и, кроме того,* $\varphi_0, \varphi_1, \ldots, \varphi_k$ *удовлетворяют условиям* (9) *и* (10). *Тогда* λ_0 *является нулем кратности* $> k$ *каждой из функций* $U_1(y), \ldots, U_n(y)$.

Будем говорить, что собственная функция $\varphi_0(x)$ имеет *кратность* m_0, если существует цепочка из присоединенных к ней функций, состоящая из $m_0 - 1$ функций, но нет такой цепочки, состоящей из m_0 функций.

V. *Если* λ_0 — *нуль функции* $\Delta(\lambda)$ *кратности* m, *то кратность любой собственной функции, отвечающей* λ_0, *не превосходит* m.

Доказательство. Пусть $\varphi_0(x)$ — собственная функция (отвечающая λ_0) кратности m_0, $k = m_0 - 1$ и $\varphi_1(x), \ldots, \varphi_k(x)$ — соответствующая цепочка присоединенных функций. Положим $y_1(x, \lambda) = y(x, \lambda)$, где $y(x, \lambda)$ —

функция, удовлетворяющая условиям леммы Б. Обозначим через $y_2(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda)$, какие-либо функции, образующие вместе с $y_1(x, \lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения $l(y) = 0$ в окрестности точки $\lambda = \lambda_0$. В силу предыдущего следствия λ_0 будет нулем кратности $> k$ соответствующего определителя $\Delta(\lambda)$ (см. (7)). Следовательно, $k < m$, т е. $m_0 \leqslant m$.

Пусть теперь φ_1 — собственная функция максимальной кратности; φ_2 — собственная функция максимальной кратности среди собственных функций, линейно независимых от φ_1; вообще φ_j — собственная функция максимальной кратности среди собственных функций, линейно независимых от $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{j-1}$. Очевидно, что общее число таких функций равно кратности p собственного значения λ_0. Обозначим через m_j кратность собственной функции φ_j, а через

$$\varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \ldots, \varphi_{j, m_j-1}$$

— соответствующую цепочку присоединенных функций. Из самого определения чисел m_j вытекает, что

$$m_1 \geqslant m_2 \geqslant \ldots \geqslant m_p.$$

Полученная система функций

$$\varphi_j, \varphi_{j1}, \varphi_{j2}, \ldots, \varphi_{j, m_j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

называется *канонической системой собственных и присоединенных функций*.

VI. *Сумма кратностей* $m_1 + m_2 + \ldots + m_p$ *равна кратности нуля* λ_0 *функции* $\Delta(\lambda)$.

$$m_1 + m_2 + \ldots + m_p = m.$$

Доказательство. Пусть $y_i(x, \lambda)$ — решения уравнения $l(y) = 0$, удовлетворяющие при $x = a$ тем же начальным условиям, что и функция

$$\varphi_i(x) + \varphi_{i1}(x)(\lambda - \lambda_0) + \ldots + \varphi_{im_i-1}(x)(\lambda - \lambda_0)^{m_i-1},$$

$i = 1, \ldots, p$, и пусть функции $y_{p+1}(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda)$ образуют вместе с $y_1(x, \lambda), \ldots, y_p(x, \lambda)$ фундаментальную систему решений уравнения $l(y) = 0$ в окрестности точки λ_0. При помощи функции $y_1(x, \lambda), \ldots, y_n(x, \lambda)$ образуем определитель $\Delta(\lambda)$. Так как в силу следствия из лемм А и Б λ_0 является нулем кратности $\geqslant m_i$ элементов i-го столбца определителя $\Delta(\lambda)$ при $i = 1, \ldots, p$, то $m \geqslant m_1 + \ldots + m_p$, где m — кратность λ_0 как корня $\Delta(\lambda)$. Для доказательства обратного неравенства положим

$$\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_1 + \ldots + m_p} \Delta_1(\lambda)$$

и предположим, что, вопреки нашему утверждению, $\Delta_1(\lambda_0) = 0$. Тогда существует такое j, что столбец с номером j определителя $\Delta_1(\lambda_0)$ является линейной комбинацией столбцов с номером $> j$. Обозначим через $\alpha_{j+1}, \ldots, \alpha_n$ соответствующие коэффициенты этой линейной комбина ии и положим

$$y(x, \lambda) = y_j(x, \lambda) - \sum_{i > j} \alpha_i \tilde{y}_i(x, \lambda),$$

где

$$\tilde{y}_i(x, \lambda) = (\lambda - \lambda_0)^{m_j - m_i} y_i(x, \lambda), \quad i > j;$$

при этом мы считаем, что $m_i = 0$ для $i > p$. При таком определении функции $y(x, \lambda)$ число λ_0 является нулем любой кратности функции $l(y(x, \lambda))$ (эта функция тождественно равна нулю) и корнем кратности $\geqslant m_j + 1$ функции $U_\nu(y)$, $\nu = 1, \ldots, n$. Следовательно, в силу леммы А $y(x, \lambda_0)$ является собственной функцией кратности $\geqslant m_j + 1$. При $j \leqslant p$ это противоречит тому, что собственные функции, линейно независимые от $\varphi_1, \ldots, \varphi_{j-1}$, имеют кратность $\leqslant m_j$. При $j > p$ это означает, что имеется собственная функция, линейно независимая от $\varphi_1, \ldots, \varphi_p$, что тоже невозможно.

Предложение VI означает, что каноническая система собственных и присоединенных функций порождает подпространство, размерность которого равна кратности корня λ_0 определителя $\Delta(\lambda)$ (ибо легко видеть, что собственные и присоединенные функции канонической системы линейно независимы), так что присоединенные функции дополняют множество собственных функций до пространства нужной размерности.

Теория присоединенных функций является аналогом теории элементарных делителей линейных операторов в конечномерном пространстве (см., Гельфанд [1]). Приведенная здесь теория присоединенных функций принадлежит М. В. Келдышу (см. Келдыш [1]).

4. Соотношение между собственными значениями и собственными функциями сопряженных операторов *).

Теорема 1. *Если λ — собственное значение оператора L кратности p, то $\bar{\lambda}$ — собственное значение сопряженного оператора L^* той же кратности p.*

Доказательство. Пусть оператор L порождается дифференциальным выражением $l(y)$ и условиями

$$U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, m,$$

а оператор L^* — выражением $l^*(y)$ и условиями

$$V_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Положим

$$l_1(y) = l(y) - \lambda y;$$

тогда

$$l_1^*(y) = l^*(y) - \bar{\lambda} y.$$

Если λ — собственное значение оператора L кратности p, то краевая задача

$$l_1(y) = 0, \ U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

имеет p линейно независимых решений.

В силу результатов n° 7 § 1 (предложение VII) отсюда следует, что сопряженная краевая задача

$$l_1^*(y) = 0, \ V_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

также имеет p линейно независимых решений. Это означает, что $\bar{\lambda}$ есть собственное значение оператора L^* кратности p.

Две функции $y(x)$ и $z(x)$ называются *ортогональными*, если **) $(y, z) = 0$.

*) Напоминаем, что теперь рассматривается только случай $m = n$.

**) Напоминаем, что (y, z) обозначает интеграл $\int_a^b y(x)\overline{z(x)}\,dx$.

Теорема 2. *Собственные функции операторов L и L^*, соответствующие собственным значениям λ и μ соответственно, ортогональны, если $\lambda \neq \bar{\mu}$.*

Доказательство. Пусть y — собственная функция оператора L, соответствующая собственному значению λ, а z — собственная функция оператора L^*, соответствующая собственному значению μ. Это значит, что

$$Ly = \lambda y$$

и

$$L^* z = \mu z.$$

Отсюда

$$(Ly, z) = (\lambda y, z) = \lambda (y, z),$$

$$(y, L^* z) = (y, \mu z) = \bar{\mu} (y, z).$$

Но $(Ly, z) = (y, L^* z)$ (см. (20) n° 6 § 1); поэтому, вычитая почленно предыдущие два равенства, получим

$$(\lambda - \bar{\mu})(y, z) = 0.$$

При $\lambda \neq \bar{\mu}$ отсюда следует, что $(y, z) = 0$, т. е. функции y и z ортогональны.

5. Собственные значения и собственные функции самосопряженного оператора.

Теорема 3. *Все собственные значения самосопряженного оператора действительны.*

Доказательство. Если L — самосопряженный оператор, то $(Ly, z) = (y, Lz)$; в частности,

$$(Ly, y) = (y, Ly).$$

С другой стороны, $(y, Ly) = \overline{(Ly, y)}$; следовательно, (Ly, y) есть действительное число.

Пусть теперь λ — собственное значение оператора L, а y — соответствующая собственная функция. Тогда из равенства $Ly = \lambda y$ следует, что $(Ly, y) = \lambda (y, y)$. Так как $(y, y) > 0$, а (Ly, y) — действительное число, то и

$$\lambda = \frac{(Ly, y)}{(y, y)}$$

— действительное число.

Из теорем 2 и 3 получаем

Следствие. *Собственные функции самосопряженного оператора, соответствующие различным собственным значениям, ортогональны.*

Собственные функции, соответствующие одному и тому же собственному значению, можно также выбрать взаимно ортогональными. Для этого достаточно в подпространстве всех собственных функций, соответствующих одному и тому же собственному значению, выбрать ортогональный базис. В результате мы получим ортогональную систему собственных функций оператора L.

6. Примеры задач на собственные значения.

1) $$-y'' = \lambda y; \quad y(0) = y(1); \quad y'(0) = y'(1). \tag{13}$$

Общее решение дифференциального уравнения:

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x.$$

Подставляя в краевые условия, легко найдем, что собственными значениями будут

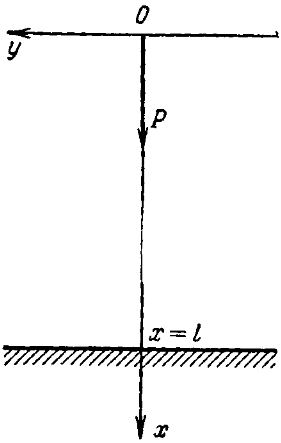

Рис. 1.

$$\lambda_n = (2n\pi)^2, \quad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

При $n \neq 0$ собственному значению λ_n отвечают две линейно независимые собственные функции

$$\cos(2n\pi x), \quad \sin(2n\pi x);$$

следовательно, λ_n при $n \neq 0$ есть двукратное собственное значение. При $n = 0$ собственному значению $\lambda_0 = 0$ отвечает с точностью до постоянного множителя только одна собственная функция $y \equiv 1$; следовательно, это собственное значение однократно.

2) Продольный изгиб стержня с одним зажатым и вторым свободным концом. Рассмотрим стержень длины l, один конец которого $x = l$ (рис. 1) зажат, а второй $x = 0$ свободен. К свободному концу $x = 0$ приложена сжимающая сила P, направленная вдоль оси стержня.

Известно, что при достаточно малых значениях P прямолинейная форма стержня является устойчивой.

Однако существует такое критическое значение P_0 силы P, что при $P > P_0$ прямолинейная форма стержня неустойчива и стержень изгибается.

Рассмотрим начало этого изгиба; другими словами, рассмотрим положение равновесия, мало отличающееся от прямолинейного (рис. 2).

Тогда уравнение изогнутой оси стержня $y = y(x)$ имеет вид

$$Py = -EIy'', \tag{14}$$

где I — аксиальный момент сечения стержня, E — модуль Юнга.

Действительно, левая и правая части уравнения представляют изгибающий момент в сечении стержня на расстоянии x от начала (см., например, Тимошенко [1]).

Рассмотрим наиболее простой случай однородного стержня постоянного сечения; тогда $EI = \mathrm{const}$. Полагая $\lambda = \frac{P}{EI}$, получим уравнения

$$-y'' = \lambda y. \qquad (15)$$

Из чертежа видно, что функция $y(x)$ удовлетворяет условиям

$$y(0) = 0, \quad y'(l) = 0. \qquad (16)$$

Мы приходим к задаче (15), (16) о собственных значениях. Подставляя в условия (16) общее решение

$$y = A\cos\sqrt{\lambda}\,x + B\sin\sqrt{\lambda}\,x$$

уравнения (15), найдем, что $A = 0$, $\cos\sqrt{\lambda}\,l = 0$. Отсюда

$$\lambda = \left(\frac{2n-1}{2l}\pi\right)^2, \quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

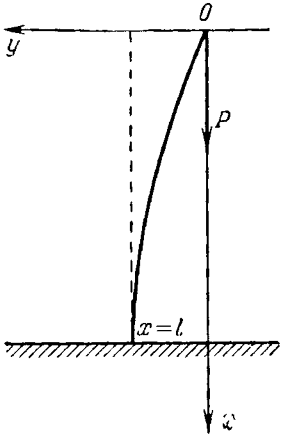

Рис. 2

Эти собственные значения простые и им соответствуют собственные функции

$$y(x) = B\sin\frac{2n-1}{2l}\pi x.$$

Собственным значениям соответствуют критические нагрузки

$$P_n = EI\left(\frac{2n-1}{2l}\right)^2,$$

а собственные функции определяют с точностью до множителя соответствующие формы равновесия стержня (рис. 3).

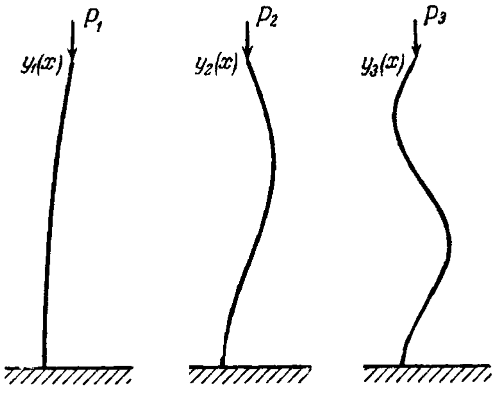

Рис. 3.

В случае стержня с переменным сечением (или неоднородного стержня) EI есть функция от x. Полагая $1/(EI) = \rho(x)$, придем к следующей задаче о собственных значениях:

$$-y'' = P\rho(x)\,y, \quad y(0) = 0, \quad y'(l) = 0.$$

В общем случае произвольной функции $\rho(x)$ возможно только приближенное вычисление собственных значений и собственных функций.

3) Продольный изгиб стержня с одним зажатым и вторым шарнирно закрепленным концом. В этом случае в точке $x = 0$ появляется горизонтальная сила реакции H (рис. 4). Поэтому изгибающий момент $M = Py - Hx = -EIy''$. Дифференцируя два раза это равенство, получаем:

$$(EIy'')'' = -Py''. \tag{17}$$

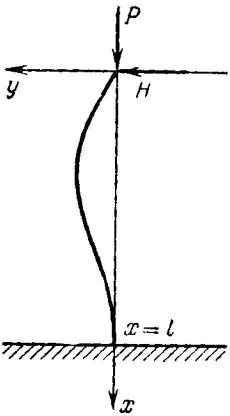

Рис. 4.

При этом функция $y(x)$ должна удовлетворять краевым условиям

$$y(0) = 0, \quad y''(0) = 0, \quad y(l) = 0, \quad y'(l) = 0. \tag{18}$$

Действительно, первое и третье условия очевидны; второе означает, что в точке $x = 0$ изгибающий момент равен нулю, ибо закрепление в этой точке шарнирно; последнее условие следует из того, что конец $x = l$ зажат, следовательно, касательная совпадает с осью Ox.

Мы приходим к обобщенной задаче (17), (18) о собственных значениях.

Пусть, например, $EI = \mathrm{const}$; положим $P : EI = k^2$; кроме того, положим для простоты $l = 1$. Тогда уравнение (17) перепишется в виде

$$y^{\mathrm{IV}} = -k^2 y''. \tag{19}$$

Его общий интеграл при $k \neq 0$ имеет вид

$$y = A + Bx + C\cos kx + D\sin kx. \tag{20}$$

Из краевых условий (18) легко следует, что $A = C = 0$ и что собственные значения суть корни уравнения

$$\operatorname{tg} k = k.$$

Они определяются как абсциссы точек пересечения кривых (рис. 5)

$$y = \operatorname{tg} x \quad \text{и} \quad y = x.$$

Эти собственные значения простые; им соответствуют собственные функции

$$y = \sin kx - x\sin k.$$

При $k=0$ общим интегралом дифференциального уравнения будет

$$y = A + Bx + Cx^2 + Dx^3. \tag{21}$$

Легко видеть, что краевые условия (18) удовлетворяются лишь при $A=B=C=D=0$; следовательно, $k=0$ не является собственным значением.

4) $y^{IV} = -k^2y''; \quad y''(0) = y'''(0) = y(1) = y'(1) = 0.$

Если $k=0$, то общий интеграл (21) дифференциального уравнения удовлетворяет этим краевым условиям лишь при $A=B=C=D=0$. Если $k \neq 0$, то общий интеграл (20) дифференциального уравнения также удовлетворяет этим краевым условиям лишь при $A=B=C=D=0$. Следовательно, *рассматриваемая задача не имеет собственных значений.*

5) $y^{IV} = -k^2y'';$

$y(0) = y'(0) = y''(0) = y(1) = 0.$ Как и выше, убеждаемся в том, что $k=0$ не является собственным значением. Подставляя при $k \neq 0$ общий интеграл (20) дифференциального уравнения в краевые условия, получим

$$\sin k = k.$$

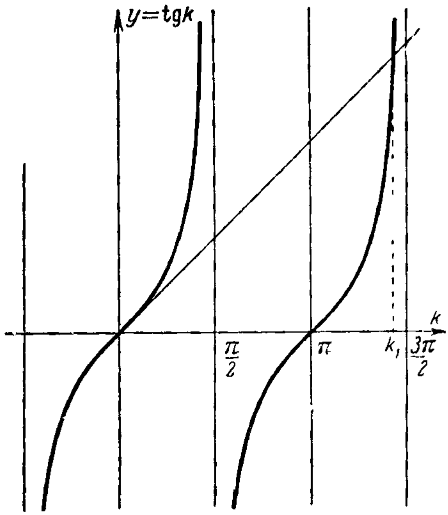

Рис. 5.

Это уравнение имеет только комплексные корни, отличные от $k=0$. Следовательно, *рассматриваемая задача имеет только комплексные собственные значения.*

6) Собственные колебания закрепленной струны. Уравнение свободных малых поперечных колебаний струны имеет вид

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \tag{22}$$

где $u = u(x, t)$ — смещение точки струны с абсциссой x в момент t и a — некоторая константа.

Собственными колебаниями струны называются решения уравнения (22) вида

$$u = u(x, t) = y(x)\sin(a\omega t + \varphi). \tag{23}$$

Подставляя в (22), получим, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$y'' + \omega^2 y = 0. \tag{24}$$

Если длина струны равна единице, то (рис. 6) условие закрепления на концах запишется в виде

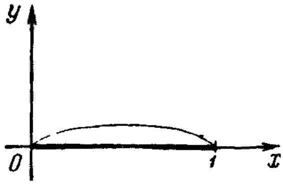

Рис. 6.

$$y(0) = y(1) = 0. \tag{25}$$

Мы приходим к задаче (24), (25) о собственных значениях.

Подставляя в краевые условия (25) общий интеграл

$$y = A\cos\omega x + B\sin\omega x$$

уравнения (24), получим $A = 0$, $\sin\omega = 0$. Отсюда

$$\omega = n\pi, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Таким образом, собственными значениями будут

$$\omega_n^2 = (n\pi)^2, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots$$

Эти собственные значения простые и им соответствуют собственные функции

$$y_n(x) = B_n \sin n\pi x.$$

В рассматриваемом случае собственные значения и собственные функции имеют простое механическое значение. С точностью до постоянного множителя собственные значения суть квадраты частот, а собственные функции — амплитудные функции собственных колебаний.

Одним из главных источников задач на собственные значения являются смешанные задачи для дифференциальных уравнений в частных производных (см. гл. II, § 5, n° 1). Если такая смешанная задача допускает «отделение переменных», то ей может быть поставлена в соответствие «спектральная» задача на собственные значения. В частности, если дифференциальное уравнение и краевые условия смешанной задачи содержат дифференцирование не только по пространственной координате, но и по времени t, то соответствующая спектральная задача будет обобщенной задачей на собственные значения в смысле n° n° 2 и 3. По поводу общих принципов построения спектральных задач см., например, Расулов [1].

§ 3. Функция Грина линейного дифференциального оператора

1. Общее определение обратного оператора. Оператор B называется *обратным по отношению к оператору**) A, если область определения $\mathfrak{D}_B$ оператора B совпадает с областью

*) A и B здесь не предполагаются линейными.

значений $\mathfrak{R}_A$ оператора A и если для всех $x \in \mathfrak{D}_A$

$$B(Ax) = x.$$

Обратный оператор обозначается через A^{-1}. Следовательно, для любого $x \in \mathfrak{D}_A$

$$A^{-1}(Ax) = x. \tag{1}$$

I. *Если оператор A имеет обратный, то и оператор A^{-1} имеет обратный, причем*

$$(A^{-1})^{-1} = A.$$

Действительно, равенство (1) показывает, что область значений $\mathfrak{R}_{A^{-1}}$ оператора A^{-1} совпадает с областью определения $\mathfrak{D}_A$ оператора A. Далее, применяя оператор A к обеим частям (1) и полагая $y = Ax$, получаем

$$AA^{-1}y = y \tag{2}$$

для всех $y \in \mathfrak{R}_A = \mathfrak{D}_{A^{-1}}$. Это как раз и означает, что A обратен к A^{-1}.

II. *Если оператор A линеен и A^{-1} существует, то A^{-1} линеен.*

Действительно, если $y_1, y_2 \in \mathfrak{D}_{A^{-1}} = \mathfrak{R}_A$, то

$$A(\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2) = \alpha_1 AA^{-1}y_1 + \alpha_2 AA^{-1}y_2 = \alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2;$$

поэтому $\alpha_1 A^{-1}y_1 + \alpha_2 A^{-1}y_2 = A^{-1}(\alpha_1 y_1 + \alpha_2 y_2)$.

III. *Оператор A имеет обратный тогда и только тогда, когда уравнение*

$$Ax = 0 \tag{3}$$

имеет единственное «тривиальное» решение $x = 0$.

Пусть оператор A имеет обратный A^{-1}. Применяя A^{-1} к обеим частям (3), получим $x = 0$; следовательно, условие необходимо. Пусть, обратно, оно выполнено. Тогда при любом $y \in \mathfrak{R}_A$ уравнение

$$Ax = y \tag{4}$$

имеет единственное решение $x \in \mathfrak{D}_A$. Действительно, в силу условия $y \in \mathfrak{R}_A$ такое решение существует. Оно единственно, ибо если также $Ax' = y$, то $A(x - x') = 0$. По условию последнее равенство возможно лишь при $x - x' = 0$, т. е. при $x = x'$. Каждому элементу $y \in \mathfrak{R}_A$ поставим в соответствие решение x уравнения (4). Легко видеть, что это соответствие есть оператор, обратный к оператору A.

2. Задача обращения дифференциального оператора. Пусть L — дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y$$

и краевыми условиями

$$U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Предположим, что соответствующая однородная краевая задача $Ly = 0$ имеет только тривиальное решение $y = 0$. Это означает, что для любой фундаментальной системы решений y_1, $y_2, \ldots, y_n$ уравнения $l(y) = 0$ ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \ldots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \ldots & U_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \ldots & U_n(y_n) \end{pmatrix}$$

равен n, следовательно,

$$\det \| U_i(y_j) \|_{i,\, j=1,\, 2,\, \ldots,\, n} \neq 0. \tag{5}$$

Тогда в силу III п.°1 оператор L имеет обратный L^{-1}, область определения которого совпадает с областью значений оператора L. Наша задача — найти явный вид оператора L^{-1}. Мы увидим, что L^{-1} есть интегральный оператор с непрерывным ядром; это ядро называется *функцией Грина* оператора L. Ниже будет дано явное выражение для функции Грина.

3. Построение функции Грина. *Функцией Грина* оператора L называется функция $G(x, \xi)$, удовлетворяющая следующим условиям:

1°. *$G(x, \xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно для всех значений x и ξ из интервала $[a, b]$.*

2°. *При любом фиксированном ξ из интервала $[a, b]$ функция $G(x, \xi)$ имеет непрерывные производные $(n-1)$-го и n-го порядка по x в каждом из интервалов $[a, \xi)$* и *$(\xi, b]$, причем производная $(n-1)$-го порядка имеет при $x = \xi$ скачок $\frac{1}{p_0(\xi)}$:*

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi + 0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi - 0, \xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

3°. *В каждом из интервалов* $[a, \xi)$ *и* $(\xi, b]$ *функция* $G(x, \xi)$, *рассматриваемая как функция от* x, *удовлетворяет уравнению* $l(G)=0$ *и краевым условиям* $U_\nu(G)=0$, $\nu=1, 2, \ldots, n$.

Теорема 1. *Если краевая задача* $Ly=0$ *имеет лишь тривиальное решение, то оператор* L *имеет одну и только одну функцию Грина.*

Доказательство. Пусть $y_1, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения уравнения $l(y)=0$. Так как в интервале $[a, \xi)$ функция G удовлетворяет этому же уравнению, то должно быть

$$G(x, \xi) = a_1 y_1(x) + \ldots + a_n y_n(x) \quad \text{при} \quad a \leqslant x < \xi,$$

где $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — некоторые функции от ξ, аналогично

$$G(x, \xi) = b_1 y_1(x) + \ldots + b_n y_n(x) \quad \text{при} \quad \xi < x \leqslant b.$$

Условия непрерывности функции $G(x, \xi)$ и ее первых $n-2$ производных при $x=\xi$ дают

$$[a_1 y_1(\xi) + \ldots + a_n y_n(\xi)] - [b_1 y_1(\xi) + \ldots + b_n y_n(\xi)] = 0,$$
$$[a_1 y_1'(\xi) + \ldots + a_n y_n'(\xi)] - [b_1 y_1'(\xi) + \ldots + b_n y_n'(\xi)] = 0,$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$[a_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + a_n y_n^{(n-2)}(\xi)] - [b_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + b_n y_n^{(n-2)}(\xi)] = 0,$$

а условие $\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi+0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi-0, \xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}$ запишется в виде

$$[a_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + a_n y_n^{(n-1)}(\xi)] - [b_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + b_n y_n^{(n-1)}(\xi)] = -\frac{1}{p_0(\xi)}.$$

Положим

$$c_\nu = b_\nu - a_\nu; \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n;$$

тогда эти условия запишутся в виде системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} c_1 y_1(\xi) + \ldots + c_n y_n(\xi) &= 0, \\ c_1 y_1'(\xi) + \ldots + c_n y_n'(\xi) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots&\cdots\cdots \\ c_1 y_1^{(n-2)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-2)}(\xi) &= 0, \\ c_1 y_1^{(n-1)}(\xi) + \ldots + c_n y_n^{(n-1)}(\xi) &= \frac{1}{p_0(\xi)}, \end{aligned}\right\} \qquad (6)$$

определитель которой есть вронскиан фундаментальной системы $y_1, \ldots, y_n$ при $x=\xi$ и, следовательно, отличен от нуля.

Поэтому система (6) однозначно определяет функции c_ν. Для определения функций a_ν и b_ν воспользуемся краевыми условиями; запишем форму $U_\nu(y)$ в виде

$$U_\nu(y) = U_{\nu a}(y) + U_{\nu b}(y), \tag{7}$$

где $U_{\nu a}(y)$ — сумма всех слагаемых, содержащих $y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}$, а $U_{\nu b}(y)$ — сумма всех слагаемых, содержащих $y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}$. Тогда

$$U_\nu(G) = a_1 U_{\nu a}(y_1) + \ldots + a_n U_{\nu a}(y_n) + b_1 U_{\nu b}(y_1) + \ldots + b_n U_{\nu b}(y_n) = 0.$$

Подставляя сюда вместо a_k их выражения $a_k = b_k - c_k$, получим:

$$b_1 U_{\nu b}(y_1) + \ldots + b_n U_{\nu b}(y_n) + \\ + (b_1 - c_1) U_{\nu a}(y_1) + \ldots + (b_n - c_n) U_{\nu a}(y_n) = 0.$$

Отсюда в силу (7)

$$b_1 U_\nu(y_1) + \ldots + b_n U_\nu(y_n) = c_1 U_{\nu a}(y_1) + \ldots + c_n U_{\nu a}(y_n). \tag{8}$$

При $\nu = 1, 2, \ldots, n$ равенство (8) представляет собой систему уравнений относительно $b_1, \ldots, b_n$, определитель которой отличен от нуля, согласно условию (5). Следовательно, система уравнений (8) имеет единственное решение относительно $b_1, b_2, \ldots, b_n$. Но тогда формулы $a_\nu = b_\nu - c_\nu$ однозначно определяют функции a_ν. Тем самым существование и единственность функции Грина доказаны.

4. Обращение дифференциального оператора при помощи функции Грина. Пусть уравнение $Ly = 0$ имеет только тривиальное решение $y = 0$, так что существует обратный оператор L^{-1} (см. n° 1). Если $L^{-1}f = y$, то

$$Ly = f. \tag{9}$$

Это означает, что функция y есть решение уравнения

$$l(y) = f, \tag{10}$$

удовлетворяющее условиям

$$U_\nu(y) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{11}$$

Докажем, что это решение существует для любой функции $f(x)$, непрерывной в интервале $[a, b]$, и определяется при помощи функции Грина. Именно, имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Если уравнение $Ly = 0$ имеет только тривиальное решение, то для любой функции $f(x)$, непрерывной в интервале $[a, b]$, существует решение уравнения $Ly = f$. Это* *решение задается формулой*

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)\,d\xi, \tag{12}$$

где $G(x,\xi)$ — функция Грина оператора L.

Доказательство. Пусть $y(x)$ — функция, определенная формулой (12). Докажем, что эта функция $y(x)$ удовлетворяет условиям (10) и (11), следовательно, есть решение уравнения $Ly=f$. Так как функция $G(x,\xi)$ имеет непрерывные производные до $(n-2)$-го порядка включительно, то в формуле (12) можно $n-2$ раза дифференцировать по x под знаком интеграла. Таким образом,

$$y^{(\nu)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^\nu G(x,\xi)}{\partial x^\nu}f(\xi)\,d\xi,\qquad \nu=1,\,2,\,\ldots,\,n-2, \tag{13}$$

причем функция $y(x)$ и ее производные $y^{(\nu)}(x)$ до $(n-2)$-го порядка включительно непрерывны в интервале $[a,\,b]$. Функция $\frac{\partial^{n-1}G}{\partial x^{n-1}}$ имеет разрыв при $x=\xi$. Поэтому для нахождения производных $y^{(n-1)}(x)$ и $y^{(n)}(x)$ нельзя уже без всяких оговорок дифференцировать под знаком интеграла. Запишем поэтому формулу (13) при $k=n-2$ в виде

$$y^{(n-2)}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)\,d\xi+\int_x^b \frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}f(\xi)\,d\xi.$$

В каждом из интервалов $(a,\,x)$ и $(x,\,b)$ подынтегральная функция и ее производная по x непрерывны; поэтому, дифференцируя по x под знаком интеграла и по верхнему (соответственно нижнему) пределу x, получим

$$y^{(n-1)}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi+\left[\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x-0}f(x)+$$
$$+\int_x^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi-\left[\frac{\partial^{n-2}G(x,\xi)}{\partial x^{n-2}}\right]_{\xi=x+0}f(x). \tag{14}$$

В силу непрерывности производной $\frac{\partial^{n-2}G}{\partial x^{n-2}}$ при $\xi=x$ внеинтегральные члены взаимно уничтожаются и

$$y^{(n-1)}(x)=\int_a^x \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi+\int_x^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi, \tag{15}$$

т. е.

$$y^{(n-1)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}f(\xi)\,d\xi. \tag{16}$$

Дифференцируя формулу (15) еще раз, аналогично предыдущему найдем

$$y^{(n)}(x)=\int_a^x \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}f(\xi)\,d\xi+\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x-0}f(x)+$$
$$+\int_x^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}f(\xi)\,d\xi-\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x+0}f(x) \tag{17}$$

В силу условия 2° в определении функции Грина

$$\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x-0}-\left[\frac{\partial^{n-1}G(x,\xi)}{\partial x^{n-1}}\right]_{\xi=x+0}=\frac{1}{p_0(x)};$$

поэтому формулу (17) можно переписать в виде

$$y^{(n)}(x)=\int_a^b \frac{\partial^n G(x,\xi)}{\partial x^n}f(\xi)\,d\xi+\frac{1}{p_0(x)}f(x). \tag{18}$$

Формы $U_\nu(y)$ содержат только значения функции $y(x)$ и ее производных до $(n-1)$-го порядка включительно при $x=a$ и $x=b$, поэтому из (12), (13) и (16) следует, что

$$U_\nu(y)=\int_a^b U_\nu(G)f(\xi)\,d\xi=0,$$

ибо по определению функции Грина $U_\nu(G)=0$. Тем самым доказано, что функция $y(x)$ удовлетворяет краевым условиям (11).

Докажем, что она удовлетворяет также уравнению $l(y)=f$. Подставляя в $l(y)$ выражения (12), (13), (16) и (18) для функции $y(x)$ и ее производных, найдем, что

$$l(y)=\int_a^b l(G)f(\xi)\,d\xi+f(x).$$

Но интеграл в этой последней формуле равен нулю, ибо по условию функция $G(x,\xi)$, рассматриваемая как функция от x, удовлетворяет однородному уравнению $l(y)=0$ в каждом из интервалов (a,ξ) и (ξ,b). Тем самым теорема 2 доказана.

Оператор A, определенный равенством

$$Af(x)=\int_a^b K(x,\ \xi)f(\xi)\,d\xi,$$

называется *интегральным оператором с ядром* $K(x,\ \xi)$.

Теорема 2 означает, что *оператор* L^{-1} *есть интегральный оператор с ядром* $G(x,\ y)$.

5. Функция Грина сопряженного оператора. Если оператор L имеет обратный, то в силу VIII n° 7 § 1 сопряженный оператор L^* также имеет обратный. Поэтому оператор L^* также имеет функцию Грина; обозначим ее через $H(x,\ \xi)$.

Найдем соотношение между функциями Грина $G(x,\ \xi)$ и $H(x,\ \xi)$ операторов L и L^*. Положим $L^{-1}f=\varphi$, $L^{*-1}g=\psi$. Тогда $f=L\varphi$, $g=L^*\psi$, и равенство *) $(\varphi,\ L^*\psi)=(L\varphi,\ \psi)$ перепишется в виде

$$(L^{-1}f,\ g)=(f,\ L^{*-1}g).$$

Это означает, что

$$\int_a^b\int_a^b G(x,\ \xi)f(\xi)\overline{g(x)}\,dx\,d\xi=\int_a^b\int_a^b f(\xi)\overline{H(\xi,\ x)g(x)}\,dx\,d\xi$$

для произвольных непрерывных функций $f(x)$ и $g(x)$. Отсюда следует, что

$$G(x,\ \xi)=\overline{H(\xi,\ x)}. \tag{19}$$

Ядра G и H, связанные соотношением (19), называются *сопряженными*. Таким образом:

III. *Сопряженным друг другу дифференциальным операторам соответствуют сопряженные функции Грина.*

Если, в частности, оператор L самосопряженный, то $L^*=L$; следовательно, $H(x,\ \xi)=G(x,\ \xi)$.

Поэтому соотношение (19) перепишется в виде

$$G(x,\ \xi)=\overline{G(\xi,\ x)}. \tag{20}$$

Ядро, удовлетворяющее условию (20), называется *эрмитовым*. Таким образом:

IV. *Функция Грина самосопряженного дифференциального оператора является эрмитовым ядром.*

---

*) См. (20), n° 6 § 1.

6. Краевые задачи, содержащие параметр, и сведение их к интегральному уравнению. Во многих вопросах приходится рассматривать краевую задачу вида

$$l(y) = \lambda y + f(x), \tag{21}$$

$$U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{22}$$

где λ — некоторый параметр, а $f(x)$ — заданная непрерывная функция от x. Если L — оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y)$ и краевыми условиями (22), то эту задачу можно записать в виде

$$Ly = \lambda y + f. \tag{23}$$

В частности, при $f = 0$ это уравнение принимает вид

$$Ly = \lambda y. \tag{24}$$

Оно эквивалентно однородной краевой задаче

$$l(y) = \lambda y; \quad U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{25}$$

Значения λ, для которых уравнение (24) имеет нетривиальное решение y, являются *собственными значениями* оператора L (или краевой задачи (25)), а эти нетривиальные решения — соответствующими *собственными функциями*.

Предположим, что оператор L имеет обратный L^{-1}; пусть $G(x, \xi)$ — соответствующая функция Грина. Применяя оператор L^{-1} к обеим частям (23), получим:

$$y = \lambda L^{-1} y + g, \tag{26}$$

где $g = L^{-1} f$. Равенство (26) означает, что

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) \, d\xi + g(x), \tag{27}$$

следовательно:

V. *Если дифференциальное выражение $l(y)$ имеет при краевых условиях $U_\nu(y) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, функцию Грина $G(x, \xi)$, то краевая задача*

$$l(y) = \lambda y + f(x), \quad U_\nu(y) = 0$$

эквивалентна интегральному уравнению

$$y(x) = \lambda \int_a^b G(x, \xi) y(\xi) \, d\xi + g(x)$$

где

$$g(x) = \int_a^b G(x, \xi) f(\xi) \, d\xi.$$

В частности, однородная краевая задача

$$l(y)=\lambda y, \quad U_i(y)=0, \quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

эквивалентна однородному интегральному уравнению

$$y(x)=\lambda\int_a^b G(x,\ \xi)\,y(\xi)\,d\xi. \tag{28}$$

Так как $G(x,\ \xi)$ — непрерывное ядро, то к интегральному уравнению применима теория Фредгольма (см., например, Петровский [1]). Поэтому однородное интегральное уравнение (28) имеет не более счетного числа собственных значений $\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots$, не имеющих конечной предельной точки.

Для всех значений λ, отличных от собственных значений, неоднородное уравнение (27) имеет решение при любой непрерывной правой части $g(x)$. Это решение задается формулой

$$y(x)=\lambda\int_a^b \Gamma(x,\ \xi,\ \lambda)\,g(\xi)\,d\xi+g(x), \tag{29}$$

где $\Gamma(x,\ \xi,\ \lambda)$ — резольвента ядра $G(x,\ \xi)$. При этом для любых фиксированных значений x и ξ из интервала $[a,\ b]$ $\Gamma(x,\ \xi,\ \lambda)$ является мероморфной функцией от λ, полюсами которой могут быть лишь собственные значения однородного интегрального уравнения.

Переходя от интегральных уравнений к соответствующим краевым задачам, мы приходим к следующим результатам:

VI. *Если дифференциальное уравнение $l(y)=0$ имеет при краевых условиях $U_\nu(y)=0$, $\nu=1,\ 2,\ldots,\ n$, лишь тривиальное решение, то*:

а) *Однородная краевая задача*

$$l(y)=\lambda y; \quad U_\nu(y)=0, \quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

имеет не более счетного множества собственных значений

$$\lambda_1,\ \lambda_2,\ \lambda_3,\ \ldots,$$

не имеющих конечной предельной точки.

б) *Для всех значений λ, отличных от собственных значений, неоднородная краевая задача*

$$l(y)=\lambda y+f, \quad U_\nu(y)=0, \quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

имеет решение при любой непрерывной функции $f(x)$.

Впрочем, предложение VI, а) было нами получено в n° 1 § 2 без помощи интегральных уравнений; применяя рассуждения n° 1 § 2, можно также получить предложение VI, б).

7. Функция Грина оператора $L-\lambda I$. Пусть по-прежнему L — оператор, порожденный выражением $l(y)$ и условиями $U_\nu(y)=0$, $\nu=1, 2, \ldots, n$. Найдем выражение для функции Грина оператора $L-\lambda I$; другими словами, обратим оператор $L-\lambda I$.

Обозначим через $y_\nu=y_\nu(x, \lambda)$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, систему решений уравнения $l(y)=\lambda y$, удовлетворяющую начальным условиям

$$y^{(\nu-1)}(a, \lambda)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad j\neq\nu, \\ 1 & \text{при} \quad j=\nu. \end{cases}$$

Применяя к уравнению

$$l(y)-\lambda y=f$$

метод вариации произвольных постоянных, получим

$$y(x)=\sum_{\nu=1}^{n} C'_\nu y_\nu(x)+\int_a^x f(\xi)\left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(x)\frac{W_\nu(\xi)}{W(\xi)}\right)d\xi, \qquad (30а)$$

а также

$$y(x)=\sum_{\nu=1}^{n} C''_\nu y_\nu(x)-\int_x^b f(\xi)\left(\sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(x)\frac{W_\nu(\xi)}{W(\xi)}\right)d\xi. \qquad (30б)$$

Здесь $C'_1, \ldots, C'_n, C''_1, C''_2, \ldots, C''_n$ — постоянные, W — вронскиан функций $y_1, \ldots, y_n$:

$$W=\begin{vmatrix} y_1^{(n-1)} & y_2^{(n-1)} & \ldots & y_n^{(n-1)} \\ y_1^{(n-2)} & y_2^{(n-2)} & \ldots & y_n^{(n-2)} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{vmatrix},$$

а $W_1, W_2, \ldots, W_n$ — алгебраические дополнения элементов его первой строки. Взяв полусумму левых и правых частей в (30а) и (30б), получим

$$y(x)=\sum_{\nu=1}^{n} C_\nu y_\nu(x)+\int_a^b g(x, \xi) f(\xi)\,d\xi, \qquad (31)$$

где C_ν — постоянные, а

$$g(x, \xi)=\pm\frac{1}{2W(\xi)}\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \ldots & y_n(x) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \ldots & y_n(\xi) \end{vmatrix}, \qquad (32)$$

причем знак «+» берется при $x>\xi$, а «−» при $x<\xi$. Потребуем теперь, чтобы функция y в (31) удовлетворяла краевым условиям $U_\nu(y)=0$, $\nu=1, 2, \ldots, n$, т. е. была решением краевой задачи

$$l(y)=\lambda y+f, \quad U_\nu(y)=0, \quad \nu=1, 2, \ldots, n.$$

Это означает, что

$$\sum_{j=1}^{n} C_j U_\nu(y_j)+\int_a^b f(\xi)\, U_\nu(g)\, d\xi=0;$$

решая эти уравнения относительно C_j и подставляя в (31), получим

$$y(x)=\int_a^b G(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi, \tag{33}$$

где

$$G(x, \xi, \lambda)=\frac{(-1)^n}{\Delta(\lambda)} H(x, \xi, \lambda), \tag{34}$$

а

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \ldots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \ldots & U_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \ldots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{35}$$

и

$$H(x, \xi, \lambda)=\begin{vmatrix} y_1(x) & \ldots & y_n(x) & g(x, \xi) \\ U_1(y_1) & \ldots & U_1(y_n) & U_1(g) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n(y_1) & \ldots & U_n(y_n) & U_n(g) \end{vmatrix}. \tag{36}$$

Если λ не является собственным значением оператора L, то $\Delta(\lambda)\neq 0$ и формулы (33), (34) имеют смысл. Формула (33) показывает, что $G(x, \xi, \lambda)$ есть функция Грина оператора $L-\lambda I$. Таким образом:

VII. *Функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ оператора $L-\lambda I$ определяется формулами* (32), (34), (35), (36).

8. Аналитическая природа функции Грина оператора $L-\lambda I$. Функции $\Delta(\lambda)$ и $H(x, \xi, \lambda)$ в формулах (35), (36) являются, очевидно, целыми аналитическими функциями параметра λ. Поэтому из (34) следует:

VIII. *Функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ оператора $L-\lambda I$ есть мероморфная функция параметра λ; ее полюсами могут быть лишь собственные значения оператора L.*

Пусть λ_0 — простой нуль функции $\Delta(\lambda)$. Тогда λ_0 может быть только простым полюсом функции $G(x, \xi, \lambda)$, так что

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{R(x, \xi)}{\lambda - \lambda_0} + G_1(x, \xi, \lambda), \tag{37}$$

где $G_1(x, \xi, \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_0.

Если λ_0 вообще не особая точка функции $G(x, \xi, \lambda)$, то следует считать $R(x, \xi) = 0$.

Согласно известной формуле теории вычетов

$$R(x, \xi) = (-1)^n \frac{H(x, \xi, \lambda_0)}{\Delta'(\lambda_0)}.$$

Но в разложении определителя $H(x, \xi, \lambda)$ по элементам первой строки коэффициент при $g(x, \xi)$ есть $\Delta(\lambda_0) = 0$; следовательно, функция $R(x, \xi)$ и ее первые n производных непрерывны по совокупности переменных x, ξ в квадрате $a \leqslant x, \xi \leqslant b$. Далее, из (36) вытекает, что $R(x, \xi)$ есть линейная комбинация функций $y_1(x), \ldots, y_n(x)$; следовательно, при фиксированном ξ она удовлетворяет уравнению

$$l(R) - \lambda_0 R = 0.$$

Из формулы (36) видно также, что $H(x, \xi, \lambda)$, а потому и $R(x, \xi)$ при фиксированном ξ удовлетворяет краевым условиям.

Таким образом, $R(x, \xi)$ есть собственная функция оператора L, соответствующая собственному значению λ_0. Но так как λ_0 — простой нуль функции $\Delta(\lambda)$, то ему отвечает с точностью до множителя, не зависящего от x, только одна собственная функция $y_0(x)$ оператора L. Поэтому должно быть

$$R(x, \xi) = a(\xi)\, y_0(x). \tag{38}$$

Положим теперь $G^*(x, \xi, \lambda) = \overline{G(\xi, x, \lambda)}$; тогда $G^*(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина оператора $L^* - \bar{\lambda} I$.

С другой стороны, из равенства (37) заключаем, что

$$G^*(x, \xi, \lambda) = \frac{\overline{R(\xi, x)}}{\bar{\lambda} - \bar{\lambda}_0} + \overline{G_1(\xi, x, \lambda)}.$$

Поэтому $\overline{R(\xi, x)}$ при фиксированном ξ есть собственная функция оператора L^*, соответствующая собственному значению $\bar{\lambda}_0$. Следовательно, обозначая через $z_0(x)$ одну из таких функций, имеем

$$\overline{R(\xi, x)} = b(\xi)\, z_0(x).$$

Отсюда

$$R(x, \xi) = \overline{b(x)}\, \overline{z_0(\xi)}.$$

Сравнивая эту формулу с (38), получаем

$$R(x, \xi) = cy_0(x)\overline{z_0(\xi)}. \tag{39}$$

Остается определить постоянную c.

Из (37) и (39) следует, что

$$(\lambda - \lambda_0)\int_a^b G(x, \xi, \lambda)\, y_0(\xi)\, d\xi =$$

$$= cy_0(x)\int_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}\, d\xi + (\lambda - \lambda_0)\int_a^b G_1(x, \xi, \lambda)\, y_0(\xi)\, d\xi. \tag{40}$$

Интеграл в последнем слагаемом есть регулярная функция параметра λ в окрестности точки λ_0; следовательно, из (40) заключаем, что

$$\lim_{\lambda \to \lambda_0} (\lambda - \lambda_0)\int_a^b G(x, \xi, \lambda)\, y_0(\xi)\, d\xi = cy_0(x)\int_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}\, d\xi. \tag{41}$$

С другой стороны,

$$(L - \lambda I)\, y_0 = (\lambda_0 - \lambda)\, y_0,$$

откуда

$$(L - \lambda I)^{-1} y_0 = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\, y_0.$$

Так как $G(x, \xi, \lambda)$ есть функция Грина оператора $L - \lambda I$, то последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_a^b G(x, \xi, \lambda)\, y_0(\xi)\, d\xi = \frac{1}{\lambda_0 - \lambda}\, y_0(x).$$

Подставляя в (41), получим, что

$$-y_0(x) = cy_0(x)\int_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}\, d\xi;$$

отсюда

$$c = -\frac{1}{\int_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}\, d\xi},$$

следовательно,

$$R(x, \xi) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{\int_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}\, d\xi}.$$

Отсюда из (37) следует

IX. *Если λ_0 — простой нуль функции $\Delta(\lambda)$, то*

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{(\lambda-\lambda_0)\int\limits_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}\,d\xi} + G_1(x, \xi, \lambda), \tag{42}$$

где $G_1(x, \xi, \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_0.

Наиболее просто эта формула выглядит, если функции $y_0(x)$ и $z_0(x)$ пронормировать так, что

$$\int\limits_a^b y_0(\xi)\overline{z_0(\xi)}\,d\xi = 1.$$

Тогда

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{y_0(x)\overline{z_0(\xi)}}{\lambda-\lambda_0} + G_1(x, \xi, \lambda). \tag{43}$$

9. Случай кратного полюса функции Грина. Предыдущие результаты можно обобщить на случай кратного нуля λ_0 функции $\Delta(\lambda)$, в этом случае λ_0 есть, вообще говоря, кратный полюс функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$. Мы будем теперь считать, что $G(x, \xi, \lambda)$ есть функция Грина краевой задачи

$$l(y) = 0, \quad U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n, \tag{44}$$

в которой коэффициенты дифференциального выражения $l(y)$ и форм $U_\nu(y)$ суть целые аналитические функции параметра λ; функция Грина оператора $L - \lambda I$ является, очевидно, частным случаем такой функции $G(x, \xi, \lambda)$. Отметим, что все результаты n°n° 7—8 полностью переносятся на этот более общий случай; при этом под $y_1(x, \lambda)$, $y_2(x, \lambda)$, ..., $y_n(x, \lambda)$ следует теперь понимать фундаментальную систему решений уравнения $l(y) = 0$, удовлетворяющих тем же начальным условиям

$$y_k^{(\nu-1)}(a, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad k = \nu, \\ 0 & \text{при} \quad k \neq \nu. \end{cases}$$

Итак, пусть λ_0 — полюс ν-го порядка функции Грина $G(x, \xi, \lambda)$ краевой задачи (44); следовательно,

$$G(x, \xi, \lambda) = \frac{R(x, \xi)}{(\lambda-\lambda_0)^\nu} + \frac{R_1(x, \xi)}{(\lambda-\lambda_0)^{\nu-1}} + \ldots + \frac{R_\nu(x, \xi)}{\lambda-\lambda_0} + G_1(x, \xi, \lambda), \tag{45}$$

где функция $G_1(x, \xi, \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_0.

При фиксированном ξ функция $G(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет уравнению $l(G) = 0$ в каждом из интервалов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$. Подставляя вместо функции G ее выражение из (45), получим, что при $\lambda = \lambda_0$

$$\left.\begin{aligned} l(R) &= 0, \\ l(R_1) + \frac{1}{1!}\frac{\partial l}{\partial\lambda}(R) &= 0, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots \\ l(R_{\nu-1}) + \frac{1}{1!}\frac{\partial l}{\partial\lambda}(R_{\nu-2}) + \ldots + \frac{1}{(\nu-1)!}\frac{\partial^{\nu-1} l}{\partial\lambda^{\nu-1}}(R) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{46}$$

Кроме того, из формул (34) и (36) вытекает, что при фиксированном ξ функции $R(x, \xi)$, $R_1(x, \xi)$, ..., $R_{\nu-1}(x, \xi)$ удовлетворяют краевым условиям

$$\sum_{p=0}^{\mu} \frac{1}{p!} \frac{\partial^p U_q}{\partial \lambda^p} (R_{\mu-p}) = 0, \qquad R_0 = R, \; \mu = 0, 1, \ldots, \nu - 1, \; q = 1, 2, \ldots, n; \tag{47}$$

при $\lambda = \lambda_0$. Пользуясь соотношениями (46) и (47) и определением канонической системы собственных и присоединенных функций (n° 3 § 2), можно убедиться в справедливости следующего предложения, которое мы приводим без доказательства (см. Келдыш [1]).

X. Главная часть функции Грина в окрестности нуля λ_0 функции $\Delta(\lambda)$ имеет вид

$$\sum_{j=1}^{p} \left\{ \frac{\overline{z_j(\xi)}\, y_j(x)}{(\lambda - \lambda_0)^{m_j}} + \frac{\overline{z_j(\xi)}\, y_{j1}(x) + \overline{z_{j1}(\xi)}\, y_j(x)}{(\lambda - \lambda_0)^{m_j - 1}} + \ldots \right.$$
$$\left. \ldots + \frac{\overline{z_j(\xi)}\, y_{j, m_j-1}(x) + \overline{z_{j1}(\xi)}\, y_{j, m_j-2}(x) + \ldots + \overline{z_{j, m_j-1}(\xi)}\, y_j(x)}{\lambda - \lambda_0} \right\}, \tag{48}$$

где

$$y_j, \; y_{j1}, \; \ldots, \; y_{j, m_j-1}, \qquad j = 1, 2, \ldots, p,$$

— произвольная каноническая система собственных и присоединенных функций рассматриваемой краевой задачи, а

$$z_j, \; z_{j1}, \; \ldots, \; z_{j, m_j-1}, \quad j = 1, 2, \ldots, p,$$

— надлежащим образом нормированная каноническая система собственных и присоединенных функций сопряженной краевой задачи.

ГЛАВА II

АСИМПТОТИЧЕСКОЕ ПОВЕДЕНИЕ СОБСТВЕННЫХ ЗНАЧЕНИЙ И СОБСТВЕННЫХ ФУНКЦИЙ И РАЗЛОЖЕНИЕ ПО СОБСТВЕННЫМ ФУНКЦИЯМ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНОГО ОПЕРАТОРА

§ 4. Асимптотика собственных значений и собственных функций при больших значениях $|\lambda|$

1. Постановка задачи. При больших значениях $|\lambda|$ можно дать приближенные (именно, асимптотические) формулы для собственных значений и собственных функций дифференциального оператора. Эти формулы не только представляют интерес сами по себе, но и применяются также в различных вопросах теории дифференциальных операторов.

Оказывается, что при большом $|\lambda|$ поведение собственных значений и собственных функций в первом приближении такое же, как и в случае весьма простого оператора, порожденного дифференциальным выражением $l(y)=\frac{d^n y}{dx^n}$.

Для вывода асимптотических формул мы сначала обратимся к асимптотическому поведению при больших $|\lambda|$ решений уравнения $l(y)=\lambda y$. Подставляя затем асимптотические выражения для этих решений в уравнение $\Delta(\lambda)=0$ (см. n° 1 § 2), мы найдем асимптотические выражения для собственных значений.

Положим $\lambda=-\rho^n$; тогда уравнение $l(y)=\lambda y$ запишется в виде

$$l(y)+\rho^n y=0 \tag{1}$$

или подробнее *)

$$\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots+p_n(x)\,y+\rho^n y=0. \tag{2}$$

---

*) Для простоты мы полагаем здесь $p_0(x)\equiv 1$; по поводу случая $p_0(x)\not\equiv 1$ см. n° 11, б).

Не нарушая общности, можно считать, что $p_1(x) \equiv 0$. Действительно, если $p_1(x) \neq 0$, то, полагая

$$y = e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)\,dx}\tilde{y},$$

мы приведем уравнение (2) к виду

$$\frac{d^n\tilde{y}}{dx^n} + \tilde{p}_2(x)\frac{d^{n-2}\tilde{y}}{dx^{n-2}} + \ldots + \tilde{p}_n(x)\tilde{y} + \rho^n\tilde{y} = 0$$

с тем же значением ρ. При этом $\tilde{p}_2(x), \ldots, \tilde{p}_n(x)$ — также непрерывные функции от x в интервале $[a, b]$. Далее, не нарушая общности, можно считать, что интервал $[a, b]$ есть $[0, 1]$. Общий случай легко сводится к этому подстановкой

$$x = a + (b - a)t.$$

Асимптотическое поведение решений уравнения $l(y) + \rho^n y = 0$ зависит от того, в какой части комплексной плоскости находится точка ρ.

2. Области S и T. Разобьем всю комплексную ρ-плоскость на $2n$ секторов S_ν, $\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$, определяемых неравенством (рис. 7)

$$\frac{\nu\pi}{n} \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{(\nu+1)\pi}{n}. \qquad (3)$$

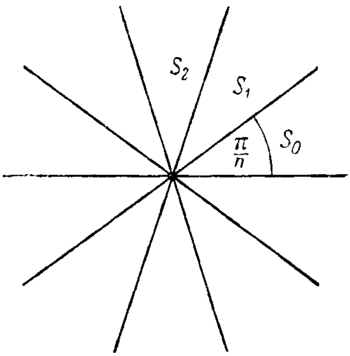

Рис. 7.

Ниже мы увидим, что асимптотические формулы для решений y уравнения (2) существенно зависят от того, в каком именно из секторов S_ν находится ρ.

Обозначим через

$$\omega_1, \omega_2, \omega_3, \ldots, \omega_n$$

все различные корни n-й степени из -1.

В дальнейшем нам понадобится следующее свойство секторов S_ν:

I. *Для каждого сектора S_ν существует такое расположение чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, что для всех $\rho \in S_\nu$ выполняются неравенства* *)

$$\Re(\rho\omega_1) \leqslant \Re(\rho\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \Re(\rho\omega_n). \qquad (4)$$

*) $\Re(z)$ обозначает действительную часть комплексного числа z.

Доказательство. Неравенства (4) достаточно доказать только для каких-нибудь двух соседних секторов. Действительно, обозначим через ε какой-нибудь корень n-й степени из единицы:

$$\varepsilon = e^{\frac{2l\pi i}{n}}.$$

Умножение на ε переводит сектор S_ν в другой сектор, повернутый на угол $\frac{2\pi l}{n}$. Далее, числа

$$\varepsilon^{-1}\omega_1,\ \varepsilon^{-1}\omega_2,\ \ldots,\ \varepsilon^{-1}\omega_n$$

отличаются от чисел $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ только порядком. Если поэтому неравенства (4) имеют место для некоторого сектора S_ν, то, записав их в виде

$$\Re(\rho\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}\omega_1) \leqslant \Re(\rho\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \Re(\rho\varepsilon\cdot\varepsilon^{-1}\omega_n),$$

получаем аналогичные неравенства для другого сектора, повернутого на угол $\frac{2l\pi}{n}$.

Итак, достаточно доказать наше утверждение для двух соседних секторов, например для S_{2n-1} и S_0.

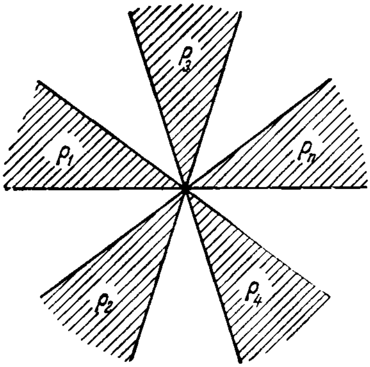

Рис. 8.

Пусть, например, n нечетно: $n = 2\mu - 1$. Перенумеруем числа ω_k так, что

$$\arg\omega_1 = \pi,\quad \arg\omega_2 = \pi + \frac{2\pi}{n},$$

$$\arg\omega_3 = \pi - \frac{2\pi}{n},\quad \arg\omega_4 = \pi + \frac{4\pi}{n},$$

$$\arg\omega_5 = \pi - \frac{4\pi}{n},\ \ldots,\ \arg\omega_n = \frac{\pi}{n},$$

и умножим какое-нибудь число $\rho \in S_{2n-1}$ последовательно на $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$; тогда полученные точки $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ расположатся так, как показано на рис. 8. Поэтому неравенства (4) для области S_{2n-1} геометрически совершенно очевидны *).

*) Нетрудно также и аналитически проверить справедливость неравенств (4). Полагая $\rho = re^{i\varphi}$, имеем, например, при $\rho \in S_{2n-1}$

$$\Re(\rho\omega_1) - \Re(\rho\omega_2) = r\cos(\varphi+\pi) - r\cos\left(\varphi+\pi+\frac{2\pi}{n}\right) =$$

$$= 2r\sin\frac{\pi}{n}\sin\left(\varphi+\pi+\frac{\pi}{n}\right) \leqslant 0,$$

ибо $2\pi - \frac{\pi}{n} \leqslant \varphi \leqslant 2\pi$, и потому $\sin\left(\varphi+\pi+\frac{\pi}{n}\right) \leqslant 0$. Мы предоставляем читателю аналогичную проверку остальных неравенств (4).

Аналогично они доказываются для области S_0 и аналогично рассматривается случай четного n.

В дальнейшем нам удобно будет рассматривать области более общего вида, которые получаются из сектора S_ν сдвигом $\rho \to \rho + c$, где c — фиксированное комплексное число. Эти новые секторы (с вершиной в точке $\rho = -c$) мы будем обозначать через T_ν.

Так как переход от S_ν к T_ν осуществляется сдвигом $\rho \to \rho + c$, то для этих новых секторов T неравенства (4) перепишутся в виде

$$\Re((\rho+c)\omega_1) \leqslant \Re((\rho+c)\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \Re((\rho+c)\omega_n). \tag{5}$$

В дальнейшем мы будем считать, что ρ находится в некоторой фиксированной области T_ν и что числа ω_p занумерованы так, чтобы во всей области T_ν выполнялись неравенства (5). Области S_ν и T_ν мы будем просто называть областями S и T.

3. Сведение уравнения $l(y) + \rho^n y = 0$ к интегро-дифференциальному уравнению. Вывод асимптотических формул основан на сведении уравнения

$$l(y) + \rho^n y = 0 \tag{6}$$

к некоторому эквивалентному интегро-дифференциальному уравнению, которое получается следующим образом: положим

$$m(y) = p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y; \tag{7}$$

тогда уравнение (6) можно будет переписать в виде

$$y^{(n)} + \rho^n y = -m(y). \tag{8}$$

Однородное уравнение $y^{(n)} + \rho^n y = 0$ имеет фундаментальную систему решений

$$e^{\rho\omega_1 x},\ e^{\rho\omega_2 x},\ \ldots,\ e^{\rho\omega_n x};$$

поэтому, рассматривая (8) как неоднородное уравнение с правой частью $m(y)$ и применяя метод вариации произвольных постоянных, получим уравнение

$$y = c_1 e^{\rho\omega_1 x} + \ldots + c_n e^{\rho\omega_n x} + \int_0^x \frac{\omega_1 e^{\rho\omega_1(x-\xi)} + \ldots + \omega_n e^{\rho\omega_n(x-\xi)}}{n\rho^{n-1}} m_\xi(y)\, d\xi, \tag{9}$$

эквивалентное уравнению (8).

При этом $c_1, \ldots, c_n$ — произвольные постоянные, которые могут зависеть от ρ, а $m_\xi(y)$ обозначает значение $m(y)$ при

$x=\xi$. Положим для некоторого фиксированного k, $k=1, 2, \ldots, n$,

$$\left.\begin{aligned} c'_j &= c_j \qquad \text{при } j=1, 2, \ldots, k, \\ c'_j &= c_j - \int_0^1 \frac{\omega_j e^{-\rho\omega_j \xi}}{n\rho^{n-1}} m_\xi(y)\, d\xi \quad \text{при } j=k+1, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

Тогда уравнение (9) перепишется в виде

$$y = c'_1 e^{\rho\omega_1 x} + \ldots + c'_n e^{\rho\omega_n x} + \\ + \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_0^x K_1(x, \xi, \rho)\, m_\xi(y)\, d\xi - \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_x^1 K_2(x, \xi, \rho)\, m_\xi(y)\, d\xi, \tag{11}$$

где

$$K_1(x, \xi, \rho) = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha (x-\xi)}, \quad K_2(x, \xi, \rho) = \sum_{\alpha=k+1}^{n} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha (x-\xi)}. \tag{12}$$

Уравнение (11) является, очевидно, интегро-дифференциальным уравнением относительно y; из него и будут получены асимптотические формулы.

4. Лемма о системе интегральных уравнений.

Лемма 1. *Пусть дана система интегральных уравнений*

$$y_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \int_a^b A_{ij}(x, \xi, \lambda)\, y_j(\xi)\, d\xi, \qquad i=1, 2, \ldots, r, \tag{13}$$

где:

1) *функции $f_i(x)$ непрерывны в интервале $[a, b]$;*

2) *при каждом фиксированном λ функции $A_{ij}(x, \xi, \lambda)$ непрерывны при $a \leqslant x < \xi$ и $\xi < x \leqslant b$;*

3) *при фиксированных x и ξ $(a \leqslant x, \xi \leqslant b)$ $A_{ij}(x, \xi, \lambda)$ — регулярные аналитические функции параметра λ;*

4) *существуют постоянные R и C, такие, что при $|\lambda| > R$*

$$|A_{ij}(x, \xi, \lambda)| \leqslant \frac{C}{|\lambda|}$$

во всем квадрате $a \leqslant x, \xi \leqslant b$.

*Тогда при достаточно большом R_0 и $|\lambda| > R_0$ система (13) имеет одно и только одно решение $y_i(x) = y_i(x, \lambda)$; при этом $y_i(x, \lambda)$ являются аналитическими функциями параметра λ, регулярными при $|\lambda| > R_0$, и *)*

$$y_i(x, \lambda) = f_i(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad \text{при } \lambda \to \infty. \tag{14}$$

---

*) Выражение $O\left(\frac{1}{\lambda^k}\right)$ обозначает функцию вида $\frac{f(x, \lambda)}{\lambda^k}$, где $|f(x, \lambda)| \leqslant C$ при $a \leqslant x \leqslant b$, $|\lambda| \geqslant R_0$ и некоторых постоянных C и R_0.

Доказательство. Если система (13) имеет решение $y_i(x)$, $i=1, 2, \ldots, r$, то, применяя метод последовательных подстановок, получим:

$$y_i(x)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{r}\int_a^b A_{ij}(x, \xi, \lambda) f_j(\xi)\,d\xi+$$

$$+\sum_{j_1, j_2=1}^{r}\int_a^b\int_a^b A_{ij_1}(x, \xi_1, \lambda) A_{j_1j_2}(\xi_1, \xi_2, \lambda)\, y_{j_2}(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2=$$

. . . .

$$=f_i(x)+\sum_{j=1}^{r}\int_a^b A_{ij}(x, \xi, \lambda) f_j(\xi)\,d\xi+\ldots$$

$$\ldots+\sum_{j_1, \ldots, j_n=1}^{r}\int_a^b\ldots\int_a^b A_{ij_1}(x, \xi_1, \lambda)\ldots A_{j_{n-1}j_n}(\xi_{n-1}, \xi_n, \lambda)\times$$
$$\times f_{j_n}(\xi_n)\,d\xi_1\ldots d\xi_n+$$

$$+\sum_{j_1, \ldots, j_{n+1}=1}^{r}\int_a^b\ldots\int_a^b A_{ij_1}(x, \xi_1, \lambda)\ldots A_{j_nj_{n+1}}(\xi_n, \xi_{n+1}, \lambda)\times$$
$$\times y_{j_{n+1}}(\xi_{n+1})\,d\xi_1\ldots d\xi_{n+1}.$$

Положим $B=\max|y_i(x)|$, $a\leqslant x\leqslant b$, $i=1, 2, \ldots, r$. При $|\lambda|\geqslant R$ последнее слагаемое по модулю не превосходит

$$\frac{1}{|\lambda|^{n+1}}[(b-a)Cr]^{n+1}B$$

и, следовательно, стремится к 0 при $n\to\infty$, если $|\lambda|>R_0$, где

$$R_0=\max\{R, (b-a)Cr\}.$$

Поэтому функция $y_i(x)=y_i(x, \lambda)$ есть сумма ряда

$$y_i(x, \lambda)=f_i(x)+\sum_{j=1}^{r}\int_a^b A_{ij}(x, \xi_1, \lambda) f_j(\xi)\,d\xi+$$

$$+\sum_{j_1, j_2=1}^{r}\int_a^b\int_a^b A_{ij_1}(x, \xi_1, \lambda) A_{j_1j_2}(\xi_1, \xi_2, \lambda) f_{j_2}(\xi_2)\,d\xi_1\,d\xi_2+\ldots$$

Обратно, легко видеть, что в каждой области $|\lambda|\geqslant R_1>R_0$, $a\leqslant x\leqslant b$, этот ряд сходится равномерно и представляет собой решение системы (13). Отсюда вытекает формула (14) и регулярность функций $y_i(x, \lambda)$ при $|\lambda|>R_0$.

5. Асимптотические формулы для решений уравнения $l(y)+\rho^n y=0$. Прежде всего нам понадобятся оценки для ядер K_1 и K_2 в уравнениях (11) и их производных.

Лемма 2. *Существует константа C, такая, что для всех $\rho \in T$ имеют место неравенства*

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_1(x, \xi, \rho)\right| \leqslant C|\rho|^\nu k\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right| \text{ при } 0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1, \qquad (15\text{а})$$

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_2(x, \xi, \rho)\right| \leqslant C|\rho|^\nu (n-k)\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right| \text{ при } 0 \leqslant x \leqslant \xi \leqslant 1, \qquad (15\text{б})$$

$$\nu = 0, 1, 2, 3, \ldots$$

Доказательство. Выберем константу C так, чтобы

$$\left|e^{c(\omega_j-\omega_k)(x-\xi)}\right| \leqslant C \qquad (16)$$

для всех $j, k=1, \ldots, n$ и всех x и ξ из интервала $[0, 1]$; это возможно, ибо левая часть (16) есть непрерывная функция переменных x и ξ. Если $\rho \in T$, то из неравенств (5) следует, что при $\alpha \leqslant k$

$$\Re(\rho\omega_\alpha) \leqslant \Re(\rho\omega_\alpha + (\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha));$$

отсюда заключаем, что при $0 \leqslant \xi \leqslant x \leqslant 1$

$$\left|e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}\right| \leqslant \left|e^{[\rho\omega_\alpha+(\rho+c)(\omega_k-\omega_\alpha)](x-\xi)}\right| \leqslant C\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right|.$$

Поэтому (см. (12))

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_1(x, \xi, \rho)\right| = \left|\sum_{\alpha=1}^{k} \rho^\nu \omega_\alpha^{\nu+1} e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}\right| \leqslant Ck|\rho|^\nu\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right|,$$

так что неравенство (15а) доказано.

Аналогично доказывается неравенство (15б).

Теорема 1. *Если функции $p_2, \ldots, p_n$ непрерывны*) в интервале $[0, 1]$, то во всякой области T комплексной ρ-плоскости уравнение*

$$y^{(n)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_{n-1}y' + p_n y + \rho^n y = 0$$

имеет n линейно-независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, регулярных относительно $\rho \in T$ при $|\rho|$ достаточно большом и

---

*) В действительности, как видно из излагаемого ниже доказательства, заключение теоремы остается верным для произвольных функций $p_2, \ldots, p_n$, *суммируемых* в интервале $[0, 1]$

удовлетворяющих соотношениям

$$\left.\begin{aligned} y_k &= e^{\rho\omega_k x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ \frac{dy_k}{dx} &= \rho e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} &= \rho^{n-1} e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k^{n-1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{17}$$

Доказательство. Предположим, что уравнение (6) имеет решение y_k, такое, что

$$c'_\nu = 0 \text{ при } \nu \neq k, \quad c'_k = 1.$$

Таким образом,

$$y_k = e^{\rho\omega_k x} + \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_0^x K_1(x, \xi, \rho)\, m_\xi(y_k)\, d\xi - \\ - \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_x^1 K_2(x, \xi, \rho)\, m_\xi(y_k)\, d\xi. \tag{18а}$$

Дифференцируя это равенство $n-1$ раз, получим вместе с исходным равенством систему *)

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x} + \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_0^x \frac{\partial^\nu K_1(x, \xi, \rho)}{\partial x^\nu}\, m_\xi(y_k)\, d\xi - \\ - \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_x^1 \frac{\partial^\nu K_2(x, \xi, \rho)}{\partial x^\nu}\, m_\xi(y_k)\, d\xi, \tag{18б}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Положим в (18б)

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_{k\nu}; \tag{19}$$

*) Результат дифференцирования по верхнему и нижнему пределам в сумме дает нуль, это видно, если дифференцировать по верхнему пределу интеграл в (9), ибо $\omega_1^\nu + \dots + \omega_n^\nu = 0$ при $\nu = 1, 2, \dots, n-1$.

тогда для функций $z_{k\nu}=z_{k\nu}(x, \rho)$ мы получим систему уравнений

$$z_{k\nu}(x, \rho)=\omega_k^\nu+\frac{1}{n\rho}\int_0^x e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu}\frac{\partial^\nu K_1(x, \xi, \rho)}{\partial x^\nu}[p_2(\xi)z_{k, n-2}(\xi, \rho)+$$
$$+\frac{1}{\rho}p_3(\xi)z_{k, n-3}(\xi, \rho)+\ldots+\frac{1}{\rho^{n-2}}p_n(\xi)z_{k0}(\xi, \rho)]\,d\xi-$$
$$-\frac{1}{n\rho}\int_x^1 e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu}\frac{\partial^\nu K_2(x, \xi, \rho)}{\partial x^\nu}\Big[p_2(\xi)z_{k, n-2}(\xi, \rho)+$$
$$+\frac{1}{\rho}p_3(\xi)z_{k, n-3}(\xi, \rho)+\ldots+\frac{1}{\rho^{n-2}}p_n(\xi)z_{k0}(\xi, \rho)\Big]\,d\xi. \tag{20}$$

Положим, далее,

$$K_{k\nu\alpha}(x, \xi, \rho)=\begin{cases}\dfrac{1}{n}e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu-\alpha+2}\dfrac{\partial^\nu K_1(x, \xi, \rho)}{\partial x^\nu}p_\alpha(\xi) & \text{при } \xi<x,\\[2ex] \dfrac{1}{n}e^{-\rho\omega_k(x-\xi)}\rho^{-\nu-\alpha+2}\dfrac{\partial^\nu K_2(x, \xi, \rho)}{\partial x^\nu}p_\alpha(\xi) & \text{при } \xi>x;\end{cases}$$

$$k=1, 2, \ldots, n;\quad \nu=0, 1, 2, \ldots, n-1;\ \alpha=2, 3, \ldots, n;$$

тогда система (20) перепишется в виде

$$z_{k\nu}(x, \rho)=\omega_k^\nu+\frac{1}{\rho}\sum_{\alpha=2}^{n}\int_0^1 K_{k\nu\alpha}(x, \xi, \rho)z_{k\alpha}(\xi, \rho)\,d\xi. \tag{21}$$

При фиксированном k и $\nu=0, 1, 2, \ldots, n-1$ она является системой интегральных уравнений относительно функций $z_{k\nu}(x, \rho)$, $\nu=0, 1, 2, \ldots, n-1$. Из предыдущей леммы вытекает, что все функции $K_{k\nu\alpha}(x, \xi, \rho)$ ограничены. Поэтому к системе (21) применима лемма 1 n° 4. На основании этой леммы система (21) имеет одно и только одно решение $z_{k\nu}=z_{k\nu}(x, \rho)$, аналитическое относительно ρ, причем

$$z_{k\nu}(x, \rho)=\omega_k^\nu+O\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{22}$$

Отсюда и из (19) непосредственно следуют соотношения (17). Из этих соотношений вытекает, что функции y_k, $k=1, 2, \ldots, n$ линейно независимы.

Остается доказать, что существует решение $y_k(x, \lambda)$ уравнения (6), удовлетворяющее уравнению (18а); для этого достаточно показать, что, каковы бы ни были *постоянные* (т. е. не зависящие от ρ) c'_ν, существует решение y уравнения (6), удовлетворяющее (11) при этих значениях c'_ν.

Равенства (10) представляют собой линейное преобразование от c_j к c'_j (заметим, что y, а следовательно, и выражение $m_\xi(y)$ в правой части (10) линейно зависит *) от $c_1, \ldots, c_n$). Очевидно, достаточно доказать, что определитель преобразования (10) при достаточно большом $|\rho|$, $\rho \in T$, отличен от нуля; в таком случае уравнения (10) можно решить относительно c_j при произвольно заданных c'_j. Решение y уравнения (6), или, что то же, уравнения (9), соответствующее этим значениям c_j, будет тогда искомым.

Но если определитель преобразования (10) равен нулю для сколь угодно больших $|\rho|$, $\rho \in T$, то для этих значений ρ уравнения (10) имеют нетривиальные решения относительно c_j при $c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_n = 0$. Соответствующая функция y будет, следовательно, нетривиальным решением уравнения

$$y = \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_0^x K_1(x, \xi, \rho)\, m_\xi(y)\, d\xi - \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_x^1 K_2(x, \xi, \rho)\, m_\xi(y)\, d\xi, \tag{23}$$

которое получается из (11) при $c'_1 = c'_2 = \ldots = c'_n = 0$.

Докажем, что это невозможно. Дифференцируя (23) $n-1$ раз и полагая

$$\frac{d^\nu y}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_\nu, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1, \tag{24}$$

получим для функций z_ν систему уравнений

$$\begin{aligned} z_\nu(x, \rho) = \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_0^x \rho^{-\nu} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \frac{\partial^\nu K_1(x, \xi, \rho)}{\partial x^\nu} \times \\ \times \{\rho^{n-2} p_2(\xi) z_{n-2}(\xi, \rho) + \ldots + p_n(\xi, \rho) z_0(\xi, \rho)\}\, d\xi - \\ - \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_x^1 \rho^{-\nu} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \frac{\partial^\nu K_2(x, \xi, \rho)}{\partial x^\nu} \times \\ \times \{\rho^{n-2} p_2(\xi) z_{n-2}(\xi, \rho) + \ldots + p_n(\xi) z_0(\xi, \rho)\}\, d\xi \end{aligned} \tag{25}$$

Пусть

$$m(\rho) = \max_{0 \leqslant x \leqslant 1} |z_\nu(x, \rho)|, \\ \nu = 0, \ldots, n-1,$$

*) Это следует из того, что интеграл в правой части (9) и его производные до $(n-1)$-го порядка включительно обращаются в нуль при $x = 0$ и потому $c_1, \ldots, c_n$ связаны линейными соотношениями с $y(0), \ldots, y^{(n-1)}(0)$, от которых зависит в свою очередь линейно каждое решение уравнения (6).

применяя лемму 2 к правой части (25), получим оценку

$$|z_\nu(x, \rho)| \leqslant \left[\frac{1}{n|\rho|} Ck \int_0^1 \left(|p_2| + \ldots + \frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right) d\xi + \right.$$
$$\left. + \frac{1}{n|\rho|} C(n-k) \int_0^1 \left(|p_2| + \ldots + \frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right) d\xi \right] m(\rho).$$

Так как левая часть достигает своего максимума $m(\rho)$, то отсюда следует, что

$$m(\rho) \leqslant m(\rho) \frac{C}{|\rho|} \int_0^1 \left(|p_2| + \ldots + \frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right) d\xi \leqslant m(\rho) \frac{C_1}{|\rho|},$$

где C_1 — некоторая константа.

При больших $|\rho|$ это неравенство возможно, только если $m(\rho) = 0$; следовательно, $z_\nu(x, \rho) = 0$. Отсюда в силу (24) при $\nu = 0$ $y \equiv 0$, и теорема полностью доказана.

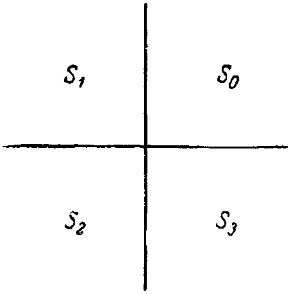

Рис. 9.

Замечание. Уравнение

$$U^{(n)} + \rho^n U = 0$$

имеет фундаментальную систему решений

$$U_k = e^{\rho\omega_k x}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Формулы (17) показывают, что решения y_k в теореме 1 аппроксимируются этими функциями U_k.

Другими словами, для больших $|\rho|$ в уравнении

$$y^{(n)} + p_2 y^{(n-2)} + \ldots + p_n y + \rho^n y = 0$$

существенную роль играют только первое и последнее слагаемые.

В случае уравнения второго порядка $y'' + p(x)y + \rho^2 y = 0$ имеются четыре области S (рис. 9); в силу доказанной теоремы в каждой из них есть линейно независимые решения y_1, y_2, которые можно асимптотически представить в виде

$$y_1 = e^{i\rho x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$
$$y_2 = e^{-i\rho x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right].$$

Если ρ вещественно и положительно, то эти решения можно заменить их линейными комбинациями

$$\frac{y_1+y_2}{2}=\cos(\rho x)+O\left(\frac{1}{\rho}\right),$$

$$\frac{y_1-y_2}{2i}=\sin(\rho x)+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

6. Уточнение асимптотических формул. Если коэффициенты $p_2, \ldots, p_n$ дифференциального выражения не только непрерывны, но имеют также непрерывные производные до некоторого порядка m, то полученные асимптотические формулы можно уточнить.

Пусть, например, коэффициент $p_2(\xi)$ имеет непрерывную первую производную $p_2'(\xi)$.

Подставим в правую часть (18а) вместо функции y_k и ее производных выражения из (17). Тогда, применяя оценки (15а) и (15б) при $\nu=0$, получим

$$y_k=e^{\rho\omega_k x}+\frac{1}{n\rho}\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)\,e^{\rho\omega_k\xi}\omega_k^{n-2}p_2(\xi)\,d\xi-$$
$$-\frac{1}{n\rho}\int_x^1 K_2(x,\xi,\rho)\,e^{\rho\omega_k\xi}\omega_k^{n-2}p_2(\xi)\,d\xi+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)e^{\rho\omega_k x}. \qquad (26)$$

Но в силу (12)

$$\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)\,e^{\rho\omega_k\xi}p_2(\xi)\,d\xi=$$
$$=e^{\rho\omega_k x}\left(\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha\int_0^x e^{-\rho(\omega_k-\omega_\alpha)(x-\xi)}p_2(\xi)\,d\xi+\omega_k\int_0^x p_2(\xi)\,d\xi\right),$$

причем, интегрируя по частям и принимая во внимание неравенства (5), легко убедиться в том, что первое слагаемое в скобках есть $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$. Таким образом,

$$\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)\,e^{\rho\omega_k\xi}p_2(\xi)\,d\xi=e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k\int_0^x p_2(\xi)\,d\xi+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]$$

и аналогично

$$\int_x^1 K_2(x,\xi,\rho)\,e^{\rho\omega_k\xi}p_2(\xi)\,d\xi=e^{\rho\omega_k x}O\left(\frac{1}{\rho}\right)$$

Подставляя эти выражения в (26), получим

$$y_k=e^{\rho\omega_k x}\left[1+\frac{y_{k0}(x)}{\rho}+O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right], \qquad (27)$$

где

$$y_{k0}(x) = -\frac{1}{n\omega_k}\int_0^x p_2(\xi)\,d\xi. \tag{28}$$

Аналогично, подставляя выражения (17) в правую часть (18), получим

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x}\left[1 + \frac{y_{k\nu}(x)}{\rho} + O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)\right], \qquad \nu = 0, 1, \ldots, n-1; \tag{29}$$

при этом легко проверить, что первые два слагаемых в скобках в формуле (29) получатся, если ν раз продифференцировать выражение

$$e^{\rho\omega_k x}\left[1 + \frac{y_{k0}(x)}{\rho}\right]$$

в (27) и после вынесения за скобку $\rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x}$ отбросить все члены порядка $O\left(\frac{1}{\rho^2}\right)$.

Если p_2 и p_3 имеют непрерывные производные до второго и первого порядков соответственно, то, подставляя выражения (29) в правую часть (18а) и (18б) аналогично предыдущему, получим

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x}\left[1 + \frac{y_{k\nu 1}(x)}{\rho} + \frac{y_{k\nu 2}(x)}{\rho^2} + O\left(\frac{1}{\rho^3}\right)\right]. \tag{30}$$

Повторяя эти рассуждения, приходим к следующему результату.

Следствие. *Если функции $p_2, p_3, \ldots, p_n$ имеют в интервале* $[0, 1]$ *непрерывные производные до m-го, $(m-1)$-го, $(m-2)$-го, ... порядков соответственно, то для решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, построенных в теореме* 1, *имеют место асимптотические формулы*

$$y_k = e^{\rho\omega_k x}\left[1 + \frac{y_{k01}(x)}{\rho} + \frac{y_{k02}(x)}{\rho^2} + \ldots + \frac{y_{k0m}(x)}{\rho^m} + O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)\right], \tag{31а}$$

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x}\left[1 + \frac{y_{k\nu 1}(x)}{\rho} + \frac{y_{k\nu 2}(x)}{\rho^2} + \ldots + \frac{y_{k\nu m}(x)}{\rho^m} + O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)\right], \tag{31б}$$

$$k = 1, 2, \ldots, n; \quad \nu = 1, 2, \ldots,$$

где $y_{k\nu 1}(x), y_{k\nu 2}(x), \ldots, y_{k\nu m}(x)$ — непрерывные функции в интервале $[0, 1]$.

Замечание 1. *Формулы* (31б) *получаются из* (31а) *почленным дифференцированием, вынесением за скобку множителя $\rho^\nu\omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x}$ и объединением в скобках в $O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)$ всех тех слагаемых, которые содержат $\frac{1}{\rho^k}$ при $k > m$.*

В этом легко убедиться, если вспомнить, что $O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right)$ в (31а) есть выражение вида

$$\frac{1}{\rho^{m+1}}\left[\int_0^x e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} K_1(x, \xi, \rho)\,\varphi(\xi, \rho)\,d\xi - \int_x^1 e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} K_2(x, \xi, \rho)\,\varphi(\xi, \rho)\,d\xi\right],$$

где $\varphi(\xi, \rho)$ — некоторая ограниченная функция; из леммы п° 5 тогда следует, что ν-я производная этого выражения по x $(\nu = 1, 2, \ldots, n)$ будет $O\left(\frac{1}{\rho^{m+1-\nu}}\right)$.

Согласно замечанию 1 функции $y_{k\nu j}(x)$ выражаются через функции $y_{k0\mu}(x)$.

Замечание 2. *Функции $y_{k0\mu}(x)$ можно определить с точностью до постоянных слагаемых, подставляя выражения* (31а), (31б) *в уравнение $l(y) + \rho^n(y)$ и сравнивая после сокращения на $\rho^n e^{\rho\omega_k x}$ члены при одинаковых степенях $\frac{1}{\rho}$ до $\frac{1}{\rho^m}$ включительно. В результате получается система рекуррентных дифференциальных уравнений первого порядка, из которых последовательно определяются функции $y_{k0\mu}(x)$ с точностью до постоянных слагаемых.*

Действительно, после указанных подстановок и сокращения дифференциальное уравнение примет вид

$$\frac{A_1}{\rho} + \frac{A_2}{\rho^2} + \ldots + \frac{A_m}{\rho^m} + O\left(\frac{1}{\rho^{m+1}}\right) = 0, \tag{32}$$

где $\frac{A_\nu}{\rho^\nu}$ обозначает сумму всех членов уравнения, содержащих $\frac{1}{\rho^\nu}$.

Очевидно, равенство (32) возможно только тогда, когда

$$A_1 = 0, \quad A_2 = 0, \ldots, A_m = 0. \tag{33}$$

Если фактически вычислить выражения для $A_1, A_2, \ldots, A_m$, то из уравнений (33) получаются следующие выражения для функций $y_{k0\nu}$:

$$y_{k01} = \alpha_1 - \frac{1}{n\omega_k} \int_0^x p_2(\xi)\, d\xi, \tag{34а}$$

$$y_{k0\nu} = \alpha_\nu - \frac{1}{n} \sum_{\alpha=0}^{\nu-1} \sum_{\beta=0}^{\nu-\alpha-1} \omega_k^{\alpha-\nu} \int_0^x p_{\nu+1-\alpha-\beta}(\xi)\, y_{k0\alpha}^{(\beta)}(\xi)\, d\xi, \quad \nu = 2, 3, 4, \ldots, m. \tag{34б}$$

Постоянные α_ν, $\nu = 1, 2, 3, \ldots$ можно уже определить только из уравнений (18) Так, например, выше мы видели, что $\alpha_1 = 0$. Аналогично можно определить остальные постоянные α_ν.

Асимптотическое поведение решений дифференциальных уравнений при больших значениях параметра исследуется во многих работах. Дополнительные сведения и литературу можно найти, например, в книгах. Стеклов [2], Коддингтон и Левинсон [1], Расулов [1], Сансоне [1], Трикоми [1], Чезаро [1].

7. Нормировка краевых условий. Рассмотрим линейные формы $U_\nu(y)$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, определяющие данный дифференциальный оператор. Число k назовем *порядком* формы $U(y)$, если эта форма содержит $y_0^{(k)}$ или $y_1^{(k)}$, но не содержит переменных $y_0^{(\nu)}$ или $y_1^{(\nu)}$ при $\nu > k$. Рассмотрим формы $U_\nu(y)$ порядка $n-1$, если таковые имеются. Заменяя их, если надо, линейными комбинациями, можно добиться того, что максимальное число форм порядка $n-1$ будет $\leqslant 2$. Остальные формы имеют порядок $\leqslant n-2$; применяя к формам порядка $n-2$ тот же прием, сведем их число к минимуму и т. д.

Описанные операции называются *нормировкой краевых условий*, а полученные в результате краевые условия называются *нормированными*. Из способа их построения следует, что *нормированные краевые условия должны иметь вид*

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0, \tag{35}$$

где

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y_0^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y_0^{(j)}, \tag{36}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y_1^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y_1^{(j)}, \tag{37}$$

$$n-1 \geqslant k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0, \quad k_{\nu+2} < k_\nu,$$

причем для каждого значения индекса ν хотя бы одно из чисел α_ν, β_ν отлично от нуля.

8. Регулярные краевые условия. Рассмотрим фиксированную область S_ν; и как выше, занумеруем $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ так, что при $\rho \in S_\nu$

$$\Re(\rho\omega_1) \leqslant \Re(\rho\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \Re(\rho\omega_n).$$

В дальнейшем нам удобно будет выделить класс краевых условий, которые называются *регулярными*. Этот класс определяется различным образом в зависимости от того, будет ли n нечетным или четным:

а) n нечетно; $n = 2\mu - 1$.

Нормированные краевые условия (35) *называются регулярными, если числа* θ_0 *и* θ_1, *определенные равенством*

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \ldots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\,\omega_\mu^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \ldots & \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \ldots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\,\omega_\mu^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \ldots & \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \ldots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\,\omega_\mu^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \ldots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}, \tag{38}$$

отличны от нуля.

б) n четно; $n=2\mu$.

Нормированные краевые условия (35) *называются регулярными, если числа* θ_{-1} *и* θ_1, *определенные равенством*

$$\frac{\theta_{-1}}{s}+\theta_0+\theta_1 s=$$
$$=\begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \ldots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1+s\beta_1)\,\omega_\mu^{k_1} & \left(\alpha_1+\frac{1}{s}\beta_1\right)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \ldots & \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \ldots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2+s\beta_2)\,\omega_\mu^{k_2} & \left(\alpha_2+\frac{1}{s}\beta_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \ldots & \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \ldots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n+s\beta_n)\,\omega_\mu^{k_n} & \left(\alpha_n+\frac{1}{s}\beta_n\right)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \ldots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}, \tag{39}$$

отличны от нуля.

Это определение регулярности *не зависит от выбора области* S, *при помощи которой были занумерованы числа* ω_k.

Для того чтобы это показать, вернемся к п° 2 и вспомним, что расположения чисел ω_ν, отвечающие различным областям S_ν, могут быть получены умножением на корень степени n из единицы из двух основных расположений, отвечающих, например, областям S_0 и S_{2n-1}. Но если в соотношениях (38) или (39) все ω_ν умножить на общий множитель, равный по модулю единице, то и числа θ умножатся на один и тот же множитель, равный по модулю единице. В частности, сохраняет свое значение отношение $\theta_0:\theta_1$, соответственно $\theta_0:\theta_1:\theta_{-1}$, а поэтому останутся без изменения корни уравнения $\theta_1\xi+\theta_0=0$, или соответственно $\theta_1\xi^2+\theta_0\xi+\theta_{-1}=0$; этим мы воспользуемся еще в дальнейшем.

Таким образом, остается проследить, как меняются числа θ при переходе от какой-нибудь одной области S_ν с четным ν к какой-нибудь другой области $S_{\nu'}$ с нечетным ν'. Отметим, что хотя при этом переходе по-прежнему каждое из чисел θ умножается на определенное число, равное по модулю единице, однако теперь, вообще говоря, не все θ умножаются на один и тот же множитель.

Рассмотрим сначала случай нечетного n.

При $n=2\mu-1$ числа $\psi_k=e^{i\pi+\frac{2k\pi i}{n}}$, $k=0, \pm 1, \ldots, \pm(\mu-1)$ являются всеми корнями степени n из -1. В случае области S_{2n-1} неравенства (4) будут выполняться, если в качестве чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$ принять числа ψ_k со следующим расположением индекса:

$$0,\ +1,\ -1,\ +2,\ -2,\ \ldots,\ +(\mu-1),\ -(\mu-1),$$

а в случае области S_0 —

$$0,\ -1,\ +1,\ -2,\ +2,\ \ldots,\ -(\mu-1),\ +(\mu-1).$$

В силу (38)

$$\theta_0=\begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \ldots & \alpha_1\omega_\mu^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \ldots & \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \ldots & \alpha_n\omega_\mu^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \ldots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix};$$

так же выглядит определитель для θ_1, с той лишь разницей, что в μ-м столбце следует заменить α_k на β_k. Пусть числа θ_0 и θ_1 вычислены для области S_{2n-1}; соответствующие числа, найденные для области S_0, обозначим через $\bar\theta_0$ и $\bar\theta_1$. Очевидно, что $\bar\theta_0$ и $\bar\theta_1$ можно получить из θ_0 и θ_1, переставляя в соответствующих определителях числа ω_k соответственно во втором и третьем столбцах, в четвертом и в пятом столбцах и т. д. Соответствующее изменение чисел θ_0 и θ_1 легко выяснить путем рассмотрения следующих схем

a_1) μ четно, $n=4q-1$.

$$\begin{array}{c|ccccccccccc}
\theta_0 & \alpha & \alpha & \alpha & & \alpha & \alpha & \alpha & \beta \ldots & \beta & \beta \\
 & 0, & 1, & -1, & \ldots, & q-1, & -(q-1), & q, & -q, \ldots, & 2q-1, & -(2q-1) \\
\theta_1 & \alpha & \alpha & \alpha & & \alpha & \alpha & \beta & \beta \ldots & \beta & \beta
\end{array}$$

a_2) μ нечетно, $\mu=2q+1$, $n=4q+1$

$$\begin{array}{c|cccccccccc}
\theta_0 & \alpha & \alpha & \alpha \ldots & \alpha & \alpha & \beta & \beta & \ldots & \beta & \beta \\
 & 0, & 1, & -1, \ldots, & q, & -q, & q+1, & -(q+1), & \ldots, & 2q & -2q \\
\theta_1 & \alpha & \alpha & \alpha \ldots & \alpha & \beta & \beta & \beta & \ldots & \beta & \beta
\end{array}$$

Здесь, с одной стороны, указано расположение ψ-индексов для чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$ в столбцах определителя θ, с другой стороны, с помощью букв α или β указано, на какое из соответствующих чисел $\alpha_1, \ldots, \alpha_n$ или $\beta_1, \ldots, \beta_n$ умножается данное $\omega_j^{k_l}$. При переходе от S_{2n-1} к S_0 следует строку индексов $(0, 1, -1, \ldots)$ заменить строкой $(0, -1, +1, \ldots)$ и оставить без изменения «(α, β)-распределение».

Поскольку в случае a_1) это приводит попросту к перестановке столбцов в θ_1, а в случае a_2) — в θ_0, то

$$\bar\theta_1 = -\theta_1 \quad \text{при} \quad n=4q-1,$$
$$\bar\theta_0 = \theta_0 \quad \text{при} \quad n=4q+1.$$

Для нахождения остальных соотношений будем рассуждать следующим образом.

При умножении на $\varepsilon = e^{\frac{2\pi i l}{n}}$ система чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$ переходит сама в себя, причем происходит такая перестановка этих чисел, что к каждому ψ-индексу k добавляется l и к $k+l$ добавляется некоторое число, кратное n, если $|k+l|$ оказывается $\geqslant \mu-1$. Таким образом (при $l=-1$ и $n=4q-1$), из строки индексов

$$\begin{array}{ccccccccc}
 & & \ldots & \alpha & \alpha & \beta & \beta \ldots & & \\
0, 1, -1, \ldots, & & q-1, & -(q-1), & q, & -q, & q+1, & \ldots, & -(2q-1)
\end{array}$$

получается строка

$$\begin{array}{cccccccc}
 \ldots & \alpha & \alpha & \alpha & \beta & \beta \ldots & & \\
-1, 0, -2, 1, -3, \ldots, & q-2, & -q, & q-1, & -(q+1), & q, & \ldots, (2q-2), & 2q-1.
\end{array}$$

Последняя строка может быть приведена к виду

$$\begin{array}{cccccccc}
 \ldots & \alpha & \alpha & \alpha & \beta \ldots & & & \\
0, -1, 1, -2, +2, \ldots, & -(q-1), & q-1, & -q, & q, & \ldots, & -(2q-1), & 2q-1,
\end{array}$$

отвечающему $\bar\theta_0$, $\bar\theta_1$ с помощью перестановок первых $2q-1$ пар чисел. Отсюда вытекает, что

$$\bar\theta_0 = -e^{-\frac{2\pi i}{n}(k_1+\ldots+k_n)}\theta_0 \quad \text{при} \quad n=4q-1$$

и аналогично

$$\theta_1 = e^{-\frac{2\pi i}{n}(k_1+\dots+k_n)}\theta_1 \quad \text{при} \quad n = 4q+1.$$

Теперь ясно, что определение регулярности не зависит от выбора области. Кроме того, оказывается, что:

I. *Корни уравнения* $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$ *не меняются при переходе от* S_ν *к* $S_{\nu'}$ *при* $\nu = \nu' \pmod 2$; *при переходе от* S_{2l+1} *к* S_{2l} *они умножаются на* $e^{\mp\frac{2\pi i}{n}(k_1+\dots+k_n)}$, *причем знак* $+(-)$ *соответствует* $n = 4q+1$ $(n = 4q-1)$.

Обозначая через $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ корни, отвечающие S_ν с ν соответственно нечетным и четным, мы имеем

$$\xi^{(2)} = e^{\mp\frac{2\pi i}{n}(k_1+\dots+k_n)}\xi^{(1)} \quad \text{при} \quad n = 4q \pm 1.$$

В случае четного n, $n = 2\mu$, имеется более удобный путь, приводящий к цели. Теперь все корни степени n из -1 имеют вид $\psi_k = e^{i\pi + \frac{k\pi i}{n}}$, $k = \pm 1, \pm 3, \dots, \pm (n-1)$, и мы по-прежнему можем охарактеризовать каждое расположение чисел $\omega_1, \dots, \omega_n$, а следовательно, и выбор области S_ν, соответствующей строкой ψ-индексов. В результате для областей S_{2n-1}, S_0, S_1 мы получим следующие строки:

$$\begin{array}{llllllll} 1, & -1, & 3, & -3, \dots, & & n-1, & & -(n-1), \\ -1, & 1, & -3, & 3, \dots, & -(n-1), & & n-1, & \\ -1, & -3, & 1, & -5, & 3, \; -7, \; 5, & \dots, & -(n-1), & n-3, \; n-1. \end{array}$$

Будем различать два случая:

б$_1$) $\mu = 2q$, $n = 4q$.

Строка для S_1 может быть получена из строки для S_0, если поменять местами второй и третий, четвертый и пятый, ..., $(n-2)$-й и $(n-1)$-й элементы. Если поэтому в определителе (39), составленном для S_0, переставить соответственно столбцы и, кроме того, заменить s на $\frac{1}{s}$, то получим определитель (39), составленный для области S_1 Ввиду того, что число таких перестановок $(2q-1)$ нечетно, то $D_1(s) = -D_0\left(\frac{1}{s}\right)$, где $D_\nu(s)$ — определитель (39), составленный для области S_ν.

б$_2$) $\mu = 2q+1$, $n = 4q+2$.

В этом случае аналогичным способом находим

$$D_{2n-1}(s) = -D_0\left(\frac{1}{s}\right).$$

Таким образом, и в случае четного n определение регулярности не зависит от выбора области S_ν. Кроме того, отметим следующее

II. *При изменении* ν *на четное слагаемое корни* ξ' *и* ξ'' *квадратного уравнения* $D_\nu(s) = 0$ *(отвечающего регулярным краевым условиям) не меняются; при переходе от четного* ν *к нечетному они переходят в* $\frac{1}{\xi'}$, $\frac{1}{\xi''}$.

И, наконец, еще одно замечание. Если все числа $\alpha_1, \dots, \alpha_n$, $\beta_1, \dots, \beta_n$ действительны, то при переходе от S_{2n-1} к S_0 числа θ переходят в комплексно сопряженные. Следовательно, в этом случае независимость определения регулярности от выбора S_ν усматривается непосредственно.

Рассмотрим некоторые примеры регулярных краевых условий.

а) Условия типа Штурма при четном $n (n=2\mu)$. Так называются краевые условия вида

$$\left.\begin{aligned} &U_{j0}(y) \equiv y_0^{(k_j)} + \sum_{\nu=1}^{k_j-1} \alpha_{j\nu} y_0^{(\nu)} = 0, \\ &U_{j1}(y) \equiv y_1^{(k'_j)} + \sum_{\nu=1}^{k'_j-1} \beta_{j\nu} y_1^{(\nu)} = 0, \\ &j = 1, 2, \ldots, \mu, \end{aligned}\right\} \tag{40}$$

где

$$n-1 \geqslant k_1 > k_2 > \ldots > k_\mu \geqslant 0; \quad n-1 \geqslant k'_1 > k'_2 > \ldots > k'_\mu \geqslant 0,$$

здесь половина условий содержит значения функции y и ее производных только в точке $x=0$, а половина — только в точке $x=1$.

В этом случае *)

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \pm \begin{vmatrix} \omega_1^{k_1} & \ldots & \omega_{\mu-1}^{k_1} & \omega_\mu^{k_1} & \omega_{\mu+1}^{k_1} & 0 & \ldots & 0 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{k_\mu} & \ldots & \omega_{\mu-1}^{k_\mu} & \omega_\mu^{k_\mu} & \omega_{\mu+1}^{k_\mu} & 0 & \ldots & 0 \\ 0 & \ldots & 0 & s\omega_\mu^{k'_1} & \frac{1}{s}\omega_{\mu+1}^{k'_1} & \omega_{\mu+2}^{k'_1} & \ldots & \omega_n^{k'_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 0 & \ldots & 0 & s\omega_\mu^{k'_\mu} & \frac{1}{s}\omega_{\mu+1}^{k'_\mu} & \omega_{\mu+2}^{k'_\mu} & \ldots & \omega_n^{k'_\mu} \end{vmatrix};$$

следовательно,

$$\theta_0 = 0,$$

$$\theta_1 = \pm \begin{vmatrix} \omega_1^{k_1} & \ldots & \omega_{\mu-1}^{k_1} & \omega_{\mu+1}^{k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{k_\mu} & \ldots & \omega_{\mu-1}^{k_\mu} & \omega_{\mu+1}^{k_\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_\mu^{k'_1} & \omega_{\mu+2}^{k'_1} & \ldots & \omega_n^{k'_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_\mu^{k'_\mu} & \omega_{\mu+2}^{k'_\mu} & \ldots & \omega_n^{k'_\mu} \end{vmatrix}, \tag{41}$$

$$\theta_{-1} = \pm \begin{vmatrix} \omega_1^{k_1} & \ldots & \omega_\mu^{k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{k_\mu} & \ldots & \omega_\mu^{k_\mu} \end{vmatrix} \begin{vmatrix} \omega_{\mu+1}^{k'_1} & \ldots & \omega_n^{k'_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{\mu+1}^{k'_\mu} & \ldots & \omega_n^{k'_\mu} \end{vmatrix}. \tag{42}$$

---

*) Знак $\pm$ получается потому, что строки здесь расположены не в таком порядке, как в формуле (39).

Все определители в формулах (41) и (42) отличны от нуля; следовательно, *условия типа Штурма регулярны* *). Докажем, например (считая для определенности $\nu = 2n-1$), что не равен нулю определитель

$$\alpha = \begin{vmatrix} \omega_1^{k_1} & \dots & \omega_{\mu-1}^{k_1} & \omega_{\mu+1}^{k_1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_1^{k_\mu} & \dots & \omega_{\mu-1}^{k_\mu} & \omega_{\mu+1}^{k_\mu} \end{vmatrix};$$

для остальных определителей доказательство проводится аналогично.

Прежде всего заметим, что точки $\omega_1, \dots, \omega_{\mu-1}, \omega_{\mu+1}$ лежат на одной полуокружности (радиуса единица, с центром в точке нуль). Это вытекает непосредственно из их определения (см. (4) п. 2). Поэтому, с точностью до порядка следования элементов, последовательность $(\omega_1, \dots, \omega_{\mu-1}, \omega_{\mu+1})$ совпадает с последовательностью $\left(p, pe^{i\frac{2\pi}{n}}, \dots, pe^{i\frac{2\pi}{n}(\mu-1)}\right)$, где p — некоторое число, равное по модулю единице. Следовательно, полагая $e^{i\frac{2\pi}{n}k_j} = \alpha_j$, мы имеем

$$\alpha = \pm\, p^{k_1+\dots+k_\mu} \begin{vmatrix} 1 & \alpha_1 & \dots & \alpha_1^{\mu-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \alpha_\mu & \dots & \alpha_\mu^{\mu-1} \end{vmatrix}.$$

Так как все k_j различны и $0 \leqslant k_j \leqslant n-1$, то среди чисел $\alpha_1, \dots, \alpha_\mu$ нет одинаковых, а поэтому $\alpha \neq 0$.

Заметим еще, что поскольку $\theta_0 = 0$, то условия Штурма *усиленно регулярны* в том смысле, что $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$.

б) Условия периодического типа. Так называются условия вида

$$U_\nu(y) \equiv y_0^{(\nu)} - y_1^{(\nu)} = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \dots, n-1.$$

Условия периодического типа регулярны.

---

*) В первом издании этой книги содержалось более слабое утверждение. На возможность приведенного здесь уточнения автору любезно указал Г. М. Кесельман.

Действительно, при n четном ($n = 2\mu$)

$$
\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =
$$

$$
= \pm \begin{vmatrix}
1 & \ldots & 1 & 1-s & 1-\frac{1}{s} & 1 & \ldots & 1 \\
\omega_1 & \ldots & \omega_{\mu-1} & \omega_\mu (1-s) & \omega_{\mu+1}\left(1-\frac{1}{s}\right) & \omega_{\mu+2} & \ldots & \omega_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\omega_1^{n-1} & \ldots & \omega_{\mu-1}^{n-1} & \omega_\mu^{n-1}(1-s) & \omega_{\mu+1}^{n-1}\left(1-\frac{1}{s}\right) & \omega_{\mu+2}^{n-1} & \ldots & \omega_n^{n-1}
\end{vmatrix} =
$$

$$
= \pm C(1-s)\left(1-\frac{1}{s}\right),
$$

где C — определитель Вандермонда чисел $\omega_1, \ldots, \omega_n$, и следовательно, $C \neq 0$.

Отсюда

$$
\theta_0 = \pm 2C; \quad \theta_1 = \theta_{-1} = \pm C \neq 0;
$$

т. е. условия регулярны.

При n нечетном ($n = 2\mu - 1$)

$$
\theta_0 + \theta_1 s =
$$

$$
= \pm \begin{vmatrix}
1 & \ldots & 1 & 1-s & 1 & \ldots & 1 \\
\omega_1 & \ldots & \omega_{\mu-1} & (1-s)\omega_\mu & \omega_{\mu+1} & \ldots & \omega_n \\
\cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\
\omega_1^{n-1} & \ldots & \omega_{\mu-1}^{n-1} & (1-s)\omega_\mu^{n-1} & \omega_{\mu+1}^{n-1} & \ldots & \omega_n^{n-1}
\end{vmatrix} = \pm C(1-s).
$$

Отсюда видно, что и в этом случае условия регулярны.

в) Краевые условия при $n = 2$. Наиболее общие краевые условия при $n = 2$ имеют вид

$$
\left.\begin{aligned}
a_1 y_0' + b_1 y_1' + a_0 y_0 + b_0 y_1 = 0, \\
c_1 y_0' + d_1 y_1' + c_0 y_0 + d_0 y_1 = 0.
\end{aligned}\right\} \tag{43}
$$

Рассмотрим следующие случаи:

1) $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$. Решая (43) относительно y_0' и y_1', можно привести условия к виду

$$
\begin{aligned}
y_0' + \alpha_{11} y_0 + \alpha_{12} y_1 = 0, \\
y_1' + \alpha_{21} y_0 + \alpha_{22} y_2 = 0.
\end{aligned}
$$

В этом случае

$$
\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ s\omega_1 & \frac{1}{s}\omega_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{s} - s,
$$

следовательно,

$$\theta_0 = 0, \quad \theta_1 = -1, \quad \theta_{-1} = 1,$$

т. е. условия регулярны.

2) $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0$, $|a_1| + |b_1| > 0$. В этом случае условия (43) можно привести к виду

$$a_1 y_0' + b_1 y_1' + a_0 y_0 + b_0 y_1 = 0,$$
$$c_0 y_0 + d_0 y_1 = 0,$$

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} (a_1 + s b_1)\,\omega_1 & -\left(a_1 + \frac{1}{s} b_1\right)\omega_1 \\ c_0 + s d_0 & c_0 + \frac{1}{s} d_0 \end{vmatrix} =$$
$$= \omega_1 (b_1 c_0 + a_1 d_0)\left(s + \frac{1}{s}\right) + 2(a_1 c_0 + b_1 d_0)\,\omega_1;$$

таким образом, условия регулярны, если

$$b_1 c_0 + a_1 d_0 \neq 0.$$

3) $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$. Так как формы (43) должны быть независимыми, то в этом случае $a_0 d_0 - b_0 c_0 \neq 0$; следовательно, условия (43) эквивалентны условиям

$$y_0 = 0, \quad y_1 = 0.$$

Отсюда

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s} - s,$$

т. е. условия регулярны.

Итак, *при* $n = 2$ *условия* (43) *регулярны в следующих случаях*:

1) $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$;
2) $a_1 d_1 - b_1 c_1 = 0$, $|a_1| + |b_1| > 0$, $b_1 c_0 + a_1 d_0 \neq 0$;
3) $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$, $a_0 d_0 - b_0 c_0 \neq 0$.

9. Асимптотика собственных значений. Результаты п° 5 дают возможность установить существование бесчисленного множества собственных значений дифференциального оператора, порожденного регулярными краевыми условиями, и получить асимптотические выражения для этих собственных значений при больших значениях их модуля. Оказывается, что главные члены этих выражений не зависят от вида дифференциального выражения и краевых условий, порождающих дифференциальный оператор. При этом существенную роль играют только числа θ_0, θ_1 и θ_0, θ_1, θ_{-1}, определенные при данных краевых условиях формулами (38) и (39) для нечетного и четного n соответственно. В теореме 2 ниже мы предполагаем (и для краткости не оговариваем этого в условии теоремы), что коэффициенты рассматриваемого дифференциального выражения непрерывны в интервале $[0, 1]$. Заметим, однако, что фактически все результаты этого пункта остаются верными и тогда, когда коэффициенты дифференциального выражения — произвольные функции, суммируемые в интервале $[0, 1]$.

Теорема 2. *Собственные значения дифференциального оператора n-го порядка в интервале* $[0, 1]$, *порожденного регулярными краевыми условиями, образуют две бесконечные последовательности* λ'_k, λ''_k $(k = N, N+1, N+2, \ldots)$, *где N — некоторое целое число.*

При нечетном) n, $n = 4q - 1$,*

$$\lambda'_k = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{44а}$$

$$\lambda''_k = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{44б}$$

а для нечетного n, $n = 4q + 1$,

$$\lambda'_k = (2k\pi i)^n \left[1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{44а$'$}$$

$$\lambda''_k = (-2k\pi i)^n \left[1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right]; \tag{44б$'$}$$

где $\xi^{(1)}$ и $\xi^{(2)}$ — определенные ранее корни уравнения $\theta_1\xi + \theta_0 = 0$, отвечающего области S_ν с ν, соответственно нечетным и четным.

При четном n, $n = 2\mu$, и $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 \neq 0$

$$\lambda'_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{45а}$$

$$\lambda''_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right], \tag{45б}$$

где ξ' и ξ'' — корни уравнения

$$\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0, \tag{46}$$

отвечающего области S_0, причем верхний знак в формулах (45) *соответствует четному, а нижний — нечетному μ.*

Наконец, при четном n, $n = 2\mu$, и $\theta_0^2 - 4\theta_{-1}\theta_1 = 0$

$$\lambda'_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \tag{47а}$$

$$\lambda''_k = (-1)^\mu (2k\pi)^n \left[1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right], \tag{47б}$$

*) Здесь $\ln_0 \xi$ обозначает какое-нибудь фиксированное значение натурального логарифма.

и

где ξ — *(двойной) корень уравнения* (46), *отвечающего области* S_0, *а выбор верхнего или нижнего знака в формулах* (47) *следует производить по такому же правилу, как в* (45).

В первых трех случаях все собственные значения, начиная с некоторого, простые, а в четвертом, — *начиная с некоторого, простые, или двукратные.*

Доказательство. Разберем сначала случай нечетного n; пусть $n = 2\mu - 1$. Рассмотрим фиксированную область T; пусть числа ω_k занумерованы так, что при $\rho \in T$

$$\Re((\rho + c)\,\omega_1) \leqslant \Re((\rho + c)\,\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \Re((\rho + c)\,\omega_n). \tag{48}$$

Положим

$$\tilde{\rho}_k = (\rho + c)\,\omega_k, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{49}$$

Точки $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \ldots, \tilde{\rho}_n$ лежат на окружности радиуса $|\rho + c|$ на одинаковом угловом расстоянии $\frac{2\pi}{n} = \frac{2\pi}{2\mu - 1}$ друг от друга; поэтому на правой замкнутой полуокружности их не больше, чем μ. Действительно, если их там было бы по меньшей мере $\mu + 1$, то мы пришли бы к противоречивому неравенству (рис. 10)

$$\pi \geqslant \frac{2\pi}{2\mu - 1}\,\mu > \pi,$$

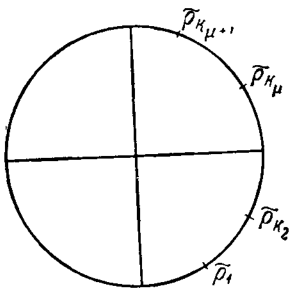

Рис. 10.

ибо угловая мера полуокружности есть π. Отсюда из неравенств (48) следует, что по крайней мере первые $\mu - 1$ точек $\tilde{\rho}_1, \tilde{\rho}_2, \ldots, \tilde{\rho}_{\mu-1}$ должны находиться в левой открытой полуплоскости, аналогично последние $\mu - 1$ точек $\tilde{\rho}_{\mu+1}, \tilde{\rho}_{\mu+2}, \ldots, \tilde{\rho}_{2\mu-1}$ находятся в правой открытой полуплоскости. Другими словами,

$$\Re(\tilde{\rho}_1) < 0, \qquad \Re(\tilde{\rho}_2) < 0,\ \ldots,\ \Re(\tilde{\rho}_{\mu-1}) < 0, \tag{50а}$$

$$\Re(\tilde{\rho}_{\mu+1}) > 0, \quad \Re(\tilde{\rho}_{\mu+2}) > 0,\ \ldots,\ \Re(\tilde{\rho}_{2\mu-1}) > 0. \tag{50б}$$

Если $\rho \to \infty$, *оставаясь в области* T, *то левые части* (50а) *и* (50б) *стремятся к* $-\infty$ *и* $+\infty$ *соответственно.*

Действительно, $\Re(\tilde{\rho}_{\mu-1})$, например, не будет стремиться к $-\infty$ лишь тогда, когда угловое расстояние между $\tilde{\rho}_{\mu-1}$ и отрицательной или положительной мнимой полуосью стремится к нулю, но тогда при достаточно большом $|\rho|$, на дуге

$$\frac{\pi}{2} - \varepsilon \leqslant \arg\rho \leqslant \frac{\pi}{2} + \varepsilon$$

разместятся $\mu+1$ точек $\tilde{\rho}_{\mu-1}, \tilde{\rho}_\mu, \ldots, \tilde{\rho}_n$. Отсюда следует, что

$$\pi + 2\varepsilon \geqslant \frac{2\pi\mu}{2\mu-1}$$

при сколь угодно малом $\varepsilon > 0$, что невозможно.

Из доказанного нами утверждения вытекает, что при $\rho \to \infty$, $\rho \in T$,

а) $e^{\tilde{\rho}_j}$ *экспоненциально стремится к нулю, если* $j < \mu$;

б) e^{ρ_j} *экспоненциально стремится к бесконечности, если* $j > \mu$.

Согласно теореме 1 n° 5 в области T имеется n независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$ уравнения $l(y) + \rho^n y = 0$, таких, что

$$\left.\begin{aligned} y_k &= e^{\rho\omega_k x}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ y_k' &= \rho e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y_k^{(n-1)} &= \rho^{n-1} e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k^{n-1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{51}$$

Составим при помощи этих решений определитель $\Delta(\lambda) = \det(U_\nu(y_j))$; по доказанному в n° 1 § 2 собственные значения суть нули этого определителя.

Поэтому займемся определителем $\Delta(\lambda)$.

Для краткости введем обозначение

$$[a] = a + O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Подставляя выражения (51) в нормированные формы $U_\nu(y)$, имеем

$$U_{\nu 0}(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\left[\alpha_\nu + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = (\rho\omega_j)^{k_\nu}[\alpha_\nu],$$

$$U_{\nu 1}(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j}\left[\beta_\nu + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] = (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j}[\beta_\nu],$$

откуда

$$U_\nu(y_j) = U_{\nu 0}(y_j) + U_{\nu 1}(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}\{[\alpha_\nu] + e^{\rho\omega_j}[\beta_\nu]\}.$$

Но если $j < \mu$, то функция

$$e^{\rho\omega_j} = e^{-c\omega_j} e^{\tilde{\rho}_j}$$

экспоненциально убывает при $\rho \to \infty$, $\rho \in T$; следовательно,

$$U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu}[\alpha_\nu] \quad \text{при} \quad j < \mu. \tag{52а}$$

Аналогично

$$U_\nu(y_j) = (\rho\omega_j)^{k_\nu} e^{\rho\omega_j}[\beta_\nu] \quad \text{при} \quad j > \mu. \tag{52б}$$

Наконец,

$$U_\nu(y_\mu)=(\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\left\{[\alpha_\nu]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_\nu]\right\}. \tag{52в}$$

Подставим все эти выражения в уравнение

$$\Delta=\det(U_\nu(y_j))=0 \tag{53}$$

и сократим на общие множители $\rho^{k_1}, \rho^{k_2}, \ldots, \rho^{k_n}$ строк и $e^{\rho\omega_{\mu+1}}, e^{\rho\omega_{\mu+2}}, \ldots, e^{\rho\omega_n}$ последних столбцов определителя $\Delta(\lambda)$. Тогда это уравнение запишется в виде

$$\Delta_0=0,$$

где

$$\Delta_0=\begin{vmatrix} [\alpha_1]\,\omega_1^{k_1} & \ldots & [\alpha_1]\,\omega_{\mu-1}^{k_1} & \left([\alpha_1]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_1]\right)\omega_\mu^{k_1} & [\beta_1]\,\omega_{\mu+1}^{k_1} & \ldots & [\beta_1]\,\omega_n^{k_1} \\ [\alpha_2]\,\omega_1^{k_2} & \ldots & [\alpha_2]\,\omega_{\mu-1}^{k_2} & \left([\alpha_2]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_2]\right)\omega_\mu^{k_2} & [\beta_2]\,\omega_{\mu+1}^{k_2} & \ldots & [\beta_2]\,\omega_n^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [\alpha_n]\,\omega_1^{k_n} & \ldots & [\alpha_n]\,\omega_{\mu-1}^{k_n} & \left([\alpha_n]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_n]\right)\omega_\mu^{k_n} & [\beta_n]\,\omega_{\mu+1}^{k_n} & \ldots & [\beta_n]\,\omega_n^{k_n} \end{vmatrix} \tag{54}$$

Согласно определению чисел θ_0 и θ_1 (см. (38) n° 8) из формулы (54) вытекает, что

$$\Delta_0=[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1].$$

Если ρ есть корень уравнения $\Delta_0=0$, то

$$e^{\rho\omega_\mu}=-\frac{[\theta_0]}{[\theta_1]},$$

т. е.

$$e^{\rho\omega_\mu}=-\frac{\theta_0+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}{\theta_1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)}=-\frac{\theta_0}{\theta_1}\left\{1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}=\xi\left\{1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}, \tag{55}$$

ибо в силу регулярности краевых условий $\theta_0\neq 0$, $\theta_1\neq 0$. Поэтому

$$\rho=\frac{1}{\omega_\mu}\left\{\ln_0\xi+2k\pi i+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right\}, \qquad k=0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \ldots \tag{56}$$

Докажем теперь, что действительно существуют нули функции Δ, определяемые формулой (56).

Положим

$$\rho_k=\frac{1}{\omega_\mu}(2k\pi i+\ln_0\xi); \tag{57}$$

тогда соотношение (56) перепишется в виде

$$\rho=\rho_k+O\left(\frac{1}{\rho}\right), \qquad k=1,\ 2,\ \ldots \tag{58}$$

Очевидно, что числа ρ_k расположены параллельно биссектрисе области T, и потому возможен только один выбор знака целого числа k, так что для данной области T числа k либо только положительны, либо только отрицательны. Более точно:

a) При $n = 4q - 1$:
для области T с четным индексом следует брать $k > 0$, а для области T с нечетным индексом $k < 0$.

a₁) При $n = 4q + 1$:
для области T с четным индексом следует брать $k < 0$, а для области T с нечетным индексом $k > 0$.

Опишем теперь около каждой точки ρ_k окружность Γ_k одного и того же радиуса r. В силу только что сказанного, при k достаточно большом, эти окружности будут целиком находиться в области T. Уравнение (53) эквивалентно уравнению (55); так как $\xi = e^{\rho_k \omega_\mu}$, то это последнее можно переписать в виде

$$e^{\omega_\mu (\rho - \rho_k)} - 1 - O\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0. \tag{59}$$

Вне окружностей Γ_k *функция*

$$f = e^{\omega_\mu (\rho - \rho_k)} - 1 = e^{\omega_\mu (\rho - \rho_0)} - 1$$

ограничена снизу положительным числом. Действительно, введем новую переменную ζ, полагая

$$\omega_\mu (\rho - \rho_0) = \zeta.$$

Тогда

$$f = e^{\zeta} - 1$$

и окружности Γ_k перейдут в окружности Γ'_k того же радиуса r вокруг точек $\zeta_k = 2k\pi i$.

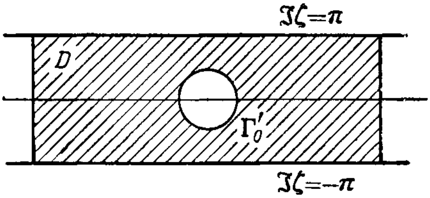

Рис. 11.

Так как $f = f(\zeta)$ — периодическая функция с периодом $2\pi i$, то достаточно доказать ее ограниченность снизу в области D, ограниченной прямыми $\Im\zeta = \pm\pi$ и окружностью Γ'_0 (рис. 11). Но в этой области функция $f(\zeta)$ не обращается в нуль, и при $|\Re\zeta|$ достаточно большом ($|\Re\zeta| > N$) функция $f(\zeta)$ ограничена снизу, ибо

$$\lim_{\Re\zeta \to +\infty} |f(\zeta)| = \infty,$$

$$\lim_{\Re\zeta \to -\infty} |f(\zeta)| = 1.$$

Отсюда следует наше утверждение. Из него заключаем, что при достаточно большом $|\rho|$ функция Δ не имеет нулей вне окружностей Γ_k.

Пусть m — минимум функции $|e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)}-1|$ на Γ_k; так как на Γ_k $\rho-\rho_k=re^{i\theta}$, то m не зависит от k. На этой же окружности $\left|O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right|<m$ при достаточно большом $|\rho|$. В силу известной теоремы Руше (см., например, Привалов [1]), отсюда следует, что уравнение (59) имеет внутри Γ_k столько же корней, сколько их там имеет уравнение $e^{\omega_\mu(\rho-\rho_k)}-1=0$, т. е. точно один корень, который обозначим через ρ'_k.

В силу (56)

$$\rho'_k=\frac{1}{\omega_\mu}\left\{2k\pi i+\ln_0\xi+O\left(\frac{1}{\rho'_k}\right)\right\};$$

с другой стороны, в силу этой же формулы

$$O\left(\frac{1}{\rho'_k}\right)=O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Поэтому

$$\rho'_k=\frac{1}{\omega_\mu}\left\{2k\pi i+\ln_0\xi+O\left(\frac{1}{k}\right)\right\},$$

или

$$\rho'_k=\frac{2k\pi i}{\omega_\mu}\left\{1+\frac{\ln_0\xi}{2k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\}. \tag{60}$$

Если теперь применить формулу (60) к каждой из областей T и учесть высказанные ранее соображения относительно выбора знака k, то после возведения в n-ю степень получатся в точности формулы (44).

Простота этих собственных значений при достаточно большом $|k|$ вытекает из того, что, по доказанному выше, они являются простыми нулями определителя $\Delta(\lambda)$.

Перейдем теперь к случаю четного n; пусть $n=2\mu$. Рассмотрим снова фиксированную область T, для которой имеют место неравенства (48). Рассуждая так же, как и в случае нечетного n, придем к выводу, что

$$\Re(\rho_1)<0,\quad \Re(\rho_2)<0,\quad \ldots,\quad \Re(\rho_{\mu-1})<0, \tag{61}$$

$$\Re(\rho_{\mu+2})>0,\quad \Re(\rho_{\mu+3})>0,\quad \ldots,\quad \Re(\rho_n)>0, \tag{62}$$

причем левые части неравенств (61) и (62) стремятся соответственно к $-\infty$ и $+\infty$, когда $\rho\to\infty$, оставаясь в данной области T.

Отсюда, как и в случае нечетного n, заключаем, что в области T

$$\left.\begin{aligned} U_\nu(y_j)&=(\rho\omega_j)^{k_\nu}[\alpha_\nu] && \text{при } j\leqslant\mu-1,\\ U_\nu(y_j)&=(\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}[\beta_\nu] && \text{при } j\geqslant\mu+2 \end{aligned}\right\} \tag{63}$$

и, кроме того,

$$U_\nu(y_\mu) = (\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\left\{[\alpha_\nu] + e^{\rho\omega_\mu}[\beta_\nu]\right\}, \tag{64а}$$

$$U_\nu(y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\left\{[\alpha_\nu] + e^{\rho\omega_{\mu+1}}[\beta_\nu]\right\}. \tag{64б}$$

Уравнение четной степени $\omega^n + 1 = 0$ вместе с корнем ω_k содержит также корень $-\omega_k$, отсюда и из неравенств (48) следует, что

$$\Re(\tilde\rho_\mu) \leqslant 0, \quad \Re(\tilde\rho_{\mu+1}) \geqslant 0$$

и

$$\omega_1 = -\omega_n, \quad \omega_2 = -\omega_{n-1}, \quad \ldots, \quad \omega_\mu = -\omega_{\mu+1}.$$

Поэтому (64б) можно переписать в виде

$$U_\nu(y_{\mu+1}) = (\rho\omega_{\mu+1})^{k_\nu}\left\{[\alpha_\nu] + e^{-\rho\omega_\mu}[\beta_\nu]\right\}. \tag{64б$'$}$$

Подставляя в уравнение $\Delta = 0$ выражения (63), (64) для $U_\nu(y_j)$ и произведя сокращения, получим уравнение вида

$$\Delta_0 = 0, \tag{65}$$

где

$$\Delta_0 = \det(A, B), \tag{66}$$

$$A = \begin{Vmatrix} [\alpha_1\omega_1^{k_1}] & \ldots & [\alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1}] & \omega_\mu^{k_1}\left\{[\alpha_1] + e^{\rho\omega_\mu}[\beta_1]\right\} \\ [\alpha_2\omega_1^{k_2}] & \ldots & [\alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2}] & \omega_\mu^{k_2}\left\{[\alpha_2] + e^{\rho\omega_\mu}[\beta_2]\right\} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [\alpha_n\omega_1^{k_n}] & \ldots & [\alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n}] & \omega_\mu^{k_n}\left\{[\alpha_n] + e^{\rho\omega_\mu}[\beta_n]\right\} \end{Vmatrix},$$

$$B = \begin{Vmatrix} \omega_{\mu+1}^{k_1}\left\{[\alpha_1] + e^{-\rho\omega_\mu}[\beta_1]\right\} & [\beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1}] & \ldots & [\beta_1\omega_n^{k_1}] \\ \omega_{\mu+1}^{k_2}\left\{[\alpha_2] + e^{-\rho\omega_\mu}[\beta_2]\right\} & [\beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2}] & \ldots & [\beta_2\omega_n^{k_2}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \omega_{\mu+1}^{k_n}\left\{[\alpha_n] + e^{-\rho\omega_\mu}[\beta_n]\right\} & [\beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n}] & \ldots & [\beta_n\omega_n^{k_n}] \end{Vmatrix}.$$

По определению чисел θ_0, θ_1, θ_{-1} (см. (39) n° 8)

$$\Delta_0 = [\theta_0] + [\theta_1]e^{\rho\omega_\mu} + [\theta_{-1}]e^{-\rho\omega_\mu},$$

следовательно,

$$e^{\rho\omega_\mu}\Delta_0 = [\theta_1]e^{2\rho\omega_\mu} + [\theta_0]e^{\rho\omega_\mu} + [\theta_{-1}] = \theta_1 e^{2\rho\omega_\mu} + \theta_0 e^{\rho\omega_\mu} + \theta_{-1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right), \tag{67}$$

ибо в силу соотношения $\Re(\tilde\rho_\mu) \leqslant 0$

$$\left|e^{\rho\omega_\mu}\right| = \left|e^{\tilde\rho_\mu}\right|\left|e^{-c\omega_\mu}\right| \leqslant \left|e^{-c\omega_\mu}\right|,$$

т. е. функция $e^{\rho\omega_\mu}$ ограничена в области T.

Рассмотрим квадратное уравнение

$$\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = 0; \tag{68}$$

пусть ξ' и ξ'' — его корни, так что

$$\theta_1\xi^2 + \theta_0\xi + \theta_{-1} = \theta_1(\xi - \xi')(\xi - \xi'').$$

Тогда (67) перепишется в виде

$$e^{\rho\omega_\mu}\Delta_0 = \theta_1\left(e^{\rho\omega_\mu} - \xi'\right)\left(e^{\rho\omega_\mu} - \xi''\right) + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{69}$$

Уравнения

$$e^{\rho\omega_\mu} - \xi' = 0, \quad e^{\rho\omega_\mu} - \xi'' = 0$$

имеют соответственно корни

$$\hat{\rho}'_k = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi' + 2k\pi i) \quad \hat{\rho}''_k = \frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi'' + 2k\pi i), \tag{70}$$
$$k = 0, \ \pm 1, \ \pm 2, \ \pm 3, \ \ldots,$$

Для нас интерес представляют только те из них, которые лежат внутри области T. Отметим, что эти корни располагаются на прямой, параллельной стороне сектора S (рис. 12).

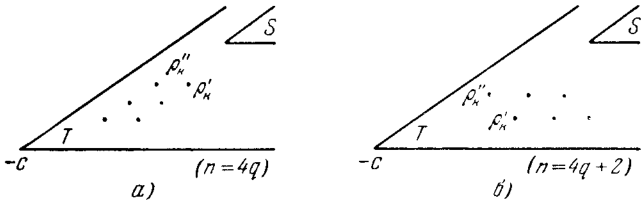

Рис. 12.

Действительно, будем для определенности предполагать, что рассматриваемым сектором является область S_0. Тогда

$$\omega_\mu = -ie^{-\frac{i\pi}{n}} \quad \text{при} \quad n = 4q,$$
$$\omega_\mu = i \quad \text{при} \quad n = 4q + 2.$$

Следовательно,

$$\hat{\rho}'_k = e^{\frac{i\pi}{n}}(i\ln_0 \xi' - 2k\pi), \quad \hat{\rho}''_k = e^{\frac{i\pi}{n}}(i\ln_0 \xi'' - 2k\pi) \quad \text{при} \quad n = 4q$$

и

$$\hat{\rho}'_k = -i\ln_0 \xi' + 2k\pi, \qquad \hat{\rho}''_k = -i\ln_0 \xi'' + 2k\pi \qquad \text{при} \quad n = 4q + 2.$$

Отсюда также вытекает, что при $n = 4q$ все корни с $k < 0$, а при $n = 4q + 2$ все корни с $k > 0$ лежат внутри области T_0

на положительном расстоянии от ее границы, если только надлежащим образом выбрать вершину $\rho=-c$ этой области. В первом из этих случаев мы заменим k на $-k$; в результате получим последовательности

$$\rho'_k=\frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0\xi'\mp 2k\pi i),\quad \rho''_k=\frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0\xi''\mp 2k\pi i)\quad k=1,\ 2,\ \ldots, \tag{70a}$$

принадлежащие области T_0 при условии, что в случае $n=4q$ берется верхний знак, а в случае $n=4q+2$ — нижний. Используя ρ'_k, ρ''_k и принимая во внимание (69), можно преобразовать уравнение $\Delta_0=0$ к виду

$$\left[e^{\omega_\mu(\rho-\rho'_k)}-1\right]\left[e^{\omega_\mu(\rho-\rho''_k)}-1\right]+O\left(\frac{1}{\rho}\right)=0. \tag{71}$$

Около каждой из точек ρ'_k, ρ''_k $(k=1,\ 2,\ \ldots)$ опишем окружность соответственно Γ'_k и Γ''_k одного и того же радиуса. При достаточно малом r эти окружности будут содержаться целиком в области T_0.

Применяя, как и в случае нечетного n, теорему Руше, при достаточно большом $|\rho|$, $\rho\in T$, заключаем, что при достаточно большом $|\rho|$ уравнение $\Delta_0=0$ может иметь нули только внутри Γ'_k и Γ''_k и притом имеет их столько, сколько их там имеет уравнение

$$\left[e^{\omega_\mu(\rho-\rho'_k)}-1\right]\left[e^{\omega_\mu(\rho-\rho''_k)}-1\right]=0. \tag{72}$$

Пусть теперь $\theta_0^2-4\theta_1\theta_{-1}\neq 0$; тогда $\xi'\neq\xi''$; следовательно, числа ρ'_k и ρ''_k, а потому и круги Γ'_k и Γ''_k отличны друг от друга.

В каждом из этих кругов уравнение (72), а значит, и уравнение $\Delta_0=0$, имеет в точности один корень; обозначим эти корни через $\tilde\rho'_k$ и $\tilde\rho''_k$ соответственно.

В круге Γ'_k множитель $e^{\omega_\mu(\rho-\rho''_k)}-1$ ограничен снизу; в силу (71) отсюда следует, что в круге Γ'_k уравнение $\Delta=0$ эквивалентно уравнению

$$e^{\omega_\mu(\rho-\rho'_k)}-1=O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Поэтому

$$\tilde\rho'_k=\rho'_k+O\left(\frac{1}{\rho}\right);$$

и аналогично

$$\tilde\rho''_k=\rho''_k+O\left(\frac{1}{\rho}\right).$$

Отсюда, как и в случае нечетного n, получается

$$\tilde{\rho}'_k = \mp \frac{2k\pi i}{\omega_\mu}\left[1 \mp \frac{\ln_0 \xi'}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right];$$

аналогичная формула имеет место для $\tilde{\rho}''_k$. Возводя теперь в n-ю степень, приходим к формулам (45).

Следует подчеркнуть, что рассмотрение области T_k с нечетным индексом k не приведет к новой последовательности собственных значений. Действительно, если при $n=4q$ вместо области T_0 рассматривать подходящую область T_1, то ξ' и ξ'' перейдут в $\frac{1}{\xi'}$ и $\frac{1}{\xi''}$, а их логарифмы — в $-\ln_0 \xi'$ и $-\ln_0 \xi''$ с точностью до слагаемого вида $2k\pi i$. С другой стороны, как вытекает из рассмотрений n° 8, одновременно ω_μ заменяется на $-\omega_\mu$. Теперь точки $\frac{1}{\omega_\mu}(\ln_0 \xi' + 2k\pi i)$ принадлежат области T_1 лишь при $k>0$, а это означает, что при $\mu = 4\nu$ в формулах (70) следует взять знак плюс. Поэтому ρ'_k, а также ρ''_k остаются без изменения. Поскольку в это же время уравнение (71) умножается лишь на некоторое число, то $\tilde{\rho}'_k$, $\tilde{\rho}''_k$ сохраняют прежние значения. Нечто подобное происходит при $n=4q+2$, когда мы переходим от области T_0 к области T_{2n-1}. Таким образом, для больших $|\rho|$ числа (45) являются единственными собственными значениями оператора L.

Пусть теперь $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} = 0$. Тогда $\xi' = \xi''$; следовательно, $\hat{\rho}'_k = \hat{\rho}''_k$ и круги Γ'_k, Γ''_k совпадают. Поэтому уравнение $\Delta_0 = 0$ имеет в каждом таком круге в точности два корня, которые в отдельных частных случаях могут слиться в один двойной корень.

Пусть $\tilde{\rho}_k$ — один из этих двух корней. Уравнение (71) принимает в данном случае вид

$$\left[e^{\omega_\mu(\rho - \rho'_k)} - 1\right]^2 + O\left(\frac{1}{\rho}\right) = 0.$$

Отсюда

$$e^{\omega_\mu(\rho - \rho'_k)} - 1 + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\right) = 0,$$

следовательно,

$$\tilde{\rho}_k = \rho'_k + O\left(\frac{1}{\sqrt{|\rho|}}\right).$$

Возводя обе части этого соотношения в n-ю степень, приходим к формулам (47).

Замечание. Если коэффициенты $p_2(x), \ldots, p_n(x)$ имеют непрерывные производные до некоторого порядка, то можно получить более точные асимптотические формулы, содержащие более высокие степени $\frac{1}{\rho}$ (см., например, Биркгоф [2], Лангер [1–10], Тамаркин [1–3]).

10. Асимптотика собственных функций. Применим теперь результаты n°n° 5 и 9 к нахождению асимптотических формул для собственных функций при больших по модулю собственных значениях.

При этом мы снова предполагаем, что L — дифференциальный оператор в интервале $[0, 1]$, порожденный дифференциальным выражением с непрерывными коэффициентами и регулярными краевыми условиями.

Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — линейно независимые решения уравнения $l(y) + \rho^n y = 0$, удовлетворяющие соотношениям (17) в некоторой области T (см. n° 5 теорема 1); собственная функция y, соответствующая данному значению $\lambda = -\rho^n$, должна быть линейной комбинацией функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$:

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_n y_n,$$

коэффициенты которой суть нетривиальные решения однородной системы

$$U_\nu(y_1) c_1 + U_\nu(y_2) c_2 + \ldots + U_\nu(y_n) c_n = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

Следовательно, они пропорциональны алгебраическим дополнениям какой-нибудь строки определителя этой системы *). Поэтому

$$y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \ldots & U_2(y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \ldots & U_n(y_n) \end{vmatrix}, \tag{73}$$

если не все миноры элементов первой строки этого определителя равны нулю. (В противном случае $y_1, y_2, \ldots, y_n$ следует поместить в той строке, не все миноры элементов которой равны нулю.)

Рассмотрим отдельно случаи нечетного и четного n.

а) n нечетно; $n = 2\mu - 1$. Подставляя в (73) вместо y_j, $U_\nu(y_j)$ их выражения из (17) и (52) и разделив полученное выражение на несущественные множители $\rho^{k_2}, \rho^{k_3}, \ldots, \rho^{k_n}$,

*) Ради простоты мы рассматриваем лишь простые собственные значения, для них ранг матрицы $(u_i(y_j))$ равен $n - 1$.

$e^{\rho\omega_{\mu+1}}, \ldots, e^{\rho\omega_n}$, получим (ненормированную) собственную функцию y_0:

$$y_0 = \det(X_1, X_2), \tag{74}$$

где

$$X_1 = \begin{pmatrix} e^{\rho\omega_1 x}[1] & \ldots & e^{\rho\omega_{\mu-1}x}[1] & e^{\rho\omega_\mu x}[1] \\ [\alpha_2]\,\omega_1^{k_2} & \ldots & [\alpha_2]\,\omega_{\mu-1}^{k_2} & \left([\alpha_2] + e^{\rho\omega_\mu}[\beta_2]\right)\omega_\mu^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [\alpha_n]\,\omega_1^{k_n} & \ldots & [\alpha_n]\,\omega_{\mu-1}^{k_n} & \left([\alpha_n] + e^{\rho\omega_\mu}[\beta_n]\right)\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_2 = \begin{pmatrix} e^{\rho\omega_{\mu+1}(x-1)}[1] & \ldots & e^{\rho\omega_n(x-1)}[1] \\ [\beta_2]\,\omega_{\mu+1}^{k_2} & \ldots & [\beta_2]\,\omega_n^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [\beta_n]\,\omega_{\mu+1}^{k_n} & \ldots & [\beta_n]\,\omega_n^{k_n} \end{pmatrix}.$$

Для достаточно больших $|\lambda|$ число ρ должно совпадать с одним из чисел $\tilde{\rho}'_k$ или $\tilde{\rho}''_k$, лежащих в области T. Таким образом, для области T с нечетным индексом

$$\rho = \tilde{\rho}'_k = \frac{1}{\omega_\mu}\left[\mp 2k\pi i + \ln_0 \xi^{(1)} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right],$$

а для области T с четным индексом —

$$\rho = \tilde{\rho}''_k = \frac{1}{\omega_\mu}\left[\mp 2k\pi i + \ln_0 \xi^{(2)} + O\left(\frac{1}{k}\right)\right]$$

для всех натуральных k, начиная с некоторого, причем верхний знак соответствует $n = 4q - 1$, а нижний соответствует $n = 4q + 1$. Полагая

$$\rho_k^{(1)} = \frac{1}{\omega_\mu}\left(\mp 2k\pi i + \ln_0 \xi^{(1)}\right), \quad \rho_k^{(2)} = \frac{1}{\omega_\mu}\left(\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi^{(2)}\right),$$

имеем

$$\tilde{\rho}'_k = \rho_k^{(1)} + O\left(\frac{1}{k}\right), \quad \tilde{\rho}''_k = \rho_k^{(2)} + O\left(\frac{1}{k}\right).$$

Очевидно,

$$e^{\rho\omega_\nu x} = e^{\tilde{\rho}'_k \omega_\nu x} = e^{\rho_k^{(1)}\omega_\nu x}[1],$$

ибо

$$e^{O\left(\frac{1}{k}\right)} = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) + \left(O\left(\frac{1}{k}\right)\right)^2 + \ldots = 1 + O\left(\frac{1}{k}\right) = [1].$$

В частности, $e^{\rho\omega_\mu} = e^{\pm 2k\pi i + \ln_0 \xi}[1] = \xi[1]$.

Подставляя эти выражения в (74), получим следующую формулу для соответствующих собственных функций $y = y_k^{(1)}$,

$\sigma=1,\ 2$, отвечающих собственным значениям λ'_k, λ''_k определяемым формулами (44)

$$y_k^{(\sigma)}=\det\left(X_{1k}^{(\sigma)},\ X_{2k}^{(\sigma)}\right), \tag{75}$$

где

$$X_{1k}^{(\sigma)}=\begin{pmatrix} e^{\omega_1\rho_k^{(\sigma)}x}[1] & \ldots & e^{\omega_{\mu-1}\rho_k^{(\sigma)}x}[1] & e^{\omega_\mu\rho_k^{(\sigma)}x}[1] \\ [\alpha_2]\,\omega_1^{k_2} & \ldots & [\alpha_2]\,\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\alpha_2+\xi\beta_2]\,\omega_\mu^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [\alpha_n]\,\omega_1^{k_n} & \ldots & [\alpha_n]\,\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\alpha_n+\xi\beta_n]\,\omega_\mu^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}^{(\sigma)}=\begin{pmatrix} e^{\omega_{\mu+1}\rho_k^{(\sigma)}(x-1)}[1] & \ldots & e^{\omega_n\rho_k^{(\sigma)}(x-1)}[1] \\ [\beta_2]\,\omega_{\mu+1}^{k_2} & \ldots & [\beta_2]\,\omega_n^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [\beta_n]\,\omega_{\mu+1}^{k_n} & \ldots & [\beta_n]\,\omega_n^{k_n} \end{pmatrix},$$

$k=N,\ N+1,\ \ldots;\ N$ — достаточно большое натуральное число, а $\sigma=1,\ 2$.

б) n четно; $n=2\mu$. Повторяя предыдущие рассуждения, получим две последовательности собственных функций, соответствующих собственным значениям λ'_k и λ''_k. Собственному значению λ'_k отвечает собственная функция

$$y_k=\det\left(X_{1k},\ X_{2k}\right), \tag{76}$$

где

$$X_{1k}=\begin{pmatrix} e^{\omega_1\rho'_kx}[1] & \ldots & e^{\omega_{\mu-1}\rho'_kx}[1] & e^{\omega_\mu\rho'_kx}[1] & e^{-\omega_\mu\rho'_kx}[1] \\ [\alpha_2]\,\omega_1^{k_2} & \ldots & [\alpha_2]\,\omega_{\mu-1}^{k_2} & [\alpha_2+\xi'\beta_2]\,\omega_\mu^{k_2} & \left[\alpha_2+\frac{1}{\xi'}\beta_2\right]\omega_{\mu+1}^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ [\alpha_n]\,\omega_1^{k_n} & \ldots & [\alpha_n]\,\omega_{\mu-1}^{k_n} & [\alpha_n+\xi'\beta_n]\,\omega_\mu^{k_n} & \left[\alpha_n+\frac{1}{\xi'}\beta_n\right]\omega_{\mu+1}^{k_n} \end{pmatrix},$$

$$X_{2k}=\begin{pmatrix} e^{\omega_{\mu+2}\rho'_k(x-1)}[1] & \ldots & e^{\omega_n\rho'_k(x-1)}[1] \\ [\beta_2]\,\omega_{\mu+2}^{k_2} & \ldots & [\beta_2]\,\omega_n^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ [\beta_n]\,\omega_{\mu+2}^{k_n} & \ldots & [\beta_n]\,\omega_n^{k_n} \end{pmatrix}.$$

Формула для собственной функции y_{k_2}, соответствующей λ''_k, получается, если в (76) вместо ρ'_k и ξ' подставить ρ''_k и ξ''.

Особенно просто выглядят эти формулы при $n=2$. Если, например, областью T является первый квадрант ρ-плоскости, то $\omega_\mu = i$; $\omega_{\mu+1} = -i$, и формула (76) в этом случае имеет вид

$$y_{k1} = (-i)^{k_2} e^{i\rho_k' x}\left\{\alpha_2 + \frac{1}{\xi'}\beta_2 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\} - (i)^{k_2} e^{-i\rho_k x}\left\{\alpha_2\xi' + \beta_2 + O\left(\frac{1}{k}\right)\right\}.$$

Результаты, изложенные в этом параграфе, принадлежат в основном Биркгофу (см. Биркгоф [1—3]); метод доказательства теоремы 1 принадлежит Стоуну (см Стоун [1]).

Теорема 1 доказана Биркгофом при более общих предположениях; именно, коэффициенты p_k, $k = 2, 3, \ldots, n$ могут быть аналитическими функциями параметра ρ, допускающими разложение

$$p_k(x, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} a_{k\nu}(x)\rho^{-\nu}$$

в окрестности бесконечно удаленной точки (можно предположить даже, что это разложение имеет место в асимптотическом смысле). При этом понятие областей S и T обобщается, а вместо формул (17) получаются формулы вида

$$y_k = e^{\rho\int\limits_0^x w_k(t)\,dt}\left[u_k(x) + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

где $w_1(x), \ldots, w_n(x)$ — корни уравнения

$$w^n + a_{n-1,0}(x)w^{n-1} + \ldots + a_{00}(x) = 0,$$

а $u_k(x)$ — некоторые функции от x, определяемые формальной подстановкой y_k в дифференциальное уравнение.

11. Различные обобщения асимптотических формул. а) Случай произвольного интервала. Этот случай сводится к предыдущему подстановкой $x = a + t(b-a)$, $0 \leqslant t \leqslant 1$. Соответственно этому в формулах (17) и (75)—(78) следует вместо x подставить $\frac{x-a}{b-a}$, а в формулах (44)—(47) для собственных значений вместо π подставить $\frac{\pi}{b-a}$.

б) Краевая задача $L(y) = \lambda\rho y$. Пусть функция $\rho(x)$ непрерывна и сохраняет знак в интервале $[a, b]$; не нарушая общности, можно считать, что $\rho(x) > 0$. В противном случае можно заменить λ и ρ на $-\lambda$ и $-\rho$. Введем новую переменную t, полагая

$$t = \frac{1}{h}\int\limits_a^x \sqrt[n]{\rho(\xi)}\,d\xi, \tag{77}$$

где

$$h = \int\limits_a^b \sqrt[n]{\rho(x)}\,dx. \tag{78}$$

В переменной t краевая задача $Ly = \lambda\rho y$ запишется в виде $L_1 y = \lambda y$, где L_1 — оператор в интервале $0 \leqslant t \leqslant 1$, который получается переходом к переменной t и делением на $\rho(x)$. К этому оператору L_1 применимы формулы (17), (75), (76). Подставляя в них вместо t его выражение (77), получим соответствующие формулы для рассматриваемой краевой задачи. Формулы для собственных значений получаются при этом, если в (44) — (47) вместо π подставить $\dfrac{\pi}{\int\limits_a^b \sqrt[n]{\rho(x)}\, dx}$.

Значительные осложнения представляет тот случай, когда функция $\rho(x)$ может обращаться в нуль в некоторых точках интервала (a, b). Этот случай и различные его обобщения были предметом многочисленных исследований Р. Лангера (см. Лангер [1—10]) и других авторов (см. обзорную статью Лангер [4]), посвященную случаю $n=2$).

Наиболее общие результаты в этом направлении получены В. С. Пугачевым (см. Пугачев [1]).

в) Я. Д Тамаркин (см. Тамаркин [1—3]) получил асимптотические выражения для собственных значений обобщенной краевой задачи

$$y^{(n)} + p_1(x, \lambda)\, y^{n-1} + \ldots + p_n(x, \lambda)\, y = 0; \quad U_\nu(y) = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

где $p_k(x, \lambda)$ — многочлен относительно λ степени k, а коэффициенты форм $U_\nu(y)$ суть многочлены относительно λ степени n.

Еще более общие результаты (и притом также для дифференциальных операторов в частных производных) получены М. В. Келдышем (см. Келдыш [1]).

§ 5. Разложение по собственным функциям

1. Задача обоснования метода Фурье. Решение уравнений в частных производных по методу Фурье приводит к важной задаче: разложению заданной функции по собственным функциям дифференциальных операторов.

Пусть, например, требуется найти решение уравнения

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\, u, \quad a \leqslant x \leqslant b, \tag{1}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$u\big|_{t=0} = f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0} = \varphi(x) \tag{2}$$

и краевым условиям

$$\sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{j\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=a} + \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{j\nu}\left(\frac{\partial^\nu u}{\partial x^\nu}\right)_{x=b} = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Будем искать решение уравнения (1), удовлетворяющее краевым условиям (3) в виде

$$u = y(x)(A\cos pt + B\sin pt). \tag{4}$$

Подставляя в (1) и (3), получим, что функция $y(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$L(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)\,y = -p^2 y \tag{5}$$

и краевым условиям

$$U_j(y) \equiv \sum_{\nu=0}^{n-1}\alpha_{j\nu}y_a^{(\nu)} + \sum_{\nu=0}^{n-1}\beta_{j\nu}y_b^{(\nu)} = 0. \tag{6}$$

Если, следовательно, $y \not\equiv 0$, то y есть собственная функция краевой задачи (5), (6), соответствующая собственному значению $-p^2$.

Пусть

$$-p_1^2,\ -p_2^2,\ -p_3^2,\ \ldots$$

— все собственные значения этой задачи, а

$$y_1(x),\ y_2(x),\ y_3(x),\ \ldots$$

— соответствующие собственные функции; при этом каждое собственное значение повторяется столько раз, сколько ему соответствует линейно независимых собственных функций. Тогда бесконечный ряд

$$u = \sum_{n=1}^{\infty} y_n(x)(A_n\cos p_n t + B_n\sin p_n t)$$

по крайней мере формально удовлетворяет уравнению (1) и краевым условиям (3). Остается удовлетворить начальным условиям. Подстановка в первое начальное условие дает

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x); \tag{7}$$

это последнее равенство представляет собой разложение заданной функции $f(x)$ в ряд по собственным функциям краевой задачи.

Таким образом, вопросы обоснования метода Фурье непосредственно приводят к следующей проблеме: *при каких условиях заданная функция $f(x)$ разлагается в ряд по собственным функциям данной краевой задачи.*

Наиболее просто эта проблема решается в случае самосопряженной краевой задачи, т. е. в случае, когда выражение $l(y)$

и краевые условия $U_j(y)=0$, $j=1, 2, \ldots, n$ порождают самосопряженный дифференциальный оператор.

2. Случай самосопряженного оператора. Пусть L — самосопряженный дифференциальный оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y)$ и краевыми условиями $U_j(y)=0$, $j=1, 2, \ldots, n$. Не нарушая общности, можно считать, что $Ly=0$ лишь при $y=0$, т. е. что краевая задача

$$l(y)=0, \quad U_j(y)=0, \quad j=1, 2, \ldots, n \tag{8}$$

имеет лишь тривиальное решение $y\equiv 0$. Действительно, в противном случае достаточно заменить $l(y)$ выражением $l(y)-cy$, где c — любое число, отличное от всех собственных значений оператора L. Такое число заведомо существует, ибо самосопряженный оператор имеет не более счетного множества собственных значений.

Но если краевая задача (8) имеет лишь тривиальные решения, то оператор L имеет функцию Грина*) $G(x, \xi)$, которая является эрмитовым ядром. Рассмотрим произвольную функцию $f(x)$ из области определения оператора L; это означает, что функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно и удовлетворяет краевым условиям (6). Положим

$$Lf=h,$$

тогда

$$f(x)=\int_a^b G(x, \xi)\, h(\xi)\, d\xi,$$

т. е. функция $f(x)$ представляется «истокообразно» при помощи непрерывного ядра $G(x, \xi)$.

На основании теоремы Гильберта — Шмидта из теории интегральных уравнений (см., например, Петровский [1]) функцию $f(x)$ можно разложить в равномерно сходящийся ряд по собственным функциям ядра $G(x, \xi)$. Но, как мы видели (см. n° 6 § 3), ядро $G(x, \xi)$ и оператор L имеют одни и те же собственные функции. Тем самым доказана следующая теорема.

Теорема 1. *Всякая функция из области определения самосопряженного дифференциального оператора разлагается в равномерно сходящийся обобщенный ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.*

Напомним, что область определения дифференциального оператора n-го порядка состоит из всех функций, которые

---

*) См. § 3, n°n° 1—6.

имеют в данном интервале непрерывные производные до n-го порядка включительно и удовлетворяют краевым условиям, порождающим данный оператор. Следовательно, в предыдущей теореме речь идет именно о таких функциях.

Так как область определения оператора L плотна в $L^2(a, b)$, то из теоремы 1 непосредственно получаем

Следствие. *Собственные функции самосопряженного дифференциального оператора образуют полную систему в $L^2(a, b)$.*

Если собственные функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... выбраны так, что они образуют ортонормальную систему, то коэффициенты A_n в (7) определяются по формулам

$$A_n = (f, y_n) = \int_a^b f(x)\overline{y_n(x)}\,dx, \quad n = 1, 2, 3, \ldots$$

и имеет место равенство Парсеваля

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} |A_n|^2.$$

Теорема 1 остается верной в случае более общей самосопряженной краевой задачи

$$l(y) - \lambda\rho(x)\,y = 0, \quad U_\nu(y) = 0, \qquad \nu = 1, 2, \ldots, n,$$

если функция $\rho(x)$ непрерывна и положительна в интервале $[a, b]$, ибо в этом случае функция Грина $G(x, \xi)$ есть эрмитов оператор в пространстве $\mathfrak{R}$ функции $f(x)$ со скалярным произведением

$$(f_1, f_2) = \int_a^b f_1(x)\overline{f_2(x)}\,\rho(x)\,dx \tag{9}$$

(т. е. является так называемым *симметризируемым ядром*). При этом для коэффициентов Фурье A_n получаются формулы

$$A_n = (f, y_n) = \int_a^b f(x)\overline{y_n(x)}\,\rho(x)\,dx,$$

где $y_1(x)$, $y_2(x)$, ... — полная система собственных функций оператора L, ортонормальная в смысле скалярного произведения (9).

Е. Камке ослабил условие $\rho(x) > 0$, заменив его условием $\rho(x) \geqslant 0$ и, кроме того, еще одним ограничением.

Е. Камке обобщил также теорему 1 на случай самосопряженной краевой задачи $l_1(y) + \lambda l_2(y) = 0$, $U_\nu(y) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ при некоторых дополнительных предположениях относительно дифференциального выражения $l_2(y)$ и рассматриваемых краевых условий (см. Камке [1]).

3. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора, порожденного регулярными краевыми условиями. Рассуждения в п° 2 неприменимы, если оператор L не является самосопряженным. Поэтому мы применим теперь другой метод, основанный на аналитических свойствах функции Грина оператора $L-\lambda I$ и на асимптотических формулах, полученных в § 4. При этом мы будем предполагать, что L — оператор, порожденный регулярными краевыми условиями; кроме того, как и в п° 2, мы будем предполагать *), что $\lambda=0$ не является собственным значением оператора L, следовательно, оператор L имеет функцию Грина $G(x, \xi)$.

Рассмотрим в комплексной λ-плоскости последовательность окружностей Γ_k, $k=1, 2, \ldots$, с общим центром в начале координат, обладающих следующими свойствами:

1°. *Радиус* R_k *окружности* Γ_k *неограниченно возрастает при* $k\to\infty$.

2°. *Существует положительное число* δ, *такое, что прообразы* ρ_k *в* $S_0\cup S_1$ *собственных значений оператора* L *при отображении* $\lambda=-\rho^n$ *находятся для достаточно больших* k *на расстоянии* $\geqslant\delta$ *от прообразов каждой из окружностей* Γ_k.

В силу доказанных в п° 9 § 4 асимптотических свойств собственных значений такие окружности Γ_k существуют. Пусть $G(x, s, \lambda)$ — функция Грина оператора $L-\lambda I$; в частности $G(x, s, 0)=G(x, s)$ есть функция Грина оператора L.

Рассмотрим интеграл $I_k=\frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_k}\frac{G(x, s, \lambda)\,d\lambda}{\lambda}$; применяя к нему теорему о вычетах, получаем

$$I_k=G(x, s)+\sum_{\nu=1}^{m_k}\frac{H_\nu(x, s)}{\lambda_\nu}, \tag{10}$$

где $H_\nu(x, s)$ — вычет функции $G(x, s, \lambda)$ относительно ее полюса λ_ν (который мы предполагаем здесь простым), а m_k — число этих полюсов в круге Γ_k. Докажем, что

$$\lim_{k\to\infty} I_k=0, \quad \lim_{k\to\infty}\frac{H_k(x, s)}{\lambda_k}=0 \tag{11}$$

и притом равномерно относительно x и s из интервала $[a, b]$. В силу (10) отсюда будет следовать, что имеет место разложение

$$G(x, s)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{H_\nu(x, s)}{\lambda_\nu}$$

в ряд, равномерно сходящийся относительно x и s из интервала $[a, b]$.

---

*) Из рассуждения в начале п° 2 и из асимптотических формул для собственных значений следует, что это предположение не нарушает общности.

Действительно, из асимптотических формул для собственных значений вытекает, что круги Γ_k можно выбрать таким образом, что

$$2 \leqslant m_{k+1} - m_k \leqslant 4.$$

Доказательство первого соотношения (11) основано на следующей лемме:

Лемма 1. *На окружностях Γ_k функция $G(x, s, \lambda)$ удовлетворяет неравенству*

$$|G(x, s, \lambda)| \leqslant \frac{M}{|\lambda|^{\frac{n-1}{n}}}, \tag{12}$$

где M — некоторая постоянная.

Доказательство. Положим $\lambda = -\rho^n$; тогда при надлежащем выборе $\arg \rho$ окружность Γ_k перейдет в дугу γ_k окружности с центром в начале координат и с центральным углом $\frac{2\pi}{n}$, проходящую в двух соседних областях S_0, S_1 комплексной ρ-плоскости. Для доказательства неравенства (12) применим формулы (32)—(34) n° 7 § 3; при этом удобно будет рассмотреть отдельно случаи четного и нечетного n.

а) n нечетно; $n = 2\mu - 1$. Пусть числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ занумерованы так, что для $\rho \in S_0$

$$\Re(\rho\omega_1) \leqslant \Re(\rho\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \Re(\rho\omega_n).$$

Тогда при $\rho \in S_0$

$$\left.\begin{aligned} &\Re(\rho\omega_1) \leqslant 0, \ldots, \quad \Re(\rho\omega_{\mu-1}) \leqslant 0, \\ &\Re(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0, \ldots, \quad \Re(\rho\omega_n) \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{13}$$

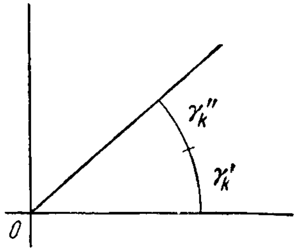

Рис. 13.

Пусть γ_k' та часть дуги γ_k, которая находится в области S_0 и на которой $\Re(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, а γ_k'' — та ее часть, которая также находится в области S_0 и на которой $\Re(\rho\omega_\mu) \geqslant 0$ (рис. 13). Оценим функцию $G(x, \xi, \lambda)$ на дуге γ_k', для чего воспользуемся формулами (32)—(36) n° 7 § 3. Обозначим через W_ν алгебраическое дополнение элемента $y_\nu^{(n-1)}$ в определителе

$$W = \begin{vmatrix} y_1^{(n-1)}(\xi) & y_2^{(n-1)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-1)}(\xi) \\ y_1^{(n-2)}(\xi) & y_2^{(n-2)}(\xi) & \ldots & y_n^{(n-2)}(\xi) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1(\xi) & y_2(\xi) & \ldots & y_n(\xi) \end{vmatrix}$$

и положим

$$z_\nu(\xi) = \frac{W_\nu(\xi)}{W(\xi)}. \tag{14}$$

Тогда формула (32) n° 7 § 3 перепишется в виде

$$g(x, \xi) = \pm \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} y_\nu(x) z_\nu(\xi). \tag{15}$$

Согласно теореме 1 n° 5 § 4 при $\rho \in S_0$

$$y_j^{(\nu)}(\xi) = e^{\rho\omega_j\xi}\rho^\nu\left[\omega_j^\nu\right], \quad j = 1, 2, \ldots, n; \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1;$$

подставим эти выражения в (14) и сократим числитель и знаменатель на $\rho, \rho^2, \ldots, \rho^{n-2}, e^{\rho\omega_1 x}, e^{\rho\omega_2 x}, \ldots, e^{\rho\omega_n x}$. Мы получим

$$z_\nu(\xi) = e^{-\rho\omega_\nu\xi} \frac{1}{\rho^{n-1}} \left[\frac{\beta_\nu}{\beta}\right], \tag{16}$$

где

$$\beta = \begin{vmatrix} \omega_1^{n-1} & \omega_2^{n-1} & \ldots & \omega_n^{n-1} \\ \omega_1^{n-2} & \omega_2^{n-2} & \ldots & \omega_n^{n-2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{vmatrix},$$

а β_ν — алгебраическое дополнение элемента ω_ν^{n-1} в этом определителе. Поэтому

$$\sum_{\nu=1}^{n} \omega_\nu^j \frac{\beta_\nu}{\beta} = \begin{cases} 0 & \text{при } j = 0, 1, 2, \ldots, n-2, \\ 1 & \text{при } j = n-1. \end{cases} \tag{17}$$

Система (17) имеет единственное решение; с другой стороны, она удовлетворяется при $\frac{\beta_\nu}{\beta} = -\frac{\omega_\nu}{n}$, ибо $\omega_\nu^n = -1$. Следовательно, (16) принимает вид

$$z_\nu(\xi) = e^{-\rho\omega_\nu\xi} \frac{1}{n\rho^{n-1}} [-\omega_\nu], \quad \nu = 1, 2, \ldots, n. \tag{18}$$

Из формулы (15) и формулы (32) § 3 следует, что

$$U_\nu(g) = -\frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} U_{\nu 0}(y_j) z_j(\xi) + \frac{1}{2} \sum_{j=1}^{n} U_{\nu 1}(y_j) z_j(\xi). \tag{19}$$

Рассмотрим функцию $G(x, \xi, \lambda)$ при $x > \xi$ (в случае $x < \xi$ рассуждения аналогичны); тогда в формуле (15) следует взять знак «+». Умножим 1-й, 2-й, ..., μ-й столбец определителя $H(x, \xi, \lambda)$, фигурирующего в числителе формулы (34) п° 7 § 3 на $\frac{1}{2}z_1(\xi)$, $\frac{1}{2}z_2(\xi)$, ..., $\frac{1}{2}z_\mu(\xi)$, а $(\mu+1)$-й, $(\mu+2)$-й, ..., n-й столбец — на $-\frac{1}{2}z_{\mu+1}(\xi)$, $-\frac{1}{2}z_{\mu+2}(\xi)$, ..., $-\frac{1}{2}z_n(\xi)$ соответственно и прибавим к последнему столбцу. Тогда элементами последнего столбца будут

$$\sum_{j=1}^{\mu} y_j(x)\,z_j(\xi),$$

$$\sum_{j=1}^{\mu} U_{\nu 1}(y_j)\,z_j(\xi) - \sum_{j=\mu+1}^{n} U_{\nu 0}(y_j)\,z_j(\xi), \quad \nu = 1, 2, \ldots, n.$$

В силу формул (17) и (52) § 4 и формулы (18) эти элементы можно переписать в виде

$$\frac{1}{n\rho^{n-1}}P_0 = -\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{\nu=1}^{\mu} e^{\rho\omega_\nu(x-\xi)}[\omega_\nu],$$

$$\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}}P_\nu =$$

$$= -\frac{1}{n\rho^{n-1}}\left\{\sum_{j=1}^{\mu} e^{\rho\omega_j(1-\xi)}\rho^{k_\nu}\left[-\beta_\nu\omega_j^{k_\nu+1}\right] + \sum_{j=\mu+1}^{n} e^{-\rho\omega_j\xi}\rho^{k_\nu}\left[\alpha_\nu\omega_j^{k_\nu+1}\right]\right\}.$$

Кроме того, как было показано в п°п° 5 и 9 § 4, имеют место асимптотические формулы

$$y = e^{\rho\omega_\nu x}[1], \quad \nu = 1, 2, \ldots, n$$

$$U_\nu(y_j) = \begin{cases} \rho^{k_\nu}\left[\alpha_\nu\omega_j^{k_\nu}\right] & \text{при } j = 1, 2, \ldots, \mu-1, \\ \rho^{k_\nu}\left(\left[\alpha_\nu\omega_\mu^{k_\nu}\right] + e^{\rho\omega_\mu}\left[\beta_\nu\omega_\mu^{k_\nu}\right]\right) & \text{при } j = \mu, \\ \rho^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}\left[\beta_\nu\omega_j^{k_\nu}\right] & \text{при } j = \mu+1, \mu+2, \ldots, \end{cases}$$

$$\Delta(\lambda) = \prod_{\nu=1}^{n}\rho^{k_\nu}\prod_{j=\mu+1}^{n} e^{\rho\omega_j}\left([\theta_0] + e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]\right).$$

Подставим эти выражения в формулу (34) § 3, в которой изменен указанным выше способом последний столбец в определителе $H(x, \xi, \lambda)$, и распределим множители знаменателя $\Delta(\lambda)$ следующим образом. На ρ^{k_ν} разделим $(\nu+1)$-ю строку, на $e^{\rho\omega_j}$ разделим j-й столбец $(j = \mu+1, \mu+2, \ldots, n)$, на 1 — последний столбец и на $[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]$ — μ-й столбец. Тогда формула (34) § 3 примет вид

$$G(x, \xi, \lambda)=$$

$$=-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\begin{vmatrix} e^{\rho\omega_1 x}[1] \ldots \dfrac{e^{\rho\omega_\mu x}[1]}{[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]} & \ldots e^{\rho\omega_n(x-1)}[1] & P_0 \\ \left[\alpha_1\omega_1^{k_1}\right] \ldots \dfrac{\omega_\mu^{k_1}\left([\alpha_1]+\varepsilon^{\rho\omega_\mu}[\beta_1]\right)}{[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]} & \ldots \left[\beta_1\omega_n^{k_1}\right] & P_1 \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots\ldots\ldots & \ldots \\ \left[\alpha_n\omega_1^{k_n}\right] \ldots \dfrac{\omega_\mu^{k_n}\left([\alpha_n]+e^{\rho\omega_\mu}[\beta_n]\right)}{[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]} & \ldots \left[\beta_n\omega_n^{k_1}\right] & P_n \end{vmatrix}.$$

В силу условий (13) все экспоненты в последнем определителе имеют на дуге γ'_k не положительную действительную часть; кроме того, из результатов n° 9 § 4 (стр. 78) следует, что знаменатель $[\theta_0]+e^{\rho\omega_\mu}[\theta_1]$ на дугах γ'_k ограничен снизу одним и тем же числом. Отсюда следует, что все элементы этого определителя ограничены на дугах γ'_k, следовательно, и весь определитель ограничен на этих дугах.

Таким образом, на дугах γ'_k

$$|G(x, \xi, \lambda)|\leqslant\frac{M}{|\rho|^{n-1}}, \tag{20}$$

где M — некоторая константа.

Докажем теперь, что такое же неравенство имеет место на дугах γ''_k. Для этого достаточно в определителе $H(x, \xi, \lambda)$ элементы первых $\mu-1$ столбцов умножить на $\frac{1}{2}z_1(\xi)$, $\frac{1}{2}z_2(\xi)$, ..., $\frac{1}{2}z_{\mu-1}(\xi)$, а μ-го, $(\mu+1)$-го, ..., n-го — на $-\frac{1}{2}z_\mu(\xi)$, $-\frac{1}{2}z_{\mu+1}(\xi)$, ..., $-\frac{1}{2}z_n(\xi)$ соответственно и прибавить к последнему столбцу. Повторяя предыдущие рассуждения, легко убедиться в справедливости неравенства (20) также и на дугах γ''_k.

Тем самым (20) доказано на части $\gamma'_k+\gamma''_k$ дуги γ_k, лежащей в области S_0. Но предыдущие рассуждения применимы, очевидно, к любой из областей S_ν; следовательно, (20) имеет место также на части дуги γ_k, лежащей в области S_1, и тем самым на всей дуге γ_k. Переходя от ρ к λ, получаем неравенство (12), и лемма в случае нечетного n доказана.

б) n четно; $n=2\mu$. Этот случай отличается от предыдущего лишь тем, что в двух столбцах, μ-м и $(\mu+1)$-м, появляются знаменатели

$$[1]e^{\rho\omega_\mu}-[\xi'] \quad \text{и} \quad e^{\rho\omega_\mu}[1]-[\xi''],$$

ограниченные снизу на дуге γ_k'; поэтому неравенство (12) имеет место на дуге γ_k'. Аналогично оно доказывается на дуге γ_k''.

Замечание. Из доказательства леммы 1 видно, что оценка (12) имеет место при достаточно больших $|\lambda|$ в области Q_δ, полученной из λ-плоскости выбрасыванием образов кругов $|\rho-\rho_k|<\delta$ при отображении $\lambda=-\rho^n$.

Пользуясь доказанной леммой и этим замечанием, мы получим оценки

$$|I_k|<\frac{1}{2\pi}\frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}}R_k}\cdot 2\pi R_k=\frac{M}{R_k^{\frac{n-1}{n}}},$$

$$\left|\frac{H_k(x, s)}{\lambda_k}\right|=\left|\frac{1}{2\pi\lambda_k}\int\limits_{|\rho-\rho_k|=\delta} n\rho^{n-1}G(x, s, -\rho^n)\,d\rho\right|\leqslant\frac{nM\delta}{|\lambda_k|},$$

из которых непосредственно следует (11). Тем самым (см. стр. 92–93) доказана

Теорема 2. *Функция Грина $G(x, \xi)$ дифференциального оператора L, порожденного регулярными краевыми условиями, разлагается в равномерно сходящийся ряд*

$$G(x, s)=-\sum_{\nu=1}^{\infty}\frac{H_\nu(x, \xi)}{\lambda_\nu}. \tag{21}$$

Напомним, что $H_\nu(x, \xi)$ обозначает вычет функций $G(x, \xi, \lambda)$ относительно ее полюса λ_ν и что все полюсы $\bar{\lambda}_\nu$ предполагаются простыми.

Если все собственные значения оператора L — простые нули функции $\Delta(\lambda)$, то (см. n° 8 § 3) $-H_\nu(x, \xi)=y_\nu(x)\overline{z_\nu(\xi)}$, где $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ — собственные функции от операторов L и L^*, соответствующие собственным значениям λ_ν и $\bar{\lambda}_\nu$ и пронормированные так, что *) $\int\limits_0^1 y_\nu(x)\overline{z_\nu(x)}\,dx=1$.

Применяя к этому случаю теорему 2, получаем:

Теорема 3. *Если все собственные значения оператора L, порожденного регулярными краевыми условиями, суть простые нули функции Δ, то для его функции Грина имеет место*

*) В нижеследующих теоремах 3 и 4 это условие нормировки считается выполненным

разложение в равномерно сходящийся ряд

$$G(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_\nu(x)\overline{z_\nu(\xi)}}{\lambda_\nu}. \tag{22}$$

Из этой теоремы легко теперь получить теорему о разложении заданной функции $f(x)$.

Теорема 4. *Пусть L — оператор, порожденный регулярными краевыми условиями. Пусть все его собственные значения суть простые нули функции Δ. Тогда всякая функция $f(x)$ из области определения оператора L разлагается в равномерно сходящийся ряд по его собственным функциям*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu y_\nu(x),$$

$$\alpha_\nu = \int_0^1 f(\xi)\overline{z_\nu(\xi)}\,d\xi,$$

где $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ — собственные функции операторов L, L^*, отвечающие собственным значениям λ_ν, $\bar{\lambda}_\nu$ соответственно.

Доказательство. Положим $Lf = h$, тогда

$$f(x) = \int_0^1 G(x, \xi)\,h(\xi)\,d\xi.$$

Подставим сюда вместо функции $G(x, \xi)$ ее разложение (22). В силу равномерной сходимости последнего можно интегрировать почленно. Следовательно,

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \alpha_\nu y_\nu(x),$$

где

$$\alpha_\nu = \frac{1}{\lambda_\nu}\int_0^1 h(\xi)\overline{z_\nu(\xi)}\,d\xi = \frac{1}{\lambda_\nu}(h, z_\nu) = \frac{1}{\lambda_\nu}(Lf, z_\nu) =$$
$$= \frac{1}{\lambda_\nu}(f, L^*z_\nu) = \frac{1}{\lambda_\nu}(f, \bar{\lambda}_\nu z_\nu) = (f, z_\nu)$$

Теорема 4 оставляет открытым вопрос о возможности разложения в ряд по собственным функциям оператора L функций, не принадлежащих области определения этого оператора. В случае самосопряженного оператора L, в соответствии со следствием из n° 2, каждая функция $f \in L^2(a, b)$ разлагается в сходящийся в среднем квадратичном ряд по собственным функциям, причем в связи с ортогональностью собственных функций справедливо равенство Парсеваля. Для несамосопряженных операторов Г. М. Кесельманом [1] и В. П. Михайловым [1] был получен следующий результат. *Если оператор L порождается регулярными краевыми условиями,* *причем в случае четного n выполняется дополнительно условие $\theta_0^2-4\theta_1\theta_{-1}\neq 0$, то собственные и присоединенные функции этого оператора образуют базис Рисса в пространстве $L_2(a, b)$* *).

Понятие базиса Рисса было введено Н. К. Бари (см., например, Гохберг и Крейн [1]). Поясним, что базисом Рисса в $L^2(a, b)$ называется такая полная в этом пространстве последовательность функций $\varphi_1, \varphi_2, \ldots$, что для каждой функции $f \in L^2(a, b)$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|\int_a^b f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx\right|^2<\infty$$

и для каждой последовательности чисел $c_1, c_2, \ldots$ такой, что $\sum\limits_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<\infty$, существует такая функция $f \in L_2(a, b)$, что

$$\int_a^b f(x)\overline{\varphi_n(x)}\,dx=c_n, \quad n=1, 2, \ldots$$

Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — базис Рисса, то существует единственная последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$, образующая вместе с $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ биортогональную систему:

$$(\varphi_k, \psi_l)=\int_a^b \varphi_k(x)\overline{\psi_l(x)}\,dx=\begin{cases}0 & \text{при } k\neq l,\\ 1 & \text{при } k=l.\end{cases}$$

Последовательность $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ также является базисом Рисса. При этом для каждой функции $f \in L_2(a, b)$

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n\varphi_n(x), \quad \alpha_n=(f, \psi_n), \quad n=1, 2, \ldots,$$

где ряд сходится в среднем квадратичном. Кроме того, справедлива следующая двусторонняя оценка, заменяющая равенство Парсеваля:

$$m\int_a^b|f(x)|^2\,dx\leqslant\sum_{n=1}^{\infty}|\alpha_n|^2\leqslant M\int_a^b|f(x)|^2\,dx,$$

где m и M — некоторые положительные числа, не зависящие от функции f.

Если $\{\varphi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность собственных и присоединенных функций дифференциального оператора L, то $\{\psi_n\}_{n=1}^{\infty}$ — последовательность собственных и присоединенных функций оператора L^*.

Отметим, что базис Рисса является базисом безусловной сходимости **) и что, следовательно, операторы, собственные и присоединенные элементы

*) Напомним, что условие $\theta_0^2-4\theta_1\cdot\theta_{-1}\neq 0$ выполняется, например для краевых условий типа Штурма (см. n° 8 § 4).

**) Это означает, что сходимость не нарушается при перестановке членов ряда (см. Гельфанд [3]).

которых образуют базис Рисса, являются спектральными в смысле Н. Данфорда (см. Данфорд [1]).

Непосредственно к теореме 4 примыкают результаты М. Стоуна, сравнивающие сходимость разложений по собственным функциям дифференциального оператора L со сходимостью ряда Фурье (см. Стоун [1]).

4. Разложение по собственным функциям в случае нерегулярных краевых условий. В случае нерегулярных краевых условий разложение по собственным функциям обладает рядом специфических особенностей. По этому вопросу имеется довольно обширная литература.

Прежде всего остановимся на исследованиях Уорда (см. Уорд [1—4]). Л. Уорд исследовал разложение по собственным функциям оператора L, соответствующего дифференциальному выражению $l(y) = y^{(n)}$ и (нерегулярным) краевым условиям $y(0) = \ldots = y^{(n-2)}(0) = y(1) = 0$. Он показал, что в равномерно сходящиеся ряды по собственным функциям могут разлагаться только функции, удовлетворяющие некоторым условиям аналитичности, а следовательно, далеко не все функции из области определения оператора L. Случай более общих нерегулярных краевых условий Л. Уорд рассмотрел лишь для дифференциальных выражений третьего порядка.

В работе М. В. Келдыша (Келдыш [1]) получены асимптотические формулы для собственных значений оператора L, порождаемого дифференциальным выражением $l(y) = y^{(n)}$ и распадающимися краевыми условиями, т. е. такими краевыми условиями, которые содержат значения функции только в одном или только в другом конце интервала. А. П. Хромов (см. Хромов [2]) распространил асимптотические формулы М. В. Келдыша для собственных чисел на случай более общего дифференциального выражения $l(y) = y^{(n)} + p_2(x)\, y^{(n-2)} + \ldots + p_n(x)\, y$ и нашел те классы функций, которые могут разлагаться в равномерно сходящиеся ряды по собственным и присоединенным функциям соответствующего оператора L.

Приведем без доказательства формулировку некоторых результатов А. П. Хромова. Для этого нам понадобится понятие l-аналитической функции, введенное М. К. Фаге [1]. Функция $f(x)$, $x \in (0, 1)$, называется *l-аналитической*, если она допускает бесконечное применение операции l (здесь $l(y) = y^{(n)} + p_2(x)\, y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)\, y$) и удовлетворяет неравенствам вида

$$\left| \left(\frac{d}{dx} \right)^q l^p(f(x)) \right| < C^{pn+q}\,(pn+q)!$$

$$p = 0, 1, 2, \ldots, \quad q = 0, 1, \ldots, n-1$$

(за возможным исключением $q = p = 0$) в любом промежутке $[\alpha, \beta] \subset (0, 1)$; при этом C — постоянная, зависящая лишь от l, f, α и β. Отметим, что свойства l-аналитических функций во многом аналогичны свойствам обычных аналитических функций.

Пусть $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ — последовательность всех собственных и присоединенных функций оператора L, порождаемого дифференциальным выражением $l(y)$ и распадающимися краевыми условиями вида

$$u_j(y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \alpha_{j\nu} y^{(\nu)}(0) = 0 \text{ при } j = 1, \ldots, m,$$

$$u_j(y) = \sum_{\nu=0}^{n-1} \beta_{j\nu} y^{(\nu)}(1) = 0 \text{ при } j = m+1, \ldots, n,$$

где $1 < m < n$. А. П. Хромову принадлежат следующие утверждения.

Если ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ *сходится равномерно на некотором промежутке* $[x_0, x_1] \subset (0, 1)$, *то*

а) *ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_k \left(\frac{d}{dx}\right)^q l^p(\varphi_k(x)), \ p=0, 1, 2, \ldots, \ q=1, \ldots, n-1$$

сходятся абсолютно и равномерно на всяком промежутке $[0, a] \subset [0, x_1)$,

б) *сумма* $f(x)$ *ряда* $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ *является* l-*аналитической (в смысле Фаге) функцией;*

в) *функции* $f(x)$, $l(f(x))$ $l^2(f(x)), \ldots$ *удовлетворяют краевым условиям при* $x=0$.

Обратно, если суммируемая в интервале $(0, 1)$ *функция* $f(x)$ *является* l-*аналитической в промежутке* $[0, a)$, $0<a<1$, *и функции* $f(x)$, $l(f(x))$, $l^2(f(x)), \ldots$ *удовлетворяют краевым условиям при* $x=0$, *то* $f(x)$ *разлагается в ряд по системе* $\{\varphi_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$, *равномерно сходящийся на всяком промежутке* $[0, b] \subset [0, a) \cap [0, R)$, *где число* R *определяется из равенства*

$$\frac{1}{R} = \overline{\lim_{k\to\infty}} \left\{ \frac{1}{k!} \left| \left(\frac{d}{dx}\right)^{k-n[k/n]} l^{[k/n]}(f(x)) \right|_{x=0} \right\}.$$

К этим результатам близки результаты В Эбергарда (см. Эбергард [1—3]) В частности, В. Эбергард рассмотрел оператор L, соответствующий распадающимся краевым условиям, в предположении, что коэффициенты $p_\nu(x)$ дифференциального выражения $l(y)$ голоморфны в круге $|x| \leqslant 1$ комплексной x-плоскости. Он доказал, что из равномерной сходимости ряда $\sum_{k=1}^{\infty} a_k\varphi_k(x)$ на промежутке $[x_0, x_1]$ вытекает равномерная сходимость этого ряда (а следовательно, регулярность его суммы) в каждой замкнутой подобласти открытого правильного многоугольника с вершинами в точках

$$x_1 \frac{\cos\frac{2\varkappa\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}} e^{\frac{2\nu-1}{n} i\pi}, \qquad \nu=1, \ldots, n,$$

в случае, когда число краевых условий в точке $x=1$ четно и равно $2\varkappa$, и в точках

$$x_1 \frac{\cos\frac{(2\varkappa+1)\pi}{n}}{\cos\frac{\pi}{n}} e^{\frac{2\nu}{n} i\pi}, \qquad \nu=1, \ldots, n,$$

в случае, когда это число нечетно и равно $2\varkappa+1$

По поводу дополнительных сведений и литературы см также Коддингтон и Левинсон [1], Расулов [1], [2] Гопкинс [1], Джексон [1], Жданович [1], Зейферт [1].

5. Случай кратного полюса функции Грина; m-кратная полнота Рассмотрим обобщенную задачу о собственных значениях

$$l(y)=0, \tag{23}$$

$$U_\nu(y)=0, \quad \nu=1,2,\ldots,n; \tag{24}$$

пусть

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$$

— все собственные значения этой задачи. Эти собственные значения могут, вообще говоря, быть кратными нулями характеристического определителя $\Delta(\lambda)$, следовательно, кратными полюсами функции Грина Пусть λ — одно из этих собственных значений, а

$$y, y_1, \ldots, y_{q-1}$$

— цепочка собственной и присоединенных функций, входящая в состав канонической системы, соответствующей этому собственному значению Построим m систем функций

$$y^{(\nu,k)}=\left[\frac{d^\nu}{dx^\nu}e^{\lambda t}\left(y_k+y_{k-1}\frac{t}{1!}+\ldots+y\frac{t^k}{k!}\right)\right]_{t=0}, \quad \nu=0,1,2,\ldots,m-1.$$

Каждая из таких систем

$$y^{(\nu,0)}, y^{(\nu,1)}, \ldots, y^{(\nu,q-1)}$$

называется *производной цепочкой*, отвечающей исходной цепочке $y, y_1, \ldots, y_{q-1}$.

Система всех собственных и присоединенных функций краевой задачи (23), (24) называется *m-кратно полной*, если всякую систему m функций $\{f_1, f_2, \ldots, f_m\}$, каждая из которых имеет непрерывные производные до n-го порядка включительно и удовлетворяет краевым условиям (61), можно представить как предел m равномерно сходящихся последовательностей конечных линейных комбинаций

$$f_\nu=\lim_{N\to\infty}\sum_{i,k}c_{Nk}^{(i)}y_i^{(\nu,k)}$$

с коэффициентами, не зависящими от ν.

Рассуждения n° 3 в соединении с некоторыми тонкими результатами теории аналитических функций и с формулой для главной части функции Грина (см. n° 9 § 3) дают возможность установить следующую общую теорему, которую мы приводим без доказательств.

Теорема 5 (М. В. Келдыш [1]). *Пусть*

$$l(y)=y^{(n)}+p_1(x,\lambda)y^{(n-1)}+\ldots+\left[p_n(x,\lambda)+\lambda^m\right]y,$$

где $p_k(x,\lambda)$ — многочлен относительно λ степени $<\frac{km}{n}$, и пусть краевые условия имеют вид

$$\sum_{k=1}^{n}\alpha_{jk}y_a^{(k-1)}=0, \quad j=1,2,\ldots,p;$$

$$\sum_{k=1}^{n}\beta_{jk}y_b^{(k-1)}=0, \quad j=p+1, p+2,\ldots,n,$$

$$0<p<n,$$

или

$$y_a^{(k)}=y_b^{(k)}, \quad k=0,1,2,\ldots,n-1.$$

Тогда система собственных и присоединенных функций соответствующей краевой задачи m-кратно полна.

В. Н. Визитей и А. С. Маркус доказали, что теорема 5 остается справедливой также в случае регулярных краевых условий, причем для четного n требуется чтобы $\theta_0^2 \neq 4\theta_1\theta_{-1}$. Кроме того, она остается справедливой в случае общих самосопряженных краевых условий (частным случаем которых являются условия периодического типа, фигурирующие в теореме 5 (см. Визитей и Маркус [1] и Маркус [1])).

Наряду с рассмотренной в этой главе задачей разложения по собственным функциям большой интерес представляют так называемые обратные задачи спектрального анализа, в которых требуется определить дифференциальный оператор, зная те или другие его спектральные характеристики (например, собственные значения и нормы собственных функций, удовлетворяющих известным начальным условиям). По поводу различных аспектов этих задач см. Левитан [1], Гасымов и Левитан [1] и Лейбензон [1—3]

ГЛАВА III

ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ПРОСТРАНСТВЕ ВЕКТОР-ФУНКЦИЙ

§ 6. Основные понятия

1. Линейные дифференциальные выражения в пространстве вектор-функций. Пусть R_m обозначает m-мерное комплексное векторное пространство; можно считать, что элементами («векторами») этого пространства являются всевозможные системы

$$y = (y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_m)$$

из m комплексных чисел.

Функции $y = y(x)$, значениями которых являются не числа, а векторы из R_m, называются *вектор-функциями*. Таким образом, вектор-функция есть просто система m числовых функций

$$y(x) = (y_1(x), \ y_2(x), \ \ldots, \ y_m(x));$$

каждая числовая функция $y_k(x)$ называется *компонентой вектор-функции* $y(x)$.

Функция $y(x)$ называется *непрерывной* в точке x_0, если все ее компоненты непрерывны в этой точке.

Функция $y(x)$ называется *дифференцируемой*, если каждая из ее компонент имеет производную, причем по определению

$$y'(x) = (y_1'(x), \ y_2'(x), \ \ldots, \ y_m'(x)).$$

Аналогично определяются производные высших порядков Легко видеть, что при этом

$$(y + z)' = y' + z', \quad (\lambda y)' = \lambda' y + \lambda y', \quad (y, \ z)' = (y', \ z) + (y, \ z'),$$

где

$$(y, \ z) = \sum_{k=1}^{m} y_k(x) \overline{z_k(x)}.$$

Наряду с вектор-функциями мы будем рассматривать операторные функции $A(x)$, значениями которых являются линейные операторы в пространстве R_m. Эти операторы можно представить при помощи квадратных матриц $A(x) = (a_{jk}(x))$ m-го порядка, элементами которых являются числовые функции. В дальнейшем мы не будем делать различия между операторами и соответствующими матрицами.

По существу операторные функции суть также векторные функции, ибо совокупность всех линейных операторов есть векторное пространство размерности m^2. В связи с этим операторная функция $A(x)$ называется *непрерывной в точке* x_0, если все функции $a_{jk}(x)$ непрерывны в точке x_0, и *дифференцируемой в точке* x_0, если все функции $a_{jk}(x)$ *дифференцируемы в точке* x_0. При этом $A'(x)$ по определению задается матрицей, элементами которой являются $a'_{jk}(x)$. Легко видеть, что при этом

$$(A+B)' = A' + B', \qquad (\lambda A)' = \lambda' A + \lambda A',$$
$$(AB)' = A'B + AB', \qquad (Ay)' = A'y + Ay'.$$

Обозначим теперь через $C^{(n)}$ совокупность всех вектор-функций $y(x)$, имеющих непрерывные производные до n-го порядка включительно в фиксированном интервале $[a, b]$. Пусть $P_0(x)$, $P_1(x), \ldots, P_n(x)$ — операторные функции, непрерывные в этом интервале, причем $\det P_0(x) \neq 0$ в интервале $[a, b]$. Выражение вида *)

$$l(y) = P_0(x)\,y^{(n)} + P_1(x)\,y^{(n-1)} + \ldots + P_n(x)\,y \tag{1}$$

называется *линейным дифференциальным выражением в пространстве вектор-функций.*

Оно определено для любой вектор-функции $y(x) \in C^{(n)}$ и представляет собой вектор-функцию, непрерывную в интервале $[a, b]$. Излагаемая ниже теория таких дифференциальных выражений и соответствующих им дифференциальных операторов формально аналогична изложенной в предыдущих параграфах теории линейных дифференциальных операторов в пространстве числовых функций.

Отметим, что по существу $l(y)$ есть система m дифференциальных выражений n-го порядка, зависящая от m числовых функций $y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)$. Рассмотрим, например, при $n = 1$ выражение

$$l(y) = y' + P(x)\,y$$

---

*) Выражение вида $P_j(x)\,y^{(n-j)}$ обозначает результат применения оператора $P_j(x)$ к вектору $y^{(n-j)}(x)$.

и разложим вектор-функцию $z = l(y)$ на составляющие, полагая

$$l(y) = (l_1(y),\ l_2(y),\ \ldots,\ l_n(y)).$$

Тогда

$$l_j(y) = y'_j + \sum_{k=1}^{n} P_{jk}(x)\, y_k, \quad j = 1, 2, \ldots, m,$$

где $P_{jk}(x)$ — элемент матрицы $P(x)$.

2. Краевые условия. Обозначим через

$$y_a,\ y'_a,\ \ldots,\ y_a^{(n-1)};\quad y_b,\ y'_b,\ \ldots,\ y_b^{(n-1)}$$

значения вектор-функции и ее первых $n-1$ производных в точках a и b соответственно, так что $y_a, \ldots, y_b^{(n-1)}$ — векторы в пространстве R_m. Положим

$$U(y) = \\ = A_0 y_a + A_1 y'_0 + \ldots + A_{n-1} y_a^{(n-1)} + B_0 y_b + B_1 y'_b + \ldots + B_{n-1} y_b^{(n-1)}, \tag{2}$$

где $A_0, \ldots, A_{n-1}, B_0, B_1, \ldots, B_{n-1}$ — фиксированные линейные операторы в R_m. Если задано несколько таких форм $U_1(y)$, $U_2(y), \ldots, U_q(y)$, то равенства вида

$$U_1(y) = 0,\quad U_2(y) = 0,\ \ldots,\ U_q(y) = 0 \tag{3}$$

называются *краевыми условиями*.

Обозначим через $\mathfrak{D}$ совокупность всех функций $y \in C^{(n)}$, удовлетворяющих условиям (3). Пусть L — оператор с областью определения $\mathfrak{D}$, определенный для $y \in \mathfrak{D}$ равенством

$$Ly = l(y);$$

L называется *дифференциальным оператором, порожденным дифференциальным выражением* $l(y)$ *и краевыми условиями* (3). Положим

$$U_\nu(y) = A_{\nu,0} y_a + \ldots + A_{\nu,n-1} y_a^{(n-1)} + B_{\nu,0} y_b + \ldots + B_{\nu,n-1} y_b^{(n-1)};$$
$$\nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ q.$$

Очевидно, при определении $\mathfrak{D}$ можно считать, что формы $U_\nu(y)$ линейно независимы; это означает, что ранг матрицы

$$\begin{pmatrix} A_{10}, & \ldots, & A_{1\ n-1}, & B_{10}, & \ldots, & B_{1,\ n-1} \\ A_{20}, & \ldots, & A_{2,\ n-1}, & B_{20}, & \ldots, & B_{2,\ n-1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{q0}, & \ldots, & A_{q,\ n-1}, & B_{q0}, & \ldots, & B_{q,\ n-1} \end{pmatrix},$$

составленной из матриц $A_{\nu j}$, $B_{\nu j}$, равен mq, ибо каждая форма $U_\nu(y)$ имеет m компонент.

В дальнейшем мы главным образом будем рассматривать случай $q=n$.

3. Однородное операторное уравнение. Рассмотрим однородное уравнение

$$l(Y)=P_0(x)\,Y^{(n)}+P_1(x)\,Y^{(n-1)}+\ \dots\ +P_n(x)\,Y=0 \tag{4}$$

относительно неизвестной операторной функции $Y(x)$. При этом, как и выше, предполагается, что $P_0(x),\ \dots,\ P_n(x)$ непрерывны и что $\det P_0(x)\neq 0$ в фиксированном интервале $[a,\ b]$.

Отметим простейшие свойства решений этого уравнения; они аналогичны свойствам решений обычного однородного уравнения n-го порядка.

Решения $Y_1,\ Y_2,\ \dots,\ Y_k$ уравнения называются *линейно независимыми*, если тождество

$$Y_1C_1+Y_2C_2+\ \dots\ +Y_nC_n=0$$

при постоянных операторах $C_1,\ C_2,\ \dots,\ C_n$ возможно, только если $C_1=C_2=\ \dots\ =C_n=0$, и *зависимыми* в противном случае.

Решения $Y_1,\ \dots,\ Y_n$ линейно независимы тогда и только тогда, когда определитель матрицы

$$\begin{pmatrix} Y_1 & Y_2 & \dots & Y_n \\ Y_1' & Y_2' & \dots & Y_n' \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ Y_1^{(n-1)} & Y_2^{(n-1)} & & Y_n^{(n-1)} \end{pmatrix},$$

составленной из матриц $Y_j^{(\nu)}$, отличен от нуля. Если решения $Y_1,\ Y_2,\ \dots,\ Y_n$ линейно независимы, то всякое другое решение Y имеет вид

$$Y=Y_1C_1+Y_2C_2+\ \dots\ +Y_nC_n. \tag{5}$$

Следовательно, *формула* (5) *определяет общий интеграл уравнения* (4).

Если Y — решение уравнения (4), а c — фиксированный постоянный вектор, то, полагая $y(x)=Y(x)\,c$, получим решение уравнения $l(y)=0$. Чтобы в этом убедиться, достаточно применить обе части (4) к вектору c.

Отсюда и из формулы (5) легко заключаем:

Всякое решение уравнения $l(y)=0$ имеет вид

$$y=Y_1c_1+Y_2c_2+\ \dots\ +Y_nc_n, \tag{6}$$

где $c_1,\ c_2,\ \dots,\ c_n$ — произвольные постоянные векторы из R_m.

4. Однородная краевая задача. Однородной краевой задачей называется задача определения вектор-функции y, удовлетворяющей условиям вида

$$l(y)=0, \tag{7}$$

$$U_\nu(y)=0, \quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{8}$$

Рассмотрим матрицу

$$U=\begin{pmatrix} U_1(Y_1) & U_1(Y_2) & \ldots & U_1(Y_n) \\ U_2(Y_1) & U_2(Y_2) & \ldots & U_2(Y_n) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ U_n(Y_1) & U_n(Y_2) & \ldots & U_n(Y_n) \end{pmatrix}. \tag{9}$$

Из результатов n° 3 вытекает, что:

1. *Однородная краевая задача* (7), (8) *имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда определитель матрицы U равен нулю.*

5. Формула Лагранжа; сопряженное дифференциальное выражение. Обозначим через $(y,\ z)$ скалярное произведение векторов $y,\ z\in R_m$. Интегрируя по частям, получим:

$$\int\limits_a^b (l(y),\ z)\,dx=P(\eta,\ \zeta)+\int\limits_a^b (y,\ l^*(z))\,dx, \tag{10}$$

где $P(\eta,\ \zeta)$ — билинейная форма от

$$\eta=\left(y_a,\ y'_a,\ \ldots,\ y_a^{(n-1)},\ y_b,\ y'_b,\ \ldots,\ y_b^{(n-1)}\right)$$

и

$$\zeta=\left(z_a,\ z'_a,\ \ldots,\ z_a^{(n-1)},\ z_b,\ z'_b,\ \ldots,\ z_b^{(n-1)}\right)$$

и где *)

$$l^*(z)=(-1)^n\left(P_0^*z\right)^{(n)}+(-1)^{n-1}\left(P_1^*z\right)^{n-1}+\ \ldots\ +P_n^*z. \tag{11}$$

Дифференциальное выражение $l^*(z)$ называется *сопряженным* к $l(z)$. Формула (10) называется *формулой Лагранжа.* Дифференциальное выражение $l(y)$ называется *самосопряженным*, если $l^*(y)=l(y)$.

Повторяя рассуждения n° 5 § 1, можно получить следующее общее выражение для самосопряженного дифференциального выражения:

---

*) Если $A=(a_{pq})$ — квадратная матрица m-го порядка, то A^* обозначает *сопряженную матрицу*, т. е. матрицу $B=(b_{pq})$, такую, что $b_{pq}=\bar a_{qp}$. Матрица называется *эрмитовой*, если $A^*=A$.

II. *Всякое самосопряженное дифференциальное выражение есть сумма самосопряженных дифференциальных выражений вида*

$$L_{2\nu}(y)=(Py^{(\nu)})^{(\nu)},\quad L_{2\nu-1}(y)=\frac{1}{2}\left[(iPy^{(\nu-1)})^{(\nu)}+(iPy^{(\nu)})^{(\nu-1)}\right],$$

где $P=P(x)$ — *операторная функция, все значения которой являются эрмитовыми матрицами в* R_n.

6. Сопряженные краевые условия; сопряженный оператор. Дополним как-нибудь линейно независимые формы $U_1, \ldots, U_n$ до полной системы $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ независимых форм. Повторяя рассуждения n° 6 § 1, можно преобразовать формулу Лагранжа к виду

$$\int_a^b (l(y), z)\,dx=(U_1, V_{2n})+(U_2, V_{2n-1})+\ldots+(U_{2n}, V_1)+\int_a^b (y, l(z))\,dx, \tag{12}$$

где $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$ — независимые формы от переменных

$$z_a,\ z'_a,\ \ldots,\ z_a^{(n-1)},\quad z_b,\ z'_b,\ \ldots,\ z_b^{(n-1)}.$$

Краевые условия

$$V_\nu=0,\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{13}$$

а также условия, им эквивалентные, называются *сопряженными* к краевым условиям

$$U_\nu=0,\quad \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{14}$$

Оператор, порожденный дифференциальным выражением $l^*(y)$ и краевыми условиями (13), называется *сопряженным* к оператору L, порожденному дифференциальным выражением $l(y)$ и краевыми условиями (14).

Оператор, сопряженный к L, обозначается через L^*. Из формулы (12) следует, что *для операторов* L *и* L^* *имеет место равенство*

$$\int_a^b (Ly, z)\,dx=\int_a^b (y, L^*z)\,dx. \tag{15}$$

Обратно, если дифференциальный оператор L_1 удовлетворяет условию

$$\int_a^b (Ly, z)\,dx=\int_a^b (y, L_1z)\,dx$$

для всех функций y, z из областей определения операторов L и L_1 соответственно, то $L_1 = L^*$.

Определим для вектор-функций $y(x)$ скалярное произведение $\langle y, z\rangle$, полагая

$$\langle y, z\rangle = \int_a^b (y(x), z(x))\,dx.$$

Тогда формула (15) перепишется в виде

$$\langle Ly, z\rangle = \langle y, L^*z\rangle. \tag{16}$$

Оператор L называется *самосопряженным*, если $L^* = L$. Другими словами, оператор L самосопряженный, если он порождается самосопряженным дифференциальным выражением и самосопряженными краевыми условиями.

Для самосопряженного оператора L равенство (16) примет вид

$$\langle Ly, z\rangle = \langle y, Lz\rangle.$$

Однородная краевая задача $L^*z = 0$ называется *сопряженной* к однородной краевой задаче $Ly = 0$.

Рассуждая, как в n° 7 § 1, получаем:

Ранг однородной краевой задачи совпадает с рангом сопряженной однородной краевой задачи.

В частности:

Однородная краевая задача имеет нетривиальное решение тогда и только тогда, когда сопряженная краевая задача имеет нетривиальное решение.

7. Собственные значения и собственные функции дифференциального оператора. Число λ называется *собственным значением* оператора L, если в области определения $\mathfrak{D}$ оператора L существует вектор-функция $y \not\equiv 0$, такая, что

$$Ly = \lambda y.$$

Эта функция y называется *собственной функцией, соответствующей (или отвечающей) собственному значению* λ.

Все основные предложения n°n° 1, 4 и 5 § 2 остаются справедливыми для операторов в пространстве вектор-функций.

В частности, собственные значения суть нули характеристического определителя

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(Y_1) & \dots & U_1(Y_n) \\ \cdot & \cdot\;\cdot\;\cdot & \cdot \\ U_n(Y_1) & \dots & U_n(Y_n) \end{vmatrix}, \tag{17}$$

где $Y_1, Y_2, \dots, Y_n$ — линейно независимые решения операторного уравнения $l(Y) - \lambda Y = 0$.

Эти решения можно выбрать так, чтобы они были целыми аналитическими операторными функциями параметра λ, поэтому $\Delta(\lambda)$ — также целая аналитическая функция, и предложение I n°1 § 2 остается верным в рассматриваемом случае.

На этот случай переносится также все сказанное в n° 2 § 2 относительно обобщенной задачи о собственных значениях. Отметим, что обычная задача о собственных значениях в пространстве вектор-функций эквивалентна некоторой обобщенной задаче о собственных значениях для скалярных функций. Рассмотрим, например, задачу о собственных значениях

$$\frac{dy}{dx} + A(x)\, y = \lambda y, \qquad 0 \leqslant x \leqslant 1, \tag{18}$$

$$y(0) = y(1), \tag{19}$$

где y — вектор-функция в двумерном пространстве R_2: $y(x) = \{y_1(x), y_2(x)\}$, и где $A(x)$ — оператор в этом пространстве, определенный матрицей

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ p(x) & 0 \end{pmatrix}.$$

Таким образом,

$$A(x)\, y = \{y_2(x),\ p(x)\, y_1(x)\},$$

следовательно, задача (18), (19) в координатной записи имеет вид

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy_1}{dx} + y_2(x) = \lambda y_1(x), \\ &\frac{dy_2}{dx} + p(x)\, y_1(x) = \lambda y_2(x), \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

$$y_1(0) = y_1(1); \quad y_2(0) = y_2(1). \tag{21}$$

Продифференцируем первое из уравнений (20), из полученного равенства

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} + \frac{dy_2}{dx} = \lambda \frac{dy_1}{dx}$$

и уравнений (20) исключим y_2 и $\frac{dy_2}{dx}$. Мы получим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} - 2\lambda \frac{dy_1}{dx} + [\lambda^2 - p(x)]\, y_1 = 0 \tag{22}$$

для функции y_1. В силу первого из уравнений (20) краевые условия (21) перепишутся в виде

$$\left.\begin{aligned} &y_1(0) = y_1(1), \\ &\left[\frac{dy_1}{dx} - \lambda y_1\right]_{x=0} = \left[\frac{dy_1}{dx} - \lambda y\right]_{x=1}. \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Таким образом, исходная задача эквивалентна следующей обобщенной задаче о собственных значениях:

$$\frac{d^2 y_1}{dx^2} - 2\lambda \frac{dy_1}{dx} + [\lambda^2 - p(x)]\, y_1 = 0,$$

$$y_1(0) = y_1(1); \quad \left[\frac{dy_1}{dx} - \lambda y_1\right]_{x=0} = \left[\frac{dy_1}{dx} - \lambda y_2\right]_{x=1}.$$

Это замечание позволяет во многих случаях сводить обобщенную задачу о собственных значениях в пространстве скалярных или векторных функций к некоторой другой обычной задаче о собственных значениях в пространстве вектор-функций

По поводу обобщенной задачи на собственные значения в пространстве вектор-функций см. также Жданович [1] и Расулов [1, 2].

8. Случай оператора первого порядка. Наиболее просто определяются собственные значения и собственные функции в случае дифференциального оператора L первого порядка. Пусть этот оператор порождается дифференциальным выражением

$$l(y) = y' + P(x)\,y \tag{24}$$

и краевыми условиями

$$Ay_a + By_b = 0. \tag{25}$$

Найдем собственные значения и собственные функции оператора L. Для этого найдем сначала общее решение уравнения

$$y' + P(x)\,y = \lambda y. \tag{26}$$

Положим $y = e^{\lambda x}z$; подставляя в (26), получим, что z удовлетворяет уравнению

$$z' + P(x)\,z = 0. \tag{27}$$

Каждому вектору $c \in R_m$ поставим в соответствие решение $z(x)$ этого уравнения, удовлетворяющее начальному условию $z\big|_{x=a} = c$. В силу единственности такого решения соответствие

$$c \to z(x)$$

однозначно. Кроме того, оно, очевидно, линейно: если $c_1 \to z_1(x)$ и $c_2 \to z_2(x)$, то $\lambda c_1 + \mu c_2 \to \lambda z_1(x) + \mu z_2(x)$ для произвольных чисел λ, μ. Следовательно, при каждом фиксированном x это соответствие определяет линейный оператор $Q(x)$:

$$z(x) = Q(x)\,c;$$

при этом, по самому определению оператора $Q(x)$, $Q(a)\,c = c$. Поэтому общее решение уравнения (26) имеет вид

$$y = e^{\lambda x}Q(x)\,c, \tag{28}$$

где c — произвольный вектор из R_m.

Подставим это выражение в краевое условие (25); после сокращения на $e^{\lambda a}$ мы получим

$$[A + e^{\lambda(b-a)}BQ(b)]\,c = 0. \tag{29}$$

Рассмотрим обобщенную задачу на собственные значения

$$[A + \mu BQ(b)]\,c = 0 \tag{30}$$

для операторов A и $BQ(b)$ в конечномерном пространстве R_m. Пусть $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_r$ — все собственные значения, каждое из которых повторяется столько раз, какова его кратность, а $c_1, c_2, \ldots c_r$ — соответствующие линейно независимые собственные векторы этой задачи. Равенство (29) при $c \neq 0$ означает, что $e^{\lambda(b-a)}$ есть собственное значение, а c — соответствующий собственный вектор задачи (30).

Следовательно, *все собственные значения оператора* L *имеют вид*

$$\lambda = \frac{1}{b-a}(\ln \mu_j + 2k\pi i), \ j = 1, 2, \ldots, r; \ k = 0, \pm 1, \pm 2, \pm 3, \ldots;$$

им соответствуют собственные функции

$$e^{\left[\frac{1}{b-a}(\ln \mu_j + 2k\pi i)\right] x} Q(x) c_j.$$

Исследования многих авторов (см., например, Биркгоф и Лангер [1]) посвящены более общей задаче о собственных значениях

$$\frac{dy}{dx} + P(x) y = \lambda Q(x) y, \tag{31}$$

$$Ay_a + By_b = 0, \tag{32}$$

где $P(x)$, $Q(x)$ — операторные функции, непрерывные в интервале $[a, b]$.

Относящиеся к этой задаче результаты формулируются наиболее просто в том случае, когда при любом x из интервала $[a, b]$ все корни $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_m$ характеристического уравнения оператора $Q(x)$ различны. В этом случае при каждом x их можно перенумеровать так, чтобы функции $\mu_1(x)$, $\mu_2(x), \ldots, \mu_m(x)$ были непрерывны. Поэтому существует неособенная *) матрица $S(x)$, такая, что

$$S^{-1}(x) P(x) S(x) = M(x),$$

где $M(x)$ — диагональная матрица с диагональными элементами $\mu_1(x)$, $\mu_2(x), \ldots, \mu_n(x)$.

Предположим, что $Q(x)$ — дифференцируемая функция в интервале $[a, b]$. Тогда $S(x)$ и $M(x)$ также дифференцируемы. Полагая в (31)

$$y = S(x) \hat{y},$$

мы приведем это уравнение к виду

$$\frac{d\hat{y}}{dx} + \hat{P}(x) \hat{y} = \lambda M(x) \hat{y},$$

где

$$\hat{P}(x) = S^{-1}(x) S'(x) + S^{-1}(x) P(x) S(x).$$

Поэтому можно сразу считать, что матрица $Q(x)$ диагональна. Оказывается, что при больших $|\lambda|$ поведение решений уравнения (31) примерно такое же, как и уравнения

$$\frac{dy}{dx} = \lambda Q(x) y.$$

---

*) То есть такая, что $\det S(x) \neq 0$.

Точнее, существует фундаментальная матрица $Y(x)$ из решений уравнения (31), для которой

$$Y(x) = \left[Y_0(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right)\right] e^{\lambda \int\limits_a^x Q(x)\,dx},$$

где $Y_0(x)$ — некоторая, не зависящая от λ матрица. Этот результат дает возможность получить асимптотические формулы для собственных значений и собственных функций, а также вывести теорему о разложении по собственным функциям краевой задачи, аналогично тому, как это было сделано в §§ 4 и 5 (подробнее см. Биркгоф и Лангер [1])

§ 7. Функция Грина дифференциального оператора

1. Обращение дифференциального оператора. Пусть L дифференциальный оператор, для которого краевая задача $Ly = 0$ имеет лишь тривиальное решение. Тогда оператор L имеет обратный L^{-1}. Докажем, что L^{-1} есть интегральный оператор, ядро которого есть операторная функция двух переменных. Эта функция называется *функцией Грина* оператора.

Непосредственное определение функции Грина в рассматриваемом случае аналогично определению функции Грина, данному в n° 3 § 3. *Функцией Грина* оператора L называется операторная функция $G(x, \xi)$ переменных x, ξ, удовлетворяющая следующим условиям:

1°. *Каждое значение функции $G(x, \xi)$ есть линейный оператор в пространстве R_m.*

2°. *Функция $G(x, \xi)$ непрерывна и имеет непрерывные производные по x до $(n-2)$-го порядка включительно в квадрате $a \leqslant x, \xi \leqslant b$.*

3°. *При любом фиксированном значении ξ из интервала (a, b) функция $G(x, \xi)$ имеет непрерывные производные $(n-1)$-го и n-го порядка по x в каждом из интервалов $[a, \xi)$ и $(\xi, b]$. Производная $(n-1)$-го порядка имеет при $x = \xi$ скачок, равный $[P_0(\xi)]^{-1}$:*

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi+0, \xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}} G(\xi-0, \xi) = [P_0(\xi)]^{-1}.$$

4°. *При фиксированном ξ из интервала (a, b) функция $G(x, \xi)$ (рассматриваемая как функция от x) удовлетворяет операторному уравнению $l(G) = 0$ в каждом из интервалов $[a, \xi)$, $(\xi, b]$ и краевым условиям $U_\nu(G) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$ определяющим оператор L.*

Повторяя рассуждения n°n° 3—5 § 3, приходим к следующим результатам:

Теорема 1. *Если краевая задача $Ly=0$ имеет только тривиальное решение, то оператор L имеет одну и только одну функцию Грина.*

Теорема 2. *Если краевая задача $Ly=0$ имеет только тривиальное решение, то для любой непрерывной вектор-функции $f(x)$ уравнение $Ly=f$ имеет одно и только одно решение. Это решение задается формулой* *)

$$y(x)=\int_a^b G(x, \xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{1}$$

Теорема 2 означает, что L^{-1} *есть интегральный оператор с ядром* $G(x, \xi)$.

Ядро $G^*(x, \xi)=[G(\xi, x)]^*$ называется *сопряженным* к ядру $G(x, \xi)$. Ядро называется *эрмитовым*, если оно совпадает с сопряженным ядром: $G(x, \xi)=[G(\xi, x)]^*$. При этом остаются в силе предложения III и IV n° 5 § 3, а также все предложения n° 6 § 3.

2. Функция Грина оператора $L-\lambda I$. Найдем выражение для функции Грина оператора $L-\lambda I$. Пусть $Y_\nu=Y_\nu(x, \lambda)$ — какая-нибудь фундаментальная система решений уравнения $l(Y)=\lambda Y$.

Выберем ее так (что всегда возможно), чтобы $Y_\nu(x, \lambda)$ были целыми аналитическими матричными функциями параметра λ. Обозначим через $|W|$ определитель матрицы

$$W=\begin{pmatrix} Y_1^{(n-1)} & \dots & Y_n^{(n-1)} \\ Y_1^{(n-2)} & \dots & Y_n^{(n-2)} \\ \cdot & \cdot\ \cdot\ \cdot & \cdot \\ Y_1 & \dots & Y_n \end{pmatrix}, \tag{2}$$

а через V_ν, $\nu=1, 2, \dots, n$, — матрицу m-го порядка, составленную из алгебраических дополнений элементов матрицы Y_ν в определителе $|W|$. Далее, обозначим через W_ν, $\nu=1, 2, \dots, n$, матрицу, транспонированную к V_ν.

*) При фиксированных x и ξ $G(x, \xi) f(\xi)$ обозначает результат применения оператора $G(x, \xi)$ к вектору $f(\xi)$.

Положим

$$Z_\nu = \frac{1}{|W|} W_\nu, \tag{3}$$

$$g(x, \xi) = \begin{cases} \frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu(x) Z_\nu(\xi) & \text{при} \quad \xi < x, \\ -\frac{1}{2} \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu(x) Z_\nu(\xi) & \text{при} \quad \xi > x, \end{cases} \tag{4}$$

$$U = \begin{pmatrix} U_1(Y_1) & \ldots & U_1(Y_n) \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ U_n(Y_1) & \ldots & U_n(Y_n) \end{pmatrix},$$

$$U^{-1} = \begin{pmatrix} W_{11} & \ldots & W_{1n} \\ \cdot & \cdot \cdot \cdot & \cdot \\ W_{n1} & \ldots & W_{nn} \end{pmatrix},$$

где $W_{j\nu}$ — матрица m-го порядка.

I. *Функция Грина $G(x, \xi, \lambda)$ оператора $L - \lambda I$ задается формулой*

$$G(x, \xi, \lambda) = g(x, \xi, \lambda) - \sum_{j, \nu=1}^{n} Y_j(x) W_{j\nu} U_\nu(g). \tag{5}$$

Доказательство формулы (5) аналогично доказательству формулы (34) n° 7 § 3. Применяя к уравнению $l(y) - \lambda y = f$ метод вариации произвольных постоянных, мы получим для его решения y формулу

$$y = \sum_{\nu=1}^{n} Y_\nu(x) c_\nu + \int_a^b g(x, \xi, \lambda) f(\xi) d\xi, \tag{6}$$

аналогичную формуле (31) n° 7 § 3, причем c_ν здесь постоянные векторы. Подставляя это выражение для y в краевые условия $U_\nu(y) = 0$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, мы найдем эти векторы c_ν; подставляя затем в (6) выражения для c_ν, мы придем к формуле (5). Обозначим через Δ определитель матрицы U; тогда

$$W_{j\nu} = \frac{1}{\Delta} V_{j\nu}, \tag{7}$$

где $V_{j\nu}$ — транспонированная к матрице m-го порядка, составленной из алгебраических дополнений элементов матрицы $U_\nu(Y_j)$ в определителе Δ, матрица. Формула (5) перепишется в виде

$$G(x, \xi, \lambda) = g(x, \xi, \lambda) - \frac{1}{\Delta} \sum_{j, \nu=1}^{n} Y_j(x) V_{j\nu} U_\nu(g). \tag{8}$$

3. Аналитическая природа функции Грина оператора $L-\lambda I$. Функции $Y_\mu(x)$, а следовательно, и $g(x, \xi, \lambda)$, $V_{\mu\nu}$ и $U_\nu(g)$, Δ, являются целыми аналитическими функциями параметра λ. Поэтому из (8) следует:

II. *Функция Грина оператора $L-\lambda I$ есть мероморфная матричная функция параметра λ; ее полюсами могут быть только собственные значения оператора L.*

Рассмотрим подробнее тот случай, когда λ_0 — простой нуль функции Δ.

Пусть $z(x)$ — собственная функция сопряженного оператора L^*, соответствующая собственному значению $\bar{\lambda}_0$; обозначим через $y(x)z^*(\xi)$ матрицу с элементами $y_k(x)\overline{z_j(\xi)}$. Тогда, пользуясь результатами n°2 и повторяя рассуждения n° 8 § 3, заключаем, что:

III. *Если λ_0 — простой нуль функции $\Delta(\lambda)$, то*

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{y(x)z^*(\xi)}{(\lambda-\lambda_0)\int_a^b (y, z)\,dx} + G_1(x, \xi, \lambda), \tag{9}$$

где $G_1(x, \xi, \lambda)$ регулярна в окрестности точки λ_0. Если, в частности,

$$\int_a^b (y, z)\,dx = 1,$$

то

$$G(x, \xi, \lambda) = -\frac{y(x)z^*(\xi)}{\lambda-\lambda_0} + G_1(x, \xi, \lambda). \tag{10}$$

Функции Грина дифференциальных операторов первого порядка в пространстве вектор-функции изучались в работах: Буницкий [1, 2], Бохер [1], Биркгоф и Лангер [1], Блисс [1].

§ 8. Асимптотика собственных значений дифференциального оператора

1. Постановка задачи. В § 4 было подробно изучено асимптотическое поведение собственных значений и собственных функций дифференциального оператора в пространстве скалярных функций.

Полученные результаты были затем применены в § 5 для получения общих теорем о разложении по собственным функциям. В этом параграфе мы рассмотрим аналогичную задачу об асимптотическом поведении собственных значений и собственных функций дифференциального оператора в пространстве вектор-функций.

Для решения этой задачи сначала изучается асимптотическое поведение решений матричного уравнения

$$l(Y)+\rho^n Y=0 \tag{1}$$

при больших значениях $|\rho|$. При этом, как и в § 4, существенную роль играет разбиение комплексной ρ-плоскости на области S_ν (или T_ν) (см. n°2 § 4).

Для простоты изложения мы рассмотрим случай $P_0(x)=1$, так что

$$l(Y)=Y^{(n)}+P_1Y^{(n-1)}+\ldots+P_nY. \tag{2}$$

Ниже будут указаны возможные обобщения полученных результатов при $P_0(x)\not\equiv 1$. Кроме того, не нарушая общности, можно считать, что $P_1\equiv 0$. Действительно, в противном случае, можно в уравнении (1) сделать подстановку $Y=U\widehat{Y}$, где U — какое-нибудь решение матричного уравнения $U'+\frac{1}{n}P_1U=0$, удовлетворяющее условию

$$\det U\neq 0.$$

Тогда для $\widehat{Y}$ получим уравнение вида $\widehat{l}(\widehat{Y})+\rho^n\widehat{Y}=0$, в котором коэффициент при $\widehat{Y}^{(n-1)}$ равен нулю.

Наконец, можно считать, что $a=0$, $b=1$, т. е. что рассматриваемый интервал есть $[0, 1]$ (см. n° 1 § 4).

2. Асимптотика решений матричного уравнения $l(Y)+\rho^nY=0$ при большом $|\rho|$. Итак, пусть

$$l(Y)=Y^{(n)}+P_2Y^{(n-2)}+\ldots+P_nY; \tag{3}$$

рассмотрим матричное уравнение

$$l(Y)+\rho^nY=0. \tag{4}$$

Применяя к этому уравнению по существу те же рассуждения, что и в n°5 § 4, приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Если матричные функции $P_2, \ldots, P_n$ непрерывны *) в интервале $[0, 1]$, то матричное уравнение*

$$Y^{(n)}+P_2Y^{(n-2)}+\ldots+P_nY+\rho^nY=0$$

во всякой области T комплексной ρ-плоскости имеет n линейно независимых решений $Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$, аналитических относительно $\rho\in T$ и удовлетворяющих при $\rho\in T$ и $|\rho|$ достаточно

*) В действительности теорема остается верной для произвольных матричных функций $P_2, \ldots, P_n$, *суммируемых* в интервале $[0, 1]$.

большом соотношениям *)

$$\left.\begin{aligned} Y_k &= e^{\rho\omega_k x}\left[I + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ \frac{dY_k}{dx} &= \rho e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k I + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ &\dots\dots\dots\dots\dots \\ \frac{d^{n-1}Y_k}{dx^{n-1}} &= \rho^{n-1}e^{\rho\omega_k x}\left[\omega_k^{n-1} I + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \qquad (5)$$

При этом $O\left(\frac{1}{\rho}\right)$ обозначает матрицу вида $\frac{A(x, \rho)}{\rho}$, где $A(x, \rho)$ — матричная функция, все элементы которой удовлетворяют условиям вида

$$|A_{ij}(x, \rho)| \leqslant M \quad \text{при} \quad |\rho| \geqslant R, \quad 0 \leqslant x \leqslant 1,$$

а M и R — некоторые постоянные, не зависящие от x. Если функции $P_k(x)$ не только непрерывны, но также достаточное число раз дифференцируемы, то асимптотические формулы (5) можно уточнить и получить формулы вида

$$Y_k(x) = e^{\rho\omega_k x}\left[I + \frac{Y_{k1}(x)}{\rho} + \frac{Y_{k2}(x)}{\rho^2} + \dots + \frac{Y_{k\nu}(x)}{\rho^\nu} + O\left(\frac{1}{\rho^{\nu+1}}\right)\right]$$

и аналогичные формулы для производных $Y_k^{(\nu)}$, $\nu = 1, 2, \dots, n-1$ (подробнее см. n°6 § 4).

3. Нормировка краевых условий. Пусть $U_\nu(y) = 0$, $\nu = 1, 2, \dots, n$, — краевые условия, определяющие данный дифференциальный оператор.

Число k назовем *порядком* формы $U(y)$, если эта форма содержит хотя бы один из векторов $y_0^{(k)}$ и $y_1^{(k)}$, но не содержит векторов $y_0^{(\nu)}$ и $y_1^{(\nu)}$ при $\nu > k$.

Рассмотрим формы $U_\nu(y)$ порядка $n-1$, если таковые имеются; они имеют вид

$$U_\nu(y) = A_{\nu, n-1} y_0^{(n-1)} + B_{\nu, n-1} y_1^{(n-1)} + \dots$$

Прямоугольная матрица $(A_{\nu, n-1}, B_{\nu, n-1})$ имеет m строк и $2m$ столбцов. Но максимальное число линейно независимых строк из $2m$ элементов есть $2m$; поэтому, заменяя, если нужно, строки в формах порядка $n-1$ их линейными комбинациями, можно добиться того, что форм порядка $n-1$ будет не больше двух.

*) Здесь I обозначает единичную матрицу m-го порядка.

Применяя к оставшимся формам тот же прием, мы после конечного числа таких шагов приведем краевые условия к виду

$$U_\nu(y) = U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0, \tag{6}$$

где

$$\left.\begin{aligned} U_{\nu 0}(y) &= A_\nu y_0^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} A_{\nu j} y_0^{(j)}, \\ U_{\nu 1}(y) &= B_\nu y_1^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} B_{\nu j} y_1^{(j)}, \end{aligned}\right\} \tag{7}$$

$$n-1 > k_1 \geqslant k_2 \geqslant \ldots \geqslant k_n \geqslant 0, \quad k_{\nu+2} < k_\nu,$$

причем хотя бы одна из матриц A_ν, B_ν, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, отлична от нулевой.

Описанные операции называются *нормировкой* краевых условий, а полученные в результате краевые условия вида (7) — *нормированными краевыми условиями.*

4. Регулярные краевые условия. Рассмотрим фиксированную область S_k и занумеруем $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ так, чтобы при $\rho \in S_k$ было

$$\Re(\rho\omega_1) \leqslant \Re(\rho\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \Re(\rho\omega_n).$$

Дальнейшие асимптотические формулы будут выведены для класса краевых условий, которые назовем *регулярными.* Этот класс определяется различным образом в зависимости от того, будет ли n четным или нечетным:

а) n нечетно; $n = 2\mu - 1$. *Нормированные краевые условия* (6) *называются регулярными, если числа* θ_0 *и* θ_m, *определенные равенством*

$$\theta_0 + \theta_1 s + \ldots + \theta_m s^m = \\ = \begin{vmatrix} A_1\omega_1^{k_1} & \ldots & A_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (A_1 + sB_1)\,\omega_\mu^{k_1} & B_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \ldots & B_1\omega_n^{k_1} \\ A_2\omega_1^{k_2} & \ldots & A_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (A_2 + sB_2)\,\omega_\mu^{k_2} & B_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \ldots & B_2\omega_n^{k_2} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ A_n\omega_1^{k_n} & \ldots & A_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (A_n + sB_n)\,\omega_\mu^{k_n} & B_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \ldots & B_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}, \tag{8а}$$

отличны от нуля.

б) n четно; $n = 2\mu$. *Нормированные краевые условия* (6) *называются регулярными, если числа* θ_{-n} *и* θ_n, *определенные равенством*

$$\theta_{-m} s^{-m} + \theta_{-m+1} s^{-m+1} + \ldots + \theta_m s^m = \det(A, B), \tag{8б}$$

где

$$A=\begin{vmatrix} A_1\omega_1^{k_1} \dots A_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (A_1+sB_1)\,\omega_\mu^{k_1} \\ A_2\omega_1^{k_2} \dots A_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (A_2+sB_2)\,\omega_\mu^{k_2} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots \\ A_n\omega_1^{k_n} \dots A_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (A_n+sB_n)\,\omega_\mu^{k_n} \end{vmatrix},$$

$$B=\begin{vmatrix} \left(A_1+\frac{1}{s}B_1\right)\omega_{\mu+1}^{k_1} & B_1\omega_{\mu+2}^{k_1} \dots B_1\omega_n^{k_1} \\ \left(A_2+\frac{1}{s}B_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} & B_2\omega_{\mu+2}^{k_2} \dots B_2\omega_n^{k_2} \\ \dots\dots\dots\dots & \dots\dots\dots \\ \left(A_n+\frac{1}{s}B_n\right)\omega_{\mu+1}^{k_n} & B_n\omega_{\mu+2}^{k_n} \dots B_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix},$$

отличны от нуля.

Легко видеть, что это определение регулярности не зависит от выбора области S_k. Действительно, числа θ_0 и θ_m (соответственно θ_{-m} и θ_{+m}) являются определителями, которые получаются из определений для чисел θ, рассмотренных в § 4, заменой α_k и β_k матрицами A_k и B_k. Поэтому с изменением области S_k они преобразуются по прежним правилам. В частности, для нечетного n они умножаются на множитель, равный по модулю 1. Для четного n можно повторить без существенных изменений выкладки из n° 8 § 4. При этом оказывается, что при переходе от S_0 к S_1 (или S_{2n-1}) корни уравнения

$$\theta_{-m}s^{-m}+\ \dots\ +\theta_m s^m=0$$

меняют свои значения на обратные. Для нечетного n мы имеем два класса уравнений

$$\theta_0+\theta_1 s+\ \dots\ +\theta_m s^m=0$$

с соответственно равными корнями внутри каждого класса. Для S_k с нечетным k получающиеся корни обозначим через $\xi_1^{(1)}, \dots, \xi_m^{(1)}$, а для S_k с четным k — через $\xi_1^{(2)}, \dots, \xi_m^{(2)}$.

5. Асимптотика собственных значений. В вопросах асимптотического поведения собственных значений существенную роль играет уравнение

$$\theta_0+\theta_1 s+\ \dots\ +\theta_m s^m=0 \tag{9a}$$

при n нечетном и

$$\theta_{-m}s^{-m}+\theta_{-m+1}s^{-m+1}+\ \dots\ +\theta_m s^m=0 \tag{9б}$$

при n четном, где числа θ_i были определены в n° 4.

Если краевые условия регулярны, то все корни этих уравнений отличны от 0 и ∞.

В следующей теореме мы предполагаем (и для краткости не оговариваем этого в условии теоремы), что коэффициенты рассматриваемого дифференциального выражения — непрерывные матричные функции в интервале $[0, 1]$. Заметим, однако, что фактически все результаты этого пункта остаются верными и тогда, когда коэффициенты дифференциального выражения произвольные суммируемые функции в интервале $[0, 1]$.

Теорема 2. *Пусть L — дифференциальный оператор n-го порядка в интервале* $(0, 1)$, *порожденный регулярными краевыми условиями.*

При нечетном n каждому простому корню $\xi_j^{(1)}$, а также каждому простому корню $\xi_j^{(2)}$ отвечает последовательность собственных значений соответственно $\lambda_{kj}^{(1)}$ и $\lambda_{kj}^{(2)}$, причем

$$\begin{aligned} \lambda_{kj}^{(1)} &= (\mp 2k\pi i)^n \left\{ 1 \mp \frac{n \ln_0 \xi_j^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\}, \\ \lambda_{kj}^{(2)} &= (\pm 2k\pi i)^n \left\{ 1 \pm \frac{n \ln_0 \xi_j^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\}. \end{aligned} \tag{10a}$$

Здесь верхний знак соответствует $n = 4q - 1$, а нижний — $n = 4q + 1$.

В случае r-кратных корней $\xi_j^{(1)}$ или $\xi_j^{(2)}$ получается r последовательностей собственных значений, удовлетворяющих асимптотическим формулам

$$\begin{aligned} \lambda_{kj}^{(1)} &= (\mp 2k\pi i)^n \left\{ 1 \mp \frac{n \ln_0 \xi_j^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/r}}\right) \right\}, \\ \lambda_{kj}^{(2)} &= (\pm 2k\pi i)^n \left\{ 1 \pm \frac{n \ln_0 \xi_j^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{1+1/r}}\right) \right\}, \end{aligned} \tag{11a}$$

$$j = j_0,\ j_0 + 1,\ \ldots,\ j_0 + r - 1,$$

причем предполагается, что

$$\xi_{j_0}^{(\nu)} = \ldots = \xi_{j+r-1}^{(\nu)}.$$

Выбор знака в (11a) *подчинен тому же правилу, что и в формуле* (10a).

При четном n каждому простому корню ξ уравнения (9б) *для области S_0 соответствует последовательность собственных значений*

$$\lambda_k = (2k\pi i)^n \left\{ \lambda \mp \frac{n \ln_0 \xi}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right) \right\}, \tag{10б}$$

где верхний знак соответствует $n=4q$, а нижний соответствует $n=4q+2$. Каждому r-кратному корню ξ уравнения (9б) *соответствует r последовательностей собственных значений*

$$\lambda_{kj}=(2k\pi i)^n\left\{1\mp\frac{n\ln_0\xi}{2k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^{1+1/r}}\right)\right\},\qquad(11б)$$
$$j=1,\ \ldots,\ r$$

с выбором знака по прежнему правилу.

При кратном корне ξ некоторые из λ_{kj}, отвечающие этому ξ, могут совпасть, образуя одно кратное собственное значение. При $|\lambda|$ достаточно большом оператор L не имеет никаких других собственных значений и кратность собственного значения λ_{kj} равна числу совпадающих с ним собственных значений в формулах (11а), (11б), *следовательно, не превосходит кратности соответствующего корня ξ уравнения* (9).

Доказательство. Рассмотрим сначала случай нечетного n; пусть $n=2\mu-1$. Рассмотрим фиксированную область T; пусть числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ занумерованы так, что при $\rho\in T$

$$\Re((\rho+c)\omega_1)\leqslant\Re((\rho+c)\omega_2)\leqslant\ldots\leqslant\Re((\rho+c)\omega_n).$$

Применяя формулы (5) n° 2 и повторяя рассуждения при доказательстве теоремы 2 n° 9 § 4, получим

$$\left.\begin{aligned}&U_\nu(Y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}[A_\nu] && \text{при } j<\mu,\\ &U_\nu(Y_j)=(\rho\omega_j)^{k_\nu}e^{\rho\omega_j}[B_\nu] && \text{при } j>\mu,\\ &U_\nu(Y_\mu)=(\rho\omega_\mu)^{k_\nu}\{[A_\nu]+e^{\rho\omega_\mu}[B_\nu]\}.&&\end{aligned}\right\}\qquad(12)$$

Подставим все эти выражения в уравнение $\Delta=0$; из определения (8а) чисел θ_k вытекает, что после сокращения на ρ^{k_1}, $\rho^{k_2}, \ldots, \rho^{k_n}$, $e^{\rho\omega_{\mu+1}}, \ldots, e^{\rho\omega_n}$ это уравнение примет вид

$$[\theta_0]+[\theta_1]e^{\omega_\mu\rho}+[\theta_2]e^{2\omega_\mu\rho}+\ldots+[\theta_m]e^{m\omega_\mu\rho}=0.$$

Отсюда и из рассуждений, аналогичных рассуждениям в доказательстве теоремы 2 n° 9 § 4 следуют все утверждения теоремы.

Аналогично рассматривается случай четного n.

Пользуясь теоремами 1 и 2 можно получить асимптотические формулы для собственных функций. Мы не будем подробно останавливаться на этом вопросе.

§ 9. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора

1. Случай самосопряженного дифференциального оператора. Пусть L — самосопряженный дифференциальный оператор в пространстве вектор-функций. Повторяя рассуждения n° 2 § 5, приходим к следующей теореме:

Теорема 1. *Всякая вектор-функция из области определения самосопряженного оператора L разлагается в равномерно сходящийся обобщенный ряд Фурье по собственным функциям этого оператора.*

Если $y_1(x), y_2(x), \ldots$ — ортонормальная система собственных функций оператора L, отвечающих всем его собственным значениям, то это разложение имеет вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_n(x), \tag{1}$$

где

$$c_n = \int_a^b (f(x),\ y_n(x))\,dx. \tag{2}$$

Напомним еще раз, что $f(x)$ и $y_n(x)$ — вектор-функции; если, поэтому, положить

$$f(x) = \{f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x)\},$$
$$y_n(x) = \{y_{n1}(x),\ y_{n2}(x),\ \ldots,\ y_{nm}(x)\},\quad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

то разложение (1) эквивалентно системе разложений в равномерно сходящиеся ряды

$$f_j(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n y_{nj}(x),\quad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

с одними и теми же коэффициентами c_n.

Из теоремы 1 следует, что *функции* $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots$ образуют полную ортонормальную систему в пространстве $L_m^2(a, b)$ всех измеримых вектор-функций $f(x)$, удовлетворяющих условию *)

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx < +\infty.$$

Отсюда

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2, \tag{3}$$

*) Здесь $|f(x)|^2$ обозначает скалярный квадрат вектора.

где

$$c_n = \int_a^b (f(x),\ y_n(x))\,dx.$$

Формулы разложения по собственным функциям в бесконечномерном пространстве вектор-функций с бесконечным числом компонент получены в работе Рофе-Бекетов [1]. Поскольку в этом случае набор собственных функций может оказаться не дискретным, а непрерывным, то в формуле, аналогичной (1), вместо суммы приходится писать интеграл.

2. Разложение по собственным функциям дифференциального оператора, порожденного регулярными краевыми условиями. Рассуждения в n° 1 неприменимы, если оператор L не является самосопряженным.

Поэтому мы применим теперь другой метод, основанный на аналитических свойствах функции Грина оператора $L-\lambda I$ и на асимптотических формулах, полученных в § 8. При этом мы будем предполагать, что краевые условия, порождающие оператор L, регулярны; кроме того, можно, не нарушая общности, считать, что краевая задача $Ly=0$ имеет только тривиальное решение $y=0$. Тогда оператор L имеет функцию Грина $G(x, \xi)$. Как и в n° 3 § 5, рассмотрим последовательность окружностей Γ_k, $k=1, 2, \ldots$, с центром в начале координат, обладающую теми же свойствами 1°, 2°, что и на стр. 92.

В силу доказанных в n° 5 § 8 асимптотических свойств этих собственных значений такие окружности существуют.

Пусть $G(x, \xi, \lambda)$ — функция Грина оператора $L-\lambda I$; в частности, $G(x, \xi, 0) = G(x, \xi)$ есть функция Грина оператора L. Рассмотрим интеграл

$$I_k = \frac{1}{2\pi i}\oint\limits_{\Gamma_k} \frac{G(x, \xi, \lambda)}{\lambda}\,d\lambda. \tag{4}$$

Лемма. *На окружностях Γ_k функция $G(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет неравенству*

$$|G_{jk}(x, \xi, \lambda)| \leqslant \frac{M}{|\lambda|^{\frac{n-1}{n}}}, \tag{5}$$

где M — некоторая постоянная.

Доказательство*). Положим $\lambda = -\rho^n$; тогда при надлежащем выборе $\arg\rho$ круг Γ_k перейдет в дугу γ_k окружности

*) Из этого доказательства видно, что оценка (5) имеет место для всех достаточно больших $|\lambda|$ из областей Q_δ (см. стр. 92).

с центральным углом $\frac{2\pi}{n}$, проходящую в двух соседних областях S_1 и S_2 комплексной ρ-плоскости. Оценим функцию $G(x, \xi, \lambda)$ на дуге γ_k. Пусть числа $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ занумерованы так, что при $\rho \in S_1$

$$\Re(\rho\omega_1) \leqslant \Re(\rho\omega_2) \leqslant \ldots \leqslant \Re(\rho\omega_n).$$

Воспользуемся формулами n° 2 § 7 для $G(x, \xi, \lambda)$ и подставим в эти формулы найденные в n° 2 § 8 асимптотические выражения для $Y_j(x, \lambda)$. Мы получим:

$$Z_\nu(\xi) = e^{-i\omega_\nu\xi} \frac{1}{n\rho^{n-1}}[-\omega_\nu 1], \tag{6}$$

следовательно, в силу (4) n° 2 § 7,

$$g(x, \xi) = \mp \frac{1}{2n\rho^{n-1}} \left(\sum_{\nu=1}^{n} e^{\rho\omega_\nu(x-\xi)} \omega_\nu \right)[1], \tag{7}$$

причем знак «$-$» берется при $\xi < x$ и «$+$» при $\xi > x$.

Дальнейшую часть доказательства удобно вести отдельно для n четного и n нечетного.

Пусть сначала n нечетно; $n = 2\mu - 1$; тогда при $\rho \in S_1$ будет

$$\left.\begin{aligned} \Re(\rho\omega_1) \leqslant 0, \ \ldots, \ \Re(\rho\omega_{\mu-1}) \leqslant 0, \\ \Re(\rho\omega_{\mu+1}) \geqslant 0, \ \ldots, \ \Re(\rho\omega_n) \geqslant 0. \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

Обозначим через γ'_k ту часть дуги γ_k, которая находится в области S_1 и на которой $\Re(\rho\omega_\mu) \leqslant 0$, а через γ''_k — ту ее часть, которая находится в S_1 и на которой $\Re(\rho\omega_\mu) \geqslant 0$. Оценим функцию $G(x, \xi, \lambda)$ на дуге γ'_k. Пользуясь формулами (12) n° 5 § 8, легко показать, что

$$Y_j(x) W_{j\nu} = O\left(\frac{1}{\rho^{k_\nu}}\right) \text{ на } \gamma'_k. \tag{9}$$

Для получения оценки на γ'_k функции $G(x, \xi, \lambda)$ преобразуем сначала ее выражение в формуле (5) n° 2 § 7. В силу формулы (4) n° 2 § 7 для $g(x, \xi)$

$$g(0, \xi) = -\frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha(0) Z_\alpha(\xi), \quad g(1, \xi) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} Y_\alpha(1) Z_\alpha(\xi);$$

следовательно,

$$U_\nu(g) = \frac{1}{2} \sum_{\alpha=1}^{n} [U_{\nu1}(Y_\alpha) - U_{\nu0}(Y_\alpha)] Z_\alpha(\xi).$$

Перепишем это выражение в виде

$$U_\nu(g)=\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\mu}[-U_\nu(Y_\alpha)+2U_{\nu 1}(Y_\alpha)]\,Z_\alpha(\xi)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=\mu+1}^{n}[U_\nu(Y_\alpha)-2U_{\nu 0}(Y_\alpha)]\,Z_\alpha(\xi)=$$
$$=-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\mu}U_\nu(Y_\alpha)\,Z_\alpha(\xi)+\sum_{\alpha=1}^{\mu}U_{\nu 1}(Y_\alpha)\,Z_\alpha(\xi)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=\mu+1}^{n}U_\nu(Y_\alpha)\,Z_\alpha(\xi)-\sum_{\alpha=\mu+1}^{n}U_{\nu 0}(Y_\alpha)\,Z_\alpha(\xi).$$

Но в силу (6) при $\alpha\leqslant\mu$

$$U_{\nu 1}(Y_\alpha)\,Z_\alpha(\xi)=-\frac{\rho^{k_\nu}}{n\rho^{n-1}}\,\omega_\alpha^{k_\nu+1}e^{i\rho\omega_\alpha(1-\xi)}\,[B_\nu];$$

отсюда и из (8) вытекает, что

$$U_{\nu 1}(Y_\alpha)\,Z_\alpha(\xi)=O\left(\frac{1}{\rho^{n-k_\nu-1}}\right).$$

Аналогично при $\alpha>\mu$

$$U_{\nu 0}(Y_\alpha)\,Z_\alpha(\xi)=O\left(\frac{1}{\rho^{n-k_\nu-1}}\right);$$

поэтому (10) перепишется в виде

$$U_\nu(g)=-\frac{1}{2}\sum_{\alpha=1}^{\mu}U_\nu(Y_\alpha)\,Z_\alpha(\xi)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{\alpha=\mu+1}^{n}U_\nu(Y_\alpha)\,Z_\alpha(\xi)+O\left(\frac{1}{\rho^{n-k_\nu-1}}\right)$$

Подставляя это выражение в формулу (5) п°2 § 7 $G(x,\ \xi,\ \lambda)$, получим:

$$G(x,\ \xi,\ \lambda)=g(x,\ \xi,\ \lambda)+$$
$$+\frac{1}{2}\sum_{j=1}^{\mu}Y_j(x)\,Z_j(\xi)-\frac{1}{2}\sum_{j=\mu+1}^{n}Y_j(x)\,Z_j(\xi)+O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right),$$

ибо по определению обратной матрицы

$$\sum_{\nu=1}^{n}W_{j\nu}U_\nu(Y_\alpha)=\delta_{j\alpha}1$$

и, кроме того, в силу (9)

$$Y_j(x)\,W_{j\nu}\cdot O\left(\frac{1}{\rho^{n-k_\nu-1}}\right)=O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right).$$

Комбинируя (12) с (4) n° 2 § 7, придем к формулам:

$$G(x,\ \xi,\ \lambda)=\begin{cases}\sum\limits_{j=1}^{\mu} Y_j(x)\,Z_j(\xi)+O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right) & \text{при } \xi<x;\\ -\sum\limits_{j=\mu+1}^{n} Y_j(x)\,Z_j(\xi)+O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right) & \text{при } \xi>x.\end{cases}\tag{13}$$

Но в силу (8) и асимптотических формул для $Y_j(x)$ и $Z_j(\xi)$ на дуге γ'_k при $\xi<x$

$$\sum_{j=1}^{\mu} Y_j(x)\,Z_j(\xi)=-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{j=1}^{\mu}[\omega_j]\,e^{\rho\omega_j(x-\xi)}=O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right),$$

и при $\xi>x$

$$\sum_{j=\mu+1}^{n} Y_j(x)\,Z_j(\xi)=-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\sum_{j=\mu+1}^{n}[\omega_j]\,e^{\rho\omega_j(x-\xi)}=O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right).$$

В соединении с (13) это даст требуемое соотношение

$$G(x,\ \xi,\ \lambda)=O\left(\frac{1}{\rho^{n-1}}\right)$$

на дуге γ'_k.

Аналогично это соотношение доказывается на дуге γ''_k и на той части дуги γ_k, которая находится в области S_2.

Тем самым в случае нечетного n лемма доказана.

В случае четного n она доказывается совершенно аналогично. При помощи этой леммы точно так же, как и в n° 3 § 5, доказываются следующие теоремы.

Теорема 2. *Функция Грина $G(x,\ \xi)$ дифференциального оператора, порожденного регулярными краевыми условиями, разлагается в ряд*

$$G(x,\ \xi)=-\sum_{\nu}^{\infty}\frac{H_\nu(x,\ \xi)}{\lambda_\nu},$$

равномерно сходящийся по крайней мере при некоторой группировке его членов. При этом $H_\nu(x,\ \xi)$ обозначает вычет функции $G(x,\ \xi,\ \lambda)$ относительно полюса λ_ν.

Теорема 3. *Если все собственные значения оператора L, порожденного регулярными краевыми условиями, суть простые* *нули функции $\Delta(\lambda)$, то его функция Грина $G(x, \xi)$ разлагается в ряд*

$$G(x, \xi) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \frac{y_\nu(x) z_\nu^*(\xi)}{\lambda_\nu},$$

*равномерно сходящийся по крайней мере при некоторой группировке его членов. При этом $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ — собственные функции операторов L и L^*, отвечающие собственным значениям λ_ν и $\bar{\lambda}_\nu$ соответственно *).*

Напомним, что если

$$y_\nu(x) = (y_{\nu 1}(x), y_{\nu 2}(x), \ldots, y_{\nu m}(x)),$$
$$z_\nu(x) = (z_{\nu 1}(x), z_{\nu 2}(x), \ldots, z_{\nu m}(x)),$$

то $y_\nu(x) z_\nu^*(\xi)$ есть матрица с элементами $y_{\nu k}(x)\bar{z}_{\nu j}(\xi)$.

Теорема 4. *Пусть L — оператор, порожденный регулярными краевыми условиями, все собственные значения которого суть простые нули функции Δ. Тогда всякая вектор-функция $f(x)$ из области определения оператора L разлагается в ряд по собственным функциям*

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} c_\nu y_\nu(x), \quad c_\nu = \int_0^b (f(\xi), z_\nu(\xi))\, d\xi,$$

*равномерно сходящийся по крайней мере при некоторой группировке его членов. При этом $y_\nu(x)$, $z_\nu(x)$ — собственные функции операторов L и L^*, отвечающие собственным значениям λ_ν, $\bar{\lambda}_\nu$ соответственно *).*

Для простоты изложения мы ограничились только случаем обычной задачи на собственные значения и совсем не рассматривали обобщенную задачу $Ly = \lambda My$, в частности, задачу $Ly = \lambda B(x)y$. В этой последней задаче при некоторых ограничениях на $B(x)$ можно считать, что матрица $B(x)$ диагональна с непрерывными различными диагональными элементами $\mu_1(x)$, $\mu_2(x), \ldots, \mu_n(x)$ (см. n° 8 § 6). Тогда для решений соответствующего дифференциального уравнения и для собственных значений получаются асимптотические формулы, в которых роль множителя $e^{\rho\omega_j(x-a)}$ играют $e^{\rho \int_a^x \mu_j(t)\,dt}$. Эти формулы могут быть использованы для получения разложений по соб-

*) Эти собственные функции считаются нормированными так, что

$$\int_a^b (y_\nu(x), z_\nu(x))\, dx = 1.$$

ственным функциям. Следует отметить, что как этот случай, так и более общий случай $Ly = \lambda My$ до сих пор подробно никем не рассматривался (за исключением частных случаев $n = 1$ или $m = 1$).

В этой главе мы рассматривали дифференциальные операторы в пространстве конечномерных вектор-функций. Значительный интерес представляет изучение линейных дифференциальных операторов с коэффициентами, которые являются операторами, действующими в бесконечномерном пространстве. Существенно более сложная теория возникает в том случае, когда эти коэффициенты являются неограниченными (т. е линейными, но не непрерывными операторами) По этому поводу см работы Крейн С и Лаптев [1, 2] и Лаптев [1], в которых рассматриваются краевые задачи для дифференциальных уравнений 2-го порядка в гильбертовом и банаховом пространствах; см. также Рофе-Бекетов [1]

В недавних работах Рофе-Бекетова [6, 7] установлен общий вид самосопряженных краевых условий для конечных и бесконечных систем обыкновенных дифференциальных уравнений (четного и нечетного порядка) на конечном интервале, а также найдены необходимые и достаточные условия существования самосопряженных распадающихся краевых условий.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

ЛИНЕЙНЫЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ

ГЛАВА IV

НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ ИЗ ОБЩЕЙ ТЕОРИИ ЛИНЕЙНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ГИЛЬБЕРТОВОМ ПРОСТРАНСТВЕ *)

§ 10. Гильбертово пространство

1. Определение гильбертова пространства. Векторное пространство R называется *предгильбертовым*, если в нем определена числовая функция двух переменных x и y, обозначаемая обычно через (x, y) и удовлетворяющая следующим условиям:

1°. $(x, x) \geqslant 0$; $(x, x) = 0$ лишь при $x = 0$;
2°. $(y, x) = \overline{(x, y)}$;
3°. $(\lambda x, y) = \lambda (x, y)$;
4°. $(x_1 + x_2, y) = (x_1, y) + (x_2, y)$.

Эта функция (x, y) называется *скалярным произведением* элементов x и y.

Из свойств 2°—4° следует, что также

$$(x, \lambda y) = \bar{\lambda} (x, y), \quad (x, y_1 + y_2) = (x, y_1) + (x, y_2).$$

Во всяком предгильбертовом пространстве имеет место неравенство

$$|(x, y)|^2 \leqslant (x, x)(y, y);$$

оно называется *неравенством Коши — Буняковского*.

*) В настоящей главе собраны некоторые сведения из общей теории линейных операторов в гильбертовом пространстве, нужные для дальнейшего. Некоторые факты приведены без доказательств. Более полное изложение читатель может найти в любой из следующих книг: Ахиезер и Глазман [1], Данфорд и Шварц [1, 2], Люстерник и Соболев [1], Канторович и Акилов [1], Иосида [1], Плеснер [1], Рисс и Надь [1], Морен [1], Смирнов [1], Наймарк [7].

При $y=0$ это неравенство очевидно; при $y \neq 0$ оно непосредственно вытекает из неравенства

$$(x, x)-\bar{\lambda}(x, y)-\lambda\overline{(x, y)}+\lambda\bar{\lambda}(y, y)=(x-\lambda y, x-\lambda y) \geqslant 0,$$

если положить $\lambda=\frac{(x, y)}{(y, y)}$. Число $|x|=\sqrt{(x, x)}$ называется *нормой* вектора x.

Из свойств $1^\circ-4^\circ$ скалярного произведения и из неравенства Коши — Буняковского вытекает, что норма $|x|$ обладает следующими свойствами:

1°. $|x| \geqslant 0$;

2°. $|x|=0$ тогда и только тогда, когда $x=0$;

3°. $|\lambda x|=|\lambda||x|$;

4°. $|x+y| \leqslant |x|+|y|$.

Векторное пространство R, в котором определена норма $|x|$, удовлетворяющая условиям $1^\circ-4^\circ$, называется *нормированным пространством.*

Если R есть совокупность всех векторов обычного трехмерного пространства, а (x, y) — обычное скалярное произведение, то $|x|$ есть длина вектора x.

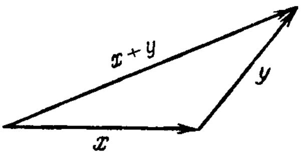

Рис. 14

Неравенство 4° имеет при этом простой геометрический смысл. Векторы x, y и $x+y$ образуют стороны треугольника (известное правило сложения векторов; рис. 14). Следовательно, неравенство 4° означает, что длина стороны $x+y$ треугольника не превосходит суммы длин двух других сторон x и y. Знак равенства возможен лишь тогда, когда треугольник вырождается в совокупность трех отрезков на одной прямой

Поэтому неравенство 4° обычно называют *неравенством треугольника*

Последовательность векторов x_n называют *сходящейся к вектору* x и пишут $x=\lim\limits_{n\to\infty} x_n$, если $|x-x_n| \to 0$ при $n \to \infty$.

Из неравенства Коши — Буняковского вытекает, что в смысле этой сходимости *скалярное произведение* (x, y) *есть непрерывная функция по совокупности переменных* x, y.

Ряд $x_1+x_2+\ldots$ векторов $x_n \in R$ называется *сходящимся*, если существует $x=\lim\limits_{n\to\infty}(x_1+\ldots+x_n)$. Вектор x называют тогда *суммой* этого ряда и пишут $x=x_1+x_2+\ldots$ Множество $S \subset \mathfrak{H}$ называется *замкнутым*, если из $x_n \in S$, $x_n \to x$, следует, что $x \in S$. Пересечение всех замкнутых множеств, содержащих данное множество S, есть минимальное замкнутое множество, содержащее S. Оно называется *замыканием* S и обозначается $\bar{S}$. Отметим, что замыкание подпространства есть также подпространство.

Последовательность $x_1, x_2, x_3, \ldots$ называется *фундаментальной*, если, каково бы ни было положительное число ε, неравенство

$$|x_n - x_m| < \varepsilon$$

выполняется для всех достаточно больших номеров n и m.

Очевидно, всякая сходящаяся последовательность фундаментальна; обратное, вообще говоря, неверно. Пространство R называется *полным*, если в нем всякая фундаментальная последовательность сходится к некоторому элементу пространства. *Всякое неполное пространство R можно пополнить*, т. е. вложить в некоторое минимальное полное пространство $\tilde{R}$. Пространство $\tilde{R}$ называется *пополнением* пространства R. Построение пространства $\tilde{R}$ есть обобщение канторовского приема пополнения множества всех рациональных чисел до множества всех действительных чисел. Именно, каждой фундаментальной последовательности $x_1, x_2, \ldots, x_n, \ldots, x_n \in R$, отнесем некоторый идеальный элемент x. Если при этом последовательность x_n сходится к элементу $x_0 \in R$, идеальный элемент x считается совпадающим с x_0.

Двум фундаментальным последовательностям $\{x_n\}$ и $\{y_n\}$ отнесем один и тот же идеальный элемент x тогда и только тогда, когда $|x_n - y_n| \to 0$ при $n \to \infty$. Совокупность всех таких идеальных элементов обозначим через $\tilde{R}$ и определим в $\tilde{R}$ действия и норму следующим образом. Если две фундаментальные последовательности x_n и y_n определяют идеальные элементы x и y, то λx и $x + y$ суть элементы, определенные последовательностями λx_n и $x_n + y_n$ соответственно. Далее, норма $|x|$ определяется формулой

$$|x| = \lim_{n \to \infty} |x_n|.$$

Легко проверить, что при таком определении действий и нормы $\tilde{R}$ есть полное линейное нормированное пространство и притом пополнение пространства R.

Две вектора называются *ортогональными*, если их скалярное произведение равно нулю.

Тот факт, что векторы x и y ортогональны, обозначается так: $x \perp y$. Два множества в пространстве R называются *ортогональными друг к другу*, если каждый вектор одного множества ортогонален к каждому вектору второго множества. Ортогональность двух множеств $S_1, S_2 \subset R$ обозначается так: $S_1 \perp S_2$. Легко проверить, что *совокупность всех векторов, ортогональных к некоторому множеству $S \subset R$, есть замкнутое подпространство в R.*

Это подпространство называется *ортогональным* дополнением к S в R и обозначается через $R-S$.

Множество векторов называется *ортогональной системой*, если каждые два различных вектора этого множества ортогональны.

Вектор x называется *нормированным*, если $|x|=1$. Если $x \neq 0$, то вектор $y=\frac{1}{|x|}x$ будет уже нормированным. Переход от x к y называется *нормировкой вектора* x. Ортогональная система, все векторы которой нормированы, называется *ортонормальной* системой.

Если e — элемент ортонормальной системы, то скалярное произведение

$$\alpha=(x, e)$$

называется *коэффициентом Фурье вектора x относительно элемента e.*

Ортонормальная система называется *полной*, если не существует вектора, не равного нулю, ортогонального ко всем векторам системы. Другими словами, полнота системы означает, что эту систему нельзя расширить до более широкой ортонормальной системы путем присоединения новых элементов.

Полное предгильбертово пространство, в котором существует конечная или счетная *) полная ортонормальная система, называется *гильбертовым пространством*. Гильбертово пространство мы будем обычно обозначать буквой $\mathfrak{H}$.

Всякая ортонормальная система в гильбертовом пространстве конечна или счетна.

Если $e_1, e_2, e_3, \ldots$ — полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$, то всякий вектор $x \in \mathfrak{H}$ можно представить в виде

$$x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2+\alpha_3 e_3+\ \ldots,$$

где $\alpha_k=(x, e_k)$. При этом

$$(x, y)=\sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k \bar{\beta}_k, \quad \alpha_k=(x, e_k), \quad \beta_k=(y, e_k).$$

В частности, $|x|=\sum_{k=1}^{\infty}|\alpha_k|^2$.

Примеры. 1. Пространство l^2. Обозначим через l^2 совокупность всех числовых последовательностей

$$x=(x_1, x_2, x_3, \ldots),$$

---

*) В более общем определении гильбертова пространства это условие существования счетной полной ортонормальной системы не накладывается, однако в дальнейшем нам понадобятся лишь гильбертовы пространства, удовлетворяющие этому условию.

удовлетворяющих условию

$$\sum_{n=1}^{\infty} |x_n|^2 < +\infty. \tag{1}$$

Каждую такую последовательность будем называть *вектором* пространства l^2. Определим действия с такими векторами, полагая для

$$x = (x_1, x_2, x_3, \ldots); \quad y = (y_1, y_2, y_3, \ldots), \quad x, y \in l^2,$$

$$\lambda x = (\lambda x_1, \lambda x_2, \lambda x_3, \ldots),$$

$$x + y = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, x_3 + y_3, \ldots).$$

При этом λx и $x + y$ также принадлежат l^2, т. е. удовлетворяют условию (1). Это очевидно в отношении λx, а для $x + y$ следует из неравенства

$$|x_k + y_k|^2 \leqslant 2(|x_k|^2 + |y_k|^2).$$

Определим теперь в l^2 скалярное произведение, полагая для $x, y \in l^2$

$$(x, y) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \bar{y}_k.$$

Этот ряд сходится абсолютно, ибо

$$|x_k \bar{y}_k| \leqslant \frac{1}{2}(|x_k|^2 + |y_k|^2).$$

Легко видеть, что l^2 — гильбертово пространство.

2. Пространство $L^2(a, b)$. Обозначим через $L^2(a, b)$ совокупность всех функций $f(x)$, измеримых и с суммируемым квадратом в фиксированном интервале (a, b), конечном или бесконечном; при этом значениями функции $f(x)$ могут быть любые комплексные числа. Каждую такую функцию мы будем считать вектором пространства $L^2(a, b)$ и две такие функции будем считать равными векторами тогда и только тогда, когда они отличаются друг от друга только на множестве меры нуль.

Определим действия умножения на число и сложения как умножение функции на число и сложение функций.

Определим далее в $L^2(a, b)$ скалярное произведение, полагая для $f(x), g(x) \in L^2(a, b)$,

$$(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}\,dx.$$

Можно показать, что $L^2(a, b)$ — гильбертово пространство.

Пространство $L^2(a, b)$ будет в дальнейшем играть важную роль. Именно все дифференциальные операторы мы будем рассматривать как операторы в $L^2(a, b)$.

2. Линейные функционалы в $\mathfrak{H}$. *Функционалом* в $\mathfrak{H}$ называется всякая функция $l(x)$, определенная на некотором подмножестве в $\mathfrak{H}$ и принимающая числовые значения.

Функционал $l(x)$, заданный на линейном пространстве $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{H}$ называется *линейным*, если

1°. $l(\lambda x + \mu y) = \lambda l(x) + \mu l(y)$ для всех $x, y \in \mathfrak{M}$ и всех комплексных λ и μ.

Линейный функционал называется *ограниченным*, если

2°. $|l(x)| \leqslant C|x|$ для всех $x \in \mathfrak{M}$, где C — некоторая постоянная.

Легко видеть, что ограниченность линейного функционала равносильна его непрерывности.

Всякий ограниченный линейный функционал $l(x)$ в $\mathfrak{H}$ можно представить и притом единственным образом в виде $l(x) = (x, y)$, где y — некоторый фиксированный вектор из $\mathfrak{H}$.

Если $e_1, e_2, e_3, \ldots$ — произвольная полная ортонормальная система в $\mathfrak{H}$, то вектор y определится по формуле

$$y = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k e_k, \quad \text{где} \quad \alpha_k = \overline{l(e_k)}.$$

Сходимость этого ряда легко следует из условия 2° *).

3. Ограниченные операторы. Оператор A, определенный во всем пространстве $\mathfrak{H}$, называется *ограниченным*, если существует число C, такое, что $|Ax| \leqslant C|x|$ для всех $x \in \mathfrak{H}$.

Наименьшее из таких чисел C называется *нормой* ограниченного оператора A и обозначается через $|A|$.

Всякий ограниченный оператор A непрерывен; если $x_n \to x$, то $|Ax - Ax_n| = |A(x - x_n)| \leqslant C|x - x_n| \to 0$, т. е. $Ax_n \to Ax$.

Суммой $A + B$ ограниченных операторов A и B называется оператор, определенный равенством $(A+B)x = Ax + Bx$. *Произведением* λA ограниченного оператора A на число λ называется оператор, определенный равенством $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$.

---

*) Действительно, в силу условия 2° для любого натурального n имеем

$$\sum_{k=1}^{n} |l(e_k)|^2 = l\left(\sum_{k=1}^{n} \overline{l(e_k)}\, e_k\right) \leqslant C\left|\sum_{k=1}^{n} \overline{l(e_k)}\, e_k\right| = C\left(\sum_{k=1}^{n} |l(e_k)|^2\right)^{1/2}, \quad \text{откуда}$$

$$\left(\sum_{k=1}^{n} |l(e_k)|^2\right)^{1/2} \leqslant C.$$

При таком определении этих действий ограниченные операторы образуют векторное пространство (см. n° 1 § 1).

Кроме того, $|\lambda A| = |\lambda||A|$ и $|A+B| \leqslant |A| + |B|$.

Произведением AB ограниченных операторов A и B называется оператор, определенный равенством $(AB)x = A(Bx)$ для всех $x \in \mathfrak{H}$.

Легко проверить, что при этом $A(B+C) = AB + AC$, $(A+B)C = AC + BC$ и $|AB| \leqslant |A||B|$.

Отметим, что, вообще говоря, $AB \neq BA$.

Если $AB = BA$, то операторы A и B называются *перестановочными.*

Оператор 1, определенный равенством $1x = x$, называется *единичным оператором*; очевидно, $1 \cdot A = A \cdot 1 = A$.

Для всякого ограниченного оператора A существует единственный ограниченный оператор A^*, такой, что $(Ax, y) = (x, A^*y)$ для всех $x, y \in \mathfrak{H}$. Этот оператор A^* называется *сопряженным* к A.

Из этого определения сопряженного оператора вытекает, что $A^{**} = A$, $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$, $(A+B)^* = A^* + B^*$, $(AB)^* = B^*A^*$, $|A^*| = |A|$. Ограниченный оператор A называется *эрмитовым*, если $A^* = A$.

4. Операторы проектирования. *Всякое замкнутое подпространство гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ при том же определении действий, что и во всем $\mathfrak{H}$ есть также гильбертово пространство.*

Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$, то всякий вектор x можно представить и притом единственным образом в виде) $x = x' + x''$, где $x' \in \mathfrak{M}$, а $x'' \perp \mathfrak{M}$.*

Вектор x' называется *проекцией вектора x на $\mathfrak{M}$.*

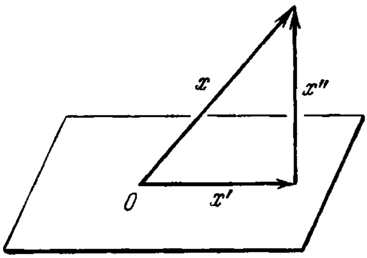

Рис. 15

Понятие проекции допускает особенно простую интерпретацию в трехмерном пространстве

Пусть, например, $\mathfrak{M}$ — совокупность всех векторов, проходящих через начало координат и лежащих в одной плоскости π (рис. 15). Тогда формула $x = x' + x''$ представляет собой разложение вектора x на две составляющие x' и x'', из которых первая лежит в плоскости π, а вторая $\perp \pi$.

Следовательно, в этом случае данное нами определение проекции совпадает с обычным определением проекции вектора на плоскость.

---

*) Это предложение носит название теоремы об ортогональной проекции и имеет важное значение в теории гильбертова пространства и ее приложениях. Его доказательство нетривиально, а предположение о замкнутости подпространства $\mathfrak{M}$ является существенным.

Каждому вектору x отнесем его проекцию x' на $\mathfrak{M}$. Полученное соответствие есть оператор в $\mathfrak{H}$; обозначим его через P, так что по определению $Px = x'$. Оператор P называется *оператором проектирования* на $\mathfrak{M}$. Если нужно подчеркнуть, что P есть оператор проектирования именно на $\mathfrak{M}$, то пишут $P_{\mathfrak{M}}$ вместо P.

Из определения проекции вытекает, что $|Px| \leqslant |x|$; следовательно, *оператор проектирования ограничен*; кроме того, из определения легко заключить, что *всякий оператор проектирования P эрмитов и удовлетворяет условию $P^2 = P$*; обратно, *всякий эрмитов оператор, удовлетворяющий этому условию, есть оператор проектирования.*

Если $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_k$ — несколько подпространств, то $\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_k$ обозначает совокупность всех векторов $x = x_1 + x_2 + \ldots + x_k$, где $x_1 \in \mathfrak{M}_1$, $x_2 \in \mathfrak{M}_2, \ldots, x_k \in \mathfrak{M}_k$.

Далее, при $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$ обозначим через $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2$ совокупность всех векторов $x \in \mathfrak{M}_1$, ортогональных к $\mathfrak{M}_2$.

Легко проверить справедливость следующих утверждений:

I. *Соотношение $\mathfrak{M}_1 \perp \mathfrak{M}_2$ эквивалентно соотношению $P_{\mathfrak{M}_1} \cdot P_{\mathfrak{M}_2} = 0$* (в этом случае операторы $P_{\mathfrak{M}_1}$ и $P_{\mathfrak{M}_2}$ называются *ортогональными*); *при этом $P_{\mathfrak{M}_1} + P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2}$.*

II. *Соотношение $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$ эквивалентно каждому из соотношений: $P_{\mathfrak{M}_1} P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_2} P_{\mathfrak{M}_1} = P_{\mathfrak{M}_2}$; $|P_{\mathfrak{M}_2} x| \leqslant |P_{\mathfrak{M}_1} x|$, $x \in \mathfrak{H}$; при этом $P_{\mathfrak{M}_1} - P_{\mathfrak{M}_2} = P_{\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{M}_2}$.*

Условимся писать $P_{\mathfrak{M}_1} > P_{\mathfrak{M}_2}$ и также $P_{\mathfrak{M}_2} < P_{\mathfrak{M}_1}$, если $\mathfrak{M}_1 \supset \mathfrak{M}_2$ и $\mathfrak{M}_1 \neq \mathfrak{M}_2$.

Если $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство, то очевидно, что $P_{\mathfrak{M}}$ и $1 - P_{\mathfrak{M}}$ суть операторы проектирования на $\mathfrak{M}$ и на $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ соответственно; отсюда вытекает, что $\mathfrak{H} - (\mathfrak{H} - \mathfrak{M}) = \mathfrak{M}$.

5. Изометрические операторы. Оператор U называется *изометрическим*, если $(Ux, Uy) = (x, y)$ для всех*) $x, y \in \mathfrak{D}_U$.

Изометрический оператор U называется *унитарным*, если его области определения и изменения совпадают со всем пространством $\mathfrak{H}$.

Ограниченный оператор U унитарен тогда и только тогда, когда $U^*U = UU^* = 1$.

6. Действия с произвольными операторами. *Произведением λA оператора A на число λ* называется оператор, область определения которого совпадает с $\mathfrak{D}_A$, причем $(\lambda A)x = \lambda(Ax)$ для $x \in \mathfrak{D}_A$.

Суммой $A + B$ операторов A и B называется оператор, область определения которого есть $\mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B$, причем $(A + B)x = Ax + Bx$ для $x \in \mathfrak{D}_A \cap \mathfrak{D}_B$.

---

*) Напомним, что $\mathfrak{D}_A$ обозначает область определения оператора A.

Произведением AB операторов A и B называется оператор, определенный следующим образом: $\mathfrak{D}_{AB}$ состоит из тех и только тех векторов $x \in \mathfrak{D}_B$, для которых $Bx \in \mathfrak{D}_A$. При этом $(AB)x = A(Bx)$ для $x \in \mathfrak{D}_{AB}$.

§ 11. Некоторые общие понятия и предложения теории линейных операторов в гильбертовом пространстве

1. Прямая сумма гильбертовых пространств. Пусть дано несколько гильбертовых пространств $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$. Обозначим через $\mathfrak{H}$ совокупность всех систем $x = \{x_1, x_2, \ldots, x_n\}$, где $x_1 \in \mathfrak{H}_1$, $x_2 \in \mathfrak{H}_2, \ldots, x_n \in \mathfrak{H}_n$. Определим в $\mathfrak{H}$ действия сложения и умножения на число, полагая

$$\lambda\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} = \{\lambda x_1, \lambda x_2, \ldots, \lambda x_n\},$$

$$\{x_1, x_2, \ldots, x_n\} + \{y_1, y_2, \ldots, y_n\} = \{x_1 + y_1, x_2 + y_2, \ldots, x_n + y_n\}.$$

Далее, определим в $\mathfrak{H}$ скалярное произведение, полагая

$$(\{x_1, x_2, \ldots, x_n\}, \{y_1, y_2, \ldots, y_n\}) = (x_1, y_1) + (x_2, y_2) + \ldots + (x_n, y_n).$$

При таком определении действий и скалярного произведения $\mathfrak{H}$ есть гильбертово пространство. (Мы предоставляем читателю доказательство этого простого предложения.)

Полученное пространство $\mathfrak{H}$ называется *прямой суммой* пространств $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ и обозначается через

$$\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2 + \ldots + \mathfrak{H}_n.$$

Отметим, что некоторые из пространств $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2, \ldots, \mathfrak{H}_n$ или даже все могут совпадать друг с другом; так, например, $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}$ состоит из всех пар $\{x_1, x_2\}$, где $x_1 \in \mathfrak{H}$ и $x_2 \in \mathfrak{H}$.

2. График оператора. Пусть теперь A — оператор в $\mathfrak{H}$ не обязательно линейный. Совокупность всех пар $\{x, Ax\}$, $x \in \mathfrak{D}_A$ в прямой сумме $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}$ называется *графиком* оператора A и обозначается через $\mathfrak{B}_A$.

Понятие графика оператора является естественным обобщением обычного понятия графика функции одного действительного переменного $y = f(x)$. Именно, обычный график есть не что иное, как совокупность всех точек $(x, f(x))$ плоскости, которую можно рассматривать как прямую сумму двух одномерных пространств.

Очевидно, что два оператора совпадают тогда и только тогда, когда их графики совпадают.

I. *Множество $S \subset \mathfrak{H} + \mathfrak{H}$ тогда и только тогда будет графиком некоторого оператора, когда из соотношений $\{x, y\} \in S$, $\{x, y'\} \in S$ следует $y = y'$.*

Действительно, всякий график удовлетворяет этому условию, ибо $y = Ax$, если $\{x, y\} \in \mathfrak{B}_A$; обратно, если это условие выполнено, то равенство $y = Ax$ определяет оператор A, графиком которого служит S. Легко также видеть, *что оператор A линеен тогда и только тогда, когда его график $\mathfrak{B}_A$ есть подпространство в $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}$.*

3. Замкнутые операторы; замыкание оператора. Оператор A называется *замкнутым*, если его график $\mathfrak{B}_A$ замкнут в $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}$.

Таким образом, замкнутость оператора A означает, что из соотношений

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \quad \{x_n, Ax_n\} \to \{x, y\}$$

следует соотношение $\{x, y\} \in \mathfrak{B}_A$, т. е. $x \in \mathfrak{D}_A$ и $y = Ax$. Другими словами, *замкнутость оператора A означает, что из соотношений*

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \quad x_n \to x, \quad Ax_n \to y$$

следуют соотношения

$$x \in \mathfrak{D}_A \quad \text{и} \quad y = Ax.$$

II. *Всякий линейный ограниченный оператор, определенный во всем пространстве $\mathfrak{H}$, замкнут.*

Действительно, такой оператор непрерывен и потому уже из соотношения $x_n \to x$ следует соотношение*) $Ax_n \to Ax$. Если поэтому $Ax_n \to y$, то $Ax = y$.

Читатель легко убедится также в справедливости следующих предложений:

III. *Если оператор A замкнут, то оператор $A - \lambda I$ также замкнут.*

IV. *Если оператор A замкнут и оператор A^{-1} существует, то оператор A^{-1} также замкнут.*

Если оператор A не замкнут, то по определению его график $\mathfrak{B}_A$ не замкнут в $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}$. Если замыкание $\overline{\mathfrak{B}}_A$ множества $\mathfrak{B}_A$ в $\mathfrak{H}+\mathfrak{H}$ есть также график некоторого оператора, то этот оператор называется *замыканием* оператора A и обозначается через $\tilde{A}$. В этом случае говорят также, что оператор A допускает замыкание. Таким образом, по определению

$$\mathfrak{B}_{\tilde{A}} = \overline{\mathfrak{B}}_A. \tag{1}$$

Очевидно, *$\tilde{A}$ есть минимальное замкнутое расширение оператора A.*

Легко также сформулировать условие существования замыкания, не пользуясь понятием графика. Множество $\overline{\mathfrak{B}}_A$, которое должно быть графиком некоторого оператора, состоит из элементов вида $\{x, Ax\}$, $x \in \mathfrak{D}_A$, и их пределов; поэтому:

*) В этом состоит отличие непрерывности от замкнутости Если оператор A замкнут, то из $x_n \to x$, $x_n \in \mathfrak{D}_A$, вообще не следует, что Ax_n сходится.

V. *Оператор A допускает замыкание $\bar{A}$ тогда и только тогда, когда из соотношений*

$$x_n \in \mathfrak{D}_A, \quad x'_n \in \mathfrak{D}_A, \quad x_n \to x, \quad x'_n \to x, \quad Ax_n \to y, \quad Ax'_n \to y'$$

следует, что $y = y'$. В этом случае область определения $\mathfrak{D}_{\tilde{A}}$ замыкания состоит из тех и только тех векторов x, для которых существует последовательность $x_n \in \mathfrak{D}$, удовлетворяющая условиям: $x_n \to x$, Ax_n сходится. При этом

$$\tilde{A}x = \lim_{n \to \infty} Ax_n.$$

4. Сопряженный оператор. Множество $S \subset \mathfrak{H}$ называется *плотным* в $\mathfrak{H}$, если его замыкание совпадает с $\mathfrak{H}$.

Подпространство S плотно в $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда в $\mathfrak{H}$ не существует ненулевого вектора ортогонального к S.

Действительно, замыкание $\bar{S}$ есть замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$. Если $h \perp S$, то в силу непрерывности скалярного произведения также $h \perp \bar{S}$. Поэтому, если S плотно в $\mathfrak{H}$, то $h \perp \bar{S} = \mathfrak{H}$, в частности $h \perp h$; следовательно, $h = 0$. Обратно, если S неплотно в $\mathfrak{H}$, то $\bar{S} \neq \mathfrak{H}$ и $\mathfrak{H} - \bar{S}$ содержит ненулевые векторы, ортогональные к S.

Рассмотрим произвольный линейный оператор A, область определения которого плотна в $\mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{D}^*$ совокупность всех таких векторов y, что при некотором $z \in \mathfrak{H}$ (зависящим, вообще говоря, от y)

$$(Ax, y) = (x, z)$$

для всех $x \in \mathfrak{D}_A$. Отметим, что всегда $0 \in \mathfrak{D}^*$, так что $\mathfrak{D}^*$ не пусто. Определим оператор A^* с областью определения $\mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{D}^*$, полагая для $y \in \mathfrak{D}^*$

$$A^*y = z.$$

Этот оператор A^* называется *сопряженным* *) к оператору A. Вектор z однозначно определяется вектором $y \in \mathfrak{D}^*$. Действительно, если также

$$(Ax, y) = (x, z'),$$

*) Введенное нами здесь определение сопряженного оператора не совпадает с определением n° 6 § 1. Дифференциальный оператор, сопряженный в смысле определения n° 6 § 1, называют часто *формально сопряженным*, для того чтобы отличить его от сопряженного оператора в смысле введенного здесь определения.

то $(x, z-z')=0$, т. е. вектор $z-z'$ ортогонален к области определения $\mathfrak{D}_A$ оператора A. Так как последняя плотна в $\mathfrak{H}$, то это возможно лишь тогда, когда $z-z'=0$, т. е. $z=z'$.

Таким образом, исходное предположение о плотности $\mathfrak{D}_A$ является весьма существенным; если оно не выполняется, то нельзя однозначно определить сопряженный оператор.

VI. *Если оператор A имеет обратный A^{-1} и если $\mathfrak{D}_A$ и $\mathfrak{D}_{A^{-1}}$ плотны в $\mathfrak{H}$*, то

$$(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}. \tag{2}$$

Доказательство. При $x \in \mathfrak{D}_A$, $y \in \mathfrak{D}_{(A^{-1})^*}$

$$(x, y) = (A^{-1}Ax, y) = (Ax, (A^{-1})^* y);$$

это означает, что

$$(A^{-1})^* y \in \mathfrak{D}_{A^*}$$

и

$$A^*(A^{-1})^* y = y. \tag{3}$$

С другой стороны, при $x \in \mathfrak{D}_{A^{-1}}$, $y \in \mathfrak{D}_{A^*}$

$$(x, y) = (AA^{-1}x, y) = (A^{-1}x, A^*y);$$

отсюда

$$A^*y \in \mathfrak{D}_{(A^{-1})^*}$$

и

$$(A^{-1})^* A^* y = y. \tag{4}$$

Равенства (3) и (4) показывают, что оператор $(A^{-1})^*$ является обратным к A^*, т. е. $(A^{-1})^* = (A^*)^{-1}$.

Читатель легко проверит также следующие свойства сопряженного оператора (при этом предполагается, что области определения всех рассматриваемых операторов плотны в $\mathfrak{H}$):

а) $(\lambda A)^* = \bar{\lambda} A^*$;

б) если $A \subset B$, то $A^* \supset B^*$;

в) $(A+B)^* \supset A^* + B^*$;

г) $(AB)^* \supset B^* A^*$;

д) $(A+\lambda I)^* = A^* + \bar{\lambda} I$.

Сопряженный оператор можно также описать при помощи графика. Определим для этого оператор U в $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}$, полагая

$$U\{x, y\} = \{iy, -ix\}.$$

Легко убедиться в том, что U — унитарный оператор в $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}$, удовлетворяющий условию

$$U^2 = I. \tag{5}$$

Применим ко всем векторам графика $\mathfrak{B}_A$ оператор U; мы получим множество всех пар $\{iAx, -ix\}$, $x \in \mathfrak{D}_A$; обозначим его через $\mathfrak{B}'_A$. Тогда

$$\mathfrak{B}_{A^*} = (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}) - \mathfrak{B}'_A, \tag{6}$$

т. е. *график оператора* A^* *есть ортогональное дополнение в* $\mathfrak{H} + \mathfrak{H}$ *множества* $\mathfrak{B}'_A$. Действительно, это ортогональное дополнение состоит из тех и только тех пар $\{y, z\}$, которые удовлетворяют условию

$$(\{iAx, \ -ix\}, \quad \{y, z\}) = 0$$

для всех $x \in \mathfrak{D}_A$. Но это условие эквивалентно условию

$$(Ax, y) - (x, z) = 0,$$

откуда

$$y \in \mathfrak{D}_{A^*}, \quad z = A^*y, \quad \{y, z\} \in \mathfrak{B}_{A^*}.$$

Так как всякое ортогональное дополнение есть замкнутое подпространство, то из (6) следует, что A^* — *всегда линейный замкнутый оператор.*

Докажем теперь следующее важное предложение:

VII. *Если линейный оператор* A *с плотной областью определения допускает замыкание* $\tilde{A}$, *то*

$$A^{**} = \tilde{A}. \tag{7}$$

Если, в частности, оператор A *замкнут, то*

$$A^{**} = A. \tag{8}$$

Доказательство. Из (6) следует, что

$$\bar{\mathfrak{B}}'_A = (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}) - \mathfrak{B}_{A^*}.$$

Применим ко всем векторам в левой и правой частях последнего соотношения оператор U. Так как $U^2 = I$, то оператор U отображает $\bar{\mathfrak{B}}'_A$ на $\bar{\mathfrak{B}}_A$; кроме того, по определению $\mathfrak{B}'_{A^*}$, унитарный оператор U отображает $\mathfrak{B}_{A^*}$ на $\mathfrak{B}'_{A^*}$, и, потому, $(\mathfrak{H} + \mathfrak{H}) - \mathfrak{B}_{A^*}$ на $(\mathfrak{H} + \mathfrak{H}) - \mathfrak{B}'_{A^*}$.

Следовательно, мы получим соотношение

$$\bar{\mathfrak{B}}_A = (\mathfrak{H} + \mathfrak{H}) - \mathfrak{B}'_{A^*}. \tag{9}$$

Оно означает, что $\bar{\mathfrak{B}}_A$ есть график оператора A^{**}; с другой стороны, $\bar{\mathfrak{B}}_A$ как замыкание множества $\mathfrak{B}_A$ есть график оператора $\tilde{A}$. Следовательно, $A^{**} = \tilde{A}$. Если оператор A замкнут, то $\tilde{A} = A$ и $A^{**} = A$.

Оператор A называется *эрмитовым*, если $(Ax, y) = (x, Ay)$ для всех $x, y \in \mathfrak{D}_A$.

VIII. *Собственные значения эрмитова оператора A действительны. Собственные векторы эрмитова оператора A, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны.* Доказательство первого утверждения аналогично доказательству теоремы 3 п°. 5 § 2. Для доказательства второго заметим, что если $Ax_1 = \lambda_1 x_1$ и $Ax_2 = \lambda_2 x_2$, то $\lambda_1 (x_1, x_2) = (Ax_1, x_2) = (x_1, Ax_2) = \lambda_2 (x_1, x_2)$. Отсюда $(\lambda_1 - \lambda_2)(x_1, x_2) = 0$, следовательно, $(x_1, x_2) = 0$, если $\lambda_1 \neq \lambda_2$.

Эрмитов оператор с областью определения, плотной в $\mathfrak{H}$, называется *симметрическим оператором*. Очевидно, оператор A с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения будет симметрическим тогда и только тогда, когда

$$A \subset A^*. \tag{10}$$

Так как сопряженный оператор замкнут, то из (10) заключаем, что *симметрический оператор допускает замыкание.*

Оператор A с плотной в $\mathfrak{H}$ областью определения называется *самосопряженным*, если $A = A^*$.

Из этого определения непосредственно вытекает, что *самосопряженный оператор замкнут.*

Ниже мы увидим (см. §§ 15—18), что введенные здесь понятия играют весьма важную роль в теории дифференциальных операторов в гильбертовом пространстве.

§ 12. Спектральный анализ самосопряженных операторов

1. Спектральная функция. *Спектральной функцией* называется всякая операторная функция P_λ действительного параметра λ, обладающая следующими свойствами:

1°. *При любом значении λ P_λ есть оператор проектирования.*

2°. *$P_\lambda \leqslant P_\mu$ при $\lambda \leqslant \mu$.*

3°. *При любом $x \in \mathfrak{H}$*

$$\lim_{\lambda \to -\infty} |P_\lambda x| = 0, \quad \lim_{\lambda \to +\infty} |P_\lambda x - x| = 0.$$

4. *При любом $x \in \mathfrak{H}$ функция $P_\lambda x$ непрерывна справа, т. е.*

$$\lim_{\varepsilon \to +0} |P_{\lambda+\varepsilon} x - P_\lambda x| = 0.$$

Из свойства 2° легко вытекает, что для любого вектора $x \in \mathfrak{H}$ существуют пределы

$$\lim_{\lambda \to \mu - 0} P_\lambda x = P_{\mu-0} x, \quad \lim_{\lambda \to \mu + 0} P_\lambda x = P_{\mu+0} x.$$

Условие 4° означает, что $P_{\mu+0}=P_{\mu}$; оно не является существенным и представляет собой только нормировку спектральной функции. Если функция P_λ удовлетворяет условиям 1°, 2°, 3°, но не удовлетворяет условию 4°, то достаточно ее заменить функцией $P'_\lambda=P_{\lambda+0}$. Тогда функция P'_λ будет удовлетворять всем условиям 1°—4°. В некоторых случаях удобно будет вместо спектральной функции P_λ, непрерывной справа, рассматривать спектральную функцию, непрерывную слева; это равносильно замене функции P_λ функцией $P'_\lambda=P_{\lambda-0}$.

В дальнейшем мы будем пользоваться следующими обозначениями: если Δ обозначает один из интервалов

$$(\alpha,\ \beta),\quad [\alpha,\ \beta),\quad (\alpha,\ \beta],\quad [\alpha,\ \beta],$$

то P_Δ будет соответственно обозначать

$$P_{\beta-0}-P_{\alpha+0},\quad P_{\beta-0}-P_{\alpha-0},\quad P_{\beta+0}-P_{\alpha+0},\quad P_{\beta+0}-P_{\alpha-0}.$$

В силу условия 4° эти разности можно также переписать в виде

$$P_{\beta-0}-P_{\alpha},\quad P_{\beta-0}-P_{\alpha-0},\quad P_{\beta}-P_{\alpha},\quad P_{\beta}-P_{\alpha-0},$$

в частности, при $\Delta=(\alpha,\ \beta]$

$$P_\Delta=P_\beta-P_\alpha.$$

В силу предложения II n° 4 § 10 и свойства 2° P_Δ — оператор проектирования. Легко также проверить, что

I. *Если интервалы* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_n$ *попарно не пересекаются, то*

$$P_{\Delta_i}P_{\Delta_j}=0 \quad \text{при} \quad i\neq j. \tag{1}$$

2. Интегралы по спектральной функции. При помощи спектральной функции можно построить интеграл, аналогичный интегралу Стильтьеса *).

Пусть $f(\lambda)$ — произвольная числовая функция, непрерывная **) в некотором интервале $[a,\ b]$. Разобьем интервал $(a,\ b]$ какими-нибудь точками деления $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_{n-1}$ на интервалы

$$\Delta_i=(\lambda_{i-1},\ \lambda_i],\quad i=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\quad \lambda_0=a,\quad \lambda_n=b,$$

и составим сумму

$$S=\sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)P_{\Delta_i},$$

где ξ_i — произвольная точка интервала Δ_i.

---

*) Об интеграле Стильтьеса см., например, Шилов [1], Натансон [1] или Смирнов [1].

**) Можно также естественным образом обобщить рассматриваемое нами понятие интеграла на некоторые классы разрывных функций (см. § 21). Однако эти обобщения нам пока не понадобятся.

Эта сумма S есть ограниченный линейный оператор в $\mathfrak{H}$. Нетрудно доказать, что при неограниченном уменьшении длин всех интервалов Δ_i сумма S стремится по норме оператора к одному и тому же предельному оператору I. Точный смысл этого утверждения состоит в следующем:

II. *Каково бы ни было $\varepsilon > 0$, существует такое число $\delta > 0$, что любая сумма S, для которой длины всех интервалов Δ_i меньше δ, удовлетворяет неравенству*

$$|S - I| < \varepsilon. \tag{2}$$

Оператор I называется *интегралом функции $f(\lambda)$ по dP_λ* и обозначается

$$\int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda. \tag{3}$$

Из существования интеграла (3) следует также существование интеграла

$$\int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda x, \tag{4}$$

который можно определить как предел суммы

$$\sigma = \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, P_{\Delta_i} x = Sx.$$

Этот предел равен результату применения оператора $\int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda$ к вектору x; чтобы в этом убедиться, достаточно заметить, что из неравенства (2) следует неравенство $|Sx - Ix| < \varepsilon |x|$, т. е. неравенство $|\sigma - Ix| < \varepsilon |x|$.

Отметим, что имеет место формула

$$\left| \int_a^b f(\lambda)\, dP_\lambda x \right|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2 d\, |P_\lambda x|^2 = \int_a^b |f(\lambda)|^2 d\, (P_\lambda x,\ x), \tag{5}$$

правая часть которой есть обычный интеграл Стильтьеса. Эта формула получается переходом к пределу в очевидном равенстве

$$|Sx|^2 = \left| \sum_{i=1}^{n} f(\xi_i)\, P_{\Delta_i} x \right|^2 = \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^2 |P_{\Delta_i} x|^2 =$$
$$= \sum_{i=1}^{n} |f(\xi_i)|^2 \left(P_{\Delta_i} x,\ x\right). \tag{6}$$

Если теперь функция $f(\lambda)$ непрерывна для всех значений λ, то можно определить интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x \tag{7}$$

как предел интеграла (4) при $a \to -\infty$ и $b \to \infty$.

В силу критерия сходимости Коши и формулы (5) интеграл (7) существует тогда и только тогда, когда существует обычный интеграл Стильтьеса

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d|P_\lambda x|^2. \tag{8}$$

При этом

$$\left|\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x\right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d|P_\lambda x|^2. \tag{9}$$

Эта последняя формула получается из (5) предельным переходом при $a \to -\infty$, $b \to +\infty$.

3. Основная спектральная теорема. Рассмотрим сначала следующий пример. Пусть задано конечное число попарно ортогональных операторов проектирования $Q_1, Q_2, \ldots, Q_n$, в сумме составляющих единицу:

$$Q_i Q_j = 0 \quad \text{при} \quad i \neq j, \quad Q_1 + Q_2 + \ldots + Q_n = 1.$$

Пусть, кроме того, задано конечное множество чисел $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$, занумерованных так, что

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n.$$

Определим «ступенчатую» функцию P_λ, полагая

$$P_\lambda = \sum_{\lambda_k \leqslant \lambda} Q_k;$$

здесь сумма состоит из тех и только тех слагаемых P_k, для которых $\lambda_k \leqslant \lambda$. Рассмотрим интеграл

$$A = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dP_\lambda. \tag{10}$$

Легко видеть, что этот интеграл фактически равен сумме

$$A = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k Q_k \tag{11}$$

и, следовательно, представляет собой оператор с собственными значениями λ_k. При этом соответствующими собственными подпространствами являются подпространства, на которые проектируют операторы Q_k. Таким образом, формула (11) является представлением оператора A в диагональной форме.

В конечномерном пространстве всякий эрмитов оператор A можно привести к диагональному виду и, следовательно, для него можно построить «ступенчатую» функцию P_λ, такую, что имеет место формула (11).

Оказывается, что и в гильбертовом пространстве для всякого самосопряженного оператора имеет место представление, аналогичное (10), но только теперь P_λ может быть произвольной спектральной функцией не обязательно ступенчатой. Другими словами, имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Для всякого самосопряженного оператора A существует одна и только одна спектральная функция P_λ, обладающая следующими свойствами:*

1) *Вектор x тогда и только тогда принадлежит области определения оператора A, когда сходится интеграл*

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d|P_\lambda x|^2. \tag{12}$$

2) *При этом условии*

$$Ax = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, dP_\lambda x, \tag{13}$$

и, следовательно,

$$|Ax|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |\lambda|^2 d|P_\lambda x|^2. \tag{14}$$

Обратно, всякий оператор A, определенный условиями 1) *и* 2) *при помощи некоторой спектральной функции P_λ, есть самосопряженный оператор.*

Если оператор A ограничен, то всякий ограниченный оператор B, перестановочный с A, перестановочен с P_λ.

4. Приводимость. Пусть $\mathfrak{M}$ — замкнутое подпространство в $\mathfrak{H}$, а P — оператор проектирования на $\mathfrak{M}$. Будем говорить, что *подпространство $\mathfrak{M}$ приводит оператор A*, если из $x \in \mathfrak{D}_A$ следует, что также $Px \in \mathfrak{D}_A$ и

$$APx = PAx.$$

III. *Ограниченный оператор A, определенный во всем пространстве, тогда и только тогда приводится подпростран-*

ством $\mathfrak{M}$, *когда он перестановочен с оператором проектирования* P *на это подпространство* *).

Это утверждение непосредственно следует из самого определения приводимости.

IV. *Замкнутое подпространство* $\mathfrak{M}$ *тогда и только тогда приводит самосопряженный оператор* A, *когда оператор проектирования* $P_{\mathfrak{M}}$ *перестановочен со спектральной функцией* P_λ *оператора* A *при всех значениях* λ.

5. Описание спектра самосопряженного оператора при помощи его спектральной функции. Число λ называется *регулярной точкой* оператора A, если оператор $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ существует, определен во всем пространстве $\mathfrak{H}$ и ограничен. В этом случае оператор R_λ называется *резольвентой* оператора A. Совокупность всех нерегулярных точек λ оператора A называется *спектром* A и обозначается $S(A)$. Очевидно, собственное значение λ оператора принадлежит его спектру, ибо тогда оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ не существует. Совокупность всех собственных значений называется *точечным спектром* оператора A и обозначается $S_p(A)$. В случае самосопряженного оператора A замыкание множества $S(A) - S_p(A)$ называется *непрерывным спектром* A и обозначается **) через $S_c(A)$. Подчеркнем, что при таком определении пересечение точечного и непрерывного спектра может оказаться непустым (см. пример, б) n° 2 § 24).

Если оператор A самосопряженный, то его собственные векторы, отвечающие различным собственным значениям, ортогональны и потому образуют конечное или счетное множество (см. n° 1 § 10).

Следовательно, точечный *спектр самосопряженного оператора есть конечное или счетное множество вещественных чисел.*

Всякое невещественное число λ *есть регулярная точка самосопряженного оператора* A *и*

$$(A - \lambda I)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_\mu}{\mu - \lambda}, \tag{15}$$

где P_μ — *спектральная функция оператора* A.

---

*) Или, что то же самое, когда подпространство $\mathfrak{M}$ и его ортогональное дополнение $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ инвариантны относительно оператора A.

**) Для наших потребностей такая классификация точек спектра является достаточной. По поводу более тонкой классификации см., например, Данфорд и Шварц [1] или Голдберг [1].

Действительно, интеграл в правой части (15) существует и для любого вектора x, так как

$$\left| \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dP_\mu x}{\mu-\lambda} \right|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\,|P_\mu x|^2}{|\mu-\lambda|^2} \leqslant \frac{1}{|\Im\lambda|^2} \int_{-\infty}^{\infty} d\,|P_\mu x|^2 = \frac{1}{|\Im\lambda|^2}|x|^2. \quad (16)$$

Следовательно, этот интеграл есть ограниченный оператор, который, как легко видеть, равен $(A-\lambda I)^{-1}$. Из неравенства (16) вытекает, что

$$|R_\lambda| \leqslant \frac{1}{|\Im\lambda|}. \quad (17)$$

Кроме того, из формулы (15) следует, что

$$(R_\lambda)^* = R_{\bar\lambda}. \quad (18)$$

Легко также проверить, что $R_{\lambda_2} - R_{\lambda_1} = (\lambda_2-\lambda_1) R_{\lambda_2} R_{\lambda_1}$.

Теорема 2. *Пусть P_λ — спектральная функция самосопряженного оператора A.*

1) *Вещественное число λ_0 тогда и только тогда является регулярной точкой оператора A, когда функция P_λ постоянна в некоторой окрестности точки λ_0.*

2) *Вещественное число λ_0 тогда и только тогда является собственным значением оператора A, когда $P_{\lambda_0+0} - P_{\lambda_0} \neq 0$. В этом случае $P_{\lambda_0+0} - P_{\lambda_0}$ есть оператор проектирования на собственное подпространство оператора A, соответствующее собственному значению λ_0.*

Доказательство. Докажем утверждение 1), для чего будем исходить из формулы

$$|(A-\lambda_0 I)x|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2 d(P_\lambda x, x) \quad \text{при} \quad x \in \mathfrak{D}_A, \quad (19)$$

которая непосредственно следует из основной спектральной теоремы.

Пусть функция P_λ постоянна в окрестности $|\lambda-\lambda_0| \leqslant \varepsilon$ точки λ_0; тогда формула (19) примет вид

$$|(A-\lambda_0 I)x|^2 = \int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} (\lambda-\lambda_0)^2 d(P_\lambda x, x) + \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2 d(P_\lambda x, x) >$$
$$> \varepsilon^2 \left(\int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} d(P_\lambda x, x) + \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty} d(P_\lambda x, x) \right) = \varepsilon^2 |x|^2.$$

Но из этого неравенства можно легко вывести, что оператор $(A-\lambda_0 I)^{-1}$ существует, ограничен и определен во всем пространстве *); следовательно, λ_0 — регулярная точка оператора A. Обратно, пусть λ_0 — регулярная точка оператора A; тогда оператор $(A-\lambda_0 I)^{-1}$ существует и ограничен. Последнее означает, что имеет место неравенство

$$|(A-\lambda_0 I)^{-1} y| \leqslant C|y|.$$

Полагая здесь $(A-\lambda_0 I)^{-1} y = x$, получим, что

$$|x| \leqslant C|(A-\lambda_0 I)x|. \tag{20}$$

Докажем, что функция P_λ постоянна в окрестности $|\lambda-\lambda_0| \leqslant \frac{1}{C}$ точки λ_0. Предположим противное; тогда можно выбрать положительное число $\eta < \frac{1}{C}$, так, что оператор

$$P = P_{\lambda_0+\eta} - P_{\lambda_0-\eta}$$

отличен от нуля. Но в таком случае существует вектор $x \neq 0$, для которого $Px = x$; следовательно, формула (19) дает

$$|(A-\lambda_0 I)x|^2 = \int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} (\lambda-\lambda_0)^2 \, d(P_\lambda x, x) \leqslant \eta^2 \int_{\lambda_0-\eta}^{\lambda_0+\eta} d(P_\lambda x, x) =$$
$$= \eta^2 |Px|^2 = \eta^2 |x|^2 < \frac{1}{C^2}|x|^2.$$

Последнее же неравенство противоречит неравенству (20).

Докажем теперь утверждение 2). Пусть λ_0 — собственное значение оператора A, а x — соответствующий собственный вектор. В таком случае в силу (19)

$$0 = |(A-\lambda_0 I)x|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} (\lambda-\lambda_0)^2 \, d(P_\lambda x, x),$$

что возможно лишь тогда, когда функция $(P_\lambda x, x)$ постоянна при $\lambda < \lambda_0$ и $\lambda > \lambda_0$, т. е. когда

$$(P_\lambda x, x) = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ |x|^2 & \text{при } \lambda > \lambda_0. \end{cases} \tag{21}$$

---

*) В этом, впрочем, можно также убедиться, пользуясь формулой

$$(A-\lambda_0 I)^{-1} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\lambda_0}\, dP_\lambda = \int_{-\infty}^{\lambda_0-\varepsilon} \frac{1}{\lambda-\lambda_0}\, dP_\lambda + \int_{\lambda_0+\varepsilon}^{\infty} \frac{1}{\lambda-\lambda_0}\, dP_\lambda,$$

непосредственно вытекающей из постоянства функции P_λ в интервале $(\lambda_0-\varepsilon, \lambda_0+\varepsilon)$.

Последняя формула показывает, что

$$|(P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0})x|^2=((P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0})x,\ x)=|x|^2\neq 0,$$

так что $P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0}\neq 0$. Одновременно формула (21) означает, что $x=(P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0})x$, т. е. x принадлежит подпространству, на которое проектирует оператор $P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0}$.

Обратно, пусть $P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0}\neq 0$ и пусть $x=(P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0})x\neq 0$. Тогда

$$P_\lambda x=P_\lambda(P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0})x=(P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0})x=x \quad \text{при} \quad \lambda>\lambda_0$$

и

$$P_\lambda x=P_\lambda(P_{\lambda_0+0}-P_{\lambda_0})x=0 \quad \text{при} \quad \lambda<\lambda_0,$$

а потому

$$|(A-\lambda_0 I)x|^2=\int_{-\infty}^{\infty}(\lambda-\lambda_0)^2\,d(P_\lambda x,\ x)=0.$$

Последнее равенство означает, что x — собственный вектор, соответствующий собственному значению λ_0. Тем самым утверждение 2) полностью доказано.

§ 13. Вполне непрерывные операторы

1. Компактные множества. Множество M в полном нормированном *) пространстве R называется *компактным*, если из всякой бесконечной последовательности x_n элементов множества M можно выделить сходящуюся (в смысле нормы в R) подпоследовательность.

I. *В конечномерном евклидовом пространстве R всякое ограниченное множество компактно.*

Это утверждение непосредственно вытекает из теоремы Больцано — Вейерштрасса, ибо, если x_n — ограниченная последовательность в R, то отдельные компоненты элементов x_n образуют ограниченные числовые последовательности.

В бесконечномерном случае это утверждение уже неверно:

II. *В бесконечномерном гильбертовом пространстве единичная сфера S некомпактна* **). Действительно, всякая бесконечная ортонормальная система

$$e_1,\ e_2,\ e_3,\ \ldots$$

---

*) См. стр. 132.

**) *Шаром* с центром x_0 и радиусом r называется совокупность элементов x таких, что $|x-x_0|<r$, а *сферой* — совокупность элементов x таких, что $|x-x_0|=r$. При $x_0=0$; $r=1$ получается соответственно *единичный шар* и *единичная сфера*.

и $\mathfrak{H}$ принадлежит единичной сфере S и всякая ее подпоследовательность расходится, ибо

$$|e_j - e_k| = \sqrt{2} \quad \text{при} \quad j \neq k.$$

2. Критерий компактности. Множество E нормированного пространства называется *ε-сетью* для множества M того же пространства, если для любого элемента $x \in M$ найдется элемент y множества E, отстоящий от x меньше чем на ε.

Теорема 1. *Множество M полного нормированного пространства R компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в R существует конечная ε-сеть для множества M.*

Доказательство см., например, в книге Шилов [1], гл. II.

Следствие. *Множество M полного нормированного пространства R компактно тогда и только тогда, когда для любого $\varepsilon > 0$ в R существует компактная ε-сеть для множества M.*

Доказательство. Необходимость очевидна, ибо согласно теореме 1 существует даже конечная ε-сеть для множества R. Докажем достаточность. Пусть E — компактная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть для M; согласно теореме 1 существует конечная $\frac{\varepsilon}{2}$-сеть F для множества E. Тогда F — конечная ε-сеть для M. Действительно, если $x \in M$, то существует элемент $y \in E$, такой, что $|x - y| < \frac{\varepsilon}{2}$, и элемент $z \in F$, такой, что $|y - z| < \frac{\varepsilon}{2}$; следовательно, $|x - z| < \varepsilon$. На основании теоремы 1 отсюда заключаем, что M компактно.

3. Определение и основные свойства вполне непрерывного оператора. Оператор A называется *вполне непрерывным*, если он переводит всякое ограниченное множество в компактное множество.

III. *Всякий вполне непрерывный оператор ограничен.* Действительно, в противном случае существовала бы последовательность x_n, такая, что

$$|x_n| = 1, \quad |Ax_n| > n,$$

и оператор A переводил бы ограниченное множество $\{x_n\}$ в некомпактное множество $\{Ax_n\}$.

IV. *Если оператор A вполне непрерывен, а оператор B всюду определен в R и ограничен, то операторы AB и BA вполне непрерывны.*

Доказательство. Пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность. Из нее можно выделить подпоследовательность $\{x'_n\}$, такую, что $\{Ax'_n\}$ сходится; ввиду ограниченности оператора B

последовательность $\{BAx_n\}$ также сходится. Следовательно, оператор BA вполне непрерывен. Далее, последовательность $\{Bx_n\}$ ограничена; поэтому последовательность $\{ABx_n\}$ компактна; это означает, что оператор AB вполне непрерывен.

Аналогично можно доказать, что

V. *Если A_1, A_2 — вполне непрерывные операторы, то $\alpha_1 A_1 + \alpha_2 A_2$ — вполне непрерывный оператор.*

VI. *Ограниченный линейный оператор, определенный всюду в $\mathfrak{H}$, вполне непрерывен тогда и только тогда, когда оператор A^*A вполне непрерывен.*

Доказательство. Необходимость есть частный случай предложения IV; поэтому докажем достаточность. Пусть оператор A^*A вполне непрерывен и пусть $\{x_n\}$ — ограниченная последовательность: $|x_n| < C$. Из нее можно выделить подпоследовательность x'_n, такую, что $\{A^*Ax'_n\}$ сходится. Но тогда

$$|Ax'_n - Ax'_m|^2 = (A(x'_n - x'_m),\ A(x'_n - x'_m)) =$$
$$= (A^*Ax'_n - A^*Ax'_m,\ x'_n - x'_m) \leqslant |A^*Ax'_n - A^*Ax'_m|\,|x'_n - x'_m| \leqslant$$
$$\leqslant 2C\,|A^*Ax'_n - A^*A_m x_m| \to 0 \quad \text{при} \quad n,\ m \to 0,$$

так что последовательность $\{Ax_n\}$ сходится. Это означает, что оператор A вполне непрерывен.

VII. *Если оператор A вполне непрерывен, то оператор A^* также вполне непрерывен.* Это утверждение следует из предложения VI, ибо оператор $(A^*)^*A^* = AA^*$ вполне непрерывен.

VIII. *Если A_n — последовательность вполне непрерывных операторов, такая, что*

$$|A - A_n| \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty,$$

то оператор A *также вполне* непрерывен.

Доказательство. Пусть $K = K_c$ — шар в $\mathfrak{H}$ радиуса c; положим $\varepsilon_n = |A - A_n|c$. Тогда при $x \in K$

$$|(A - A_n)x| \leqslant |A - A_n|c = \varepsilon_n,$$

следовательно, компактное множество A_nK образует ε_n-сеть для множества AK. Так как $\varepsilon_n \to 0$ при $n \to \infty$, то на основании следствия из теоремы 1 п° 2 множество AK компактно; это означает, что оператор A вполне непрерывен.

IX. *Если*

$$\sum_{i,\,k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 < +\infty, \tag{1}$$

то оператор A в пространстве l^2, определенный формулой

$$A\{x_i\} = y_i, \quad y_i = \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k, \qquad i = 1, 2, 3, \ldots, \tag{2}$$

вполне непрерывен.

Доказательство. Обозначим через A_n оператор, который вектор $x = \{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ переводит в вектор $y^{(n)} = \{y_1, \ldots, y_n, 0, 0, \ldots\}$, где числа y_i определяются формулой (2). Оператор A_n переводит всякое ограниченное множество пространства l^2 в ограниченное множество n-мерного евклидова пространства, и потому компактное в силу предложения I n° 1; следовательно, оператор A_n вполне непрерывен. С другой стороны,

$$|(A - A_n) x|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} |y_i|^2 = \sum_{i=n+1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{ik} x_k \right|^2 \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \sum_{k=1}^{\infty} |x_k|^2;$$

отсюда

$$|A - A_n| \leqslant \sum_{i=n+1}^{\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{ik}|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad n \to \infty$$

и остается применить предложение VIII.

Функция $K(s, t)$, $a < s$, $t < b$, называется *ядром Гильберта—Шмидта*, если

$$\int_a^b \int_a^b |K(s, t)|^2 \, ds \, dt < +\infty. \tag{3}$$

При этом интервал (a, b) может быть конечным или бесконечным.

X. *Если $K(s, t)$ — ядро Гильберта—Шмидта, то интегральный оператор в $L^2(a, b)$, переводящий функцию $f(s) \in L^2(a, b)$ в*

$$g(s) = \int_a^b K(s, t) f(t) \, dt,$$

вполне непрерывен.

Доказательство. Пусть $\varphi_n = \varphi_n(s)$, $n = 1, 2, 3, \ldots,$ — полная ортонормальная система в $L^2(a, b)$.

Полагая

$$x_k = (f, \varphi_k) = \int_a^b f(s)\overline{\varphi_k(s)}\,ds,$$

$$y_k = (g, \varphi_k) = \int_a^b g(s)\overline{\varphi_k(s)}\,ds,$$

$$a_{ik} = \int_a^b \int_a^b K(s, t)\overline{\varphi_i(s)}\,\overline{\varphi_k(t)}\,ds, dt,$$

мы изометрически отобразим $L^2(a, b)$ на l^2, причем наш интегральный оператор перейдет в оператор в пространстве l^2, определенный формулами (2).

Условие (3) перейдет при этом в условие (1); следовательно, этот оператор, а потому и исходный оператор вполне непрерывны.

4. Спектр эрмитова вполне непрерывного оператора.

Теорема 2. *Точки спектра эрмитова вполне непрерывного оператора, отличные от нуля, могут быть только собственными значениями каждое конечной кратности, и их предельной точкой может быть только число $\lambda = 0$. Обратно, эрмитов оператор, обладающий этими свойствами, вполне непрерывен.*

Доказательство. Пусть A — эрмитов вполне непрерывный оператор, P_λ — его спектральная функция, Δ — один из интервалов $(-\infty, -\varepsilon)$, (ε, ∞) $\varepsilon > 0$, а $\mathfrak{M}_\Delta$ — замкнутое подпространство, на которое проектирует P_Δ. Это подпространство инвариантно относительно A; пусть A_Δ — сужение оператора A на $\mathfrak{M}_\Delta$. Очевидно, оператор A_Δ также вполне непрерывен; с другой стороны, он имеет ограниченный обратный A_Δ^{-1}, и потому согласно предложению IV единичный оператор $I = A_\Delta^{-1}A_\Delta$ вполне непрерывен в $\mathfrak{M}_\Delta$.

Этот единичный оператор не изменяет, конечно, единичную сферу в $\mathfrak{M}_\Delta$, с другой стороны, он должен ее переводить в компактное множество. Таким образом, единичная сфера. в $\mathfrak{M}_\Delta$ компактна; следовательно, $\mathfrak{M}_\Delta$ конечномерно (см. II n° 1). Отсюда следует утверждение теоремы относительно спектра оператора A.

Обратно, пусть спектр оператора A обладает указанными в этой теореме свойствами. Тогда каждое из подпространств $\mathfrak{M}_\Delta$

конечномерно и потому при $\varepsilon > 0$ оператор

$$A_\varepsilon = \int_{-\infty}^{-\varepsilon} \lambda \, dP_\lambda + \int_{\varepsilon}^{\infty} \lambda \, dP_\lambda$$

вполне-непрерывен (ибо его область изменения конечномерна). Так как $|A - A_\varepsilon| \to 0$ при $\varepsilon \to 0$, то оператор A также вполне непрерывен на основании предложения VIII.

§ 14. Расширения симметрического оператора

1. Постановка задачи. Одна из основных задач теории симметрических операторов состоит в описании всех тех расширений данного симметрического оператора A, которые сами являются симметрическими операторами. Частным случаем этой задачи является выяснение условий, при которых оператор имеет самосопряженные расширения, и описание в таком случае всех самосопряженных расширений, отличных от A.

Если B — симметрическое расширение симметрического оператора A

$$A \subset B, \quad \text{то} \quad B^* \subset A^*.$$

Но B — симметрический оператор, т. е. $B \subset B^*$; поэтому

$$A \subset B \subset B^* \subset A^*, \tag{1}$$

так что *всякое симметрическое расширение оператора A является сужением оператора A^**.

Симметрический оператор A называется *максимальным*, если он не имеет симметрических расширений, отличных от A.

Всякий самосопряженный оператор A есть максимальный симметрический оператор. Действительно, в этом случае $A^* = A$ и формула (1) показывает, что $B = A$, т. е. что всякое симметрическое расширение B оператора A совпадает с A.

Ниже мы увидим (см. n° 8), что существуют максимальные, но не самосопряженные операторы.

2. Дефектные подпространства симметрического оператора. Пусть A — симметрический оператор и пусть λ — произвольное невещественное число. Обозначим через $\mathfrak{R}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{R}_\lambda$ области значений операторов $A - \bar\lambda I$ и $A - \lambda I$ соответственно. Очевидно, что $\mathfrak{R}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{R}_\lambda$ — подпространства в $\mathfrak{H}$, не обязательно замкнутые. Их ортогональные дополнения $\mathfrak{H} - \mathfrak{R}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{H} - \mathfrak{R}_\lambda$ называются *дефектными подпространсгвами* оператора A и обозначаются через $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{N}_\lambda$ соответственно, так что

$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{H} - \mathfrak{R}_\lambda, \quad \mathfrak{N}_{\bar\lambda} = \mathfrak{H} - \mathfrak{R}_{\bar\lambda}.$$

I. *Дефектные подпространства* $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ *суть собственные подпространства оператора* A^*, *отвечающие собственным значениям* $\bar\lambda$ *и* λ *соответственно.*

Доказательство. Если $x \in \mathfrak{N}_\lambda$, то для любого вектора $y \in \mathfrak{D}_A$

$$(Ay - \lambda y,\ x) = 0, \tag{2}$$

т. е.

$$(Ay,\ x) = (y,\ \bar\lambda x). \tag{3}$$

По определению оператора A^*, это означает, что $x \in \mathfrak{D}_{A^*}$ и $A^*x = \bar\lambda x$. Обратно, если $A^*x = \bar\lambda x$, то для любого вектора $y \in \mathfrak{D}_A$ имеет место равенство (3), эквивалентное равенству (2), т. е. $x \in \mathfrak{N}_\lambda$.

Ниже (см. n° 8) будет выяснена роль дефектных подпространств в теориях расширений симметрических операторов.

3. Преобразование Кэли. Пусть A — симметрический оператор и пусть λ — произвольное невещественное число. Оператор

$$V = (A - \lambda I)(A - \bar\lambda I)^{-1} \tag{4}$$

называется *преобразованием Кэли оператора* A.

Это определение имеет смысл, ибо невещественное число $\bar\lambda$ не может быть собственным значением эрмитова оператора A (см. VIII n° 4 § 11), а потому $(A - \bar\lambda I)^{-1}$ существует.

Установим некоторые простые свойства оператора V.

Теорема 1. 1) *Преобразование Кэли* V *симметрического оператора* A *есть изометрический оператор с областью определения* $\mathfrak{R}_{\bar\lambda}$ *и областью значений* $\mathfrak{R}_\lambda$.

2) *Множество элементов* $Vy - y$, $y \in \mathfrak{D}_V$ *плотно в* $\mathfrak{H}$.

3) *Всякий изометрический оператор* V, *удовлетворяющий условию* 2), *есть преобразование Кэли некоторого симметрического оператора.*

Доказательство. 1) Всякий вектор y из $\mathfrak{D}_V$ должен, очевидно, принадлежать $\mathfrak{R}_{\bar\lambda}$. Обратно, если $y \in \mathfrak{R}_{\bar\lambda}$, то оператор $(A - \bar\lambda I)^{-1}$ применим к y и $(A - \bar\lambda I)^{-1} y \in \mathfrak{D}_A$. Следовательно, оператор $A - \lambda I$ применим к вектору $(A - \bar\lambda I)^{-1} y$. Это означает, что $y \in \mathfrak{D}_V$. Тем самым доказано, что

$$\mathfrak{D}_V = \mathfrak{R}_{\bar\lambda}.$$

Пусть x — произвольный вектор из области определения $\mathfrak{D}_A$ оператора A; положим

$$y = (A - \bar\lambda I)\, x, \tag{5}$$

Тогда

$$y \in \mathfrak{D}_V \text{ и } Vy = (A - \lambda I)x; \tag{6}$$

следовательно, область значений оператора V совпадает с $\mathfrak{R}_\lambda$. Кроме того,

$$|Vy|^2 = |(A - \lambda I)x|^2 = ((A - \lambda I)x, (A - \lambda I)x) =$$
$$= (Ax, Ax) - \bar{\lambda}(Ax, x) - \lambda(x, Ax) + |\lambda|^2(x, x),$$
$$|y|^2 = |(A - \bar{\lambda}I)x|^2 = ((A - \bar{\lambda}I)x, (A - \bar{\lambda}I)x) =$$
$$= (Ax, Ax) - \lambda(Ax, x) - \bar{\lambda}(x, Ax) + |\lambda|^2(x, x);$$

учитывая равенство $(Ax, x) = (x, Ax)$, мы получим отсюда

$$|Vy|^2 = |y|^2,$$

т. е. V — изометрический оператор.

2) Из формул (5) и (6) вытекает, что

$$y - Vy = (\lambda - \bar{\lambda})x,$$

и потому множество $\mathfrak{R}_{I-V}$ всех векторов $y - Vy$, $y \in \mathfrak{D}_V$ совпадает с множеством $\mathfrak{D}_A$, плотным в $\mathfrak{H}$.

3) Пусть V — изометрический оператор, удовлетворяющий условию 2). Этот оператор не имеет собственного значения, равного единице, т. е. равенство $y = Vy$ возможно лишь при $y = 0$. Действительно, в противном случае, для любого вектора $z \in \mathfrak{D}_V$

$$(Vz - z, y) = (Vz, y) - (z, y) = (Vz, Vy) - (z, y) = 0,$$

т. е. вектор $y \neq 0$ ортогонален к плотному в $\mathfrak{H}$ множеству $\mathfrak{R}_{I-V}$, что невозможно. Поэтому существует оператор $(I - V)^{-1}$. Положим

$$A = (\lambda I - \bar{\lambda}V)(1 - V)^{-1} \tag{7}$$

и докажем, что A — симметрический оператор, преобразование Кэли которого совпадает с V. Очевидно, оператор A можно также определить следующим образом: $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{R}_{I-V}$ и для $y \in \mathfrak{D}_V$

$$A(y - Vy) = \lambda y - \bar{\lambda}Vy.$$

В силу условия 2) отсюда видно, что $\mathfrak{D}_A$ плотно в $\mathfrak{H}$. Кроме того, при $y_1, y_2 \in \mathfrak{D}_V$

$$(A(y_1 - Vy_1), y_2 - Vy_2) = (\lambda y_1 - \bar{\lambda}Vy_1, y_2 - Vy_2) =$$
$$= (\lambda + \bar{\lambda})(y_1, y_2) - \bar{\lambda}(Vy_1, y_2) - \lambda(y_1, Vy_2),$$
$$((y_1 - Vy_1), A(y_2 - Vy_2)) = (y_1 - Vy_1, \lambda y_2 - \bar{\lambda}Vy_2) =$$
$$= (\lambda + \bar{\lambda})(y_1, y_2) - \bar{\lambda}(Vy_1, y_2) - \lambda(y_1, Vy_2),$$

так что

$$(A(y_1 - Vy_1),\ y_2 - Vy_2) = ((y_1 - Vy_1),\ A(y_2 - Vy_2)).$$

Поэтому A — симметрический оператор.

Наконец, полагая $x = y - Vy$, $y \in \mathfrak{D}_V$, имеем

$$Ax = \lambda y - \bar{\lambda} V y.$$

Отсюда

$$Ax - \bar{\lambda} x = (\lambda - \bar{\lambda}) y,\quad Ax - \lambda x = (\lambda - \bar{\lambda}) Vy.$$

Эти равенства показывают, что V — преобразование Кэли оператора A.

Из доказанной теоремы непосредственно следует

Теорема 2. *Пусть A_1, A_2 — симметрические операторы, а V_1, V_2 — их преобразования Кэли. Оператор A_2 тогда и только тогда является расширением оператора A_1, когда оператор V_2 есть расширение оператора V_1.*

Теорема 2 будет нами использована в n° 8 для решения основной задачи этого параграфа — описания всех симметрических расширений данного симметрического оператора.

Теорема 3. *Симметрический оператор A замкнут тогда и только тогда, когда его преобразование Кэли V — замкнутый оператор. Последнее имеет место тогда и только тогда, когда $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ и $\mathfrak{R}_\lambda$ — замкнутые подпространства.*

Доказательство. Пусть оператор A замкнут и пусть последовательность

$$y_n = (A - \bar{\lambda} I) x_n,\quad x_n \in \mathfrak{D}_A,$$

сходится к некоторому вектору y. В силу изометрии оператора V последовательность

$$Vy_n = (A - \lambda I) x_n$$

также сходится к некоторому вектору z. Но тогда

$$x_n = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} (y_n - Vy_n) \to \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} (y - z),$$

$$Ax_n = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} (\lambda y_n - \bar{\lambda} V y_n) \to \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} (\lambda y - \bar{\lambda} z);$$

отсюда, учитывая замкнутость оператора A, заключаем, что

$$y - z \in \mathfrak{D}_A,\quad A(y - z) = \lambda y - \bar{\lambda} z,$$

следовательно,

$$y = \frac{1}{\lambda - \bar{\lambda}} [A(y - z) - \bar{\lambda}(y - z)] \in \mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}.$$

Тем самым доказано, что оператор V и подпространство $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ замкнуты; тогда $\mathfrak{N}_\lambda$ также замкнуто как изометрический образ замкнутого подпространства $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$.

Применяя аналогичные рассуждения, можно показать, что из замкнутости оператора V, или подпространства $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, следует замкнутость оператора A.

4. Область определения сопряженного оператора. Подпространства $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ называются *линейно независимыми*, если равенство

$$x_1 + x_2 + \ldots + x_n = 0, \quad x_k \in \mathfrak{M}_k, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

возможно лишь при $x_1 = x_2 = \ldots = x_n = 0$.

Если $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ линейно независимы, то совокупность всех сумм $x_1 + x_2 + \ldots + x_m$, $x_k \in \mathfrak{M}_k$ называется *прямой суммой* подпространств $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ и обозначается $\mathfrak{M}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{M}_n$. Очевидно, $\mathfrak{M}_1 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{M}_n$ — также подпространство.

Если подпространства $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ линейно независимы, то всякий вектор x из их прямой суммы $\mathfrak{M}_1 \dotplus \mathfrak{M}_2 \dotplus \ldots \dotplus \mathfrak{M}_n$ представляется единственным образом в виде

$$x = x_1 + x_2 + \ldots + x_n, \quad x_k \in \mathfrak{M}_k, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

Действительно, если также

$$x = x'_1 + x'_2 + \ldots + x'_n, \quad x'_n \in \mathfrak{M}_k, \; k = 1, 2, \ldots, n,$$

то

$$0 = (x_1 - x'_1) + (x_2 - x'_2) + \ldots + (x_n - x'_n),$$

причем

$$x_k - x'_k \in \mathfrak{M}_k, \; k = 1, 2, \ldots, n.$$

В силу линейной независимости подпространств $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_n$ отсюда вытекает, что $x_k - x'_k = 0$, $x_k = x'_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$.

Теорема 4. *Если A — замкнутый симметрический оператор, то подпространства $\mathfrak{D}_A$, $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, $\mathfrak{N}_\lambda$ линейно независимы и их прямая сумма совпадает с $\mathfrak{D}_{A^*}$:*

$$\mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{D}_A \dotplus \mathfrak{N}_{\bar\lambda} \dotplus \mathfrak{N}_\lambda. \tag{8}$$

Доказательство. Докажем сначала линейную независимость. Пусть

$$x + y + z = 0, \quad x \in \mathfrak{D}_A, \; y \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda}, \; z \in \mathfrak{N}_\lambda. \tag{9}$$

Применяя к обеим частям оператор $A^* - \bar\lambda 1$, получим

$$(A - \bar\lambda 1)\, x + (\lambda - \bar\lambda)\, y = 0. \tag{10}$$

Но

$$(A - \bar\lambda 1)\, x \in \mathfrak{R}_{\bar\lambda}, \quad (\lambda - \bar\lambda)\, y \in \mathfrak{N}_{\bar\lambda};$$

так как эти подпространства ортогональны, то равенство (10) возможно лишь тогда, когда

$$(A-\bar{\lambda}I)x=0,\ (\lambda-\bar{\lambda})y=0;$$

следовательно, когда $x=0$, $y=0$ ($x=0$, ибо невещественное число $\bar{\lambda}$ не может быть собственным значением симметрического оператора A). Отсюда и из (9) заключаем, что также $z=0$.

Докажем теперь формулу (8). Каждое из подпространств $\mathfrak{D}_A$, $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$, $\mathfrak{N}_\lambda$ содержится в $\mathfrak{D}_{A^*}$; поэтому

$$\mathfrak{D}_{A^*}\supset\mathfrak{D}_A+\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}+\mathfrak{N}_\lambda. \tag{11}$$

Остается доказать, что, обратно, каждый вектор $u\in\mathfrak{D}_{A^*}$ можно представить в виде

$$u=x+y+z,\quad x\in\mathfrak{D}_A,\quad y\in\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}},\quad z\in\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}. \tag{12}$$

Так как оператор A замкнут, то $\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$ — замкнутое подпространство. По определению, $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ — его ортогональное дополнение; следовательно,

$$\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}+\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}=\mathfrak{H}. \tag{13}$$

Это означает, что всякий вектор $v\in\mathfrak{H}$ можно представить в виде

$$v=v'+v'',$$

где $v'\in\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$, $v''\in\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. Применим это представление к вектору $v=(A^*-\bar{\lambda}I)u$. Так как $v'\in\mathfrak{R}_{\bar{\lambda}}$, то

$$v'=(A-\bar{\lambda}I)x,\quad x\in\mathfrak{D}_A.$$

Положим, кроме того,

$$v''=(\lambda-\bar{\lambda})y,\quad y\in\mathfrak{N}$$

Мы получим

$$(A^*-\bar{\lambda}I)u=(A-\bar{\lambda}I)x+(\lambda-\bar{\lambda})y=(A^*-\bar{\lambda}I)(x+y),$$

ибо $A^*y=\lambda y$, $A^*x=Ax$.

Отсюда

$$(A^*-\bar{\lambda}I)(u-x-y)=0,$$

следовательно, полагая $z=u-x-y$, имеем

$$z=u-x-y\in\mathfrak{N}_\lambda.$$

Тем самым представление (8) доказано.

Теорема 4 дает полное описание оператора A^*, ибо

$$A^*u=Ax+\lambda y+\bar{\lambda}z. \tag{14}$$

Из теоремы 4 непосредственно получаем

Следствие 1. *Замкнутый симметрический оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда оба его дефектные подпространства равны* (0), *т. е. состоят только из нулевого элемента пространства.*

Действительно, формула (8) показывает, что в этом и только в этом случае $\mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{D}_A$.

5. Формула фон Неймана. Рассмотрим разложение (8) при $\lambda = -i$:

$$\mathfrak{D}_{A^*} = \mathfrak{D}_A + \mathfrak{N}_i + \mathfrak{N}_{-i};$$

оно означает, что всякий вектор $x \in \mathfrak{D}_{A^*}$ представляется единственным образом в виде

$$x = x^0 + x^- + x^+, \quad x^0 \in \mathfrak{D}_A, \quad x^- \in \mathfrak{N}_i, \quad x^+ \in \mathfrak{N}_{-i}.$$

Докажем, что тогда

$$\mathfrak{J}(A^*x,\ x) = |x^+|^2 - |x^-|^2. \tag{15}$$

Эта формула называется *формулой фон Неймана.*

Для ее вывода достаточно заметить, что

$$(Ax^0,\ x^- + x^+) = (x^0,\ A^*(x^- + x^+)) = (x^0,\ -ix^- + ix^+),$$

и потому

$$\begin{aligned}(A^*x,\ x) &= (Ax^0 - ix^- + ix^+,\ x^0 + x^- + x^+) = \\ &= (Ax^0,\ x^0) + (x^0,\ -ix^- + ix^+) + (-ix^- + ix^+,\ x^0) - i|x^-|^2 + i|x^+|^2 - \\ &\quad - i(x^-,\ x^+) + i(x^+,\ x^-) = (Ax^0,\ x^0) + 2\mathfrak{R}[(x^0,\ -ix^- + ix^+) + \\ &\quad + i(x^+,\ x^-)] + i(|x_+|^2 - |x_-|^2).\end{aligned}$$

Отсюда вытекает формула (15), ибо первые два слагаемых вещественны, а последнее чисто мнимо.

Разобьем все множество $\mathfrak{D}_{A^*}$ на подмножества $\mathfrak{E}^+$, $\mathfrak{E}^-$, $\mathfrak{E}^0$, на которых соответственно $\mathfrak{J}(A^*x,\ x)$ больше, меньше или равно нулю.

II. *Вектор* x *из* $\mathfrak{D}_{A^*}$ *принадлежит* $\mathfrak{E}^+$, $\mathfrak{E}^-$ *или* $\mathfrak{E}^0$ *в зависимости* от того, *будет ли* $|x^+|^2 - |x^-|^2$ *больше, меньше или равно нулю.*

Это утверждение непосредственно вытекает из формулы (15).

III. *Имеют место соотношения*

$$\mathfrak{D}_A \subset \mathfrak{E}^0, \quad \mathfrak{N}_i \subset \mathfrak{E}^- \cup \{0\}, \quad \mathfrak{N}_{-i} \subset \mathfrak{E}^+ \cup \{0\}. \tag{16}$$

(Здесь $\{0\}$ обозначает множество, состоящее из одного только нулевого элемента 0 пространства $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{E}^- \cup \{0\}$, $\mathfrak{E}^+ \cup \{0\}$ — теоретико-множественные суммы множеств $\mathfrak{E}^-$, $\mathfrak{E}^+$ с множеством $\{0\}$.)

Действительно, если $x \in \mathfrak{D}_A$, то $x^+ = x^- = 0$, и потому $|x^+|^2 - |x^-|^2 = 0$. Если же $x \neq 0$, $x \in \mathfrak{N}_i$, то $x^0 = 0$, $x^+ = 0$, $x^- = x$, и потому $|x^+|^2 - |x^-|^2 = -|x|^2 < 0$.

Аналогично рассматривается случай $x \in \mathfrak{N}_{-i}$.

6. Размерность по модулю. Пусть $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ — два подпространства в $\mathfrak{H}$. Число n называется размерностью подпространства $\mathfrak{N}$ *по модулю* $\mathfrak{M}$, если в $\mathfrak{N}$ имеется n и не более n векторов, никакая линейная комбинация которых, кроме комбинации с нулевыми коэффициентами, не принадлежит $\mathfrak{M}$. Размерность $\mathfrak{N}$ по модулю $\mathfrak{M}$ обозначим через $\dim_{\mathfrak{M}} \mathfrak{N}$ в отличие от обыкновенной размерности, обозначаемой $\dim \mathfrak{N}$.

Так например, из формулы (8) следует, что

$$\dim_{\mathfrak{D}_A} \mathfrak{D}_{A^*} = n_{\bar{\lambda}} + n_{\lambda},$$

где $n_{\bar{\lambda}}$, n_{λ} — размерности $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ и $\mathfrak{N}_{\lambda}$ соответственно. Отсюда, в частности, видно, что $n_{\bar{\lambda}} + n_{\lambda}$ не зависит от λ, ибо $\mathfrak{D}_{A^*}$ и $\mathfrak{D}_A$ от λ не зависят.

Пусть теперь $\mathfrak{S}$ — произвольное множество в $\mathfrak{H}$, а $\mathfrak{M}$ — по-прежнему подпространство в $\mathfrak{H}$.

Условимся говорить, что $\mathfrak{S}$ *определяет размерность* n *по модулю* $\mathfrak{M}$, если n есть размерность по модулю $\mathfrak{M}$ максимального подпространства в $\mathfrak{S} \cup \{0\}$.

IV. *Пусть* m *и* n — *размерности подпространств* $\mathfrak{N}_{-i}$ *и* $\mathfrak{N}_i$ *соответственно; тогда множества* $\mathfrak{E}^+$, $\mathfrak{E}^-$ *определяют размерности* m *и* n *по модулю* $\mathfrak{D}_A$.

Доказательство. В силу (16) эта размерность $\geqslant m$ и n соответственно; поэтому достаточно доказать обратные неравенства. Докажем это, например, для $\mathfrak{E}^+$; для $\mathfrak{E}^-$ доказательство аналогично. Если $m = \infty$, то предыдущее неравенство переходит в равенство; поэтому нужно только рассмотреть случай конечного m.

Предположим, что вопреки утверждению в $\mathfrak{E}^+$ есть $m+1$ линейно независимых векторов $x_1, x_2, \ldots, x_{m+1}$, таких, что всякая их ненулевая линейная комбинация содержится в $\mathfrak{E}^+$, но не содержится в $\mathfrak{D}_A$. Так как $\mathfrak{E}^+ \subset \mathfrak{D}_{A^*}$, то каждый из этих векторов можно представить в виде

$$x_j = x_j^0 + x_j^- + x_j^+, \quad x_j^0 \in \mathfrak{D}_A, \quad x_j^- \in \mathfrak{N}_i, \quad x_j^+ \in \mathfrak{N}_{-i}.$$

Так как $\dim \mathfrak{N}_{-i} = m$, то векторы x_j^+, $j = 1, 2, \ldots, m+1$, линейно зависимы; таким образом, существуют числа $c_1, \ldots, c_{m+1}$, не все равные нулю и такие, что

$$c_1 x_1^+ + c_2 x_2^+ + \ldots + c_{m+1} x_{m+1}^+ = 0.$$

Но тогда

$$\sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j = x^0 + x^-,$$

где

$$x^0 = \sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j^0 \in \mathfrak{D}_A, \quad x^- = \sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j^- \in \mathfrak{N}_i$$

Последнее невозможно, ибо в силу II $x^0 + x^- \in \mathfrak{C}^-$ при $x^- \neq 0$ и $x^0 + x^- \in \mathfrak{C}^0$ при $x^- = 0$, а по предположению $\sum_{j=1}^{m+1} c_j x_j \in \mathfrak{C}^+$.

V. *Если $\alpha > 0$, а β — произвольное вещественное число, то дефектные подпространства $\mathfrak{N}_{-i}$, $\mathfrak{N}_i$ операторов A и $B = \alpha A + \beta I$ имеют соответственно одинаковую размерность.*

Доказательство. Это утверждение непосредственно вытекает из предложения IV, ибо $\mathfrak{D}_A = \mathfrak{D}_B$ и множества $\mathfrak{C}^+$, $\mathfrak{C}^-$ для обоих операторов одни и те же.

Теорема 5. *При любом комплексном λ из верхней полуплоскости*

$$\dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda} = \dim \mathfrak{N}_{-i}, \quad \dim \mathfrak{N}_\lambda = \dim \mathfrak{N}_i.$$

Доказательство. Положим $\lambda = \sigma + i\tau$; по условию $\tau > 0$. Обозначим через $\mathfrak{N}'_i$, $\mathfrak{N}'_{-i}$ дефектные подпространства оператора $B = \frac{1}{\tau} A - \frac{\sigma}{\tau} 1$. Тогда, как легко видеть,

$$\mathfrak{N}_\lambda = \mathfrak{N}'_i, \quad \mathfrak{N}_{\bar\lambda} = \mathfrak{N}'_{-i}.$$

Поэтому утверждение теоремы есть непосредственное следствие предложения V.

7. Индекс дефекта. Положим

$$m = \dim \mathfrak{N}_i, \quad n = \dim \mathfrak{N}_{-i}.$$

Пара чисел (m, n) называется *индексом дефекта* симметрического оператора A, а сами числа m и n — его *дефектными числами.*

Согласно теореме 5 при $\mathfrak{J}\lambda > 0$ также

$$m = \dim \mathfrak{N}_\lambda, \quad n = \dim \mathfrak{N}_{\bar\lambda}.$$

Из следствия n° 4 вытекает:

Замкнутый симметрический оператор является самосопряженным тогда и только тогда, когда его индекс дефекта есть (0, 0).

Отметим еще следующую теорему:

Теорема 6. *Если A — замкнутый симметрический, а B — ограниченный эрмитов оператор, определенный во всем* *пространстве* $\mathfrak{H}$, *то операторы* A *и* $A+B$ *имеют один и тот же индекс дефекта.*

Доказательство. Из соотношения

$$(A+B)^* = A^* + B$$

следует, что

$$\mathfrak{D}_{(A+B)^*} = \mathfrak{D}_{A^*}$$

и при $x \in \mathfrak{D}_{A^*}$

$$((A+B)^* x,\ x) = ((A^*+B)\,x,\ x) = (A^*x,\ x) + (Bx,\ x).$$

Поэтому

$$\mathfrak{J}((A+B)^*x,\ x) = \mathfrak{J}(A^*x,\ x),$$

ибо (Bx, x) вещественно. Но тогда множества $\mathfrak{E}^+$, $\mathfrak{E}^-$ для операторов A и $A+B$ одни и те же; следовательно, утверждение теоремы вытекает из предложения IV n° 6.

8. Описание симметрических расширений данного симметрического оператора *). Теорема 2 n° 3 дает возможность весьма просто описать симметрические расширения данного симметрического оператора A. Мы будем рассматривать только замкнутые симметрические расширения. Каждое такое расширение является одновременно расширением замыкания $\tilde{A}$ оператора A. Поэтому, не нарушая общности, можно считать, что уже A — замкнутый симметрический оператор.

Пусть A — замкнутый симметрический оператор, A' — его замкнутое симметрическое расширение. Обозначим через V и V' преобразования Кэли операторов A и A'; тогда

$$V \subset V',$$

следовательно,

$$\mathfrak{D}_V \subset \mathfrak{D}_{V'},\quad \mathfrak{R}_V \subset \mathfrak{R}_{V'}.$$

Положим

$$\mathfrak{P} = \mathfrak{D}_{V'} - \mathfrak{D}_V,\quad \mathfrak{Q} = \mathfrak{R}_{V'} - \mathfrak{R}_V;$$

так как

$$\mathfrak{P} \perp \mathfrak{D}_V,\quad \mathfrak{Q} \perp \mathfrak{R}_V,$$

то

$$\mathfrak{P} \subset \mathfrak{N}_{\bar\lambda},\quad \mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}_\lambda.$$

Определим, далее, оператор U, полагая

$$Ux = V'x \quad \text{для} \quad x \in \mathfrak{P}. \tag{17}$$

Так как V' изометрически отображает $\mathfrak{D}_V$ на $\mathfrak{R}_V$ и $\mathfrak{D}_{V'}$ — на $\mathfrak{R}_{V'}$, то он также изометрически отображает $\mathfrak{P}$ на $\mathfrak{Q}$. В силу (17)

*) Другой метод вывода теорем настоящего n° читатель может найти в книге Данфорд и Шварц [2].

это означает, что U — *изометрический оператор с областью определения* $\mathfrak{P}$ *и значений* $\mathfrak{Q}$. Обратно, пусть задан произвольный изометрический оператор U с областью определения $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ и значений $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}_{\lambda}$.

Полагая для $y \in \mathfrak{D}_V$, $z \in \mathfrak{P}$

$$V'(y+z) = Vy + Uz,$$

мы получим изометрический оператор V', который является расширением оператора V и, следовательно, преобразованием Кэли некоторого замкнутого симметрического расширения оператора A. Легко описать это расширение A' непосредственно при помощи оператора U.

Действительно, в силу теоремы 1 n° 3 $\mathfrak{D}_{A'}$ состоит из всех векторов

$$x' = (y+z) - V'(y+z) = (y+z) - (Vy + Uz) = (y - Vy) + z - Uz,$$

где $y \in \mathfrak{D}_V$, $z \in \mathfrak{P}$. Но векторы $x = y - Vy$, $y \in \mathfrak{D}_V$ пробегают в точности область определения $\mathfrak{D}_A$ оператора A; следовательно, $\mathfrak{D}_{A'}$ состоит из всех векторов

$$x' = x + z - Uz, \quad x \in \mathfrak{D}_A, \quad z \in \mathfrak{P}.$$

Так как

$$A' \subset A^*, \quad z \in \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}, \quad Uz \in \mathfrak{N}_{\lambda},$$

то

$$A'x' = Ax + \lambda z - \bar{\lambda} Uz.$$

Из самого определения оператора A' следует, что его дефектными подпространствами будут

$$\mathfrak{N}'_{\bar{\lambda}} = \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} - \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{N}'_{\lambda} = \mathfrak{N}_{\lambda} - \mathfrak{Q}.$$

Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 7. *Всякое замкнутое симметрическое расширение A' данного замкнутого симметрического оператора A определяется некоторым изометрическим оператором U, области определения и значений которого суть замкнутые подпространства $\mathfrak{P} \subset \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ и $\mathfrak{Q} \subset \mathfrak{N}_{\lambda}$ соответственно.*

При этом $\mathfrak{D}_{A'}$ есть совокупность всех векторов

$$x' = x + z - Uz, \quad x \in \mathfrak{D}_A, \quad z \in \mathfrak{P} \tag{18}$$

и

$$A'x' = Ax + \lambda z - \bar{\lambda} Uz. \tag{19}$$

Обратно, для всякого такого оператора U формулы (18), (19) *определяют некоторое замкнутое симметрическое расширение A' оператора A. При этом дефектными подпространствами оператора A' будут*

$$\mathfrak{N}'_{\bar{\lambda}} = \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} - \mathfrak{P}, \quad \mathfrak{N}'_{\lambda} = \mathfrak{N}_{\lambda} - \mathfrak{Q}. \tag{20}$$

Наиболее важен тот случай, когда A' — самосопряженное расширение оператора A. В силу следствия 1 в n° 4 расширение A' тогда и только тогда будет самосопряженным оператором, когда $\mathfrak{N}'_{\bar\lambda}=(0)$, $\mathfrak{N}'_{\lambda}=(0)$, т. е. когда

$$\mathfrak{P}=\mathfrak{N}_{\bar\lambda}, \quad \mathfrak{Q}=\mathfrak{N}_{\lambda}.$$

Для существования такого оператора U необходимо и достаточно, чтобы подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ имели одинаковую размерность. Мы приходим к следующему результату.

Теорема 8. *Расширение A' тогда и только тогда является самосопряженным, когда области определения и значений оператора U совпадают с $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ соответственно.*

Оператор A имеет самосопряженные расширения тогда и только тогда, когда его дефектные подпространства $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{N}_\lambda$ имеют одинаковую размерность, т. е. когда его индекс дефекта имеет вид (n, n).

Особенно просто описываются симметрические расширения в том случае, когда $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и $\mathfrak{N}_\lambda$ конечномерны. Для существования самосопряженного расширения оба подпространства должны иметь одинаковую размерность — обозначим ее через n. Выберем в $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ какой-нибудь ортонормальный базис $e_1, e_2, \ldots, e_n$, а в $\mathfrak{N}_\lambda$ ортонормальный базис $e'_1, e'_2, \ldots, e'_n$.

Тогда всякий вектор $z\in\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ имеет вид

$$z=\zeta_1 e_1+\zeta_2 e_2+\ \ldots\ +\zeta_n e_n;$$

далее всякий изометрический оператор U с областью определения $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$ и изменения $\mathfrak{N}_\lambda$ задается формулой

$$Uz=\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_{jk}\zeta_k\right)e'_j,$$

где $u=(u_{jk})$ — унитарная матрица. Поэтому *в рассматриваемом случае $\mathfrak{D}_{A'}$ состоит из всех векторов*:

$$x'=x+\sum_{j=1}^{n}\zeta_k e_k-\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_{jk}\zeta_k\right)e'_j, \qquad x\in\mathfrak{D}_A, \tag{21}$$

и

$$A'x'=Ax+\bar\lambda\sum_{j=1}^{n}\zeta_k e_k-\lambda\sum_{j=1}^{n}\left(\sum_{k=1}^{n}u_{jk}\zeta_k\right)e'_j. \tag{22}$$

Если ни одно из дефектных подпространств $\mathfrak{N}_{\bar\lambda}$, $\mathfrak{N}_\lambda\neq(0)$, то согласно теореме 7 оператор A допускает нетривиальное расширение A'. Поэтому:

VI. *Замкнутый симметрический оператор A максимален тогда и только тогда, когда хотя бы одно из его дефектных* *подпространств равно* (0), *т. е. когда его индекс дефекта есть* (0, n) *или* (n, 0).

В частности:

VII. *Расширение A' максимально тогда и только тогда, когда* $\mathfrak{P} = \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$ *или* $\mathfrak{Q} = \mathfrak{N}_{\lambda}$.

VIII. *Если дефектные подпространства* $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$, $\mathfrak{N}_{\lambda}$ *конечномерны и одинаковой размерности, то всякое максимальное расширение является самосопряженным.*

8а. Расширения с выходом из гильбертова пространства. В этом n° мы сообщим без доказательств некоторые сведения по так называемой *обобщенной теории симметрических расширений.*

Обобщенной спектральной функцией в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ называется операторная функция F_{λ} действительного параметра λ, обладающая следующими свойствами.

1°. При $\lambda_2 > \lambda_1$ разность $F_{\lambda_2} - F_{\lambda_1}$ является ограниченным положительным оператором *),

2°. $F_{\lambda+0} = F_{\lambda}$ для всех вещественных λ.

3°. При любом $x \in \mathfrak{H}$

$$\lim_{\lambda \to -\infty} |F_{\lambda}x| = 0, \qquad \lim_{\lambda \to +\infty} |F_{\lambda}x - x| = 0.$$

Пусть $\mathfrak{H}$ — подпространство гильбертова пространства $\mathfrak{H}^+$. Пусть P_{λ}^+ — (обычная) спектральная функция в $\mathfrak{H}^+$ (см n° 1 § 12), а P^+ — оператор ортогонального проектирования в $\mathfrak{H}^+$ на $\mathfrak{H}$.

Нетрудно проверить, что сужение F_{λ} оператора $P^+P_{\lambda}^+$ на пространство $\mathfrak{H}$ является **обобщенной** спектральной функцией в этом пространстве, однако отнюдь не тривиально, что справедливо обратное утверждение. Именно имеет место следующая теорема. *Для каждой обобщенной спектральной функции F_{λ} в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$ существует такое гильбертово пространство $\mathfrak{H}^+ \supset \mathfrak{H}$ и такая обычная спектральная функция P_{λ}^+ в $\mathfrak{H}^+$, что F_{λ} равно сужению на $\mathfrak{H}$ оператора $P^+P_{\lambda}^+$, где P^+ — оператор ортогонального проектирования в $\mathfrak{H}^+$ на $\mathfrak{H}$.*

Обобщенную спектральную функцию F_{λ} назовем *спектральной функцией симметрического оператора* A (с областью определения $\mathfrak{D}_A$, плотной в $\mathfrak{H}$), если для любых $f \in \mathfrak{D}_A$ и $g \in \mathfrak{H}$ справедливы формулы

$$(Af, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda d(F_{\lambda}f, g), \quad \|Af\|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 d(F_{\lambda}f, f).$$

Эти формулы напоминают интегральное представление самосопряженного оператора, описанное в n° 3 § 12. Оказывается, что *каждый симметрический оператор обладает обобщенной спектральной функцией.* Построение такой функции может быть выполнено следующим образом.

Симметрический (самосопряженный) оператор B^+, с областью определения $\mathfrak{D}_{B^+}$, плотной в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}^+ \supset \mathfrak{H}$, назовем симметри-

---

*) Ограниченный оператор A называется *положительным*, если $(Ax, x) \geqslant 0$ для всех $x \in \mathfrak{H}$.

ческим (самосопряженным) *расширением* оператора A, действующего в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, *с выходом из пространства* $\mathfrak{H}$, если $\mathfrak{D}_{B+} \supset \mathfrak{D}_A$ и $B^+f = Af$ для всех $f \in \mathfrak{D}_A$. Можно доказать, что самосопряженные расширения с выходом из пространства существуют и в том случае, когда дефектные числа оператора A не равны друг другу, т. е. такие самосопряженные расширения существуют всегда. Пусть A — симметрический оператор в $\mathfrak{H}$ и B^+ — какое-либо самосопряженное расширение A (без выхода или с выходом из $\mathfrak{H}$). Пусть P^+_λ — спектральная функция B^+, а P^+ — оператор ортогонального проектирования в $\mathfrak{H}^+$ на $\mathfrak{H}$. Тогда сужение F_λ оператора P^+P_λ на $\mathfrak{H}$ является спектральной функцией оператора A, и если брать все возможные расширения B^+ с выходом из пространства $\mathfrak{H}$ оператора A, то таким путем получаются все спектральные функции оператора A.

Симметрический оператор обладает единственной обобщенной спектральной функцией тогда и только тогда, когда он является максимальным

С понятием обобщенной спектральной функции симметрического оператора тесно связано понятие *обобщенной резольвенты*. Обобщенной резольвентой симметрического оператора A называется операторная функция R_λ комплексного параметра λ, допускающая представление вида

$$R_\lambda f = P^+(B^+ - \lambda 1^+)^{-1} f, \quad f \in \mathfrak{H},$$

где B^+ — какое-либо самосопряженное расширение оператора A, построенное, вообще говоря, с выходом из $\mathfrak{H}$ в $\mathfrak{H}^+$, 1^+ — единичный оператор в $\mathfrak{H}^+$, P^+ — по-прежнему оператор ортогонального проектирования в $\mathfrak{H}^+$ на $\mathfrak{H}$. Оказывается, что *операторная функция* R_λ ($\Im\lambda \neq 0$) *является обобщенной резольвентой симметрического оператора A тогда и только тогда, когда она допускает представление вида*

$$(R_\lambda f, g) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d(F_\lambda f, g)}{\mu - \lambda}, \quad f, \quad g \in \mathfrak{H},$$

где F_λ — обобщенная спектральная функция оператора A.

Изложенная здесь теория принадлежит М. А. Наймарку (см. Наймарк [2], а также Ахиезер и Глазман [1], Надь [1]). Обобщение теории на случай так называемых нормальных расширений дано в работе Бириук и Коддингтон [1].

Важная задача описания всех обобщенных резольвент заданного симметрического оператора A в терминах исходного пространства $\mathfrak{H}$ была решена А. В. Штраусом (см. Штраус [1]).

9. Спектры самосопряженных расширений симметрического оператора. Число λ называется *точкой регулярного типа* оператора A, если существует число $k = k(\lambda) > 0$, такое, что для всех $x \in \mathfrak{D}_A$

$$|(A - \lambda I)x| \geqslant k|x|. \tag{23}$$

Очевидно, неравенство (23) означает, что обратный оператор $(A - \lambda I)^{-1}$ существует и ограничен; однако его область определения может и не совпадать со всем пространством.

В частности, собственные значения оператора A не являются его точками регулярного типа.

Совокупность всех точек регулярного типа оператора A называется его *полем регулярности*.

IX. *Поле регулярности всякого линейного оператора A есть открытое множество.*

Доказательство. Пусть λ_0 — точка регулярного типа оператора A. Тогда при $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta\leqslant\frac{1}{2}k(\lambda_0)$ и $x\in\mathfrak{D}_A$

$$|(A-\lambda I)x|\geqslant|(A-\lambda_0 I)x|-|\lambda-\lambda_0||x|\geqslant$$
$$\geqslant(k(\lambda_0)-\delta)|x|\geqslant\frac{1}{2}k(\lambda_0)|x|;$$

таким образом, каждое из значений λ в окрестности $|\lambda-\lambda_0|\leqslant\delta$ точки λ_0 есть точка регулярного типа.

X. *Если A — симметрический оператор, то всякое невещественное число принадлежит его полю регулярности.*

Действительно, положим $\lambda=\sigma+i\tau$, $\tau\neq 0$ и введем для краткости обозначение $B=A-\sigma I$. Оператор B эрмитов и потому при $x\in\mathfrak{D}_A$

$$|(A-\lambda I)x|^2=|Bx-i\tau x|^2=(Bx-i\tau x,\ Bx-i\tau x)=$$
$$=(Bx,\ Bx)+i\tau[(Bx,\ x)-(x,\ Bx)]+\tau^2(x,\ x)=|Bx|^2+\tau^2|x|^2;$$

следовательно,

$$|(A-\lambda I)x|^2\geqslant\tau^2|x|^2.$$

Всякая регулярная точка*) λ оператора A удовлетворяет, очевидно, неравенству (23); поэтому *всякая регулярная точка оператора есть его точка регулярного типа*. Обратное, вообще, неверно; точка регулярного типа лишь тогда является регулярной точкой оператора A, когда область определения оператора $(A-\lambda I)^{-1}$ есть все пространство $\mathfrak{H}$. Таким образом, *поле регулярности оператора содержит все его регулярные точки*, но может содержать также точки спектра этого оператора. Так, например, все невещественные числа λ являются точками спектра не максимального симметрического оператора и в то же время принадлежат его полю регулярности (см. предложение X).

Дополнение в спектре поля регулярности называется *ядром спектра* оператора. В силу только что сказанного ядро спектра есть часть спектра, вообще говоря, со всем спектром не совпадающая. Однако в случае самосопряженного оператора понятие точки регулярного типа и регулярной точки совпадают, так что ядро спектра самосопряженного оператора совпадает с его спектром.

---

*) См. n° 5 § 12.

Дадим теперь классификацию точек, образующих ядро спектра симметрического оператора. Ядро спектра содержит все собственные значения оператора, так что точечная часть спектра целиком принадлежит его ядру.

Если λ — собственное значение симметрического оператора A, а $\mathfrak{M}_\lambda$ — соответствующее собственное подпространство, то подпространство $\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_\lambda$ инвариантно относительно A. Обозначим через $\widehat{A}_\lambda$ сужение оператора A в $\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_\lambda$. Это определение оператора $\widehat{A}_\lambda$ мы распространим и на тот случай, когда λ не является собственным значением, считая, что тогда $\widehat{A}_\lambda = A$. Согласно самому определению оператора $\widehat{A}_\lambda$ при любом значении λ существует обратный оператор $(\widehat{A}_\lambda - \lambda I)^{-1}$. Совокупность всех тех значений λ, для которых этот обратный оператор неограничен, принадлежит, очевидно, ядру спектра; эта совокупность называется *непрерывной частью* ядра спектра. Таким образом, всякая точка ядра спектра принадлежит либо его точечной части, либо его непрерывной части, либо им обеим.

Если A' — симметрическое расширение симметрического оператора A, то ядро спектра оператора A' содержит ядро спектра оператора A; при этом каждая из частей (точечная и непрерывная) ядра спектра оператора A' содержит соответствующую часть ядра спектра оператора A.

Рассмотрим тот частный случай, когда оба дефектных числа оператора A конечны.

Формулы (21) и (22) для расширений показывают, что в этом случае размерность подпространства $(\widehat{A}'_\lambda - \lambda I)\mathfrak{D}_{\widehat{A}'_\lambda}$ по модулю $(\widehat{A}_\lambda - \lambda I)\mathfrak{D}_{\widehat{A}}$ конечна; следовательно, операторы $(\widehat{A}'_\lambda - \lambda I)^{-1}$ и $(\widehat{A}_\lambda - \lambda I)^{-1}$ ограничены или неограничены одновременно. Это означает, что при *симметрическом расширении симметрического оператора A с конечными дефектными числами непрерывная часть ядра его спектра не изменяется.* В частности, мы приходим к следующей теореме:

Теорема 9. *Все самосопряженные расширения замкнутого симметрического оператора с равными и конечными дефектными числами имеют один и тот же непрерывный спектр.*

Перейдем теперь к рассмотрению точечной части ядра спектра.

Теорема 10. *При расширении замкнутого симметрического оператора с конечным индексом дефекта (m, m) до самосопряженного оператора кратность каждого его собственного значения может повыситься не более чем на m единиц, в частности, новые собственные значения имеют кратность, не превосходящую m.*

Доказательство. Пусть A — замкнутый симметрический оператор с конечным индексом дефекта (m, m), а A' — его самосопряженное расширение. Пусть, далее, λ — собственное значение кратности p оператора A.

Обозначим через $p+q$ его кратность как собственного значения оператора A' и предположим, что $q>m$.

Выберем линейно независимую систему решений $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_p, x_{p+1}, \ldots, x_{p+q}$ уравнения $A'x-\lambda x=0$ так, чтобы $x_k \in \mathfrak{D}_A$ при $k=1, 2, \ldots, p$. Так как размерность $\mathfrak{D}_{A'}$ по модулю $\mathfrak{D}_A$ равна m, а $q>m$, то существуют числа α_k, не все равные нулю, такие, что

$$\alpha_1 x_{p+1}+\ldots+\alpha_q x_{p+q} \in \mathfrak{D}_A.$$

Но тогда вектор $x=\alpha_1 x_{p+1}+\ldots+\alpha_q x_{p+q}$ есть собственный вектор оператора A, соответствующий λ и линейно независимый от $x_1, x_2, \ldots, x_p$; это означает, что вопреки предположению кратность собственного значения λ оператора A выше p.

10. Раствор двух подпространств. Дальнейшие теоремы о спектре основаны на важном понятии раствора двух подпространств, введенным М. Г. Крейном и М. А. Красносельским (см. Крейн и Красносельский [1]). Это понятие мы используем также для усиления теоремы 5 n° 6. Пусть $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ — два замкнутых подпространства, а P_1, P_2 — операторы проектирования на $\mathfrak{M}_1$, $\mathfrak{M}_2$ соответственно; *раствором* этих подпространств называется норма разности P_1-P_2. Раствор $\mathfrak{M}_1$ и $\mathfrak{M}_2$ мы обозначим через $\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)$.

Таким образом, по определению,

$$\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2)=|P_1-P_2|. \tag{24}$$

Из этого определения вытекает, что

$$\theta(\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_1, \mathfrak{H}-\mathfrak{M}_2)=\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2), \tag{25}$$

так как

$$\theta(\mathfrak{H}-\mathfrak{M}_1, \mathfrak{H}-\mathfrak{M}_2)=|(I-P_1)-(I-P_2)|=|P_1-P_2|.$$

Отметим, что всегда

$$\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \leqslant 1. \tag{26}$$

Действительно, при любом векторе $x \in \mathfrak{H}$ векторы $P_2(I-P_1)x$, $(I-P_2)P_1 x$ ортогональны и их разность равна $(P_2-P_1)x$; отсюда следует, что

$$|(P_2-P_1)x|^2=|P_2(I-P_1)x|^2+|(I-P_2)P_1 x|^2 \leqslant \leqslant |(I-P_1)x|^2+|P_1 x|^2=|x|^2, \tag{27}$$

и потому $|P_2-P_1| \leqslant 1$.

Отметим, что в неравенстве (26) наверно имеет место знак равенства, если одно из подпространств содержит отличный от нуля вектор, ортогональный ко второму подпространству. Действительно, если, например,

$$x \neq 0, \quad x \in \mathfrak{M}_1, \ x \perp \mathfrak{M}_2,$$

то $P_1x = x, P_2x = 0$, и потому $|(P_1 - P_2)x| = |x|$, откуда $|P_1 - P_2| = 1$.

Теорема 11. *Если* $\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) < 1$, *то*

$$\dim \mathfrak{M}_1 = \dim \mathfrak{M}_2.$$

Доказательство. Достаточно доказать, что из неравенства

$$\dim \mathfrak{M}_2 > \dim \mathfrak{M}_1$$

следует существование в $\mathfrak{M}_2$ отличного от нуля вектора, ортогонального к $\mathfrak{M}_1$. Для этого рассмотрим подпространство*) $\mathfrak{N} = \overline{P_2\mathfrak{M}_1}$. Очевидно, $\mathfrak{N} \subset \mathfrak{M}_2$ и

$$\dim \mathfrak{N} \leqslant \dim \mathfrak{M}_1 < \dim \mathfrak{M}_2,$$

так что $\mathfrak{N} \neq \mathfrak{M}_2$. Поэтому в $\mathfrak{M}_2$ существует вектор $x \neq 0$, ортогональный к $\mathfrak{N} = \overline{P_2\mathfrak{M}_1}$; этот вектор ортогонален также к $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{N}$, ибо $\mathfrak{M}_1 - \mathfrak{N} \perp \mathfrak{M}_2$.

Можно дать еще другое определение раствора двух подпространств. Положим для этого

$$d_1 = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{M}_2 \\ x \neq 0}} \frac{|(I - P_1)x|}{|x|}, \quad d_2 = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{M}_1 \\ x \neq 0}} \frac{|(I - P_2)x|}{|x|}. \tag{28}$$

Тогда

$$\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \max\{d_1, d_2\}. \tag{29}$$

Для доказательства формулы (29) заметим, что в силу (27)

$$\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) = \sup_{\substack{x \in \mathfrak{H} \\ x \neq 0}} \frac{|(P_2 - P_1)x|}{|x|} =$$

$$= \sup_{\substack{x \in \mathfrak{H} \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{|P_2(I - P_1)x|^2 + |(I - P_2)P_1x|^2}}{|x|}. \tag{30}$$

Поэтому

$$\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \geqslant \sup_{\substack{x \in \mathfrak{M}_1 \\ x \neq 0}} \frac{\sqrt{|P_2(I - P_1)x|^2 + |(I - P_2)P_1x|^2}}{|x|} =$$

$$= \sup_{\substack{x \in \mathfrak{M}_1 \\ x \neq 0}} \frac{|(I - P_2)x|}{|x|} = d_2,$$

*) Как обычно, $\overline{\mathfrak{N}}$ обозначает замыкание множества $\mathfrak{N}$.

ибо при $x \in \mathfrak{M}_1$

$$(I-P_1)x=0, \quad (I-P_2)P_1x=(I-P_2)x.$$

Аналогично, $\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \geqslant d_1$; следовательно,

$$\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \geqslant \max\{d_1, d_2\}.$$

Для доказательства обратного неравенства заметим, что, по определению числа d_2,

$$|(I-P_2)P_1x|^2 \leqslant d_2^2|P_1x|^2. \tag{31}$$

Кроме того,

$$|P_2(I-P_1)x|^2=(P_2(I-P_1)x,\ P_2(I-P_1)x)=$$
$$=(P_2(I-P_1)x,\ (I-P_1)x)=(P_2(I-P_1)x,\ (I-P_1)^2x)=$$
$$=((I-P_1)P_2(I-P_1)x,\ (I-P_1)x)\leqslant$$
$$\leqslant|(I-P_1)P_2(I-P_1)x||(I-P_1)x|;$$

следовательно, по определению числа d_1,

$$|P_2(I-P_1)x|^2 \leqslant d_1|P_2(I-P_1)x||(I-P_1)x|.$$

Отсюда

$$|P_2(I-P_1)x| \leqslant d_1|(I-P_1)x|.$$

Из этого неравенства и из (31) заключаем, что

$$|(I-P_2)P_1x|^2+|P_2(I-P_1)x|^2 \leqslant d_2^2|P_1x|^2+d_1^2|(I-P_1)x|^2 \leqslant$$
$$\leqslant \max\{d_1^2, d_2^2\}(|P_1x|^2+|(I-P_1)x|^2)=\max\{d_1^2, d_2^2\}|x|^2,$$

и формула (30) дает $\theta(\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2) \leqslant \max\{d_1, d_2\}$.

Пусть теперь λ — произвольное число, вещественное или невещественное; обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda$ ортогональное дополнение к $\mathfrak{R}_{A-\lambda I}$. Подпространство $\mathfrak{N}_\lambda$ мы будем называть *дефектным подпространством* симметрического оператора A также в том случае, когда λ — вещественное число, а размерность n_λ подпространства $\mathfrak{N}_\lambda$ — *дефектным числом* оператора A.

Теорема 12. *Вдоль связной компоненты поля регулярности симметрического оператора дефектное число n_λ остается постоянным.*

Доказательство. Обозначим через Γ эту связную компоненту, а через P_λ — оператор проектирования на $\mathfrak{N}_\lambda$. Докажем, что для каждой точки $\lambda_0 \in \Gamma$ существует окрестность $|\lambda-\lambda_0|<\delta$, принадлежащая Γ, в которой

$$\theta(\mathfrak{N}_\lambda, \mathfrak{N}_{\lambda_0})<1.$$

На основании теоремы 11 отсюда можно будет сделать вывод, что в рассматриваемой окрестности $n_\lambda=n_{\lambda_0}$, после чего легко установить постоянство n_λ вдоль Г, пользуясь леммой Гейне—Бореля.

Итак, пусть $\lambda_0 \in \Gamma$, и пусть для всех векторов $x \in \mathfrak{D}_A$ и некоторого $c>0$

$$|(A-\lambda_0 I)x| \geqslant c|x|.$$

Положим $\delta=\frac{1}{3}c$; тогда при $|\lambda-\lambda_0|<\delta$ и $x \in \mathfrak{D}_A$

$$|(A-\lambda I)x| = |(A-\lambda_0 I)x + (\lambda-\lambda_0)x| \geqslant$$
$$\geqslant |(A-\lambda_0 I)x| - |\lambda-\lambda_0||x| > \frac{2}{3}c|x|.$$

С другой стороны, $I-P_{\lambda_0}$ есть оператор проектирования на область значений оператора $A-\lambda_0 I$; следовательно, при $y \in \mathfrak{N}_\lambda$ и $|y|=1$

$$|(I-P_{\lambda_0})y| = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}_A\\ x\neq 0}} \frac{|(y, (A-\lambda_0 I)x)|}{|(A-\lambda_0 I)x|} = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}_A\\ x\neq 0}} \frac{|(y, (A-\lambda I)x + (\lambda-\lambda_0)x)|}{|(A-\lambda_0 I)x|} =$$
$$= \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}_A\\ x\neq 0}} \frac{|\lambda-\lambda_0|\,|(y,x)|}{|(A-\lambda_0 I)x|} \leqslant \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}_A\\ x\neq 0}} \frac{\frac{1}{3}c|x|}{|(A-\lambda_0 I)x|} \leqslant \frac{\frac{1}{3}c|x|}{c|x|} = \frac{1}{3},$$

ибо $y \perp (A-\lambda I)x$. Аналогично при $y \in \mathfrak{N}_{\lambda_0}$

$$|(1-P_\lambda)y| = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}_A\\ x\neq 0}} \frac{|(y, (A-\lambda I)x)|}{|(A-\lambda I)x|} = \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}_A\\ x\neq 0}} \frac{|(y, (A-\lambda_0 I)x + (\lambda_0-\lambda)x)|}{|(A-\lambda I)x|} =$$
$$= \sup_{\substack{x\in\mathfrak{D}_A\\ x\neq 0}} \frac{|\lambda-\lambda_0|\,|(y,x)|}{|(A-\lambda I)x|} \leqslant \frac{\frac{1}{3}c|x|}{\frac{2}{3}c|x|} = \frac{1}{2}.$$

Отсюда и из формулы (29) заключаем, что

$$\theta(\mathfrak{N}_\lambda, \mathfrak{N}_{\lambda_0}) \leqslant \frac{1}{2}.$$

Теорема доказана.

Так как верхняя и нижняя полуплоскости принадлежат полю регулярности симметрического оператора, то из теоремы 12 как частный случай вытекает теорема 5 n° 6.

Из этой же теоремы вытекают:

Следствие 2. *Если некоторая точка λ_0 вещественной оси принадлежит полю регулярности симметрического оператора, то оба его дефектных числа равны n_{λ_0}; следовательно, его индекс дефекта имеет вид $(n_{\lambda_0}, n_{\lambda_0})$.*

Действительно, в этом случае обе полуплоскости вместе с некоторой окрестностью рассматриваемой точки λ_0 вещественной оси принадлежат одной и той же связной компоненте поля регулярности оператора, вдоль которой дефектное число n_{λ_0} должно быть постоянным.

Следствие 3. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (m, m). Если при некотором вещественном значении λ_0 дефектное число n_{λ_0} меньше m, то λ_0 принадлежит спектру всякого самосопряженного расширения A'* оператора A. *Если, кроме того, λ_0 не является собственным значением оператора A, то λ_0 принадлежит непрерывной части спектра самосопряженного расширения A'.*

Действительно, λ_0 принадлежит ядру спектра оператора A и потому спектру оператора A', ибо в противном случае было бы $n_{\lambda_0} = m$ на основании теоремы 12. Если при этом число λ_0 не является собственным значением оператора A, то оно принадлежит непрерывной части ядра спектра этого оператора, а значит, непрерывной части спектра оператора A'.

Теорема 13. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор с конечным индексом дефекта (m, m). Если λ — действительная точка регулярного типа оператора A, то существует самосопряженное расширение A' оператора A, для которого λ есть собственное значение кратности m.*

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ — собственное подпространство оператора A^*, соответствующее собственному значению λ. В силу следствия 2 из теоремы 12 размерность $\mathfrak{N}_\lambda$ равна m. Определим оператор A', полагая $\mathfrak{D}_{A'} = \mathfrak{D}_A + \mathfrak{N}_\lambda$ и $A'x = A^*x$ для $x \in \mathfrak{D}_{A'}$. Легко проверить, что A' — симметрический оператор; так как размерность $\mathfrak{D}_{A'}$ по модулю $\mathfrak{D}_A$ равна m, то A' — самосопряженный оператор. Очевидно, $\mathfrak{N}_\lambda$ — собственное подпространство оператора A', соответствующее собственному значению λ, так что кратность последнего как собственного значения оператора A' равна m.

Теорема 14. *Если A — замкнутый симметрический оператор с конечным индексом дефекта (m, m), а λ — действительное число, не принадлежащее точечному спектру оператора A, то число решений уравнения*

$$A^*x - \lambda x = 0$$

не превосходит m.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ — то же, что и в доказательстве теоремы 13; построим снова оператор A', полагая $\mathfrak{D}_{A'} = \mathfrak{D}_A + \mathfrak{N}_\lambda$ и $A'x = A^*x$ для $x \in \mathfrak{D}_{A'}$. Тогда A' — симметрическое расширение оператора A, и потому размерность $\mathfrak{D}_{A'}$ по модулю $\mathfrak{D}_A$ не превосходит m.

Теорема 15. *Пусть A — замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта (m, m); если сопряженный оператор A^**

имеет вещественное собственное значение λ, то существует самосопряженное расширение A' оператора A, для которого λ также является собственным значением.

Доказательство. Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ — собственное подпространство оператора A^*, соответствующее собственному значению λ. Определим оператор B, полагая

$$\mathfrak{D}_B = \mathfrak{D}_A + \mathfrak{N}_\lambda,$$
$$B(x_1 + x_2) = Ax_1 + \lambda x_2, \quad x_1 \in \mathfrak{D}_A, \quad x_2 \in \mathfrak{N}_\lambda.$$

Легко проверить, что B — симметрический оператор с равными дефектными числами; его самосопряженное расширение будет также расширением оператора A, для которого λ есть собственное значение.

11. Расширения полуограниченного оператора. Симметрический оператор A называется *полуограниченным снизу*, если существует число m, такое, что при любом векторе $x \in \mathfrak{D}_A$

$$(Ax, x) \geqslant m|x|^2, \tag{32}$$

и *полуограниченным сверху*, если существует число M, такое, что при любом векторе $x \in \mathfrak{D}_A$

$$(Ax, x) \leqslant M|x|^2. \tag{33}$$

Частным случаем полуограниченного снизу оператора является положительный симметрический оператор; он удовлетворяет условию (32) при $m = 0$.

С другой стороны, изучение всякого полуограниченного оператора сводится к изучению положительного оператора; действительно, достаточно перейти от оператора A к оператору

$$B = A - m1$$

в случае оператора A, полуограниченного снизу, и к оператору

$$B = M1 - A$$

в случае оператора A, полуограниченного сверху.

Если A — положительный симметрический оператор, то отрицательная полуось принадлежит полю его регулярности, ибо при $\lambda < 0$ и $x \in \mathfrak{D}_A$

$$|(A - \lambda 1)x|^2 = |Ax|^2 - 2\lambda(Ax, x) + \lambda^2|x|^2 \geqslant \lambda^2|x|^2.$$

Отсюда на основании следствия 2 из теоремы 12 вытекает, что *положительный симметрический оператор* имеет равные дефектные числа. В силу сказанного выше это предложение остается верным для любого полуограниченного оператора.

Теорема 16. *Если A — положительный замкнутый симметрический оператор с конечным индексом дефекта (n, n), то отрицательная часть спектра всякого его самосопряженного расширения может состоять лишь из конечного числа отрицательных собственных значений, сумма кратностей которых не превосходит n.*

Доказательство. Пусть A' — самосопряженное расширение оператора A, а P_λ — его спектральная функция.

Обозначим через $\mathfrak{N}$ подпространство, на которое проектирует оператор $P_{-0} = P_{-0} - P_{-\infty}$. Очевидно, на $\mathfrak{N}$ спектр оператора A' отрицателен, а на $\mathfrak{H} - \mathfrak{N}$ он неотрицателен. Поэтому теорема будет доказана, если мы установим, что

$$\dim \mathfrak{N} \leqslant n.$$

Предположим противное: пусть

$$\dim \mathfrak{N} > n; \tag{34}$$

так как размерность $\mathfrak{D}_{A'}$ по модулю $\mathfrak{D}_A$ равна n, то из (34) следует, что в $\mathfrak{N}$ есть вектор $x \neq 0$, принадлежащий $\mathfrak{D}_A$. Но это невозможно, ибо оператор A положителен, в то время как A' в $\mathfrak{N}$ отрицателен.

Следствие 4. *Если симметрический оператор A с конечным индексом дефекта (n, n) удовлетворяет одному из условий*

$$(Ax, x) \geqslant m |x|^2, \quad x \in \mathfrak{D}_A,$$

или

$$(Ax, x) \leqslant M |x|^2, \quad x \in \mathfrak{D}_A,$$

то часть спектра всякого самосопряженного расширения оператора A, расположенная левее m, соответственно правее M, может состоять лишь из конечного числа собственных значений, сумма кратностей которых не превосходит n.

Для доказательства достаточно применить теорему 16 к оператору $A - mI$, соответственно $MI - A$.

Результаты n° n° 9—11 принадлежат в основном М. Г. Крейну (см. Крейн [3]), теорема 12 n° 10 — М. Г. Крейну и М. А. Красносельскому, По поводу обобщения понятия раствора на случай подпространств нормированного пространства см. Гохберг и Маркус [1], Като [1].

ГЛАВА V

СИММЕТРИЧЕСКИЕ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЕ ОПЕРАТОРЫ

§ 15. Основные понятия

1. Самосопряженные дифференциальные выражения. Выше было показано (см. n° 5 § 1), что всякое самосопряженное дифференциальное выражение с вещественными и достаточное число раз дифференцируемыми коэффициентами можно представить в виде

$$l(y) = (-1)^n (p_0 y^{(n)})^{(n)} + (-1)^{n-1} (p_1 y^{(n-1)})^{(n-1)} + \ldots + p_n y. \qquad (1)$$

Обратно, если каждый из коэффициентов $p_{n-k}(x)$ веществен и имеет производные до k-го порядка включительно, то, раскрывая в (1) скобки, мы получим самосопряженное дифференциальное выражение вида

$$q_0 y^{(2n)} + q_1 y^{(2n-1)} + \ldots + q_{2n} y.$$

Однако в излагаемой ниже теории нет нужды делать такое предположение о дифференцируемости коэффициентов.

Мы будем исходить из более общего предположения, которое состоит в следующем:

Если (a, b) — интервал, в котором рассматривается дифференциальное выражение $l(y)$, то функции

$$\frac{1}{p_0(x)}, \quad p_1(x), \ \ldots, \ p_n(x) \qquad (2)$$

измеримы в интервале (a, b) и суммируемы в каждом его замкнутом конечном подынтервале $[\alpha, \beta]$.

Всюду в дальнейшем мы будем считать это условие выполненным и не будем его уже каждый раз оговаривать.

При этом не исключается тот случай, когда интервал (a, b) бесконечен, так что может быть $a = -\infty$ или $b = +\infty$.

Если, следовательно, хоть одна из функций $p_0, \ldots, p_n$ не дифференцируема, то выражение $l(y)$ уже нельзя свести к обычному дифференциальному выражению Чтобы подчеркнуть это обстоятельство, выраженне $l(y)$ называют в литературе *квазидифференциальным выражением* *). Мы, однако, будем его по-прежнему называть дифференциальным выражением.

В связи с теорией марковских процессов, а также некоторымн вопросами теории колебаний представляют интерес обобщенные дифференциальные выражения вида

$$l(y) = -\frac{d}{dM(x)}\left[y^+(x) - \int_{c+0}^{x+0} y(s)\,dQ(s)\right],$$

где $M(x)$ — неубывающая функция, $Q(x)$ — разность двух неубывающих функций, а y^+ — правая производная функции y.

Спектральная теория операторов, порождаемых такими обобщенными дифференциальными выражениями, рассматривалась М. Г. Крейном, Феллером и И. С. Кацем Наиболее полное изложение, а также подробная библиография содержатся в статье Кац И. С. [1] (см. также Аткинсон [1]).

Выражение $l(y)$ называется *регулярным*, если интервал (a, b) конечен и если функции $\frac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ суммируемы во всем интервале (a, b). В противном случае выражение $l(y)$ называется *сингулярным*.

При этом левый конец a называется *регулярным*, если $a > -\infty$ и если функции (2) суммируемы в каждом интервале $[a, \beta]$, $\beta < b$. В противном случае конец a называется *сингулярным*. Другими словами, конец a сингулярен, если $a = -\infty$ или если a конечно, но условие суммируемости коэффициентов не выполняется в интервале вида $[a, \beta]$.

Аналогично определяется понятие регулярности или сингулярности для правого конца b.

Очевидно, выражение $l(y)$ регулярно тогда и только тогда, когда оба конца a и b регулярны.

2. Квазипроизводные. Функция y, для которой $l(y)$ имеет смысл, может и не иметь всех производных до $2n$-го порядка;

---

*) Следует отметить, что можно рассматривать еще более общие дифференциальные выражения с произвольными комплексными коэффициентами (такие выражения рассмотрены Д. Шином и Эверитом). Однако мы ограничимся только дифференциальными выражениями, описанными в тексте.

Отметим также, что в работе Вайдман [1] изучается спектральная теория операторов, порожденных дифференциальными выражениями вида $l(y) = \frac{1}{r(x)}\left\{-\frac{d}{dx}p(x)\frac{dy}{dx} + q(x)\,y\right\}$, $a < x < b$, в гильбертовом пространстве $L_r^2(a, b)$ функций, интегрируемых с квадратом в интервале (a, b) относительно веса $r(x) > 0$.

это связано с тем, что коэффициенты $p_0, \ldots, p_n$ могут быть недифференцируемыми. Поэтому вместо производных $y', \ldots, y^{(2n)}$ удобно рассматривать так называемые *квазипроизводные* функции y, которые определяются следующим образом.

Квазипроизводными функции y, соответствующими выражению $l(y)$, называются функции $y^{[1]}, y^{[2]}, \ldots, y^{[2n]}$, определяемые формулами

$$\left.\begin{aligned} y^{[k]} &= \frac{d^k y}{dx^k} \qquad \text{при } k = 1, 2, \ldots, n-1, \\ y^{[n]} &= p_0 \frac{d^n y}{dx^n}, \\ y^{[n+k]} &= p_k \frac{d^{n-k} y}{dx^{n-k}} - \frac{d}{dx}(y^{[n+k-1]}), \quad k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{3}$$

Кроме того, для удобства положим

$$y^{[0]} = y.$$

Из этого определения квазипроизводных непосредственно вытекает, что

$$l(y) = y^{[2n]}. \tag{4}$$

Мы будем считать, что выражение $l(y)$ имеет смысл для данной функции y, если все квазипроизводные функции y до $(2n-1)$-го порядка включительно существуют и абсолютно непрерывны в каждом конечном подынтервале $[\alpha, \beta]$ интервала $[a, b]$.

3. Формула Лагранжа. Пусть y и z — две функции, для которых выражение l имеет смысл. Тогда

$$l(y)\bar{z} - yl(\bar{z}) = \frac{d}{dx}[y, z], \tag{5}$$

где

$$[y, z] = \sum_{k=1}^{n} \{y^{[k-1]}\bar{z}^{[2n-k]} - y^{[2n-k]}\bar{z}^{[k-1]}\}. \tag{6}$$

Формула (5) называется *формулой Лагранжа*. В ее справедливости легко убедиться, дифференцируя обе части (6) и пользуясь соотношениями

$$y^{[2n]} = l(y),$$
$$\frac{d}{dx} y^{[k-1]} = y^{[k]}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$
$$\frac{d}{dx} y^{[n-1]} = \frac{1}{p_0} y^{[n]},$$
$$\frac{d}{dx} y^{[2n-k]} = p_{n-k+1} y^{[k-1]} - y^{[2n-k+1]}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

непосредственно следующими из (3).

Интегрируя обе части (5) в конечном интервале $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, получим *тождество Лагранжа в интегральной форме*

$$\int_{\alpha}^{\beta} l(y)\bar{z}\,dx - \int_{\alpha}^{\beta} yl(\bar{z})\,dx = [y, z]_{\alpha}^{\beta}, \tag{7}$$

где $[y, z]_{\alpha}^{\beta}$ есть разность значений функции $[y, z]$ при $x=\beta$ и $x=\alpha$.

§ 16. Обобщенные линейные дифференциальные уравнения

Пусть $l(y)$ — по-прежнему дифференциальное выражение, определенное в § 15.

Уравнение вида

$$l(y) = g(x) \tag{1}$$

можно рассматривать как обобщение обычного линейного дифференциального уравнения с *правой частью* $g(x)$. Мы его по-прежнему будем называть линейным дифференциальным уравнением *).

Уравнение (1) называется *однородным*, если $g(x) \equiv 0$, и *неоднородным* — в противном случае.

Задачей этого параграфа будет выяснение общих свойств решений уравнения (1); оказывается, что при этом сохраняются все характерные черты теории линейных дифференциальных уравнений.

Как и в обычной теории линейных дифференциальных уравнений, мы начнем с теоремы существования и единственности решения для системы уравнений первого порядка. Такую систему удобно рассматривать как одно уравнение первого порядка в пространстве вектор-функций (см. § 6).

1. Уравнение первого порядка в пространстве вектор-функции. Рассмотрим уравнение

$$\frac{dy}{dx} = A(x)y + f(x), \tag{2}$$

где $f(x) = \{f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x)\}$ — заданная, а $y(x) = \{y_1(x), y_2(x), \ldots, y_n(x)\}$ — искомая вектор-функция со значениями из фиксированного конечномерного векторного пространства R_n; при этом $A(x)$ — заданная операторная, т. е. матричная, функция, значения которой суть линейные операторы в R_n, т. е. матрицы n-го порядка. Вектор-функция $y(x)$ называется решением

*) В литературе такие уравнения называются иногда квазидифференциальными уравнениями.

уравнения (2), если она абсолютно непрерывна в каждом конечном подынтервале $[\alpha, \beta]$ интервала (a, b) и почти всюду в (a, b) удовлетворяет этому уравнению. При этом вектор-функция $y(x)$ называется *абсолютно непрерывной*, если каждая ее координата $y_k(x)$ абсолютно непрерывна. Относительно решений уравнения (2) имеет место следующая теорема.

Теорема 1. *Пусть функции* $A(x)=(a_{jk}(x))$, $j, k=1, 2, \ldots, n$, $f(x)=(f_1(x), f_2(x), \ldots, f_n(x))$ *удовлетворяют условиям*:

1°. *Функции* $a_{jk}(x)$, $f_k(x)$, j, $k=1, 2, \ldots, n$, *измеримы в интервале* (a, b).

2°. *Функции*

$$|A(x)|, \quad |f(x)|$$

*суммируемы**) *в каждом конечном замкнутом подынтервале* $[\alpha, \beta]$ *интервала* (a, b).

Если тогда x_0 — *произвольное число из интервала* (a, b), *а* y_0 — *произвольный вектор из* R_n, *то существует одно и только одно решение* $y(x)$ *уравнения* (2), *удовлетворяющее условию*

$$y\big|_{x=x_0} = y_0. \tag{3}$$

Доказательство. Пусть функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (2) и условию (3). Интегрируя уравнение (2) от x_0 до x и учитывая условие (3), получим

$$y(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [A(\xi)\, y(\xi) + f(\xi)]\, d\xi. \tag{4}$$

При этом интеграл в правой части (4) существует, ибо функция $y(\xi)$ абсолютно непрерывна, следовательно, ограничена в интервале $[x_0, x]$.

Таким образом, всякое решение уравнения (2), удовлетворяющее условию (3), есть также решение уравнения (4). Очевидно, что и обратно, всякое решение уравнения (4) есть реше-

*) Здесь $|f(x)|$, $|A(x)|$ обозначают соответственно норму вектора $f(x)$ и норму оператора $A(x)$ (при фиксированном x) в конечномерном евклидовом пространстве R_n. Очевидные неравенства

$$|f_k(x)| \leqslant |f(x)| \leqslant \sum_{j=1}^{n} |f_j(x)|,$$

$$|a_{jk}(x)| \leqslant |A(x)| \leqslant \sum_{j,\,k=1}^{n} |a_{jk}(x)|$$

показывают, что условие 2° эквивалентно следующему условию: 2′. *Функции* $f_k(x)$, $a_{jk}(x)$, k, $j=1, 2, \ldots, n$, *суммируемы в каждом конечном замкнутом подынтервале* $[\alpha, \beta]$ интервала (a, b).

ние уравнения (2), удовлетворяющее условию (3). Поэтому вместо совокупности уравнения (2) и условия (3) можно рассмотреть уравнение (4).

Для решения уравнения (4) будем применять обычный метод последовательных приближений, полагая

$$y_0(x) \equiv y_0, \tag{5}$$

$$y_{n+1}(x) = y_0 + \int_{x_0}^{x} [A(\xi)\, y_n(\xi) + f(\xi)]\, d\xi, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{6}$$

В достаточно малом интервале, содержащем точку x_0, последовательность $y_n(x)$ сходится равномерно к решению $y(x)$ уравнения (4).

Очевидно, достаточно доказать это утверждение для интервала, одним из концов которого является точка x_0, ибо интервал, внутри которого находится x_0, есть объединение двух таких интервалов.

Рассмотрим, например, интервал вида $[x_0, x_1]$ $(x_0 < x_1)$ и положим

$$M_n = \max_{x_0 \leqslant x \leqslant x_1} | y_{n+1}(x) - y_n(x) |, \tag{7}$$

$$q = \int_{x_0}^{x_1} | A(x) |\, dx. \tag{8}$$

Из равенств (6) следует, что

$$y_{n+1}(x) - y_n(x) = \int_{x_0}^{x} A(\xi)\, [y_n(\xi) - y_{n-1}(\xi)]\, d\xi,$$

поэтому при $x_0 \leqslant x \leqslant x_1$

$$| y_{n+1}(x) - y_n(x) | \leqslant M_{n-1} \int_{x_0}^{x} | A(\xi) |\, d\xi \leqslant M_{n-1} q.$$

Но левая часть принимает значение M_n при некотором значении x; следовательно,

$$M_n \leqslant q M_{n-1}.$$

Откуда

$$M_n \leqslant M_0 q^n.$$

Рассмотрим ряд

$$y_0(x) + [y_1(x) - y_0(x)] + [y_2(x) - y_1(x)] + \ldots \tag{9}$$

В силу предыдущего неравенства он мажорируется по норме, начиная со 2-го члена геометрической прогрессией

$$M_0 + M_0 q + M_0 q^2 + \ldots$$

Следовательно, ряд (9) абсолютно сходится по норме при $q<1$. С другой стороны, из определения (8) числа q следует, что q может быть сколь угодно малым, в частности меньше единицы, при x_1, достаточно близком к x_0. Следовательно, при таком выборе числа x_1 ряд (9) сходится по норме равномерно, т. е. последовательность $y_n(x)$ сходится по норме равномерно в интервале $[x_0, x_1]$ к некоторой функции $y(x)$.

Переходя в (6) к пределу, получим, что эта предельная вектор-функция $y(x)$ удовлетворяет уравнению (4). Этим доказано существование решения в интервале $[x_0, x_1]$. Докажем теперь единственность решения в этом интервале. Предположим, что наряду с решением $y(x)$ уравнение (4) имеет в интервале $[x_0, x_1]$ еще одно решение $z(x)$. Тогда, вычитая почленно равенства

$$y(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[A(\xi)\,y(\xi)+g(\xi)]\,d\xi,$$

$$z(x)=y_0+\int_{x_0}^{x}[A(\xi)\,z(\xi)+g(\xi)]\,d\xi,$$

получим

$$y(x)-z(x)=\int_{x_0}^{x}A(\xi)\,[y(\xi)-z(\xi)]\,d\xi. \tag{10}$$

Положим

$$p=\max_{x_0\leqslant x\leqslant x_1}|y(x)-z(x)|; \tag{11}$$

если $y(x)\not\equiv z(x)$, то $p>0$. Из (10) следует, что

$$|y(x)-z(x)|\leqslant p\int_{x_0}^{x}|A(\xi)|\,d\xi=pq<p.$$

Это неравенство выполняется и для максимального значения p выражения $|y(x)-z(x)|$, т. е. $p<p$, что невозможно. Следовательно, $y(x)\equiv z(x)$, и единственность решения в интервале $[x_0, x_1]$ доказана. Теперь уже легко полностью доказать теорему. Всякий конечный интервал $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$ можно разбить на конечное число интервалов $[\alpha_k, \alpha_{k+1}]$, для каждого из которых

$$\int_{\alpha_k}^{\alpha_{k+1}}|A(\xi)|\,d\xi<1;$$

по доказанному выше в каждом из этих интервалов имеют место теорема существования и единственность решения. Поэтому решение существует и единственно в интервале $[\alpha_i, \alpha_{i+1}]$, содержащем точку x_0. Но тогда оно существует и однозначно определяется в двух соседних интервалах и т. д. Эти рассуждения показывают, что теорема верна во всяком конечном интервале $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, следовательно, во всем интервале (a, b).

2. Теорема существования и единственности решения уравнения $l(y) = f$.

Теорема 2. *Если функция $f(x)$ измерима в интервале (a, b) и суммируема в каждом конечном интервале $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, то, каковы бы ни были комплексные числа $c_0, c_1, \ldots, c_{2n-1}$ и какова бы ни была внутренняя точка x_0 интервала (a, b), уравнение*) $l(y) = f$ имеет в интервале (a, b) одно и только одно решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям*

$$y^{[k]}\big|_{x=x_0} = c_k, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1.$$

Доказательство. Рассмотрим систему уравнений первого порядка

$$\left.\begin{aligned}
\frac{dy}{dx} &= y^{[1]},\\
\frac{dy^{[1]}}{dx} &= y^{[2]},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\frac{dy^{[n-2]}}{dx} &= y^{[n-1]},\\
\frac{dy^{[n-1]}}{dx} &= \frac{1}{p_0}\, y^{[n]},\\
\frac{dy^{[n]}}{dx} &= p_1 y^{[n-1]} - y^{[n+1]},\\
\frac{dy^{[n+1]}}{dx} &= p_2 y^{[n-2]} - y^{[n+2]},\\
&\cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\\
\frac{dy^{[2n-2]}}{dx} &= p_{n-1} y^{[1]} - y^{[2n-1]},\\
\frac{dy^{[2n-1]}}{dx} &= p_n y - f.
\end{aligned}\right\} \qquad (12)$$

*) При этом, конечно, предполагается, что коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют условиям n° 1 § 15. Напоминаем, что мы раз навсегда считаем эти условия выполненными.

В силу формул (3) и (4) n°2 § 15 система (12) эквивалентна уравнению $l(y)=f$, причем функции $y^{[1]}, y^{[2]}, \ldots, y^{[2n-1]}$ являются последовательными квазипроизводными функции y.

С другой стороны, систему (12) можно записать в виде (2). Действительно, введем вектор-функции

$$\tilde{y}=(y, y^{[1]}, y^{[2]}, \ldots, y^{[2n-2]}, y^{[2n-1]}),$$
$$\tilde{f}=(0, 0, \ldots, 0, f)$$

и матричную функцию

$$A(x)=\begin{Vmatrix} 0 & 1 & & & & & & 0 \\ & & \cdot & & & & \cdot & \\ & & & \cdot & & \cdot & & \\ & & & 1 & 0 & & & \\ & & & & \frac{1}{p_0} & & & \\ & & & p_1 & -1 & & & \\ & & p_2 & & & \cdot & & \\ & \cdot & & & & & \cdot & \\ & p_{n-1} & & & & & & -1 \\ p_n & & & & & & & 0 \end{Vmatrix},$$

где $\frac{1}{p_0}$ находится на пересечении n-й строки и $n+1$-го столбца и где на всех незаполненных местах находятся нули.

Тогда система (12) запишется в виде

$$\frac{d\tilde{y}}{dx}=A(x)\tilde{y}+\tilde{f}. \tag{13}$$

Но по предположению коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют условиям n° 1 § 15; отсюда заключаем, что матрица $A(x)$ удовлетворяет условиям теоремы 1. Следовательно, уравнение (13) имеет в (a, b) одно и только одно решение, удовлетворяющее начальному условию

$$\tilde{y}\,|_{x=x_0}=\tilde{y}_0,$$

где

$$\tilde{y}_0=(c, c_1, c_2, \ldots, c_{2n-1}).$$

Этим завершается доказательство теоремы 2.

Замечание 1. *Теорема 2 остается, очевидно, в силе, если x_0 — регулярный конец интервала (a, b) при условии, что функция $f(x)$ суммируема в каждом конечном интервале $[\alpha, x_0] \subset (a, b)$ $(\alpha \gtreqless x_0)$.*

Замечание 2. *Теорема 2 остается в силе, если уравнение* $l(y)=f$ *заменить уравнением*

$$l(y)-\lambda y=f,$$

где λ — *произвольный комплексный параметр.*

3. Свойства решений однородного уравнения. Пользуясь теоремой 2 n°2, можно без труда вывести свойства решений однородного уравнения

$$l(y)=0, \tag{14}$$

являющиеся обобщением известных свойств обычных однородных уравнений.

Пусть

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{2n}$$

— решения уравнения (14). Определитель

$$W=\begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \ldots & y_{2n} \\ y_1^{[1]} & y_2^{[1]} & \ldots & y_{2n}^{[1]} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_1^{[2n-1]} & y_2^{[2n-1]} & \ldots & y_{2n}^{[2n-1]} \end{vmatrix}$$

называется *определителем Вронского* этих решений.

Теорема 3. *Если решения* $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ *однородного уравнения* (14) *линейно зависимы, то их определитель Вронского тождественно равен нулю в интервале* (a, b). *Обратно, если этот определитель равен нулю хотя бы в одной точке интервала* (a, b), *то решения* $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ *линейно зависимы.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ линейно зависимы, т. е. существуют постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$, не все равные нулю, такие, что

$$c_1y_1+c_2y_2+\ \ldots\ +c_{2n}y_{2n}=0 \quad \text{в} \quad (a, b). \tag{15}$$

Беря квазипроизводные обеих частей (15) до $(2n-1)$-го порядка включительно, получим

$$\left.\begin{array}{c} c_1y_1^{[1]}+c_2y_2^{[1]}+\ \ldots\ +c_{2n}y_{2n}^{[1]}=0, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ c_1y_1^{[2n-1]}+c_2y_2^{[2n-1]}+\ \ldots\ +c_{2n}y_{2n}^{[2n-1]}=0. \end{array}\right\} \tag{16}$$

Равенства (15) — (16) являются системой однородных уравнений относительно $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$, имеющей нетривиальное решение; следовательно, определитель этой системы, который и есть как раз определитель Вронского, равен нулю.

Обратно, пусть этот определитель равен нулю при $x=x_0$, где x_0 — точка интервала (a, b). Тогда возможно выбрать постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$, не все равные нулю, так, чтобы равенства (15) — (16) выполнялись в точке x_0. Но тогда функция

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{2n} y_{2n}$$

есть решение уравнения $l(y)=0$, удовлетворяющее начальным условиям

$$y^{[k]}\big|_{x=x_0} = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{17}$$

В силу единственности такого решения (теорема 2 n° 2) $y \equiv 0$ в интервале (a, b), ибо тождественный нуль также есть решеие уравнения $l(y)=0$, удовлетворяющее условиям (17), т. е. решения $y_1, \ldots, y_n$ линейно зависимы.

Легко построить линейно независимую систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ однородного уравнения. Достаточно выбрать систему решений, удовлетворяющих начальным условиям вида

$$y_j^{[k-1]}\big|_{x=x_0} = a_{jk}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

где определитель матрицы (a_{jk}) отличен от нуля. Всякая линейно независимая система решений $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ однородного уравнения называется *фундаментальной*.

Теорема 4. *Всякое решение однородного уравнения есть линейная комбинация решений какой угодно фиксированной фундаментальной системы.*

Доказательство. Пусть $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ — какая-нибудь фуидаментальная система решений, а y — какое-нибудь решение одиородного уравнения. Выберем постоянные $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ так, чтобы в фиксированной точке x_0 интервала (a, b) было:

$$\left.\begin{aligned} y &= c_1 y_1 + \ldots + c_{2n} y_{2n}, \\ y^{[1]} &= c_1 y_1^{[1]} + \ldots + c_{2n} y_{2n}^{[1]}, \\ &\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{[2n-1]} &= c_1 y_1^{[2n-1]} + \ldots + c_{2n} y_{2n}^{[2n-1]}. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Это возможно, ибо равенства (18) при $x=x_0$ представляют собой систему уравнений относительно $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$, определитель которой есть определитель Вронского фундаментальной системы $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ и, следовательно, отличен от нуля. Но равенства (18) означают, что функции

$$y \quad \text{и} \quad c_1 y_1 + \ldots + c_{2n} y_{2n}$$

суть решения однородного уравнения, удовлетворяющие одним и тем же начальным условиям; в силу единственности такого решения

$$y \equiv c_1 y_1 + \ldots + c_{2n} y_{2n} \quad \text{в интервале} \quad (a, b).$$

Теорема 4 означает, что *совокупность всех решений однородного уравнения $l(y) = 0$ порядка $2n$ есть линейное пространство размерности $2n$.*

Замечание. *Все результаты этого пункта остаются верными и для однородного уравнения*

$$l(y) - \lambda y = 0,$$

где λ — произвольный комплексный параметр.

Действительно, при выводе этих результатов мы опирались на теорему 2, которая остается верной, если заменить уравнение $l(y) = f$ уравнением $l(y) - \lambda y = f$ (см. замечание 2 в n° 2).

4. Решения неоднородного уравнения. Решение неоднородного уравнения $l(y) = f$ можно найти, применяя надлежащим образом видоизмененный метод вариации произвольных постоянных.

Пусть

$$y_1(x), \quad y_2(x), \ldots, y_{2n}(x)$$

— фундаментальная система решений однородного уравнения $l(y) = 0$. Решение уравнения $l(y) = f$ будем искать в виде

$$y(x) = c_1(x) y_1(x) + \ldots + c_{2n}(x) y_{2n}(x), \tag{19}$$

где функции $c_1(x), \ldots, c_{2n}(x)$ удовлетворяют условиям

$$\left.\begin{aligned} c_1'(x) y_1(x) + \ldots + c_{2n}'(x) y_{2n}(x) &= 0, \\ c_1'(x) y_1^{[1]}(x) + \ldots + c_{2n}'(x) y_{2n}^{[1]}(x) &= 0, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ c_1'(x) y_1^{[2n-2]}(x) + \ldots + c_{2n}'(x) y_{2n}^{[2n-2]}(x) &= 0. \end{aligned}\right\} \tag{20}$$

Подставляя (19) в уравнение $l(y) = f$ и учитывая равенства (20), получим

$$c_1'(x) y_1^{[2n-1]}(x) + \ldots + c_{2n}'(x) y_{2n}^{[2n-1]}(x) = f. \tag{21}$$

Равенства (20) — (21) представляют собой систему линейных уравнений относительно $c_1'(x), \ldots, c_{2n}'(x)$. Решая их, найдем, что

$$c_k'(x) = (-1)^{2n+k} \frac{W(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_n)}{W(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})} f, \tag{22}$$

где $W(u_1, u_2, \ldots, u_m)$ обозначает определитель Вронского (в смысле определения n° 3) функций $u_1, u_2, \ldots, u_m$.

Положим

$$v_k(x) = (-1)^{2n+k} \frac{W(y_1, \ldots, y_{k-1}, y_{k+1}, \ldots, y_{2n})}{W(y_1, y_2, \ldots, y_{2n})}; \tag{23}$$

тогда в силу (22)

$$c_k(x) = a_k + \int_{x_0}^{x} v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Подставляя эти выражения в формулу (19), приходим к следующему результату.

Общее решение неоднородного уравнения $l(y) = f$ имеет вид

$$y(x) = \sum_{k=1}^{2n} a_k y_k(x) + \sum_{k=1}^{2n} y_k(x) \int_{x_0}^{x} v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi, \tag{24}$$

где $y_1, y_2, \ldots, y_n$ — фундаментальная система решений однородного уравнения $l(y) = 0$, $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$ — произвольные постоянные, а функции $v_k(x)$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, определяются по формулам (23).

Очевидно, этот результат остается верным, если уравнения $l(y) = f$, $l(y) = 0$ заменить соответственно уравнениями $l(y) - \lambda y = f$, $l(y) - \lambda y = 0$.

§ 17. Операторы, порожденные самосопряженными дифференциальными выражениями

1. Оператор L. Пусть $l(y)$ обозначает самосопряженное дифференциальное выражение, рассматриваемое в интервале (a, b); чтобы перейти от выражения $l(y)$ к оператору, введем гильбертово пространство $L^2(a, b)$, т. е. пространство всех измеримых функций $y(x)$ с суммируемым квадратом в интервале (a, b) (см. n°1 § 10); для краткости обозначим это пространство через $\mathfrak{H}$. Далее, обозначим через $\mathfrak{D}$ совокупность всех функций $y(x)$ из $\mathfrak{H}$, все квазипроизводные которых до $(2n-1)$-го порядка включительно абсолютно непрерывны, а квазипроизводная $y^{[2n]}$ принадлежит пространству $\mathfrak{H}$.

Очевидно, $\mathfrak{D}$ есть линейное многообразие*) в $\mathfrak{H}$.

Определим оператор L в $\mathfrak{H}$ следующим образом: *область определения оператора L есть $\mathfrak{D}$ и для $y \in \mathfrak{D}$*:

$$Ly = l(y). \tag{1}$$

Очевидно $\mathfrak{D}$ — максимальное многообразие в $\mathfrak{H}$, на котором можно таким образом определить оператор. Действительно,

*) Термин линейное многообразие здесь и ниже обозначает подпространство, вообще говоря, не замкнутое.

требование абсолютной непрерывности квазипроизводных $y^{[k]}$, $k=1, 2, \ldots, 2n-1$, необходимо для того, чтобы выражение $l(y)$ имело смысл; требование $y^{[2n]}=l(y)\in\mathfrak{H}$ необходимо для того, чтобы выражение $l(y)$ определяло *оператор* в $\mathfrak{H}$.

Ниже мы увидим, что L есть замкнутый оператор с плотной областью определения; именно, мы покажем, что оператор L является сопряженным к некоторому симметрическому оператору, который будет построен в следующем пункте.

В настоящей книге мы рассматриваем операторы, порождаемые самосопряженным дифференциальным выражением в гильбертовом пространстве $L_2(a, b)$. Некоторые спектральные свойства операторов, порождаемых линейными дифференциальными выражениями в определенных других нормированных пространствах, например пространствах $L^p(a, b)$, $p\geqslant 1$, рассмотрены в книге Голдберг [1]

2. Оператор L_0'. Обозначим через $\mathfrak{D}_0'$ совокупность всех функций y из $\mathfrak{D}$, равных нулю вне какого-нибудь конечного *) интервала $[\alpha, \beta]\subset(a, b)$, вообще говоря, различного для различных функций $y(x)$. Обозначим через L_0' сужение оператора L на $\mathfrak{D}_0'$. Другими словами, L_0' есть оператор, область определения которого есть $\mathfrak{D}_0'$, причем

$$L_0'y=Ly=l(y) \tag{2}$$

для $y\in\mathfrak{D}_0'$.

Таким образом, по определению оператора L_0'

$$L_0'\subset L. \tag{3}$$

Отметим некоторые свойства оператора L_0'.

1'. *Для любых функций $y\in\mathfrak{D}_0'$, $z\in\mathfrak{D}$ имеет место соотношение*

$$(L_0'y, z)=(y, Lz). \tag{4}$$

Действительно, пусть $[\alpha, \beta]$ — конечный интервал, содержащийся в интервале (a, b), вне которого функция $y(x)$ обращается в нуль. В силу непрерывности функции $y(x)$ и ее квазипроизводных $y^{[k]}(x)$, $k=1, 2, \ldots, 2n-1$, эта функция и эти квазипроизводные обращаются также в нуль на концах интервала $[\alpha, \beta]$.

Поэтому, применяя формулу Лагранжа (7) n° 3 § 15 к функциям y, z и интервалу $[\alpha, \beta]$, получим

$$\int_\alpha^\beta l(y)\bar{z}\,dx=\int_\alpha^\beta y\cdot\overline{l(z)}\,dx, \tag{5}$$

*) Если сам интервал (a, b) конечен, то интервал $[\alpha, \beta]$ также конечен и требование о его конечности является излишним, оно существенно лишь тогда, когда интервал (a, b) бесконечен.

ибо внеинтегральная часть этой формулы будет равна нулю. Так как функции $l(y)$ и y равны нулю вне $[\alpha, \beta]$, то в равенстве (5) интегрирование по $[\alpha, \beta]$ можно заменить интегрированием по (a, b). Следовательно, равенство (5) означает, что

$$(l(y), z) = (y, l(z)).$$

По определению операторов L_0' и L это равенство эквивалентно (4).

Очевидно, равенство (4) означает, что

$$L \subset L_0'^{*}. \tag{6}$$

II′. *Оператор L_0' эрмитов.*

Действительно, соотношение (4) имеет, в частности, место при $y \in \mathfrak{D}_0'$, $z \in \mathfrak{D}_0'$, ибо $\mathfrak{D}_0' \subset \mathfrak{D}$. Но тогда $Lz = L_0'z$, и соотношение (4) перепишется в виде

$$(L_0'y, z) = (y, L_0'z). \tag{7}$$

Дальнейшие свойства оператора L_0' проще всего получить, рассмотрев сначала регулярный случай.

3. Оператор L_0 в регулярном случае. Пусть дифференциальное выражение $l(y)$ регулярно в интервале $[a, b]$. Обозначим через $\mathfrak{D}_0$ совокупность всех функций $y(x)$ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям

$$y^{[k]}|_{x=a} = y^{[k]}|_{x=b} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{8}$$

Очевидно,

$$\mathfrak{D}_0' \subset \mathfrak{D}_0. \tag{9}$$

Обозначим, далее, через L_0 сужение оператора L на $\mathfrak{D}_0$; другими словами, L_0 *есть оператор с областью определения* $\mathfrak{D}_0$ *и для* $y \in \mathfrak{D}_0$

$$L_0 y = Ly.$$

Таким образом, по самому определению операторов L_0', L_0 и L

$$L_0' \subset L_0 \subset L. \tag{10}$$

Отметим теперь следующие свойства оператора L_0:

I. *Для любых элементов $y \in \mathfrak{D}_0$, $z \in \mathfrak{D}$ имеет место соотношение*

$$(L_0 y, z) = (y, Lz). \tag{11}$$

II. *Оператор L_0 эрмитов, т. е. для любых элементов $y, z \in \mathfrak{D}_0$*

$$(L_0 y, z) = (y, L_0 z). \tag{12}$$

Вывод этих свойств ничем, по существу, не отличается от вывода свойств I′ и II′ оператора L_0'; существенными здесь являются условия (8) для элементов $y \in \mathfrak{D}_0$. Соотношение (11) означает, что

$$L \subset \overset{*}{L_0}. \tag{13}$$

Дальнейшие свойства оператора L_0 основаны на следующих леммах:

Лемма 1. *Пусть выражение $l(y)$ регулярно в интервале $[a, b]$ и пусть $f(x)$ — функция из $\mathfrak{H} = L^2(a, b)$. Уравнение*

$$l(y) = f \tag{14}$$

имеет решение $y(x)$, удовлетворяющее условиям

$$y^{[k]}\big|_{x=a} = y^{[k]}\big|_{x=b} = 0, \quad k = 0, 1, \ldots, 2n-1, \tag{15}$$

тогда и только тогда, когда функция $f(x)$ ортогональна ко всем решениям однородного уравнения $l(y) = 0$.

Доказательство. Обозначим через $y(x)$ решение уравнения $l(y) = f$, удовлетворяющее условиям

$$y^{[k]}\big|_{x=a} = 0, \quad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1; \tag{16}$$

согласно теореме 2 n° 2 § 16 такое решение существует и притом только одно. Далее, обозначим через $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ фундаментальную систему решений однородного уравнения $l(z) = 0$, удовлетворяющую условиям

$$z_\nu^{[k-1]}\big|_{x=a} = \begin{cases} 0 & \text{при } \nu \neq k, \\ 1 & \text{при } \nu = k. \end{cases} \tag{17}$$

Применяя к функциям $y(x)$ и $z_\nu(x)$ тождество Лагранжа, получим

$$(f, z_\nu) = (l(y), z_\nu) = [y, z_\nu]_a^b + (y, l(z_\nu)). \tag{18}$$

Но $l(z_\nu) = 0$. Кроме того, в силу условий (16) $[y, z_\nu]_{x=a} = 0$. Следовательно, формула (18) примет вид

$$\begin{aligned}(f, z_\nu) = [y, z_\nu]_{x=b} = \sum_{k=1}^{n} \left\{ y^{[k-1]}\bar{z}_\nu^{[2n-k]} - y^{[2n-k]}\bar{z}_\nu^{[k-1]} \right\}_{x=b} = \\ = \begin{cases} -y^{[2n-\nu]}(b) & \text{при } \nu = 1, 2, \ldots, n-1, n, \\ y^{[2n-\nu]}(b) & \text{при } \nu = n+1, \ldots, 2n-1, 2n \end{cases}\end{aligned} \tag{19}$$

(при этом мы использовали формулу (6) n° 3 § 15 для $[y, z]$ и соотношения (17)). Из соотношений (19) сразу следует утверждение леммы: равенства $y^{[k]}\big|_{x=b} = 0$, $k = 0, 1, \ldots, 2n-1$, выполняются тогда и только тогда, когда $(f, z_\nu)=0$, $\nu=0, 1, \ldots$ $\ldots, 2n-1$, т. е. когда функция $f(z)$ ортогональна ко всем функциям фундаментальной системы решений уравнения $l(z)=0$.

Обозначим через $\mathfrak{M}$ совокупность всех решений уравнения $l(z)=0$. Так как все эти решения — непрерывные функции в интервале $[a, b]$, то все они принадлежат $L^2(a, b)$. Следовательно, $\mathfrak{M}\subset\mathfrak{H}$. В силу теоремы 3 n° 3 § 16 $\mathfrak{M}$ *есть конечномерное подпространство в* $\mathfrak{H}$ *размерности* $2n$.

Обозначим далее через $\mathfrak{R}_0$ область изменения оператора L_0. Решение $y(x)$ уравнения $l(y)=f$, удовлетворяющее условиям (15), есть элемент из $\mathfrak{D}_0$; следовательно, $l(y)=L_0y$. Поэтому существование такого решения $y(x)$ означает, что $f\in\mathfrak{R}_0$. Доказанная лемма утверждает, что элемент f пространства $\mathfrak{H}=L^2(a, b)$ тогда и только тогда принадлежит $\mathfrak{R}_0$, когда он ортогонален к $\mathfrak{M}$; другими словами,

$$\mathfrak{H}=\mathfrak{R}_0+\mathfrak{M}. \tag{20}$$

Лемма 2. *Каковы бы ни были числа*

$$\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{2n-1}; \quad \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{2n-1},$$

существует функция $y\in\mathfrak{D}$, *удовлетворяющая условиям*

$$y^{[k]}\big|_{x=a}=\alpha_k, \quad y^{[k]}\big|_{x=b}=\beta_k, \quad k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{21}$$

Доказательство. Докажем сначала лемму для частного случая, когда все числа α_j, $j=0, 1, \ldots, 2n-1$, равны нулю. Пусть $f(x)$ — произвольный элемент из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условиям

$$(f, z_\nu)=\begin{cases} -\beta_{2n-\nu} & \text{при } \nu=1, 2, \ldots, n-1, n, \\ \beta_{2n-\nu} & \text{при } \nu=n+1, \ldots, 2n-1, 2n, \end{cases} \tag{22}$$

где z_ν, $\nu=1, 2, \ldots, 2n-1$, — та же фундаментальная система, что и в доказательстве леммы 1. Такой элемент f существует и притом даже в $\mathfrak{M}$. Действительно, если положить

$$f=\sum_{\nu=1}^{2n}a_\nu z_\nu,$$

то условия (22) будут системой уравнений относительно постоянных $a_1, a_2, \ldots, a_{2n}$, определитель которой есть определитель Грама линейно независимых функций $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$, следовательно, отличен от нуля.

Обозначим через v решение уравнения $l(v)=f$, удовлетворяющее начальным условиям

$$v^{[k]}\big|_{x=a}=0, \ k=0, 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{23}$$

Тогда

$$v^{[k]}\big|_{x=b}=\beta_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1.$$

В самом деле, применяя к v и к z_ν формулу Лагранжа, получим

$$(f,\ z_\nu)=(l(v),\ z_\nu)=(v,\ l(z_\nu))+[v,\ z_\nu]_b-[v,\ z_\nu]_a. \tag{24}$$

Но $l(z_\nu)=0$; кроме того, в силу условий (23) $[v,\ z_\nu]_a=0$. Далее, в силу условий (17)

$$[v,\ z_\nu]_b=\begin{cases} -v^{[2n-\nu]}(b) & \text{при } \nu=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\ n, \\ v^{[2n-\nu]}(b) & \text{при } \nu=n+1,\ \ldots,\ 2n-1,\ 2n \end{cases}$$

(см. также (19)); поэтому из условий (22) и формулы (24) заключаем, что $v^{[k]}\big|_{x=b}=\beta_k,\ k=0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1$.

Итак, мы построили функцию $v\in\mathfrak{D}$, такую, что

$$v^{[k]}\big|_{x=a}=0,\ v^{[k]}\big|_{x=b}=\beta_k,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1.$$

Аналогично меняя ролями a и b, можно построить функцию $w\in\mathfrak{D}$, такую, что

$$v^{[k]}\big|_{x=a}=\alpha_k,\ v^{[k]}\big|_{x=b}=0,\ k=0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1.$$

Функция $y=v+w$ будет тогда функцией из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющей условиям (21).

III. *Область $\mathfrak{D}_0$ определения оператора L_0 плотна в $\mathfrak{H}$.*

Нам нужно доказать, что всякий элемент h, ортогональный к $\mathfrak{D}_0$, равен нулю. Пусть h — такой элемент, так что $(h,\ y)=0$ для всех $y\in\mathfrak{D}_0$. Обозначим через $z(x)$ какое-нибудь решение уравнения $l(z)=h$. В силу свойства I для любого элемента $y\in\mathfrak{D}_0$ будет

$$(z,\ L_0y)=(Lz,\ y)=(l(z),\ y)=(h,\ y)=0,$$

т. е. функция $z(x)$ ортогональна к $\mathfrak{R}_0$. Но тогда из формулы (20) заключаем, что $z\in\mathfrak{M}$; следовательно, $h=l(z)=0$, что и требовалось доказать.

Из II и III следует, что L_0 — *симметрический оператор.*

IV. *Оператор L является сопряженным к оператору L_0*, т. е.

$$L=\overset{*}{L_0}. \tag{25}$$

Выше было показано (см. (13)), что $L\subset\overset{*}{L_0}$. Поэтому достаточно доказать обратное включение, т. е. что

$$L\supset\overset{*}{L_0}. \tag{26}$$

Пусть g — произвольный элемент из области определения $\overset{*}{\mathfrak{D}}$ оператора $\overset{*}{L_0}$; положим $\overset{*}{L_0}g=h$.

Обозначим через $z(x)$ какое-нибудь решение уравнения $l(z)=h$; такое решение существует согласно теореме 2 n° 2 § 16. Тогда для любого элемента $y \in \mathfrak{D}_0$

$$(h, y) = (l(z), y) = (Lz, y) = (z, L_0 y). \tag{27}$$

С другой стороны, по определению сопряженного оператора

$$(h, y) = (\overset{*}{L_0} g, y) = (g, L_0 y). \tag{28}$$

Вычитая почленно равенства (27) и (28), получим, что

$$(z-g, L_0 y) = 0,$$

т. е. элемент $z-g$ ортогонален к области изменения $\mathfrak{R}_0$ оператора L_0. Отсюда, учитывая формулу (20), заключаем, что $z-g \in \mathfrak{M}$.

Но $\mathfrak{M} \subset \mathfrak{D}$; следовательно, $z-g \in \mathfrak{D}$. Так как $z \in \mathfrak{D}$, то также $g \in \mathfrak{D}$. Кроме того, $L(z-g)=0$, значит,

$$Lg = Lz = h = \overset{*}{L_0} g;$$

тем самым включение (26) доказано.

V. *Оператор* L_0 *является сопряженным к оператору* L, т. е.

$$L_0 = L^*. \tag{29}$$

Из доказанного соотношения (25) заключаем, что

$$L^* = \overset{**}{L_0} \supset L_0; \tag{30}$$

поэтому достаточно доказать обратное включение

$$L^* \subset L_0. \tag{31}$$

Применяя операцию $*$ к обеим частям соотношения $L_0 \subset L$, найдем, что $L^* \subset \overset{*}{L_0}$. В силу формулы (25) это последнее соотношение можно переписать в виде

$$L^* \subset L. \tag{32}$$

Пусть теперь z — элемент из области определения $\mathfrak{D}^*$ оператора L^*. В силу (32) $z \in \mathfrak{D}$ и $L^* z = Lz$. По определению оператора L^* для любого элемента $y \in \mathfrak{D}$

$$(L^* z, y) = (z, Ly),$$

т. е.

$$(Lz, y) = (z, Ly).$$

С другой стороны, по формуле Лагранжа

$$(Lz, y) = [z, y]_a^b + (z, Ly);$$

следовательно,

$$[z,\ y]_a^b = 0 \tag{33}$$

для любой функции $y \in \mathfrak{D}$. Но согласно лемме 2 функцию $y \in \mathfrak{D}$ можно выбрать так, чтобы значения

$$y^{[k]}\,|_{x=a},\ y^{[k]}\,|_{x=b},\ k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1,$$

были какими угодно. Поэтому равенство (33) возможно лишь тогда, когда

$$z^{[k]}\,|_{x=a} = 0,\ z^{[k]}\,|_{x=b} = 0,\quad k = 0,\ 1,\ \ldots,\ 2n-1,$$

т. е. $z \in \mathfrak{D}_0$. Отсюда и из (32) заключаем, что $L^* \subset L_0$; тем самым соотношение (29) доказано.

Из предложения V вытекает, что L_0 — *замкнутый симметрический оператор.*

Определим теперь индекс дефекта оператора L_0.

VI. *Индекс дефекта оператора* L_0 *есть* $(2n,\ 2n)$.

Пусть λ — произвольное комплексное число из верхней полуплоскости. Тогда первое дефектное число есть по определению число линейно независимых элементов $z \in \mathfrak{H}$, удовлетворяющих уравнению

$$\overset{*}{L_0} z = \lambda z,$$

т. е. уравнению

$$Lz = \lambda z.$$

Другими словами, это есть число линейно независимых решений уравнения

$$l(z) = \lambda z,$$

ибо каждое такое решение $z(x)$, будучи непрерывными в интервале $[a,\ b]$, принадлежит $L^2(a,\ b) = \mathfrak{H}$. Но, как было показано в n° 3 § 16, это число равно $2n$. Следовательно, первое дефектное число равно $2n$. Второе дефектное число получается при переходе от λ к $\bar{\lambda}$; значит, оно также равно $2n$.

Объединяя все полученные выше результаты, приходим к следующей теореме:

Теорема 1. *Оператор L_0 есть замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта* $(2n,\ 2n)$; *оператор* L *является сопряженным к оператору* L_0:

$$\overset{*}{L_0} = L.$$

В заключение установим соотношение между L_0' и L_0.

VII. *Оператор L_0 есть замыкание оператора* L_0';

$$L_0 = \tilde{L}_0' = L_0'^{**}. \tag{34}$$

Из соотношения (см. (10))

$$L_0' \subset L_0$$

непосредственно следует, что и

$$\tilde{L}_0' \subset L_0;$$

поэтому достаточно доказать обратное включение

$$\tilde{L}_0' \supset L_0.$$

Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ обозначает фиксированный замкнутый интервал, заключенный внутри интервала (a, b), и пусть $\mathfrak{H}_\Delta = L^2(\alpha, \beta)$. Дифференциальное выражение $l(y)$ можно, очевидно, рассматривать в интервале $[\alpha, \beta]$; оно будет в этом интервале регулярным. Соответствующие операторы обозначим через $L_{0, \Delta}$ и L_Δ. Тогда по доказанному выше

$$\overset{*}{L}_{0, \Delta} = L_\Delta. \tag{35}$$

С другой стороны, пространство $\mathfrak{H}_\Delta$ можно вложить в $\mathfrak{H}$, считая, что вне интервала Δ функция $y(x) \in \mathfrak{H}_\Delta$ равна нулю. Тем самым область определения $\mathfrak{D}_{0, \Delta}$ оператора $L_{0, \Delta}$ станет частью $\mathfrak{D}$, ибо при таком распространении функции $y \in \mathfrak{D}_{0, \Delta}$ за пределы интервала Δ непрерывность квазипроизводных $y^{[k]}$, $k = 0, 1, 2, \ldots$ $\ldots, 2n-1$, не нарушается. Более того, так распространенная функция y из $\mathfrak{D}_{0, \Delta}$ будет тогда принадлежать $\mathfrak{D}_0$. Поэтому, если $z \in \mathfrak{D}_0'^{*}$, то

$$\left(L_0'^{*} z, y\right) = \left(z, L_0' y\right) \tag{36}$$

для всех $y \in \mathfrak{D}_{0, \Delta}$. Но так как $y(x) = 0$ вне Δ, то скалярное произведение в (36) выражается в виде интегралов по интервалу Δ, т. е. является скалярным произведением в $\mathfrak{H}_\Delta$. Обозначая эти скалярные произведения индексом Δ, мы можем переписать (36) в виде

$$\left(\left(L_0'^{*} z\right)_\Delta, y\right)_\Delta = (z_\Delta, L_{0, \Delta} y)_\Delta. \tag{37}$$

При этом $\left(L_0'^{*} z\right)_\Delta$, z_Δ обозначают функции $L_0'^{*} z$ и z, рассматриваемые только в интервале Δ. Равенство (37) имеет место для всех $y \in \mathfrak{D}_{0, \Delta}$; следовательно,

$$z_\Delta \in \mathfrak{D}_{0\ \Delta}^{*} = \mathfrak{D}_\Delta$$

и

$$\left(L_0'^{*} z\right)_\Delta = L_\Delta z_\Delta = (l(z))_\Delta$$

Так как эти соотношения имеют место для любого интервала Δ, то мы заключаем, что

$$z \in \mathfrak{D}; \quad L_0'^{*} z = l(z) = Lz.$$

Тем самым доказано, что

$$L_0'^{*} \subset L.$$

Отсюда в силу V

$$L_0'^{**} \supset L^{*} = L_0,$$

т. е. (см. VII, n° 4 § 11)

$$\tilde{L}_0' \supset L_0.$$

Этим завершается доказательство предложения VII.

4. Оператор L_0 в сингулярном случае. В сингулярном случае непосредственное определение оператора L_0 при помощи граничных условий, аналогичных условиям (8), оказывается, вообще говоря, невозможным.

Мы поэтому определим теперь оператор L_0 другим путем, исходя из оператора L_0' (см. n° 2).

Прежде всего отметим следующие свойства оператора L_0':

III′. *Область определения $\mathfrak{D}_0'$ оператора L_0' плотна в $\mathfrak{H}$.* Очевидно, достаточно доказать, что всякий элемент $h(x) \in \mathfrak{H}$, ортогональный к $\mathfrak{D}_0'$, равен нулю. Пусть $h(x)$ — такой элемент и пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ — фиксированный замкнутый интервал, целиком содержащийся в интервале (a, b). Всякий элемент $y \in \mathfrak{D}_{0,\Delta}$ можно рассматривать как элемент из $\mathfrak{D}_0'$; следовательчо, h ортогонален к $\mathfrak{D}_{0,\Delta}$ (по поводу обозначений см. доказательство предложения VII n° 3). Но по доказанному в n° 3 (предложение III) $\mathfrak{D}_{0,\Delta}$ плотно в $\mathfrak{H}_\Delta$; следовательно, функция $h(x)$, рассматриваемая в интервале Δ, должна быть равна нулю почти всюду в Δ.

В силу произвольности интервала $\Delta \subset (a, b)$ отсюда следует, что $h(x) = 0$ почти всюду в (a, b).

Из доказанного предложения III′ и из предложения II′ (см. n° 2) вытекает, что L_0' — *симметрический оператор*.

Следовательно, он допускает замыкание.

Замыкание оператора L_0' обозначим через L_0, т. е.

$$\tilde{L}_0' = L_0.$$

Из этого определения заключаем, что L_0 — замкнутый *симметрический оператор*; в регулярном случае это определение оператора L_0 согласуется с прежним его определением в силу предложения VII n° 3.

Рассмотрим теперь некоторые свойства оператора L_0 и его связь с оператором L.

I. *Оператор L является сопряженным к оператору L_0*, т. е

$$L_0^* = L. \tag{38}$$

Так как $\tilde{L}_0' = L_0$, то $L_0'^* = L_0^*$; поэтому достаточно доказать, что

$$L_0'^* = L.$$

Но, как было показано, в n° 2 (см. (6))

$$L \subset L_0'^*,$$

поэтому остается доказать обратное включение

$$L \supset L_0'^*.$$

Доказательство этого последнего включения напоминает доказательство предложения VII n° 3.

Пусть z — произвольный элемент из области определения $\mathfrak{D}_0'^*$ оператора $L_0'^*$ и пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ — фиксированный конечный интервал, целиком содержащийся внутри интервала (a, b). Повторяя рассуждения, приведенные в доказательстве предложения VII n° 3, получим

$$\left(\left(L_0'^* z\right)_\Delta, y\right)_\Delta = \left(z_\Delta, L_{0,\Delta} y\right)_\Delta$$

для всех $y \in \mathfrak{D}_{0\,\Delta}$. Отсюда заключаем, что $z_\Delta \in \mathfrak{D}_\Delta$ и что

$$\left(L_0'^* z\right)_\Delta = L_\Delta z_\Delta = (l(z))_\Delta.$$

Ввиду произвольности интервала $\Delta \subset (a, b)$

$$z \in \mathfrak{D} \quad \text{и} \quad L_0'^* z = l(z) = Lz;$$

это означает, что

$$L_0'^* \supset L.$$

Из доказанного предложения I следует, что *оператор L замкнут*.

II. *Индекс дефекта оператора L_0 имеет вид* *) (m, m), где $0 \leqslant m \leqslant 2n$.

---

*) И М Глазман на примерах показал, что возможно любое значение m между 0 и $2n$ (см. Глазман [2]).

Пусть λ — произвольное число из верхней полуплоскости. Тогда первое дефектное число — обозначим его через m — есть число линейно независимых элементов z пространства $\mathfrak{H}$, удовлетворяющих уравнению $\overset{*}{L_0}z = \lambda z$, т. е. уравнению $Lz = \lambda z$. Другими словами, число m есть максимальное число линейно независимых решений уравнения $l(z) = \lambda z$, принадлежащих пространству $\mathfrak{H} = L^2(a, b)$. Но общее число всех вообще линейно независимых решений этого уравнения равно $2n$; некоторые из них могут оказаться не с интегрируемым квадратом в (a, b). Поэтому $m \leqslant 2n$.

Так как все коэффициенты $p_0, p_1, \ldots, p_n$ в дифференциальном выражении $l(y)$ по условию действительны, то каждому решению $z(x)$ уравнения $l(y) = \lambda y$ соответствует решение $\overline{z(x)}$ этого уравнения. Если при этом $z(x) \in L^2(a, b)$, то $\overline{z(x)} \in L^2(a, b)$, и обратно. Поэтому оба дефектных числа друг другу равны.

Объединяя все эти результаты, приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *Оператор L_0 есть замкнутый симметрический оператор с индексом дефекта вида (m, m), где $0 \leqslant m \leqslant 2n$. Оператор L является сопряженным к оператору L_0, т. е.*

$$\overset{*}{L_0} = L.$$

Выше мы определили оператор L_0 как замыкание оператора L_0'; дадим теперь другое более непосредственное определение оператора L_0. Для этого сперва сделаем следующее замечание:

III. *Для любых двух элементов $y, z \in \mathfrak{D}$ существуют* $[y, z]_a = \lim\limits_{x \to a} [y, z]$, $[y, z]_b = \lim\limits_{x \to b} [y, z]$.

Применим формулу Лагранжа к функциям y и z в интервале $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$:

$$\int_\alpha^\beta l(y)\bar{z}\,dx = [y, z]_\beta - [y, z]_\alpha + \int_\alpha^\beta y \cdot \overline{l(z)}\,dx. \tag{39}$$

Написанные здесь интегралы имеют предел при $\beta \to b$; поэтому из (39) вытекает, что существует также $\lim\limits_{\beta \to b} [y, z]_\beta$. Аналогично, существует $\lim\limits_{\alpha \to a} [y, z]_\alpha$. Переходя в (39) к пределу при $\alpha \to a$, $\beta \to b$, получим

$$\int_a^b l(y)\bar{z}\,dx = [y, z]_b - [y, z]_a + \int_a^b y\overline{l(z)}\,dx. \tag{40}$$

Формула (40) имеет место для любых двух функций $y, z \in \mathfrak{D}$.

IV. *Область определения $\mathfrak{D}_0$ оператора L_0 состоит из тех и только тех функций $y \in \mathfrak{D}$, которые удовлетворяют условию*

$$[y, z]_b - [y, z]_a = 0 \tag{41}$$

для всех функций $z \in \mathfrak{D}$.

Так как оператор L_0 замкнут, то в силу (38)

$$L_0 = L_0^{**} = L^*.$$

Поэтому $\mathfrak{D}_0$ состоит из тех и только тех функций $y \in \mathfrak{D}$, которые удовлетворяют соотношению

$$(y, Lz) = (Ly, z) \tag{42}$$

для всех функций $z \in \mathfrak{D}$. В силу формулы (40) это соотношение эквивалентно соотношению (41).

Предложение IV можно усилить следующим образом. Обозначим через $\mathfrak{N}_\lambda$ дефектное подпространство оператора L_0, соответствующее невещественному числу $\bar{\lambda}$. Очевидно, $\mathfrak{N}_\lambda$ есть совокупность всех решений уравнения $l(y) - \bar{\lambda} y = 0$, принадлежащих

$$\mathfrak{H} = L^2(a, b).$$

V. *Область определения $\mathfrak{D}_0$ оператора L_0 состоит из тех и только тех функций $y \in \mathfrak{D}$, которые при фиксированном невещественном λ удовлетворяют условию*

$$[y, \varphi]_b - [y, \varphi]_a = 0 \tag{43}$$

для всех функций $\varphi \in \mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$.

Так как $\mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}} \subset \mathfrak{D}$, то условие (43) необходимо. Обратно, пусть условие (43) выполнено; докажем, что тогда $y \in \mathfrak{D}_0$. В силу предложения IV достаточно доказать, что выполняется условие (41). Всякую функцию $z \in \mathfrak{D}$ можно представить в виде

$$z = y_1 + \varphi, \quad y_1 \in \mathfrak{D}_0, \quad \varphi \in \mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$$

(см. n° 4 § 14). Так как $y \in \mathfrak{D}$, $y_1 \in \mathfrak{D}_0$, то

$$[y, y_1]_b - [y, y_1]_a = 0$$

в силу предложения IV. Отсюда и из (43) непосредственно вытекает, что

$$[y, z]_b - [y, z]_a = 0.$$

5. Случай одного сингулярного конца. Если известно, что один из концов интервала (a, b) регулярен, а второй сингулярен, то результаты n° 4 можно усилить.

Будем для определенности считать, что конец a регулярен, а b сингулярен; противоположный случай рассматривается аналогично (его можно также свести к рассматриваемому случаю подстановкой $x_1 = -x$). Тогда имеет место следующее предложение:

VI. *Область определения* $\mathfrak{D}_0$ *оператора* L_0 *состоит из тех и только тех функций* $y \in \mathfrak{D}$, *которые удовлетворяют следующим условиям*:

1) $y^{[k]}|_{x=a} = 0, \ k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$,

2) $[y, z]_b = 0$ *для всех* $z \in \mathfrak{D}$.

Докажем необходимость этих условий. Пусть $y \in \mathfrak{D}_0$ и пусть z — функция из $\mathfrak{D}$, равная нулю вне конечного интервала $[a, \beta] \subset (a, b)$. В силу предложения IV n° 4

$$[y, z]_b - [y, z]_a = 0.$$

Так как $z(x) = 0$ вне интервала $[a, \beta]$, то $[y, z]_b = 0$; поэтому

$$[y, z]_a = 0 \tag{44}$$

для любой такой функции $z(x)$. Значения такой функции $z(x)$ и ее квазипроизводных $z^{[k]}(x)$, $k = 1, 2, \ldots, 2n-1$, при $x = a$ могут быть какими угодно (см. лемму 2 n° 3), поэтому равенство (44) возможно лишь тогда, когда

$$y^{[k]}|_{x=a} = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1.$$

Отсюда $[y, z]_a = 0$ для любой функции $y \in \mathfrak{D}$; условие (41) примет поэтому вид $[y, z]_b = 0$ для любой функции $z \in \mathfrak{D}$. Тем самым доказана необходимость условий 1) и 2). Обратно, если эти условия выполняются, то, очевидно, (41) имеет место; следовательно, $y \in \mathfrak{D}_0$.

В силу V n° 4 условие 2) в предложении VI можно ослабить, потребовав только, чтобы $[y, z]_b = 0$ для всех функций $z \in \mathfrak{N}_\lambda + \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$.

VII. *Индекс дефекта оператора* L_0 *с одним регулярным и вторым сингулярным концом имеет вид* (m, m), *где* $n \leqslant m \leqslant 2n$.

Рассуждая, как в доказательстве предложения II n° 4, заключаем, что нужно только доказать неравенство $n \leqslant m$. Для этого воспользуемся известным разложением в прямую сумму

$$\mathfrak{D} = \mathfrak{D}_0 \dotplus \mathfrak{N}_\lambda \dotplus \mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}. \tag{45}$$

В силу этого разложения максимальное число элементов из $\mathfrak{D}$, линейно независимых по модулю $\mathfrak{D}_0$, равно $2m$. Поэтому достаточно доказать, что в $\mathfrak{D}$ существует $2n$ элементов линейно независимых по модулю $\mathfrak{D}_0$, действительно, в таком случае это число $2n$ не превышает *максимального* числа элементов из $\mathfrak{D}$, линейно независимых по модулю $\mathfrak{D}_0$, т. е. $2n \leqslant 2m$. Но такими $2n$ элементами являются любые $2n$ функций $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям

$$\det\left(y_\mu^{[\nu-1]}(a)\right) \neq 0. \tag{46}$$

Действительно, если

$$c_1 y_1 + c_2 y_2 + \ldots + c_{2n} y_{2n} \in \mathfrak{D}_0,$$

то в силу условия 1) в предложении VI должно быть

$$c_1 y_1^{[k]}(a) + c_2 y_2^{[k]}(a) + \ldots + c_{2n} y_{2n}^{[k]}(a) = 0, \quad k = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1.$$

Эта система однородных уравнений относительно $c_1, c_2, \ldots, c_{2n}$ имеет только тривиальное решение $c_1 = c_2 = \ldots = c_{2n} = 0$, ибо ее определитель согласно (46) отличен от нуля.

Вычисление индекса дефекта оператора L_0 с двумя сингулярными концами можно свести к вычислению индекса дефекта в случае одного сингулярного конца. Действительно, пусть c — произвольное число из интервала (a, b); обозначим через L_0^- и L_0^+ операторы L_0, порожденные тем же дифференциальным выражением $l(y)$ в интервалах (a, c) и (c, b) соответственно. Очевидно, L_0^- и L_0^+ будут уже операторами с одним сингулярным концом $x = a$ и $x = b$ соответственно.

VIII. *Дефектное число*, $\operatorname{def} L_0$, *оператора* L_0 *определяется формулой*

$$\operatorname{def} L_0 = \operatorname{def} L_0^- + \operatorname{def} L_0^+ - 2n. \tag{47}$$

Доказательство. Сузим оператор L_0', налагая на функции $f \in \mathfrak{D}'$ дополнительные условия:

$$f^{[\nu]}(c) = 0, \qquad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1. \tag{48}$$

Полученный в результате оператор обозначим через A', а его замыкание через A.

Очевидно, при замыкании условия (48) сохраняются для всех функций $f \in \mathfrak{D}_A$, и потому в $\mathfrak{D}_{L_0}$ существуют в точности $2n$ линейно независимых функций, никакая комбинация которых, за исключением нулевой, не принадлежит $\mathfrak{D}_A$. Это означает, что

$$\dim_{\mathfrak{D}_A} \mathfrak{D}_{L_0} = 2n;$$

следовательно (см. n°n°6 — **8** § 14),

$$\operatorname{def} A = \operatorname{def} L_0 + 2n.$$

С другой стороны, оператор A есть прямая сумма операторов L_0^- и L_0^+, и потому

$$\operatorname{def} A = \operatorname{def} L_0^- + \operatorname{def} L_0^+.$$

Сравнение этого равенства с предыдущим приводит к формуле (47).

Замечание. В случае дифференциального оператора второго порядка $(n = 1)$ с одним регулярным и вторым нерегулярным концами доказанное предложение VII приводит к следующей *альтернативе Вейля индекс дефекта такого оператора равен* (1, 1) *или* (2, 2) Первый случай называется *случаем предельной точки*, второй — *случаем предельного круга*. Эта терминология связана с методом вложенных окружностей, при помощи которого Вейль пришел к своей альтернативе (подробно об этом см Левитан [2]).

Пытаясь обобщить эту альтернативу Вейля, В. Виндау [1] для $n=2$ и Д. Шин [1—4] для любого n ошибочно пришли к выводу, что индекс дефекта есть либо (n, n), либо $(2n, 2n)$. И. М. Глазман (см Глазман [2]), показал, что этот результат ошибочен и что в действительности в индексе дефекта (m, m) возможно любое значение m, заключенное между n и $2n$.

Затем в работе Орлова [1] был найден класс операторов с аналитическими коэффициентами, дефектные числа которых определяются как число корней некоторого эффективно выписываемого многочлена, а в работе Неймарк [1] показано, что этот результат Орлова остается справедливым для неаналитических коэффициентов, удовлетворяющих асимптотическим условиям при $x \to \infty$, обобщающим условия Орлова.

Индекс дефекта оператора L_0, порождаемого дифференциальным выражением $l(y)$ произвольного порядка с комплексными коэффициентами, изучался в работах Эверита [1, 2]. В работе Эверита [2] развита теория, аналогичная теории предельного круга и предельной точки Вейля, для самосопряженных дифференциальных выражений четвертого порядка.

§ 18. Самосопряженные расширения оператора L_0

1. Описание самосопряженных расширений оператора L_0. Задачей этого параграфа является изучение самосопряженных операторов H, являющихся *расширениями* дифференциального оператора L_0:

$$H \supset L_0. \tag{1}$$

Заметим, что применяя операцию $*$ к обеим частям (1), мы получим

$$H^* \subset L. \tag{2}$$

Поэтому самосопряженные расширения H оператора L полностью определяются заданием их области определения $\mathfrak{D}_H$, которая должна удовлетворять соотношениям

$$\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}_H \subset \mathfrak{D}. \tag{3}$$

Отметим одно свойство $\mathfrak{D}_H$, непосредственно следующее из определения самосопряженного оператора:

Теорема 1. *Линейное многообразие $\mathfrak{D}'$ в $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда является областью определения некоторого самосопряженного расширения оператора L_0, когда $\mathfrak{D}'$ удовлетворяет условиям*:

1) $\mathfrak{D}_0 \subset \mathfrak{D}' \subset \mathfrak{D}$;

2) *для любых двух функций $y, z \in \mathfrak{D}'$*

$$[y, z]_b - [y, z]_a = 0;$$

3) *всякая функция z из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющая условию*

$$[y, z]_b - [y, z]_a = 0,$$

для всех $y \in \mathfrak{D}'$ принадлежит $\mathfrak{D}'$.

Доказательство Очевидно, область определения всякого самосопряженного расширения оператора L_0 должна удовлетворять условию 1). Будем теперь считать это условие выполненным и обозначим через H сужение оператора L на $\mathfrak{D}'$. Пусть y и z — две функции из $\mathfrak{D}$. В силу (40) n° 4 § 17 равенство

$$[y, z]_b - [y, z]_a = 0$$

эквивалентно равенству

$$(Ly, z) = (y, Lz).$$

Поэтому условие 2) означает, что оператор H симметрический. Далее, условие 3) означает: если для всех $y \in \mathfrak{D}'$

$$(Ly, z) = (y, Lz),$$

т. е.

$$(Hy, z) = (y, Lz),$$

то $z \in \mathfrak{D}'$, следовательно, $Lz = Hz$. Но это как раз и означает, что оператор H самосопряженный. Тем самым теорема 1 доказана.

Для описания всех множеств $\mathfrak{D}_H$ воспользуемся результатами теории расширений симметрических операторов (см. § 14).

Пусть $\mathfrak{N}_\lambda$ обозначает дефектное подпространство оператора L_0, соответствующее $\bar{\lambda}$, и пусть

$$\varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots,\ \varphi_m(x)$$

— ортонормальный базис в $\mathfrak{N}_\lambda$. Тогда функции

$$-\overline{\varphi_1(x)},\ -\overline{\varphi_2(x)},\ \ldots,\ -\overline{\varphi_m(x)}$$

образуют ортонормальный базис в $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. Применяя общую теорию расширений симметрических операторов (см. n° 8 § 14, формула (21)), приходим к следующей теореме:

Теорема 2. *Всякое самосопряженное расширение H оператора L_0 с индексом дефекта (m, m) определяется следующим образом при помощи некоторой унитарной матрицы $u = (u_{\mu\nu})$ m-го порядка:*

Область определения $\mathfrak{D}_H$ есть совокупность всех функций $z(x)$ вида

$$z(x) = y(x) + \psi(x), \tag{4}$$

где $y(x) \in \mathfrak{D}_0$, а $\psi(x)$ — линейная комбинация функций

$$\psi_\mu(x) = \varphi_\mu(x) + \sum_{\nu=1}^{m} u_{\nu\mu}\overline{\varphi_\nu(x)}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m. \tag{5}$$

Обратно, всякая такая матрица $u=(u_{\mu\nu})$ определяет описанным выше способом некоторое самосопряженное расширение H оператора L_0. Установленное таким образом соответствие между H и u взаимно однозначно.

Расширение H, соответствующее унитарной матрице u, мы будем в дальнейшем обозначать через L_u.

Следующая теорема характеризует область определения оператора L_u при помощи граничных условий.

Теорема 3. *Область определения $\mathfrak{D}_{L_u}$ оператора L_u есть совокупность всех функций $y \in \mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям*

$$[y, \psi_\mu]_b - [y, \psi_\mu]_a = 0, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m, \tag{6}$$

где

$$\psi_\mu(x) = \varphi_\mu(x) + \sum_{\nu=1}^{m} u_{\nu\mu}\overline{\varphi_\nu(x)}, \qquad \mu = 1, 2, \ldots, m.$$

Доказательство. Пусть $y \in \mathfrak{D}_{L_u}$; так как также $\psi_\mu \in \mathfrak{D}_{L_u}$, то

$$(L_u y, \psi_\mu) = (y, L_u\psi_\mu),$$

т. е.

$$(Ly, \psi_\mu) = (y, L\psi_\mu).$$

Отсюда и из формулы (40) n° 4 § 17 при $z=\psi_\mu$ следует соотношение (6).

Обратно, пусть функция $z(x)$ из $\mathfrak{D}$ удовлетворяет условию (6); тогда

$$[y, z]_b - [y, z]_a = 0 \tag{7}$$

для любой функции $y \in \mathfrak{D}_{L_u}$. Действительно, всякая такая функция y имеет вид

$$y = y_0 + \sum_{\nu=1}^{m} c_\nu\psi_\nu, \qquad y_0 \in \mathfrak{D}_0.$$

В силу IV n° 4 § 17

$$[y, y_0]_b - [y, y_0]_a = 0;$$

поэтому соотношение (7) непосредственно следует из условий (6). Из соотношения (7) и теоремы 1 вытекает, что $z \in \mathfrak{D}_{L_u}$, и теорема 3 доказана.

Теореме 3 можно придать еще следующую форму, иногда более удобную для приложений:

Теорема 4. *Область определения $\mathfrak{D}_{L_u}$ всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 с индексом дефекта (m, m) есть совокупность всех функций $y(x)$ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям*

$$[y, w_k]_b - [y, w_k]_a = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, m, \tag{8}$$

где $w_1, w_2, \ldots, w_m$ — некоторые функции из $\mathfrak{D}$, линейно независимые по модулю $\mathfrak{D}_0$, такие, что

$$[w_j, w_k]_b - [w_j, w_k]_a = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, m. \tag{9}$$

Обратно, каковы бы ни были функции $w_1, w_2, \ldots, w_m$ из $\mathfrak{D}$, линейно независимые по модулю $\mathfrak{D}_0$ и удовлетворяющие соотношениям (9), *совокупность всех функций $y(x)$ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям* (8), *есть область определения некоторого самосопряженного расширения оператора L_0.*

Доказательство. Область определения $\mathfrak{D}_{L_u}$ оператора L_u состоит из линейных комбинаций элементов $y \in \mathfrak{D}_0$ и ψ_k, $k = 1, 2, \ldots, m$ (см. теорему 2). Следовательчо, размерность $\mathfrak{D}_{L_u}$ по модулю $\mathfrak{D}_0$ равна m. Это означает, что в $\mathfrak{D}_{L_u}$ существуют m элементов $w_1, w_2, \ldots, w_m$, линейно независимых относительно $\mathfrak{D}_0$ (этими элементами могут, в частности, быть $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_m$).

Повторяя рассуждения, проведенные при доказательстве теоремы 3, приходим к выводу, что $\mathfrak{D}_{L_u}$ состоит из всех функций y из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих краевым условиям

$$[y, w_j]_b - [y, w_j]_a = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{10}$$

Так как сами функции w_k принадлежат $\mathfrak{D}_{L_u}$, то и они удовлетворяют условиям (10), т. е.

$$[w_k, w_j]_b - [w_k, w_j]_a = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, m. \tag{11}$$

Пусть, обратно, в $\mathfrak{D}$ выбраны какие угодно функции $w_1, w_2, \ldots, w_m$, удовлетворяющие условиям (11); докажем, что тогда *краевые условия* (10) *определяют некоторое самосопряженное расширение L_u оператора L.*

Отметим прежде всего, что условия (10) линейно независимы. Действительно, пусть имеет место соотношение

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k ([y, w_k]_b - [y, w_k]_a) = 0$$

для всех $y \in \mathfrak{D}$. Полагая $z = \sum_{k=1}^{m} \alpha_k w_k$, мы сможем переписать это соотношение в виде

$$[y, z]_b - [y, z]_a = 0.$$

В силу предложения IV n° 4 § 17 отсюда следует, что элемент $z = \sum_{k=1}^{n} \alpha_k w_k$ принадлежит $\mathfrak{D}_0$; так как элементы $w_1, w_2, \ldots, w_m$ линейно независимы по модулю $\mathfrak{D}_0$, это возможно лишь тогда, когда $\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_m = 0$.

Обозначим через $\tilde{\mathfrak{D}}$ совокупность всех функций $y(x)$ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям (10). Размерность $\tilde{\mathfrak{D}}$ по модулю $\mathfrak{D}_0$ равна m, ибо $\tilde{\mathfrak{D}}$ выделяется из $\mathfrak{D}$ путем наложения m линейно независимых условий.

Обозначим, далее, через $\mathfrak{D}'$ совокупность всех функций $y(x)$ вида

$$y = y_0 + \sum_{j=1}^{m} c_j w_j, \tag{12}$$

где c_j — произвольные постоянные, а $y_0 \in \mathfrak{D}_0$.

Докажем, что

$$\mathfrak{D}' = \tilde{\mathfrak{D}}. \tag{13}$$

В силу (11) и предложения IV n° 4 § 17 всякая функция из $\mathfrak{D}'$ удовлетворяет условиям (10); следовательно,

$$\mathfrak{D}' \subset \tilde{\mathfrak{D}}. \tag{14}$$

С другой стороны, размерность $\mathfrak{D}'$ по модулю $\mathfrak{D}_0$, очевидно, равна m; так как $\tilde{\mathfrak{D}}$, по доказанному выше, имеет ту же размерность по модулю $\mathfrak{D}_0$, то включение (14) возможно лишь тогда, когда

$$\mathfrak{D}' = \mathfrak{D}.$$

Докажем теперь, что $\mathfrak{D}'$ удовлетворяет всем условиям теоремы 1. Очевидно, условие 1) выполнено. Далее, в силу (11) и предложения IV n° 4 § 17 всякие две функции $y, z \in \mathfrak{D}'$ удовлетворяют соотношению

$$[y, z]_b - [y, z]_a = 0. \tag{15}$$

Следовательно, условие 2) также выполнено. Наконец, из соотношения (13) вытекает, что всякая функция z из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющая условию (15) для всех $y \in \mathfrak{D}'$, также принадлежит $\mathfrak{D}'$; действительно, $z(x)$, в частности, удовлетворяет условию (15) при $y = w_j$, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, следовательно, $z(x) \in \tilde{\mathfrak{D}} = \mathfrak{D}'$, так что условие 3) также выполнено. На основании теоремы 1 отсюда заключаем, что $\tilde{\mathfrak{D}}$ есть область определения некоторого самосопряженного расширения оператора L_0, и теорема доказана.

Условия (6), а также условия (8) можно рассматривать как краевые условия для определения оператора L_u. Вообще говоря, эти условия зависят от многообразия $\mathfrak{D}$, из которого выбираются функции ψ_ν (соответственно w_ν), следовательно, зависят от дифференциального выражения $l(y)$. Однако в некоторых частных случаях краевые условия можно задавать независимо от выражения $l(y)$; отметим эти частные случаи.

2. Краевые условия в случае регулярного дифференциального оператора. В этом пункте мы будем предполагать, что дифференциальное выражение $l(y)$ порядка $2n$ регулярно в интервале $[a, b]$. Тогда L_0 — симметрический оператор с индексом дефекта $(2n, 2n)$ (см. n° 3 § 17). Его самосопряженные расширения можно описать следующим образом:

Теорема 5. *Всякое самосопряженное расширение L_u оператора L_0 определяется линейно независимыми краевыми условиями вида*

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{j,k} y^{[k-1]}(a) + \sum_{k=1}^{2n} \beta_{j,k} y^{[k-1]}(b) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{16}$$

причем

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{j,\nu} \bar{\alpha}_{k,2n-\nu+1} - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{j,2n-\nu+1} \bar{\alpha}_{k,\nu} = \\ = \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{j,\nu} \bar{\beta}_{k,2n-\nu+1} - \sum_{\nu=1}^{n} \beta_{j,2n-\nu+1} \bar{\beta}_{k,\nu}. \tag{17}$$

Обратно, всякие линейно независимые краевые условия вида (16), *удовлетворяющие соотношениям* (17), *определяют некоторое самосопряженное расширение L_u оператора L_0.*

Доказательство. Применим к оператору L_0 теорему 4 n° 1. В данном случае $m = 2n$. Пусть область определения $\mathfrak{D}_{L_u}$ самосопряженного расширения L_u оператора L_0 задается согласно теореме 4 элементами $w_1, w_2, \ldots, w_{2n}$. Положим

$$\left.\begin{aligned} &\alpha_{j,k} = \bar{w}_j^{[2n-k]}(a), && \alpha_{j,n+k} = -\bar{w}_j^{[n-k]}(a), \\ &\beta_{j,k} = -\bar{w}_j^{[2n-k]}(b), && \beta_{j,n+k} = \bar{w}_j^{[n-k]}(b), \\ &j = 1, 2, \ldots, n; && k = 1, 2, \ldots, n. \end{aligned}\right\} \tag{18}$$

Тогда условия (8) и соотношения (9) перепишутся соответственно в виде (16) и (17); при этом из линейной независимости элементов $w_1, w_2, \ldots, w_{2n}$ следует линейная независимость условий (16) и обратно (см. по этому поводу доказательство теоремы 4 n° 1 стр. 210).

Обратно, пусть заданы линейно независимые краевые условия (16), удовлетворяющие соотношениям (17). Согласно лемме 2 n° 3 § 17 в $\mathfrak{D}$ существуют элементы $w_1, w_2, \ldots, w_{2n}$, удовлетворяющие условиям (18); но тогда (16) и (17) запишутся соответственно в виде (8) и (9). Следовательно, условия (16) выделяют область определения некоторого самосопряженного расширения оператора L_0.

3. Случай оператора с индексом дефекта (n, n) и с одним сингулярным концом. В этом случае краевые условия также можно записать в форме, не зависящей от дифференциального выражения.

Прежде всего докажем следующую лемму.

Лемма. *Если L_0 — оператор индекса дефекта (n, n) с одним сингулярным концом b и вторым регулярным концом a, то для любых элементов $y, z \in \mathfrak{D}$*

$$[y, z]_b = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $\Delta = [a, \beta]$ — произвольный конечный интервал, содержащийся в интервале $[a, b)$. Тогда выражение $l(y)$ регулярно в интервале Δ. Выберем в $\mathfrak{D}_\Delta$ функции $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ так, чтобы

$$z_\nu^{[k-1]}\Big|_{x=a} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \nu = k, \\ 0 & \text{при} \quad \nu \neq k, \end{cases} \tag{20}$$

$$z_\nu^{[k-1]}\Big|_{x=\beta} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{21}$$

В силу леммы 2 n° 3 § 17 такие функции z_ν существуют. Продолжим их за пределы интервала $[a, \beta]$, считая их равными нулю при $\beta < x < b$.

В частности,

$$z_\nu^{[k-1]}\Big|_{x=b} = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{22}$$

Тогда функции z_ν станут элементами многообразия $\mathfrak{D}$. По условию индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n); следовательно, размерность $\mathfrak{D}$ по модулю $\mathfrak{D}_0$ равна $2n$. С другой стороны, из (20) легко заключить, что функции $z_1, z_2, \ldots, z_{2n}$ линейно независимы по модулю $\mathfrak{D}_0$. Поэтому всякую функцию y из $\mathfrak{D}$ можно представить в виде

$$y = y_0 + \sum_{\nu=1}^{2n} \alpha_\nu z_\nu, \tag{23}$$

где $y_0 \in \mathfrak{D}_0$, а α_ν — постоянные. Но в силу IV n° 4 § 17

$$[y_0, z]_b = 0$$

и, кроме того, в силу (22) также

$$[z_\nu, z]_b = 0, \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Отсюда и из (23) непосредственно следует соотношение (19).

Согласно этой лемме выражения $[y, \psi_\mu]_b$, $[y, \omega_k]_b$, $[\omega_j, \omega_k]_b$ в формулировках теорем 3 и 4 n° 1 будут равны нулю. Поэтому в рассматриваемом случае теоремы 3 и 4 формулируются следующим образом.

Теорема 3′. *Область определения $\mathfrak{D}_{L_u}$ оператора L_u есть совокупность всех функций $y \in \mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям*

$$[y, \psi_\mu]_a = 0, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n, \tag{24}$$

где

$$\psi_\mu(x) = \varphi_\mu(x) + \sum_{\nu=1}^{n} u_{\nu\mu}\overline{\varphi_\nu(x)}, \quad \mu = 1, 2, \ldots, n. \tag{25}$$

Теорема 4′. *Область определения $\mathfrak{D}_{L_u}$ всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 есть совокупность всех функций $y(x)$ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям*

$$[y, w_k]_a = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{26}$$

где $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — некоторые функции из $\mathfrak{D}$, линейно независимые по модулю $\mathfrak{D}_0$ и такие, что

$$[w_j, w_k]_a = 0, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{27}$$

Обратно, каковы бы ни были функции $w_1, w_2, \ldots, w_n$ из $\mathfrak{D}$, линейно независимые по модулю $\mathfrak{D}_0$ и удовлетворяющие соотношениям (27), *совокупность всех функций $y(x)$ из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющих условиям* (26), *есть область определения некоторого самосопряженного расширения оператора L_0.*

Таким образом, в рассматриваемом случае $\mathfrak{D}_{L_u}$ выделяется при помощи краевых условий (24) или (26) только в точке a. Далее, имеет место теорема, аналогичная теореме 5.

Теорема 5′. *Всякое самосопряженное расширение L_u оператора L_0 определяется линейно независимыми краевыми условиями вида*

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{j,k} y^{[k-1]}(a) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{28}$$

причем

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{j,\nu}\bar{\alpha}_{k,2n-\nu+1} - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{j,2n-\nu+1}\bar{\alpha}_{k,\nu} = 0, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{29}$$

Обратно, всякие линейно независимые условия вида (28), *удовлетворяющие условиям* (29), *определяют некоторое самосопряженное расширение оператора L_0.*

Доказательство этой последней теоремы аналогично доказательству теоремы 5 n° 2 и основано на теореме 4′. Пусть некоторое самосопряженное расширение определяется (согласно теореме 4′) элементами $w_1, w_2, \ldots, w_n$. Полагая

$$\alpha_{j,k} = \bar{w}_j^{[2n-k]}(a), \quad \alpha_{j,n+k} = -\bar{w}_j^{[n-k]}(a), \quad j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{30}$$

мы запишем краевые условия (26) в виде (28), а соотношения (27) — в виде (29). Обратно, краевые условия (28) и соотношения (29) можно записать в виде (26) и соответственно (27), взяв в качестве функций $w_1, w_2, \ldots, w_n$ любые функции из $\mathfrak{D}$, удовлетворяющие условиям (30). Такие функции существуют в силу леммы 2 n° 3 § 17. Действительно, достаточно применить эту лемму к какому-нибудь интервалу $[\alpha, \beta] \subset [a, b]$, наложив на функции w_ν дополнительные требования

$$w_\nu^{[k-1]}\Big|_{x=\beta} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

и считая функции w_ν тождественно равными нулю при $\beta \leqslant x < b$.

4. Вещественные расширения. Линейный оператор в $L^2(a, b)$ называется *вещественным*, если:

1°. Область определения $\mathfrak{D}_A$ оператора A вместе с каждой функцией $f(x)$ содержит комплексно сопряженную функцию $\overline{f(x)}$.

2°. Оператор A переводит комплексно сопряженные друг к другу функции в комплексно сопряженные друг к другу функции, другими словами, если $Af(x) = g(x)$, то $A\overline{f(x)} = \overline{g(x)}$.

Для дальнейшего является весьма существенным то обстоятельство, что среди самосопряженных расширений оператора L_0 имеются вещественные операторы. Следующая теорема дает описание всех таких вещественных самосопряженных расширений оператора L_0.

Теорема 6. *Самосопряженное расширение L_u оператора L_0 является вещественным тогда и только тогда, когда соответствующая унитарная матрица u симметрична*, т. е.

$$u_{jk} = u_{kj}. \tag{31}$$

Доказательство. Отметим прежде всего, что в данном случае нужно фактически заботиться только о соблюдении условия 1°. Действительно, ввиду вещественности коэффициентов $p_0, p_1, \ldots, p_n$ оператор L, очевидно, является вещественным оператором. Поэтому условие 2° следует из условия 1° в силу соотношения $L_u \subset L$. Теперь легко найти условие вещественности данного самосопряженного расширения L_u оператора L_0. Согласно теореме 2 n° 1 $\mathfrak{D}_{L_u}$ состоит из всех элементов вида

$$f = y + \sum_{\mu=1}^{m} \alpha_\mu \left[\varphi_\mu(x) + \sum_{\nu=1}^{m} u_{\nu\mu}\overline{\varphi_\nu(x)}\right], \tag{32}$$

где $y \in \mathfrak{D}_0$, а α_μ — произвольные постоянные.

Расширение L_u вещественно тогда и только тогда, когда $\mathfrak{D}_{L_u}$ будет содержать также все функции

$$\bar{f} = \bar{y} + \sum_{\nu=1}^{m} \bar{\alpha}_\nu \left[\overline{\varphi_\nu(x)} + \sum_{\mu=1}^{m} \bar{u}_{\mu\nu}\varphi_\mu(x)\right], \tag{33}$$

т. е. когда эти функции $\bar{f}$ можно записать в виде (32). Но если

$$\bar{f} = \hat{y} + \sum_{\mu=1}^{m} \hat{\alpha}_\mu \left[\varphi_\mu(x) + \sum_{\nu=1}^{m} u_{\nu\mu}\overline{\varphi_\nu(x)}\right] \tag{34}$$

— такая запись элемента $\bar{f}$, то из сравнения (33) и (34) вытекает, что

$$\hat{y} = \bar{y}, \tag{35}$$

$$\bar{\alpha}_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} u_{\nu\mu}\hat{\alpha}_\mu, \tag{36}$$

$$\hat{\alpha}_\mu = \sum_{\nu=1}^{m} \bar{u}_{\mu\nu}\bar{\alpha}_\nu. \tag{37}$$

Действительно, вычитая почленно (33) и (34), получим

$$[\bar{y} - \hat{y}] + \left[\sum_{\nu=1}^{m}\left(\bar{\alpha}_\nu - \sum_{\mu=1}^{m} u_{\nu\mu}\hat{\alpha}_\mu\right)\bar{\varphi}_\nu\right] - \left[\sum_{\mu=1}^{m}\left(\hat{\alpha}_\mu - \sum_{\nu=1}^{m}\bar{u}_{\mu\nu}\bar{\alpha}_\nu\right)\varphi_\mu\right] = 0.$$

Выражения, заключенные в квадратные скобки, принадлежат соответственно $\mathfrak{D}_0$, $\mathfrak{N}_\lambda$ и $\mathfrak{N}_{\bar{\lambda}}$. Так как эти многообразия линейно независимы, то каждое из этих выражений равно нулю; отсюда, учитывая независимость элементов $\bar{\varphi}_\nu$ и φ_ν, получим соотношения (35), (36) и (37). Но матрица u унитарна ($u^*u = uu^* = I$); поэтому из (37) заключаем, что

$$\bar{\alpha}_\nu = \sum_{\mu=1}^{m} u_{\mu\nu}\hat{\alpha}_\mu,$$

и сравнение этого равенства с (36) дает (ввиду произвольности коэффициентов $\hat{\alpha}_\mu$)

$$u_{\nu\mu} = u_{\mu\nu}.$$

Очевидно, все эти рассуждения можно обратить, так что условие (31) не только необходимо, но и достаточно для вещественности расширения L_u.

§ 19. Резольвенты самосопряженных расширений оператора L_0

Перейдем теперь к изучению резольвент самосопряженных расширений оператора L_0; оказывается, что эти резольвенты являются интегральными операторами. Задачей настоящего параграфа будет доказательство этого факта, а также установление связи между классом ядра такого оператора и индексом дефекта оператора L_0.

1. Некоторые леммы. Обозначим через $\mathfrak{H}'$ совокупность всех функций $f(x)$ с суммируемым квадратом в некотором конечном интервале $\Delta=[\alpha, \beta]\subset(a, b)$ (который может быть различным для различных функций $f(x)$) и равных нулю вне Δ. Отметим, что пространство $\mathfrak{H}_\Delta$ при фиксированном Δ можно рассматривать как часть $\mathfrak{H}'$:

$$\mathfrak{H}_\Delta\subset\mathfrak{H}',$$

если функцию $f(x)\in\mathfrak{H}_\Delta$ считать равной нулю вне Δ. В дальнейшем нам понадобятся следующие леммы:

Лемма 1. *Резольвента R_λ всякого вещественного самосопряженного оператора H удовлетворяет соотношению*

$$R_\lambda\bar{g}=\overline{\overset{*}{R_\lambda} g}. \qquad (1)$$

Доказательство. В силу вещественности оператора H из $f\in\mathfrak{D}_H$ следует, что также $\bar{f}\in\mathfrak{D}_H$ и

$$(H-\lambda I)\bar{f}=H\bar{f}-\lambda\bar{f}=\overline{Hf}-\lambda\bar{f}=\overline{(H-\bar{\lambda}I)f}.$$

Полагая здесь $f=R_{\bar{\lambda}}g$, получим

$$(H-\lambda I)\overline{R_{\bar{\lambda}}g}=\bar{g},$$

следовательно,

$$\overline{R_{\bar{\lambda}}g}=R_\lambda\bar{g}.$$

Так как $R_{\bar{\lambda}}=\overset{*}{R_\lambda}$, то отсюда

$$R_\lambda\bar{g}=\overline{R_{\bar{\lambda}}g}=\overline{\overset{*}{R_\lambda}g}.$$

Лемма 2. *Пусть резольвента R_λ некоторого вещественного самосопряженного оператора H для всех функций $g\in\mathfrak{H}'$ определяется формулой*

$$R_\lambda g=\int_a^b K(x, s, \lambda)\,g(s)\,ds, \qquad (2)$$

где ядро $K(x, s, \lambda)$ непрерывно при

$$a<x,\ s<b,\quad x\neq s.$$

Тогда

$$K(t, s, \lambda)=K(s, t, \lambda). \qquad (3)$$

Доказательство. Пользуясь соотношением (1), заключаем, что для любых $g,\ h\in\mathfrak{H}'$

$$(\overline{R_\lambda\bar{g}}, h)=(\overset{*}{R_\lambda}g, h)=(g, R_\lambda h)$$

или в силу (2)

$$\int_a^b \int_a^b \overline{K(x, s, \lambda)}\, g(s)\, \overline{h(x)}\, dx\, ds = \int_a^b \int_a^b g(s)\, \overline{K(s, x, \lambda)}\, \overline{h(x)}\, dx\, ds.$$

Ввиду произвольности функций g, $h \in \mathfrak{H}'$ отсюда непосредственно следует соотношение (3).

Лемма 3. *Функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно независимы тогда и только тогда, когда при некотором выборе чисел x_1, x_2, ..., x_n*

$$\det(y_j(x_k))_{j,\, k=1,\, \ldots,\, n} \neq 0. \tag{4}$$

Доказательство. Докажем сначала достаточность этого условия. Из тождества

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) = 0$$

мы заключаем, что, в частности,

$$\begin{gathered} c_1 y_1(x_1) + c_2 y_2(x_1) + \ldots + c_n y_n(x_1) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ c_1 y_1(x_n) + c_2 y_2(x_n) + \ldots + c_n y_n(x_n) = 0. \end{gathered}$$

В силу условия (4) эта система однородных уравнений имеет только тривиальное решение $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$; следовательно, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно независимы. Очевидно, для доказательства необходимости условия (4) достаточно установить, что если при *любом выборе чисел* x_1, x_2, ..., x_n

$$\det(y_j(x_k))_{j,\, k=1,\, \ldots,\, n} = 0, \tag{5}$$

то функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависимы.

Докажем это последнее утверждение по индукции. Для одной функции оно очевидно. Пусть оно уже установлено для $n-1$ функций; требуется его доказать для n функций. Если при любом выборе чисел x_2, ..., x_n

$$\det(y_j(x_k))_{j,\, k=2,\, \ldots,\, n} = 0,$$

то в силу индуктивного предположения функции $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$, а потому и функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависимы. Если же при некотором выборе чисел x_2, x_3, ..., x_n, например при $x_2 = x_2^0$, $x_3 = x_3^0$, ..., $x_n = x_n^0$,

$$\det(y_j(x_k^0))_{j,\, k=2,\, 3,\, \ldots,\, n} \neq 0,$$

то, полагая в (5) $x_1 = x$, $x_2 = x_2^0$, ..., $x_n = x_n^0$ и разлагая определитель по элементам первой строки, получим

$$c_1 y_1(x) + c_2 y_2(x) + \ldots + c_n y_n(x) \equiv 0,$$

где $c_1, c_2, \ldots, c_n$ — постоянные и

$$c_n = \det\left(y_j\left(x_k^0\right)\right)_{j,\, k=2,\, \ldots,\, n} \neq 0.$$

Следовательно, функции $y_1(x)$, $y_2(x)$, ..., $y_n(x)$ линейно зависимы.

2. Случай оператора с регулярным концом. Перейдем теперь к непосредственному изучению резольвент самосопряженных расширений оператора L_0. При этом мы рассмотрим сначала тот более простой случай, когда хотя бы один из концов интервала (a, b) регулярен (а второй регулярен или сингулярен). Очевидно, не нарушая общности, можно считать, что конец a регулярен. Это условие мы будем считать выполненным на протяжении всего этого пункта и не будем его уже оговаривать.

Теорема 1. *Резольвента R_λ любого самосопряженного расширения оператора L_0 есть интегральный оператор, ядро $K(x, s, \lambda)$ которого удовлетворяет условиям*

$$\int_a^b |K(x, s, \lambda)|^2 ds < \infty, \quad \int_a^b |K(x, s, \lambda)|^2 dx < \infty. \tag{6}$$

В случае оператора L_0 с индексом дефекта $(2n, 2n)$ ядро $K(x, s, \lambda)$ является ядром Гильберта — Шмидта, т. е.

$$\int_a^b \int_a^b |K(x, s, \lambda)|^2 dx\, ds < \infty. \tag{7}$$

Доказательство. Докажем сначала утверждение теоремы для резольвенты R_λ^0 какого-нибудь вещественного самосопряженного расширения L_u^0 оператора L_0. Пусть $\Delta = [\alpha, \beta]$ — фиксированный конечный интервал $\subset [a, b)$. Положим для $f \in \mathfrak{H}_\Delta$

$$y = R_\lambda^0 f;$$

тогда y есть решение уравнения

$$l(y) - \lambda y = f.$$

Следовательно (см. формулу (24) n° 4 § 16), y имеет вид

$$y(x)=\sum_{k=1}^{2n}\alpha_k y_k(x)+\sum_{k=1}^{2n} y_k(x)\int_a^x v_k(\xi)f(\xi)\,d\xi \tag{8}$$

(мы здесь положили $x_0=a$).

Пусть (m, m) — индекс дефекта оператора L_0. Выберем фундаментальную систему решений $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ уравнения

$$l(y)-\lambda y=0$$

так, чтобы функции $y_1, y_2, \ldots, y_m$ принадлежали $\mathfrak{H}=L^2(a, b)$ (т. е. были с суммируемым квадратом в интервале (a, b)), а остальные функции $y_{m+1}, \ldots, y_{2n}$ вместе со всеми их ненулевыми линейными комбинациями не принадлежали $L^2(a, b)$. При $x>\beta$ интеграл в правой части формулы (8) будет постоянным и равным

$$\int_a^\beta v_k(\xi)f(\xi)\,d\xi;$$

следовательно, при $x>\beta$

$$y(x)=\sum_{k=1}^{2n}\left[\alpha_k+\int_a^\beta v_k(\xi)f(\xi)\,d\xi\right]y_k(x).$$

Так как функция $y(x)$ должна принадлежать $L^2(a, b)$, то функции $y_{m+1}(x), \ldots, y_{2n}(x)$ не должны участвовать в этой последней линейной комбинации, т. е. должно быть

$$\alpha_k=-\int_a^\beta v_k(\xi)f(\xi)\,d\xi \quad \text{при} \quad k=m+1, \quad m+2, \ldots, 2n. \tag{9}$$

Подставляя это выражение в (8), получим

$$R_\lambda^0 f=y(x)=-\sum_{k=m+1}^{2n} y_k(x)\int_x^\beta v_k(\xi)f(\xi)\,d\xi+\sum_{k=1}^{m}\alpha_k y_k(x)+ \\ +\sum_{k=1}^{m} y_k(x)\int_a^x v_k(\xi)f(\xi)\,d\xi. \tag{10}$$

Определим теперь постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Пусть $w_1, w_2, \ldots, w_m$ — элементы многообразия $\mathfrak{D}$, определяющие (см. теорему 4 n° 1 § 18) рассматриваемое расширение L_u^0.

Так как $y \in \mathfrak{D}_{L_u^0}$, то должно быть

$$[y, w_j]_a^b = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m. \tag{11}$$

Выпишем подробней это условие; согласно самому способу решения уравнения $l(y) - \lambda y = f$ по методу вариации произвольных постоянных (см. (20) n° 4 § 16)

$$y^{[\nu]}(x) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k y_k^{[\nu]}(x) + \sum_{k=1}^{2n} y_k^{[\nu]}(x) \int_a^x v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi,$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1;$$

следовательно,

$$[y, w_j] = \sum_{k=1}^{2n} \left[\alpha_k + \int_a^x v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi\right] [y_k, w_j],$$

$$[y, w_j]_b = \sum_{k=1}^{2n} \left[\alpha_k + \int_a^b v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi\right] [y_k, w_j]_b,$$

$$[y, w_j]_a = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k [y_k, w_j]_a.$$

Подставляя эти выражения в условия (11) и учитывая формулы (9), получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha_k [y_k, w_j]_a^b = -\sum_{k=1}^{m} [y_k, w_j]_b \int_a^b v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi -$$

$$-\sum_{k=m+1}^{2n} [y_k, w_j]_a \int_a^b v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi, \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{12}$$

относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$. Определитель этой системы отличен от нуля. Действительно, в противном случае однородная система

$$\sum_{k=1}^{m} c_k [y_k, w_j]_a^b = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m,$$

имеет нетривиальное решение относительно $c_1, c_2, \ldots, c_m$. Но тогда функция $\tilde{y} = \sum_{k=1}^{m} c_k y_k$ удовлетворяет условиям

$$[\tilde{y}, w_j] = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, m,$$

следовательно, принадлежит $\mathfrak{D}_{L_u^0}$. Последнее невозможно при $\tilde{y} \neq 0$, ибо $\tilde{y} \in \mathfrak{N}_\lambda$, а это последнее подпространство и $\mathfrak{D}_{L_u^0}$ линейно независимы (см. п° 4 § 14).

Решая систему (12), получим

$$\alpha_k = \int_a^b f(\xi)\, h_k(\xi)\, d\xi, \qquad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

где $h_k(\xi)$ — решение системы

$$\sum_{k=1}^{m} h_k [y_k,\ w_j]_a^b = - \sum_{k=1}^{m} [y_k,\ w_j]_b\, v_k(\xi) - \sum_{k=m+1}^{2n} [y_k,\ w_j]_a\, v_k(\xi). \tag{13}$$

Так как, по доказанному выше, определитель этой последней системы отличен от нуля, а функции $v_k(\xi)$ непрерывны в интервале $[a,\ b)$, то и функции $h_k(\xi)$ непрерывны в этом интервале. Подставляя в формулу (10) вместо α_k, $k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m$, их выражения, получим

$$R_\lambda^0 f = y = \sum_{k=1}^{m} y_k(x) \int_a^x [v_k(\xi) + h_k(\xi)]\, f(\xi)\, d\xi + \\ + \sum_{k=1}^{m} y_k(x) \int_x^b h_k(\xi)\, f(\xi)\, d\xi - \sum_{k=m+1}^{2n} y_k(x) \int_x^b v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{14}$$

Положим теперь

$$K_0(x,\ \xi,\ \lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{m} y_k(x)\, h_k(\xi) - \sum\limits_{k=m+1}^{2n} y_k(x)\, v_k(\xi) & \text{при } x < \xi, \\ \sum\limits_{k=1}^{m} y_k(x)\, [h_k(\xi) + v_k(\xi)] & \text{при } x > \xi, \end{array} \right\} \tag{15}$$

тогда формула (14) примет вид

$$R_\lambda^0 f = \int_a^b K_0(x,\ \xi,\ \lambda)\, f(\xi)\, d\xi,$$

т. е. R_λ^0 *на функциях* $f \in \mathfrak{H}'$ *есть интегральный оператор с ядром* $K_0(x,\ \xi,\ \lambda)$. Следовательно, в силу ограниченности этого оператора *)

$$R_\lambda^0 f = \underset{\beta \to b}{\mathrm{l.i.m}} \int_a^\beta K_0(x,\ \xi,\ \lambda)\, f(\xi)\, d\xi$$

*) Символ l. i. m. обозначает предел в смысле нормы в $L^2(a,\ b)$.

для любой функции $f \in \mathfrak{H}$. Поэтому мы докажем, что R_λ^0 — интегральный оператор во всем пространстве $\mathfrak{H}$ с тем же ядром $K_0(x, \xi, \lambda)$, если покажем, что интеграл

$$\int_a^b K_0(x, \xi, \lambda) f(\xi) \, d\xi$$

сходится в обычном смысле для всех x из $[a, b)$. Для этого, в свою очередь, достаточно показать, что для всех x из $[a, b)$

$$\int_a^b |K_0(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < +\infty. \tag{16}$$

При фиксированном ξ и $x > \xi$ ядро $K_0(x, \xi, \lambda)$ есть линейная комбинация функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$, принадлежащих $\mathfrak{H} = L^2(a, b)$ (см. нижнюю формулу (15)). Поэтому

$$\int_a^b |K_0(x, \xi, \lambda)|^2 dx < +\infty. \tag{17}$$

Теперь мы воспользуемся вещественностью рассматриваемого расширения $\overset{0}{L_u}$. Ядро $K_0(x, \xi, \lambda)$ удовлетворяет всем условиям леммы 2 n° 1; следовательно, оно симметрично

$$K_0(x, \xi, \lambda) = K_0(\xi, x, \lambda);$$

поэтому интегралы в (16) и (17) совпадают и из доказанной сходимости второго следует сходимость первого. Тем самым первое утверждение теоремы доказано для вещественного расширения $\overset{0}{L_u}$.

Докажем для этого расширения второе утверждение теоремы. Прежде всего покажем, что при любом индексе дефекта оператора L_0 функции v_k, $k = m+1, \ldots, 2n$, и h_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, принадлежат $L^2(a, b)$, для чего снова воспользуемся свойством симметричности ядра $K_0(x, \xi, \lambda)$. Это свойство означает, что

$$\sum_{k=1}^{m} y_k(x) h_k(\xi) - \sum_{k=m+1}^{2n} y_k(x) v_k(\xi) = \sum_{k=1}^{m} [v_k(x) + h_k(x)] \, y_k(\xi). \tag{18}$$

Выберем числа $x_1, x_2, \ldots, x_{2n}$ так, чтобы был отличен от нуля определитель

$$\det(y_k(x_j)), \quad k, j = 1, 2, \ldots, 2n$$

Это возможно в силу линейной независимости функций $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ (см. лемму 3 n° 1). Полагая в (18) $x = x_j$, $j = 1$, 2, ..., $2n$, получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} y_k(x_j)\,h_k(\xi) - \sum_{k=m+1}^{2n} y_k(x_j)\,v_k(\xi) =$$
$$= \sum_{k=1}^{m} [v_k(x_j) + h_k(x_j)]\,y_k(\xi), \quad j = 1, 2, \ldots, 2n,$$

из которой функции $h_k(\xi)$, $k = 1, 2, \ldots, m$, $v_k(\xi)$, $k = m+1$, $m+2, \ldots, 2n$, определяются как линейные комбинации функций

$$y_1(\xi), \ldots, y_m(\xi),$$

принадлежащих $L^2(a, b)$. Следовательно, функции $h_k(\xi)$ и $v_k(\xi)$ также принадлежат $L^2(a, b)$.

Теперь уже легко доказать второе утверждение теоремы. Пусть индекс дефекта оператора L_0 есть $(2n, 2n)$, т. е. $m = 2n$. Это означает, что все функции $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ принадлежат $L^2(a, b)$. Только что доказанное утверждение теперь означает, что все функции $h_1, h_2, \ldots, h_{2n}$ также принадлежат $L^2(a, b)$. Формула (15) для ядра $K_0(x, \xi, \lambda)$ примет теперь вид

$$K_0(x, \xi, \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{2n} y_k(x)\,h_k(\xi) & \text{при } x < \xi, \\ \sum\limits_{k=1}^{2n} y_k(x)\,[h_k(\xi) + v_k(\xi)] & \text{при } x > \xi. \end{cases}$$

В силу верхней части этой формулы

$$\int_a^b dx \int_x^b |K_0(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < +\infty,$$

а в силу нижней ее части

$$\int_a^b dx \int_a^x |K_0(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < +\infty,$$

ибо внутренний интеграл существует и есть линейная комбинация произведений $y_k(x)\overline{y_j(x)}$, суммируемых ввиду принадлежности сомножителей к $L^2(a, b)$. Поэтому также

$$\int_a^b \int_a^b |K_0(x, \xi, \lambda)|^2 dx\, d\xi < +\infty,$$

и теорема полностью доказана для вещественных расширений. Перейдем теперь к произвольному самосопряженному расширению оператора L_0. Пусть L_u — такое расширение, а R_λ — его резольвента. Сравним векторы $y = R_\lambda f$ и $y^0 = R_\lambda^0 f$, где f — произвольный элемент из $L^2(a, b)$. Оба они являются решениями одного и того же неоднородного уравнения $l(y) - \lambda y = f$; следовательно, их разность $y - y^0$ есть решение однородного уравнения $l(y) - \lambda y = 0$. Поэтому

$$R_\lambda f = R_\lambda^0 f + \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k y_k.$$

Последняя линейная комбинация должна принадлежать $L^2(a, b)$, ибо $R_\lambda f$ и $R_\lambda^0 f \in L^2(a, b)$; в соответствии с нашим выбором фундаментальной системы $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ это возможно лишь тогда, когда

$$\alpha_{m+1} = \alpha_{m+2} = \ldots = \alpha_{2n} = 0.$$

Следовательно,

$$R_\lambda f = R_\lambda^0 f + \sum_{k=1}^{m} \alpha_k y_k. \tag{19}$$

Постоянные α_k в этой последней формуле являются ограниченными линейными функционалами в $L^2(a, b)$. Действительно, умножая обе части (19) скалярно на y_j, $j = 1, 2, \ldots, m$, получим систему уравнений

$$\sum_{k=1}^{m} \alpha\ (y_k, y_j) = (R_\lambda f - R_\lambda^0 f, y_j), \qquad j = 1, 2, \ldots, m, \tag{20}$$

относительно $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_m$, определитель которой есть определитель Грама линейно независимых функций $y_1, y_2, \ldots, y_m$, следовательно, отличен от нуля. Решение α_k, $k = 1, 2, \ldots, m$, этой системы выражается в виде линейной комбинации ее правых частей $((R_\lambda - R_\lambda^*) f, y_j)$, которые в силу ограниченности операторов R_λ^* и R_λ являются ограниченными линейными функционалами в $L^2(a, b)$. Таким образом, числа α_k также являются ограниченными линейными функционалами в $L^2(a, b)$. Поэтому в $L^2(a, b)$ существуют функции*) $h_1, h_2, \ldots, h_m$, такие, что

$$\alpha_k = (f, h_k) = \int_a^b f(\xi) \overline{h_k(\xi)}\, d\xi, \qquad k = 1, 2, \ldots, m.$$

---

*) Пользуясь краевыми условиями $[y, \omega_j]_a^b = 0$, $j = 1, 2, \ldots, n$, определяющими данное расширение L_u, можно еще показать, что функции $h_k(\xi)$ *непрерывны* в интервале $[a, b]$ (ср. аналогичное рассуждение на стр. 222)

Подставляя эти выражения в формулу (19), получим

$$R_\lambda f = R_\lambda^0 f + \sum_{k=1}^{m} y_k(x) \int_a^b f(\xi)\overline{h_k(\xi)}\,d\xi,$$

т. е.

$$R_\lambda f = \int_a^b \left[K_0(x, \xi, \lambda) + \sum_{k=1}^{m} y_k(x)\overline{h_k(\xi)} \right] f(\xi)\,d\xi.$$

Эта последняя формула показывает, что R_λ есть интегральный оператор с ядром

$$K(x, \xi, \lambda) = K_0(x, \xi, \lambda) + \sum_{k=1}^{m} y_k(x)\overline{h_k(\xi)}. \tag{21}$$

В силу свойств функций y_k и h_k последняя сумма есть вырожденное ядро Гильберта — Шмидта. Отсюда и из доказанных свойств ядра $K_0(x, \xi, \lambda)$ немедленно следуют все утверждения теоремы относительно ядра $K(x, \xi, \lambda)$.

Замечание. 1. Рассуждение в конце доказательства теоремы 1 показывает, что *резольвенты двух самосопряженных расширений оператора L_0 отличаются друг от друга слагаемым, которое является интегральным оператором с вырожденным ядром Гильберта — Шмидта.*

Замечание 2. Из доказанной теоремы, в частности, следует: *если индекс дефекта оператора L_0 есть* $(2n, 2n)$, *то резольвента всякого его самосопряженного расширения есть вполне непрерывный оператор; следовательно, спектр всякого самосопряженного расширения оператора L_0 чисто дискретен* *).

Замечание 3. В n° 8а § 14 были изложены основные сведения по теории расширений с выходом из гильбертова пространства. В применении к дифференциальному оператору L_0 эти вопросы рассматривались А. В. Штраусом. В частности, им доказано, что теорема 1 остается справедливой и в том случае, когда R_λ обозначает обобщенную резольвенту оператора L_0 (см. Штраус [2]). Оказывается, что каждое самосопряженное расширение оператора L_0 с выходом из $L^2(a, b)$ порождает в этом пространстве некоторую краевую задачу, с краевыми условиями, зависящими от параметра. А. В. Штраус дал описание всех таких краевых условий (см. также Штраус [3]).

3. Случай оператора с двумя сингулярными концами. *В случае оператора L_0 с двумя сингулярными концами теорема 1*

*) Последнее означает (см. ниже n° 5 § 24), что спектр состоит из счетного множества собственных значений, конечной кратности с единственной предельной точкой на бесконечности

остается полностью в силе; следовательно, остаются также верными замечания 1 и 2 к ней.

Для доказательства этого утверждения обозначим через m^-, m^+ и m дефектные числа операторов L_0^-, L_0^+ и L_0, порожденных данным дифференциальным выражением $l(y)$ в интервалах (a, c), (c, b) и (a, b) соответственно; при этом c обозначает любую внутреннюю точку интервала (a, b) (см. стр. 206). На основании предложения VIII n° 5 § 17

$$m^- = n + p,$$
$$m^+ = n + m - p, \quad 0 \leqslant p \leqslant n.$$

Выберем фундаментальную систему решений уравнения $l(y) - \lambda y = 0$ так, чтобы первые m из этих решений

$$y_1, \ y_2, \ \ldots, \ y_m$$

принадлежали $L^2(a, b)$. Эти решения принадлежат, конечно, и $L^2(a, c)$; так как общее число линейно независимых решений, принадлежащих $L^2(a, c)$, равно $m^- = n + p$, то в $(2n - m)$-мерной линейной оболочке остальных $2n - m$ решений фундаментальной системы должно быть $m^- - m = n + p - m$ линейно независимых решений, принадлежащих $L^2(a, c)$; обозначим их через

$$y_{m+1}, \ y_{m+2}, \ \ldots, \ y_{n+p}.$$

Аналогично в той же $(2n - m)$-мерной линейной оболочке должно быть $m^+ - m = n - p$ линейно независимых решений, принадлежащих $L^2(c, b)$; обозначим их через

$$y_{n+p+1}, \ y_{n+p+2}, \ \ldots, \ y_{2n}.$$

Функции

$$y_{m+1}, \ y_{m+2}, \ \ldots, \ y_{n+p}, \ y_{n+p+1}, \ y_{n+p+2}, \ \ldots, \ y_{2n}$$

линейно независимы. Действительно, если бы имело место соотношение

$$c_{m+1}y_{m+1} + \ldots + c_{n+p}y_{n+p} + c_{n+p+1}y_{n+p+1} + \ldots + c_{2n}y_{2n} = 0,$$

в котором не все коэффициенты c_k равны нулю, то функция

$$c_{m+1}y_{m+1} + \ldots + c_{n+p}y_{n+p} = -c_{n+p+1}y_{n+p+1} - \ldots - c_{2n}y_{2n} \not\equiv 0$$

принадлежала бы и $L^2(a, c)$ и $L^2(c, b)$, следовательно, принадлежала бы $L^2(a, b)$. Последнее невозможно, ибо тогда дефектное число оператора L_0 было бы больше m. Следовательно, функции

$$y_1, \ \ldots, \ y_m, \ y_{m+1}, \ \ldots, \ y_{n+p}, \ y_{n+p+1}, \ \ldots, \ y_{2n}$$

15*

образуют фундаментальную систему решений уравнения $l(y) - \lambda y = 0$. Пусть теперь R^0_λ — резольвента какого-нибудь вещественного расширения L^0_u оператора L_0 и пусть $f \in \mathfrak{H}_\Delta$, где $\Delta = [\alpha, \beta]$ — конечный интервал, содержащийся в интервале (a, b). Тогда *), как и в n° 2,

$$R^0_\lambda f = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k y_k(x) + \sum_{k=1}^{2n} y_k(x) \int_a^x v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi. \tag{22}$$

При $x < \alpha$

$$\int_a^x v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi = 0;$$

следовательно,

$$R^0_\lambda f = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_k y_k(x).$$

Так как при этом должно быть $R^0_\lambda f \in L^2(a, b) \subset L^2(a, c)$, то

$$\alpha_{n+p+1} = \alpha_{n+p+2} = \ldots = \alpha_{2n} = 0.$$

Аналогично, рассматривая формулу (22) при $x > \beta$, заключаем, что

$$\alpha_k = -\int_a^b v_k(\xi) f(\xi)\, d\xi \quad \text{при} \quad k = m+1,\ m+2,\ \ldots,\ n+p.$$

Наконец, рассуждая, как и в n° 2 (см. стр. 221—222), находим, что

$$\alpha_k = \int_a^b f(\xi)\, h_k(\xi)\, d\xi, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ m,$$

где функции $h_k(\xi)$ непрерывны в интервале (a, b). Подставляя в (22) эти выражения для постоянных α_k, получим

$$R^0_\lambda f = \int_a^b K_0(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi,$$

где

$$K_0(x, \xi, \lambda) = \left\{ \begin{array}{ll} \sum\limits_{k=1}^{m} y_k(x) h_k(\xi) - \sum\limits_{k=m+1}^{n+p} y_k(x) v_k(\xi) & \text{при } x < \xi, \\ \sum\limits_{k=1}^{m} y_k(x) [v_k(\xi) + h_k(\xi)] + \sum\limits_{k=n+p+1}^{2n} y_k(x) v_k(\xi) & \text{при } x > \xi. \end{array} \right\} \tag{23}$$

*) Фигурирующий здесь интеграл существует, ибо $f \in \mathfrak{H}_\Delta$, следовательно, интеграл фактически берется по некоторому интервалу $[\alpha, x]$ $(\alpha > a)$.

Из этой формулы для ядра $K_0(x, \xi, \lambda)$ заключаем, что

$$\int_a^b |K_0(x, \xi, \lambda)|^2 dx < +\infty;$$

следовательно, в силу симметрии этого ядра (см. лемму 2 n° 1) также

$$\int_a^b |K_0(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi < +\infty.$$

Дальнейшие рассуждения совершенно аналогичны соответствующей части доказательства теоремы 1 n° 2, и мы предоставляем их подробное проведение читателю.

4. Общие теоремы о спектре самосопряженных расширений оператора L_0. Так как L_0 — симметрический оператор с конечным индексом дефекта, то согласно общей теореме 9 n° 9 § 14 имеет место следующая теорема:

Теорема 2. *Все самосопряженные расширения L_u оператора L_0 имеют один и тот же непрерывный спектр.*

Далее, применяя следствие 3 n° 10 § 14, приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Если при вещественном значении λ число линейно независимых решений уравнения*

$$l(y) = \lambda y,$$

принадлежащих $L^2(a, b)$, меньше дефектного числа оператора L_0, то это значение λ принадлежит ядру спектра оператора L_0. Следовательно, если это значение λ не является собственным значением оператора L_0, то оно принадлежит непрерывной части спектра всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0. Последнее обстоятельство имеет место всегда, если один из концов a или b регулярен.

В силу цитированного выше следствия 3 (см. n° 10 § 14) в доказательстве нуждается лишь последнее утверждение. Но собственная функция оператора L_0 с регулярным концом $x = a$ должна быть решением уравнения $l(y) = \lambda y$, принадлежащим $\mathfrak{D}_L$, т. е. удовлетворяющим условиям

$$y^{[\nu]}(a) = 0, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1;$$

это возможно лишь при $y \equiv 0$.

Следовательно, *оператор L_0* по крайней мере *с одним регулярным концом не имеет собственных значений.*

Если при этом оператор L_0 регулярен или если его индекс дефекта есть $(2n, 2n)$, то спектр каждого из его самосопряженных расширений чисто дискретен. Отсюда на основании теоремы 3 заключаем, что при любом вещественном значении λ число линейно независимых решений уравнения $l(y) = \lambda y$, принадлежащих $L^2(a, b)$, равно $2n$. Обратно, если это последнее обстоятельство имеет место, то в силу теоремы 14 n° 10 § 14 дефектное число оператора L_0 будет больше или равно $2n$ и потому равно $2n$. Таким образом, имеет место

Теорема 4. *Для того чтобы оператор L_0 с регулярным концом имел индекс дефекта $(2n, 2n)$, необходимо, чтобы при любом вещественном значении λ уравнение $l(y) = \lambda y$ имело $2n$ решений, принадлежащих $L^2(a, b)$, и достаточно, чтобы это уравнение имело $2n$ решений, принадлежащих $L^2(a, b)$ хотя бы при одном вещественном значении λ.*

При $n = 1$ эта теорема была установлена Вейлем (см. Вейль [1]).

В заключение докажем еще следующую теорему М. Г. Крейна (см. Крейн [3]).

Теорема 5. *Если $p_0(x) > 0$ и если оператор L_0 регулярен, то этот оператор полуограничен снизу; следовательно, отрицательная часть спектра всякого его самосопряженного расширения состоит из конечного числа отрицательных собственных значений конечной кратности.*

Доказательство. Для $y \in \mathfrak{D}_{L_0}$

$$y^{[k]}(a) = y^{[k]}(b) = 0, \qquad k = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1,$$

и потому, интегрируя по частям, имеем

$$(L_0 y, y) = \sum_{k=0}^{n} \int_a^b p_k(x) \, | y^{(n-k)}(x) |^2 \, dx.$$

Положим

$$v_k(x, \xi) = \begin{cases} \dfrac{(x-\xi)^{k-1}}{(k-1)!} & \text{при } \xi \leqslant x, \\ 0 & \text{при } \xi \geqslant x, \end{cases} \tag{24}$$

и

$$H(\xi, \eta) = -\sum_{k=1}^{n} \int_a^b p_k(x) \, v_k(x, \xi) \, v_k(x, \eta) \, dx.$$

При $y \in \mathfrak{D}_{L_0}$

$$y^{[n-k]}(x) = \int_a^b v_k(x, \xi) \, y^{[n]}(\xi) \, \frac{1}{p_0(\xi)} \, d\xi$$

(см. (3) n° 2 § 15), и потому

$$(L_0y,\ y) = \int_a^b |\, y^{[n]}(\xi)\,|^2 \frac{d\xi}{p_0(\xi)} - \int_a^b \int_a^b H(\xi,\ \eta)\, y^{[n]}(\xi)\, \overline{y^{[n]}(\eta)}\, \frac{d\xi}{p_0(\xi)}\, \frac{d\eta}{p_0(\eta)}. \tag{25}$$

Обозначим через $\mathfrak{H}$ гильбертово пространство функций $f(x)$ со скалярным произведением

$$(f_1,\ f_2)_1 = \int_a^b f_1(x)\, \overline{f_2(x)}\, \frac{1}{p_0(x)}\, dx.$$

В пространстве $\mathfrak{H}$ рассмотрим интегральный оператор H с непрерывным ядром $\dfrac{H(\xi,\ \eta)}{p_0(\eta)}$:

$$Hf = \int_a^b \frac{H(\xi,\ \eta)}{p_0(\eta)}\, f(\eta)\, d\eta;$$

очевидно, оператор H вполне непрерывен и, как легко проверить, эрмитов.

Пусть $\psi_1,\ \psi_2,\ \psi_3,\ \ldots$ — полная ортонормальная система собственных функций, а $\mu_1,\ \mu_2,\ \mu_3,\ \ldots$ — соответствующие собственные значения оператора H. Тогда

$$(H\varphi,\ \varphi)_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \mu_k\, |\, (\varphi,\ \psi_k)_1\, |^2.$$

Но $\mu_k \to 0$ при $k \to +\infty$, и потому, начиная с некоторого номера k, будет $\mu_k < 1$. Пусть $\mu_k < 1$ при $k > N$; тогда при

$$(\varphi,\ \psi_k)_1 = 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N,$$

будет

$$(H\varphi,\ \varphi)_1 = \sum_{j=k+1}^{\infty} \mu_k\, |\, (\varphi,\ \psi_k)_1\, |^2 \leqslant \sum_{j=k+1}^{\infty} |\, (\varphi,\ \psi_k)_1\, |^2,$$

т. е.

$$(H\varphi,\ \varphi)_1 \leqslant (\varphi,\ \varphi)_1. \tag{26}$$

Сузим теперь многообразие $\mathfrak{D}_{L_0}$, подчинив функцию $y \in \mathfrak{D}_{L_0}$ дополнительным условиям

$$(y^{[n]},\ \psi_k)_1 = 0, \quad k = 1,\ 2,\ \ldots,\ N;$$

пусть $\hat{\mathfrak{D}}$ обозначает многообразие всех функций y из $\mathfrak{D}_L$, удовлетворяющих этим условиям. В силу (26) при $y \in \hat{\mathfrak{D}}$

$$\int_a^b \int_a^b H(\xi, \eta)\, y^{[n]}(\xi)\, \overline{y^{[n]}(\eta)}\, \frac{d\xi}{p_0(\xi)}\, \frac{d\eta}{p_0(\eta)} = (Hy^{[n]}, y^{[n]})_1 \leqslant$$

$$\leqslant (y^{[n]}, y^{[n]})_1 = \int_a^b |y^{[n]}(\xi)|^2 \frac{d\xi}{p_0(\xi)};$$

отсюда, учитывая формулу (25), заключаем, что при $y \in \hat{\mathfrak{D}}$

$$(L_0 y, y) \geqslant 0,$$

т. е. на многообразии $\hat{\mathfrak{D}}$ оператор L_0 полуограничен снизу. С другой стороны, размерность многообразия $\mathfrak{D}_{L_0}$ по модулю $\hat{\mathfrak{D}}$ конечна (именно, равна N), следовательно, L_0 полуограничен снизу на всем многообразии D_{L_0}. Последнее утверждение теоремы непосредственно вытекает из следствия 4 n° 11 § 14.

Результаты §§ 17—19 принадлежат в основном И М Глазману [1—3] и М Г Крейну [3, 5, 6] Другой подход к описанию резольвент дифференциальных операторов см. Данфорд и Шварц [2].

ГЛАВА VI

СПЕКТРАЛЬНЫЙ АНАЛИЗ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ

§ 20. Кратность спектра самосопряженного оператора

1. Операторы с простым спектром. В конечномерном евклидовом пространстве спектр эрмитова оператора называется *простым*, если кратность каждого его собственного значения равна единице. Однако это определение нельзя перенести на произвольные самосопряженные операторы в гильбертовом пространстве, ибо спектр таких операторов состоит, вообще говоря, не только из собственных значений.

Чтобы прийти к определению простоты спектра в общем случае, сделаем следующее замечание. Пусть A — эрмитов оператор в n-мерном пространстве R_n; $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_n$ — его собственные значения (которые предполагаем простыми), расположенные в порядке возрастания

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_n,$$

а P_λ — его спектральная функция. Она представляет собой «ступенчатую» функцию со скачками

$$P_{\lambda_1} - P_{\lambda_1 - 0}, \quad P_{\lambda_2} - P_{\lambda_2 - 0}, \ldots, P_{\lambda_n} - P_{\lambda_n - 0},$$

которые являются операторами проектирования на одномерные собственные подпространства оператора A. Выберем в этих подпространствах единичные векторы $e_1, e_2, \ldots, e_n$ соответственно; эти векторы образуют ортонормальный базис в R_n. Рассмотрим фиксированный вектор

$$x = \alpha_1 e_1 + \alpha_2 e_2 + \ldots + \alpha_n e_n,$$

где все числа α_i отличны от нуля; тогда

$$\left(P_{\lambda_i} - P_{\lambda_i - 0}\right) x = \alpha_i e_i,$$

откуда видно, что линейная оболочка векторов $\left(P_{\lambda_i} - P_{\lambda_i - 0}\right) x$, $i = 1, 2, \ldots, n$, есть все пространство R.

Если же спектр оператора A непростой, например λ_1 двукратно ($\lambda_1=\lambda_2$), то $P_{\lambda_1}-P_{\lambda_1-0}$ есть оператор проектирования на двумерное собственное подпространство $\mathfrak{M}_1$, соответствующее λ_1. Если $e_1, e_2, \ldots, e_n$ — по-прежнему ортонормальный базис из собственных векторов оператора A, причем $e_1, e_2 \in \mathfrak{M}_1$, то

$$(P_{\lambda_1}-P_{\lambda_1-0})\,x=\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$$

и, очевидно, линейная оболочка всех векторов $(P_{\lambda_i}-P_{\lambda_i-0})\,x$ не будет содержать того вектора из $\mathfrak{M}_1$, который ортогонален к $\alpha_1 e_1+\alpha_2 e_2$. Эти соображения приводят к следующему общему определению оператора с простым спектром.

Спектр самосопряженного оператора в пространстве $\mathfrak{H}$ называется простым, если в $\mathfrak{H}$ существует вектор x, такой, что линейная оболочка всех векторов $P_\Delta x$ плотна в $\mathfrak{H}$. Всякий такой вектор x называется *порождающим вектором.*

I. Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$ с простым спектром, P_λ — его спектральная функция, а x — порождающий вектор. Тогда совокупность всех векторов

$$y=\int_\Delta \varphi(\lambda)\,dP_\lambda x,$$

где $\varphi(\lambda)$ — произвольная кусочно непрерывная функция, а Δ — произвольный интервал, плотна в $\mathfrak{H}$.

Доказательство. Эта совокупность линейна и содержит все векторы

$$P_\Delta x=\int_\Delta 1\cdot dP_\lambda x$$

(при $\varphi(\lambda)\equiv 1$ в интервале Δ); следовательно, она плотна в $\mathfrak{H}$, ибо x — порождающий вектор.

2. Пространство L^2_σ и оператор Λ_σ. Рассмотрим фиксированную вещественную неубывающую функцию $\sigma(\lambda)$, определенную и непрерывную справа для всех вещественных значений λ. Всякую такую функцию мы будем в дальнейшем называть *функцией распределения.*

При помощи такой функции $\sigma(\lambda)$ можно определить понятие меры — мы будем ее называть σ-мерой, — аналогичное мере Лебега. σ-мерой $\sigma(\Delta)$ конечного интервала $\Delta=(\alpha, \beta]$ мы будем называть разность $\sigma(\Delta)=\sigma(\beta)-\sigma(\alpha)$; далее, σ-мерой $\sigma(\Delta')$ множества Δ', состоящего из конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов

$$\Delta_i=(\alpha_i, \beta_i], \quad i=1, 2, 3, \ldots,$$

называется сумма ряда

$$\sigma(\Delta_1)+\sigma(\Delta_2)+\sigma(\Delta_3)+\ \ldots,$$

если этот ряд сходится, и $+\infty$, если он расходится.

Если теперь Δ — произвольное множество вещественных чисел, то рассматриваются всевозможные множества Δ', состоящие из конечного или счетного числа попарно непересекающихся интервалов и покрывающих множество Δ. Нижняя грань мер $\sigma(\Delta')$ таких множеств Δ' называется *внешней мерой* множества Δ и обозначается через $\sigma_e(\Delta)$.

Пользуясь этим понятием внешней меры, можно далее определить понятие *σ-измеримости* и *σ-меры* множества, а также понятия *σ-измеримой функции* $f(\lambda)$, аналогично тому как это делается в теории меры Лебега*). Для σ-измеримых функций можно далее определить интеграл

$$\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

аналогичный обычному интегралу Лебега; нужно только в обычном определении интеграла Лебега заменить лебегову меру множества его σ-мерой.

Обозначим теперь через L_σ^2 совокупность всех σ-измеримых функций $f(\lambda)$, таких, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda)<+\infty;$$

две функции f_1, f_2 из L_σ^2 будем считать равными, если $f_1(\lambda)\neq f_2(\lambda)$ только на множестве σ-меры нуль. Определим в L_σ^2 действия сложения и умножения на число, как сложение функций и умножение функций на число. Далее, определим в L_σ^2 скалярное произведение, полагая

$$(f,\ \varphi)=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,\overline{\varphi(\lambda)}\,d\sigma(\lambda).$$

При таком определении действий и скалярного произведения L_σ^2 — гильбертово пространство.

Доказательство этого утверждения по существу мало отличается от доказательства аналогичного утверждения

---

*) Отметим, что если λ_0 — точка разрыва функции $\sigma(\lambda)$, то мера «интервала» $[\lambda_0,\ \lambda_0]$, состоящего из одной точки λ_0, будет $\sigma(\lambda_0)-\sigma(\lambda_0-0)\neq 0$.

относительно $L^2(a, b)$ (см., например, Ахиезер и Глазман [1] n° 12 гл. I).

Если $\sigma(\lambda)=\lambda$, $-\infty<\lambda<\infty$, то $L_\sigma^2=L^2(-\infty, \infty)$, если же

$$\sigma(\lambda)=\begin{cases} a & \text{при} \quad \lambda<a, \\ \lambda & \text{при} \quad a\leqslant\lambda<b, \\ b & \text{при} \quad \lambda\geqslant b, \end{cases}$$

то $L_\sigma^2=L^2(a, b)$. Если, наконец, $\sigma(\lambda)$ — ступенчатая функция со счетным числом скачков, равных единице, то, как легко видеть, $L_\sigma^2=l^2$ (см. пример 1 n° 1 § 10).

Замечание 1. Изложенное выше определение интеграла легко распространить на тот случай, когда $\sigma(\lambda)$ — произвольная функция с ограниченной вариацией в конечном интервале $[a, b]$. Пусть сначала эта функция вещественна, тогда ее можно представить в виде разности $\sigma(\lambda)=\sigma_1(\lambda)-\sigma_2(\lambda)$ двух ограниченных неубывающих функций $\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_2(\lambda)$. По определению

$$\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma_1(\lambda)-\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda),$$

причем мы считаем, что $\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma(\lambda)$ существует тогда и только тогда, когда существуют интегралы

$$\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma_1(\lambda), \quad \int_a^b f(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda).$$

Если теперь $\sigma(\lambda)=\sigma_1(\lambda)+i\sigma_2(\lambda)$, где $\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_2(\lambda)$ — вещественные функции с ограниченной вариацией в интервале $[a, b]$, то по определению полагаем

$$\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma_1(\lambda)+i\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda).$$

При этом мы считаем, что $\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma(\lambda)$ существует тогда и только тогда, когда существуют интегралы

$$\int_a^b f(\lambda)\,d\sigma_1(\lambda), \quad \int_a^b f(\lambda)\,d\sigma_2(\lambda).$$

Определим теперь в L_σ^2 оператор Λ следующим образом: $\mathfrak{D}_\Lambda$ состоит из тех и только тех функций $f(\lambda)$ из L_σ^2, для которых $\lambda f(\lambda)\in L_\sigma^2$, причем

$$\Lambda f(\lambda)=\lambda f(\lambda).$$

Этот оператор называется *оператором умножения на независимую переменную*. Если нужно будет подчеркнуть, что он есть оператор в L^2_σ, то мы будем писать Λ_σ вместо Λ. Докажем, что этот оператор самосопряженный; для этого достаточно показать, что оператор Λ допускает интегральное представление при помощи некоторой спектральной функции P_λ. Но, как легко проверить, операторная функция P_λ, определяемая формулой

$$P_{\lambda_0} f(\lambda) = \begin{cases} f(\lambda) & \text{при} \quad \lambda < \lambda_0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \geqslant \lambda_0, \end{cases} \tag{1}$$

будет спектральной функцией, осуществляющей это интегральное представление.

Спектр оператора Λ *простой*. В качестве порождающего вектора можно взять любую функцию*) $x(\lambda) \in L^2_\sigma$, отличную от нуля всюду, за исключением разве множества σ-меры нуль. Действительно, из формулы (1) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{n} c_k P_{\Delta_k} x(\lambda) = q(\lambda)\, x(\lambda),$$

где $q(\lambda)$ — функция, равная c_k на Δ_k. С другой стороны, легко показать, что такие функции $q(\lambda)\, x(\lambda)$ образуют плотное множество в L^2_σ.

Замечание 2. Наиболее удобно было бы взять $x(\lambda) \equiv 1$, $-\infty < \lambda < +\infty$, ибо тогда $q(\lambda)\, x(\lambda) = q(\lambda)$, а функции $q(\lambda)$ образуют множество, плотное в L^2_σ. Однако функция $x(\lambda) \equiv 1$ может не принадлежать L^2_σ (если $\sigma(-\infty) = -\infty$ или $\sigma(+\infty) = +\infty$), хотя для любого конечного интервала функция

$$P_\Delta x = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \lambda \in \Delta, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \overline{\in} \Delta \end{cases}$$

принадлежит L^2_σ. В этом случае функция $x(\lambda) \equiv 1$ называется *несобственным порождающим вектором*. Общее определение несобственного порождающего вектора см. в n° 7.

3. Каноническая форма самосопряженного оператора с простым спектром. Следующая теорема показывает, что в предыдущем примере по существу описаны все самосопряженные операторы с простым спектром:

Теорема 1. *Пусть* A — *самосопряженный оператор в* $\mathfrak{H}$ *с простым спектром*, P_λ — *его спектральная функция*,

*) Доказательство существования такой функции предоставляем читателю.

x — порождающий вектор и

$$\sigma(\lambda) = (P_\lambda x,\ x).$$

Тогда существует изометрическое отображение пространства $\mathfrak{H}$ на L^2_σ, при котором A переходит в Λ_σ.

Доказательство. Обозначим через $\mathfrak{K}$ совокупность всех функций $f(\lambda)$ — кусочно непрерывных и равных нулю вне конечного интервала Δ (своего для каждой функции $f(\lambda)$); очевидно, $\mathfrak{K}$ плотно в L^2_σ. При $f \subset \mathfrak{K}$ существует

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x \tag{2}$$

и принадлежит $\mathfrak{D}_A$; при этом

$$Ay = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda f(\lambda)\, dP_\lambda(x) \tag{3}$$

и

$$|y|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d(P_\lambda x,\ x) = \int_{-\infty}^{\infty} |f(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda), \tag{4}$$

$$|Ay|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda^2 |f(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda). \tag{5}$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ множество всех векторов y вида (2); согласно предложению I n°1 множество $\mathfrak{S}$ плотно в $\mathfrak{H}$. Из (4) вытекает, что формула (2) устанавливает изометрическое отображение $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{S}$; это отображение можно продолжить до изометрического отображения замыканий этих множеств, т. е. до изометрического отображения L^2_σ на $\mathfrak{H}$. Указанное продолжение осуществляется следующим образом. Если $f \in L^2_\sigma$, то существует последовательность $f_n \in \mathfrak{K}$, сходящаяся к f в смысле нормы в L^2_σ, ибо $\mathfrak{K}$ плотно в L^2_σ. Соответствующая последовательность

$$y_n = \int_{-\infty}^{\infty} f_n(\lambda)\, dP_\lambda x$$

сходится в смысле нормы в $\mathfrak{H}$; ее предел естественно обозначить через

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\, dP_\lambda x. \tag{6}$$

Эта последняя формула устанавливает изометрическое отображение L_σ^2 на $\mathfrak{H}$. Обозначим через Λ_σ' и A' сужения операторов Λ_σ и A на $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{Z}$ соответственно. Легко видеть, что их замыкания совпадают с Λ_σ и A соответственно. В силу (3) построенное выше изометрическое отображение переводит Λ_σ' в A', а следовательно, и Λ_σ в A. Теорема доказана.

II. *Пусть A — оператор с простым спектром. Тогда точки спектра оператора A совпадают с точками роста функции $\sigma(\lambda)$; в частности, собственные значения оператора A совпадают с точками разрыва функции $\sigma(\lambda)$.*

Действительно, это утверждение легко проверить для оператора Λ_σ; в силу теоремы 1 оно справедливо также для оператора A.

4. Операторы с конечнократным спектром. Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, а P_λ — его спектральная функция; векторы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ называются *порождающим базисом* для оператора A, если линейная оболочка множества всех векторов $P_\Delta x_k$, $k=1, 2, \ldots, n$, плотна в $\mathfrak{H}$.

Спектр оператора A называется n-кратным, если n есть минимальное число векторов, образующих порождающий базис; соответствующий базис называется *минимальным порождающим базисом.*

5. Пространство L_σ^2 и оператор Λ_σ, соответствующие матричной функции распределения. Рассмотрим фиксированную матричную функцию

$$\sigma(\lambda) = (\sigma_{ik}(\lambda)), \quad -\infty < \lambda < \infty, \quad i, k = 1, 2, \ldots, m,$$

обладающую следующими свойствами.

1°. *При любом вещественном значении λ $\sigma(\lambda)$ есть эрмитова матрица.*

2°. *При $\lambda < \mu$ разность $\sigma(\mu) - \sigma(\lambda)$ есть положительно определенная матрица.*

3°. *Все функции $\sigma_{ik}(\lambda)$ непрерывны справа.*

Всякую такую функцию $\sigma(\lambda)$ мы будем в дальнейшем называть *матричной функцией распределения.*

Так как диагональные элементы положительно определенной матрицы неотрицательны, то из условий 1° — 3° вытекает, что каждый диагональный элемент $\sigma_{ii}(\lambda)$ есть вещественная неубывающая функция, а каждая функция $\sigma_{ik}(\lambda)$ имеет ограниченную вариацию в каждом конечном интервале. Последнее утверждение вытекает из неравенств

$$2|\mathfrak{R}(\sigma_{jk}(\Delta))| \leqslant \sigma_{jj}(\Delta) + \sigma_{kk}(\Delta), \quad 2|\mathfrak{J}(\sigma_{jk}(\Delta))| \leqslant \sigma_{jj}(\Delta) + \sigma_{kk}(\Delta),$$

которые являются непосредственным следствием неотрицательности квадратичной формы

$$\sigma_{jj}(\Delta)\,|\xi_j|^2+\sigma_{jk}(\Delta)\,\xi_j\bar{\xi}_k+\overline{\sigma_{jk}(\Delta)}\,\bar{\xi}_j\xi_k+\sigma_{kk}(\Delta)\,|\xi_k|^2.$$

Пусть $\mathfrak{K}$ обозначает совокупность всех ограниченных кусочно непрерывных вектор-функций $f(\lambda)=\{f_1(\lambda),\ f_2(\lambda),\ \ldots,\ f_m(\lambda)\}$, равных нулю вне некоторого конечного интервала (своего для каждой функции). Определим в $\mathfrak{K}$ умножение на число и сложение обычным образом; кроме того, определим в $\mathfrak{K}$ скалярное произведение, полагая для $f,\ g\in\mathfrak{K}$

$$(f,\ g)=\sum_{j,\ k=1}^{m}\int_{-\infty}^{\infty} f_j(\lambda)\,\overline{g_k(\lambda)}\,d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Очевидно, $\mathfrak{K}$ станет тогда предгильбертовым пространством*); при этом две функции f и g не считаются различными векторами пространства $\mathfrak{K}$, если $(f-g,\ f-g)=0$. Пополнение пространства $\mathfrak{K}$ есть гильбертово пространство, мы его обозначим через L^2_σ. Можно описать L^2_σ таким образом, что всеми его элементами будут некоторые вектор-функции. (См. по этому поводу работу Кац [2]**). Нам, однако, такое описание пространства L^2_σ не понадобится.

Определим в $\mathfrak{K}$ оператор Λ'_σ, полагая для $f\in\mathfrak{K}$

$$\Lambda_\sigma f(\lambda)=\lambda f(\lambda)=\{\lambda f_1(\lambda),\ \lambda f_2(\lambda),\ \ldots,\ \lambda f_m(\lambda)\}.$$

Очевидно, Λ'_σ — симметрический оператор в L^2_σ; его замыкание обозначим через Λ_σ.

Оператор Λ_σ — самосопряженный; чтобы в этом убедиться, достаточно показать, что он допускает интегральное представление при помощи некоторой спектральной функции P_λ (см. теорему 1 n° 3 § 12). Но, как легко видеть, такой спектральной функцией будет операторная функция P_λ, определенная формулой

$$P_{\lambda_0}f(\lambda)=\begin{cases} f(\lambda) & \text{при}\quad \lambda<\lambda_0,\\ 0 & \text{при}\quad \lambda\geqslant\lambda_0.\end{cases}\tag{7}$$

Кратность спектра оператора Λ_σ не превосходит порядка m матрицы σ. Для доказательства этого утверждения достаточно

---

*) См. n° 1 § 10.

**) Априори неясно, что пополнение нормированного пространства функций может быть реализовано в виде пространства функций.

указать в L_σ^2 порождающий базис, состоящий из m вектор-функций. Таким базисом будут, например, вектор-функции

$$\left.\begin{aligned} f^1(\lambda) &= \{f_1(\lambda),\quad 0,\quad \ldots,\ 0\},\\ f^2(\lambda) &= \{\ 0,\quad f_2(\lambda),\ \ldots,\ 0\},\\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ f^m(\lambda) &= \{\ 0,\quad 0,\quad \ldots,\ f_m(\lambda)\}, \end{aligned}\right\} \tag{8}$$

где функции $f_1(\lambda)$, $f_2(\lambda)$, ..., $f_m(\lambda)$ отличны от нуля для всех вещественных значений λ, ограничены в интервале $(-\infty, \infty)$, и, кроме того, подчинены условию $f_k(\lambda) \in L_\sigma^2$, $k=1, 2, \ldots, m$.

Замечание. Проще всего положить в (8)

$$f_1(\lambda) = f_2(\lambda) = \ \ldots\ = f_m(\lambda) \equiv 1,$$

однако соответствующие вектор-функции $f^1(\lambda)$, $f^2(\lambda)$, ..., $f^m(\lambda)$ могут не принадлежать L_σ^2. В этом случае «порождающий базис», отвечающий такому выбору $f^1(\lambda), \ldots, f^{(m)}(\lambda)$ является *несобственным* (см. n°7).

6. Общая каноническая форма самосопряженного оператора с n-кратным спектром.

Теорема 2. *Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$ с n-кратным спектром, P_λ — его спектральная функция, а $x_1, x_2, \ldots$ $\ldots, x_n$ — минимальный порождающий базис. Положим*

$$\sigma_{jk}(\lambda) = (P_\lambda x_j,\ x_k);\quad \sigma(\lambda) = (\sigma_{jk}(\lambda)). \tag{9}$$

Тогда формула

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(\lambda)\, dP_\lambda x_k \tag{10}$$

устанавливает изометрическое отображение L_σ^2 на $\mathfrak{H}$, при котором оператор Λ_σ переходит в оператор A.

Доказательство. Если $f \in \mathfrak{K}$, то интеграл (10) имеет смысл и представляет некоторый вектор $y \in \mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{S}$ совокупность всех таких векторов y. Множество $\mathfrak{S}$ плотно в $\mathfrak{H}$, ибо оно линейно и содержит все векторы $P_\Delta x_j$, $j=1, 2, \ldots, n$. ($f_k(\lambda)=0$ для $k \neq j$; $f_j(\lambda)=1$ для $\lambda \in \Delta$; $f_j(\lambda)=0$ для $\lambda \overline{\in} \Delta$; напомним, что $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — порождающий базис). Если $f \in \mathfrak{K}$, то

$$|y|^2 = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j\ k=1}^{n} f_j(\lambda)\overline{f_k(\lambda)}\, d(P_\lambda x_j,\ x_k) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\ k=1}^{n} f_j(\lambda)\overline{f_k(\lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda);$$

следовательно, формула (10) устанавливает изометрическое отображение $\mathfrak{K}$ на $\mathfrak{S}$. Так как $\mathfrak{K}$ и $\mathfrak{S}$ плотны в L_σ^2 и $\mathfrak{H}$ соответственно, то это отображение продолжается единственным образом до изометрического отображения L^2_σ на $\mathfrak{H}$; при этом интеграл в (10) следует определить как предел последовательности

$$y_N = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k^N(\lambda)\, dP_\lambda x_k,$$

в которой $f^{(N)}(\lambda) \in \mathfrak{K}$ и $f^{(N)} \to f$ в смысле нормы в L^2_σ. Очевидно, $\mathfrak{S} \subset \mathfrak{D}_A$. Обозначим через A' и Λ' сужения операторов A и Λ на $\mathfrak{S}$ и $\mathfrak{K}$ соответственно; тогда замыкания этих операторов совпадают с A и Λ. С другой стороны, при $y \in \mathfrak{S}$

$$Ay = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} \lambda f_k(\lambda)\, dP_\lambda x_k.$$

Эта формула показывает, что наше изометрическое отображение переводит Λ' в A' и, следовательно, Λ в A. Теорема доказана. Из этой теоремы вытекает, что *спектр оператора A состоит из точек роста функции $\sigma(\lambda)$, причем собственными значениями являются точки разрыва этой функции.*

Это утверждение непосредственно следует из самого определения оператора Λ_σ.

7. Несобственный порождающий базис. В n°n° 2 и 5 мы видели, что в ряде случаев может оказаться удобным выбор несобственного порождающего базиса.

Дадим теперь общее определение такого базиса и выясним, как для него надлежит изменить теоремы 1 и 2.

а) Случай оператора с простым спектром. Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, а P_λ — его спектральная функция.

Несобственным порождающим элементом оператора A называется всякая функция x_Δ интервала Δ со значениями из $\mathfrak{H}$, удовлетворяющая следующим условиям:

1°. *Если $\Delta_1 \subset \Delta_2$, то $P_{\Delta_1} x_{\Delta_2} = x_{\Delta_1}$.*

2°. *Линейная оболочка всех векторов x_Δ плотна в $\mathfrak{H}$.*

Из свойства 1° вытекает, что:

3°. *Если интервалы Δ_1 и Δ_2 не пересекаются, то $x_{\Delta_1} \perp x_{\Delta_2}$ и*

$$x_{\Delta_1 + \Delta_2} = x_{\Delta_1} + x_{\Delta_2}.$$

Обозначим через $\mathfrak{K}$ совокупность всех функций $f(\lambda)$ кусочно непрерывных и равных нулю вне некоторого конечного интервала. Если $f(\lambda)\in\mathfrak{R}$ и $f(\lambda)=0$ вне Δ, то существует интеграл *)

$$y=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,dx_\lambda=\int_{\Delta} f(\lambda)\,dP_\lambda x_\Delta.$$

В силу свойства 2° совокупность всех таких векторов y образует множество $\mathfrak{Z}$, плотное в $\mathfrak{H}$.

Положим

$$\sigma(\Delta)=|x_\Delta|^2,$$

тогда $\sigma(\Delta)$ — аддитивная функция интервала Δ, ибо если интервалы Δ_1 и Δ_2 не пересекаются, то $x_{\Delta_1}\perp x_{\Delta_2}$, и потому

$$|x_{\Delta_1+\Delta_2}|^2=|x_{\Delta_1}+x_{\Delta_2}|^2=|x_{\Delta_1}|^2+|x_{\Delta_2}|^2.$$

Дальнейшее рассуждение в доказательстве теоремы 1 повторяется почти дословно; мы приходим к следующей теореме:

Теорема 1′. *Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, для которого существует несобственный порождающий вектор x_Δ. Положим* **) $\sigma(\Delta)=|x_\Delta|^2$. *Тогда формула*

$$y=\int_{-\infty}^{\infty} f(\lambda)\,dx_\lambda$$

устанавливает изометрическое отображение L^2_σ на $\mathfrak{H}$, *при котором Δ_σ переходит в A*. Следовательно, *A есть оператор с простым спектром.*

б) Случай кратного спектра. Пусть снова A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, а P_λ — его спектральная функция. *Несобственным порождающим базисом* оператора A называется система функций $x^1_\Delta, x^2_\Delta, \ldots, x^n_\Delta$ со значениями из $\mathfrak{H}$, обладающая следующими свойствами:

1°. *Если* $\Delta_1\subset\Delta_2$, то $P_{\Delta_1}x^k_{\Delta_2}=x^k_{\Delta_1}$, $k=1, 2, \ldots, n$.

2°. *Линейная оболочка всех векторов* x^k_Δ, $k=1, 2, \ldots, n$, *плотна в* $\mathfrak{H}$.

Рассуждения, аналогичные предыдущим, приводят к следующей теореме:

---

*) Первый из этих интегралов обозначает предел суммы $\sum_{k=1}^{m} f(\mu_k)\,x_{\Delta_k}$, $\Delta_k=(\lambda_{k-1}, \lambda_k]$, $\mu_k\in\Delta_k$, $\lambda_0<\lambda_1<\ldots<\lambda_m$, $\Delta=(\lambda_0, \lambda_m]$, при $\max_k(\lambda_k-\lambda_{k-1})\to 0$. Из свойства 1° следует, что этот первый интеграл равен второму.

**) При помощи $\sigma(\Delta)$ можно построить $\sigma(\lambda)$, полагая, например, $\sigma(\lambda)=\operatorname{sign}\lambda\,\sigma(\Delta)$ при $\Delta=(0, \lambda]$

Теорема 2'. *Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, для которого существует несобственный порождающий базис x_Δ^1, x_Δ^2, ..., x_Δ^n. Положим*

$$\sigma_{\nu k}(\Delta) = (x_\Delta^\nu, x_\Delta^k), \qquad \nu, k = 1, \ldots, n.$$

Тогда формула

$$y = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{k=1}^{n} f_k(\lambda)\, dx_\lambda^k$$

устанавливает изометрическое отображение L_σ^2 на $\mathfrak{H}$, при котором оператор Λ_σ переходит в оператор A. Следовательно, кратность спектра оператора A не выше n.

§ 21. Разложение по собственным функциям

В § 5 была решена задача о разложении заданной функции по собственным функциям дифференциального оператора для того случая, когда соответствующее дифференциальное выражение регулярно в рассматриваемом конечном интервале.

Соответствующая теорема допускает обобщение на случай произвольного (не обязательно регулярного) самосопряженного дифференциального оператора *). Однако в случае нерегулярного оператора вместо разложения в ряд может получиться разложение *в интеграл* по собственным функциям аналогично тому, как в случае непериодической функции $f(x)$, заданной в интервале $(-\infty, \infty)$, вместо разложения *в ряд Фурье* получается разложение *в интеграл Фурье.*

Это обстоятельство вызвано тем, что спектр нерегулярного дифференциального оператора может содержать непрерывную часть.

1. Направляющие функционалы. Вывод теоремы о разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора мы получим, применяя принадлежащий М. Г. Крейну (см. Крейн [1, 2]) *метод направляющих функционалов.*

Пусть (a, b) обозначает интервал (конечный или бесконечный), в котором задано некоторое самосопряженное дифференциальное выражение $l(y)$. Как и в § 17, L_0 будет обозначать «минимальный» замкнутый симметрический оператор, порожденный этим дифференциальным выражением, а L_u — некоторое самосопряженное расширение оператора L_0.

---

*) По поводу разложения по собственным функциям сингулярных *несамосопряженных* дифференциальных операторов см. Добавление I.

Обозначим, далее, через $\mathfrak{H}'$ совокупность всех функций из $L^2(a, b)$, равных нулю вне некоторого интервала $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$ (своего для каждой функции).

Пусть

$$y_j = y_j(x, \lambda), \qquad j = 1, \ldots, 2n, \tag{1}$$

— фундаментальная система решений уравнения

$$l(y) = \lambda y,$$

удовлетворяющая начальным условиям

$$y_j^{[k-1]}(x_0, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k, \end{cases} \tag{2}$$

где x_0 — фиксированная точка *) интервала (a, b), а $y_j^{[\nu]}$, $\nu = 1, 2, \ldots, n$, обозначает ν-ю квазипроизводную функции y_j.

Очевидно, функции y_j будут целыми аналитическими функциями параметра λ при каждом фиксированном значении x.

Положим для функции $f \in \mathfrak{H}'$

$$\Phi_j(f, \lambda) = \int_a^b f(x)\, y_j(x, \lambda)\, dx, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{3}$$

Ясно, что Φ_j — линейные **) функционалы в $\mathfrak{H}'$; эти функционалы мы будем называть *направляющими функционалами* дифференциального выражения $l(y)$. Применение направляющих функционалов основано на следующих предложениях.

I. *Направляющие функционалы* $\Phi_j(f, \lambda)$ *обладают следующими свойствами:*

1°. $\Phi_j(f, \lambda)$ *при фиксированной функции* $f \in \mathfrak{H}'$ *есть целая аналитическая функция параметра* λ.

2°. *Если для некоторой функции* $f \in \mathfrak{H}'$ *и некоторого вещественного значения* λ *имеют место равенства*

$$\Phi_j(f, \lambda) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{4}$$

то уравнение

$$(L - \lambda I)\, \varphi = f \tag{5}$$

имеет решение φ, *принадлежащее* $\mathfrak{H}'$.

---

*) Если одни из концов интервала (a, b) регулярен, то в качестве x_0 можно взять этот регулярный конец.

**) См. n°2 § 10.

3°. *Если* $f \in \mathfrak{D}_L \cap \mathfrak{H}'$, *то при любом вещественном* λ

$$\Phi_j(Lf, \lambda) = \lambda\Phi_j(f, \lambda).$$

Доказательство. Свойство 1° очевидно, и потому нуждаются в доказательстве только свойства 2° и 3°.

Докажем сначала свойство 2°. Пусть $f \in \mathfrak{H}'$ и пусть $f = f(x)$ обращается в нуль вне интервала $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Условие (4) означает, что функция f ортогональна ко всем решениям однородного уравнения $l(y) - \lambda y = 0$. Согласно лемме 1 n° 3 § 17 уравнение (5) имеет поэтому решение φ, определенное в интервале $[\alpha, \beta]$ и удовлетворяющее условиям

$$\varphi^{[\nu]}(\alpha) = \varphi^{[\nu]}(\beta) = 0, \qquad \nu = 0, 1, \ldots, 2n-1.$$

Но тогда в силу теоремы единственности (см. n° 2 § 16) это решение φ должно быть равно нулю вне интервала $[\alpha, \beta]$.

Свойство 3° непосредственно получается из следующей цепочки равенств:

$$\Phi_j(Lf, \lambda) = \int_a^b l(f)\, y_j(x, \lambda)\, dx = [f, y_j]_a^b + \int_a^b f l(y_j)\, dx =$$
$$= \lambda \int_a^b f y_j\, dx = \lambda\Phi(y_j, \lambda),$$

ибо $l(y_j) = \lambda y_j$ и $[f, y_j]_a^b = 0$.

II. *Для любого конечного интервала* $[\alpha, \beta]$ *существует в* $\mathfrak{H}'$ *система функций* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}$, *такая, что определитель*

$$D(\lambda) = \det(\Phi_j(\psi_k, \lambda)), \qquad j, k = 1, \ldots, 2n,$$

не обращается в нуль в интервале $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$.

Доказательство. Пусть λ_0 — фиксированная точка интервала $[\alpha, \beta]$ и пусть $\psi_1^0, \ldots, \psi_{2n}^0$ — функции из $\mathfrak{H}'$, такие, что

$$\det(\Phi_j(\psi_k^0, \lambda_0)) \neq 0.$$

Если во всем интервале $[\alpha, \beta]$ определитель

$$D_0(\lambda) = \det(\Phi_j(\psi_k^0, \lambda))$$

отличен от нуля, то можно положить $\psi_k = \psi_k^0$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$. Если же в некоторой точке λ_1

$$D_0(\lambda_1) = \det(\Phi_j(\psi_k^0, \lambda_1)) = 0,$$

то существуют такие числа α_k, не все равные нулю, что

$$\sum_{k=1}^{2n} \Phi_j(\psi_k^0, \lambda_1)\,\alpha_k = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Полагая

$$\chi = \alpha_1\psi_1^0 + \alpha_2\psi_2^0 + \ldots + \alpha_{2n}\psi_{2n}^0,$$

мы имеем тогда

$$\Phi_j(\chi, \lambda_1) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Отсюда на основании I заключаем, что уравнение

$$L\psi - \lambda_1\psi = \chi$$

имеет решение $\psi \in \mathfrak{H}'$.

Применяя функционал Φ_j к обеим частям этого равенства и пользуясь предложением I (свойство 3°), получаем

$$(\lambda - \lambda_1)\Phi_j(\psi, \lambda_1) = \Phi_j(\chi, \lambda_1);$$

следовательно,

$$\Phi_j(\psi, \lambda_1) = \frac{\Phi_j(\chi, \lambda_1)}{\lambda - \lambda_1}. \tag{6}$$

Пусть, например, $\alpha_1 \neq 0$; тогда можно считать $\alpha_1 = 1$. Определитель $D_0(\lambda)$ не изменит своей величины, если функцию ψ_1^0 заменить функцией

$$\chi = \psi_1^0 + \alpha_2\psi_2^0 + \ldots + \alpha_{2n}\psi_{2n}^0.$$

Отсюда и из формулы (6) заключаем, что, заменив далее функцию χ функцией ψ, мы перейдем от определителя $D_0(\lambda)$ к определителю

$$D_1(\lambda) = \frac{D_0(\lambda)}{\lambda - \lambda_1}.$$

Определитель $D_1(\lambda)$ по-прежнему отличен от нуля при $\lambda = \lambda_0$, а при $\lambda = \lambda_1$ имеет корень кратности, на единицу меньшей, чем $D_0(\lambda)$. Так как аналитическая функция $D_0(\lambda) \neq 0$ имеет в конечном интервале $[\alpha, \beta]$ только конечное число нулей, каждый конечной кратности, то после конечного числа таких шагов мы придем к некоторому определителю $D(\lambda)$, отличному от нуля во всем интервале $[\alpha, \beta]$.

Теорема 1. *Пусть* $[\alpha, \beta]$ — *конечный интервал, а* $\psi_1, \psi_2, \ldots, \psi_{2n}$ — *система функций в* $\mathfrak{H}'$, *такая, что определитель*

$$\det(\Phi_j(\psi_k, \lambda))$$

отличен от нуля в интервале $[\alpha, \beta]$.

Пусть далее P_λ — *спектральная функция оператора* L_u, *а* $g_1, g_2, \ldots, g_{2n}$ — *функции, определенные равенствами*

$$g_\nu = \int_\alpha^\beta \sum_{k=1}^{2n} \Omega_{k\nu}(\lambda)\, dP_\lambda\psi_k, \tag{7}$$

где $\Omega = (\Omega_{\nu k}(\lambda))$ — *матрица, обратная матрице*

$$\Phi = (\Phi_j(\psi_k, \lambda)), \qquad j, k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{8}$$

Тогда для любой функции $f \in \mathfrak{H}'$ *и любого интервала* $\Delta' \subset [\alpha, \beta]$ *имеет место формула*

$$P_{\Delta'}f = \int_{\Delta'} \sum_{\nu=1}^{2n} \Phi_\nu(f, \lambda)\, dP_\lambda g_\nu. \tag{9}$$

Доказательство. Положим

$$F_j(f, \lambda) = \sum_{k=1}^{2n} \Omega_{jk}(\lambda)\, \Phi_k(f, \lambda); \tag{10}$$

следовательно,

$$\Phi_k(f, \lambda) = \sum_{j=1}^{2n} \Phi_k(\psi_j, \lambda)\, F_j(f, \lambda). \tag{11}$$

Подлежащая доказательству формула (9) эквивалентна формуле

$$P_{\Delta'}f = \int_{\Delta'} \sum_{j=1}^{2n} F_j(f, \lambda)\, dP_\lambda \psi_j. \tag{12}$$

Чтобы в этом убедиться, достаточно подставить в (9) вместо функций g_ν их выражения (7).

Для доказательства формулы (12) рассмотрим элемент

$$h_\mu = \int_\alpha^\mu dP_\lambda f - \int_\alpha^\mu \sum_{j=1}^{2n} F_j(f, \lambda)\, dP_\lambda \psi_j;$$

очевидно, достаточно доказать, что он равен нулю для всех μ, $\alpha \leqslant \mu \leqslant \beta$; для этого, в свою очередь, достаточно установить, что, какова бы ни была функция $\varphi \in \mathfrak{H}'$,

$$(h_\mu, \varphi) = \int_\alpha^\mu d(P_\lambda f, \varphi) - \int_\alpha^\mu \sum_{j=1}^{2n} F_j(f, \lambda)\, d(P_\lambda \psi_j, \varphi) = 0 \tag{13}$$

при $\alpha \leqslant \mu \leqslant \beta$. Но при $\mu = \alpha$ равенство (13) имеет место; поэтому достаточно показать, что для всех μ, $\alpha \leqslant \mu \leqslant \beta$, существует производная $\frac{d}{d\mu}(h_\mu, \varphi)$ и что

$$\frac{d}{d\mu}(h_\mu, \varphi) = 0 \quad \text{при} \quad \alpha \leqslant \mu \leqslant \beta.$$

В силу неравенства

$$\left| \frac{(h_{\mu+\delta}, \varphi) - (h_\mu, \varphi)}{\delta} \right|^2 \leqslant \frac{1}{\delta^2} | h_{\mu+\delta} - h_\mu |^2 | \varphi |^2$$

для этого достаточно доказать, что

$$\lim_{\delta \to 0} \frac{1}{\delta^2} | h_{\mu+\delta} - h_\mu |^2 = 0.$$

Положим для краткости

$$P = P_{\mu+\delta} - P_\mu;$$

тогда

$$\frac{1}{\delta} | h_{\mu+\delta} - h_\mu | = \frac{1}{\delta} \left| Pf - \int_\mu^{\mu+\delta} \sum_{j=1}^{2n} F_j(f, \lambda)\, dP_\lambda \psi_j \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\delta} \left| P \left[f - \sum_{j=1}^{2n} F_j(f, \mu)\, \psi_j \right] \right| +$$

$$+ \frac{1}{\delta} \left| P \sum_{j=1}^{2n} F_j(f, \mu)\, \psi_j - \int_\mu^{\mu+\delta} \sum_{j=1}^{2n} F_j(f, \lambda)\, dP_\lambda \psi_j \right|. \quad (14)$$

Оценим сначала первое из этих слагаемых. Положим для краткости

$$w = f - \sum_{j=1}^{2n} F_j(f, \mu)\, \psi_j; \quad (15)$$

тогда в силу (11)

$$\Phi_k(w, \mu) = \Phi_k(f, \mu) - \sum_{j=1}^{2n} F_j(f, \mu)\, \Phi_k(\psi_j, \mu) = 0.$$

Согласно предложению I отсюда вытекает существование функции $v \in \mathfrak{H}'$, такой, что

$$w = L_u v - \mu v;$$

При этом либо

$$(P_\mu - P_{\mu-0})\, v = 0,$$

либо μ является собственным значением оператора L_u, с собственной функцией $(P_\mu - P_{\mu-0})\, v$. В последнем случае, полагая

$$\tilde{v} = v - (P_\mu - P_{\mu-0})\, v,$$

мы получим функцию $\tilde{v}$, принадлежащую множеству $\mathfrak{D}_{L_u}$, для которой по-прежнему выполняется равенство

$$w = L_u \tilde{v} - \mu \tilde{v}$$

и, кроме того,

$$(P_\mu - P_{\mu-0})\, \tilde{v} = 0. \quad (16)$$

Очевидно, (16) имеет место и в первом случае при $\tilde{v} = v$. Из соотношения (16) вытекает, что функция $|P_\lambda \tilde{v}|$ является непрерывной при $\lambda = \mu$. Поэтому

$$\frac{1}{\delta^2}|Pw|^2 = \frac{1}{\delta^2}|P(L_u\tilde{v} - \mu\tilde{v})|^2 =$$
$$= \frac{1}{\delta^2}\int_{\mu}^{\mu+\delta} |\lambda - \mu|^2 d(P_\lambda\tilde{v}, \tilde{v}) \leqslant |P\tilde{v}|^2 \to 0 \quad \text{при} \quad \delta \to 0.$$

Второе слагаемое в (14) перепишем в виде

$$\frac{1}{\delta}\left|\int_{\mu}^{\mu+\delta} \sum_{j=1}^{2n} \{F_j(f, \mu) - F_j(f, \lambda)\}\, dP_\lambda\psi_j\right|.$$

Его квадрат не больше чем

$$\frac{2n}{\delta^2}\sum_{j=1}^{2n}\int_{\mu}^{\mu+\delta} |F_j(f, \mu) - F_j(f, \lambda)|^2 d|P_\lambda\psi_j|^2 =$$
$$= \frac{2n}{\delta^2}\sum_{j=1}^{2n}\int_{\mu}^{\mu+\delta} |F_j(f, \mu) - F_j(f, \lambda)|^2 d|P_\lambda\tilde{\psi}_j|^2,$$

где

$$\tilde{\psi}_j = \psi_j - (P_\mu - P_{\mu-0})\psi_j.$$

Действительно,

$$P_\lambda\tilde{\psi}_j = \begin{cases} P_\lambda\psi_j & \text{при} \quad \lambda < \mu, \\ P_\lambda\psi_j - (P_\mu - P_{\mu-0})\psi_j & \text{при} \quad \lambda \geqslant \mu, \end{cases}$$

а в последних двух интегралах подынтегральная функция при $\lambda = \mu$ непрерывна и равна нулю; следовательно, оба эти интеграла равны. Таким образом, квадрат второго слагаемого не больше чем

$$C\sum_{j=1}^{2n} M_j^2 |P\tilde{\psi}_j|^2,$$

где M_j обозначает максимум модуля функции $\frac{\partial F_j(f, \lambda)}{\partial \lambda}$ при λ, меняющемся между μ и $\mu + \delta$. Но последняя сумма стремится к нулю при $\delta \to 0$ в силу непрерывности функции $|P_\lambda\tilde{\psi}_j|$ при $\lambda = \mu$.

2. Формулы обращения.

Теорема 2. *Пусть L_0 — минимальный симметрический оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y)$ в интервале (a, b), L_u — его самосопряженное расширение, а*

$$u_1(x, \lambda),\ u_2(x, \lambda),\ \ldots,\ u_{2n}(x, \lambda)$$

— решения уравнения $l(y)=\lambda y$, удовлетворяющие начальным условиям

$$u_j^{[\nu-1]}\Big|_{x=x_0}=\begin{cases}1 & \text{при} \quad j=\nu,\\ 0 & \text{при} \quad j\neq\nu,\end{cases} \quad a<x_0<b.$$

Тогда существует матричная функция распределения *)

$$\sigma(\lambda)=(\sigma_{jk}(\lambda)), \quad j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n,$$

такая, что формулы

$$\varphi_j(\lambda)=\int_a^b f(x)\,u_j(x,\ \lambda)\,dx, \tag{17}$$

$$f(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,\ k=1}^{2n}\varphi_j(\lambda)\,u_k(x,\ \lambda)\,d\sigma_{jk}(\lambda) \tag{18}$$

осуществляют взаимно обратные изометрические отображения $L^2(a,\ b)$ на L_σ^2 и L_σ^2 на $L^2(a,\ b)$ соответственно, переводящие друг в друга операторы A и Λ_σ. При этом интегралы в формулах (17) *и* (18) *сходятся в смысле метрики в L_σ^2 и $L^2(a,\ b)$ соответственно и*

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j\ k=1}^{2n}\varphi_j(\lambda)\,\overline{\varphi_k(\lambda)}\,d\sigma_{jk}(\lambda). \tag{19}$$

Доказательство. Пусть $[\alpha,\ \beta]$ — конечный интервал, а функции g_ν, ψ_k и f — те же, что и в теореме 1. Функции $g_\nu=g_\nu(x)$ зависят, очевидно, от выбора интервала $\Delta=[\alpha,\ \beta]$; чтобы это подчеркнуть, мы будем писать $g_{\nu,\Delta}$ вместо g_ν. На первый взгляд кажется, что эти функции зависят еще от выбора функций $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{2n}$. Докажем, что в действительности функции g_ν от выбора функций $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{2n}$ не зависят. Пусть функции $\psi_1,\ \psi_2,\ \ldots,\ \psi_{2n}$ заменены функциями $\tilde\psi_1,\ \tilde\psi_2,\ \ldots,\ \tilde\psi_{2n}$, для которых также

$$\det(\Phi_j(\tilde\psi_k,\ \lambda))\neq 0$$

во всем интервале Δ. Обозначим через $\tilde\Omega=(\tilde\Omega_{jk}(\lambda))$ матрицу, обратную матрице $(\Phi_j(\tilde\psi_k,\ \lambda))$, так что

$$\sum_{k=1}^{2n}\Phi_j(\tilde\psi_k,\ \lambda)\,\tilde\Omega_{k\nu}(\lambda)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad j=\nu,\\ 0 & \text{при} \quad j\neq\nu.\end{cases} \tag{20}$$

Положим

$$\tilde g_\nu=\int_\alpha^\beta\sum_{k=1}^{2n}\tilde\Omega_{k\nu}(\lambda)\,dP_\lambda\tilde\psi_k. \tag{21}$$

*) Определение матричной функции распределения и оператора Λ_σ см. в n° 5 § 20.

Требуется доказать, что $\tilde{g}_\nu = g_\nu$. Применяя формулу (9) к функции $\tilde{\psi}_k$ вместо f и к интервалу $\Delta' = [\alpha, \lambda]$, $\alpha < \lambda < \beta$, получим

$$(P_\lambda - P_\alpha)\tilde{\psi}_k = \int_\alpha^\lambda \sum_{j=1}^{2n} \Phi_j(\tilde{\psi}_k, \lambda)\, dP_\lambda g_j.$$

Подставляя это выражение в формулу (21) и учитывая соотношения (20), найдем, что

$$\tilde{g}_\nu = \int_\alpha^\beta \sum_{k,\, j=1}^{2n} \Phi_j(\tilde{\psi}_k, \lambda)\, \tilde{\Omega}_{k\nu}(\lambda)\, dP_\lambda g_j = \int_\alpha^\beta dP_\lambda g_\nu = g_\nu.$$

Функции

$$g_{1,\,\Delta},\ g_{2,\,\Delta},\ \ldots,\ g_{2n,\,\Delta}$$

образуют несобственный порождающий базис для оператора L_u (см. n° 7 § 20). Действительно, из формулы (7) для функций $g_{\nu,\,\Delta}$ следует, что при $\Delta' \subset \Delta$

$$P_{\Delta'} g_{\nu,\,\Delta} = g_{\nu,\,\Delta'}, \quad \nu = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2n;$$

кроме того, формула (9) показывает, что линейная оболочка функций $g_{\nu,\,\Delta}$ плотна в $\mathfrak{H}$, ибо функции $P_{\Delta'}f$, $f \in \mathfrak{H}'$ образуют множество, плотное в $\mathfrak{H}$. Положим

$$\sigma_{\nu k}(\Delta) = (g_{\nu,\,\Delta},\, g_{k,\,\Delta}), \quad \nu,\ k = 1,\, 2,\, \ldots,\, 2n.$$

Согласно теореме 2′ n° 7 § 20 формула

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{2n} \Phi_\nu(\lambda)\, dg_{\nu,\,\lambda} \tag{22}$$

определяет изометрическое отображение $\Phi \to f$ пространства L^2_σ на $\mathfrak{H} = L^2(a, b)$, которое переводит оператор Λ_σ в оператор L_u. При этом интеграл в (22) сходится в смысле нормы в $L^2(a, b)$.

Перейдем теперь к доказательству основного утверждения теоремы. Из свойств функций $g_{\nu,\,\Delta}$ следует, что формулу (9) можно записать в виде

$$P_{\Delta'} f = \int_{\Delta'} \sum_{\nu=1}^{2n} \Phi_\nu(f, \lambda)\, dg_{\nu,\,\lambda}, \quad f \in \mathfrak{H}'.$$

Расширяя неограниченно интервал Δ', найдем, что при $f \in \mathfrak{H}'$

$$f = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{\nu=1}^{2n} \Phi_\nu(f, \lambda)\, dg_{\nu,\,\lambda}. \tag{23}$$

Сравнение формул (22) и (23) показывает, что при нашем изометрическом отображении $\Phi \to f$ функциям $f \in \mathfrak{H}'$ отвечает вектор-функция

$$\Phi(\lambda) = \{\Phi_1(\lambda),\ \Phi_2(\lambda),\ \ldots,\ \Phi_{2n}(\lambda)\},$$

где

$$\Phi_\nu(\lambda) = \Phi_\nu(f,\ \lambda) = \int_a^b f(x)\, u_\nu(x,\ \lambda)\, dx, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n. \tag{24}$$

Пусть теперь $f = f(x)$ — произвольная функция из $L^2(a,\ b)$; выберем числа α_m, β_m, такие, что $a < \alpha_m < \beta_m < b$ и $\alpha_m \to a$, $\beta_m \to b$ при $m \to \infty$. Положим

$$f_m(x) = \begin{cases} f(x) & \text{при} \quad x \in [\alpha_m,\ \beta_m], \\ 0 & \text{при} \quad x \,\overline{\in}\, [\alpha_m,\ \beta_m]; \end{cases}$$

тогда $f_m \in \mathfrak{H}'$ и $f_m \to f$ в смысле нормы в $L^2(a,\ b)$. Функциям f_m при нашем изометрическом соответствии $\Phi \to f$ отвечают вектор-функции

$$\Phi^m(\lambda) = \left\{\Phi_1^m(\lambda),\ \Phi_2^m(\lambda),\ \ldots,\ \Phi_{2n}^m(\lambda)\right\},$$

где

$$\Phi_\nu^m(\lambda) = \Phi_\nu(f_m,\ \lambda) = \int_{\alpha_m}^{\beta_m} f(x)\, u_\nu(x,\ \lambda)\, dx. \tag{25}$$

В силу изометрии соответствия $\Phi \to f$ сходимость в пространстве $\mathfrak{H}$ последовательности f_m влечет за собой сходимость в смысле нормы в L_σ^2 последовательности $\Phi^m(\lambda)$ к некоторому элементу $\Phi(\lambda) = \{\Phi_1(\lambda),\ \Phi_2(\lambda),\ \ldots,\ \Phi_{2n}(\lambda)\}$ пространства L_σ^2. Ввиду формулы (25) естественно положить

$$\Phi_\nu(\lambda) = \Phi_\nu(f,\ \lambda) = \int_a^b f(x)\, u_\nu(x,\ \lambda)\, dx, \quad \nu = 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n, \tag{26}$$

так что сходимость интегралов (26) следует понимать в смысле нормы в L_σ^2. Тем самым доказано утверждение теоремы относительно формулы (17). Но из этого утверждения следует, что при f, $g \in \mathfrak{H}$, $\varphi_\nu(\lambda) = \Phi_\nu(f,\ \lambda)$ и $\psi_\nu(\lambda) = \Phi_\nu(g,\ \lambda)$ имеет место формула (обобщенное равенство Парсеваля)

$$\int_a^b f(x)\, \overline{g(x)}\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\, k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, \overline{\psi_k(\lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda). \tag{27}$$

При $g = f$ из нее получается формула (19).

Докажем теперь, что наше изометрическое отображение $\Phi \to f$ фактически задается формулой (18); тем самым утверждение теоремы будет полностью доказано.

Для этой цели положим в (27)

$$g(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad x \in (\alpha, \beta], \\ 0 & \text{при} \quad x \,\overline{\in}\, (\alpha, \beta], \end{cases} \qquad a < \alpha < \beta < b; \tag{28}$$

тогда

$$\psi_k(\lambda) = \int_a^b g(x)\, u_k(x, \lambda)\, dx = \int_\alpha^\beta u_k(x, \lambda)\, dx,$$

и формула (27) примет вид

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\, k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda) \left[\int_\alpha^\beta u_k(x, \lambda)\, dx \right] d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Пусть сначала функции $\varphi_j(\lambda)$ непрерывны и равны нулю вне некоторого конечного интервала; тогда в правой части последнего равенства можно изменить порядок интегрирования, ибо интеграл по $d\sigma_{jk}(\lambda)$ фактически распространен только на конечный интервал. Таким образом,

$$\int_\alpha^\beta f(x)\, dx = \int_\alpha^\beta dx \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\, k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda),$$

и так как интервал $[\alpha, \beta]$ произволен, то

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\, k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda)$$

для почти всех значений $x \in (a, b)$.

Если теперь $\varphi(\lambda) = \{\varphi_1(\lambda), \varphi_2(\lambda), \ldots, \varphi_{2n}(\lambda)\}$ — произвольный элемент из L^2_σ, то существует последовательность вектор-функций $\varphi^m(\lambda) = \{\varphi_1^m(\lambda), \varphi_2^m(\lambda), \ldots, \varphi_{2n}^m(\lambda)\}$, непрерывных и равных нулю вне конечного интервала, которая сходится к $\varphi(\lambda)$ в смысле нормы в L^2_σ. Наше изометрическое соответствие $\varphi \to f$ переводит ее в последовательность

$$f_m(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\, k=1}^{2n} \varphi_j^m(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{29}$$

сходящуюся в смысле нормы в $L^2(a, b)$ к функции $f(x)$, соответствующей функции $\varphi(\lambda)$.

Итак, правая часть (29) сходится в $L^2(a, b)$ при $m \to \infty$; ее предел есть по определению интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda),$$

сходящийся в смысле нормы в $L^2(a, b)$. Поэтому, переходя в (29) к пределу при $m \to \infty$, найдем, что

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda),$$

чем и завершается доказательство теоремы.

Функция $\sigma(\lambda)$, удовлетворяющая условиям теоремы 2, называется *спектральной функцией распределения оператора* L_u.

Следствие 1. *Кратность спектра оператора L не превосходит $2n$.*

Доказательство. Действительно, оператор L имеет несобственный порождающий базис $g_{1,\Delta}, g_{2,\Delta}, \ldots, g_{2n,\Delta}$.

Следствие 2. *Пусть L_0, L_u, $\sigma(\lambda) = (\sigma_{jk}(\lambda))$, $u_k(x, \lambda)$ те же, что и в теореме 2. Тогда:*

а) *Спектральная функция P_λ оператора L определяется по формуле*

$$P_\lambda f(x) = \int_{-\infty}^{\lambda} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{30}$$

и для любого конечного интервала Δ оператор P_Δ есть интегральный оператор с ядром

$$P(x, \xi, \Delta) = \int_{\Delta} \sum_{j,\,k=1}^{2n} u_k(x, \lambda)\, u_j(\xi, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda). \tag{31}$$

б) *Для резольвенты $(L_u - \mu I)^{-1}$ оператора L_u и ее ядра $G(x, \xi, \mu)$ имеют место интегральные представления:*

$$(L_u - \mu I)^{-1} f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{\varphi_j(\lambda)}{\lambda - \mu}\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{32}$$

$$G(x, \xi, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_k(x, \lambda)\, u_j(\xi, \lambda)}{\lambda - \mu}\, d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{33}$$

$$\int_a^b G(x, \xi, \mu)\, G(\xi, y, \bar{\mu})\, d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_k(x, \lambda)\, u_j(y, \lambda)}{|\lambda - \mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{34}$$

$$\Im \mu \neq 0.$$

При этом интеграл в (32) *сходится равномерно относительно x в каждом конечном интервале* $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$; *интеграл в* (33) *сходится в смысле нормы в* $L^2(a, b)$ *относительно каждого из переменных x, ξ при фиксированном втором переменном; интеграл в* (34) *сходится равномерно по совокупности обеих переменных x, y в каждом конечном квадрате* $\alpha \leqslant x$, $y \leqslant \beta$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Доказательство. Изометрическое отображение $\varphi \to f$, построенное при доказательстве теоремы 2, переводит оператор Λ_σ в оператор L. Но оператор Λ_σ есть оператор умножения на λ, и потому для его спектральной функции и его резольвенты имеем

$$P_{\lambda_0}\varphi_j(\lambda) = \begin{cases} \varphi_j(\lambda) & \text{при} \quad \lambda < \lambda_0, \\ 0 & \text{при} \quad \lambda \geqslant \lambda_0 \end{cases}$$

и

$$(\Lambda_\sigma - \mu I)^{-1}\{\varphi_1(\lambda), \ldots, \varphi_{2n}(\lambda)\} = \left\{\frac{\varphi_1(\lambda)}{\lambda - \mu}, \ldots, \frac{\varphi_{2n}(\lambda)}{\lambda - \mu}\right\}.$$

Из этих формул непосредственно получаются формулы (30) и (32). Из формулы (30) заключаем, что

$$P_\Delta f(x) = \int\limits_\Delta \sum_{j,\,k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda) =$$

$$= \int\limits_\Delta \sum_{j,\,k=1}^{2n} \left[\int\limits_a^b f(\xi)\, u_j(\xi, \lambda)\, d\xi\right] u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{35}$$

ибо

$$\varphi_j(\lambda) = \int\limits_a^b f(\xi)\, u_j(\xi, \lambda)\, d\xi.$$

Пусть функция $f(x)$ обращается в нуль вне конечного интервала $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Тогда в (35) можно изменить порядок интегрирования, так что

$$P_\Delta f(x) = \int\limits_a^b \left\{\int\limits_\Delta \sum_{j,\,k=1}^{2n} u_k(x, \lambda)\, u_j(\xi, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda)\right\} f(\xi)\, d\xi.$$

Тем самым доказана формула (31).

Для доказательства формулы (33) заметим (см. § 19), что при любом фиксированном значении x ядро $G(x, \xi, \mu)$, рассматриваемое как функция от ξ, принадлежит $L^2(a, b)$.

Применяя теорему 2 к этой функции, заключаем, что

$$G(x, \xi, \mu) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j, k=1}^{2n} \psi_j(x, \lambda, \mu) u_k(\xi, \lambda) d\sigma_{jk}(\lambda),$$

где

$$\psi_j(x, \lambda, \mu) = \int_a^b G(x, \xi, \mu) u_j(\xi, \lambda) d\xi,$$

и потому для любой функции $f(\xi) \in L^2(a, b)$

$$\int_a^b G(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j, k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda) \psi_k(x, \lambda, \mu) d\sigma_{jk}(\lambda).$$

С другой стороны, по определению ядра резольвенты,

$$\int_a^b G(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi = (L_u - \mu I)^{-1} f(x),$$

так что формула (32) дает

$$\int_a^b G(x, \xi, \mu) f(\xi) d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j, k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda) \frac{u_k(x, \lambda)}{\lambda - \mu} d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Сравнение этой формулы с (37) показывает, что

$$\psi_k(x, \lambda, \mu) = \frac{u_k(x, \lambda)}{\lambda - \mu};$$

подстановка этого выражения в (36) приводит к подлежа доказательству формуле (33).

Применим теперь обобщенное равенство Парсеваля (см. к функциям

$$f(\xi) = G(x, \xi, \mu), \quad g(\xi) = G(y, \xi, \mu);$$

тогда

$$\varphi_k(\lambda) = \Phi_k(f, \lambda) = \frac{u_k(x, \lambda)}{\lambda - \mu},$$

$$\psi_k(\lambda) = \Phi_k(g, \lambda) = \frac{u_k(y, \lambda)}{\lambda - \mu},$$

и обобщенное равенство Парсеваля дает

$$\int_a^b G(x, \xi, \mu) \overline{G(y, \xi, \mu)} d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j, k=1}^{2n} \frac{u_j(x, \lambda) u_k(y, \lambda)}{|\lambda - \mu|^2} d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Левая часть этого равенства есть ядро оператора

$$R_\mu (R_\mu)^* = R_\mu R_{\bar{\mu}},$$

ибо резольвента R_μ самосопряженного оператора L_u удовлетворяет соотношению

$$(R_\mu)^* = R_{\bar\mu}$$

(см. n°5 § 12). Таким образом, левая часть формулы (38) равна

$$\int_a^b G(x, \xi, \mu)\, G(\xi, y, \bar\mu)\, d\xi;$$

следовательно, эта формула совпадает с формулой (34). При $y=x$ формула (38) принимает вид

$$\int_a^b |G(x, \xi, \mu)|^2 d\xi = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_j(x, \lambda)\, u_k(x, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2} d\sigma_{jk}(\lambda). \tag{39}$$

Докажем теперь равномерную сходимость интеграла в (32). На основании неравенства Коши — Буняковского и формулы (39)

$$\left| \int_{N_1}^{N_2} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{\varphi_j(\lambda)}{\lambda-\mu} u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_{N_1}^{N_2} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda) \overline{\varphi_k(\lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda) \int_{N_1}^{N_2} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_j(x, \lambda)\, u_k(x, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2} d\sigma_{jk}(\lambda) =$$

$$= \int_{N_1}^{N_2} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda) \overline{\varphi_k(\lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda) \int_a^b |G(x, \xi, \mu)|^2 d\xi.$$

Второй множитель есть непрерывная функция от x в интервале (a, b) и потому ограничен в каждом конечном интервале $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$; первый множитель стремится к нулю при $N_1, N_2 \to +\infty$ и $N_1, N_2 \to -\infty$, ибо $f \in L^2(a, b)$, следовательно, $\varphi \in L^2_\sigma$, и потому интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda) \overline{\varphi_k(\lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda)$$

сходится. Отсюда непосредственно следует наше утверждение относительно интеграла в формуле (32). Утверждение относительно интеграла в формуле (33) очевидно.

Для доказательства равномерной сходимости интеграла в формуле (34) заметим, что для любого интервала Δ

$$\int_\Delta \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_j(x, \lambda)\, u_k(x, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2} d\sigma_{jk}(\lambda) \leqslant \int_a^b |G(x, \xi, \mu)|^2 d\xi.$$

Кроме того, функция $\int\limits_a^b |G(x, \xi, \lambda)|^2 d\xi$ непрерывна в интервале $a<x<b$. Поэтому, применяя к формуле (39) теорему Дини (см., например, Петровский [1]), мы заключаем, что интеграл

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{u_j(x, \lambda)\, u_k(x, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda) \tag{40}$$

сходится равномерно относительно x в каждом конечном интервале $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$. Утверждение относительно интеграла в правой части (34) теперь непосредственно получается из неравенства Коши — Буняковского:

$$\left| \int\limits_{N_1}^{N_2} \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{u_j(x, \lambda)\, u_k(y, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda) \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_{N_1}^{N_2} \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{u_j(x, \lambda)\, u_k(x, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda) \int\limits_{N_1}^{N_2} \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{u_j(y, \lambda)\, u_k(y, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Формулу (34) можно также записать иначе. Ее левая часть есть ядро оператора $R_\mu R_{\bar\mu}$; согласно функциональному уравнению для резольвенты (см. n° 5 § 12) этот оператор равен оператору $\frac{1}{\mu-\bar\mu}(R_\mu - R_{\bar\mu})$, ядро которого есть

$$\frac{1}{\mu-\bar\mu}[G(x, \xi, \mu) - G(x, \xi, \bar\mu)]$$

Таким образом, формула (34) принимает вид

$$G(x, \xi, \mu) - G(x, \xi, \bar\mu) = (\mu-\bar\mu) \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2} \frac{u_k(x, \lambda)\, u_j(\xi, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Введем для краткости обозначение

$$\frac{1}{2i}[G(x, \xi, \mu) - G(x, \xi, \bar\mu)] = K(x, \xi, \mu), \tag{41}$$

так что

$$K(x, \xi, \mu) = \tau \int\limits_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,k=1}^{2n} \frac{u_k(x, \lambda)\, u_j(\xi, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{42}$$

где $\tau = \Im\mu$.

Следствие 3. *В обеих частях равенства* (42) *и притом в правой части под знаком интеграла можно брать последовательные квазипроизводные по* x *и* ξ *до* $(2n-1)$*-го порядка включительно. Полученные в результате интегралы сходятся равномерно по совокупности переменных* x, ξ *в каждом конечном квадрате* $\alpha \leqslant x$, $\xi \leqslant \beta$, $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Доказательство. Обозначим для краткости через $G_{j\nu}(x, \xi, \mu)$ и $K_{j\nu}(x, \xi, \mu)$ квазипроизводные функций $G(x, \xi, \mu)$ и $K(x, \xi, \mu)$ j-го порядка по x и ν-го порядка по ξ.

При $0 \leqslant j \leqslant 2n-1$, $0 \leqslant \nu \leqslant 2n-1$ *все квазипроизводные* $K_{j\nu}(x, \xi, \mu)$ *непрерывны по совокупности обеих переменных* x, ξ *в квадрате* $a < x$, $\xi < b$.

Действительно, из построения ядра $G(x, \xi, \mu)$ вытекает, что оно имеет вид

$$G(x, \xi, \mu) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{2n} v_k(\xi)\, u_k(x) & \text{при} \quad x \leqslant \xi, \\ \sum\limits_{k=1}^{2n} w_k(\xi)\, u_k(x) & \text{при} \quad x \geqslant \xi, \end{cases}$$

где u_k, v_k, w_k — решения уравнения $l(y) = \mu y$, удовлетворяющие условиям

$$\sum_{k=1}^{2n} v_k(\xi)\, u_k^{[\nu]}(\xi) - \sum_{k=1}^{2n} w_k(\xi)\, u_k^{[\nu]}(\xi) = \\ = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \nu = 0, 1, \ldots, 2n-2, \\ (-1)^{n-1} & \text{при} \quad \nu = 2n-1. \end{cases}$$

Беря последовательные квазипроизводные обеих частей последнего равенства, можно легко убедиться, что вообще

$$\sum_{k=1}^{2n} v_k^{[j]}(\xi)\, u_k^{[\nu]}(\xi) - \sum_{k=1}^{2n} w_k^{[j]}(\xi)\, u_k^{[\nu]}(\xi) = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad j+\nu \neq 2n-1, \\ (-1)^{n-1} & \text{при} \quad j+\nu = 2n-1. \end{cases}$$

Это означает, что квазипроизводные $G_{j\nu}(x, \xi, \mu)$ непрерывны в квадрате $\alpha \leqslant x, \xi \leqslant \beta$, если $j+\nu \neq 2n-1$, и имеют на диагонали $x = \xi$ скачок, равный $(-1)^{n-1}$, если $j+\nu = 2n-1$. Так как этим же свойством обладают и квазипроизводные $G_{j\nu}(x, \xi, \bar{\mu})$, то разности $2iK_{j\nu}(x, \xi, \mu) = G_{j\nu}(x, \xi, \mu) - G_{j\nu}(x, \xi, \bar{\mu})$ непрерывны в квадрате $\alpha \leqslant x$, $\xi \leqslant \beta$.

Пусть теперь для определенности $\tau>0$. Из формулы (42) заключаем, что

$$\frac{1}{h^2}\{K(x, x, \mu)-K(x, x+h, \mu)-K(x+h, x, \mu)+K(x+h, x+h, \mu)\}=$$

$$=\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{[u_k(x+h, \lambda)-u_k(x, \lambda)][u_j(x+h, \lambda)-u_j(x, \lambda)]}{|\lambda-\mu|^2 h^2}\,d\sigma_{jk}(\lambda)\geqslant$$

$$\geqslant\tau\int_{\Delta}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{[u_k(x+h, \lambda)-u_k(x, \lambda)][u_j(x+h, \lambda)-u_j(x, \lambda)]}{|\lambda-\mu|^2 h^2}\,d\sigma_{jk}(\lambda),$$

где Δ — произвольный конечный интервал.

Переходя в этом неравенстве к пределу сначала при $h\to 0$, а затем при $\Delta\to(-\infty, \infty)$, получим

$$K_{11}(x, x, \mu)\geqslant\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{u_k'(x, \lambda)\,u_j'(x, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\,d\sigma_{jk}(\lambda)=$$

$$=\tau\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{u_k^{[1]}(x, \lambda)\,u_j^{[1]}(x, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\,d\sigma_{jk}(\lambda), \tag{43}$$

ибо производные первого порядка совпадают с квазипроизводными. На основании неравенства Коши—Буняковского отсюда заключаем, что при $\nu=0$ и $\nu=1$

$$\left|\int_{N_1}^{N_2}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{u_k^{[1]}(x, \lambda)\,u_j^{[\nu]}(y, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\,d\sigma_{jk}(\lambda)\right|^2\leqslant$$

$$\leqslant\int_{N_1}^{N_2}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{u_k^{[1]}(x, \lambda)\,u_j^{[1]}(x, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\,d\sigma_{jk}(\lambda)\int_{N_1}^{N_2}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{u_k^{[\nu]}(y, \lambda)\,u_j^{[\nu]}(y, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\,d\sigma_{jk}(\lambda)\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\tau}K_{11}(x, x, \mu)\int_{N_1}^{N_2}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{u_k^{[\nu]}(y, \lambda)\,u_j^{[\nu]}(y, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\,d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Но функция $K_{11}(x, x, \mu)$ непрерывна, а потому ограничена в интервале $[\alpha, \beta]$; кроме того, в силу (39) и (43) при $\nu=0$ и $\nu=1$ интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty}\sum_{j,k=1}^{2n}\frac{u_k^{[\nu]}(y, \lambda)\,u_j^{[\nu]}(y, \lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\,d\sigma_{jk}(\lambda)$$

сходится. Поэтому из последнего неравенства вытекает, что при $\nu = 0$, $\nu = 1$ и фиксированном y интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_k^{[1]}(x,\lambda)\, u_j^{[\nu]}(y,\lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda)$$

сходится равномерно относительно x в интервале $[\alpha, \beta]$. Но в таком случае равенство (42) можно дифференцировать по x под знаком интеграла, так что

$$K_{10}(x, \xi, \mu) = \tau \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_k^{[1]}(x,\lambda)\, u_j(\xi,\lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda).$$

Повторяя эти рассуждения, мы убеждаемся в справедливости равенства

$$K_{\nu q}(x, \xi, \mu) = \tau \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_k^{[\nu]}(x,\lambda)\, u_j^{[q]}(\xi,\lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda) \tag{44}$$

при ν, $q = 0, 1$. В частности, при $\nu = 0, 1$

$$K_{\nu\nu}(x, x, \mu) = \tau \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_k^{[\nu]}(x,\lambda)\, u_j^{[\nu]}(x,\lambda)}{|\lambda-\mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda).$$

На основании теоремы Дини этот последний интеграл сходится равномерно; но тогда, пользуясь неравенством Коши — Буняковского, легко убедиться в равномерной сходимости интеграла в (44) в квадрате $\alpha \leqslant x$, $\xi \leqslant \beta$.

Применяя предыдущий прием к равенству (44) при ν, $q = 0, 1$, мы убеждаемся в его справедливости и при ν, $q = 0, 1, 2$. Повторяя это рассуждение, мы докажем равенство (44) при ν, $q = 0, 1, 2, \ldots, n-1$. Дальнейшие рассуждения следует несколько видоизменить, ибо квазипроизводные при $\nu > n$ или $q > n$ не совпадают с производными. Так, например, для получения формулы (44) при $\nu = n$ и $q = n$ умножим на $[p_0(x)]^2$ обе части неравенства

$$\left.\frac{\partial^2 K_{n-1,\,n-1}}{\partial x\, \partial \xi}\right|_{\xi=x} \geqslant$$

$$\geqslant \tau \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{1}{|\lambda-\mu|^2} \frac{d}{dx}\left[u_k^{[n-1]}(x,\lambda)\right] \frac{d}{dx}\left[u_j^{[n-1]}(x,\lambda)\right] d\sigma_{jk}(\lambda),$$

которое получается из (44) при $\nu = q = n-1$ так же, как неравенство (43) получается из (42), Мы получим тогда неравенство

$$K_{nn}(x,\ x) \geqslant \tau \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\ k=1}^{2n} \frac{u_k^{[n]}(x,\ \lambda)\, u_j^{[n]}(x,\ \lambda)}{|\lambda - \mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda),$$

к которому снова можно применить предыдущие рассуждения, ибо функция $K_{nn}(x,\ x)$ непрерывна. Следовательно, можно доказать равномерную сходимость интеграла в (44) при $\nu,\ q \leqslant n$ и одном фиксированном переменном, из которой уже следует само равенство (44) при $\nu,\ q \leqslant n$.

Действительно, положим, например,

$$S(x,\ \xi,\ \mu) = \tau \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\ k=1}^{2n} \frac{u_k^{[n]}(x,\ \lambda)\, u_j^{[n-1]}(\xi,\ \lambda)}{|\lambda - \mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda),$$

умножим обе части этого равенства на $\frac{1}{p_0(x)}$ и проинтегрируем по x в некотором конечном интервале $\Delta \subset [a,\ b]$. Так как функция $\frac{1}{p_0(x)}$ суммируема в Δ, то интегрирование можно произвести под знаком равномерно сходящегося интеграла *) по $d\sigma_{jk}(\lambda)$. Учитывая при этом формулу (44), для $\nu = n-1$, $q = n-1$ мы получим

$$\int_{\Delta} \frac{1}{p_0(x)} S(x,\ \xi,\ \mu)\, dx =$$

$$= \tau \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\ k=1}^{2n} \frac{1}{|\lambda - \mu|^2}\, \Delta u_k^{[n-1]}(x,\ \lambda)\, u_j^{[n-1]}(\xi,\ \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda) =$$

$$= \tau\, \Delta K_{n-1,\ n-1}(x,\ \xi,\ \mu),$$

---

*) Мы пользуемся здесь следующим предложением.

Если интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ \lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

сходится равномерно относительно x в интервале $[\alpha,\ \beta]$, *а функция* $g(x)$ *суммируема в этом интервале, то*

$$\int_{\alpha}^{\beta} g(x) \left[\int_{-\infty}^{\infty} f(x,\ \lambda)\, d\sigma(\lambda) \right] dx = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_{\alpha}^{\beta} g(x)\, f(x,\ \lambda)\, dx \right] d\sigma(\lambda).$$

Чтобы в этом убедиться, выберем интервал $\Delta = (N_1,\ N_2)$ так, что

$$\left| \int_{\Delta} f(x,\ \lambda)\, d\sigma(\lambda) \right| < \varepsilon \quad \text{при} \quad \alpha \leqslant x \leqslant \beta.$$

Тогда

$$\left| \int_{\alpha}^{\beta} g(x) \left[\int_{\Delta} f(x,\ \lambda)\, d\sigma(\lambda) \right] dx \right| < \varepsilon \int_{\alpha}^{\beta} |g(x)|\, dx.$$

где $\Delta u_k^{[n-1]}(x, \lambda)$, $\Delta K_{n-1,\, n-1}(x, \xi, \mu)$ — приращения по x в интервале Δ функций $u_k^{(n-1)}$, $K_{n-1,\, n-1}$. Отсюда

$$\frac{1}{p_0(x)} S(x, \xi, \mu) = \tau \frac{\partial K_{n-1,\, n-1}}{\partial x};$$

следовательно,

$$S(x, \xi, \mu) = \tau K_{n,\, n-1}(x, \xi, \mu).$$

Тем самым формула (44) доказана при $\nu = n$, $q = n-1$. Аналогично она доказывается при $\nu \leqslant 2n-1$, $q \leqslant 2n-1$.

Замечание. Если спектр оператора L дискретен, то функция распределения $\sigma(\lambda)$ является ступенчатой, имеющей счетное число скачков в точках

$$\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots,$$

являющихся всевозможными собственными значениями этого оператора. Формулы (18) и (17) примут тогда вид

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j,\, k=1}^{2n} [\sigma_{j,\, k}(\lambda_\nu) - \sigma_{jk}(\lambda_\nu - 0)]\, u_k(x, \lambda_\nu)\, \varphi_j(\lambda_\nu), \tag{45}$$

где

$$\varphi_j(\lambda_\nu) = \int_a^b f(x)\, u_j(x, \lambda_\nu)\, dx.$$

С другой стороны, из формулы (30) заключаем, что

$$(P_{\lambda_\nu} - P_{\lambda_\nu - 0}) f(x) = \sum_{j,\, k=1}^{2n} [\sigma_{jk}(\lambda_\nu) - \sigma_{jk}(\lambda_\nu - 0)]\, u_k(x, \lambda_\nu)\, \varphi_j(\lambda_\nu)$$

есть собственная функция, отвечающая собственному значению λ_ν. Но при фиксированном ν числа $\varphi_j(\lambda_\nu)$ могут быть совершенно произвольными; поэтому функции

$$\omega_{j\nu}(x) = \sum_{k=1}^{2n} [\sigma_{jk}(\lambda_\nu) - \sigma_{jk}(\lambda_\nu - 0)]\, u_k(x, \lambda_\nu)$$

являются также собственными функциями, отвечающими собственному значению λ_ν. Формула (45) принимает вид

$$f(x) = \sum_{\nu=1}^{\infty} \sum_{j=1}^{2n} \varphi_j(\lambda_\nu)\, \omega_{j\nu}(x),$$

и, следовательно, представляет собой разложение функции $f(x)$ в ряд по собственным функциям оператора L, сходящийся в смысле нормы в $L^2(a, b)$.

Таким образом, формула (18) представляет собой обобщение такого разложения для случая непрерывного спектра.

Подобно тому как разложение в ряд по собственным функциям можно рассматривать как обобщение разложения в ряд

Фурье, формулу (18) можно рассматривать как обобщенные разложения в интеграл Фурье. Таким образом, взаимно обратные формулы (17) и (18) являются обобщением взаимно обратных интегральных преобразований Фурье.

А) Б. М. Левитан (см. Левитан [2] и [3]) предложил элементарное доказательство *) существования функции $\sigma(\lambda)$, осуществляющей взаимно обратные отображения (17) и (18). Приведем это доказательство.

Для простоты рассуждения дополнительно предположим, что функции $p_0(x)$, $p_1(x), \ldots, p_n(x)$ достаточное число раз непрерывно дифференцируемы в интервале (a, b). Решения $u_j(x, \lambda)$ уравнения $l(y) = \lambda y$ выберем теперь так, что

$$u_j^{(k-1)}(x_0, \lambda) = \begin{cases} 1 & \text{при } j = k, \\ 0 & \text{при } j \neq k, \end{cases} \qquad j, k = 1, 2, \ldots, 2n. \tag{46}$$

Пусть функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до $(2n)$-го порядка включительно и обращается в нуль вне некоторого конечного интервала $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$.

Рассмотрим оператор L_1 в интервале $[\alpha, \beta]$, определенный данным дифференциальным выражением $l(y)$ и какими-нибудь самосопряженными краевыми условиями на концах этого интервала Оператор L_1 регулярен. Пусть $\{y_m(x)\}$ — полная ортонормальная система собственных функций, а $\lambda_1, \lambda_2, \ldots,$ — соответствующие собственные значения оператора L_1. Эти функции являются линейными комбинациями функций $u_j(x, \lambda)$, так что можно положить

$$y_m(x) = \sum_{i=1}^{2n} \alpha_i^{(m)} u_i(x, \lambda_m). \tag{47}$$

В силу равенства Парсеваля, доказанного для регулярных операторов в n° 2 § 5

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = \int_\alpha^\beta |f(x)|^2\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_\alpha^\beta f(x)\,y_m(x)\,dx \right|^2 = \sum_{|\lambda_m| \leqslant \mu} + \sum_{|\lambda_m| > \mu}.$$

Но согласно формуле Лагранжа

$$\int_\alpha^\beta f(x)\,y_m(x)\,dx = \frac{1}{\lambda_m} \int_\alpha^\beta f(x)\,L_1 y_m\,dx = \frac{1}{\lambda_m} \int_\alpha^\beta l(f)\,y_m\,dx,$$

и потому

$$\sum_{|\lambda_m| > \mu} \left| \int_\alpha^\beta f(x)\,y_m(x)\,dx \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu^2} \sum_{|\lambda_m| > \mu} \left| \int_\alpha^\beta l(f)\,y_m(x)\,dx \right|^2 \leqslant \frac{1}{\mu^2} \int_\alpha^\beta |l(f)|^2\,dx. \tag{48}$$

*) По поводу обобщения этого доказательства на операторы в пространстве (бесконечномерных) вектор-функций см. Рофе-Бекетов [1].

Следовательно, эта сумма стремится к нулю при $\mu \to \infty$ Подставляя, далее, вместо функции $y_m(x)$ ее выражение из (47), получим

$$\sum_{|\lambda_m| \leqslant \mu} \left| \int_\alpha^\beta f(x)\, y_m(x)\, dx \right|^2 =$$

$$= \sum_{|\lambda_m| \leqslant \mu} \sum_{j,\, k=1}^{2n} \alpha_j^{(m)} \bar{\alpha}_k^{(m)} \int_\alpha^\beta f(x)\, u_j(x, \lambda_m)\, dx \overline{\int_\alpha^\beta f(x)\, u_k(x, \lambda_m)\, dx} =$$

$$= \int_{-\mu}^{\mu} \sum_{j,\, k=1}^{2n} \varphi_j(\lambda)\, \overline{\varphi_k(\lambda)}\, d\sigma_{jk}(\lambda, \alpha, \beta), \tag{49}$$

где обозначено

$$\sigma_{jk}(\lambda;\, \alpha, \beta) = \begin{cases} -\sum\limits_{0 \geqslant \lambda_m > \lambda} \alpha_j^{(m)} \bar{\alpha}_k^{(m)} & \text{при} \quad \lambda \leqslant 0, \\ \sum\limits_{0 < \lambda_m \leqslant \lambda} \alpha_j^{(m)} \bar{\alpha}_k^{(m)} & \text{при} \quad \lambda > 0. \end{cases} \tag{50}$$

При фиксированном μ *вариации функций* $\sigma_{jk}(\lambda;\, \alpha, \beta)$ *ограничены в интервале* $(-\mu, \mu)$ *равномерно относительно* α, β.

Для доказательства рассмотрим функции $v_j(x, h)$, имеющие непрерывные производные до $(2n)$-го порядка включительно, равные нулю вне интервала $(x_0, x_0 + h)$ и такие, что

$$v_j(x, h) \geqslant 0, \quad \int_{x_0}^{x_0+h} v_j(x, h)\, dx = 1 \tag{51}$$

Применяя к функциям $v_k^{(k-1)}(x, h)$ равенство Парсеваля и интегрируя по частям, получим

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \left\{ v_k^{(k-1)}(x, h) \right\}^2 dx = \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} v_k^{(k-1)}(x, h)\, y_m(x)\, dx \right|^2 =$$

$$= \sum_{m=1}^{\infty} \left| \int_{x_0}^{x_0+h} v_k(x, h)\, y_m^{(k-1)}(x)\, dx \right|^2. \tag{52}$$

С другой стороны, из (46), (51) и непрерывности функций $u_j^{(k)}(x, \lambda)$, $j, k = 1, 2, \ldots, 2n$, легко следует, что при достаточно малом h

$$\frac{3}{2} > \int_{x_0}^{x_0+h} v_k(x, h)\, u_k^{(k-1)}(x, \lambda_m)\, dx > \frac{1}{\sqrt{2}},$$

$$\left| \int_{x_0}^{x_0+h} v_k(x, h)\, u_j^{(k-1)}(x, \lambda_m)\, dx \right| < \frac{1}{8n(2n-1)} \quad \text{при} \quad j \neq k.$$

Тогда

$$\left|\int_{x_0}^{x_0+h} v_k^{(k-1)}(x, h)\, y_m(x)\, dx\right|^2 = \left|\sum_{j=1}^{2n} \alpha_j^{(m)} \int_{x_0}^{x_0+h} v_k(x, h)\, u_j^{(k-1)}(x, \lambda_m)\, dx\right|^2 =$$

$$= \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j^{(m)}|^2 \left|\int_{x_0}^{x_0+h} v_k(x, h)\, u_j^{(k-1)}(x, \lambda_m)\, dx\right|^2 +$$

$$+ 2\Re \sum_{j>i} \alpha_j^{(m)} \bar{\alpha}_i^{(m)} \int_{x_0}^{x_0+h} v_k(x, h)\, u_j^{(k-1)}(x, \lambda_m)\, dx \int_{x_0}^{x_0+h} v_k(x, h)\, u_i^{(k-1)}(x, \lambda_m)\, dx >$$

$$> \frac{1}{2} |\alpha_k^{(m)}|^2 - \frac{3}{16n(2n-1)}\, 2 \sum_{j>i} |\alpha_j^{(m)}|\, |\alpha_i^{(m)}| \geqslant \frac{1}{2} |\alpha_k^{(m)}|^2 - \frac{3}{16n} \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j^{(m)}|^2,$$

ибо

$$2 \sum_{j>i} |\alpha_j^{(m)}|\, |\alpha_i^{(m)}| \leqslant (2n-1) \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j^{(m)}|^2.$$

Отсюда и из (52) заключаем, что

$$\int_{x_0}^{x_0+h} \left\{v_k^{(k-1)}(x, h)\right\}^2 dx \geqslant \frac{1}{2} \sum_{|\lambda_m| \leqslant \mu} |\alpha_k^{(m)}|^2 - \frac{3}{16n} \sum_{|\lambda_m| \leqslant \mu} \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j^{(m)}|^2.$$

Полагая здесь $k = 1, 2, \ldots, 2n$ и суммируя полученные неравенства, найдем, что

$$\sum_{k=1}^{2n} \int_{x_0}^{x_0+h} \left\{v_k^{(k-1)}(x, h)\right\}^2 dx \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{2} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\lambda_m| \leqslant \mu} |\alpha_k^{(m)}|^2 - \frac{3}{16n} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\lambda_m| \leqslant \mu} \sum_{j=1}^{2n} |\alpha_j^{(m)}|^2 = \frac{1}{8} \sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\lambda_m| \leqslant \mu} |\alpha_k^{(m)}|^2$$

Следовательно,

$$\sum_{k=1}^{2n} \sum_{|\lambda_m| \leqslant \mu} |\alpha_k^{(m)}|^2 \leqslant 8 \sum_{k=1}^{2n} \int_{x_0}^{x_0+h} \left\{v_k^{(k-1)}(x, h)\right\}^2 dx.$$

В последнем неравенстве правая часть не зависит от α и β Следовательно, наше утверждение доказано для функций $\sigma_{ii}(\lambda; \alpha, \beta)$; для $\sigma_{jk}(\lambda; \alpha, \beta)$ оно теперь вытекает из неравенства Коши — Буняковского.

Пользуясь первой теоремой Хелли (см Смирнов [1], гл I, n° 12 или Натансон [1], гл. VIII), легко установить, что для некоторой последовательности значений α, β, удовлетворяющей условию $\alpha \to a$, $\beta \to b$, существует предельная матричная функция $\sigma_{jk}(\lambda) = \lim \sigma_{jk}(\lambda, \alpha, \beta)$ Переходя в (19) к пределу, пользуясь оценкой (52) и применяя вторую теорему Хелли, мы заключаем, что

$$\int_a^b |f(x)|^2\,dx = \sum_{j,\,k=1}^{2n} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_j(\lambda)\,\overline{\varphi_k(\lambda)}\,d\sigma_{jk}(\lambda).$$

При помощи этой формулы легко показать, что равенство (17) осуществляет изометрическое отображение $L^2(a, b)$ в L^2_σ, а равенство (18) — обратное изометрическое отображение. Отметим, что это доказательство выясняет смысл спектральной функции распределения $\sigma(\lambda) = (\sigma_{jk}(\lambda))$. Действительно, как видно из формул (49) и (50), функция $(\sigma_{jk}(\lambda;\alpha,\beta))$, а потому и $(\sigma_{jk}(\lambda))$ осуществляет нормировку функций $u_j(x, \lambda)$, вообще говоря, не нормированных.

Вопрос о том, можно ли приемом, описанным в этом доказательстве, получить все спектральные функции распределения $\sigma(\lambda)$, отвечающие всевозможным самосопряженным расширениям L_u оператора L_0 (включая расширения с выходом из $L^2(a, b)$), а также вопрос о том, как этим приемом получить спектральную функцию распределения, отвечающую данному расширению L_u, изучались С. А. Орловым (см. Орлов [2, 3]).

Б) Отметим, что со времени первого издания настоящей книги техника вывода формул обращения для различных конкретных операторов значительно развилась. Остановимся на этом несколько более подробно.

Зададимся вопросом о том, что существенно нового в конкретном случае оператора L_u добавляет теорема 2 § 21 (теорема о формулах обращения) к теореме 2 n° 6 § 20 (теореме об общей канонической форме самосопряженного оператора с n-кратным спектром). Как не трудно видеть, ответ на этот вопрос состоит в следующем. В теореме о формулах обращения указано конкретное аналитическое выражение для изометрического отображения пространства $L^2(a, b)$ на пространство L^2_σ, при котором рассматриваемый оператор L_u переходит в оператор Λ_σ. Это отображение задается посредством формул (17). Присматриваясь к формулам (17), легко уяснить, в чем заключается трудность построения формул обращения в рамках общей абстрактной теории гильбертова пространства. Действительно, формулы (17) содержат решения $u_j(x, \lambda)$ уравнения $l(y) = \lambda y$, которые, вообще говоря, не только не принадлежат области определения $\mathfrak{D}_{L_u}$ оператора L_u, но и не обязаны быть элементами гильбертова пространства $L^2(a, b)$. Например, если L_u — самосопряженный оператор, порождаемый в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ дифференциальным выражением $l(y) = iy'$, то $u(x, \lambda) = e^{i\lambda x} \overline{\in} L^2(-\infty, \infty)$ для всех λ. Решающее значение для преодоления указанной здесь трудности имела работа И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко (см. Гельфанд и Костюченко [1]). Их метод, так называемый метод *оснащения гильбертова пространства*, в общих чертах заключается в следующем.

В гильбертовом пространстве H выбирается некоторое линейное плотное подмножество Φ. В подмножество Φ вводится новое определение понятия предела так, чтобы из сходимости в Φ вытекала сходимость в смысле нормы H и чтобы пространство Φ было полным. Обозначим через Φ' пространство всех линейных непрерывных функционалов пространства Φ. Так как $\Phi \subset H$, то с точностью до изоморфизма имеет место включение $H \subset \Phi'$ (см. теорему об общем виде линейного непрерывного функционала в гильбертовом пространстве n° 2 § 10). Таким образом,

$$\Phi \subset H \subset \Phi'; \qquad (*)$$

здесь включения носят не только теоретико-множественный, но и топологический характер: сходимость в смысле Ф влечет сходимость по норме в H, а из сходимости в H вытекает сходимость соответствующей последовательности функционалов из Ф' в каждой точке Ф. Цепочка пространств Ф, H, Ф', обладающих указанными выше свойствами, называется *оснащенным гильбертовым пространством.*

Пусть теперь A — самосопряженный оператор в гильбертовом пространстве H с простым спектром (ради простоты). Пусть P_λ — спектральная функция оператора A, g — какой-либо порождающий элемент, $\sigma(\lambda)=(P_\lambda g, g)$. Предположим сначала, что спектр A чисто дискретен и что $\lambda_1, \lambda_2, \ldots$ — все собственные значения этого оператора. Тогда, как нетрудно видеть, для каждого λ существует (в смысле нормы H) предел

$$u_\lambda = dP_\lambda g/d\sigma(\lambda) = \lim_{\Delta\lambda\to 0} (P_{\lambda+\Delta\lambda} - P_\lambda) g/[\sigma(\lambda+\Delta\lambda)-\sigma(\lambda)].$$

При этом оказывается, что $u_\lambda = 0$, если λ не принадлежит спектру, и что элементы $u_{\lambda_1}, u_{\lambda_2}, \ldots$ образуют полную систему собственных векторов оператора A. Кроме того, роль формул (17) могут выполнять соотношения $\varphi(\lambda)=(f, u_\lambda)$, где круглые скобки обозначают скалярное произведение в H и $f\in H$. Предположим теперь, что существует точка λ_0 спектра A, не являющаяся собственным значением этого оператора. Тогда при $\lambda=\lambda_0$ производная $dP_\lambda g/d\sigma(\lambda)$ не существует в пространстве H. Однако если оснащение (*) выполнено «надлежащим» образом, то эта производная существует в более широком пространстве Ф': $dP_\lambda g/d\sigma(\lambda)=u_\lambda\in\Phi'$. При этом оказывается, что u_λ является *«обобщенным собственным элементом»* (точнее, собственным функционалом) оператора A в следующем смысле: $u_\lambda(Af)=\lambda u_\lambda(f)$ для всех $f\in\Phi$ (предполагается выполненным условие $\Phi\subset\mathfrak{D}_A$). Теперь роль формул (17) может выполнять соотношение $\varphi(\lambda)=u_\lambda(f)$, $f\in\Phi$.

В цитированной выше работе И. М. Гельфанд и А. Г. Костюченко доказали, что для каждого самосопряженного оператора A «надлежащее» оснащение может быть построено. При этом полученная система обобщенных собственных элементов $u_\lambda = dP_\lambda/d\sigma(\lambda)$ оказывается *полной и ортогональной* в том смысле, что для каждого $f\in\Phi$ (напомним, что Ф плотно в H) имеет место обобщенное равенство Парсеваля

$$\|f\|^2 = \int |u_\lambda(f)|^2\, d\sigma(\lambda). \qquad (**)$$

Результат И. М. Гельфанда и А. Г. Костюченко стимулировал появление значительного количества работ, посвященных связанной с ним тематике. Отметим, что, в частности, весьма существенным является вопрос о том, насколько широким можно выбрать пространство $\Phi\subset\mathfrak{D}_A\subset H$. Действительно, чем шире это пространство, тем уже пространство Ф', а следовательно, тем больше у нас сведений о природе обобщенных собственных элементов u_λ. В этом направлении весьма важные результаты были получены Ю. М. Березанским и Г. И. Кацем (см. Березанский [1—3] и Кац [1—3]). Обстоятельное изложение вопросов, связанных с процедурой оснащения, читатель может найти в любой из следующих монографий· Березанский [4], Гельфанд и Шилов [1], Гельфанд и Виленкин [1], Морен [1].

Из других методов вывода формул обращения отметим еще осуществленный Б М Левитаном метод конечноразностной аппроксимации дифференциального выражения со сведением к линейным алгебраическим уравнениям, а также метод И. М. Гельфанда для уравнений с периодическими коэффициентами (см. приложения I и VIII к книге Титчмарш [1], а также Гельфанд [2]).

Кроме того, отметим, что для самосопряженных операторов второго порядка формулы обращения могут быть выведены с помощью метода М. Рисса расширения позитивных функционалов, из построенной В. А Марченко спектральной теории несамосопряженных операторов (см Марченко [4], Рофе-Бекетов [1]).

В заключение заметим, что можно построить формулы обращения, аналогичные формулам (17), (18), отвечающие самосопряженному расширению минимального симметрического оператора L_0 с выходом из пространства $L^2(a, b)$ (см. n° 8а § 14) Однако в этом случае образ $L^2(a, b)$ при соответствующем изометрическом отображении не плотен в L^2_σ. По этому поводу см. Штраус [2].

3. Случай одного регулярного конца. Порождающий базис $g_{1,\Delta}, g_{2,\Delta}, \ldots, g_{2n,\Delta}$, построенный при доказательстве теоремы 2, не является, вообще говоря, минимальным, и потому в некоторых случаях порядок матричной функции распределения может быть понижен *). Примером является тот случай, когда один из концов интервала (a, b), например $x = a$, регулярен.

Рассмотрим сначала тот случай, когда индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n). Обозначим через $\mathfrak{D}_0$ и $\mathfrak{D}$ области определения операторов L_0 и $\overset{*}{L_0} = L$ соответственно. Всякое самосопряженное расширение L_u оператора L_0 определяется краевыми условиями вида

$$[y, w_k]_a = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{53}$$

где $w_1, w_2, \ldots, w_n$ — функции из $\mathfrak{D}$, линейно независимые по модулю $\mathfrak{D}_0$ и удовлетворяющие соотношениям

$$[w_j, w_k]_a = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n \tag{54}$$

(см. n° 3 § 18).

*) Определение минимального порождающего базиса для различных классов дифференциальных операторов, а следовательно, и кратности их спектра в зависимости от свойств коэффициентов дифференциального выражения является одной из важнейших задач в теории дифференциальных операторов (см. предисловие, стр. 9—10).

Отметим некоторые результаты, связанные с этой задачей. И. С Кац выяснил, как зависит кратность спектра дифференциального оператора второго порядка, действующего в пространстве $L^2(a, b)$, от свойств спектральных функций дифференциальных операторов, порожденных в пространствах $L^2(a, c)$ и $L^2(c, b)$ тем же дифференциальным выражением, что и исходный оператор (c — произвольная внутренняя точка интервала (a, b)). А. В. Штраус изучал кратность спектра самосопряженного дифференциального оператора произвольного четного порядка $2n$. Им получены условия, достаточные для того, чтобы кратность спектра была меньше чем $2n$ в случае двух сингулярных концов и меньше чем n в случае одного сингулярного конца (см n° 2 § 21, следствие 1 и теорему 2′ настоящего n°). При этом кратность спектра в промежутке $[\alpha, \beta]$ оценивается в предположении, что дифференциальное уравнение $l(y) = \lambda y$ имеет для всех $\lambda \in [\alpha, \beta]$ решения с определенным асимптотическим поведением вблизи сингулярных концов (см. Кац [3, 4] и Штраус [4]).

Обозначим через

$$u_1(x, \lambda),\ u_2(x, \lambda),\ \ldots,\ u_n(x, \lambda) \tag{55}$$

какие-нибудь линейно независимые решения уравнения $l(y) = \lambda y$, являющиеся целыми аналитическими функциями параметра λ и удовлетворяющие условиям (53):

$$[u_j, w_k]_a = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{56}$$

Пусть $\mathfrak{H}'$ обозначает совокупность всех функций $f(x)$ из $L^2(a, b)$, обращающихся в нуль вне некоторого конечного интервала $[a, \alpha]$, $a < \alpha < b$ (своего для каждой функции).

При помощи функций $u_j(x, \lambda)$ построим в $\mathfrak{H}'$ функционалы, полагая при $f \in \mathfrak{H}'$

$$\Phi_j(f, \lambda) = \int_a^b f(x)\, u_j(x, \lambda)\, dx, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{57}$$

Докажем, что *эти функционалы* (несмотря на то, что их только n) *удовлетворяют условиям* 1°, 2°, 3° *предложения* I. Очевидно, нуждаются в доказательстве только свойства 2° и 3°. Итак, пусть $f(x) = 0$ вне интервала $[a, \alpha]$, $a < \alpha < b$, и пусть

$$\Phi_j(f, \lambda) = \int_a^b f(x)\, u_j(x, \lambda)\, dx = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{58}$$

Обозначим через $\varphi(x)$, $a \leqslant x \leqslant \alpha$, решение уравнения

$$l(\varphi) - \lambda\varphi = f, \qquad a \leqslant x \leqslant \alpha,$$

удовлетворяющее условиям

$$\varphi^{[k]}(\alpha) = 0, \qquad k = 0, 1, \ldots, 2n - 1; \tag{59}$$

такое решение существует и притом только одно (см. n° 2 § 16). Докажем, что оно удовлетворяет условию (53). Применяя тождество Лагранжа, имеем

$$0 = \Phi_j(f, \lambda) = \int_a^b [l(\varphi) - \lambda\varphi]\, u_j(x, \lambda)\, dx =$$

$$= \int_a^b l(\varphi)\, u_j(x, \lambda)\, dx - \lambda \int_a^b \varphi(x)\, u_j(x, \lambda)\, dx =$$

$$= \int_a^b \varphi(x)\, l(u_j)\, dx - \lambda \int_a^b \varphi(x)\, u_j(x, \lambda)\, dx + [\varphi, u_j]_a^\alpha = [\varphi, u_j]_a, \tag{60}$$

ибо
$$l(u_j)=\lambda u_j$$
и, в силу соотношений (59),
$$[\varphi, u_j]_\alpha=0.$$
С другой стороны, векторы
$$w_k=\{w_k^{[0]}(a),\ w_k^{[1]}(a),\ \ldots,\ w_k^{[2n-1]}(a)\},\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$
являются полной линейно независимой системой решений уравнения (56). Поэтому из соотношений (60) заключаем, что вектор
$$\varphi=\{\varphi^{[0]}(a),\ \varphi^{[1]}(a),\ \ldots,\ \varphi^{[2n-1]}(a)\}$$
есть линейная комбинация векторов w_k. В силу (54) каждый из этих векторов, а потому и их линейная комбинация φ удовлетворяют условиям (53). Продолжая теперь функцию $\varphi(x)$ за пределы интервала $[a, \alpha]$ при помощи условия $\varphi(x)=0$ при $\alpha<x<b$ и учитывая соотношения (59), мы получим функцию $\varphi(x)\in\mathfrak{D}_{L_u}$. Следовательно, эта функция принадлежит $\mathfrak{H}'$ и есть решение уравнения
$$L_u\varphi-\lambda\varphi=f.$$
Свойство 2° доказано.

Для вывода свойства 3° применим снова тождество Лагранжа. При $f\in\mathfrak{D}_{L_u}$, $f\in\mathfrak{H}'$
$$\Phi_j(L_uf, \lambda)=\int_a^b l(f)\,u_j(x, \lambda)\,dx=-[f, u_j]_a+\int_a^b fl(u_j)\,dx=$$
$$=-[f, u_j]_a+\lambda\int_a^b fu_j\,dx=-[f, u_j]_a+\lambda\Phi_j(f, \lambda).$$
С другой стороны, формулы (54) и (56) показывают, что векторы
$$u_j=\{u_j^{[0]}(a),\ u_j^{[1]}(a),\ \ldots,\ u^{[2n-1]}(a)\}$$
суть линейные комбинации векторов w_k. Отсюда следует, что $[f, u_j]_a=0$, $j=1, 2, \ldots, n$, ибо $f\in\mathfrak{D}_{L_u}$, и потому $[f, w_k]=0$, $k=1, 2, \ldots, n$. Таким образом, $\Phi_j(L_uf, \lambda)=\lambda\Phi_j(f, \lambda)$, и свойство 3° также доказано.

Все остальные рассуждения n°n° 1 и 2 опираются только на эти три свойства. Вместо теоремы 2 мы получим тогда следующую теорему:

Теорема 2′. *Пусть конец $x=a$ интервала (a, b) регулярен и пусть индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n). Пусть, далее, L_u — самосопряженное расширение оператора L_0, определенное* *краевыми условиями* (53). *Существует матричная функция распределения*

$$\sigma(\lambda) = (\sigma_{jk}(\lambda)), \qquad j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n,$$

такая, что формулы

$$\varphi_j(\lambda) = \int_a^b f(x)\, u_j(x, \lambda)\, dx, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n, \tag{61}$$

и

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{n} \varphi_j(\lambda)\, u_k(x, \lambda)\, d\sigma_{jk}(\lambda) \tag{62}$$

устанавливают взаимно обратные изометрические отображения $L^2(a, b)$ *на* L^2_σ *и* L^2_σ *на* $L^2(a, b)$ *соответственно, переводящие друг в друга операторы* L_u *и* Λ_σ. *Следовательно, кратность спектра оператора* L_u *не превосходит* n.

При этом $u_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, *обозначает произвольную линейно независимую систему решений уравнения* $l(y) - \lambda y = 0$, *являющихся целыми аналитическими функциями параметра* λ *и удовлетворяющих условиям* (53).

Очевидно, следствия 2 и 3 из теоремы 2 n° 2 полностью остаются в силе, если только во всех формулах суммы $\sum\limits_{j,\,k=1}^{2n}$ заменить суммами $\sum\limits_{j,\,k=1}^{n}$ и если под $u_k(x, \lambda)$, $k = 1, 2, \ldots, n$, понимать линейно независимую систему решений уравнения $l(y) = \lambda y$, являющихся целыми аналитическими функциями параметра λ и удовлетворяющих условиям (53).

Наиболее просто формулируется эта теорема в случае дифференциального оператора L_0 с индексом дефекта (1,1), порожденного дифференциальным выражением второго порядка:

$$l(y) = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy.$$

Всякое самосопряженное расширение оператора L_0 определяется тогда краевым условием вида

$$py' - \theta y\,|_{x=a} = 0, \tag{63}$$

где θ — произвольное вещественное число (см. n° 3 § 18); обозначим через L_θ расширение, отвечающее данному θ. Пусть u_1, u_2 — два решения уравнения $l(y) - \lambda y = 0$, удовлетворяющие начальным условиям:

$$u_1\big|_{x=0} = 1, \quad pu_1'\big|_{x=0} = 0,$$
$$u_2\big|_{x=0} = 0, \quad pu_2'\big|_{x=0} = 1.$$

Тогда функция

$$u(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) + \theta u_2(x, \lambda)$$

есть решение уравнения $l(y) - \lambda y = 0$, удовлетворяющее условию (63). В рассматриваемом случае $n = 1$, и потому функция распределения является числовой функцией $\sigma(\lambda)$. Следовательно, формулы обращения (61) и (62) принимают вид

$$\varphi(\lambda) = \int_a^b f(x)\, u(x, \lambda)\, dx, \tag{64}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(\lambda)\, u(x, \lambda)\, d\sigma(\lambda). \tag{65}$$

Формулы (64) *и* (65) *устанавливают взаимно обратные изометрические отображения* $L^2(a, b)$ *на* L_σ^2 *и* L_σ^2 *на* $L^2(a, b)$ — *переводящие друг в друга операторы* L_θ *и* Λ_σ. *При этом интегралы в формулах* (64) *и* (65) *сходятся в смысле нормы в* L_σ^2 *и* $L^2(a, b)$ *соответственно.*

Из этого предложения следует, что *оператор* L_θ *имеет простой спектр.*

Мы рассмотрели случай оператора L_0 с индексом дефекта (n, n). Пусть теперь его индекс дефекта есть (m, m), где $m > n$. Тогда условия (53) определяют замкнутое симметрическое (но уже несамосопряженное) расширение L_u оператора L_0, если только функции $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$, кроме условий (54), удовлетворяют еще условиям

$$[\omega_j, \omega_k]_b = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{66}$$

Всякое самосопряженное расширение L_v оператора L_u есть, как легко видеть, расширение исходного оператора L_0, но, очевидно, уже не произвольное такое расширение. Обозначим через P_λ спектральную функцию оператора L_v; все рассуждения n°n° 2 и 3 остаются справедливыми в применении к этой спектральной функции. В частности, остаются верными теорема 2′ и следствие из нее, если только в них заменить оператор L_u оператором L_v. Так как условия (53) оставляют еще произвол в выборе оператора L_v, то будет существовать не одна, а бесчисленное множество различных функций распределения $\sigma(\lambda)$, для которых справедливы формулы (61) и (62), ибо они участвуют в интегральном представлении резольвент *различных* операторов L_v. Ниже мы увидим (см. n° 4), что в случае оператора L_0 с индексом дефекта (n, n) этого уже быть не может, т. е. что для данных функций $u_1(x, \lambda), \ldots, u_n(x, \lambda)$ существует *только одна* функция распределения $\sigma(\lambda)$.

Описанный выше прием построения функций $\sigma(\lambda)$ при помощи самосопряженных расширений L_v не дает описания *всех* функций $\sigma(\lambda)$ при фиксированной системе $u_1(x, \lambda), \ldots, u_n(x, \lambda)$. Такое описание получается, если кроме расширений L_v рассмотреть более общие самосопряженные расширения оператора L_u с выходом за пределы исходного пространства $L^2(a, b)$ (см. по этому поводу n° 8а § 14 и работы Наймарк [1—3], Крейн [3, 4] и Штраус [1, 2])

4. Формулы для спектральной функции распределения.

а) Случай одного регулярного конца. Пусть для определенности конец a регулярен; рассмотрим сначала тот случай, когда индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n).

Обозначим по-прежнему через L_u самосопряженное расширение оператора L_0, порожденное условиями (53), и пусть $G(x, \xi, \mu)$ — ядро резольвенты оператора L_u. При фиксированном ξ это ядро, рассматриваемое как функция от x, удовлетворяет краевым условиям (53) и потому при $a \leqslant x \leqslant \xi$ есть линейная комбинация функций $u_k(x, \mu)$:

$$G(x, \xi, \mu) = \sum_{k=1}^{n} u_k(x, \mu)\overline{g_k(\xi, \mu)} \quad \text{при} \quad x \leqslant \xi; \tag{67а}$$

следовательно, в силу соотношения $\overline{G(\xi, x, \mu)} = G(x, \xi, \bar{\mu})$

$$G(x, \xi, \mu) = \sum_{k=1}^{n} g_k(x, \bar{\mu})\overline{u_k(\xi, \bar{\mu})} \quad \text{при} \quad x \geqslant \xi. \tag{67б}$$

Очевидно, функции $g_k(x, \bar{\mu})$ также являются решениями уравнения $l(y) = \mu y$. При фиксированном x ядро $G(x, \xi, \mu)$, рассматриваемое как функция от ξ, принадлежит $L^2(a, b)$; отсюда и из формулы (67а) легко заключаем (см. по этому поводу n° 2 § 19), *что каждая из функций $g_k(\xi, \mu)$ принадлежит $L^2(a, b)$*.

Запишем теперь краевые условия (53) в виде

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{j,k} y^{[k-1]}(a) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{68}$$

так что числа α_{jk} удовлетворяют условиям

$$\sum_{\nu=1}^{n} (\alpha_{j,\nu}\bar{\alpha}_{k,2n-\nu+1} - \alpha_{j,2n-\nu+1}\bar{\alpha}_{k,\nu}) = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n$$

(см. п° 3 § 18). Предположим для определенности, что

$$\det (\alpha_{k,\,2n-\nu+1})_{k,\,\nu=1,\,\dots,\,n} \neq 0. \tag{69}$$

Тогда уравнения (68) можно решить относительно $y^{[n]}(a)$, $y^{[n+1]}(a), \dots, y^{[2n-1]}(a)$, и следовательно, условия (68) можно переписать в виде

$$y^{[\nu]}(a) = \sum_{j=1}^{n} \beta_{\nu j} y^{[j-1]}(a), \qquad \nu = n,\ n+1,\ \dots,\ 2n-1. \tag{70}$$

Очевидно, числа $y^{[j-1]}(a)$, $j = 1, 2, \dots, n$, могут быть при этом совершенно произвольными, если только выбрать числа $y^{[\nu]}(a)$ по формулам (70). Подчиним теперь функции $u_j(x, \lambda)$, $j = 1, 2, \dots, n$, условиям

$$u_j^{[\nu-1]}(a) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = \nu, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq \nu, \end{cases} \qquad \nu = 1, 2, \dots, n, \tag{71}$$

так что

$$u_k^{[\nu]}(a) = \beta_{\nu k}, \qquad \nu = n,\ n+1,\ \dots,\ 2n-1, \tag{72}$$

и положим

$$M_{\nu k}(\mu) = \overline{g_k^{[\nu-1]}(a, \mu)}; \qquad \nu,\ k = 1, 2, \dots, n.$$

Ясно, что $M_{\nu k}(\mu)$ — аналитические функции переменного μ, регулярные в каждой из полуплоскостей $\Im\mu > 0$, $\Im\mu < 0$. Матрица

$$M(\mu) = (M_{\nu k}(\mu))$$

называется *характеристической матрицей* оператора L_u. Из формулы (67а) заключаем, что

$$G_{q-1,\,\nu-1}(a-0,\ a+0,\ \mu) = M_{\nu q}(\mu),$$

причем из (67б) и непрерывности на диагонали $x = \xi$ квазипроизводных

$$G_{j,\,\nu}(x, \xi, \mu), \qquad j,\ \nu = 0, 1, \dots, n-1,$$

функции $G(x, \xi, \mu)$ вытекает, что

$$M_{\nu q}(\bar\mu) = \overline{M_{q\nu}(\mu)}, \quad \text{т. е.} \quad M(\bar\mu) = (M(\mu))^*. \tag{73}$$

С другой стороны, согласно (44)

$$G_{q-1,\,\nu-1}(a-0,\ a+0,\ \mu) - G_{q-1,\,\nu-1}(a-0,\ a+0,\ \bar\mu) =$$

$$= (\mu - \bar\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j,\,k=1}^{2n} \frac{u_k^{[q-1]}(a, \lambda)\, u_j^{[\nu-1]}(a, \lambda)}{|\lambda - \mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda) = (\mu - \bar\mu) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{\nu q}(\lambda)}{|\lambda - \mu|^2},$$

поэтому

$$M_{\nu q}(\mu)-M_{\nu q}(\bar{\mu})=(\mu-\bar{\mu})\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_{\nu q}(\lambda)}{|\lambda-\mu|^2}$$

или в силу (73)

$$M_{\nu q}(\mu)-\overline{M_{q\nu}(\mu)}=(\mu-\bar{\mu})\int\limits_{-\infty}^{\infty}\frac{d\sigma_{\nu q}(\lambda)}{|\lambda-\mu|^2}. \tag{74}$$

Применяя к этому равенству формулу обращения Стильтьеса (см. добавление 2), мы приходим к следующему результату.

Теорема 3. *Функция распределения* $\sigma(\lambda)=(\sigma_{jk}(\lambda))$ *выражается через характеристическую матрицу* $M(\mu)=(M_{jk}(\mu))$ *по формуле* *)

$$\sigma(\lambda)=\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{\pi}\int\limits_{\delta}^{\lambda+\delta}\Im M(\lambda+i\varepsilon)\,d\lambda, \tag{75}$$

где

$$\Im M(\mu)=\frac{1}{2i}[M(\mu)-(M(\mu))^*].$$

Если теперь условие (69) не выполняется, то обозначим через $q_1, q_2, \ldots, q_n$, $q_1<q_2<\ldots<q_n$ номера тех столбцов матрицы

$$\begin{pmatrix}\alpha_{1,1} & \ldots & \alpha_{1,2n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n,1} & \ldots & \alpha_{n,2n}\end{pmatrix},$$

для которых

$$\begin{vmatrix}\alpha_{1,q_1} & \ldots & \alpha_{1q_n}\\ \ldots & \ldots & \ldots\\ \alpha_{n,q_1} & \ldots & \alpha_{nq_n}\end{vmatrix}\neq 0. \tag{76}$$

Обозначим далее через $\nu_1, \nu_2, \ldots, \nu_n$, $\nu_1<\nu_2<\ldots<\nu_n$, номера, дополняющие номера $q_1, q_2, \ldots, q_n$ до $1, 2, \ldots, 2n$, и подчиним функции $u_k(x, \lambda)$ условиям

$$u_j^{[\nu_k-1]}(a)=\begin{cases}1 \text{ при } j=\nu_k,\\ 0 \text{ при } j\neq\nu_k.\end{cases}$$

---

*) В подробной записи формула (75) имеет вид

$$\sigma_{jk}(\lambda)=\lim_{\delta\to+0}\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\delta}^{\lambda+\delta}[M_{jk}(\lambda+i\varepsilon)-\overline{M_{kj}(\lambda+i\varepsilon)}]\,d\lambda.$$

Матрица $M(\mu)$ с элементами

$$M_{jk}(\mu) = \overline{g_k^{[\nu_j-1]}(a, \mu)}$$

называется тогда *характеристической матрицей* оператора L_v, *соответствующей системе индексов* $q_1, q_2, \ldots, q_n$.

Предыдущие рассуждения остаются применимыми и к этому случаю, так что и для этого случая теорема 3 остается справедливой.

Из теоремы 3 заключаем, что *в случае оператора L_0 с индексом дефекта (n, n) функция распределения $\sigma(\lambda) = (\sigma_{jk}(\lambda))$ однозначно определяется при заданных функциях $u_1(x, \lambda)$, $u_2(x, \lambda), \ldots, u_n(x, \lambda)$.*

Если теперь L_0 — оператор с индексом дефекта (m, m), $m > n$, то предыдущие рассуждения остаются в силе, если под $G(x, \xi, \mu)$ понимать ядро резольвенты самосопряженного расширения L_v оператора L_u (см. стр. 274). Различным таким расширениям будут отвечать различные характеристические матрицы $M(\mu)$, которые будут по-прежнему связаны с соответствующими функциями распределения формулой (75).

Поясним еще эти формулы для случая оператора второго порядка ($n = 1$), определенного дифференциальным выражением

$$l(y) = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy, \quad a < x < b,$$

с регулярным концом $x = a$.

Пусть индекс дефекта соответствующего оператора L_0 есть (1,1); его самосопряженные расширения L_θ определяются краевыми условиями:

$$y^{[1]}(a) - \theta y(a) = 0, \quad \bar{\theta} = \theta.$$

Предположим, что θ конечно; тогда можно пронормировать решение $u(x, \lambda)$ уравнения $l(y) = \lambda y$, полагая

$$u(a, \lambda) = 1, \tag{77а}$$

значит,

$$u^{[1]}(a, \lambda) = \theta. \tag{77б}$$

Очевидно, L_θ — вещественный оператор, и поэтому его резольвента есть оператор с симметрическим ядром; следовательно, в рассматриваемом случае

$$G(x, \xi, \mu) = \begin{cases} u(x, \mu)\overline{g(\xi, \mu)} & \text{при } x \leqslant \xi, \\ \overline{g(x, \mu)}u(\xi, \mu) & \text{при } x \geqslant \xi, \end{cases}$$

причем из соотношения

$$G_{10}(x, x+0, \mu) - G_{10}(x, x-0, \mu) = 1$$

следует, что

$$u^{[1]}(x, \mu)\overline{g(x, \mu)} - \overline{g^{[1]}(x, \mu)}\,u(x, \mu) = 1. \tag{78}$$

Роль характеристической матрицы играет *характеристическая функция*

$$M(\mu) = \overline{g(a, \mu)}; \tag{79}$$

соотношение (73) перепишется в виде

$$\overline{M(\mu)} = M(\bar{\mu}). \tag{80}$$

Полагая в (78) $x = a$, найдем, что

$$\theta\overline{g(a, \mu)} - \overline{g^{[1]}(a, \mu)} = 1. \tag{81}$$

Пусть $v(x, \lambda)$ — решение уравнения $l(y) = \lambda y$, удовлетворяющее условиям

$$v(a, \lambda) = 0, \quad v^{[1]}(a, \lambda) = -1. \tag{82}$$

Тогда из (81) заключаем, что

$$\theta[\overline{g(a, \mu)} - v(a, \mu)] - [\overline{g^{[1]}(a, \mu)} - v^{[1]}(a, \mu)] = 0;$$

сравнение этого условия с (77а), (77б) показывает, что

$$\overline{g(x, \mu)} - v(x, \mu) = [\overline{g(a, \mu)} - v(a, \mu)]\,u(x, \mu),$$

следовательно, в силу (79) и (82)

$$\overline{g(x, \mu)} - v(x, \mu) = M(\mu)\,u(x, \mu).$$

Отсюда

$$\overline{g(x, \mu)} = v(x, \mu) + M(\mu)\,u(x, \mu). \tag{83}$$

Таким образом, в случае оператора L_0 *с индексом дефекта* (1,1) *характеристическая функция* $M(\mu)$ *единственным образом определяется начальными условиями* (77а), (77б), (82) *и дополнительным условием*

$$v(x, \mu) + M(\mu)\,u(x, \mu) \in L^2(a, b).$$

При этом формула (75) принимает вид

$$\sigma(\lambda) = \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\delta}^{\lambda+\delta} \Im M(\lambda + i\varepsilon)\,d\lambda. \tag{84}$$

В случае же оператора L_0 с индексом дефекта (2,2) эти условия уже не будут однозначно определять характеристическую функцию $M(\mu)$ и таких функций будет существовать бесчисленное множество. При этом для соответствующих функций распределения $\sigma(\lambda)$ по-прежнему остается справедливой формула (84).

б) Формула для функции распределения в общем случае. Пусть теперь $u_1(x, \lambda)$, $u_2(x, \lambda), \ldots, u_{2n}(x, \lambda)$ — решения уравнения $l(y) = \lambda y$, удовлетворяющие условиям

$$u_k^{[\nu-1]}(c) = \begin{cases} 1 \text{ при } k = \nu, \\ 0 \text{ при } k \neq \nu, \end{cases}$$

$$k, \nu = 1, 2, \ldots, 2n, \quad a < c < b.$$

Обозначим через $G(x, \xi, \mu)$ ядро резольвенты самосопряженного расширения L_u оператора L_0; матрица $M(\mu)$ с элементами

$$M_{jk}(\mu) = G_{j-1,\, k-1}(c-0,\ c+0,\ \mu), \quad j, k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

называется *характеристической матрицей оператора* L_u, соответствующей данной системе $u_1, \ldots, u_{2n}$. Из свойства ядра $G(x, \xi, \mu)$ вытекает, что

$$M_{jk}(\bar{\mu}) = \overline{M_{jk}(\mu)}.$$

Воспользуемся теперь следствием 3 из теоремы 2 n°2. Полагая в формуле

$$G_{\nu q}(x, \xi, \mu) - G_{\nu q}(x, \xi, \bar{\mu}) = \\ = (\mu - \bar{\mu}) \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j, k=1}^{2n} \frac{u_j^{[\nu]}(x, \lambda)\, u_k^{[q]}(\xi, \lambda)}{|\lambda - \mu|^2}\, d\sigma_{jk}(\lambda)$$

$\xi = c + 0$, $x = c - 0$, найдем, учитывая начальные условия,

$$M_{jk}(\mu) - \overline{M_{kj}(\mu)} = (\mu - \bar{\mu}) \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{jk}(\lambda)}{|\lambda - \mu|^2}.$$

Применяя формулу обращения Стильтьеса, приходим к следующему результату.

Теорема 3'. *Функция распределения* $\sigma(\lambda) = (\sigma_{jk}(\lambda))$ *выражается через характеристическую матрицу* $M(\mu) = (M_{jk}(\mu))$ по формуле

$$\sigma(\lambda) = \lim_{\delta \to +0} \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_{\lambda}^{\lambda+\delta} \Im M(\lambda + i\varepsilon)\, d\lambda, \quad j, k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Одной из интересных задач является изучение асимптотического поведения функции $\sigma(\lambda)$ при больших значениях $|\lambda|$. Частным случаем этой задачи является изучение асимптотики дискретного спектра при больших значениях $|\lambda|$ в зависимости от свойств коэффициентов дифференциального выражения. Для операторов второго порядка существенные результаты об асимптотическом поведении функции $\sigma(\lambda)$ получены Б. М. Левитаном (см. Левитан [4]) и В. А. Марченко (см. Марченко [1]). См. также Милн [1] и Гартман [10], где рассматривается асимптотика дискретного спектра.

Более общей задачей (охватывающей как частный случай изучение асимптотики собственных функций дискретного спектра) является изучение асимптотического поведения спектрального ядра, т. е. ядра интегрального оператора P_Δ (см. следствие 2а п° 2 § 21). Эта задача для операторов второго порядка изучалась Б. М. Левитаном, а затем В. А. Марченко, а для операторов произвольного четного порядка — А. Г. Костюченко. Полученные при этом результаты использовались для доказательства теорем о равносходимости, локальной сходимости, суммируемости и дифференцируемости разложений по собственным функциям. Так, Б. М Левитан доказал, что разность между разложением по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора второго порядка и разложением в классический косинус-интеграл Фурье стремится равномерно к нулю в каждом конечном интервале изменения независимой переменной. По указанным здесь вопросам см. Хаар [1], Стоун [2], Титчмарш [1] (включая приложения к этой книге), Левитан [6], Марченко [2], Левитан и Саргсян [1], Саргсян [1], Костюченко [1, 2], Халилова [1], Рофе-Бекетов [5].

К задаче изучения асимптотики дискретного спектра примыкает вопрос, связанный с понятием следа оператора. Так как дифференциальные операторы не ограничены, то для них понятие следа в обычном смысле не имеет смысла. Однако в некоторых случаях разность двух таких операторов может оказаться оператором, имеющим конечный след. Кроме того, в некоторых случаях ряды, посредством которых можно формально выразить след, допускают регуляризацию, подобную регуляризации расходящихся несобственных интегралов методом Адамара. Эти, а также смежные вопросы изучались в работах: Дикий [1—3], Гельфанд [4], Гельфанд и Левитан [1], Гасымов [1], Гасымов и Левитан [2], Костюченко [2], Левитан [7], Лидский и Садовничий [1], Абдукадырев [1], Шевченко [1, 2].

Асимптотическое поведение собственных значений и спектральной функции распределения для задачи Штурма — Лиувилля в пространстве вектор-функций (со значениями в абстрактном гильбертовом пространстве) изучалось в работах: Рофе-Бекетов [1] и Костюченко и Левитан [1]. В последней работе рассмотрен случай, когда коэффициенты дифференциальных уравнений являются операторами, обратными к вполне непрерывным.

5. Примеры. 1) Тригонометрические функции. Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) = -y'', \quad 0 \leqslant x < \infty.$$

Уравнение

$$-y'' = iy$$

имеет линейно независимые решения

$$y_1 = e^{\frac{1-i}{\sqrt{2}}x}, \quad y_2 = e^{-\frac{1-i}{\sqrt{2}}x},$$

из которых первое не принадлежит, а второе принадлежит $L^2(0, \infty)$; следовательно, индекс дефекта соответствующего оператора L_0 есть (1,1). Его самосопряженные расширения L_u определяются граничными условиями вида

$$y'(0) = \theta y(0). \tag{85}$$

Решение $u(x, \lambda)$ уравнения

$$l(y) = \lambda y,$$

удовлетворяющее этому условию, имеет вид

$$u(x, \lambda) = \cos sx + \frac{\theta}{\sqrt{s}} \sin sx, \quad s = \sqrt{\lambda}; \tag{86}$$

для второго решения $v(x, \lambda)$, удовлетворяющего условиям

$$v(0, \lambda) = 0, \quad v'(0, \lambda) = -1,$$

имеем

$$v(x, \lambda) = -\frac{1}{s} \sin sx. \tag{87}$$

Отсюда при $\Im \mu > 0$

$$v(x, \mu) + M(\mu) u(x, \mu) = \left\{ M(\mu) \left[\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2i\sqrt{\mu}} \right] + \frac{1}{2i\sqrt{\mu}} \right\} e^{-i\sqrt{\mu}x} + \\ + \left\{ M(\mu) \left[\frac{1}{2} + \frac{\theta}{2i\sqrt{\mu}} \right] - \frac{1}{2i\sqrt{\mu}} \right\} e^{i\sqrt{\mu}x}. \tag{88}$$

Так как функция $v(x, \beta) + M(\mu) u(x, \beta)$ должна принадлежать $L^2(0, \infty)$, то должно быть

$$M(\mu) \left[\frac{1}{2} - \frac{\theta}{2i\sqrt{\mu}} \right] + \frac{1}{2i\sqrt{\mu}} = 0,$$

ибо $e^{-i\sqrt{\mu}x} \overline{\in} L^2(0, \infty)$, а $e^{i\sqrt{\mu}x} \in L^2(0, \infty)$.

Таким образом,

$$M(\mu) = \frac{1}{\theta - i\sqrt{\mu}}, \tag{89}$$

откуда

$$\sigma(\lambda) = C + \lim_{\varepsilon \to +0} \frac{1}{\pi} \int_0^\lambda \Im \frac{1}{\theta - i\sqrt{\lambda + i\varepsilon}} \, dx. \tag{90}$$

Из этой формулы заключаем, что если $\theta \geqslant 0$, то

$$\sigma(\lambda) = 0 \text{ при } \lambda < 0, \tag{91}$$

$$\sigma'(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda + \theta^2)} \text{ при } \lambda \geqslant 0. \tag{92}$$

Если же $\theta < 0$, то

$$\sigma'(\lambda) = \frac{\sqrt{\lambda}}{\pi(\lambda + \theta^2)} \text{ при } \lambda \geqslant 0$$

и в точке $\lambda_0 = -\theta^2$ функция $\sigma(\lambda)$ имеет скачок

$$\sigma(\lambda_0 + 0) - \sigma(\lambda_0) = -2\theta,$$

оставаясь постоянной в каждом из интервалов $(-\infty, \lambda_0)$, $(\lambda_0, 0)$. Таким образом, формулы обращения имеют вид:

а) При $\theta \geqslant 0$

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\left\{\cos(\sqrt{\lambda}x) + \frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}x)\right\}dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\left\{\cos(\sqrt{\lambda}x) + \frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}x)\right\}\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+\theta^2}d\lambda.$$

При $\theta = 0$ эти формулы представляют собой классические формулы обращения Фурье по косинусам.

б) При $\theta < 0$

$$\Phi(\lambda) = \begin{cases} \displaystyle\int_0^\infty f(x)\left\{\cos(\sqrt{\lambda}x) + \frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}x)\right\}dx & \text{для } \lambda \geqslant 0, \\ \displaystyle\int_0^\infty f(x)e^{\theta x}dx & \text{для } \lambda = -\theta^2, \\ 0 & \text{для } \lambda < 0,\ \lambda \neq -\theta^2, \end{cases}$$

$$f(x) = -2\theta\Phi(-\theta^2)e^{\theta t} + \\ + \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\left\{\cos(\sqrt{\lambda}x) + \frac{\theta}{\sqrt{\lambda}}\sin(\sqrt{\lambda}x)\right\}\frac{\sqrt{\lambda}}{\lambda+\theta^2}d\lambda.$$

Если граничное условие, определяющее данное самосопряженное расширение, имеет вид

$$y(0) = 0,$$

то соответствующие формулы обращения мы получим, переходя к пределу при $\theta \to \infty$:

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\frac{\sin(\sqrt{\lambda}x)}{\sqrt{\lambda}}dx,$$

$$f(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \Phi(\lambda)\sin(\sqrt{\lambda}x)d\lambda;$$

они представляют классические формулы обращения Фурье по синусам.

Соответствующее равенство Парсеваля имеет следующий вид:

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty |\Phi(\lambda)|^2 \sqrt{\lambda}\,d\lambda \tag{92a}$$

2) Функции Бесселя. Рассмотрим теперь дифференциальное выражение

$$l(y) = -y'' + \frac{\nu^2 - \frac{1}{4}}{x^2}\,y, \quad \nu \geqslant 0. \tag{93}$$

Его естественно рассмотреть в каждом из следующих трех интервалов:

α) $0 < x \leqslant 1$; один сингулярный конец $x = 0$;

β) $1 \leqslant x < +\infty$; один сингулярный конец $x = +\infty$;

γ) $0 < x < +\infty$; два сингулярных конца $x = 0$ и $x = +\infty$.

Общий интеграл уравнения

$$l(y) = \lambda y \tag{94}$$

при $\lambda \neq 0$ имеет вид

$$y(x, \lambda) = A\sqrt{x}\,I_\nu(x\sqrt{\lambda}) + B\sqrt{x}\,Y_\nu(x\sqrt{\lambda}), \tag{95}$$

где $I_\nu(z)$, $Y_\nu(z)$ — функции Бесселя 1-го и 2-го рода соответственно. Мы будем считать, что $\mathfrak{J}\lambda > 0$ и $x > 0$. Значение $\sqrt{\lambda}$ выберем так, что $0 < \arg\sqrt{\lambda} < \frac{\pi}{2}$. Полагая $z = t\sqrt{\lambda}$, мы будем тогда иметь

$$0 < \arg z < \frac{\pi}{2}.$$

Но для этих значений z (даже при $|\arg z| < \pi$ и $z \to \infty$) имеют место асимптотические формулы

$$I_\nu(z) + iY_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

$$I_\nu(z) - iY_\nu(z) \sim \sqrt{\frac{2}{\pi z}}\, e^{-i\left(z - \frac{\pi\nu}{2} - \frac{\pi}{4}\right)},$$

и потому первая из этих функций, рассматриваемая как функция от x, принадлежит, а вторая не принадлежит $L^2(1, \infty)$.

Таким образом, в случае интервала $(1, \infty)$ индекс дефекта оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением (93), есть $(1,1)$.

Найдем теперь индекс дефекта оператора L_0 в случае α). При $z \to 0$

$$z^{\frac{1}{2}} I_\nu(z) \sim \frac{z^{\nu+\frac{1}{2}}}{2^\nu \Gamma(\nu+1)};$$

с другой стороны,

$$z^{\frac{1}{2}} Y_\nu(z) \,\overline{\in}\, L^2(0,\ 1) \text{ при } \nu \geqslant 1,$$

$$z^{\frac{1}{2}} Y_\nu(z) \in L^2(0,\ 1) \text{ при } 0 \leqslant \nu < 1.$$

Следовательно, в случае α) индекс дефекта оператора L_0 есть

$$(2,2) \text{ при } 0 \leqslant \nu < 1,$$

$$(1,1) \text{ при } \nu \geqslant 1.$$

Применяя теперь общую формулу (47) n° 5 § 17, заключаем, что в случае γ) индекс дефекта оператора L_0 есть

$$(1,1) \text{ при } 0 \leqslant \nu < 1,$$

$$(0,0) \text{ при } \nu \geqslant 1.$$

Выпишем теперь соответствующие формулы обращения:

α) Интервал (0, 1); $\nu \geqslant 1$. Пусть краевое условие в точке $x = 1$ есть $y|_{x=1} = 0$. Простые выкладки показывают, что в этом случае

$$M(\mu) = -\sqrt{\mu}\, \frac{I'_\nu(\sqrt{\mu})}{I_\nu(\sqrt{\mu})}.$$

Эта функция мероморфна, и потому спектр оператора L_θ в рассматриваемом случае дискретен. Собственные значения λ_n суть полюсы этой функции, а соответствующими нормированными функциями будут

$$y_n(x) = -\frac{\sqrt{x}\, I_\nu(x\sqrt{\lambda_n})}{\sqrt{\lambda_n}\, I'_\nu(\sqrt{\lambda_n})}.$$

Разложение по собственным функциям принимает вид

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2\sqrt{x}\, I_\nu(x\sqrt{\lambda_n})}{I'^2_\nu(\sqrt{\lambda_n})} \int_0^1 \sqrt{x}\, I_\nu(\xi\sqrt{\lambda_n}) f(\xi)\, d\xi.$$

Оно называется *рядом Фурье — Бесселя.*

Аналогичное разложение в ряд получается в случае общего краевого условия $y' + \theta y|_{x=1} = 0$; это разложение называется тогда *рядом Фурье — Дини,* β) Интервал $(1, \infty)$. Пусть краевое условие в точке $x=1$ имеет вид $y|_{x=1}=0$; тогда

$$M(\mu) = -\sqrt{\mu}\,\frac{I_\nu'(\sqrt{\mu}) + iY_\nu'(\sqrt{\mu})}{I_\nu(\sqrt{\mu}) + iY_\nu(\sqrt{\mu})},$$

и разложение по собственным функциям имеет вид

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{x}\,\frac{I_\nu(x\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(x\sqrt{\lambda})\,I_\nu(\sqrt{\lambda})}{2\left(I_\nu^2(\sqrt{\lambda}) + Y_\nu^2(\sqrt{\lambda})\right)}\,\Phi(\lambda)\,d\lambda, \tag{96}$$

где

$$\Phi(\lambda) = \int_1^\infty \sqrt{x}\,\{I_\nu(x\sqrt{\lambda})\,Y_\nu(\sqrt{\lambda}) - Y_\nu(x\sqrt{\lambda})\,I_\nu(\sqrt{\lambda})\}\,f(x)\,dx. \tag{97}$$

Формулы (96), (97) называются *формулами обращения Вебера*.

γ) Интервал $(0, \infty)$; $\nu \geqslant 1$. Соответствующее разложение по собственным функциям имеет вид

$$f(x) = \int_0^\infty \sqrt{x}\,I_\nu(x\sqrt{\lambda})\,d\lambda \int_0^\infty \sqrt{\xi}\,I_\nu(\xi\sqrt{\lambda})\,f(\xi)\,d\xi.$$

Оно называется *формулой Ханкеля*.

ГЛАВА VII

ИССЛЕДОВАНИЕ ИНДЕКСА ДЕФЕКТА И СПЕКТРА ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫХ ОПЕРАТОРОВ В ЗАВИСИМОСТИ ОТ ПОВЕДЕНИЯ ИХ КОЭФФИЦИЕНТОВ

§ 22. Асимптотика решений дифференциальных уравнений при больших значениях аргумента

Одной из основных задач в теории линейных дифференциальных операторов является исследование их спектра, а также определение их индекса дефекта в зависимости от поведения коэффициентов дифференциального выражения при $x \to a$ или $x \to b$. Пусть, например, рассматривается дифференциальное выражение $l(y)$ с одним регулярным концом $x = a$ и вторым сингулярным концом $x = b$ и пусть для определенности $a = 0$, $b = \infty$. Тогда ответ на поставленные выше вопросы зависит от поведения решений уравнений $l(y) = \lambda y$ при $x \to \infty$.

1. Асимптотика решений системы линейных дифференциальных уравнений первого порядка. Рассмотрим систему

$$\frac{dy_j}{dx} = w_j(x)\, y_j + \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(x)\, y_k, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{1}$$

Делая те или иные предположения относительно функций w_k, c_{kj}, мы получаем различные результаты о поведении решений этой системы при $x \to \infty$.

а) Случай суммируемых функций. Рассмотрим сначала тот случай, когда выполняются следующие условия:

1°. *Функции* $w_j(x)$ *суммируемы в каждом конечном интервале* $[0,\ \alpha]$, $\alpha > 0$.

2°. *Функции* $c_{kj}(x)$ *суммируемы в интервале* $[0,\ \infty)$.

Докажем следующую лемму:

Лемма 1. *Пусть выполнены условия* 1° *и* 2° *и пусть, кроме того,*

α) $w_i(x) \equiv 0$ *при некотором* i;

β) *при* x, *достаточно большом* $(x > x_0)$, *функции* $\Re w_j(x)$, $j \neq i$, *не меняют знак.*

Тогда система (1) *имеет решение, удовлетворяющее условиям*

$$\lim_{x \to \infty} y_j(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } j = i, \\ 0 \text{ при } j \neq i. \end{cases} \tag{2}$$

Доказательство. Предположим, что такое решение существует и перепишем систему (1) в виде

$$\frac{dy_j}{dx} - w_j(x)\, y_j = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(x)\, y_k, \quad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{3}$$

Рассматривая каждое из этих уравнений как уравнение первого порядка с правой частью $\sum\limits_{k=1}^{n} c_{jk}(x)\, y_k$, найдем

$$y_j(x) = \int_{x_j}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} w_j(\xi_1)\, d\xi_1} \left[\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi) \right] d\xi + c_j e^{\int_{x_j}^{x} w_j(\xi_1)\, d\xi_1}; \tag{4}$$

в частности, при $j = i$ в силу условия α)

$$y_i(x) = \int_{x_i}^{x} \left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(\xi)\, y_k(\xi) \right] d\xi + c_i. \tag{5}$$

Введем обозначение

$$\Re w_j(x) = u_j(x), \qquad \varkappa_j = \int_{x_0}^{\infty} u_j(x)\, dx \tag{6}$$

и положим

$x_i = \infty$, следовательно, $c_i = 1$,
$x_j = \infty$, следовательно, $c_j = 0$ при $j \neq i$ и $\varkappa_j > -\infty$;
$x_j = T$ при $j \neq i$ и $\varkappa_j = -\infty$,

где число T будет выбрано в дальнейшем. Мы получим для функции $y_j(x)$ систему интегральных уравнений

$$\left.\begin{aligned}
y_i(x) &= 1 - \int_x^{\infty}\left[\sum_{k=1}^{n} c_{ik}(\xi)\, y_k(\xi)\right] d\xi,\\
y_j(x) &= -\int_x^{\infty} e^{-\int_x^{\xi} w_j(\xi_1)\,d\xi_1}\left[\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi)\right] d\xi\\
&\qquad \text{при } j \neq i \text{ и } \varkappa_j > -\infty,\\
y_j(x) &= c_j e^{\int_T^{x} w_j(\xi)\,d\xi} + \int_T^{x} e^{\int_{\xi}^{x} w_j(\xi_1)\,d\xi_1}\left[\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi)\right] d\xi\\
&\qquad \text{при } j \neq i \text{ и } \varkappa_j = -\infty.
\end{aligned}\right\} \tag{7}$$

Интегралы от x до ∞ в первых двух случаях сходятся, ибо в силу (2) функции $\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi)$ суммируемы в интервале $[0, \infty)$ и, кроме того,

$$\left| e^{-\int_x^{\xi} w_j(\xi_1)\,d\xi_1} \right| = e^{-\int_x^{\xi} u_j(\xi_1)\,d\xi_1} \leqslant \begin{cases} 1 & \text{при } u_j(x) \geqslant 0,\\ e^{-\varkappa_j} & \text{при } u_j(x) \leqslant 0; \end{cases}$$

из последней оценки следует также, что интеграл во втором равенстве сходится равномерно относительно x. Таким образом, искомое решение системы должно удовлетворять системе (7).

Обратно, пусть y_j — решение системы (7), где c_j и T — произвольны, и притом такое, что все функции $\sum_{k=1}^{n} c_{jk}(x)\, y_k(x)$ суммируемы в интервале $[x_0, \infty)$.

Дифференцируя обе части (7), убеждаемся в том, что функции y_j удовлетворяют системе (1). Докажем, что эти функции удовлетворяют условию (2). Из первых двух равенств в (7) следует, что

$$\lim_{x\to\infty} y_i(x) = 1,$$

$$\lim_{x\to\infty} y_j(x) = 0 \text{ при } j \neq i,\ \varkappa_j > -\infty$$

Рассмотрим теперь функции $y_j(x)$ при $j \neq i$, $\varkappa_j = -\infty$. Тогда $u_j(x) \leqslant 0$ при $x \geqslant x_0$, и поэтому

$$\left| e^{\int_{\xi}^{x} w_j(\xi_1)\,d\xi_1} \right| = e^{\int_{\xi}^{x} u_j(\xi_1)\,d\xi_1} \leqslant 1,$$

$$\left| e^{\int_{T}^{x} w_j(\xi)\,d\xi} \right| = e^{\int_{T}^{x} u_j(\xi)\,d\xi} \to 0 \text{ при } x \to \infty. \tag{8}$$

Кроме того, при $T < x_1 < x$

$$\left| \int_T^x e^{\int_{\xi}^{x} w_j(\xi_1)\,d\xi_1} \left[\sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi) \right] d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left| \int_T^{x_1} e^{\int_{\xi}^{x} w_j(\xi_1)\,d\xi_1} \left[\sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi) \right] d\xi \right| +$$

$$+ \left| \int_{x_1}^{x} e^{\int_{\xi}^{x} w_j(\xi_1)\,d\xi_1} \left[\sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi) \right] d\xi \right| \leqslant$$

$$\leqslant e^{\int_{x_1}^{x} u_j(\xi_1)\,d\xi_1} \int_T^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi) \right| d\xi + \int_{x_1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi) \right| d\xi. \tag{9}$$

Выберем x_1 настолько большим, чтобы

$$\int_{x_1}^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi) \right| d\xi < \varepsilon,$$

и затем x настолько большим, чтобы также

$$e^{\int_{x_1}^{x} u_j(\xi_1)\,d\xi_1} < \varepsilon.$$

Тогда из (9) получаем, что

$$\left| \int_T^x e^{\int_{\xi}^{x} w_j(\xi_1)\,d\xi_1} \left[\sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi) \right] d\xi \right| \leqslant \varepsilon \left(\int_T^{\infty} \left| \sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\, y_k(\xi) \right| d\xi + 1 \right);$$

эта оценка в соединении с (8) показывает, что и в рассматриваемом случае $y_j(x) \to 0$ при $x \to \infty$.

Из предыдущих рассуждений вытекает, что достаточно доказать существование решения системы (7). Применим для этой цели метод последовательных приближений, полагая

$$\left.\begin{aligned}
&y_j^{(0)}=0,\\
&y_i^{(n+1)}(x)=1-\int_x^\infty\left[\sum_{k=1}^n c_{ik}(\xi)\,y_k^{(n)}(\xi)\right]d\xi,\\
&y_j^{(n+1)}(x)=-\int_x^\infty e^{-\int_x^\xi w_j(\xi_1)\,d\xi_1}\left[\sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\,y_k^{(n)}(\xi)\right]d\xi\\
&\qquad\qquad\text{при } j\neq i,\ \varkappa_j>-\infty,\\
&y_j^{(n+1)}(x)=c_je^{\int_T^x w_j(\xi)\,d\xi}+\int_T^x e^{\int_\xi^x w_j(\xi_1)\,d\xi_1}\left[\sum_{k=1}^n c_{jk}(\xi)\,y_k^{(n)}(\xi)\right]d\xi\\
&\qquad\qquad\text{при } j\neq i,\ \varkappa_j=-\infty.
\end{aligned}\right\}\tag{10}$$

Докажем, что при T достаточно большом последовательность $y_j^{(n)}(x)$ сходится равномерно в каждом конечном интервале $[T,\ \alpha]$ $(\alpha>T)$ к решению $y_j(x)$ системы (7). Положим

$$M_n=\sup_{\substack{x\geqslant T\\ 1\leqslant j\leqslant n}}\left|y_j^{(n)}(x)-y_j^{(n-1)}(x)\right|,\tag{11}$$

$$c=\max_{1\leqslant j\leqslant n}\sum_{k=1}^n\int_T^\infty|c_{jk}(x)|\,dx\tag{12}$$

и обозначим через γ наибольшее среди тех $|\varkappa_j|$, которые конечны.

Из (10) следует, что при $x\geqslant T$

$$\left|y_i^{(n+1)}(x)-y_i^{(n)}(x)\right|\leqslant\int_x^\infty\sum_{k=1}^n|c_{ik}(\xi)|\left|y_k^{(n)}(\xi)-y_k^{(n-1)}(\xi)\right|d\xi\leqslant M_nc\tag{13}$$

и если $j\neq i$, $\varkappa_j>-\infty$:

$$\left|y_j^{(n+1)}(x)-y_j^{(n)}(x)\right|\leqslant\int_x^\infty e^{-\int_x^\xi u_j(\xi_1)\,d\xi_1}\sum_{k=1}^n|c_{jk}(\xi)|\left|y_k^{(n)}(\xi)-y_k^{(n-1)}(\xi)\right|d\xi.$$

Если при этом $u_j(x)\geqslant 0$ для $x\geqslant T$, то

$$e^{-\int_x^\xi u_j(\xi_1)\,d\xi_1}\leqslant 1,$$

и потому также

$$\left| y_j^{(n+1)}(x) - y_j^{(n)}(x) \right| \leqslant M_n c. \tag{14а}$$

Если же $u_j(x) \leqslant 0$ для $x \geqslant T$, то ввиду условия $\varkappa_j > -\infty$ число $\varkappa_j$ конечно и <0; поэтому

$$e^{-\int\limits_x^\xi u_j(\xi_1)\,d\xi_1} \leqslant e^{-\int\limits_T^\infty u_j(\xi_1)\,d\xi_1} = e^{-\varkappa_j} \leqslant e^\gamma \tag{14б}$$

и

$$\left| y_j^{(n+1)}(x) - y_j^{(n)}(x) \right| \leqslant M_n c e^\gamma. \tag{14в}$$

Рассмотрим теперь случай $j \neq i$, $\varkappa_j = -\infty$; тогда при $x \geqslant T$

$$\left| y_j^{(n+1)}(x) - y_j^{(n)}(x) \right| \leqslant$$

$$\leqslant \int\limits_T^x e^{\int\limits_\xi^x u_j(\xi_1)\,d\xi_1} \sum_{k=1}^n \left| c_{jk}(\xi) \right| \left| y_k^{(n)}(\xi) - y_k^{(n-1)}(\xi) \right| d\xi \leqslant M_n c, \tag{15}$$

ибо в рассматриваемом случае $u_j(\xi) \leqslant 0$, и потому

$$e^{\int\limits_\xi^x u_j(\xi_1)\,d\xi_1} \leqslant 1.$$

Так как неравенства (13), (14), (15) имеют место при $x \geqslant T$ и $e^\gamma > 1$, то

$$M_{n+1} \leqslant M_n c e^\gamma, \quad n = 1, 2, 3, \ldots,$$

следовательно,

$$M_n \leqslant M_1 (c e^\gamma)^{n-1}.$$

Поэтому ряд

$$y_j(x) = y_j^{(0)}(x) + \left[y_j^{(1)}(x) - y_j^{(0)}(x) \right] + \left[y_j^{(2)}(x) - y_j^{(1)}(x) \right] + \ldots \tag{16}$$

сходится равномерно в интервале $[T, \infty)$, если только $ce^\gamma < 1$, т. е. если $c < e^{-\gamma}$; в силу определения (12) числа c это неравенство выполняется при T достаточно большом.

Отсюда легко вывести, что сумма $y_j(x)$, $j = 1, 2, \ldots, n$, ряда (16) есть решение системы (7), и лемма 1 полностью доказана.

Теорема 1. *Пусть функции $w_k(x)$ суммируемы в каждом конечном интервале* $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$, *а функции $c_{kj}(x)$ суммируемы в интервале* $[0, \infty)$; *пусть, далее, при x, достаточно большом* $(x \geqslant x_0)$, *ни одна из функций* $\Re(w_j - w_k)$ *не меняет знак.*

Тогда система (1) *имеет n частных решений вида*

$$y_j = y_{ji}(x) = \eta_{ji}(x)\, e^{\int\limits_0^x w_i(\xi)\,d\xi}, \qquad j, i = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

где $\eta_{ji}(x)$ — функции, непрерывные в интервале $[0, \infty)$ и удовлетворяющие условиям

$$\lim_{x\to\infty} \eta_{ji}(x) = \begin{cases} 1 \text{ при } j = i, \\ 0 \text{ при } j \neq i. \end{cases} \tag{18}$$

Доказательство. Положим

$$y_j(x) = \eta_{ji}(x)\, e^{\int\limits_0^x w_i(\xi)\,d\xi}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n. \tag{19}$$

Подставляя эти выражения в (1), мы получим для функций η_{ji} систему

$$\frac{d\eta_{ji}}{dx} = [w_j(x) - w_i(x)]\,\eta_{ji} + \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(x)\,\eta_{ki}, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{20}$$

которая при фиксированном i удовлетворяет всем условиям леммы 1. Поэтому она имеет решение $\eta_{ji}(x)$, удовлетворяющее условию (18). Полагая в формуле (19) последовательно $i = 1, 2, \ldots, n$, мы получим n решений, удовлетворяющих всем условиям теоремы.

Из доказательства видно, что теорема остается справедливой, если в интеграле (17) заменить нижний предел 0 произвольным положительным числом.

В некоторых случаях приходится иметь дело с системами

$$\frac{dy}{dx} = A(x)\,y, \tag{21}$$

которые хотя и не удовлетворяют условиям теоремы 1, но могут быть приведены к такой системе подстановкой вида $y = B(x)z$. Рассмотрим наиболее важные случаи такого приведения.

Теорема 2. *Пусть*

$$A(x) = A_0(x) + A_1(x), \tag{22}$$

*причем элементы матриц *) $A_0'(x)$ и $A_1(x)$ суммируемы в интервале $[0, \infty)$, а матрица $A_0(\infty)$ не имеет кратных собственных*

*) Напомним, что $A_0'(x)$ обозначает матрицу, элементы которой являются производными соответствующих элементов матрицы $A_0(x)$ (см. n° 1 § 6).

значений). Пусть далее $B(x)$ — матрица, определенная условием*

$$A_0(x)\,B(x) = B(x)\,W(x), \tag{23}$$

где $W(x)$ — диагональная матрица. Тогда подстановка

$$y = B(x)\,z \tag{24}$$

приводит уравнение (21) *к виду*

$$\frac{dz}{dx} = [W(x) + C(x)]\,z, \tag{25}$$

где при достаточно большом x_0 элементы матрицы $W(x)$ непрерывны, а элементы матрицы $C(x)$ суммируемы в интервале $[x_0, \infty)$.

Доказательство. Из суммируемости элементов матрицы $A_0'(x)$ вытекают непрерывность матрицы $A_0(x)$ и существование предела

$$A_0(\infty) = \lim_{x\to\infty} A_0(x).$$

Так как матрица $A_0(\infty)$ не имеет кратных собственных значений, то существует интервал $[x_0, \infty)$, в котором матрица $A_0(x)$ не имеет кратных собственных значений. Ее собственные значения будут поэтому непрерывными функциями в интервале $[x_0, \infty)$. Пусть $W(x)$ диагональная матрица, диагональными элементами которой являются эти собственные значения $w_1(x)$, $w_2(x)$, ..., $w_n(x)$, записанные в каком угодно порядке. Равенство (23) означает, что последовательные столбцы матрицы $B(x)$ являются собственными векторами матрицы $A_0(x)$, отвечающими собственным значениям $w_1(x)$, $w_2(x)$, ..., $w_n(x)$ соответственно. Так как эти собственные значения все различны, то в интервале $[x_0, \infty)$

$$\det B(x) \neq 0 \tag{26}$$

и ранг матрицы $A_0(x) - w_k(x)\,1$ равен $n-1$. Поэтому в качестве k-го столбца матрицы $B(x)$ можно взять алгебраические дополнения элементов k-го столбца матрицы $A_0(x) - w_k(x)\,1$. При таком выборе все элементы матрицы $B(x)$ будут непрерывными функциями в интервале $[x_0, \infty)$, и их предел при $x\to\infty$ определит матрицу $B(\infty)$, k-й столбец которой есть собственный вектор матрицы $A_0(\infty)$, соответствующий собственному значению $w_k(\infty)$. По условию эти собственные значения различны, и потому также

$$\det B(\infty) \neq 0; \tag{27}$$

*) Случай, когда матрица $A_0(\infty)$ имеет кратные собственные значения, рассмотрены в работе Девинац [1].

следовательно, функция $(\det B(x))^{-1}$ непрерывна и ограничена в интервале $[x_0, \infty)$. Но тогда матрица $[B(x)]^{-1}$ существует и все ее элементы ограничены в интервале $[x_0, \infty)$. Выполним теперь в уравнении

$$\frac{dy}{dx} = [A_0(x) + A_1(x)]\, y$$

подстановку $y = B(x)z$. Мы получим

$$\frac{dB}{dx} z + B\frac{dz}{dx} = (A_0 + A_1) Bz.$$

Отсюда

$$\frac{dz}{dx} = \left(B^{-1}A_0B + B^{-1}A_1B - B^{-1}\frac{dB}{dx}\right) z.$$

Но в силу (23) $B^{-1}A_0B = W$; поэтому

$$\frac{dz}{dx} = (W + C) z,$$

где

$$C = B^{-1}A_1B - B^{-1}\frac{dB}{dx}.$$

Остается доказать, что все элементы матрицы $C = C(x)$ суммируемы в интервале $[x, \infty)$. Суммируемость элементов первого слагаемого непосредственно следует из доказанных свойств матриц B^{-1} и B и предполагаемой суммируемости элементов матрицы A_1; поэтому остается доказать суммируемость всех элементов матрицы

$$B^{-1}\frac{dB}{dx},$$

для чего в свою очередь достаточно установить суммируемость элементов матрицы $\frac{dB}{dx}$, ибо элементы матрицы B^{-1} ограничены. Каждый элемент b_{ik} матрицы B есть определитель порядка $n-1$, составленный из элементов вида $a_{jk}(x)$ и $a_{kk}(x) - w_i(x)$, где a_{jk} — элементы матрицы A_0. Но, по условию, функции $a_{jk}(x)$ суммируемы в $[x_0, \infty)$; если поэтому мы покажем, что и функции $w_i'(x)$ суммируемы в этом интервале, то $b_{ik}'(x)$ будет суммой произведений суммируемой производной одного из множителей $a_{jk}(x)$, $a_{kk}(x) - w_i(x)$, на другие такие множители, ограниченные в интервале $[x_0, \infty)$; следовательно, суммируемость функций $b_{ik}(x)$ будет доказана. Итак, остается установить суммируемость функций $w_i'(x)$. Но $w_i(x)$ есть корень характеристического уравнения

$$F(w, x) = w^n + \alpha_1(x) w^{n-1} + \ldots + \alpha_n(x) = 0 \qquad (28)$$

матрицы A_0. Его коэффициенты $\alpha_1(x), \ldots, \alpha_n(x)$ являются суммой миноров матрицы A_0, и потому их производные суммируемы в $[x_0, \infty)$. Но тогда

$$w_i'(x) = -\frac{F_x(w_i, x)}{F_w'(w_i, x)} = \frac{\alpha_1'(x)\, w_i^{n-1} + \ldots + \alpha_n'(x)}{F_w'(w_i, x)},$$

причем числитель последней дроби суммируем, ибо функция $w_i(x)$ ограничена в $[x_0, \infty)$; знаменатель же ограничен снизу, ибо корни уравнения (28) различны в интервале $[x_0, \infty)$, а их пределы при $x \to \infty$ также различны. Поэтому функции $w_i'(x)$ суммируемы в интервале $[x_0, \infty)$, и теорема 2 доказана.

Условия теоремы 2, в частности, выполняются, если A_0 — постоянная матрица с различными собственными значениями, а $A_1(x)$ — матрица с суммируемыми элементами.

Следствие 1. *Если в дополнение к условиям теоремы* 2

$$\lim_{x \to \infty} \Re\left(w_i(x) - w_k(x)\right) \neq 0 \quad \text{для } i \neq k, \ i = 1, 2, \ldots, n, \tag{29}$$

то система (21) *имеет n линейно независимых решений вида*

$$y_j = y_{jk} = e^{\int\limits_{x_0}^{x} w_k(\xi)\, d\xi} \sum_{l=1}^{n} b_{jl}(x)\, \eta_{lk}(x), \quad j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{30}$$

где $b_{jk}(x)$ — элементы матрицы $B(x)$, а $\eta_{ik}(x)$ — функции, удовлетворяющие условиям

$$\lim_{x \to \infty} \eta_{ik}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при } i = k, \\ 0 & \text{при } i \neq k. \end{cases} \tag{31}$$

Доказательство. В силу (29) при x_0 достаточно большом, функции $\Re(w_i(x) - w_k(x))$ сохраняют знак в интервале $[x_0, \infty)$, и потому к преобразованному уравнению (25) можно применить теорему 1. Таким образом, это уравнение имеет n линейно независимых решений вида

$$z_j = z_{jk} = e^{\int\limits_{x_0}^{x} w_k(\xi)\, d\xi} \eta_{jk}(x),$$

где функции $\eta_{jk}(x)$ удовлетворяют условию (31). Тогда вектор-функция $y_k = Bz_k$ будет решением уравнения (21) вида (30).

Замечание. Если, в частности, A_0 — постоянная матрица, собственные значения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ которой имеют различные вещественные части, то

$$z_j = z_{jk} = e^{\rho_k (x - x_0)} \eta_{jk}(x)$$

В дальнейшем нам будет удобно представить матрицу A в виде суммы трех слагаемых $A = A_0 + A_1 + A_2$, свойства которых при $x \to \infty$ будут существенно различны.

Определим последовательно матрицы B, W, X_0, X_1, X уравнениями

$$(A_0 + A_1) B = BW, \tag{32}$$

$$X_i W - W X_i = \left(B^{-1} \frac{dA_i}{dx} B\right)^+, \quad i = 0,\ 1, \tag{33}$$

$$XW - WX = -X_0, \tag{34}$$

где W — диагональная матрица, а C^+ обозначает матрицу C, в которой диагональные элементы заменены нулями. При этом дополнительно потребуем, чтобы диагональные элементы матриц $B^{-1}\frac{dB}{dx}$, X_0, X_1, X были равны нулю. Если тогда матрица $A_0 + A_1$ имеет различные собственные значения и если задаться определенным порядком этих собственных значений на главной диагонали матрицы W, то перечисленными выше условиями матрицы W, X_0, X_1, X определяются однозначно с точностью до постоянных диагональных множителей. Так, например, если положить $X = (x_{ik})$, $X_0 = (x_{0ik})$, то равенство (34) означает, что

$$x_{ik}(w_k - w_i) = -x_{0ik}.$$

Отсюда при $i \neq k$ однозначно определяются элементы x_{ik} матрицы X при данных W и X_0. Аналогично из (33) однозначно определяются матрицы X_0 и X_1 при данных A_0, A_1, B и W. Что касается матрицы B, то при заданном порядке диагональных элементов в W она определяется условием (32) однозначно с точностью до произвольного правого диагонального множителя. Другими словами, если B — какое-нибудь одно решение уравнения (32) при данном W, то всякое другое решение $\tilde{B}$ имеет вид $\tilde{B} = B\delta$, где δ — произвольная диагональная матрица. Но тогда

$$\frac{d\tilde{B}}{dx} = \frac{dB}{dx}\delta + B\frac{d\delta}{dx}, \quad \tilde{B}^{-1} = \delta^{-1}B^{-1}$$

и, следовательно,

$$\tilde{B}^{-1}\frac{d\tilde{B}}{dx} = \delta^{-1}B^{-1}\frac{dB}{dx}\delta + \delta^{-1}\frac{d\delta}{dx}.$$

Положим для краткости $B^{-1}\frac{dB}{dx} = Q$. Требование равенства нулю диагональных элементов матрицы $\widetilde{B}^{-1}\frac{d\widetilde{B}}{dx}$ приведет к уравнениям

$$Q_{ii}+\frac{1}{\delta_i}\frac{d\delta_i}{dx}=0, \tag{35}$$

откуда

$$\delta_i=c_i e^{-\int\limits_{x_0}^{x} Q_{ii}(\xi)\,d\xi},$$

где c_i — произвольные постоянные. Следовательно, матрица $\widetilde{Q}$ определится условием (35) однозначно с точностью до правого диагонального множителя

$$\begin{pmatrix} c_1 & 0 & 0 \dots & 0 \\ 0 & c_2 & 0 \dots & 0 \\ . & . & . \quad . & . \\ 0 & 0 & 0 \dots & c_n \end{pmatrix},$$

и потому матрицы X_0, X_1, X также будут определены с точностью до постоянных диагональных множителей.

Теорема 3. *Пусть $A=A_0+A_1+A_2$ и пусть при достаточно большом x_0 все элементы матриц*

$$\frac{dX}{dx},\quad X_0X,\quad X_1,\quad B^{-1}A_2B \tag{36}$$

суммируемы в интервале $[x_0, \infty)$, а

$$\det[I+X(\infty)]\neq 0. \tag{37}$$

Тогда подстановка

$$y=B(I+X)z \tag{38}$$

приводит уравнение

$$\frac{dy}{dx}=Ay \tag{39}$$

к виду

$$\frac{dz}{dx}=(W+C)z, \tag{40}$$

где C — матрица, все элементы которой суммируемы в интервале $[x_0, \infty)$ при x_0 достаточно большом.

Доказательство. Сделав в уравнении (39) подстановку (38) и учитывая (32), получим:

$$\frac{dB}{dx}(I+X)z+B\frac{dX}{dx}z+B(I+X)\frac{dz}{dx}=$$
$$=(A_0+A_1+A_2)B(I+X)z=(BW+A_2B)(I+X)z,$$

отсюда

$$(I+X)\frac{dz}{dx}=\left[\left(W+B^{-1}A_2B-B^{-1}\frac{dB}{dx}\right)(I+X)-\frac{dX}{dx}\right]z. \qquad (41)$$

В силу (34)

$$W(I+X)=W+WX=W+XW+X_0=(I+X)W+X_0. \qquad (42)$$

Найдем еще выражение для $B^{-1}\frac{dB}{dx}$. Дифференцируя соотношение (32), получим

$$(A_0'+A_1')B+(A_0+A_1)B'=B'W+BW',$$

откуда

$$(A_0+A_1)B'=B'W+BW'-(A_0'+A_1')B.$$

Умножая слева обе части последнего равенства на

$$WB^{-1}(A_0+A_1)^{-1}=B^{-1},$$

получим

$$WB^{-1}B'=B^{-1}B'W+W'-B^{-1}(A_0'+A_1')B. \qquad (43)$$

Так как W'—диагональная матрица, то из равенств (43) и (33) вытекает, что

$$(B^{-1}B'W-WB^{-1}B')^+=$$
$$=(B^{-1}(A_0'+A_1')B)^+=(X_0+X_1)W-W(X_0+X). \qquad (44)$$

Положим

$$B^{-1}B'=(\beta_{jk}),\qquad X_0+X_1=(\varkappa_{jk}).$$

Формула (44) означает, что

$$\beta_{jk}(w_j-w_k)=\varkappa_{jk}(w_j-w_k)\qquad\text{при}\quad j\neq k$$

и, следовательно,

$$\beta_{jk}=\varkappa_{jk}\qquad\text{при}\quad j\neq k.$$

Но, по условию, диагональные элементы матриц $B^{-1}B'$ и X_0+X_1 равны нулю, поэтому

$$B^{-1}B'=X_0+X_1. \qquad (45)$$

Подставляя в уравнение (41) выражения (42) и (45), мы приведем его к виду

$$(I+X)\frac{dz}{dx}=\left[(I+X)W+X_0+(B^{-1}A_2B-X_0-X_1)(I+X)-\frac{dX}{dx}\right]z=$$
$$=\left[(I+X)W+(B^{-1}A_2B-X_1)(I+X)-X_0X-\frac{dX}{dx}\right]z.$$

Отсюда

$$\frac{dz}{dx} = (W + C)\,z,$$

где

$$C = (I + X)^{-1}\left[(B^{-1}A_2B - X_1)(I + X) - X_0X - \frac{dX}{dx}\right].$$

Но в силу условий, наложенных на матрицу X (см. (37)), все элементы матриц $(I+X)$ и $(I+X)^{-1}$ ограничены в интервале $[x_0, \infty)$ при x_0 достаточно большом. Отсюда, учитывая суммируемость элементов матриц (36), заключаем, что все элементы матрицы C суммируемы в интервале $[x_0, \infty)$.

б) Случай $c_{jk}(x) \to 0$ при $x \to \infty$. Пусть функции $\varpi_k(x)$, $c_{jk}(x)$ непрерывны в некотором интервале $[x_0, \infty)$ и пусть

$$\lim_{x\to\infty} c_{jk}(x) = 0, \qquad j,\ k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{46}$$

Мы покажем, что в этом случае при известных ограничениях на функции $\varpi_k(x)$ асимптотическое поведение решений системы при $x \to \infty$ будет такое же, как и решений системы

$$\frac{dy_j}{dx} = \varpi_j(x)\,y_j, \qquad j = 1,\ 2,\ \ldots,\ n. \tag{47}$$

Докажем сначала следующую лемму.

Лемма 2. *Пусть кроме условия* (46) *выполняется условие*

$$\Re(\varpi_1) > \Re(\varpi_k) + c \quad \text{при} \quad x \geqslant x_0, \quad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n, \tag{48}$$

где c — некоторая положительная постоянная. Тогда система (1) *имеет решение $y_1, y_2, \ldots, y_n$, такое, что*

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_k}{y_1} = 0, \qquad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n, \tag{49}$$

и

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{y_1'}{y_1} - \varpi_1\right) = 0. \tag{50}$$

Доказательство. Выберем число $x_1 > x_0$ и систему чисел $\eta_1, \eta_2, \ldots, \eta_n$, такую, что

$$|\eta_1| > |\eta_2| > \ldots > |\eta_n|. \tag{51}$$

Рассмотрим решение системы (1), удовлетворяющее условиям

$$y_1 = \eta_1, \quad y_2 = \eta_2, \ \ldots, \quad y_n = \eta_n \quad \text{при} \quad x = x_1. \tag{52}$$

Мы докажем, что если число x_1 выбрано достаточно большим, то это решение будет обладать требуемыми свойствами, т. е. будет удовлетворять условиям (49) и (50).

Умножая обе части (1) на $\bar{y}_j$, получим

$$\bar{y}_j y_j' = \omega_j \mid y_j \mid^2 + \sum_{k=1}^{n} c_{jk} \bar{y}_j y_k;$$

отсюда

$$\left| \Re\left(\bar{y}_j y_j'\right) - \Re\left(\omega_j\right) \mid y_j \mid^2 \right| = \left| \Re\left(\sum_{k=1}^{n} c_{jk} \bar{y}_j y_k \right) \right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} \left| c_{jk} y_j y_k \right|. \tag{53}$$

Но

$$\frac{d}{dx} \mid y_j \mid^2 = \frac{d}{dx} \left(y_j \bar{y}_j\right) = y_j' \bar{y}_j + y_j \bar{y}_j' = 2 \Re\left(\bar{y}_j y_j'\right);$$

поэтому неравенство (53) можно переписать в виде

$$- \sum_{k=1}^{n} \mid c_{jk} y_j y_k \mid \leqslant \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \mid y_j \mid^2 - \Re\left(\omega_j\right) \mid y_j \mid^2 \leqslant \sum_{k=1}^{n} \mid c_{jk} y_j y_k \mid. \tag{54}$$

Выберем x_1 настолько большим, чтобы при $x \geqslant x_1$

$$\mid c_{jk}(x) \mid \leqslant \frac{c}{2n},$$

тогда из (54) получим

$$- \frac{c}{2n} \sum_{k=1}^{n} \mid y_j y_k \mid \leqslant \frac{1}{2} \frac{d}{dx} \mid y_j \mid^2 - \Re\left(\omega_j\right) \mid y_j \mid^2 \leqslant \frac{c}{2n} \sum_{k=1}^{n} \mid y_j y_k \mid. \tag{55}$$

Но по условию (см. (51) и (52)) при $x = x_1$

$$\mid y_1 \mid^2 > \mid y_k \mid^2, \qquad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n; \tag{56}$$

докажем, что это неравенство остается также верным при $x > x_1$. Предположим противное; обозначим через x_2 нижнюю грань тех значений x, для которых (56) не имеет места. Пусть ν одно из значений индекса $k \geqslant 2$, для которых (56) не имеет места при $x = x_2$; тогда

$$\mid y_1(x_2) \mid = \mid y_\nu(x_2) \mid \geqslant \mid y_k(x_2) \mid \quad \text{при} \quad k \neq 1,\ \nu. \tag{57}$$

При этом

$$\left. \frac{d}{dx} \mid y_1 \mid^2 \right|_{x=x_2} \leqslant \left. \frac{d}{dx} \mid y_\nu \mid^2 \right|_{x=x_2}. \tag{58}$$

Действительно, из противоположного неравенства и из (57) следовало бы, что $\mid y_1 \mid < \mid y_\nu \mid$ при $x < x_2$, но достаточно близком к x_2, а это противоречит определению числа x_2. Заметим, что $y_1(x_2) \neq 0$, ибо в противном случае из (57) следовало бы

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0 \quad \text{при} \quad x = x_2.$$

Но тогда в силу теоремы единственности для дифференциальных уравнений $y_1 \equiv y_2 \equiv \ldots \equiv y_n \equiv 0$, в частности,

$$y_1 = y_2 = \ldots = y_n = 0 \quad \text{при} \quad x = x_1,$$

что противоречит условию (56).

Из неравенств (55), (57) и (58) вытекает, что при $x = x_2$

$$\begin{aligned}\Re(w_1)\,|y_1|^2 - \frac{c}{2}\,|y_1|^2 \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,|y_1|^2 \leqslant \\ \leqslant \frac{1}{2}\,\frac{d}{dx}\,|y_\nu|^2 \leqslant \Re(w_\nu)\,|y_1|^2 + \frac{c}{2}\,|y_1|^2,\end{aligned}$$

и потому при $x = x_2$

$$\Re(w_1)\,|y_1|^2 - \Re(w_\nu)\,|y_1|^2 < c\,|y_1|^2.$$

Но тогда при $x = x_2$ также

$$\Re(w_1) - \Re(w_\nu) < c,$$

ибо $y_1(x_2) \neq 0$; последнее же неравенство противоречит условию (48).

Итак доказано, что при $x \geqslant x_1$

$$|y_1| > |y_k|, \qquad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n. \tag{59}$$

Но тогда, разделив на y_1 обе части (1) при $j = 1$, получим оценку

$$\left|\frac{y_1'}{y_1} - w_1\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|\left|\frac{y_k}{y_1}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{n} |c_{jk}|, \qquad x \geqslant x_1,$$

из которой в силу (46) вытекает, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y_1'}{y_1} - w_1\right) = 0.$$

Докажем теперь, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_k}{y_1} = 0, \qquad k = 2,\ 3,\ \ldots,\ n.$$

Предположим противное; пусть при некотором $\nu \neq 1$

$$\varlimsup_{x\to\infty}\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 = \alpha > 0. \tag{60}$$

Тогда существуют сколь угодно большие значения x, для которых одновременно

$$\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 > \frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{d}{dx}\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 > -\frac{c\alpha}{2}. \tag{61}$$

Действительно, неравенство

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 \leqslant -\frac{c\alpha}{2}$$

не может выполняться, начиная с некоторого значения x (например, $x \geqslant \xi$), ибо тогда при $x \geqslant \xi$ мы имели бы

$$\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 \leqslant -\frac{c\alpha}{2}(x-\xi) + \left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2\Bigg|_{x=\xi}$$

и, следовательно,

$$\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 \to -\infty \quad \text{при} \quad x \to +\infty,$$

что невозможно. Поэтому должны существовать сколь угодно большие значения x, например

$$x = \xi_1,\ \xi_2,\ \xi_3,\ \ldots \to +\infty,$$

для которых выполняется противоположное неравенство

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 > -\frac{c\alpha}{2}.$$

Если теперь $\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 > \frac{\alpha}{2}$ для всех значений x, начиная с некоторого, то для значений $x = \xi_1, \xi_2, \xi_3, \ldots$, начиная с некоторого, будут выполняться оба неравенства (61). Поэтому остается рассмотреть тот случай, когда существуют сколь угодно большие значения x, для которых

$$\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 \leqslant \frac{\alpha}{2}. \tag{62}$$

Пусть $x = \xi$ — одно из таких значений. Из (60) следует, что среди чисел $x > \xi$ существует наименьшее $x = \tilde{x} > \xi$, для которого $\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 = \frac{3\alpha}{4}$. Для этого значения $x = \tilde{x}$ во всяком случае

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 \geqslant 0,$$

ибо в противном случае были бы значения $x < \tilde{x}$, достаточно близкие к $\tilde{x}$, для которых $\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 > \frac{3\alpha}{4}$, что ввиду условия (62) противоречит определению числа $\tilde{x}$. Но тогда при $x = \tilde{x}$

$$\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 = \frac{3\alpha}{4} > \frac{\alpha}{2}, \qquad \frac{d}{dx}\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 \geqslant 0 > -\frac{c\alpha}{2}.$$

Таким образом, в любом случае неравенства (61) выполняются для сколь угодно больших значений x. Но

$$\frac{d}{dx}\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2 = \frac{1}{|y_1|^2}\frac{d}{dx}|y_\nu|^2 - \frac{|y_\nu|^2}{|y_1|^4}\frac{d}{dx}|y_1|^2,$$

и потому из неравенств (54) можно заключить, что

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dx}\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2+\Re(w_1-w_\nu)\left|\frac{y_\nu}{y_1}\right|^2=\frac{1}{|y_1|^2}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx}|y_\nu|^2-\Re(w_\nu)|y_\nu|^2\right)-$$
$$-\frac{|y_\nu|^2}{|y_1|^4}\left(\frac{1}{2}\frac{d}{dx}|y_1|^2-\Re(w_1)|y_1|^2\right)\leqslant\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{c_{\nu k}y_\nu y_k}{y_1^2}\right|+\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{c_{1k}y_1y_ky_\nu^2}{y_1^4}\right|.$$

Отсюда, учитывая неравенства (48), (61) и (59), приходим к выводу, что существуют сколь угодно большие значения x, для которых

$$-\frac{c\alpha}{4}+c\frac{\alpha}{2}<\sum_{k=1}^{n}|c_{\nu k}|+\sum_{k=1}^{n}|c_{1k}|,$$

а это неравенство противоречит условию (46). Тем самым соотношения (49) также доказаны.

Доказанная лемма допускает следующее обобщение.

Теорема 4. *Пусть функции $w_j(x)$, $c_{jk}(x)$ непрерывны при $x\geqslant x_0$ и пусть*

$$\lim_{k\to+\infty}c_{jk}(x)=0,\qquad j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\tag{63}$$

$$\Re(w_k)-\Re(w_{k+1})>c,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,\tag{64}$$

где c — некоторая положительная константа. Тогда система

$$\frac{dy_j}{dx}=w_jy_j+\sum_{k=1}^{n}c_{jk}y_k,\qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ n,\tag{65}$$

имеет n линейно независимых решений

$$y_1=y_{1k}(x),\ y_2=y_{2k}(x),\ \ldots,\ y_n=y_{nk}(x),\qquad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,\ n,\tag{66}$$

удовлетворяющих условиям

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_{jk}}{y_{kk}}=0\quad\text{при}\quad j\neq k,\ j,\ k=1,\ 2,\ \ldots,\ n;\tag{67}$$

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y'_{kk}}{y_{kk}}-w_k\right)=0,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n.\tag{68}$$

Доказательство. Применим метод полной математической индукции. При $n=1$ система (65) имеет вид

$$\frac{dy}{dx}=[w_1+c_{11}]\,y.$$

и потому для всякого ее решения $y\neq 0$

$$\frac{1}{y}\frac{dy}{dx}-w_1=c_{11}\to 0\quad\text{при}\quad x\to\infty.$$

Остальные же утверждения теоремы в этом случае бессодержательны. Предположим теперь, что теорема верна для системы $n-1$ уравнений относительно $n-1$ неизвестных функций; докажем, что она тогда верна для системы n уравнений относительно n неизвестных функций.

Согласно лемме 2 существует решение

$$y_1 = y_{11}, \quad y_2 = y_{21}, \quad \ldots, \quad y_n = y_{n1} \tag{69}$$

системы (65), такое, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_{k1}}{y_{11}} = 0 \quad \text{при} \quad k > 1 \tag{70}$$

и

$$\lim_{x\to\infty} \left(\frac{y'_{11}}{y_{11}} - w_1\right) = 0. \tag{71}$$

Введем новые переменные $u, z_1, z_2, \ldots, z_{n-1}$, полагая

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= y_{11} \int u\,dx, \\ y_2 &= y_{21} \int u\,dx + z_1, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_n &= y_{n1} \int u\,dx + z_{n-1}; \end{aligned}\right\} \tag{72}$$

тогда система (65) перейдет в

$$y'_{11} \int u\,dx + y_{11}u = w_1 y_{11} \int u\,dx + \sum_{k=1}^{n} c_{1k} y_{k1} \int u\,dx + \sum_{k=2}^{n} c_{1k} z_{k-1},$$

$$y'_{j1} \int u\,dx + y_{j1}u + z'_{j-1} = w_j y_{j1} \int u\,dx + w_j z_{j-1} + \sum_{k=1}^{n} c_{jk} y_{k1} \int u\,dx +$$

$$+ \sum_{k=2}^{n} c_{jk} z_{k-1}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n.$$

Но так как функции $y_{11}, y_{21}, \ldots, y_{n1}$ являются решением системы (65), то члены, содержащие $\int u\,dx$, взаимно уничтожаются, и мы получим

$$y_{11}u = \sum_{k=2}^{n} c_{1k} z_{k-1}, \tag{73}$$

$$y_{j1}u + z'_{j-1} = w_j z_{j-1} + \sum_{k=2}^{n} c_{jk} z_{k-1}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n. \tag{74}$$

Подставляя в (74) вместо функции u ее выражение из (73), придем к системе

$$z'_{j-1} = \omega_j z_{j-1} + \sum_{k=2}^{n} \tilde{c}_{jk} z_{k-1}, \qquad j = 2, 3, \ldots, n, \tag{75}$$

где

$$\tilde{c}_{jk} = c_{jk} - \frac{y_{j1}}{y_{11}} c_{1k}, \qquad j, k = 2, 3, \ldots, n. \tag{76}$$

При этом в силу (63) и (70)

$$\lim_{x \to \infty} \tilde{c}_{jk} = 0, \qquad j, k = 2, 3, \ldots, n,$$

так что система (72) удовлетворяет всем условиям теоремы. Согласно индуктивному предположению она имеет $n-1$ линейно независимых решений

$$z_1 = z_{1k}, \quad z_2 = z_{2k}, \ldots, z_{n-1} = z_{n-1,k} \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{77}$$

таких, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{z_{jk}}{z_{kk}} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n-1, \tag{78}$$

и

$$\lim_{x \to \infty} \left(\frac{z'_{kk}}{z_{kk}} - \omega_{k+1} \right) = 0, \quad k = 1, 2, \ldots, n-1. \tag{79}$$

Докажем, что при помощи этих функций z_{jk} можно построить $n-1$ линейно независимых решений системы (65), которые вместе с решением (69) будут удовлетворять всем требованиям теоремы. Обозначим через u_k функцию u, отвечающую решению $z_1 = z_{1k}$, так что

$$y_{11} u_k = \sum_{\nu=2}^{n} c_{1\nu} z_{\nu-1, k}. \tag{80}$$

Тогда из (63) и (78) вытекает, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y_{11} u_k}{z_{kk}} = 0. \tag{81}$$

С другой стороны, в силу (71) и (79)

$$\frac{y'_{11}}{y_{11}} = \omega_1 + \varepsilon_1, \qquad \frac{z'_{kk}}{z_{kk}} = \omega_{k+1} + \varepsilon_{k+1}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1,$$

где

$$\lim_{x \to \infty} \varepsilon_1 = 0, \quad \lim_{x \to \infty} \varepsilon_{k+1} = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n-1.$$

Отсюда

$$y_{11} = c_1 e^{\int\limits_{x_1}^{x} (w_1+\varepsilon_1)\, d\xi}, \quad z_{kk} = c_{k+1} e^{\int\limits_{x_1}^{x} (w_{k+1}+\varepsilon_{k+1})\, d\xi}, \quad c_1 \neq 0, \quad c_{k+1} \neq 0,$$

и потому в силу условия (64)

$$\left|\frac{z_{kk}}{y_{11}}\right| = \left|\frac{c_{k+1}}{c_1}\right| e^{-\int\limits_{x_1}^{x} \Re (w_1+\varepsilon_1-w_{k+1}-\varepsilon_{k+1})\, d\xi} < \left|\frac{c_{k+1}}{c_1}\right| e^{-\int\limits_{x_1}^{x} [c+\Re (\varepsilon_1-\varepsilon_{k+1})]\, d\xi}.$$

При x_1 достаточно большом будет $\Re(\varepsilon_1 - \varepsilon_{k+1}) < \frac{1}{2} c$ и, следовательно,

$$\left|\frac{z_{kk}}{y_{11}}\right| < \left|\frac{c_{k+1}}{c_1}\right| e^{-\frac{1}{2} c (x-x_1)}. \tag{82}$$

Но тогда существует интеграл $\int\limits^{\infty} \frac{|z_{kk}|}{|y_{11}|}\, dx$, а значит, в силу (81) существует также $\int\limits^{\infty} |u_k|\, dx$. Поэтому, пользуясь формулами (72), мы можем построить следующие решения:

$$\left.\begin{aligned} y_{1,\,k+1} &= -y_{11} \int\limits_{x}^{\infty} u_k\, d\xi, \\ y_{2,\,k+1} &= -y_{21} \int\limits_{x}^{\infty} u_k\, d\xi + z_{1k}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ y_{n,\,k+1} &= -y_{n1} \int\limits_{x}^{\infty} u_k\, d\xi + z_{n-1,\,k}, \end{aligned}\right\} \tag{83}$$

$$k = 1,\ 2,\ \ldots,\ n-1,$$

системы (65).

Докажем, что эти решения удовлетворяют условиям (67) и (68). Мы имеем

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_{1,\,k+1}}{z_{kk}} = -\lim_{x\to\infty} \frac{\int\limits_{x}^{\infty} u_k\, d\xi}{\dfrac{z_{kk}}{y_{11}}}.$$

Числитель и знаменатель последней дроби стремятся к нулю при $x \to \infty$ (см. (82)), и потому, применяя правило Лопиталя, получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_{1,k+1}}{z_{kk}}=\lim_{x\to\infty}\frac{u_k}{\dfrac{d}{dx}\left(\dfrac{z_{kk}}{y_{11}}\right)}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{y_{11}}{z_{kk}}u_k}{\dfrac{z'_{kk}}{z_{kk}}-\dfrac{y'_{11}}{y_{11}}}.$$

Согласно (81), (71) и (79) при $x\to\infty$ числитель последней дроби стремится к нулю, а знаменатель сколь угодно мало отличается от функции $w_{k+1}-w_1$, ограниченной снизу по условию (см. (64)). Следовательно,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_{1,k+1}}{z_{kk}}=0,\qquad k=1,\ 2,\ \ldots,\ n-1. \tag{84}$$

Отсюда, учитывая соотношения (83), (70) и (78), при $\nu>1$ получим

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_{\nu,k+1}}{z_{kk}}=-\lim_{x\to\infty}\frac{y_{\nu 1}\displaystyle\int_x^\infty u_k\,d\xi}{z_{kk}}+\lim_{x\to\infty}\frac{z_{\nu-1,k}}{z_{kk}}=$$
$$=\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y_{\nu 1}}{y_{11}}\cdot\frac{y_{1,k+1}}{z_{kk}}\right)+\lim_{x\to\infty}\frac{z_{\nu-1,k}}{z_{kk}}=\begin{cases}0 & \text{при}\quad \nu-1\neq k,\\ 1 & \text{при}\quad \nu-1=k,\end{cases} \tag{85}$$

так что при $\nu\neq k+1$

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_{\nu,k+1}}{y_{k+1,k+1}}=\lim_{x\to\infty}\frac{\dfrac{y_{\nu,k+1}}{z_{kk}}}{\dfrac{y_{k+1,k+1}}{z_{kk}}}=\frac{0}{1}=0. \tag{86}$$

Но тогда из соотношения

$$\frac{y'_{kk}}{y_{kk}}-w_k=\sum_{j=1}^{n}c_{kj}\frac{y_{jk}}{y_{kk}}$$

и условия (63) вытекает, что

$$\lim_{x\to\infty}\left(\frac{y'_{kk}}{y_{kk}}-w_k\right)=0.$$

Для завершения доказательства остается заметить, что

$$\begin{vmatrix} y_{11} & y_{12} & \ldots & y_{1n}\\ y_{21} & y_{22} & \ldots & y_{2n}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ y_{n1} & y_{n2} & \ldots & y_{nn}\end{vmatrix}=\begin{vmatrix} y_{11} & 0 & \ldots & 0\\ y_{21} & z_{11} & \ldots & z_{1,n-1}\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ y_{n1} & z_{n-1,1} & \ldots & z_{n-1,n-1}\end{vmatrix}\neq 0,$$

так что построенные нами решения $y_{1k}, y_{2k}, \ldots, y_{nk}$, $k=1, 2, \ldots, n$, линейно независимы.

Отметим следующий частный случай теоремы 4.

Следствие 2. *Пусть функции* $c_{jk}(x)$ *непрерывны при* $x \geqslant x_0$ *и стремятся к нулю при* $x \to \infty$ *и пусть* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ — *такие числа, что*

$$\Re(\rho_1) > \Re(\rho_2) > \ldots > \Re(\rho_n). \tag{87}$$

Тогда система

$$y'_k = \rho_k y_k + \sum_{j=1}^{n} c_{kj} y_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{88}$$

имеет n линейно независимых решений

$$y_1 = y_{1k}, \quad y_2 = y_{2k}, \ldots, y_n = y_{nk},$$

таких, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y_{jk}}{y_{kk}} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n, \tag{89}$$

и

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y'_{kk}}{y_{kk}} = \rho_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{90}$$

Следствие 3. *Каково бы ни было положительное число* ε, *для решений, построенных в следствии 2, имеют место соотношения*

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y_{kk}}{e^{(\rho_k + \varepsilon) x}} = 0, \tag{91}$$

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y_{kk}}{e^{(\rho_k - \varepsilon) x}} = \infty. \tag{92}$$

Доказательство. Из (90) следует, что

$$\frac{y'_{kk}}{y_{kk}} = \rho_k + \varepsilon_k,$$

где $\varepsilon_k \to 0$ при $x \to \infty$. Отсюда

$$y_{kk} = C_k e^{\int_{x_1}^{x} (\rho_k + \varepsilon_k)\, d\xi}, \quad C_k \neq 0.$$

Каково бы ни было число $\varepsilon > 0$, можно выбрать x_1 настолько большим, чтобы

$$|\varepsilon_k| < \varepsilon' < \varepsilon \quad \text{при} \quad x \geqslant x_1, \quad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Тогда

$$|C_k| e^{[\Re(\rho_k) - \varepsilon'](x - x_1)} \leqslant |y_{kk}| \leqslant |C_k| e^{[\Re(\rho_k) + \varepsilon'](x - x_1)};$$

следовательно,

$$\left|\frac{y_{kk}}{e^{(\rho_k+\varepsilon)(x-x_1)}}\right| \leqslant C_k e^{-(\varepsilon-\varepsilon')(x-x_1)},$$

$$\left|\frac{y_{kk}}{e^{(\rho_k-\varepsilon)(x-x_1)}}\right| \geqslant C_k e^{(\varepsilon-\varepsilon')(x-x_1)}.$$

Соотношения (91) и (92) непосредственно следуют из этих оценок.

Отметим теперь некоторые случаи приведения общей системы

$$\frac{dy}{dx} = Ay \tag{93}$$

к виду (65) или (88).

Теорема 5. *Пусть в системе* (93) *все элементы матрицы A непрерывны при $x \geqslant x_0$ и пусть существует предел*

$$A(\infty) = \lim_{x \to +\infty} A(x). \tag{94}$$

Пусть, кроме того, собственные значения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ матрицы $A(\infty)$ удовлетворяют условиям

$$\Re(\rho_1) > \Re(\rho_2) > \ldots > \Re(\rho_n). \tag{95}$$

Тогда система (93) *имеет n линейно независимых решений*

$$y_1 = y_{1k}, \quad y_2 = y_{2k}, \ldots, y_n = y_{nk}, \qquad k = 1, 2, 3, \ldots, n,$$

таких, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y'_{jk}}{y_{jk}} = \rho_k, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{96}$$

при некоторых значениях $j = j(k)$.

Доказательство. В силу условия (95) все собственные значения $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ матрицы $A(\infty)$ различны, и потому существует матрица B, которая приводит матрицу $A(\infty)$ к диагональному виду; другими словами,

$$B^{-1}A(\infty)B = P, \tag{97}$$

где

$$P = \begin{pmatrix} \rho_1 & 0 \ldots 0 \\ 0 & \rho_2 \ldots 0 \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 0 & 0 \ldots \rho_n \end{pmatrix}. \tag{98}$$

Положим в системе (93) $y = Bz$; мы получим

$$B\frac{dz}{dx} = ABz,$$

$$\frac{dz}{dx} = B^{-1}ABz. \tag{99}$$

Но

$$B^{-1}AB = B^{-1}A(\infty)B + B^{-1}[A - A(\infty)]B = P + C,$$

где

$$C = B^{-1}[A - A(\infty)]B. \tag{100}$$

Система (99) примет тогда вид

$$\frac{dz}{dx} = (P + C)z,$$

или подробней

$$\frac{dz_k}{dx} = \rho_k z_k + \sum_{j=1}^{n} c_{kj} z_j, \qquad k = 1, 2, \ldots, n. \tag{101}$$

При этом из (100) и (94) вытекает, что

$$\lim_{x \to \infty} c(x) = 0,$$

т. е.

$$\lim_{x \to \infty} c_{jk}(x) = 0, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n.$$

Согласно следствию 2 система (101) имеет n линейно независимых решений

$$z_1 = z_{1k}, \quad z_2 = z_{2k}, \ldots, z_k = z_{nk}, \qquad k = 1, 2, \ldots, n,$$

таких, что

$$\lim_{x \to \infty} \frac{z_{jk}}{z_{kk}} = 0 \quad \text{при} \quad j \neq k \tag{102}$$

и

$$\lim_{x \to \infty} \frac{z'_{kk}}{z_{kk}} = \rho_k. \tag{103}$$

Соотношение $y = Bz$ определяет тогда n линейно независимых решений

$$y_j = y_{jk} = \sum_{i=1}^{n} b_{ji} z_{ik}, \qquad j, k = 1, 2, \ldots, n,$$

системы (93). В силу (102) и (103)

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y_{jk}}{z_{kk}} = b_{jk}, \tag{104}$$

а значит,

$$\lim_{x \to \infty} \frac{y'_{jk}}{z_{kk}} = \sum_{i=1}^{n} a_{ji}(\infty)\, b_{ik}.$$

С другой стороны, соотношение (97), записанное в виде

$$A(\infty) B = BP,$$

означает, что

$$\sum_{i=1}^{n} a_{ji}(\infty) b_{ik} = b_{jk}\rho_k,$$

так что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y'_{jk}}{z_{kk}} = b_{jk}\rho_k. \tag{105}$$

Отметим, что $\det B \neq 0$, и потому ни один из столбцов матрицы B не состоит из одних нулей. Это означает, что при любом k существует индекс $j = j(k)$, такой, что $b_{jk} \neq 0$. Для этого значения j из (104) и (105) следует, что

$$\lim \frac{y'_{jk}}{y_{jk}} = \rho_k.$$

Теорема 6. *Пусть* $A(x) = A_0(x) + A_1(x)$, *и пусть*

$$A_0(x) B(x) = B(x) W(x),$$

где $W(x)$ — *диагональная матрица. Если все элементы матрицы* $B^{-1}A_1B - B^{-1}\frac{dB}{dx}$ *стремятся к нулю при* $x\to\infty$, *то подстановка* $y = B(x)z$ *приводит систему*

$$\frac{dy}{dx} = (A_0 + A_1)y \tag{106}$$

к виду

$$\frac{dz}{dx} = (W + C)z, \tag{107}$$

где

$$\lim_{x\to\infty} c_{jk}(x) = 0. \tag{108}$$

Доказательство. Подстановка $y = B(x)z$ приводит систему (106) к виду (107), где

$$C = B^{-1}A_1B - B^{-1}\frac{dB}{dx} \tag{109}$$

(см. доказательство теоремы 2). Отсюда и из условия теоремы тотчас вытекает, что

$$\lim_{x\to\infty} c_{jk}(x) = 0. \tag{110}$$

2. Асимптотика решений линейного дифференциального уравнения $2n$-го порядка. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l(y) \equiv (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n y = \lambda y, \tag{111}$$

где $p_0, p_1, \ldots, p_n$ — вещественные функции, определенные в интервале $[0, \infty)$, λ — произвольное комплексное число. Предположим еще, что $p_0(x) \neq 0$ в интервале $[0, \infty)$. Тогда система (ср. n° 2 § 16)

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dy}{dx} = y^{[1]}, \quad \frac{dy_1}{dx} = y^{[2]}, \quad \ldots, \quad \frac{dy^{[n-2]}}{dx} = y^{[n-1]}, \quad \frac{dy^{[n-1]}}{dx} = \frac{1}{p_0} y^{[n]}, \\ &\frac{dy^{[n]}}{dx} = p_1 y^{[n-1]} - y^{[n+1]}, \quad \frac{dy^{[n+1]}}{dx} = p_2 y^{[n-2]} - y^{[n+2]}, \quad \ldots \\ &\qquad \ldots, \quad \frac{dy^{[2n-2]}}{dx} = p_{n-1} y^{[1]} - y^{[2n-1]}, \quad \frac{dy^{[2n-1]}}{dx} = (p_n - \lambda) y \end{aligned}\right\} \tag{112}$$

эквивалентна уравнению (111). Введем вектор-функцию

$$\tilde{y} = (y, y^{[1]}, y^{[2]}, \ldots, y^{[2n-2]}, y^{[2n-1]})$$

и матрицу

$$A(x) = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \frac{1}{p_0} & & \\ & & & p_1 & 0 & -1 & \\ & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & \ddots & \ddots \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & -1 \\ p_n - \lambda & & & & & & 0 \end{pmatrix} \tag{113}$$

$\left(\dfrac{1}{p_0}\right.$ на пересечении n-й строки и $n+1$-го столбца; все неотмеченные элементы равны нулю$\Big)$. Тогда система (112) запишется в виде

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = A(x)\,\tilde{y}. \tag{114}$$

Представляя теперь различным образом матрицу $A(x)$ в виде суммы двух или трех матриц и применяя к системе (114) теоремы n° 1, мы получим различные предложения о поведении решений системы (114), а следовательно и уравнения (111), в зависимости от поведения коэффициентов $p_0, p_1, \ldots, p_n$ при $x \to \infty$.

а) Применения теоремы 2. Положим

$$\frac{1}{p_0} = q_0 + \frac{1}{a_0}, \quad p_k = q_k + a_k, \quad k = 1, 2, \ldots, n,$$

где $a_0, a_1, \ldots, a_n$ — некоторые постоянные, причем $a_0 \neq 0$.

В соответствии с этим равенством мы получим разбиение

$$A = A_0 + A_1,$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & 0 \\ & \ddots & \ddots & & & \iddots & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & 0 & \frac{1}{a_0} & & \\ & & & a_1 & 0 & -1 & \\ & & \iddots & & & \ddots & \ddots \\ & \iddots & & & & \ddots & -1 \\ a_n - \lambda & & & & & & 0 \end{pmatrix}, \tag{115}$$

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & & & & & 0 \\ & \ddots & & & \iddots & \\ & & 0 & q_0 & & \\ & & q_1 & 0 & & \\ & \iddots & & & \ddots & \\ q_n & & & & & 0 \end{pmatrix}; \tag{116}$$

уравнение для определения собственных значений матрицы A_0 имеет вид

$$\begin{vmatrix} -\rho & 1 & & & & & 0 \\ & -\rho & & & & \iddots & \\ & & \ddots & \ddots & 0 & & \\ & & & \ddots & \frac{1}{a_0} & & \\ & & a_1 & & \ddots & \ddots & \\ & \iddots & & & & \ddots & -1 \\ a_n - \lambda & & & & & & -\rho \end{vmatrix} = 0,$$

или, раскрывая определитель:

$$a_0\rho^{2n} - a_1\rho^{2n-2} + a_2\rho^{2n-4} - \ldots + (-1)^n (a_n - \lambda) = 0.$$

Предположим, что корни этого уравнения имеют различные вещественные части; предположим далее, что функции

$q_0, q_1, \ldots, q_n$ суммируемы в интервале $(0, \infty)$. Тогда к системе

$$\frac{d\tilde{y}}{dx} = (A_0 + A_1)\,\tilde{y} \tag{117}$$

применимы теорема 2 и следствие из нее.

Пусть W — диагональная матрица из собственных значений $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ матрицы A_0 и пусть постоянная матрица B приводит матрицу A_0 к диагональному виду

$$A_0 = B^{-1}WB.$$

Тогда подстановка $\tilde{y} = Bz$ приводит систему (117) к виду

$$\frac{dz}{dx} = (W + C)\,z,$$

причем все элементы матрицы C суммируемы в интервале $[0, \infty)$. На основании теоремы 1 эта последняя система имеет $2n$ решений:

$$z_1 = z_{1k}, \quad z_2 = z_{2k}, \quad \ldots, \quad z_{2n} = z_{2n,\,k},$$

таких, что

$$z_{jk} = e^{\rho_k x}\eta_{jk}(x), \tag{118}$$

где

$$\lim_{x \to \infty} \eta_{jk}(x) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k. \end{cases} \tag{119}$$

Очевидно, можно считать, что все элементы первой строки матрицы B равны единице. Подстановка $\tilde{y} = Bz$ переводит эти решения в решения системы (117); их первые компоненты

$$y_k = \sum_{j=1}^{2n} b_{1j} z_{jk} = \sum_{j=1}^{2n} z_{jk}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

являются решениями уравнения (111). На основании соотношений (118) и (119)

$$y_k = e^{\rho_k x}\,[1 + o(1)].$$

Таким образом, мы доказали следующую теорему.

Теорема 7. *Пусть*

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{a_0} + q_0, \quad p_1 = a_1 + q_1, \quad \ldots, \quad p_n = a_n + q_n,$$

причем функции $q_0, q_1, \ldots, q_n$ *и постоянные* $a_0, a_1, \ldots, a_n$ *удовлетворяют условиям:*

1) *функции* $q_0, q_1, \ldots, q_n$ *суммируемы в интервале* $[0, \infty)$;
2) $a_0 \neq 0$;

3) *корни* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ *уравнения*

$$a_0\rho^{2n} - a_1\rho^{2n-2} + \ldots + (-1)^n (a_n - \lambda) = 0$$

имеют различные вещественные части.

Тогда уравнение

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n y = \lambda y$$

имеет $2n$ *решений* $y = y_k$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, *таких, что при* $x \to \infty$

$$y_k = e^{\rho_k x}[1 + o(1)], \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Замечание. Предыдущие рассуждения применимы также к уравнению

$$p_0 \frac{d^n y}{dx^n} + p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n y = \lambda y, \tag{120}$$

так что имеет место следующее предложение.

Пусть

$$\frac{1}{p_0} = \frac{1}{a_0} + q_0, \qquad p_k = a_k + q_k,$$

причем функции $q_0, q_1, \ldots, q_n$ *суммируемы в интервале* $[0, \infty)$, $a_0 \neq 0$, *и все корни уравнения* $a_0\rho^n + a_1\rho^{n-1} + \ldots + a_{n-1}\rho + a_n - \lambda = 0$ *имеют различные вещественные части. Тогда уравнение* (120) *имеет* n *решений* $y = y_k$, $k = 1, 2, \ldots, n$, *таких, что при* $x \to \infty$

$$y_k = e^{\rho_k x}[1 + o(1)], \qquad k = 1, 2, \ldots, n.$$

Мы предоставляем читателю доказательство этого предложения.

Положим теперь

$$A = A_0 + A_1,$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \frac{1}{p_0} & & & & \\ & & & & & -1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & -1 \\ -\lambda & & & & & & & & 0 \end{pmatrix}$$

и

$$A_1 = \begin{pmatrix} & & & & & 0 \\ & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & 0 & & \\ & & p_1 & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & \\ p_{n-1} & & & & & \\ p_n & & & & & \end{pmatrix},$$

причем в матрице A_0 элемент $\frac{1}{p_0}$ находится на пересечении n-й строки и $n+1$-го столбца, а все неотмеченные элементы в обеих матрицах равны нулю.

В соответствии с условием теоремы 2 мы предполагаем, что функции $\left(\frac{1}{p_0}\right)' = -\frac{p_0'}{p_0^2}$, $p_1, p_2, \ldots, p_n$ суммируемы в интервале $(0, \infty)$. Найдем матрицы W, B. В силу (23) диагональные элементы матрицы W суть собственные значения матрицы A_0, следовательно, корни характеристического уравнения

$$\begin{vmatrix} -w & 1 & & & & & \\ & -w & \ddots & & & & \\ & & \ddots & 1 & & & \\ & & & \ddots & \frac{1}{p_0} & & \\ & & & & -1 & \ddots & \\ & & & & \ddots & \ddots & \\ & 0 & & & & -w & -1 \\ -\lambda & & & & & & -w \end{vmatrix} = 0,$$

причем в этом определителе все неотмеченные места заняты нулями. Раскрывая его по теореме Лапласа в виде суммы произведений миноров первых n строк и последних n строк, получим уравнение

$$w^{2n} - (-1)^n \frac{\lambda}{p_0} = 0. \tag{121}$$

По условию, функция $\left(\frac{1}{p_0}\right)'$ суммируема в интервале (x_0, ∞), и потому существует

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{p_0(x)}=\frac{1}{p_0(x_0)}+\int_{x_0}^{\infty}\left(\frac{1}{p_0(x)}\right)'dx.$$

Предположим, что этот предел $\neq 0$. Тогда существует также

$$p_0(\infty)=\lim_{x\to\infty}p_0(x)\neq 0$$

и, следовательно, при x_0 достаточно большом, $p_0(x)$ сохраняет знак в интервале $[x_0, \infty)$.

Рассмотрим тот случай, когда $p_0(x)>0$ в интервале $[x_0, \infty)$; противоположный случай сводится к этому заменой в уравнении λ и p_0 на $-\lambda$ и $-p_0$. Тогда все решения уравнения (121) будут иметь вид

$$w_j=\mu_j\rho, \qquad j=1,\ 2,\ \ldots,\ 2n, \tag{122}$$

где

$$\rho=\frac{1}{\sqrt[2n]{p_0}}, \tag{123}$$

а $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n}$ — все различные корни $2n$-й степени из $(-1)^n\lambda$.

Очевидно, условия теоремы 2 будут выполнены, ибо собственными значениями матрицы $A_0(\infty)$ будут

$$w_j(\infty)=\mu_j\rho(\infty)=\mu_j\frac{1}{\sqrt[2n]{p_0(\infty)}};$$

они, очевидно, все различны.

Чтобы применить эту теорему, вычислим матрицу B. Из уравнения $A_0B=BW$ (см. (23) n° 1) следует, что последовательные столбцы этой матрицы суть собственные векторы матрицы A_0, соответствующие собственным значениям $w_1, w_2, \ldots, w_{2n}$. Таким образом, элементы k-го столбца суть нетривиальные решения однородной системы

$$\begin{aligned}
&-w_kb_{1k}+b_{2k}=0,\\
&\quad -w_kb_{2k}+b_{3k}=0,\\
&\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad -w_kb_{nk}+\frac{1}{p_0}b_{n+1,k}=0,\\
&\qquad\quad -w_kb_{n+1,k}-b_{n+2,k}=0,\\
&\qquad\quad \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&\qquad\qquad -w_kb_{2n-1,k}-b_{2n,k}=0.
\end{aligned}$$

Решая последовательно эти уравнения, найдем, что

$$b_{1,k}=\delta_k,\quad b_{2,k}=w_k\delta_k,\quad b_{3k}=w_k^2\delta_k,\quad \ldots,\quad b_{n,k}=w_k^{n-1}\delta_k,$$
$$b_{n+1,k}=p_0w_k^n\delta_k,\quad b_{n+2\ k}=-p_0w_k^{n+1}\delta_k,$$
$$b_{n+3,k}=p_0w_k^{n+2}\delta_k,\ \ldots,\ b_{2n,k}=(-1)^{n-1}p_0w_k^{2n-1}\delta_k,$$

где $\delta_k\neq 0$ остается совершенно произвольным. Отсюда, учитывая формулу (122), получим, что

$$B=PE\delta, \tag{124}$$

где P — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\left.\begin{aligned} &P_1=1,\quad P_2=\rho,\quad P_3=\rho^2,\ \ldots,\quad P_n=\rho^{n-1},\quad P_{n+1}=p_0\rho^n,\\ &P_{n+2}=-p_0\rho^{n+1},\ \ldots,\ P_{2n}=(-1)^{n-1}p_0\rho^{2n-1}, \end{aligned}\right\} \tag{125}$$

δ — диагональная матрица с элементами $\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2n}$, а

$$E=\begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1\\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_{2n}\\ \mu_1^2 & \mu_2^2 & \ldots & \mu_{2n}^2\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ \mu_1^{2n-1} & \mu_2^{2n-1} & \ldots & \mu_{2n}^{2n-1} \end{Vmatrix}. \tag{126}$$

Положим в формуле (124) $\delta=1$, т. е.

$$B=PE; \tag{127}$$

в силу свойств функции $p_0(x)$ все элементы матрицы $\frac{dP}{dx}$, а значит, и матрицы

$$\frac{dB}{dx}=\frac{dP}{dx}E,$$

суммируемы, а элементы матриц B и $B^{-1}=E^{-1}P^{-1}$ ограничены в интервале $[x_0, \infty)$. Поэтому к матрицам A_0, A_1, B, W применима теорема 2; подстановка

$$\tilde{y}=Bz \tag{128}$$

приводит систему

$$\frac{d\tilde{y}}{dx}=A\tilde{y}$$

к виду

$$\frac{dz}{dx}=(W+C)z, \tag{129}$$

где элементы матрицы $C=C(x)$ суммируемы в интервале $[x_0, \infty)$. Пусть теперь число λ таково, что все корни $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n}$ имеют различные вещественные части; тогда в силу (122) функции

$$\Re(w_j(x)-w_k(x))=\rho(x)\Re(\mu_j-\mu_k)$$

будут сохранять знак в интервале $[x_0, \infty)$. Следовательно, к системе (129) применима теорема 1. Эта система имеет $2n$ линейно независимых решений

$$z_1 = z_{1k}, \quad z_2 = z_{2k}, \quad \ldots, \quad z_{2n} = z_{2n,\,k}, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n,$$

таких, что

$$z_{jk} = e^{\mu_k \xi} \eta_{jk},$$

где

$$\lim_{x \to \infty} \eta_{jk} = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad j = k, \\ 0 & \text{при} \quad j \neq k \end{cases}$$

и где

$$\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt[2n]{p_0(t)}}\, dt.$$

Преобразование $\tilde{y} = Bz$ переводит эти решения в некоторые решения системы $\frac{d\tilde{y}}{dx} = A\tilde{y}$. Учитывая формулу (127) для матрицы B и исходную запись (112) этой последней системы, приходим к следующему результату.

Теорема 8. *Если функции*

$$\left(\frac{1}{p_0}\right)', \quad p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_n$$

суммируемы в интервале $[0, \infty)$ *и если* $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(x) > 0$, *то уравнение*

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n y = \lambda y$$

имеет $2n$ *линейно независимых решений* $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, *таких, что при* $x \to \infty$

$$\left.\begin{aligned}
y_k &= e^{\mu_k \xi}[1 + o(1)], \\
y_k^{[1]} &= \mu_k \rho e^{\mu_k \xi}[1 + o(1)], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_k^{[n-1]} &= \mu_k^{n-1} \rho^{n-1} e^{\mu_k \xi}[1 + o(1)], \\
y_k^{[n]} &= p_0 \mu_k^n \rho^n e^{\mu_k \xi}[1 + o(1)], \\
y_k^{[n+1]} &= -p_0 \mu_k^{n+1} \rho^{n+1} e^{\mu_k \xi}[1 + o(1)], \\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\
y_k^{[2n-1]} &= (-1)^{n-1} p_0 \mu_k^{2n-1} \rho^{2n-1} e^{\mu_k \xi}[1 + o(1)],
\end{aligned}\right\} \qquad (130)$$

где $y_k^{[\nu]}$, $\nu = 1, 2, \ldots, 2n-1$, — *квазипроизводные функции* y_k; μ_k — *все различные корни* $(2n)$-*й степени из* $(-1)^n \lambda$, *действительные части которых предполагаются различными, а*

$$\rho = \frac{1}{\sqrt[2n]{p_0}}, \quad \xi = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt[2n]{p_0(t)}}\, dt. \tag{131}$$

б) Применение теоремы 3. Положим

$$A = A_0 + A_1 + A_2,$$

где

$$A_0 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & \ldots & 0 \\ . & . & . & . \\ 0 & 0 & \ldots & 0 \\ p_n & 0 & \ldots & 0 \end{pmatrix}, \tag{132}$$

$$A_1 = \left\| \begin{array}{ccccccccc} 0 & 1 & & & & & & & \\ & & \ddots & & & & & & \\ & & & 1 & & & & & \\ & & & & \frac{1}{p_0} & & & & \\ & & & & \cdot & -1 & & & \\ & & & & & & \ddots & & \\ & & & & & & & & -1 \\ -\lambda & & & & & & & 0 & \end{array} \right\|, \tag{133}$$

$$A_2 = \left\| \begin{array}{ccccccc} & & & & & & 0 \\ & & & & & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & \\ & & & & 0 & & \\ & & & p_1 & & & \\ & & p_2 & & & & \\ & \cdot^{\cdot^{\cdot}} & & & & & \\ p_{n-1} & & & & & & \\ 0 & & & & & & \end{array} \right\|. \tag{134}$$

Найдем соответствующие матрицы W, B, X, X_0, X_1. Диагональные элементы матрицы W суть собственные значения матрицы $A_0 + A_1$; следовательно, они являются корнями уравнения

$$\begin{vmatrix} -w & 1 & & & & & & 0 \\ & -w & \cdot & & & & \cdot & \\ & & \cdot & \cdot & & \cdot & & \\ & & & 1 & & & & \\ & & & & \frac{1}{p_0} & & & \\ & & & & & -1 & & \\ & & \cdot & & & \cdot & \cdot & \\ & 0 & & & & & \cdot & -1 \\ p_n - \lambda & & & & & & & -w \end{vmatrix} = 0. \tag{135}$$

Вычисляя этот определитель (см. стр. 317), получим уравнение

$$w^{2n} + (-1)^n \frac{p_n - \lambda}{p_0} = 0. \tag{136}$$

Обозначим через $\rho = \rho(x)$ измеримую функцию *), которая при любом значении x является одним из корней $(2n)$-й степени из $(-1)^n \frac{\lambda - p_n}{p_0}$; тогда решениями уравнения (136) будут

$$w_j = \varepsilon_j \rho, \qquad j = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{137}$$

где $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n}$ — все различные корни $2n$-й степени из единицы. Найдем теперь матрицу B. По определению

$$(A_0 + A_1) B = BW;$$

повторяя те же рассуждения, что и на стр. 319, получим

$$B = PE\delta, \tag{138}$$

где P — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\left.\begin{gathered} P_1 = 1, \quad P_2 = \rho, \quad P_3 = \rho^2, \; \ldots, \quad P_n = \rho^{n-1}, \quad P_{n+1} = p_0 \rho^n, \\ P_{n+2} = -p_0 \rho^{n+1}, \\ P_{n+3} = p_0 \rho^{n+2}, \; \ldots, \quad P_{2n} = (-1)^{n-1} p_0 \rho^{2n-1}, \end{gathered}\right\} \tag{139}$$

---

*) Если функции p_n, p_0 непрерывны, а функции p_0 и $p_n - \lambda$ не обращаются в нуль при достаточно большом x, то можно задаться каким-нибудь значением корня при фиксированном значении x и потребовать, чтобы функция $\rho(x)$ была непрерывной. Этими условиями она определится однозначно.

δ — диагональная матрица с диагональными элементами

$$\delta_1, \delta_2, \ldots, \delta_{2n},$$

а

$$E = \begin{Vmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \varepsilon_1 & \varepsilon_2 & \ldots & \varepsilon_{2n} \\ \varepsilon_1^2 & \varepsilon_2^2 & \ldots & \varepsilon_{2n}^2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \varepsilon_1^{2n-1} & \varepsilon_2^{2n-1} & \ldots & \varepsilon_{2n}^{2n-1} \end{Vmatrix}. \tag{140}$$

Для определения матрицы δ воспользуемся дополнительным условием, согласно которому диагональные элементы матрицы $B^{-1}\frac{dB}{dx}$ должны быть равны нулю.

Дифференцируя соотношение (138) и умножая обе части полученного результата на $B^{-1} = \delta^{-1}E^{-1}P^{-1}$, найдем, что

$$B^{-1}\frac{dB}{dx} = \delta^{-1}E^{-1}P^{-1}\frac{dP}{dx} \cdot E\delta + \delta^{-1}\frac{d\delta}{dx}.$$

Эта матрица имеет те же диагональные элементы, что и матрица

$$\delta B^{-1}\frac{dB}{dx}\delta^{-1} = E^{-1}P^{-1}\frac{dP}{dx} \cdot E + \frac{d\delta}{dx}\delta^{-1}, \tag{141}$$

и потому диагональные элементы последней должны быть равны нулю. Но, как легко проверить,

$$E^{-1} = \frac{1}{2n}\begin{Vmatrix} 1 & \varepsilon_1^{2n-1} & \varepsilon_1^{2n-2} & \ldots & \varepsilon_1 \\ 1 & \varepsilon_2^{2n-1} & \varepsilon_2^{2n-2} & \ldots & \varepsilon_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \varepsilon_{2n}^{2n-1} & \varepsilon_{2n}^{2n-2} & \ldots & \varepsilon_{2n} \end{Vmatrix},$$

поэтому условие обращения в нуль диагональных элементов матрицы (141) примет вид

$$\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n} \varepsilon_k^{2n-j+1}\frac{1}{P_j}\frac{dP_j}{dx}\varepsilon_k^{j-1} + \frac{1}{\delta_k}\frac{d\delta_k}{dx} = 0,$$

т. е.

$$\frac{1}{2n}\sum_{j=1}^{2n}\frac{1}{P_j}\frac{dP_j}{dx} + \frac{1}{\delta_k}\frac{d\delta_k}{dx} = 0.$$

Решая это дифференциальное уравнение, найдем, что

$$\delta_k = c_k(P_1P_2 \ldots P_{2n})^{-\frac{1}{2n}},$$

где c_k — произвольные постоянные; учитывая выражения (139) для диагональных элементов $P_1, \ldots, P_{2n}$, мы получим

$$\delta_k = c_k \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}}.$$

Таким образом,

$$\delta = \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} c,$$

где c — постоянная диагональная матрица. Подставляя в (138), получим следующие выражения для B:

$$B = \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} PC, \tag{142}$$

где $C = Ec$ — постоянная матрица.

Найдем теперь матрицу X_0. Введем обозначения:

$$X_0 = \left(x_{jk}^{(0)}\right), \quad X_1 = \left(x_{jk}^{(1)}\right), \quad C = \left(c_{jk}\right), \quad C^{-1} = \left(c'_{jk}\right),$$
$$B = \left(b_{jk}\right), \quad B^{-1} = \left(b'_{jk}\right);$$

тогда из (33) при $i = 0$, (142), (132) и (139) получим

$$x_{jk}^{(0)} \left(w_k - w_j\right) = p'_n b'_{j,\,2n} b_{1k} = p'_n c'_{j,\,2n} P_{2n}^{-1} P_1 c_{1k} =$$
$$= p'_n (-1)^{n-1} p_0^{-1} \rho^{-(2n-1)} c'_{j,\,2n} c_{1k}.$$

Отсюда в силу (137)

$$X_0 = \frac{p'_n}{\lambda - p_n} S_0, \tag{143}$$

где S_0 — постоянная матрица. Но тогда из (34) легко выводим, что

$$X = \frac{p'_n}{(\lambda - p_n)\,\rho} S, \tag{144}$$

где S — постоянная матрица.

Далее, из (33) при $i = 1$ вытекает, что

$$x_{jk}^{(1)} \left(w_k - w_j\right) = -\frac{p'_0}{p_0^2} b'_{jn} b_{n+1,\,k} =$$
$$= -\frac{p'_0}{p_0^2} c'_{jn} P_n^{-1} P_{n+1} c_{n+1,\,k} = -\frac{p'_0}{p_0} \rho c'_{jn} c_{n+1,\,k};$$

следовательно,

$$X_1 = -\frac{p'_0}{p_0} S_1, \tag{145}$$

где S_1 — постоянная матрица. Наконец, пользуясь формулами (134), (137) и (139), легко убедиться в том, что

$$B^{-1}A_2B = \frac{p_1}{p_0\rho}T_1 + \frac{p_2}{p_0\rho^3}T_2 + \ldots + \frac{p_{n-1}}{p_0\rho^{2n-3}}T_{n-1}, \tag{146}$$

где $T_1, T_2, \ldots, T_{n-1}$ — постоянные матрицы.

Формулы (143)—(146) показывают, что условия теоремы 3 будут удовлетворены, если функции

$$\frac{p_n''}{(\lambda-p_n)\rho}, \quad \frac{p_n'^2}{(\lambda-p_n)^2\rho}, \quad \frac{p_n'\rho'}{(\lambda-p_n)\rho^2}, \quad \frac{p_0'}{p_0}, \quad \frac{p_1}{p_0\rho}, \quad \frac{p_2}{p_0\rho^3}, \ldots, \frac{p_{n-1}}{p_0\rho^{2n-3}} \tag{147}$$

суммируемы в некотором интервале $[x_0, \infty)$ и если

$$\lim_{x\to\infty}\left|\frac{p_n'}{(\lambda-p_n)\rho}\right| < \frac{1}{|S|}. \tag{148}$$

Этот предел существует ввиду вытекающей из (147) суммируемости производной функции $\frac{p_n'}{(\lambda-p_n)\rho}$.

Оценим норму $|S|$ матрицы S. Пусть s_{ik}^0, s_{ik} — элементы матриц S^0 и S. Очевидно, можно считать $c=1$. Тогда $C=E$; следовательно, учитывая выражения для E и E^{-1}, получим

$$s_{ik}^{(0)} = \begin{cases} 0 & \text{при } i=k, \\ \dfrac{(-1)^{n-1}}{2n}\dfrac{\varepsilon_i}{\varepsilon_k-\varepsilon_i} & \text{при } i\neq k. \end{cases}$$

Отсюда и из определения матрицы X заключаем, что

$$s_{ik} = \begin{cases} 0 & \text{при } i=k, \\ \dfrac{(-1)^{n}}{2n}\dfrac{\varepsilon_i}{(\varepsilon_k-\varepsilon_i)^2} & \text{при } i\neq k, \end{cases}$$

и потому

$$|S|^2 \leqslant \frac{1}{(2n)^2}\sum_{\substack{i,\,k=1\\ i\neq k}}^{2n}\frac{1}{|\varepsilon_k-\varepsilon_i|^4} \leqslant \frac{(2n-1)\,2n}{(2n)^2\,a_{2n}^4},$$

где a_{2n} — длина стороны правильного $2n$-угольника, вписанного в окружность радиуса единица. Следовательно,

$$|S| \leqslant \frac{\sqrt{2n-1}}{\sqrt{2n}\,a_{2n}^2}.$$

Из суммируемости функции $\frac{p_0'}{p_0}$ вытекает, что существует

$$\lim_{x\to\infty} \ln|p_0(x)| = \ln|p_0(x_0)| + \int_{x_0}^{\infty} \frac{p_0'(x)}{p_0(x)}\,dx,$$

и потому существует также

$$|p_0(\infty)| = \lim_{x\to\infty}|p_0(x)| \neq 0.$$

Отсюда следует, что суммируемость функций (147) эквивалентна суммируемости функций

$$\left.\begin{aligned} &p_n''|\lambda-p_n|^{-1-\frac{1}{2n}},\quad p_n'^2|\lambda-p_n|^{-2-\frac{1}{2n}},\quad p_n'|\lambda-p_n|^{-1-\frac{1}{2n}}p_0',\quad \frac{p_0'}{p_0},\\ &p_1|\lambda-p_n|^{-\frac{1}{2n}},\quad p_2|\lambda-p_n|^{-\frac{3}{2n}},\quad \ldots,\quad p_{n-1}|\lambda-p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}}.\end{aligned}\right\} \tag{149}$$

Предположим, кроме того, что при x достаточно большом $(x \geqslant x_0)$, вещественная часть каждой из функций

$$w_j - w_k = \rho(\varepsilon_j - \varepsilon_k)$$

сохраняет знак. Применяя теоремы 1 и 3 и пользуясь формулой для матрицы B и свойствами матричной функции $X(x)$, приходим к следующему результату.

Теорема 9. *Пусть при достаточно большом x_0 функции*

$$p_n''(\lambda-p_n)^{-1-\frac{1}{2n}},\quad p_n'^2(\lambda-p_n)^{-2-\frac{1}{2n}},\quad p_n'(\lambda-p_n)^{-1-\frac{1}{2n}}p_0',$$
$$\frac{p_0'}{p_0},\quad p_1(\lambda-p_n)^{-\frac{1}{2n}},\quad p_2(\lambda-p_n)^{-\frac{3}{2n}},\quad \ldots,\quad p_{n-1}(\lambda-p_r)^{-\frac{2n-3}{2n}}$$

суммируемы в интервале $[x_0, \infty)$, а вещественные части функций

$$w_j - w_k = i(\lambda-p_n)^{\frac{1}{2n}}(\varepsilon_j - \varepsilon_k),$$

где ε_j, $j = 1, \ldots, 2n$, — все различные корни $(2n)$-й степени из единицы, сохраняют знак в этом интервале. Пусть, кроме того,

$$\lim_{x\to\infty}\left|p_n'(\lambda-p_n)^{-1-\frac{1}{2n}}\right| < \frac{\sqrt{2n}\,a_{2n}^2}{\sqrt{2n-1}}, \tag{150}$$

где a_{2n} — длина стороны правильного $2n$-угольника, вписанного в единичную окружность.

Тогда уравнение $l(y)=\lambda y$ имеет $2n$ линейно независимых решений $y=y_j$, $j=1, 2, \ldots, n$, таких, что при $x\to+\infty$

$$\left.\begin{aligned}
y_j &= \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} e^{\varepsilon_j\xi}\left[1+\alpha_{j0}+o(1)\right],\\
y_j^{[1]} &= \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_j\rho e^{\varepsilon_j\xi}\left[1+\alpha_{j1}+o(1)\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_j^{[n-1]} &= \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} \varepsilon_j^{n-1}\rho^{n-1} e^{\varepsilon_j\xi}\left[1+\alpha_{j,\,n-1}+o(1)\right],\\
y_j^{[n]} &= \rho^{-\frac{2n-1}{2}} \varepsilon_j^{n} p_0^{\frac{1}{2}}\rho^{n} e^{\varepsilon_j\xi}\left[1+\alpha_{jn}+o(1)\right],\\
y_j^{[n+1]} &= -\rho^{-\frac{2n-1}{2}} \varepsilon_j^{n+1} p_0^{\frac{1}{2}}\rho^{n+1} e^{\varepsilon_j\xi}\left[1+\alpha_{j,\,n+1}+o(1)\right],\\
&\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\
y_j^{[2n-1]} &= (-1)^{n-1}\rho^{-\frac{2n-1}{2}} \varepsilon_j^{2n-1} p_0^{\frac{1}{2}}\rho^{2n-1} e^{\varepsilon_j\xi}\left[1+\alpha_{j,\,2n-1}+o(1)\right],\\
&\qquad j=1, 2, \ldots, 2n,
\end{aligned}\right\} \tag{151}$$

где $\alpha_{j\nu}$ — некоторые постоянные *)

$$\xi=\int_{x_0}^{x}\rho\,dx=\int_{x_0}^{x}\sqrt[2n]{(-1)^n\frac{\lambda-p_n}{p_0}}\,dx \tag{152}$$

и где $y_j^{[1]}, \ldots, y_j^{[2n-1]}$ — квазипроизводные функции y_j **).

Отметим важные частные случаи, при которых осуществляются условия теоремы 9:

1) Если λ — невещественное число, то ввиду вещественности функции $p_n(x)$ множитель $\lambda-p_n(x)$ ограничен снизу. Следовательно, в этом случае для суммируемости функции (149) достаточна суммируемость функций

$$p_n'',\quad p_n'^2,\quad p_n'p_0',\quad \frac{p_0'}{p_0},\quad p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_{n-1}. \tag{153}$$

---

*) В силу (38), (140), (142) и (144)

$$\alpha_{j\nu}=\sum_{k=1}^{2n}\left(\frac{\xi_k}{\varepsilon_j}\right)^{\nu} x_{k,j}(\infty) \quad\text{и}\quad x_{k\mu}(\infty)=s_{k\mu}\lim_{x\to\infty}\frac{p_n'}{(\lambda-p_n)\,p}.$$

**) В этой теореме асимптотика решений определяется лишь коэффициентами p_0 и p_n. Более тонкие теоремы, в которых асимптотика определяется поведением всех коэффициентов, получены в работах Федорюк [1—4].

Если, кроме того, функция $p_n(x)$ ограничена в интервале $[x_0, \infty)$, то это последнее условие не только достаточно, но и необходимо для суммируемости функций (149). Условие (150) будет тогда выполнено, если

$$\lim_{x\to\infty} |p_n'(x)| < \frac{\sqrt{2n}\,a_{2n}^2}{\sqrt{2n-1}} |\Im\lambda|^{1+\frac{1}{2n}}. \tag{154}$$

2) Пусть $|p_n(x)| \to \infty$ при $x \to \infty$; тогда

$$\lim_{x\to\infty} \frac{\lambda - p_n}{p_n} = -1,$$

и потому суммируемость функций (149) эквивалентна суммируемости функций

$$\left.\begin{aligned} &p_n''|p_n|^{-1-\frac{1}{2n}},\quad p_n'^2|p_n|^{-2-\frac{1}{2n}},\quad p_n'|p_n|^{-1-\frac{1}{2n}}p_0',\quad \frac{p_0'}{p_0},\\ &p_1|p_n|^{-\frac{1}{2n}},\quad p_2|p_n|^{-\frac{3}{2n}},\ \ldots,\ p_{n-1}|p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}}. \end{aligned}\right\} \tag{155}$$

Кроме того,

$$\rho = \sqrt[2n]{(-1)^{n-1}\frac{p_n}{p_0}}\left[1 - \frac{1}{2n}\frac{\lambda}{p_n} + O\left(\frac{1}{p_n^2}\right)\right],$$

а значит,

$$w_j - w_k = \sqrt[2n]{(-1)^{n-1}\frac{p_n}{p_0}}(\varepsilon_j - \varepsilon_k)\left[1 - \frac{1}{2n}\frac{\lambda}{p_n} + O\left(\frac{1}{p_n^2}\right)\right], \quad j \neq k.$$

Предположим теперь, что функция $p_n(x)$, следовательно и функция $(-1)^{n-1}\frac{p_n(x)}{p_0(x)}$, сохраняет знак при достаточно большом x. Пусть для определенности $(-1)^{n-1}\frac{p_n}{p_0} > 0$ при $x \geqslant x_0$. Если $\Re(\varepsilon_j - \varepsilon_k) \neq 0$, то из предыдущей формулы следует, что

$$\Re(w_j - w_k) = \sqrt[2n]{(-1)^{n-1}\frac{p_n}{p_0}}\,\Re(\varepsilon_j - \varepsilon_k)(1 + o(1)) \tag{156}$$

и потому сохраняет знак при достаточно большом x.

Если же $\Re(\varepsilon_j - \varepsilon_k) = 0$, то $\Im(\varepsilon_j - \varepsilon_k) \neq 0$ и

$$\Re(w_j - w_k) = \sqrt[2n]{(-1)^{n-1}\frac{p_n}{p_0}}\,\frac{1}{2n}\,\frac{\Im(\lambda)}{p_n}\,\Im(\varepsilon_j - \varepsilon_k)(1 + o(1)); \tag{157}$$

следовательно, и в этом случае $\Re(w_j - w_k)$ сохраняет знак при x достаточно большом.

Случай $(-1)^{n-1}\frac{p_n}{p_0}<0$ рассматривается аналогично; при этом вместо формул (156) и (157) следует рассматривать формулы

$$\Re(w_j-w_k)=\sqrt[2n]{\left|\frac{p_n}{p_0}\right|}\,\Re(\varepsilon_j'-\varepsilon_k')(1+o(1)),\quad \Re(\varepsilon_j'-\varepsilon_k')\neq 0,\tag{156'}$$

$$\Re(w_j-w_k)=\sqrt[2n]{\left|\frac{p_n}{p_0}\right|}\,\frac{1}{2n}\,\frac{\Im(\lambda)}{p_n}\,\Im(\varepsilon_j'-\varepsilon_k')(1+o(1)),\quad \Re(\varepsilon_j'-\varepsilon_k')=0,\tag{157'}$$

где ε_j' — все различные корни $(2n)$-й степени из -1.

Итак, *если* $\lim\limits_{x\to\infty} p_n(x)=+\infty$ *или* $\lim\limits_{x\to\infty} p_n(x)=-\infty$, *то функции* $\Re(w_j-w_k)$, $j\neq k$, *сохраняют знак при достаточно большом* x.

Рассмотрим теперь тот случай, когда $|p_n(x)|\to\infty$ при $x\to\infty$ и функции $p_n'(x)$, $p_n''(x)$ не меняют знак в интервале $[x_0,\infty)$; пусть, кроме того, при $x\to\infty$

$$p_n'=O(|p_n|^{\alpha}),\quad 0<\alpha<1+\frac{1}{2n}.\tag{158}$$

Тогда предел в левой части (150) равен нулю. Отсюда следует, что условие (150) выполнено и что все постоянные $\alpha_{j\nu}$ в формулах (151) равны нулю. Если, кроме того, функция $\frac{p_0'}{p_0}$ суммируема, то и функция p_0' суммируема (см. стр. 326) и потому также суммируема функция

$$p_n'\,|p_n|^{-1-\frac{1}{2n}}\,p_0',$$

ибо в силу (158) произведение первых двух множителей ограничено при $x\to\infty$.

Пусть для определенности $p_n'\geqslant 0$; тогда в силу условия $|p_n(x)|\to\infty$ будет также $p_n>0$ при x достаточно большом $(x>x_0)$. Поэтому, учитывая условие (158), получаем, что

$$\int_{x_0}^{N} p_n'^2\,|p_n|^{-2-\frac{1}{2n}}\,dx=\int_{x_0}^{N} p_n'^2\,p_n^{-2-\frac{1}{2n}}\,dx=O\left(\int_{x_0}^{N} p_n'p_n^{\alpha-2-\frac{1}{2n}}\,dx\right)=$$

$$=\frac{1}{\alpha-1-\frac{1}{2n}}\,O\left(\left[p_n^{\alpha-1-\frac{1}{2n}}\right]_{x_0}^{N}\right).$$

Так как $0<\alpha<1+\frac{1}{2n}$, то последнее выражение ограничено; следовательно, существует интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} p_n'^2 (p_n)^{-2-\frac{1}{2n}}\, dx.$$

Аналогично можно показать, что этот интеграл существует при $p_n'\leqslant 0$. Но тогда из соотношения

$$\int_{x_0}^{N} p_n'' |p_n|^{-1-\frac{1}{2n}}\, dx = p_n' |p_n|^{-1-\frac{1}{2n}} \Big|_{x_0}^{N} + \left(1+\frac{1}{2n}\right) \int_{x_0}^{N} p_n'^2 |p_n|^{-2-\frac{1}{2n}}\, dx$$

следует, что существует также интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} p_n'' |p_n|^{-1-\frac{1}{2n}}\, dx,$$

ибо

$$\left(p_n' |p_n|^{-1-\frac{1}{2n}}\right)_{x=N} = O\left(|p_n|^{\alpha-1-\frac{1}{2n}}\right)_{x=N} \to 0 \text{ при } N\to\infty.$$

Таким образом:

Если при достаточно большом x_0

1) *функции* p_n', p_n'' *не меняют знак в интервале* $[x_0, \infty)$,

2) *функции*

$$\frac{p_0'}{p_0},\ p_1 |p_n|^{-\frac{1}{2n}},\ p_2 |p_n|^{-\frac{3}{2n}},\ \ldots,\ p_{n-1} |p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}}$$

суммируемы в интервале $[x_0, \infty)$ *и если при* $x\to+\infty$

3) $|p_n(x)|\to\infty$,

4) $p_n' = O\left(|p_n|^{\alpha}\right)$, $0<\alpha<1+\frac{1}{2n}$,

то все условия теоремы 9 *выполняются и потому имеют место асимптотические формулы* (151), *причем все* $\alpha_{j\nu}=0$.

в) Применение теоремы 5.

Теорема 10. *Пусть при достаточно большом* x_0 *функции*

$$p_0,\ p_1,\ p_2,\ \ldots,\ p_n$$

непрерывны в интервале $[x_0, \infty)$ *и пусть существуют конечные пределы*

$$a_0=\lim_{x\to\infty} p_0,\quad a_1=\lim_{x\to\infty} p_1,\ \ldots,\ a_n=\lim_{x\to\infty} p_n, \tag{159}$$

причем $a_0\neq 0$. *Если вещественные части корней* $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2n}$ *уравнения*

$$(-1)^n a_0\rho^{2n} + (-1)^{n-1} a_1\rho^{2n-2} + \ldots - a_{n-1}\rho^2 + a_n - \lambda = 0 \tag{160}$$

отличны друг от друга, то уравнение

$$(-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n y = \lambda y$$

имеет $2n$ *линейно независимых решений*

$$y_1,\ y_2,\ \ldots,\ y_{2n},$$

таких, что

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_k'}{y_k} = \rho_k. \tag{161}$$

Следовательно, при любом положительном ε

$$\lim_{x\to\infty} \frac{y_k}{e^{(\rho_k+\varepsilon)x}} = 0, \quad \lim_{x\to\infty} \frac{y_k}{e^{(\rho_k-\varepsilon)x}} = \infty. \tag{162}$$

Доказательство. В силу условий теоремы

$$A(\infty) = \begin{pmatrix}
0 & 1 & & & & & 0\\
 & & \ddots & & & & \\
 & & & 1 & 0 & & \\
 & & & & \frac{1}{a_0} & & \\
 & & & a_1 & & -1 & \\
 & & \cdot & & & \ddots & \\
 & a_{n-1} & & & & & -1\\
a_n-\lambda & & & & & & 0
\end{pmatrix};$$

собственные значения этой матрицы будут корнями уравнения

$$\begin{vmatrix}
-\rho & 1 & & & & & \\
 & \ddots & \ddots & & & & \\
 & & & 1 & & & \\
 & & & & \frac{1}{a_0} & & \\
 & & & a_1 & -\rho & -1 & \\
 & & \cdot & & & \ddots & \ddots \\
 & a_{n-1} & & & & & -1\\
a_n-\lambda & & & & & & -\rho
\end{vmatrix} = 0.$$

Раскрывая последний определитель, получим уравнение

$$(-1)^n a_0\rho^{2n}+(-1)^{n-1}a_1\rho^{2n-2}+\ldots-a_{n-1}\rho^2+(a_n-\lambda)=0.$$

По условию все его корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2n}$ имеют различные вещественные части; далее, в силу условия

$$B^{-1}A(\infty)B=\begin{pmatrix}\rho_1 & 0 & \ldots & 0\\ 0 & \rho_2 & \ldots & 0\\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot\\ 0 & 0 & \ldots & \rho_n\end{pmatrix}$$

(см. (97)) столбцы матрицы B удовлетворяют однородной системе уравнений

$$\begin{gathered}-\rho_k b_{1k}+b_{2k}=0,\\ -\rho_k b_{2k}+b_{3k}=0,\\ \cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\;\cdot\\ (a_n-\lambda)\,b_{1k}-\rho_k b_{2n,\,k}=0.\end{gathered}$$

В этих уравнениях можно положить $b_{1k}=1$; тогда остальные элементы $b_{2k}, \ldots, b_{2n,\,k}$ определяются единственным образом.

Утверждение теоремы 10 непосредственно следует из этого обстоятельства и теоремы 5.

Замечание. В некоторых случаях приходится рассматривать уравнение

$$p_0y^{(n)}+p_1y^{(n-1)}+\ldots+p_ny=\lambda y. \tag{163}$$

Пусть функции $p_0, p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют тем же условиям, что и в теореме 9, и пусть корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ уравнения

$$a_0\rho^n+a_1\rho^{n-1}+\ldots+(a_n-\lambda)=0 \tag{164}$$

имеют отличные друг от друга вещественные части. Тогда уравнение (163) имеет n линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_n$, таких, что

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_k'}{y_k}=\rho_k.$$

Следовательно, при любом положительном ε

$$\lim_{x\to\infty}\frac{y_k}{e^{(\rho_k+\varepsilon)x}}=0,\quad \lim_{x\to\infty}\frac{y_k}{e^{(\rho_k-\varepsilon)x}}=\infty,\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n. \tag{165}$$

Доказательство этого утверждения аналогично доказательству теоремы 10.

Теоремы 1—3 и 8 и 9 принадлежат И. М. Рапопорту (см. Рапопорт [1, 2], теоремы 4 и 5 Перрону (см. Перрон [1]).

§ 23. Индекс дефекта дифференциального оператора

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n y \quad (1)$$

в интервале $[0, +\infty)$, где

$$\frac{1}{p_0}, \; p_1, \; \ldots, \; p_n$$

— вещественные функции, суммируемые в каждом конечном интервале $[0, \alpha]$, $\alpha > 0$. В дальнейшем в этом параграфе мы будем считать это условие выполненным и не будем его больше оговаривать. Как было показано в § 17, это выражение определяет замкнутый симметрический оператор L_0 с индексом дефекта (m, m), где $n \leqslant m \leqslant 2n$. Число m есть число линейно независимых решений уравнения

$$l(y) = \lambda y, \quad \Im\lambda \neq 0, \qquad (2)$$

принадлежащих $L^2(0, \infty)$.

Асимптотические выражения для решений уравнения (1), полученные в § 22, дают теперь возможность доказать некоторые теоремы об индексе дефекта оператора L_0. В этих теоремах выясняется, каким образом индекс дефекта зависит от поведения коэффициентов $p_0, p_1, \ldots, p_n$ дифференциального выражения *).

1. Изменение коэффициента p_n на ограниченное слагаемое. Обозначим через $q(x)$ измеримую вещественную функцию, существенно ограниченную в интервале $(0, +\infty)$.

Теорема 1. *При прибавлении к $p_n(x)$ функции $q(x)$ индекс дефекта оператора L_0 не изменяется.*

Доказательство. Указанное прибавление равносильно прибавлению к L_0 оператора умножения на функцию $q(x)$, ограниченного в силу сделанных предположений относительно $q(x)$. Ввиду вещественности функции $q(x)$ этот оператор также эрмитов, а прибавление ограниченного эрмитова оператора к симметрическому оператору не изменяет индекса дефекта (см. теорему 6 n° 7 § 14).

2. Применение теоремы 7 § 22.

Теорема 2. *Если существуют постоянные $a_0 \neq 0, a_1, \ldots, a_n$, такие, что функции*

$$\frac{1}{p_0} - \frac{1}{a_0}, \; p_1 - a_1, \; \ldots, \; p_n - a_n$$

*) Результаты n°n° 1—7 принадлежат автору (см. Наймарк [4]); их подробные доказательства опубликованы впервые в первом издании этой книги.

суммируемы в интервале $(0, \infty)$, *то индекс дефекта оператора* L_0 *есть* (n, n).

Доказательство. Выберем невещественное число λ, такое, что все корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2n}$ уравнения

$$a_0\rho^{2n} - a_1\rho^{2n-2} + \ldots + (-1)^{n-1}(a_n - \lambda) = 0 \tag{3}$$

имеют различные вещественные части. Согласно теореме 7 § 22 уравнение $l(y) = \lambda y$ имеет $2n$ решений $y = y_k$, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, таких, что при $x \to +\infty$

$$y_k = e^{\rho_k x}[1 + o(1)]. \tag{4}$$

Расположим числа $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2n}$ в порядке убывания их вещественных частей:

$$\Re(\rho_1) > \Re(\rho_2) > \ldots > \Re(\rho_{2n}). \tag{5}$$

Так как уравнение (3) содержит только четные степени ρ, то одновременно с ρ_ν его корнем будет также $-\rho_\nu$; поэтому корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_n$ имеют положительную вещественную часть, а корни $\rho_{n+1}, \rho_{n+2}, \ldots, \rho_{2n}$ — отрицательную часть. Отсюда на основании формулы (4) заключаем, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не будут принадлежать $L^2(0, \infty)$, а функции $y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$ все принадлежат $L^2(0, \infty)$. Кроме того, никакая линейная комбинация $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$, в которой не все коэффициенты равны нулю, не может принадлежать $L^2(0, \infty)$. Действительно, из соотношений (4) и (5) вытекает, что

$$\frac{y_{k+1}}{y_k} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty, \quad k = 1, 2, \ldots, 2n - 1.$$

Если поэтому c_ν — первый из коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не равный нулю, то

$$c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n = c_\nu y_\nu + c_{\nu+1}y_{\nu+1} + \ldots + c_ny_n = \\ = c_\nu y_\nu[1 + o(1)]$$

и, следовательно, не принадлежит $L^2(0, \infty)$. Но тогда линейная комбинация

$$c_1y_1 + \ldots + c_ny_n + c_{n+1}y_{n+1} + \ldots + c_{2n}y_{2n}$$

будет принадлежать $L^2(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Это как раз и означает, что индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n).

3. Применение теоремы 8 § 22.

Теорема 3. *Если функции*

$$\left(\frac{1}{p_0}\right)', \; p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_n$$

суммируемы в интервале $[0, \infty)$ *и если* $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(x) > 0$, *то оператор* L_0 *имеет индекс дефекта* (n, n).

Доказательство. Положим

$$c = \lim_{x \to \infty} \frac{1}{\sqrt[2n]{p_0(x)}}$$

(существование этого предела было установлено при доказательстве теоремы 8 § 22); в силу условия теоремы $c > 0$. Пусть невещественное число λ выбрано так, что корни $\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_{2n}$ $2n$-й степени из $(-1)^n \lambda$ имеют различные вещественные части. Ввиду того, что числа μ_k — корни четной степени, имеется в точности n корней с положительной вещественной частью и n корней с отрицательной вещественной частью. Расположим их в порядке убывания их вещественных частей, так что

$$\Re(\mu_1) > \Re(\mu_2) > \ldots > \Re(\mu_n) > 0 > \Re(\mu_{n+1}) > \ldots > \Re(\mu_{2n}).$$

Согласно теореме 8 § 22 уравнение $l(y) = \lambda y$ имеет $2n$ линейно независимых решений y_k, $k = 1, 2, \ldots, 2n$, таких, что при $x \to +\infty$

$$y_k = e^{\mu_k \xi}[1 + o(1)],$$

где

$$\xi = \int_{x_0}^{x} \frac{1}{\sqrt[2n]{p_0(t)}}\, dt.$$

По определению числа c, каково бы ни было положительное число ε при x достаточно большом $(x \geqslant x_0)$

$$(c - \varepsilon)(x - x_0) < \xi < (c + \varepsilon)(x - x_0);$$

в дальнейшем мы будем считать $\varepsilon < c$, так что $c - \varepsilon > 0$. Тогда при $x \geqslant x_0$

$$\left| \frac{y_k}{y_{k+1}} \right| = e^{\xi \Re(\mu_k - \mu_{k+1})}[1 + o(1)] \geqslant e^{\Re(\mu_k - \mu_{k+1})(c - \varepsilon)x}[1 + o(1)],$$

и потому

$$\left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \right| \leqslant e^{-\Re(\mu_k - \mu_{k+1})(c - \varepsilon)x}[1 + o(1)],$$

так что

$$\lim_{x \to +\infty} \left| \frac{y_{k+1}}{y_k} \right| = 0. \tag{6}$$

Заметим теперь, что ни одна из функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не принадлежит $L^2(0, \infty)$. Действительно, при $k \leqslant n$ будет $\Re(\mu_k) > 0$, и потому

$$|y_k| = e^{\Re(\mu_k)\xi}[1 + o(1)] > e^{\Re(\mu_k)(c - \varepsilon)x}[1 + o(1)],$$

а это последнее выражение стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$. Повторяя рассуждения, приведенные в конце доказательства теоремы 2, заключаем, что индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n).

Теорему 3 можно обобщить следующим образом.

Теорема 3′. *Пусть выполнены условия:*

1) *функции*

$$\left(\frac{1}{p_0}\right)', \; p_1, \; p_2, \; \ldots, \; p_{n-1}, \; p(x)$$

суммируемы в интервале $[0, \infty)$;

2) $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(x) > 0$;

3) $p_n(x) = p(x) + q(x)$;

4) *функция* $q(x)$ *измерима и существенно ограничена в интервале* $[0, \infty)$.

Тогда оператор L_0 *имеет индекс дефекта* (n, n).

Доказательство. Обозначим через L_0' оператор, порожденный дифференциальным выражением

$$l'(y) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots$$
$$\ldots - \frac{d}{dx}\left(p_{n-1} \frac{dy}{dx}\right) + py.$$

На основании теоремы 1 индекс дефекта оператора L_0 совпадает с индексом дефекта оператора L_0', равным (n, n) по теореме 3.

Следствие. *При тех же предположениях относительно* $q(x)$ *оператор* L_0, *порожденный дифференциальным выражением*

$$l(y) = (-1)^n \frac{d^{2n} y}{dx^{2n}} + q(x)\, y,$$

имеет индекс дефекта (n, n).

Действительно, функции

$$p_0 = 1, \; p_1 = \ldots = p_{n-1} \equiv 0, \; p_n = q$$

удовлетворяют всем условиям теоремы 3′.

4. Применение теоремы 9 § 22.

Теорема 4. *Пусть выполнены условия:*

1) $|p_n(x)| \to \infty$ *при* $x \to +\infty$;

2) p_n', p_n'' *не меняет знак в интервале* $[x_0, +\infty)$ *при достаточно большом* x_0;

3) *при* $x \to +\infty$

$$p_n' = O(|p_n|^\alpha), \quad 0 < \alpha < 1 + \frac{1}{2n}; \tag{7}$$

4) *функции*

$$\frac{p_0'}{p_0}, \ p_1 |p_n|^{-\frac{1}{2n}}, \ p_2 |p_n|^{-\frac{3}{2n}}, \ \ldots, \ p_{n-1} |p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}}$$

суммируемы в интервале $[0, +\infty)$;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(x) > 0$ *).

Тогда, если $p_n(x) \to +\infty$ *при* $x \to +\infty$, *то индекс дефекта оператора* L_0 *есть* (n, n).

Если же $p_n(x) \to -\infty$ *при* $x \to +\infty$, *то индекс дефекта оператора* L_0 *есть* $(n+1, n+1)$ *или* (n, n) *в зависимости от того, будет ли интеграл*

$$\int^{\infty} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} \, dx \tag{8}$$

сходиться или расходиться **).

Доказательство. Согласно теореме 9 § 22 уравнение

$$l(y) = \lambda(y)$$

имеет $2n$ линейно независимых решений y_j, $j = 1, 2, \ldots, 2n$, таких, что при $x \to +\infty$

$$y_j = \rho^{-\frac{2n-1}{2}} p_0^{-\frac{1}{2}} e^{\varepsilon_j \xi} [1 + o(1)], \quad j = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{9}$$

где

$$\rho = \sqrt[2n]{(-1)^{n-1} \frac{p_n - \lambda}{p_0}}, \tag{10}$$

$$\xi = \int_{x_0}^{x} \rho \, dx, \tag{11}$$

а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n}$ — все различные корни $2n$-й степени из единицы.

---

*) Условие 5) в действительности является нормировкой, ибо из суммируемости функций $\frac{p_0'}{p_0}$ следует, что существует предел $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0 \neq 0$ (см. стр. 326). Поэтому, если $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0 < 0$, то, переходя от $l(y)$ к $-l(y)$, мы удовлетворим условию 5).

**) Теорема, содержащая условия, достаточные для того, чтобы индекс дефекта был равен $(n+k, n+k)$, где $0 \leqslant k \leqslant n$, получена в работе Федорюк [1] Эта теорема основана на более общих асимптотических формулах, найденных М. В. Федорюком (см также Федорюк [4]).

При этом $\arg\rho$ выбирается так, чтобы он был непрерывной функцией от x и

$$\lim_{x\to+\infty}\arg\rho=\begin{cases}0, & \text{если } (-1)^{n-1}p_n>0,\\ \dfrac{\pi}{2n}, & \text{если } (-1)^{n-1}p_n<0.\end{cases}$$

Не нарушая общности, можно считать, что $\lim\limits_{x\to+\infty} p_0=1$. Действительно, в противном случае можно $l(y)$ умножить на $(\lim\limits_{x\to+\infty} p_0)^{-1}$, что не изменит индекса дефекта оператора L_0.

Рассмотрим сначала тот случай, когда $(-1)^{n-1}p_n=|p_n|>0$ при достаточно большом x_0. Положим $(-1)^{n-1}\lambda=i\tau$, где τ — вещественное число. Тогда при $x\to+\infty$

$$\rho=\sqrt[2n]{|p_n|}\left[1-\frac{i\tau}{2n|p_n|}+O\left(\frac{1}{p_n^2}\right)\right][1+o_1(1)],\tag{12}$$

где $o_1(1)$ вещественно.

Занумеруем числа $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n}$ в порядке убывания их вещественных частей:

$$1=\Re(\varepsilon_1)>\Re(\varepsilon_2)=\Re(\varepsilon_3)>\Re(\varepsilon_4)=\Re(\varepsilon_5)>\ \ldots\ >\Re(\varepsilon_{2n-1})=$$
$$=\Re(\varepsilon_{2n-1})>\Re(\varepsilon_{2n})=-1.$$

Кроме того, нумерацию выберем такую, чтобы при $\Re(\varepsilon_j)=\Re(\varepsilon_{j+1})$ было $\Im(\varepsilon_j)>\Im(\varepsilon_{j+1})$.

Если n — нечетное число, то первые n среди этих чисел будут положительными, а остальные n отрицательными; если n четно, то среди этих чисел первые $n-1$ положительны, последние $n-1$ отрицательны и два промежуточных, именно $\Re(\varepsilon_n)$ и $\Re(\varepsilon_{n+1})$, равны нулю. Пусть $\Re(\varepsilon_j)>0$; тогда из (12) вытекает, что

$$\varepsilon_j\rho=\varepsilon_j\sqrt[2n]{|p_n|}[1+o(1)],$$

и потому

$$\Re(\varepsilon_j\rho)=\sqrt[2n]{|p_n|}\,\Re(\varepsilon_j)[1+o(1)].\tag{13}$$

Выберем x_0 в формуле (11) настолько большим, чтобы при $x>x_0$ было $|o(1)|<\varepsilon$, где $0<\varepsilon<1$. Тогда

$$\Re(\varepsilon_j\rho)>\sqrt[2n]{|p_n|}\,\Re(\varepsilon_j)(1-\varepsilon),$$

и потому

$$\Re(\varepsilon_j\xi) = \Re\left(\varepsilon_j \int_{x_0}^{x} \rho\, dx\right) > \Re(\varepsilon_j)(1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} \sqrt[2n]{|p_n|}\, dx.$$

Отсюда при $x > x_0$

$$|y_j| > |p_n|^{-\frac{2n-1}{4n}} \exp\left\{\Re(\varepsilon_j)(1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x} \sqrt[2n]{|p_n|}\, dx\right\}(1-\varepsilon). \tag{14}$$

Но в силу условия (7)

$$\int_{x_0}^{x} |p_n|^{\frac{1}{2n}}\, dx > c\left|\int_{x_0}^{x} |p_n|^{\frac{1}{2n}-\alpha} p_n'\, dx\right| =$$

$$= c\left.\frac{|p_n|^{1+\frac{1}{2n}-\alpha}}{1+\frac{1}{2n}-\alpha}\right|_{x_0}^{x} = c_1 |p_n|^{1+\frac{1}{2n}-\alpha} + c_2, \tag{15}$$

где c, c_1, c_2 — некоторые постоянные и c, $c_1 > 0$. Поэтому из (14) заключаем, что

$$|y_j| > (1-\varepsilon)|p_n|^{-\frac{2n-1}{4n}} \exp\left\{\Re(\varepsilon_j)(1-\varepsilon)\left[c_1|p_n|^{1+\frac{1}{2n}-\alpha} + c_2\right]\right\} \to +\infty$$

при $x \to +\infty$. Следовательно, при $\Re(\varepsilon_j) > 0$ *функция* y_j *не будет с интегрируемым квадратом в интервале* $[0, +\infty)$. Пусть теперь $\Re(\varepsilon_j) = 0$ (как мы видели выше, этот случай возможен только при четном n). Тогда $\varepsilon_j = \pm i$; пусть, например, $\varepsilon_j = i$. Применяя снова формулу (12), находим, что

$$\Re(\varepsilon_j\rho) = \Re(i\rho) = \sqrt[2n]{|p_n|}\, \frac{\tau}{2n|p_n|}[1+o(1)] = c|p_n|^{-1+\frac{1}{2n}}[1+o(1)],$$

где

$$c = \frac{\tau}{2n}. \tag{16}$$

Поведение функции y_j при больших значениях x будет теперь зависеть от того, сходится или расходится интеграл

$$I = \int^{\infty} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}}\, dx. \tag{17}$$

Предположим сначала, что этот интеграл сходится. Пусть $\tau > 0$, следовательно, $c > 0$. Выберем снова x_0 настолько большим, чтобы при $x > x_0$ было $|o(1)| < \varepsilon$, где $0 < \varepsilon < 1$. Тогда из (9) и (12) заключаем, что

$$|y_j|^2 < |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} e^{2\Re(\varepsilon_j \xi)} (1+\varepsilon) <$$
$$< |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} \exp\left\{ 2c(1+\varepsilon) \int_{x_0}^{x} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \right\} (1+\varepsilon) <$$
$$< |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} \exp\left\{ 2c(1+\varepsilon) \int_{x_0}^{\infty} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \right\} (1+\varepsilon), \qquad (18)$$

и потому интеграл

$$\int_{x_0}^{\infty} |y_j|^2 dx$$

сходится. При $\varepsilon_j = -i$

$$|y_j|^2 < |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} e^{-2c(1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx} \leqslant |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}},$$

так что и в этом случае $y_j \in L^2(0, \infty)$. Итак, *при* $\Re(\varepsilon_j) = \Re(\varepsilon_{j+1}) = 0$ *обе функции* y_j, y_{j+1} *будут с суммируемым квадратом, если интеграл* (17) *сходится.*

Пусть теперь этот интеграл расходится. Полагая снова $\tau > 0$, $c > 0$, $\varepsilon_j = i$, имеем

$$|y_j|^2 > (1-\varepsilon)|p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} \exp\left\{ 2c(1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \right\},$$

и потому

$$\int_{x_0}^{x} |y_j|^2 dx > \frac{1}{2c} \exp\left\{ 2c(1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \right\}\Bigg|_{x_0}^{x}.$$

Это последнее выражение стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$. Если же $\varepsilon_j = -i$, то при $\tau > 0$ будет $c < 0$, и потому

$$\int_{x_0}^{x} |y_j|^2 dx < (1+\varepsilon) \int_{x_0}^{x} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} \exp\left\{ 2c(1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \right\} dx =$$
$$= \frac{(1+\varepsilon)}{2c(1-\varepsilon)} \exp\left\{ 2c(1-\varepsilon) \int_{x_0}^{x} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \right\}\Bigg|_{x_0}^{x};$$

ввиду отрицательности показателя это последнее выражение имеет конечный предел при $x \to +\infty$. Следовательно, *при* $\Re(\varepsilon_j) = \Re(\varepsilon_{j+1}) = 0$ *среди функций* y_j *и* y_{j+1} *одна будет, а вторая не будет с суммируемым квадратом, если интеграл* (17) *расходится.*

Пусть теперь $\Re(\varepsilon_j) < 0$. Повторяя те же рассуждения, что и при выводе неравенства (14), найдем, что в этом случае

$$|y_j|^2 < (1+\varepsilon)|p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} \exp\left\{2\Re(\varepsilon_j)(1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x}|p_n|^{\frac{1}{2n}}\,dx\right\} <$$

$$< (1+\varepsilon)|p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} \exp\left\{2\Re(\varepsilon_j)(1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x}|p_n|^{-1+\frac{1}{2n}}\,dx\right\};$$

следовательно,

$$\int_{x_0}^{x}|y_j|^2\,dx < \frac{1+\varepsilon}{2\Re(\varepsilon_j)(1-\varepsilon)} \exp\left\{2\Re(\varepsilon_j)(1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x}|p_n|^{-1+\frac{1}{2n}}\,dx\right\}\Bigg|_{x_0}^{x}.$$

Ввиду отрицательности $\Re(\varepsilon_j)$ это выражение в любом случае имеет конечный предел при $x \to +\infty$.

Таким образом, *при* $\Re(\varepsilon_j) < 0$ *функция* y_j *принадлежит* $L^2(0, \infty)$.

Сравним между собой различные функции y_j, $j = 1, 2, \ldots \ldots, n+1$. Пусть сначала $\Re(\varepsilon_j) > \Re(\varepsilon_{j+1})$. Тогда при $x > x_0$

$$\left|\frac{y_{j+1}}{y_j}\right| < \exp\left\{\Re(\varepsilon_{j+1} - \varepsilon_j)(1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x}|p_n|^{\frac{1}{2n}}\,dx\right\}(1+\varepsilon),$$

а это последнее выражение стремится к нулю при $x \to +\infty$. Пусть теперь $\Re(\varepsilon_j) = \Re(\varepsilon_{j+1})$; тогда $\varepsilon_j - \varepsilon_{j+1} = i\omega$, где $\omega > 0$. Рассмотрим сперва тот случай, когда интеграл (17) расходится. Рассуждая так же, как и при выводе неравенства (18), найдем, что при $(-1)^{n-1}\lambda = i\tau$, $\tau > 0$,

$$\left|\frac{y_{j+1}}{y_j}\right| < \exp\left\{-a\int_{x_0}^{x}|p_n|^{-1+\frac{1}{2n}}\,dx\right\}(1+\varepsilon),$$

где $a > 0$. В силу предполагаемой расходимости интеграла (17) последнее выражение стремится к нулю при $x \to +\infty$. Предположим теперь, что интеграл (17) сходится. Применяя формулу (12), заключаем, что при $\tau > 0$

$$\frac{y_j}{y_{j+1}} = e^{i\omega\xi}[1+o(1)] = e^{i\omega\xi}e^{o(1)} =$$

$$= \exp\left\{i\omega\int_{x_0}^{x} |p_n|^{\frac{1}{2n}}(1+\eta)\,dx + \varkappa\int_{x_0}^{x}|p_n|^{-1+\frac{1}{2n}}[1+o(1)]\,dx + o(1)\right\},$$

где $\varkappa$ — некоторая положительная постоянная, а $\eta = o(1)$; следовательно,

$$\arg\frac{y_j}{y_{j+1}} = \omega\int_{x_0}^{x}|p_n|^{\frac{1}{2n}}(1+\eta)\,dx. \tag{19}$$

При достаточно большом x_0 подынтегральная функция положительна и, кроме того, стремится к $+\infty$; поэтому при $x \to +\infty$ $\arg\frac{y_j}{y_{j+1}}$ возрастает и стремится к $+\infty$.

Пусть a — произвольное комплексное число, не равное нулю. Докажем, что линейная комбинация $y_j + ay_{j+1}$ не будет с интегрируемым квадратом в интервале $[0, +\infty)$. Пусть S ($\varphi\pi \leqslant \arg z \leqslant \psi\pi$) — произвольный сектор комплексной плоскости, не содержащий точки $-a$. Обозначим через Δ_k совокупность всех тех значений x, для которых

$$(2k+\varphi)\pi \leqslant \arg\frac{y_j}{y_{j+1}} \leqslant (2k+\psi)\pi, \quad k = 1, 2, 3, \ldots;$$

очевидно, Δ_k — замкнутый интервал. При $x \in \Delta_k$ точка $\frac{y_j}{y_{j+1}}$ находится в секторе S и потому находится на расстоянии от $-a$, ограниченном снизу положительным числом, т. е.

$$\left|\frac{y_j}{y_{j+1}} + a\right| \geqslant \delta,$$

где δ — положительная постоянная. Но тогда

$$\int_{\Delta_k}|y_j + ay_{j+1}|^2\,dx \geqslant \int_{\Delta_k}|y_{j+1}|^2\left|\frac{y_j}{y_{j+1}} + a\right|^2 dx > \delta^2\int_{\Delta_k}|y_{j+1}|^2\,dx;$$

следовательно, в силу (14) при $\Re(\varepsilon_{j+1})>0$

$$\int_{\Delta_k} |y_j+ay_{j+1}|^2\,dx >$$
$$> (1-\varepsilon)^2\delta^2 \int_{\Delta_k} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} \exp\left\{2\Re(\varepsilon_{j+1})(1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x}|p_n|^{\frac{1}{2n}}\,dx\right\}dx >$$
$$> (1-\varepsilon)^2\delta^2|p_{nk}|^{-1} \int_{\Delta_k} |p_n|^{\frac{1}{2n}} \exp\left\{2\Re(\varepsilon_{j+1})(1-\varepsilon)\int_{x_0}^{x}|p_n|^{\frac{1}{2n}}\,dx\right\}dx, \tag{20}$$

где p_{nk} обозначает значение функции p_n на правом конце интервала Δ_k.

Выберем x_0 настолько большим, чтобы в (19) при $x\geqslant x_0$ было $|\eta|<\varepsilon$, а затем k настолько большим, чтобы $\Delta_k\subset[x_0, +\infty)$.

Тогда из (20) заключаем, что

$$\int_{\Delta_k}|y_j+ay_{j+1}|^2\,dx > (1-\varepsilon)^2\frac{\delta^2}{(1+\varepsilon)|p_{nk}|}\times$$
$$\times\int_{\Delta_k}|p_n|^{\frac{1}{2n}}(1+\eta)\exp\left\{2\Re(\varepsilon_{j+1})\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}\int_{x_0}^{x}|p_n|^{\frac{1}{2n}}(1+\eta)\,dx\right\}dx =$$
$$= \frac{A}{|p_{nk}|}\Bigg|_{\Delta_k}\exp\left\{B\int_{x_0}^{x}|p_n|^{\frac{1}{2n}}(1+\eta)\,dx\right\},$$

где

$$A=\frac{\delta^2(1-\varepsilon)}{2\Re(\varepsilon_{j+1})},\qquad B=2\Re(\varepsilon_{j+1})\frac{1-\varepsilon}{1+\varepsilon}.$$

Отсюда, по определению интервала Δ_k,

$$\int_{\Delta_k}|y_j+ay_{j+1}|^2\,dx > \frac{A}{|p_{nk}|}\left[e^{B_1(2k+\psi)}-e^{B_1(2k+\varphi)}\right], \tag{21}$$

где $B_1=\dfrac{\pi B}{\omega}$.

С другой стороны, из неравенства (15) вытекает, что

$$|p_n(x)|^{\beta}<c\int_{x_0}^{x}|p_n|^{\frac{1}{2n}}\,dx<c_1\int_{x_0}^{x}|p_n|^{\frac{1}{2n}}(1+\eta)\,dx,$$

где

$$c_1=\frac{c}{1-\varepsilon},\qquad \beta=1+\frac{1}{2n}-\alpha>0.$$

Подставляя сюда вместо x правый конец интервала Δ_k, получим

$$|p_{nk}|^\beta < \frac{c_1}{\omega}(2k+\psi)\pi = c_2(2k+\psi), \quad c_2 = \frac{c_1}{\omega}\pi;$$

следовательно,

$$|p_{nk}|^{-1} > c_3(2k+\psi)^{-\frac{1}{\beta}}.$$

Отсюда и из (21) заключаем, что

$$\int_{\Delta_k} |y_j + ay_{j+1}|^2\,dx > A_1(2k+\psi)^{-\frac{1}{\beta}} e^{B_1(2k+\psi)}\left[1 - e^{-B_1(\psi-\varphi)}\right],$$

где

$$A_1 = Ac_3.$$

Но правая часть последнего неравенства стремится к $+\infty$ при $k \to +\infty$; поэтому функция $y_j + ay_{j+1}$ не будет с суммируемым квадратом в интервале $[0, +\infty)$.

Предположим теперь снова, что интеграл (17) расходится. Тогда функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не будут с суммируемым квадратом в интервале $[0, \infty)$. Рассмотрим произвольную линейную комбинацию $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$, в которой не все коэффициенты равны нулю; докажем, что она также не будет с интегрируемым квадратом в интервале $[0, +\infty)$. Пусть c_j — первый среди коэффициентов $c_1, c_2, \ldots, c_n$, не равный нулю; тогда

$$y = c_jy_j + c_{j+1}y_{j+1} + \ldots + c_ny_n = y_j[c_j + o(1)], \tag{22}$$

ибо по доказанному выше в рассматриваемом случае все отношения

$$\frac{y_{j+1}}{y_j}, \quad \frac{y_{j+2}}{y_j}, \ldots, \frac{y_n}{y_j}$$

стремятся к нулю при $x \to +\infty$. Из (22) вытекает, что y не принадлежит $L^2(0, \infty)$. Этот результат означает, что в рассматриваемом случае индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n).

Рассмотрим теперь тот случай, когда интеграл (17) сходится, а n нечетно. Тогда функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не будут принадлежать $L^2(0, \infty)$.

Докажем, что этим же свойством обладает любая линейная комбинация $y = c_1y_1 + c_2y_2 + \ldots + c_ny_n$, в которой не все коэффициенты $c_1, c_2, \ldots, c_n$ равны нулю. Пусть c_j — первый среди этих коэффициентов, не равный нулю. Если $\Re(\varepsilon_j) > \Re(\varepsilon_{j+1})$ или $\Re(\varepsilon_j) = \Re(\varepsilon_{j+1})$, но $c_{j+1} = 0$, то утверждение доказывается так же, как и в предыдущем случае. Рассмотрим поэтому тот случай, когда $\Re(\varepsilon_j)=\Re(\varepsilon_{j+1})$ и $c_{j+1}\neq 0$. Тогда

$$y=c_j y_{j+1}\left[\frac{c_{j+1}}{c_j}+\frac{y_j}{y_{j+1}}+o(1)\right]$$

и при k натуральном и достаточно большом функция в квадратных скобках ограничена снизу на интервале Δ_k, построенном для $a=\frac{c_{j+1}}{c_j}$:

$$\left|\frac{c_{j+1}}{c_j}+\frac{y_j}{y_{j+1}}+o(1)\right|>d>0.$$

Но тогда

$$\int\limits_{\Delta_k}|y|^2dx>|c_j|^2d^2\int\limits_{\Delta_k}|y_{j+1}|^2dx.$$

Последнее же выражение, как мы видели выше, стремится к $+\infty$ при $x\to+\infty$; следовательно, и в этом случае $y\,\overline{\in}\,L^2(0,\infty)$.

Таким образом, *в случае сходимости интеграла* (17), *но при n нечетном индекс дефекта оператора L_0 по-прежнему есть* (n, n).

Пусть теперь интеграл (17) по-прежнему сходится, но n четно. Тогда при $\tau>0$ функции $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$ будут все принадлежать $L^2(0, \infty)$, а $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ не будут принадлежать $L^2(0,\infty)$. Повторяя предыдущие рассуждения, убеждаемся в том, что линейная комбинация $c_1y_1+\ldots+c_{n-1}y_{n-1}$ может принадлежать $L^2(0, \infty)$ лишь тогда, когда $c_1=\ldots=c_{n-1}=0$. Следовательно, в этом случае индекс дефекта оператора L_0 будет $(n+1, n+1)$. Таким образом, теорема полностью доказана в том случае, когда $(-1)^{n-1}p_n>0$ при x достаточно большом.

Предположим теперь, что $(-1)^{n-1}p_n<0$ при достаточно большом x, так что

$$(-1)^{n-1}p_n=-|p_n|.$$

Тогда, полагая

$$(-1)^{n-1}\lambda=-i\tau,\quad \varkappa=e^{i\frac{\pi}{2n}},$$

найдем, что

$$\rho=\sqrt[2n]{|p_n|}\,\varkappa\left[1-\frac{i\tau}{2n|p_n|}+O\left(\frac{1}{p_n^2}\right)\right](1+o_1(1)).$$

Положим

$$\varepsilon'_j=\varkappa\varepsilon_j,\quad j=1, 2, \ldots, 2n,$$

и занумеруем числа $\varepsilon'_1, \varepsilon'_2, \ldots, \varepsilon'_{2n}$ таким образом, что

$$\Re(\varepsilon'_1)=\Re(\varepsilon'_2)>\Re(\varepsilon'_3)=\Re(\varepsilon'_4)>\ldots>\Re(\varepsilon'_{2n-1})=\Re(\varepsilon'_{2n}). \tag{23}$$

Если n четно, то n первых среди этих чисел будут положительны, а последние n отрицательны.

Если же n нечетно, то $n-1$ первых среди чисел положительны, последние $n-1$ отрицательны, а n-е и $n+1$-е равны нулю.

Поэтому применяя предыдущие рассуждения к числам ε_1', ε_2', ..., ε_{2n}' вместо ε_1, ε_2, ..., ε_{2n} и меняя ролями в этих рассуждениях случаи четного и нечетного n, получаем доказательство теоремы и для случая $(-1)^{n-1} p_n \to -\infty$.

Замечание 1. Заключение теоремы 3 остается верным, если к функции $p_n(x)$, удовлетворяющей условиям этой теоремы, прибавить произвольную измеримую функцию $q(x)$, существенно ограниченную в интервале $[x_0, +\infty)$ при достаточно большом x_0 (см. теорему 1).

Замечание 2. При $n=1$ и $p_0=1$ мы приходим к следующему результату для оператора второго порядка.

Пусть при достаточно большом x_0 функции $p'(x)$, $p''(x)$ сохраняют знак и при $x \to +\infty$

$$p' = O(|p|^{\alpha}), \quad \text{где} \quad 0 < \alpha < \frac{3}{2}.$$

Тогда, если $p \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то оператор L_0, порожденный дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + py,$$

в интервале $[0, \infty)$ имеет индекс дефекта $(1, 1)$. Если же $p \to -\infty$, то этот оператор имеет индекс дефекта $(2, 2)$ или $(1, 1)$ в зависимости от того, будет ли интеграл

$$\int^{\infty} |p|^{-\frac{1}{2}}\, dx$$

сходиться или расходиться.

В дальнейшем (см. n° 8) этот результат будет усилен.

5. Применение теоремы 10 § 22.

Теорема 5. *Пусть при достаточно большом x_0 функции p_0, p_1, ..., p_n непрерывны в интервале $[x_0, +\infty)$ и пусть существуют пределы*

$$\lim_{x \to +\infty} p_0 = a_0, \quad \lim_{x \to +\infty} p_1 = a_1, \quad \ldots, \quad \lim_{x \to +\infty} p_n = a_n, \tag{24}$$

причем $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0 \neq 0$. Тогда индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n).

Доказательство. Выберем невещественное число λ, такое, что все корни $\rho_1, \rho_2, \ldots, \rho_{2n}$ уравнения

$$(-1)^n a_0\rho^{2n} + (-1)^{n-1} a_1\rho^{2n-2} + \ldots + a_n = \lambda \tag{25}$$

имеют различные вещественные части. Занумеруем эти корни так, что

$$\Re(\rho_1) > \Re(\rho_2) > \ldots > \Re(\rho_{2n}). \tag{26}$$

Первые n из этих чисел $\Re(\rho_k)$ будут положительны, а последние n отрицательны. Выберем положительное число ε, такое, что

$$\Re(\rho_k) - \Re(\rho_{k+1}) > 2\varepsilon, \qquad k = 1, 2, \ldots, 2n-1. \tag{27}$$

Согласно теореме 10 § 22 уравнение $l(y) = \lambda y$ имеет $2n$ линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, таких, что

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y_k}{e^{(\rho_k-\varepsilon)x}} = \infty, \tag{28}$$

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{y_k}{e^{(\rho_k+\varepsilon)x}} = 0. \tag{29}$$

Из этих соотношений и условия (27) вытекает, что

$$\frac{y_{j+1}}{y_j} \to 0 \quad \text{при} \quad x \to +\infty. \tag{30}$$

Кроме того, при $1 \leqslant k \leqslant n$ $\Re(\rho_k - \varepsilon) > 0$, так что $e^{(\rho_k-\varepsilon)x} \overline{\in} L^2(0, \infty)$. Учитывая (28), мы заключаем отсюда, что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ не принадлежат $L_2(0, \infty)$. Аналогично из (29) вытекает, что функции $y_{n+1}, \ldots, y_n \in L_2(0, \infty)$. Кроме того, соотношение (30) показывает, что функция $c_1y_1 + \ldots + c_{2n}y_{2n}$ может принадлежать $L_2(0, \infty)$ лишь тогда, когда $c_1 = \ldots = c_n = 0$. Это означает, что индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n).

Следствие. *Пусть функции $p_0, p_1, \ldots, p_{n-1}$ те же, что и в теореме* 5, *а функция p_n существенно ограничена в интервале* $[0, \infty)$. *Тогда индекс дефекта оператора L_0 есть* (n, n). Это следствие непосредственно вытекает из теорем 1 и 5.

6. Индекс дефекта оператора второго порядка. Для дифференциальных операторов второго порядка предыдущие результаты могут быть значительно усилены.

Одной из наиболее общих здесь является *)

Теорема 6 (Левинсон [1]). *Пусть $p(x)>0$, и пусть $M(x)$ — положительная неубывающая дифференцируемая функция такая, что интеграл*

$$\int^{\infty} \frac{dx}{\sqrt{pM}} = +\infty \tag{31}$$

и

$$\overline{\lim_{x\to\infty}} \frac{\sqrt{p}M'}{\sqrt{M^3}} < +\infty. \tag{32}$$

Пусть далее для всех достаточно больших значений x

$$q(x) > -KM(x), \tag{33}$$

где K — положительная постоянная. Тогда индекс дефекта оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy, \qquad 0 \leqslant x < \infty, \tag{34}$$

есть $(1, 1)$.

Доказательство. Достаточно доказать, что уравнение

$$-\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy = 0$$

имеет хотя бы одно решение, не принадлежащее $L^2(0, \infty)$. Если y — вещественное решение этого уравнения, то

$$\frac{-qy^2}{M} = -\frac{(py')'y}{M}.$$

*) Более общий результат получен Сирсом (см Сирс [1]), а затем В. Б Лидским для операторов в пространстве вектор-функций (см. Лидский [1]). Сформулируем теорему Лидского.

Пусть $P(x)$ — квадратная эрмитова матрица порядка k. Предположим, что $(P(x)h, h) \geqslant -q(x)(h, h)$ для любого постоянного вектора h, причем $q(x)$ — непрерывная функция, удовлетворяющая условиям $q(x) > \delta > 0$ и $\int_0^\infty [q(x)]^{-1/2}dx < \infty$. Кроме того, предположим, что $q(x)$ либо монотонна, либо дифференцируема и $\overline{\lim_{t\to\infty}} |q'(t)|[q(t)]^{-3/2} < \infty$. Тогда при любом невещественном λ система $-y'' + P(x)y = \lambda y$ имеет точно k линейно независимых решений с интегрируемым квадратом на полуоси $(0, \infty)$.

В работе Лидский [1] получено также условие, достаточное для того, чтобы все решения системы $-y'' + P(x)y = \lambda y$ были интегрируемы с квадратом на полуоси $(0, \infty)$.

Отметим также, что в работе Рофе-Бекетов [2], получено обобщение теоремы Сирса, основанное на замене неравенств для коэффициентов дифференциального выражения неравенствами для значений этого выражения на финитных функциях.

Интегрируя обе части последнего равенства, получим

$$-\int_a^x \frac{qy^2}{M}\,dx = -\left.\frac{pyy'}{M}\right|_a^x + \int_a^x \frac{py'^2}{M}\,dx - \int_a^x \frac{pyy'M'}{M^2}\,dx.$$

Предположим, что $y \in L^2(0, \infty)$; тогда в силу условия (33)

$$-\int_a^x \frac{qy^2}{M}\,dx < K\int_a^x y^2\,dx < K\int_a^\infty y^2\,dx.$$

Поэтому существует постоянная K_1, такая, что

$$K_1 > -\frac{pyy'}{M} + \int_a^x \frac{py'^2}{M}\,dx - \int_a^x \frac{pyy'M'}{M^2}\,dx. \tag{35}$$

Докажем теперь, что если решение $y \in L^2(0, \infty)$, то интеграл

$$\int_a^\infty \frac{py'^2}{M}\,dx$$

сходится. Предположим противное; пусть этот интеграл расходится. Тогда функция

$$H(x) = \int_a^x \frac{py'^2}{M}\,dx \tag{36}$$

положительна, возрастает и стремится к $+\infty$ при $x \to +\infty$. Применяя неравенство Буняковского и пользуясь условием (32) при достаточно большом a и $x > a$, имеем

$$\left|\int_a^x \frac{pyy'M'}{M^2}\,dx\right| < K_2\int_a^x \left|yy'\sqrt{\frac{p}{M}}\right|dx \leqslant$$
$$\leqslant K_2\left(\int_a^x y^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}\left(\int_a^x \frac{py'^2}{M}\,dx\right)^{\frac{1}{2}} < K_3\sqrt{H(x)},$$

где K_2 — некоторая постоянная, а

$$K_3 = K_2\left(\int_a^\infty y^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}.$$

Поэтому из (35) заключаем, что

$$K_1 > H(x) - \frac{pyy'}{M} - K_3\sqrt{H(x)}.$$

Так как $H(x) \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то последнее неравенство может иметь место лишь тогда, когда

$$\frac{pyy'}{M} > 0,$$

т. е. когда y и y' одного знака при достаточно большом x. Но тогда при x достаточно большом $|y|$ возрастает, следовательно, y не может принадлежать $L^2(0, \infty)$. Итак, доказано, что при $y \in L^2(0, \infty)$ интеграл (36) сходится.

Предположим теперь, что y_1, y_2 — два линейно независимых вещественных решения уравнения (34). Тогда

$$p(y_1y_2' - y_2y_1') = c,$$

где c — постоянная, не равная нулю. Отсюда

$$\sqrt{\frac{p}{M}}\, y_2'y_1 - \sqrt{\frac{p}{M}}\, y_1'y_2 = \frac{c}{\sqrt{pM}}. \tag{37}$$

Если $y_1 \in L^2(0, \infty)$ и $y_2 \in L^2(0, \infty)$, то в силу только что доказанного функции $\sqrt{\frac{p}{M}}\, y_1'$, $\sqrt{\frac{p}{M}}\, y_2'$ принадлежат $L^2(0, \infty)$. Поэтому левая, а значит и правая, часть (37) суммируема в интервале $(0, \infty)$; последнее противоречит условию (31).

Частным случаем доказанной теоремы являются следующие теоремы Гартмана и Винтнера (см. Гартман и Винтнер [3, 7]) об операторе L_0, порожденном дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + qy$.

I. *Если при достаточно большом* x

$$q(x) > -Kx^2, \qquad K > 0, \tag{38}$$

то индекс дефекта оператора L_0 *есть* (1, 1).

Действительно, достаточно положить в теореме 6

$$p(x) \equiv 1, \quad M(x) = x^2.$$

Очевидно, условия (31), (32) и (33) будут тогда выполнены.

II. *Если при некоторых постоянных* $c > 0$, $K > 0$ *и* $c < x_1 < x_2$ *выполняется неравенство*

$$q(x_2) - q(x_1) > -K(x_2 - x_1), \tag{39}$$

то индекс дефекта оператора L_0 *есть* (1, 1).

В самом деле, полагая в (39) $x_2 = x$ и фиксируя x_1, имеем

$$q(x) > -K(x - x_1) + q(x_1);$$

следовательно, при x достаточно большом

$$q(x) > -K_1x,$$

где K_1 — некоторая другая положительная постоянная. Теперь остается только применить теорему 6 при $p \equiv 1$, $M(x) = x$.

Всякая функция $q(x)$, ограниченная снизу, удовлетворяет, очевидно, условию (38). Мы приходим к следующему результату Г. Вейля (см. Вейль [1]).

Если функция $q(x)$ ограничена снизу, то индекс дефекта оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + qy$, $0 < x < \infty$, есть (1, 1).

Отметим еще следующее простое предложение.

Теорема 7 (Патнэм [1]). *Если $q \in L^2(0, \infty)$, то индекс дефекта оператора L_0 есть* (1, 1).

Доказательство. Достаточно показать, что уравнение

$$-y'' + qy = 0 \tag{40}$$

не имеет двух линейно независимых вещественных решений, принадлежащих $L^2(0, \infty)$. Если y — такое решение, то в силу условия $q \in L^2(0, \infty)$ функция $y'' = qy$ суммируема; следовательно, существует предел

$$\lim_{x \to +\infty} y' = y'(x_0) + \int_{x_0}^{\infty} y''\, dx.$$

Отсюда вытекает, что функция y' ограничена при $x \to +\infty$. Пусть теперь y_1, y_2 — два линейно независимых вещественных решения уравнения (40); тогда

$$y_1' y_2 - y_2' y_1 = c \neq 0.$$

Если y_1, $y_2 \in L^2(0, \infty)$, то y_1' и y_2' ограничены и, следовательно, функция $y_1' y_2 - y_2' y_1 = c \neq 0$ также принадлежит $L^2(0, \infty)$, что невозможно.

§ 24. Исследование спектра дифференциального оператора

Одной из важнейших проблем теории дифференциальных операторов является следующий вопрос:

Каким образом спектр самосопряженных расширений оператора L_0 зависит от поведения коэффициентов соответствующего дифференциального выражения?

Для случая дифференциального оператора второго порядка эта задача была предметом исследований многих авторов, основные результаты которых собраны в книге Титчмарша [1]. Из исследований более поздних авторов укажем работы Винтнера, Патнэма, Уоллеча и Гартмана. Одним из наиболее сильных здесь является результат А. М. Молчанова [1] (см. ниже n° 5).

Для дифференциальных операторов высших порядков вопрос долгое время оставался открытым, и лишь сравнительно недавно появились работы Рапопорта и Глазмана (см. Глазман [3, 4]), в которых получен ряд результатов о спектре дифференциальных операторов высших порядков. Однако все эти работы далеко не исчерпывают проблему (см. также Федорюк [4]).

Отметим, что вне рамок настоящей книги остались методы абстрактной теории возмущений, которые с успехом применяются к задаче исследования спектра и построения спектральных разложений. В связи с этим см., например, Глазман [1], Бирман [1, 2], Като [1, 2], Фридрихс [2, 3].

1. Применение метода расщепления *). Пусть L_0 по-прежнему обозначает минимальный замкнутый симметрический оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(y)$ в интервале (a, b), конечном или бесконечном. Обозначим снова через $\mathfrak{H}'$ совокупность всех функций $f(x)$ из $L^2(a, b)$, равных нулю вне некоторого конечного интервала $[\alpha, \beta] \subset (a, b)$, и положим для краткости

$$\mathfrak{D}_0 = \mathfrak{D}_{L_0}, \quad \mathfrak{D}_0' = \mathfrak{H}' \cap \mathfrak{D}_0. \tag{1}$$

Обозначим далее через L_0' сужение оператора L_0 на $\mathfrak{D}_0'$, так что L_0 есть замыкание оператора L_0' (см. n° 4 § 17)

$$\widetilde{L}_0' = L_0. \tag{2}$$

Сузим теперь $\mathfrak{D}_0'$, накладывая дополнительные условия

$$y^{[\nu]}(c) = 0, \qquad \nu = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,\ 2n-1,$$

где c — фиксированная точка интервала (a, b); многообразие, полученное в результате этого сужения, обозначим через $\mathfrak{D}_0''$.

Расщеплением оператора L_0' в точке c интервала (a, b) называется сужение L_0'' оператора L_0' на $\mathfrak{D}_0''$. Очевидно, оператор L_0'' есть прямая сумма операторов **) L_1' и L_2' в пространствах

*) Более подробные сведения о методе расщепления и его применениях читатель может найти в книге Глазман [1].

**) Прямая сумма $A_1 \oplus A_2$ двух операторов A_1, A_2 в пространствах $\mathfrak{H}_1, \mathfrak{H}_2$ есть по определению оператор в пространстве $\mathfrak{H}_1 + \mathfrak{H}_2$ всех пар $\{x_1 x_2\}$, $x_1 \in \mathfrak{H}_1$, $x_2 \in \mathfrak{H}_2$. Его область опеределения есть совокупность всех пар $\{x_1, x_2\}$, $x_1 \in \mathfrak{D}_{A_1}$, $x_2 \in \mathfrak{D}_{A_2}$, причем

$$(A_1 \oplus A_2)\{x_1, x_2\} = \{A_1 x_1, A_2 x_2\}.$$

Легко видеть, что если A_1 и A_2 — самосопряженные операторы, то $A_1 \oplus A_2$ — также самосопряженный оператор.

$L^2(a, c)$, $L^2(c, b)$, порожденных в этих пространствах аналогично оператору L_0' тем же дифференциальным выражением $l(y)$. Мы это обстоятельство запишем в виде

$$L_0'' = L_1' \oplus L_2'. \tag{3}$$

Отсюда, переходя к замыканиям, заключаем, что

$$\tilde{L}_0'' = L_1 \oplus L_2, \tag{4}$$

где L_1 и L_2 — замыкания операторов L_1' и L_2':

$$L_1 = \tilde{L}_1', \quad L_2 = \tilde{L}_2'.$$

Если теперь расширить операторы L_1 и L_2 до самосопряженных операторов $L_{1,u}$ и $L_{2,u}$ в пространствах $L^2(a, c)$ и $L^2(c, b)$, то прямая сумма

$$A = L_{1,u} \oplus L_{2,u}$$

будет самосопряженным расширением $\tilde{L}_0''$. Спектр оператора A будет, очевидно, теоретико-множественной суммой спектров операторов $L_{1,u}$ и $L_{2,u}$.

С другой стороны, индекс дефекта оператора $\tilde{L}_0''$ конечен, и потому все его самосопряженные расширения имеют один и тот же непрерывный спектр (см. теорему 9 n° 9 § 14). Такими расширениями являются как оператор A, так и всякое самосопряженное расширение L_u оператора L_0; следовательно, непрерывные части спектра обоих операторов A и L_u совпадают. Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 1. *Непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения оператора L_0 есть теоретико-множественная сумма непрерывных частей спектров операторов $L_{1,u}$ и $L_{2,u}$, полученных при расщеплении оператора L_0.*

На этой теореме основано доказательство следующих теорем.

Теорема 2. *Если конец a регулярен и если*

$$\lim_{x \to b} p_n(x) = +\infty, \tag{5}$$

$$p_0(x) > 0, \quad p_1(x) \geqslant 0, \ \ldots, \ p_{n-1}(x) \geqslant 0, \tag{6}$$

то спектр всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 в интервале (a, b), порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n y,$$

дискретен.

Доказательство. Пусть N — произвольное положительное число; в силу условия (5) число c можно выбрать так, что

$$p_n(x) > N \quad \text{при} \quad c < x < b. \tag{7}$$

Интегрируя по частям и учитывая условия (6), найдем, что при $y \in \mathfrak{D}'_{L_2}$

$$(L'_2 y,\ y) = \int_c^b l(y)\,\bar{y}\,dx = \int_c^b \{p_0 |y^{(n)}|^2 + p_1 |y^{(n-1)}|^2 + \ldots + p_{n-1}|y'|^2 + p_n |y|^2\}\,dx \geqslant N \int_c^b |y|^2\,dx = N(y,\ y).$$

Таким образом, оператор L'_2, а следовательно и его замыкание L_2, ограничен снизу числом N. Но тогда полуось $(-\infty < \lambda \leqslant N)$ не содержит непрерывной части спектра самосопряженного расширения $L_{2,u}$ оператора L_2 (см. n° 11 § 14). С другой стороны, оператор L_1 регулярен и потому спектр любого его самосопряженного расширения $L_{1,u}$ дискретен. Итак, полуось $-\infty < \lambda \leqslant N$ не содержит непрерывной части спектра оператора $A = L_{1,u} \oplus L_{2,u}$.

На основании теоремы 1 этим же свойством обладает всякое самосопряженное расширение L_u оператора L_0. Так как число N произвольно, то спектр оператора L_u вообще не содержит непрерывной части, и теорема доказана. Это же рассуждение приводит к следующей теореме.

Теорема 3. *Пусть конец a регулярен, и пусть*

$$\lim_{x \to b} p_n(x) = A.$$

Пусть далее $p_0(x) > 0$, и пусть для значений x, достаточно близких к b,

$$p_1(x) \geqslant 0,\ \ldots,\ p_{n-1}(x) \geqslant 0$$

Тогда в интервале $(-\infty,\ A)$ может находиться только дискретная часть спектра всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 и предельной точкой части спектра, заключенной в интервале $(-\infty,\ A)$, может быть только точка $\lambda = A$.

Доказательство. Расщепим оператор L_0 такой точкой c, что при $c < x < b$

$$p_n(x) > A - \varepsilon$$

и

$$p_1(x) \geqslant 0,\ \ldots,\ p_{n-1}(x) \geqslant 0$$

Тогда

$$(L'_2 y,\ y) > (A - \varepsilon)(y,\ y);$$

следовательно, часть спектра оператора L_2, находящаяся в интервале $(-\infty, A-\varepsilon)$, может состоять только из конечного числа собственных значений, каждое — конечной кратности. С другой стороны, оператор L_1 регулярен и ограничен снизу, ибо $p_0>0$ (см. теорему 5 n° 4 § 19); поэтому его спектр дискретен; предельной точкой спектра оператора $L_{1,u}$ может быть только $\lambda=+\infty$. Утверждение теоремы 3 теперь непосредственно следует из теоремы 1 *).

В следующих двух теоремах речь будет идти об операторе L_0, порожденном дифференциальным выражением

$$l(y)=(-1)^n\frac{d^{2n}y}{dx^{2n}}+q(x)\,y.$$

Эти теоремы получаются путем комбинирования теорем 1 и 3 со следующими леммами.

Лемма 1. *Пусть в интервале $\Delta=(\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta)$ содержится только конечное число собственных значений самосопряженного оператора A, причем кратности всех этих собственных значений конечны. Для того чтобы интервал Δ не содержал точек непрерывного спектра оператора A, необходимо и достаточно, чтобы существовало такое конечномерное подпространство $\mathfrak{M}$, что*

$$|(A-\lambda_0 1)f|>\delta|f| \quad \text{для всех} \quad f\in\mathfrak{D}_A\cap(\mathfrak{H}-\mathfrak{M}). \tag{8}$$

Доказательство. Обозначим через P_λ спектральную функцию оператора A. Тогда для всех $f\in\mathfrak{D}_A$

$$|(A-\lambda_0 1)f|^2=\int_{-\infty}^{\infty}|\lambda-\lambda_0|^2\,d(P_\lambda f, f).$$

Докажем сначала необходимость условия (8). Предположим, что спектр A в интервале Δ состоит лишь из собственных значений и что прямая сумма $\mathfrak{N}$ собственных подпространств, отвечающих этим собственным значениям, имеет конечную размерность. Если $f\in\mathfrak{D}_A$ — произвольный элемент, ортогональный подпространству $\mathfrak{N}$, то

$$|(A-\lambda_0 1)f|^2=\int_{|\lambda-\lambda_0|>\delta}|\lambda-\lambda_0|^2\,d(P_\lambda f, f)>\delta^2|f|^2,$$

и, таким образом, условие (8) выполняется при $\mathfrak{M}=\mathfrak{N}$.

---

*) Теорема 2 получается из теоремы 3 при $A=+\infty$; одновременно видно, что в этом случае единственной предельной точкой спектра является $+\infty$.

Достаточность условия (8) будем доказывать от противного. Предположим, что конечномерное подпространство $\mathfrak{M}$, для которого это условие выполняется, существует и что, вопреки утверждению леммы, интервал Δ содержит точки непрерывного спектра оператора A. Тогда подпространство $P(\Delta)\mathfrak{H}$ является бесконечномерным. Положим $\mathfrak{M}' = P(\Delta)\mathfrak{M}$. Так как $\mathfrak{M}'$ конечномерно и $\mathfrak{M}' \subset P(\Delta)\mathfrak{H}$, то существует в $P(\Delta)\mathfrak{H}$ элемент $f_0 \neq 0$, ортогональный $\mathfrak{M}'$. Очевидно, $f_0 \in \mathfrak{D}_A \cap (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})$ и

$$|(A - \lambda_0 1) f_0|^2 = \int_\Delta |\lambda - \lambda_0|^2 d(P_\lambda f_0, f_0) \leqslant \delta^2 |f_0|^2,$$

что противоречит неравенству (8).

Замечание к лемме 1. Из приведенного выше доказательства достаточности вытекает следующее утверждение. *Если условие* (8) *выполняется для некоторого конечномерного подпространства* $\mathfrak{M}$, *то подпространство* $P(\Delta)\mathfrak{H}$ *конечномерно и, следовательно, интервал* Δ *не содержит точек непрерывного спектра оператора* A.

Лемма 2. *Пусть интервал* $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$ *не содержит точек спектра самосопряженного оператора* A, *за исключением разве конечного числа собственных значений, каждое — конечной кратности, и пусть* Q — *ограниченный эрмитов оператор, удовлетворяющий условию*

$$|Q| \leqslant \delta_0 < \delta.$$

Тогда точка λ_0 *не принадлежит непрерывной части спектра оператора* $A + Q$.

Доказательство. Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_p$ — все собственные значения оператора A в интервале $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$, а $\mathfrak{M}_1, \mathfrak{M}_2, \ldots, \mathfrak{M}_p$ — соответствующие собственные подпространства. По условию, их прямая сумма

$$\mathfrak{M} = \mathfrak{M}_1 + \mathfrak{M}_2 + \ldots + \mathfrak{M}_p$$

конечномерна. Сужение оператора A на подпространство $\mathfrak{H} - \mathfrak{M}$ не имеет спектра в интервале $[\lambda_0 - \delta, \lambda_0 + \delta]$. Следовательно, для $f \in \mathfrak{D}_A \cap (\mathfrak{H} - \mathfrak{M})$

$$|Af - \lambda_0 f| > \delta |f|.$$

Тогда для тех же векторов f

$$|(A + Q)f - \lambda_0 f| \geqslant |Af - \lambda_0 f| - |Qf| > (\delta - \delta_0)|f|,$$

так что остается применить замечание к лемме 1.

Теорема 4. *Пусть конец* a *регулярен и пусть* $b = \infty$. *Если* $\varlimsup_{x \to \infty} |q(x)| = M$, *то всякий интервал положительной полуоси,* *длина которого больше $2M$, содержит точки непрерывной части спектра любого самосопряженного расширения L_u оператора L_0.*

Доказательство. Пусть вопреки утверждению теоремы интервал $[\lambda_0-\delta, \lambda_0+\delta]$ полуоси $\lambda>0$ не содержит точек непрерывной части спектра оператора L_u, причем $\delta>M$. Тогда при любом расщеплении этот интервал не будет содержать непрерывной части спектра самосопряженного расширения оператора L_2. Выберем точку расщепления c так, чтобы

$$|q(x)|\leqslant M+\varepsilon<\delta \quad \text{при} \quad x>c.$$

На основании леммы 2 этим же свойством должен тогда обладать оператор, порожденный дифференциальным выражением $l_1(y)=(-1)^n y^{(2n)}$, что невозможно, ибо непрерывная часть спектра этого последнего оператора покрывает всю положительную полуось.

В частности, при $M=0$ мы приходим к следующему результату:

Следствие 1. *Пусть конец a регулярен и пусть $b=\infty$; если $\lim\limits_{x\to\infty} q(x)=0$, то вся положительная полуось покрыта непрерывной частью спектра оператора L_u.*

Из теоремы 4 получаем также

Следствие 2. *Пусть конец a регулярен и пусть $b=\infty$; если*

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\, q(x)=\rho<\infty, \quad \underline{\lim_{x\to\infty}}\, q(x)=\sigma>-\infty,$$

то всякий интервал полуоси $\lambda>\frac{1}{2}(\rho+\sigma)$, длина которого больше $\rho-\sigma$, содержит точки непрерывной части спектра оператора L_u.

Действительно, заменив функцию $q(x)$ функцией $q_1(x)=$ $=q(x)-\frac{1}{2}(\rho+\sigma)$, получим, что

$$\overline{\lim_{x\to\infty}}\,|q_1(x)|=\frac{1}{2}(\rho-\sigma).$$

Поэтому достаточно применить теорему 4 к оператору $L_u-\frac{1}{2}(\rho+\sigma)\,1$.

Теоремы 1 и 4 (и следствия из теоремы 4), а также теорема 2 при $p_0\equiv 1$, $p_1\equiv p_2\equiv\ldots\equiv p_{n-1}\equiv 0$ были получены И. М. Глазманом (см. Глазман [3])

2. Случай суммируемых коэффициентов.

Теорема 5. *Пусть функции*

$$\left(\frac{1}{p_0}\right)', \quad p_1(x),\ p_2(x),\ \ldots,\ p_n(x)$$

суммируемы в интервале $[0, \infty)$, *и пусть*

$$\lim_{x \to \infty} p_0(x) > 0. \tag{9}$$

Тогда непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения L_u *оператора* L_0 *заполняет всю положительную полуось* $\lambda \geqslant 0$, *а на отрицательной полуоси* $\lambda < 0$ *может находиться только дискретная часть спектра оператора* L_u. *При этом на полуоси* $\lambda > 0$ *также могут находиться точки дискретного спектра оператора* L_u.

Доказательство. Докажем теорему для случая нечетного n; случай четного n рассматривается аналогично.

Рассмотрим сначала решения уравнения

$$l(y) = \lambda y$$

при $\lambda < 0$. На основании теоремы 8 n° 2 § 22 это уравнение имеет $2n$ линейно независимых решений $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, таких, что

$$y_j^{[\nu]} = \tilde{c}_\nu s^\nu \omega_j^\nu e^{s\omega_j\xi} [1 + o(1)], \tag{10}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1,$$

где

$$\tilde{c}_\nu = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad \nu \leqslant n-1, \\ (-1)^{\nu-n} p_0 & \text{при} \quad \nu \geqslant n, \end{cases}$$

$$\xi = \xi(x) = \int_0^x \sqrt[2n]{p_0^{-1}(x)}\, dx, \tag{11}$$

$$s = \sqrt[2n]{|\lambda|}, \tag{12}$$

а $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$ — все различные корни $2n$-й степени из единицы; мы будем считать эти корни расположенными так, что

$$-1 = \Re(\omega_1) < \Re(\omega_2) = \Re(\omega_3) < \Re(\omega_4) = \ldots < \Re(\omega_{2n}) = 1. \tag{13}$$

Так как n нечетно, то первые n среди чисел $\Re(\omega_j)$ будут отрицательными, а последние n — положительными. Следовательно, среди функций $y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$ первые n будут принадлежать, а последние n не будут принадлежать $L^2(0, \infty)$; при этом никакая линейная комбинация функций $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n}$, отличная от нулевой, также не будет принадлежать $L^2(0, \infty)$ (см. по этому поводу n° 3 § 23).

Согласно теореме 3 n° 3 § 23 индекс дефекта оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением

$$l(y) = (-1)^n \frac{d^n}{dx^n}\left(p_0 \frac{d^n y}{dx^n}\right) + (-1)^{n-1} \frac{d^{n-1}}{dx^{n-1}}\left(p_1 \frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}}\right) + \ldots + p_n y,$$

есть (n, n); следовательно, всякое самосопряженное расширение L_u оператора L_0 определяется краевыми условиями вида

$$\sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} y^{[k-1]}(0) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{14}$$

причем (см. n° 3 § 18)

$$\sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{j\nu} \bar{\alpha}_{k, 2n-\nu+1} - \sum_{\nu=1}^{n} \alpha_{j, 2n-\nu+1} \bar{\alpha}_{k\nu} = 0, \quad j, k = 1, 2, \ldots, n. \tag{15}$$

Найдем собственные значения λ оператора L_u, расположенные на отрицательной полуоси $\lambda < 0$. Соответствующая собственная функция $y(x, s)$ должна принадлежать $L^2(0, \infty)$ и потому может быть линейной комбинацией только функций $y_1, y_2, \ldots, y_n$. Таким образом, должно быть

$$y(x, s) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x, \lambda), \tag{16}$$

причем функция $y(x, s)$ должна удовлетворять условиям (14). Таким образом, должно быть

$$\sum_{\nu=1}^{n} A_{j\nu}(s) c_\nu = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{17}$$

где

$$A_{j\nu}(s) = \sum_{k=1}^{2n} \alpha_{jk} y_\nu^{[k-1]}(0, \lambda). \tag{18}$$

Система (17) имеет нетривиальное решение относительно $c_1, c_2, \ldots, c_n$ тогда и только тогда, когда обращается в нуль определитель

$$\Phi(s) = \begin{vmatrix} A_{11}(s) & \ldots & A_{1n}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}(s) & \ldots & A_{nn}(s) \end{vmatrix}. \tag{19}$$

Пусть $s_1, s_2, s_3, \ldots$ — нули этого определителя. Соответствующие собственные функции имеют тогда вид

$$y_k(x) = y(x, s_k) = \sum_{j=1}^{n} c_{jk} y_j(x, s_k),$$

где $c_{1k}, c_{2k}, \ldots, c_{nk}$ — нетривиальное решение системы (17) при $s = s_k$. Кратность соответствующего собственного значения $\lambda_k = -s_k^{2n}$ определяется при этом рангом матрицы определителя $\Phi(s)$ в точке $s = s_k$.

Докажем теперь, что отрицательное число λ, не совпадающее ни с одним из этих собственных значений, не принадлежит спектру оператора L_u, т. е. что для такого значения λ

резольвента $R_\lambda = (L_u - \lambda I)^{-1}$ есть ограниченный оператор. При этом, не нарушая общности, можно считать, что L_u — вещественное расширение оператора L_0, ибо непрерывный спектр не зависит от выбора расширения L_u. К такому случаю полностью применимы рассуждения n° 2 § 19 при построении ядра оператора R_λ для невещественного λ; существенным здесь является то обстоятельство, что хотя в нашем случае λ вещественно ($\lambda < 0$), но определитель системы (12) n° 2 § 19 совпадает с $\Phi(s)$ и потому отличен от нуля (ибо λ не есть собственное значение оператора L_u). Применяя нижнюю формулу (15) n° 2 § 19 и учитывая вещественность расширения L_u, мы заключаем, что R_λ есть интегральный оператор с симметрическим ядром

$$K(x, t, \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} [h_k(x) + v_k(x)]\, y_k(t) & \text{при} \quad x < t, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} y_k(x)\, [h_k(t) + v_k(t)] & \text{при} \quad x > t. \end{cases} \tag{20}$$

При этом функции $h_k(x)$ принадлежат $L^2(0, \infty)$, а функции $v_k(x)$ определяются из системы уравнений

$$\left.\begin{aligned} v_1(x)\, y_1(x) + \ldots + v_{2n}(x)\, y_{2n}(x) &= 0, \\ v_1(x)\, y_1^{[1]}(x) + \ldots + v_{2n}(x)\, y_{2n}^{[1]}(x) &= 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ v_1(x)\, y_1^{[2n-2]}(x) + \ldots + v_{2n}(x)\, y_{2n}^{[2n-2]}(x) &= 0, \\ v_1(x)\, y_1^{[2n-1]}(x) + \ldots + v_{2n}(x)\, y_{2n}^{[2n-1]}(x) &= 1 \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

и потому в силу формул (10)

$$v_k(x) = \alpha_k e^{-s\omega_k \xi} [1 + o(1)], \quad k = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{22}$$

где α_k — некоторые постоянные.

Таким образом, следует доказать, что оператор, определенный ядром $K(x, t, \lambda)$, ограничен. Представим это ядро в виде

$$K(x, t, \lambda) = K_0(x, t, \lambda) + \sum_{j=1}^{n} K_j(x, t, \lambda),$$

где

$$\left.\begin{aligned} K_0(x, t, \lambda) &= \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n} h_k(x)\, y_k(t) & \text{при} \quad x \leqslant t, \\ \sum\limits_{k=1}^{n} y_k(x)\, h_k(t) & \text{при} \quad x \geqslant t; \end{cases} \\ K_j(x, t, \lambda) &= \begin{cases} v_j(x)\, y_j(t) & \text{при} \quad x \leqslant t, \\ y_j(x)\, v_j(t) & \text{при} \quad x \geqslant t. \end{cases} \end{aligned}\right\} \tag{23}$$

Так как функции $h_k(x)$, $y_k(x)$, $k=1, 2, \ldots, n$, принадлежат $L^2(0, \infty)$, то $K_0(x, t, \lambda)$ есть ядро Гильберта — Шмидта и потому определяет ограниченный оператор. Остается доказать, что каждое из ядер $K_j(x, t, \lambda)$ определяет ограниченный оператор, т. е. что для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$ имеет место неравенство

$$\int_0^\infty \left| \int_0^\infty K_j(x, t, \lambda) f(t)\, dt \right|^2 dx \leqslant C^2 \int_0^\infty |f(t)|^2 dt,$$

где C — некоторая постоянная. В силу (23) это неравенство означает, что

$$\int_0^\infty \left| y_j(x) \int_0^x v_j(t) f(t)\, dt + v_j(x) \int_x^\infty y_j(t) f(t)\, dt \right|^2 dx \leqslant C^2 \int_0^\infty |f(t)|^2 dt. \tag{24}$$

Но из асимптотических формул (10) и (22) вытекает, что

$$|y_j(x) v_j(t)| \leqslant C_1 \exp\{[\xi(x) - \xi(t)]\, s \Re \omega_j\}, \tag{25а}$$

$$|v_j(x) y_j(t)| \leqslant C_1 \exp\{[\xi(t) - \xi(x)]\, s \Re \omega_j\}, \tag{25б}$$

где C_1 — некоторая постоянная. Так как функция $\sqrt[2n]{p_0^{-1}(x)}$ имеет положительный предел при $x \to +\infty$, то она ограничена снизу; пусть

$$\sqrt[2n]{p_0^{-1}(x)} > \alpha.$$

Тогда при $x_1 < x_2$

$$\xi(x_2) - \xi(x_1) = \int_{x_1}^{x_2} \sqrt[2n]{p_0^{-1}(x)}\, dx > \alpha (x_2 - x_1);$$

поэтому, учитывая, что $\Re(\omega_j) < 0$ и полагая для краткости $-\beta_j = \alpha s \Re \omega_j$, из (25а) и (25б) мы заключаем, что

$$|y_j(x) v_j(t)| \leqslant C_1 e^{-\beta_j (x-t)} \quad \text{при} \quad x > t, \tag{26а}$$

$$|v_j(x) y_j(t)| \leqslant C_1 e^{-\beta_j (t-x)} \quad \text{при} \quad t > x, \tag{26б}$$

где $\beta_j > 0$. Из этих оценок следует, что левая часть (24) не превосходит

$$C_1^2 \int_0^\infty \left[e^{-\beta_j x} \int_0^x e^{\beta_j t} |f(t)|\, dt + e^{\beta_j x} \int_x^\infty e^{-\beta_j t} |f(t)|\, dt \right]^2 dx$$

и потому достаточно доказать неравенство

$$\int_0^\infty \left[e^{-\beta_j x}\int_0^x e^{\beta_j t}|f(t)|\,dt + e^{\beta_j x}\int_x^\infty e^{-\beta_j t}|f(t)|\,dt\right]^2 dx \leqslant C^2\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt. \tag{27}$$

Для этой цели рассмотрим дифференциальный оператор второго порядка $\tilde{L}$ в интервале $[0, \infty)$, порожденный дифференциальным выражением $\tilde{l}(y) = -y''$ и краевым условием $y'(0) = 0$. Этот оператор — положительно определенный *), и потому его резольвента $\tilde{R}_\lambda$ есть ограниченный оператор для всех отрицательных значений λ. Вычисляя эту резольвенту по формулам (20) и (21) при $\lambda = -\beta_j^2$, мы найдем, что она является интегральным оператором с ядром

$$\tilde{K}(x, t, \lambda) = \tilde{K}_0(x, t, \lambda) + \tilde{K}_1(x, t, \lambda),$$

где

$$K_0(x, t, \lambda) = -\frac{1}{2\beta_j}e^{-\beta_j(x+t)}$$

и

$$K_1(x, t, \lambda) = \begin{cases} -\dfrac{1}{2\beta_j}e^{-\beta_j(x-t)} & \text{при} \quad t < x, \\ -\dfrac{1}{2\beta_j}e^{-\beta_j(t-x)} & \text{при} \quad t > x. \end{cases}$$

Так как $\tilde{K}_0(x, t, \lambda)$ есть ядро Гильберта — Шмидта, то из ограниченности резольвенты $\tilde{R}_\lambda$ при $\lambda = -\beta_j^2$ вытекает, что $K_1(x, t, \lambda)$ определяет ограниченный интегральный оператор. Это означает, что для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$ имеет место неравенство вида

$$\frac{1}{4\beta_j^2}\int_0^\infty \left|e^{-\beta_j x}\int_0^x e^{\beta_j t}f(t)\,dt + e^{\beta_j x}\int_x^\infty e^{-\beta_j t}f(t)\,dt\right|^2 dx \leqslant C^2\int_0^\infty |f(t)|^2\,dt.$$

Заменив в нем функцию $f(t)$ функцией $|f(t)|$ (также принадлежащей $L^2(0, \infty)$), мы придем к неравенству вида (27) **).

Таким образом, ядро $K(x, t, \lambda)$ определяет ограниченный оператор. Следовательно, на отрицательной полуоси $\lambda < 0$ может находиться только дискретная часть спектра оператора L_u.

Исследуем теперь спектр на положительной полуоси $\lambda > 0$. Для этого рассмотрим решения уравнения $l(y) = \lambda y$ при $\lambda > 0$. Это уравнение имеет $2n$ линейно независимых решений

---

*) См пример 1 n° 5 § 21.

**) По поводу другого доказательства см. стр. 452.

$y_1, y_2, \ldots, y_{2n}$, удовлетворяющих соотношениям (10), где $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$ обозначают теперь все различные корни $2n$-й степени из -1. Расположим эти корни так, что

$$\begin{aligned}\Re(\omega_1) = \Re(\omega_2) < \Re(\omega_3) = \Re(\omega_4) < \ldots < \Re(\omega_n) = 0 = \\ = \Re(\omega_{n+1}) < \Re(\omega_{n+2}) < \ldots < \Re(\omega_{2n-1}) = \Re(\omega_{2n}).\end{aligned}$$

Отсюда видно, что функции $y_1, \ldots, y_{n-1}$ принадлежат, а функции $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$ не принадлежат $L^2(0, \infty)$. Докажем, что при $\lambda > 0$ никакая линейная комбинация

$$y = c_n y_n + c_{n+1} y_{n+1} + \ldots + c_{2n} y_{2n}$$

функций $y_n, y_{n+1}, \ldots, y_{2n}$, отличная от нулевой, не принадлежит $L^2(0, \infty)$; на основании теоремы 3 n° 4 § 19 отсюда будет следовать, что каждое положительное значение λ принадлежит непрерывному спектру, ибо число линейно независимых решений уравнения

$$ly = \lambda y,$$

принадлежащих $L^2(0, \infty)$, будет меньше дефектного числа оператора L_0. Если хотя бы один из коэффициентов $c_{n+2}, \ldots, c_{2n}$ отличен от нуля, то $y \overline{\in} L^2(0, \infty)$; в этом можно убедиться, повторяя рассуждения n° 3 § 23 (стр. 334). Остается рассмотреть тот случай, когда

$$c_n \neq 0, \quad c_{n+1} \neq 0, \quad c_{n+2} = c_{n+3} = \ldots = c_{2n} = 0.$$

Наша линейная комбинация имеет тогда вид

$$y = c_n y_n + c_{n+1} y_{n+1}.$$

Предположим сначала, что $|c_{n+1}| \neq |c_n|$; пусть, например, $|c_{n+1}| > |c_n|$. Тогда

$$\begin{aligned}|y| = \left| c_n y_{n+1} \left(\frac{c_{n+1}}{c_n} + \frac{y_n}{y_{n+1}} \right) \right| = |c_n| \left| \frac{c_{n+1}}{c_n} + \frac{y_n}{y_{n+1}} \right| [1 + o(1)] \geqslant \\ \geqslant |c_n| \left(\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| - \left| \frac{y_n}{y_{n+1}} \right| \right) [1 + o(1)] = \\ = |c_n| \left(\left| \frac{c_{n+1}}{c_n} \right| - 1 + o(1) \right) [1 + o(1)],\end{aligned}$$

и потому $y \overline{\in} L^2(0, \infty)$. Предположим теперь, что $|c_{n+1}| = |c_n|$; тогда

$$\frac{c_{n+1}}{c_n} = e^{\theta i},$$

где θ — вещественное число. Поэтому, применяя формулы (10), имеем

$$|y|=|c_n|\left|\frac{c_{n+1}}{c_n}+\frac{y_n}{y_{n+1}}\right|[1+o(1)]=$$
$$=|c_n||e^{i\theta}+e^{2is\xi(x)}[1+o(1)]|[1+o(1)]=$$
$$=|c_n|\left|e^{i\left[s\xi(x)-\frac{1}{2}\theta\right]}+e^{-i\left[s\xi(x)+\frac{1}{2}\theta\right]}+o(1)\right|[1+o(1)]=$$
$$=2|c_n|\left|\cos\left[s\xi(x)-\frac{\theta}{2}\right]+o(1)\right|[1+o(1)]. \tag{28}$$

Функция $\xi'(x)=\sqrt[2n]{p_0^{-1}(x)}$ имеет конечный положительный предел при $x\to+\infty$ и потому ограничена сверху; пусть

$$|o(1)|<\varepsilon \quad \text{и} \quad \xi'(x)=\sqrt[2n]{p_0^{-1}(x)}<\delta \quad \text{при} \quad x\geqslant x_0.$$

Тогда из (28) заключаем, что

$$\int_{x_0}^{\infty}|y|^2dx=4|c_n|^2\int_{x_0}^{\infty}\left\{\cos\left[s\xi(x)-\frac{\theta}{2}\right]+o(1)\right\}^2[1+o(1)]\,dx>$$
$$>\frac{4|c_n|^2}{\delta}(1-\varepsilon)^2\int_{x_0}^{\infty}\left\{\cos s\left[\xi(x)-\frac{\theta}{2}\right]+o(1)\right\}^2\xi'(x)\,dx=$$
$$=\frac{4|c_n|^2}{\delta s}(1-\varepsilon)^2\int_{\xi(x_0)}^{\infty}\left\{\cos s\left(\xi-\frac{\theta}{2}\right)+o(1)\right\}^2d\xi\geqslant$$
$$\geqslant\frac{2|c_n|^2}{\delta s}(1-\varepsilon)^2\sum_{k=k_0}^{\infty}\int_{\left(2k-\frac{1}{4}\right)\pi}^{\left(2k+\frac{1}{4}\right)\pi}[\cos\xi+o(1)]^2d\xi=+\infty,$$

так что и в этом случае линейная комбинация

$$y=c_ny_n+c_{n+1}y_{n+1}$$

не принадлежит $L^2(0,\infty)$. Тем самым доказано утверждение теоремы и относительно непрерывной части спектра.

Ниже мы увидим (см. ниже пример б)), что L_u может иметь положительные собственные значения; выясним, когда это возможно. Положим для этой цели

$$y(x,\lambda)=\sum_{k=1}^{n+1}\varphi_k(s)\,y_k(x,\lambda),\quad s=\sqrt[2n]{|\lambda|} \tag{29}$$

и подберем коэффициенты $\varphi_k(s)$ так, чтобы функция $y(x, s)$ удовлетворяла краевым условиям (14). Подставляя выражения для $y(x, s)$ в эти условия, получим для $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n+1}$ систему однородных уравнений

$$\sum_{k=1}^{n+1} B_{jk}(s)\varphi_k(s) = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n,$$

где

$$B_{jk}(s) = \sum_{\nu=1}^{2n} \alpha_{j\nu} y_k^{[\nu-1]}(0, \lambda), \quad \lambda = s^{2n}. \tag{30}$$

Следовательно, эта система имеет нетривиальное решение. Если не все определители

$$\Psi_k(s) = \begin{vmatrix} B_{1,\,k+1}(s) & \ldots & B_{1,\,n+1}(s) & B_{11}(s) & \ldots & B_{1,\,k-1}(s) \\ B_{2,\,k+1}(s) & \ldots & B_{2,\,n+1}(s) & B_{21}(s) & \ldots & B_{2,\,k-1}(s) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ B_{n,\,k+1}(s) & \ldots & B_{n,\,n+1}(s) & B_{n1}(s) & \ldots & B_{n,\,k-1}(s) \end{vmatrix} \tag{31}$$

обращаются в нуль, то можно положить

$$\varphi_k(s) = \Psi_k(s), \quad k = 1, 2, \ldots, n+1,$$

так что

$$y(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{n+1} \Psi_k(s) y_k(x, \lambda), \quad \lambda = s^{2n}. \tag{32}$$

Если же все функции $\Psi_k(s)$ тождественно равны нулю, то в качестве функций $\varphi_k(s)$ можно аналогичным образом взять некоторые определители низшего порядка матрицы $(B_{jk}(s))$, не все равные тождественно нулю. Такие определители существуют, ибо в противном случае любое положительное значение λ было бы собственным значением оператора L_u, что невозможно. По этой же причине не может быть одновременно $\varphi_n(s) \equiv 0$, $\varphi_{n+1}(s) \equiv 0$, ибо каждое значение s, для которого $\varphi_n(s) = 0$, $\varphi_{n+1}(s) = 0$ и не все остальные $\varphi_k(s)$ равны нулю, определяет функцию $y(x, \lambda) \in L^2(0, \infty)$, которая, следовательно, является собственной функцией оператора L_u, отвечающей собственному значению $\lambda = s^{2n}$. Обратно, только при $\varphi_n(s) = \varphi_{n+1}(s) = 0$ число $\lambda = s^{2n}$ будет собственным значением оператора L_u, ибо только в этом случае $y(x, \lambda) \in L^2(0, \infty)$. Таким образом, *положительные собственные значения оператора L_u определяются общими нулями функций $\varphi_n(s)$, $\varphi_{n+1}(s)$*.

Примеры: а) Оператор второго порядка. Рассмотрим оператор L_0, определенный дифференциальным выражением

$$l(y) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)y, \quad 0 < x < +\infty,$$

и краевым условием

$$y'(0) - \theta y(0) = 0,$$

причем функция $q(x)$ суммируема в интервале $(0, \infty)$. На основании теоремы 3 n° 3 § 23 индекс дефекта соответствующего оператора L_0 есть (1, 1) и потому L_θ — самосопряженный оператор.

При $\lambda < 0$ асимптотические формулы (10) принимают вид

$$y_1 = e^{-sx}[1 + o(1)], \quad y_1' = -se^{-sx}[1 + o(1)],$$
$$y_2 = e^{sx}[1 + o(1)], \quad y_2' = se^{sx}[1 + o(1)],$$

где $s = \sqrt{|\lambda|}$. Очевидно, $y_1 \in L^2(0, \infty)$, $y_2 \overline{\in} L^2(0, \infty)$, и потому собственной функцией оператора L_u, соответствующей некоторому собственному значению, может быть только y_1. Отсюда заключаем, что собственными значениями являются корни уравнения

$$y_1'(0, \lambda) - \theta y_1(0, \lambda) = 0.$$

При $\lambda > 0$

$$y_1 = e^{isx}[1 + o(1)], \quad y_1' = ise^{isx}[1 + o(1)],$$
$$y_2 = e^{-isx}[1 + o(1)], \quad y_2' = -ise^{-isx}[1 + o(1)],$$

где $s = \sqrt{\lambda}$. Никакая линейная комбинация этих функций, отличная от нулевой, не может принадлежать $L^2(0, \infty)$, и потому:

Если функция $q(x)$ *суммируема в интервале* $(0, \infty)$, *то спектр оператора* L_θ *непрерывен на положительной полуоси* $\lambda > 0$ *и может быть только дискретным на отрицательной полуоси* $\lambda < 0$. Таким образом, в случае оператора L_0 второго порядка положительная полуось $\lambda > 0$ не содержит точек дискретного спектра.

б) Пример положительного собственного значения. При $n > 1$ положительная полуось $\lambda > 0$ может уже содержать кроме непрерывной части дискретную часть спектра оператора L_u. Действительно, пусть оператор L_u порождается дифференциальным выражением

$$l(y) = \frac{d^4y}{dx^4}$$

и краевыми условиями

$$y'(0) + y''(0) = 0,$$
$$y'''(0) + y(0) = 0.$$

Он имеет собственную функцию $y = e^{-x}$, соответствующую положительному собственному значению $\lambda = 1$.

в) Пример разложения по собственным функциям. Асимптотические формулы (10) дают также возможность получить разложение по собственным функциям оператора L_u и определить при этом спектральную функцию распределения $\sigma(\lambda)$.

Для простоты изложения мы дополнительно предположим, что L_u — вещественное расширение оператора L_0 и что определители $\Phi(s)$ и $\Psi_{n+1}(s)$ (см. (19) и (31)) не обращаются в нуль для положительных значений s. Кроме того, мы пронормируем дифференциальное выражение так, что

$$\lim_{x\to\infty} p_0(x) = 1. \tag{33}$$

В силу вещественности расширения L_u числа $\alpha_{j\nu}$, определяющие краевые условия, можно выбрать вещественными; при таком выборе *)

$$\Psi_n(s) = \pm\overline{\Psi_{n+1}(s)}, \quad s>0,$$

где знак $\pm$ зависит от четности n. Пронормируем функцию $y(x, \lambda)$, построенную при $\lambda>0$, полагая

$$\varphi_k(s) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\frac{\Psi_k(s)}{[\pm\Psi_n(s)\Psi_{n+1}(s)]^{\frac{1}{2}}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\,\frac{\Psi_k(s)}{|\Psi_{n+1}(s)|}. \tag{34}$$

Рассмотрим теперь при $\lambda>0$ функции

$$z_j(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\lambda)\, y_k(x, \lambda) + y_{n+j+1}, \tag{35}$$
$$j = 1, 2, \ldots, n-1,$$

и подберем коэффициенты $c_{jk}(\lambda)$ так, чтобы каждая из функций $z_j(x, \lambda)$ удовлетворяла краевым условиям (14). При фиксированном j мы получим для этих коэффициентов систему уравнений, определитель которой есть

$$\Psi_{n+1} \neq 0;$$

следовательно, функции $z_j(x, \lambda)$ определяются единственным образом. Рассмотрим, далее, краевую задачу

$$l(y) = \lambda y, \quad \lambda>0, \tag{36}$$

$$\sum_{\nu=1}^{2n} \alpha_{j\nu} y^{[\nu-1]}(0) = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n, \tag{37}$$

$$y^{[k-1]}(b) = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n, \tag{38}$$

---

*) Легко видеть, что при $s>0$ и n четном $\overline{y_1(x, s)} = y_1(x, s)$, но $\overline{y_2(x, s)} = y_3(x, s), \ldots, \overline{y_n(x, s)} = y_{n+1}(x, s)$ Если же $s>0$ и n нечетно, то $\overline{y_1(x, s)} = y_2(x, s), \ldots, \overline{y_n(x, s)} = y_{n+1}(x, s)$.

в конечном интервале $(0, b)$. Каждая из функций $y(x, \lambda)$, $z_1(x, \lambda), \ldots, z_{n-1}(x, \lambda)$, а значит, и их линейная комбинация

$$\tilde{y}(x, \lambda) = y(x, \lambda) + \gamma_1(\lambda) z_1(x, \lambda) + \ldots + \gamma_{n-1}(\lambda) z_{n-1}(x, \lambda),$$

есть решение уравнения (36), удовлетворяющее условию (37). Собственные значения и собственные функции нашей краевой задачи мы получим, подчиняя функцию $\tilde{y}(x, \lambda)$ условиям (38). Мы получим систему уравнений

$$\left.\begin{array}{l} y(b, \lambda) + \gamma_1(\lambda) z_1(b, \lambda) + \ldots + \gamma_{n-1}(\lambda) z_{n-1}(b, \lambda) = 0, \\ y^{[1]}(b, \lambda) + \gamma_1(\lambda) z_1^{[1]}(b, \lambda) + \ldots + \gamma_{n-1}(\lambda) z_{n-1}^{[1]}(b, \lambda) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ y^{[n-1]}(b, \lambda) + \gamma_1(\lambda) z_1^{[n-1]}(b, \lambda) + \ldots + \gamma_{n-1}(\lambda) z_{n-1}^{[n-1]}(b, \lambda) = 0; \end{array}\right\} \quad (39)$$

следовательно, эти собственные значения определяются из уравнения

$$\begin{vmatrix} y(b, \lambda) & z_1(b, \lambda) & \ldots & z_{n-1}(b, \lambda) \\ y^{[1]}(b, \lambda) & z_1^{[1]}(b, \lambda) & \ldots & z_{n-1}^{[1]}(b, \lambda) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ y^{[n-1]}(b, \lambda) & z_1^{[n-1]}(b, \lambda) & \ldots & z_{n-1}^{[n-1]}(b, \lambda) \end{vmatrix} = 0. \quad (40)$$

Если λ — один из корней уравнения (40), то коэффициенты $\gamma_1(\lambda), \ldots, \gamma_{n-1}(\lambda)$, определяющие соответствующую собственную функцию, можно будет найти, решая, например, первые $n-1$ уравнений (39).

Воспользуемся теперь асимптотическими формулами (10). Очевидно,

$$z_j(x, \lambda) = e^{\omega_{n+j+1} s\xi} [1 + o(1)]$$

и вообще

$$z_j^{[\nu-1]}(x, \lambda) = \tilde{c}_{\nu-1} s^{\nu-1} \omega_{n+j+1}^{\nu-1} e^{\omega_{n+j+1} s\xi} [1 + o(1)], \quad (41)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n-1; \quad \nu = 1, 2, \ldots, 2n.$$

Аналогично, учитывая формулы (29) и (34), имеем

$$y(x, \lambda) = \varphi_n e^{is\xi} \pm \bar{\varphi}_n e^{-is\xi} + o(1) =$$
$$= 2\tilde{\varphi}_n \sin(s\xi + \varkappa) + o(1), \quad \text{где} \quad |\tilde{\varphi}_n| = \sqrt{\frac{1}{2\pi}},$$

где $\varkappa = \varkappa(s)$ — непрерывная функция от s.

Кроме того,

$$y^{[\nu]}(x, \lambda) = 2\tilde{c}_\nu \tilde{\varphi}_n \frac{\partial^\nu}{\partial \xi^\nu} \sin(s\xi + \varkappa) + o(1), \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1. \quad (42)$$

Подставляя эти выражения в уравнение (40) и отбрасывая множители, отличные от нуля, мы приведем это уравнение к виду

$$\sin(s\xi+\varkappa)+o(1)=0, \tag{43}$$

где

$$\xi=\xi(b)=\int_0^b \sqrt[2n]{p_0^{-1}(x)}\,dx, \tag{44}$$

а $o(1)\to 0$ при $b\to\infty$.

Если s, оставаясь в фиксированном конечном отрезке, изменится на $\frac{2\pi}{\xi(b)}$, то при достаточно большом b (а значит, и $\xi(b)$) $\sin(s\xi+\varkappa)$ по крайней мере дважды изменит знак, ибо функция $\varkappa \doteq \varkappa(s)$ непрерывна, а $s\xi$ изменится на 2π. Следовательно, при достаточно больших b вся левая часть по крайней мере дважды изменит знак. Отсюда заключаем, что для двух последовательных положительных собственных значений

$$\lambda_k=s_k^{2n},\quad \lambda_{k+1}=s_{k+1}^{2n}\quad (0<\alpha\leqslant\lambda_k<\lambda_{k+1}\leqslant\beta<\infty)$$

нашей краевой задачи $s_{k+1}-s_k=o(1)$ при $b\to\infty$. Но тогда $\varkappa(s_{k+1})-\varkappa(s_k)=o(1)$ при $b\to\infty$ в силу непрерывности функции $\varkappa(s)$, и поэтому из (43) следует, что

$$\xi(b)[s_{k+1}-s_k]=\pi+\varkappa(s_{k+1})-\varkappa(s_k)+o(1)=\pi+o(1). \tag{45}$$

Подставляя далее асимптотические выражения (41) и (42) в уравнения (39), найдем, что

$$\gamma_j(\lambda)=O\left(e^{-\omega_{n+j+1}s\xi(b)}\right),\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n-1. \tag{46}$$

Эти оценки показывают, что при $0\leqslant x<b$

$$\tilde{y}(x,\lambda)=y(x,\lambda)+\gamma_1(\lambda)z_1(x,\lambda)+\ldots+\gamma_{n-1}(\lambda)z_{n-1}(x,\lambda)=$$
$$=2\tilde{\varphi}_n\sin(s\xi+\varkappa)+o(1)+\sum_{j=1}^{n-1}O\left(e^{-\omega_{n+j+1}s[\xi(b)-\xi(x)]}\right),$$

и потому

$$\frac{1}{\xi(b)}\int_0^b|\tilde{y}(x,\lambda)|^2\,dx=\frac{1}{\pi}\,\frac{b}{\xi(b)}+o(1).$$

Учитывая нормировку (33), имеем

$$\frac{b}{\xi(b)}=1+o(1),$$

и потому

$$\frac{1}{\xi(b)}\int_0^b |\tilde{y}(x, \lambda)|^2\,dx = \frac{1}{\pi} + o(1). \tag{47}$$

Все эти оценки равномерны относительно собственных значений, заключенных в любом конечном интервале $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$, $0 < \alpha < \beta$.

Рассмотрим теперь произвольную функцию $f(x)$, непрерывную вместе со своими квазипроизводными до $2n$-го порядка включительно, равную нулю вне некоторого конечного интервала $[0, a]$ и удовлетворяющую краевым условиям (14); положим

$$I(\alpha, \beta, b) = \sum_{k=k'}^{k''}\left[\int_0^b |\tilde{y}(x, \lambda_k)|^2\,dx\right]^{-1}\left|\int_0^b f(x)\,\tilde{y}(x, \lambda_k)\,dx\right|^2, \tag{48}$$

где числа k' и k'' определяются условиями

$$\lambda_{k'-1} < \alpha, \quad \lambda_{k'} \geqslant \alpha, \quad \lambda_{k''} \leqslant \beta, \quad \lambda_{k''+1} > \beta.$$

Из оценок (41), (45), (46) и (47) заключаем, что

$$I(\alpha, \beta, b) = \\ = \sum_{k=k'}^{k''}\left|\int_0^a f(x)\left[y(x, \lambda_k) + \sum_{j=1}^{n-1} O\left(e^{-\omega_{n+j+1}s[\xi(b)-\xi(x)]}\right)\right]dx\right|^2 \times \\ \times\left[s_{k+1} - s_k + \frac{o(1)}{\xi(b)}\right],$$

и потому

$$\lim_{b\to\infty} I(\alpha, \beta, b) = \int_{s'}^{s''} |F(s)|^2\,ds, \tag{49}$$

где

$$F(s) = \int_0^a f(x)\,y(x, \lambda)\,dx, \quad \lambda = s^{2n}, \tag{50}$$

а

$$s' = \sqrt[2n]{\alpha}, \quad s'' = \sqrt[2n]{\beta}.$$

Аналогично можно доказать, что при $\alpha < \beta < 0$

$$\lim_{b\to\infty} I(\alpha, \beta, b) = 0. \tag{51}$$

С другой стороны, применяя неравенство Бесселя, имеем

$$I(-\infty,\ -N,\ b) = \sum_{\lambda_k < -N} \left[\int_0^b |y(x,\ \lambda_k)|^2\, dx \right]^{-1} \left| \int_0^a f(x)\, y(x,\ \lambda_k)\, dx \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N^2} \sum_{\lambda_k < -N} \lambda_k^2 \left[\int_0^b |y(x,\ \lambda_k)|^2\, dx \right]^{-1} \left| \int_0^a f(x)\, y(x,\ \lambda_k)\, dx \right|^2 =$$

$$= \frac{1}{N^2} \sum_{\lambda_k < -N} \left[\int_0^b |y(x,\ \lambda_k)|^2 dx \right]^{-1} \left| \int_0^a l(f)\, y(x,\ \lambda_k)\, dx \right|^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{N} \int_0^a |l(f)|^2\, dx \tag{52}$$

и аналогично

$$I(N,\ +\infty,\ b) \leqslant \frac{1}{N^2} \int_0^a |l(f)|^2\, dx. \tag{52'}$$

Учитывая все эти оценки и равенство Парсеваля (см. n° 2 § 5) для краевой задачи в конечном интервале $(0,\ b)$

$$I(-\infty,\ +\infty,\ b) = \int_0^a |f(x)|^2\, dx, \tag{53}$$

мы заключаем, что существует предел

$$C_0^2 = \lim_{\varepsilon \to 0} \lim_{b \to \infty} I(-\varepsilon,\ \varepsilon,\ b) \tag{54}$$

и что

$$\int_0^a |f(x)|^2\, dx = \int_0^\infty |F(s)|^2\, ds + C_0^2, \tag{55}$$

где

$$F(s) = \int_0^a f(x)\, y(x,\ \lambda)\, dx. \tag{56}$$

Очевидно, C_0 может отличаться от нуля лишь тогда, когда оператор L_u имеет собственное значение $\lambda = 0$. Мы приходим к следующей теореме.

Теорема 6. *Пусть оператор L_0 тот же, что и в теореме 5, а L_u — его вещественное расширение, не имеющее дискретного спектра.*

Тогда формулы

$$F(s)=\int_0^\infty f(x)\,y(x,\,s^{2n})\,dx, \tag{57}$$

$$f(x)=\int_0^\infty F(s)\,y(x,\,s^{2n})\,ds \tag{58}$$

осуществляют взаимно обратные изометрические отображения пространства $L^2(0,\,\infty)$ *функций* $f(x)$ *на пространство* $L^2(0,\,\infty)$ *функций* $F(s)$, *так что*

$$\int_0^\infty |f(x)|^2\,dx=\int_0^\infty |F(s)|^2\,ds. \tag{59}$$

Следовательно, оператор L_u *имеет простой спектр.*

3. Случай $p_n(x)\to+\infty$.

Теорема 7. *Пусть выполнены условия:*

1) $p_n(x)\to+\infty$ *при* $x\to+\infty$;

2) p_n', p_n'' *не меняют знака в интервале* $[x_0,\,\infty)$ *при достаточно большом* x_0;

3) *при* $x\to+\infty$

$$p_n'=O\left(|p_n|^{\alpha}\right),\quad 0<\alpha<1+\frac{1}{2n};$$

4) *функции*

$$\frac{p_0'}{p_0},\ p_1|p_n|^{-\frac{1}{2n}},\ p_2|p_n|^{-\frac{3}{2n}},\ \ldots,\ p_{n-1}|p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}}$$

суммируемы в интервале $[0,\,+\infty)$;

5) $\lim\limits_{x\to+\infty} p_0(x)=1$.

Тогда спектр всякого самосопряженного расширения L_u *оператора* L_0 *дискретен.*

Доказательство. Рассмотрим уравнение $l(y)=\lambda y$, где λ — вещественное число. Согласно теореме 9 § 22 (см. замечание к этой теореме в конце 2) б) n° 2 § 22) это уравнение имеет $2n$ линейно независимых решений y_j, $j=1,\,2,\,\ldots,\,2n$, таких, что при $x\to+\infty$

$$y_j=p_n^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}}e^{\varepsilon_j\xi}\,[1+o(1)], \tag{60}$$

где

$$\xi=\int_{x_0}^{x}\sqrt[2n]{(-1)^{n-1}\frac{p_n-\lambda}{p_0}}\,dx, \tag{61}$$

а $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots, \varepsilon_{2n}$ — все различные корни $2n$-й степени из единицы. Занумеруем числа ε_j так, что

$$-1 = \Re(\varepsilon_1) < \Re(\varepsilon_2) = \Re(\varepsilon_3) < \ldots < \Re(\varepsilon_{2n-2}) = \\ = \Re(\varepsilon_{2n-1}) < \Re(\varepsilon_{2n}) = 1. \quad (62)$$

Пусть для определенности n нечетно. Случай четного n рассматривается совершенно аналогично. Тогда первые n среди чисел $\Re(\varepsilon_j)$ отрицательны, последние n положительны. По теореме 4 n° 4 § 23 индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n), и потому всякое его самосопряженное расширение L_u задается краевыми условиями (14) (см. n° 3 § 18).

Рассуждения в доказательстве теоремы 4 n° 4 § 23 применимы также к нашему случаю вещественного λ, так что функции $y_1, y_2, \ldots, y_n$ принадлежат $L^2(0, \infty)$, а функции $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots, y_{2n}$ и никакая их ненулевая линейная комбинация не принадлежат $L^2(0, \infty)$. Поэтому собственные значения оператора L_u суть те значения λ, для которых функция $y = c_1y_1 + \ldots \ldots + c_ny_n$ удовлетворяет условиям (14), т. е. для которых однородная система

$$\sum_{k=1}^{n} A_{jk}(\lambda)\, c_k = 0, \quad j = 1, 2, \ldots, n, \quad (63)$$

где

$$A_{jk}(\lambda) = \sum_{\nu=1}^{2n} \alpha_{j\nu} y_k^{[\nu-1]}(0, \lambda) \quad (64)$$

имеет нетривиальное решение. Следовательно, собственные значения определяются как нули функции

$$\Phi(\lambda) = \begin{vmatrix} A_{11}(\lambda) & \ldots & A_{1n}(\lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ A_{n1}(\lambda) & \ldots & A_{nn}(\lambda) \end{vmatrix}. \quad (65)$$

Докажем теперь, что оператор L_u не имеет непрерывного спектра, т. е. что при $\Phi(\lambda) \neq 0$ оператор $(L_u - \lambda I)^{-1}$ ограничен.

Повторяя рассуждение, приведенное в доказательстве теоремы 5 (см. стр. 359, 360), мы видим, что достаточно установить справедливость неравенства вида

$$\int_0^\infty \left| y_j(x) \int_0^x v_j(t) f(t)\, dt + v_j(x) \int_x^\infty y_j(t) f(t)\, dt \right|^2 dx \leqslant C^2 \int_0^\infty |f(t)|^2\, dt, \quad (66)$$

$$j = 1, 2, \ldots, n,$$

для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$. Но из уравнений (21) для функций $v_j(x)$ и асимптотических формул (151) § 22 следует, что при $x \to +\infty$

$$v_j = c_j p_n^{-\frac{2n-1}{4n}} e^{-\varepsilon_j \xi} [1 + o(1)],$$

где c_j — некоторые постоянные. Так как $p_n \to +\infty$ при $x \to +\infty$, то из этих асимптотических формул и из (61) вытекает, что при x_0 достаточно большом

$$| y_j(x) v_j(t) | < C_1 e^{-\beta_j (x-t)} \quad \text{при} \quad x > t > x_0,$$
$$| v_j(x) y_j(t) | < C_1 e^{-\beta_j (t-x)} \quad \text{при} \quad t > x > x_0.$$

Путем надлежащего подбора C_1 можно добиться того, что эти неравенства будут выполняться при $x > t \geqslant 0$ и $t > x \geqslant 0$ соответственно. Но тогда из этих неравенств и из неравенства (27) мы получим неравенство (66) так же, как и на стр. 361—362. Тем самым доказана дискретность спектра оператора L_u.

4. Случай $p_n(x) \to -\infty$.

Теорема 8. *Пусть выполнены условия:*

1) $p_n(x) \to -\infty$ *при* $x \to +\infty$;

2) p_n', p_n'' *не меняют знак в интервале* $[x_0, \infty)$ *при достаточно большом* x_0;

3) *при* $x \to +\infty$

$$p_n' = O(|p_n|^{\alpha}), \quad 0 < \alpha < 1 + \frac{1}{2n};$$

4) *функции*

$$\frac{p_0'}{p_0}, \; p_1 |p_n|^{-\frac{1}{2n}}, \; p_2 |p_n|^{-\frac{3}{2n}}, \; \ldots, \; p_{n-1} |p_n|^{-\frac{2n-3}{2n}}$$

суммируемы в интервале $[x_0, +\infty)$ *при достаточно большом* x_0;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} p_0(x) = 1$;

6) *интеграл*

$$\int^{\infty} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx$$

расходится.

Тогда непрерывная часть спектра всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 заполняет всю действительную ось.

Доказательство. Будем по-прежнему считать n нечетным и обозначим теперь через $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_{2n}$ все различные корни $2n$-й степени из -1, расположенные так, что

$$\Re(\omega_1) = \Re(\omega_2) < \Re(\omega_3) = \Re(\omega_4) < \ldots < \Re(\omega_{2n-1}) = \Re(\omega_{2n}). \quad (67)$$

Среди этих чисел первые $n-1$ будут отрицательными, последние $n-1$ положительными, а

$$\Re(\omega_n) = \Re(\omega_{n+1}) = 0,$$

так что можно считать

$$\omega_n = i, \quad \omega_{n+1} = -i.$$

Асимптотические формулы мы теперь запишем в виде

$$y_j = \rho^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}} e^{\omega_j \eta} [1 + o(1)], \quad j = 1, 2, \ldots, 2n, \tag{68}$$

где

$$\eta = \int_{x_0}^{x} \sqrt[2n]{\frac{|p_n| + \lambda}{p_0}}\, dx \tag{69}$$

и

$$\rho = \frac{|p_n| + \lambda}{p_0}. \tag{70}$$

По теореме 4 n° 4 § 23 индекс дефекта оператора L_0 есть (n, n). Так как $\Re(\omega_j) < 0$ при $j < n$ и $\Re(\omega_j) > 0$ при $j > n$, то функции $y_1, y_2, \ldots, y_{n-1}$ принадлежат $L^2(0, \infty)$, а функции $y_{n+1}, y_{n+2}, \ldots$ $\ldots, y_{2n}$ и никакая их ненулевая линейная комбинация не принадлежат $L^2(0, \infty)$. Это доказывается точно так же, как и соответствующее утверждение в доказательстве теоремы 4 n° 4 § 23.

Так как

$$y_n = |p_n|^{-\frac{2n-1}{4n}} e^{i\eta} [1 + o(1)],$$

$$y_{n+1} = |p_n|^{-\frac{2n-1}{4n}} e^{-i\eta} [1 + o(1)],$$

то при достаточно большом x_0 и $x \geqslant x_0$

$$|y_n|^2 \geqslant (1-\varepsilon) |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}},$$

$$|y_{n+1}|^2 \geqslant (1-\varepsilon) |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}}.$$

Из этих неравенств и условия 6) заключаем, что функции y_n, y_{n+1} не принадлежат $L^2(0, \infty)$. Дальнейшие рассуждения аналогичны рассуждениям в n° 2, в).

Положим снова *) $y(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{n+1} \varphi_k(\lambda) y_k(x, \lambda)$, где коэффициенты $\varphi_k(s)$ выбраны так, чтобы функция $y(x, \lambda)$ удовлетворяла краевым условиям в точке $x = 0$, определяющим оператор L_u.

---

*) Здесь и ниже мы изменяем обозначения и пишем $\varphi_k(\lambda)$, $\Psi_k(\lambda)$ вместо $\varphi_k(s)$ и $\Psi_k(s)$.

Так как непрерывный спектр не зависит от выбора расширения L_u, то достаточно доказать утверждение теоремы для какого-нибудь одного такого расширения. Мы ее докажем для вещественного расширения L_u и притом для того случая, когда не все определители Ψ_k (см. формулу (31)) тождественно равны нулю. Такие расширения существуют. Действительно, среди определителей n-го порядка матрицы

$$\begin{pmatrix} y_1(0, \lambda) & y_1^{[1]}(0, \lambda) & \dots & y_1^{[2n-1]}(0, \lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n(0, \lambda) & y_n^{[1]}(0, \lambda) & \dots & y_n^{[2n-1]}(0, \lambda) \end{pmatrix}$$

хотя бы один отличен от тождественного нуля, ибо в противном случае был бы равен нулю при всех λ определитель Вронского линейно независимых функций $y_1, y_2, \dots, y_{2n}$. Пусть отличен от тождественного нуля определитель этой матрицы с номерами столбцов $\nu_1, \nu_2, \dots, \nu_n$ $(0 \leqslant \nu_1 < \nu_2 < \dots < \nu_n \leqslant 2n)$. Рассмотрим тогда вещественное расширение L_u оператора L_0, определенное краевыми условиями

$$y^{[\nu_1]}(0, \lambda) = 0, \quad y^{[\nu_2]}(0, \lambda) = 0, \dots, y^{[\nu_n]}(0, \lambda) = 0,$$

так что в рассматриваемом случае

$$\alpha_{j, \nu+1} = \begin{cases} 0 & \text{при} \quad \nu \neq \nu_j, \\ 1 & \text{при} \quad \nu = \nu_j \end{cases}$$

и

$$B_{jk}(\lambda) = y_j^{[\nu_k]}(0, \lambda),$$

и потому не будет тождественным нулем определитель

$$\Psi_{n+1}(\lambda) = \begin{vmatrix} y_1^{[\nu_1]}(0, \lambda) & \dots & y_1^{[\nu_n]}(0, \lambda) \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ y_n^{[\nu_1]}(0, \lambda) & \dots & y_n^{[\nu_n]}(0, \lambda) \end{vmatrix}.$$

Положим, как и в n° 2,

$$\varphi_k(\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\Psi_k(\lambda)}{\sqrt{\pm \Psi_n(\lambda) \Psi_{n+1}(\lambda)}} = \sqrt{\frac{1}{2\pi}} \frac{\Psi_k(\lambda)}{|\Psi_{n+1}(\lambda)|}.$$

Функция $y(x, \lambda)$ будет тогда определена для всех значений s, не являющихся нулями функции $\Psi_{n+1}(\lambda)$. Далее введем снова в рассмотрение функции

$$z_j(x, \lambda) = \sum_{k=1}^{n} c_{jk}(\lambda) y_k(x, \lambda) + y_{n+j+1}$$

$$j = 1, 2, \dots, n-1,$$

удовлетворяющие условиям (14), и краевую задачу

$$l(y)=\lambda y,$$
$$\sum_{\nu=1}^{2n}\alpha_{j\nu}y^{[\nu-1]}(0)=0,\quad j=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$
$$y^{[k-1]}(b)=0,\quad k=1,\,2,\,\ldots,\,n,$$

решения которой мы снова будем искать в виде

$$\tilde{y}(x,\,\lambda)=y(x,\,\lambda)+\gamma_1(\lambda)z_1(x,\,\lambda)+\,\ldots\,+\gamma_{n-1}(\lambda)z_{n-1}(x,\,\lambda).$$

Мы получим для функций $\gamma_j(\lambda)$ систему уравнений (39), а для собственных значений нашей краевой задачи — уравнение (40). Асимптотические формулы для функций $z_j^{[\nu]}(x,\,\lambda)$ мы запишем теперь в виде

$$z_j^{[\nu-1]}(x,\,\lambda)=\omega_{n+j+1}^{\nu-1}\rho^{-\frac{1}{2}+\frac{2\nu-1}{4n}}e^{\omega_{n+j+1}\eta}[1+o(1)] \tag{71a}$$

при $\nu=1,\,2,\,\ldots,\,n$ и

$$z_j^{[\nu-1]}(x,\,\lambda)=(-1)^{\nu-n-1}\,\omega_{n+j+1}^{\nu-1}\rho^{-\frac{1}{2}+\frac{2\nu-1}{4n}}e^{\omega_{n+j+1}\eta}[1+o(1)] \tag{71б}$$

при $\nu=n+1,\,n+2,\,\ldots,\,2n$.

Далее,

$$y(x,\,\lambda)=2\tilde{\varphi}_n\rho^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}}[\sin(\eta+\varkappa)+o(1)],\quad |\tilde{\varphi}_n|=|\varphi_n|,$$

и вообще

$$y^{[\nu-1]}(x,\,\lambda)=2\tilde{\varphi}_n\rho^{-\frac{1}{2}+\frac{2\nu-1}{4n}}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial\eta^{\nu-1}}\sin(\eta+\varkappa)+o(1)\right] \tag{72a}$$

при $\nu=1,\,2,\,\ldots,\,n$,

$$y^{[\nu-1]}(x,\,\lambda)=2(-1)^{\nu-n-1}\tilde{\varphi}_n\rho^{-\frac{1}{2}+\frac{2\nu-1}{4n}}\left[\frac{\partial^{\nu-1}}{\partial\eta^{\nu-1}}\sin(\eta+\varkappa)+o(1)\right] \tag{72б}$$

при $\nu=n+1,\,\ldots,\,2n$, где $\varkappa=\varkappa(\lambda)$ — непрерывная функция от λ в каждом конечном интервале $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$, не содержащем нулей функции $\Psi_{n+1}(\lambda)$.

Подставляя эти выражения в уравнение (40) и отбрасывая множители, отличные от нуля, мы приведем его при $b\to+\infty$ к виду

$$\sin(\eta+\varkappa)+o(1)=0, \tag{73}$$

где

$$\eta=\eta(b,\,\lambda)=\int_0^b\sqrt[2n]{\frac{|p_n|+\lambda}{p_0}}\,dx. \tag{74}$$

Пусть $[\alpha,\,\beta]$ — фиксированный конечный интервал, в котором нет нулей функции $\Psi_{n+1}(\lambda)$, и пусть λ_k, λ_{k+1} — два последовательных собственных значения нашей краевой задачи, принадлежащие $[\alpha, \beta]$. Тогда

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k=o(1) \quad \text{при} \quad b\to\infty.$$

Действительно, в силу (74), условия 1) и непрерывности функции $\varkappa(\lambda)$ в $[\alpha, \beta]$ для каждого λ, $\alpha\leqslant\lambda<\beta$, существует такое число $\mu>\lambda$, $\mu<\beta$, что

$$\eta(b, \mu)+\varkappa(\mu)-\eta(b, \lambda)-\varkappa(\lambda)=2\pi. \tag{75a}$$

Отсюда

$$\eta(b, \mu)-\eta(b, \lambda)=2\pi-\varkappa(\mu)+\varkappa(\lambda),$$

т. е.

$$\int_0^b\left[\sqrt[2n]{\frac{|p_n|+\mu}{p_0}}-\sqrt[2n]{\frac{|p_i|+\lambda}{p_0}}\right]dx=2\pi-\varkappa(\mu)+\varkappa(\lambda),$$

следовательно,

$$(\mu-\lambda)\int_0^b\frac{|p_0|^{\frac{1}{2n}}\,dx}{(|p_n|+\mu)^{\frac{2n-1}{2n}}+(|p_n|+\mu)^{\frac{2n-2}{2n}}(|p_n|+\lambda)^{\frac{1}{2n}}+\ldots+(|p_n|+\lambda_\xi)^{\frac{2n-1}{2n}}}=$$
$$=2\pi-\varkappa(\mu)+\varkappa(\lambda). \tag{75б}$$

Так как по условию интеграл

$$\int^\infty|p_n(x)|^{-1+\frac{1}{2n}}\,dx$$

расходится, $p_0\to1$ при $x\to+\infty$, а $\varkappa(\mu)$, $\varkappa(\lambda)$ ограничены, то из (75б) заключаем, что $\mu-\lambda=o(1)$ при $b\to\infty$. С другой стороны, при достаточно больших b левая часть (73) по крайней мере два раза меняет знак в интервале $[\lambda, \mu]$ и потому имеет там по крайней мере два нуля. Таким образом, при достаточно больших b числа λ_k, λ_{k+1} заключены в интервале вида $[\lambda, \mu]$, следовательно, подавно $\lambda_{k+1}-\lambda_k=o(1)$. Отсюда $\varkappa(\lambda_{k+1})-\varkappa(\lambda_k)=$ $=o(1)$, и потому из (73) заключаем, что

$$\eta(b, \lambda_{k+1})-\eta(b, \lambda_k)=\pi+o(1).$$

Повторяя теперь рассуждение, проведенное при выводе соотношения (75б), заключаем, что

$$(\lambda_{k+1}-\lambda_k)\times$$
$$\times\int_0^b\frac{p_0^{\frac{1}{2n}}\,dx}{(|p_n|+\lambda_{k+1})^{\frac{2n-1}{2n}}+(|p_n|+\lambda_{\xi+1})^{\frac{2n-2}{2n}}(|p_n|+\lambda_\xi)^{\frac{1}{2n}}+\ldots+(|p_n|+\lambda_\xi)^{\frac{2n-1}{2n}}}=$$
$$=\pi+o(1),$$

и соотношение $\lambda_{k+1}-\lambda_k=o(1)$ дает

$$\lambda_{k+1}-\lambda_k=\frac{\pi n+o(1)}{\int\limits_0^b(|p_n(x)|+\lambda_k)^{-1+\frac{1}{2n}}p_0^{\frac{1}{2n}}\,dx}\quad \text{при } b\to+\infty. \tag{76}$$

Далее, из уравнений (39) и асимптотических формул (71) и (72) вытекает, что

$$\gamma_j(\lambda)=O\left(e^{-\omega_{n+j+1}\eta(b,\lambda)}\right),\quad j=1,2,\ldots,n; \tag{77}$$

следовательно,

$$\tilde{y}(x,\lambda)=2\tilde{\varphi}_n\rho^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}}\sin(\eta+\varkappa)+\sum_{j=1}^{n}O\left(e^{-\omega_{n+j-1}[\eta(b,\lambda)-\eta(x,\lambda)]}\right)\rho^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}}. \tag{78}$$

Найдем теперь асимптотическое выражение для

$$\frac{\int\limits_0^b|\tilde{y}(x,\lambda)|^2\,dx}{\int\limits_0^b\rho^{-1+\frac{1}{2n}}\,dx}.$$

Предварительно докажем, что при $b\to\infty$

$$\int\limits_0^b\rho^{-1+\frac{1}{2n}}\cos(2\eta+2\varkappa)\,dx=O(1) \tag{79}$$

равномерно относительно значений λ, находящихся в фиксированном конечном интервале $\alpha\leqslant\lambda\leqslant\beta$. Пусть Δ_k — интервал, на котором

$$\frac{k\pi}{2}\leqslant 2\eta+2\varkappa\leqslant\frac{(k+1)\pi}{2}$$

тогда

$$\int\limits_0^b\rho^{-1+\frac{1}{2n}}\cos(2\eta+2\varkappa)\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^{m}\int\limits_{\Delta_k}\rho^{-1+\frac{1}{2n}}\cos(2\eta+2\varkappa)\,dx+\int\limits_{\Delta'_{m+1}}\rho^{-1+\frac{1}{2n}}\cos(2\eta+2\varkappa)\,dx,$$

где m — число интервалов Δ_k, укладывающихся в интервале $(0, b)$, а Δ'_{m+1} — оставшаяся часть интервала $[0, b]$. Последнее равенство можно переписать в виде

$$\int_0^b \rho^{-1+\frac{1}{2n}} \cos(2\eta + 2\varkappa)\, dx =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} (-1)^k \int_{\frac{k\pi}{2}}^{\frac{(k+1)\pi}{2}} \frac{p_0 |\cos \xi|\, d\xi}{(|p_n| + \lambda)} + \frac{1}{2} (-1)^{m+1} \int_{\frac{m\pi}{2}}^{\xi(b)} \frac{p_0 |\cos \xi|\, d\xi}{(|p_n| + \lambda)} =$$

$$= \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{m-1} \frac{(-1)^k p_0(x_k)}{(|p_n(x_k)| + \lambda)} + \frac{1}{2} (-1)^{m+1} \frac{(-1)^{m+1} p_0(x_{m+1})}{(|p_n(x_{m+1})| + \lambda)} \sin \xi(b),$$

где $\xi(b)$ — значение функции $\xi = 2\eta + 2\varkappa$ при $x = b$, а x_k — некоторая точка интервала Δ_k. Отсюда следует соотношение (79), ибо при достаточно большом k члены последней суммы по абсолютной величине убывают и стремятся к нулю при $k \to \infty$.

Так как функция $\rho^{-1}(x)$ ограничена при достаточно больших x $(x \geqslant x_0)$, то

$$\left| \int_{x_0}^b e^{-\omega_{n+j+1} [\eta(b, \lambda) - \eta(x, \lambda)]} \rho^{-1+\frac{1}{2n}}\, dx \right| \leqslant$$

$$\leqslant c \int_{\eta(x_0)}^{\eta(b)} \exp\{-\Re(\omega_{n+j+1}) [\eta(b, \lambda) - \eta]\}\, d\eta =$$

$$= c' [1 - \exp\{-\Re(\omega_{n+j+1}) [\eta(b, \lambda) - \eta(x_0, \lambda)]\}] = o(1) \text{ при } b \to +\infty.$$

Эти оценки и формула (78) дают

$$\frac{\int_0^b |\tilde{y}(x, \lambda)|^2\, dx}{\int_0^b \rho^{-1+\frac{1}{2n}}\, dx} = \frac{4 |\varphi_n|^2 \int_0^b \rho^{-1+\frac{1}{2n}} \sin^2(\eta + \varkappa)\, dx}{\int_0^b \rho^{-1+\frac{1}{2n}}\, dx} + o(1) =$$

$$= \frac{1}{\pi} \frac{\int_0^b \rho^{-1+\frac{1}{2n}} [1 - \cos(2\eta + 2\varkappa)]\, dx}{\int_0^b \rho^{-1+\frac{1}{2n}}\, dx} + o(1),$$

т. е.

$$\frac{\int\limits_0^b |\tilde{y}(x, \lambda)|^2 dx}{\int\limits_0^b \rho^{-1+\frac{1}{2n}} dx} = \frac{1}{\pi} + o(1), \tag{80}$$

ибо интеграл $\int\limits_0^\infty \rho^{-1+\frac{1}{2n}} dx$, так же как и интеграл $\int\limits_0^\infty |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}} dx$, расходится.

Все эти оценки равномерны относительно собственных значений $\lambda = \lambda_k$, расположенных в любом конечном интервале, не содержащем нулей функции $\Psi_{n+1}(\lambda)$.

Пусть теперь $f(x)$ — функция, имеющая непрерывные квазипроизводные до $2n$-го порядка включительно и равная нулю вне некоторого конечного интервала $[0, a]$, и пусть $\alpha \leqslant \lambda \leqslant \beta$ — конечный интервал, не содержащий нулей функции $\Psi_{n+1}(\lambda)$. Положим

$$I(\alpha, \beta, b) = \sum_{\alpha \leqslant \lambda_k \leqslant \beta} \left[\int\limits_0^b |\tilde{y}(x, \lambda_k)|^2 dx\right]^{-1} \left|\int\limits_0^a f(x)\tilde{y}(x, \lambda_k)\, dx\right|^2. \tag{81}$$

Из асимптотических формул (76), (77) и (80) заключаем, что при $b \to +\infty$

$$I(\alpha, \beta, b) = \frac{1}{n} \sum_{\alpha \leqslant \lambda_k \leqslant \beta} \left|\int\limits_0^a f(x)\, y(x, \lambda_k)\, dx\right|^2 (\lambda_{k+1} - \lambda_k) + o(1)$$

и потому

$$\lim_{b \to +\infty} I(\alpha, \beta, b) = \frac{1}{n} \int\limits_\alpha^\beta |F(\lambda)|^2 d\lambda, \tag{82}$$

где

$$F(\lambda) = \int\limits_0^a f(x)\, y(x, \lambda)\, dx. \tag{83}$$

Пусть $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ — все собственные значения оператора L_u, каждое из которых повторяется столько раз, какова его кратность, а $y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots$ — соответствующие ортонормированные собственные функции.

Повторяя по существу те же рассуждения, что и в n° 2, в), мы приходим к следующему равенству, справедливому для любой функции $f(x) \in L^2(0, \infty)$:

$$\int_0^\infty |f(x)|^2 dx = \frac{1}{n} \int_{-\infty}^\infty |F(\lambda)|^2 d\lambda + \sum_{k=1}^\infty |c_k|^2, \tag{84}$$

где

$$c_k = \int_0^a f(x) y_k(x) dx. \tag{85}$$

Формула (84) означает, что спектральная функция распределения $\sigma(\lambda)$ оператора L_u непрерывна и возрастает во всех точках λ-оси, отличных от собственных значений оператора L_u; тем самым теорема 8 доказана. Одновременно получено равенство Парсеваля для оператора L_u в рассматриваемом случае. Кроме того, из доказательства теоремы вытекает, что *точками дискретного спектра могут быть лишь нули функции* $\Psi_{n+1}(\lambda)$.

В случае оператора L_0 второго порядка теорему 8 можно усилить; именно имеет место

Теорема 9. *Пусть выполнены условия*:

1) $q(x) \to -\infty$ *при* $x \to +\infty$;

2) q', q'' *не меняют знак в интервале* $[x_0, +\infty)$ *при достаточно большом* x_0;

3) *при* $x \to +\infty$

$$q' = O(q^\alpha), \quad 0 < \alpha < \frac{3}{2};$$

4) *функция* $\frac{p'}{p}$ *суммируема в интервале* $[x_0, +\infty)$ *при достаточно большом* x_0;

5) $\lim\limits_{x \to +\infty} p(x) = 1$;

6) *интеграл*

$$\int^\infty |q(x)|^{-\frac{1}{2}} dx$$

расходится.

Тогда спектр всякого самосопряженного расширения L_θ *оператора* L_0, *порожденного дифференциальным выражением*

$$l(y) = -\frac{d}{dx}\left(p\frac{dy}{dx}\right) + qy,$$

непрерывен на всей оси.

Доказательство. Согласно теореме 8 достаточно доказать, что оператор L_θ не имеет дискретного спектра. Для этого в свою очередь достаточно установить, что функция $\Psi_{n+1}(\lambda)$ (в данном случае функция $\Psi_2(\lambda)$) не обращается в нуль ни при каком вещественном значении λ. Но если

$$y(x, \lambda) = \Psi_1(\lambda) y_1(x, \lambda) + \Psi_2(\lambda) y_2(x, \lambda),$$

то из краевого условия

$$y^{[1]}(0, \lambda) - \theta y(0, \lambda) = 0,$$

определяющего оператор L_θ, мы заключаем, что можно положить

$$\Psi_1(\lambda) = y_2^{[1]}(0, \lambda) - \theta y_2(0, \lambda),$$
$$\Psi_2(\lambda) = -\left[y_1^{[1]}(0, \lambda) - \theta y_1(0, \lambda)\right].$$

Так как при вещественном λ $y_2(x, \lambda) = \overline{y_1(x, \lambda)}$, то

$$\Psi_1(\lambda) = -\overline{\Psi_2(\lambda)}. \tag{86}$$

С другой стороны, функции $\Psi_1(\lambda)$ и $\Psi_2(\lambda)$ не могут одновременно обращаться в нуль, ибо из равенств

$$\Psi_1(\lambda) = y_2^{[1]}(0, \lambda) - \theta y_2(0, \lambda) = 0,$$
$$\Psi_2(\lambda) = -\left[y_1^{[1]}(0, \lambda) - \theta y_1(0, \lambda)\right] = 0$$

следует, что равен нулю определитель Вронского

$$W = y_1(0, \lambda)\, y_2^{[1]}(0, \lambda) - y_2(0, \lambda)\, y_1^{[1]}(0, \lambda).$$

Докажем, что это невозможно. Из асимптотических формул (68) при $n = 1$

$$y_1 = \rho^{-\frac{1}{4}} e^{i\eta}[1 + o(1)], \quad y_2 = \rho^{-\frac{1}{4}} e^{-i\eta}[1 + o(1)],$$
$$y_1' = i\rho^{\frac{1}{4}} e^{i\eta}[1 + o(1)], \quad y_2' = -i\rho^{\frac{1}{4}} e^{-i\eta}[1 + o(1)]$$

мы заключаем, что

$$W = -2i[1 + o(1)];$$

так как W от x не зависит, то $o(1) = 0$ и

$$W = -2i \neq 0.$$

Отсюда и из соотношения (86) вытекает, что каждая из функций $\Psi_1(\lambda)$, $\Psi_2(\lambda)$ отлична от нуля для всех вещественных значений λ.

Теорема 10. *Пусть функции $p_0, p_1, \ldots, p_n$ удовлетворяют условиям* 1) —5) *теоремы* 8 *и пусть интеграл*

$$\int^{\infty} |p_n|^{-1+\frac{1}{2n}}\, dx \tag{87}$$

сходится. Тогда спектр всякого самосопряженного расширения L_u оператора L_0 дискретен, а резольвента R_λ оператора L_u во всех точках регулярности λ есть ядро Гильберта — Шмидта.

Доказательство. Согласно теореме 4 п° 4 § 23 в рассматриваемом случае индекс дефекта оператора L_0 есть $(n+1, n+1)$. Следовательно, всякое самосопряженное расширение L_u оператора L_0 определяется краевыми условиями вида

$$[y, w_k]_0^\infty = 0, \qquad k = 1, 2, \ldots, n+1, \tag{88}$$

где $w_1, w_2, \ldots, w_{n+1}$ — функции из области определения $\mathfrak{D}$ оператора L_0, такие, что

$$[w_i, \omega_k]_0^\infty = 0, \qquad i, k = 1, 2, \ldots, n+1 \tag{89}$$

(см. п° 1 § 18).

С другой стороны, из сходимости интеграла (87) заключаем, что при вещественном λ решения $y_1, y_2, \ldots, y_{n+1}$ уравнения $l(y) = \lambda y$, определенные формулами (68), принадлежат $L^2(0, \infty)$. Рассуждая, как и в доказательстве теоремы 8, мы заключаем, что собственные значения оператора L_u суть нули функции

$$\Psi(\lambda) = \begin{vmatrix} [y_1, y_1]_0^\infty & \ldots & [y_1, y_{n+1}]_0^\infty \\ \cdot \; \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot & \cdot \; \cdot \; \cdot \\ [y_{n+1}, y_1]_0^\infty & \ldots & [y_{n+1}, y_{n+1}]_0^\infty \end{vmatrix}.$$

Докажем теперь, что если $\Psi(\lambda) \neq 0$, то точка λ не принадлежит спектру оператора L_u, т. е. что резольвента R_λ есть ограниченный оператор. Очевидно, это достаточно доказать для вещественного расширения L_u оператора L_0. Но в таком случае резольвента R_λ есть интегральный оператор с ядром

$$K(x, s, \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k(s)\,[h_k(x) + v_k(x)] & \text{при } x < s, \\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k(x)\,[h_k(s) + v_k(s)] & \text{при } x > s, \end{cases}$$

причем функции $h_k(x)$ принадлежат $L^2(0, \infty)$.

Докажем, что ядро $K(x, s, \lambda)$ есть ядро Гильберта—Шмидта; тем самым утверждение теоремы будет полностью доказано. Положим

$$\tilde{K}(x, s, \lambda) = \begin{cases} \sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k(s)\,h_k(x) & \text{при } x < s, \\ \sum\limits_{k=1}^{n+1} y_k(x)\,h_k(s) & \text{при } x > s, \end{cases}$$

$$K_j(x, s, \lambda) = \begin{cases} y_j(s)\,v_j(x) & \text{при } x < s, \\ y_j(x)\,v_j(s) & \text{при } x > s, \end{cases}$$

$$j = 1, 2, \ldots, n+1,$$

так что

$$K(x, s, \lambda) = \widetilde{K}(x, s, \lambda) + \sum_{j=1}^{n+1} K_j(x, s, \lambda).$$

Так как $\widetilde{K}(x, s, \lambda)$ есть ядро Гильберта — Шмидта, то достаточно установить, что каждое из ядер $K_j(x, s, \lambda)$, $j = 1, 2, \ldots$ $\ldots, n+1$, есть ядро Гильберта — Шмидта.

Будем по-прежнему считать n нечетным; случай четного n рассматривается аналогично.

Из асимптотических формул (68) и уравнений (21) заключаем, что

$$y_j = |p_n|^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}} e^{\omega_j \eta}[1 + o(1)], \quad v_j = c_j |p_n|^{-\frac{1}{2}+\frac{1}{4n}} e^{-\omega_j \eta}[1 + o(1)],$$
$$j = 1, 2, \ldots, n+1,$$

где c_j — некоторые постоянные, а $\Re(\omega_j) \leqslant 0$ Поэтому

$$\int_0^\infty \int_0^\infty |K_j(x, s, \lambda)|^2 \, dx\, ds =$$
$$= \int_0^\infty \int_0^x |y_j(x) v_j(s)|^2 \, dx\, ds + \int_0^\infty \int_x^\infty |v_j(x) y_j(s)|^2 \, dx\, ds \leqslant$$
$$\leqslant A \left\{ \int_0^\infty |p_n(x)|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \int_0^x |p_n(s)|^{-1+\frac{1}{2n}} \exp\{2\Re(\omega_j)[\eta(x) - \eta(s)]\} ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty |p_n(x)|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \int_x^\infty |p_n(s)|^{-1+\frac{1}{2n}} \exp\{2\Re(\omega_j)[\eta(s) - \eta(x)]\} ds \right\} \leqslant$$
$$\leqslant A \left\{ \int_0^\infty |p_n(x)|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \int_0^x |p_n(s)|^{-1+\frac{1}{2n}} ds + \right.$$
$$\left. + \int_0^\infty |p_n(x)|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \int_x^\infty |p_n(s)|^{-1+\frac{1}{2n}} ds \right\} =$$
$$= A \left(\int_0^\infty |p_n(x)|^{-1+\frac{1}{2n}} dx \right)^2 < +\infty,$$

ибо последний интеграл по условию сходится.

Теоремы 5, 6, 8 и первая часть теоремы 10 доказаны И М Рапопортом (см Рапопорт [3]), при $p(x) = 1$ теорема 9 имеется у Титчмарша (см Титчмарш [1]), а также у Б. М Левитана (см Левитан [2]) В приведенной здесь общей формулировке эти теоремы, а также теорема 7 опубликованы впервые в первом издании этой книги.

5. Критерий дискретности спектра дифференциального оператора второго порядка. Спектр оператора A называется *чисто дискретным*, если он состоит из счетного множества собственных значений с единственной предельной точкой на бесконечности.

Целью этого пункта является получение условий, необходимых и достаточных для того, чтобы спектр оператора L второго порядка, определенного дифференциальным выражением

$$l(y) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\,y, \qquad -\infty < x < \infty, \tag{90}$$

был чисто дискретен; при этом предполагается, что функция $q(x)$ ограничена снизу.

Упомянутые условия получаются из следующей простой теоремы Реллиха (см. Реллих [2]).

Теорема 11. *Пусть A — самосопряженный оператор в $\mathfrak{H}$, удовлетворяющий условию*

$$(A\varphi,\ \varphi) \geqslant (\varphi,\ \varphi) \tag{91}$$

для всех элементов $\varphi \in \mathfrak{D}_A$. Спектр оператора A чисто дискретен тогда и только тогда, когда множество всех векторов φ из $\mathfrak{D}_A$, удовлетворяющих условию

$$(A\varphi,\ \varphi) \leqslant 1, \tag{92}$$

компактно.

Доказательство. Из условия (91) вытекает, что оператор $B = A^{-1}$ определен во всем пространстве $\mathfrak{H}$ и ограничен

$$|B\psi| \leqslant |\psi|$$

для всех $\psi \in \mathfrak{H}$. Обозначим через $\mathfrak{C}$ множество всех векторов $\varphi \in \mathfrak{D}_A$, удовлетворяющих условию (92). Полагая *) $h = A^{\frac{1}{2}}\varphi$, мы можем переписать это неравенство в виде

$$(h,\ h) \leqslant 1. \tag{93}$$

Следовательно, оператор $A^{\frac{1}{2}}$ отображает множество $\mathfrak{C}$ на некоторое подмножество $\mathfrak{F}$ единичного шара $\mathfrak{K}$. Множество всех

---

*) Если A — положительно определенный оператор и $A = \int_0^\infty \lambda\, dP_\lambda$ — его спектральное представление, то $\sqrt{A}$ обозначает оператор, определенный формулой $\sqrt{A} = \int_0^\infty \sqrt{\lambda}\, dP_\lambda$. Подробнее см., например, в книге Ахиезер, Глазман [1].

векторов λh, $h \in \mathfrak{F}$, плотно в $\mathfrak{H}$. Действительно, если вектор g ортогонален ко всем векторам λh, $h \in \mathfrak{F}$, то

$$0 = (g, \lambda h) = \left(g, \lambda A^{\frac{1}{2}} \varphi\right) = \left(A^{\frac{1}{2}} g, \lambda \varphi\right).$$

Так как множество всех векторов $\lambda\varphi$, $\varphi \in \mathfrak{E}$ совпадает с $\mathfrak{D}_A$ и потому плотно в $\mathfrak{H}$, то $A^{\frac{1}{2}} g = 0$, а значит $g = 0$. Отсюда следует, что множество $\mathfrak{F}$ плотно в единичном шаре $\mathfrak{K}$, и потому множества $B^{\frac{1}{2}}\mathfrak{F}$ и $B^{\frac{1}{2}}\mathfrak{K}$ компактны или не компактны одновременно.

Итак, если $\mathfrak{E}$ компактно, то $B^{\frac{1}{2}}\mathfrak{K}$ компактно, т. е. оператор $B^{\frac{1}{2}}$ переводит единичный шар, а потому и всякое ограниченное множество в компактное множество. Это означает, что оператор $B^{\frac{1}{2}}$, а значит и оператор B, вполне непрерывен; следовательно, спектр оператора $A = B^{-1}$ чисто дискретен. Обратно, если спектр оператора A чисто дискретен, то оператор B вполне непрерывен; следовательно, множество $B^{\frac{1}{2}}\mathfrak{K}$, а потому и множество $\mathfrak{E} = B^{\frac{1}{2}}\mathfrak{F}$ компактны.

Применим эту теорему к оператору L_0, определенному дифференциальным выражением (90). Пусть функция $q(x)$ ограничена снизу; тогда, не нарушая общности, можно считать, что

$$q(x) \geqslant 1. \tag{94}$$

Найдем сначала индекс дефекта оператора L_0; согласно теореме Вейля (см. п° 6 § 23) операторы L_0^- и L_0^+, определенные тем же дифференциальным выражением на каждой из полуосей $(-\infty, 0)$, $(0, \infty)$, имеют индекс дефекта $(1, 1)$. Применяя формулу (47) п° 5 § 17, мы заключаем, что *индекс дефекта оператора* L_0 *есть* $(0, 0)$, т. е. L_0 — *самосопряженный оператор*, и мы можем положить $L_0 = L_0^* = L$. Обозначим через $\mathfrak{D}'$ совокупность всех функций из $\mathfrak{D}_L$, равных нулю вне некоторого конечного интервала (своего для каждой функции), а через L' — сужение оператора L на $\mathfrak{D}'$. Тогда замыкание оператора L' совпадает с $L_0 = L$

$$\widetilde{L'} = L_0 = L \tag{95}$$

(см. п° 4 § 17).

Если $y \in \mathfrak{D}'$, то, интегрируя по частям, находим

$$(L'y,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} (-y''\bar{y} + q\,|y|^2)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} (|y'|^2 + q\,|y|^2)\,dx. \qquad (96)$$

Отсюда в силу условия (94)

$$(L'y,\ y) \geqslant (y,\ y).$$

Очевидно, это неравенство сохраняется при переходе к замыканию L оператора L', так что

$$(Ly,\ y) \geqslant (y,\ y). \qquad (97)$$

Если y — произвольная функция из $\mathfrak{D}_L$, то в силу (95) существует последовательность $y_n \in \mathfrak{D}'$, такая, что в смысле нормы в $L^2(-\infty,\ \infty)$

$$y_n \to y,\ L'y_n \to Ly \qquad \text{при } n \to \infty.$$

Соотношение (96) будет тогда справедливо при $y = y_n$; переходя к пределу, получим соотношение

$$(Ly,\ y) = \int_{-\infty}^{\infty} (|y'|^2 + q\,|y|^2)\,dx. \qquad (98)$$

Применение теоремы 11 приводит к следующему результату:

Теорема 12. *Если $q(x) \geqslant 1$, то спектр оператора L чисто дискретен тогда и только тогда, когда множество $\mathfrak{S}$ всех функций $y(x)$ из $\mathfrak{H}$, абсолютно непрерывных в каждом конечном интервале и удовлетворяющих условию*

$$\int_{-\infty}^{\infty} (|y'|^2 + q\,|y|^2)\,dx \leqslant 1, \qquad (99)$$

компактно.

Чтобы получить отсюда критерий дискретности спектра в терминах функции $q(x)$, докажем сначала следующие леммы:

Лемма 1. *Множество $\mathfrak{S}_a$ функций $y(x)$, равных нулю вне конечного интервала $[-a,\ a]$ и удовлетворяющих при фиксированном c неравенству*

$$\int_{-a}^{a} (|y'|^2 + |y|^2)\,dx \leqslant c^2, \qquad (100)$$

компактно в смысле нормы в $L^2(-a,\ a)$.

Доказательство. Функции

$$\varphi_n(x) = \frac{1}{2a} e^{\frac{in\pi x}{a}},\ n = 0,\ \pm 1,\ \pm 2,\ \pm 3,\ \ldots,$$

образуют полную ортонормальную систему в $L^2(-a, a)$. Пусть c_n — коэффициент Фурье функции $y(x)$ относительно $\varphi_n(x)$; тогда неравенство (100) эквивалентно неравенству *)

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \left(\frac{\pi^2 n^2}{a^2}+1\right) \leqslant c^2. \tag{101}$$

Отсюда

$$\sum_{n^2>k^2} |c_n|^2 \leqslant \frac{c^2 a^2}{\pi^2 k^2}. \tag{102}$$

Обозначим через $\mathfrak{M}_k$ конечномерное подпространство, натянутое на функции $\varphi_{-k}, \varphi_{-k+1}, \ldots, \varphi_k$; через $Q_{k,c}$ — шар радиуса c в $\mathfrak{M}_k$ и положим

$$\varepsilon_k = \frac{ca}{\pi k}.$$

Неравенство (102) означает, что Q_{kc} есть ε_k-сеть для множества $\mathfrak{S}$: так как Q_{kc} компактно (см. n° 1 § 13), а $\varepsilon_k \to 0$ при $k \to \infty$, то и $\mathfrak{S}$ компактно на основании следствия из теоремы 1 n° 2 § 13.

Лемма 2. *Пусть* Σ — *множество функций* $y(x)$ *пространства* $L^2(-\infty, \infty)$, *удовлетворяющих условиям:*

1) $$\int_{-\infty}^{\infty} (|y'|^2 + |y|^2)\,dx \leqslant 1$$

для всех $y \in \Sigma$;

2) *для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует* $a > 1$, *такое, что*

$$\int_{-\infty}^{-a} |y|^2 dx + \int_{a}^{\infty} |y|^2 dx < \varepsilon^2$$

для всех функций $y \in \Sigma$.

Тогда множество Σ *компактно в смысле нормы в* $L^2(-\infty, \infty)$.

---

*) Для функций $y(x)$, достаточно гладких, разложение $y = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi_n$ можно дифференцировать почленно, и потому для таких функций имеет место равенство

$$\int_{-a}^{a} (|y'|^2 + |y|^2)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} |c_n|^2 \left(\frac{\pi^2 n^2}{a^2}+1\right).$$

Рассматривая его левую и правую части как квадрат нормы для функций $y(x)$ и последовательностей $\{c_n\}$ соответственно, мы можем продолжить полученное изометрическое соответствие между $y(x)$ и $\{c_n\}$ на совокупность всех функций $y(x)$, удовлетворяющих условию (100).

Доказательство. Рассмотрим функцию

$$\omega_a(-x)=\omega_a(x)=\begin{cases} 1 & \text{при } 0\leqslant x\leqslant a-1, \\ a-x-\frac{1}{2\pi}\sin 2\pi(a-x) & \text{при } a-1\leqslant x\leqslant a, \\ 0 & \text{при } x\geqslant a. \end{cases}$$

Эта функция непрерывна и имеет непрерывные производные до второго порядка включительно, причем

$$0\leqslant \omega_a(x)\leqslant 1.$$

Умножив каждую функцию $y\in\Sigma$ на $\omega_a(x)$, мы получим семейство Σ_a функций $z=\omega_a y$, содержащееся в $\mathfrak{S}_a$ при $c=3$. Действительно,

$$|z'|=|\omega_a y'+\omega_a' y|\leqslant |y'|+2|y|,$$
$$|z|\leqslant|y|$$

и потому

$$\int_{-\infty}^{\infty}(|z'|^2+|z|^2)\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{\infty}(2|y'|^2+9|y|^2)\,dx\leqslant$$
$$\leqslant 9\int_{-\infty}^{\infty}(|y'|^2+|y|^2)\,dx\leqslant 9.$$

Следовательно, Σ_a компактно как часть компактного множества $\mathfrak{S}_a$. Докажем, что при любом $\varepsilon>0$ Σ_a образует ε-сеть для Σ, если a достаточно велико; в силу следствия из теоремы 1 n° 2 § 13 лемма 2 будет доказана. Но это непосредственно вытекает из условия 2), ибо

$$\int_{-\infty}^{\infty}|y-\omega_a y|^2\,dx\leqslant\int_{-\infty}^{-a+1}|y|^2\,dx+\int_{a-1}^{\infty}|y|^2\,dx<\varepsilon^2.$$

Лемма 3. *Пусть $q(x)\geqslant 1$. Семейство $\mathfrak{S}$ функций $y(x)$, определенное неравенством (99), некомпактно тогда и только тогда, когда существуют последовательность $\{\mathscr{D}_n\}$ непересекающихся отрезков одинаковой длины D и постоянная C, такие, что*

$$\int_{\mathscr{D}_n} q(x)\,dx<C,\qquad n=1,\,2,\,3,\,\ldots \tag{103}$$

Доказательство. Пусть выполнено условие (103); докажем, что $\mathfrak{S}$ некомпактно. Положим

$$y_n(x)=\begin{cases}\alpha\sin\frac{\pi}{D}(x-a_n) & \text{при } x\in\mathscr{D}_n, \\ 0 & \text{при } x\,\overline{\in}\,\mathscr{D}_n,\end{cases} \tag{104}$$

где a_n — левый конец отрезка $\mathscr{D}_n$, а α — некоторая постоянная. Функции $y_n(x)$ попарно взаимно ортогональны и

$$|y_n(x)| \leqslant \alpha, \tag{105}$$

$$\int\limits_{\mathscr{D}_n} |y_n'|^2\,dx = \frac{\pi^2}{2D}\alpha^2. \tag{106}$$

Поэтому, учитывая условие (103), имеем

$$\int\limits_{\mathscr{D}_n} (|y_n'|^2 + q\,|y_n|^2)\,dx \leqslant \alpha^2\left(\frac{\pi^2}{2D} + C\right),$$

так что при

$$\alpha = \left(\frac{\pi^2}{2D} + C\right)^{-\frac{1}{2}}$$

функции $y_n(x)$ принадлежат множеству $\mathfrak{S}$. С другой стороны, функции $y_n(x)$ образуют некомпактное множество, ибо в силу (105) их нормы одинаковы и они взаимно ортогональны; поэтому множество $\mathfrak{S}$ также некомпактно.

Пусть, обратно, множество $\mathfrak{S}$ некомпактно; докажем, что существует последовательность отрезков $\mathscr{D}_n$, удовлетворяющая условиям леммы. На основании леммы 2 существует положительное число ε, такое, что для любого $N > 1$ найдется функция y семейства $\mathfrak{S}$, удовлетворяющая неравенству

$$\int\limits_{-\infty}^{-N} |y|^2\,dx + \int\limits_{N}^{\infty} |y|^2\,dx > \varepsilon. \tag{107}$$

При этом $\varepsilon < 1$, ибо из неравенства (99) и условия $q(x) \geqslant 1$ вытекает, что

$$\int\limits_{-\infty}^{\infty} |y|^2\,dx \leqslant 1.$$

Разобьем полупрямые $(-\infty, -N)$, $(N, +\infty)$ на отрезки $\mathscr{D}$ длины D. Тогда по крайней мере для одного из этих отрезков

$$\int\limits_{\mathscr{D}} (|y'|^2 + q\,|y|^2)\,dx \leqslant \frac{1}{\varepsilon}\int\limits_{\mathscr{D}} |y|^2\,dx. \tag{108}$$

Действительно, если бы для всех этих отрезков выполнялось противоположное неравенство, то, сложив все эти неравенства и учитывая неравенство (99), мы получили бы

$$1 > \frac{1}{\varepsilon}\left(\int_{-\infty}^{-N} |y|^2\,dx + \int_{N}^{\infty} |y|^2\,dx\right),$$

а это противоречит условию (107).

Итак, для любого D найдется отрезок $\mathscr{D}$ длины D, расположенный вне интервала $(-N, N)$, для которого выполнено неравенство (108).

Пронормируем теперь функцию y, полагая *)

$$\int_{\mathscr{D}} y^2\,dx = D; \tag{109}$$

тогда из (108) заключаем, что

$$\int_{\mathscr{D}} (|y'|^2 + q|y|^2)\,dx \leqslant \frac{D}{\varepsilon}. \tag{110}$$

Равенство (109) показывает, что существует число $\xi \in \mathscr{D}$, для которого

$$|y(\xi)| = 1.$$

Оценим теперь снизу функцию $|y(x)|$ на отрезке $\mathscr{D}$. Применяя к правой части тождества

$$y(x) - y(\xi) = \int_{\xi}^{x} y'(t)\,dt$$

неравенство Буняковского, имеем

$$|y(x) - y(\xi)|^2 \leqslant D\int_{\xi}^{x} |y'|^2\,dt \leqslant D\int_{\mathscr{D}} (|y'|^2 + q|y|^2)\,dx \leqslant \frac{D^2}{\varepsilon}.$$

Следовательно,

$$|y(x) - y(\xi)| \leqslant \sqrt{\frac{D^2}{\varepsilon}}.$$

До сих пор D было произвольно; выберем его теперь, полагая $D^2 = \frac{1}{4}\varepsilon$. Тогда

$$|y(x) - y(\xi)| \leqslant \frac{1}{2},$$

*) То есть перейдем от y к новой функции λy, которую мы снова обозначим через y и для которой выполнено (109); очевидно, неравенство (108) при этом не нарушится.

и поэтому, учитывая равенство $|y(\xi)| = 1$, мы заключаем, что

$$|y(x)| \geqslant \frac{1}{2}$$

всюду на отрезке $\mathscr{D}$.

Из неравенства (110) теперь вытекает, что

$$\frac{1}{4}\int_{\mathscr{D}} q\,dx \leqslant \frac{1}{2\sqrt{\varepsilon}},$$

т. е.

$$\int_{\mathscr{D}} q\,dx \leqslant \frac{2}{\sqrt{\varepsilon}}.$$

Так как N произвольно, а D зависит только от ε, то можно найти счетное множество непересекающихся отрезков с этим свойством, и лемма 3 доказана.

Комбинируя теперь эту лемму с теоремой 12, мы приходим к следующему критерию дискретности спектра *).

Теорема 13 (А. М. Молчанов [1]). *Пусть функция $q(x)$ ограничена снизу. Спектр оператора L, определенного дифференциальным выражением*

$$l(y) = -\frac{d^2y}{dx^2} + q(x)\,y, \quad -\infty < x < \infty,$$

чисто дискретен тогда и только тогда, когда для любого фиксированного числа a

$$\lim_{x\to\infty}\int_x^{x+a} q(x)\,dx = \infty.$$

В предыдущей теореме ограниченность снизу функции $q(x)$ гарантирует самосопряженность оператора L. Поэтому возникает следующий вопрос. Нельзя ли в этой теореме заменить условие ограниченности функции $q(x)$ более слабым условием, при котором оператор L остается самосопряженным.

В связи с этим вопросом приведем без доказательства следующую теорему Р. С. Исмагилова (см. Исмагилов [1]) *Пусть $\lambda(\Delta)$ — наименьшее собственное значение оператора, порожденного в (конечном) интервале Δ дифференциальным выражением $-y'' + q(x)\,y$ и нулевыми граничными условиями на концах Δ. Пусть L — оператор, порожденный этим же дифференциальным выражением в пространстве $L^2(-\infty, \infty)$. Для полуограниченности и дискретности спектра оператора L необходимо и достаточно, чтобы число $\lambda(\Delta)$ стремилось к бесконечности, когда интервал Δ уходит в бесконечность, сохраняя свою длину. Для одной лишь полуограниченности оператора L необходимым и достаточным является условие* $\inf \lambda(\Delta) > -\infty$, *где нижняя грань распространяется на всевозможные интервалы Δ одинаковой длины.*

---

*) По поводу других признаков дискретности спектра см. работы: И. С. Кац и М. Г. Крейн [1] и Бирман [1].

Из-за ограниченности объема в настоящую книгу не вошло исследование спектра в случае периодических коэффициентов. С таким исследованием читатель может ознакомиться, например, по главе XXI книги Титчмарш [1] (см также в этой книге приложение VIII). Здесь возникает чисто непрерывный спектр, состоящий из бесконечного числа интервалов, разделенных пропусками (лакунами) В случае непериодического возмущения коэффициентов, достаточно малого при $x \to \pm\infty$, в каждой из лакун может появиться конечное или бесконечное количество собственных значений с предельными точками только на концах лакун По этому поводу см Глазман [4] и Рофе-Бекетов [3,4].

6. Примеры из квантовой механики.

а) Основные положения квантовой механики*). Обычные представления классической механики неприменимы к изучению таких объектов, как электроны, позитроны, нейтроны, или более сложных, как, например, атомы.

Такие объекты называются *квантовомеханическими системами*. Пусть S — квантовомеханическая система и пусть положение системы S задается n координатами $q_1, q_2, \ldots, q_n$; их совокупность мы будем представлять себе как точку q n-мерного пространства R_n. Для краткости точку q мы будем называть *координатой* системы S. Через dq мы обозначим элемент объема в пространстве R_n.

Основной принцип квантовой механики состоит в том, что каждое состояние системы S задается некоторой, вообще комплексной функцией $\Psi(q)$ точки q, которая называется *волновой функцией* системы S.

Состояние, которое задается функцией Ψ, мы будем кратко называть состоянием Ψ.

Физический смысл волновой функции состоит в следующем: $|\Psi(q)|^2 dq$ *есть вероятность того, что в рассматриваемом состоянии Ψ координата q системы S находится в элементе dq вокруг точки q*. Другими словами, *квадрат модуля $|\Psi(q)|^2$ волновой функции есть плотность вероятности координаты q системы S в состоянии Ψ*. Что касается аргумента функции Ψ, то он непосредственного физического смысла не имеет.

Наиболее простой вид сформулированный выше принцип принимает тогда, когда система состоит из одной частицы, например электрона. В этом случае $|\Psi(q)|^2 dq$ есть вероятность того, что в состоянии Ψ электрон находится в элементе dq вокруг точки q.

---

*) Излагаемые ниже сведения из квантовой механики не претендуют на полноту. Мы не имеем также возможности останавливаться здесь на экспериментальной стороне рассматриваемых вопросов Подробное и полное изложение квантовой механики читатель найдет в специальных руководствах. (См., например, Блохинцев [1, 2], Ландау и Лившиц [1], Макки [1] или Нейман [1])

Таким образом, квантовомеханическое описание состояния системы является *вероятностным* (или, как еще говорят, *статистическим*) *описанием.*

Так как $|\Psi(q)|^2$ есть плотность вероятности, то должно быть

$$\int |\Psi(q)|^2 dq = 1, \tag{111}$$

где интегрирование ведется по всему пространству R_n. Обозначая через $\mathfrak{H}$ гильбертово пространство всех функций $\Psi(q)$ с интегрируемым квадратом, мы можем сказать, что волновые функции находятся на единичной сфере пространства $\mathfrak{H}$.

Квантовая механика применяет статистический способ описания не только к координатам q_i системы, но и ко всем другим физическим величинам. Это достигается следующим образом: всякая физическая величина задается некоторым самосопряженным оператором в определенном выше пространстве $\mathfrak{H}$. Мы не будем останавливаться на том, как строятся эти операторы для конкретных физических величин; отметим только, что оператором, отвечающим координате q_i системы S, является оператор умножения на q_i. Если, например, некоторая физическая величина a задается при помощи оператора A, то физический смысл этого обстоятельства состоит в следующем. Пусть система S находится в некотором состоянии Ψ и пусть $\Psi \in \mathfrak{D}_A$; тогда $(A\Psi, \Psi)$ есть математическое ожидание величины a в этом состоянии. Обозначим через P_λ спектральную функцию оператора A; тогда $(P_\Delta\Psi, \Psi)$ есть вероятность того, что в состоянии Ψ значение величины a находится в интервале Δ. Другими словами, $(P_\lambda\Psi, \Psi)$ *есть функция распределения величины* a в состоянии Ψ. Основная спектральная теорема

$$(A\Psi, \Psi) = \int_{-\infty}^{\infty} \lambda\, d(P_\lambda \Psi, \Psi) \tag{112}$$

интерпретируется здесь как известное интегральное представление математического ожидания при помощи функции распределения. Отсюда вытекает, что возможными значениями величины a являются точки роста спектральной функции P_λ, т. е. точки спектра оператора A.

Если, в частности, Ψ есть собственная функция оператора A, отвечающая собственному значению λ_0, то, очевидно,

$$(P_\lambda\Psi, \Psi) = \begin{cases} 0 & \text{при } \lambda < \lambda_0, \\ 1 & \text{при } \lambda \geqslant \lambda_0. \end{cases}$$

Это означает, что в состоянии Ψ величина a с вероятностью, равной единице, принимает значение, равное λ_0, т. е. что в состоянии Ψ значение величины a есть в точности λ_0. Пусть, например, спектр оператора A дискретен и $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$ — полная ортонормальная система его собственных функций, а $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ — соответствующие собственные значения; тогда возможные значения величины a образуют дискретную систему $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \ldots$ Величина a принимает эти значения лишь в состояниях $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$ соответственно. Во всяком другом состоянии можно задать только функцию распределения величины a. Если Ψ — произвольное состояние системы, то, разлагая Ψ по ортонормальной системе $\Psi_1, \Psi_2, \Psi_3, \ldots$, имеем

$$\Psi = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \Psi_n, \quad c_n = (\Psi, \Psi_n).$$

При этом (112) примет вид

$$(A\Psi, \Psi) = \sum_{n=1}^{\infty} \lambda_n |c_n|^2;$$

следовательно, $|c_n|^2$ есть вероятность того, что в состоянии Ψ величина a равна λ_n *).

Одной из важнейших величин является энергия системы; соответствующий оператор называется *оператором энергии* и обозначается обычно через H. Состояния системы, определенные собственными функциями оператора энергии, называются *стационарными состояниями системы*, а соответствующие собственные значения — соответствующими *уровнями энергии.*

С течением времени состояние квантовомеханической системы может изменяться, в соответствии с чем волновая функция есть, вообще говоря, также функция времени t:

$$\Psi = \Psi(q, t).$$

Оказывается, что закон ее изменения с течением времени (т. е. закон изменения состояния системы) задается уравнением

$$ih \frac{\partial \Psi}{\partial t} = H\Psi, \tag{113}$$

где H — оператор энергии **), а h — так называемая *постоянная Планка,* имеющая размерность действия и равная

*) Здесь предполагается, что λ_n — простое собственное значение оператора A; если же λ_n — кратное собственное значение, то упомянутая вероятность равна сумме всех $|c_k|^2$, для которых соответствующие λ_k равны λ_n.

**) Разумеется, под $H\Psi$ здесь следует понимать результат применения оператора H к функции Ψ, рассматриваемой как функция от q.

$1{,}054\cdot 10^{-27}$ *эрг·сек*. Отсюда, в частности, вытекает, что стационарные состояния системы, отвечающие точкам E_k дискретного спектра оператора H, определяются при помощи волновых функций

$$\Psi_k(q,\ t)=e^{-\frac{i}{h}E_k t}\psi_k(q),\quad k=1,\ 2,\ 3,\ \ldots,$$

где ψ_k — соответствующие собственные функции оператора H. Во многих случаях оператор энергии H есть дифференциальный оператор, обыкновенный или в частных производных. Поэтому решение основных задач квантовой механики связано с исследованием спектра оператора H и с разложением данной функции по собственным функциям этого оператора.

Наиболее просто выглядит уравнение (113) в том случае, когда данная система S состоит из одной частицы (например, электрона). Волновая функция Ψ есть тогда функция координат x_1, x_2, x_3 частицы и времени t. Оказывается, что при этом уравнение (113) принимает вид

$$ih\frac{\partial\Psi}{\partial t}=-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\Psi+U(x_1,\ x_2,\ x_3)\Psi, \tag{114}$$

где μ — масса частицы, $U(x_1,\ x_2,\ x_3)$ — ее потенциальная энергия во внешнем поле, а $\Delta\Psi$ обозначает результат применения к Ψ оператора Лапласа. Уравнение (114) называется *уравнением Шредингера* (с временем).

Таким образом, в случае одной частицы оператор H определяется дифференциальным выражением $l(\psi)=-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi+U\psi$, и соответствующее уравнение для определения собственных функций имеет вид

$$-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi+U\psi=E\psi. \tag{115}$$

Это уравнение также называется *уравнением Шредингера* (без времени).

Мы ограничимся этим кратким изложением общих положений квантовой механики и перейдем теперь к рассмотрению конкретных примеров.

б) Одномерное уравнение Шредингера. Рассмотрим тот частный случай, когда потенциальная энергия U имеет вид

$$U(x_1,\ x_2,\ x_3)=U_1(x_1)+U_2(x_2)+U_3(x_3).$$

Тогда к уравнению (115) применим метод Фурье; собственные функции $\psi(x_1,\ x_2,\ x_3)$ можно искать в виде

$$\psi(x_1,\ x_2,\ x_3)=\psi_1(x_1)\psi_2(x_2)\psi_3(x_3).$$

Уравнение (115) распадается при этом на три уравнения

$$-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2\psi_i}{dx_i^2}+U_i(x_i)\psi_i=E_i\psi_i,$$

где E_i — некоторые постоянные. Так как все три уравнения имеют один и тот же вид, то можно опустить индекс i и рассмотреть уравнение

$$-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2}+U(x)\psi=E\psi. \tag{116}$$

Оно называется *одномерным уравнением Шредингера*. Очевидно, такое же уравнение получится, если частица может находиться только на фиксированной прямой, причем ее потенциальная энергия зависит лишь от координаты на этой прямой. Поэтому уравнение (116) называется еще *уравнением одномерного движения частицы*, и о частице говорят, что она *совершает одномерное движение* вдоль этой прямой.

Введем обозначение

$$\frac{2\mu}{h^2}U(x)=p(x),\qquad \frac{2\mu}{h^2}E=\lambda; \tag{117}$$

тогда уравнение (116) перепишется в виде

$$-\frac{d^2\psi}{dx^2}+p(x)\psi=\lambda\psi. \tag{118}$$

Обозначим через L оператор, порожденный дифференциальным выражением $l(\psi)=-\frac{d^2\psi}{dx^2}+p(x)\psi$ в интервале $(-\infty, \infty)$. К нему применимы все результаты n°n° 1—5. В частности, применяя к нему рассуждения n°n° 1 и 2, можно показать, что: 1) если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)=M$, то на полуоси $\lambda>M$ спектр этого оператора может быть только дискретным; 2) если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)=+\infty$, то спектр оператора L дискретен; 3) если $\lim\limits_{x\to\pm\infty} p(x)=0$, то непрерывная часть спектра оператора L заполняет всю положительную полуось, а на отрицательной полуоси может находиться только дискретная часть спектра оператора L; аналогичное предложение имеет место, если функция $p(x)$ суммируема в интервале $(-\infty, \infty)$.

Отметим следующее важное обстоятельство. Собственная функция $\psi(x)$, вообще говоря, отлична от нуля также для тех значений x, для которых $E<U(x)$. Это означает, что с вероятностью, отличной от нуля, частица может находиться в области, определенной неравенством $E<U(x)$. В классической механике это невозможно, ибо неравенство $E<U(x)$ озна-

чало бы, что кинетическая энергия отрицательна. В квантовой механике мы к этому противоречию не приходим потому, что если в рассматриваемом состоянии частица может находиться лишь вблизи некоторой точки пространства, то в этом состоянии ее кинетическая энергия не имеет значения, близкого к определенному, а статистически распределяется по всей положительной полуоси.

в) Одномерное уравнение Шредингера в случае потенциального барьера. Пусть потенциальная энергия U обращается в бесконечность при $x<0$; это означает, что частица не может находиться на отрицательной полуоси и потому $\psi=0$ при $x\leqslant 0$. Точка $x=0$ называется *потенциальным барьером*. Очевидно, мы можем ограничиться рассмотрением уравнения (118) на положительной полуоси, наложив на функцию ψ краевое условие

$$\psi(0)=0. \tag{119}$$

Другими словами, задача сводится к рассмотрению оператора L, порожденного нашим дифференциальным выражением $l(\psi)=-\psi''+p(x)\psi$ и краевым условием *) (119). Очевидно, к этому оператору применимы все предложения, относящиеся к операторам второго порядка на полуоси.

г) Одномерное уравнение Шредингера в случае потенциальной ямы. Предположим теперь, что на действительной оси имеется два потенциальных барьера, например в точках $x=0$ и $x=a$, так что потенциальная энергия бесконечна при $x<0$ и $x>a$, и частица может находиться только в интервале $(0, a)$. Такое поле называется *потенциальной ямой* (с бесконечно высокими стенками). Повторяя рассуждения пункта в), мы заключаем, что исследование этого случая связано с рассмотрением дифференциального оператора L, порожденного дифференциальным выражением $l(\psi)=-\psi''+p(x)\psi$ в интервале $(0, a)$ и краевыми условиями **)

$$\psi(0)=\psi(a)=0. \tag{120}$$

В силу регулярности оператора L его спектр дискретен и имеет единственную предельную точку на бесконечности.

Рассмотрим, например, тот случай, когда потенциальная энергия равна нулю в интервале $(0, a)$. Задача сводится тогда к нахождению решений уравнения

$$-\psi''=\lambda\psi,$$

*) При этом предполагается, что конец $x=0$ регулярен

**) При этом предполагается, что концы $x=0$ и $x=a$ регулярны.

удовлетворяющих условиям (120). Но общий интеграл этого уравнения есть

$$\psi = A\sin\left(\sqrt{\lambda}\, x + \alpha\right).$$

Условие $\psi(0)=0$ дает $\alpha=0$. Тогда условие $\psi(a)=0$ запишется в виде $A\sin\sqrt{\lambda}\, a=0$. Но $A\neq 0$, ибо собственная функция не равна тождественно нулю; поэтому $\sqrt{\lambda}\, a = n\pi$, $n=1, 2, 3, \ldots$, так что собственными значениями нашего оператора являются

$$\lambda_n = \frac{n^2\pi^2}{a^2}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots$$

Соответствующими собственными функциями будут

$$\psi_n(x) = A_n \sin\frac{n\pi x}{a}.$$

Уровни энергии E_n, отвечающие этим собственным значениям, определятся тогда из формулы (117), а именно:

$$E_n = \frac{h^2 n^2 \pi^2}{2\mu a^2}, \qquad n=1, 2, 3, \ldots$$

д) Линейный осциллятор. *Линейным осциллятором* в классической механике называется материальная точка, совершающая малые колебания вдоль прямой*) под действием силы, пропорциональной отклонению частицы от фиксированной точки прямой и направленной в сторону, противоположную отклонению. Типичным примером являются колебания материальной точки, подвешенной на пружине (если пренебречь силой тяжести).

Если обозначить через x упомянутое отклонение, то для силы f, действующей на частицу, мы получим выражение

$$f = -kx;$$

следовательно, потенциальной энергией частицы будет

$$U = \frac{kx^2}{2}. \tag{121}$$

Как известно, под действием этой силы f частица совершает гармонические колебания около точки $x=0$.

Пусть теперь задана квантовомеханическая частица, совершающая одномерное движение вдоль оси Ox. По аналогии с данным выше определением такая частица называется *линей-*

---

*) Можно дать несколько более общее определение линейного осциллятора. В действительности существенна не прямолинейность движения, требуется только, чтобы частица обладала одной степенью свободы. Нам, однако, это более общее определение не понадобится.

ным осциллятором, если ее потенциальная энергия задается той же формулой (121): $U = \frac{kx^2}{2}$.

Таким образом, для линейного осциллятора одномерное уравнение Шредингера примет вид

$$-\frac{h^2}{2\mu}\frac{d^2\psi}{dx^2} + \frac{1}{2}kx^2\psi = E\psi. \tag{122}$$

Уравнение (122) называется *уравнением линейного осциллятора*. В данном случае $U(x) = cx^2 \to +\infty$ при $x \to \pm\infty$, а потому спектр соответствующего оператора L дискретен. Впрочем, мы в этом сейчас убедимся и непосредственно, так как определим непосредственно собственные значения и собственные функции оператора L. Для этой цели сделаем в уравнении (122) подстановку

$$\xi = x\sqrt[4]{\frac{k\mu}{h^2}}, \quad \psi = e^{-\frac{1}{2}\xi^2}\chi(\xi) \tag{123}$$

и после простых выкладок приведем это уравнение к виду

$$\chi'' - 2\xi\chi' + 2n\chi = 0, \tag{124}$$

где

$$n = \frac{E}{h}\sqrt{\frac{\mu}{k}} - \frac{1}{2}. \tag{125}$$

Но, как легко проверить, при целом неотрицательном значении параметра n, уравнению (124) удовлетворяют так называемые многочлены Чебышева — Эрмита *)

$$H_n(\xi) = (-1)^n e^{\xi^2}\frac{d^n e^{-\xi^2}}{d\xi^n}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

В силу (123) соответствующие функции ψ_n будут иметь вид

$$\psi_n(x) = c_n e^{-\frac{\sqrt{k\mu}}{2h}x^2} H_n\left(x\sqrt[4]{\frac{k\mu}{h^2}}\right), \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots,$$

а уровни энергии

$$E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)h\sqrt{\frac{k}{\mu}}, \qquad n = 0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Из известного свойства полноты множества многочленов Чебышева — Эрмита можно заключить, что функции $\psi_n(x)$ образуют полную ортонормальную систему в $L^2(-\infty, +\infty)$ и потому полную систему собственных функций оператора L. Поэтому спектр оператора L дискретен и состоит из простых собственных значений.

---

*) См., например, Курант и Гильберт [1], стр. 84 и 456—458.

е) Движение в кулоновом поле. Одной из задач квантовой механики является изучение уровней энергии и стационарных состояний системы нескольких взаимодействующих друг с другом частиц. Мы ограничимся рассмотрением частного случая этой задачи, именно случая двух взаимодействующих частиц. Эту последнюю задачу можно следующим образом свести к задаче об одной частице.

Пусть μ_1, μ_2 — массы частиц, а r_1, r_2 — их радиусы-векторы; оказывается, что оператор энергии H нашей системы определяется формулой

$$H\psi = -\frac{h^2}{2\mu_1}\Delta_1\psi - \frac{h^2}{2\mu_2}\Delta_2\psi + U(r)\psi,$$

где Δ_1, Δ_2 — операторы Лапласа по координатам только первой и только второй частицы соответственно, а $U(r)$ — потенциальная энергия системы, зависящая только от расстояния r между частицами и характеризующая *взаимодействие* между частицами. Введем вместо r_1 и r_2 новые переменные R и r, полагая

$$r = r_2 - r_1, \qquad R = \frac{\mu_1 r_1 + \mu_2 r_2}{\mu_1 + \mu_2},$$

так что r — радиус-вектор второй частицы относительно первой, а R — радиус-вектор центра инерции частиц. Легко проверить, что в этих новых переменных оператор H примет вид

$$H\psi = -\frac{h^2}{2(\mu_1 + \mu_2)}\Delta_R\psi - \frac{h^2}{2\mu}\Delta_r\psi + U(r)\psi,$$

где Δ_R и Δ_r — операторы Лапласа относительно проекций векторов R и r соответственно, а $\mu = \frac{\mu_1\mu_2}{\mu_1 + \mu_2}$ — так называемая приведенная масса. Мы видим, что в новых переменных оператор H представляется в виде суммы двух операторов $H_1\psi = -\frac{h^2}{2(\mu_1 + \mu_2)}\Delta_R\psi$ и $H_2\psi = -\frac{h^2}{2\mu}\Delta_r\psi + U(r)\psi$, из которых первый есть оператор, действующий на функцию от R, а второй — на функцию от r.

Следовательно, при определении собственных функций оператора H можно применить метод Фурье и искать эти собственные функции в виде произведений $\psi = \psi_1(r)\psi_2(R)$, где ψ_1 — собственная функция оператора H_1, а ψ_2 — собственная функция оператора H_2.

Первая собственная функция описывает стационарное состояние свободной частицы *) с массой $\mu_1 + \mu_2$, помещенной в центре инерции системы (т. е. определяет закон движения

---

*) То есть частицы, не находящейся во внешнем поле.

центра инерции системы); вторая — стационарное состояние частицы с приведенной массой μ в поле с потенциалом $U(r)$ и по существу характеризует относительное движение частиц. Не останавливаясь на относительно простом вопросе о стационарных состояниях свободной частицы, мы обратимся к изучению стационарных состояний частицы в поле с потенциалом $U(r)$.

При этом мы ограничимся тем важным частным случаем, когда взаимодействие между обеими частицами характеризуется законом Кулона. Как известно, тогда функция $U(r)$ имеет вид

$$U(r) = \pm \frac{C}{r},$$

где C — некоторая положительная постоянная, а знаки $\pm$ соответствуют отталкиванию и притяжению частиц соответственно. Мы остановимся подробнее на случае притяжения и лишь вкратце укажем, как изменяются полученные результаты в случае отталкивания. Уравнение для определения собственных значений и собственных функций оператора H_2 запишется тогда в виде

$$-\frac{h^2}{2\mu}\Delta\psi - \frac{C}{r}\psi = E\psi. \tag{126}$$

Так как U зависит только от r, то здесь удобно перейти к сферическим координатам. Обозначая сферические координаты через r, θ, φ и пользуясь известным выражением для оператора Лапласа в сферических координатах, мы перепишем уравнение (126) в виде

$$-\frac{h^2}{2\mu r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial\psi}{\partial r}\right) + \frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial\psi}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2\psi}{\partial\varphi^2}\right] - \frac{C}{r}\psi = E\psi. \tag{127}$$

К этому последнему уравнению применим метод Фурье, так что собственную функцию ψ можно искать в виде произведения собственных функций Y и f, определенных уравнениями

$$\frac{1}{\sin\theta}\frac{\partial}{\partial\theta}\left(\sin\theta\frac{\partial Y}{\partial\theta}\right) + \frac{1}{\sin^2\theta}\frac{\partial^2 Y}{\partial\varphi^2} = \lambda Y, \tag{128}$$

$$-\frac{h^2}{2\mu r^2}\left[\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2\frac{\partial f}{\partial r}\right) + \lambda f\right] - \frac{C}{r} f = Ef. \tag{129}$$

Так как элемент объема в сферических координатах есть $r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$, то уравнение (128) следует рассматривать в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_Y$ функций $Y(\theta, \varphi)$ с квадратом нормы $\int\limits_0^\pi \sin\theta\, d\theta \int\limits_0^{2\pi} |Y(\theta, \varphi)|^2 d\varphi$, а уравнение (129) — в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}_f$ функций $f(r)$ с квадратом нормы

$$\int_0^\infty r^2 |f(r)|^2 \, dr.$$

Как известно из теории шаровых функций (см., например, Курант, Гильберт [1], гл. VII), собственные значения λ, определяемые уравнением (128), имеют вид $\lambda = -l(l+1)$, где l — произвольное целое неотрицательное число. Каждому такому собственному значению отвечает в точности $2l+1$ взаимно ортогональных и нормированных собственных функций

$$Y_{lm}(\theta, \varphi), \qquad m = -l, \ -l+1, \ \ldots, \ l;$$

они называются *шаровыми функциями* *).

Обратимся теперь к уравнению (129). В силу только что сказанного в нем следует положить $\lambda = -l(l+1)$. Выбрав в качестве единиц массы, длины и времени μ, $\frac{h^2}{\mu C}$ и $\frac{h^3}{\mu C^2}$ соответственно, мы приведем это уравнение к виду

$$-\frac{1}{2r^2}\frac{\partial}{\partial r}\left(r^2 \frac{\partial f}{\partial r}\right) + \frac{l(l+1)}{2r^2} f - \frac{1}{r} f = Ef. \qquad (130)$$

Пусть L — оператор, порожденный левой частью уравнения (130). Если в уравнении (130) положить $f = \frac{1}{r} u$, то для u мы получим уравнение

$$-\frac{d^2u}{dr^2} + \left[\frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r}\right] u = 2Eu,$$

в котором

$$p(r) = \frac{l(l+1)}{r^2} - \frac{2}{r} \to 0 \quad \text{при} \quad r \to \infty,$$

$$p(r) \to +\infty \qquad \text{при} \quad r \to 0.$$

На основании предыдущих результатов отсюда легко заключить, что оператор L самосопряженный и что его спектр на отрицательной полуоси может быть только дискретным, тогда как вся положительная полуось покрыта непрерывной частью спектра этого оператора. Впрочем, к этим же результатам мы придем сейчас иным путем, причем мы непосредственно определим спектр оператора L и соответствующие собственные функции.

*) К шаровым функциям можно естественным образом прийти, рассматривая неприводимые линейные представления группы вращений шара. Эти представления играют важную роль в квантовой механике. Подробнее об этом см. Гельфанд, Минлос и Шапиро [1] или Виленкин [1].

Положим в (130)

$$n = \frac{1}{\sqrt{-2E}}, \quad \rho = \frac{2r}{n}, \quad f = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} w; \tag{131}$$

при этом мы считаем $n > 0$, если $E < 0$ и $n = -\frac{i}{\sqrt{2E}}$, если $E > 0$.

Уравнение (130) преобразуется тогда к виду

$$\rho w'' + (2l + 2 - \rho) w' + (n - l - 1) w = 0. \tag{132}$$

Одним из решений этого уравнения является вырожденная гипергеометрическая функция

$$w = F(-n + l + 1,\ 2l + 2,\ \rho), \tag{133}$$

где

$$F(\alpha,\ \gamma,\ \rho) = 1 + \frac{\alpha}{\gamma} \cdot \frac{\rho}{1!} + \frac{\alpha(\alpha+1)}{\gamma(\gamma+1)} \cdot \frac{\rho^2}{2!} + \ldots \tag{134}$$

Как следует из теории таких функций (см., например, Курант, Гильберт [1]), решению w уравнения (132) тогда и только тогда отвечает функция $f = \rho^l e^{-\frac{\rho}{2}} w$, удовлетворяющая условию конечности нормы

$$\int_0^\infty r^2 |f(r)|^2 dr < \infty, \tag{135}$$

когда это решение есть вырожденная гипергеометрическая функция (133), а $-n + l + 1$ — целое отрицательное число или нуль. В этом случае наша вырожденная гипергеометрическая функция сводится к многочлену степени $n - l - 1$, который с точностью до числового множителя есть обобщенный многочлен Чебышева — Лагерра:

$$L_\nu^k(\rho) = \frac{\nu!}{(\nu - k)!} e^\rho \frac{d^\nu}{d\rho^\nu} (e^{-\rho} \rho^{\nu - k}), \qquad \nu = n + l,\ k = 2l + 1. \tag{136}$$

Таким образом, для точек дискретного спектра число n в (131) должно быть целым положительным, и потому соответствующие уровни энергии определяются формулой

$$E_n = -\frac{1}{2n^2}, \qquad n = 1,\ 2,\ 3,\ \ldots \tag{137}$$

Соответствующие стационарные состояния частицы определяются волновыми функциями

$$\psi_{nlm}(r,\ \theta,\ \varphi) = f_{nl}(r)\, Y_{lm}(\theta,\ \varphi). \tag{138}$$

При этом из формул (131) и (136) вытекает, что

$$f_{nl}(r)=c_{nl}e^{-\frac{r}{n}}\left(\frac{2r}{n}\right)^{l}L_{n+l}^{2l+1}\left(\frac{2r}{n}\right),$$

где c_{nl} — постоянная, определяемая (с точностью до множителя, по модулю равного единице *)) условием нормировки $\int\limits_0^\infty r^2|f(r)|^2\,dr=1$. Так как должно быть $-n+l+1\leqslant 0$, то $l\leqslant n-1$; следовательно, возможными значениями l при фиксированном n являются $l=0, 1, 2, \ldots, n-1$. При фиксированных n и l имеется еще $2l+1$ возможностей для m, поэтому данному уровню E_n отвечает

$$\sum_{l=0}^{n-1}(2l+1)=n^2$$

линейно независимых волновых функций $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$, т. е. кратность собственного значения E_n оператора H есть n^2. Числа n, l, m полностью определяют функцию $\psi_{nlm}(r, \theta, \varphi)$, т. е. полностью определяют стационарное состояние частицы. Они называются *главным квантовым числом*, *азимутальным квантовым числом* и *магнитным квантовым числом* соответственно.

Не останавливаясь подробно на рассмотрении непрерывного спектра, мы сформулируем только окончательный результат (который можно получить, пользуясь известными асимптотическими формулами для решений уравнения (132) **)).

Полагая $k=\sqrt{2E}$, $E>0$, следовательно, $n=-\frac{i}{k}$, $\rho=2ikr$, мы получим следующее выражение для собственной функции оператора L:

$$f_{kl}(r)=\frac{c_k}{(2l+1)!}(2kr)^l e^{-ikr}F\left(\frac{i}{k}+l+1,\ 2l+2,\ 2ikr\right). \tag{139}$$

Если пронормировать эту функцию, полагая

$$c_k=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,ke^{\frac{\pi}{2k}}\left|\Gamma\left(l+1-\frac{i}{k}\right)\right|, \tag{140}$$

---

*) Можно показать (см., например, Ландау и Лившиц [1]), что при надлежащем выборе этого множителя

$$c_{nl}=-\frac{2}{n^2}\sqrt{\frac{(n-l-1)!}{[(n+l)!]^3}}.$$

**) Подробнее см. Ландау и Лившиц [1] или Левитан [2].

то формула разложения функции $f(r) \in \mathfrak{H}_f$ по собственным функциям оператора L будет иметь вид*)

$$f(r) = \sum_{n=1}^{\infty} c_{nl} f_{nl}(r) + \int_0^{\infty} \varphi_l(k) f_{kl}(r)\, dk, \tag{141}$$

где

$$c_{nl} = \int_0^{\infty} f(r) \overline{f_{nl}(r)}\, r^2\, dr, \tag{142}$$

$$\varphi_l(k) = \int_0^{\infty} f(r) f_{kl}(r)\, r^2\, dr. \tag{143}$$

При этом в общем случае произвольной функции $f \in \mathfrak{H}_f$ сходимость правой части (141) имеет место в смысле нормы в $\mathfrak{H}_f$, а сходимость в (142) и (143) в смысле норм

$$\left(\sum_{n=1}^{\infty} | c_{nl} |^2 \right)^{\frac{1}{2}}, \quad \left(\int_0^{\infty} | \varphi_l(k) |^2\, dk \right)^{\frac{1}{2}},$$

и имеет место равенство

$$\int_0^{\infty} r^2 | f(r) |^2\, dr = \sum_{n=1}^{\infty} | c_{nl} |^2 + \int_0^{\infty} | \varphi_l(k) |^2\, dk.$$

В силу предыдущего собственные функции оператора H получаются из собственных функций оператора L умножением на $Y_{lm}(\theta, \varphi)$. Но при фиксированном $E > 0$ (и, значит, $k > 0$) число l может принимать произвольные целые неотрицательные значения. Отсюда вытекает, что соответствующие точки сплошного спектра оператора энергии все бесконечной кратности. Легко также выписать разложение по собственным функциям оператора H; мы предоставляем читателю вывод соответствующих формул.

Мы рассмотрели случай кулонова поля притяжения. В случае поля отталкивания дискретный спектр отсутствует, а сплошной спектр попрежнему покрывает всю положительную полуось. Разложение по собственным функциям оператора L аналогично формуле (141), но первое слагаемое (отвечавшее ранее дискретному спектру) в нем теперь отсутствует.

---

*) Определение пространства $\mathfrak{H}_f$ см. на стр. 404.

ГЛАВА VIII

ОБРАТНАЯ ЗАДАЧА ШТУРМА — ЛИУВИЛЛЯ

В так называемых обратных задачах спектрального анализа требуется определить оператор по некоторым заданным спектральным характеристикам этого оператора. К задачам такого типа приводят, в частности, некоторые вопросы квантовой механики, например определение внутриатомных сил по заданным уровням энергии, т. е. по спектру, который может быть найден экспериментально.

В этой главе мы рассмотрим обратную задачу Штурма — Лиувилля, которая формулируется следующим образом.

Дана спектральная функция распределения $\sigma(\lambda)$ дифференциального оператора второго порядка, определить этот оператор.

Впервые обратная задача была поставлена В. А. Амбарцумяном (см. Амбарцумян [1]). В простейшей постановке задача заключается в том, чтобы определить оператор, зная его спектр. Однако в такой постановке задача является неопределенной: одного спектра недостаточно для определения оператора (см. Левинсон [2]). Теорема единственности для сформулированной выше обратной задачи Штурма — Лиувилля впервые была получена В. А. Марченко (см. Марченко [1]), а ее полное решение дали И. М. Гельфанд и Б. М. Левитан (см. Гельфанд и Левитан [2]).

Настоящая глава посвящена изложению этого решения *). В конце главы будут даны некоторые разъяснения относительно других возможных постановок обратных задач и соответствующие литературные указания.

§ 25. Ортогонализирующие ядра

1. Определение ортогонализирующих ядер. Пусть задан дифференциальный оператор L_θ при помощи дифференциального выражения

$$l(y) = -y'' + q(x)y, \quad 0 \leqslant x < +\infty, \tag{1}$$

и краевого условия

$$y'(0) - \theta y(0) = 0. \tag{2}$$

---

*) Вне рамок настоящей книги остались фундаментальные результаты М. Г. Крейна, уточняющие, в частности, основную теорему n° 5 § 26 (см. М. Г. Крейн [10, 11, 12]).

Мы будем предполагать, что функция $q(x)$ непрерывна на всей полуоси $0 \leqslant x < +\infty$. Обозначим через $u_1(x, \lambda)$ и $u_2(x, \lambda)$ решения уравнения

$$l(y) = \lambda y, \tag{3}$$

удовлетворяющие начальным условиям

$$u_1(0, \lambda) = 1, \quad u_1'(0, \lambda) = 0,$$
$$u_2(0, \lambda) = 0, \quad u_2'(0, \lambda) = 1,$$

и положим

$$\varphi(x, \lambda) = u_1(x, \lambda) + \theta u_2(x, \lambda). \tag{4}$$

Очевидно, функция $\varphi(x, \lambda)$ будет решением уравнения (3), удовлетворяющим краевому условию (2).

Как было показано в § 21, существует спектральная функция распределения $\sigma(\lambda)$, такая, что формулы

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(x)\varphi(x, \lambda)\,dx, \tag{5}$$

$$f(x) = \int_{-\infty}^{\infty} F(\lambda)\varphi(x, \lambda)\,d\sigma(\lambda) \tag{6}$$

устанавливают взаимно обратные изометрические отображения $L^2(0, \infty)$ на L_σ^2 и L_σ^2 на $L^2(0, \infty)$, при которых оператор L_θ переходит в оператор Λ_σ умножения на λ. Эта функция $\sigma(\lambda)$ будет единственной или нет в зависимости от того, будет ли L_θ самосопряженным или несамосопряженным симметрическим оператором. Последнее в свою очередь определяется тем, будет ли индекс дефекта симметрического оператора L_0, порожденного дифференциальным выражением $l(y)$, равен (1,1) или (2,2).

Предположим теперь, что существует функция $K(x, t)$, $t \leqslant x$, имеющая непрерывные частные производные до второго порядка включительно, такая, что *)

$$\varphi(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x + \int_0^x K(x, t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt. \tag{7}$$

*) Формула (7) представляет собой континуальный аналог процесса ортогонализации (см., например, Гельфанд [1]), здесь функция $\varphi(x, \lambda)$ получается путем «ортогонализации» функции $\cos\sqrt{\lambda}\,t$ по «весу» $\sigma(\lambda)$ По этому поводу см также Виленкин [2]

Соотношения, связывающие решения двух различных уравнений второго порядка (с заданными начальными условиями) принято называть операторами преобразования Соотношение (7) является оператором преобразования, построенным для уравнения $-y'' = \lambda y$ и уравнения (3) Общая теория операторов преобразования развита в работе Марченко [3] (см. также книгу Левитан [1])

Выясним, какие условия следует наложить на функцию $K(x, t)$, чтобы функция $\varphi(x, \lambda)$, определенная формулой (7), была решением уравнения (3), удовлетворяющим условию (2). Дифференцируя дважды обе части (7), имеем

$$\varphi''(x, \lambda) = -\lambda\cos\sqrt{\lambda}\,x + \frac{dK(x, x)}{dx}\cos\sqrt{\lambda}\,x - \sqrt{\lambda}\,K(x, x)\sin\sqrt{\lambda}\,x + \left.\frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\right|_{t=x}\cos\sqrt{\lambda}\,x + \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2}\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt;$$

с другой стороны, интегрируя дважды по частям, получаем

$$\lambda\int_0^x K(x, t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt = \sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}\,xK(x, x) + \left.\frac{\partial K(x, t)}{\partial t}\right|_{t=x}\cos\sqrt{\lambda}\,x - \left.\frac{\partial K(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} - \int_0^x \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2}\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt.$$

Подставим эти выражения в уравнение (3) и приведем подобные члены; мы придем к соотношению

$$\frac{dK(x, x)}{dx}\cos\sqrt{\lambda}\,x + \left(\frac{\partial K(x, t)}{\partial t} + \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\right)_{t=x}\cos\sqrt{\lambda}\,x - \left.\frac{\partial K(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} - q(x)\cos\sqrt{\lambda}\,x + \int_0^x \left[\frac{\partial^2 K}{\partial x^2} - \frac{\partial^2 K}{\partial t^2} - q(x)\,K(x, t)\right]\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt = 0.$$

Из этого соотношения вытекает следующий результат:

I. *Функция $K(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial x^2} - q(x)\,K(x, t) = \frac{\partial^2 K(x, t)}{\partial t^2} \tag{8}$$

и условиям

$$\left.\frac{\partial K(x, t)}{\partial t}\right|_{t=0} = 0, \tag{9}$$

$$\frac{dK(x, x)}{dx} = \frac{1}{2}\,q(x). \tag{10}$$

В самом деле, нетрудно видеть, что если при некотором фиксированном $x > 0$ и при всех $\rho \geqslant 0$

$$a + \int_0^x f(t)\cos\rho t\,dt + b\cos\rho x = 0, \tag{$*$}$$

то

$$a=0, \quad b=0 \quad \text{и} \quad f(t)=0 \quad \text{при} \quad 0<t<x.$$

Действительно, полагая в равенстве (*) $\rho=\rho_n=\left(2\pi n+\frac{\pi}{2}\right)x^{-1}$, где n — натуральное число, мы получим

$$a+\int_0^x f(t)\cos\rho_n t\,dt=0.$$

Так как в силу леммы Римана — Лебега интеграл слева стремится к нулю при $\rho_n\to\infty$, то $a=0$. Полагая теперь в равенстве (*) $\rho=\rho_n=x^{-1}2\pi n$ и рассуждая аналогично предыдущему, мы находим, что $b=0$ и что $\int_0^x f(t)\cos\rho t\,dt=0$ при $\rho>0$. Отсюда, в силу теоремы единственности для косинус-преобразования Фурье, вытекает, что $f(t)=0$ при $0<t<x$.

Из выражения (4) для функции $\varphi(x, \lambda)$ и формулы (7) мы заключаем также, что

$$\theta=\varphi'(0, \lambda)=\left[-\sqrt{\lambda}\sin\sqrt{\lambda}x+K(x, x)\cos\sqrt{\lambda}x+\right.$$
$$\left.+\int_0^x \frac{\partial K(x, t)}{\partial x}\cos\sqrt{\lambda}t\right]_{x=0}=K(0, 0),$$

и потому формула (10) дает

$$K(x, x)=\theta+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)\,dt. \tag{11}$$

Легко видеть, что справедливо также обратное утверждение

I′. *Если функция $K(x, t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению* (8) *и краевым условиям* (9) *и* (11), *то функция* $\varphi(x, \lambda)$, *определяемая соотношением* (7), *является решением дифференциального уравнения* (3).

II. *Если функция $q(x)$ имеет непрерывную производную, то уравнение* (8) *имеет одно и только одно решение* (определенное при $t\leqslant x$), *удовлетворяющее краевым условиям* (9) *и* (11). Чтобы в этом убедиться, достаточно применить к этой задаче метод Римана (см., например, Смирнов, Курс высшей математики, т. IV, гл. III).

Тем самым доказано существование функции $K(x, t)$, удовлетворяющей соотношению (7). Рассматривая это соотношение как интегральное уравнение Вольтерра относительно $\cos\sqrt{\lambda}\,t$ и решая это уравнение, получим

$$\cos\sqrt{\lambda}\,x=\varphi(x,\lambda)-\int_0^x K_1(x,t)\,\varphi(t,\lambda)\,dt. \tag{12}$$

Рассуждая, как и выше, можно доказать, что

III. *Функция* $K_1(x,t)$ *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$\frac{\partial^2 K_1(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 K_1(x,t)}{\partial t^2}-q(t)\,K_1(x,t)$$

и условиям

$$\left(\frac{\partial K_1}{\partial t}-\theta K_1\right)_{t=0}=0,$$

$$K_1(x,x)=\theta+\frac{1}{2}\int_0^x q(x)\,dx;$$

функции $K(x,t)$ и $K_1(x,t)$ называются *ортогонализирующими ядрами*.

Формулы (7) и (12) были нами выведены при $\lambda>0$; но они верны также и при $\lambda<0$, ибо их левая и правая части — аналитические функции от λ.

Далее, при выводе мы предполагали, что функция $q(x)$ имеет непрерывную производную. Пусть теперь функция $q(x)$ просто непрерывна. Рассмотрим последовательность непрерывно дифференцируемых функций $q_n(x)$, равномерно сходящуюся к $q(x)$ в некотором конечном интервале $[0, a)$. Соответствующая последовательность $K_n(x,t)$ сходится тогда к $K(x,t)$ равномерно в области $0\leqslant t\leqslant x\leqslant a$, а потому последовательность $\varphi_n(x)$ сходится к $\varphi(x)$ равномерно в интервале $[0, a]$. Из уравнения

$$\varphi_n''(x,\lambda)+\big(\lambda-q_n(x)\big)\,\varphi_n(x,\lambda)=0$$

заключаем, что последовательность φ_n'' также сходится равномерно, и потому имеет место уравнение

$$\varphi''(x,\lambda)+(\lambda-q(x))\,\varphi(x,\lambda)=0$$

в интервале $[0, a]$. Ввиду произвольности этого интервала последнее уравнение имеет место во всем интервале $0\leqslant x<+\infty$.

Если известно ортогонализирующее ядро, то формула (7) определяет функцию $\varphi(x,\lambda)$; тем самым определяется и функция $q(x)$, ибо

$$\lambda-q(x)=-\frac{\varphi''(x,\lambda)}{\varphi(x,\lambda)}.$$

Таким образом, наша основная задача сводится к определению ядра $K(x, t)$. Ее решение будет основано на выводе и исследовании интегрального уравнения для функции $K(x, t)$.

2. Нелинейное интегральное уравнение для функции $K_1(x, t)$. Интегрируя обе части равенства (12) по x от 0 до x и меняя в правой части порядок интегрирования, имеем

$$\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}} = \int_0^x \varphi(t, \lambda)\,dt - \int_0^x \varphi(t, \lambda)\,dt \int_t^x K_1(u, t)\,du =$$
$$= \int_0^x \varphi(t, \lambda)\left[1 - \int_t^x K_1(u, t)\,du\right]dt.$$

При фиксированном x это равенство означает, что*) $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}$ есть преобразование Фурье по собственной функции $\varphi(t, \lambda)$ оператора L_θ следующей функции от t:

$$\Phi(x, t) = \begin{cases} 1 - \int_t^x K_1(u, t)\,du & \text{при } t \leqslant x, \\ 0 & \text{при } t > x. \end{cases}$$

Отсюда на основании равенства Парсеваля заключаем, что при $y \leqslant x$

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x \sin\sqrt{\lambda}\,y}{\lambda}\,d\sigma(\lambda) = \int_0^y \Phi(x, t)\,\Phi(y, t)\,dt =$$
$$= \int_0^y dt - \int_0^y dt \int_t^x K_1(u, t)\,du - \int_0^y dt \int_t^y K_1(u, t)\,dt +$$
$$+ \int_0^y dt \int_t^x K_1(u, t)\,du \int_t^y K_1(v, t)\,dv. \qquad (13)$$

Так как правая часть этого равенства имеет смысл при $x = y$, то существует интеграл

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin^2\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\,d\sigma(\lambda),$$

---

*) При $\lambda < 0$ под $\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x}{\sqrt{\lambda}}$ следует понимать $\frac{\operatorname{sh}\sqrt{|\lambda|}\,x}{\sqrt{|\lambda|}}$.

а следовательно, и интеграл

$$\int_{-\infty}^{0} \frac{\operatorname{sh}^2 \sqrt{|\lambda|}\, x}{|\lambda|}\, d\sigma(\lambda).$$

Поэтому существует также *)

$$\int_{-\infty}^{0} \operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, x\, d\sigma(\lambda).$$

Применим теперь равенство Парсеваля для классического интеграла Фурье по $\cos \sqrt{\lambda}\, t$ к функции

$$f(t, y) = \begin{cases} 1 & \text{при} \quad t \leqslant y, \\ 0 & \text{при} \quad t > y; \end{cases}$$

ее преобразование Фурье есть

$$\int_{0}^{y} \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt = \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, y}{\sqrt{\lambda}}.$$

Следовательно, на основании равенства Парсеваля (см. n° 5 § 21) при $y \leqslant x$

$$\int_{0}^{y} dt = \frac{2}{\pi} \int_{0}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, x \, \sin \sqrt{\lambda}\, y}{\lambda}\, d\left(\sqrt{\lambda}\right),$$

и формулу (13) можно переписать в виде

$$\begin{aligned} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, x \sin \sqrt{\lambda}\, y}{\lambda}\, d\tau(\lambda) = \\ = -\int_{0}^{y} dt \int_{t}^{x} K_1(u, t)\, du - \int_{0}^{y} dt \int_{t}^{y} K_1(u, t)\, du + \\ + \int_{0}^{y} dt \int_{t}^{x} K_1(u, t)\, du \int_{t}^{y} K_1(v, t)\, dv, \qquad y \leqslant x, \end{aligned} \tag{14}$$

где

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} \sigma(\lambda) - \dfrac{2}{\pi} \sqrt{\lambda} & \text{при} \quad \lambda \geqslant 0, \\ \sigma(\lambda) & \text{при} \quad \lambda < 0. \end{cases} \tag{15}$$

---

*) Существование этого последнего интеграла было доказано В. А Марченко другим путем (см. Марченко [1]).

Положим

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x \sin\sqrt{\lambda}\,y}{\lambda}\,d\tau(\lambda); \tag{16}$$

правая часть (14), а потому и функция $F(x, y)$ имеют производную $\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}$. Полагая

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y} \tag{17}$$

и дифференцируя обе части (14) по x и y, приходим к следующему результату.

IV. *Функция $K_1(x, t)$ при $y \leqslant x$ удовлетворяет нелинейному интегральному уравнению*

$$f(x, y) = -K_1(x, y) + \int_0^y K_1(x, t)\,K_1(y, t)\,dt. \tag{18}$$

3. Линейное интегральное уравнение для функции $K(x, y)$.

V. *Функция $K(x, y)$ при $y \leqslant x$ удовлетворяет линейному интегральному уравнению*

$$f(x, y) + \int_0^x K(x, s)\,f(s, y)\,ds + K(x, y) = 0. \tag{19}$$

Доказательство. Докажем сначала, что при $b < y < a < x$ функции

$$\psi(\lambda) = \int_a^x \varphi(t, \lambda)\,dt \quad \text{и} \quad \omega(\lambda) = \int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt$$

ортогональны по мере $d\sigma(\lambda)$, т. е. что

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \varphi(t, \lambda)\,dt\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right] d\sigma(\lambda) = 0. \tag{20}$$

Применяя формулу (12), имеем

$$\omega(\lambda) = \int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt = \int_b^y \varphi(t, \lambda)\,dt - \int_b^y dt \int_0^t K_1(t, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds =$$

$$= \int_b^y \varphi(t, \lambda)\,dt - \int_0^b \varphi(s, \lambda)\,ds \int_b^y K_1(t, s)\,dt - \int_b^y \varphi(s, \lambda)\,ds \int_s^y K_1(t, s)\,dt;$$

это равенство означает, что $\omega(\lambda)$ есть преобразование Фурье по $\varphi(t, \lambda)$ функции, равной нулю вне интервала $(0, y)$. С другой стороны, $\psi(\lambda)$ есть аналогичное преобразование Фурье функции, равной нулю вне интервала (a, x). Так как интервалы $(0, y)$ и (a, x) не перекрываются, то соотношение (20) непосредственно вытекает из равенства Парсеваля. Выразим теперь в этом соотношении $\varphi(t, \lambda)$ через $\cos\sqrt{\lambda}\,t$ по формуле (7); мы имеем тогда

$$\int_a^x \varphi(t, \lambda)\,dt = \int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt + \int_0^a \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds \int_a^x K(t, s)\,dt + \\ + \int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds \int_s^x K(t, s)\,dt,$$

и соотношение (20) примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d\sigma(\lambda) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^a \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds \int_a^x K(t, s)\,dt + \right. \\ \left. + \int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds \int_s^x K(t, s)\,dt\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d\sigma(\lambda) = 0. \qquad (21)$$

Введем для краткости обозначения

$$H(x, s) = \begin{cases} \int_a^x K(t, s)\,dt & \text{при } 0 \leqslant s \leqslant a, \\ \int_s^x K(t, s)\,dt & \text{при } a \leqslant s \leqslant x, \\ 0 & \text{при } s > x; \end{cases} \qquad (22)$$

тогда (21) перепишется в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d\sigma(\lambda) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty} \cos\sqrt{\lambda}\,s H(x, s)\,ds\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d\sigma(\lambda) = 0. \qquad (23)$$

Но в силу формулы Парсеваля для классического интеграла Фурье

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d(\sqrt{\lambda})=0;$$

вычитая это равенство из (23) и вспоминая формулу для $\tau(\lambda)$ (см. (15)), получим

$$\int_{-\infty}^\infty\left[\int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d\tau(\lambda)+$$
$$+\int_{-\infty}^\infty\left[\int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}\,sH(x,\,s)\,ds\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d\tau(\lambda)+$$
$$+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}\,sH(x,\,s)\,ds\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d(\sqrt{\lambda})=0 \tag{24}$$

Так как

$$F(x,\,y)=\int_{-\infty}^\infty\frac{\sin\sqrt{\lambda}\,x\sin\sqrt{\lambda}\,y}{\lambda}\,d\tau(\lambda),$$

то

$$\int_{-\infty}^\infty\left[\int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d\tau(\lambda)=$$
$$=\int_{-\infty}^\infty\frac{(\sin\sqrt{\lambda}\,x-\sin\sqrt{\lambda}\,a)(\sin\sqrt{\lambda}\,y-\sin\sqrt{\lambda}\,b)}{\lambda}\,d\tau(\lambda)=$$
$$=F(x,\,y)-F(x,\,b)-F(a,\,y)+F(a,\,b).$$

Далее, применяя равенство Парсеваля для классического интеграла Фурье и учитывая формулу (22), заключаем, что

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\left[\int_0^\infty \cos\sqrt{\lambda}\,sH(x,\,s)\,ds\right]\left[\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right]d(\sqrt{\lambda})=$$
$$=\int_b^y H(x,\,s)\,ds=\int_b^y ds\int_a^x K(t,\,s)\,dt.$$

Рассмотрим теперь второе слагаемое в формуле (24); так как $H(x, x)=0$ и $\frac{\partial H}{\partial s}$ ограничена, то, интегрируя по частям и меняя затем порядок интегрирования, получим

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}sH(x, s)\,ds\right]\left[\int_b^y\cos\sqrt{\lambda}s\,ds\right]d\tau(\lambda)=$$

$$=\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{x}\cos\sqrt{\lambda}sH(x, s)\,ds\right]\left[\int_b^y\cos\sqrt{\lambda}s\,ds\right]d\tau(\lambda)=$$

$$=-\int_{-\infty}^{\infty}\left[\int_0^{x}\frac{\partial H}{\partial s}\frac{\sin\sqrt{\lambda}s}{\sqrt{\lambda}}\,ds\right]\left[\frac{\sin\sqrt{\lambda}y-\sin\sqrt{\lambda}b}{\sqrt{\lambda}}\right]d\tau(\lambda)=$$

$$=-\int_0^x\frac{\partial H}{\partial s}[F(s, y)-F(s, b)]\,ds. \qquad (25)$$

Интегрируя снова по частям и меняя затем порядок интегрирования, получим для последнего интеграла выражение

$$\int_0^x H(x, s)\left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s}-\frac{\partial F(s, b)}{\partial s}\right]ds=$$

$$=\int_a^x dt\int_0^t K(t, s)\left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s}-\frac{\partial F(s, b)}{\partial s}\right]ds.$$

Поэтому формула (24) примет вид

$$F(x, y)-F(x, b)-F(a, y)+F(a, b)+$$

$$+\int_a^x dt\int_0^t K(t, s)\left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s}-\frac{\partial F(s, b)}{\partial s}\right]ds+\int_b^y ds\int_a^x K(t, s)\,dt=0.$$

Дифференцирование этого равенства по x и y дает

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x\,\partial y}+\int_0^x K(x, s)\frac{\partial^2 F(s, y)}{\partial s\,\partial y}ds+K(x, y)=0,$$

т. е.

$$f(x, y)+\int_0^x K(x, s)f(s, y)\,ds+K(x, y)=0.$$

§ 26. Решение обратной задачи Штурма—Лиувилля

1. Условия на спектральную функцию распределения. Обратимся теперь к решению обратной задачи. Итак, пусть дана неубывающая функция $\sigma(\lambda)$; требуется выяснить, существует ли дифференциальный оператор L_0 второго порядка, спектральной функцией которого она является, и найти этот оператор, если он существует. Эту задачу мы решим в предположении, что функция $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет следующим условиям:

А) *При любом вещественном x существует интеграл*

$$\int_{-\infty}^{0} e^{\sqrt{|\lambda|}\,x}\, d\sigma(\lambda). \tag{1}$$

Б) *Если положить*

$$\tau(\lambda)=\begin{cases} \sigma(\lambda)-\dfrac{2}{\pi}\sqrt{\lambda} & \text{при} \quad \lambda>0,\\ \sigma(\lambda) & \text{при} \quad \lambda<0, \end{cases} \tag{2}$$

то интеграл $\int_{1}^{\infty} \lambda^{-1}\cos\sqrt{\lambda}\,x\, d\tau(\lambda)$ *существует для всех* $x \geqslant 0$ *и при* $x \geqslant 0$ *функция*

$$a(x)=\int_{1}^{\infty} \frac{\cos\sqrt{\lambda}\,x}{\lambda}\, d\tau(\lambda) \tag{3}$$

имеет непрерывные производные до четвертого порядка включительно.

I. *Если функция $q(x)$ непрерывно дифференцируема при $x \geqslant 0$, то условие* А) *необходимо для разрешимости обратной задачи* *).

Это утверждение было доказано в n°2 § 25.

---

*) Условие Б) необходимо для разрешимости обратной задачи лишь при $x \neq 0$. Даже для сколь угодно гладкой функции $q(x)$ при $x=0$ производные $a(x)$ могут существовать лишь как односторонние. Например (на этот пример указал автору Ф. С. Рофэ-Бекетов), спектральная функция

$$\sigma(\lambda)=\begin{cases} \dfrac{2}{\pi}\left(\sqrt{\lambda}+\operatorname{arctg}\sqrt{\lambda}\right) & \text{при} \quad \lambda \geqslant 0,\\ 0 & \text{при} \quad \lambda<0 \end{cases}$$

отвечает аналитической функции $q(x)$ и в то же время, здесь

$$a''(x)=-e^{-|x|}+\int_{0}^{1} \cos\sqrt{\lambda}\,x\, d\tau(\lambda),$$

так что $a'''(0)$ существует лишь как односторонняя производная.

II. *Если функция $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям* А) *и* Б), *то функция*

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, x \sin \sqrt{\lambda}\, y}{\lambda} \, d\tau(\lambda) \tag{4}$$

имеет непрерывные частные производные до четвертого порядка включительно при $x \geqslant 0$ и $y \geqslant 0$.

Действительно, в силу условия А) функция

$$F_1(x, y) = \int_{-\infty}^{1} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, x \sin \sqrt{\lambda}\, y}{\lambda} \, d\tau(\lambda) \tag{5a}$$

имеет непрерывные четвертые производные. В силу условия Б) то же верно для функции

$$F_2(x, y) = \int_{1}^{\infty} \frac{\sin \sqrt{\lambda}\, x \sin \sqrt{\lambda}\, y}{\lambda} \, d\tau(\lambda), \tag{5б}$$

поскольку (см. (3))

$$F_2(x, y) = \frac{1}{2}[a(x-y) - a(x+y)]. \tag{6}$$

2. Исследование линейного интегрального уравнения для ортогонализирующего ядра. Пусть теперь задана функция $\sigma(\lambda)$, удовлетворяющая условиям А) и Б). В этом пункте мы еще дополнительно предположим, что функция $\sigma(\lambda)$ имеет в некотором конечном интервале бесконечное число точек роста и исключим, таким образом, случай чисто дискретного спектра. Это дополнительное условие будет нами использовано только при доказательстве нижеследующего предложения III. В дальнейшем (см. n°6) мы укажем, как предложение III, а значит, и все последующие результаты распространяются на случай чисто дискретного спектра.

Построим по $\sigma(\lambda)$ функцию $F(x, y)$ по формуле (4) и положим

$$f(x, y) = \frac{\partial^2 F}{\partial x \, \partial y}. \tag{7}$$

В силу II *функция $f(x, y)$ имеет непрерывные производные до второго порядка включительно.*

III. *При фиксированном x интегральное уравнение*

$$f(x, y) + \int_{0}^{x} f(y, s) K(x, s) \, ds + K(x, y) = 0 \tag{8}$$

относительно неизвестной функции $K(x, y)$ имеет решение и притом только одно.

Доказательство. Как известно (см., например, Петровский [1]) для разрешимости интегрального уравнения (8) (при фиксированном x) достаточно, чтобы сопряженное однородное уравнение

$$\int_0^x f(s, y)\, h(s)\, ds + h(y) = 0 \tag{9}$$

имело лишь тривиальное решение.

Пусть $h(y)$ — некоторое решение этого уравнения. Умножая обе части (9) на $h(y)$ и интегрируя по y от 0 до x, получим, что тогда

$$\int_0^x \int_0^x f(s, y)\, h(s)\, h(y)\, ds\, dy + \int_0^x h^2(y)\, dy = 0.$$

Поэтому достаточно доказать, что при $h(y) \not\equiv 0$ квадратичная форма

$$J(h) = \int_0^x \int_0^x f(s, y)\, h(s)\, h(y)\, ds\, dy + \int_0^x h^2(y)\, dy$$

положительна.

Предположим сначала, что функция $h(y)$ удовлетворяет следующим условиям:

1) $h(x) = 0$;

2) $h'(y)$ непрерывна в интервале $0 \leqslant y \leqslant x$.

Так как $f(y, s) = \dfrac{\partial^2 F}{\partial y\, \partial s}$, то, интегрируя по частям и пользуясь условием 1), найдем, что

$$J(h) = \int_0^x h^2(y)\, dy + \int_0^x \int_0^x F(y, s)\, h'(y)\, h'(s)\, dy\, ds =$$

$$= \int_0^x h^2(y)\, dy + \int_0^x \int_0^x h'(y)\, h'(s)\, dy\, ds \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, y}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, s}{\sqrt{\lambda}}\, d\sigma(\lambda) -$$

$$- \frac{2}{\pi} \int_0^x \int_0^x h'(y)\, h'(s)\, dy\, ds \int_0^{\infty} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, y}{\sqrt{\lambda}} \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, s}{\sqrt{\lambda}}\, d\left(\sqrt{\lambda}\right) =$$

$$= \int_0^x h^2(y)\, dy + \int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)\, d\sigma(\lambda) - \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} G^2(\lambda)\, d\left(\sqrt{\lambda}\right), \tag{10}$$

где

$$G(\lambda)=\int_0^x \frac{\sin\sqrt{\lambda}\,t}{\sqrt{\lambda}}\,h'(t)\,dt=\int_0^x \cos\sqrt{\lambda}\,t h(t)\,dt. \qquad (11)$$

Но в силу равенства Парсеваля для классического интеграла Фурье

$$\frac{2}{\pi}\int_0^\infty G^2(\lambda)\,d\left(\sqrt{\lambda}\right)=\int_0^x h^2(y)\,dy,$$

и потому из (10) заключаем, что

$$J(h)=\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda). \qquad (12)$$

Если поэтому $J(h)=0$, то и $G(\lambda)=0$ во всех точках роста функции $\sigma(\lambda)$, которые по нашему дополнительному предположению имеют конечную предельную точку. Последнее возможно лишь тогда, когда $G(\lambda)=0$, ибо в силу (11) $G(\lambda)$ — целая аналитическая функция. Таким образом, из равенства $J(h)=0$ вытекает, что

$$\int_0^x h(t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt=0$$

для всех λ; следовательно, $h(t)\equiv 0$.

Пусть теперь $h(y)$ — функция, непрерывная в интервале $[0, x]$, не удовлетворяющая условиям 1) и 2). Тогда существует последовательность функций $h_n(y)$, удовлетворяющих условиям 1) и 2), сходящаяся к $h(y)$ в смысле нормы в $L^2(0, x)$. Очевидно,

$$\lim_{n\to\infty} J(h_n)=J(h)$$

и потому

$$J(h)=\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda),$$

где

$$G_n(\lambda)=\int_0^x h_n(y)\cos\sqrt{\lambda}\,y\,dy.$$

Так как $h_n(y)\to h(y)$ в смысле нормы в $L^2(0, x)$, то $G_n(\lambda)\to G(\lambda)$ равномерно на каждом интервале $[-a, a]$. Поэтому, если $J(h)=0$, т. е.

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty} G_n^2(\lambda)\,d\sigma(\lambda)=0,$$

то также

$$0 = \lim_{n\to\infty} \int_{-a}^{a} G_n^2(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = \int_{-a}^{a} G^2(\lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

и в силу произвольности числа a

$$\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)\, d\sigma(\lambda) = 0;$$

поэтому должно быть $G(\lambda) \equiv 0$; отсюда снова заключаем, что $h(y) \equiv 0$.

Так как функция $f(x, y)$ непрерывна, то и решение $K(x, y)$ уравнения (8) есть непрерывная функция переменного y. Кроме того, из этого уравнения следует, что если существуют непрерывные производные $\frac{\partial^r f}{\partial y^r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$, то существуют также непрерывные производные $\frac{\partial^r K(x, y)}{\partial y^r}$ $(r = 1, 2, \ldots, n)$.

Исследование свойств этого решения как функции первого аргумента основано на следующей лемме.

Лемма. *Пусть в интегральном уравнении*

$$g(x, a) = h(x, a) + \int_0^1 H(x, y, a)\, h(y, a)\, dy \tag{13}$$

ядро $H(x, y, a)$ и свободный член $g(x, a)$ являются непрерывными функциями по совокупности независимых переменных и параметра a.

Если сопряженное однородное уравнение имеет лишь тривиальное решение при $a = a_0$, то в некоторой окрестности точки a_0 решение $h(x, a)$ единственно и при $0 \leqslant x \leqslant 1$ является непрерывной функцией переменных x и a. Если же H и g имеют n непрерывных производных по a, то столько же непрерывных производных по a имеет решение $h(x, a)$ *).

Доказательство. Положим

$$H(x, y, a) = H(x, y, a_0) + H_1(x, y, a);$$

если a находится в достаточно малой окрестности точки a_0, то $|H_1(x, y, a)| < \varepsilon$ для всех значений x, y в квадрате $0 \leqslant x, y \leqslant 1$. Перепишем уравнение (13) в операторной форме

$$g = h + Hh = (1 + H_0)\, h + H_1 h;$$

*) Последнее утверждение остается справедливым даже в том случае, когда производные от H имеют разрывы 1-го рода вдоль прямой $x = y$.

применяя к обеим его частям оператор $(1+H_0)^{-1}$, получим

$$(1+H_0)^{-1}g = h + (1+H_0)^{-1} H_1 h. \tag{14}$$

Норма оператора $(1+H_0)^{-1} H_1$ меньше $|(1+H_0)^{-1}|\,\varepsilon$, и потому ее можно считать сколь угодно малой; следовательно, к уравнению (14) применим метод последовательных приближений, и лемма доказана.

Чтобы применить эту лемму к уравнению (8), заменим в нем s на sx и y на yx. Мы получим уравнение

$$f(x,\ yx) + x\int_0^1 K(x,\ sx)\,f(sx,\ yx)\,ds + K(x,\ yx) = 0$$

с ядром $xf(sx,\ yx)$ и свободным членом $f(x,\ yx)$. Очевидно, это уравнение удовлетворяет условиям леммы при любом значении x_0, и потому

IV. *Решение $K(x,\ y)$ уравнения* (8) *есть непрерывная функция по совокупности переменных x, y при $0 \leqslant y \leqslant x$ и $x > 0$ и имеет столько же непрерывных производных, сколько их имеет функция $f(x,\ y)$.*

3. Функция $\varphi(x,\ \lambda)$ и равенство Парсеваля для нее. При помощи решения $K(x,\ y)$ уравнения (8) построим теперь функцию $\varphi(x,\ \lambda)$, полагая

$$\varphi(x,\ \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\,x + \int_0^x K(x,\ t)\cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt. \tag{15}$$

V. *Для любой функции $f(t) \in L^2(0,\ \infty)$ интеграл*

$$F(\lambda) = \int_0^\infty f(t)\,\varphi(t,\ \lambda)\,dt \tag{16}$$

сходится в смысле нормы в L^2_σ. При этом имеет место равенство Парсеваля

$$\int_{-\infty}^{\infty} |F(\lambda)|^2\,d\sigma(\lambda) = \int_0^\infty |f(t)|^2\,dt, \tag{17}$$

и вообще для произвольных $f_1,\ f_2 \in L^2(0,\ \infty)$,

$$\int_{-\infty}^{\infty} F_1(\lambda)\,\overline{F_2(\lambda)}\,d\sigma(\lambda) = \int_0^\infty f_1(t)\,\overline{f_2(t)}\,dt. \tag{18}$$

Доказательство. Докажем сначала равенство Парсеваля (18) для характеристических функций интервалов

$$f_1(t)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad t\in[a,\,x],\\ 0 & \text{при} \quad t\,\overline{\in}\,[a,\,x],\end{cases}\quad a<x,$$

$$f_2(t)=\begin{cases}1 & \text{при} \quad t\in[b,\,y],\\ 0 & \text{при} \quad t\,\overline{\in}\,[b,\,y]\end{cases}\quad b<y.$$

То

$$F_1(\lambda)=\int_a^x \varphi(t,\,\lambda)\,dt,\quad F_2(\lambda)=\int_b^y \varphi(t,\,\lambda)\,dt,$$

и подлежащее доказательству равенство Парсеваля примет вид

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_a^x \varphi(t,\,\lambda)\,dt\right\}\left\{\int_b^y \varphi(t,\,\lambda)\,dt\right\}d\sigma(\lambda)=\int_0^{\infty} f_1(t)f_2(t)\,dt. \tag{19}$$

Положим для краткости

$$H(\xi,\,x,\,s)=\begin{cases}\displaystyle\int_\xi^x K(t,\,s)\,dt & \text{при} \quad 0\leqslant s\leqslant\xi,\\ \displaystyle\int_s^x K(t,\,s)\,dt & \text{при} \quad \xi\leqslant s\leqslant x,\\ 0 & \text{при} \quad s>x\end{cases} \tag{20}$$

и рассмотрим левую часть (19); обозначая ее через J и пользуясь формулой (15), имеем

$$\begin{aligned}J=&\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_a^x \varphi(t,\,\lambda)\,dt\right\}\left\{\int_b^y \varphi(t,\,\lambda)\,dt\right\}d\sigma(\lambda)=\\ =&\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right\}\left\{\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right\}d\sigma(\lambda)+\\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_a^x \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right\}\left\{\int_0^y H(b,\,y,\,s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right\}d\sigma(\lambda)+\\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^x H(a,\,x,\,s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right\}\left\{\int_b^y \cos\sqrt{\lambda}\,t\,dt\right\}d\sigma(\lambda)+\\ &+\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^x H(a,\,x,\,s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right\}\left\{\int_0^y H(b,\,y,\,s)\cos\sqrt{\lambda}\,s\,ds\right\}d\sigma(\lambda).\end{aligned}$$

Обозначим через J_1, J_2, J_3, J_4 эти четыре слагаемых и вычислим каждое из них отдельно.

Пользуясь формулой (2), определением функции $F(x, y)$ и равенством Парсеваля для классического интеграла Фурье, имеем

$$J_1 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_a^x \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right\} \left\{ \int_b^y \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right\} d\sigma(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_a^x \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right\} \left\{ \int_b^y \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right\} d\tau(\lambda) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_a^x \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right\} \left\{ \int_b^y \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right\} d(\sqrt{\lambda}) =$$

$$= F(x, y) - F(a, y) - F(x, b) + F(a, b) + \int_0^{\infty} f_1(x) f_2(x)\, dx.$$

Далее, пользуясь снова равенством Парсеваля для классического интеграла Фурье, а также формулой (25) n°3 § 25, получим

$$J_3 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x H(a, x, s) \cos \sqrt{\lambda}\, s\, ds \right\} \left\{ \int_b^y \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right\} d\sigma(\lambda) =$$

$$= -\int_0^x \frac{\partial H(a, x, s)}{\partial s} [F(s, y) - F(s, b)]\, ds + \int_B H(a, x, s)\, ds =$$

$$= \int_0^x H(a, x, s) \left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s} - \frac{\partial F(s, b)}{\partial s} \right] ds + \int_B H(a, x, s)\, ds,$$

где B обозначает общую часть интервалов $[0, x]$ и $[b, y]$. Аналогично

$$J_2 = \int_{-\infty}^{\infty} \left[\int_a^x \cos \sqrt{\lambda}\, t\, dt \right] \left\{ \int_0^y H(b, y, s) \cos \sqrt{\lambda}\, s\, ds \right\} d\sigma(\lambda) =$$

$$= \int_0^y H(b, y, s) \left[\frac{\partial F(s, x)}{\partial s} - \frac{\partial F(s, a)}{\partial s} \right] ds + \int_A H(b, y, s)\, ds,$$

где A — общая часть интервалов $[0, y]$ и $[a, x]$. Наконец, при $y \leqslant x$

$$J_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x H(a, x, s) \cos \sqrt{\lambda} s \, ds \right\} \left\{ \int_0^y H(b, y, s) \cos \sqrt{\lambda} s \, ds \right\} d\sigma(\lambda) =$$

$$= \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x H(a, x, s) \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda} s}{\sqrt{\lambda}} \right)' ds \right\} \left\{ \int_0^y H(b, y, s) \left(\frac{\sin \sqrt{\lambda} s}{\sqrt{\lambda}} \right)' ds \right\} d\tau(\lambda) +$$

$$+ \frac{2}{\pi} \int_0^{\infty} \left\{ \int_0^x H(a, x, s) \cos \sqrt{\lambda} s \, ds \right\} \left\{ \int_0^y H(b, y, s) \cos \sqrt{\lambda} s \, ds \right\} d(\sqrt{\lambda}).$$

Интегрируя в первом слагаемом по частям и применяя ко второму слагаемому равенство Парсеваля для классического интеграла Фурье, получим

$$J_4 = \int_{-\infty}^{\infty} \left\{ \int_0^x \frac{\partial H(a, x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\sin \sqrt{\lambda} \xi}{\sqrt{\lambda}} d\xi \right\} \left\{ \int_0^y \frac{\partial H(b, y, s)}{\partial s} \frac{\sin \sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} ds \right\} d\tau(\lambda) +$$

$$+ \int_0^y H(a, x, s) H(b, y, s) \, ds =$$

$$= \int_0^x d\xi \int_0^y \frac{\partial H(a, x, \xi)}{\partial \xi} \frac{\partial H(b, y, s)}{\partial s} F(\xi, s) \, ds + \int_0^y H(a, x, s) H(b, y, s) \, ds =$$

$$= \int_0^x H(a, x, \xi) \, d\xi \int_0^y H(b, y, s) \frac{\partial^2 F(\xi, s)}{\partial \xi \, \partial s} ds + \int_0^y H(a, x, s) H(b, y, s) \, ds.$$

Таким образом,

$$J = J_1 + J_2 + J_3 + J_4 = \int_0^{\infty} f_1(t) f_2(t) \, dt + M(x, y),$$

где

$$M(x, y) = F(x, y) - F(a, y) - F(x, b) + F(a, b) +$$

$$+ \int_A H(b, y, s) \, ds + \int_B H(a, x, s) \, ds +$$

$$+ \int_0^x H(a, x, s) \left[\frac{\partial F(s, y)}{\partial s} - \frac{\partial F(s, b)}{\partial s} \right] ds +$$

$$+ \int_0^y H(b, y, s) \left[\frac{\partial F(s, x)}{\partial s} - \frac{\partial F(s, a)}{\partial s} \right] ds + \int_0^y H(a, x, s) H(b, y, s) \, ds +$$

$$+ \int_0^x H(a, x, \xi) \, d\xi \int_0^y H(b, y, s) \frac{\partial^2 F(\xi, s)}{\partial \xi \, \partial s} ds.$$

Докажем, что $M(x, y)=0$; тем самым формула (19) будет доказана. Найдем для этого $\frac{\partial^2 M}{\partial x\, \partial y}$. Так как, по условию, $y \leqslant x$, то пересечение A интервалов $[0, y]$, $[a, x]$ либо пусто, либо есть интервал $[a, y]$, поэтому

$$\frac{\partial}{\partial x} \int\limits_A H(b, y, s)\, ds = 0.$$

Далее, при $y \leqslant x$ $B=[b, y]$, и потому

$$\frac{\partial^2}{\partial x\, \partial y} \int\limits_B H(a, x, s)\, ds = \frac{\partial}{\partial x} H(a, x, y) = K(x, y).$$

Пользуясь этими формулами и определеннем функции $f(x, y)$, найдем, что

$$\frac{\partial^2 M}{\partial x\, \partial y} = f(x, y) + K(x, y) + \int\limits_0^x K(x, s) f(s, y)\, ds + \\
+ \int\limits_0^y K(y, s) f(s, x) ds + \int\limits_0^y K(x, s) K(y, s)\, ds + \\
+ \int\limits_0^x K(x, \xi)\, d\xi \int\limits_0^y K(y, s) f(\xi, s)\, ds = \\
= f(x, y) + K(x, y) + \int\limits_0^x K(x, s) f(s, y)\, ds + \\
+ \int\limits_0^y K(y, s) \left[f(s, x) + K(x, s) + \int\limits_0^x K(x, \xi) f(\xi, s)\, d\xi \right] ds = 0,$$

ибо по условию функция $K(x, y)$ есть решение интегрального уравнения (8).

Итак, $\frac{\partial^2 M}{\partial x\, \partial y} = 0$. Кроме того, из формулы для $M(x, y)$ непосредственно видно, что $M(a, y) = M(x, b) = 0$; следовательно, $M(x, y) = 0$.

Из доказанной формулы (19) следует справедливость равенства Парсеваля для конечных линейных комбинаций характеристических функций; так как эти функции образуют плотное множество в $L^2(0, \infty)$, то равенство Парсеваля имеет место для всех функций из $L^2(0, \infty)$, и теорема доказана.

4. Дифференциальное уравнение для функции $\varphi(x, \lambda)$.

VI. *Функция* $\varphi(x, \lambda)$, *определенная формулой* (15), *есть решение дифференциального уравнения вида*

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y, \tag{21}$$

удовлетворяющее начальным условиям

$$y(0) = 1, \qquad y'(0) = K(0,\ 0), \tag{22}$$

где $q(x)$ — *некоторая непрерывная функция.*

Доказательство. Рассматривая формулу (15) как уравнение Вольтерра относительно $\cos\sqrt{\lambda}x$ и решая это уравнение, найдем, что

$$\cos\sqrt{\lambda}x = \varphi(x,\ \lambda) - \int_0^x K_1(x,\ s)\,\varphi(s,\ \lambda)\,ds, \tag{23}$$

где функция $K_1(x,\ s)$ имеет непрерывные производные второго порядка.

Умножим теперь обе части равенства (15) на $\cos\sqrt{\lambda}t$; мы получим

$$\varphi(x,\ \lambda)\cos\sqrt{\lambda}t = \frac{1}{2}\left[\cos\sqrt{\lambda}(x+t) + \cos\sqrt{\lambda}(x-t)\right] + \\ + \frac{1}{2}\int_0^x K(x,\ s)\left[\cos\sqrt{\lambda}(s+t) + \cos\sqrt{\lambda}(s-t)\right] ds.$$

Подставляя сюда вместо $\cos\sqrt{\lambda}(x \pm t)$, $\cos\sqrt{\lambda}(s \pm t)$ их выражения из формулы (23), мы придем к следующему соотношению:

$$\varphi(x,\ \lambda)\cos\sqrt{\lambda}t = \\ = \frac{1}{2}\left[\varphi(x+t,\ \lambda) + \varphi(x-t,\ \lambda)\right] + \int_0^{x+t} W_0(x,\ t,\ s)\,\varphi(s,\ \lambda)\,ds, \tag{24}$$

где $W_0(x,\ t,\ s)$ — некоторая функция, явное выражение которой нам не понадобится. Отметим только, что эта функция выражается через функции $K(x,\ y)$, $K_1(x,\ y)$ и их интегралы и потому непрерывна при $s \leqslant x+t$. Полагая

$$W(x,\ t,\ s) = \begin{cases} W_0(x,\ t,\ s) & \text{при} \quad s \leqslant x+t, \\ 0 & \text{при} \quad s > x+t, \end{cases} \tag{25}$$

мы можем переписать формулу (24) в виде

$$\varphi(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}t = \\ = \frac{1}{2}[\varphi(x+t, \lambda)+\varphi(x-t, \lambda)] + \int_0^{\infty} W(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\,ds. \quad (26)$$

Докажем, что при достаточно малом t функция $W(x, t, s)$ симметрична относительно переменных x и s. Для этой цели проинтегрируем обе части (26) по x от a до y, умножим обе части полученного равенства на $\int_b^z \varphi(s, \lambda)\,ds$ и проинтегрируем затем по $d\sigma(\lambda)$; мы придем к соотношению

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}t\left\{\int_a^y \varphi(x, \lambda)\,dx\right\}\left\{\int_b^z \varphi(s, \lambda)\,ds\right\}d\sigma(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_a^y dx\int_0^{\infty} W(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\,ds\right\}\left\{\int_b^z \varphi(s, \lambda)\,ds\right\}d\sigma(\lambda) + \\ + \frac{1}{2}\int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_{a+t}^{y+t}\varphi(x, \lambda)\,dx + \int_{a-t}^{y-t}\varphi(x, \lambda)\,dx\right\}\left\{\int_b^z \varphi(s, \lambda)\,ds\right\}d\sigma(\lambda). \quad (27)$$

Выберем a, b так, чтобы интервалы (a, y) и (b, z) не пересекались; тогда при t, достаточно малом $(t \leqslant \varepsilon)$, интервалы $(a \pm t, y \pm t)$ и (b, z) также не будут пересекаться. Отсюда на основании равенства Парсеваля для $\varphi(x, \lambda)$ (см. V n° 3) заключаем, что второе слагаемое в правой части (27) равно нулю. Меняя теперь порядок интегрирования в первом слагаемом, мы можем переписать это соотношение в виде

$$\int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}t\left\{\int_a^y \varphi(x, \lambda)\,dx\right\}\left\{\int_b^a \varphi(s, \lambda)\,ds\right\}d\sigma(\lambda) + \\ + \int_{-\infty}^{\infty}\cos\sqrt{\lambda}t\left\{\int_a^y \varphi(x, \lambda)\,dx\right\}\left\{\int_a^z \varphi(s, \lambda)\,ds\right\}d\sigma(\lambda) = \\ = \int_{-\infty}^{\infty}\left\{\int_0^{\infty}\varphi(s, \lambda)\,ds\int_a^y W(x, t, s)\,dx\right\}\left\{\int_b^z \varphi(s, \lambda)\,ds\right\}d\sigma(\lambda). \quad (28)$$

Первое слагаемое в левой части этого равенства есть функция только переменных y и t, обозначим его через $M(y, t)$; второе слагаемое есть симметричная функция переменных y и z, обозначим его через $N(y, t, z)$.

На основании равенства Парсеваля для $\varphi(x, \lambda)$ (см. V n° 3) правая часть (28) равна

$$\int_b^z ds \int_a^y W(x, t, s)\,dx,$$

и потому это равенство примет вид

$$M(y, t) + N(y, t, z) = \int_b^z ds \int_a^y W(x, t, s)\,dx.$$

Взяв смешанную производную по y и z от обеих частей последнего равенства, получим

$$W(y, t, z) = \frac{\partial^2 N(y, t, z)}{\partial y\,\partial z}.$$

Так как функция $N(y, t, z)$ симметрична относительно переменных y и z, то функция $W(y, t, z)$ обладает тем же свойством.

Но $W(x, t, s) = 0$ при $x + t < s$; в силу симметрии этой функции также $W(x, t, s) = 0$ при $s + t < x$, т. е. при $s < x - t$. Поэтому формулу (26) можно переписать в виде

$$\varphi(x, \lambda)\cos\sqrt{\lambda}t = \frac{1}{2}[\varphi(x+t, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda)] + \\ + \int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds. \tag{29}$$

Вычтем из обеих частей этого последнего равенства $\varphi(x, \lambda)$ и разделим затем на t^2; мы получим

$$\varphi(x, \lambda)\frac{\cos\sqrt{\lambda}t - 1}{t^2} = \frac{\varphi(x+t, \lambda) - 2\varphi(x, \lambda) + \varphi(x-t, \lambda)}{2t^2} + \\ + \frac{1}{t^2}\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds. \tag{30}$$

При $t \to 0$ левая часть стремится к $-\frac{\lambda}{2}\varphi(x, \lambda)$, а первый член правой части — к $\frac{1}{2}\varphi''(x, \lambda)$; поэтому существует также

$$\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,\varphi(s, \lambda)\,ds,$$

Найдем этот предел. Разлагая функцию $\varphi(x, \lambda)$ по формуле Тейлора, получим

$$\varphi(s, \lambda)=\varphi(x, \lambda)+(s-x)\varphi'(x, \lambda)+O((s-x)^2);$$

следовательно,

$$\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\,ds=\varphi(x, \lambda)\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds+$$
$$+\varphi'(x, \lambda)\int_{x-t}^{x+t}(s-x)W(x, t, s)\,ds+O(t^3). \qquad (31)$$

Но при $x-t\leqslant s\leqslant x+t$ функция $W(x, t, s)$ непрерывна; поэтому

$$W(x, t, s)=W(x, t, x)+o(1).$$

Подставляя это выражение в (31), мы заключаем, что

$$\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\,ds=$$
$$=\varphi(x, \lambda)\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds+\varphi'(x, \lambda)\int_{x-t}^{x+t}(s-x)\{W(x, t, x)+$$
$$+o(1)\}\,ds+o(t^2)=\varphi(x, \lambda)\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds+o(t^2),$$

ибо $\int_{x-t}^{x+t}(s-x)W(x, t, x)\,ds=0$; следовательно,

$$\frac{1}{t^2}\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\varphi(s, \lambda)\,ds=\varphi(x, \lambda)\frac{1}{t^2}\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds+o(1). \qquad (32)$$

Положим

$$q(x)=-2\lim_{t\to 0}\frac{1}{t^2}\int_{x-t}^{x+t} W(x, t, s)\,ds; \qquad (33)$$

в силу соотношения (32) этот предел существует.

Переходя в равенстве (30) к пределу при $t\to 0$, получим

$$-\frac{\lambda}{2}\varphi(x, \lambda)=\frac{1}{2}\varphi''(x, \lambda)-\frac{1}{2}q(x)\varphi(x, \lambda),$$

т. е.

$$\varphi''(x, \lambda)+\{\lambda-q(x)\}\varphi(x, \lambda)=0. \qquad (34)$$

Тем самым мы доказали, что функция $\varphi(x, \lambda)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению типа (21). Докажем, что функция $q(x)$ непрерывна. Из (34) следует, что

$$\lambda - q(x) = -\frac{\varphi''(x, \lambda)}{\varphi(x, \lambda)}.$$

Но при фиксированном x знаменатель $\varphi(x, \lambda)$ не может тождественно быть равным нулю; следовательно, при любом значении x существует такое значение λ, для которого $\varphi(x, \lambda) \neq 0$. Поэтому функция $q(x)$ непрерывна.

Наконец, из формулы (15) непосредственно следует, что

$$\varphi(0, \lambda) = 1, \quad \varphi'(0, \lambda) = K(0, 0),$$

и предложение VI полностью доказано.

Как уже отмечалось раньше, в настоящей главе мы в основном следуем работе Гельфанд и Левитан [1]. Н. Левинсон реферируя эту работу предложил упрощение доказательства предложения VI, основанное на следующем замечании.

Решение $K(x, y)$ интегрального уравнения (8) *удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$K''_{xx} - q(x) K - K''_{yy} = 0, \tag{A}$$

где $q(x) = 2\dfrac{d}{dx} K(x, x)$

Отсюда, на основании предложения I′ (см. n° 1 § 25) легко получить предложение VI.

Для доказательства сделанного замечания, ради простоты, предположим, что функция $f(x, y)$, заданная формулой (7), имеет непрерывные вторые производные. Нетрудно видеть, что *)

$$f''_{xx}(x, y) = f''_{yy}(x, y), \tag{Б}$$

$$f'_x(x, y)\,|_{x=0} = f'_y(x, y)\,|_{y=0} = 0. \tag{В}$$

Положим

$$L(x, y) = f(x, y) + \int_0^x f(y, s) K(x, s)\, ds + K(x, y).$$

Тогда

$$L''_{xx}(x, y) = f''_{xx}(x, y) + \int_0^x f(y, s) K''_{xx}(x, s)\, ds + f(y, x) K'_x(x, s)\,|_{s=x} +$$
$$+ f'_x(y, x) K(x, x) + f(y, x)\frac{d}{dx} K(x, x) + K''_{xx}(x, y)$$

и в силу (Б)

$$L''_{yy}(x, y) = f''_{xx}(x, y) + \int_0^x f_{ss}(y, s) K(x, s)\, ds + K''_{yy}(x, y).$$

*) Действительно, $f(x, y) = \dfrac{1}{2}\left[f(x+y, 0) + f(|x-y|, 0)\right]$.

Интегрируя здесь по частям и принимая во внимание соотношения (В), мы найдем

$$L''_{yy}(x, y) = f''_{xx}(x, y) + f'_x(y, x)\, K(x, x) - f(y, x)\, K'_s(x, s)\big|_{s=x} + \\ + \int_0^x f(y, s)\, K''_{ss}(x, s)\, ds + K''_{yy}(x, y).$$

Если $K(x, y)$ — решение интегрального уравнения (8), то $L(x, y) \equiv 0$, а поэтому также

$$L''_{xx} - q(x)\, L - L''_{yy} = 0.$$

Подставляя сюда найденные нами значения L''_{xx} и L''_{yy}, мы получим

$$M(x, y) + \int_0^x f(y, s)\, M(x, s)\, ds = 0, \tag{Г}$$

где $M(x, y)$ обозначает левую часть уравнения (А). Так как однородное интегральное уравнение (Г) не имеет ненулевых решений (см. предложение III), то $M(x, y) \equiv 0$, что и требовалось доказать.

Ф. С. Рофе-Бекетов заметил, что то же рассуждение проходит и тогда, когда при $x = y$ производные $f(x, y)$ имеют разрыв 1-го рода. Этим допущением охватываются все случаи, когда коэффициент $q(x)$ искомого уравнения непрерывно дифференцируем. Здесь при вычислении $L''_{yy}(x, y)$ нужно представить $\int\limits_0^x$ в виде $\int\limits_0^y + \int\limits_y^x$ и учесть, что

$$f'_x(x, y)\big|_{x=y-0} = f'_y(x, y)\big|_{x=y+0}, \quad f'_y(x, y)\big|_{x=y-0} = f'_x(x, y)\big|_{x=y+0},$$

так как $f(x, y) = f(y, x)$, после чего окончательное выражение для $L''_{yy}(x, y)$ останется прежним. Если $f(x, y)$ только однократно дифференцируема при $x \neq y$, то можно показать, что и в этом случае $K(x, y)$ является ортогонализирующим ядром. Для этого следует аппроксимировать $f(x, 0)$ последовательностью дважды дифференцируемых функций $f_n(x, 0)$, определить $f_n(x, y)$ как $\frac{1}{2}[f_n(x + y, 0) + f_n(|x - y|, 0)]$ и $K_n(x, y)$ — как решение соответствующего интегрального уравнения с ядром $f_n(x, y)$ и совершить предельный переход при $n \to \infty$.

5. Основная теорема. Комбинируя предложения III, IV, V и VI, приходим к следующей теореме.

Теорема. *Если неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ удовлетворяет условиям* А) *и* Б) n° 1 *и если множество ее точек роста имеет хотя бы одну конечную предельную точку, то существует дифференциальный оператор второго порядка и притом только один, определенный некоторым дифференциальным выражением*

$$l(y) = -y'' + q(x)\, y, \quad 0 \leqslant x < +\infty,$$

с непрерывным коэффициентом $q(x)$ *и краевым условием вида*

$$y'(0) - \theta\, y(0) = 0,$$

для которого $\sigma(\lambda)$ *есть спектральная функция распределения. При этом функция* $q(x)$ *и число* θ *определяется по формулам*

$$q(x) = \frac{1}{2}\frac{dK(x, x)}{dx}, \quad \theta = K(0, 0),$$

где $K(x, y)$ — *решение интегрального уравнения* (8).

Замечание 1. Во всех предыдущих рассуждениях мы предполагали θ конечным; если $\theta = \infty$, т. е. краевое условие имеет вид $y(0) = 0$, то во всех предыдущих рассуждениях функцию $\varphi(x, \lambda)$ следует заменить функцией

$$\psi(x, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}x}{\sqrt{\lambda}} + \int_0^x L(x, t)\frac{\sin\sqrt{\lambda}t}{\sqrt{\lambda}}\,dt.$$

При этом $L(x, t)$ удовлетворяет тому же уравнению, что и $K(x, t)$, но $f(x, y)$ есть смешанная производная по x и y функции

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{(1-\cos\sqrt{\lambda}x)(1-\cos\sqrt{\lambda}y)}{\lambda^2}\,d\tau(\lambda),$$

где

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} \sigma(\lambda) - \frac{3}{2\pi}\lambda^{\frac{3}{2}} & \text{при } \lambda \geqslant 0, \\ \sigma(\lambda) & \text{при } \lambda < 0. \end{cases}$$

В остальном все рассуждения остаются без существенных изменений, и основная теорема остается справедливой.

Замечание 2. Условия А) и Б) являются, очевидно, условиями на $\sigma(\lambda)$ при $\lambda \to \pm\infty$; они, например, выполняются, если $\tau(\lambda) = 0$ вне некоторого конечного интервала. Это показывает, что функция $\sigma(\lambda)$ *может быть произвольной в любом конечном интервале*. Другими словами: *какова бы ни была ограниченная неубывающая функция* $\sigma(\lambda)$ *в конечном интервале* $[a, b]$, *имеющая в этом интервале бесконечное число точек роста, существует дифференциальный оператор второго порядка, спектральная функция распределения которого совпадает с* $\sigma(\lambda)$ *в интервале* $[a, b]$.

Замечание 3. В работе Гасымов и Левитан [1] доказано следующее уточнение основной теоремы.

Для того чтобы неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ была спектральной функцией распределения оператора L_θ, порожденного дифференциальным выражением $l(y) = -y'' + q(x)y$ и краевым условием $y'(0) = \theta y(0)$, где функция

$q(x)$ имеет производную порядка m, суммируемую в каждом конечном интервале полуоси $(0, \infty)$, необходимо и достаточно выполнение следующих условий:

а) Пусть $f \in L^2(0, \infty)$, $f(x) = 0$ для достаточно больших x и

$$C(\lambda) = \int_0^\infty f(x) \cos \sqrt{\lambda}\, x\, dx.$$

Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} |C(\lambda)|^2 d\sigma(\lambda) = 0,$$

то $f(x) \equiv 0$.

б) Пусть

$$\Phi_N(x) = \int_{-\infty}^{N} \cos \sqrt{\lambda} x\, d\tau(\lambda),$$

где $\tau(\lambda)$ определяется, как и раньше, формулой (2). Интеграл $\Phi_N(x)$ существует и при $N \to \infty$ ограничен и сходится к функции $\Phi(x)$, имеющей $(m+1)$-ю производную, суммируемую в каждом конечном интервале, причем $\Phi(0) = 0$.

6. Случай чисто дискретного спектра. Если функция $\sigma(\lambda)$ имеет счетное множество точек роста с единственной предельной точкой на бесконечности, то для разрешимости обратной задачи на это множество следует наложить дополнительное ограничение. Не приводя подробных рассуждений, мы только сформулируем окончательный результат. Для этой цели введем понятие *плотности* множества. Пусть E — некоторое множество вещественных чисел; обозначим через $N(E)$ число элементов множества E, заключенных в интервале $(-N, N)$; тогда *плотностью множества* E называется число

$$\mu = \overline{\lim_{N \to \infty}} \frac{N(E)}{N}.$$

Основная теорема п° 5 *остается верною и в случае чисто дискретного спектра, если его плотность бесконечна.* (Доказательство см. в работе Гельфанд и Левитан [1]).

7. Различные обобщения основной теоремы. а) Случай конечного интервала. Пусть L — оператор второго порядка в интервале $(0, l)$, регулярный при $x = 0$ (функция $q(x)$ непрерывна в интервале $0 \leqslant x < l$). Все предыдущие результаты остаются в этом случае верными, если условия А) и Б) заменить следующими условиями:

A′) *Для каждого* $x < 2l$ *существует*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \operatorname{ch} \sqrt{|\lambda|}\, x \, d\sigma(\lambda).$$

Б′) *Функция*

$$a(x) = \int_{1}^{\infty} \frac{\cos \sqrt{\lambda}\, x}{\lambda} \, d\sigma(\lambda)$$

имеет непрерывную четвертую производную в интервале $0 \leqslant x < 2l$.

б) Случай классической задачи Штурма—Лиувилля. Пусть L — регулярный оператор второго порядка в интервале $(0, l)$ (функция $q(x)$ непрерывна в замкнутом интервале $[0, l]$); тогда L полуограничен снизу (см. n° 4 § 19). Заменяя, если нужно, L на $L + c1$, мы можем считать L положительно определенным.

Обратная задача в этом случае разрешима, если

$$\rho(\lambda) = \sum_{\lambda_n \leqslant \lambda} \frac{1}{\rho_n},$$

где λ_n, ρ_n — *положительные числа, подчиненные асимптотическим формулам* $\sqrt{\lambda_n} = \frac{\pi}{l} n + O\left(\frac{1}{n}\right)$, $\rho_n = \frac{l}{2} + O\left(\frac{1}{n}\right)$, и если выполнено условие Б′) п. а)*).

в) Случай интервала $(-\infty, +\infty)$. Теперь спектральная функция распределения есть матричная функция второго порядка

$$\sigma(\lambda) = \begin{pmatrix} \sigma_{11}(\lambda) & \sigma_{12}(\lambda) \\ \sigma_{21}(\lambda) & \sigma_{22}(\lambda) \end{pmatrix}$$

а условие, аналогичное условиям А) и Б), оказывается следующим (см. Блох [1]).

---

*) По поводу подробных доказательств в случаях а) и б) см. Гельфанд и Левитан [1] или Гасымов и Левитан [1]. В последней работе имеется теорема, содержащая необходимые и достаточные условия для того, чтобы неубывающая функция $\sigma(\lambda)$ была спектральной функцией распределения регулярного оператора L, соответствующего функции $q(x)$, имеющей суммируемую производную заданного порядка m.

α) Положим

$$p_1(x, \lambda) = \cos\sqrt{\lambda}\, x, \quad p_2(x, \lambda) = \frac{\sin\sqrt{\lambda}\, x}{\sqrt{\lambda}},$$

$$\tau(\lambda) = \begin{cases} \sigma(\lambda) - \dfrac{\sqrt{\lambda}}{\pi}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & \frac{1}{3}\lambda \end{pmatrix} & \text{при} \quad \lambda \geqslant 0, \\ \sigma(\lambda) & \text{при} \quad \lambda < 0. \end{cases}$$

Для произвольных x и y интеграл

$$F(x, y) = \int_{-\infty}^{\infty} \sum_{j, k=1}^{2} \left\{ \int_0^x p_j(s, \lambda)\, ds \right\} \left\{ \int_0^y p_k(s, \lambda)\, ds \right\} d\tau_{jk}(\lambda)$$

сходится, причем функция $F(x, y)$ имеет непрерывные частные производные по x и y до третьего порядка включительно.

Однако теперь, в отличие от случая полуоси, условие α) не является достаточным для разрешимости обратной задачи. Как показал Ф. С. Рофе-Бекетов (см. Рофе-Бекетов [5]), в случае всей оси необходимо еще выполнение следующего условия алгебраического характера:

β) Положим

$$M_{1k}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_{1k}(\lambda)}{\lambda - z}, \qquad k = 1, 2,$$

$$M_{22}(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \left(\frac{1}{z - \lambda} - \frac{\lambda}{1 + \lambda^2} \right) d\sigma_{22}(\lambda) + a,$$

причем число a определяется условием

$$M_{22}(z) - \frac{1}{2} i \sqrt{z} \to 0 \quad \text{при} \quad z \to i\infty$$

Для всех невещественных значений z

$$M_{11}(z) M_{22}(z) - M_{12}(z)^2 = -\frac{1}{4}.$$

По поводу обобщения этих результатов на случай операторов в пространстве вектор-функции см. Блох [1] и Рофе-Бекетов [1].

г) Определение уравнения Штурма–Лиувилля по двум спектрам (см. М. Г. Крейн [7, 8, 9]). Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$-y'' + q(x) y = \lambda y, \qquad 0 \leqslant x \leqslant \pi,$$

и два набора краевых условий

$$y'(0) - h_k y(0) = 0, \quad y'(\pi) + Hy(\pi) = 0, \qquad k = 1, 2,$$

различных в точке 0 и одинаковых в точке π: $h_1 \neq h_2$.

В работе Гасымов и Левитан [1] доказана следующая теорема. *Для того чтобы две последовательности перемежающихся чисел* $(\lambda_n^{(1)})_{n=0}^{\infty}$, $(\lambda_n^{(2)})_{n=0}^{\infty}$ *были последовательностями собственных значений написанных выше краевых задач с функцией* $q(x)$, *суммируемой в интервале* $(0, \pi)$, *необходимо и достаточно, чтобы при* $n \to \infty$

$$\lambda_n^{(k)} = n^2 + a^{(k)} + o(1), \qquad k = 1, 2,$$

где $a^{(1)} \neq a^{(2)}$, *и чтобы функция*

$$\Phi(x) = \frac{2}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \left[\frac{\lambda_n^{(2)} - \lambda_n^{(1)}}{a^{(2)} - a^{(1)}} \cos \sqrt{\lambda_n^{(1)}}\, x - \cos nx \right]$$

имела суммируемую производную.

Отметим, что в работе Гасымов и Левитан [1] рассмотрена также задача определения сингулярного уравнения Штурма — Лиувилля по двум спектрам при условиях, обеспечивающих дискретность спектров. По поводу аналогичной задачи для уравнения Штурма — Лиувилля на конечном интервале и с особенностью на одном из концов см. Гасымов [2].

д) Обратная задача для системы Дирака. Рассмотрим систему уравнений Дирака, имеющую следующий вид:

$$\left\{ \begin{pmatrix} 0 & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & r(x) \end{pmatrix} - \lambda I \right\} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = 0, \qquad 0 \leqslant x < \infty,$$

где $p(x)$, $q(x)$, $r(x)$ — вещественные локально суммируемые функции. Восстановлением этой системы по соответствующей спектральной функции распределения занимались многие авторы. Наиболее полные результаты содержатся в работе Гасымов и Левитан [3]. М. Г. Гасымов и Б. М. Левитан доказали следующее утверждение. *Для того чтобы неубывающая функция* $\sigma(\lambda)$ *была спектральной функцией распределения системы Дирака, с коэффициентами, имеющими т локально суммируемых производных, необходимо и достаточно, чтобы выполнялись следующие условия:*

А) *Пусть* $g_1, g_2 \in L^2(0, \infty)$, $g_1(x) = g_2(x) = 0$ *для достаточно больших* x *и*

$$G(\lambda) = \int_0^\infty [g_1(x) \sin \lambda x - g_2(x) \cos \lambda x] \, dx.$$

Если

$$\int_{-\infty}^{\infty} | G(\lambda) |^2 d\sigma(\lambda) = 0,$$

то $g_1(x) = g_2(x) \equiv 0$.

Б) *При* $N \to \infty$ *интеграл*

$$\Phi_N(x, y) = \int_{-N}^{N} \begin{pmatrix} \sin \lambda x \\ -\cos \lambda x \end{pmatrix} (\sin \lambda y, \ -\cos \lambda y) \, d\left(\sigma(\lambda) - \frac{1}{\pi} \lambda\right)$$

ограничен и сходится и его предел имеет m *локально суммируемых производных.*

Система Дирака определяется по своей спектральной функции распределения неоднозначно. Однако неоднозначность может быть устранена, если рассматривать системы Дирака (а также краевые условия при $x = 0$), приведенные к некоторому каноническому виду. Так же как и в обратной задаче Штурма — Лиувилля, для восстановления системы Дирака решают интегральное уравнение для соответствующего ортогонализирующего ядра. Ядром интегрального уравнения служит функция $\Phi(x, y) = \lim\limits_{N \to \infty} \Phi_N(x, y)$.

В цитированной выше работе М. Г. Гасымова и Б. М. Левитана рассмотрен также случай, когда коэффициенты системы обладают неинтегрируемой особенностью в нуле.

е) Обратная задача квантовой теории рассеяния. Рассмотрим краевую задачу

$$-y'' + q(x) y = \lambda y, \qquad 0 \leqslant x < \infty, \tag{I}$$

$$y(0) = 0, \tag{II}$$

с вещественным «потенциалом» $q(x)$, удовлетворяющим условию

$$\int_0^\infty x | q(x) | \, dx < \infty. \tag{III}$$

Из условия (III) вытекает, что непрерывный спектр задачи (I)—(II) (т. е. спектр отвечающего ей оператора L, действующего в пространстве $L^2(0, \infty)$) заполняет полуось $\lambda \geqslant 0$, а собственные значения отрицательны и их множество конечно (ср. пример а) n° 2 § 24).

Пусть $\Omega(x, \rho)$ — решение уравнения (I) при $\lambda=\rho^2$, удовлетворяющее начальному условию (II). Решение $\Omega(x, \rho)$ можно (умножением на множитель, не зависящий от x) пронормировать так, чтобы разложение по собственным функциям краевой задачи (I) — (II) записывалось в виде

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\alpha}\Omega(f, \rho_k)\,\Omega(x, \rho_k)+\frac{1}{2\pi}\int_0^{\infty}\Omega(f, \rho)\,\Omega(x, \rho)\,d\rho,$$

где

$$\Omega(f, \lambda)=\int_0^{\infty}f(x)\,\Omega(x, \rho)\,dx,$$

а $\rho_k=\sqrt{\lambda_k}$, $\operatorname{Im}\rho_k>0$ и $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ — собственные значения. Для так нормированных собственных функций имеют место следующие асимптотические формулы, справедливые при $x\to\infty$,

$$\Omega(x, \rho)=s(\rho)\,e^{ix\rho}-e^{-ix\rho}+o(1), \qquad -\infty<\rho<\infty,$$
$$\Omega(x, \rho_k)=e^{ix\rho_k}\,[M_k+o(1)], \qquad k=1, \ldots, \alpha;$$

здесь $s(\rho)$ — комплексиозначная функция, удовлетворяющая условиям $|s(\rho)|=1$, $s(\rho)\,s(-\rho)=1$, $-\infty<\rho<\infty$, называемая *функцией рассеяния* краевой задачи (I)—(II). Числа $M_1, \ldots, M_\alpha$ неотрицательны и называются *нормировочными множителями*. Совокупность, состоящая из функции рассеяния $s(\rho)$ собственных значений $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ и нормировочных множителей $M_1, \ldots, M_\alpha$, называется *данными рассеяния* краевой задачи (I) — (II).

В применении к краевой задаче (I) — (II) обратная задача теории рассеяния допускает следующую математическую формулировку. *Известны данные рассеяния* $s(\rho)$, $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$, $M_1, \ldots, M_\alpha$; *определить потенциал* $q(x)$.

Эта задача может быть решена следующим образом. Введем функцию

$$f(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}[s(\rho)-1]\,e^{ix\rho}\,d\rho-\sum_{k=1}^{\alpha}M_k e^{ix\rho_k}$$

и рассмотрим интегральное уравнение

$$k(x, t)-\int_x^{\infty}k(x, u)\,f(u+t)\,du=f(x+t).$$

Оказывается, что при каждом $x \geqslant 0$ это интегральное уравнение имеет единственное решение $k(x, t)$ и что справедлива формула

$$q(x) = -2\frac{d}{dx}k(x, x).$$

Отметим, что решение $k(x, t)$ является ортогонализирующим ядром в следующем смысле. Положим

$$y(x, \rho) = e^{ix\rho} + \int_x^\infty k(x, t)\, e^{it\rho}\, dt;$$

функция $y(x, \rho)$ является решением уравнения (I) при $\lambda = \rho^2$. Отметим также, что данные рассеяния нельзя выбирать произвольно, они должны удовлетворять определенным условиям согласованности.

Основополагающие результаты по обратной задаче теории рассеяния для краевой задачи (I) — (II) содержатся в книге Агранович и Марченко [1]. При этом исследование ведется сразу в пространстве вектор-функций. В обзорной статье Фаддеев [1] изложены различные подходы к обратным задачам и, в частности, изучена связь между основными интегральными уравнениями обратной задачи Штурма — Лиувилля и обратной задачи теории рассеяния. В этой статье содержится обширная библиография, в дополнение к которой мы укажем на важные работы Редже [1, 2], книгу Альфаро и Редже [1] и работу Гасымов [3]. Случай потенциала $q(x)$ с особенностью при $x \to 0$ порядка выше x^{-2} изучался в работе Рофе-Бекетов и Христов [1].

Обратная задача теории рассеяния для системы Дирака второго порядка рассмотрена в работе Гасымов и Левитан [4], а для системы Дирака произвольного четного порядка — в работе Гасымов [4].

ДОБАВЛЕНИЕ I

НЕСАМОСОПРЯЖЕННЫЙ ДИФФЕРЕНЦИАЛЬНЫЙ ОПЕРАТОР ВТОРОГО ПОРЯДКА НА ПОЛУОСИ

В. Э. Лянце

Рассмотрим дифференциальное выражение

$$l(y) = -y'' + p(x)\,y, \qquad 0 < x < \infty, \tag{1}$$

с коэффициентом $p(x)$, являющимся комплекснозначной функцией, суммируемой в каждом интервале $(0, a)$, $a > 0$. Дифференциальному выражению (1) и граничному условию *)

$$y(0) = 0 \tag{2}$$

поставим в соответствие оператор L, действующий в гильбертовом пространстве $L^2(0, \infty)$. В качестве области определения этого оператора мы принимаем множество $\mathfrak{D}_L$ всех функций f, имеющих производную f', абсолютно непрерывную в каждом интервале $[0, a]$, $a > 0$, таких, что f, $l(f) \in L^2(0, \infty)$ и $f(0) = 0$. При $f \in \mathfrak{D}_L$ мы полагаем $Lf = l(f)$. Так определенный оператор L равен замыканию оператора L', заданного формулой $L'f = l(f)$ на достаточно гладких функциях, равных нулю в окрестности точек $x = 0$ и $x = \infty$ (ср. n° 4 § 17). Поскольку мы не предполагаем, что $\operatorname{Im} p(x) \equiv 0$, то дифференциальное выражение (1) и вместе с ним оператор L не являются самосопряженными.

В настоящем добавлении мы исследуем спектр, построим резольвенту, а также спектральное разложение, отвечающее определенному выше оператору L, в предположении, что функция $p(x)$ (см. (1)) «достаточно быстро убывает при $x \to \infty$».

---

*) Используемые ниже методы применимы также в случае граничного условия вида $y'(0) - \theta y(0) = 0$, где θ — произвольное комплексное число. Получающиеся при этом результаты подобны результатам, излагаемым в этом добавлении.

Ввиду того, что абстрактная теория несамосопряженных операторов разработана пока недостаточно, то мы не сможем следовать схемам главы VI и вынуждены исследовать оператор L непосредственно. Отметим, что результаты, получающиеся в самосопряженном и несамосопряженном случае, существенно различны. Так, в несамосопряженном случае спектральное разложение выражается не посредством интеграла Стильтьеса, а с помощью надлежащим способом регуляризованного расходящегося интеграла. При этом разложение произвольной функции из $L^2(0, \infty)$ сходится по норме более слабой, чем норма $L^2(0, \infty)$. Имеются и другие специфические отличия, о них будет сказано в соответствующем месте.

§ 27. Некоторые решения уравнения $l(y) = \lambda y$

Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$l(y) = \lambda y, \tag{3}$$

где $l(y)$ определяется формулой (1), а λ — комплексный параметр. Нам будут нужны решения уравнения (3), удовлетворяющие определенным начальным условиям при $x = 0$ или обладающие определенным асимптотическим поведением при $x \to \infty$.

1. Решения $s(x, \lambda)$ и $c(x, \lambda)$. Обозначим через $s(x, \lambda)$ и $c(x, \lambda)$ решения уравнения (3), удовлетворяющие начальчым условиям

$$\left.\begin{aligned} s(0, \lambda) = 0, \quad s'_x(0, \lambda) = 1, \\ c(0, \lambda) = 1, \quad c'_x(0, \lambda) = 0. \end{aligned}\right\} \tag{4}$$

Отметим, что в случае, когда $p(x) \equiv 0$, $s(x, \lambda) = \frac{\sin x\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$, $c(x, \lambda) = \cos x\sqrt{\lambda}$. В общем случае существование и единственность этих решений обеспечивается теоремой 2 § 16. Поскольку начальные условия (4) не зависят от λ, то для каждого $x \geqslant 0$ $s(x, \lambda)$ и $c(x, \lambda)$ являются целыми функциями от λ.

Легко видеть, что при $\rho \neq 0$ функция $s(x, \lambda)$ удовлетворяет интегральному уравнению

$$s(x, \rho^2) = \frac{\sin x\rho}{\rho} + \int_0^x \frac{\sin(x-\xi)\rho}{\rho} p(\xi) s(\xi, \rho^2) d\xi.$$

Полагая здесь $s(x, \rho^2) = \rho^{-1} e^{-ix\rho} z(x, \rho)$, мы получим

$$z(x, \rho) = \sin x\rho e^{ix\rho} + \frac{1}{\rho}\int_0^x \sin(x-\xi)\rho e^{i(x-\xi)\rho} p(\xi) z(\xi, \rho) d\xi.$$

Предположим, что $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$ и, следовательно, $|\sin x\rho e^{ix\rho}| \leqslant 1$ для всех $x \geqslant 0$. Тогда

$$|z(x, \rho)| \leqslant 1 + \frac{1}{|\rho|}\int_0^x |p(\xi) z(\xi, \rho)|\, d\xi. \tag{5}$$

Умножим обе части неравенства (5) на $\dfrac{|p(x)|}{1 + \dfrac{1}{|\rho|}\displaystyle\int_0^x |p(\xi) z(\xi, \rho)|\, d\xi}$

и затем проинтегрируем по x в пределах от 0 до x_1. Мы получим

$$|\rho| \ln\left[1 + \int_0^{x_1} |p(x) z(x, \rho)|\, dx\right] \leqslant \int_0^{x_1} |p(x)|\, dx.$$

Из этого неравенства и неравенства (5) заключаем, что $|z(x, \rho)| \leqslant$ $\leqslant \exp \dfrac{1}{|\rho|}\displaystyle\int_0^x |p(\xi)|\, d\xi$. Тем самым доказана

Лемма 1. *При* $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $\rho \neq 0$, *для всех* $x \geqslant 0$ *выполняется неравенство*

$$|\rho s(x, \rho^2)| \leqslant e^{\frac{1}{|\rho|}\int_0^x |p(\xi)|\, d\xi + x \operatorname{Im}\rho}.$$

2. Решение $e(x, \rho)$. Начиная с этого места, мы будем предполагать, что функция $p(x)$ суммируема на всей полуоси $(0, \infty)$, и введем обозначение

$$\sigma(x) = \int_x^\infty |p(\xi)|\, d\xi, \quad x \geqslant 0. \tag{6}$$

Теорема 1. *Уравнение* $l(y) = \rho^2 y$ *имеет решение* $y = e(x, \rho)$, *удовлетворяющее интегральному уравнению*

$$e(x, \rho) = e^{ix\rho} - \int_x^\infty \frac{\sin(x-\xi)\rho}{\rho}\, p(\xi)\, e(\xi, \rho)\, d\xi \tag{7}$$

при $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $\rho \neq 0$, *и*

$$\frac{\sigma(x)}{|\rho|} < 1. \tag{8}$$

Для каждого $\delta > 0$ *при* $x \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} e(x, \rho) &= e^{ix\rho}[1 + o(1)], \\ e'_x(x, \rho) &= e^{ix\rho}[i\rho + o(1)] \end{aligned}\right\} \tag{9}$$

равномерно в области $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0, |\rho| \geqslant \delta$. *Кроме того, при* $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$ *и* $\rho \to \infty$

$$\left.\begin{aligned} e(x, \rho) &= e^{ix\rho}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ e'_x(x, \rho) &= i\rho e^{ix\rho}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right] \end{aligned}\right\} \tag{10}$$

равномерно по $x \geqslant 0$. *Для каждого* $x \geqslant 0$ *решение* $e(x, \rho)$ *непрерывно по* ρ *при* $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $\rho \neq 0$ *и голоморфно по* ρ *при* $\operatorname{Im}\rho > 0$.

Доказательство. Легко проверить, что если решение уравнения (7) существует, то оно удовлетворяет уравнению $l(y) = \rho^2 y$. Преобразуем уравнение (7) с помощью подстановки $e(x, \rho) = e^{ix\rho}\varepsilon(x, \rho)$, мы получим

$$\varepsilon(x, \rho) = 1 + \frac{1}{2i\rho}\int_x^\infty [e^{2i(\xi - x)\rho} - 1]\, p(\xi)\, \varepsilon(\xi, \rho)\, d\xi. \tag{11}$$

Покажем, что решение уравнения (11) можно найти в виде $\varepsilon(x, \rho) = \sum_{\nu=0}^{\infty} \varepsilon_\nu(x, \rho)$, где

$\varepsilon_0(x, \rho) = 1$, $\varepsilon_{\nu+1}(x, \rho) =$

$$= \frac{1}{2i\rho}\int_x^\infty [e^{2i(\xi - x)\rho} - 1]\, p(\xi)\, \varepsilon_\nu(\xi, \rho)\, d\xi, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Учитывая, что $|e^{2i(\xi - x)\rho} - 1| \leqslant 2$ при $\xi \geqslant x$ и $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, с помощью индукции находим, что

$$|\varepsilon_\nu(x, \rho)| \leqslant q^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots,$$

где q обозначает левую часть неравенства (8). Следовательно, при $q < 1$ ряд $\sum \varepsilon_\nu(x, \rho)$ сходится и его сумма $\varepsilon(x, \rho)$ равномерно ограничена при $x \to \infty$ в каждой области $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $|\rho| > \delta$. Оставшиеся детали доказательства стандартны.

Теорема 2. *Если сходится интеграл*

$$\sigma_1(x) = \int_x^\infty \xi |p(\xi)|\, d\xi, \quad x \geqslant 0, \tag{12}$$

то решение $e(x, \rho)$ *уравнения* $l(y) = \rho^2 y$ *существует так же при* $\rho = 0$. *Оно может быть представлено в виде*

$$e(x, \rho) = e^{ix\rho} + \int_x^\infty k(x, t)\, e^{it\rho}\, dt, \quad x \geqslant 0, \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0, \tag{13}$$

где ядро $k(x, t)$ имеет непрерывные производные по x и t и удовлетворяет неравенствам (см. (6) и (12))

$$|k(x, t)| \leqslant \frac{1}{2} e^{\sigma_1(x)} \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right), \tag{14}$$

$$|k'_x(x, t)|, \ |k'_t(x, t)| \leqslant \frac{1}{4}\left|p\left(\frac{x+t}{2}\right)\right| + \frac{1}{2} e^{\sigma_1(x)} \sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\sigma(x), \tag{15}$$
$$0 \leqslant x \leqslant t < \infty.$$

Доказательство теоремы 2 имеется в книгах: Агранович и Марченко [1] и Левитан [1]. Отметим, что представление вида (13) впервые ввел Б. Я. Левин (см. Левин [1 и 2]).

3. Решение $\hat{e}(x, \rho)$. Решение $e(x, \rho)$ соответствует решению $e^{ix\rho}$ уравнения $-y'' = \rho^2 y$. Построим теперь решение $\hat{e}(x, \rho)$ уравнения $l(y) = \rho^2 y$, соответствующее решению $e^{-ix\rho}$ уравнения $-y'' = \rho^2 y$. С этой целью рассмотрим интегральное уравнение

$$\hat{e}(x, \rho) = e^{-ix\rho} - \frac{i}{2\rho}\int_a^x e^{i(x-\xi)\rho} p(\xi)\,\hat{e}(\xi, \rho)\,d\xi -$$
$$- \frac{i}{2\rho}\int_x^\infty e^{i(\xi-x)\rho} p(\xi)\,\hat{e}(\xi, \rho)\,d\xi, \quad a \leqslant x < \infty, \tag{16}$$

где a — некоторое положительное число. Легко видеть, что решение $\hat{e}(x, \rho)$ уравнения (16), если оно существует, удовлетворяет также дифференциальному уравнению $l(y) = \rho^2 y$. Преобразуя уравнение (16) с помощью подстановки

$$\hat{e}(x, \rho) = e^{-ix\rho}\hat{\varepsilon}(x, \rho), \tag{17}$$

получим

$$\hat{\varepsilon}(x, \rho) = 1 + \frac{1}{2i\rho}\int_a^x e^{2i(x-\xi)\rho} p(\xi)\,\hat{\varepsilon}(\xi, \rho)\,d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2i\rho}\int_x^\infty p(\xi)\,\hat{\varepsilon}(\xi, \rho)\,d\xi. \tag{18}$$

Положим

$$\hat{\varepsilon}_0(x, \rho) = 1, \quad \hat{\varepsilon}_{\nu+1}(x, \rho) = \frac{1}{2i\rho}\int_a^x e^{2i(x-\xi)\rho} p(\xi)\,\hat{\varepsilon}_\nu(\xi, \rho)\,d\xi +$$
$$+ \frac{1}{2i\rho}\int_x^\infty p(\xi)\,\hat{\varepsilon}_\nu(\xi, \rho)\,d\xi, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

В предположении, что $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, из этих рекуррентных формул легко вывести оценку

$$|\hat{\varepsilon}_\nu(x, \rho)| \leqslant \left[\frac{\sigma(a)}{\rho}\right]^\nu, \quad \nu = 0, 1, 2, \ldots$$

Поскольку $\sigma(x) \to 0$ при $x \to \infty$ (см. (6)), то для каждого $\delta > 0$ существует настолько большое $a > 0$, что $\sigma(a)/\delta < 1$ и, следовательно, ряд $\sum \varepsilon_\nu(x, \rho)$ сходится равномерно в области $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $|\rho| \geqslant \delta$, $x \geqslant a$, причем его сумма равномерно ограничена. Теперь уже нетрудно доказать следующее утверждение.

Теорема 3. *Для каждого $\delta > 0$ существует такое достаточно большое $a = a_\delta > 0$, что уравнение $l(y) = \rho^2 y$ имеет решение $y = \hat{e}(x, \rho)$, удовлетворяющее интегральному уравнению* (17) *в области $x \geqslant a$, $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $|\rho| \geqslant \delta$. Существует такое достаточно большое $C_\delta > 0$, что в указанной области*

$$|\hat{e}(x, \rho)| \leqslant C_\delta e^{x \operatorname{Im}\rho}. \tag{19}$$

Кроме того, для каждого $\alpha > 0$, при $x \to \infty$

$$\begin{aligned} \hat{e}(x, \rho) &= e^{-ix\rho}[1 + o(1)], \\ \hat{e}'_x(x, \rho) &= e^{-ix\rho}[-i\rho + o(1)], \end{aligned} \tag{20}$$

равномерно в области $\operatorname{Im}\rho \geqslant \alpha$, $|\rho| \geqslant \delta$. Решение $\hat{e}(x, \rho)$ голоморфно по ρ в области $\operatorname{Im}\rho \geqslant 0$, $|\rho| \geqslant \delta$, и при $|\rho| \to \infty$ равномерно относительно $x \geqslant 0$,

$$\left.\begin{aligned} \hat{e}(x, \rho) &= e^{-ix\rho}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right], \\ \hat{e}'_x(x, \rho) &= -i\rho e^{-ix\rho}\left[1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right]. \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

С помощью интегрального уравнения (16) функция $\hat{e}(x, \rho)$ определяется лишь при $x \geqslant a$. В дальнейшем мы будем рассматривать функцию $\hat{e}(x, \rho)$ как заданную на полуоси $x \geqslant 0$, продолжая ее в интервал $0 \leqslant x \leqslant a$ как решение уравнения $l(y) = \rho^2 y$.

Рассмотрим теперь случай $\rho = 0$. При этом будем предполагать, что сходится интеграл (12), т. е. что $\sigma_1(x) < \infty$. Как вытекает из теоремы 2, в этом случае уравнение $l(y) = 0$ имеет ограниченное (при $x \to \infty$) решение $y = e(x, 0)$. Построим неограниченное решение этого уравнения $y = \hat{e}(x. 0)$. С этой целью рассмотрим интегральное уравнение

$$\hat{e}(x, 0) = x - x\int_x^\infty p(\xi)\hat{e}(\xi, 0)\,d\xi - \int_a^x \xi p(\xi)\hat{e}(\xi, 0)\,d\xi, \tag{22}$$

где a — некоторое положительное число. Нетрудно проверить, что решение уравнения (22) удовлетворяет также уравнению $l(y)=0$. После подстановки

$$\hat{e}(x, 0)=x\hat{\varepsilon}(x) \tag{23}$$

уравнение (22) преобразуется к виду

$$\hat{\varepsilon}(x)=1-\int_x^{\infty}\xi p(\xi)\hat{\varepsilon}(\xi)\,d\xi-\frac{1}{x}\int_a^x \xi^2 p(\xi)\hat{\varepsilon}(\xi)\,d\xi. \tag{24}$$

Положим

$$\hat{\varepsilon}_0(x)=1,\ \hat{\varepsilon}_{\nu+1}(x)=$$

$$=-\int_x^{\infty}\xi p(\xi)\hat{\varepsilon}_\nu(\xi)\,d\xi-\frac{1}{x}\int_a^x \xi^2 p(\xi)\hat{\varepsilon}_\nu(\xi)\,d\xi,\quad \nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots$$

Из этих рекуррентных формул с помощью индукции легко можно вывести оценку (см. (12))

$$|\hat{\varepsilon}_\nu(x)|\leqslant[2\sigma_1(a)]^\nu \quad x\geqslant a.$$

Следовательно, если число a является достаточно большим, то $2\sigma_1(a)<1$, ряд $\sum\hat{\varepsilon}_\nu(x)$ сходится и его сумма $\hat{\varepsilon}(x)$ удовлетворяет уравнению (24). Отсюда легко вывести следующее утверждение.

Теорема 4. *Пусть интеграл* (12) *сходится. Тогда уравнение $l(y)=0$ имеет решение $y=\hat{e}(x, 0)$, определяемое формулой* (23), *где функция $\hat{\varepsilon}(x)$ ограничена при $x\to\infty$. Если же при некотором $\gamma>0$ сходится интеграл*

$$\sigma_{1+\gamma}(x)=\int_x^{\infty}\xi^{1+\gamma}|p(\xi)|\,d\xi, \tag{25}$$

то при $x\to\infty$

$$\left.\begin{aligned}\hat{e}(x, 0)&=x[1+o(x^{-\gamma})],\\ \hat{e}'_x(x, 0)&=1+o(x^{-\gamma}).\end{aligned}\right\} \tag{26}$$

4. Вронскиан решений $e(x, \rho)$ и $\hat{e}(x, \rho)$. Из асимптотических равенств (9) и (20) вытекает, что для вронскиана функций $e(x, \rho)$ и $\hat{e}(x, \rho)$ справедливо следующее соотношение:

$$w(e, \hat{e})=-2i\rho[1+o(1)],\quad x\to\infty.$$

Так как уравнение $l(y)=\rho^2 y$ не содержит y', то вронскиан здесь не зависит от x и $o(1)=0$. Следовательно,

$$w(e, \hat{e}) = -2i\rho, \quad \operatorname{Im}\rho > 0, \ |\rho| \geqslant \delta. \tag{27}$$

В этом подготовительном параграфе мы следовали в основном работе Наймарк [9].

§ 28. Спектр и резольвента оператора L

Напомним некоторые определения.

Пусть A — линейный оператор, действующий в гильбертовом пространстве $\mathfrak{H}$, с плотной областью определения $\mathfrak{D}_A$. *Собственные значения* A — это те комплексные числа λ, для которых оператор $A-\lambda 1$ не является взаимно однозначным. Для всех прочих значений λ существует оператор $(A-\lambda 1)^{-1}$. Этот оператор, рассматриваемый как функция параметра λ, называют *резольвентой* оператора A. *Резольвентным множеством* A называется совокупность всех тех комплексных чисел λ, для которых $(A-\lambda 1)^{-1}$ существует и является ограниченным оператором, определенным на всем пространстве $\mathfrak{H}$. Дополнение резольвентного множества в комплексной плоскости называется *спектром* оператора A. Очевидно, собственные значения принадлежат спектру. *Непрерывным спектром* называется совокупность тех точек λ спектра оператора A, для которых резольвента $(A-\lambda 1)^{-1}$ существует, имеет плотную в $\mathfrak{H}$ область определения, однако является неограниченным оператором.

В этом параграфе мы определим собственные значения, непрерывный спектр и резольвентное множество оператора L, порожденного в $L^2(0, \infty)$ дифференциальным выражением (1) и граничным условием (2). Если не оговорено противное, мы предполагаем лишь, что

$$\int_0^\infty |p(x)|\,dx < \infty. \tag{28}$$

Как и в предыдущем параграфе, мы следуем в основном работе Наймарк [9] *).

1. Собственные значения оператора L. Положим

$$\tilde{e}(x, \rho) = e(x, -\rho), \quad \operatorname{Im}\rho \geqslant 0, \tag{29}$$

*) Некоторые малосущественные детали уточнены.

где $e(x, \rho)$ — решение уравнения $l(y) = \rho^2 y$, описанное в теореме 1 § 27. Рассуждая, как при выводе формулы (27), мы находим

$$w(e, \tilde{e}) = -2i\rho, \quad \operatorname{Im} \rho = 0, \tag{30}$$

где $w(e, \tilde{e})$ — вронскиан функций $e(x, \rho)$, $\tilde{e}(x, \rho)$.

I. *Оператор L не имеет положительных собственных значений.*

Доказательство. Из формулы (30) вытекает, что при $\lambda > 0$ общее решение уравнения $l(y) = \lambda y$ имеет вид $y = C_1 e(x, \rho) + C_2 e(x, -\rho)$, где $\rho = \sqrt{\lambda}$. В силу (9) мы имеем $y = C_1 e^{ix\rho} + C_2 e^{-ix\rho} + o(1)$. Легко видеть, что такая функция ни для каких значений C_1 и C_2 не принадлежит $L^2(0, \infty)$, поскольку ее главная часть периодична.

II. *Если при некотором $\gamma > 0$ сходится интеграл* (25), *то число 0 тоже не является собственным значением оператора L.*

Действительно, в силу теорем 2 и 4 общее решение уравнения $l(y) = 0$ имеет в этом случае вид $y = C_1 + C_2 x [1 + o(x^{-\gamma})]$ и не принадлежит $L^2(0, \infty)$ ни для каких значений C_1 и C_2.

Рассмотрим теперь комплексные неположительные значения λ. Так как общее решение уравнения $l(y) = \lambda y$, удовлетворяющее граничному условию (2), имеет вид $y = Cs(x, \lambda)$ (см. (4)), то λ является собственным значением оператора L тогда и только тогда, когда $s(x, \lambda) \in L^2(0, \infty)$. Принимая во внимание (4) и (27), мы находим

$$s(x, \rho^2) = \frac{\hat{e}(\rho)\, e(x, \rho) - e(\rho)\, \hat{e}(x, \rho)}{2i\rho}, \quad \operatorname{Im} \rho > 0, \ |\rho| \geqslant \delta, \tag{31}$$

где

$$e(\rho) = e(0, \rho) \tag{32}$$

и

$$\hat{e}(\rho) = \hat{e}(0, \rho). \tag{33}$$

III. *Для того чтобы $\lambda \neq 0$ было собственным значением оператора L, необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lambda = \rho^2, \quad \operatorname{Im} \rho > 0, \quad e(\rho) = 0. \tag{34}$$

Доказательство. В силу (9) и (20) $e(x, \rho) \in L^2(0, \infty)$, а $\hat{e}(x, \rho) \overline{\in} L^2(0, \infty)$. Следовательно, в силу (31) $s(x, \rho^2) \in L^2(0, \infty)$ тогда и только тогда, когда $e(\rho) = 0$.

IV. *Множество собственных значений оператора L ограничено, не более чем счетно, а его предельные точки могут находиться только на полуоси $\lambda \geqslant 0$.*

Действительно, в силу (10), при $\operatorname{Im} \rho \geqslant 0$, $\rho \to \infty$

$$e(\rho) = 1 + O\left(\frac{1}{\rho}\right). \tag{35}$$

Следовательно, множество корней уравнения $e(\rho)=0$ ограничено в полуплоскости $\operatorname{Im}\rho>0$. Так как в этой полуплоскости функция $e(\rho)=e(0, \rho)$ голоморфна (см. теорему I § 27), то множество ее корней не более чем счетно и может иметь предельные точки лишь на оси $\operatorname{Im}\rho=0$. Теперь предложение IV вытекает из III.

2. Непрерывный спектр и резольвента оператора *L*. Предварительно докажем следующее утверждение.

Лемма 1. *Для каждого* $\tau>0$ *формулы*

$$A_0 f(x)=e^{-\tau x}\int_0^x e^{\tau\xi} f(\xi)\,d\xi,$$

$$B_0 f(x)=e^{\tau x}\int_x^\infty e^{-\tau\xi} f(\xi)\,d\xi$$

определяют в пространстве $L^2(0, \infty)$ *линейные непрерывные операторы, причем*

$$\|A_0\|<\frac{1}{\tau}, \quad \|B_0\|<\frac{1}{\tau}.$$

Доказательство. Пусть $f\in L^2(0, \infty)$ и $g=A_0 f$. Тогда

$$|g(x)|\leqslant e^{-\tau x}\left[\int_0^{x/2} e^{\tau\xi}|f(\xi)|\,d\xi+\int_{x/2}^x e^{\tau\xi}|f(\xi)|\,d\xi\right]\leqslant$$

$$\leqslant e^{-\tau x}\left[\left(\frac{e^{\tau x}-1}{2\tau}\right)^{1/2}\left(\int_0^{x/2}|f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}+\left(\frac{e^{2\tau x}-e^{\tau x}}{2\tau}\right)^{1/2}\left(\int_{x/2}^x|f(\xi)|^2\,d\xi\right)^{1/2}\right],$$

и потому

$$g(x)\to 0 \quad \text{при} \quad x\to\infty. \tag{36}$$

Кроме того,

$$g(0)=0, \quad \frac{dg(x)}{dx}=-\tau g(x)+f(x),$$

следовательно,

$$\frac{d|g(x)|^2}{dx}=-2\tau|g(x)|^2+f(x)\overline{g(x)}+\overline{f(x)}g(x).$$

Интегрируя обе части последнего равенства от 0 до ∞ и учитывая (36), заключаем, что

$$0=-2\tau\int_0^\infty|g(x)|^2dx+\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\,dx+\int_0^\infty\overline{f(x)}g(x)\,dx.$$

Отсюда с помощью неравенства Коши — Буняковского мы находим, что $\|g\| \leqslant \tau^{-1}\|f\|$. Утверждение леммы, касающееся оператора B_0, доказывается аналогично.

Теорема 1. *Все числа λ вида $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im}\rho > 0$, $e(\rho) \neq 0$ принадлежат резольвентному множеству оператора L. Резольвента $R_\lambda = (L - \lambda 1)^{-1}$ является интегральным оператором*

$$R_\lambda f(x) = \int_0^\infty R(x, \xi, \lambda) f(\xi)\, d\xi \tag{37}$$

с ядром

$$R(x, \xi; \rho^2) = \begin{cases} \dfrac{e(x, \rho)\, s(\xi, \rho^2)}{e(\rho)} & \text{при} \quad 0 < \xi < x, \\ \dfrac{s(x, \rho^2)\, e(\xi, \rho)}{e(\rho)} & \text{при} \quad x < \xi < \infty. \end{cases} \tag{38}$$

Для каждого $\delta > 0$ существует такое $C_\delta > 0$, что

$$\|R_{\rho^2}\| \leqslant \frac{C_\delta}{|e(\rho)| \operatorname{Im}\rho} \quad \text{при} \quad \operatorname{Im}\rho > 0, \quad |\rho| \geqslant \delta. \tag{39}$$

Доказательство. Положим $y = (A + B) f$, где

$$Af(x) = \frac{e(x, \rho)}{e(\rho)} \int_0^x s(\xi, \rho^2) f(\xi)\, d\xi, \qquad Bf(x) = \frac{s(x, \rho^2)}{e(\rho)} \int_x^\infty e(\xi, \rho) f(\xi)\, d\xi.$$

Нетрудно проверить, что y удовлетворяет дифференциальному уравнению $l(y) = \rho^2 y + f$ и граничному условию $y(0) = 0$, так что $y = R_\lambda f$. Теперь воспользуемся следующими оценками:

$$|\rho s(x, \rho^2)| \leqslant C_\delta e^{\tau x}, \quad |e(x, \rho)| \leqslant C_\delta e^{-\tau x}, \quad \tau = \operatorname{Im}\rho > 0, \quad |\rho| \geqslant \delta. \tag{40}$$

Первая из оценок (40) вытекает из леммы 1 n° 1 § 27, а вторая — из соотношения (9). На основании оценок (40) и леммы 1 настоящего n° заключаем, что

$$\|A\| \leqslant \frac{C_\delta}{|e(\rho)|\, \tau}, \quad \|B\| \leqslant \frac{C_\delta}{|e(\rho)|\, \tau},$$

и, таким образом, теорема доказана.

Теорема 2. *Для каждого $r > 0$ существует такое $c_r > 0$, что*

$$\|R_{\rho^2}\| \geqslant \frac{c_r}{|e(\rho)| \sqrt{\operatorname{Im}\rho}} \tag{41}$$

для всех ρ из области $\operatorname{Im}\rho > 0$, $|\rho| \leqslant r$. В частности,

$$\|R_\lambda\| \to \infty \tag{42}$$

если λ принадлежит резольвентному множеству и $\lambda \to \lambda_0 > 0$.

Доказательство. Пусть $f_b(x)=\overline{s(x, \rho^2)}$ при $0<x<b$ и $f_b(x)=0$ при $b<x<\infty$. Тогда $f_b\in L^2(0, \infty)$ и $R_{\rho^2}f_b(x)=\|f_b\|^2 e(x, \rho)/e(\rho)$ при $b<x<\infty$ (см. (37), (38)). Поэтому

$$\| R_{\rho^2}f_b\|^2 \geqslant \int_b^\infty | R_{\rho^2}f(x)|^2\,dx = \frac{|f_b|^4}{|e(\rho)|^2}\int_b^\infty |e(x, \rho)|^2\,dx.$$

Выберем $b=b_\delta$ настолько большим, чтобы при $b<x<\infty$, $\operatorname{Im}\rho\geqslant 0$, $|\rho|>\delta$ выполнялось неравенство $|e(x, \rho)|>{}^1/_2\,e^{-\tau x}$ (это возможно в силу (9)). Тогда $\int_b^\infty |e(x, \rho)|^2\,dx\geqslant e^{-2\tau b}/8\tau$ и

$$\| R_{\rho^2}\|\geqslant \frac{\|f_b\|\, e^{-\tau b}}{|e(\rho)|\,2\sqrt{2\tau}}.$$

Далее

$$\|f_b\|^2=\int_0^b |s(x, \rho^2)|^2\,dx>0,$$

а так как последний интеграл является непрерывной функцией от ρ, то в каждом полукруге $\operatorname{Im}\rho\geqslant 0$, $|\rho|\leqslant r$, этот интеграл ограничен снизу положительной константой. Теорема доказана.

Из соотношения (42) вытекает, что вся полуось $\lambda\geqslant 0$ принадлежит спектру оператора L. Действительно, на резольвентном множестве резольвента является аналитической функцией параметра λ, а поэтому ее норма локально ограничена.

V. *Все числа* $\lambda>0$ (*а в условиях предложения* II, *все числа* $\lambda\geqslant 0$) *принадлежат непрерывному спектру оператора* L.

Доказательство. Достаточно доказать, что при $\lambda>0$ область значений $\mathfrak{R}_{L-\lambda 1}$ оператора $L-\lambda 1$ плотна в пространстве $L^2(0, \infty)$, т. е. что ортогональное дополнение множества $\mathfrak{R}_{L-\lambda 1}$ состоит из одного лишь нулевого элемента. Однако ортогональное дополнение $\mathfrak{R}_{L-\lambda 1}$ совпадает с пространством решений уравнения $L^*f=\lambda f$. Нетрудно видеть, что оператор L^*, сопряженный с оператором L, порождается дифференциальным выражением $l^*(y)=-y''+\overline{p(x)}\,y$ и граничным условием $y(0)=0$. Следовательно, в силу предложения I, числа $\lambda>0$ не могут быть собственными значениями оператора L^*, что и требовалось доказать.

§ 29. Разложение по главным функциям оператора L

В этом параграфе будет построено разложение по собственным и присоединенным функциям (см. n° 3 § 2) оператора L. В отличие от самосопряженного случая, это разложение будет выражаться не с помощью интеграла Стильтьеса, а посредством регуляризованного значения расходящегося интеграла.

1. Дополнительное ограничение. В этом параграфе мы будем всюду предполагать, что выполняется следующее дополнительное ограничение: *существует такое* $\varepsilon>0$, *что*

$$\int_0^\infty e^{\varepsilon x}|p(x)|\,dx<\infty, \tag{43}$$

где $p(x)$ — коэффициент дифференциального выражения (1). Из условия (43) вытекает, что

$$\sigma(x)=\int_x^\infty |p(\xi)|\,d\xi\leqslant Ce^{-\varepsilon x},\quad \sigma_1(x)=\int_x^\infty \xi|p(\xi)|\,d\xi\leqslant C_{\varepsilon'}e^{-\varepsilon' x}, \tag{44}$$

где $0<\varepsilon'<\varepsilon$, а C и $C_{\varepsilon'}$ — положительные постоянные. Следовательно, оценки (14) и (15) можно усилить следующим образом:

$$|k(x,\,t)|\leqslant Ce^{-\varepsilon\frac{x+t}{2}}, \tag{45}$$

$$|k'_x(x,\,t)|,\quad |k'_t(x,\,t)|\leqslant\frac{1}{4}\left|p\left(\frac{x+t}{2}\right)\right|+Ce^{-\varepsilon\left(\frac{3}{2}x+t\right)}; \tag{46}$$

здесь $0\leqslant x\leqslant t<\infty$, а C — некоторое положительное число.

I. *Для каждого* $x\geqslant 0$ *функция*

$$e(x,\,\rho)=e^{ix\rho}+\int_x^\infty k(x,\,t)\,e^{it\rho}\,dt \tag{47}$$

и, в частности, функция $e(\rho)=e(0,\,\rho)$ *голоморфны по* ρ *в полуплоскости* $\operatorname{Im}\rho>-\varepsilon/2$.

Действительно, если $\operatorname{Im}\rho>-\varepsilon/2$, то в силу оценки (45) интеграл в правой части (47), а также интеграл, полученный из него формальным дифференцированием по ρ, сходится.

Отметим, что в силу единственности аналитического продолжения, функция $e(x,\,\rho)$ удовлетворяет интегральному уравнению (7) не только в полуплоскости $\operatorname{Im}\rho\geqslant 0$, но и при $\operatorname{Im}\rho>-\varepsilon/2$. Отсюда вытекает, что $y=e(x,\,\rho)$ *является решением уравнения* $l(y)=\rho^2 y$ *при* $0\leqslant x<\infty$, $\operatorname{Im}\rho>-\varepsilon/2$. В качестве следствия получаем

II. *Уравнение* $l(y)=\rho^2(y)$ *имеет в полосе* $|\operatorname{Im}\rho|<\varepsilon/2$ *фундаментальную систему решений* $y_1=e(x,\rho)$, $y_2=\tilde e(x,\rho)=e(x,\,-\rho)$, *причем*

$$w(e,\,\tilde e)=-2i\rho,\quad |\operatorname{Im}\rho|<\frac{\varepsilon}{2}, \tag{48}$$

где $w(e,\,\tilde e)$ — *вронскиан функций* e *и* $\tilde e$ (ср. с (30)).

Отметим еще, что теперь формулу (31) можно дополнить следующей:

$$s(x, \rho^2) = \frac{e(-\rho)\,e(x, \rho) - e(\rho)\,e(x, -\rho)}{2i\rho}, \quad |\operatorname{Im}\rho| < \frac{\varepsilon}{2}. \tag{49}$$

Условие (43) было введено в работе Наймарк [9].

2. Сингулярные числа и спектральные особенности оператора L. *Сингулярными числами* оператора L мы будем называть корни ρ_k уравнения $e(\rho) = 0$, удовлетворящие условиям $\rho_k \neq 0$, $\operatorname{Im}\rho_k \geqslant 0$.

III. *Множество сингулярных чисел оператора L (удовлетворяющего дополнительному ограничению* (43)) *конечно.*

Доказательство вытекает непосредственно из предложения I, соотношения (35) и аналитичности функции $e(\rho)$ в полуплоскости $\operatorname{Im}\rho > -\varepsilon/2$.

Невещественные сингулярные числа обозначим через $\rho_1, \ldots, \rho_\alpha$, а вещественные — через $\rho_{\alpha+1}, \ldots, \rho_\beta$. Таким образом,

$$\begin{aligned} &\operatorname{Im}\rho_k > 0 \quad \text{при} \quad k = 1, \ldots, \alpha, \\ &\operatorname{Im}\rho_k = 0 \quad \text{при} \quad k = \alpha + 1, \ldots, \beta. \end{aligned} \tag{50}$$

Кратность m_k корня ρ_k уравнения $e(\rho) = 0$ будем называть *кратностью сингулярного числа* ρ_k, $k = 1, \ldots, \beta$.

В соответствии с предложением III § 28 числа $\lambda_k = \rho_k^2$, $k = 1, \ldots, \alpha$ являются собственными значениями оператора L, и других собственных значений этот оператор не имеет. Числа $\lambda_k = \rho_k^2$, $k = \alpha + 1, \ldots, \beta$ мы назовем *спектральными особенностями* оператора L. Из предложения V § 28 вытекает, что спектральные особенности являются точками непрерывного спектра.

Особая роль, принадлежащая точкам $\lambda_{\alpha+1}, \ldots, \lambda_\beta$, была впервые обнаружена в работе Наймарк [9]. Сам термин «спектральная особенность» был введен позже в работе Шварц [2]. Детальному исследованию операторов со спектральными особенностями посвящены работы Лянце [2—6] и Павлов [1—3].

Нетрудно проверить, что в случае, когда $\operatorname{Im} p(x) \equiv 0$, при $\operatorname{Im}\rho = 0$ имеет место равенство $e(\rho) = \overline{e(-\rho)}$. Отсюда вытекает, что *самосопряженный оператор L не имеет спектральных особенностей.* Действительно, в силу равенства (48), если $\rho \neq 0$, $e(\rho) = 0$, то $e(-\rho) \neq 0$.

Замечание. В дальнейшем (см. п° 5 § 30) будет описано решение обратной задачи спектрального анализа для оператора L и, в частности, будет изложен метод, позволяющий строить операторы L с заданными спектральными особенностями и собственными значениями заданной кратности. Здесь ограничимся примером оператора со спектральной особенностью, основанным на следующем простом замечании.

Если в дифференциальном выражении $l(y)$ коэффициент $p(x)$ равен нулю при $x > b$, то при $x > b$ решение $e(x, \rho)$ уравнения $l(y) = \rho^2 y$ равно $e^{ix\rho}$, а поэтому удовлетворяет начальным условиям $e(b, \rho) = e^{i\rho b}$, $e'_x(b, \rho) = i\rho e^{i\rho b}$. Пусть теперь $\rho_0 \neq 0$ — произвольное вещественное число, а $\varphi(x)$ — функция, дважды непрерывно дифференцируемая при $0 \leqslant x \leqslant b$ и удовлетворяющая условиям

$$\varphi(0) = 0, \quad \varphi(b) = e^{i\rho_0 b}, \quad \varphi'(b) = i\rho_0 e^{i\rho_0 b}.$$

Положим $p(x) = \dfrac{\varphi''(x)}{\varphi(x)} + \rho_0^2$ при $0 \leqslant x \leqslant b$ и $p(x) = 0$ при $b < x < \infty$. Очевидно, что при таком выборе $p(x)$ выполняется равенство $e(x, \rho_0) = \varphi(x)$ при $0 \leqslant x \leqslant b$ и, в частности, $e(\rho_0) = \varphi(0) = 0$. Поэтому соответствующий оператор L имеет число ρ_0 своей спектральной особенностью.

Заметим, что если краевое условие $y(0) = 0$ заменить условием вида $y'(0) = \theta\, y(0)$, то при $p(x) \equiv 0$ и чисто мнимом θ число $-i\theta$ будет спектральной особенностью соответствующего оператора L.

3. Главные функции оператора *L*. Из соотношений (45) и (47) вытекает, что

$$e^{(m)}(x, \rho) = \left(\frac{d}{d\rho}\right)^m e(x, \rho) \in L^2(0, \infty) \tag{51}$$

$$\text{при} \quad \operatorname{Im}\rho > 0 \quad \text{и} \quad m = 0, 1, 2, \ldots$$

Следовательно, принимая во внимание формулу (31) и учитывая, что $e^{(m)}(\rho_k) = 0$ при $k = 1, \ldots, \alpha$, $m = 0, \ldots, m_k - 1$, мы видим, что

$$s^{(m)}(x, \lambda_k) = \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m s(x, \lambda)\big|_{\lambda=\lambda_k} \in L^2(0, \infty) \tag{52}$$

$$\text{при } k = 1, \ldots, \alpha, \quad m = 0, \ldots, m_k - 1,$$

где m_k — кратность сингулярного числа ρ_k, а $\lambda_k = \rho_k^2$. Функции $s^{(m)}(x, \lambda_k)$, $k = 1, \ldots, \alpha$, $m = 0, \ldots, m_k - 1$ мы будем называть *главными функциями точечного спектра оператора* L. При этом $s(x, \lambda_k)$ — собственная функция, а $s^{(1)}(x, \lambda_k), \ldots, s^{(m_k-1)}(x, \lambda_k)$ — присоединенные функции, отвечающие собственному значению λ_k. Таким образом, число m_k оказывается длиной цепочки главных функций (отвечающих λ_k) или, как говорят, *алгебраической кратностью* собственного значения λ_k.

Функции $s(x, \lambda)$, $\lambda > 0$, мы будем называть *главными функциями непрерывного спектра оператора* L. Подчеркнем, что эти функции не являются элементами гильбертова пространства $L^2(0, \infty)$.

Для построения спектральных разложений, отвечающих оператору L, нам понадобятся еще функции $s^{(m)}(x, \lambda_k)$ $k = \alpha + 1, \ldots, \beta$, $m = 0, \ldots, m_k - 1$, которые мы будем называть *главными* *функциями спектральных особенностей оператора* L *). Укажем оценку для этих функций.

Из соотношений (45), (47) мы заключаем, что

$$\sup_{0 \leqslant x < \infty} \frac{|e^{(m)}(x, \rho)|}{(1+x)^m} < \infty, \quad \operatorname{Im} \rho = 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{53}$$

при этом $e^{(m)} = (d/d\rho)^m e$. Следовательно, в силу (49)

$$\sup_{0 \leqslant x < \infty} \frac{|s^{(m)}(x, \lambda)|}{(1+x)^m} < \infty, \quad \lambda > 0, \qquad m = 0, 1, 2, \ldots, \tag{54}$$

где $s^{(m)} = (d/d\lambda)^m s$.

4. Разложение ядра резольвенты по главным функциям. Обозначим через $\Gamma_{R,\eta}$ контур в комплексной λ-плоскости, составленный из следующих дуг: 1) из дуги $C_{R,\eta}$ окружности $|\lambda| = R$, не содержащей точек λ, удовлетворяющих неравенствам $|\operatorname{Im}\lambda| < \eta$, $\operatorname{Re}\lambda > 0$; 2) из дуги c_η, состоящей из точек λ, для которых $|\lambda| = \eta$ и $\operatorname{Re}\lambda < 0$; 3) из отрезков, параллельных оси $\operatorname{Im}\lambda = 0$, соединяющих концы дуг $C_{R,\eta}$ и c_η (рис. 16). Контур $\Gamma_{R,\eta}$ ориентируем так, чтобы при его обходе в положительном направлении точка $\lambda = 0$ оставалась справа.

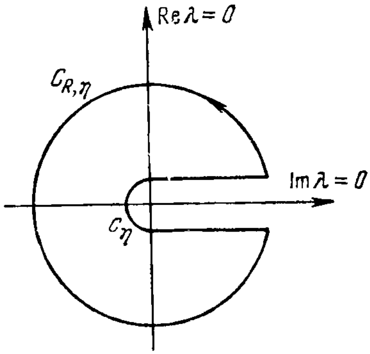

Рис. 16.

Рассмотрим произвольную точку z из резольвентного множества оператора R и выберем настолько большое R и настолько малое $\eta > 0$, чтобы точки $z, \lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$ оказались внутри (т. е. слева от) контура $\Gamma_{R,\eta}$. Положим

$$I_{R,\eta} = \frac{1}{2\pi i} \int\limits_{\Gamma_{R,\eta}} \frac{R(x, \xi; \lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda,$$

где $R(x, \xi; \lambda)$ — ядро резольвенты оператора L. Из формулы (38) вытекает, что функция $R(x, \xi; \lambda)$ аналитична внутри контура $\Gamma_{R,\eta}$ и не имеет там других особенностей, кроме полюсов $\lambda_1, \ldots, \lambda_\alpha$,

*) Спектральное разложение с привлечением присоединенных функций непрерывного спектра было получено, по-видимому, впервые в работе Павлов [2] (см. также Павлов [3]).

кратности которых равны соответственно $m_1, \ldots, m_\alpha$. Поэтому

$$I_{R,\eta} = R(x, \xi; z) + \sum_{k=1}^{\alpha} \operatorname{Res}_{\lambda=\lambda_k} \frac{R(x, \xi; \lambda)}{\lambda - z}. \tag{55}$$

Принимая во внимание начальные условия (4), мы находим, что

$$e(x, \rho) = e'_x(0, \rho)\, s(x, \rho^2) + e(0, \rho)\, c(x, \rho^2), \quad \operatorname{Im} \rho > -\frac{\varepsilon}{2}. \tag{56}$$

Следовательно, учитывая, что $c(x, \lambda)$ — целая функция от λ, мы можем переписать формулу (38) в следующем виде:

$$R(x, \xi; \lambda) = \frac{e'_x(0, \sqrt{\lambda})}{e(\sqrt{\lambda})}\, s(x, \lambda)\, s(\xi, \lambda) + \ldots; \tag{57}$$

здесь $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} > 0$, а многоточие обозначает целую функцию от λ. Положим

$$M_k(\lambda) = -\frac{(\lambda - \lambda_k)^{m_k}}{(m_k - 1)!} \frac{e'_x(0, \sqrt{\lambda})}{e(\sqrt{\lambda})}, \quad k = 1, \ldots, \alpha; \tag{58}$$

здесь мы тоже считаем, что $\operatorname{Im} \sqrt{\lambda} > 0$. Применяя известные формулы для вычисления вычетов, мы можем теперь переписать равенство (55) в виде

$$R(x, \xi; z) = I_{R,\eta} + \sum_{k=1}^{\alpha} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{m_k - 1} M_k(\lambda) \frac{s(x, \lambda)\, s(\xi, \lambda)}{\lambda - z} \right\}_{\lambda=\lambda_k}. \tag{59}$$

Представим теперь интеграл $I_{R,\eta}$ в другом виде, деформируя надлежащим образом контур интегрирования. Прежде всего, из соотношений (35), (38) и (40) вытекает, что для больших λ

$$|R(x, \xi; \lambda)| \leqslant \frac{C}{|\sqrt{\lambda}|}, \tag{60}$$

где $C = C(x, \xi) > 0$. Следовательно, при $R \to \infty$

$$\int_{C_{R,\eta}} \frac{R(x, \xi; \lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda \to 0.$$

Поэтому

$$I_{R,\eta} = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_\eta} \frac{R(x, \xi; \lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda, \tag{61}$$

где Γ_η — контур, составленный из полуокружности c_η и двух лучей, проведенных из концов c_η параллельно оси $\operatorname{Im} \lambda = 0$ (рис. 17).

Воспользуемся теперь следующим предложением.

Лемма 1. *Число 0 не может быть корнем кратности выше первой уравнения* $e(\rho)=0$.

Доказательство вытекает непосредственно из соотношения (48), так как из (46) и (47) следует, что функция $e'_x(0, \rho)$ голоморфна при $\operatorname{Im}\rho > -\varepsilon/2$.

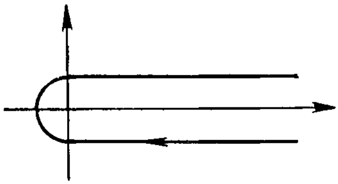

Рис. 17.

На основании леммы 1 и формулы (57) мы заключаем, что при $\eta \to +0$

$$\int\limits_{c_\eta} \frac{R(x, \xi; \lambda)}{\lambda - z} dz \to 0. \qquad (62)$$

Рассмотрим разрез комплексной λ-плоскости вдоль полуоси $\lambda \geqslant 0$. Условимся говорить, что спектральная особенность $\lambda_k = \rho_k^2$, $e(\rho_k)=0$ лежит на верхнем (нижнем) краю этого разреза, если $\rho_k > 0$ ($\rho_k < 0$). (Напомним, что в силу равенства (48) из $|\operatorname{Im}\rho| < \varepsilon/2$, $\rho \neq 0$, $e(\rho)=0$ вытекает $e(-\rho) \neq 0$.) Из каждой точки λ_k на верхнем (нижнем) краю разреза опишем полуокружность $|\lambda - \lambda_k| = \delta$, $\operatorname{Im}\lambda \geqslant 0$ ($\operatorname{Im}\lambda < 0$), причем δ выберем настолько малым, чтобы горизонтальные диаметры построенных полуокружностей попарно не пересекались и не содержали точку 0. Затем обозначим через Γ контур, полученный из полуоси $\lambda \geqslant 0$ заменой диаметров построенных полуокружностей

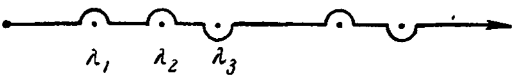

Рис. 18.

этими полуокружностями (рис. 18). Наконец, обозначим через $(\sqrt{\lambda})_\Gamma$ ту непрерывную вдоль контура Γ ветвь квадратного корня, которая удовлетворяет условию: $\sqrt{\lambda} > 0$ при $\lambda > 0$ (т. е. $\operatorname{Re}(\sqrt{\lambda})_\Gamma > 0$ при $\lambda \in \Gamma$).

Теорема 1. *Для каждой точки z, принадлежащей резольвентному множеству оператора L, справедливо следующее разложение ядра резольвенты этого оператора по его главным функциям*:

$$R(x, \xi; \lambda) = \frac{1}{\pi} \int\limits_\Gamma \frac{s(x, \lambda)\, s(\xi, \lambda)}{\lambda - z} \frac{(\sqrt{\lambda})_\Gamma\, d\lambda}{e((\sqrt{\lambda})_\Gamma)\, e((-\sqrt{\lambda})_\Gamma)} +$$
$$+ \sum_{k=1}^{\alpha} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k - 1} M_k(\lambda) \frac{s(x, \lambda)\, s(\xi, \lambda)}{\lambda - z} \right\}_{\lambda = \lambda_k}; \qquad (63)$$

здесь $M_k(\lambda)$ *определяется формулой* (58), *а интеграл в правой части* (63) *сходится абсолютно и равномерно относительно* x *и* ξ, *меняющихся в любом конечном интервале* $0 \leqslant x \leqslant a$, $0 \leqslant \xi \leqslant b$, *и* z, *меняющемся в любой компактной части резольвентного множества.*

Доказательство. Сопоставляя соотношения (61) и (62), используя формулу (57) и известные свойства контурных интегралов от аналитических функций, находим, что

$$I_{R,\eta} = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma}\left[\frac{e'_x(0, (\sqrt{\lambda})_\Gamma)}{e((\sqrt{\lambda})_\Gamma)} - \frac{e'_x(0, -(\sqrt{\lambda})_\Gamma)}{e(-(\sqrt{\lambda})_\Gamma)}\right]\frac{s(x, \lambda)\, s(\xi, \lambda)}{\lambda - z}\, d\lambda.$$

Поэтому в силу (48) выражение $I_{R,\eta}$ равно интегралу в правой части (63). Таким образом, формула (63) вытекает из равенства (59). На основании оценок (40) мы заключаем, что для достаточно больших $\lambda \geqslant 0$

$$\left|\frac{s(x, \lambda)\, s(\xi, \lambda)}{\lambda - z}\,\frac{\sqrt{\lambda}}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})}\right| < \frac{C}{\lambda^{3/2}}, \tag{64}$$

что доказывает абсолютную и равномерную сходимость интеграла в правой части (63).

Теорема 1 была получена впервые в работе Наймарк [9]. (В этой работе формула (63) записана в несколько других обозначениях и применительно к краевому условию вида $y'(0) = \theta y(0)$.) Приведенное в работе Наймарк [9] доказательство теоремы 1 напоминает вывод Б. М. Левитана разложения по собственным функциям самосопряженного дифференциального оператора (см. n° 2 § 21) в том отношении, что оно содержит предельный переход при $b \to \infty$ для оператора L_b, порожденного дифференциальным выражением (1) в конечном интервале $(0, b)$ (и некоторыми краевыми условиями на концах этого интервала). Однако в несамосопряженном случае для обоснования предельного перехода не удается воспользоваться теоремами Хелли. В связи с этим в работе Наймарк [9] для обоснования предельного перехода привлечены некоторые тонкие свойства оператора L_b такие, как, например, поведение ядра резольвенты $(L_b - \lambda 1)^{-1}$ при $b \to \infty$, представляющие самостоятельный интерес.

Техника контурного интегрирования, использованная здесь для вывода формулы (63), встречается весьма часто (см., например, n° 3 § 5 или n° 2 § 9).

5. Преобразование формулы разложения. Если λ не является собственным значением оператора L, то при $x \to \infty$ функция $s(x, \lambda)$ растет как $\exp(x\,|\operatorname{Im}\sqrt{\lambda}|)$. Поскольку полуокружности, посредством которых контур Γ обходит спектральные особенности, можно выбрать сколь угодно малыми, то можно добиться того, чтобы подынтегральная функция в (63) при $\lambda \in \Gamma$ имела сколь угодно малый показательный рост при $x, \xi \to \infty$. В связи с этим естественно попытаться преобразовать формулу (63) так, чтобы контуром интегрирования стала полуось

$\lambda \geqslant 0$ и чтобы подынтегральная функция росла медленнее, чем экспонента.

С этой целью обозначим через $B_{kj}(\lambda)$ какие-либо функции, заданные на полуоси $\lambda \geqslant 0$ и в некоторой окрестности (на λ-плоскости) спектральных особенностей $\lambda_{\alpha+1}, \ldots, \lambda_\beta$. Потребуем выполнения следующих условий:

а) функции $B_{kj}(\lambda)$ измеримы на полуоси $\lambda \geqslant 0$ и

$$\sup_{\lambda \geqslant 0} (1+\lambda)^2 |B_{kj}(\lambda)| < \infty; \tag{65}$$

б) функции $B_{kj}(\lambda)$ голоморфны в окрестности точек $\lambda_{\alpha+1}, \ldots, \lambda_\beta$ и

$$\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{j'} B_{kj}(\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_{k'}} = \begin{cases} 1 & \text{при } j=j', \quad k=k', \\ 0 & \text{в остальных случаях,} \end{cases} \tag{66}$$

$k,\ k' = \alpha+1, \ldots, \beta,\ j=0, \ldots, m_k - 1,\ j' = 0, \ldots, m_{k'} - 1.$

Примером функций, удовлетворяющих указанным выше условиям, могут служить

$$B_{kj}(\lambda) = \begin{cases} \dfrac{(\lambda-\lambda_k)^j}{j!} & \text{при } |\lambda-\lambda_k| < \delta, \\ 0 & \text{при } |\lambda-\lambda_k| \geqslant \delta, \end{cases} \tag{67}$$

где $\delta > 0$ — настолько малое число, что δ-окрестности точек $\lambda_{\alpha+1}, \ldots, \lambda_\beta$ попарно не пересекаются и не содержат точку нуль.

Далее положим

$$[B\Phi(\lambda)] = \Phi(\lambda) - \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \sum_{j=0}^{m_k-1} B_{kj}(\lambda)\,\Phi^{(j)}(\lambda_k); \tag{68}$$

здесь $\Phi(\lambda)$ — произвольная функция, для которой правая часть (68) имеет смысл. В силу (66) каждое из чисел λ_k будет корнем уравнения $[B\Phi(\lambda)] = 0$ кратности не меньше m_k, $k = \alpha+1, \ldots, \beta$.

Воспользуемся свойством независимости от контура интегрирования интеграла от аналитической функции и представим интеграл в правой части формулы (63) в виде

$$\int_\Gamma \frac{s(x,\lambda)\, s(\xi,\lambda)}{\lambda - z} \frac{(\sqrt{\lambda})_\Gamma\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} =$$
$$= \int_0^\infty \left[B\, \frac{s(x,\lambda)\, s(\xi,\lambda)}{\lambda - z}\right] \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} +$$
$$+ \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \sum_{j=0}^{m_k-1} \int_\Gamma \frac{B_{kj}(\lambda)\,(\sqrt{\lambda})_\Gamma\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} \left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^j \frac{s(x,\lambda)\, s(\xi,\lambda)}{\lambda - z}\right\}_{\lambda=\lambda_k}; \tag{68a}$$

сходимость интегралов по контуру Γ здесь обеспечивается условием (65).

Введем теперь функцию $M_k(\lambda)$, удовлетворяющую условию

$$M_k^{(m_k-1-j)}(\lambda_k) = \frac{1}{\pi}\,\frac{j!\,(m_k-1-j)!}{(m_k-1)!}\int\limits_{\Gamma}\frac{B_{kj}(\lambda)(\sqrt{\lambda})_\Gamma\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})} \tag{69}$$

и в остальном произвольную.

Тогда второе слагаемое в правой части равенства (68а) можно записать в виде

$$\sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\frac{s(x,\lambda)\,s(\xi,\lambda)}{\lambda-z}\right\}_{\lambda=\lambda_k},$$

и формула (63) принимает вид

$$R(x,\xi;\lambda) = \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\infty\left[B\,\frac{s(x,\lambda)\,s(\xi,\lambda)}{\lambda-z}\right]\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})} +$$
$$+\sum_{k=1}^{\beta}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\frac{s(x,\lambda)\,s(\xi,\lambda)}{\lambda-z}\right\}_{\lambda=\lambda_k}; \tag{70}$$

здесь $\sqrt{\lambda}\geqslant 0$, а интеграл сходится абсолютно и равномерно в каждой конечной области изменения x, ξ и z (принадлежащего резольвентному множеству).

Метод «регуляризации» расходящегося интеграла

$$\int\limits_0^\infty \frac{s(x,\lambda)\,s(\xi,\lambda)}{\lambda-k}\,\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})},$$

которым мы здесь воспользовались, заимствован из работы Лянце [3].

6. L-преобразование Фурье. Теперь мы перейдем к задаче разложения по главным функциям оператора L произвольной функции $f\in L^2(0,\infty)$. С этой целью рассмотрим сначала соответствующее обобщение преобразования Фурье.

Лемма 2. *Существует такое число $C>0$, что для каждой финитной* *) *функции* $f\in L^2(0,\infty)$

$$\int\limits_0^\infty |s(f,\lambda)|^2\sqrt{\lambda}\,d\lambda \leqslant C\int\limits_0^\infty |f(x)|^2\,dx, \tag{71}$$

---

*) Функцию $f(x)$, $0<x<\infty$, мы называем финитной, если существует такое $a>0$, что $f(x)=0$ при $x>a$.

где

$$s(f, \lambda) = \int_0^\infty f(x)\, s(x, \lambda)\, dx. \tag{72}$$

Доказательство. Положим

$$kf(t) = \int_0^t k(x, t) f(x)\, dx. \tag{73}$$

В силу (45)

$$|kf(t)| \leqslant Ce^{-\frac{\varepsilon t}{2}} \int_0^t e^{-\frac{\varepsilon x}{2}} |f(x)|\, dx,$$

откуда, как легко видеть, вытекает, что $1+k$ является линейным оператором, отображающим пространство $L_2(0, \infty)$ на себя (взаимно однозначно и) непрерывно.

В силу формулы (49)

$$2i\rho s(f, \rho^2) = e(-\rho)\, e(f, \rho) - e(\rho)\, e(f, -\rho),$$

где

$$e(f, \rho) = \int_0^\infty f(x)\, e(x, \rho)\, dx = \int_0^\infty [(1+k) f](x)\, e^{ix\rho}\, dx \tag{74}$$

(см. формулу (47)). Поэтому, применяя равенство Парсеваля (для классического преобразования Фурье), мы получим

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho s(f, \rho^2)|^2\, d\rho \leqslant \tilde{C} \int_0^\infty |[(1+k) f](x)|^2\, dx,$$

где $\tilde{C}$ — некоторое положительное число. Ввиду отмеченной выше непрерывности оператора $1+k$ последнее неравенство эквивалентно утверждению леммы.

Определение 1. В силу леммы 2 для каждой функции $f \in L_2(0, \infty)$ предел

$$s(f, \lambda) = \lim_{\xi \to \infty} \int_0^\xi f(x)\, s(x, \lambda)\, dx \tag{75}$$

существует в следующем смысле:

$$\int_0^\infty \left| s(f, \lambda) - \int_0^\xi s(x, \lambda) f(x)\, dx \right|^2 \sqrt{\lambda}\, d\lambda \to 0$$

при $\xi\to\infty$. Кроме того, в силу включений (52) для каждой функции $f\in L^2(0,\infty)$ сходятся интегралы

$$s^{(m)}(f,\lambda_k)=\int_0^\infty f(x)s^{(m)}(x,\lambda_k)\,dx \tag{76}$$
$$m=0,\ldots,m_k-1,\quad k=1,\ldots,\alpha.$$

Совокупность, составленную из предела (75) и интегралов (76), мы будем называть *L-преобразованием Фурье функции* $f\in L^2(0,\infty)$.

Подчеркнем, что число $s^{(m)}(f,\lambda_k)$ нельзя рассматривать как значение производной (порядка m) от функции $s(f,\lambda)$ в точке $\lambda=\lambda_k$. Действительно, так как функция $s(x,\lambda)$ при $\lambda\neq\lambda_k$ экспоненциально растет при $x\to\infty$, то при $\lambda\neq\lambda_k$ и λ, близком к λ_k, вообще говоря, $s(f,\lambda)$ не определено.

Оценка (71) по непрерывности распространяется на все $f\in L^2(0,\infty)$. Нам понадобится некоторое обобщение этой оценки.

Лемма 3. *Если* $\int_0^\infty |(1+x)^\nu f(x)|^2\,dx<\infty$, *то функция* $s(f,\lambda)$ *имеет производную порядка* $\nu-1$, *абсолютно непрерывную в каждом конечном интервале полуоси* $\lambda>0$. *Для каждого целого* $\nu\geqslant 0$ *существует такое число* $C_\nu>0$, *что*

$$\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{d}{d\rho}\right)^\nu \rho s(f,\rho^2)\right|^2 d\rho\leqslant C_\nu\int_0^\infty |(1+x)^\nu f(x)|^2\,dx. \tag{77}$$

Доказательство подобно доказательству леммы 2. Надо лишь дополнительно воспользоваться тем, что дифференцированию (обычного) преобразования Фурье соответствует умножение на независимое переменное преобразуемой функции.

7. Разложение в пространстве H_+. Через H_ν мы будем обозначать гильбертово пространство функций $f(x)$, $0<x<\infty$, с нормой

$$\|f\|_\nu=\left(\int_0^\infty |(1+x)^\nu f(x)|^2\,dx\right)^{1/2},\quad \nu=0,\pm1,\pm2,\ldots \tag{78}$$

Отметим, что $H_0=L^2(0,\infty)$ и что пространство $H_{-\nu}$ изоморфно пространству линейных непрерывных функционалов, заданных на пространстве $H_{+\nu}$: $H_{-\nu}\sim H'_{+\nu}$ *). Именно, для каждого

*) Пространство линейных непрерывных функционалов заданных на пространстве X, обозначают обычно символом X'.

функционала $f' \in H'_{+\nu}$ существует такая функция $f^*(x)$ из $H_{-\nu}$, что для всех $f \in H_{+\nu}$

$$f'(f) = \int_0^\infty f(x) f^*(x)\,dx; \tag{79}$$

это вытекает очевидным образом из теоремы об общем виде линейного непрерывного функционала в пространстве $L^2(0, \infty)$ (см. n° 2 § 10).

Обозначим через m_0 наибольшую из кратностей спектральных особенностей оператора L:

$$m_0 = \max(m_{\alpha+1}, \ldots, m_\beta), \tag{80}$$

и положим

$$H_+ = H_{m_0+1}, \quad H_- = H_{-(m_0+1)}. \tag{81}$$

Очевидно,

$$H_+ \subset L^2(0, \infty) \subset H_- \tag{82}$$

и для всех $f \in H_+$

$$\|f\|_+ \geqslant \|f\|_0 \geqslant \|f\|_-; \tag{83}$$

здесь $\|f\| = \|f\|_0$ — норма $L^2(0, \infty)$, а $\|f\|_\pm = \|f\|_{\pm(m_0+1)}$ — норма $H_\pm$. Отметим, что пространство H_- содержит все главные функции спектральных особенностей. Действительно, в силу оценок (54)

$$s^{(m-1)}(x, \lambda) \in H_{-m}, \quad m = 1, 2, \ldots, \lambda > 0. \tag{84}$$

Рассмотрим произвольную функцию $f \in H_+$. В силу леммы 3 функция $s(f, \lambda)$, $\lambda > 0$, допускает $m_0 + 1$ кратное дифференцирование по λ. Следовательно, можно образовать выражение $[Bs(f, \lambda)\, s(x, \lambda)]$ (см. (68)). Положим

$$If(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [Bs(f, \lambda)\, s(x, \lambda)] \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} + \\ + \sum_{k=1}^{\beta} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k - 1} M_k(\lambda)\, s(f, \lambda)\, s(x, \lambda) \right\}_{\lambda = \lambda_k}; \tag{85}$$

здесь $M_k(\lambda)$ — те же функции, что и в формуле (70). Кроме того, при $\lambda = \lambda_k$, $k = 1, \ldots, \alpha$, «производную» $\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m s(f, \lambda)$ следует понимать как число $s^{(m)}(f, \lambda_k)$, определяемое равенством (76) *).

Лемма 4. *Формула* (85) *определяет оператор* I, *непрерывно отображающий* H_+ *в* H_-:

$$\|If\|_- \leqslant C\|f\|_+, \quad f \in H_+. \tag{86}$$

Доказательство. Для определенности будем считать, что функции $B_{kj}(\lambda)$ заданы соотношениями (67). Обозначим через Λ_k δ-окрестность точки λ_k (на полуоси $\lambda > 0$), а через Λ_0 обозначим часть полуоси $\lambda > 0$, полученную отбрасыванием из нее интервалов $\Lambda_{\alpha+1}, \ldots, \Lambda_\beta$. Теперь формула (68) принимает следующий вид:

$$[B\Phi(\lambda)] = \begin{cases} \Phi(\lambda) \quad \text{при} \quad \lambda \in \Lambda_0, \\ \dfrac{1}{(m_k-1)!}\displaystyle\int_{\lambda_k}^{\lambda} (\lambda-\mu)^{m_k-1}\,\Phi^{(m_k)}(\mu)\,d\mu \quad \text{при} \quad \lambda \in \Lambda_k, \\ \qquad\qquad k = \alpha+1, \ldots, \beta; \end{cases} \tag{87}$$

при этом мы воспользовались интегральной формой остаточного члена формулы Тейлора. Положим

$$I_k f(x) = \\ = \frac{1}{\pi}\int_{\Lambda_k} [Bs(f, \lambda)\, s(x, \lambda)]\,\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})}, \quad k = 0, \ \alpha+1, \ldots, \beta$$

и обозначим через I_d второе слагаемое в правой части (85). Так как $I = I_0 + I_{\alpha+1} + \ldots + I_\beta + I_d$, то нам достаточно доказать непрерывность каждого из операторов $I_0, I_{\alpha+1}, \ldots, I_\beta, I_d$ в отдельности.

Проще всего обстоит дело с оператором I_d. Это конечномерный оператор, который в силу включений (52) и (84) и изоморфизма пространств H_- и H'_+ действует из H_+ в H_- (точнее, из H_{+m_0} в H_{-m_0}) и непрерывен относительно норм этих пространств.

*) «Производная» $\left\{\left(\dfrac{d}{d\lambda}\right)^m s(f, \lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k}$, $k = 1, \ldots, \alpha$, $m = 0, \ldots, m_k - 1$, возникает в правой части (85) в результате формального применения правила Лейбница для дифференцирования произведения. Всюду в дальнейшем, где эта «производная» возникает в аналогичной ситуации, она понимается в указанном здесь смысле.

В силу (87) при $k=\alpha+1, \ldots, \beta$ мы имеем

$$I_k f(x)=\frac{1}{\pi}\int\limits_{\Lambda_k}\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e\sqrt{\lambda}\,e(-\sqrt{\lambda})}\times$$
$$\times\frac{1}{(m_k-1)!}\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda}(\lambda-\mu)^{m_k-1}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{m_k}[s(f,\mu)\,s(x,\mu)]\,d\mu.$$

Меняя здесь порядок интегрирования, мы получим

$$I_k f(x)=\frac{1}{\pi(m_k-1)!}\left\{\int\limits_{\lambda_k}^{\lambda_k+\delta}d\mu\int\limits_{\mu}^{\lambda_k+\delta}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{m_k}[s(f,\mu)\,s(x,\mu)]\times\right.$$
$$\times(\lambda-\mu)^{m_k-1}\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})}-\int\limits_{\lambda_k-\delta}^{\lambda_k}d\mu\int\limits_{\lambda_k-\delta}^{\mu}\left(\frac{d}{d\mu}\right)^{m_k}\times$$
$$\left.\times[s(f,\mu)\,s(x,\mu)]\,(\lambda-\mu)^{m_k-1}\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})}\right\}.$$

Принимая во внимание, что $e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})=(\lambda-\lambda_k)^{m_k}\,\psi_k(\lambda)$, где $\psi_k(\lambda)$ голоморфна в окрестности $\lambda=\lambda_k$ и $\psi(\lambda_k)\neq 0$, и что

$$\left.\begin{aligned}\int\limits_{\mu}^{\lambda_k+\delta}\frac{(\lambda-\mu)^{m_k-1}}{(\lambda-\lambda_k)^{m_k}}\,d\lambda&\leqslant\int\limits_{\mu}^{\lambda_k+\delta}\frac{d\lambda}{\lambda-\lambda_k}=\ln\delta-\ln(\mu-\lambda_k),\quad \mu>\lambda_k,\\ \int\limits_{\lambda_k-\delta}^{\mu}\frac{(\mu-k)^{m_k-1}}{(\lambda_k-\lambda)^{m_k}}\,d\lambda&\leqslant\int\limits_{\lambda_k-\delta}^{\mu}\frac{d\lambda}{\lambda_k-\lambda}=\ln\delta-\ln(\lambda_k-\mu),\quad \mu<\lambda_k,\end{aligned}\right\}\tag{88}$$

мы приходим в выводу, что $I_k f(x)$ можно представить в виде

$$I_k f(x)=\int\limits_{\Lambda_k}\sum_{m=0}^{m_k}a_{mk}(x,\mu)\,s^{(m)}(f,\mu)\,d\mu,$$

где в силу оценок (54) и (88)

$$\int\limits_0^{\infty}dx\int\limits_{\Lambda_k}d\mu\left|\frac{a_{mk}(x,\mu)}{(1+x)^{m_0+1}}\right|^2<\infty.$$

Обозначая через C_{km} левую часть последнего неравенства; мы имеем

$$\|I_k f\|_-\leqslant\sum_{m=0}^{m_k}C_{km}\left\{\int\limits_{\Lambda_k}|s^{(m)}(f,\mu)|^2\,d\mu\right\}^{1/2}.$$

Отсюда на основании (77) получаем

$$\| I_k f \|_- \leqslant C_k \| f \|_{+m_0} \leqslant C_k \| f \|_+, \qquad k = \alpha+1, \ldots, \beta,$$

где C_k — некоторые положительные числа.

Осталось рассмотреть оператор I_0. В силу (87) мы имеем

$$I_0 f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty \chi_0(\lambda)\, s(f, \lambda)\, s(x, \lambda) \cdot \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})},$$

где $\chi_0(\lambda)$ — характеристическая функция множества Λ_0. Введем обозначение

$$\frac{1}{2\pi i} \frac{\chi_0(\rho^2)\, \rho s(f, \rho^2)}{e(\rho)\, e(-\rho)} = \varphi(\rho).$$

Тогда в силу (77)

$$\int_{-\infty}^\infty |\varphi(\rho)|^2 d\rho \leqslant C_0 \int_0^\infty |f(x)|^2 dx,$$

где C_0 — некоторое положительное число. Кроме того,

$$I_0 f(x) = \int_{-\infty}^\infty 2i\rho s(x, \rho^2)\, \varphi(\rho)\, d\rho.$$

Поэтому, вводя обозначение

$$e(-\rho)\,[\varphi(\rho) - \varphi(-\rho)] = \psi(\rho),$$

имеем

$$\int_{-\infty}^\infty |\psi(\rho)|^2 d\rho \leqslant C_0' \int_0^\infty |f(x)|^2 dx, \quad C_0' > 0,$$

и в силу (49)

$$I_0 f(x) = \int_{-\infty}^\infty e(x, \rho)\, \psi(\rho)\, d\rho.$$

Наконец, воспользуемся соотношением (47). Мы получим

$$I_0 f(x) = \int_{-\infty}^\infty \psi(\rho)\, e^{ix\rho} d\rho + \int_x^\infty k(x, t)\, dt \int_{-\infty}^\infty \psi(\rho)\, e^{it\rho}\, dt.$$

Отсюда на основании равенства Парсеваля (для обычного преобразования Фурье) и оценки (45) для ядра $k(x, t)$ заключаем, что

$$\int_0^\infty |I_0 f(x)|^2 dx \leqslant C_0'' \int_0^\infty |f(x)|^2 dx, \quad C_0'' > 0.$$

Таким образом (см. (83)),

$$\|If_0\|_- \leqslant \|I_0 f\| \leqslant C_0'' \|f\| \leqslant C_0'' \|f\|_+,$$

что завершает доказательство леммы в предположении, что функции $B_{kj}(\lambda)$ заданы соотношением (67). Доказательство в общем случае вытекает из того, что при замене одних функций $B_{kj}(\lambda)$ другими такими функциями (удовлетворяющими всем требуемым условиям), первое слагаемое в правой части (85) меняется лишь на конечномерный оператор, непрерывный из H_+ в H_-.

Теперь мы покажем, что оператор I, заданый формулой (85), является фактически вложением пространства H_+ в пространство H_-. Именно, имеет место следующее утверждение.

Теорема 2. *Для каждой функции* $f \in H_+$ (см. (81)) *справедливо следующее разложение по главным функциям оператора* L:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [Bs(f, \lambda)\, s(x, \lambda)] \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} +$$

$$+ \sum_{k=1}^{\beta} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k - 1} M_k(\lambda)\, s(f, \lambda)\, s(x, \lambda) \right\}_{\lambda = \lambda_k}, \tag{88'}$$

причем интеграл в формуле (88′) *сходится по норме пространства* H_-.

Доказательство. В силу леммы 4 нам достаточно доказать, что

$$If(x) = f(x), \quad 0 < x < \infty, \tag{89}$$

для каждой финитной функции $f \in L^2(0, \infty)$. Допустим, что $f \in L^2(0, \infty)$, а g — произвольная функция, удовлетворяющая условиям

$$g \in L^2(0, \infty), \quad g(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > a, \quad \int_0^\infty g(x)\, s(x, z)\, dx = 0; \tag{90}$$

при этом a — какое-нибудь положительное число, а z — какое-нибудь число из резольвентного множества оператора L. Из соотношений (37), (38) и (90) вытекает, что

$$R_z g(x) = 0 \quad \text{при} \quad x > a. \tag{91}$$

Из формулы Лагранжа для дифференциального выражения (1) (см. n° 5 § 1) легко вывести, что

$$s(R_z g, z) = \frac{s(g, \lambda)}{\lambda - z},$$

а поэтому (см. (85))

$$\int_0^\infty If(x)\,R_z g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty \left[B\,\frac{s(f,\lambda)\,s(g,\lambda)}{\lambda - z}\right]\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})} + \\ + \sum_{k=1}^{\beta}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\,\frac{s(f,\lambda)\,s(g,\lambda)}{\lambda - z}\right\}_{\lambda=\lambda_k}.$$

Сравнивая это равенство с равенством (70), мы находим, что

$$\int_0^\infty [f(x) - If(x)]\,R_z g(x)\,dz = 0.$$

Пусть

$$[(1-I)f]_a(x) = \begin{cases} f(x) - If(x) & \text{при} \quad 0 < x < a, \\ 0 & \text{при} \quad a < x < \infty. \end{cases}$$

Учитывая (91), с помощью формулы Лагранжа из предыдущего равенства находим

$$\int_0^\infty R_z\,[(1-I)f]_a(x)\cdot g(x)\,dx = 0.$$

Так как $g(x)$ — произвольная функция, удовлетворяющая условиям (90), то (по теореме об ортогональной проекции, см. n° 4 § 10)

$$R_z\,[(1-I)f]_a(x) = cs(x, z), \quad 0 < x < a,$$

где c — некоторое число. Применяя к обеим частям последнего равенства операцию $l(\cdot) - z1$, получим

$$[(1-I)f]_a(x) = 0, \quad 0 < x < a.$$

В силу произвольности a соотношение (89) доказано.

Теорема 2 публикуется здесь впервые.

8. Разложение по главным функциям в пространстве $L^2(0, \infty)$. Обозначим через $Jf(x)$ интеграл в правой части (85) и положим

$$J^1 = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty [Bs(x, \lambda)]\,s(f, \lambda)\,\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})}. \tag{92}$$

В интеграле J^1, в отличие от интеграла J, операция B применяется не к произведению $s(f, \lambda)\,s(x, \lambda)$, а только лишь к функции $s(x, \lambda)$. Поэтому интеграл J^1 существует при более слабых предположениях, чем J. Именно, как нетрудно видеть, интеграл J^1

сходится по норме H_{-m_0} (см. (78), (80)) для каждой функции $f \in L^2(0, \infty)$. Найдем разность $J - J^1$. Для определенности будем предполагать, что функции $B_{kj}(\lambda)$ заданы соотношениями (67). Придерживаясь тех же обозначений, что и при доказательстве леммы 4, мы имеем

$$J - J^1 = J_{\alpha+1} + \ldots + J_\beta,$$

где

$$J_k f(x) = \frac{1}{\pi} \int_{\Lambda_k} \left\{ \sum_{m=0}^{m_k-1} \left[\left(\frac{d}{d\lambda} \right)^m s(f, \lambda)\, s(x, \lambda) \right]_{\lambda=\lambda_k} \frac{(\lambda-\lambda_k)^m}{m!} - \right.$$
$$\left. - s(f, \lambda) \sum_{m=0}^{m_k-1} s^{(m)}(x, \lambda_k) \frac{(\lambda-\lambda_k)^m}{m!} \right\} \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})},$$
$$k = \alpha+1, \ldots, \beta;$$

здесь мы пока предполагаем, что $f \in H_+$. В силу формулы Тейлора

$$s(f, \lambda) = \sum_{m=0}^{m_k-1} s^{(m)}(f, \lambda_m) \frac{(\lambda-\lambda_k)^m}{m!} + \frac{1}{(m_k-1)!} \int_{\lambda_k}^{\lambda} (\lambda-\mu)^{m_k-1} s^{(m_k)}(f, \mu)\, d\mu,$$

мы имеем

$$J_k f(x) = -\frac{1}{\pi} \int_{\Lambda_k} \sum_{m=0}^{m_k-1} s^{(m)}(x, \lambda_k) \frac{(\lambda-\lambda_k)^m}{m!} \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} \times$$
$$\times \frac{1}{(m_k-1)} \int_{\lambda_k}^{\lambda} (\lambda-\mu)^{m_k-1} s^{(m_k)}(f, \mu)\, d\mu +$$
$$+ \int_{\Lambda_k} \sum_{p,\, q \leqslant m_k-1} a_{pq}(\lambda)\, s^{(p)}(f, \lambda_k)\, s^{(q)}(x, \lambda_k) \frac{(\lambda-\lambda_k)^{m_k} \sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})},$$

где $a_{pq}(\lambda)$ — некоторые многочлены. В первом слагаемом справа изменим порядок интегрирования. Рассуждая так же, как при доказательстве леммы 4, мы убеждаемся, что особенность в точке λ_k, связанная со знаменателем $e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})$, погашается (остается логарифмическая особенность), а поэтому знак суммы по m можно поставить впереди интеграла по μ. Следовательно,

$$J_k f(x) = \sum_{m=0}^{m_k-1} b_{km}(f)\, s^{(m)}(x, \lambda_k),$$

где $b_{km}(f)$ — линейные функционалы от f. Вопрос о непрерывности этих функционалов мы оставим пока в стороне. Таким образом, мы доказали, что при $f \in H_+$

$$Jf(x) - J^1 f(x) = \sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \sum_{m=0}^{m_k-1} b_{km}(f)\, s^{(m)}(x, \lambda_k). \tag{93}$$

Теорема 3. *Существуют такие линейные функционалы* $M_{km}(f)$, *заданные в* $L^2(0, \infty)$ *и непрерывные по норме этого пространства, что для каждой функции* $f \in L^2(0, \infty)$ *имеет место следующее спектральное разложение*:

$$f(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^\infty [Bs(x, \lambda)]\, s(f, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} + \sum_{k=1}^{\beta} \sum_{m=0}^{m_k-1} M_{km}(f)\, s^{(m)}(x, \lambda_k). \tag{94}$$

Интеграл в формуле (94) *сходится по норме* H_{-m_0} (см. (78), 80)).

Доказательство. Пусть сначала $f \in H_+$. Тогда в силу соотношения (93) формула (88) может быть записана в виде (94), где $M_{km}(f)$ — некоторые линейные функционалы от f. Докажем непрерывность этих функционалов. Прежде всего, методом доказательства леммы 4 легко убедиться, что J^1 — непрерывный оператор из $L^2(0, \infty)$ в H_{-m_0}. Поэтому второе слагаемое в правой части (94), как разность $f(x) - J^1 f(x)$, является линейным непрерывным оператором из $L^2(0, \infty)$ в H_{-m_0} *). Так как функции $s^{(m)}(x, \lambda_k)$, $k = 1, \ldots, \beta$, $m = 0, \ldots, m_k - 1$, линейно независимы и принадлежат пространству H_{-m_0} (см. (52) и (84)), то отсюда вытекает непрерывность функционалов $M_{km}(f)$ по норме $L^2(0, \infty)$. Формула (94) по построению верна для функций f из H_+. По непрерывности она распространяется на функции из $L^2(0, \infty)$.

Замечание. На первый взгляд может показаться, что для определения функции f из $L^2(0, \infty)$ с помощью формулы (94) требуется знание функции $s(f, \lambda)$, $\lambda > 0$, и всех чисел $M_{km}(f)$, $k = 1, \ldots, \beta$, $m = 0, \ldots, m_k - 1$. В действительности знание значений функционалов $M_{km}(f)$ при $k > \alpha$ (т. е. функционалов, отвечающих спектральным особенностям) не обязательно. Более того, эти последние значения нельзя задавать произвольно: они определяются однозначно заданием функции $s(f, \lambda)$, $\lambda > 0$, и чисел $M_{km}(f)$, $k = 1, \ldots, \alpha$, $m = 0, \ldots, m_k - 1$. В самом

*) Напомним, что $\|f\|_{-m_0} \leqslant \|f\|$.

деле, рассмотрим следующее выражение:

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [Bs(x,\lambda)]\, s(f,\lambda)\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e\sqrt{\lambda}\,e(-\sqrt{\lambda})}+\sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\sum_{m=0}^{m_k+1} M_{km}(f)\, s^{(m)}(x,\lambda_k). \tag{95}$$

В выражении (95) интеграл, а также каждое слагаемое под знаком двойной суммы, принадлежат H_{-m_0}. Как нетрудно видеть, функции $s^{(m)}(x,\lambda_k)$ в этом выражении линейно независимы по модулю $L^2(0,\infty)$ (см. n° 6 § 14). Поэтому *значения функционалов* $M_{km}(f)$ *при* $k=\alpha+1,\ldots,\beta$, $m=0,\ldots,m_k-1$, *однозначно определяются следующим требованием: сумма* (95) *принадлежит пространству* $L^2(0,\infty)$. Для каждой функции $f\in L^2(0,\infty)$ это требование выполняется в силу самой формулы (94) и включений (52).

Поскольку

$$\sum_{k=1}^{\alpha}\sum_{m=0}^{m_k-1} M_{km}(f)\, s^{(m)}(x,\lambda_k)=\sum_{k=1}^{\alpha}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k} M_k(\lambda)\, s(f,\lambda)\, s(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k},$$

то из предыдущего вытекает, что *каждая функция* f *из* $L^2(0,\infty)$ *однозначно определяется своим L-преобразованием Фурье* и что *формула* (94) *служит формулой обращения для L-преобразования Фурье в пространстве* $L^2(0,\infty)$.

Предположим, что оператор L не имеет спектральных особенностей Тогда операция $[B\ldots]$ в формуле (88) не нужна и эта формула принимает следующий вид.

$$f(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty s(f,\lambda)\, s(x,\lambda)\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})}+$$
$$+\sum_{k=1}^{\alpha}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\, s(f,\lambda)\, s(x,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k}. \tag{96}$$

Формула (96) была получена впервые в работе Наймарк [9] *) При этом предполагалось, что $f\in\mathfrak{D}_L\cap L^1(0,\infty)$. Кроме того, поскольку рассматривался случай, когда спектральных особенностей нет, то условие (43) заменялось более слабым условием $\int_0^\infty (1+x^2)\,|p(x)|\,dx<\infty$. Затем в работе Левин [2] для оператора L без спектральных особенностей. формула (96) была доказана для произвольных функций f из $L^2(0,\infty)$ Доказательство

*) В работе Наймарк [9], формула (96) записана применительно к случаю краевого условия $y'(0)-\theta y(0)=0$ и в несколько других обозначениях.

опиралось на представление (13) решения $e(x, \rho)$ с помощью ортогонализирующего ядра $k(x, t)$.

Теорема 3 и замечание, следующее за ней, появились в заметке Лянце [3]. По поводу доказательства этой теоремы методом, отличным от здесь изложенного, см. Лянце [4].

9. Многообразие $\mathfrak{H}$; разложение, сходящееся по норме $L^2(0, \infty)$. Разложение по главным функциям оператора L, выражающееся формулой (94), сходится по норме H_{-m_0} более слабой, чем норма пространства $L^2(0, \infty)$. Теперь мы укажем класс $\mathfrak{H}$ таких функций $f \in L^2(0, \infty)$, разложение которых не нуждается в регуляризации и сходится по норме $L^2(0, \infty)$. Именно, через $\mathfrak{H}$ мы обозначим совокупность всех тех функций $f \in L^2(0, \infty)$, для которых выполняется условие

$$\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\rho s(f, \rho^2)}{e(\rho)} \right|^2 d\rho < \infty. \tag{97}$$

Отметим, что в случае оператора L без спектральных особенностей, множество $\mathfrak{H}$ совпадает с пространством $L^2(0, \infty)$. Это вытекает из оценок (35) и (77).

IV. *Для того чтобы функция $f \in H_+$* (см. (81)) *принадлежала многообразию $\mathfrak{H}$, необходимо и достаточно, чтобы*

$$s^{(m)}(f, \lambda_k) = 0 \quad \text{при} \quad k = \alpha + 1, \ldots, \beta, \ m = 0, \ldots, m_k - 1.$$

Действительно, в силу леммы 3 для каждой функции $f \in H_+$ функция $s(f, \lambda)$, $\lambda > 0$, имеет (абсолютно) непрерывную производную порядка $m_0 = \max(m_{\alpha+1}, \ldots, m_\beta)$. Поэтому для такой функции f условие (97) выполняется тогда и только тогда, когда каждая спектральная особенность λ_k является корнем кратности $\geqslant m_k$ функции $s(f, \lambda)$.

V. *Для каждой функции $f \in H_+ \cap \mathfrak{H}$ разложение по главным функциям оператора L записывается в виде* (96).

Это непосредственное следствие предложения IV и теоремы 2. Действительно, из предложения IV и формул (68) вытекает, что при $f \in H_+ \cap \mathfrak{H}$

$$[Bs(f, s)\, s(x, \lambda)] = s(f, \lambda)\, s(x, \lambda),$$

$$\sum_{k=\alpha+1}^{\beta} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{m_k - 1} M_k(\lambda)\, s(f, \lambda)\, s(k, \lambda) \right\}_{\lambda=\lambda_k} = 0.$$

VI. *Множество финитных функций $f \in \mathfrak{H}$ плотно в пространстве $L^2(0, \infty)$.*

Действительно, так как каждая финитная функция f из $L^2(0, \infty)$ принадлежит пространству H_+, то в силу предложения IV такая функция принадлежит многообразию $\mathfrak{H}$ тогда и только тогда, когда

$$\int_0^\infty f(x)\, s^{(m)}(x, \lambda_k)\, dx = 0$$

для каждой главной функции спектральных особенностей.

Пусть f_0 — произвольная функция из $L^2(0, \infty)$, ортогональная всем финитным функциям из $\mathfrak{H}$. Так как, в частности, f_0 является ортогональной тем функциям из $\mathfrak{H}$, которые равны нулю вне фиксированного конечного интервала $(0, a)$, то, учитывая, что ортогональное дополнение ортогонального дополнения конечномерного подпространства совпадает с этим подпространством, заключаем, что в каждом интервале $(0, a)$ функция f_0 является линейной комбинацией функций $s^{(m)}(x, \lambda_k)$. Из-за линейной независимости последних, коэффициенты линейных комбинаций, о которых идет речь, от a не зависят, так что f_0 является линейной комбинацией функций $s^{(m)}(x, \lambda_k)$ на всей полуоси $(0, \infty)$. Но функции $s^{(m)}(x, \lambda_k)$ также линейно независимы по модулю $L^2(0, \infty)$ и, следовательно, последнее возможно лишь в том случае, когда $f_0 = 0$, что и требовалось доказать.

Теорема 4. *Многообразие $\mathfrak{H}$ плотно в пространстве $L^2(0, \infty)$. Для каждой функции $f \in \mathfrak{H}$ справедлива формула* (96), *причем интеграл в этой формуле сходится по норме* $L^2(0, \infty)$.

Доказательство. Первое утверждение теоремы вытекает из предложения VI. В силу формулы (49) интеграл, содержащийся в правой части (96), может быть представлен в виде

$$\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \left[\frac{\rho s(f, \rho^2)}{e(\rho)} e(x, \rho) - \frac{\rho s(f, \rho^2)}{e(-\rho)} e(x, -\rho)\right] d\rho.$$

Отсюда, на основании условия (97) и формулы (47), мы заключаем, что для каждой функции $f \in \mathfrak{H}$ он сходится по норме $L_2(0, \infty)$ *).

Для произвольной функции $f \in \mathfrak{H}$ обозначим через $If(x)$ правую часть формулы (96). Наша задача заключается в том, чтобы показать, что $If = f$. С этой целью заметим, что для

*) Наша аргументация опирается на теорему Планшереля для классического преобразования Фурье.

каждой финитной функции g

$$\int_0^\infty If(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty s(f,\lambda)\,s(g,\lambda)\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})} + \\ + \sum_{k=1}^{a}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\,s(f,\lambda)\,s(g,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k}. \quad (98)$$

Предположим дополнительно, что финитная функция g принадлежит многообразию $\mathfrak{H}$. Тогда $g \in H_+ \cap \mathfrak{H}$, и в силу V для нее справедлива формула вида (96). Отсюда вытекает, что интеграл $\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx$ тоже равен правой части (98), так что

$$\int_0^\infty [If(x) - f(x)]\,g(x)\,dx = 0.$$

Отсюда на основании VI заключаем, что $If = f$.

Теорема 4 доказана несколько другими способами в работах Лянце [2 и 4].

10. Обобщенное равенство Парсеваля. Следующее предложение будет играть важную роль в дальнейшем.

Теорема 5. *Для любых функций $f \in \mathfrak{H}$ и $g \in L^2(0, \infty)$ справедливо следующее равенство Парсеваля:*

$$\int_0^\infty f(x)\,g(x)\,dx = \frac{1}{\pi}\int_0^\infty s(f,\lambda)\,s(g,\lambda)\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})} + \\ + \sum_{k=1}^{a}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\,s(f,\lambda)\,s(g,\lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k}. \quad (99)$$

Доказательство. Если $f \in \mathfrak{H}$, а $g \in L^2(0, \infty)$ — финитная функция, то равенство (99) получается очевидным способом из формулы (96). Для того чтобы распространить это равенство на нефинитные функции g, заметим прежде всего, что

$$\left|\int_0^\infty s(f,\lambda)\,s(g,\lambda)\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})}\right| \leqslant \\ \leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\rho s(f,\rho^2)}{e(\rho)\,e(-\rho)}\right|^2 d\rho\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|\rho s(g,\rho^2)|^2\,d\rho\right)^{1/2}. \quad (100)$$

В случае, когда $e(0)=0$, правую часть неравенства (100) мы заменим следующим выражением:

$$\left(\int_{-\infty}^{\infty}\left|\frac{\rho^2 s(f,\rho^2)}{e(\rho)\,e(-\rho)\,(\rho+i)}\right|^2 d\rho\right)^{1/2}\left(\int_{-\infty}^{\infty}|(\rho+i)\,s(g,\rho^2)|^2 d\rho\right)^{1/2}. \quad (100a)$$

При $f\in\mathfrak{H}$, в силу условия (97), первый из интегралов в правой части (100) (или (100a)) сходится *). Поэтому на основании леммы 3 мы заключаем, что правая часть равенства (99) является линейным непрерывным функционалом от $g\in L^2(0,\infty)$, что и требовалось доказать.

Поскольку многообразие $\mathfrak{H}$ плотно в пространстве $L^2(0,\infty)$, то на основании обобщенного равенства Парсеваля (99) мы вторично приходим к выводу о том, что каждая функция f из $L^2(0,\infty)$ однозначно определяется своим L-преобразованием Фурье (см. замечание к теореме 3).

§ 30. L-преобразование Фурье умеренно растущих функций

Разложение по главным функциям оператора L, выражающееся формулой (94), содержит главные функции $s^{(m)}(x,\lambda_k)$ спектральных особенностей λ_k, не являющиеся элементами пространства $L^2(0,\infty)$. В связи с этим представляется естественной задача распространения L-преобразования Фурье на классы функций, более широкие чем $L^2(0,\infty)$, и построения в этих классах разложений по главным функциям оператора L. Как и в случае классического преобразования Фурье, это достигается с привлечением понятий и методов теории обобщенных функций **). При этом наблюдается следующий замечательный эффект: при выходе из пространства $L^2(0,\infty)$ L-преобразование Фурье перестает быть взаимно однозначным. Именно, оно равно нулю на линейных комбинациях главных функций спектральных особенностей.

Особенно элементарно можно распространить L-преобразование Фурье на класс умеренно растущих функций. По поводу распространения L-преобразования Фурье на более широкие классы см. Лянце [2 и 4].

---

*) Напомним, что $e(-\rho)\neq 0$, если $\rho\neq 0$ и $e(\rho)=0$. Кроме того, напомним, что $\rho=0$ не может быть корнем кратности >1 функции $e(\rho)$.

**) Для чтения настоящего параграфа знакомство с теорией обобщенных функций не обязательно.

1. Образ многообразия $\mathfrak{H}$ при L-преобразовании Фурье (пространство $\mathfrak{S}$). Пусть ξ обозначает функцию, которая каждой точке $\lambda \geqslant 0$ непрерывного спектра оператора L (за исключением, быть может, множества точек линейной лебеговой меры нуль) ставит в соответствие число $\xi(\lambda)$, а каждой точке λ_k $(k=1, \ldots, \alpha)$ точечного спектра оператора L ставит в соответствие некоторую последовательность чисел $\xi(\lambda_k) = \left(\xi^{(0)}(\lambda_k), \ldots \ldots, \xi^{(m_k-1)}(\lambda_k)\right)$. Такую функцию мы будем называть *функцией, заданной на спектре оператора* L.

Очевидно, L-преобразование Фурье произвольной функции $f \in L^2(0, \infty)$ мы можем рассматривать как функцию sf, заданную на спектре оператора L и удовлетворяющую следующим соотношениям:

$$\left.\begin{aligned} sf(\lambda) &= s(f, \lambda) \text{ почти всюду при } \lambda > 0, \\ sf(\lambda_k) &= \left(s(f, \lambda_k), \ldots, s^{(m_k-1)}(f, \lambda_k)\right), \ k = 1, \ldots, \alpha. \end{aligned}\right\} \tag{101}$$

Обозначим через $\mathfrak{S}$ гильбертово пространство функций ξ, заданных на спектре оператора L, с нормой

$$|\xi| = \left\{\int_{-\infty}^{\infty} \left|\frac{\rho\xi(\rho^2)}{e(\rho)}\right|^2 d\rho\right\}^{1/2} + \sum_{k=1}^{\alpha} \left\{\sum_{j=0}^{m_k-1} |\xi^{(j)}(\lambda_k)|^2\right\}^{1/2}. \tag{102}$$

В силу условия (97) $sf \in \mathfrak{S}$ для каждой функции $f \in \mathfrak{H}$. Однако справедливо более сильное предложение.

Теорема 1. *L-преобразование Фурье $f \to sf$ является взаимно однозначным отображением многообразия $\mathfrak{H}$ на пространство $\mathfrak{S}$. Обратное преобразование задается формулой*

$$s^{-1}\xi(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\infty} \xi(\lambda)\, s(x, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} + \\ + \sum_{k=1}^{\alpha} \left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\, \xi(\lambda)\, s(x, \lambda)\right\}^{*)}. \tag{103}$$

Доказательство. Достаточно доказать, что для каждого $\xi \in \mathfrak{S}$ существует такая функция $f \in L^2(0, \infty)$, что $sf = \xi$, т. е.

$$s(f, \lambda) = \xi(\lambda) \text{ почти всюду при } \lambda > 0 \tag{104}$$

---

*) Здесь «дифференцирование» по λ мы понимаем так же, как и в формуле (85).

и

$$s^{(m)}(f,\ \lambda_k) = \xi^{(m)}(\lambda_k), \qquad k = 1, \ldots, \alpha,\ m = 0, \ldots, m_k - 1. \tag{105}$$

Действительно, если такая функция f существует, то она единственна (см. замечание к теореме 3 § 29) и в силу конечности нормы (102) она удовлетворяет условию (97), так что $f \in \mathfrak{H}$.

Прежде всего заметим, что для каждой функции $\xi \in \mathfrak{G}$ интеграл в формуле (103) сходится по норме $L^2(0, \infty)$. Чтобы в этом убедиться, достаточно вспомнить доказательство сходимости интеграла в формуле (96) (см. доказательство теоремы 4 § 29). Следовательно, при $\xi \in \mathfrak{G}$ правая часть формулы (104) представляет собой некоторую функцию $f(x)$, принадлежащую $L^2(0, \infty)$. Остается проверить, что эта функция удовлетворяет соотношениям (104), (105).

С этой целью, обозначим через g произвольную финитную функцию из $\mathfrak{H}$, умножим на $g(x)\,dx$ обе части равенства, определяющего функцию $f(x)$, и проинтегрируем по области $0 < x < \infty$. Сравнивая результат с обобщенным равенством Парсеваля (99), мы получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\infty [s(f,\ \lambda) - \xi(\lambda)]\, s(g,\ \lambda)\frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} +$$
$$+\sum_{k=1}^{\alpha}\left\{\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k-1} M_k(\lambda)\,[s(f,\ \lambda) - \xi(\lambda)]\, s(g,\ \lambda)\right\}_{\lambda=\lambda_k} = 0. \tag{106}$$

Положим $B(\lambda) = (\lambda - \lambda_1)^{m_1} \ldots (\lambda - \lambda_\beta)^{m_\beta}$ и обозначим через $E(\rho)$ косинус-преобразование Фурье какой-либо финитной бесконечно дифференцируемой функции. Тогда для каждого $\alpha > 0$ уравнение

$$s(g_\alpha,\ \rho^2) = B(\rho^2)\, E(\rho)\cos\alpha\rho \tag{107}$$

определяет финитную функцию $g_\alpha \in \mathfrak{H}$. Это вытекает из теоремы Винера и Пэли (см., например, Шилов [1], стр. 361) и представления функции $s(x,\ \lambda)$ посредством соответствующего ортогонализирующего ядра (см. n° 1 § 25, формула (7)). Из равенств (106) и (107) вытекает, что

$$\int_{-\infty}^{\infty} [s(f,\ \rho^2) - \xi(\rho^2)]\, E(\rho)\, \frac{\rho^2 B(\rho^2)}{e(\rho)\, e(-\rho)} \cos\alpha\rho\, d\rho = 0$$

для всех $\alpha > 0$. Так как коэффициент при $\cos\alpha\rho$ является здесь четной функцией от ρ, интегрируемой с квадратом в области $-\infty < \rho < \infty$, то этот коэффициент равен нулю (почти всюду) и, следовательно, выполняется соотношение (104).

Если теперь функцию g определять с помощью уравнений вида

$$s(g, \rho^2) = \frac{B(\rho^2)\,E(\rho)}{(\rho^2 - \lambda_k)^m}, \qquad k = 1, \ldots, \alpha, \; m = 0, \ldots, m_k - 1,$$

то, учитывая легко проверяемые неравенства

$$M_k(\lambda_k) \neq 0, \qquad k = 1, \ldots, \alpha$$

и рассуждая аналогично предыдущему, нетрудно убедиться, что выполняются также соотношения (105).

2. Пространства основных функций (пространства $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{S}_0$). Обозначим через $\mathfrak{H}_0$ множество всех функций $f \in L^2(0, \infty)$, для которых конечны все нормы

$$\| f \|_\nu = \left\{ \int_0^\infty |(1+x)^\nu f(x)|^2 \, dx \right\}^{1/2}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{108}$$

и которые удовлетворяют условиям

$$s^{(m)}(f, \lambda_k) = 0, \qquad k = \alpha + 1, \ldots, \beta, \; m = 0, \ldots, m_k - 1. \tag{109}$$

Очевидно, $\mathfrak{H}_0 \subset \mathfrak{H}$.

Обозначим также через $\mathfrak{S}_0$ множество тех функций ξ, заданных на спектре оператора L, которые имеют конечные нормы

$$| \xi |_\nu = \sum_{\sigma=0}^{\nu} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{d\rho}\right)^\sigma \rho \xi(\rho^2) \right|^2 d\rho \right\}^{1/2} + \\ + \sum_{k=1}^{\alpha} \left\{ \sum_{m=0}^{m_k - 1} | \xi^{(m)}(\lambda_k) |^2 \right\}^{1/2}, \qquad \nu = 0, 1, 2, \ldots \tag{110}$$

и удовлетворяют условиям

$$\xi^{(m)}(\lambda_k) = 0, \qquad k = \alpha + 1, \ldots, \beta, \; m = 0, \ldots, m_k - 1. \tag{111}$$

Очевидно, $\mathfrak{S}_0 \subset \mathfrak{S}$.

Будем говорить, что *последовательность функций* $f_n \in \mathfrak{H}_0$ *сходится к функции* $f \in \mathfrak{H}_0$, если $\| f_n - f \|_\nu \to 0$ при $n \to \infty$ для всех целых неотрицательных ν. Аналогично с помощью норм (110) определяем сходимость в пространстве $\mathfrak{S}_0$. Очевидно, что при таком определении сходимости *пространства* $\mathfrak{H}_0$ *и* $\mathfrak{S}_0$ *полны*. Элементы этих пространств мы будем называть *основными функциями.*

В дальнейшем нам понадобится следующее элементарное предложение *).

Лемма 1. *На множестве функций* φ, *удовлетворяющих условию*

$$\varphi^{(m)}(0)=0, \qquad m=0, \ldots, j-1, \tag{112}$$

каждая норма

$$|\varphi|'_{\nu}=\sum_{\sigma=0}^{\nu}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^{\sigma}\frac{\varphi(x)}{x^{j}}\right|^{2}dx\right\}^{1/2} \tag{113}$$

мажорируется **) *некоторой нормой*

$$|\varphi|_{\nu}=\sum_{\sigma=1}^{\nu}\left\{\int_{-\infty}^{\infty}|\varphi^{(\sigma)}(x)|^{2}dx\right\}^{1/2} \tag{114}$$

Доказательство. Очевидно, достаточно доказать, что каждая (полу)норма ***)

$$\left\{\int_{|x|<1}\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^{\sigma}\frac{\varphi(x)}{x^{j}}\right|^{2}dx\right\}^{1/2} \tag{115}$$

мажорируется некоторой нормой (114). Однако полунорма (115) не больше чем $\sqrt{2}A_{\sigma}$, где

$$A_{\sigma}=\max_{|x|<1}\left|\left(\frac{d}{dx}\right)^{\sigma}\frac{\varphi(x)}{x^{j}}\right|.$$

В силу условия (111) при $\mu>j$

$$\frac{\varphi(x)}{x^{j}}=\sum_{\tau=j}^{\mu-1}\frac{\varphi^{(\tau)}(0)}{\tau!}x^{\tau-j}+\frac{x^{-j}}{(\mu-1)!}\int_{0}^{x}(x-t)^{\mu-1}\varphi^{(\mu)}(t)\,dt.$$

Отсюда

$$\left(\frac{d}{dx}\right)^{\sigma}\frac{\varphi(x)}{x^{j}}=\sum_{\tau=j+\sigma}^{\mu-1}a_{\tau}\varphi^{(\tau)}(0)\,x^{\tau-j-\sigma}+\sum_{\tau=0}^{\sigma}b_{\tau}x^{-j-\sigma+\tau}\int_{0}^{x}(x-t)^{\mu-1-\tau}\varphi^{(\mu)}(t)\,dt,$$

---

*) В работе Лянце [4] L-преобразование Фурье распространяется на функции с локально интегрируемым квадратом Там вместо леммы 1 пришлось воспользоваться одним неравенством С. Н. Бернштейна для целых функций.

**) Мы говорим, что норма $\|\varphi\|_1$ мажорируется нормой $\|\varphi\|_2$, если существует такое число C, что $\|\varphi\|_1\leqslant C\|\varphi\|_2$ для всех φ. Последнее условие не только достаточно, но и необходимо для того, чтобы из сходимости по норме $\|\cdot\|_2$ вытекала сходимость по норме $\|\cdot\|_1$ (см., например, Люстерник и Соболев [1]).

***) Полунорма определяется теми же аксиомами, что и норма, за одним исключением: элемент, полунорма которого равна нулю, не обязан равняться нулю.

где коэффициенты a_τ и b_τ не зависят от функции φ. Возьмем $\mu \geqslant 2j$, тогда при $|x| \leqslant 1$

$$\left| x^{-j-\sigma+\tau} \int_0^x (x-t)^{\mu-1-\tau} \varphi^{(\mu)}(t)\,dt \right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{\mu-\tau} |x|^{\mu-j-\sigma} \max_{|t| \leqslant 1} |\varphi^{(\mu)}(t)| \leqslant \max_{|t| \leqslant 1} |\varphi^{(\mu)}(t)|,$$

а поэтому

$$A_\sigma \leqslant A_{j\sigma}(|\varphi^{(j)}(0)| + \ldots + |\varphi^{(2j-1)}(0)|) + \max_{|t| \leqslant 1} |\varphi^{(2j)}(t)|,$$

где $A_{j\sigma}$ не зависит от φ. Так как правая часть последнего неравенства мажорируется некоторой нормой (114), то лемма доказана.

Теорема 2. *L-преобразование Фурье $f \to sf$ является взаимно однозначным и взаимно непрерывным отображением основного пространства $\mathfrak{H}_0$ на основное пространство $\mathfrak{G}_0$.*

Доказательство. Если $f \in \mathfrak{H}_0$, то в силу неравенств (77) и соотношений (109) $sf \in \mathfrak{G}_0$. Кроме того, из неравенств (77) вытекает, что отображение s пространства $\mathfrak{H}_0$ в пространство $\mathfrak{G}_0$ непрерывно (в смысле сходимости по всем нормам (108) и (110) одновременно).

Обратно, пусть $\xi \in \mathfrak{G}_0$. Поскольку $\mathfrak{G}_0 \subset \mathfrak{G}$, то на основании теоремы 1 мы заключаем, что $f = s^{-1}\xi$ существует и что $f \in \mathfrak{H}$. Покажем, что фактически $f \in \mathfrak{H}_0$. Для этого достаточно проверить, что конечны все нормы (108) функции f. Действительно, поскольку $\mathfrak{H}_0 \subset H_+$, то соотношения (109) будут выполняться автоматически (см. предложение IV n° 9 § 29).

Для того чтобы доказать конечность всех норм (108) функции $f = s^{-1}\xi$, $\xi \in \mathfrak{G}_0$, прежде всего заметим, что каждая норма

$$|\xi|'_\nu = \sum_{\sigma=0}^{\nu} \left\{ \int_{-\infty}^{\infty} \left| \left(\frac{d}{d\rho}\right)^\sigma \frac{\rho\xi(\rho^2)}{e(\rho)} \right|^2 d\rho \right\}^{1/2} + \sum_{k=1}^{\alpha} \left\{ \sum_{m=0}^{m_k-1} |\xi^{(m)}(\lambda_k)|^2 \right\}^{1/2}, \tag{116}$$

мажорируется некоторой нормой (110). Это очевидно в силу леммы 1. Далее воспользуемся формулой (103). Обозначая через $h(x)$ функцию, (обычное) преобразование Фурье которой равно $\frac{\rho\xi(\rho^2)}{e(\rho)}$, мы можем представить интеграл в формуле (103) в следующем виде:

$$2h(x) + 2\int_x^\infty k(x, t)\,h(t)\,dt; \tag{117}$$

для этого достаточно воспользоваться формулами (47) и (49). Так как все нормы (116) функции ξ конечны, то производные всех порядков от $\frac{\rho\xi(\rho^2)}{e(\rho)}$ интегрируемы с квадратом при $-\infty<\rho<\infty$. Поскольку дифференцированию преобразования Фурье соответствует умножение функции на независимое переменное, то $\|h\|_\nu<\infty$ для всех ν (см. (108)). В силу оценки (45) этим же свойством обладает интеграл (117), а следовательно, конечны все нормы (108) функции, равной выражению (117). Как вытекает из нижеследующего замечания, сумма в правой части (103) является функцией, для которой все нормы (108) также конечны. Поэтому $\|s^{-1}\xi\|_\nu<\infty$ при $\nu=0, 1, 2, \ldots$, если $\xi\in\mathfrak{G}_0$.

Итак доказано, что s: $f\to sf$ является непрерывным взаимно однозначным отображением пространства $\mathfrak{H}_0$ на пространство $\mathfrak{G}_0$. Так как пространства $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{G}_0$ полны, то обратное отображение тоже непрерывно.

Замечание. *Главные функции точечного спектра принадлежат пространству* $\mathfrak{H}_0$.

Действительно, так как L-преобразование Фурье взаимно однозначно на многообразии $\mathfrak{H}$ (см. теорему 1), то L-преобразование Фурье каждой главной функции точечного спектра равно нулю на непрерывном спектре $\lambda\geqslant 0$, а поэтому главные функции точечного спектра удовлетворяют соотношениям (109).

Далее, для каждого собственного значения λ_k в силу формулы (31) и равенств $e^{(m)}(\sqrt{\lambda_k})=0$

$$s^{(m)}(x, \lambda_k)=\left(\frac{d}{d\lambda}\right)^m \frac{\hat{e}(\sqrt{\lambda})\,e(x, \sqrt{\lambda})}{e(\sqrt{\lambda})}\Bigg|_{\lambda=\lambda_k},$$
$$m=0, \ldots, m_k-1.$$

Следовательно, функции $s^{(m)}(x, \lambda_k)$, $k=1, \ldots, \alpha$, $m=0, \ldots$ $\ldots, m_k-1$, экспоненциально убывают при $x\to\infty$ и поэтому имеют конечные нормы (108).

3. Умеренно растущие функции. Обозначим через $\mathfrak{F}$ множество функций F, для которых существует такое натуральное $\nu=\nu(F)$, что норма

$$\|F\|_{-\nu}=\left\{\int\limits_0^\infty\left|\frac{F(x)}{(1+x)^\nu}\right|^2 dx\right\}^{1/2} \tag{118}$$

является конечной. Функции из $\mathfrak{F}$ мы будем называть *умеренно растущими*.

Каждой умеренно растущей функции F соответствует функционал PF, заданный на пространстве основных функций $\mathfrak{H}_0$ формулой

$$PF(f)=\int\limits_0^\infty f(x)\,F(x)\,dx. \tag{119}$$

Очевидно, функционал PF является линейным и непрерывным *)

$$|PF(f)|\leqslant\|F\|_{-\nu}\|f\|_\nu. \tag{120}$$

Лемма 2. *Пусть F — умеренно растущая функция. Для того чтобы соответствующий ей функционал PF был равен нулю, необходимо и достаточно, чтобы F была линейной комбинацией главных функций спектральных особенностей оператора L, т. е., чтобы*

$$F(x)=\sum_{k=\alpha+1}^{\beta}\sum_{m=0}^{m_k-1}c_{km}s^{(m)}(x,\ \lambda_k), \tag{121}$$

где c_{km} — некоторые постоянные.

Заметим, что, как вытекает из неравенств (54), главные функции спектральных особенностей являются умеренно растущими. Для доказательства леммы 2 нам понадобится следующее предложение.

Лемма 3. *Пусть $\varphi,\ \varphi_1,\ \ldots,\ \varphi_\gamma\in L^2(0,\ \infty)$ и*

$$\int\limits_0^\infty\varphi(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0\quad \textit{при}\quad k=1,\ \ldots,\ \gamma. \tag{122}$$

Существует последовательность функций ψ_n, для которых:

$$\|\psi_n\|_\nu^2=\int\limits_0^\infty|(1+x)^\nu\psi_n(x)|^2\,dx<\infty \tag{123}$$

при $\nu=0,\ 1,\ 2,\ \ldots;$

$$\int\limits_0^\infty\psi_n(x)\,\varphi_k(x)\,dx=0 \tag{124}$$

при $k=1,\ \ldots,\ \gamma,\ n=1,\ 2,\ \ldots;$

$$\int\limits_0^\infty|\varphi(x)-\psi_n(x)|^2\,dx\to 0,\ \ n\to\infty.$$

---

*) Нетрудно показать, что для каждого линейного непрерывного функционала f, заданного на $\mathfrak{H}_0$, существует такая функция $F\in\mathfrak{F}$, что $f'=PF$. Однако это утверждение нам не понадобится.

Доказательство. Не ограничивая общность, можно считать, что при достаточно большом $a>0$ функции $\varphi_1, \ldots, \varphi_\gamma$ линейно независимы в интервале $(0, a)$. Условие (123) будет, очевидно, выполняться, если в качестве ψ_n мы возьмем финитные функции из $L^2(0, \infty)$. Попытаемся найти эти функции в виде

$$\psi_n(x) = \begin{cases} \varphi(x) - \sum_{k=1}^{\gamma} a_{kn}\varphi_k(x) & \text{при} \quad 0<x<n, \\ 0 & \text{при} \quad n<x<\infty. \end{cases}$$

Для того чтобы удовлетворить равенствам (124), мы должны потребовать, чтобы

$$\sum_{k=1}^{\gamma} a_{kn} \int_0^n \varphi_j(x)\varphi_k(x)\,dx = \int_0^n \varphi(x)\varphi_j(x)\,dx, \qquad j=1, \ldots, \gamma.$$

При достаточно большом n числа a_{kn} определяются из этой системы однозначно, так как в силу линейной независимости функций $\varphi_1, \ldots, \varphi_\gamma$ определитель системы не равен нулю. Нетрудно видеть, что вследствие условий (122) $a_{kn} \to 0$ при $n \to \infty$, а поэтому $\psi_n \to \varphi$ по норме $L^2(0, \infty)$.

Доказательство леммы 2. Если $f \in \mathfrak{H}_0$, а F — какая-либо из главных функций спектральных особенностей, то $PF(f) = 0$ в силу условий (109). Обратно, предположим, что F является умеренно растущей функцией и что $PF = 0$. Пусть ν — настолько большое целое число, что функции $F_0(x) = (1+x)^{-\nu}F(x)$ и $\varphi_{km}(x) = (1+x)^{-\nu}s^{(m)}(x, \lambda_k)$, $k = \alpha+1, \ldots, \beta$, $m = 0, \ldots, m_k - 1$ принадлежат $L^2(0, \infty)$. Из того, что $PF = 0$ вытекает, что

$$\int_0^\infty \varphi(x) F_0(x)\,dx = 0 \tag{125}$$

для каждой функции φ, удовлетворяющей соотношениям

$$\int_0^\infty \varphi(x)\varphi_{km}(x)\,dx = 0, \quad k = \alpha+1, \ldots, \beta, \; m = 0, \ldots, m_k - 1, \tag{126}$$

и для которой $\|\varphi\|_\nu < \infty$ при $\nu = 0, 1, 2, \ldots$ На основании леммы 3 мы заключаем, что равенство (125) выполняется для всех функций $\varphi \in L^2(0, \infty)$, удовлетворяющих соотношениям (126). Следовательно, так как ортогональное дополнение ортогонального дополнения конечномерного подпространства совпадает с этим подпространством, функция F_0 является линейной комбинацией функций φ_{km}, что и требовалось доказать,

4. Распространение L-преобразования Фурье на умеренно растущие функции. Линейные непрерывные функционалы, заданные на пространствах основных функций, принято называть *обобщенными функциями*. Мы будем рассматривать пространства обобщенных функций $\mathfrak{H}_0'$ и $\mathfrak{G}_0'$, состоящие из линейных непрерывных функционалов, заданных на пространствах $\mathfrak{H}_0$ и $\mathfrak{G}_0$ соответственно.

Пусть $f' \in \mathfrak{H}_0'$ — произвольная обобщенная функция, а $s^{-1}\xi$ — обратное L-преобразование Фурье произвольной основной функции $\xi \in \mathfrak{G}_0$ (см. формулу (103)). Тогда соотношение

$$sf'(\xi) = f'(s^{-1}\xi) \tag{127}$$

определяет обобщенную функцию $sf' \in \mathfrak{G}_0'$. Действительно, в силу теоремы 2 оператор s^{-1} отображает непрерывно $\mathfrak{G}_0$ на $\mathfrak{H}_0$, а f' — по условию непрерывный функционал на $\mathfrak{H}_0$. Следуя методам теории обобщенных функций (см., например, Шилов [2]), мы принимаем следующее определение.

Определение 1. L-преобразованием Фурье обобщенной функции $f' \in \mathfrak{H}_0'$ называется обобщенная функция $sf' \in \mathfrak{G}_0'$, заданная формулой (127).

Как вытекает из неравенств (120),

$$PF \in \mathfrak{H}_0' \quad \text{при } F \in \mathfrak{F} \tag{128}$$

(см. (119)). Это позволяет нам принять следующее определение.

Определение 2. L-преобразованием Фурье умеренно растущей функции $F \in \mathfrak{F}$ называется обобщенная функция $SPF \in \mathfrak{G}_0'$.

Таким образом, для всех $\xi \in \mathfrak{G}_0$, $F \in \mathfrak{F}$.

$$SPF(\xi) = \int_0^\infty s^{-1}\xi(x) F(x)\,dx = PF(s^{-1}\xi). \tag{129}$$

Теорема 3. *Для того чтобы L-преобразование Фурье SPF умеренно растущей функции $F \in \mathfrak{F}$ равнялось нулю, необходимо и достаточно, чтобы F была линейной комбинацией главных функций спектральных особенностей, т. е. чтобы эта функция допускала представление вида* (121).

Доказательство. Так как, согласно теореме 2, s^{-1} взаимно однозначно отображает $\mathfrak{G}_0$ на $\mathfrak{H}_0$, то оператор S является взаимно однозначным отображением $\mathfrak{H}_0'$ на $\mathfrak{G}_0'$. Следовательно, из равенства $SPF = 0$ вытекает равенство $PF = 0$, и наше утверждение является следствием леммы 2.

Замечание Результат, содержащийся в теореме 3, можно обосновать не вполне строго, но более наглядно следующим образом.

Если λ_k — спектральная особенность, т. е. $\lambda_k=\rho_k^2>0$, и $e(\rho_k)=0$, то в силу (49)

$$s(x, \lambda_k)=\frac{e(-\rho_k)}{2i\rho_k}e(x, \rho_k)=c_k e(x, \rho_k).$$

Пусть $\operatorname{Im}\rho>0$ и $\rho\to\rho_k$. Тогда $e(x, \rho)$ как функция от x принадлежит $L^2(0, \infty)$ и

$$c_k e(x, \rho)\to s(x, \lambda_k)$$

равномерно в каждом конечном интервале изменения x. В связи с этим L-преобразование Фурье главной функции $s(x, \lambda_k)$ спектральной особенности λ_k естественно рассматривать как предел при $\rho\to\rho_k$ L-преобразования Фурье функции $c_k e(x, \rho)$ (существующего в обычном смысле при $\operatorname{Im}\rho>0$). Применяя формулу Грина для дифференциального выражения (1), мы найдем, что

$$\int_0^\infty e(x, \rho)\, s(x, \lambda)\, dx=\frac{e(\rho)}{\rho^2-\lambda}.$$

и, следовательно,

$$\lim_{\rho\to\rho_k}\int_0^\infty e(x, \rho)\, s(x, \lambda)\, dx=\begin{cases}0 & \text{при } \lambda\neq\lambda_k,\\ \dfrac{e'(\rho_k)}{2\rho_k} & \text{при } \lambda=\lambda_k.\end{cases}\tag{130}$$

Так как λ_k — точка непрерывного спектра, то найденный предел является функцией, эквивалентной нулю по отношению к «спектральной мере» оператора L. Действительно, на непрерывном спектре $\lambda\geqslant 0$ спектральная мера оператора L равна $\frac{1}{\pi}\frac{\sqrt{\lambda}\,d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\,e(-\sqrt{\lambda})}$. То, что плотность этой меры имеет в точке $\lambda=\lambda_k$ полюс порядка m_k, несущественно, так как полюс λ_k погашается. В самом деле, для каждой основной функции $f\in\mathfrak{H}_0$ точка λ_k является нулем функции $s(f, \lambda)$ кратности $\geqslant m_k$ (см. соотношения (109), продиктованные природой обобщенного равенства Парсеваля (99)).

Если λ_k — собственное значение, то соотношение (130) остается верным. Однако на точечном спектре «спектральная мера» одноточечного множества не равна нулю. Поэтому, если $e'(\rho_k)\neq 0$ (т. е. $m_k=1$), то предел (130) не является функцией, эквивалентной нулю.

Наконец, рассмотрим точку λ_0 непрерывного спектра, не являющуюся спектральной особенностью: $\lambda_0=\rho_0^2>0$, $e(\pm\rho_0)\neq 0$. В силу формулы (49) мы имеем

$$s(x, \lambda_0)=\lim_{\varepsilon\to+0}\frac{e(-\rho_0)\,e(x, \rho_0+i\varepsilon)-e(\rho_0)\,e(x, -\rho_0+i\varepsilon)}{2i\rho_0}.$$

Рассуждая аналогично предыдущему, мы найдем, что L-преобразование Фурье функции $s(x, \lambda_0)$ «равно» нулю при $\lambda\neq\lambda_0$ и бесконечности при $\lambda=\lambda_0$, т. е. пропорционально δ-функции Дирака (см., например, Шилов [2]), Так как $L^2(0, \infty) \subset \mathfrak{F}$, то для каждой функции из $L^2(0, \infty)$ мы располагаем двумя определениями L-преобразования Фурье. Выясним, какая существует связь между sF и sPF при $F \in L^2(0, \infty)$.

Обозначим через $\mathfrak{Y}$ множество функций Y, заданных на спектре оператора L (см. n° 1) и удовлетворяющих условию

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\rho Y(\rho)|^2 d\rho < \infty. \tag{131}$$

Каждой функции $Y \in \mathfrak{Y}$ мы можем поставить в соответствие функционал $\Pi Y \in \mathfrak{G}_0'$, заданный формулой

$$\Pi Y(\xi) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\infty} \xi(\lambda) Y(\lambda) \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} + \\ + \sum_{k=1}^{\alpha} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda} \right)^{m_k - 1} M_k(\lambda) \xi(\lambda) Y(\lambda) \right\}_{\lambda = \lambda_k}, \quad \xi \in \mathfrak{G}_0. \tag{132}$$

Непрерывность функционала ΠY относительно сходимости в $\mathfrak{G}_0$ (см. n° 2) вытекает из неравенств

$$\left| \int_0^{\infty} \xi(\lambda) Y(\lambda) \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} \right| \leqslant$$

$$\leqslant \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\rho \xi(\rho^2)}{e(\rho)\, e(-\rho)} \right|^2 d\rho \right)^{1/2} \left(\int_{-\infty}^{\infty} |\rho Y(\rho^2)|^2 d\rho \right)^{1/2} \leqslant$$

$$\leqslant C(Y) \left(\int_{-\infty}^{\infty} \left| \frac{\rho \xi(\rho^2)}{e(\rho)} \right|^2 d\rho \right)^{1/2}$$

(мы воспользовались условием (131) и тем, что $e(-\rho_k) \neq 0$ при $k = \alpha + 1, \ldots, \beta$; $C(Y)$ — положительное число) и из того, что каждая норма (116) мажорируется некоторой нормой (110), если $\xi \in \mathfrak{G}_0$. Нетрудно видеть, что $Y = 0$, если $Y \in \mathfrak{Y}$ и $\Pi Y = 0$. Таким образом, *преобразование* Π *является взаимно однозначным отображением* $\mathfrak{Y}$ *в* $\mathfrak{G}_0'$.

В силу оценки (77) (случай $\nu = 0$) для каждой функции $F \in L^2(0, \infty)$ функция sF удовлетворяет условию (131), а поэтому $sF \in \mathfrak{Y}$. Это позволяет нам записать обобщенное равенство Парсеваля (99) в следующем виде:

$$\int_0^{\infty} f(x) F(x)\, dx = \Pi sF(sf) \text{ при } f \in \mathfrak{H},\ F \in L^2(0, \infty).$$

В частности (см. (119)),

$$PF(f) = \Pi sF(sf) \text{ при } f \in \mathfrak{H}_0, \quad F \in L^2(0, \infty).$$

Полагая здесь $sf = \xi$ и сравнивая с равенством (129), мы находим, что $SPF(\xi) = \Pi sF(\xi)$ для всех $\xi \in \mathfrak{G}_0$ и, таким образом, для всех $F \in L^2(0, \infty)$:

$$SPF = \Pi sF, \tag{132$_1$}$$

где Π — линейное взаимно однозначное отображение. В этом смысле *L-преобразование Фурье SP, рассматриваемое на умеренно растущих функциях, является продолжением L-преобразования Фурье s, рассматриваемого на пространстве $L^2(0, \infty)$* *).

Как отмечалось в n°1 § 5, задача разложения по главным функциям возникает в связи с задачей обоснования метода Фурье В связи с этим возникает вопрос о том, может ли развитая здесь теория L-преобразования Фурье умеренно растущих функций быть использована для такой цели. Положительный ответ на этот вопрос дается в работе Лянце [2], где теория L-преобразования Фурье используется для построения операционного исчисления функций от оператора L Затем на примерах уравнений $\frac{\partial u}{\partial t} = Lu$ и $\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = Lu$ показано, как это операционное исчисление можно использовать для исследования корректности смешанных задач в классах экспоненциально растущих функций. Интересно отметить, что потеря взаимной однозначности L-преобразованием Фурье после выхода из $L^2(0, \infty)$ не мешает всем нужным построениям. В работе Лянце [4] построено операционное исчисление функций от оператора L, действующего на локально интегрируемые функции (с произвольным порядком роста при $x \to \infty$).

5. Некоторые другие результаты. Обобщения. Здесь будут изложены без доказательств некоторые другие результаты по теории сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов.

А) Теория оператора L.

а) *Другие предположения относительно функции $p(x)$.* При построении изложенной выше теории существенно использовалось то обстоятельство, что функция $e(\rho) = e(0, \rho)$ допускает аналитическое продолжение вниз от прямой $\operatorname{Im} \rho = 0$. Это обстоятельство вытекало из дополнительного ограничения: $\int\limits_0^\infty e^{\varepsilon x} |p(x)| \, dx < \infty$. Однако существование нужного аналитического продолжения может быть получено как следствие других условий (см. Лянце [4])

Пусть X обозначает область в комплексной x-плоскости, состоящую из таких точек $x = \rho e^{i\varphi}$, для которых $\rho > \rho_0$ и $|\varphi| < \varphi_0$, где ρ_0 и φ_0 — некоторые положительные числа. Предположим, что функция $p(x)$ определена

---

*) Нетрудно показать, что при естественном определении сходимости в $\mathfrak{F}$ это продолжение является также продолжением по непрерывности (в этом случае $L^2(0, \infty)$ является плотной частью $\mathfrak{F}$).

в области $(0, \infty) \cup X$, суммируема на полуоси $(0, \infty)$, голоморфна в области X и удовлетворяет неравенству вида

$$|p(x)| < \frac{A}{|x|^{\alpha}}, \quad x \in X \tag{133}$$

Если в неравенстве (133) $\alpha > 2$, то для каждого $x \geqslant 0$ функция $e(x, \rho)$ (см. n°2 § 27) допускает продолжение из полуплоскости $\operatorname{Im} \rho \geqslant 0$ в область S, состоящую из тех точек $\rho = |\rho| e^{i\tau}$, для которых $|\rho| > 0$ и $-\varphi_0 < \tau < \varphi_0$, причем продолжение является голоморфным по ρ в области S При этом для функции $e(x, \rho)$ остается справедливым представление вида (13) с надлежащим сдвигом в комплексную x-плоскость контура интегрирования. Оказывается, что в указанных выше предположениях, ортогонализирующее ядро $k(x, t)$ (см. (13)) допускает аналитическое продолжение по обеим переменным x и t.

Если в неравенстве (133) $\alpha > 2$, то множество сингулярных чисел оператора L ограничено, не более чем счетно и его предельной точкой может быть только точка $\rho = 0$ Если же в неравенстве (133) $\alpha > 3$, то множество сингулярных чисел оператора L конечно и на этот случай переносится вся теория, изложенная в §§ 27 – 30.

Изложенный выше результат, касающийся условий счетности и конечности множества сингулярных чисел оператора L был обобщен в работе Ждановой [1] на случай, когда $p(x) = \frac{l(l+1)}{x^2} + q(x)$ и $q(x)$ регулярна в бесконечно удаленной точке.

б) *Оператор L и теория спектральных операторов.* Для каждого измеримого подмножества Δ спектра оператора L, замыкание которого не содержит спектральных особенностей, положим

$$P(\Delta) f(x) = \frac{1}{\pi} \int\limits_{\Delta \cap (0, \infty)} s(f, \lambda)\, s(x, \lambda) \frac{\sqrt{\lambda}\, d\lambda}{e(\sqrt{\lambda})\, e(-\sqrt{\lambda})} + \\ + \sum_{\substack{\lambda_k \in \Delta \\ k=1, \ldots, a}} \left\{ \left(\frac{d}{d\lambda}\right)^{m_k - 1} M_k(\lambda)\, s(f, \lambda)\, s(x, \lambda) \right\}_{\lambda = \lambda_k}. \tag{134}$$

Вообще говоря, $P(\Delta)$ не является самосопряженным оператором, однако это – ограниченное идемпотентное преобразование (т. е $P(\Delta)^2 = P(\Delta)$). Следовательно, $P(\Delta)$ является оператором «косого» проектирования в том смысле, что все пространство $L^2(0, \infty)$ представимо в виде **прямой суммы** $H_\Delta + G_\Delta$, где $H_\Delta = P(\Delta) L^2(0, \infty)$, $G_\Delta = [1 - P(\Delta)] L^2(0, \infty)$, и если $f = h + g$, $h \in H_\Delta$, $g \in G_\Delta$, то $h = P(\Delta) f$. Операторная функция $P(\Delta)$ множества Δ играет по отношению к оператору L роль, аналогичную спектральной функции в теории самосопряженных операторов (см. n° 1 § 12).

Пусть оператор L не имеет спектральных особенностей Можно показать (этот результат содержится неявно в работе Б. Я. Левина [2], см. также Кесельман [2]), что в этом случае $\sup \| P(\Delta) \| < \infty$ и что оператор L, рассматриваемый на подпространстве $H_c = P([0, \infty)) L^2(0, \infty)$, подобен самосопряженному оператору, точнее, существует такое линейное взаимно однозначное и непрерывное отображение U пространства H_c на $L^2(0, \infty)$, что $UL_cU^{-1} = \Lambda$, где L_c – оператор L, рассматриваемый лишь на (инвариантном) подпространстве H_c, а Λ – оператор умножения на независимое переменное в пространстве $L^2(0, \infty)$ (см n° 2 § 20). Поскольку подпространство $[1 - P(\Delta)] L^2(0, \infty)$ конечномерно, то отсюда вытекает, что *оператор L без* *спектральных особенностей является спектральным оператором в смысле Данфорда* (см. Данфорд [1] или Наймарк [7]). Для оператора L, имеющего спектральные особенности, эти утверждения уже неверны Это связано с тем обстоятельством, что

$$\| P(\Delta) \| \to \infty, \tag{135}$$

когда расстояние от множества Δ до множества спектральных особенностей стремится к нулю. Тем не менее можно доказать, что оператор L (имеющий спектральные особенности) является обобщенным спектральным оператором в смысле определения, введенного в работе Лянце [1] В частности, он допускает представление

$$L = \int \lambda P(d\lambda), \tag{136}$$

где интеграл берется по спектру и понимается в некотором естественном смысле. Кроме того, имеет место соотношение вида $UL_cU^{-1} = \Lambda$, однако теперь операторы U и U^{-1} неограниченные (см Лянце [2]).

в) *Обратная задача спектрального анализа для оператора L.* Здесь мы будем рассматривать только такие операторы L, которые удовлетворяют дополнительному ограничению $\int\limits_0^\infty e^{-\varepsilon x} |p(x)|\, dx < \infty$. Мы по-прежнему будем пользоваться обозначениями $e(\rho) = e(0, \rho)$, $\hat{e}(\rho) = \hat{e}(0, \rho)$, где $e(x, \rho)$ и $\hat{e}(x, \rho)$ — решения уравнения $l(y) = \rho^2 y$, построенные в п°п° 2 и 3 § 27. Функцию

$$s(\rho) = \frac{e(-\rho)}{e(\rho)} \tag{137}$$

будем называть *функцией рассеяния* оператора L, а многочлены

$$P_k(x) = ie^{-ix\rho_k} \operatorname{Res} \frac{\hat{e}(\rho)}{e(\rho)} e^{ix\rho_k} \Big|_{\rho=\rho_k}, \quad k = 1, \ldots, \alpha, \tag{138}$$

— *нормировочными многочленами.* Оказывается, что оператор L однозначно определяется своей функцией рассеяния $s(\rho)$, невещественными сингулярными числами $\rho_1, \ldots, \rho_\alpha$ и нормировочными многочленами $P_1, \ldots, P_\alpha$. Все эти величины должны удовлетворять некоторым условиям согласованности. Предположим, что условия согласованности выполнены, и положим

$$f(x) = \frac{1}{2\pi} \int\limits_{-\infty+i\delta}^{+\infty+i\delta} [s(\rho) - 1]\, e^{ix\rho}\, d\rho - \sum_{k=1}^{\alpha} P_k(x)\, e^{ix\rho_k}, \tag{139}$$

где δ — положительное число, меньшее $\operatorname{Im} \rho_k$, $k = 1, \ldots, \alpha$ Тогда для каждого $x \geqslant 0$ интегральное уравнение Фредгольма

$$k(x, t) = \int\limits_x^\infty k(x, u) f(u + t)\, du + f(x + t) \tag{140}$$

имеет единственное решение $k(x, t)$. Решая это уравнение и полагая

$$p(x) = -2 \frac{d}{dx} k(x, x), \tag{141}$$

мы определим дифференциальное выражение $l(y) = -y'' + p(x) y$, а значит, также оператор L. Подробное изложение содержится в работе Лянце [5] г) *Структура множества спектральных особенностей.* Вопросам строения множества сингулярных чисел и, в частности, множества спектральных особенностей посвящены некоторые работы Б. С. Павлова (см. Павлов [1—3]). Им доказано, что для конечности множества сингулярных чисел оператора L достаточно, чтобы при некотором $\varepsilon > 0$

$$\sup_{0 \leqslant x < \infty} |p(x)| e^{\varepsilon \sqrt{x}} < \infty. \tag{142}$$

Это условие является точным в том смысле, что замена $\sqrt{x}$ в (142) на x^{β} с $\beta < \frac{1}{2}$ не обеспечивает конечности множества сингулярных чисел.

Если условие (142) заменить требованием более медленного убывания $p(x)$ при $x \to \infty$, то строение множества сингулярных чисел может стать значительно более сложным, в частности оно может иметь своей предельной точкой любую наперед заданную точку вещественной оси. В работе Павлов [3] доказывается, что если $\int_0^{\infty} (1+x)^2 |p(x)| \, dx < \infty$, то множество спектральных особенностей ограничено, замкнуто, имеет меру нуль и удовлетворяет условию

$$\sum \ln |l_\nu| \, |l_\nu| > -\infty,$$

где l_ν — интервалы, смежные с множеством спектральных особенностей, $|l_\nu|$ — длина интервала l_ν и суммирование ведется по всем конечным l_ν. Собственные значения оператора L, занумерованные с учетом кратности, удовлетворяют условию

$$\sum \operatorname{Im} \sqrt{\lambda_\nu} < \infty.$$

Отметим, что в работе Павлов [3] получены теоремы разложения по главным функциям оператора L при более слабых ограничениях, чем условие (43).

д) *Оператор на всей оси и операторы высших порядков.* Изложенная выше теория была обобщена на случай оператора второго порядка на всей оси в работах Кемп [1, 2] и Блащак [1, 2]. Некоторые результаты теории обобщены на случай операторов высших порядков и операторов в пространстве вектор-функций в работах Фунтаков [1], Кабанова [1], Кемп [2], Гимадисламов [1].

М. Г. Гасымов получил разложение по главным функциям оператора с особенностью в нуле вида $l(l+1)x^{-2}$, порожденного на полуоси конечной или бесконечной системой дифференциальных уравнений второго порядка (см. Гасымов [5, 6]).

Б) Спектральная теорема Марченко. Здесь мы изложим без доказательств некоторые результаты, полученные в работе Марченко [4].

Напомним, что целая функция $F(\lambda)$ называется функцией *экспоненциального* типа, если существуют такие $\sigma > 0$ и $C(\sigma) > 0$, что для всех комплексных λ

$$|F(\lambda)| \leqslant C(\sigma) e^{\sigma |\lambda|}. \tag{143}$$

Точная нижняя грань чисел σ, для которых (143) выполняется, называется *степенью* $F(\lambda)$.

Обозначим через Z совокупность всех целых четных функций экспоненциального типа, суммируемых на оси $-\infty < \lambda < \infty$. Совокупность Z мы будем рассматривать как линейное пространство с обычным определением сложения и умножения на число Будем говорить, что последовательность $\{F_n\} \subset Z$ сходится к функции $F \in Z$, если

$$\lim_{n \to \infty} \int_{-\infty}^{\infty} | F_n(\lambda) - F(\lambda) | \, d\lambda = 0 \tag{144}$$

и $\sup_n \sigma_n < \infty$; здесь σ_n — степень функции F_n, $n = 1, 2, \ldots$ Через Z' мы обозначим пространство всех линейных функционалов, заданных на Z, непрерывных относительно только что введенной сходимости.

Пусть $p(x)$ — произвольная комплекснозначная функция, суммируемая на каждом к о н е ч н о м интервале полуоси $(0, \infty)$, и пусть θ — произвольное комплексное число. Обозначим через $\omega(x, \rho)$ решение дифференциального уравнения

$$-y'' + p(x) y = \rho^2 y, \tag{145}$$

удовлетворяющее начальным условиям $\omega(0, \rho) = 1$, $\omega'_x(0, \rho) = \theta$, а поэтому также краевому условию

$$y'(0) - \theta y(0) = 0. \tag{146}$$

Каждой ф и н и т н о й функции $f \in L^2(0, \infty)$ поставим в соответствие ее ω-преобразование $\omega(f, \rho)$, полагая

$$\omega(f, \rho) = \int_0^{\infty} f(x) \, \omega(x, \rho) \, dx. \tag{147}$$

Оказывается, что для любой пары финитных функций f, g из $L^2(0, \infty)$ произведение их ω-преобразований принадлежит пространству Z: $\omega(f, \lambda) \times \times \omega(g, \lambda) \in Z$. Спектральная теорема В. А. Марченко состоит в следующем. *Каждой краевой задаче* (145), (146) *соответствует такой функционал* $R \in Z'$, *что для любых финитных функций* f, g *из* $L^2(0, \infty)$

$$\int_0^{\infty} f(x) \, g(x) \, dx = R[\omega(f, \lambda) \, \omega(g, \lambda)]. \tag{148}$$

Функционал $R \in Z'$ назовем *позитивным*, если $R[F(\lambda)] \geqslant 0$ для каждой функции $F \in Z$, удовлетворяющей условию $F(\sqrt{\mu}) \geqslant 0$ при $-\infty < \mu < \infty$. Оказывается, что *для каждого позитивного функционала* $R \in Z'$ *существует такая неубывающая функция* $\sigma(\rho)$, *что*

$$R[\omega(f, \lambda) \, \omega(g, \lambda)] = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(f, \rho) \, \omega(g, \rho) \, d\sigma(\rho)$$

для любых финитных f, $g \in L^2(0, \infty)$. С другой стороны, нетрудно показать, что в случае в е щ е с т в е н н ы х $p(x)$ и θ функционал R, содержащийся в равенстве (148), является позитивным. Таким образом, полученное в главе VI равенство Парсеваля

$$\int_0^{\infty} f(x) \, g(x) \, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \omega(f, \rho) \, \omega(g, \rho) \, d\sigma(\rho)$$

для самосопряженных дифференциальных операторов (второго порядка) оказывается частным случаем более общего *равенства Парсеваля — Мар*-

ченко (148). Функционал R, содержащийся в этом равенстве, называют *обобщенной спектральной функцией* задачи (145), (146).

В работе Марченко [4] получены условия, необходимые и достаточные для того, чтобы функционал $R \in Z'$ был обобщенной спектральной функцией некоторой задачи вида (145), (146) и дан алгорифм, позволяющий по заданной обобщенной спектральной функции определить $p(x)$ и θ (см. (145), (146)) (т. е. дано полное решение обратной задачи спектрального анализа по обобщенной спектральной функции).

В случае, когда функция $\operatorname{Im} p(x)$ ограничена при $0 < x < \infty$, обобщенную спектральную функцию R можно представить в виде некоторого интеграла по контуру, охватывающему спектр задачи. В некоторых случаях контур интегрирования удается стянуть на спектр и получить разложение по главным функциям классического типа.

Отметим, что идея, в соответствии с которой роль спектральной функции несамосопряженного оператора должен играть линейный непрерывный функционал, заданный на соответствующем линейном топологическом пространстве, была предложена также К. Фояшем, а затем и многими другими авторами (см. Фояш [1]). К. Фояш развил эту идею для абстрактно заданных, вообще говоря, не дифференциальных операторов Подробное изложение относящегося сюда круга вопросов читатель найдет в книге Коложоарэ и Фояш [1]

Обобщение теории Марченко на бесконечные системы дифференциальных уравнений второго порядка было получено в работе Рофе-Бекетов [1] В работе Гасымов [5] дается обобщение теории Марченко на случай, когда функция $p(x)$ имеет в нуле особенность вида $l(l+1)x^{-2}$. При этом важную роль играет соответствующее обобщение теорем об ортогонализирующих ядрах, изложенных в § 25. Некоторые результаты теории Марченко распространены на случай краевой задачи на всей оси в работах Фунтаков [2] и Блащак [1].

В) Сингулярные несамосопряженные операторы с чисто дискретным спектром. Напомним, что спектр оператора называется чисто дискретным, если он состоит из счетного числа изолированных точек с единственной предельной точкой на бесконечности, причем каждой точке спектра отвечает конечномерное инвариантное пространство. Весьма сильные признаки дискретности спектра сингулярных несамосопряженных операторов второго порядка принадлежат В Б. Лидскому Приведем следующие результаты, принадлежащие этому автору (см. Лидский [3, 4]).

Пусть L — оператор, порождаемый в гильбертовом пространстве $L^2(-\infty, \infty)$ дифференциальным выражением

$$l(y) = -y'' + (q(x) + ir(x))\,y, \tag{149}$$

где $q(x)$ и $r(x)$ — вещественнозначные функции. *Если функция $q(x)$ является ограниченной снизу в каждом конечном интервале и $q(x) \to +\infty$ при $|x| \to \infty$, то (при любом поведении $r(x)$) оператор L имеет вполне непрерывную резольвенту и, в частности, чисто дискретный спектр.* Это же утверждение остается в силе при любом поведении $q(x)$, если $r(x) \to +\infty$ или $-\infty$ при $|x| \to \infty$ Нижеследующее предложение обобщает критерий дискретности А. М. Молчанова (см. n°5 § 24) на несамосопряженный случай. *Пусть функция $q(x)$ ограничена снизу, а функция $r(x)$ полуограниченная. Тогда для полной непрерывности резольвенты оператора L необходимо и достаточно, чтобы для любой последовательности непересекающихся интервалов $\{D_n\}$ одинаковой длины*

$$\int\limits_{D_n} (q(x) + |r(x)|)\,dx \to \infty$$

когда интервал D_n уходит в бесконечность.

Напомним, что система элементов гильбертова пространства $\mathfrak{H}$ называется полной, если замыкание ее линейной оболочки совпадает с $\mathfrak{H}$. В качестве примера теоремы о полноте системы собственных и присоединенных элементов сингулярного несамосопряженного дифференциального оператора приведем следующий результат (см. Лидский [4]).

Пусть при некотором $\alpha > 0$

$$\overline{\lim_{|x| \to \infty}} \frac{q(x)}{|x|^{\alpha}} > C > 0.$$

Тогда для полноты в $L^2(-\infty, \infty)$ *системы собственных и присоединенных функций оператора* L, *порожденного дифференциальным выражением* (149), *необходимо и достаточно, чтобы*

$$\lim_{|x| \to \infty} \frac{|r(x)|}{q(x)} = 0.$$

По вопросам теории несамосопряженных операторов с чисто дискретным спектром см. также работы: Шварц [1], Наймарк [10], Аллахвердиев [1—3], Федорюк [4].

Г) Некоторые другие результаты. Примером несамосопряженных дифференциальных операторов с непрерывным спектром вне вещественной оси являются операторы с комплекснозначными периодическими коэффициентами. Некоторые свойства таких операторов исследованы в работе Рофе-Бекетов [3].

Пусть L — оператор, порожденный в $L^2(-\infty, \infty)$ дифференциальным выражением

$$l(y) = p_0(x) y^{(n)} + \ldots + p_n(x) y$$

с комлекснозначными коэффициентами периода ω, причем $p_0(x) \neq 0$, $-\infty < x < \infty$. Оказывается, что оператор L имеет чисто непрерывный спектр, который совпадает с множеством тех значений λ, для которых уравнение $l(y) = \lambda y$ имеет решение, ограниченное при $-\infty < x < \infty$. При этом спектр либо состоит из конечного числа аналитических дуг, либо пуст, либо заполняет всю λ-плоскость. Если $p_0(x) \equiv \text{const}$, то два последних случая невозможны. Резольвента L является интегральным оператором с ядром Карлемана. В случае дифференциального выражения l второго порядка и $p_0(x) \equiv 1$ резольвентное множество (см. § 28) оператора L связно тогда и только тогда, когда $\operatorname{Re} P = 0$, где

$$P = \int_0^{\omega} p_1(x)\, dx.$$

В случае оператора L, порожденного в $L^2(0, \infty)$ дифференциальным выражением $l(y)$ второго порядка с периодическими коэффициентами ($p_0(x) \equiv 1$) и некоторым краевым условием при $x = 0$, характер непрерывного спектра сохраняется, причем ограниченные непрерывным спектром внутренние области заполняются сплошь собственными значениями при $\operatorname{Re} P < 0$ и остаточным спектром *) при $\operatorname{Re} P > 0$. Возможны еще изолированные собственные значения и точки остаточного спектра.

По поводу операторов с периодическими коэффициентами см. также Мак-Гарвей [1].

*) Точка λ называется точкой остаточного спектра оператора L, если λ не является собственным значением и область значений оператора $L - \lambda 1$ не плотна в пространстве.

В теории несамосопряженных операторов с непрерывным спектром известные успехи достигнуты методами теории возмущений Если при возмущении дискретного спектра задача заключается в том, чтобы проследить, как возмущение меняет собственные значения и соответствующие собственные векторы, то в случае непрерывного спектра изучается вопрос о том, можно ли установить подобие возмущенного оператора с невозмущенным.

Наиболее полные результаты в этом направлении (для несамосопряженных операторов) достигнуты в недавней работе Като [2]. Там же можно найти дальнейшие литературные указания. Как следствие из построенной им общей абстрактной теории, Т Като получил следующий результат Пусть $L(\varkappa)$ — оператор, порожденный в $L^2(0, \infty)$ дифференциальным выражением $-y''+\varkappa p(x)y$ и краевым условием $y(0)=0$. Если $|\varkappa| < \left(\int\limits_0^\infty x\,|p(x)|\,dx\right)^{-1}$, то существуют такие голоморфные по $\varkappa$ оператор-функции $W(\varkappa)$ и $[W(\varkappa)]^{-1}$, что $L(\varkappa)=W(\varkappa)\,L(0)\,[W(\varkappa)]^{-1}$. Указанная здесь оценка для комплексного параметра $\varkappa$ является оптимальной.

Дискретным аналогом дифференциальных операторов являются разностные операторы К спектральной теории самосопряженных разностных операторов можно подойти так же, как и к самосопряженным дифференциальным операторам, с помощью общих методов теории (самосопряженных) операторов в гильбертовом пространстве (см, например, Березанский [4]) В случае разностных несамосопряженных операторов иногда возможно применение методов, развитых в этом добавлении. Так, в работе Лянце [6] рассмотрен оператор L, порожденный в пространстве l_2 последовательностей $y=(y_1, y_2, \ldots)$ с нормой $\|y\|=\left(\sum |y_j|^2\right)^{1/2}$ разностным выражением

$$(ly)_j=\frac{1}{2}(y_{j-1}+y_{j+1})-b_jy_j,$$

$j=1, 2, \ldots$, и краевым условием $y_0=\theta y_1$ с комплексными $b_1, b_2, \ldots$ и θ. При надлежащих ограничениях на убывание чисел b_j исследован спектр и резольвента и построено разложение по главным элементам. При этом обнаружено существование спектральных особенностей и всех связанных с ними специфических явлений. Разностный оператор L является примером ограниченного оператора со спектральным разложением, выражающимся регуляризованным значением расходящегося интеграла.

Класс краевых условий, порождающих несамосопряженные операторы, обладающие даже достаточно закономерными спектральными свойствами, является существенно более широким, чем класс самосопряженных краевых условий *) В работах Аллана М. Кралла (см Кралл [1—5] изучается оператор L, порожденный в $L^2(0, \infty)$ дифференциальным выражением $l(y)=-y''+p(x)y$ и граничным условием вида

$$\int\limits_0^\infty K(x)\,y(x)\,dx-\beta y(0)+\alpha y'(0)=0,$$

где $K(x)\in L^2(0, \infty)$, $|\alpha|^2+|\beta|^2>0$. Если $K(x), p(x)\in L^1(0, \infty)$ и $\alpha\neq 0$, то строение спектра такое же, как в случае краевого условия $y(0)=0$ (см § 28). В частности, собственные значения образуют не более чем счетное ограниченное множество с предельными точками только на полуоси $\lambda\geqslant 0$

*) См n° 4 § 1.

(заполненной непрерывным спектром) и определяются соотношениями $\lambda = \rho^2$, $\operatorname{Im} \rho > 0$ и

$$\int_0^\infty K(x)\, e(x, \rho)\, dx - \beta e(0, \rho) + \alpha e'_x(0, \rho) = 0,$$

где $e(x, \rho)$ — функция, введенная в п° 2 § 27 Оператор L^*, сопряженный с оператором L, порождается выражением

$$l^*(z) = -z'' + \overline{p(x)}\, z + \frac{z(0)}{\bar{\alpha}}\, \overline{K(x)}$$

и краевым условием $\bar{\beta} z(0) - \bar{\alpha} z'(0) = 0$. При некоторых ограничениях построено разложение по главным функциям оператора L.

Данный в этом добавлении обзор по теории сингулярных несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторов не претендует на полноту. Дополнительные сведения и литературу можно найти в статьях: Данфорд [1], Дольф [1], Келдыш и Лидский [1], Наймарк [11]

ДОБАВЛЕНИЕ II

ФОРМУЛА ОБРАЩЕНИЯ СТИЛЬТЬЕСА

Пусть $\sigma(\lambda)$ — комплексная функция ограниченной вариации на всей вещественной оси $-\infty < \lambda < \infty$. Положим

$$\varphi(z) = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma(\lambda)}{z-\lambda} \tag{1}$$

и при $z = \sigma + i\tau$

$$\psi(\sigma, \tau) = \frac{\operatorname{sign}\tau}{\pi} \frac{\varphi(z) - \varphi(\bar{z})}{2i} = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|\, d\sigma(\lambda)}{(\lambda-\sigma)^2 + \tau^2}. \tag{2}$$

Следующая теорема дает выражение функции $\sigma(\lambda)$ через $\psi(\sigma, \tau)$.

Теорема 1. *Если a и b — точки непрерывности функции $\sigma(\lambda)$, то*

$$\sigma(b) - \sigma(a) = -\lim_{\tau \to 0} \int_a^b \psi(\sigma, \tau)\, d\sigma. \tag{3}$$

Доказательство. Не нарушая общности, можно считать, что $\sigma(-\infty) = 0$. Интегрируя тогда в (2) по частям, получим

$$-\psi(\sigma, \tau) = -\frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\frac{|\tau|}{(\lambda-\sigma)^2+\tau^2}\right)\sigma(\lambda)\, d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{\partial}{\partial\sigma}\left(\frac{|\tau|}{(\lambda-\sigma)^2+\tau^2}\right)\sigma(\lambda)\, d\lambda.$$

Проинтегрируем обе части последнего равенства по σ в пределах от a до b и введем обозначение

$$J(\tau, x) = \frac{1}{\pi} \int_{-\infty}^{\infty} \frac{|\tau|}{(\lambda-x)^2+\tau^2}\sigma(\lambda)\, d\lambda. \tag{4}$$

Мы получим

$$-\int_a^b \psi(\sigma,\ \tau)\,d\sigma = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau|}{(\lambda-b)^2+\tau^2}\,\sigma(\lambda)\,d\lambda - $$

$$-\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau|}{(\lambda-a)^2+\tau^2}\,\sigma(\lambda)\,d\lambda = J(\tau,\ b)-J(\tau,\ a). \qquad (5)$$

Докажем, что

$$\lim_{\tau\to 0} J(\tau,\ b)=\sigma(b), \quad \lim_{\tau\to 0} J(\tau,\ a)=\sigma(a); \qquad (6)$$

тем самым теорема будет доказана. Так как

$$\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau|}{\lambda^2+\tau^2}\,d\lambda = 1,$$

то

$$J(\tau,\ b)-\sigma(b) = \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau|}{(\lambda-b)^2+\tau^2}\,\sigma(\lambda)\,d\lambda - \frac{1}{\pi}\,\sigma(b)\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau|}{\lambda^2+\tau^2}\,d\lambda =$$

$$= \frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau|}{\lambda^2+\tau^2}\,[\sigma(\lambda+b)-\sigma(b)]\,d\lambda. \qquad (7)$$

Пусть задано $\varepsilon>0$; выберем $\delta>0$ так, что

$$|\sigma(\lambda+b)-\sigma(b)|<\frac{\varepsilon}{2} \quad \text{при} \quad |\lambda|\leqslant\delta.$$

Это возможно, ибо функция $\sigma(\lambda)$ непрерывна при $\lambda=b$. Далее выберем число M, такое, что $|\sigma(\lambda)|\leqslant M$. Тогда

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|\leqslant\delta}\frac{|\tau|}{\lambda^2+\tau^2}\,[\sigma(\lambda+b)-\sigma(b)]\,d\lambda\right| < \frac{\varepsilon}{2\pi}\int_{-\infty}^{\infty}\frac{|\tau|}{\lambda^2+\tau^2}\,d\lambda = \frac{\varepsilon}{2}, \qquad (8)$$

$$\left|\frac{1}{\pi}\int_{|\lambda|\geqslant\delta}\frac{|\tau|}{\lambda^2+\tau^2}\,[\sigma(\lambda+b)-\sigma(b)]\,d\lambda\right| \leqslant \frac{4M}{\pi}\int_{\delta}^{\infty}\frac{|\tau|}{\lambda^2+\tau^2}\,d\lambda =$$

$$= \frac{4M}{\pi}\left(\frac{\pi}{2}-\operatorname{arctg}\frac{\delta}{\tau}\right). \qquad (9)$$

При фиксированном δ и $\tau\to 0$ это последнее выражение стремится к нулю; отсюда из оценки (8) и из (7) мы заключаем, что

$$\lim_{\tau\to 0} J(\tau,\ b)=\sigma(b);$$

аналогично доказывается, что

$$\lim_{\tau\to 0} J(\tau, a) = \sigma(a).$$

Формула (3) называется *формулой обращения Стильтьеса.*

Если $\sigma(\lambda)$ — вещественная функция, то $\varphi(\bar{z}) = \overline{\varphi(z)}$ и формула обращения (3) примет вид

$$\sigma(b) - \sigma(a) = -\lim_{\tau\to 0} \frac{1}{\pi} \int_a^b \Im\{\varphi(z)\}\, d\sigma.$$

Теорема 2 (теорема единственности). *Если $\sigma_1(\lambda)$ и $\sigma_2(\lambda)$ — две функции с ограниченной вариацией на всей вещественной оси $-\infty < \lambda < \infty$ и если для всех невещественных значений z*

$$\int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_1(\lambda)}{z-\lambda} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{d\sigma_2(\lambda)}{z-\lambda},$$

то $\sigma_1(\lambda) - \sigma_2(\lambda) = \mathrm{const}$.

Доказательство. Согласно теореме 1 в точках непрерывности обеих функций $\sigma_1(\lambda)$, $\sigma_2(\lambda)$

$$\sigma_1(b) - \sigma_1(a) = \sigma_2(b) - \sigma_2(a),$$

следовательно, эти функции могут отличаться только постоянным слагаемым.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА

Абдукадырев Э

1 Вычисление регуляризованного следа для системы Дирака, Вестник Моск ун-та, № 4 (1967), 17–24

Агранович З С, Марченко В. А

1 Обратная задача теории рассеяния, Харьков, 1960

Алекперов Н И

1 Краевая задача с комплексной весовой функцией, Некоторые вопросы функционального анализа, Баку, АН Аз. ССР. (1965), 10—16

Аллахвердиев Дж Э

1 О полноте систем собственных и присоединенных элементов несамосопряженных операторов, ДАН Аз ССР XVIII, 7 (1962), 3—7

2 О полноте системы собственных и присоединенных элементов одного класса несамосопряженных операторов, зависящих от параметра, ДАН СССР **160**, 6 (1965), 1231—1234

3 О многократно полных системах и несамосопряженных операторах, зависящих от параметра, ДАН СССР **166**, 1 (1966), 11—19

де Альфаро В, Редже Т

1. Потенциальное рассеяние, «Мир», 1966

Амбарцумян В А

1. Ueber eine Frage der Eigenwerttheorie, Zs f Phys **53** (1929), 690—695

Аронштайн (Aronszajn N)

1 On a problem of Weyl in the theory of singular Sturm-Liouville equations, Amer J of Math **79** (1957), 597—610

Ахиезер Н. И и Глазман И М

1 Теория линейных операторов в гильбертовом пространстве, Изд 2, «Наука», 1966

Базь А И., Зельдович Я Б, Переломов А М

1 Рассеяние, реакции и распады в нерелятивистской квантовой механике, «Наука», 1966

Бальслев (Balslev E)

1 Perturbation of ordinary differential operators, Math Scand **11** (1962), 131–148

Бари Н К

1 Биортогональные системы и базисы в гильбертовом пространстве, Уч зап МГУ **148**, т IV (1951), 68—107

Березанский Ю. М

1. О разложении по собственным функциям общих самосопряженных дифференциальных операторов, ДАН СССР **108**, 3 (1956), 379—382

2 Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Матем. сборник **43**, 1 (1957), 75—126.

3 О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов, Укр матем журнал **11**, 1 (1959), 16—24
4 Разложение по собственным функциям самосопряженных операторов, Киев, 1965

Берковитц (Berkowitz J)
1. On the discretness of spectra of singular Sturm Liouville problems, Comm. Pure Appl Math. **12** (1959), 513—542

Бириук и Коддингтон (Biriuk G, Coddington E.)
1 Нормальные расширения формально нормальных неограниченных операторов, Математика — переводы **9**, 6 (1965), 104—144

Биркгоф (Birkhoff G D)
1 On the asymptotic character of the solutions of certain linear differential equations containing a parameter Trans Amer Math Soc **9** (1908), 219—231
2 Boundary value and expansion problems of ordinary linear differential equations, Trans Amer Math Soc **9** (1908), 373—395
3 Note of the expansion problems of the ordinary linear differential equations, Rendiconti Palermo **36** (1913), 115—126
4 Quantum mechanics and asymptotic series, Bull Amer Math Soc. **39** (1933), 681—700

Биркгоф и Лангер (Birkhoff G D and Langer R E.)
1 The boundary problems and developments associated with a system of ordinary linear differential equations of the first order, Proc. Amer. Acad **58** (1923), 51—128

Бирман М. Ш
1 Возмущение квадратичных форм и спектр сингулярных граничных задач, ДАН СССР **125** (1959), 471—474
2 О спектре сингулярных граничных задач, Матем сборник **55** (97), 2 (1961), 125—174

Блащак В В.
1 О разложении по главным функциям несамосопряженного дифференциального оператора второго порядка на всей оси, ДАН УРСР 4 (1965), 416—419
2 О дифференциальном операторе второго порядка на всей оси со спектральными особенностями, ДАН УРСР **1** (1966), 38—41

Блисс (Bliss G U)
1 A boundary value problem for a system of ordinary linear differential equations of the first order, Trans Amer Math Soc **28** (1926), 561—584

Блох А Ш
1 Об определении дифференциального уравнения по его спектральной матрице-функции, ДАН СССР **92** (1953), 209—213

Блохинцев Д И
1 Основы квантовой механики, «Высшая школа», 1963
2 Принципиальные вопросы квантовой механики, «Наука», 1966

Бохер (Bôcher M)
1 Leçons sur les méthodes de Sturm, Paris, 1917

Борг (Borg G)
1. Eine Umkehrung der Sturm—Liouvilleschen Eigenwertaufgabe Bestimmung der Differentialgleichung durch die Eigenwerte, Acta Math **78** (1946), 1—96
2. Inverse problems in the theory of characteristic values of differential systems, C R Dixième Congrés Math Scandinaves 1946, Copenhagen, 1947, 172—180
3 On the point spectra of $y''+(\lambda-q(x))y=0$, Amer J of Math **73** (1951), 122—126

Буницкий Е
1 Sur la fonction de Green des équations differentielles linéaires ordinaires, J. de Math **5** (6) (1909), 65—125
2. К теории функции Грина обыкновенных дифференциальных уравнений, Одесса, 1913
Вайдман (Weidmann J.)
1. Zur Spektraltheorie von Sturm-Liouville Operatoren, Math Zs. **98** (1967), 268—302
Валлах (Wallach S)
1. On the location of spectra of differential equations, Amer. J of Math **70,** 4 (1948), 833—841
2 The spectra of periodic potentials, Amer Journ of Math. **70** (1948), 842—848
3. The stability of differential equations with periodic coefficients, Proc of the Nat Acad Sc USA **34** (1948), 203—204.
Валле-Пуссен Ш. Ж.
1 Курс анализа бесконечно малых, перев с франц ГТТИ, 1933
Вейль (Weyl H)
1 Ueber gewöhnliche Differentialgleichungen mit Singularitaten und die zugehörigen Entwicklungen willkurlicher Funktionen, Math. Ann. **68** (1910), 222—269
Визитей В Н и Маркус А С
1. О сходимости кратных разложений по системе собственных и присоединенных векторов операторного пучка Матем сборник, **66,** 2 (108) (1965), 287—320
Виленкин Н Я.
1 Специальные функции и теория представлений групп, «Наука», 1965
2. К теории ортогональных ядер, УМН **7,** 3 (49) (1952), 63—82
Виндау (Windau W)
1. Ueber lineare Differentialgleichungen vierter Ordnung mit Singularitäten und die zugchörigen Darstellungen willkürliche Funktionen, Math Ann **83** (1921), 256—279.
Винтнер (Wintner A)
1. Small perturbations, Amer Journ of Math **67** (1945), 417—430
2 Asymptotic integration constants, Amer J of Math **68** (1946), 553—559
3 On the normalization of characteristic differentials in continuous spectra, Phys Rev **72** (1947), 516—517
4 The adiabatic linear oscillator, Amer J. of Math. **68** (1946), 385—397
5 L^2-connections between the potential and kinetic energies of linear systems, Amer J of Math **69** (1947), 5—13
6 Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator, Amer J of Math **69** (1947), 251—272
7. On the location of continuous spectra, Amer J of Math **70** (1948), 22—30
8. A norm criterion for non-oscillatory differential equations, Quart. of Appl. Math **6** (1948), 183—185
9. A criterion of oscillatory stability, Quart of Appl Math. **7** (1949), 115—117
10 Asymptotic integrations of the adiabatic oscillator in its hyperbolic range, Duke Math J **15** (1948), 56—67.
11. A priori Laplace transformations of linear differential equations, Amer. J. of Math **71** (1949), 587—594.
12. On almost free linear motions, Amer. J. of Math. **71** (1949), 595—603.

13 On the smallness of isolated eigenfunctions, Amer J of Math **71** (1949), 603—611.

Вольфсон (Wolfson K G)

1 On the spectrum of a boundary value problem with two singular endpoints, Amer J of Math **72** (1950), 713—722.

Гальперин (Halperin J)

1 Closures and adjoints of linear differential operators, Ann. of Math. **38** (1937), 880—919

Гартман (Hartman P)

1 The L^2 solutions of linear differential equations of second order, Duke Math J **14** (1947), 323—326

2 On differential equations with non-oscillatory eigen-functions, Duke Math J **15** (1948), 697—709

3. On a theorem of Milloux, Amer J of Math. **70** (1948), 295—308

4 Unrestricted solution fields of almost-separable differential equations, Transact Amer Math Soc **63** (1948), 560—580

5 On the spectra of slightly disturbed linear oscillators Amer J. of Math **71** (1949), 71—79

6 On the linear logarithmico exponential differential equations of the second order, Amer J of Math **71** (1949), 764—779

7 A characterization of the spectra of one-dimensional wave equations, Amer J of Math **71** (1949), 915—920

8 The number of, L^2-solutions of $x''+q(t)x=0$, Amer J of Math **73** (1951), 635—645

9 On bounded Green's kernels for second order linear ordinary differential equations, Amer J of Math **73** (1951), 646—656.

10 On the eigenvalues of differential equations, Amer J of Math. **73** (1951), 657—662

11 Some examples in the theory of singular boundary value problems, Amer J of Math **74** (1952), 107—125

12 On non-oscillatory linear differential equations of second order, Amer J of Math **74** (1952), 389—400

Гартман и Винтнер (Hartman P. Wintner A)

1 An oscillation theorem for continuous spectrum Proc. Nat. Acad. Sc **33** (1947), 376—379

2 The asymptotic arcus variation of solutions of real linear differential equations of second order, Amer J of Math **70** (1948), 1—10

3 Criteria of non degeneracy for the wave equations, Amer J of Math **70** (1948), 295—308

4 On the orientation of unilateral spectra, Amer J of Math **70** (1948), 309—316

5 On the asymptotic problems of the zeros in wave mechanics, Amer. J of Math **70** (1948), 461—480

6 On non-conservative linear oscillators of low frequency, Amer J. of Math. **70** (1948), 529—539

7 A criterion for the non-degeneracy of the wave equations, Amer J. of Math **71** (1949), 206—213

8 On the location of spectra of wave equations, Amer. J of Math **71** (1949), 214—217.

9 Oscillatory and non-oscillatory linear differential equations, Amer. J of Math **71** (1949), 627—649

10 A separation theorem for continuous spectra, Amer J of Math **71** (1949), 650—662

11 On the essential spectra of singular eigenvalue problems, Amer J. of Math **72** (1950), 545—552.

12 On perturbations of the continuous spectrum of the harmonic oscillator Amer J of Math **74** (1952), 79—85

Гартман и Патнэм (Hartman P, Putnam C R)

1 The least cluster point of the spectrum of boundary problems, Amer J of Math **70** (1948), 849—855

2 The gaps in the essential spectra of wave equations, Amer J of Math **72** (1950), 849—862

Гасымов М Г

1. О сумме разностей собственных значений двух самосопряженных операторов, ДАН СССР **150**, 6 (1963), 1202—1205

2 Определение уравнения Штурма—Лиувилля с особенностью по двум спектрам, ДАН СССР **161**, 2 (1965), 274—276

3 Об аналитических свойствах спектральной функции самосопряженных операторов Штурма—Лиувилля, ДАН СССР **150**, 6 (1963), 971—974.

4 Обратная задача по данным рассеяния для системы уравнений Дирака порядка $2n$, ДАН СССР **169**, 5 (1966), 1037—1040

5 О разложении по собственным функциям несамосопряженной краевой задачи для дифференциального уравнения с особенностью в нуле, ДАН СССР **165**, 2 (1965), 261—264

6 Некоторые вопросы теории самосопряженных и несамосопряженных дифференциальных операторов, Диссертация, Москва, 1967

Гасымов М Г и Левитан Б М

1 Определение дифференциального оператора по двум спектрам, УМН **19**, 2 (116) (1964), 3—63

2 О сумме разностей собственных значений двух сингулярных операторов Штурма—Лиувилля, ДАН СССР **151**, 5 (1963)

3 Обратная задача для системы Дирака, ДАН СССР **167**, 5 (1966), 967—970

4 Определение системы Дирака по фазе рассеяния, ДАН СССР **167**, 6 (1966), 1219—1222

Гельфанд И. М.

1 Лекции по линейной алгебре, изд 3, «Наука», 1966

2. Разложение по собственным функциям уравнения с периодическими коэффициентами, ДАН СССР **73** (1950). 1117—1120

3 Замечание к работе Н К Бари, Уч зап МГУ, т **IV**, вып 148, (1951), 224—225

4 О тождествах для собственных значений дифференциального оператора 2-го порядка, УМН, **11**, 1 (67) (1956), 191—198

Гельфанд И М и Виленкин Н Я

1 Обобщенные функции, вып 4, Физматгиз, 1961.

Гельфанд И М, Костюченко А Г.

1 О разложении по собственным функциям дифференциальных и других операторов, ДАН СССР **103**, 3 (1955), 349—352

Гельфанд И М, Левитан Б М

1 Об одном простом тождестве для собственных значений дифференциального оператора второго порядка, ДАН СССР **88** (1953), 593—596

2 Об определении дифференциального уравнения по его спектральной функции, Известия АН СССР, сер матем, **15** (1951), 309—360

Гельфанд И М., Минлос Р А и Шапиро З Я

1 Представление группы вращений и группы Лоренца, Физматгиз, 1958

Гельфанд И. М и Шилов Г Е

1. Обобщенные функции, вып. 3, Физматгиз, 1958,

Гехтман М. М. и Костюченко А. Г.
1. О комплексных собственных значениях одного несамосопряженного оператора, Дифференциальные уравнения 3, 3 (1967), 509—513
Гимадисламов М. Г.
1. О разложении по собственным функциям несамосопряженных систем 2-го порядка, ДАН СССР, 121, 1 (1958), 30—33
Глазман И. М.
1. Об индексе дефекта дифференциальных операторов, ДАН СССР 64 (1949), 151—154
2. К теории сингулярных дифференциальных операторов, УМН, 5, 6 (40) (1950), 102—135
3. О спектре линейных дифференциальных операторов, ДАН СССР 80 (1951), 153—156
4. Прямые методы качественного спектрального анализа сингулярных дифференциальных операторов, Физматгиз, 1963
Голдберг (Goldberg S.)
1. Unbounded linear operators Theory and applications, Mc Graw-Hill Book Company, 1966
Гопкинс (Hopkins J. W.)
1. Some convergent developments associated with irregular boundary conditions, Trans. Amer. Math. Soc. 20 (1919), 245—259
Гохберг И. Ц. и Крейн М. Г.
1. Введение в теорию линейных несамосопряженных операторов, «Наука», 1965
2. Теория вольтерровых операторов в гильбертовом пространстве и ее приложения, «Наука», 1967
Гохберг И. Ц. и Маркус А. С.
1. Две теоремы о растворе подпространств банахова пространства, УМН 14, 5 (89) (1959), 135—140
Графф А. А.
1. К теории линейных дифференциальных систем в области одного измерения I — Матем. сборник 18 (60) (1946), 305—328, II — Матем. сборник 21 (63) (1947), 143—159
Гурса Э.
1. Курс математического анализа, ОНТИ, 1936
Данфорд
1. Обзор по теории спектральных операторов, Математика — переводы 4 : 1 (1960), 53—100
Данфорд Н. и Шварц Дж. Т.
1. Линейные операторы. Общая теория, ИЛ, 1962
2. Линейные операторы. Спектральная теория, «Мир», 1966
Девинац (Devinatz A.)
1. The asymptotic nature of the solutions of certain linear systems of differential equations, Pacif. J. Math. 5, 1 (1965), 75—83.
Джавадов М. Г.
1. О полноте некоторой части собственных функций несамосопряженного дифференциального оператора, ДАН СССР 159, 4 (1964), 723—725
2. Об n-кратной полноте половины собственных и присоединенных функций обыкновенного дифференциального оператора $2m$-го порядка, ДАН СССР 160, 4 (1965), 754—757
Джексон (Jackson D.)
1. Expansion problems with irregular boundary conditions, Proc. Amer. Acad. 51 (1916), 383—417
2. Algebraic properties of self-adjoints systems, Trans. Amer. Math. Soc. 17 (1916), 418—424.

Дикий Л. А
1 Формулы следов для дифференциальных операторов Штурма—Лиувилля, УМН **13**, 3 (81) (1958), 111—143
2 Об одной формуле Гельфанда—Левитана, УМН 8 2 (54) (1953), 119—123
3 Дзета-функция обыкновенного дифференциального уравнения на конечном отрезке, Известия АН СССР **19** (1955), 187—220

Дольф (Dolph C L)
1 Recent developments in some non self-adjoint problems of mathematical physics, Bull Amer Math Soc **67**, 1 (1961), 1—69, русский перевод, Математика, 7 · 1, (1963), 79—136

Жданова Г. В
1. О спектре несамосопряженного оператора Штурма—Лиувилля, Дифференциальные уравнения **3**, 2 (1967), 250—263

Жданович Б. Ф
1 Несамосопряженные дифференциальные операторы с нерегулярными краевыми условиями в пространстве вектор-функций, Тр V всесоюзной конф по функц анализу, Баку, 1961, 58—64

Зейферт (Seifert G)
1. A third order irregular boundary value problems and the associated series, Trans Amer Math Soc **34** (1932), 417—434

Иоргенс (Jörgens K)
1 Spectral theory of ordinary differential operators, Lecture notes. Aarhus Aarhus Universitet 1962/1963

Иосида К
1 Функциональный анализ, «Мир», 1967

Исмагилов Р С
1 Об условиях полуограниченности и дискретности спектра для одномерных дифференциальных операторов, ДАН СССР **140** (1961), 33—36

Истэм (Eastham M S P)
1 On the discretness of the spectrum in an eigenvalue problem, Quart. J of Math (Oxford) 2, 16 (1965), 46—52
2 On the nature of the spectrum in the theory of eigenfunctions, J. London Math Soc **40** (1965), 418—420.
3 A short proof of a theorem in eigenfunctions theory, Quart J of Math (Oxford) 2, 17 (1966), 144—145
4. A condition for the spectrum in eigenfunction theory to contain $[0, \infty)$, Quart J of Math, Oxford **17** (1966), 146—150.
5 On the discreteness of the spectrum in eigenfunction theory, J London Math Soc **42**, 2 (1967), 309—315

Кабанова В.
1. О разложении по собственным функциям несамосопряженных систем 2-го порядка, ДАН СССР **121**, 1 (1958), 30—33.

Камке (Kamke E)
1. Справочник по обыкновенным дифференциальным уравнениям, ИЛ, 1950.
2. Zum Entwicklungsatz bei polaren Eigenwertaufgaben, Math Zs **45** (1939), 706—718
3 Ueber die definiten selbstadjungierten Eigenwertaufgaben bei gewöhnlichen linearen Differentialgleichungen I — Math Zs. **45** (1939), 759—787, II — Math Zeitschr **46** (1940), 231—250, III — Math. Zeitschr. 46 (1940), 251—286

Канторович Л В и Акилов Г П
1. Функциональный анализ в нормированных пространствах, Физматгиз, 1959.

Като (Kato T)
1 Perturbation theory for linear operators, Berlin—Heidelberg—New York, 1966.
2 Wave operators and similarity for some nonselfadjoint operators, Math Ann **162** (1966), 258—279.
Кац Г И
1 О разложении по собственным функциям самосопряженных операторов. ДАН СССР **119**, 1 (1958), 19—22
2 Обобщенные элементы гильбертова пространства Укр матем журнал **12**, 1 (1960), 13—24
3 Спектральное разложение самосопряженных операторов по обобщенным элементам гильбертова пространства, Укр. матем журнал **13**, 4 (1961), 13—33
Кац И С
1 Существование спектральных функций обобщенных дифференциальных систем второго порядка, Матем сборник **68** (110), 2 (1965), 174—227
2 О гильбертовых пространствах, порождаемых монотонными эрмитовыми матрицами функциями, Зап научно иссл ин та матем и мех Харьковского матем об-ва № 2 (1950), 95—114
3 О кратности спектра дифференциального оператора второго порядка, ДАН СССР **145**, № 2 (1962), 510—513
4 Кратность спектра дифференциального оператора второго порядка и разложение по собственным функциям, Изв АН СССР **27** (1963), 1081—1112
Кац И С, Крейн М Г
1 Критерий дискретности спектра сингулярной струны, Изв вузов СССР, Математика, № 2 (3), 1958
Келдыш М В
1 О собственных значениях и собственных функциях некоторых классов несамосопряженных уравнений, ДАН СССР **77** (1951), 11—14
Келдыш М В и Лидский В Б
1 Вопросы спектральной теории несамосопряженных операторов, Тр. IV всесоюзного матем съезда **1** (1963), 101—120
Кемп (Kemp R)
1 A singular boundary value problem for a nonselfadjoint differential operator, Canad J Math **10**, 3 (1958), 447—462
2 On a class of nonselfadjoint differential operators, Canad J Math **12**, 4 (1960), 641—659
Кесельман Г М
1 О безусловной сходимости разложений по собственным функциям некоторых дифференциальных операторов, Изв вузов СССР, Математика, № 2 (1964), 82—93
2 Про структуру несамосопряженного диференціального оператора другого порядку на півосі, ДАН УРСР 5, (1963), 588—591
Кодаира (Kodaira K)
1 Eigenvalue problem for ordinary differential equations of the second order and Heisenberg's theory of S-matrices, Amer J of Math **71** (1949), 921—945.
2 On ordinary differential equations of any even order and the corresponding eigenfunction expansions, Amer J of Math **72** (1950), 502—544
Коддингтон Э А и Левинсон Н
1 Теория обыкновенных дифференциальных уравнений, ИЛ, 1958.

Коллатц Л
1 Задачи на собственные значения (с техническими приложениями), перев с нем, «Наука», 1968
Коложоарэ и Фояш (Colojoără J, Foias C)
1. Theory of generalized spectral operators, Gordon and Breach, Sci. Publ, New York, 1968
Кон (Cohn J H)
1 On the number of negative eigenvalues of a singular boundary value problem, J London Math Soc **40**, 3 (1965), 523—525
Костюченко А Г
1 Асимптотика спектральной функции сингулярного дифференциального оператора порядка $2n$, ДАН СССР **168**, 2 (1966), 276—279
2 О некоторых спектральных свойствах дифференциальных операторов, Матем заметки **1**, 3 (1967), 365—376
3 Распределение собственных значений для сингулярных дифференциальных операторов, ДАН СССР **168**, 1 (1966), 21—24
Костюченко А Г, Левитан Б М
1. Об асимптотическом поведении собственных значений операторной задачи Штурма—Лиувилля, Функц анализ и его приложения **1**, 1 (1967), 86—96
Кралл (Krall Allan Mc)
1 О несамосопряженных обыкновенных дифференциальных операторах второго порядка, ДАН СССР **165**, 6 (1965), 1235—1237
2 Nonhomogenous differential operators, Mech Math J **12**, 2 (1965), 247—255
3 The adjoint of a differential operator with integral boundary condition, Proc Amer Math Soc **16**, 4 (1965), 738—742
4 A nonhomogeneous eigenfunction expansion, Trans Amer Math Soc **117** (1965), 352—361
5 Of the eigenvalues of a singular nonselfadjoint differential operator of second order, Bull Inst politechn. Jasi, **12**, 3—4 (1966), 29—32
Крамер (Kramer H. P.)
1 Perturbation of differential operators, Pacif J Math **7** (1957), 1405—1443
Крейн М Г
1 Об одном общем методе разложения положительно определенных ядер на элементарные произведения, ДАН СССР **53** (1946), 3—6
2 Про ермітові оператори з напрямними функціоналами, Збірник праць інституту математики АН УРСР, № 10 (1948), 83—105.
3 Теория самосопряженных расширений полуограниченных эрмитовых операторов и ее приложения I — Матем сборник **20** (62) (1947), 431—495, II — Матем сборник **21** (63) (1947), 365—404
4 Основные положения теории представления эрмитовых операторов с индексом дефекта (m, m), Укр матем журнал, № 2 (1949), 3—66
5 О краевой задаче Штурма — Лиувилля в интервале $(0, \infty)$ и об одном классе интегральных уравнений, ДАН СССР **73** (1950), 1125—1128
6 Об одномерной сингулярной краевой задаче четного порядка в интервале $(0. \infty)$, ДАН СССР **74** (1950), 9—12
7. Решение обратной задачи Штурма—Лиувилля, ДАН СССР **76** (1951), 315—318
8 Определение плотности неоднородной симметричной струны по спектру ее частот, ДАН СССР **76** (1951)
9 Об обратных задачах для неоднородной струны, ДАН СССР **82** (1952), 669—672

10 Об одном обобщении исследований Стильтьеса, ДАН СССР **87** (1952), 881—884
11 Аналог неравенства Чебышева—Маркова в одномерной краевой задаче, ДАН СССР **87** (1953), 5—8
12 О переходной функции одномерной краевой задачи второго порядка, ДАН СССР **88** (1953), 405—408
13 О некоторых случаях эффективного определения плотности неоднородной струны по ее спектральной функции, ДАН СССР **93** (1953), 617—620
14 Об обратных задачах теории фильтров и λ зон устойчивости, ДАН СССР **93** (1953), 767—770
15 Об одном методе эффективного решения обратной краевой задачи, ДАН СССР **94** (1953), 987—990

Крейн М Г и Красносельский М А
1 Основные теоремы о расширении эрмитовых операторов, УМН **2**, вып 3 (19) (1947), 60—107.

Крейн С Г, Лаптев Г И
1 Граничные задачи для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом пространстве I, Диф уравнения **11**, 3 (1966), 382—390
2 Корректность граничных задач для дифференциального уравнения второго порядка в банаховом пространстве II, Диф уравнения **11**, 7 (1966), 919—926

Курант Р, Гильберт Д
1 Методы математической физики I, изд 3, Гостехиздат, 1951.

Лангер (Langer R)
1 On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with an application to the Bessel functions of large ordner, Trans Amer Math Soc **33** (1931), 23—64
2 On the asymptotic solutions of differential equations, with an application to Bessel functions of large complex order, Trans Amer Math Soc **34** (1932), 447—480.
3 The asymptotic solutions of certain linear ordinary differential equations of the second order, Trans Amer Math Soc **36** (1934), 90—106
4 The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with spectral reference to the Stokes phenomenon, Bull Amer Math Soc **40** (1934), 545—582
5 On the asymptotic solutions of ordinary differential equations, with reference to the Stokes phenomenon about a singular point, Trans Amer Math Soc **37** (1935), 397—416
6 On the connection formulas and the solutions of the wave equation, Phys Rev **51** (1937), 669—676
7 The boundary problem of an ordinary linear differential system in the complex domain, Trans Amer Math Soc **46** (1939), 151—190, correction 467.
8 A theory for ordinary differential boundary problems of the second order and of the highly irregular type, Trans Amer Math Soc **53** (1943), 292—361
9 The asymptotic solutions of ordinary linear differential equations of the second order, with special reference to a turning point, Trans Amer Math Soc **67** (1949), 461—490
10 On the wave equation with small quantum numbers, Phys Rev **72** (1949), 1573—1578

Ландау Л Д, Лифшиц Е М
1. Квантовая механика ч I, Физматгиз, 1963,

Лаптев Г И

1 Задачи на собственные значения для дифференциальных уравнений второго порядка в банаховом и гильбертовом пространствах, Диф уравнения **11**, 9, 1966, 1151—1160

Левин Б Я

1 Об одном обобщении преобразования Фурье—Планшереля, Зап научн-иссл ин-та ХГУ, т XX (1950), 83—98

2 Преобразование типа Фурье и Лапласа при помощи решений дифференциального уравнения второго порядка, ДАН СССР **106**, 2 (1956), 187—190

Левинсон (Levinson N)

1 Criteria for the limit point case for second order linear differential operators, Časopis Pěst Math Fys **74** (1949) 17—20

2 The inverse Sturm—Liouville problem, Math. Tidšskr **13** (1949), 25—30

Левитан Б М

1 Операторы обобщенного сдвига и некоторые их применения, Физматгиз, 1962

2 Разложение по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, Гостехиздат, 1950

3 Доказательство теоремы разложения по собственным функциям самосопряженных дифференциальных уравнений, ДАН СССР **73** (1950), 651—654

4 К теореме разложения по собственным функциям дифференциальных уравнений второго порядка, ДАН СССР **71** (1950), 605—608

5 Об одной теореме единственности, ДАН СССР **74** (1951), 485—488

6 Об асимптотическом поведении спектральной функции и разложении по собственным функциям самосопряженного дифференциального уравнения второго порядка, I, Изв АН СССР **17** (1953), 331—364, II. Изв АН СССР **19** (1955), 33—58

7 Вычисление регуляризованного следа для оператора Штурма—Лиувилля, УМН **19**, 1 (1964), 161—165

Левитан Б М, Саргсян И С

1 Некоторые вопросы теории уравнений Штурма—Лиувилля, УМН **15**, 1 (91) (1960), 4—98

Лейбензон З Л

1. Связь между обратной задачей и полнотой собственных функций, ДАН СССР **145**, 3 (1962), 519—522

2 Единственность решения обратной задачи для обыкновенных дифференциальных операторов порядка $n \geqslant 2$ и преобразование таких операторов, ДАН СССР **142**, 3 (1962), 534—537.

3 Обратная задача спектрального анализа обыкновенных дифференциальных операторов высших порядков, Тр Моск матем о-ва **15** (1966), 70—145

Лейгтон (Leighton W)

1 On self-adjoint differential equations of second order, Proc Nat Acad of Sc **35** (1949), 656—657

2 The detection of the oscillation of solutions of a second order linear differential equation, Duke Math J **17**, (1950), 57—62

Ливит (Leavitt G W)

1 On systems of linear differential equations, Amer J of Math **73** (1951) 690—696.

Лившиц М С.

1. О спектральном разложении линейных несамосопряженных операторов, Матем. сборник **34** (76) (1954), 145—199

Лидский В Б
1 О числе решений с интегрируемым квадратом системы дифференциальных уравнений $-y''+P(t)y=\lambda y$, ДАН СССР **95** (1954), 217—220
2 О полноте системы собственных и присоединенных функций несамосопряженного дифференциального оператора, ДАН СССР **110**, 2 (1956), 172—175
3 Условия полной непрерывности резольвенты несамосопряженного дифференциального оператора, ДАН СССР **113**, 1 (1957), 28—31.
4 Несамосопряженный оператор типа Штурма—Лиувилля с дискретным спектром, Труды Моск матем о-ва, **9** (1960), 45—79
Лидский В Б, Садовничий В А
1 Регуляризованные суммы корней одного класса целых функций, Функциональный анализ и его приложения **1**, 2 (1967), 52—59
Линд Поттер (Lind Potter R)
1 On self-adjoint differential equations of second order Pacific J Math. **3** (1953), 467—491
Лифшиц И М
1 К теории регулярных возмущений, ДАН СССР **48** (1945), 83—86
Люстерник Л А и Соболев В И
1 Элементы функционального анализа, «Наука», 1965
Лянце В Э
1 Об одном обобщении понятия спектральной меры, Матем сборник **61** (103), 1 (1963), 80—120
2 О дифференциальном операторе со спектральными особенностями I, Матем сборник **64** (106), 4 (1964), 521—561, II, Матем сборник **65** (107), 1 (1964), 47—103
3 О несамосопряженном дифференциальном операторе второго порядка на полуоси, ДАН СССР **154**, 5 (1964), 1030—1033
4 Разложение по главным функциям оператора со спектральными особенностями, I, Revue roum de math pures et appl **XI**, 8 (1966), 921—950, II Revue roum de math pures et appl **XI**, 10 (1966), 1187—1224
5 Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора, Матем сборник **72** (114), 4. 1967, 537—557
6 Несамосопряженный разностный оператор, ДАН СССР **173**, 6 (1967), 1260—1263
Мак Гарвей (McGarvey D)
1 Operators commuting with translation by one
I Representation theorems, J of math analysis and appl **4** (1962), 366—410
II Differential operators with periodic coefficients in $L_p(-\infty, \infty)$, J of math analysis and appl **11** (1965), 564—596
III Perturbation results for periodic differential operators, J of math analysis and appl **12** (1965), 187—234
Макки Дж
1 Лекции по математическим основам квантовой механики, «Мир» 1965
Мальцев А И
1 Основы линейной алгебры, изд 2, Гостехиздат, 1956
Маркус А С
1 О разложении по корневым векторам слабо возмущенного самосопряженного оператора, ДАН ССР **142**, 3 (1962)
Марченко В А
1 Некоторые вопросы теории дифференциального оператора второго порядка, ДАН СССР **72** (1950), 457—460,

2 Теоремы тауберова типа в спектральном анализе дифференциальных операторов, Изв. АН СССР, сер матем, **19** (1955), 381—422
3 Некоторые вопросы теории одномерных линейных дифференциальных операторов второго порядка, Тр Моск матем о-ва **1** (1952), 327—420 и **2** (1953), 3—82
4 Разложение по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, Матем сборник **52** (94), 2 (1960), 739—788

Маслов В П.
1 Теория возмущений и асимптотические методы, Изд-во МГУ, 1965

Маутнер (Mautner F I)
1 On eigenfunction expansion Proc Nat Akad Sci USA, **39** (1953), 49—53

Милн (Milne W E.)
1 On the degree of convergence of expansions in an infinite interval, Trans Amer Math Soc **31** (1929), 906—918

Михайлов В П
1 О базисах Рисса в $L^2(0, 1)$, ДАН СССР **144**, 5 (1962), 981—984

Мозер (Moser J)
1 Störungstheorie des kontinuierlichen Spektrums für gewöhnliche Differentialgleichungen zweiter Ordnung, Math Ann. **125** (1953), 366—393
2 Singular perturbations of eigenvalue problems for linear differential equations of even order Commun Pure and Appl Math **8** (1955), 251—278

Молчанов А М.
1 Об условиях дискретности спектра самосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка Тр Моск матем о ва, **2** (1953), 169—200

Морен К
1 Методы гильбертова пространства, «Мир», 1965

Надь (Nagy B. Sz)
1 Расширения операторов в гильбертовом пространстве с выходом из этого пространства, Математика, **9**, 6 (1965), 109—144
2 Perturbations des transformations autoadjoints dans l'espace d'Hilbert, Comment Math Helv **19** (1947), 347—366.

Наймарк М А
1 О самосопряженных расширениях второго рода симметрического оператора, Изв АН СССР, сер матем, **4** (1940), 53 104
2 Спектральные функции симметрического оператора, Изв АН СССР, сер матем, **4** (1940), 277—318
3 О спектральных функциях симметрического оператора, Изв АН СССР, сер матем, **7** (1943), 285—296
4 Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, ДАН СССР **82** (1952), 517—520
5 О спектре сингулярных несамосопряженных дифференциальных операторов второго порядка ДАН СССР **85** (1952), 41—44
6. О разложении по собственным функциям несамосопряженных сингулярных дифференциальных операторов второго порядка, ДАН СССР **89** (1953), 213—216
7 Нормированные кольца, изд 2, «Наука», 1968.
8 Спектральный анализ несамосопряженных операторов, УМН **11**, 6 (72) (1956), 183—202
9 Исследование спектра и разложение по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора 2 го порядка на полуоси. Тр Моск матем о-ва **3** (1954), 181—270.

10 О некоторых признаках полноты системы собственных и присоединенных векторов линейного оператора в гильбертовом пространстве, ДАН СССР **98** (1954), 727—730.

11 Спектральный анализ несамосопряженных операторов, УМН **11**, 6 (72) (1956), 183—202

Натансон И. П.

1 Теория функции вещественной переменной, изд 2, Гостехиздат, 1957

Невелл (Newell H E)

1 The asymptotic forms of the solutions of an ordinary linear matric differential equation in the complex domain, Duke Math J **9** (1942), 245—258, **10** (1943), 705—709.

Нейман И

1 Математические основы квантовой механики, «Наука», 1964

Неймарк Ф А.

1 Об индексе дефекта дифференциального оператора, УМН **17**, 4 (106) (1962), 157—163

Орлов С А

1 Об индексе дефекта линейных дифференциальных операторов, ДАН СССР **92**, 3 (1953).

2 К теории резольвенты одномерной регулярной краевой задачи, ДАН СССР **111** (1956), 538—541

3 Конструкция резольвент и спектральных функций одномерных линейных самосопряженных сингулярных дифференциальных операторов $2n$-го порядка, ДАН СССР **111** (1956), 1175—1177

Павлов Б С

1 О несамосопряженном операторе $-y''+p(x)y$ на полуоси, ДАН СССР **141**, 4 (1961), 807—810

2 К спектральной теории несамосопряженных дифференциальных операторов, ДАН СССР **146**, 2 (1962), 1267—1270

3 О несамосопряженном операторе Шредингера, Спектр теория и волновые процессы, Изд во ЛГУ, 1966, стр. 102—132

Патнэм (Putnam C R)

1 On the spectra of sertain boundary value problems Amer. J of Math **71** (1949), 109—111

2 The cluster spectra of bounded potentials Amer J of Math **71** (1949), 612—620

3 On isolated Eigenfunctions associated with bounded potentials, Amer J. of Math **72** (1950), 135—147

4 The spectra of quantum-mechanical operators, Amer J of Math **74** (1952), 377—387

5 Note on a limit point criterion J London Math Soc **29** (1954), 420—426

6 A sufficiert condition for an infinite discrete spectrum, Quart Appl Math 11 (1954), 484—487

7 On the continuous spectra of singular boundary value problems, Canad. J Math **6** (1954), 420—426.

Перрон (Perron O)

1 Ueber lineare Differentialgleichungen, bei denen die unabhaugige Variable reel ist (Erste Mittelung), J. für die reine angew Math **142** (1931), 705—709

Петровский И Г

1 Лекции по теории интегральных уравнений, Гостехиздат, изд 2, 1951

2 Лекции по теории обыкновенных дифференциальных уравнений, изд 5, «Наука», 1964

Плейель (Pleijel A)

1 On the problem of the asymptotic distribution of proper values in the theory of ordinary differential equations, Kung Fysiografiska Sallskapets i Lund Förhandlingaar 17 (1947), стр 16

Плеснер А И

1. Спектральная теория линейных операторов, «Наука», 1965

Плеснер и Рохлин

1 Спектральная теория линейных операторов, II, УМН 1 (11) (1946), 71—191

Повзнер А Я

1 О дифференциальных операторах типа Штурма—Лиувилля на полуоси, Матем сборник 23 (65) (1948), 3—52

2 О методе направляющих функционалов М Г Крейна, Зап Научно-иссл ин-та матем и мех Харьковского матем об-ва, сер 4, № 20 (1950), 43—52

Привалов И И

1. Введение в теорию функций комплексного переменного, изд 10, Физматгиз, 1960

Пугачев В С

1 Об асимптотическом представлении интегралов систем обыкновенных дифференциальных уравнений, содержащих параметр, Матем сборник 15 (57) (1944), 13—54

Рапопорт И М

1 О некоторых асимптотических методах в теории дифференциальных уравнений, Изд-во АН УССР, Киев 1954

2 Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений, ДАН СССР 78 (1951), 1097—1110

3 О сингулярной краевой задаче для обыкновенных дифференциальных уравнений, ДАН СССР 79 (1951), 21—24

Расулов М Л

1 Метод контурного интеграла, «Наука», 1964

2 Вычетный метод решения смешанной задачи для дифференциальных уравнений и формулы разложения произвольной вектор-функции по фундаментальным функциям граничной задачи с параметром, Матем сборник 48, 3 (1959)

Редже (Regge T)

1. Analitic properties of the scattering matrix Nuovo Cimento 8, 5 (1958), 671—679, русский перевод Математика, 7, 4 (1963), 83—89

2 Construction of potentials from resonance parameters, Nuovo Cimento 9, № 3 (1963), 491—503, русский перевод Математика, 7, 4 (1963), 91—100

Реллих (Rellich F)

1 Störumgstheorie der Spektralzerlegung I — Math Ann 113 (1936), 600—619, II — Math Ann 113 (1936), 677—685, III — Math Ann 116 (1939), 555—570, IV — Math Ann 117 (1940), 356—382; V — Math Ann 118 (1942), 462—484

2 Halbbeschränkte gewöhnliche Differentialoperatoren zweiter Ordnung, Math Ann 122 (1951), 343—368

Рисс Ф и Секефальви-Надь Б

1. Лекции по функциональному анализу, ИЛ, 1954

Рофе-Бекетов Ф С

1 Разложение по собственным функциям бесконечных систем дифференциальных уравнений в несамосопряженном и самосопряженном случаях, Матем сборник 51 (93), 3 (1960), 293—342.

2 О неполуограниченных дифференциальных операторах, Теория функций, функциональный анализ и их приложения, Харьков, вып. 2, (1966), 178—184
3 О спектре несамосопряженных дифференциальных операторов с периодическими коэффициентами, ДАН СССР **152**, 6 (1963), 1312—1315
4 Признак конечности числа дискретных уровней, вносимых в лакуны непрерывного спектра возмущениями периодического потенциала, ДАН СССР **156**, 3 (1964), 515—518
5 Спектральная матрица и обратная задача Штурма — Лиувилля на оси ($-\infty$, ∞). Теория функций, функциональный анализ и их приложения, вып 4 (1967), 189—197

Рофе-Бекетов Ф С, Христов Е Х
1 Операторы преобразования и функции рассеяния в случае высокосингулярного потенциала, ДАН СССР **168**, 6 (1966), 1265—1268

Сансоне Дж (Sansone G)
1 Обыкновенные дифференциальные уравнения, I — ИЛ, 1953, II — ИЛ, 1954

Саргсян И С
1. О дифференцировании разложений по собственным функциям оператора Штурма — Лиувилля, Изв АН СССР **21** (1957), 263—282

Сахнович Л А.
1 О спектре ангармонического осциллятора, Изв АН СССР, серия матем, **28**, 6 (1964), 1345—1362

Сирс (Sears D.)
1 Note of the uniqueness of the Green functions associated with certain differential equations, Canadian J Math **2** (1950), 314—325

Смирнов В И
1 Курс высшей математики т V, Гостехиздат, 1947.

Смогоржевский А
1. Les fontions de Green des systèmes différentielles linéaires dans un domaine à une seule dimension, Матем сборник **7** (49) (1940), 179—196

Стеклов В А.
1 Задача об охлаждении неоднородного твердого стержня, Сообщ Харьк матем о ва, 1896, стр 46
2 Об асимптотическом поведении решений линейных дифференциальных уравнений, Харьков, 1956
3 Основные задачи математической физики, Петроград, 1922 и 1923.

Степанов В В.
1 Курс дифференциальных уравнений, изд 8, Физматгиз, 1959

Стоун (Stone M H)
1 A comparison of the series of Fourier and Birkhoff, Trans Amer Math. Soc **28** (1926), 695—761
2 Certain integrals analogous to Fourier integrals, Math Zs **28** (1928), 654—676

Тамаркин Я Д.
1 О некоторых общих задачах теории обыкновенных линейных дифференциальных уравнений, Петроград, 1917
2 Sur quelques points de la théorie des équations différentielles, Rend. di Palermo **34** (1912), 345—382
3 Some general problems of the theory of ordinary linear differential equations and expansion of an arbitrary function in series of fundamental functions, Math Zs **27** (1927), 1—54

Тимошенко С П.
1 Теория упругости, изд 2, ГТТИ, 1937.

Титчмарш Э Ч
1 Разложение по собственным функциям, связанное с дифференциальными уравнениями второго порядка т 1 и 2, ИЛ, 1960
2 Some theorem on perturbation theory, Proc Roy Soc London, ser A **200** (1949), 34—46
Трикоми Ф
1 Дифференциальные уравнения, ИЛ, 1962
Уорд (Ward L E.)
1. An irregular bounded value and expansion problem, Ann Math **26** (1925), 21—36
2 Functions expansible in series, Bull Amer Math Soc **33** (1927), 232—234
3 A third order irregular boundary value problem and associated series, Trans Amer Math Soc **34** (1932), 417—434
4 A third-order irregular boundary value problem and the associated series, Amer J of Math **57** (1935), 345—362
Фаге М. К.
1 Операторно аналитические функции одной независимой переменной, Тр Моск матем о-ва VII (1958), 227—268
Фаддеев Л. Д.
1 Обратная задача квантовой теории рассеяния, УМН **14**, 4 (88) (1959) 57—119
Федорюк М. В.
1 Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка, ДАН СССР **165**, 4 (1965), 777—779
2 Асимптотика решений обыкновенных линейных дифференциальных уравнений n-го порядка, Диф уравнения **2**, 4 (1966), 492—507
3 Асимптотика собственных значений и собственных функций одномерных сингулярных дифференциальных операторов, ДАН СССР **169**, 2 (1966), 288—291
4 Асимптотические методы в теории одномерных сингулярных дифференциальных операторов, Тр Моск матем о ва **15** (1966), 296—345
Фояш (Foias C)
1 Une application des distributions vectoriélles à la theorie spectrale, Bull Sci Math **84** (1960), 147—158
Фридрихс (Friedrichs K O)
1 Criteria for the discrete character of the spectra of ordinary differential operators, Studies and Essays presented to R. Courant on his 60th Birthday, January, 8 (1948), 145—160
2 On the perturbation of continuous spectra, Communications on Appl Math **1** (1948), 361—406
3 Perturbation of spectra in Hilbert space, Providence, 1965
Фунтаков В Н
1 О разложении по собственным функциям несамосопряженного дифференциального оператора четного порядка на полуоси, Изв АН Аз. ССР **6** (1960), 3—19 и **1** (1961), 3—21
2 Разложение по собственным функциям несамосопряженных дифференциальных уравнений второго порядка, ДАН СССР **144**, 3 (1962), 505—508
Хаар (Haar A)
1 Zur Theorie des orthogonalen Funktionalen systeme Math Ann. **69** (1910) 331—339
Ханилова Р З
1 Асимптотика спектральной функции, Изв АН Азерб ССР, серия физико матем и техн наук, **5** (1965), 41—49

Хаусдорф Ф.

1 Теория множеств, ГТТИ, 1937

Хединг Дж.

1 Введение в метод фазовых интегралов (метод ВКБ) «Мир», 1965

Хейвуд (Heywood P.)

1 On the asymptotic distribution of eigenvalues Proc. London Math. Soc 4 (1954), 456—470

Хиба (Chiba K.)

1 Note of the asymptotic behavior of solutions of a system of a linear ordinary differential equations Comment. Math Univ St Pauli 13, 11 (1965), 51—62.

Хромов А П

1. Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов в конечном интервале, Труды второй научной конференции Поволжья, Куйбышев (1962), 109—113

2 Разложение по собственным функциям обыкновенных линейных дифференциальных операторов с нерегулярными распадающимися краевыми условиями, Матем сборник **70**, 3 (1966), 310—329

Чезари Л.

1 Асимптотическое поведение и устойчивость решений обыкновенных дифференциальных уравнений, «Мир», 1964

Чудов Л А

1 Обратная задача Штурма—Лиувилля, Матем сборник **25** (67) (1949), 451—456

Шварц Дж (Schwartz J T)

1 Perturbations of spectral operators and applications I Bounded perturbations, Pacif J Math **4** (1954), 415—458

2 Some nonselfadjoint operators, Comm for pure and appl Math XIII (1960), 609—639.

Шевченко Р Ф

1 Регуляризация следа обыкновенного дифференциального оператора, Вестник Моск ун та № 6 (1965), 28—36

2 О следе дифференциального оператора, ДАН СССР **164**, 1 (1965), 62—65

Шефке (Schäfke F. W)

1 Zur Parameterabhängigkeit beim Anfangswertproblem für gewöhnliche lineare Differentialgleichungen, Math. Nachr 3 (1949), 20—39.

Шилов Г. Е.

1 Математический анализ Специальный курс, Физматгиз, 1960

2 Математический анализ Второй специальный курс, «Наука», 1965

Шин Д.

1 О решениях самосопряженного дифференциального уравнения $u^{[n]}=lu$, $I(l)\neq 0$, принадлежащих L_2 $(0,\infty)$, ДАН СССР **18** (1938), 519—522.

2 О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве ДАН СССР **18** (1938), 523—526.

3 О решениях линейного квазидифференциального уравнения n-го порядка, Матем сборник **7** (49) (1940), 479—532

4 О квазидифференциальных операторах в гильбертовом пространстве, Матем сборник **13** (55) (1943), 39—70.

Шноль Э

1 Поведение собственных функций и спектр операторов Штурма—Лиувилля, УМН **9** (1954), 113—132

Штраус А В

1 Обобщенные резольвенты симметрических операторов, Изв. АН СССР, серия матем., **18** (1954), 51—86,

2 Об обобщенных резольвентах и спектральных функциях дифференциальных операторов четного порядка, Изв АН СССР, серия матем, **21** (1957), 785—808
3 О расширениях симметрического оператора, зависящих от пара метра, Изв АН СССР, серия матем, **29** (1965), 1389—1416
4 О кратности спектра самосопряженного обыкновенного дифференциального оператора, ДАН СССР **155**, 4 (1964), 771—774

Шуберт (Schubert H)
1. Ueber die Entwicklung zulässiger Funktionen nach den Eigenfunktionen bei den definiten, selbst-adjungierten Eigenwertaufgaben, S-B Heidelberg Akad Wiss Math Nat Kl 8, (1948), 22 стр

Эбергард (Eberhard W)
1 Das asymptotische Verhalten der Greenschen Funktion irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen, Math Zs **86** (1964), 45—53
2 Die Entwicklungen nach Eigenfunktionen irregulärer Eigenwertprobleme mit zerfallenden Randbedingungen I Math Zs **86** (1964), 205—214. II Math Zs **90** (1965), 126—137
3 Lineare Eigenwertprobleme beliebiger Ordnung mit zerfallenden Randbedingungen, Ber Kernforschungsanlage Jülich, № 176 (1964), 925

Эверит (Everitt W N)
1 Integrable — square solutions of ordinary differential equations, Quart J Math, Oxford, I (2), **10** (1959), 145—155. II (2), **13** (1962), 217—220, III (2), **14** (1963), 170—180
2 Fourth order singular differential equations, Math Ann **149** (1963), 320—340

Элиот (Elliot J)
1 Eigenfunction expansions associated with singular differential operators, Trans Amer. Math Soc. 78 (1955), 406—425

Дополнения при корректуре

Аткинсон
1 Дискретные и непрерывные граничные задачи, «Мир», 1968

Блащак В В
3 Аналог обратной задачи теории рассеяния для несамосопряженного оператора, Дифференциальные уравнения, I, 4, 8 (1968), 1519—1533; II, 4, 10 (1968), 1915—1924

Вазов
1 Асимптотические разложения решений обыкновенных дифференциальных уравнений

Рофе-Бекетов Ф С
6 Самосопряженные расширения дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, ДАН СССР, **184**, 5 (1969), 1034—1037
7. О самосопряженных расширениях дифференциальных операторов в пространстве вектор-функций, Теория функций, функциональный анализ и его приложения, вып 8—9, 1969, 3—4.

АЛФАВИТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

Марк Аронович Наймарк

Линейные дифференциальные операторы

М , 1969 г , 528 стр , с илл

Редакторы *В Э Лянце И М Овчинникова*
Техн редактор *К Ф Брудно*

Корректоры *О А Сигал Н Б Румянцева*

Сдано в набор 30/XII 1968 г Подписано к печати 24/VI 1969 г Бумага 60×90$^1/_{16}$ Физ печ л 33. Условн печ. л 33. Уч-изд л 31,8
Тираж 13 000 экз Т-08946.
Цена книги 2 р 20 к Заказ 23

Издательство «Наука»
Главная редакция
физико математической литературы
Москва, В-71, Ленинский проспект, 15

Ленинградская типография № 2
имени Евгении Соколовой
Главполиграфпрома Комитета по печати
при Совете Министров СССР.
Измайловский пр , 29.