И. П. НАТАНСОН

КОНСТРУКТИВНАЯ ТЕОРИЯ ФУНКЦИЙ

ГОСУДАРСТВЕННОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1949 ЛЕНИНГРАД

11-5-4

Редактор *В. И. Битюцков*. Техн. редактор *Н. Я. Мурашова*.

Подписано к печати 29/IV 1949 г. 43 печ. л. 36,05 уч.-изд. л. 35 200 тип. зн. в печ. листе. А-04336. Тираж 5000. Цена книги 21 р. 60 к. Переплёт 2 р. Заказ № 1161.

16-я типография Главполиграфиздата при Совете Министров СССР, Москва, Трёхпрудный, 9.

ОГЛАВЛЕНИЕ.

ЧАСТЬ ВТОРАЯ.
КВАДРАТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ.

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ.
ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ КВАДРАТУРЫ.

ПРЕДИСЛОВИЕ.

Конструктивная теория функций берёт своё начало в замечательных работах нашего великого математика П. Л. Чебышева по теории интерполирования, по механическим квадратурам, по проблеме моментов и особенно по полиномам, наименее уклоняющимся от заданной функции. Исследования П. Л. Чебышева были продолжены его учениками А. Н. Коркиным, Е. И. Золотарёвым, А. А. и В. А. Марковыми. Дальнейшее развитие конструктивной теории также связано с именами русских и советских учёных. Из них в первую очередь следует указать на С. Н. Бернштейна, который, собственно, и оформил конструктивную теорию функций как самостоятельную математическую дисциплину, поставив и разрешив ряд основных проблем этой отрасли анализа. Кстати, и самый термин «конструктивная теория функций» предложен С. Н. Бернштейном.

Несмотря на блестящий расцвет конструктивной теории функций, как научной дисциплины, чисто методическая проблема построения систематического курса этой дисциплины ещё не может считаться решённой, хотя весьма значительный шаг в решении указанной проблемы был сделан В. Л. Гончаровым в его превосходной книге «Теория интерполирования и приближения функций».

ПРЕДИСЛОВИЕ

При написании своей книги (она представляет собой обработку факультативных курсов, которые я читал в последние годы в Ленинградском университете и Ленинградском педагогическом институте им. Герцена) я ставил перед собой задачу удовлетворительного решения указанной методической проблемы. При этом я прежде всего заботился о выяснении идейной сущности вопроса и лишь на втором плане ставил задачу сообщения читателю большого фактического материала. В связи с этим я не старался вести изложения ни наиболее общим, ни наиболее экономным способом. В связи с этим находится и то, что многие вопросы конструктивной теории функций в книге не затрагиваются вовсе. Однако я хочу надеяться на то, что читатель, изучивший мою книгу, уже не затруднится при чтении как журнальной литературы, так и более обстоятельных сочинений. Из таких сочинений следует рекомендовать книги С. Н. Бернштейна «Экстремальные свойства полиномов» и Н. И. Ахиезера «Лекции по теории аппроксимации».

В действующих учебных планах математических факультетов наших университетов конструктивная теория функций фигурирует лишь в качестве предмета, рекомендуемого для факультативного курса. Я полагаю, что такой курс следует читать в течение нескольких лет: на втором, третьем и четвёртом курсах. Свою книгу я старался сделать руководством, пригодным именно для подобной постановки преподавания. Поэтому в первой части книги я не использую аппарата теории функций вещественного переменного, обходясь средствами классического анализа. Начиная со второй части, я уже не ставил такого ограничения. Что касается теории функций комплексного переменного, то она в моей книге почти не используется, ибо я занимался, главным образом, чисто вещественной проблематикой, в связи с чем и старался обходиться вещественными же средствами. Специалисты могут не согласиться со мной в построении IX главы первой части, где идёт речь о приближении аналитических функций. В защиту избранного мной способа изложения, помимо уже отмеченного стремления решать вещественные задачи вещественными средствами, я приведу ещё два соображения: во-первых, этот способ изложения гармонирует со всем построением первой части, где всюду сначала изучаются периодические функции и тригонометрические приближения, а алгебраический случай сводится к тригонометрическому с помощью индуцированных функций. Во-вторых, надо иметь в виду, что не всегда наиболее элегантный метод изложения является и наиболее поучительным в смысле раскрытия внутренней сущности вопроса.

Разумеется, привлечение аппарата теории функций комплексного переменного сократило бы изложение, но мне кажется, что существо дела выступает яснее при том способе рассуждения, который принят в книге. В то же время я должен сознаться, что неизбежный при этом отказ от вывода замечательной формулы С. Н. Бернштейна

$$\overline{\lim}\sqrt[n]{E_n}=\frac{1}{\rho}$$

заставил меня долго колебаться, прежде чем я остановился на том изложении вопроса, которое принял в конце концов.

Объём книги довольно значителен. Главной причиной этого обстоятельства является обилие излагаемого материала. Однако есть и другая причина: я стремился писать как только мог подробно и ясно. В настоящее время стала весьма распространённой манера очень сжатого изложения математических произведений, когда расшифровки многочисленных «легко видеть» и «без труда получаем» превращаются для читателя в тяжёлый труд. Эта манера представляется мне крайне вредной, и я старался всячески её избегать. Весьма вероятно, что квалифицированный читатель найдёт моё изложение в целом ряде мест, особенно в первой части книги, чрезмерно подробным. Я считаю, однако, что, стремясь объяснить что-либо, лучше дать слишком много, чем слишком мало. Впрочем, по мере продвижения к концу книги изложение становится всё более и более сжатым.

В заключение я хочу поблагодарить своих друзей М. К. Гавурина, Л. В. Канторовича, Р. О. Кузьмина и особенно Д. К. Фаддеева за целый ряд ценных советов и указаний.

4/IV—1948 г.
Ленинград

И. Натансон

ВВЕДЕНИЕ.

Конструктивная теория функций есть ветвь математического анализа, занимающаяся вопросами приближённого представления произвольных функций с помощью простейших аналитических аппаратов.

В первой части этого курса мы не будем заниматься рассмотрением очень общих классов функций, а ограничимся изучением следующих двух важных классов:

I. Вещественные функции, заданные и непрерывные на некотором сегменте $[a, b]$. Множество всех таких функций мы будем обозначать через $C([a, b])$.

II. Вещественные функции, заданные и непрерывные на всей вещественной оси $(-\infty, +\infty)$ и имеющие период 2π, так что при любом x будет

$$f(x+2\pi)=f(x).$$

Множество всех таких функций в дальнейшем обозначается через $C_{2\pi}$.

В качестве тех простейших аналитических аппаратов, с помощью которых мы будем приближённо представлять функции, будут служить: для класса $C([a, b])$ обыкновенные алгебраические полиномы

$$P(x)=c_0+c_1x+c_2x^2+\cdots+c_nx^n$$

с вещественными коэффициентами, а для класса $C_{2\pi}$ — тригонометрические полиномы, т. е. функции вида

$$T(x)=A+(a_1\cos x+b_1\sin x)+\cdots+(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

с вещественными же коэффициентами A, a_k, b_k.

Наконец, мы должны остановиться на объяснении смысла утверждения, что полином $P(x)$ (или $T(x)$) *близок* к некоторой функции $f(x)$. Здесь возможны различные трактовки вопроса.

Так, например, в первой части нашего курса мы будем говорить, что полином $P(x)$ близок к некоторой функции $f(x)$ из $C([a, b])$, если *при всех* $x \in [a, b]$

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

где $\varepsilon > 0$ есть некоторое постоянное число, характеризующее степень достигнутого приближения.

Аналогично этому тригонометрический полином $T(x)$ мы будем считать близким к функции $f(x) \in C_{2\pi}$, если *при всех вещественных* x

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Впрочем, поскольку ни $T(x)$, ни $f(x)$ не изменяются от замены x на $x + 2\pi$, достаточно, чтобы последнее неравенство выполнялось на каком-либо сегменте длины 2π, например на $[0, 2\pi]$ (и даже на полусегменте $[0, 2\pi)$, открытом справа), чтобы оно «автоматически» было выполнено на всей оси.

В связи с этим принципом оценки приближения полинома к функции мы будем называть соответствующую теорию *теорией равномерного приближения* функций.

Нетрудно видеть, что при указанном подходе «измерителем» достигнутого приближения может служить величина

$$\max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)|$$

в случае функций класса $C([a, b])$ и величина

$$\max_{-\infty < x < +\infty} |T(x) - f(x)|$$

при $f(x) \in C_{2\pi}$. Это, так сказать, «расстояние» между $f(x)$ и $P(x)$ (или, соответственно, между $f(x)$ и $T(x)$).

Во второй части курса, посвящённой *теории квадратических приближений*, мы будем заниматься приближённым представлением функций $f(x)$ значительно более общего вида с помощью, главным образом, тех же аналитических средств, т. е. обыкновенных алгебраических полиномов $P(x)$ и тригонометрических полиномов $T(x)$, но изменим критерий оценки достигаемого приближения.

Именно, за «измеритель расстояния» между $f(x)$ и $P(x)$ мы будем принимать интеграл

$$\int_a^b [P(x)-f(x)]^2\,dx,$$

а для оценки отклонения тригонометрического полинома $T(x)$ от функции $f(x)$, заданной на $[-\pi, \pi]$, привлечём интеграл

$$\int_{-\pi}^{\pi} [T(x)-f(x)]^2\,dx.$$

Мы увидим, что такое изменение точки зрения приводит к совершенно другой теории с другой проблематикой и другими результатами.

Наконец, в третьей части мы будем изучать вопросы *интерполирования*. Здесь критерием «близости» полинома $P(x)$ к функции $f(x) \in C([a, b])$ будет служить уже не малость величины

$$\max_{a\leqslant x\leqslant b} |P(x)-f(x)|,$$

или

$$\int_a^b [P(x)-f(x)]^2\,dx,$$

а факт совпадения значений $P(x)$ и $f(x)$ в некоторых заранее выбранных точках

$$x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_n$$

сегмента $[a, b]$ («узлах интерполирования»). Так же ставится вопрос и при приближении функции $f(x)$ из $C_{2\pi}$ полиномом $T(x)$, с оговоркой, что узлы должны лежать на каком-либо сегменте длины 2π.

Мы увидим, что все эти подходы к вопросу теснейшим образом связаны между собой, так что соответствующие теории будут глубоко проникать друг в друга. Наличие этого взаимного переплетения разнообразных алгебраических и аналитических идей, методов и фактов делает конструктивную теорию функций, помимо её большого прикладного значения, одним из красивейших отделов математики.

ЧАСТЬ ПЕРВАЯ

РАВНОМЕРНЫЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

ГЛАВА I.

ТЕОРЕМЫ ВЕЙЕРШТРАССА.

§ 1. Первая теорема Вейерштрасса.

Первый и основной вопрос, который встаёт перед нами в теории равномерного приближения, есть вопрос о том, можно ли приблизить произвольную непрерывную функцию полиномом с любой наперёд заданной степенью точности. Утвердительный ответ на этот вопрос был дан в 1885 году Вейерштрассом [1]*). Его результат формулируется так:

Первая теорема Вейерштрасса. *Пусть* $f(x) \in C([a, b])$. *Для всякого* $\varepsilon > 0$ *существует такой полином* $P(x)$, *что при всех* $x \in [a, b]$

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В настоящее время имеется большое число различных доказательств этой замечательной теоремы. Я приведу то из них, которое основано на другой важной теореме анализа — теореме С. Н. Бернштейна [1].

Лемма 1. *Справедливы тождества*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1, \tag{1}$$

$$\sum_{k=0}^{n} (k - nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = nx(1-x). \tag{2}$$

---

*) Цифры в квадратных скобках относятся к списку литературы, помещённому в конце книги.

Доказательство. Тождество (1) — тривиально. Оно получается из биномиальной формулы Ньютона

$$(a+b)^n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k a^k b^{n-k}, \tag{3}$$

если в ней положить $a=x$, $b=1-x$.

Второе тождество доказывается сложнее. Положив в формуле (3) $a=z$, $b=1$, получим тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k=(z+1)^n. \tag{4}$$

Дифференцируя (4) и умножая полученный результат на z, находим

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n^k z^k= nz(z+1)^{n-1}. \tag{5}$$

Дифференцируя (5) и снова умножая результат на z, получаем

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k z^k=nz(nz+1)(z+1)^{n-2}. \tag{6}$$

Положим в тождествах (4), (5) и (6)

$$z=\frac{x}{1-x}$$

и умножим полученные равенства на $(1-x)^n$. Это приводит к трём новым тождествам:

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=1, \tag{7}$$

$$\sum_{k=0}^{n} kC_n x^k(1-x)^{n-k}=nx, \tag{8}$$

$$\sum_{k=0}^{n} k^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}=nx(nx+1-x). \tag{9}$$

Чтобы получить отсюда требуемое тождество (2), достаточно умножить (7), (8) и (9) соответственно на n^2x^2, $-2nx$ и 1 и сложить полученные результаты.

Следствие. *При любом* x

$$\sum_{k=0}^{n} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{n}{4}. \tag{10}$$

В самом деле,

$$4x^2 - 4x + 1 = (2x-1)^2 \geqslant 0,$$

и потому

$$x(1-x) \leqslant \frac{1}{4}.$$

Лемма 2. *Пусть* $x \in [0, 1]$ *и* $\delta > 0$ — *произвольное положительное число. Обозначим через* $\Delta_n(x)$ *множество тех значений* k *из ряда* $0, 1, 2, \ldots, n$, *для которых*

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta. \tag{11}$$

Тогда

$$\sum_{k \in \Delta_n(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{4n\delta^2}. \tag{12}$$

Доказательство. Если $k \in \Delta_n(x)$, то в силу (11)

$$\frac{(k-nx)^2}{n^2\delta^2} \geqslant 1.$$

Поэтому

$$\sum_{k \in \Delta_n(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{1}{n^2\delta^2} \sum_{k \in \Delta_n(x)} (k-nx)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Если в сумме, стоящей справа, мы распространим суммирование на $k = 0, 1, 2, \ldots, n$, то разве лишь увеличим эту сумму, ибо при $x \in [0, 1]$ все вновь добавленные слагаемые (отвечающие тем k из ряда $0, 1, \ldots, n$, которые не входят в $\Delta_n(x)$) не отрицательны. Но тогда неравенство (10) сразу приведёт нас к требуемому неравенству (12).

Смысл доказанной леммы, грубо говоря, состоит в том, что при очень больших n в сумме

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{13}$$

существенными оказываются лишь те слагаемые, которые отвечают значениям k, удовлетворяющим условию

$$\left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta,$$

а прочие почти не влияют на величину суммы.

Определение. Пусть $f(x)$ есть функция, заданная на сегменте $[0, 1]$. Полином

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}$$

называется *полиномом Бернштейна* функции $f(x)$.

Нетрудно предвидеть, что, если $f(x)$ непрерывна, то при больших значениях n этот полином весьма мало отличается от $f(x)$. В самом деле, мы уже отметили, что в сумме (13) те слагаемые, для которых $\frac{k}{n}$ удалено от x, не играют почти никакой роли. Это справедливо и для полинома $B_n(x)$, ибо множители $f\left(\frac{k}{n}\right)$ ограничены. Поэтому в полиноме $B_n(x)$ существенно важны лишь те слагаемые, для которых $\frac{k}{n}$ весьма близко к x. Но для таких слагаемых (непрерывность!) множитель $f\left(\frac{k}{n}\right)$ почти не отличается от $f(x)$. Значит, полином $B_n(x)$ почти не изменится, если в его слагаемых $f\left(\frac{k}{n}\right)$ заменить на $f(x)$. Иначе говоря, справедливо приближённое равенство

$$B_n(x) \approx \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Отсюда же и из (1) сразу вытекает, что

$$B_n(x) \approx f(x).$$

Нижеследующая теорема даёт точное оформление этого наводящего рассуждения:

Теорема С. Н. Бернштейна. *Если* $f(x)$ *непрерывна на сегменте* $[0, 1]$, *то равномерно относительно* x

$$\lim_{n\to\infty} B_n(x) = f(x). \tag{14}$$

Доказательство. Обозначим через M наибольшее значение $|f(x)|$. Далее, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдём такое $\delta > 0$, что при

$$|x'' - x'| < \delta$$

будет

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

что возможно благодаря *равномерной* непрерывности функции $f(x)$. Сделав всё это, выберем произвольное x из $[0, 1]$.

В силу (1) будет

$$f(x) = \sum_{k=0}^{n} f(x) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

так что

$$B_n(x) - f(x) = \sum_{k=0}^{n} \left\{ f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right\} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \tag{15}$$

Разобьём ряд чисел $k = 0, 1, \ldots, n$ на две категории: $\Gamma_n(x)$ и $\Delta_n(x)$, полагая

$$k \in \Gamma_n(x), \text{ если } \left|\frac{k}{n} - x\right| < \delta,$$

$$k \in \Delta_n(x), \text{ если } \left|\frac{k}{n} - x\right| \geqslant \delta.$$

Соответственно этому и сумма (15) разобьётся на две суммы: $\sum_\Gamma$ и $\sum_\Delta$. В первой из них

$$\left| f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x) \right| < \frac{\varepsilon}{2},$$

и потому

$$\left|\sum\nolimits_{\Gamma}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} \sum_{k \in \Gamma_n(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

а так как

$$\sum_{k \in \Gamma_n(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = 1,$$

то

$$\left|\sum\nolimits_{\Gamma}\right| \leqslant \frac{\varepsilon}{2}. \tag{16}$$

Во второй сумме

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant 2M,$$

а потому, в силу (12),

$$\left|\sum\nolimits_{\Delta}\right| \leqslant 2M \sum_{k \in \Delta_n(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Сопоставляя это неравенство с неравенством (16), находим

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{\varepsilon}{2} + \frac{M}{2n\delta^2}.$$

Если n достаточно велико ($n > N_\varepsilon$), то

$$\frac{M}{n\delta^2} < \varepsilon \tag{17}$$

и

$$|B_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему, ибо выбор N_ε определяется неравенством (17) и никак не связан с рассматриваемым значением x.

Теперь мы можем доказать вышеприведённую теорему Вейерштрасса. Действительно, если сегмент $[a, b]$ совпадает с сегментом $[0, 1]$, то теорема Вейерштрасса сразу следует*) из теоремы Бернштейна. Допустим

*) Заметим, однако, что теорема Бернштейна и в этом случае даёт больше, чем теорема Вейерштрасса, ибо она устанавливает поведение *совершенно определённых* полиномов $B_n(x)$, в то время как теорема Вейерштрасса лишь констатирует существование приближающих полиномов, не давая их конструкции.

теперь, что сегмент $[a, b]$ отличен от $[0, 1]$. Введём в рассмотрение функцию

$$\varphi(y) = f[a + y(b-a)].$$

Она задана и непрерывна на сегменте $[0, 1]$. Значит, по уже доказанному, существует такой полином

$$Q(y) = \sum_{k=0}^{n} c_k y^k,$$

что при всех $y \in [0, 1]$

$$\left| f[a + y(b-a)] - \sum_{k=0}^{n} c_k y^k \right| < \varepsilon. \tag{18}$$

Но для любого $x \in [a, b]$ дробь $\frac{x-a}{b-a}$ находится в сегменте $[0, 1]$ и её можно подставить в (18) вместо y, что даёт

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k \right| < \varepsilon.$$

Это и показывает, что полином

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \left(\frac{x-a}{b-a}\right)^k$$

приближает функцию $f(x)$ с требуемой точностью.

Теореме Вейерштрасса можно дать другую формулировку:

А. *Всякая непрерывная на сегменте* $[a, b]$ *функция* $f(x)$ *служит пределом некоторой равномерно сходящейся последовательности полиномов.*

В самом деле, взяв последовательность $\varepsilon_n = \frac{1}{n}$, можно для каждого из этих ε_n найти такой полином $P_n(x)$, для которого

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{1}{n} \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Легко видеть, что*) при $n \to \infty$

$$P_n(x) \rightrightarrows f(x).$$

Наконец, теорему Вейерштрасса можно формулировать и так:

В. *Всякая непрерывная на некотором сегменте функция разлагается в равномерно сходящийся ряд полиномов.*

Действительно, найдя последовательность полиномов $P_n(x)$, равномерно сходящуюся к $f(x)$, положим

$$Q_1(x) = P_1(x), \quad Q_n(x) = P_n(x) - P_{n-1}(x) \quad (n > 1).$$

Так как частные суммы ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty} Q_n(x)$$

совпадают с полиномами $P_n(x)$, то этот ряд равномерно сходится к сумме $f(x)$.

§ 2. Вторая теорема Вейерштрасса.

Вторая теорема Вейерштрасса устанавливает возможность неограниченного приближения к *периодическим* непрерывным функциям с помощью тригонометрических полиномов.

Вторая теорема Вейерштрасса. *Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$. Для всякого $\varepsilon > 0$ существует такой тригонометрический полином $T(x)$, что при всех вещественных x*

$$|T(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Аналогично первой теореме и здесь можно дать формулировки типа А и В. Весьма простое доказательство второй теоремы Вейерштрасса было дано в 1908 году Валле-Пуссеном [1]. Его я и привожу.

*) Равномерное стремление мы иногда будем обозначать символом $\rightrightarrows$.

Лемма 1. *Если $\varphi(x) \in C_{2\pi}$, то при всяком a справедливо равенство*

$$\int_a^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx = \int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx.$$

Действительно,

$$\int_a^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx = \int_a^0 \varphi(x)\,dx + \int_0^{2\pi} \varphi(x)\,dx + \int_{2\pi}^{a+2\pi} \varphi(x)\,dx.$$

Полагая в последнем интеграле правой части $x = z + 2\pi$ и принимая во внимание, что $\varphi(z+2\pi) = \varphi(z)$, убеждаемся, что этот интеграл равен

$$-\int_a^0 \varphi(z)\,dz,$$

откуда и следует лемма.

Лемма 2. *Справедливо тождество**)

$$\int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t\,dt = \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\,\frac{\pi}{2}. \tag{19}$$

Доказательство. Обозначая интеграл (19) через U_{2n} и интегрируя по частям, находим

$$U_{2n} = \int_0^{\pi/2} \cos^{2n-1} t\,d(\sin t) =$$

$$= [\sin t \cos^{2n-1} t]_0^{\pi/2} + (2n-1)\int_0^{\pi/2} \cos^{2n-2} t \sin^2 t\,dt,$$

откуда

$$U_{2n} = (2n-1)\int_0^{\pi/2} (\cos^{2n-2} t - \cos^{2n} t)\,dt = (2n-1)(U_{2n-2} - U_{2n})$$

---

*) Символом $n!!$ обозначается произведение всех натуральных чисел, не превосходящих n и имеющих с n одинаковую чётность. Например, $8!! = 2 \cdot 4 \cdot 6 \cdot 8$.

и, стало быть,

$$U_{2n}=\frac{2n-1}{2n}U_{2n-2}.$$

Заменяя здесь n последовательно на $n-1, n-2, \ldots, 1$ и перемножая полученные равенства, мы придём к (19).

Определение. Пусть $f(x)\in C_{2\pi}$. Интеграл

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt$$

называется *сингулярным интегралом Валле-Пуссена.*

Теорема Валле-Пуссена. *Равномерно для всех вещественных* x

$$\lim_{n\to\infty} V_n(x)=f(x).$$

Доказательство. Положим в интеграле Валле-Пуссена $t=x+u$. В силу леммы 1 мы можем, производя эту подстановку, не менять пределов интегрирования, так что

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\cos^{2n}\frac{u}{2}\,du.$$

Заменяя u на $2t$, находим

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t)\cos^{2n}t\,dt.$$

Разобьём этот интеграл на два, распространённых на сегменты $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ и $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$. Если в первом из них заменить t на $-t$, то получится

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} \{f(x+2t)+f(x-2t)\}\cos^{2n}t\,dt.$$

Из этой формы представления интеграла уже видно, каков будет характер его поведения. Именно, множитель $\cos^{2n}t$ при больших n будет очень мал, как только t сколько-нибудь заметно удалится от нуля. Значит, в интеграле играют роль лишь те элементы, для которых t весьма близко к нулю. Но для этих значений t множитель $f(x+2t)+f(x-2t)$ почти не отличается от $2f(x)$ и без большой погрешности может быть заменён на $2f(x)$. Проделывая же эту замену, мы приходим к приближённому равенству

$$V_n(x) \approx f(x) \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \cos^{2n} t \, dt,$$

которое, в силу (19), можно записать и так:

$$V_n(x) \approx f(x).$$

Ввиду того что точность этого приближённого равенства повышается с увеличением n, оно и приводит нас к утверждению теоремы Валле-Пуссена. Само собой разумеется, что эти наводящие соображения не заменяют точного доказательства теоремы, но они очень поучительны, ибо вскрывают истинный механизм, управляющий поведением целого ряда сходных аналитических аппаратов. Мы уже видели, например, что и для полиномов Бернштейна существо дела в таком же механизме.

Вернёмся к доказательству теоремы. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, найдём такое $\delta > 0$, чтобы при

$$|x'' - x'| < 2\delta$$

оказывалось

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Возможность выбора такого δ вытекает из *равномерной* непрерывности $f(x)$. Здесь нужно войти в некоторые подробности, однако, чтобы не прерывать изложения, мы остановимся на них по окончании доказательства.

Для любого вещественного x, в силу (19), будет

$$f(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} 2f(x) \cos^{2n} t \, dt,$$

откуда

$$V_n(x)-f(x)=$$

$$=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\{f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)\}\cos^{2n}t\,dt.$$

Разбивая этот интеграл на два, распространённых на сегменты $[0,\ \delta]$ и $\left[\delta,\ \frac{\pi}{2}\right]$, мы замечаем, что в первом из них будет

$$|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|f(x+2t)-f(x)|+|f(x-2t)-f(x)|<\varepsilon,$$

а во втором

$$|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)|\leqslant 4M,$$

где

$$M=\max|f(x)|.$$

Отсюда

$$|V_n(x)-f(x)|<$$
$$<\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\left\{\varepsilon\int_0^{\delta}\cos^{2n}t\,dt+4M\int_{\delta}^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt\right\}.$$

Но

$$\int_0^{\delta}\cos^{2n}t\,dt<\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2}.$$

С другой стороны, замечая, что функция $\cos t$ убывает на сегменте $\left[0,\ \frac{\pi}{2}\right]$, и обозначая $\cos^2\delta$ через q, мы находим, что

$$\int_{\delta}^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt<\frac{\pi}{2}q^n.$$

Сопоставляя всё сказанное, приходим к оценке

$$|V_n(x)-f(x)|<\frac{\varepsilon}{2}+\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}2Mq^n.$$

Но, так как

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \frac{2}{3} \cdot \frac{4}{5} \cdots \frac{2n-2}{2n-1} \cdot 2n < 2n,$$

то

$$|V_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + 4Mnq^n.$$

Как известно, при $0 < q < 1$

$$\lim_{n\to\infty} nq^n = 0.$$

Поэтому, для $n > N_\varepsilon$ окажется

$$4Mnq^n < \frac{\varepsilon}{2}$$

и

$$|V_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему, ибо N_ε не зависит от рассматриваемого значения x.

Нам остаётся установить равномерную непрерывность функции $f(x)$. Дело в том, что известная из элементов анализа теорема Кантора о равномерной непрерывности непрерывной функции относится к случаю функции, заданной на сегменте, и не переносится на функции, заданные на всей оси. Например, легко проверить, что непрерывная функция $y = x^2$ не является равномерно непрерывной на всей оси. Однако функция $f(x)$, рассматриваемая в теореме Валле-Пуссена, *периодична*, и это обстоятельство обеспечивает её равномерную непрерывность.

В самом деле, взяв произвольное $\varepsilon > 0$ и опираясь на равномерную непрерывность $f(x)$ в сегменте $[0, 4\pi]$, мы можем найти такое $\delta > 0$, что при

$$|x'' - x'| < \delta, \quad 0 \leqslant x'' \leqslant 4\pi, \quad 0 \leqslant x' \leqslant 4\pi$$

окажется

$$|f(x'') - f(x')| < \varepsilon.$$

Не ограничивая общности, можно считать при этом, что $\delta < 2\pi$. Пусть теперь x и y суть произвольные точки, для которых

$$|x - y| < \delta,$$

причём для определённости $x < y$. Представим x в форме

$x = 2n\pi + u$, где $0 \leqslant u < 2\pi$, и пусть $v = y - 2n\pi$. Тогда $v > u \geqslant 0$ и, кроме того, $v - u = y - x < \delta < 2\pi$, откуда $v < 4\pi$. Таким образом обе точки u и v лежат в сегменте $[0, 4\pi]$ и, стало быть,

$$|f(u) - f(v)| < \varepsilon.$$

Но ведь $f(x) = f(u)$, $f(y) = f(v)$, и потому

$$|f(x) - f(y)| < \varepsilon.$$

Этим завершено доказательство теоремы Валле-Пуссена.

Чтобы получить отсюда вторую теорему Вейерштрасса, очевидно достаточно показать, что $V_n(x)$ *есть тригонометрический полином*. Для этого понадобится

Лемма 3. *Произведение двух тригонометрических полиномов также есть тригонометрический полином, порядок*) которого равен сумме порядков сомножителей.*

Доказательство. Перемножая полиномы

$$T_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

и

$$U_m(x) = C + \sum_{k=1}^{m} (c_k \cos kx + d_k \sin kx),$$

мы получим сумму членов следующих трёх видов:

$$\cos kx \cos ix, \quad \sin kx \sin ix, \quad \cos kx \sin ix. \tag{20}$$

Пользуясь формулами

$$\left.\begin{aligned} \cos\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) + \cos(\alpha+\beta)], \\ \sin\alpha\sin\beta &= \frac{1}{2}[\cos(\alpha-\beta) - \cos(\alpha+\beta)], \\ \sin\alpha\cos\beta &= \frac{1}{2}[\sin(\alpha+\beta) + \sin(\alpha-\beta)], \end{aligned}\right\} \tag{21}$$

---

*) Если $|a_n| + |b_n| > 0$, то *порядком полинома*

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

называется число n.

мы убеждаемся, что каждое из произведений (20) есть тригонометрический полином, а значит, такова же и их сумма. Остаётся подсчитать порядок произведения. Из формул (21) сразу видно, что он не может превзойти суммы $n+m$. Покажем, что он и не меньше, чем $n+m$. Действительно, произведение старших членов $T_n(x)$ и $U_m(x)$ есть*)

$$(a_n \cos nx + b_n \sin nx)\ (c_m \cos mx + d_m \sin mx) = \\ = \frac{1}{2}[(a_n c_m - b_n d_m) \cos (n+m) x + \\ + (a_n d_m + b_n c_m) \sin (n+m) x] + \lambda,$$

где λ состоит из членов низшего порядка. Числа a_n, b_n, c_m и d_m вещественны, значит, вещественны и коэффициенты при $\cos (n+m) x$ и $\sin (n+m) x$, и чтобы проверить, что они одновременно не исчезают, достаточно найти сумму их квадратов. Но

$$(a_n c_m - b_n d_m)^2 + (a_n d_m + b_n c_m)^2 = (a_n^2 + b_n^2)\ (c_m^2 + d_m^2) > 0.$$

Замечание. Мы рассматриваем только вещественные полиномы. Если же допустить к рассмотрению и комплексные коэффициенты, то порядок произведения сможет оказаться ниже суммы порядков сомножителей. Например,

$$(\cos x + i \sin x)\ (\cos x - i \sin x) = 1.$$

Докажем в заключение ещё один простой факт.

Лемма 4. *Если тригонометрический полином $T(x)$ есть функция чётная, т. е. $T(-x) = T(x)$, то его можно представить в форме*

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx,$$

не содержащей синусов кратных дуг.

---

*) Из тех же формул (21) вытекает, что члены $\cos (n+m) x$ и $\sin (n+m) x$ в произведении получаются *только* от перемножения *старших* членов $T_n(x)$ и $U_m(x)$.

Для доказательства достаточно сложить равенства

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

$$T(-x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx-b_k\sin kx)$$

и результат разделить на два.

Теперь легко показать, что $V_n(x)$ есть тригонометрический полином. В самом деле,

$$\cos^2\frac{u}{2}=\frac{1+\cos u}{2}$$

есть полином первого порядка. Значит, $\cos^{2n}\frac{u}{2}$ есть полином n-го порядка и, будучи чётной функцией, представляется в форме

$$\cos^{2n}\frac{u}{2}=L+\sum_{k=1}^{n}l_k\cos kx.$$

Отсюда

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[L+\sum_{k=1}^{n}l_k\cos k(t-x)\right]dt.$$

Значит,

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\times$$

$$\times\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[L+\sum_{k=1}^{n}l_k(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\right]dt$$

и, стало быть,

$$V_n(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

где положено для краткости

$$A=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{L}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\,dt,$$

$$a_k=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{l_k}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos kt\,dt,$$

$$b_k=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{l_k}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi} f(t)\sin kt\,dt.$$

Вторая теорема Вейерштрасса доказана полностью.

§ 3. Связь теорем Вейерштрасса между собой.

Покажем, что первая теорема Вейерштрасса является следствием второй. Действительно, пусть $f(x)$ есть функция заданная и непрерывная на сегменте $[-\pi, \pi]$. Введём функцию $g(x)$, полагая

$$g(x)=f(x)+\frac{f(-\pi)-f(\pi)}{2\pi}\,x.$$

Легко видеть, что $g(\pi)=g(-\pi)$. Поэтому функцию $g(x)$ можно доопределить для всех вещественных x равенством $g(x+2\pi)=g(x)$, причём расширенная таким образом функция $g(x)$ входит в класс $C_{2\pi}$. Значит, по второй теореме Вейерштрасса для любого $\varepsilon>0$ найдётся тригонометрический полином

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

такой, что при всех вещественных x

$$|g(x)-T(x)|<\frac{\varepsilon}{2}.$$

Найдя такой полином, положим

$$\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)=M.$$

Из элементов анализа известно, что функции $\cos z$ и $\sin z$ разлагаются в степенные ряды

$$\cos z = 1 - \frac{z^2}{2!} + \frac{z^4}{4!} - \ldots, \quad \sin z = z - \frac{z^3}{3!} + \frac{z^5}{5!} - \ldots,$$

которые равномерно сходятся на всяком конечном сегменте. В частности, их сходимость равномерна на сегменте $[-n\pi, +n\pi]$, где n — порядок полинома $T(x)$. Поэтому существует столь большое m, что при всех z из $[-n\pi, +n\pi]$

$$|\cos z - C_m(z)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |\sin z - S_m(z)| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

где $C_m(z)$ и $S_m(z)$ суть частные суммы вышенаписанных разложений. В таком случае при любом x из $[-\pi, \pi]$ и любом k из чисел $1, 2, \ldots, n$ окажется

$$|\cos kx - C_m(kx)| < \frac{\varepsilon}{2M}, \quad |\sin kx - S_m(kx)| < \frac{\varepsilon}{2M},$$

и потому

$$\left|\sum_{k=1}^{n} [a_k \cos kx + b_k \sin kx] - \sum_{k=1}^{n} [a_k C_m(kx) + b_k S_m(kx)]\right| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если мы положим

$$Q(x) = A + \sum_{k=1}^{n} [a_k C_m(kx) + b_k S_m(kx)],$$

то $Q(x)$ будет обыкновенным алгебраическим полиномом, который при всех x из $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет неравенству

$$|T(x) - Q(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$$

и, стало быть, удовлетворяет неравенству

$$|g(x) - Q(x)| < \varepsilon.$$

Но в таком случае полином

$$P(x) = Q(x) - \frac{f(-\pi) - f(\pi)}{2\pi} x$$

при всех x из $[-\pi, \pi]$ удовлетворяет неравенству

$$|f(x)-P(x)|<\varepsilon.$$

Иначе говоря, нами установлена первая теорема Вейерштрасса для случая функции, непрерывной на специально выбранном сегменте $[-\pi, \pi]$. Но тогда, совершенно так же, как в § 1 мы перешли от специального сегмента $[0, 1]$ к произвольному сегменту $[a, b]$, мы и теперь перенесём полученный результат на любой сегмент $[a, b]$.

Несколько сложнее доказывается, что вторая теорема Вейерштрасса является следствием первой. Чтобы установить этот факт, докажем сначала следующее предложение:

Лемма. *Если $f(x)$ есть функция, заданная и непрерывная на сегменте $[0, \pi]$, то для всякого $\varepsilon>0$ существует чётный тригонометрический полином $T(x)$, удовлетворяющий неравенству*

$$|f(x)-T(x)|<\varepsilon \qquad (0\leqslant x\leqslant\pi).$$

Действительно, функция $f(\arccos y)$ задана и непрерывна на сегменте $[-1, +1]$. Значит, по первой теореме Вейерштрасса найдётся полином $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k y^k$ такой, что при всех y из $[-1, +1]$

$$\left|f(\arccos y)-\sum_{k=0}^{n} c_k y^k\right|<\varepsilon,$$

или, что то же самое, для всех x из $[0, \pi]$

$$\left|f(x)-\sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k x\right|<\varepsilon,$$

и остаётся лишь заметить, что $\sum\limits_{k=0}^{n} c_k \cos^k x$ есть чётный тригонометрический полином.

Теперь мы можем перейти к доказательству второй теоремы Вейерштрасса. Пусть $f(x)$ — произвольная функция класса $C_{2\pi}$. Тогда по только что доказанной лемме для *чётных* функций

$$f(x)+f(-x), \quad [f(x)-f(-x)]\sin x$$

найдутся чётные же тригонометрические полиномы $T_1(x)$ и $T_2(x)$ такие, что при $0 \leqslant x \leqslant \pi$

$$|f(x)+f(-x)-T_1(x)| < \frac{\varepsilon}{2},$$

$$|[f(x)-f(-x)]\sin x - T_2(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Однако, само собой ясно, что эти неравенства выполняются и при $-\pi \leqslant x < 0$, ибо их левые части не изменяются от замены x на $-x$. В таком случае, в силу периодичности всех написанных здесь функций, эти неравенства справедливы при всех вещественных x.

Переписав эти неравенства в виде равенств

$$f(x)+f(-x) = T_1(x)+\alpha_1(x),$$

$$[f(x)-f(-x)]\sin x + T_2(x)+\alpha_2(x),$$

где $|\alpha_i(x)| < \frac{\varepsilon}{2}$, умножим первое из них на $\sin^2 x$, второе на $\sin x$ и сложим. Это даёт (после деления на два)

$$f(x)\sin^2 x = T_3(x)+\beta(x) \quad \left(|\beta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

где $T_3(x)$ есть некоторый новый тригонометрический полином.

В последнем равенстве $f(x)$ есть совершенно произвольная функция из $C_{2\pi}$. Значит, такое же равенство справедливо и для функции $f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)$:

$$f\left(x-\frac{\pi}{2}\right)\sin^2 x = T_4(x)+\gamma(x) \quad \left(|\gamma(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right).$$

Заменим здесь x на $x+\frac{\pi}{2}$. Полагая

$$T_4\left(x+\frac{\pi}{2}\right) = T_5(x),$$

получим

$$f(x)\cos^2 x = T_5(x) + \delta(x) \quad \left(|\delta(x)| < \frac{\varepsilon}{2}\right),$$

причём и $T_5(x)$ есть некоторый тригонометрический полином.

В таком случае

$$f(x) = T_3(x) + T_5(x) + \beta(x) + \delta(x),$$

и полином $T_3(x) + T_5(x)$ при всех x отличается от $f(x)$ меньше, чем на ε *).

---

*) Валле-Пуссен [2].

ГЛАВА II.

АЛГЕБРАИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ.

§ 1. Основные понятия.

Первая теорема Вейерштрасса показывает нам, что всякую функцию класса $C([a, b])$ можно представить полиномом с любой наперёд заданной точностью. Однако при этом степень приближающего полинома может оказаться очень высокой. Естественно спросить, какой точности приближения можно добиться, если заранее ограничить степень приближающих полиномов. Такая постановка вопроса приводит к ряду новых понятий.

Обозначим через H_n множество всех полиномов степени не выше n-й, т. е. полиномов вида

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n.$$

Здесь коэффициенты $c_0, c_1, \ldots, c_n$ могут быть любыми вещественными числами. В частности, старший коэффициент c_n может быть нулём, и потому

$$H_0 \subset H_1 \subset H_2 \subset \ldots \tag{22}$$

Пусть $f(x)$ есть какая-нибудь функция класса $C([a, b])$. Выберем из H_n определённый полином $P(x)$ и положим

$$\Delta(P) = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |P(x) - f(x)|.$$

Число $\Delta(P)$ называется *отклонением* полинома $P(x)$ от функции $f(x)$. Если мы будем изменять полином $P(x)$, заставляя его пробежать всё множество H_n, то величина $\Delta(P)$ также будет изменяться, но так как она остаётся неотрицательной, то множество её значений ограничено снизу и имеет точную нижнюю границу

$$E_n = E_n(f) = \inf_{P \in H_n} \{\Delta(P)\}.$$

Величина E_n называется *наименьшим отклонением* полиномов из H_n от $f(x)$ или *наилучшим приближением* к $f(x)$ полиномами из H_n. Оба эти термина пока не вполне оправданы, ибо вовсе неясно, что вообще в H_n найдётся полином $P^*(x)$, для которого окажется

$$\Delta(P^*) = E_n, \tag{23}$$

так что нет оснований причислять E_n к отклонениям. Ниже, однако, мы установим существование полинома $P^*(x)$, удовлетворяющего соотношению (23), что и оправдает введённую терминологию.

Нетрудно видеть, что

$$E_n \geqslant 0.$$

Далее, соотношения (22) показывают, что, увеличивая n, мы будем расширять множество чисел $\Delta(P)$, от чего его точная нижняя граница может лишь уменьшаться, и потому

$$E_0 \geqslant E_1 \geqslant E_2 \geqslant \ldots$$

Отсюда и из первой теоремы Вейерштрасса следует, что

$$\lim_{n\to\infty} E_n = 0.$$

В самом деле, для любого $\varepsilon > 0$ найдётся полином $P(x)$, для которого

$$\Delta(P) < \varepsilon.$$

Если степень этого полинома есть n_0, то $E_{n_0} < \varepsilon$ и, тем более, при $n > n_0$ будет

$$E_n < \varepsilon.$$

Определения. Пусть

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

есть некоторый полином. Положим

$$M(P)=\max_{a\leqslant x\leqslant b}|P(x)|,\quad L(P)=\sum_{k=0}^{n}|c_k|$$

и будем называть числа $M(P)$ и $L(P)$, соответственно, *нормой* и *квазинормой* полинома $P(x)$. Норма полинома зависит не только от самого этого полинома, но и от того сегмента $[a, b]$, на котором мы пожелаем его рассматривать. Квазинорма свободна от этого недостатка.

Теорема 1. *Пусть дан определённый сегмент $[a, b]$ и фиксировано целое число $n\geqslant 0$. Тогда существуют такие постоянные положительные числа A и B, что для всякого полинома $P(x)\in H_n$ справедливы неравенства*

$$M(P)\leqslant AL(P), \tag{24}$$

$$L(P)\leqslant BM(P). \tag{25}$$

Доказательство. Существование постоянной A тривиально. Действительно, каждая из конечного числа непрерывных функций

$$1,\ x,\ x^2,\ \ldots,\ x^n$$

ограничена на сегменте $[a, b]$. Если через A обозначить число, большее абсолютной величины каждой из этих функций, то при любом x из $[a, b]$ окажется

$$|P(x)|\leqslant\sum_{k=0}^{n}|c_k|\,|x^k|\leqslant AL(P).$$

Существование числа B доказывается сложнее. Именно, возьмём на сегменте $[a, b]$ группу из $n+1$ точек

$$x<y<\ldots<t. \tag{26}$$

Эти точки мы закрепим и в дальнейшем менять не будем. Тогда

$$\left.\begin{aligned} c_0+c_1x+c_2x^2+\ldots+c_nx^n&=P(x),\\ c_0+c_1y+c_2y^2+\ldots+c_ny^n&=P(y),\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots&\ldots\ldots\\ c_0+c_1t+c_2t^2+\ldots+c_nt^n&=P(t).\end{aligned}\right\} \tag{27}$$

Таким образом, зная точки (26) и значения полинома в этих точках, мы можем найти коэффициенты этого полинома $c_0, c_1, \ldots, c_n$ из системы линейных уравнений (27).

Определитель этой системы

$$D = \begin{vmatrix} 1 & x & x^2 \ldots x^n \\ 1 & y & y^2 \ldots y^n \\ \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & t & t^2 \ldots t^n \end{vmatrix}$$

есть определитель Вандермонда и потому отличен от нуля. Стало быть, по известным формулам Крамера

$$c_k = \frac{1}{D} \begin{vmatrix} 1 & x \ldots x^{k-1} & P(x) & x^{k+1} \ldots x^n \\ 1 & y \ldots y^{k-1} & P(y) & y^{k+1} \ldots y^n \\ \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot & \cdot & \cdot \quad \cdot \quad \cdot \\ 1 & t \ldots t^{k-1} & P(t) & t^{k+1} \ldots t^n \end{vmatrix}$$

$$(k=0, 1, \ldots, n).$$

Развёртывая этот определитель по элементам $(k+1)$-го столбца, найдём

$$c_k = l_x^{(k)} P(x) + l_y^{(k)} P(y) + \ldots + l_t^{(k)} P(t),$$

где коэффициенты $l_x^{(k)}, l_y^{(k)}, \ldots, l_t^{(k)}$ вполне определяются точками (26) и числом k и не зависят от выбора рассматриваемого полинома.

Отсюда следует, что

$$|c_k| \leqslant \{|l_x^{(k)}| + |l_y^{(k)}| + \ldots + |l_t^{(k)}|\} M(P).$$

Складывая эти неравенства для $k = 0, 1, \ldots, n$, мы и придём к неравенству (25), если обозначим через B сумму

$$\sum_{k=0}^{n} \{|l_x^{(k)}| + |l_y^{(k)}| + \ldots + |l_t^{(k)}|\}.$$

Следствие 1. *Пусть $S = \{P(x)\}$ есть произвольное семейство полиномов из H_n. Для того чтобы все полиномы этого семейства на каком-либо сегменте $[a, b]$ были ограничены одним и тем же числом, необходимо* *и достаточно, чтобы множество их квазинорм было ограничено.*

В самом деле, ограниченность всех полиномов из S одним числом K означает, что при $P \in S$

$$M(P) \leqslant K.$$

Но в таком случае

$$L(P) < BK.$$

Обратно, если при всех $P(x)$ из S

$$L(P) \leqslant K,$$

то для этих полиномов окажется

$$M(P) \leqslant AK.$$

Следствие 2. *Пусть $\{P_m(x)\}$ есть последовательность полиномов, принадлежащих H_n, и $P(x)$ какой-нибудь полином из H_n. Для того чтобы последовательность $\{P_m(x)\}$ на каком-либо сегменте $[a, b]$ равномерно сходилась к $P(x)$, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{m\to\infty} L(P_m - P) = 0.$$

Действительно, равномерное стремление $P_m(x)$ к $P(x)$ означает, что

$$\lim_{m\to\infty} M(P_m - P) = 0.$$

Заметив это, мы доказываем настоящее следствие совершенно так же, как и предыдущее.

Замечание. Из отмеченных следствий вытекает, что равномерная ограниченность множества полиномов из H_n или равномерная сходимость последовательности таких полиномов, имея место на одном каком-либо сегменте $[a, b]$, обязательно имеет место и на всяком другом сегменте $[c, d]$, ибо квазинорма полинома не зависит от того, на каком сегменте мы пожелаем его рассматривать. Однако читатель должен обратить внимание на то, что всё это верно лишь до тех пор, пока мы ограничиваемся полиномами, степень которых не превосходит *фиксированного* числа n. Так, например, последовательность полиномов

$$1,\ x,\ x^2,\ x^3, \ldots$$

равномерно сходится к нулю на сегменте $\left[0, \frac{1}{2}\right]$, не обладая этим свойством на $[0, 1]$. Она же, будучи ограниченной на этом последнем сегменте, не ограничена на $[0,2]$.

Определения:

1. Система $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, состоящая из n вещественных чисел $x_1, x_2, \ldots, x_n$, взятых в определённом порядке, называется *точкой* n-мерного пространства.

2. Множество $E = \{N(x_1, x_2, \ldots, x_n)\}$ точек n-мерного пространства назовём *ограниченным*, если существует такая постоянная C, что при всех $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ из E оказывается

$$\sum_{i=1}^{n} |x_i| < C.$$

3. Будем говорить, что последовательность

$$\{N_k(x_1^{(k)},\ x_2^{(k)}, \ldots, x_n^{(k)})\},$$

точек n-мерного пространства *сходится* к точке $N(x_1, x_2, \ldots, x_n)$, если

$$\lim_{k\to\infty} \sum_{i=1}^{n} |x_i^{(k)} - x_i| = 0.$$

Поставим в соответствие каждому полиному из H_n

$$P(x) = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots + c_n x^n$$

точку $(n+1)$-мерного пространства, координатами которой служат коэффициенты полинома, т. е. точку $N(c_0, c_1, \ldots, c_n)$. Условимся называть эту точку *изображающей точкой полинома* $P(x)$. С помощью этого термина вышеприведённые следствия теоремы 1 можно высказать в следующей форме:

1. *Для ограниченности (на каком-либо сегменте) некоторого семейства полиномов из* H_n *необходима и*

достаточна ограниченность соответствующего множества изображающих точек.

2. *Для того чтобы последовательность $\{P_m(x)\}$ полиномов из H_n на каком-либо сегменте равномерно сходилась к полиному $P(x) \in H_n$, необходимо и достаточно, чтобы соответствующая последовательность изображающих точек $\{N_m\}$ сходилась к изображающей точке N полинома $P(x)$.*

Эти предложения позволяют переносить на полиномы геометрические теоремы, доказанные для изображающих точек.

Приведём важный пример такого переноса.

Теорема 2 (Многомерный принцип выбора Больцано-Вейерштрасса.) *Из всякой ограниченной последовательности точек n-мерного пространства можно выделить сходящуюся частичную последовательность.*

Доказательство. Чтобы не загромождать изложения, рассмотрим случай двухмерного пространства. Пусть $\{M_n(x_n, y_n)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ есть последовательность точек, для которой

$$|x_n| + |y_n| < C.$$

Отсюда следует, в частности, ограниченность последовательности x-координат

$$x_1, x_2, x_3, \ldots,$$

так что на основании известного из элементов анализа принципа выбора из неё выделяется сходящаяся подпоследовательность

$$x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots; \quad \lim x_{n_k} = x. \tag{28}$$

Рассмотрим теперь последовательность y-координат

$$y_{n_1}, y_{n_2}, y_{n_3}, \ldots \tag{29}$$

тех точек M_{n_k}, x-координаты которых попали в последовательность (28). Применяя к последовательности (29) принцип выбора, приходим к сходящейся частичной последовательности

$$y_{nk_1}, y_{nk_2}, y_{nk_3} \ldots; \quad \lim y_{nk_i} = y.$$

Заметим при этом, что

$$\lim x_{n_{k_i}} = x,$$

ибо последовательность $\{x_{n_{k_i}}\}$ есть частичная для (28).

В таком случае последовательность точек

$$\{M_{n_{k_i}}(x_{n_{k_i}},\ y_{n_{k_i}})\}$$

сходится к точке $M(x, y)$.

Благодаря понятию изображающей точки отсюда вытекает

Следствие. *Если полиномы последовательности* $\{P_m(x)\} \in H_n$ *ограничены (на каком-либо сегменте) одним числом*

$$|P_m(x)| \leqslant K, \tag{30}$$

то из этой последовательности выделяется частичная последовательность, равномерно сходящаяся к некоторому полиному $P(x)$ *из* H_n.

Действительно, в силу (30), последовательность точек $\{N_m\}$, изображающих наши полиномы, ограничена. Стало быть, из неё выделяется последовательность $\{N_{m_i}\}$, сходящаяся к некоторой точке $N(c_0, c_1, \ldots, c_n)$, а тогда соответствующая подпоследовательность полиномов $\{P_{m_i}(x)\}$ равномерно сходится к полиному

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n.$$

В свою очередь отсюда вытекает интересное, хотя и стоящее несколько в стороне,

Замечание. *Если последовательность полиномов* $\{P_m(x)\}$ *из* H_n *равномерно сходится к какой-нибудь функции* $f(x)$, *то эта последняя функция сама есть полином из* H_n.

Действительно, последовательность $\{P_m(x)\}$ очевидным образом ограничена и, стало быть, из неё выделяется подпоследовательность $\{P_{m_i}(x)\}$, равномерно сходящаяся к полиному $P(x) \in H_n$. Но так как функция $f(x)$, будучи предельной для всей последовательности $\{P_m(x)\}$, будет предельной и для полиномов $\{P_{m_i}(x)\}$, то $f(x) = P(x)$.

Теперь мы в состоянии доказать высказанное выше утверждение о существовании в H_n полинома, имеющего наименьшее отклонение от заданной непрерывной функции.

Теорема 3 (Э. Борель). *Для всякой* $f(x) \in C([a, b])$ *в множестве* H_n *существует такой полином* $P(x)$, *что*

$$\Delta(P) = E_n. \tag{31}$$

Доказательство. По самому определению понятия *точной* нижней границы для каждого натурального m в H_n найдётся такой полином $P_m(x)$, что

$$E_n \leqslant \Delta(P_m) < E_n + \frac{1}{m}. \tag{32}$$

Покажем, что все полиномы последовательности $\{P_m(x)\}$ ограничены (на сегменте $[a, b]$) одним числом. В самом деле, при $x \in [a, b]$ окажется

$$|P_m(x)| \leqslant |P_m(x) - f(x)| + |f(x)| < E_n + \frac{1}{m} + |f(x)|.$$

Стало быть, для этих x

$$|P_m(x)| < E_n + 1 + \max|f(x)| = C,$$

что и устанавливает ограниченность полиномов нашей последовательности. Но тогда из неё выделяется частичная последовательность $\{P_{m_i}(x)\}$, равномерно сходящаяся к некоторому полиному $P(x) \in H_n$. Легко показать, что этот предельный полином и будет искомым. Действительно, в силу (32),

$$\lim_{i \to \infty} \Delta(P_{m_i}) = E_n.$$

Значит, переходя в неравенстве

$$|P_{m_i}(x) - f(x)| \leqslant \Delta(P_{m_i})$$

к пределу, мы получим

$$|P(x) - f(x)| \leqslant E_n.$$

Так как это неравенство верно при всех $x \in [a, b]$, то и $\Delta(P)$ не превосходит E_n, а так как ни для одного

$P(x)$ из H_n отклонение $\Delta(P)$ не может быть меньшим, чем E_n, то справедливо (31).

Полином $P(x)$ называется *полиномом наилучшего приближения* к функции $f(x)$, или *полиномом наименьшего отклонения* от этой функции. Впервые такие полиномы рассмотрел великий русский математик П. Л. Чебышев (1821—1894), который с полным основанием *) может считаться создателем конструктивной теории функций. Однако существование этих полиномов П. Л. Чебышев считал очевидным. В 1905 году Э. Борель [1] сделал указанное добавление к исследованиям П. Л. Чебышева.

§ 2. Теоремы П. Л. Чебышева.

В этом параграфе мы установим некоторые свойства полиномов наилучшего приближения. Пусть $f(x) \in C([a, b])$; фиксируем какое-нибудь $n \geqslant 0$ и обозначим через $P(x)$ один **) из полиномов наилучшего приближения к $f(x)$ в множестве H_n. Это значит, что

$$\max |P(x)-f(x)| = E_n.$$

Если бы оказалось, что $E_n = 0$, то это означало бы, что сама функция $f(x)$ есть полином степени не выше n. Этот тривиальный случай мы оставим в стороне и будем считать, что $E_n > 0$.

Так как непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция $|P(x)-f(x)|$ достигает своего наибольшего значения, то найдётся хотя бы одна такая точка x_0, что

$$|P(x_0)-f(x_0)| = E_n.$$

Всякую такую точку мы будем называть *(е)-точкой* полинома $P(x)$. При этом мы будем говорить, что

*) Следует упомянуть, что первые исследования П. Л. Чебышева [1, 2] по теории приближений относятся к 1853 году, т. е. более, чем на 30 лет опережают появление теорем Вейерштрасса.

**) На самом деле в каждом H_n имеется *только один* полином наилучшего приближения, но так как это ещё не доказано (это делается в этом же параграфе), то нам и приходится говорить об «одном» из таких полиномов.

(e)-точка x_0 есть (+)-*точка*, если

$$P(x_0)-f(x_0)=E_n,$$

и что она есть (—)-*точка*, если

$$P(x_0)-f(x_0)=-E_n.$$

Теорема 1. *Существуют и* (+)-*точки и* (—)-*точки.*

Доказательство. Допустим, например, что у полинома $P(x)$ не существует (—)-точек. Тогда при всех x из $[a, b]$ будет

$$P(x)-f(x)>-E_n.$$

В частности, и наименьшее значение непрерывной функции $P(x)-f(x)$ больше, чем $-E_n$. Обозначим это наименьшее значение через $-E_n+2h$, где $h>0$. Тогда при всех x из $[a, b]$ окажется

$$-E_n+2h\leqslant P(x)-f(x)\leqslant E_n,$$

откуда

$$-E_n+h\leqslant[P(x)-h]-f(x)\leqslant E_n-h$$

и, стало быть,

$$|[P(x)-h]-f(x)|\leqslant E_n-h.$$

Но это означает, что полином $P(x)-h$ отклоняется от $f(x)$ меньше, чем на E_n, что противоречит, однако, самому определению E_n.

Доказанная теорема геометрически совершенно очевидна.

В самом деле, вообразим себе кривые

$$y=f(x)+E_n,\quad y=f(x)-E_n. \tag{33}$$

График полинома $P(x)$ (при $a\leqslant x\leqslant b$) лежит в полосе между кривыми (33). Доказанная теорема означает, что этот график должен, хотя бы по одному разу, коснуться как верхней, так и нижней кривой (33). Но это вполне очевидно, ибо, если бы кривая $y=P(x)$ ни разу не выходила бы, например, на нижнюю кривую $y=f(x)-E_n$ (отсутствие (—)-точек), то мы могли бы сдвинуть её незначительно вниз и получить кривую, идущую в более узкой полосе около кривой $y = f(x)$. Вышеприведённое доказательство, собственно говоря, и представляет точную форму этого рассуждения.

Однако, как показал П. Л. Чебышев, число выходов кривой $y = P(x)$ на граничные кривые (33) гораздо больше. Именно, имеет место

Теорема 2 (П. Л. Чебышев [2]). *На сегменте* $[a, b]$ *существует последовательность, состоящая из* $(n+2)$ *точек*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2},$$

которые попеременно суть $(+)$*-точки и* $(-)$*-точки.*

Такую систему точек я буду называть *чебышевским альтернансом.*

Доказательство. Разобьём $[a, b]$ точками

$$u_0 = a < u_1 < u_2 < \ldots < u_s = b$$

на столь мелкие сегменты $[u_k, u_{k+1}]$, чтобы в каждом из них колебание непрерывной функции $P(x) - f(x)$ оказалось меньшим, чем $\frac{1}{2} E_n$.

Если сегмент $[u_k, u_{k+1}]$ содержит хотя бы одну (e)-точку, то мы будем называть его (e)-сегментом. Легко видеть, что на (e)-сегменте разность $P(x) - f(x)$ не может обратиться в нуль и потому необходимо сохраняет знак. Поэтому мы можем разбить множество (e)-сегментов на две категории, назвав $(+)$-сегментами те из них, на которых разность $P(x) - f(x)$ положительна, и $(-)$-сегментами те, на которых она отрицательна.

Сделав это, перенумеруем все (e)-сегменты в том порядке, в котором они следуют друг за другом слева направо,

$$d_1, d_2, d_3, \ldots, d_N. \tag{34}$$

Для определённости будем считать, что d_1 есть $(+)$-сегмент.

Последовательность (34) мы разобьём на группы по следующей схеме:

$$\left.\begin{array}{ll} d_1, d_2, \ldots, d_{k_1} & [(+)\text{-сегменты}], \\ d_{k_1+1}, d_{k_1+2}, \ldots, d_{k_2} & [(-)\text{-сегменты}], \\ \ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{k_{m-1}+1}, d_{k_{m-1}+2}, \ldots, d_{k_m} & [(-1)^{m-1}\text{-сегменты}]. \end{array}\right\} \qquad (35)$$

Каждая из этих групп содержит хоть один сегмент, причём в каждом сегменте 1-й группы имеется хоть по одной $(+)$-точке, в каждом сегменте 2-й группы — хоть по одной $(-)$-точке и т. д. Поэтому для доказательства теоремы достаточно показать, что

$$m \geqslant n+2 \qquad (36)$$

(предыдущая теорема гарантирует лишь, что $m \geqslant 2$). Допустим, что

$$m < n+2. \qquad (37)$$

Ввиду того что на сегментах d_{k_1} и d_{k_1+1} разность $P(x)-f(x)$ имеет разные знаки, правый конец сегмента d_{k_1} не может совпасть с левым концом d_{k_1+1}. Поэтому можно выбрать точку z_1, лежащую правее d_{k_1} и левее d_{k_1+1}, что символически мы запишем так:

$$d_{k_1} < z_1 < d_{k_1+1}.$$

Совершенно аналогично можно выбрать такие точки $z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}$, для которых

$$d_{k_2} < z_2 < d_{k_2+1},$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$d_{k_{m-1}} < z_{m-1} < d_{k_{m-1}+1}.$$

Проделав это, положим

$$\rho(x) = (z_1 - x)(z_2 - x)\ldots(z_{m-1} - x).$$

В силу нашего допущения (37) окажется $m-1 \leqslant n$, так что полином $\rho(x)$ входит в H_n. Кроме точек z_i полином $\rho(x)$ других корней не имеет, и потому он *не обращается в нуль* на сегментах d_k и, тем более, сохраняет знак на этих сегментах. Нетрудно видеть, что в каждом из сегментов первой группы (35) полином $\rho(x)$ *положителен* (потому что положительны все множители $z_i - x$). На сегментах 2-й группы (35) полином $\rho(x)$ *отрицателен* (ибо в его состав войдёт *один* отрицательный множитель $z_1 - x$). Продолжая рассуждать подобным же образом, мы убеждаемся, что *на всех* (e)-*сегментах* (34) *полином* $\rho(x)$ *имеет тот же знак, что и разность* $P(x) - f(x)$.

Если $[u_i, u_{i+1}]$ — какой-нибудь сегмент первоначального дробления, который не является (e)-сегментом, то величина

$$\max_{u_i \leqslant x \leqslant u_{i+1}} |P(x) - f(x)| \tag{38}$$

строго меньше, чем E_n; поэтому, обозначив через E^* *наибольшее* из чисел (38), мы получим, что

$$E^* < E_n.$$

Положим

$$R = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\rho(x)|$$

и выберем столь малое положительное число λ, чтобы оказалось *)

$$\lambda R < E_n - E^*, \quad \lambda R < \frac{1}{2} E_n. \tag{39}$$

Если положить

$$Q(x) = P(x) - \lambda\rho(x),$$

то можно показать, что полином $Q(x)$ (очевидно входящий в H_n) отклоняется от $f(x)$ меньше, чем на E_n.

---

*) Легко видеть, что $E_n - E^* < \frac{1}{2} E_n$, так что второе из неравенств (39) следует из первого. В самом деле, если u_p есть правый конец сегмента d_{k_1}, то $P(u_p) - f(u_p) > \frac{1}{2} E_n$ (это следует из того, что d_{k_1} содержит (+)-точку, а колебание $P(x) - f(x)$ на d_{k_1} меньше, чем $\frac{1}{2} E_n$). С другой стороны, точка u_p служит левым концом сегмента $[u_p, u_{p+1}]$, прилегающего к d_{k_1} справа и уже не являющегося (e)-сегментом, так что $|P(u_p) - f(u_p)| \leqslant E^*$. Отсюда видно, что $E^* > \frac{1}{2} E_n$.

Так как это невозможно, то мы и получим требуемое противоречие. Итак, всё приведено к доказательству неравенства

$$\Delta(Q) < E_n. \tag{40}$$

Пусть $[u_i, u_{i+1}]$ есть сегмент первоначального дробления, который не является (e)-сегментом и $x \in [u_i, u_{i+1}]$. Тогда

$$|Q(x) - f(x)| \leqslant |P(x) - f(x)| + \lambda|\rho(x)| \leqslant E^* + \lambda R < E_n.$$

Допустим теперь, что x входит в какой-нибудь из (e)-сегментов d_k. Тогда числа

$$P(x) - f(x) \quad \text{и} \quad \lambda\rho(x)$$

имеют один и тот же знак. При этом

$$|P(x) - f(x)| > \lambda|\rho(x)|,$$

ибо

$$|P(x) - f(x)| > \frac{1}{2}E_n, \quad \lambda|\rho(x)| < \frac{1}{2}E_n.$$

Отсюда

$$|Q(x) - f(x)| = |P(x) - f(x) - \lambda\rho(x)| = \\ = |P(x) - f(x)| - \lambda|\rho(x)|$$

и, стало быть,

$$|Q(x) - f(x)| \leqslant E_n - \lambda|\rho(x)| < E_n,$$

так как на (e)-сегментах $\rho(x) \neq 0$.

Итак, при любом x из $[a, b]$ оказывается

$$|Q(x) - f(x)| < E_n,$$

откуда следует (40), что и доказывает теорему.

Заметим, что построить полином $Q(x)$ можно независимо от допущения (37), и для него неравенство (40) будет справедливо, но при $m \geqslant n+2$ мы не получаем никакого противоречия, потому что при таком m полином $Q(x)$ не войдёт в H_n.

Несмотря на сравнительно сложный характер доказательства теоремы, в существе его лежат всё же довольно простые соображения, сходные с приведёнными выше по поводу теоремы 1. П. Л. Чебышев хочет показать, что при отсутствии $(n+2)$-членного альтернанса отклонение $P(x)$ от $f(x)$ можно уменьшить, вычитая из $P(x)$ надлежащим образом подобранный полином $\rho(x)$. Так как для этого нужно уменьшить абсолютное значение разности $P(x)-f(x)$ на всех (e)-точках, то в этих точках знак $\rho(x)$ должен совпадать со знаком указанной разности. Если бы эта разность меняла знак меньше чем $n+2$ раза, то поставленному требованию *можно* было бы удовлетворить полиномом $\rho(x)$, степень которого не превышает n. Возникающая при этом опасность, что полином $P(x)-f(x)$ отклонится от $f(x)$ больше, чем на E_n, в других точках, легко устраняется умножением $\rho(x)$ на достаточно малый положительный множитель λ. Таким образом и получается, что при отсутствии альтернанса полином $P(x)$ не может быть полиномом наилучшего приближения. Я рекомендую читателю ещё раз продумать доказательство теоремы в свете этого наводящего рассуждения.

Из доказанной теоремы непосредственно следует единственность полинома наилучшего приближения.

Теорема 3. *В H_n существует только один полином наименьшего отклонения.*

Доказательство. Допустим, что в H_n имеются два полинома наименьшего отклонения $P(x)$ и $Q(x)$. Тогда при всех x из $[a, b]$

$$-E_n \leqslant P(x)-f(x) \leqslant E_n,$$

$$-E_n \leqslant Q(x)-f(x) \leqslant E_n.$$

Складывая эти неравенства и деля результат на два, находим

$$-E_n \leqslant \frac{P(x)+Q(x)}{2}-f(x) \leqslant E_n.$$

Это показывает, что полусумма

$$R(x)=\frac{P(x)+Q(x)}{2}$$

также является полиномом наименьшего отклонения от $f(x)$. Но тогда для $R(x)$ существует чебышевский альтернанс

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}. \tag{41}$$

Пусть x_k есть одна из $(+)$-точек $R(x)$. Это значит, что

$$\frac{P(x_k)-f(x_k)}{2}+\frac{Q(x_k)-f(x_k)}{2}=E_n.$$

Но $Q(x_k)-f(x_k)\leqslant E_n$, значит,

$$\frac{P(x_k)-f(x_k)}{2}+\frac{E_n}{2}\geqslant E_n$$

и

$$P(x_k)-f(x_k)\geqslant E_n. \tag{42}$$

Так как разность $P(x)-f(x)$ не превосходит E_n, то в (42) стоит знак равенства. Иначе говоря, x_k является $(+)$-точкой и для $P(x)$. По тем же соображениям она служит $(+)$-точкой и для $Q(x)$. Таким образом

$$P(x_k)-f(x_k)=E_n=Q(x_k)-f(x_k)$$

и, стало быть, $P(x_k)=Q(x_k)$. Аналогично устанавливается совпадение $P(x)$ и $Q(x)$ и на $(-)$-точках альтернанса (41). Мы видим, что полиномы $P(x)$ и $Q(x)$, степени не выше n каждый, должны совпадать на $(n+2)$-х точках (41). Это возможно лишь при их тождественности.

Нетрудно показать, что существование чебышевского альтернанса *характерно* для полинома наилучшего приближения.

Теорема 4 (П. Л. Чебышев). *Пусть* $f(x)\in C([a,b])$ *и* $Q(x)$*—какой-нибудь полином из* H_n. *Положим*

$$A=\max|Q(x)-f(x)|.$$

Если на сегменте $[a, b]$ *существуют такие точки*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{n+2}, \tag{43}$$

что

$$|Q(x_i)-f(x_i)|=A \qquad (i=1, 2, \ldots, n+2) \tag{44}$$

и знак разности $Q(x_i)-f(x_i)$ меняется при переходе от каждой точки x_i к следующей x_{i+1}, то $A=E_n$ и $Q(x)$ есть полином наилучшего приближения к $f(x)$.

Доказательство. Так как $A=\Delta(Q)$, то $A\geqslant E_n$. Покажем, что $A=E_n$. Если это не так, то

$$A>E_n. \tag{45}$$

Обозначим через $P(x)$ полином наилучшего приближения к $f(x)$. Тогда

$$Q(x_i)-P(x_i)=\{Q(x_i)-f(x_i)\}-\{P(x_i)-f(x_i)\}.$$

Но

$$|P(x_i)-f(x_i)|\leqslant E_n<A,$$

откуда в связи с (44) ясно, что знак разности $Q(x_i)-P(x)$ совпадает со знаком разности $Q(x_i)-f(x_i)$ и, стало быть, меняется при переходе от каждой точки x_i к следующей x_{i+1}. Поэтому в каждом из интервалов (x_1, x_2), (x_2, x_3), ..., (x_{n+1}, x_{n+2}) у разности $Q(x)-P(x)$ имеется по корню. Имея, таким образом, $n+1$ корень, эта разность (будучи полиномом степени $\leqslant n$) должна быть тождественной нулю, что, однако, невозможно, так как

$$\Delta(Q)=A>E_n=\Delta(P)$$

и полиномы $Q(x)$ и $P(x)$ не тождественны. Полученное противоречие убеждает нас в том, что $A=E_n$. А в таком случае получается, что

$$\Delta(Q)=E_n$$

и $Q(x)$ есть полином наименьшего отклонения.

В том же порядке идей можно установить ещё одну теорему, дающую для E_n оценку снизу.

Теорема 5. *Пусть для функции $f(x)\in C([a,b])$ удалось найти такой полином $Q(x)\in H_n$ и такие точки*

$$x_1<x_2<\ldots<x_{n+2},$$

что разность $Q(x_i)-f(x_i)$ меняет знак при каждом переходе от x_i к x_{i+1}. Если A означает наименьшее из чисел

$$|Q(x_i)-f(x_i)| \qquad (i=1, 2, \ldots, n+2),$$

то

$$A\leqslant E_n.$$

В самом деле, если бы оказалось, что $A > E_n$, то, буквально повторяя вышеприведённые рассуждения, мы снова пришли бы к противоречию.

§ 3. Примеры. Полиномы Чебышева.

Теоремы Бореля и Чебышева устанавливают существование и единственность полинома наименьшего отклонения для любой непрерывной функции, но они не дают никакого способа для фактического нахождения этого полинома. Эта последняя задача представляет значительные трудности и до настоящего времени в общем случае не решена. Мы остановимся на ней для простейших случаев $n=0$ и $n=1$.

Для $n=0$ решение совсем просто. Именно, если m и M суть, соответственно, наименьшее и наибольшее значения функции $f(x)$, заданной и непрерывной на сегменте $[a, b]$, то *из всех постоянных величин наименьшее отклонение от $f(x)$ имеет величина*

$$P=\frac{m+M}{2}.$$

Это вполне ясно геометрически, ибо $\Delta(P)=\frac{M-m}{2}$, а сдвинув прямую $y=P$ вверх или вниз, мы очевидным образом увеличим это отклонение.

Формальное доказательство также не представляет никаких затруднений. Действительно, если x_1 и x_2 такие точки, что

$$f(x_1)=M, \quad f(x_2)=m,$$

то

$$P-f(x_1)=-\frac{M-m}{2}, \quad P-f(x_2)=\frac{M-m}{2},$$

а так как $\Delta(P)=\frac{M-m}{2}$, то точки x_1 и x_2 и представляют чебышевский альтернанс, наличие которого характеризует полином наилучшего приближения.

Для $n=1$ задача также довольно проста, если допустить, что $f(x)$ дважды дифференцируема и $f''(x)$

не меняет знака, например,

$$f''(x) > 0. \tag{46}$$

В самом деле, пусть

$$P(x) = Ax + B$$

есть полином наилучшего приближения. Из трёх точек чебышевского альтернанса

$$x_1 < x_2 < x_3$$

средняя x_2 обязательно лежит *внутри* $[a, b]$, т. е. является точкой экстремума *) разности $f(x) - P(x)$. Поэтому

$$f'(x_2) - P'(x_2) = 0,$$

откуда

$$A = f'(x_2).$$

В силу (46), производная $f'(x)$ есть строго возрастающая функция, и потому значение A она может принять только один раз. Это показывает, что внутри $[a, b]$ других точек экстремума разности $f(x) - P(x)$ не имеется и, стало быть, остальные точки альтернанса x_1 и x_3 попадают на концы сегмента $[a, b]$

$$x_1 = a, \quad x_3 = b.$$

Для простоты точку x_2 будем обозначать через c. Тогда приведённые соображения показывают, что

$$f(a) - P(a) = f(b) - P(b) = -\{f(c) - P(c)\},$$

или подробнее

$$f(a) - Aa - B = f(b) - Ab - B = Ac + B - f(c).$$

Первое из этих равенств даёт

$$A = \frac{f(b) - f(a)}{b - a}, \tag{47}$$

*) Из условия (46) ясно, что это *минимум* разности $f(x) - P(x)$, т. е. x_2 есть $(+)$-точка $P(x)$.

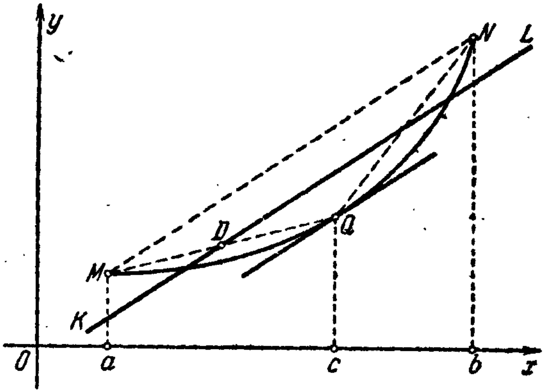
а тогда легко найти и B:

$$B = \frac{f(a)+f(c)}{2} - \frac{f(b)-f(a)}{b-a}\,\frac{a+c}{2}.$$

Эти равенства и решают задачу, так как точка c находится из уравнения

$$f'(c) = A = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}. \tag{48}$$

Полученное решение имеет очень простой геометрический смысл. Именно, равенство (47) показывает,



Черт. 1.

что прямая $y = P(x)$ параллельна хорде MN (черт. 1), соединяющей точки $M[a, f(a)]$ и $N[b, f(b)]$. Далее, записав уравнение этой прямой в форме

$$y - \frac{f(a)+f(c)}{2} = A\left(x - \frac{a+c}{2}\right),$$

мы видим, что она проходит через середину D хорды MQ, соединяющей точку M с точкой $Q[c, f(c)]$.

Таким образом, мы приходим к следующему приёму: чтобы построить для функции $f(x)$ линейный полином наилучшего приближения, поступаем так:

1) строим хорду MN;

2) на дуге $\smile{MN}$ находим точку Q, в которой касательная параллельна хорде MN;

3) соединяем Q с M и N и проводим среднюю линию KL треугольника MQN.

Прямая KL и служит графиком искомого полинома.

Рассмотрим, например, линейный полином, наименее отклоняющийся от функции $y=\sqrt{x}$ на сегменте $[0,1]$.

Здесь угловой коэффициент хорды MN равен единице. Уравнение (48) принимает вид

$$\frac{1}{2\sqrt{c}}=1,$$

откуда $c=\frac{1}{4}$ и точки Q и D, соответственно, суть $Q\left(\frac{1}{4},\frac{1}{2}\right)$ и $D\left(\frac{1}{8},\frac{1}{4}\right)$. Поэтому уравнение прямой KL будет

$$y-\frac{1}{4}=x-\frac{1}{8},$$

и искомый полином есть

$$x+\frac{1}{8}.$$

Рассмотрим теперь такой вопрос: *найти в* H_{n-1} *полином* $P(x)$, *который наименее отклоняется от функции* $f(x)=x^n$ *на сегменте* $[-1,+1]$.

Если искомый полином есть

$$P(x)=ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots+r$$

и мы положим*)

$$\tilde{R}(x)=x^n-(ax^{n-1}+bx^{n-2}+\ldots+r), \tag{49}$$

то вопрос сводится к подбору таких коэффициентов $a, b, \ldots, r$, чтобы величина

$$M=\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\tilde{R}(x)|$$

имела наименьшее возможное значение. Так как в форме (49) можно записать *всякий* полином, старший коэф-

*) Символом $\tilde{R}(x)$ (или $\tilde{P}(x)$ и т. п.) мы будем отмечать (следуя В. Л. Гончарову) тот факт, что старший коэффициент полинома $\tilde{R}(x)$ равен единице.

фициент которого равен единице, а величина M есть не что иное, как отклонение этого полинома от нуля, то мы видим, что поставленная задача вполне равносильна такой задаче: *из всех полиномов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, найти тот, который имеет наименьшее отклонение от нуля на сегменте* $[-1, +1]$.

Для решения этих весьма важных задач нам понадобятся некоторые вспомогательные предложения.

Лемма. *Справедливо тождество*

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos^k\theta$$

$$(n = 1, 2, 3, \ldots),$$

где $\lambda_0^{(n)}, \lambda_1^{(n)}, \ldots, \lambda_{n-1}^{(n)}$ — *некоторые постоянные числа.*

Доказательство. Лемма тривиальна для $n = 1$. Допустим, что она верна до какого-нибудь n (включительно). Так как

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha-\beta}{2}\cos\frac{\alpha+\beta}{2},$$

то

$$\cos(n+1)\theta + \cos(n-1)\theta = 2\cos\theta\cos n\theta,$$

откуда

$$\cos(n+1)\theta =$$
$$= 2\cos\theta\left\{2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1}\lambda_k^{(n)}\cos^k\theta\right\} - \sum_{k=0}^{n-1}\mu_k\cos^k\theta,$$

и, стало быть,

$$\cos(n+1)\theta = 2^n\cos^{n+1}\theta + \sum_{k=0}^{n}\nu_k\cos^k\theta,$$

что и доказывает лемму.

Полагая, в частности, для $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$\theta = \arccos x,$$

получим *)

*) Напомним, что символом $\arccos x$ обозначается тот (единственный) угол θ, косинус которого равен x и который удовлетворяет неравенству $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$.

Следствие. *При* $-1 \leqslant x \leqslant 1$ *справедливо тождество*

$$\cos(n \arccos x) = 2^{n-1} x^n + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} x^k \qquad (n \geqslant 1). \tag{50}$$

Определение. Полином

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x) \tag{51}$$

называется *) *полиномом Чебышева.*

Равенство (51) определяет этот полином только для $-1 \leqslant x \leqslant 1$, однако, как и всякий полином, $T_n(x)$ определён для всех вещественных (и даже комплексных) x; правая часть тождества (50) и даёт его представление для x, не лежащих на $[-1, +1]$. Отметим, что

$$T_0(x) = 1.$$

Вычисление значения $T_n(x)$ для $x \in [-1, +1]$ удобно производить в два шага: 1) найти в $[0, \pi]$ такой угол θ, что

$$\cos\theta = x,$$

и 2) вычислить

$$T_n(x) = \cos n\theta.$$

Полиномы Чебышева и дают решение поставленных выше задач. Именно, справедлива

Теорема. *Из всех полиномов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, наименее отклоняется от нуля на сегменте* $[-1, +1]$ *полином*

$$\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

Доказательство. Мы уже установили, что для нахождения требуемого полинома

$$\tilde{R}(x) = x^n - (ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + r)$$

нужно найти полином

$$P(x) = ax^{n-1} + bx^{n-2} + \ldots + r,$$

*) Такие полиномы введены П. Л. Чебышевым [2] в 1857 году.

дающий наилучшее приближение функции $f(x)=x^n$ на сегменте $[-1,+1]$. Чтобы полином $P(x)$ удовлетворял этому требованию, достаточно существование $(n+1)$-членного *) чебышевского альтернанса, т. е. такой последовательности точек

$$x_1<x_2<\ldots<x_{n+1} \qquad (-1\leqslant x_k\leqslant 1),$$

что на каждой из них полином $\tilde{R}(x)$ достигает наибольшего своего абсолютного значения, меняя знак при каждом переходе от x_k к x_{k+1}.

Мы и проверим, что полином $\tilde{T}_n(x)$ обладает таким альтернансом. Действительно, если

$$\theta_0=0,\ \theta_1=\frac{\pi}{n},\ \ldots,\theta_k=\frac{k\pi}{n},\ \ldots,\quad \theta_n=\pi,$$

то

$$\cos n\theta_k=(-1)^k,$$

поэтому для

$$x_k=\cos\theta_k \qquad (k=0,1,\ldots,n) \tag{52}$$

будет

$$\tilde{T}_n(x_k)=\frac{(-1)^k}{2^{n-1}}.$$

Так как, с другой стороны,

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant 1}|\tilde{T}_n(x)|=\frac{1}{2^{n-1}}, \tag{53}$$

то точки (52) и образуют требуемый альтернанс.

Замечание. Сам П. Л. Чебышев пришёл к своим полиномам примерно так: пусть $\tilde{T}(x)$ есть искомый полином, имеющий старший коэффициент, равный единице, и наименее уклоняющийся от нуля на сегменте $[-1,+1]$. Его отклонение, т. е. $\max|\tilde{T}(x)|$ при $-1\leqslant x\leqslant+1$, обозначим через M. Как уже сказано, полином $\tilde{T}(x)$ должен достигать значений $\pm M$ в $n+1$

*) Напомним, что здесь полином наименьшего отклонения (от x^n) ищется не в H_n, а в H_{n-1}, в связи с чем и число точек альтернанса понижается на единицу.

точках сегмента $[-1, +1]$. В тех из них, которые лежат *внутри* $[-1, +1]$, обязательно будет $\tilde{T}'(x)=0$. Но $\tilde{T}'(x)$ есть полином степени $n-1$. Значит, $\tilde{T}'(x)$ не может иметь больше $n-1$ корней. Отсюда вытекает, что $n-1$ точек отклонения лежат внутри сегмента $[-1, +1]$, а две — на его концах. Стало быть, полиномы

$$M^2-\tilde{T}^2(x) \quad \text{и} \quad (1-x^2)\,\tilde{T}'^2(x)$$

имеют одни и те же корни, причём корни, лежащие внутри $(-1, +1)$, в обоих случаях суть двойные. Отсюда следует, что рассматриваемые полиномы могут отличаться лишь постоянным множителем. Сравнение старших коэффициентов показывает, что

$$M^2-\tilde{T}^2(x)=\frac{(1-x^2)\,\tilde{T}'^2(x)}{n^2}. \tag{54}$$

Это соотношение представляет и самостоятельный интерес. Из (54) следует, что

$$\sqrt{M^2-\tilde{T}^2(x)}=\pm\frac{1}{n}\sqrt{1-x^2}\,\tilde{T}'(x).$$

Производная $\tilde{T}'(x)$ меняет знак при переходе через каждую точку альтернанса. Пусть в интервале (α, β) она положительна; тогда в этом интервале будет

$$\frac{\tilde{T}'(x)}{\sqrt{M^2-\tilde{T}^2(x)}}=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Интегрируя это соотношение, находим

$$\arccos\frac{\tilde{T}(x)}{M}=n\arccos x+C.$$

Значит,

$$\tilde{T}(x)=M\cos\,[n\arccos x+C],$$

или

$$\tilde{T}(x)=M\,[\cos C\cos(n\arccos x)-\sin C\sin(n\arccos x)].$$

Ввиду того что $\tilde{T}(x)$ есть полином, должно быть $\sin C=0$, т. е. $\cos C=\pm 1$. Но старший коэффициент

$\cos(n \arccos x)$ есть 2^{n-1}. Значит, $\cos C = +1$, а $M = 2^{-n+1}$, откуда

$$\tilde{T}(x) = \frac{1}{2^{n-1}} \cos(n \arccos x).$$

Это равенство установлено лишь в интервале (α, β), но так как обе части его суть полиномы, то оно верно всегда.

Возвращаясь к доказанной теореме и сопоставляя её с равенством (53), получим

Следствие. *Для всякого полинома $\tilde{P}_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, справедливо неравенство*

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |\tilde{P}_n(x)| \geqslant \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Если старший коэффициент полинома $P_n(x)$ степени n будет не единица, а A_0, то

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |P_n(x)| \geqslant \frac{A_0}{2^{n-1}}.$$

Заметив это, рассмотрим полином

$$P_n(x) = c_0 x^n + c_1 x^{n-1} + \ldots + c_n$$

степени n. Полагая

$$x = \frac{a+b}{2} + \frac{b-a}{2} y,$$

мы видим, что $P_n(x)$ можно рассматривать как полином аргумента y со старшим коэффициентом

$$c_0 \left(\frac{b-a}{2}\right)^n.$$

Стало быть,

$$\max_{a \leqslant x \leqslant b} |P_n(x)| = \max_{-1 \leqslant y \leqslant 1} |P_n(x)| \geqslant c_0 \frac{(b-a)^n}{2^{2n-1}}.$$

§ 4. Дальнейшие свойства полиномов Чебышева.

Полиномы Чебышева

$$T_n(x) = \cos(n \arccos x),$$

помимо того, что являются полиномами, наименее уклоняющимися от нуля, обладают и многими другими замечательными свойствами. На некоторых из них мы остановимся.

Прежде всего, из формулы

$$\cos n\theta = 2\cos\theta\cos(n-1)\theta - \cos(n-2)\theta \qquad (n = 2, 3\ldots)$$

с помощью подстановки $\theta = \arccos x$ получается *рекуррентное соотношение*

$$T_n(x) = 2x\,T_{n-1}(x) - T_{n-2}(x) \qquad (n = 2, 3, \ldots), \quad (55)$$

связывающее три последовательных полинома Чебышева.

Зная, что

$$T_0(x) = 1; \quad T_1(x) = x,$$

мы из равенства (55) последовательно находим:

$$\begin{aligned}
T_2(x) &= 2x^2 - 1,\\
T_3(x) &= 4x^3 - 3x,\\
T_4(x) &= 8x^4 - 8x^2 + 1,\\
T_5(x) &= 16x^5 - 20x^3 + 5x,\\
T_6(x) &= 32x^6 - 48x^4 + 18x^2 - 1.
\end{aligned}$$

Этот ряд можно продолжать неограниченно.

Другой способ получения полиномов $T_n(x)$ основан на применении так называемой «производящей функции». Для его изложения нам понадобится следующая формула

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n \cos n\theta = \frac{1 - t\cos\theta}{1 - 2t\cos\theta + t^2} \qquad (-1 < t < 1), \quad (56)$$

левая часть которой, очевидно, является абсолютно сходящимся рядом.

Чтобы доказать эту формулу заметим, что её левая часть есть вещественная компонента суммы геометрической прогрессии

$$\sum_{n=0}^{\infty} t^n e^{n\theta i} = \frac{1}{1 - te^{\theta i}}.$$

Но

$$\frac{1}{1-te^{\theta i}}=\frac{1}{(1-t\cos\theta-it\sin\theta)}=\frac{1-t\cos\theta+it\sin\theta}{(1-t\cos\theta)^2+t^2\sin^2\theta},$$

так что вещественная компонента этой дроби как раз и представляется правой частью формулы (56).

Если мы положим в (56) $\theta=\arccos x$, то получим

$$\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}t^n T_n(x)\qquad(-1<t<1),\tag{57}$$

так что последовательные полиномы Чебышева оказываются коэффициентами при различных степенях t в разложении функции

$$T(t,x)=\frac{1-tx}{1-2tx+t^2}.$$

Эта функция и называется *производящей* для полиномов Чебышева. Ввиду того что разложение $T(t,x)$ по степеням t можно получить формальным делением $1-tx$ на $1-2tx+t^2$, то мы и приходим к новому способу фактического вычисления полиномов $T_n(x)$:

$$\begin{array}{l|l}
1-tx & 1-2tx+t^2\\
\underline{1-2tx+t^2} & \overline{1+tx+t^2(2x^2-1)+t^3(4x^3-3x)+\cdots}\\
\quad tx-t^2 & \\
\quad \underline{tx-2t^2x^2+t^3x} & \\
\qquad t^2(2x^2-1)-t^3x & \\
\qquad \underline{t^2(2x^2-1)-2t^3(2x^3-x)+t^4(2x^2-1)} & \\
\qquad\qquad t^3(4x^3-3x)-t^4(2x^2-1) & \\
\qquad\qquad \cdots\cdots\cdots\cdots &
\end{array}$$

Коэффициенты частного

$$1+tx+t^2(2x^2-1)+t^3(4x^3-3x)+\cdots$$

действительно совпадают с $T_0(x)$, $T_1(x)$, $T_2(x)$, $T_3(x)$, ...

Нетрудно написать и явную формулу для полинома $T_n(x)$.

Для этой цели мы докажем сначала теорему, имеющую и самостоятельный интерес.

Теорема 1. *Полином $y=\mathcal{T}_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(1-x^2)y''-xy'+n^2y=0. \tag{58}$$

В самом деле, если

$$y=\cos(n\arccos x),$$

то

$$y'=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x).$$

и

$$\sqrt{1-x^2}\,y'=n\sin(n\arccos x).$$

Дифференцируя это тождество, находим

$$\sqrt{1-x^2}\,y''-\frac{xy'}{\sqrt{1-x^2}}=-\frac{n^2}{\sqrt{1-x^2}}\cos(n\arccos x),$$

откуда и следует*) (58). Ещё проще получить (58), дифференцируя соотношение

$$M^2-y^2=\frac{(1-x^2)\,y'^2}{n^2},$$

которому удовлетворяет полином Чебышева (см. (54)).

Возвращаясь к интересующей нас задаче нахождения явной формулы для $\mathcal{T}_n(x)$, положим

$$\mathcal{T}_n(x)=\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}$$

и подставим это выражение в (58). Это даёт тождество

$$(1-x^2)\sum_{k=0}^{n}(n-k)(n-k-1)\,a_kx^{n-k-2}-$$
$$-x\sum_{k=0}^{n}(n-k)\,a_kx^{n-k-1}+n^2\sum_{k=0}^{n}a_kx^{n-k}=0,$$

*) Наше рассуждение показывает, собственно, лишь то, что $T_n(x)$ есть решение уравнения (58) при $-1\leqslant x\leqslant 1$. Но так как $y=T_n(x)$ есть полином, то и $(1-x^2)y''-xy'+n^2y$ есть полином, так что обращение его в нуль при $-1\leqslant x\leqslant 1$ влечёт справедливость теоремы в полном объёме.

которое можно представить и так:

$$\sum_{k=0}^{n}(n-k)(n-k-1)\,a_k x^{n-k-2}+$$
$$+\sum_{k=0}^{n}[n^2-(n-k)^2]\,a_k x^{n-k}=0. \qquad (59)$$

Здесь в первой сумме исчезают слагаемые, отвечающие значениям $k=n$ и $k=n-1$. Поэтому, вводя новый индекс суммирования $i=k+2$ и обозначая его снова через k, представим эту сумму так:

$$\sum_{k=2}^{n}(n-k+2)(n-k+1)\,a_{k-2}x^{n-k}.$$

Во второй сумме исчезает слагаемое, отвечающее значению $k=0$, и тождество (59) принимает вид

$$[n^2-(n-1)^2]\,a_1x^{n-1}+$$
$$+\sum_{k=2}^{n}\{(n-k+2)(n-k+1)\,a_{k-2}+[n^2-(n-k)^2]a_k\}\,x^{n-k}=0,$$

откуда вытекает, что $a_1=0$ и что

$$a_k=-\frac{(n-k+2)(n-k+1)}{k(2n-k)}\,a_{k-2}.$$

Последнее соотношение сразу показывает, что все коэффициенты с нечётными значками равны нулю. Заменяя k на $2k$, получим

$$a_{2k}=-\frac{(n-2k+2)(n-2k+1)}{4k(n-k)}\,a_{2k-2}.$$

Но $a_0=2^{n-1}$. Значит,

$$a_2=-\frac{n(n-1)}{1\cdot(n-1)}\,2^{n-3},\quad a_4=\frac{n(n-1)(n-2)(n-3)}{2!\,(n-1)(n-2)}\,2^{n-5}$$

и вообще

$$a_{2k}=(-1)^k\,\frac{n(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-2k+1)}{k!\,(n-1)\cdot\ldots\cdot(n-k)}\,2^{n-2k-1},$$

что легко подтвердить индукцией. Замечая, далее, что

$$\frac{n(n-1)\cdots(n-2k+1)}{k!\,(n-1)\cdots(n-k)} = \\ = \frac{n}{n-k}\,\frac{(n-k)(n-k-1)\cdots(n-2k+1)}{k!} = \frac{n}{n-k}\,C_{n-k}^{k},$$

получаем окончательно

$$T_n(x) = \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{n}{n-k}\,C_{n-k}^{k}\,2^{n-2k-1}\,x^{n-2k},$$

где через $\left[\frac{n}{2}\right]$ обозначается целая часть $\frac{n}{2}$.

Можно написать ещё одно явное выражение для полинома Чебышева. Именно, из формулы Моавра

$$\cos n\theta + i\sin n\theta = (\cos\theta + i\sin\theta)^n$$

вытекает, что

$$\cos n\theta - i\sin n\theta = (\cos\theta - i\sin\theta)^n,$$

откуда

$$\cos n\theta = \frac{1}{2}\left[(\cos\theta + i\sin\theta)^n + (\cos\theta - i\sin\theta)^n\right].$$

Если здесь положить $\theta = \arccos x$ (считая $|x| < 1$), то мы получим, что

$$T_n(x) = \frac{1}{2}\left[(x + i\sqrt{1-x^2})^n + (x - i\sqrt{1-x^2})^n\right].$$

Это равенство установлено нами лишь при $|x| < 1$, но легко видеть, что оно верно для всех вещественных и комплексных x, потому что его правая часть есть целый полином. В этом мы убеждаемся, переписав её в форме

$$\frac{1}{2}\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,x^{n-k}\,i^k\,(\sqrt{1-x^2})^k\,(1+(-1)^k)$$

и замечая, что здесь отличны от нуля только те слагаемые, которые отвечают чётным значениям k.

Для тех вещественных x, у которых $|x| > 1$, последнее выражение $T_n(x)$ полезно несколько преобразовать. Именно, если k чётное, то

$$i^k (\sqrt{1-x^2})^k = (\sqrt{x^2-1})^k.$$

Значит,

$$T_n(x) = \frac{1}{2} \sum_{k=0}^{n} C_n^k x^{n-k} (\sqrt{x^2-1})^k (1 + (-1)^k),$$

откуда

$$T_n(x) = \frac{1}{2} [(x + \sqrt{x^2-1})^n + (x - \sqrt{x^2-1})^n].$$

Это выражение не содержит мнимостей (при $|x| > 1$). Из него, в частности, следует важная оценка для $T_n(x)$:

Теорема 2. *Если x — вещественное число, причём $|x| > 1$, то*

$$|T_n(x)| \leqslant (|x| + \sqrt{x^2-1})^n.$$

Действительно, каждый из двучленов $x + \sqrt{x^2-1}$ и $x - \sqrt{x^2-1}$ имеет модуль, не больший, чем $|x| + \sqrt{x^2-1}$.

Остановимся теперь на изучении корней полиномов $T_n(x)$.

Ввиду того что

$$T_n(x) = \cos n\theta,$$

где $\theta = \arccos x$, ясно, что корнями $T_n(x)$ будут служить такие значения x, для которых соответствующие значения θ удовлетворяют уравнению

$$\cos n\theta = 0.$$

Такими значениями θ (напомним, что $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$) будут, очевидно,

$$\theta_1 = \frac{\pi}{2n}, \quad \theta_2 = \frac{3\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad \theta_k = \frac{(2k-1)\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad \theta_n = \frac{(2n-1)\pi}{2n}.$$

Поэтому числа

$$x_1^{(n)} = \cos\frac{\pi}{2n}, \quad x_2^{(n)} = \cos\frac{3\pi}{2n}, \quad \ldots, \quad x_n^{(n)} = \cos\frac{(2n-1)\pi}{2n}$$

и будут корнями полинома $\mathcal{T}_n(x)$. Так как количество этих чисел равно степени полинома, то ими исчерпываются *все* корни $\mathcal{T}_n(x)$, причём каждое из них является корнем *простым*.

Таким образом нами установлена

Теорема 3. *Корни полинома $\mathcal{T}_n(x)$ даются формулой*

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Все они вещественные, простые и лежат в интервале $(-1, +1)$.

Из приведённой формулы вытекает свойство «перемежаемости» корней соседних полиномов Чебышева:

Теорема 4. *Между двумя соседними корнями $x_k^{(n)}$ и $x_{k+1}^{(n)}$ полинома $\mathcal{T}_n(x)$ обязательно находится один и только один корень предыдущего полинома $\mathcal{T}_{n-1}(x)$.*

В самом деле, k-й корень полинома $\mathcal{T}_{n-1}(x)$ есть

$$x_k^{(n-1)} = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n-2}.$$

Установим, что *)

$$x_k^{(n)} > x_k^{(n-1)} > x_{k+1}^{(n)}, \qquad (60)$$

или, что то же самое, что

$$\frac{2k-1}{2n} < \frac{2k-1}{2n-2} < \frac{2k+1}{2n}.$$

Но первая часть этого двойного неравенства тривиальна, а вторая равносильна неравенству

$$2k < 2n-1,$$

вытекающему из того, что $k<n$. Таким образом неравенство (60) доказано. Так как между n корнями $x_k^{(n)}$ имеется $n-1$ интервалов, каждый из которых содержит по корню полинома $\mathcal{T}_{n-1}(x)$, то ясно, что в этих

*) Так как $\cos\theta$ есть функция *убывающая* (при $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), то корни $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ расположены в порядке убывания.

интервалах находится ровно по одному корню, ибо корней этих тоже $n-1$.

Следствие. *Два соседних полинома $T_n(x)$ и $T_{n-1}(x)$ не имеют общих корней.*

Заметим, что это следствие очень просто вытекает из рекуррентной формулы (55). Действительно, если бы $T_n(x)$ и $T_{n-1}(x)$ имели общий корень x_0, то из (55) вытекало бы, что и

$$T_{n-2}(x_0)=0,$$

т. е. x_0 оказался бы и корнем полинома $T_{n-2}(x)$. Но, повторив это рассуждение, мы убедились бы, что x_0 будет корнем полинома $T_{n-3}(x)$, а тогда он был бы корнем $T_{n-4}(x)$, и т. д. В конце концов x_0 должен был бы оказаться и корнем полинома $T_0(x)\equiv 1$, что явно нелепо.

Рассмотрим вопрос о том, как распределяются корни полинома $T_n(x)$ при весьма больших n. В целях большей наглядности мы дадим этому вопросу механическую интерпретацию. Именно, вообразим себе некоторую материальную массу M, размещённую поровну на корнях $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ полинома $T_n(x)$, так что на каждом из этих корней находится $\frac{M}{n}$ массы. Выясним, какое количество $\overset{b}{\underset{a}{M}}{}_n$ массы при этом окажется на каком-либо сегменте $[a, b]\subset[-1, +1]$. Очевидно,

$$\overset{b}{\underset{a}{M}}{}_n=\frac{M}{n}\tau_n,$$

где τ_n есть число корней $x_k^{(n)}$, лежащих на $[a, b]$. Иными словами, нам нужно найти количество таких чисел k из ряда $1, 2, \ldots, n$, которые удовлетворяют неравенству

$$a\leqslant\cos\frac{(2k-1)\pi}{2n}\leqslant b.$$

Это неравенство равносильно неравенству

$$\alpha\geqslant\frac{(2k-1)\pi}{2n}\geqslant\beta,$$

где

$$\alpha = \arccos a, \quad \beta = \arccos b,$$

а последнее неравенство можно записать в такой форме:

$$\frac{1}{2}\left(1+\frac{2n\beta}{\pi}\right) \leqslant k \leqslant \frac{1}{2}\left(1+\frac{2n\alpha}{\pi}\right).$$

Итак, нам надо решить такую задачу: даны числа P и Q, причём $P < Q$, определить количество натуральных чисел k, удовлетворяющих неравенству

$$P \leqslant k \leqslant Q.$$

Если

$$i \leqslant P \leqslant i+1 < i+2 < \cdots < i+m \leqslant Q < i+m+1,$$

то искомое количество равно m. Легко видеть, что

$$m-1 \leqslant Q-P < m+1,$$

откуда

$$Q-P-1 < m \leqslant Q-P+1$$

и, стало быть,

$$m = Q-P+\mu \qquad (-1 < \mu \leqslant 1).$$

В интересующем нас вопросе

$$P = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2n\beta}{\pi}\right), \quad Q = \frac{1}{2}\left(1+\frac{2n\alpha}{\pi}\right),$$

и потому

$$\tau_n = n\frac{\alpha-\beta}{\pi} + \mu_n \qquad (-1 < \mu_n \leqslant 1).$$

Отсюда

$$\overset{b}{\underset{a}{M}}{}_n = \frac{M}{\pi}(\alpha-\beta) + \frac{M\mu_n}{n} \qquad (-1 < \mu_n \leqslant 1)$$

или же

$$\overset{b}{\underset{a}{M}}{}_n = \frac{M}{\pi}(\arccos a - \arccos b) + \frac{M\mu_n}{n}.$$

Это равенство показывает, что при неограниченном возрастании n распределение нашей массы стремится к некоторому предельному распределению, при котором на сегмент $[a, b]$ попадает масса

$$\overset{b}{\underset{a}{M_\infty}}=\frac{M}{\pi}(\arccos a-\arccos b).$$

Как это обычно делается в механике, постараемся охарактеризовать найденное предельное распределение массы его *плотностью*.

Так как количество массы, находящееся на отрезке $[x, x+\Delta x]$, равно

$$\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M_\infty}}=\frac{M}{\pi}[\arccos x-\arccos(x+\Delta x)],$$

то средняя плотность этого отрезка есть

$$\frac{1}{\Delta x}\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M_\infty}}=\frac{M}{\pi}\frac{\arccos x-\arccos(x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Поэтому истинная плотность в точке x равна

$$p(x)=\frac{M}{\pi}\lim_{\Delta x\to 0}\frac{\arccos x-\arccos(x+\Delta x)}{\Delta x}.$$

Стоящий направо предел только знаком отличается от производной функции $\arccos x$ в точке x. Значит,

$$p(x)=\frac{M}{\pi}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Это и есть плотность предельного распределения корней полиномов Чебышева $\mathscr{T}_n(x)$ на сегменте $[-1, +1]$. Само собой ясно, что существенное значение здесь имеет только множитель $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$, так что, приняв, что исходное количество массы равно π (это связано с выбором единицы измерения массы), получим для $p(x)$ более простое выражение:

$$p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{61}$$

Формула (61) позволяет дать приближённое выражение количества корней полинома $\mathscr{T}_n(x)$, попадающих на малый отрезок $[x, x+\Delta x]$. Именно, если Δx мало, то

$$\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}}{}_{\infty} \approx \frac{\Delta x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Если число n весьма велико, то налево можно вместо $\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}}{}_{\infty}$ написать $\overset{x+\Delta x}{\underset{x}{M}}{}_{n}$, а так как $\overset{b}{\underset{a}{M}}{}_{n} = \frac{\pi}{n}\tau_n$, то для искомого количества корней имеем выражение

$$\frac{n\,\Delta x}{\pi\sqrt{1-x^2}}.$$

Отсюда ясно, что при больших n корни полинома $T_n(x)$ сгущаются у концов сегмента $[-1, +1]$.

Между функцией (61) и полиномами Чебышева имеется тесная связь и совершенно другого характера. Для её формулировки введём следующее

Определение. Две функции $f(x)$ и $g(x)$ называются *взаимно ортогональными по весу* $p(x)$ на сегменте $[a, b]$, если

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx = 0.$$

Теорема 5. *Всякие два полинома Чебышева* $T_n(x)$ *и* $T_m(x)$ *взаимно ортогональны по весу*

$$p(x) = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

на сегменте $[-1, +1]$.

Для доказательства достаточно вычислить интеграл

$$I_{nm} = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)\,T_m(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx.$$

Произведём с этой целью подстановку $x = \cos\theta$. Так как $T_n(\cos\theta) = \cos n\theta$ (мы считаем $0 \leqslant \theta \leqslant \pi$), то

$$I_{nm} = \int_0^{\pi} \cos n\theta \cos m\theta\, d\theta.$$

Отсюда

$$I_{nm}=\frac{1}{2}\int_0^{\pi}[\cos(n-m)\theta+\cos(n+m)\theta]\,d\theta=$$

$$=\frac{1}{2}\left[\frac{\sin(n-m)\theta}{n-m}+\frac{\sin(n+m)\theta}{n+m}\right]_0^{\pi}$$

и, стало быть,

$$I_{nm}=0.$$

Во второй части нашего курса, в связи с общей теорией ортогональных полиномов, мы ещё вернёмся к полиномам Чебышева, а теперь дополним сказанное двумя их экстремальными свойствами.

Теорема 6 (П. Л. Чебышев [3]). *Пусть $P(x)$ есть полином степени не выше n и M есть максимум его модуля на сегменте $[-1, +1]$.*

Если x_0 — вещественное число, причём $|x_0|>1$, то

$$|P(x_0)|\leqslant M\,|T_n(x_0)|.$$

Доказательство. Допустим, что теорема неверна. Тогда*)

$$M<\left|\frac{P(x_0)}{T_n(x_0)}\right|. \tag{62}$$

Введём в рассмотрение полином

$$R(x)=\frac{P(x_0)}{T_n(x_0)}T_n(x)-P(x).$$

В точках $y_i=\cos\frac{i\pi}{n}$ $(i=0, 1, 2, \ldots, n)$ будет

$$T_n(y_i)=\cos i\pi=(-1)^i.$$

Значит, у разности

$$R(y_i)=(-1)^i\frac{P(x_0)}{T_n(x_0)}-P(y_i)$$

модуль уменьшаемого больше модуля вычитаемого (ибо $-1\leqslant y_i\leqslant 1$ и, стало быть, $|P(y_i)|\leqslant M$). Поэтому ука-

*) Отметим, что $T_n(x_0)\neq 0$, ибо все корни $T_n(x)$ лежат в интервале $(-1, +1)$.

занная разность меняет знак при каждом переходе от y_i к y_{i+1}. Отсюда следует, что в каждом из n интервалов

$$(y_0, y_1), \quad (y_1, y_2), \ldots, \quad (y_{n-1}, y_n)$$

находится корень полинома $R(x)$. Но, кроме того, и $R(x_0)=0$. Значит, $R(x)$, будучи полиномом степени n, имеет $n+1$ корень. Это возможно лишь при условии, что $R(x)$ есть тождественный нуль; поэтому

$$P(x) = \frac{P(x_0)}{T_n(x_0)} T_n(x).$$

Полагая здесь $x=1$ и замечая, что $T_n(1)=1$ (ибо $T_n(1)=\cos(n \arccos 1)=\cos 0$), находим, что

$$P(1) = \frac{P(x_0)}{T_n(x_0)},$$

а это противоречит допущению (62).

Сопоставляя теорему 6 с теоремой 2, получаем важное

Следствие. *В обозначениях теоремы* 6

$$|P(x_0)| \leqslant M(|x_0| + \sqrt{x_0^2 - 1})^n. \tag{63}$$

Этот результат мы используем в главе IX.

При закреплении старшего коэффициента полином Чебышева наименее уклоняется от нуля. Оказывается, что и прочие его коэффициенты разделяют со старшим то же свойство. Чтобы установить этот результат, принадлежащий В. А. Маркову, нам понадобится

Лемма. *У функции*

$$f(x) = A_1 x^{\lambda_1} + A_2 x^{\lambda_2} + \ldots + A_{m+1} x^{\lambda_{m+1}},$$

где $\lambda_1 < \lambda_2 < \ldots < \lambda_{m+1}$ *суть любые вещественные числа, не может быть больше, чем* m *положительных корней**).

В самом деле, для $m=1$ лемма очевидна. Пусть она верна для какого-нибудь значения m, а для $m+1$ неверна. Тогда найдётся функция

$$f(x) = A_1 x^{\lambda_1} + A_2 x^{\lambda_2} + \ldots + A_{m+1} x^{\lambda_{m+1}} + A_{m+2} x^{\lambda_{m+2}},$$

*) Мы предполагаем все числа A_i не равными нулю.

число положительных корней которой больше, чем $m+1$. Все эти корни будут также корнями функции

$$\frac{f(x)}{x^{\lambda_1}}=A_1+A_2x^{\lambda_2-\lambda_1}+\ldots+A_{m+1}x^{\lambda_{m+1}-\lambda_1}+A_{m+2}x^{\lambda_{m+2}-\lambda_1}.$$

Но тогда по теореме Ролля производная этой последней функции будет иметь больше m положительных корней, что, однако, противоречит допущению, ибо эта производная имеет вид

$$B_1x^{\mu_1}+B_2x^{\mu_2}+\ldots+B_{m+1}x^{\mu_{m+1}}.$$

Лемма доказана.

Теорема 7 (В. А. Марков). *Если n и $p\leqslant n$ имеют одинаковую чётность, то из всех полиномов степени не выше n, имеющих при x^p коэффициент 1, наименее уклоняется от нуля на сегменте $[-1, +1]$ полином*

$$\frac{T_n(x)}{A_p^{(n)}},\tag{64}$$

где $T_n(x)$ — полином Чебышева, а $A_p^{(n)}$ — коэффициент при x^p в этом полиноме. Если же чётность n и p разная, то этим свойством обладает полином

$$\frac{T_{n-1}(x)}{A_p^{(n-1)}}.\tag{65}$$

Возможны*) следующие четыре случая:

1) p чётное, n чётное,
2) p нечётное, n нечётное,
3) p чётное, n нечётное,
4) p нечётное, n чётное.

Предположим, что в случае 1) нашёлся полином $P(x)\in H_n$, имеющий при x^p коэффициент, равный единице, и уклоняющийся от нуля *меньше*, чем полином (64), т. е. такой, что при всех $x\in[-1, +1]$

$$|P(x)|<\frac{1}{|A_p^{(n)}|}.$$

*) Доказательство мы ведём, следуя С. Н. Бернштейну.

Тогда полином $P(-x)$ обладает теми же свойствами (ибо p чётное), а значит, и

$$\left|\frac{P(x)+P(-x)}{2}\right| < \frac{1}{|A_p^{(n)}|}.$$

Заметив это, рассмотрим разность

$$R(x)=\frac{T_n(x)}{A_p^{(n)}}-\frac{P(x)+P(-x)}{2}.$$

Это — полином степени не выше n, не содержащий x^p.

Нетрудно видеть, что $R(x)$ состоит только из таких слагаемых x^m, показатели m которых суть чётные числа. Таким образом

$$R(x)=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} c_k x^{2k} \qquad (c_{\frac{p}{2}}=0).$$

Положим

$$Q(y)=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}} c_k y^k.$$

Так как $Q(y)$ содержит $\frac{n}{2}$ слагаемых (или ещё меньше, если обращаются в нуль какие-либо коэффициенты c_k, кроме $c_{p/2}$), то у $Q(y)$ число положительных корней не больше, чем $\frac{n}{2}-1$.

Однако, положив

$$y_i=\cos^2\frac{i\pi}{n},$$

мы получим,

$$Q(y_i)=R\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)=$$
$$=\frac{T_n\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)}{A_p^{(n)}}-\frac{P\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)+P\left(-\cos\frac{i\pi}{n}\right)}{2}.$$

Отсюда ввиду равенства

$$T_n\left(\cos\frac{i\pi}{n}\right)=\cos i\pi=(-1)^i$$

вытекает, что $Q(y_i)$ имеет тот же знак, что и $(-1)^i$. Значит, в каждом из $\frac{n}{2}$ интервалов

$$\left(y_{\frac{n}{2}},\ y_{\frac{n}{2}-1}\right),\quad \left(y_{\frac{n}{2}-1},\ y_{\frac{n}{2}-2}\right),\ \ldots,\ (y_2,\ y_1),\ (y_1,\ y_0)$$

лежит по корню $Q(y)$. Полученное противоречие доказывает теорему для случая 1).

Случай 3) исследуется аналогично, надо лишь обратить внимание на то, что $\frac{P(x)+P(-x)}{2}\in H_{n-1}$, так что

$$R(x)=\frac{T_{n-1}(x)}{A_p^{(n-1)}}-\frac{P(x)+P(-x)}{2}=\sum_{k=0}^{\frac{n-1}{2}}c_k x^{2k}\qquad \left(c_{\frac{p}{2}}=0\right),$$

после чего доказательство завершается, как и выше.

Наконец, в случаях 2) и 4) нужно вместо $P(x)+P(-x)$ рассмотреть $P(x)-P(-x)$. Например, в случае 4) мы будем иметь

$$R(x)=\frac{T_{n-1}(x)}{A_p^{(n-1)}}-\frac{P(x)-P(-x)}{2}=\sum_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}c_k x^{2k+1}$$

и следует ввести полином $Q(y)=\sum\limits_{k=0}^{\frac{n}{2}-1}c_k y^k$. Дальнейшие подробности предоставляем читателю.

Можно показать, что полином (64) (или, соответственно (65)) будет *единственным* полиномом, имеющим при x^p коэффициент, равный единице, и наименее уклоняющимся от нуля в $[-1, +1]$, но мы на этом не будем останавливаться. Вместо этого мы приведём несколько следствий теоремы В. А. Маркова.

Следствие 1. *Если $P(x)$ есть полином степени n, имеющий при x^p, где $p \lessgtr n$, коэффициент, равный единице, то*

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant +1} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{p-1}} \frac{p!}{n} \frac{\left(\frac{n-p}{2}\right)!}{\left(\frac{n+p}{2}-1\right)!},$$

или

$$\max_{-1\leqslant x\leqslant +1} |P(x)| \geqslant \frac{1}{2^{p-1}} \frac{p!}{n-1} \frac{\left(\frac{n-p-1}{2}\right)!}{\left(\frac{n+p-3}{2}\right)!},$$

смотря по тому, одинакова или различна чётность чисел n и p.

Это следствие немедленно вытекает из явного выражения коэффициентов $A_p^{(n)}$ и $A_p^{(n-1)}$.

Ясно, что если коэффициент при x^p в полиноме $P(x)$ есть не 1, а c_p, то правые части последних неравенств следует умножить на $|c_p|$. Отсюда вытекает

Следствие 2. *Если $P(x)$ — полином степени n, то его коэффициент c_p при x^p допускает оценку*

$$|c_p| \leqslant 2^{p-1} \frac{n}{p!} \frac{\left(\frac{n+p}{2}-1\right)!}{\left(\frac{n-p}{2}\right)!} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|,$$

или

$$|c_p| \leqslant 2^{p-1} \frac{n-1}{p!} \frac{\left(\frac{n+p-3}{2}\right)!}{\left(\frac{n-p-1}{2}\right)!} \max_{-1\leqslant x\leqslant 1} |P(x)|,$$

смотря по тому, будет ли разность $n-p$ чётной или нет.

ГЛАВА III.

ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИЕ ПОЛИНОМЫ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ.

§ 1. Корни тригонометрического полинома.

В этой главе мы будем заниматься вопросом о приближении непрерывной 2π-периодической функции тригонометрическими полиномами n-го порядка

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

с вещественными коэффициентами A, a_k, b_k. В дальнейшем нам будет нужна оценка числа вещественных корней такого полинома. Заметим, прежде всего, что таких корней может и вовсе не быть*), как, например, у полинома $\cos x - 5$. Однако, если у полинома $T(x)$ имеется один корень x_0, то и всякое число

$$x_0 + 2m\pi \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots)$$

также будет его корнем и притом той же *кратности*, что и x_0 (напомним, что x_0 есть корень кратности r полинома $T(x)$, если $T(x_0) = T'(x_0) = \ldots = T^{(r-1)}(x_0) = 0$,

*) Алгебраический полином также может не иметь вещественных корней, но комплексные у него имеются обязательно. Напротив, тригонометрический полином может не иметь ни вещественных, ни комплексных корней, как, например, полином $\cos x + i \sin x$.

а $T^{(r)}(x_0) \neq 0$). Ввиду этого мы в дальнейшем вообще не будем различать таких точек x и y, для которых

$$x - y = 2m\pi \qquad (m = \pm 1, \pm 2, \ldots),$$

называя их *эквивалентными*: $x \backsim y$.

Теорема. *Тригонометрический полином $T(x)$ n-го порядка (не тождественный нулю) не может иметь более, чем $2n$, вещественных попарно неэквивалентных корней, если даже каждый из них считать за столько корней, сколько единиц в его кратности.*

Доказательство. Пользуясь известными формулами Эйлера

$$\cos a = \frac{e^{ai} + e^{-ai}}{2}, \quad \sin a = \frac{e^{ai} - e^{-ai}}{2i},$$

мы можем переписать полином

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

следующим образом:

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} \left(a_k \frac{e^{kxi} + e^{-kxi}}{2} + b_k \frac{e^{kxi} - e^{-kxi}}{2i} \right).$$

Отсюда

$$T(x) = \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{kxi} = e^{-nxi} \sum_{k=-n}^{n} c_k e^{(k+n)xi}$$

и, стало быть,

$$T(x) = e^{-nxi} \sum_{k=0}^{2n} d_k e^{kxi}. \tag{66}$$

Введём в рассмотрение алгебраический полином $2n$-й степени

$$P(z) = d_0 + d_1 z + d_2 z^2 + \ldots + d_{2n} z^{2n}.$$

Если каждому вещественному x отнести комплексное число

$$z = e^{xi},$$

то (66) можно записать так:

$$P(z) = e^{nxi}\mathcal{T}(x). \tag{67}$$

Важно заметить при этом, что если x' и x'' *не эквивалентны*, то соответствующие им $z' = e^{x'i}$ и $z'' = e^{x''i}$ *не равны* друг другу, $z' \neq z''$.

Дифференцируя (67) по аргументу x, находим

$$P'(z)\, z'_x = e^{nxi}[ni\,\mathcal{T}(x) + \mathcal{T}'(x)],$$

откуда, замечая, что $z'_x = ie^{xi}$, получаем

$$P'(z) = e^{(n-1)xi}[n\mathcal{T}(x) - i\mathcal{T}'(x)].$$

Вторичное дифференцирование даёт

$$P''(z) = e^{(n-2)xi}[\alpha\mathcal{T}(x) + \beta\mathcal{T}'(x) + \gamma\mathcal{T}''(x)],$$

где α, β, γ — некоторые численные коэффициенты, точное выражение которых нам не понадобится. Аналогичным образом (что легко подтвердить полной индукцией) получается

$$P^{(s)}(z) = e^{(n-s)i}[\lambda_0\mathcal{T}(x) + \lambda_1\mathcal{T}'(x) + \ldots + \lambda_s\mathcal{T}^{(s)}(x)].$$

Допустим, что x_0 есть m-кратный корень $\mathcal{T}(x)$. Тогда

$$\mathcal{T}(x_0) = \mathcal{T}'(x_0) = \ldots = \mathcal{T}^{(m-1)}(x_0) = 0.$$

Значит, для

$$z_0 = e^{x_0 i}$$

оказывается

$$P(z_0) = P'(z_0) = \ldots = P^{(m-1)}(z_0) = 0,$$

и потому z_0 является для $P(z)$ корнем кратности l, не меньшей, чем m:

$$l \geqslant m.$$

Отсюда следует, что, если у $\mathcal{T}(x)$ имеется p попарно неэквивалентных вещественных корней:

$$x_1 \text{ — кратности } m_1,$$

$$x_2 \text{ — кратности } m_2,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$x_p \text{ — кратности } m_p,$$

причём

$$m_1+m_2+\ldots+m_p=N,$$

то у $P(z)$ имеется p *различных* корней:

$$\begin{aligned} z_1&=e^{x_1 i}\text{ — кратности } l_1\geqslant m_1,\\ z_2&=e^{x_2 i}\text{ — кратности } l_2\geqslant m_2,\\ &\dots\dots\dots\dots\dots\dots\\ z_p&=e^{x_p i}\text{ — кратности } l_p\geqslant m_p. \end{aligned}$$

Но, так как степень*) $P(z)$ есть $2n$, то

$$l_1+l_2+\ldots+l_p\leqslant 2n,$$

откуда и подавно

$$N\leqslant 2n.$$

Следствие. *Если два тригонометрических полинома n-го порядка совпадают в $(2n+1)$-й попарно неэквивалентных точках, то они тождественны.*

§ 2. Метод изображающих точек.

В предыдущей главе мы видели, насколько полезным оказался метод соотнесения каждому алгебраическому полиному из H_n изображающей его точки $(n+1)$-мерного пространства. Теперь мы проведём эту же идею для полиномов тригонометрических. Это можно было бы сделать, опираясь на тот факт, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x & \sin x & \cos 2x & \ldots & \sin nx\\ 1 & \cos y & \sin y & \cos 2y & \ldots & \sin ny\\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots\\ 1 & \cos t & \sin t & \cos 2t & \ldots & \sin nt \end{vmatrix}$$

при попарно неэквивалентных $x, y, \ldots, t$ отличен от нуля (последнее легко выводится из теоремы предыдущего параграфа). Соответствующие рассуждения ни-

*) Полезно отметить, что $P(z)$ не есть тождественный нуль, ибо в этом случае и $T(x)=e^{-nxi}P(z)$ был бы тождественным нулём.

чем не отличались бы от рассмотренного выше алгебраического случая. Мне кажется поучительным провести метод изображающей точки с помощью других средств.

Лемма 1. *Любые две функции последовательности*

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \cos 3x,\ \ldots \tag{68}$$

взаимно ортогональны на сегменте $[-\pi, \pi]$, *т. е. каждый из интегралов от их попарных произведений*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\,dx,$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \cos mx\,dx,\ \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx \sin mx\,dx \qquad (n \neq m),$$

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx \sin mx\,dx \qquad (n \gtreqless m)$$

равен нулю.

Доказательство состоит в фактическом вычислении этих интегралов. Мы предоставим его читателю. Заметим, что, в силу 2π-периодичности всех функций (68), мы могли бы говорить не о сегменте $[-\pi, \pi]$, а о любом другом сегменте той же длины, например, о $[0, 2\pi]$.

Лемма 2. *Если* $n = 1, 2, 3, \ldots$, *то*

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 nx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 nx\,dx = \pi.$$

Простую проверку этих равенств мы опускаем.

Лемма 3. *Если*

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то

$$\int_{-\pi}^{\pi} T^2(x)\,dx = \pi \left[2A^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 + b_k^2) \right]. \tag{69}$$

Равенство (69) называется *формулой Парсеваля*. Для его доказательства заметим, что

$$T^2(x) = A^2 + \sum_{k=1}^{n} (a_k^2 \cos^2 kx + b_k^2 \sin^2 kx) + 2\sum{}', \tag{70}$$

где $\sum'$ означает сумму попарных произведений *различных* членов $T(x)$. Интегрируя (70), мы замечаем, что, в силу леммы 1 (об ортогональности функций (68)), интеграл от $\sum'$ оказывается равным нулю, а тогда (69) вытекает из леммы 2.

Лемма 4. *Если*

$$a_1,\ a_2,\ \ldots,\ a_m;\quad b_1,\ b_2,\ \ldots,\ b_m$$

—два ряда вещественных чисел, то справедливо неравенство

$$\left(\sum_{k=1}^{m} a_k b_k\right)^2 \leqslant \left(\sum_{k=1}^{m} a_k^2\right)\left(\sum_{k=1}^{m} b_k^2\right). \tag{71}$$

Мы*) будем называть это неравенство *неравенством Буняковского.*

Доказательство. Положим

$$A = \sum_{k=1}^{m} a_k^2,\quad B = \sum_{k=1}^{m} a_k b_k,\quad C = \sum_{k=1}^{m} b_k^2.$$

Если бы оказалось $A = 0$, то означало бы, что

$$a_1 = a_2 = \ldots = a_m = 0,$$

и неравенство (71) было бы очевидным. Предполагая $A > 0$, положим

$$x = -\frac{B}{A}, \tag{72}$$

*) Иногда его называют *неравенством Шварца*, но это ошибочно, ибо оно было установлено задолго до Шварца известным русским математиком В. Я. Буняковским (1804 – 1889).

и пусть

$$r=\sum_{k=1}^{m}(a_k x+b_k)^2.$$

Очевидно $r\geqslant 0$. С другой стороны,

$$r=\sum_{k=1}^{m}(a_k^2 x^2+2a_k b_k x+b_k^2),$$

откуда

$$r=Ax^2+2Bx+C$$

и, в силу (72),

$$r=A\frac{B^2}{A^2}-2B\frac{B}{A}+C=\frac{AC-B^2}{A}.$$

Таким образом $AC-B^2\geqslant 0$, а это и есть неравенство (71).

Применяя неравенство Буняковского к числам

$$|a_1|,\ |a_2|,\ \ldots,|a_m|;\ 1,\ 1,\ \ldots,\ 1,$$

получим полезное неравенство

$$\sum_{k=1}^{m}|a_k|\leqslant\sqrt{m}\sqrt{\sum_{k=1}^{m}a_k^2}. \tag{73}$$

Теперь мы можем перейти к теореме, лежащей в основе метода изображающих точек. Условимся называть *нормой* и *квазинормой* тригонометрического полинома

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

соответственно числа

$$M(T)=\max|T(x)|,\qquad L(T)=|A|+\sum_{k=1}^{n}(|a_k|+|b_k|)$$

Множество всех тригонометрических полиномов порядка не выше n будем обозначать через H_n^T.

Теорема 1. *Для любого $\mathcal{T}(x)$ из H_n^T справедливы неравенства*

$$M(\mathcal{T})\leqslant L(\mathcal{T}), \tag{74}$$

$$L(\mathcal{T})\leqslant\sqrt{4n+2}\,M(\mathcal{T}). \tag{75}$$

Доказывать нужно только (75), ибо (74) очевидно. В силу (73) имеем

$$L(T)\leqslant\sqrt{2n+1}\sqrt{A^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)}.$$

С другой стороны, формула Парсеваля (69) показывает, что

$$A^2+\sum_{k=1}^{n}(a_k^2+b_k^2)\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\mathcal{T}^2(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}M^2(\mathcal{T})\,dt=2M^2(T).$$

Таким образом

$$L(T)\leqslant\sqrt{2n+1}\sqrt{2M^2(T)},$$

откуда и следует (75).

Опираясь на эту теорему, совершенно так же, как и в предыдущей главе, мы докажем её следствия:

Следствие 1. *Для равномерной ограниченности семейства $S=\{\mathcal{T}(x)\}$ полиномов из H_n^T необходима и достаточна ограниченность множества квазинорм этих полиномов.*

Следствие 2. *Для того чтобы последовательность $\{T_m(x)\}$ полиномов из H_n^T равномерно сходилась к полиному $T(x)\in H_n^T$, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{m\to\infty}L(T_m-\mathcal{T})=0.$$

Условившись называть точку

$$N(A,\ a_1,\ b_1,\ \ldots,\ a_n,\ b_n)$$

$(2n+1)$-мерного пространства *изображающей* для полинома

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

и сохраняя геометрическую терминологию стр. 45, мы можем эти следствия формулировать так:

Следствие 1′. *Для того чтобы семейство тригонометрических полиномов не выше n-го порядка было равномерно ограниченным, необходимо и достаточно, чтобы было ограничено множество их изображающих точек.*

Следствие 2′. *Для того чтобы последовательность $\{T_m(x)\}$ тригонометрических полиномов из H_n^T равномерно сходилась к полиному $T(x) \in H_n^T$, необходимо и достаточно, чтобы последовательность изображающих их точек сходилась к точке, изображающей полином $T(x)$.*

Из сопоставления этих предложений с многомерным принципом выбора Больцано—Вейерштрасса (стр. 46) вытекает

Теорема 2. *Из всякой равномерно ограниченной последовательности полиномов $\{T_m(x)\}$ из H_n^T выделяется подпоследовательность $\{T_{m_i}(x)\}$, равномерно сходящаяся к некоторому полиному $T(x)$, также входящему в H_n^T.*

Неравенство (75) позволяет установить ещё один важный факт. Именно, оно показывает, что если тригонометрический полином тождественно равен нулю, то и все его коэффициенты суть нули. Отсюда следует

Теорема 3. *Если два полинома* *)

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$U(x) = C + \sum_{k=1}^{n} (c_k \cos kx + d_k \sin kx)$$

*) Записывая $T(x)$ и $U(x)$ в форме полиномов *одного порядка*, мы не сужаем общности, ибо всякий полином можно записать в виде полинома более высокого порядка, чем он имеет на самом деле, если ввести несколько коэффициентов, равных нулю.

равны между собой при всех вещественных x, то их коэффициенты одинаковы:

$$A = C, \quad a_k = c_k, \quad b_k = d_k.$$

К этому полезно добавить, что из совпадения $T(x)$ и $U(x)$ в $2n+1$ попарно неэквивалентных точках вытекает их совпадение при всех x.

Выше мы установили, что чётный полином $T(x)$ *можно* представить в виде $A + \sum a_k \cos kx$. Теперь мы видим, что *иначе* его представить и *нельзя*.

§ 3. Тригонометрический полином наилучшего приближения.

Пусть функция $f(x)$ принадлежит $C_{2\pi}$, т. е. непрерывна и имеет период 2π. Взяв произвольный тригонометрический полином $T(x)$ порядка не выше n, положим

$$\Delta(T) = \max |T(x) - f(x)|.$$

Мы будем называть эту величину *отклонением* полинома $T(x)$ от функции $f(x)$. Заставляя полином $T(x)$ пробегать всё множество H_n^T, мы получим целое множество неотрицательных отклонений $\{\Delta(T)\}$. Точная нижняя граница

$$E_n = E_n(f) = \inf \Delta(T)\}$$

этого множества называется *наименьшим отклонением* полиномов из H_n^T от $f(x)$ или *наилучшим приближением* к $f(x)$ полиномами из H_n^T. Иногда, желая подчеркнуть, что речь идёт о приближении тригонометрическими, а не алгебраическими полиномами, мы будем писать E_n^T вместо E_n.

Чтобы оправдать введённую терминологию, мы так же, как и для случая алгебраических полиномов, установим, что граница E_n *достигается* отклонением некоторого полинома из H_n^T.

Теорема (Э. Борель). *При каждом n в H_n^T имеется такой полином $\mathcal{T}(x)$, для которого*

$$\Delta(\mathcal{T}) = E_n. \tag{76}$$

Доказательство ничем не отличается от алгебраического случая. Именно, для каждого натурального m строится такой полином $\mathcal{T}_m(x)$ из H_n^T, для которого

$$E_n \leqslant \Delta(\mathcal{T}_m) < E_n + \frac{1}{m}.$$

Все полиномы $\mathcal{T}_m(x)$ ограничены одним числом, потому что

$$|\mathcal{T}_m(x)| \leqslant |f(x)| + |\mathcal{T}_m(x) - f(x)| < M + E_n + 1,$$

где $M = \max|f(x)|$. Значит, из последовательности $\{\mathcal{T}_m(x)\}$ выделяется подпоследовательность $\{\mathcal{T}_{m_i}(x)\}$, равномерно сходящаяся к некоторому полиному $\mathcal{T}(x)$ из H_n^T. Переходя в неравенстве

$$|\mathcal{T}_{m_i}(x) - f(x)| < E_n + \frac{1}{m_i}$$

к пределу при $i \to \infty$, получим, что для всех вещественных x

$$|\mathcal{T}(x) - f(x)| \leqslant E_n,$$

а потому и $\Delta(\mathcal{T}) \leqslant E_n$. Но, так как неравенство $\Delta(\mathcal{T}) < E_n$ противоречило бы самому определению E_n, то справедливо (76).

Полином $\mathcal{T}(x)$, для которого выполняется (76), называется *полиномом наименьшего отклонения*, или *наилучшего приближения*.

Совершенно аналогично алгебраическому случаю устанавливаются соотношения

$$E_n \geqslant 0,$$
$$E_0 \geqslant E_1 \geqslant E_2 \geqslant \ldots,$$
$$\lim_{n\to\infty} E_n = 0,$$

последнее из которых равносильно второй теореме Вейерштрасса.

§ 4. Теоремы П. Л. Чебышева.

Тригонометрические полиномы наилучшего приближения, подобно алгебраическим, характеризуются наличием достаточного количества точек, в которых они достигают своего отклонения с надлежащим альтернированием знаков.

Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и $T(x)$ — её полином наименьшего отклонения в H_n^T. Те точки x, в которых

$$|T(x) - f(x)| = E_n,$$

мы будем называть (e)-*точками*, причём (e)-точка называется $(+)$-*точкой*, если

$$T(x) - f(x) = E_n,$$

и $(-)$-*точкой*, если

$$T(x) - f(x) = -E_n.$$

(Мы считаем, что $E_n > 0$, ибо иначе сама $f(x)$ есть полином из H_n^T, и всё становится тривиальным).

Теорема 1. *Существуют и $(+)$-точки и $(-)$-точки.*

Действительно, если бы, например, $(-)$-точек не существовало, то оказалось бы, что

$$\min\{T(x) - f(x)\} = -E_n + 2h \qquad (h > 0),$$

откуда следовало бы, что при всех x

$$-E_n + 2h \leqslant T(x) - f(x) \leqslant E_n$$

и, стало быть,

$$-(E_n - h) \leqslant T(x) - h - f(x) \leqslant E_n - h,$$

т. е.

$$\Delta(T - h) \leqslant E_n - h < E_n,$$

что противоречит определению E_n.

Теорема 2 (П. Л. Чебышев). *Существуют (в тех же обозначениях) $2n+2$ (e)-точки*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+2} \qquad (0 \leqslant x_k < 2\pi),$$

которые попеременно являются $(+)$- и $(-)$-точками.

Эту систему точек мы попрежнему будем называть *чебышевским альтернансом* *).

Доказательство теоремы в основном такое же, как и для алгебраического случая, но технически несколько сложнее. Именно, как и прежде, мы разбиваем сегмент $[0, 2\pi]$ точками

$$u_0 = 0 < u_1 < u_2 < \ldots < u_s = 2\pi$$

на столь малые сегменты $[u_k, u_{k+1}]$, чтобы в каждом из них колебание разности $T(x) - f(x)$ оказалось меньшим, чем $\frac{1}{2} E_n$. Назовём (e)-сегментами те сегменты $[u_k, u_{k+1}]$, которые содержат хоть одну (e)-точку. Легко видеть, что на (e)-сегменте разность $T(x) - f(x)$ по абсолютной величине не меньше, чем $\frac{1}{2} E_n$. Поэтому на (e)-сегментах эта разность не обращается в нуль и не меняет знака. Благодаря этому обстоятельству мы можем разбить множество всех (e)-сегментов на две категории: $(+)$-сегментов, на которых разность $T(x) - f(x)$ положительна, и $(-)$-сегментов, на которых она отрицательна.

Проделав это, перенумеруем все (e)-сегменты в том порядке, в котором они следуют друг за другом на $[0, 2\pi]$, при движении слева направо:

$$d_1, d_2, d_3, \ldots, d_N.$$

Для определённости будем считать, что первый сегмент $d_1 = [\alpha, \beta]$ есть $(+)$-сегмент.

Введём в рассмотрение ещё один сегмент

$$d_{N+1} = [\alpha + 2\pi, \beta + 2\pi],$$

получающийся из d_1 сдвигом на 2π вправо. Разумеется, этот новый сегмент уже не будет содержаться в $[0, 2\pi]$. В силу периодичности разности $T(x) - f(x)$, сегмент d_{N+1} так же, как и d_1, будет $(+)$-сегментом.

---

*) В алгебраическом случае альтернанс состоял из $(n+2)$-х точек, в тригонометрическом—из $(2n+2)$-х. Суть в том, что число точек альтернанса на единицу больше числа коэффициентов полинома.

Разобьём дополненную серию (e)-сегментов

$$d_1,\ d_2,\ d_3,\ \ldots,\ d_N,\ d_{N+1}$$

на группы по следующей схеме:

$$\begin{array}{ll} d_1, d_2, \ldots, d_{k_1} - & (+)\text{-сегменты,} \\ d_{k_1+1}, d_{k_1+2}, \ldots, d_{k_2} - & (-)\text{-сегменты,} \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots & \\ d_{k_{m-1}+1}, d_{k_{m-1}+2}, \ldots, d_{k_m} - & (+)\text{-сегменты.} \end{array}$$

Последняя, m-я, группа наверное состоит из ($+$)-сегментов, ибо в неё входит $d_{k_m} = d_{N+1}$.

Покажем, что

$$m \geqslant 2n + 3. \tag{77}$$

Если бы соотношение (77) не выполнялось, то можно было бы утверждать не только, что $m \leqslant 2n + 2$, но даже и то, что

$$m \leqslant 2n + 1, \tag{78}$$

ибо число m, очевидно, *нечётное* (потому, что m есть число знаков последовательности $+, -, +, \ldots, +$, которая и начинается и кончается *одним и тем же* знаком $+$).

Допустим же, что имеет место неравенство (78). Ввиду того, что правый конец сегмента d_{k_1} лежит левее левого конца сегмента d_{k_1+1}, можно взять точку z_1, лежащую между этими сегментами, что мы символически запишем так:

$$d_{k_1} < z_1 < d_{k_1+1}.$$

Аналогичным образом можно построить точки $z_2, z_3, \ldots, z_{m-1}$, для которых

$$\begin{gathered} d_{k_2} < z_2 < d_{k_2+1}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ d_{k_{m-1}} < z_{m-1} < d_{k_{m-1}+1}. \end{gathered}$$

Легко видеть, что

$$\beta < z_1, \quad z_{m-1} < \alpha + 2\pi. \tag{79}$$

Положим

$$\rho(x)=\sin\frac{x-z_1}{2}\sin\frac{x-z_2}{2}\ldots\sin\frac{x-z_{m-1}}{2}.$$

Число множителей здесь равно $m-1$, т. е. оно чётное и не большее, чем $2n$. Объединяя их по два и замечая, что

$$\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x-b}{2}=\frac{1}{2}\left[\cos\frac{b-a}{2}-\cos\left(x-\frac{a+b}{2}\right)\right],$$

мы убеждаемся, что $\rho(x)$ есть тригонометрический полином*) порядка не выше n, т. е.

$$\rho(x)\in H_n^T.$$

Точки $z_1, z_2, \ldots, z_{m-1}$, являющиеся корнями $\rho(x)$, лежат (в силу (79)) в сегменте $[\beta, \alpha+2\pi]$ и тем более в сегменте $[\alpha, \beta+2\pi]$, в котором содержатся и все сегменты d_k.

Установим, что в этом сегменте $[\alpha, \beta+2\pi]$ у полинома $\rho(x)$ нет корней, отличных от точек z_i. В самом деле, сомножитель $\sin\frac{x-z_i}{2}$ имеет корнями только члены арифметической прогрессии

$$\ldots, z_i-4\pi, z_i-2\pi, z_i, z_i+2\pi, z_i+4\pi, \ldots \tag{80}$$

В силу (79) оказывается

$$z_i-2\pi<\alpha, \quad \beta+2\pi<z_i+2\pi,$$

так что из всех точек (80) в сегмент $[\alpha, \beta+2\pi]$ попадает только z_i.

Из установленного свойства $\rho(x)$ следует, что он не обращается в нуль ни на одном из сегментов d_k.

Отметим далее, что когда x, возрастая, проходит значение z_i, то множитель

$$\sin\frac{x-z_i}{2}$$

---

*) Полезно подчеркнуть, что отдельный сомножитель $\sin\frac{x-a}{2}$ *не есть* тригонометрический полином, ибо последний есть сумма синусов и косинусов *целых* кратных угла x.

меняет знак с «—» на «+», причём $x = z_l$ есть *единственная* точка сегмента $[\alpha, \ \beta + 2\pi]$, где этот множитель меняет знак.

Отсюда следует, что на всех сегментах d_k знак полинома $\rho(x)$ совпадает со знаком разности $T(x) - f(x)$. Действительно, на сегментах первой группы $d_1, \ d_2, \ldots, d_{k_1}$, где разность $T(x) - f(x)$ положительна, все сомножители полинома $\rho(x)$ отрицательны, а так как число их *чётное*, то сам полином положителен. На сегментах второй группы $d_{k_1+1}, d_{k_1+2}, \ldots, d_{k_2}$ первый сомножитель $\sin\frac{x - z_1}{2}$ положителен, а прочие отрицательны, и т. д.

Рассмотрим теперь какой-нибудь сегмент первоначального дробления $[u_i, \ u_{i+1}]$, который *не является* (e)-*сегментом*. Для него

$$\max_{u_i \leq x \leq u_{i+1}} |T(x) - f(x)| < E_n.$$

Значит, и наибольшее из чисел

$$\max_{x \in [u_i, \ u_{i+1}]} |T(x) - f(x)|,$$

построенных для всех сегментов $[u_i, \ u_{i+1}]$, которые не суть (e)-сегменты, будет меньше, чем E_n. Обозначим это наибольшее число через E^*, так что

$$E^* < E_n.$$

Пусть, наконец, λ есть столь малое положительное число, что *)

$$\lambda < E_n - E^*, \quad \lambda < \frac{1}{2} E_n. \tag{81}$$

Положим

$$U(x) = T(x) - \lambda\rho(x).$$

Мы покажем, что хотя $U(x)$ входит в H_n^T, но

$$\Delta(U) < E_n. \tag{82}$$

Поскольку это соотношение противоречит самому определению E_n, то из него и будет вытекать (77).

---

*) Как и выше (см. сноску на стр. 53), второе из неравенств (81) вытекает из первого.

Если $x \in [u_i, u_{i+1}]$, где $[u_i, u_{i+1}]$ не является (e)-сегментом, то

$$|U(x)-f(x)| \leqslant |T(x)-f(x)|+\lambda|\rho(x)| \leqslant \leqslant E^* + \lambda|\rho(x)| \leqslant E^*+\lambda < E_n.$$

(Мы пользуемся тем, что $|\rho(x)| \leqslant 1$.)

Если же x попадает на один из (e)-сегментов d_k, то числа $T(x)-f(x)$ и $\lambda\rho(x)$ *одного знака*, причём

$$|T(x)-f(x)| \geqslant \frac{1}{2}E_n > \lambda|\rho(x)|.$$

Поэтому

$$|U(x)-f(x)| = |\{T(x)-f(x)\}-\lambda\rho(x)| = = |T(x)-f(x)|-\lambda|\rho(x)| \leqslant E_n - \lambda|\rho(x)|,$$

и так как на сегментах d_k полином $\rho(x) \neq 0$, то

$$|U(x)-f(x)| < E_n.$$

Таким образом неравенство

$$|U(x)-f(x)| < E_n$$

справедливо при всех x. Но тогда должно иметь место (82), что, как мы видели, невозможно. Значит, (77) доказано.

Теперь уже нетрудно закончить доказательство теоремы. Именно, выберем по (e)-точке $x_1, x_2, \ldots, x_{2n+2}$ на каждом из сегментов $d_{k_1}, d_{k_2}, \ldots, d_{k_{2n+2}}$. Эти точки и будут попеременно $(+)$- и $(-)$-точками. Остаётся лишь показать, что последняя из них x_{2n+2} расположена левее, чем 2π. Но это совсем просто. Действительно, так как $2n+2 < m$, то сегмент $d_{k_{2n+2}}$ лежит левее, чем $d_{k_m} = d_{N+1}$. Значит, $d_{k_{2n+2}}$ содержится в $[0, 2\pi]$ и $x_{2n+2} \leqslant 2\pi$. Если бы имело место равенство $x_{2n+2} = 2\pi$, то точка 2π, а с ней и точка 0, была бы $(-)$-точкой. Но, будучи, таким образом, (e)-точкой, точка 0 должна была бы входить в самый левый из (e)-сегментов, т. е. в d_1, и, следовательно, была бы $(+)$-точкой, что нелепо. Значит,

$$x_{2n+2} < 2\pi,$$

и теорема доказана полностью.

Так же, как и в предыдущей главе, из этой теоремы вытекает единственность полинома наилучшего приближения:

Теорема 3. *В H_n^T имеется только один полином наилучшего приближения данной функции $f(x)$.*

Доказательство. Допустим, что таких полиномов два: $T(x)$ и $U(x)$.

Из неравенств

$$-E_n \leqslant T(x) - f(x) \leqslant E_n, \quad -E_n \leqslant U(x) - f(x) \leqslant E_n$$

следует, что

$$-E_n \leqslant \frac{T(x)+U(x)}{2} - f(x) \leqslant E_n,$$

так что и полусумма

$$R(x) = \frac{T(x)+U(x)}{2}$$

оказывается полиномом наилучшего приближения той же функции $f(x)$. Поэтому для полусуммы $R(x)$ существует чебышевский альтернанс

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+2} \qquad (0 \leqslant x_k < 2\pi). \quad (83)$$

Буквально повторяя рассуждения, подробно проведённые для алгебраического случая, мы установим, что полиномы $T(x)$ и $U(x)$ совпадают во всех точках (83). Поскольку порядок этих полиномов не превосходит n, а число точек (83) равно $2n+2$, то полиномы $T(x)$ и $U(x)$ должны быть тождественными.

Наличие чебышевского альтернанса *характеризует* полином наименьшего отклонения.

Теорема 4 (П. Л. Чебышев). *Пусть $f(x)$ есть непрерывная 2π-периодическая функция, а $U(x)$ — тригонометрический полином порядка не выше n. Если существуют $2n+2$ точки*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+2} \qquad (0 \leqslant x_k < 2\pi),$$

в которых разность

$$U(x) - f(x)$$

достигает своего наибольшего абсолютного значения $\Delta(U)$, причём знак этой разности меняется при каждом *переходе от точки* x_i *к следующей* x_{i+1}, *то* $U(x)$ *есть полином наименьшего отклонения от* $f(x)$.

Доказательство. Допустим, что $U(x)$ не является полиномом наименьшего отклонения; это значит, что

$$\Delta(U) > E_n.$$

Введём в рассмотрение полином наименьшего отклонения от функции $f(x)$, обозначив его через $T(x)$. Так как

$$U(x_i) - T(x_i) = \{U(x_i) - f(x_i)\} - \{T(x_i) - f(x_i)\}$$

и

$$|T(x_i) - f(x_i)| \leqslant E_n < \Delta(U) = |U(x_i) - f(x_i)|,$$

то знак разности $U(x_i) - T(x_i)$ совпадает со знаком разности $U(x_i) - f(x_i)$ и, стало быть, изменяется при каждом переходе от x_i к x_{i+1}. Отсюда вытекает, что каждый из интервалов $(x_1, x_2), (x_2, x_3), \ldots, (x_{2n+1}, x_{2n+2})$ содержит по корню разности $U(x) - T(x)$. Имея, таким образом, $2n+1$ (неэквивалентных!) корней, эта разность должна была бы быть тождественной нулю, что, однако, нелепо, ибо

$$\Delta(U) > \Delta(T) = E_n.$$

Полученное противоречие и доказывает теорему.

Сходным образом доказывается

Теорема 5. *Пусть* $f(x) \in C_{2\pi}$ *и полином* $U(x)$ *из* H_n^T *обладает следующим свойством: существуют* $(2n+2)$ *точки*

$$x_1 < x_2 < \ldots < x_{2n+2} \qquad (0 \leqslant x_k < 2\pi)$$

такие, что разность $U(x_i) - f(x_i)$ *меняет знак при каждом переходе от* x_i *к* x_{i+1}. *В таком случае*

$$E_n \geqslant \min |U(x_i) - f(x_i)|.$$

Полезно отметить, что (в силу периодичности разности $T(x) - f(x)$) вместо полусегмента $[0, 2\pi)$ во всех вышеприведённых теоремах мы могли бы говорить о любом полусегменте $[a, a+2\pi)$.

В заключение докажем одно предложение, которое ниже будет нами использовано.

Теорема 6. *Если $f(x) \in C_{2\pi}$ есть функция чётная, то и её полином наименьшего отклонения оказывается чётным, т. е. имеет вид*

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx.$$

В самом деле, по определению полинома наименьшего отклонения при всех вещественных x

$$|f(x) - T(x)| \leqslant E_n.$$

Заменив здесь x на $-x$ и учтя, что

$$f(-x) = f(x),$$

мы находим, что

$$|f(x) - T(-x)| \leqslant E_n,$$

так что $T(-x)$ является наряду с $T(x)$ также полиномом наименьшего отклонения от $f(x)$. Отсюда, в силу единственности такого полинома, и вытекает, что

$$T(-x) = T(x).$$

Теорема доказана.

§ 5. Примеры.

Рассмотрим несколько простых примеров, где легко построить полином наименьшего отклонения.

I. *Если $m > n$, то из всех полиномов порядка не выше n от функции*

$$f(x) = A\cos mx + B\sin mx$$

наименее отклоняется тождественный нуль.

Действительно, функцию $f(x)$ можно *) представить в форме

$$f(x) = R\cos m(x - x_0). \tag{84}$$

*) Для этого обозначаем через R и ω полярные координаты точки (A, B). Очевидно, $A = R\cos\omega$, $B = R\sin\omega$ и $f(x) = R\cos(mx - \omega)$, что и приводит к представлению (84), в котором $R = \sqrt{A^2+B^2}$,

Рассмотрим точки

$$x_0,\ x_0+\frac{\pi}{m},\ x_0+\frac{2\pi}{m},\ \ldots,\ x_0+\frac{(2n+1)\,\pi}{m}.$$

Функция $f(x)$ в каждой из них принимает наибольшее по абсолютной величине значение, меняя знак при каждом переходе от одной точки к следующей. Иначе говоря, эти точки образуют альтернанс для «разности» $0-f(x)$. Так как все эти точки лежат в полусегменте $[x_0,\ x_0+2\pi)$, то выполнены все условия теоремы 4 предыдущего параграфа. Самое наилучшее приближение для $f(x)$ равно $R=\sqrt{A^2+B^2}$.

То же рассуждение показывает, что

II. *Из всех полиномов, не выше n-го порядка, наименее отклоняется от функции*

$$f(x)A=+\sum_{k=1}^{n+1}(a_k\cos kx+b_k\sin kx)$$

полином

$$T(x)=A+\sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx+b_k\sin kx),$$

причём

$$\Delta(T)=\sqrt{a_{n+1}^2+b_{n+1}^2}.$$

В качестве следующего примера рассмотрим *недифференцируемую функцию Вейерштрасса*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}q^k\cos(2m+1)^kx\qquad(0<q<1).\qquad(85)$$

Оказывается*), что её полиномом наилучшего приближения, порядка не выше n, служит отрезок ряда (85)

$$T(x)=\sum_{k=1}^{s}q^k\cos(2m+1)^kx,\qquad(86)$$

*) Это — результат С. Н. Бернштейна [2].

где s определено условием

$$(2m+1)^s \leqslant n < (2m+1)^{s+1}.$$

Чтобы доказать это утверждение, рассмотрим разность

$$f(x) - T(x) = \sum_{k=s+1}^{\infty} q^k \cos(2m+1)^k x.$$

Если положить

$$x_i = \frac{i\pi}{(2m+1)^{s+1}} \qquad (i = 0, 1, \ldots, 2(2m+1)^{s+1} - 1),$$

то окажется

$$f(x_i) - T(x_i) = (-1)^i \sum_{k=s+1}^{\infty} q^k = (-1)^i \frac{q^{s+1}}{1-q}.$$

Легко видеть, что это *наибольшее* по абсолютной величине значение разности $f(x) - T(x)$. Альтернирование знаков здесь также налицо. Наконец, все точки x_i лежат в $[0, 2\pi)$, а число их равно $2(2m+1)^{s+1}$, т. е. не меньше, чем $2(n+1)$. Сопоставляя всё это с теоремой 4 предыдущего параграфа, мы и убеждаемся, что полином $T(x)$ наименее отклоняется от $f(x)$. Отметим, что

$$E_n = \Delta(T) = \frac{q^{s+1}}{1-q}.$$

ГЛАВА IV.

ВЛИЯНИЕ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ НА ПОРЯДОК ЕЁ ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ.

§ 1. Постановка вопроса. Модуль непрерывности. Условие Липшица.

Пусть $f(x)$ есть непрерывная, 2π — периодическая функция, а E_n—её наилучшее приближение тригонометрическими полиномами не выше n-го порядка. Как мы уже говорили, в силу второй теоремы Вейерштрасса оказывается, что

$$\lim_{n\to\infty} E_n = 0.$$

Естественно ожидать, что чем «проще» будет приближаемая функция $f(x)$, тем точнее она будет представляться тригонометрическим полиномом. Иными словами, для более простых функций стремление E_n к нулю должно происходить быстрее, чем для функций сложной природы. В настоящей главе мы и будем заниматься вопросом о том, как влияет улучшение структурных свойств приближаемой функции на порядок убывания её наилучшего приближения E_n. Излагаемые ниже результаты принадлежат, главным образом, Джексону [1, 2].

Удобной характеристикой структурных свойств функции является величина, называемая «модулем непрерывности» этой функции.

Определение. Пусть на промежутке $\langle a, b \rangle$ (это может быть сегмент $[a, b]$ или интервал (a, b), в частности, вся ось $(-\infty, +\infty)$), или полусегмент

$[a, b)$ и т. п.) задана функция $f(x)$. Возьмём какое-нибудь положительное число δ и рассмотрим все пары чисел x и y, которые принадлежат $\langle a, b\rangle$ и удовлетворяют неравенству

$$|x-y| \leqslant \delta.$$

Точная верхняя граница чисел $|f(x)-f(y)|$ (которая может оказаться и бесконечной):

$$\omega(\delta) = \sup_{|x-y| \leqslant \delta} \{|f(x)-f(y)|\}$$

называется *модулем непрерывности* функции $f(x)$. Грубо говоря, модуль непрерывности показывает, насколько могут различаться друг от друга два значения функции, если известно, что значения аргумента различаются не больше, чем на δ.

Отметим ряд простых свойств модуля непрерывности:

I. *Функция* $\omega(\delta)$ *монотонно возрастает*. Действительно, если $\delta_2 > \delta_1 > 0$, то множество пар (x, y), удовлетворяющих условию $|x-y| \leqslant \delta_2$, *обширнее*, чем множество таких пар, для которых $|x-y| \leqslant \delta_1$. Ввиду того что при расширении числового множества его точная верхняя граница может разве лишь увеличиться, ясно, что

$$\omega(\delta_1) \leqslant \omega(\delta_2).$$

II. *Для того чтобы функция* $f(x)$ *была на промежутке* $\langle a, b\rangle$ *равномерно непрерывна, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) = 0.$$

Это свойство вполне очевидно.

III. *Если* n — *натуральное число, то*

$$\omega(n\delta) \leqslant n\omega(\delta).$$

В самом деле, пусть

$$|x-y| \leqslant n\delta.$$

Разобьём сегмент $[x, y]$ на n равных частей точками

$$z_i = x + \frac{i}{n}(y - x) \qquad (i = 0, 1, \ldots, n).$$

Очевидно,

$$f(y) - f(x) = \sum_{i=0}^{n-1} \{ f(z_{i+1}) - f(z_i) \}.$$

С другой стороны, $|z_{i+1} - z_i| \leqslant \delta$, откуда

$$|f(z_{i+1}) - f(z_i)| \leqslant \omega(\delta),$$

и потому

$$|f(y) - f(x)| \leqslant n\omega(\delta).$$

Отсюда и следует III.

IV. *При любом положительном* λ

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega(\delta).$$

Действительно, пусть n есть целая часть λ, так что $n \leqslant \lambda < n + 1$. Тогда

$$\omega(\lambda\delta) \leqslant \omega[(n+1)\delta] \leqslant (n+1)\,\omega(\delta) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega(\delta).$$

Определение. Если функция $f(x)$ задана на промежутке $\langle a, b \rangle$ и при всех x и y из этого промежутка удовлетворяет неравенству

$$|f(y) - f(x)| \leqslant M|y - x|^{\alpha} \qquad (\alpha > 0),$$

то говорят, что функция $f(x)$ удовлетворяет *условию Липшица* с показателем α и коэффициентом M, и пишут

$$f(x) \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha.$$

В тех случаях, когда коэффициент M не существенен, употребляют более простое обозначение:

$$f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha.$$

Иными словами, $\mathrm{Lip}_M\,\alpha$ есть *класс* всех функций, удовлетворяющих условию Липшица данного порядка α с *заданным* коэффициентом M, а $\mathrm{Lip}\,\alpha$ означает класс функций, удовлетворяющих условию Липшица порядка α с каким бы то ни было коэффициентом.

Нетрудно видеть, что функция, удовлетворяющая какому-нибудь условию Липшица, равномерно непрерывна.

V. *Если* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, *где* $\alpha > 1$, *то* $f(x)$ *есть величина постоянная.*

В самом деле, для такой функции

$$\left|\frac{f(y)-f(x)}{y-x}\right| \leqslant M\,|y-x|^{\alpha-1}.$$

Заставляя здесь точку y стремиться к совпадению с x, находим, что $f'(x)=0$, откуда и следует постоянство $f(x)$. Во всём дальнейшем мы предполагаем, что $\alpha \leqslant 1$.

VI. *Если всюду в интервале* (a, b) *существует производная* $f'(x)$, *причём* $|f'(x)| \leqslant M$, *то*

$$f(x) \in \mathrm{Lip}_M 1.$$

Это следует из формулы Лагранжа

$$f(y)-f(x) = f'(z)(y-x) \qquad (x<z<y).$$

VII. *Если основной промежуток* $\langle a, b\rangle$ *конечен и* $\alpha < \beta$, *то* $\mathrm{Lip}\,\alpha \supset \mathrm{Lip}\,\beta$.

Грубо говоря, функции, удовлетворяющие условию Липшица с большим показателем, «лучше», чем удовлетворяющие такому же условию с показателем меньшим. В частности, самыми «лучшими» будут функции класса $\mathrm{Lip}\,1$.

Для доказательства VII рассмотрим функцию

$$f(x) \in \mathrm{Lip}_B\,\beta.$$

Если x и y таковы, что $|x-y|<1$, то

$$|f(y)-f(x)| \leqslant B\,|y-x|^{\beta} \leqslant B\,|y-x|^{\alpha}.$$

Если же $|x-y| \geqslant 1$, то

$$|f(y)-f(x)| \leqslant \{|f(x)|+|f(y)|\}\,|x-y|^{\alpha} \leqslant 2K\,|x-y|^{\alpha},$$

где *) $K=\sup\{|f(x)|\}$; таким образом при всех x и y будет

$$|f(x)-f(y)|\leqslant A|x-y|^{\alpha},$$

где A есть большее из чисел B и $2K$.

Связь между условием Липшица и модулем непрерывности даётся следующим предложением:

VIII. *Соотношения*

$$f(x)\in \mathrm{Lip}_M\,\alpha \quad \text{и} \quad \omega(\delta)\leqslant M\delta^{\alpha}$$

вполне равносильны.

Если $\omega(\delta)\leqslant M\delta^{\alpha}$, то при любых x и y

$$|f(y)-f(x)|\leqslant \omega(|y-x|)\leqslant M|y-x|^{\alpha}.$$

Обратно, если $f(x)\in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$, то при $|y-x|\leqslant\delta$

$$|f(y)-f(x)|\leqslant M|y-x|^{\alpha}\leqslant M\delta^{\alpha}.$$

Поскольку это неравенство справедливо *при всех x и y*, для которых $|x-y|\leqslant\delta$, то и

$$\omega(\delta)\leqslant M\delta^{\alpha}. \tag{87}$$

Заметим, что если неравенство (87) выполняется при всех *достаточно малых* δ, а $f(x)$ ограничена, то $f(x)$ удовлетворяет условию Липшица порядка α, хотя, может быть и с другим коэффициентом. Именно, если (87) справедливо при условии $\delta\leqslant\delta_0$, то для $\delta>\delta_0$ имеем

$$\omega(\delta)\leqslant\Omega\leqslant\frac{\Omega}{\delta_0^{\alpha}}\delta^{\alpha},$$

где Ω означает колебание $f(x)$ на всём $\langle a, b\rangle$. Значит, $f(x)\in \mathrm{Lip}_A\,\alpha$, где $A=\max\left\{M, \dfrac{\Omega}{\delta_0^{\alpha}}\right\}$.

*) Функция $f(x)$, будучи равномерно непрерывной на конечном промежутке, очевидно, ограничена.

В случае бесконечного промежутка свойство VII не имеет места, например, функция $f(x)=x$ входит (на всей оси) в Lip 1, но не входит в $\mathrm{Lip}\,\frac{1}{2}$. Впрочем, как видно из рассуждений текста, всякая *ограниченная* функция, входящая в $\mathrm{Lip}\,\beta$, входит и в $\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\alpha<\beta$.

В дальнейшем нам понадобится ещё один класс функций, который мы будем обозначать через W. Это — класс, состоящий из таких функций, для которых

$$\omega(\delta) \leqslant A\delta(1 + |\ln \delta|), \tag{88}$$

где A не зависит от δ.

Если неравенство (88) выполняется только для $\delta \leqslant \delta_0$, а функция $f(x)$ ограничена, что заведомо имеет место на конечном промежутке, то при $\delta > \delta_0$

$$\omega(\delta) \leqslant \Omega \leqslant \frac{\Omega}{\delta_0}\delta(1 + |\ln \delta|),$$

и функция $f(x)$ всё-таки принадлежит классу W.

Этот класс W является промежуточным между классом $\mathrm{Lip}\, 1$ и всеми классами $\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\alpha < 1$. Именно,

IX. *На конечном промежутке справедливы включения*:

$$\mathrm{Lip}\,\alpha \supset W \supset \mathrm{Lip}\, 1 \qquad (0 < \alpha < 1).$$

Если $f(x) \in \mathrm{Lip}\, 1$, то $\omega(\delta) \leqslant M\delta \leqslant M\delta(1 + |\ln \delta|)$, и второе из включений доказано. Далее, если $\omega(\delta) \leqslant A\delta(1 + |\ln \delta|)$, то при $0 < \alpha < 1$ будет $\lim\limits_{\delta \to 0} \frac{\omega(\delta)}{\delta^\alpha} = 0$, и следовательно, для $\delta < \delta_0$ окажется

$$\omega(\delta) < \delta^\alpha,$$

а это, как мы уже знаем, обеспечивает включение $f(x)$ в $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

§ 2. Вспомогательные предложения.

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2 =$$

$$= n + 2[(n-1)\cos t + (n-2)\cos 2t + \ldots + \cos(n-1)t]. \tag{89}$$

Доказательство. Прежде всего,

$$\sin^2\frac{nt}{2} = \frac{1 - \cos nt}{2} =$$

$$= \frac{(1 - \cos t) + (\cos t - \cos 2t) + \ldots + [(\cos(n-1)t - \cos nt]}{2}.$$

Отсюда, применяя тождество

$$\cos a - \cos b = 2\sin\frac{a+b}{2}\sin\frac{b-a}{2},$$

находим

$$\sin^2\frac{nt}{2} = \left[\sin\frac{t}{2} + \sin\frac{3t}{2} + \ldots + \sin\frac{(2n-1)t}{2}\right]\sin\frac{t}{2}. \qquad (90)$$

Но

$$\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2},$$

$$\sin\frac{3t}{2} = \sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right),$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{(2n-1)t}{2} = \sin\frac{t}{2} + \left(\sin\frac{3t}{2} - \sin\frac{t}{2}\right) + \ldots$$
$$\ldots + \left(\sin\frac{(2n-1)t}{2} - \sin\frac{(2n-3)t}{2}\right).$$

Применим к каждой скобке формулу

$$\sin a - \sin b = 2\sin\frac{a-b}{2}\cos\frac{a+b}{2}.$$

Это даёт ряд тождеств:

$$\sin\frac{t}{2} = \sin\frac{t}{2},$$

$$\sin\frac{3t}{2} = [1 + 2\cos t]\sin\frac{t}{2},$$

$$\sin\frac{5t}{2} = [1 + 2\cos t + 2\cos 2t]\sin\frac{t}{2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$\sin\frac{(2n-1)t}{2} = [1 + 2\cos t + \ldots + 2\cos(n-1)t]\sin\frac{t}{2}.$$

Подставляя эти выражения в (90) и учитывая, что число строк здесь равно n, мы и получим (89).

Следствие. *Справедливо тождество*

$$\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^4 = L + \sum_{k=1}^{2n-2} l_k \cos kt. \qquad (91)$$

В самом деле, левая часть этого равенства, будучи квадратом тригонометрического полинома $(n-1)$-го порядка, оказывается полиномом порядка $2n-2$. Так как этот последний полином очевидным образом есть *чётная* функция, то в его выражение не входят синусы кратных дуг, т. е. он имеет вид (91).

Лемма 2. *Справедливо равенство*

$$\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt = \frac{\pi n(2n^2+1)}{6}. \tag{92}$$

Доказательство. В силу (89) можем написать

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}\right)^4 du = \int_{-\pi}^{\pi} \left[n + 2\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)\cos ku\right]^2 du.$$

Отсюда и из формулы Парсеваля (69) следует, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}\right)^4 du = \pi \left[2n^2 + 4\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2\right].$$

Но

$$\sum_{k=1}^{n-1} (n-k)^2 = 1^2 + 2^2 + \ldots + (n-1)^2 = \frac{(n-1)n(2n-1)}{6}$$

и, стало быть,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}\right)^4 du = \frac{2\pi n(2n^2+1)}{3}.$$

Остаётся заметить, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \left(\frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}}\right)^4 du = 4\int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

Лемма 3. *Справедливы неравенства*

$$|\sin nt| \leqslant n|\sin t| \qquad (-\infty < t < +\infty), \tag{93}$$

$$\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t \qquad \left(0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}\right). \tag{94}$$

Первое из них доказывается индуктивно. Второе вытекает из того, что функция $\frac{\sin t}{t}$ на сегменте $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ *убывает*, ибо её производная в интервале $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ отрицательна.

Лемма 4. *Справедливо неравенство*

$$\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt < \frac{\pi^2 n^2}{4}. \tag{95}$$

Доказательство. Разобьём этот интеграл на два, распространённых на промежутки $\left[0, \frac{\pi}{2n}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2n}, \frac{\pi}{2}\right]$. В первом из них воспользуемся оценкой (93), а во втором оценкой (94) и тем фактом, что $|\sin nt| \leqslant 1$. Это приведёт нас к неравенству

$$\int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt < n^4 \int_0^{\pi/2n} t\,dt + \frac{\pi^4}{16}\int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{dt}{t^3}.$$

Но

$$\int_0^{\pi/2n} t\,dt = \frac{\pi^2}{8n^2}, \qquad \int_{\pi/2n}^{\pi/2} \frac{dt}{t^3} < \int_{\pi/2n}^{+\infty} \frac{dt}{t^3} = \frac{2n^2}{\pi^2},$$

откуда и следует (95).

Теорема. *Пусть* $f(x) \in C_{2\pi}$ *и имеет модуль непрерывности* $\omega(\delta)$. *Положим*

$$U_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right]^4 dt. \tag{96}$$

Тогда имеют место следующие обстоятельства:

α) *Функция $U_n(x)$ представима в форме*

$$U_n(x) = A + \sum_{k=0}^{2n-2} (a_k \cos kx + b_k \sin kx), \tag{97}$$

т. е. $U_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка $2n-2$.

β) *Если*

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 0, \tag{98}$$

то в формуле (97) *будет $A = 0$, т. е. полином $U_n(x)$ не будет иметь свободного члена.*

γ) *При всех x верна оценка*

$$|U_n(x) - f(x)| \leqslant 6\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{99}$$

Доказательство. В силу (91)

$$\left(\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}}\right)^4 = L + \sum_{k=1}^{2n-2} l_k (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx),$$

и потому

$$U_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \times$$

$$\times \int_{-\pi}^{\pi} f(t)\left[L + \sum_{k=1}^{2n-2} l_k (\cos kt \cos kx + \sin kt \sin kx)\right] dt,$$

что и доказывает утверждения α) и β).

Переходя к доказательству оценки (99), сделаем в интеграле (96) подстановку $t = u + x$. Ввиду периодичности подинтегральной функции мы можем при этом сохранить старые пределы интегрирования. Таким образом

$$U_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(x+u)\left(\frac{\sin\frac{nu}{2}}{\sin\frac{u}{2}}\right)^4 du.$$

Разобьём этот интеграл на два, распространённых на промежутки $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$, и в первом из них заменим u на $-u$:

$$U_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \left(\frac{\sin \frac{nu}{2}}{\sin \frac{u}{2}} \right)^4 du.$$

Наконец, полагая $u = 2t$, получим окончательное выражение $U_n(x)$:

$$U_n(x) = \frac{3}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} [f(x+2t) + f(x-2t)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt.$$

С другой стороны, в силу (92)

$$1 = \frac{6}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt.$$

Умножая это равенство на $f(x)$ и вычитая из предыдущего, находим

$$U_n(x) - f(x) = \frac{3}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt. \quad (100)$$

Легко видеть, что

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \leqslant 2\omega(2t).$$

Но по четвёртому свойству функции $\omega(\delta)$

$$\omega(2t) = \omega\left(2nt \frac{1}{n}\right) \leqslant (2nt+1)\,\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Значит,

$$|U_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{6\omega\left(\frac{1}{n}\right)}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} (2nt+1) \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt.$$

Отсюда с помощью (92) получаем

$$|U_n(x) - f(x)| \leqslant \omega\left(\frac{1}{n}\right) \left[1 + \frac{12}{\pi(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} t \left(\frac{\sin nt}{\sin t} \right)^4 dt \right],$$

что в связи с (95) даёт оценку

$$|U_n(x) - f(x)| \leqslant \omega\left(\frac{1}{n}\right)\left[1 + \frac{12}{\pi(2n^2+1)}\frac{\pi^2 n^2}{4}\right] \leqslant$$
$$\leqslant \left(1 + \frac{3\pi}{2}\right)\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Так как $3\pi < 10$, то отсюда следует (99), что и завершает доказательство.

§ 3. Теоремы Д. Джексона.

Теперь мы можем перейти к изложению джексоновских оценок для E_n, которые уже были упомянуты в § 1.

Теорема 1. *Для любой функции* $f(x) \in C_{2\pi}$ *верна оценка*

$$E_n \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{n}\right). \tag{101}$$

Доказательство. В теореме предыдущего параграфа мы показали, что

$$|U_n(x) - f(x)| \leqslant 6\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Но так как $U_n(x) \in H^T_{2n-2}$, то тем более

$$E_{2n-2} \leqslant 6\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если теперь n есть чётное натуральное число, $n = 2m$, то

$$E_n = E_{2m} \leqslant E_{2m-2} \leqslant 6\omega\left(\frac{1}{m}\right) = 6\omega\left(\frac{2}{n}\right) \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Если же n число нечётное, $n = 2m - 1$, то

$$E_n = E_{2m-1} \leqslant E_{2m-2} \leqslant 6\omega\left(\frac{1}{m}\right) =$$
$$= 6\omega\left(\frac{2}{n+1}\right) \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{n+1}\right) \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Итак, оценка (101) верна при любом натуральном n.

Ввиду того что для любой функции из $C_{2\pi}$

$$\lim_{n\to\infty} \omega\left(\frac{1}{n}\right) = 0,$$

ясно, что только что доказанная теорема Джексона содержит в себе вторую теорему Вейерштрасса.

Теперь мы должны остановиться на одном обстоятельстве, которое будет играть в дальнейшем изложении очень важную роль.

Введём в рассмотрение кроме E_n ещё величину e_n, понимая под этим наилучшее приближение функции $f(x)$ такими полиномами из H_n^T, которые *не имеют свободного члена*, т. е. полиномами вида

$$T(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx). \tag{102}$$

Иначе говоря,

$$e_n = \inf \{\Delta(T)\},$$

где $T(x)$ есть полином вида (102). Мы будем обозначать множество полиномов вида (102) через h_n^T.

Легко видеть, что

$$e_0 \geqslant e_1 \geqslant e_2 \geqslant \ldots,$$
$$E_n \leqslant e_n.$$

В теореме предыдущего параграфа мы показали, что при условии (98) (мы будем обозначать через $C_{2\pi}^*$ класс тех $f(x)$ из $C_{2\pi}$, для которых выполнено (98)) будет $U_n(x) \in h_{2n-2}^T$. Но это означает, что для такой функции

$$e_{2n-2} \leqslant 6\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Опираясь на это замечание и буквально повторяя доказательство теоремы Джексона, получим

Добавление к теореме 1. *Если $f(x) \in C_{2\pi}^*$, то*

$$e_n \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Это добавление мы и имели в виду получить.

Возвращаясь к теореме 1, отметим, что из неё вытекает

Следствие 1. *Если* $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$ $(0 < \alpha \leqslant 1)$, *то*

$$E_n \leqslant \frac{12M}{n^\alpha}. \tag{103}$$

В свою очередь отсюда имеем

Следствие 2. *Если у* $f(x) \in C_{2\pi}$ *существует ограниченная производная* $f'(x)$, *причём* $|f'(x)| \leqslant M_1$, *то*

$$E_n \leqslant \frac{12M_1}{n}. \tag{104}$$

Действительно, при этих условиях $f(x) \in \mathrm{Lip}_{M_1} 1$.

Заметим, что если функция $f(x)$ удовлетворяет условию (98), то в обоих соотношениях (103) и (104) можно E_n заменить на e_n.

Лемма. *Пусть у функции* $f(x)$ *существует ограниченная производная* $f'(x)$. *Обозначим через* e_n' *наилучшее приближение производной* $f'(x)$ *полиномами из* h_n^T. *Тогда*

$$E_n \leqslant \frac{12e_n'}{n},$$

а если $f(x) \in C_{2\pi}^*$, *то и*

$$e_n \leqslant \frac{12e_n'}{n}.$$

Доказательство. По определению e_n' существует такой полином без свободного члена

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

что для всех x

$$|f'(x) - U(x)| \leqslant e_n'. \tag{105}$$

Введём в рассмотрение интеграл от $U(x)$:

$$V(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{a_k \sin kx - b_k \cos kx}{k}.$$

Очевидно, что и $V(x)$ принадлежит h_n^T. Полагая

$$f(x) - V(x) = \varphi(x),$$

мы сможем неравенство (105) записать так:

$$|\varphi'(x)| \leqslant e'_n.$$

Поэтому, применяя к $\varphi(x)$ следствие 2 теоремы 1, находим

$$E_n(\varphi) \leqslant \frac{12e'_n}{n}, \tag{106}$$

где $E_n(\varphi)$ есть наилучшее приближение $\varphi(x)$ полиномами из H_n^T.

Заметим далее, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx - \int_{-\pi}^{\pi} V(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx.$$

Поэтому, если $f(x) \in C_{2\pi}^*$, то и $\varphi(x) \in C_{2\pi}^*$ и в (106) можно заменить $E_n(\varphi)$ на $e_n(\varphi)$, где $e_n(\varphi)$ есть наилучшее приближение $\varphi(x)$ полиномами из h_n^T.

Из (106) вытекает существование такого тригонометрического полинома $W(x)$, порядка не выше n, для которого

$$|\varphi(x) - W(x)| \leqslant \frac{12e'_n}{n}. \tag{107}$$

Если же $f(x) \in C_{2\pi}^*$, то стоящий здесь полином $W(x)$ можно взять лишённым свободного члена.

Переписав (107) в форме

$$|f(x) - \{V(x) + W(x)\}| \leqslant \frac{12e'_n}{n},$$

мы видим, что полином $V(x) + W(x)$ отклоняется от $f(x)$ не больше, чем на $\frac{12e'_n}{n}$. Значит, и подавно

$$E_n \leqslant \frac{12e'_n}{n}.$$

Если же $f(x) \in C_{2\pi}^*$, то $W(x)$, а с ним и сумма $V(x) + W(x)$, входит в h_n^T, так что и

$$e_n \leqslant \frac{12e'_n}{n}.$$

Лемма доказана полностью.

Теорема 2. *Пусть $f(x)$ есть непрерывная, 2π-периодическая функция, имеющая p непрерывных производных $f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(p)}(x)$.*

Если $\omega_p(\delta)$ — модуль непрерывности p-й производной $f^{(p)}(x)$, то

$$E_n \leqslant \frac{12^{p+1}\omega_p\left(\frac{1}{n}\right)}{n^p}. \tag{108}$$

Доказательство. По предыдущей лемме

$$E_n \leqslant \frac{12e_n'}{n}.$$

Далее, ввиду того что производная $f'(x)$ входит в $C_{2\pi}^*$, ибо

$$\int_{-\pi}^{\pi} f'(x)\,dx = f(\pi) - f(-\pi) = 0,$$

то по той же лемме

$$e_n' \leqslant \frac{12e_n''}{n},$$

где e_n'' есть наилучшее приближение второй производной $f''(x)$ тригонометрическими полиномами из h_n^T. Ввиду того что и остальные производные входят в $C_{2\pi}^*$, получаем

$$e_n'' \leqslant \frac{12e_n'''}{n},$$

$$\cdots\cdots\cdots$$

$$e_n^{(p-1)} \leqslant \frac{12e_n^{(p)}}{n},$$

где введённые обозначения понятны сами собой. Отсюда

$$E_n \leqslant \frac{12^p e_n^{(p)}}{n^p}.$$

Наконец, на основании добавления к теореме 1

$$e_n^{(p)} \leqslant 12\omega_p\left(\frac{1}{n}\right),$$

откуда и следует (108).

Следствие 1. *Если в условиях теоремы*

$$f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha \qquad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

то

$$E_n \leqslant \frac{12^{p+1} M}{n^{p+\alpha}}.$$

Следствие 2. *Если существует* $f^{(p+1)}(x)$, *причём* $|f^{(p+1)}(x)| \leqslant M_{p+1}$, *то*

$$E_n \leqslant \frac{12^{p+1} M_{p+1}}{n^{p+1}}.$$

Следствие 3. *Если у функции* $f(x) \in C_{2\pi}$ *существуют конечные производные всех порядков, то при любом* p *окажется*

$$\lim_{n\to\infty} (n^p E_n) = 0. \tag{109}$$

В самом деле, все эти производные должны быть непрерывными и, стало быть, каждая из них ограничена. По предыдущему следствию при каждом фиксированном p

$$n^p E_n \leqslant \frac{12^{p+1} M_{p+1}}{n}$$

и, стало быть, выполняется (109).

В том же направлении С. Н. Бернштейном было показано, что для *аналитической* функции будет

$$E_n \leqslant A q^n \qquad (0 < q < 1).$$

Этот результат мы изложим ниже в главе IX.

ГЛАВА V.

ХАРАКТЕРИСТИКА СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ НА ОСНОВАНИИ ПОВЕДЕНИЯ ЕЁ НАИЛУЧШЕГО ПРИБЛИЖЕНИЯ ТРИГОНОМЕТРИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ.

§ 1. Неравенство С. Н. Бернштейна.

В предыдущей главе мы, отправляясь от структурных свойств функции (модуль непрерывности, наличие определённого числа производных и т. п.), делали заключения о скорости убывания её наилучшего приближения E_n. С. Н. Бернштейну [3] принадлежит ряд важных результатов, где он решает обратную задачу: задачу характеристики структурно-дифференциальных свойств функции на основании порядка малости её наилучшего приближения. В целом все эти исследования дают стройную классификацию непрерывных функций по порядкам их наилучших приближений. В настоящей главе мы изложим некоторые из упомянутых результатов С. Н. Бернштейна, ограничиваясь, как и выше, рассмотрением непрерывных, 2π-периодических функций.

Основным средством для получения относящихся сюда результатов служит весьма замечательное неравенство, также принадлежащее С. Н. Бернштейну [3].

Теорема. *Если*

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx)$$

есть тригонометрический полином порядка n, то для *его производной* $T'(x)$ *справедлива оценка*

$$|T'(x)| \leqslant n \max |T(x)|. \tag{110}$$

Доказательство. Предположим, что

$$\max |T'(x)| = nL,$$

где $L > \max |T(x)|$.

Ввиду непрерывности функции $|T'(x)|$ она достигает своего наибольшего значения nL в какой-то точке z, так что $T'(z) = \pm nL$. Пусть для определённости

$$T'(z) = nL. \tag{111}$$

Так как nL, очевидно, будет максимальным значением $T'(x)$, то

$$T''(z) = 0. \tag{112}$$

Рассмотрим теперь тригонометрический полином

$$S(x) = L \sin(nx - nz) - T(x).$$

Он сам, так же, как и его производная

$$R(x) = Ln \cos(nx - nz) - T'(x),$$

есть полином n-го порядка.

Введём в рассмотрение следующие точки:

$$u_0 = z + \frac{\pi}{2n}, \quad u_1 = u_0 + \frac{\pi}{n}, \quad u_2 = u_0 + \frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad u_{2n} = u_0 + 2\pi.$$

Легко видеть, что

$$S(u_0) = L - T(u_0) > 0,$$
$$S(u_1) = -L - T(u_1) < 0,$$
$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$
$$S(u_{2n}) = L - T(u_{2n}) > 0,$$

потому что $\max |T(x)| < L$. В таком случае, в каждом из $2n$ интервалов (u_0, u_1), (u_1, u_2), ..., (u_{2n-1}, u_{2n}) содержится по корню $y_0, y_1, \ldots, y_{2n-1}$ функции $S(x)$:

$$S(y_i) = 0$$
$$(u_i < y_i < u_{i+1}; \quad i = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Нетрудно понять, что

$$y_{2n-1} < y_0 + 2\pi,$$

ибо

$$y_{2n-1} < u_{2n} = u_0 + 2\pi < y_0 + 2\pi.$$

Пусть

$$y_{2n} = y_0 + 2\pi;$$

тогда $S(y_{2n}) = S(y_0) = 0$. По теореме Ролля в каждом из $2n$ интервалов (y_0, y_1), (y_1, y_2), $\ldots$, (y_{2n-1}, y_{2n}) находится по корню производной $R(x)$ полинома $S(x)$. Пусть эти корни суть $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$:

$$R(x_i) = 0$$

$$(y_i < x_i < y_{i+1};\ i = 0, 1, \ldots, 2n-1).$$

Легко видеть, что

$$x_{2n-1} < x_0 + 2\pi,$$

так что корни x_i попарно не эквивалентны друг другу.

Заметим теперь, что, в силу (111),

$$R(z) = nL - T'(z) = 0, \tag{113}$$

т. е. z есть корень полинома $R(x)$. Так как более, чем $2n$, попарно неэквивалентных корней у этого полинома быть не может, то z эквивалентен одному из корней $x_0, x_1, \ldots, x_{2n-1}$; пусть, например,

$$z \backsim x_i.$$

Так как

$$R'(x) = -n^2 L \sin(nx - nz) - T''(x),$$

то, в силу (112), имеем

$$R'(z) = 0.$$

Отсюда и из (113) вытекает, что z, а с ним и x_i, является *двойным* корнем полинома $R(x)$. Итак, у $R(x)$ имеются корни

$$x_0, x_1, \ldots, x_{i-1}, x_{i+1}, \ldots, x_{2n}$$

в количестве $(2n-1)$-го и ещё двойной корень x_i. Следовательно, с учётом кратности число неэквивалентных корней $R(x)$ оказывается не меньшим $2n+1$.

Это было бы возможно лишь при условии, что $R(x) \equiv 0$. Но тогда должно было бы быть

$$S(x) = \text{const.},$$

что явно неверно, ибо $S(u_0) > 0$, $S(u_1) < 0$. Таким образом получается противоречие, которое и доказывает теорему.

Следствие. *В условиях теоремы*

$$|T^{(p)}(x)| \leqslant n^p \max |T(x)|.$$

Заметим, между прочим, что в оценке (110) коэффициента n нельзя уменьшить. Например, для $T(x) = \sin nx$ имеем

$$\max |T'(x)| = n \max |T(x)|.$$

§ 2. Некоторые сведения из теории рядов.

Нам понадобятся ниже некоторые предложения, относящиеся к теории рядов, но не всегда излагаемые в общих курсах анализа.

Лемма 1 (Н. Г. Абель). *Пусть даны n чисел $a_1, a_2, \ldots, a_n$. Положим*

$$s_k = \sum_{i=1}^{k} a_i,$$

и пусть

$$|s_k| \leqslant A \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Если

$$q_1 > q_2 > \ldots > q_n > 0,$$

то

$$\left| \sum_{k=1}^{n} a_k q_k \right| \leqslant A q_1.$$

Доказательство. Если $k > 1$, то $a_k = s_k - s_{k-1}$. Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} a_k q_k = s_1 q_1 + \sum_{k=2}^{n} (s_k - s_{k-1}) q_k = \sum_{k=1}^{n} s_k q_k - \sum_{k=2}^{n} s_{k-1} q_k.$$

Отсюда

$$\sum_{k=1}^{n} a_k q_k = \sum_{k=1}^{n-1} s_k (q_k - q_{k+1}) + s_n q_n$$

и, стало быть,

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k q_k\right| \leqslant A \left[\sum_{k=1}^{n-1} (q_k - q_{k+1}) + q_n\right] = Aq_1.$$

Определение. Будем говорить, что ряд

$$a_1 + a_2 + a_3 + \ldots$$

удовлетворяет *условию Абеля*, если существует постоянная A (которую мы будем называть постоянной Абеля), такая, что

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant A \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Очевидно, всякий сходящийся ряд удовлетворяет условию Абеля, но обратное, конечно, неверно, как это видно, хотя бы из примера ряда $1 - 1 + 1 - 1 + \ldots$

Теорема 1 (Н. Г. Абель). *Пусть ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k$ удовлетворяет условию Абеля с постоянной A. Каковы бы ни были числа*

$$q_1 > q_2 > \ldots > q_n > \ldots, \qquad \lim q_n = 0,$$

ряд $\sum_{k=1}^{\infty} a_k q_k$ сходится, и абсолютная величина его суммы не превосходит Aq_1.

Доказательство. Положим

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k q_k.$$

При $m > n$ будем иметь

$$S_m - S_n = \sum_{k=n+1}^{m} a_k q_k. \tag{114}$$

Но

$$\left|\sum_{k=n+1}^{i} a_k\right| = \left|\sum_{k=1}^{i} a_k - \sum_{k=1}^{n} a_k\right| \leqslant 2A.$$

Значит, применяя к сумме (114) лемму 1, найдём

$$|S_m - S_n| \leqslant 2Aq_{n+1}.$$

Если n достаточно велико, то эта величина сколь угодно мала, откуда и следует *сходимость* ряда $\sum a_k q_k$. С другой стороны, переходя к пределу в неравенстве

$$\left|\sum_{k=1}^{n} a_k q_k\right| \leqslant Aq_1,$$

сразу получаем требуемую оценку для суммы ряда.

Замечание. Если в условиях теоремы члены ряда $\sum a_k$ суть функции аргумента x, заданные на каком-нибудь множестве $E=\{x\}$, но постоянная Абеля может быть взятой независимо от x, то ряд $\sum a_k q_k$ сходится на множестве E *равномерно*.

В самом деле, ряд $\sum\limits_{k=n+1}^{\infty} a_k$ удовлетворяет условию Абеля с постоянной $2A$. Применяя к нему доказанную в теореме оценку, получим

$$\left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k q_k\right| \leqslant 2Aq_{n+1},$$

и правая часть этого неравенства станет сколь угодно мала для $n > N$, где N не зависит от x.

Лемма 2. *Если* $x \neq 2k\pi$, *то каждый из рядов*

$$\cos x + \cos 2x + \cos 3x + \ldots, \tag{115}$$

$$\sin x + \sin 2x + \sin 3x + \ldots \tag{116}$$

удовлетворяет условию Абеля с постоянной

$$A = \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}. \tag{117}$$

Доказательство. Рассмотрим частные суммы наших рядов

$$C_n = \sum_{k=1}^{n} \cos kx, \quad S_n = \sum_{k=1}^{n} \sin kx.$$

Они представляют собой вещественную и мнимую компоненты суммы

$$E_n = \sum_{k=1}^{n} e^{kxi} = \frac{e^{xi} - e^{(n+1)xi}}{1 - e^{xi}}.$$

Но

$$|E_n| < \frac{2}{|1 - e^{xi}|} = \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|},$$

откуда и подавно

$$|C_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}, \quad |S_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin \frac{x}{2}\right|}.$$

Заметим, что ряды

$$\sum_{k=n}^{\infty} \cos kx, \quad \sum_{k=n}^{\infty} \sin kx \qquad (x \neq 2k\pi),$$

получающиеся из (115) и (116) удалением конечного числа первых членов, удовлетворяют условию Абеля с той же постоянной (117).

Из сопоставления леммы 2 с теоремой Абеля вытекает

Теорема 2. *Если*

$$q_1 > q_2 > q_3 > \ldots, \qquad \lim q_n = 0,$$

то при $x \neq 2k\pi$ *сходятся ряды*

$$\sum_{k=1}^{\infty} q_k \cos kx, \quad \sum_{k=1}^{\infty} q_k \sin kx.$$

Их сходимость равномерна в каждом сегменте $[a, b]$, *не содержащем точек* $2k\pi$.

В самом деле, наименьшее значение непрерывной функции $\left|\sin\frac{x}{2}\right|$ в таком сегменте отлично от нуля, т. е.

$$\left|\sin\frac{x}{2}\right| \geqslant \mu > 0 \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

и за постоянную Абеля можно взять число $\frac{1}{\mu}$, не зависящее от x.

Интересно, что ряд синусов $\sum q_k \sin kx$ тривиальным образом сходится и для $x = 2k\pi$, т. е. он сходится *на всей оси*, но равномерности сходимости на всей оси гарантировать *нельзя*. Например, всюду сходящийся ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}$$

не сходится равномерно на всей оси. Это видно хотя бы из такого рассуждения: если бы ряд сходился равномерно на всей оси, то его частные суммы были бы ограничены одним числом

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}\right| \leqslant M.$$

Отсюда и из формулы Парсеваля (69) следовало бы, что

$$\pi \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} = \int_{-\pi}^{\pi} \left(\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{\sqrt{k}}\right)^2 dx \leqslant 2\pi M^2,$$

что, однако, противоречит расходимости гармонического ряда

Приведённый пример показывает, что частные суммы всюду сходящегося ряда $\sum q_k \sin kx$ могут не быть равномерно ограничены. В связи с этим отрицательным результатом докажем лемму, которая будет нами использована в дальнейшем.

Лемма 3. *При всех x и n справедливо неравенство*

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant 2\sqrt{\pi}. \qquad (118)$$

Доказательство. Допустим, что $0 < x < \pi$. Пусть m есть целое число, удовлетворяющее неравенству

$$m \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{x} < m+1. \tag{119}$$

Тогда

$$\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin kx}{k}\right| + \left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right|. \tag{120}$$

(Если $m=0$, то исчезает первое, а если $m \geqslant n$, то — второе слагаемое правой части.)

В силу элементарного неравенства $|\sin\alpha| \leqslant |\alpha|$, имеем

$$\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \sum_{k=1}^{m} \frac{kx}{k} = mx \leqslant \sqrt{\pi}. \tag{121}$$

С другой стороны, по лемме Абеля и замечанию к лемме 2

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\frac{x}{2}\right|}\,\frac{1}{m+1}.$$

Принимая во внимание, что, в силу (94) и (119),

$$\sin\frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}, \quad m+1 > \frac{\sqrt{\pi}}{x},$$

находим

$$\left|\sum_{k=m+1}^{n} \frac{\sin kx}{k}\right| \leqslant \frac{1}{\frac{x}{\pi}\,\frac{\sqrt{\pi}}{x}} = \sqrt{\pi},$$

откуда в связи с (121) и (120) и вытекает требуемая оценка для $x \in (0, \pi)$. Но в силу чётности функции $\left|\sum \frac{\sin kx}{k}\right|$ из справедливости оценки (118) для $x \in (0, \pi)$ вытекает её справедливость и для $-\pi < x < 0$. Для $x = 0, \pi, -\pi$ оценка тривиальна, т. е. она верна для $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, а тогда благодаря периодичности суммы $\sum \frac{\sin kx}{k}$ она верна при всех x.

§ 3. Теоремы С. Н. Бернштейна.

Теорема 1. *Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и E_n—её наилучшее приближение полиномами из H_n^T. Если при всех натуральных n*

$$E_n \leqslant \frac{A}{n^\alpha} \qquad (0 < \alpha \leqslant 1), \quad (122)$$

то при $\alpha < 1$ можно утверждать, что

$$f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha,$$

а если $\alpha = 1$, то

$$f(x) \in W.$$

Доказательство. Для всякого натурального n существует тригонометрический полином $T_n(x)$ порядка не выше n, для которого

$$|T_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{A}{n^\alpha}.$$

Положим

$$U_0(x) = T_1(x),$$
$$U_n(x) = T_{2^n}(x) - T_{2^{n-1}}(x) \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots).$$

Легко видеть, что

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x),$$

ибо

$$\sum_{n=0}^{N} U_n(x) = T_{2^N}(x) \rightrightarrows f(x).$$

Возьмём какое-нибудь число δ, для которого

$$0 < \delta \leqslant \frac{1}{2},$$

и пусть $|x - y| \leqslant \delta$. Тогда

$$f(x) - f(y) = \sum_{n=0}^{\infty} [U_n(x) - U_n(y)].$$

Пусть натуральное число m подобрано из условия

$$2^{m-1} \leqslant \frac{1}{\delta} < 2^m \qquad (123)$$

(очевидно, $m \geqslant 2$). В таком случае

$$|f(x) - f(y)| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{n=0}^{m-1} |U_n(x) - U_n(y)| + \sum_{n=m}^{\infty} |U_n(x)| + \sum_{n=m}^{\infty} |U_n(y)|.$$

Оценим полином $U_n(x)$:

$$|U_n(x)| \leqslant |T_{2^n}(x) - f(x)| + |f(x) - T_{2^{n-1}}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A}{2^{n\alpha}} + \frac{A}{2^{(n-1)\alpha}} = \frac{A(1+2^\alpha)}{2^{n\alpha}}.$$

Отсюда

$$\sum_{n=m}^{\infty} |U_n(x)| \leqslant A(1+2^\alpha) \sum_{n=m}^{\infty} \frac{1}{2^{n\alpha}} = \frac{A(1+2^\alpha)}{1-2^{-\alpha}} \frac{1}{2^{m\alpha}},$$

и, стало быть,

$$|f(x) - f(y)| \leqslant \sum_{n=0}^{m-1} |U_n(x) - U_n(y)| + \frac{B}{2^{m\alpha}},$$

где положено для краткости

$$B = 2\,\frac{1+2^\alpha}{1-2^{-\alpha}}\,A.$$

С другой стороны, $U_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше 2^n. Значит, для его производной на основании неравенства С. Н. Бернштейна (110) справедлива оценка

$$|U'_n(x)| \leqslant 2^n \max |U_n(x)| \leqslant 2^n \frac{A(1+2^\alpha)}{2^{n\alpha}} = A(1+2^\alpha)2^{n(1-\alpha)}.$$

На основании формулы Лагранжа

$$|U_n(x) - U_n(y)| = |U'_n(z)|\,|x-y| \leqslant A(1+2^\alpha)\,2^{n(1-\alpha)}\delta,$$

и потому

$$|f(x)-f(y)| \leqslant A(1+2^{\alpha})\delta \sum_{n=0}^{m-1} 2^{n(1-\alpha)} + \frac{B}{2^{m\alpha}}.$$

Ввиду того что x и y стеснены единственным условием $|x-y| \leqslant \delta$, последнее неравенство показывает, что

$$\omega(\delta) \leqslant C\delta \sum_{n=0}^{m-1} 2^{n(1-\alpha)} + \frac{B}{2^{m\alpha}},$$

где $C = A(1+2^{\alpha})$. Замечая, что, в силу (123),

$$\frac{1}{2^m} < \delta,$$

придадим последнему неравенству вид

$$\omega(\delta) \leqslant C\delta \sum_{n=0}^{m-1} 2^{n(1-\alpha)} + B\delta^{\alpha}. \qquad (124)$$

До сих пор рассуждение одинаково относилось как к тому случаю, когда $\alpha < 1$, так и к тому, когда $\alpha = 1$. Теперь нам придётся различить эти случаи.

Если $\alpha < 1$, то

$$\sum_{n=0}^{m-1} 2^{n(1-\alpha)} = \frac{2^{m(1-\alpha)}-1}{2^{1-\alpha}-1} < \frac{2^{m(1-\alpha)}}{2^{1-\alpha}-1}.$$

Но по (123)

$$2^m < \frac{2}{\delta}.$$

Стало быть,

$$\sum_{n=0}^{m-1} 2^{n(1-\alpha)} < \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}\frac{1}{\delta^{1-\alpha}}$$

и

$$\omega(\delta) < C\delta \frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1}\frac{1}{\delta^{1-\alpha}} + B\delta^{\alpha}.$$

Иначе говоря,

$$\omega(\delta) < \left(\frac{2^{1-\alpha}}{2^{1-\alpha}-1} C + B\right) \delta^\alpha = D\delta^\alpha \qquad \left(\delta < \frac{1}{2}\right),$$

а это и означает, что $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$.

Если же $\alpha = 1$, то неравенство (124) принимает вид

$$\omega(\delta) \leqslant C\delta m + B\delta.$$

Из неравенства $2^{m-1} \leqslant \frac{1}{\delta}$ вытекает, что $m - 1 \leqslant \frac{|\ln \delta|}{\ln 2}$, а так как $m \leqslant 2(m-1)$ (ибо $m \geqslant 2$), то

$$m \leqslant \frac{2}{\ln 2} |\ln \delta|,$$

откуда

$$\omega(\delta) \leqslant \delta \left[\frac{2C}{\ln 2} |\ln \delta| + B\right].$$

Обозначив через K число, большее, чем $\frac{2C}{\ln 2}$ и B, находим

$$\omega(\delta) \leqslant K\delta(|\ln \delta| + 1) \qquad \left(\delta < \frac{1}{2}\right),$$

что и завершает доказательство.

Сопоставляя теорему С. Н. Бернштейна с результатами Д. Джексона из предыдущей главы, мы видим, что *для того, чтобы функция $f(x)$ удовлетворяла условию Липшица порядка $\alpha < 1$, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$E_n \leqslant \frac{A}{n^\alpha}.$$

При $\alpha = 1$ это условие остаётся необходимым для того, чтобы $f(x)$ входила в $\mathrm{Lip}\,1$, но уже перестаёт быть для этого достаточным. Естественно спросить, действительно ли это так или же мы имеем дело здесь с недостатком доказательства. Как показывает нижеследующий пример, из неравенства

$$E_n \leqslant \frac{A}{n}$$

не вытекает, что $f(x) \in \mathrm{Lip}\,1$.

Пример. Пусть

$$\psi(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\sin kx}{k^2}. \tag{125}$$

Этот ряд мажорируется сходящимся рядом $\sum \frac{1}{k^2}$, и потому $\psi(x)\in C_{2\pi}$. Положим

$$U_n(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\sin kx}{k^2}.$$

Тогда

$$|U_n(x)-\psi(x)|\leqslant\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{k^2}<\sum_{k=n+1}^{\infty}\frac{1}{(k-1)k}=$$

$$=\sum_{k=n+1}^{\infty}\left(\frac{1}{k-1}-\frac{1}{k}\right)=\frac{1}{n}.$$

Значит, и подавно для функции (125)

$$E_n<\frac{1}{n}.$$

Вместе с тем она не удовлетворяет условию Липшица первого порядка. Чтобы обнаружить этот факт, заметим, что ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k},$$

получающийся формальным дифференцированием ряда (125), равномерно сходится во всяком сегменте $[a, b]$, не содержащем точек $0, \pm 2\pi, \pm 4\pi, \ldots$ Значит, при $0<x<2\pi$

$$\psi'(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos kx}{k}.$$

Мы покажем, что

$$\lim_{x\to+0}\psi'(x)=+\infty. \tag{126}$$

Действительно, взяв произвольное $A > 0$, найдём такое N, что

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} > A + 2.$$

Пусть $0 < x < \frac{\pi}{2N}$ и X — целая часть числа $\frac{\pi}{2x}$:

$$X \leqslant \frac{\pi}{2x} < X + 1.$$

Очевидно, $X \geqslant N$. Тогда

$$\psi'(x) = \sum_{k=1}^{N} \frac{\cos kx}{k} + \sum_{k=N+1}^{X} \frac{\cos kx}{k} + \sum_{k=X+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}.$$

Если $k \leqslant X$, то $kx \leqslant \frac{\pi}{2}$ и, стало быть, $\cos kx \geqslant 0$. Отсюда

$$\psi'(x) \geqslant \sum_{k=1}^{N} \frac{\cos kx}{k} + \sum_{k=X+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k}.$$

Применяя теорему Абеля и лемму 2 из предыдущего параграфа, находим

$$\left| \sum_{k=X+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} \right| \leqslant \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \frac{1}{X+1} < \frac{1}{\sin \frac{x}{2}} \frac{2x}{\pi},$$

а так как $\sin \frac{x}{2} > \frac{x}{\pi}$, то

$$\left| \sum_{k=X+1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k} \right| < 2,$$

откуда

$$\psi'(x) > \sum_{k=1}^{N} \frac{\cos kx}{k} - 2.$$

Если $x \to 0$, то $\cos kx \to 1$, значит, для достаточно малых x $(0 < x < \sigma)$ окажется

$$\sum_{k=1}^{N} \frac{\cos kx}{k} > A + 2$$

и, стало быть, для x, меньших, чем $\min\left\{\sigma, \frac{\pi}{2N}\right\}$,

$$\psi'(x) > A,$$

что и доказывает (126).

Если x и y стремятся к нулю, то

$$\left|\frac{\psi(x) - \psi(y)}{x - y}\right| = \psi'(z) \to +\infty$$

и $\psi(x)$ не входит в $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Полученный результат наводит на мысль, что может быть теорема Джексона допускает усиление, т. е. что для функций, входящих в $\mathrm{Lip}\,1$, имеет место более быстрое стремление E_n к нулю, чем это даёт оценка

$$E_n \leqslant \frac{A}{n}. \tag{127}$$

Однако и это не так, и оценка (127) является окончательной; просто здесь мы сталкиваемся с тем обстоятельством, что класс $\mathrm{Lip}\,1$ есть правильная часть класса функций $f(x)$, для которых $E_n(f) < \frac{A}{n}$ (который в свою очередь содержится в W).

Примером, показывающим, что оценку (127) улучшить нельзя, может служить функция

$$|\sin x|.$$

Она, очевидно, входит в $\mathrm{Lip}\,1$, но, как это будет установлено в § 3 главы 8, для неё

$$E_n > \frac{1}{2\pi(2n+1)}.$$

Теорема 2. *Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и E_n — её наилучшее приближение полиномами из H_*^T. Если*

$$E_n \leqslant \frac{A}{n^{p+\alpha}},$$

где p — натуральное число, а $0<\alpha\leqslant 1$, то у $f(x)$ существуют непрерывные производные $f'(x), f''(x), \ldots, f^{(p)}(x)$, причём последняя из них $f^{(p)}(x)$ входит в $\operatorname{Lip}\alpha$, если $\alpha<1$, и она входит в W, если $\alpha=1$.

Доказательство. Как и выше, вводим полиномы $T_n(x)\in H_n^T$, для которых

$$|T_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{A}{n^{p+\alpha}},$$

и полагаем

$$U_0(x)=T_1(x),$$
$$U_n(x)=T_{2^n}(x)-T_{2^{n-1}}(x)\qquad (n>0).$$

Очевидно, $U_n(x)\in H_{2^n}^T$. Вместе с тем

$$|U_n(x)|\leqslant|T_{2^n}(x)-f(x)|+|f(x)-T_{2^{n-1}}(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\frac{A}{2^{n(p+\alpha)}}+\frac{A}{2^{(n-1)(p+\alpha)}},$$

так что

$$|U_n(x)|\leqslant\frac{B}{2^{np+n\alpha}}.$$

Применяя к $U_n(x)$ следствие неравенства С. Н. Бернштейна, находим

$$|U_n^{(p)}(x)|\leqslant\frac{B}{2^{n\alpha}}.\tag{128}$$

Значит, ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{(p)}(x),$$

получающийся из ряда

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n(x)$$

с помощью формального p-кратного дифференцирования, сходится равномерно. Но это означает существование p-й (и тем более всех предыдущих) производной $f^{(p)}(x)$, и равенства

$$f^{(p)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}U_n^{(p)}(x).$$

Остаётся определить класс, которому принадлежит $f^{(p)}(x)$. С этой целью заметим, что, в силу (128),

$$\left| f^{(p)}(x) - \sum_{n=0}^{m} U_n^{(p)}(x) \right| \leqslant \sum_{n=m+1}^{\infty} \frac{B}{2^{n\alpha}} = \frac{C}{2^{m\alpha}}.$$

Но, очевидно,

$$\sum_{n=0}^{m} U_n^{(p)}(x)$$

есть тригонометрический полином порядка не выше 2^m. Значит, обозначая наилучшие приближения для $f^{(p)}(x)$ через $E_n^{(p)}$, будем иметь

$$E_{2^m}^{(p)} \leqslant \frac{C}{2^{m\alpha}}.$$

Если $n > 2$ есть произвольное натуральное число, то подбираем такое m, чтобы оказалось

$$2^m \leqslant n < 2^{m+1}.$$

Тогда

$$E_n^{(p)} \leqslant E_{2^m}^{(p)} \leqslant \frac{C}{2^{m\alpha}} = \frac{2^\alpha C}{2^{(m+1)\alpha}} < \frac{2^\alpha C}{n^\alpha} = \frac{D}{n^\alpha}.$$

Иначе говоря, для p-й производной $f^{(p)}(x)$ выполнены условия первой теоремы Бернштейна, что и завершает доказательство.

Сопоставляя эту теорему со следствием 1 теоремы 2 из главы IV § 3, мы видим, что *неравенство*

$$E_n \leqslant \frac{A}{n^{p+\alpha}} \qquad (p \text{ — натуральное, } 0 < \alpha < 1)$$

необходимо и достаточно, чтобы у $f(x)$ существовали p непрерывных производных, последняя из которых входит в $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Для $\alpha = 1$ это условие, оставаясь необходимым, уже перестаёт быть достаточным. Это можно подтвердить тем же примером (125), если рассмотреть функцию $\Psi(x)$, получающуюся из (125) p-кратным интегрированием ряда (без введения постоянных).

Например, при $p = 1$

$$\Psi(x) = -\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\cos kx}{k^3}.$$

Для этой функции $E_n < \frac{1}{n^3}$, но её первая производная $\psi(x)$ не входит в $\mathrm{Lip}\, 1$.

Теорема 3. *Для того чтобы непрерывная, 2π-периодическая функция $f(x)$ имела производные любого порядка, необходимо и достаточно, чтобы при любом p было*

$$\lim_{n\to\infty} (n^p E_n) = 0. \tag{129}$$

Необходимость условия (129) была нами установлена в конце предыдущей главы. Предполагая его выполненным, будем иметь для $n > N_p$, что

$$n^{p+1} E_n < 1.$$

Если A_p есть наибольшее из чисел

$$1,\ E_1,\ 2^{p+1}E_2,\ \ldots,\ N_p^{p+1} E_{N_p},$$

то при всех n

$$E_n \leqslant \frac{A_p}{n^{p+1}},$$

откуда вытекает существование и непрерывность всех производных до порядка p (включительно). Ввиду произвольности p теорема доказана.

§ 4. Теоремы А. Зигмунда.

В предыдущем параграфе мы установили, что класс непрерывных, 2π-периодических функций, для которых E_n удовлетворяет неравенству $E_n < \frac{C}{n}$, существенно шире класса $\mathrm{Lip}\, 1$ и является частью класса W. Интересно выяснить, какова *структурная* характеристика этого промежуточного класса. Эта проблема была решена в недавней работе А. Зигмунда [2]. Здесь мы приведём его результаты.

Определение. Обозначим через Z класс непрерывных, 2π-периодических функций $f(x)$, для которых существует такая постоянная M, что при всех x и при всех $h>0$

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)| \leqslant Mh.$$

Теорема 1. *Для того чтобы непрерывная, 2π-периодическая функция $f(x)$ входила в класс Z, необходимо и достаточно, чтобы её наилучшее приближение E_n тригонометрическими полиномами удовлетворяло неравенству*

$$E_n < \frac{A}{n}.$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in Z$. Введём в рассмотрение сингулярный интеграл Джексона (96):

$$U_n(x) = \frac{3}{2\pi n(2n^2+1)} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \left[\frac{\sin n\frac{t-x}{2}}{\sin\frac{t-x}{2}} \right]^4 dt.$$

Как было установлено в § 2 главы IV, где уже фигурировал этот интеграл, справедливо равенство (см. (100))

$$U_n(x) - f(x) =$$
$$= \frac{3}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} [f(x+2t)-2f(x)+f(x-2t)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

Значит, в силу условия $f(x) \in Z$, оказывается

$$|U_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{6M}{\pi n(2n^2+1)} \int_0^{\pi/2} t \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^4 dt.$$

Применяя лемму 4 из § 2 главы IV, находим отсюда

$$|U_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{3\pi M}{4n}.$$

Но $U_n(x)$ есть тригонометрический полином порядка $2n-2$. Значит,

$$E_{2n-2} \leqslant \frac{3\pi M}{4n}.$$

Отсюда, совершенно так же, как при доказательстве первой теоремы Джексона, мы заключаем, что

$$E_n \leqslant \frac{3\pi M}{2n}.$$

Итак, в части необходимости высказанного условия теорема Зигмунда доказана. Допустим теперь, что

$$E_n < \frac{A}{n}.$$

Как и при доказательстве теоремы С. Н. Бернштейна, вводим полиномы $T_n(x)$ наилучшего приближения и полиномы

$$U_n(x) = T_{2^n}(x) - T_{2^{n-1}}(x) \qquad [U_0(x) = T_1(x)].$$

Тогда, как и выше,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} U_n(x), \quad |U_n(x)| < \frac{3A}{2^n},$$

причём порядок $U_n(x)$ есть 2^n. Выбрав произвольное натуральное m, мы будем иметь

$$\sum_{n=m}^{\infty} |U_n(x)| < \sum_{n=m}^{\infty} \frac{3A}{2^n} = \frac{6A}{2^m}.$$

Значит, при любом $h>0$ окажется

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)| <$$
$$< \sum_{n=0}^{m-1} |U_n(x+h)-2U_n(x)+U_n(x-h)| + \frac{24A}{2^m}.$$

Но по формуле Лагранжа

$$U_n(x+h)-2U_n(x)+U_n(x-h) =$$
$$= [U_n(x+h)-U_n(x)] - [U_n(x)-U_n(x-h)] =$$
$$= h[U'_n(\xi) - U'_n(\eta)],$$

где $x-h<\eta<x<\xi<x+h$. Второе применение той же формулы даёт

$$U_n(x+h)-2U_n(x)+U_n(x-h)=hU_n''(\zeta)(\xi-\eta),$$

откуда

$$|U_n(x+h)-2U_n(x)+U_n(x-h)|\leqslant 2h^2\max|U_n''(x)|.$$

С другой стороны, двукратное применение неравенства С. Н. Бернштейна (110) даёт оценку

$$\max|U_n''(x)|\leqslant 2^{2n}\frac{3A}{2^n}=3A2^n.$$

Значит,

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant 6Ah^2\sum_{n=0}^{m-1}2^n+\frac{24A}{2^m},$$

или

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|<6Ah^2 2^m+\frac{24A}{2^m}.$$

До сих пор m было произвольным натуральным числом. Теперь подчиним его условию

$$\frac{1}{2^m}\leqslant h<\frac{1}{2^{m-1}}$$

(мы предположим, что $h<1$). Тогда предыдущее неравенство принимает вид

$$|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)|\leqslant 36Ah,$$

и теорема Зигмунда доказана полностью. Правда, при выборе h мы предположили, что $h<1$, но если $h\geqslant 1$, то постоянную $36A$ достаточно заменить на $4\max|f(x)|$, так что за M нужно взять большее из чисел $36A$ и $4\max|f(x)|$.

Приведём без доказательства ещё следующие результаты А. Зигмунда:

Теорема 2. *Неравенство*

$$E_n^{\mathrm{T}}(f)\leqslant\frac{A}{n^{p+1}}$$

необходимо и достаточно для того, чтобы у функции $f(x)$ *(мы предполагаем* $f(x)\in C_{2\pi}$*) существовали* p *производных*

$f'(x)$, $f''(x)$, ..., $f^{(p)}(x)$, причём последняя $f^{(p)}(x)$ входит в Z.

Теорема 3. *Неравенство*

$$E_n^T(f) < \frac{\alpha_n}{n} \qquad (\lim \alpha_n = 0)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы функция $f(x) \in C_{2\pi}$ удовлетворяла условию

$$|f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)| < \alpha(h) h,$$

где $\alpha(h)$ стремится к нулю вместе с h.

Теорема 4. *Неравенство*

$$E_n^T(f) < \frac{\alpha_n}{n^{p+1}} \qquad (\lim \alpha_n = 0)$$

необходимо и достаточно для того, чтобы функция $f(x) \in C_{2\pi}$ имела p производных, причём последняя, $f^{(p)}(x)$ удовлетворяла условию

$$|f^{(p)}(x+h) - 2f^{(p)}(x) + f^{(p)}(x-h)| < \alpha(h) h \quad (\lim_{h\to 0} \alpha(h) = 0).$$

§ 5. Существование функции, имеющей наперёд заданные наилучшие приближения.

Изложенные факты дополняются следующим принципиальным результатом С. Н. Бернштейна [13]:

Теорема. *Каковы бы ни были числа*

$$A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots, \qquad \lim_{n\to\infty} A_n = 0,$$

существует такая непрерывная, 2π-периодическая функция $f(x)$, для которой именно эти числа являются наилучшими приближениями

$$E_n^T(f) = A_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Более того, всегда существует *чётная* функция, удовлетворяющая этому условию.

Доказательство этой теоремы имеет весьма сложный характер. Мы предпошлём ему ряд небольших лемм.

Лемма 1. *Для любой $f(x) \in C_{2\pi}$ и любого постоянного λ*

$$E_n(\lambda f) = |\lambda| E_n(f).$$

Обозначая через $T(x)$ полином наилучшего приближения для $f(x)$, будем иметь

$$|T(x) - f(x)| \leqslant E_n(f).$$

Умножая это неравенство на $|\lambda|$, мы найдём,

$$E_n(\lambda f) \leqslant |\lambda| E_n(f).$$

Отсюда, предполагая $\lambda \neq 0$ (ибо для $\lambda = 0$ лемма тривиальна), находим

$$E_n(f) = E_n\left(\frac{1}{\lambda}\lambda f\right) \leqslant \frac{1}{|\lambda|} E_n(\lambda f),$$

и лемма доказана.

Лемма 2. *Для любых функций $f(x)$ и $g(x)$ из $C_{2\pi}$ оказывается*

$$E_n(f+g) \leqslant E_n(f) + E_n(g).$$

Если $U(x)$ и $V(x)$—полиномы, наименее отклоняющиеся от $f(x)$ и $g(x)$, то

$$|[f(x)+g(x)] - [U(x)+V(x)]| \leqslant E_n(f) + E_n(g),$$

что и доказывает лемму.

Лемма 3. *Если $f(x)$ и $g(x)$ —две функции из $C_{2\pi}$, то величина*

$$\psi(\lambda) = E_n(f+\lambda g)$$

есть непрерывная функция аргумента λ.

Фиксируем какое-нибудь λ_0 и обозначим через $T(x)$ полином наилучшего приближения к функции

$$f(x) + \lambda_0 g(x),$$

так что

$$|f(x) + \lambda_0 g(x) - T(x)| \leqslant \psi(\lambda_0).$$

В таком случае при любом λ окажется

$$|f(x) + \lambda g(x) - T(x)| \leqslant \psi(\lambda_0) + M|\lambda - \lambda_0|,$$

где $M = \max|g(x)|$. Отсюда вытекает

$$\psi(\lambda) \leqslant \psi(\lambda_0) + M|\lambda - \lambda_0|.$$

Но так как λ и λ_0 совершенно равноправны, то

$$|\psi(\lambda) - \psi(\lambda_0)| \leqslant M|\lambda - \lambda_0|.$$

Лемма доказана.

Лемма 4. *Если в условиях леммы 3 функция $g(x)$ не входит в H_n^T, то*

$$\lim_{\lambda\to\infty} \psi(\lambda) = +\infty.$$

Действительно, в силу леммы 2,

$$E_n(\lambda g) \leqslant E_n(f + \lambda g) + E_n(-f),$$

что, в силу леммы 1, можно записать и так:

$$|\lambda| E_n(g) \leqslant \psi(\lambda) + E_n(f).$$

Но так как $g(x)$ не входит в H_n^T, то $E_n(g) > 0$, и лемма становится очевидной.

Лемма 5. *Если $T(x)$—полином из H_n^T, то для всякой $f(x) \in C_{2\pi}$*

$$E_n(f + T) = E_n(f).$$

Действительно, $E_n(T) = 0$. Отсюда и из леммы 2 вытекает

$$E_n(f + T) \leqslant E_n(f).$$

С другой стороны, по той же лемме

$$E_n(f) = E_n((f + T) + (-T)) \leqslant E_n(f + T).$$

Лемма 6. *Если $f(x)$ есть чётная, 2π-периодическая, непрерывная функция, то можно найти такую постоянную L, что*

$$E_n(f(x) + L\cos(n+1)x) = E_{n+1}(f).$$

Пусть $T(x)$ есть полином наименьшего отклонения от $f(x)$ в классе H_{n+1}^T. Так как он есть чётный полином, то

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n+1} a_k \cos kx.$$

Неравенство

$$|f(x) - T(x)| \leqslant E_{n+1}(f),$$

определяющее $T(x)$, можно переписать так:

$$\left|[f(x) - a_{n+1}\cos(n+1)x] - \left[A + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx\right]\right| \leqslant E_{n+1}(f).$$

Отсюда ясно, что

$$E_n(f(x) - a_{n+1}\cos(n+1)x) \leqslant E_{n+1}(f).$$

С другой стороны, из леммы 5 вытекает, что

$$E_n(f(x) - a_{n+1}\cos(n+1)x) \geqslant$$
$$\geqslant E_{n+1}(f(x) - a_{n+1}\cos(n+1)x) = E_{n+1}(f).$$

Таким образом искомым значением L является

$$L = -a_{n+1}.$$

Лемма 7. *Пусть $f(x)$ есть чётная функция, входящая в $C_{2\pi}$. Если*

$$A \geqslant E_{n+1}(f),$$

то можно найти такую постоянную M, что

$$E_n(f(x) + M\cos(n+1)x) = A.$$

Если бы имело место равенство $A = E_{n+1}(f)$, то дело свелось бы к лемме 6. Поэтому можно допустить, что

$$A > E_{n+1}(f).$$

Введём число L, о котором шла речь в лемме 6, и построим функцию

$$\psi(\lambda) = E_n(f(x) + \lambda\cos(n+1)x).$$

Тогда

$$\psi(L) = E_{n+1}(f) < A,$$

а по лемме 4 при достаточно больших λ будет

$$\psi(\lambda) > A.$$

Но функция $\psi(\lambda)$ непрерывна (лемма 3), и потому найдётся такое значение $\lambda = M$, при котором

$$\psi(M) = A.$$

Лемма 8. *Для любой системы чисел*

$$A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \geqslant A_n \geqslant 0$$

существует чётный тригонометрический полином $U(x)$ *порядка не выше* $n+1$, *для которого*

$$E_k(U) = A_k \qquad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

и который удовлетворяет условию

$$|U(x)| \leqslant A_0.$$

Доказательство. Положим $f(x) = 0$. Для этой функции $E_{n+1}(f) = 0$. Значит, по лемме 7, найдётся постоянная M_{n+1} такая, что

$$E_n(M_{n+1} \cos(n+1)x) = A_n.$$

Найдя эту постоянную, положим $f(x) = M_{n+1} \cos(n+1)x$. Применим к этой функции лемму 7 (с заменой числа n, фигурировавшего в этой лемме, на $n-1$). Это приведёт нас к постоянной M_n такого рода, что

$$E_{n-1}(M_{n+1} \cos(n+1)x + M_n \cos nx) = A_{n-1}.$$

Вместе с тем по лемме 5

$$E_n(M_{n+1} \cos(n+1)x + M_n \cos nx) = \\ = E_n(M_{n+1} \cos(n+1)x) = A_n.$$

Иначе говоря, прибавление $M_n \cos nx$ к $M_{n+1} \cos(n+1)x$ привело нас к нужному значению E_{n-1} и не испортило полученного ранее значения E_n. Полагая

$$f(x) = M_{n+1} \cos(n+1)x + M_n \cos nx$$

и снова применяя лемму 7, находим такое постоянное M_{n-1}, что

$$E_{n-2}(M_{n+1} \cos(n+1)x + M_n \cos nx + M_{n-1} \cos(n-1)x) = A_{n-2}.$$

Вместе с тем прибавление к $f(x)$ слагаемого $M_{n-1} \cos(n-1)x$ не изменит ни $E_{n-1}(f)$, ни $E_n(f)$, так что

$$E_{n-1}(M_{n+1} \cos(n+1)x + M_n \cos nx + M_{n-1} \cos(n-1)x) = A_{n-1},$$
$$E_n(M_{n+1} \cos(n+1)x + M_n \cos nx + M_{n-1} \cos(n-1)x) = A_n.$$

Продолжая этот процесс, мы придём к полиному

$$W(x)=\sum_{k=1}^{n+1} M_k \cos kx,$$

для которого

$$E_n(W)=A_n,\ \ldots,\ E_1(W)=A_1,\quad E_0(W)=A_0.$$

Если постоянную, наименее отклоняющуюся от $W(x)$, обозначить через $-M_0$, то окажется

$$\left|M_0+\sum_{k=1}^{n+1} M_k \cos kx\right| \leqslant A_0.$$

Так как, с другой стороны, все отклонения $E_k(U)$ от полинома

$$U(x)=M_0+\sum_{k=1}^{n+1} M_k \cos kx$$

(в силу леммы 5) совпадают с отклонениями $E_k(W)$, то полином $U(x)$ и является искомым.

Теперь мы можем, наконец, перейти к доказательству формулированной выше теоремы С. Н. Бернштейна. Ввиду того что при обращении какого-нибудь A_{n+1} в нуль теорема приводится к лемме 8, мы можем предположить, что все A_n строго положительны.

Построим для каждого $n \geqslant 0$ такой (чётный) полином $U_n(x) \in H_{n+1}^T$, чтобы оказалось

$$|U_n(x)| \leqslant A_0,$$

$$E_0(U_n)=A_0,\quad E_1(U_n)=A_1,\ \ldots,\ E_n(U_n)=A_n.$$

Мы покажем, что из последовательности построенных полиномов $\{U_n(x)\}$ выделяется некоторая равномерно сходящаяся подпоследовательность $\{U_{n_i}(x)\}$, предельная функция которой и будет удовлетворять требованиям теоремы.

С этой целью мы введём в рассмотрение полиномы $R_{(n)}(x)$, наименее отклоняющиеся от $U_n(x)$ среди всех полиномов класса H_m^T. Нетрудно видеть, что

$$|R_m^{(n)}(x)-U_n(x)|\leqslant A_m$$
$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Действительно, при $m=0, 1, 2, \ldots, n$ это неравенство вытекает из того, что

$$A_m=E_m(U_n)$$

и из определения $R_m^{(n)}(x)$. Если же $m\geqslant n+1$, то оно тривиально, так как

$$R_m^{(n)}(x)=U_n(x)$$
$$(m=n+1,\ n+2,\ \ldots).$$

Из отмеченного неравенства вытекает, что при всех n, m и x

$$|R_m^{(n)}(x)|\leqslant 2A_0.$$

Установив это, рассмотрим последовательность «полиномов» (на самом деле, это — постоянные):

$$R_0^{(0)}(x),\ R_0^{(1)}(x),\ R_0^{(2)}(x)\ R_0^{(3)}(x),\ \ldots$$

Из этой ограниченной последовательности выделяется сходящаяся подпоследовательность

$$R_0^{(n_{1,0})}(x),\ R_0^{(n_{2,0})}(x),\ R_0^{(n_{3,0})}(x),\ \ldots,$$
$$\lim_{k\to\infty} R_0^{(n_{k,0})}(x)=R_0(x),$$

причём номера $\{n_{k,0}\}$ строго возрастают:

$$n_{1,0}<n_{2,0}<n_{3,0}<\ \ldots$$

Образуем последовательность полиномов

$$R_1^{(n_{1,0})}(x),\ R_1^{(n_{2,0})}(x),\ R_1^{(n_{3,0})}(x),\ldots$$

Все они входят в H_1^T и ограничены одним числом. Применяя принцип выбора (глава III, § 2, теорема 2), мы выделим отсюда равномерно сходящуюся подпоследовательность

$$R_1^{(n_{1,1})}(x),\ R_1^{(n_{2,1})}(x),\ R_1^{(n_{3,1})}(x),\ \ldots,$$
$$\lim_{k\to\infty} R_1^{(n_{k,1})}(x)=R_1(x),$$

причём строго возрастающая последовательность номеров $\{n_{k,1}\}$ является частичной для предыдущей последовательности $\{n_{k,0}\}$.

Продолжая этот процесс, мы для всякого m сможем построить равномерно сходящуюся последовательность полиномов

$$R_m^{(n_1,m)}(x),\ R_m^{(n_2,m)}(x),\ R_m^{(n_3,m)}(x),\ \ldots,$$
$$\lim_{k\to\infty} R_m^{(n_k,m)}(x)=R_m(x),$$

причём строго возрастающая последовательность номеров $\{n_{k,m}\}$ будет частичной для предыдущей $\{n_{k,m-1}\}$.

Проделав это построение, положим

$$n_i=n_{i,i}.$$

Если $i\geqslant m$, то номер n_i является одним из членов последовательности $\{n_{k,m}\}$, т. е.

$$n_i=n_{k_i^{(m)},\,m},$$

причём легко понять, что

$$k_i^{(m)}\geqslant i.$$

Фиксируем какое-либо m. Для него найдётся такое N_m, что как только $k\geqslant N_m$, так сейчас же

$$|R_m^{(n_k,m)}(x)-R_m(x)|<A_m.$$

Положим

$$i(m)=\max\{m,\ N_m\}.$$

Если $i\geqslant i(m)$, то

$$n_i=n_{k_i^{(m)},\,m},$$

где $k_i^{(m)}\geqslant i(m)\geqslant N_m$. Стало быть,

$$|R_m^{(n_i)}(x)-R_m(x)|<A_m.$$

С другой стороны,

$$|U_{n_i}(x)-R_m^{(n_i)}(x)|\leqslant A_m, \tag{130}$$

и потому при $i\geqslant i(m)$

$$|U_{n_i}(x)-R_m(x)|<2A_m,$$

Значит, если оба номера i и j превосходят $i(m)$, то

$$|U_{n_i}(x) - U_{n_j}(x)| < 4A_m,$$

что в связи с условием

$$\lim_{m\to\infty} A_m = 0$$

и обеспечивает равномерную сходимость последовательности $\{U_{n_i}(x)\}$.

Положим

$$f(x) = \lim_{i\to\infty} U_{n_i}(x)$$

и покажем, что эта функция удовлетворяет требованиям теоремы. Её непрерывность, периодичность и чётность вполне очевидны, и нужно лишь убедиться в том, что она имеет требуемые наилучшие приближения. Для этого прежде всего перейдём в неравенстве (130) к пределу при фиксированном m и возрастающем i:

$$|f(x) - R_m(x)| \leqslant A_m$$

(здесь мы воспользовались тем, что $R_m^{(n_i)}(x) = R_m^{(n_{k_i^{(m)}}, m)}(x) \to R_m(x)$). Так как $R_m(x)$ входит в H_m^T, то доказанное неравенство позволяет заключить

$$E_m(f) \leqslant A_m.$$

Остаётся опровергнуть возможность строгого неравенства

$$E_m(f) < A_m.$$

Допустим, напротив, что при каком-нибудь m реализовалось это строгое неравенство. Обозначим через $V(x)$ полином, наименее отклоняющийся от $f(x)$ среди всех полиномов из H_m^T:

$$|V(x) - f(x)| \leqslant E_m(f).$$

При достаточно большом i окажется

$$|U_{n_i}(x) - f(x)| < A_m - E_m(f)$$

и, стало быть,

$$|V(x) - U_{n_i}(x)| < A_m,$$

откуда и подавно

$$E_m(U_{n_i}) < A_m,$$

что, однако, при $n_i \geqslant m$ противоречит самому определению полиномов $U_n(x)$.

Теорема доказана полностью.

§ 6. Плотность класса H_n^T в классе $\mathrm{Lip}_M \alpha$.

Джексоновская оценка

$$E_n(f) \leqslant \frac{12M}{n^\alpha} \tag{131}$$

нисколько не противоречит тому факту, что для *отдельных* функций из $\mathrm{Lip}_M \alpha$ порядок убывания E_n гораздо выше, чем $n^{-\alpha}$.

Так именно обстоит дело, например, со всеми дифференцируемыми функциями, хотя они и входят во все классы $\mathrm{Lip}\,\alpha$. Тем не менее для всего класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *в целом* порядок оценки (131) улучшить нельзя. Рассмотрим этот вопрос более подробно.

Пусть $f(x)$ пробегает весь класс *) $\mathrm{Lip}_1 \alpha$ при некотором фиксированном $\alpha \leqslant 1$. Положим

$$\Gamma_n(\alpha) = \sup\{E_n(f)\}.$$

Эта величина является, так сказать, мерой плотности **), с которой в классе $\mathrm{Lip}_1 \alpha$ распределены полиномы из H_n^T.

Теорема. *При всех $n \geqslant 1$*

$$\frac{K(\alpha)}{n^\alpha} \leqslant \Gamma_n(\alpha) \leqslant \frac{12}{n^\alpha},$$

где $K(\alpha)$ есть положительная постоянная, зависящая лишь от α.

---

*) Если $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$, то $\frac{1}{M} f(x) \in \mathrm{Lip}_1 \alpha$. С другой стороны, $E_n(Mf) = M E_n(f)$. Поэтому допущение $M = 1$ не ограничивает общности рассуждения.

**) Идея введения таких характеристик принадлежит А. Н. Колмогорову (А. Н. Колмогоров [3]; см. также Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [1], С. М. Никольский [1, 2, 3], С. Н. Бернштейн [14]).

В силу неравенства (131), достаточно доказать существование постоянной $K(\alpha)$. Пусть сначала $\alpha < 1$. По теореме С. Н. Бернштейна из предыдущего параграфа найдётся такая функция $\varphi_\alpha(x)$, что

$$E_n(\varphi_\alpha) = \frac{1}{n^\alpha}.$$

Из результатов того же автора, изложенных в § 3, вытекает, что $\varphi_\alpha(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ (здесь и использовано, что $\alpha < 1$). Пусть коэффициент того условия Липшица порядка α, которому удовлетворяет $\varphi_\alpha(x)$, есть M_α:

$$|\varphi_\alpha(x) - \varphi_\alpha(y)| \leqslant M_\alpha\, |x-y|^\alpha.$$

Тогда функция

$$f_\alpha(x) = \frac{\varphi_\alpha(x)}{M_\alpha}$$

входит в $\mathrm{Lip}_1\,\alpha$. Стало быть,

$$\Gamma_n(\alpha) \geqslant E_n(f_\alpha) = \frac{1}{M_\alpha} E_n(\varphi_\alpha) = \frac{1}{M_\alpha\, n^\alpha},$$

и роль $K(\alpha)$ играет величина

$$K(\alpha) = \frac{1}{M_\alpha}.$$

Для $\alpha = 1$ этот способ рассуждения не годится, ибо функция $\varphi_1(x)$ может и не войти в $\mathrm{Lip}\,1$. Справедливость теоремы можно установить, например, опираясь на сделанное выше замечание о том, что для функции $|\sin x|$ (очевидно, входящей в $\mathrm{Lip}_1\,1$) оказывается *)

$$E_n(|\sin x|) \geqslant \frac{1}{2\pi(2n+1)},$$

так что

$$\Gamma_n(1) \geqslant \frac{1}{6\pi n}$$

и роль $K(1)$ играет число $\frac{1}{6\pi}$.

*) Это доказывается в главе VIII (§ 3).

ГЛАВА VI.

СВЯЗЬ СТРУКТУРНЫХ СВОЙСТВ ФУНКЦИИ С ЕЁ ПРИБЛИЖЕНИЯМИ АЛГЕБРАИЧЕСКИМИ ПОЛИНОМАМИ.

§ 1. Вспомогательные предложения.

В этой главе мы рассмотрим вопрос о связи структурно-дифференциальных свойств функции класса $C([a, b])$ с порядком убывания её наилучших приближений обыкновенными алгебраическими полиномами. Оказывается, что эта проблема легко сводится к уже разобранной в двух предшествующих главах аналогичной проблеме тригонометрических приближений. Настоящий параграф будет посвящён леммам, связывающим обе эти проблемы.

Пусть $f(x)$ есть непрерывная функция, заданная на сегменте $[a, b]$. Если $-1 \leqslant u \leqslant 1$, то

$$a \leqslant \frac{(b-a)u+(a+b)}{2} \leqslant b,$$

и потому функция

$$\varphi(u) = f\left[\frac{(b-a)u+(a+b)}{2}\right]$$

входит в класс $C([-1, +1])$. Положим

$$\psi(\theta) = \varphi(\cos\theta).$$

Очевидно, $\psi(\theta)$ есть непрерывная функция, заданная для всех вещественных θ и имеющая период 2π. Кроме того, $\psi(-\theta) = \psi(\theta)$, так что функция $\psi(\theta)$ чётная. Условимся говорить, что $\psi(\theta)$ есть функция, *индуцированная* исходной функцией $f(x)$.

Лемма 1: *Пусть E_n есть наилучшее приближение функции $f(x) \in C([a, b])$ алгебраическими полиномами степени не выше n, а E_n^T есть наилучшее приближение её индуцированной функции $\psi(\theta)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n.*

Тогда

$$E_n = E_n^T. \tag{132}$$

Доказательство. Пусть

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k x^k$$

— полином, наименее отклоняющийся от $f(x)$. Тогда при $x \in [a, b]$

$$\left| f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^k \right| \leqslant E_n.$$

Отсюда при $u \in [-1, +1]$

$$\left| \varphi(u) - \sum_{k=0}^{n} c_k \left[\frac{(b-a)u + (a+b)}{2} \right]^k \right| \leqslant E_n$$

и, стало быть,

$$\left| \psi(\theta) - \sum_{k=0}^{n} c_k \left[\frac{(b-a)\cos\theta + (a+b)}{2} \right]^k \right| \leqslant E_n.$$

Но, в силу леммы 3 из § 2 главы I, функция

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \left[\frac{(b-a)\cos\theta + (a+b)}{2} \right]^k$$

есть тригонометрический полином не выше n-го порядка. Значит,

$$E_n^T \leqslant E_n. \tag{133}$$

Установим обратное неравенство. Пусть $T(\theta)$ есть тригонометрический полином наименьшего отклонения от $\psi(\theta)$. Вместе с $\psi(\theta)$ он будет чётным, и потому*)

$$T(\theta)=A+\sum_{k=1}^{n} a_k \cos k\theta.$$

По определению полиномов Чебышева

$$\cos k\theta = T_k(\cos\theta);$$

значит,

$$T(\theta)=\sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k \theta.$$

(Собственно говоря, нам не приходится опираться на теорию полиномов Чебышева, так как важен лишь тот факт, что $\cos k\theta$ есть полином степени k от $\cos\theta$, доказанный в § 3 главы II.)

Таким образом неравенство

$$|\psi(\theta)-T(\theta)|\leqslant E_n^T,$$

определяющее полином $T(\theta)$, можно переписать так:

$$\left|\varphi(\cos\theta)-\sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k\theta\right| \leqslant E_n^T,$$

так что при всех $u\in[-1,+1]$

$$\left|\varphi(u)-\sum_{k=0}^{n} c_k u^k\right|\leqslant E_n^T. \tag{134}$$

Если $x\in[a, b]$, то

$$-1\leqslant\frac{2x-(a+b)}{b-a}\leqslant+1,$$

и эту дробь можно подставить вместо u в неравенство (134):

$$\left|\varphi\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]-\sum_{k=0}^{n} c_k\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]^k\right|\leqslant E_n^T.$$

---

*) См. главу I, § 2, лемма 4.

Но

$$\varphi\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]=f(x),$$

а

$$\sum_{k=0}^{n} c_k\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]^k$$

есть полином из H_n; значит,

$$E_n \leqslant E_n^T.$$

Лемма доказана

Лемма 2. *Пусть, в тех же обозначениях,* $\omega_f(\delta)$ *и* $\omega_\psi(\delta)$ *суть модули непрерывности функций* $f(x)$ *и* $\psi(\theta)$. *Тогда*

$$\omega_\psi(\delta) \leqslant \omega_f\left(\frac{b-a}{2}\delta\right). \tag{135}$$

Доказательство. Фиксируем какое-нибудь $\delta>0$, и пусть $|\theta'-\theta''| \leqslant \delta$. Тогда

$$|\psi(\theta'')-\psi(\theta')| = |\varphi(\cos\theta'')-\varphi(\cos\theta')|.$$

Но

$$|\cos\theta''-\cos\theta'| \leqslant |\theta''-\theta'| \leqslant \delta.$$

Значит, вводя модуль непрерывности $\omega_\varphi(\delta)$ функции $\varphi(u)$, имеем

$$|\psi(\theta'')-\psi(\theta')| \leqslant \omega_\varphi(\delta),$$

и потому

$$\omega_\psi(\delta) \leqslant \omega_\varphi(\delta). \tag{136}$$

Оценим теперь $\omega_\varphi(\delta)$. Если $|u''-u'| \leqslant \delta$, то точки

$$x''=\frac{(b-a)u''+(a+b)}{2}, \quad x'=\frac{(b-a)u'+(a+b)}{2}$$

отстоят друг от друга не больше чем на $\frac{b-a}{2}\delta$. Значит,

$$|\varphi(u'')-\varphi(u')| = |f(x'')-f(x')| \leqslant \omega_f\left(\frac{b-a}{2}\delta\right),$$

и потому

$$\omega_\varphi(\delta) \leqslant \omega_f\left(\frac{b-a}{2}\delta\right). \tag{137}$$

Из (136) и (137) вытекает (135).

Лемма 3. *Обозначения те же. Пусть* $[a', b']$ — *сегмент, целиком содержащийся в интервале* (a, b). *Если* $\omega'_f(\delta)$ *есть модуль непрерывности функции* $f(x)$ *на сегменте* $[a', b']$, *то*

$$\omega'_f(\delta) \leqslant \omega_\psi(K\delta), \tag{138}$$

где K *есть постоянная, зависящая только от сегментов* $[a, b]$ *и* $[a', b']$.

Доказательство. Положим

$$r = \frac{2a' - (a+b)}{b-a}, \quad s = \frac{2b' - (a+b)}{b-a}.$$

Очевидно,

$$-1 < r < s < +1.$$

Пусть

$$\lambda = \min\{r+1,\ 1-s\} = \min\left\{2\frac{a'-a}{b-a},\ 2\frac{b-b'}{b-a}\right\}.$$

Если x' и x'' — две точки сегмента $[a', b']$, для которых

$$|x'' - x'| \leqslant \delta,$$

то точки

$$u' = \frac{2x' - (a+b)}{b-a}, \quad u'' = \frac{2x'' - (a+b)}{b-a}$$

попадают в $[r, s]$ и удовлетворяют условию

$$|u'' - u'| \leqslant \frac{2}{b-a}\delta.$$

Пусть

$$\theta' = \arccos u', \quad \theta'' = \arccos u'',$$

так что

$$|f(x'') - f(x')| = |\varphi(u'') - \varphi(u')| = |\psi(\theta'') - \psi(\theta')|. \tag{139}$$

По формуле Лагранжа

$$\theta'' - \theta' = -\frac{1}{\sqrt{1-\bar{u}^2}}(u'' - u'),$$

где $\bar{u}$ лежит между u' и u'' и, тем более, между r и s. Значит,

$$1-\bar{u}^2=(1-\bar{u})(1+\bar{u})>(1-s)(1+r)>\lambda^2$$

и, следовательно,

$$|\theta''-\theta'|\leqslant\frac{1}{\lambda}|u''-u'|\leqslant\frac{2}{\lambda(b-a)}\delta.$$

Отсюда и из (139)

$$|f(x'')-f(x')|\leqslant\omega_\psi\left(\frac{2\delta}{\lambda(b-a)}\right)$$

и, стало быть,

$$\omega_f'(\delta)\leqslant\omega_\psi\left(\frac{2\delta}{\lambda(b-a)}\right)=\omega_\psi(K\delta),$$

где положено

$$K=\frac{2}{\lambda(b-a)}=\max\left\{\frac{1}{a'-a},\ \frac{1}{b-b'}\right\}.$$

§ 2. Влияние структурных свойств функции на её приближения.

Теорема 1 (Д. Джексон). *Если E_n есть наилучшее приближение функции $f(x)\in C([a,\ b])$ полиномами из H_n, то*

$$E_n\leqslant 12\,\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right), \tag{140}$$

где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$.

В самом деле, если ввести индуцированную функцию $\psi(\theta)$, то по теореме Джексона из § 3 главы IV

$$E_n^T\leqslant 12\,\omega_\psi\left(\frac{1}{n}\right).$$

Остаётся заметить, что, в силу (132) и (135),

$$E_n^T=E_n,\quad \omega_\psi\left(\frac{1}{n}\right)\leqslant\omega\left(\frac{b-a}{2n}\right).$$

Следствие 1. *Если*

$$f(x)\in \mathrm{Lip}_M\,\alpha \qquad (0<\alpha\leqslant 1),$$

то

$$E_n \leqslant \frac{CM}{n^q}, \tag{141}$$

где

$$C = 12\left(\frac{b-a}{2}\right)^q.$$

Следствие 2. *Если у функции $f(x)$ существует ограниченная производная $f'(x)$, причём $|f'(x)| \leqslant M_1$, то*

$$E_n \leqslant \frac{6(b-a)M_1}{n}. \tag{142}$$

Чтобы продвинуться дальше, нам понадобится следующая лемма:

Лемма. *Пусть у функции $f(x) \in C([a, b])$ существует непрерывная производная $f'(x)$. Между наилучшими приближениями E_n (функции $f(x)$) и E'_{n-1} (её производной) существует соотношение*

$$E_n \leqslant \frac{6(b-a)}{n} E'_{n-1}. \tag{143}$$

Доказательство. Пусть $P(x)$ — полином $(n-1)$-й степени, имеющий наименьшее отклонение от производной $f'(x)$:

$$|f'(x) - P(x)| \leqslant E'_{n-1}. \tag{144}$$

Если положить

$$\varphi(x) = f(x) - \int_0^x P(x)\,dx,$$

то неравенство (144) можно будет записать так:

$$|\varphi'(x)| \leqslant E'_{n-1},$$

так что по следствию 2 предыдущей теоремы

$$E_n(\varphi) \leqslant \frac{6(b-a)}{n} E'_{n-1}.$$

Если $Q(x) \in H_n$ — полином наилучшего приближения для $\varphi(x)$, то

$$|\varphi(x) - Q(x)| \leqslant \frac{6(b-a)}{n} E'_{n-1},$$

или, что то же самое,

$$\left| f(x) - \left\{ \int_0^x P(x)\,dx + Q(x) \right\} \right| \leqslant \frac{6(b-a)}{n} E'_{n-1}.$$

Так как сумма

$$\int_0^x P(x)\,dx + Q(x)$$

есть полином не выше n-й степени, то лемма доказана.

Теорема 2 (Д. Джексон). *Если функция $f(x)$ на сегменте $[a, b]$ имеет p непрерывных производных, причём модуль непрерывности последней из них $f^{(p)}(x)$ есть $\omega_p(\delta)$, то для $n > p$ справедлива оценка*

$$E_n < \frac{C_p (b-a)^p}{n^p} \omega_p \left(\frac{b-a}{2(n-p)} \right), \tag{145}$$

где C_p есть постоянная, зависящая только от p.

Доказательство. Последовательное применение предыдущей леммы даёт, при само собой понятных обозначениях, ряд неравенств:

$$E_n \leqslant \frac{6(b-a)}{n} E'_{n-1},$$

$$E'_{n-1} \leqslant \frac{6(b-a)}{n-1} E''_{n-2},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

$$E^{(p-1)}_{n-p+1} \leqslant \frac{6(b-a)}{n-p+1} E^{(p)}_{n-p}.$$

Перемножая эти неравенства, находим

$$E_n \leqslant \frac{6^p (b-a)^p}{n(n-1)\ldots(n-p+1)} E^{(p)}_{n-p}.$$

С другой стороны, по теореме 1

$$E^{(p)}_{n-p} \leqslant 12\, \omega_p \left(\frac{b-a}{2(n-p)} \right).$$

Таким образом

$$E_n \leqslant 12 \frac{6^p (b-a)^p}{n(n-1)\ldots(n-p+1)} \omega_p \left(\frac{b-a}{2(n-p)} \right). \tag{146}$$

Так как $n > p$, то для $k = 1, 2, \ldots, p-1$ имеем

$$1 - \frac{k}{n} > 1 - \frac{k}{p},$$

откуда

$$n - k > \frac{p-k}{p} n.$$

Перемножая эти неравенства, найдём

$$(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) > \frac{(p-1)(p-2)\ldots 1}{p^{p-1}} n^{p-1}$$

и

$$n(n-1)(n-2)\ldots(n-p+1) > \frac{p!}{p^p} n^p. \qquad (147)$$

Сопоставляя (146) и (147), получим

$$E_n \leqslant \frac{12 \cdot 6^p p^p}{p!} \frac{(b-a)^p}{n^p} \omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right), \qquad (148)$$

а это и есть неравенство (145), в котором, как мы видим, за C_p нужно принять постоянную

$$C_p = 12 \frac{6^p p^p}{p!}. \qquad (149)$$

Следствие 1. *Если в условиях теоремы окажется, что*

$$f^{(p)}(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha \qquad (0 < \alpha \leqslant 1),$$

то при $n > p$

$$E_n \leqslant \frac{C'_p (b-a)^{p+\alpha}}{n^{p+\alpha}} M, \qquad (150)$$

где постоянная C'_p *зависит только от* p *и от* α.

Действительно, в указанных условиях

$$\omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right) \leqslant M\left(\frac{b-a}{2}\right)^\alpha \frac{1}{(n-p)^\alpha}.$$

Так как $n > p$, то по меньшей мере $n \geqslant p+1$. Значит,

$$1 - \frac{p}{n} \geqslant 1 - \frac{p}{p+1}$$

и, стало быть,

$$n-p \geqslant \frac{n}{p+1}.$$

Поэтому,

$$\omega_p\left(\frac{b-a}{2(n-p)}\right) \leqslant M\left(\frac{b-a}{2}\right)^{\alpha} \frac{(p+1)^{\alpha}}{n^{\alpha}};$$

Сопоставив это неравенство с (145), находим

$$E_n \leqslant \frac{12\cdot 6^p p^p}{p!}\left(\frac{p+1}{2}\right)^{\alpha}(b-a)^{p+\alpha}\frac{M}{n^{p+\alpha}}.$$

Чтобы получить (150), остаётся лишь положить

$$C_p' = 12\frac{6^p p^p}{p!}\left(\frac{p+1}{2}\right)^{\alpha}. \tag{151}$$

Следствие 2. *Если у $f(x)$ существует ограниченная производная $f^{(p+1)}(x)$, причём $|f^{(p+1)}(x)| \leqslant M_{p+1}$, то*

$$E_n \leqslant \frac{C_p''(b-a)^{p+1}M_{p+1}}{n^{p+1}}, \tag{152}$$

где постоянная C_p'' зависит лишь от p.

В самом деле, в оценке (150) можно принять $\alpha=1$ $M=M_{p+1}$. Если принять во внимание (151) (при $\alpha=1$), то мы сразу получаем (152), причём

$$C_p'' = \frac{6^{p+1}p^p}{p!}(p+1).$$

Следствие 3. *Если функция $f(x)$ имеет производные всех порядков, то при любом p*

$$\lim_{n\to\infty}(n^p E_n) = 0.$$

Это сразу вытекает из оценки (152).

§ 3. Обратные теоремы.

Теорема 1 (С. Н. Бернштейн). *Пусть наилучшее приближение E_n функции $f(x)\in C([a,b])$ удовлетворяет неравенству*

$$E_n \leqslant \frac{A}{n^{\alpha}} \qquad (0<\alpha\leqslant 1). \tag{153}$$

Если $\alpha < 1$, то на всяком сегменте $[a', b']$, целиком содержащемся в интервале (a, b), функция $f(x)$ входит в класс $\mathrm{Lip}\,\alpha$. *Если же $\alpha = 1$, то на всяком таком сегменте $f(x)$ входит в класс W.*

Доказательство. Вводя индуцированную функцию $\psi(\theta)$ и замечая, что по (132) окажется

$$E_n^T(\psi) = E_n,$$

мы можем на основании оценки (153) и теоремы 1 § 3 главы V утверждать, что $\psi(\theta)$ входит в класс $\mathrm{Lip}\,\alpha$ или W, смотря по тому, будет ли $\alpha < 1$, или $\alpha = 1$.

Но по лемме 3 из § 1 для всякого сегмента $[a', b']$ будет

$$\omega_f'(\delta) \leqslant \omega_\psi(K\delta), \tag{154}$$

где

$$K = \max\left\{\frac{1}{a'-a}, \frac{1}{b-b'}\right\}.$$

Если $\alpha < 1$, то

$$\omega_\psi(\delta) \leqslant M\delta^\alpha$$

и, в силу (154),

$$\omega_f'(\delta) \leqslant MK^\alpha\delta^\alpha,$$

т. е. $f(x)$ входит в $\mathrm{Lip}\,\alpha$ с коэффициентом MK^α.

Если же $\alpha = 1$, то

$$\omega_\psi(\delta) \leqslant M\delta(1 + |\ln\delta|)$$

и

$$\omega_f'(\delta) \leqslant MK\delta(1 + |\ln K\delta|).$$

Так как

$$1 + |\ln K\delta| \leqslant 1 + |\ln K| + |\ln\delta| < (1 + |\ln K|)(1 + |\ln\delta|),$$

то

$$\omega_f'(\delta) < MK(1 + |\ln K|)\delta(1 + |\ln\delta|),$$

т. е. $f(x) \in W$.

Как и при приближении тригонометрическими полиномами, мы видим, что случай $\alpha = 1$ представляет собою особенность по сравнению с $\alpha < 1$, но теперь это нас уже не должно удивлять. Другой особенностью теоремы является то, что в ней отсутствует характеристика свойств $f(x)$ на всём $[a, b]$, а говорится лишь о её поведении на всяком внутреннем сегменте $[a', b']$. Оказывается, что это лежит в самом существе дела. Например, в § 1 главы VII мы установим, что для функции

$$\sigma(x)=\sqrt{1-x^2} \tag{155}$$

наилучшее приближение полиномами n-й степени на $[-1, +1]$ удовлетворяет неравенству

$$E_n<\frac{2}{\pi n}. \tag{156}$$

Вместе с тем функция (155) не входит (на всём сегменте $[-1, +1]$) ни в один из классов $\operatorname{Lip}\alpha$, где $\alpha>\frac{1}{2}$. В самом деле,

$$\frac{|\sigma(x)-\sigma(1)|}{|1-x|^\alpha}=\frac{\sqrt{1+x}}{|1-x|^{\alpha-1/2}}.$$

Так как правая часть этого равенства не ограничена около точки $x=1$, то не может найтись такой постоянной M, чтобы оказалось

$$|\sigma(x)-\sigma(1)|\leqslant M|1-x|^\alpha.$$

Значит, хотя выполнено (156), но $\sigma(x)\notin W$, или хотя

$$E_n<\frac{2}{\pi n^{2/3}},$$

но $\sigma(x)\notin\operatorname{Lip}\frac{2}{3}$.

Теорема 2 (С. Н. Бернштейн). *Если (в тех же обозначениях)*

$$E_n\leqslant\frac{A}{n^{p+\alpha}}$$

(p — натуральное, $0<\alpha\leqslant 1$), то во всех точках интервала (a, b) существует производная $f^{(p)}(x)$. При этом, если $\alpha<1$, то $f^{(p)}(x)$ на всяком сегменте $[a', b']$, целиком содер-

жащемся в (a, b), *входит в* $\mathrm{Lip}\,\alpha$, *а если* $\alpha = 1$, *то на всяком таком сегменте* $f^{(p)}(x)$ *входит в* W.

Полное доказательство теоремы довольно громоздкое, и мы дадим его в следующем параграфе, ограничившись здесь рассмотрением простейшего случая:

$$p = 1 \quad \text{и} \quad \alpha < 1.$$

Как и в предыдущей теореме, индуцированная функция $\psi(\theta)$ удовлетворяет условию

$$E_n^T(\psi) \leqslant \frac{A}{n^{1+\alpha}}.$$

Значит, существует $\psi'(\theta)$, входящая в $\mathrm{Lip}\,\alpha$. Но

$$f(x) = \psi\left[\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right].$$

Поэтому при $a < x < b$ существует $f'(x)$, причём

$$f'(x) = \psi'\left[\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]\frac{-1}{\sqrt{1-\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]^2}}\,\frac{2}{b-a},$$

или

$$f'(x) = \frac{-\psi'\left[\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}. \tag{157}$$

Остаётся показать, что $f'(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ на сегменте $[a', b']$. Для этого заметим сначала, что произведение $\varphi_1(x)\,\varphi_2(x)$ двух функций класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$ также входит в этот класс.

Действительно,

$$|\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(y)\varphi_2(y)| \leqslant$$
$$\leqslant |\varphi_2(x)|\,|\varphi_1(x) - \varphi_1(y)| + |\varphi_1(y)|\,|\varphi_2(x) - \varphi_2(y)|.$$

Значит, если A_1 и A_2 суть верхние границы функций $|\varphi_1(x)|$ и $|\varphi_2(x)|$, а M_1 и M_2 — их коэффициенты Липшица, то

$$|\varphi_1(x)\varphi_2(x) - \varphi_1(y)\varphi_2(y)| \leqslant (M_1A_2 + M_2A_1)\,|x-y|^\alpha.$$

Отметив это, вернёмся к функции (157). Множители

$$\frac{1}{\sqrt{x-a}}, \quad \frac{1}{\sqrt{b-x}}$$

на сегменте $[a', b']$ имеют ограниченные производные

$$\frac{-1}{2\sqrt{(x-a)^3}}, \quad \frac{+1}{2\sqrt{(b-x)^3}}$$

и потому входят в $\mathrm{Lip}\,1$ и, тем более, в $\mathrm{Lip}\,\alpha$.

Что касается множителя

$$g(x) = \psi'\left[\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right],$$

то те же рассуждения, как в лемме 3 § 1, показывают, что

$$\omega_g'(\delta) \leqslant \omega_{\psi'}(K\delta),$$

где $\omega_g'(\delta)$ есть модуль непрерывности $g(x)$ на $[a', b']$, а $\omega_{\psi'}(\delta)$ — модуль непрерывности $\psi'(\theta)$ на всей оси.

Отсюда ясно, что $g(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ на $[a', b']$, а значит, и $f'(x)$ входит в этот класс.

§ 4. Второе неравенство С. Н. Бернштейна.

Чтобы дать полное доказательство теоремы 2 предыдущего параграфа, нам понадобится интересное и само по себе неравенство, принадлежащее С. Н. Бернштейну.

Теорема. *Если полином $P(x)$ степени n*

$$P(x) = c_0 + c_1 x + \ldots + c_n x^n$$

(с вещественными коэффициентами) на некотором сегменте $[a, b]$ удовлетворяет неравенству

$$|P(x)| \leqslant M,$$

то его производная $P'(x)$ на интервале (a, b) удовлетворяет неравенству

$$|P'(x)| \leqslant \frac{Mn}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}. \tag{158}$$

Доказательство. Рассмотрим индуцированный полином

$$T(\theta)=P\left[\frac{(b-a)\cos\theta+(a+b)}{2}\right].$$

Это — тригонометрический полином порядка n, причём

$$|T(\theta)|\leqslant M.$$

Значит, в силу уже известного неравенства С. Н. Бернштейна

$$|T'(\theta)|\leqslant Mn. \tag{159}$$

Но

$$T'(\theta)=-P'\left[\frac{(b-a)\cos\theta+(a+b)}{2}\right]\frac{b-a}{2}\sin\theta.$$

Взяв произвольное x из (a, b), найдём в $(0, \pi)$ такое θ, что

$$\frac{(b-a)\cos\theta+(a+b)}{2}=x.$$

Очевидно, что для этого θ

$$\frac{b-a}{2}\sin\theta=\sqrt{(x-a)(b-x)}$$

и

$$T'(\theta)=-P'(x)\sqrt{(x-a)(b-x)}.$$

Подставляя это в (159), приходим к (158) *).

Следствие 1. *Если* $[a', b']\subset(a, b)$, *то (в тех же обозначениях) при* $x\in[a', b']$

$$|P'(x)|\leqslant KMn, \tag{160}$$

где

$$K=\max\left\{\frac{1}{a'-a},\ \frac{1}{b-b'}\right\}. \tag{161}$$

---

*) Неравенство (158) *точное*. Действительно, если $a=-1$, $b=+1$, $P(x)=\cos(n\arccos x)$, то $P'(x)=\dfrac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}$ и для $x_1=\cos\dfrac{\pi}{2n}$ будет $P'(x_1)=\dfrac{n}{\sqrt{1-x_1^2}}$.

В самом деле, при этих x оказывается

$$\frac{1}{\sqrt{(x-a)(b-x)}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{(a'-a)(b-b')}} \leqslant K.$$

Следствие 2. *Для тех же x оказывается*

$$|P^{(p)}(x)| \leqslant K^p M p^p n^p. \tag{162}$$

Действительно, разделим каждый из сегментов $[a, a']$ и $[b', b]$ на p равных частей точками

$$a = l_0 < l_1 < \ldots < l_p = a'; \quad b' = m_p < m_{p-1} < \ldots < m_0 = b,$$

и пусть

$$\Delta_i = [l_i, m_i].$$

Последовательно применяя неравенство (160), получаем

$$|P'(x)| \leqslant K_0 Mn \quad \left[x \in \Delta_1,\ K_0 = \max\left\{\frac{1}{l_1 - l_0},\ \frac{1}{m_0 - m_1}\right\}\right],$$

$$|P''(x)| \leqslant K_1 K_0 Mn(n-1)$$
$$\left[x \in \Delta_2,\ K_1 = \max\left\{\frac{1}{l_2 - l_1},\ \frac{1}{m_1 - m_2}\right\}\right],$$

. . . .

$$|P^{(p)}(x)| \leqslant K_{p-1} \ldots K_0 Mn(n-1) \ldots (n-p+1)$$
$$\left[x \in \Delta_p,\ K_{p-1} = \max\left\{\frac{1}{l_p - l_{p-1}},\ \frac{1}{m_{p-1} - m_p}\right\}\right].$$

Ввиду того что

$$l_{i+1} - l_i = \frac{a'-a}{p}, \quad m_i - m_{i+1} = \frac{b-b'}{p},$$

мы имеем, сохраняя обозначение (161):

$$K_i = p \max\left\{\frac{1}{a'-a},\ \frac{1}{b-b'}\right\} = Kp.$$

Значит, для $x \in [a', b']$ оказывается, что

$$|P^{(p)}(x)| \leqslant K^p p^p Mn(n-1) \ldots (n-p+1)$$

и, тем более, верно (162).

Опираясь на (162), мы и можем дать полное доказательство теоремы 2 предыдущего параграфа.

С этой целью, предполагая выполненными условия теоремы, строим для каждого n полином $P_n(x)$ степени n, удовлетворяющий условию

$$|P_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{A}{n^{p+\alpha}},$$

и полагаем

$$Q_0(x)=P_1(x), \quad Q_n(x)=P_{2^n}(x)-P_{2^{n-1}}(x).$$

Очевидно,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n(x).$$

Так как

$$|Q_n(x)| \leqslant |P_{2^n}(x)-f(x)|+|f(x)-P_{2^{n-1}}(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{A}{2^{n(p+\alpha)}}+\frac{A}{2^{(n-1)(p+\alpha)}},$$

то

$$|Q_n(x)| \leqslant \frac{B}{2^{np+n\alpha}}.$$

Степень $Q_n(x)$ есть 2^n. Значит, если $[a', b'] \subset (a, b)$, то на $[a', b']$ окажется, в силу (162), что

$$|Q_n^{(p)}(x)| \leqslant K^p \frac{B}{2^{np+n\alpha}} p^p 2^{np}=\frac{C}{2^{n\alpha}}. \tag{163}$$

Поэтому ряд

$$\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(p)}(x)$$

сходится равномерно на $[a', b']$, и всюду в (a, b) существует $f^{(p)}(x)$, причём

$$f^{(p)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} Q_n^{(p)}(x).$$

Если положить

$$\sum_{n=0}^{m} Q_n^{(p)}(x)=U_m(x),$$

то по (163) окажется

$$|f^{(p)}(x)-U_m(x)|<\sum_{n=m+1}^{\infty}\frac{C}{2^{n\alpha}}=\frac{D}{2^{m\alpha}}.$$

Степень $U_m(x)$ есть 2^m-p, значит, она меньше, чем 2^m, и потому для наилучшего приближения $E_n^{(p)}$ производной $f^{(p)}(x)$ имеем оценку

$$E_{2^m}^{(p)}<\frac{D}{2^{m\alpha}}.$$

Если $n>2$ — любое натуральное число и $2^m\leqslant n<2^{m+1}$, то

$$E_n^{(p)}\leqslant E_{2^m}^{(p)}<\frac{D}{2^{m\alpha}}=\frac{D2^\alpha}{2^{(m+1)\alpha}}<\frac{D'}{n^\alpha}.$$

Таким образом для производной $f^{(p)}(x)$ оказываются выполненными условия теоремы 1 предыдущего параграфа. Этим и завершено доказательство.

Следствие. *Если наилучшие приближения функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, при всех p удовлетворяют условию*

$$\lim_{n\to\infty}(n^p E_n)=0,$$

то $f(x)$ в интервале (a, b) имеет производные любого порядка.

§ 5. Существование функции с наперёд заданными приближениями.

Опираясь на результаты § 1, мы можем перенести теорему С. Н. Бернштейна о существовании функции с заданными тригонометрическими приближениями и на алгебраический случай. Для этого понадобится

Лемма. *Всякая чётная, 2π-периодическая, непрерывная функция $\psi(\theta)$ может быть получена как индуцированная из некоторой функции $f(x)\in C([a, b])$, где сегмент $[a, b]$ указан наперёд.*

В самом деле, если положить

$$f(x)=\psi\left[\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right],$$

то для этой функции индуцированной функцией и будет $\psi(\theta)$. Собственно для справедливости этой леммы достаточно, чтобы $\psi(\theta)$ была задана и непрерывна на сегменте $[0, \pi]$.

Отсюда легко вытекает

Теорема (С. Н. Бернштейн). *Каковы бы ни были числа*

$$A_0 \geqslant A_1 \geqslant A_2 \geqslant \ldots \qquad \lim A_n = 0,$$

на любом сегменте $[a, b]$ *существует непрерывная функция* $f(x)$, *имеющая их своими наилучшими приближениями:*

$$E_n(f) = A_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

В самом деле, найдётся такая чётная функция $\psi(\theta) \in C_{2\pi}$, для которой числа A_n будут наилучшими приближениями тригонометрическими полиномами. В таком случае искомой будет такая функция $f(x) \in C[(a, b])$, которая индуцируется в функцию $\psi(\theta)$.

§ 6. Неравенство А. А. Маркова.

Неравенство (158) оценивает производную полинома $P(x)$ в точках, лежащих *внутри* интервала (a, b). Для его концов оно оказывается бессодержательным, так как его правая часть становится бесконечной. В некоторых вопросах представляет интерес оценка производной полинома на *всём* сегменте $[a, b]$. Такая оценка была найдена в своё время А. А. Марковым [3]; она имеет вид

$$|P'(x)| \leqslant \frac{2Mn^2}{b-a} \qquad (a \leqslant x \leqslant b),$$

где $P(x)$ есть полином степени n, а M — максимум его модуля на сегменте $[a, b]$. В этом параграфе мы и докажем эту оценку.

Лемма 1. *Пусть*

$$x_k = \cos\frac{(2k-1)\pi}{2n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

суть корни полинома Чебышева $T_n(x)$. *Тогда для всякого полинома* $Q(x)$ *степени не выше* $n-1$ *справедливо тождество*

$$Q(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,Q(x_k)\frac{T_n(x)}{x-x_k}.$$

Доказательство. Выражение

$$\frac{T_n(x)}{x-x_k}$$

есть полином степени $n-1$. Пусть i есть одно из чисел $1, 2, 3, \ldots, n$. Если $k \neq i$, то

$$\frac{T_n(x_i)}{x_i-x_k}=0,$$

так как x_i есть корень $T_n(x)$. Чтобы найти значение полинома $\frac{T_n(x)}{x-x_i}$ при $x=x_i$, заметим, что

$$\left.\frac{T_n(x)}{x-x_i}\right|_{x=x_i}=\lim_{x\to x_i}\frac{T_n(x)-T_n(x_i)}{x-x_i}=T'_n(x_i).$$

Но $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$; стало быть,

$$T'_n(x)=\frac{n}{\sqrt{1-x^2}}\sin(n\arccos x).$$

Далее, из

$$\arccos x_i=\frac{(2i-1)\pi}{2n}$$

получим

$$\sin(n\arccos x_i)=\sin\frac{(2i-1)\pi}{2}=(-1)^{i-1},$$

и потому

$$T'_n(x_i)=\frac{(-1)^{i-1}n}{\sqrt{1-x_i^2}}.$$

Таким образом правая часть доказываемого тождества при $x=x_i$ становится равной $Q(x_i)$, т. е. совпадает с его левой частью*). Но так как и правая и левая части

*) Иначе говоря, правая часть есть интерполяционный полином Лагранжа для левой части.

этого тождества суть полиномы степени не высшей, чем $n-1$, то из совпадения их в n точках x_i и вытекает их тождественность.

Лемма 2. *Пусть $Q(x)$ есть полином степени не выше $n-1$. Если при всех x из $[-1, +1]$ оказывается*

$$|Q(x)|\sqrt{1-x^2}\leqslant 1,$$

то при тех же x

$$|Q(x)|\leqslant n.$$

Доказательство. Рассмотрим сначала такое значение x, которое удовлетворяет неравенству

$$x_n\leqslant x\leqslant x_1.$$

Так как

$$x_n=\cos\frac{2n-1}{2n}\pi=-\cos\frac{\pi}{2n}=-x_1,$$

то последнее неравенство означает, что

$$|x|\leqslant x_1.$$

Поэтому для рассматриваемого значения x оказывается

$$\sqrt{1-x^2}\geqslant\sqrt{1-x_1^2}=\sin\frac{\pi}{2n}\geqslant\frac{1}{n},$$

и доказываемая оценка тривиальна.

Теперь допустим, что выполнено одно из неравенств

$$-1\leqslant x<x_n,\quad x_1<x\leqslant 1.$$

Применим тождество

$$Q(x)=\frac{T_n(x)}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\sqrt{1-x_k^2}\,Q(x_k)\frac{1}{x-x_k},$$

доказанное в предыдущей лемме. Так как

$$\sqrt{1-x_k^2}\,|Q(x_k)|\leqslant 1,$$

то

$$|Q(x)|\leqslant\frac{|T_n(x)|}{n}\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{1}{x-x_k}\right|.$$

Но (и это здесь основное) для рассматриваемого значения x все разности $x-x_k$ имеют *один и тот же знак.*

Поэтому последнюю оценку можно записать и в следующей форме:

$$|Q(x)| \leqslant \frac{1}{n}\left|\sum_{k=1}^{n} \frac{T_n(x)}{x-x_k}\right|.$$

С другой стороны,

$$T_n(x)=2^{n-1}\prod_{i=1}^{n}(x-x_i).$$

Дифференцируя это тождество, мы получаем

$$T_n'(x)=2^{n-1}\sum_{k=1}^{n}\prod_{i\neq k}(x-x_i)=\sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x)}{x-x_k}.$$

Стало быть,

$$|Q(x)| \leqslant \frac{1}{n}|T'(x)|.$$

Остаётся оценить производную $T_n'(x)$ полинома Чебышева $T_n(x)$. Но

$$T_n'(x)=\frac{n\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Полагая $\arccos x=\theta$, имеем

$$T_n'(x)=n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta}$$

и, в силу (93),

$$|T_n'(x)| \leqslant n^2,$$

что и завершает доказательство.

Лемма 3. *Если полином $S(x)$ степени не выше n на сегменте $[-1, +1]$ удовлетворяет неравенству*

$$|S(x)| \leqslant M,$$

то его производная $S'(x)$ при тех же x удовлетворяет неравенству

$$|S'(x)| \leqslant Mn^2.$$

Доказательство. Неравенство (158) С. Н. Бернштейна даёт

$$|S'(x)| \leqslant \frac{Mn}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Значит, полином

$$Q(x) = \frac{1}{Mn} S'(x)$$

удовлетворяет условиям леммы 2 и

$$\left| \frac{1}{Mn} S'(x) \right| \leqslant n.$$

Теорема (А. А. Марков). *Если полином $P(x)$ степени не выше n на сегменте $[a, b]$ удовлетворяет неравенству*

$$|P(x)| \leqslant M,$$

то на том же сегменте

$$|P'(x)| \leqslant \frac{2Mn^2}{b-a}.$$

Доказательство. Положим

$$S(u) = P\left[\frac{(b-a)u + (a+b)}{2}\right].$$

Полином $S(u)$ удовлетворяет неравенству $|S(u)| \leqslant M$ на сегменте $[-1, +1]$. Так как

$$P(x) = S\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right],$$

то

$$P'(x) = S'\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]\frac{2}{b-a},$$

и дело сводится к лемме 3.

Заметим, что неравенство Маркова *точное*. В самом деле, если $a=-1$, $b=+1$, а

$$P(x) = \cos(n \arccos x),$$

то, как мы уже видели,

$$P'(x) = n\frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = n\frac{\sin n\theta}{\sin\theta},$$

откуда $P'(1) = n^2$.

Из неравенства Маркова вытекает, что (в тех же обозначениях)

$$|P^{(m)}(x)| \leqslant \frac{M2^m}{(b-a)^m} n^2 (n-1)^2 \ldots (n-m+1)^2.$$

Однако это последнее неравенство не точное. Точное неравенство для $P^{(m)}(x)$ было установлено В. А. Марковым*) (братом А. А. Маркова). Оно имеет вид

$$|P^{(m)}(x)| \leqslant \frac{M2^m}{(b-a)^m} \frac{n^2(n^2-1^2)(n^2-2^2)\ldots[n^2-(m-1)^2]}{(2m-1)!!}.$$

*) В. А. Марков [1], стр. 93.

ГЛАВА VII.

РЯДЫ ФУРЬЕ КАК АППАРАТ ПРИБЛИЖЕНИЯ.

§ 1. Ряд Фурье.

Бесконечный ряд вида

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{164}$$

называется *тригонометрическим рядом.*

Теорема 1. *Если функция $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд, то его коэффициенты определяются единственным образом.*

Доказательство. Заметим, что в условиях теоремы функция $f(x)$ входит в $C_{2\pi}$. Если проинтегрировать равенство

$$f(x) = A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{165}$$

по сегменту $[-\pi, \pi]$ и учесть, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\, dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin nx\, dx = 0,$$

то мы получим

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\, dx = 2\pi A,$$

откуда

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx. \tag{166}$$

Если, далее, умножить (165) на $\cos kx$ (что не нарушит равномерной сходимости ряда) и опять проинтегрировать полученное равенство по сегменту $[-\pi, \pi]$, то на основании лемм 1 и 2 § 2 главы III мы найдём, что

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx=\pi a_k.$$

Таким образом

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos kx\,dx. \tag{167}$$

Аналогично этому

$$b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin kx\,dx. \tag{168}$$

Равенства (166), (167) и (168) доказывают теорему.

Определение. Пусть $f(x)$ есть произвольная функция из $C_{2\pi}$. Числа A, a_k, b_k, построенные, исходя из этой функции, по формулам (166), (167) и (168), называются *коэффициентами Фурье* функции $f(x)$, а тригонометрический ряд, коэффициенты которого являются коэффициентами Фурье $f(x)$, называется *рядом Фурье* этой функции.

С помощью этого определения теореме 1 можно дать другую формулировку:

Теорема 2. *Если функция разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд, то этот ряд есть её ряд Фурье.*

Однако эта теорема вовсе не означает, что, составив ряд Фурье произвольно заданной функции $f(x)$, мы получаем её *разложение* *). Тем не менее, в широком

*) Этим мы хотим сказать, что функция $f(x)$ не обязана служить суммой полученного ряда; он может и не сходиться или сходиться к другой сумме.

классе случаев это так. Чтобы это установить, докажем следующее предложение:

Лемма. *Если функция $\varphi(x)$ из $C_{2\pi}$ ортогональна ко всем функциям системы*

$$1,\ \cos x,\ \sin x,\ \cos 2x,\ \sin 2x,\ \ldots, \tag{169}$$

т. е. все интегралы

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\cos nx\,dx, \quad \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\sin nx\,dx$$

равны нулю, то $\varphi(x)$ тождественно равна нулю.

Это свойство системы (169) выражают, говоря, что она *полна* в классе $C_{2\pi}$. Для доказательства заметим, что, каков бы ни был тригонометрический полином $T(x)$, справедливо равенство

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,T(x)\,dx = 0.$$

Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, подберём полином $T(x)$ так, чтобы при всех x оказывалось

$$|T(x) - \varphi(x)| < \varepsilon,$$

что возможно в силу второй теоремы Вейерштрасса. Для этого полинома имеем

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x)\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,[\varphi(x) - T(x)]\,dx.$$

Если M означает максимум $|\varphi(x)|$, то

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi} \varphi(x)\,[\varphi(x) - T(x)]\,dx\right| \leqslant 2\pi M\varepsilon.$$

Итак,

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x)\,dx \leqslant 2\pi M\varepsilon.$$

Так как правая часть этого неравенства сколь угодно мала, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} \varphi^2(x)\,dx = 0,$$

откуда и следует, что $\varphi(x) \equiv 0$.

Теорема 3. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ из класса $C_{2\pi}$ имеют одни и те же коэффициенты Фурье, то они тождественны.*

В самом деле, их разность будет ортогональна ко всем функциям (169) и, стало быть, тождественна нулю.

Отсюда вытекает теорема, которая очень часто позволяет гарантировать фактическую разложимость функции в ряд Фурье.

Теорема 4. *Если ряд Фурье некоторой функции $f(x)$ из класса $C_{2\pi}$ равномерно сходится, то его суммой служит именно эта функция $f(x)$.*

В самом деле, пусть

$$A + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{170}$$

есть равномерно сходящийся ряд Фурье функции $f(x)$. Обозначим его сумму через $g(x)$. Легко видеть, что и $g(x)$ входит в $C_{2\pi}$. По самому определению $g(x)$ она разлагается в равномерно сходящийся тригонометрический ряд (170). Значит, по теореме 2 это есть её ряд Фурье. Таким образом ряд (170) оказывается рядом Фурье двух функций класса $C_{2\pi}$: исходной функции $f(x)$ и своей суммы $g(x)$. В силу предыдущей теоремы, эти функции должны быть тождественны.

Таким образом, если мы, составив ряд Фурье, непрерывной, 2π-периодической функции, обнаружим его равномерную сходимость, то без дальнейших исследований сможем утверждать, что получили разложение нашей функции.

Пример. Составим ряд Фурье функции

$$\psi(x) = |\sin x|.$$

Так как $\psi(x)$ — чётная функция, то

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\,dx=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\,dx=\frac{2}{\pi}.$$

Далее,

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin x|\cos nx\,dx=\frac{2}{\pi}\int_{0}^{\pi}\sin x\cos nx\,dx,$$

откуда

$$a_n=\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\pi}[\sin(n+1)x-\sin(n-1)x]\,dx=$$
$$=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)x}{n+1}-\frac{\cos(n-1)x}{n-1}\right]_0^{\pi}$$

и, следовательно,

$$a_n=-\frac{1}{\pi}\left[\frac{\cos(n+1)\pi-1}{n+1}-\frac{\cos(n-1)\pi-1}{n-1}\right].$$

Если число n — нечётное, то

$$\cos(n+1)\pi=\cos(n-1)\pi=1,$$

так что $a_n=0$. Если же n — чётное, то

$$a_n=\frac{2}{\pi}\left(\frac{1}{n+1}-\frac{1}{n-1}\right)=\frac{-4}{\pi(n^2-1)}.$$

Аналогичный подсчёт даёт

$$b_n=0.$$

Таким образом ряд Фурье функции $\psi(x)$ имеет вид

$$\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\left[\frac{\cos 2x}{3}+\frac{\cos 4x}{15}+\ldots+\frac{\cos 2nx}{4n^2-1}+\ldots\right].$$

В силу равномерной сходимости этого ряда $\left(\text{он мажорируется сходящимся положительным рядом } \sum\frac{1}{4n^2-1}\right)$, получаем *равенство*

$$|\sin x|=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}. \tag{171}$$

Этот пример очень поучителен. Именно, он позволяет оценить наилучшее приближение функции $\psi(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n. Действительно, пусть

$$S_n(x)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

Ясно, что $S_n(x)$ есть полином порядка не выше n (его порядок равен n, если n чётно, и $n-1$, если n нечётно). В силу (171),

$$|\psi(x)-S_n(x)|\leqslant\frac{4}{\pi}\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1},$$

где $m=\left[\frac{n}{2}\right]+1$. Но

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\sum_{k=m}^{\infty}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=m}^{N}\left(\frac{1}{2k-1}-\frac{1}{2k+1}\right)\right],$$

откуда

$$\sum_{k=m}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[\sum_{k=m}^{N}\frac{1}{2k-1}-\sum_{k=m}^{N}\frac{1}{2k+1}\right]=$$

$$=\frac{1}{2}\lim_{N\to\infty}\left[\frac{1}{2m-1}-\frac{1}{2N+1}\right]=\frac{1}{2(2m-1)}.$$

Таким образом

$$|\psi(x)-S_n(x)|\leqslant\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2m-1}=\frac{2}{\pi}\,\frac{1}{2\left[\frac{n}{2}\right]+1}.$$

Если n чётно, то $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n}{2}$, а если n нечётно, то $\left[\frac{n}{2}\right]=\frac{n-1}{2}$.

Стало быть,

$$2\left[\frac{n}{2}\right]+1=\begin{cases} n+1, & \text{если } n \text{ чётно,} \\ n, & \text{если } n \text{ нечётно.}\end{cases}$$

В обоих случаях получается число не меньшее n. Значит,

$$|\psi(x)-S_n(x)|\leqslant\frac{2}{\pi n} \tag{172}$$

и, тем более,

$$E_*^T(\psi)\leqslant\frac{2}{\pi n}. \tag{173}$$

Оценка (172) позволяет установить неравенство (156) для наилучшего приближения E_n функции

$$\sigma(x)=\sqrt{1-x^2}$$

обыкновенными алгебраическими полиномами на сегменте $[-1, +1]$.

Именно, полином $S_n(x)$ допускает представление

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\cos^k x.$$

С другой стороны, при всяком x

$$|\sin x|=\sqrt{1-\cos^2 x}.$$

Значит, неравенство (172) можно записать так:

$$\left|\sqrt{1-\cos^2 x}-\sum_{k=0}^{n} c_k\cos^k x\right|\leqslant\frac{2}{\pi n},$$

откуда при $-1\leqslant x\leqslant 1$

$$\left|\sqrt{1-x^2}-\sum_{k=0}^{n} c_k x^k\right|\leqslant\frac{2}{\pi n},$$

и мы приходим*) к оценке (156):

$$E_n(\sigma)\leqslant\frac{2}{\pi n}.$$

---

*) Ещё скорее мы придём к этому результату, если заметим, что $|\sin\theta|$ — функция, индуцированная для $\sigma(x)$, и сошлёмся на лемму 1 из § 1 главы VI.

Наш пример приводит ещё к одному интересному заключению. Именно, заменим в (172) аргумент x на $y+\frac{\pi}{2}$ и заметим, что

$$\psi\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\left|\sin\left(y+\frac{\pi}{2}\right)\right|=|\cos y|,$$

$$S_n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}\frac{\cos(2ky+k\pi)}{4k^2-1}=$$

$$=\frac{2}{\pi}-\frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\left[\frac{n}{2}\right]}(-1)^k\frac{\cos 2ky}{4k^2-1},$$

откуда

$$S_n\left(y+\frac{\pi}{2}\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k\cos^k y.$$

Это даёт неравенство

$$\left||\cos y|-\sum_{k=0}^{n}a_k\cos^k y\right|\leqslant\frac{2}{\pi n},$$

или после замены $\cos y$ на x:

$$\left||x|-\sum_{k=0}^{n}a_k x^k\right|\leqslant\frac{2}{\pi n},$$

откуда следует

Теорема 5. *Наилучшее приближение $E_n(|x|)$ функции $|x|$ на сегменте $[-1, +1]$ алгебраическими полиномами степени не выше n удовлетворяет неравенству:*

$$E_n(|x|)\leqslant\frac{2}{\pi n}.$$

Ниже будет установлено, что *порядок* этой оценки, так же как и порядок оценки (173), не может быть улучшен.

Для применения теоремы 4 прямой путь состоит в фактическом составлении ряда Фурье функции $f(x)$

и исследовании его сходимости. Однако во многих случаях можно, опираясь на структурные свойства функции $f(x)$, заранее сказать, что её ряд Фурье равномерно сходится. В следующем параграфе в этом направлении будут получены весьма общие результаты, но простейший из них можно привести здесь же.

Теорема 6. *Если функция $f(x)$ из $C_{2\pi}$ имеет производную $f'(x)$, удовлетворяющую условию Липшица какого-нибудь положительного порядка α, то $f(x)$ разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье.*

Доказательство. Интегрируя по частям, находим

$$a_n = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos nx \, dx =$$

$$= \frac{1}{\pi} \left[f(x) \frac{\sin nx}{n} \right]_{-\pi}^{\pi} - \frac{1}{n\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx.$$

Ввиду периодичности $f(x)$ внеинтегральный член равен нулю и, стало быть,

$$-\pi n a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'(x) \sin nx \, dx. \qquad (174)$$

Сделаем в последнем интеграле подстановку $x = t + \frac{\pi}{n}$. В силу периодичности подинтегральной функции мы можем при этом сохранить старые пределы интеграла:

$$-\pi n a_n = \int_{-\pi}^{\pi} f'\left(t + \frac{\pi}{n}\right) \sin(nt + \pi) \, dt =$$

$$= -\int_{-\pi}^{\pi} f'\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \sin nx \, dx.$$

Отсюда и из (174)

$$-2\pi n a_n = \int_{-\pi}^{\pi} \left\{ f'(x) - f'\left(x + \frac{\pi}{n}\right) \right\} \sin nx \, dx.$$

Так как

$$|f'(x)-f'(y)|\leqslant M|x-y|^{\alpha},$$

то

$$\left|\int_{-\pi}^{\pi}\left\{f'(x)-f'\left(x+\frac{\pi}{n}\right)\right\}\sin nx\,dx\right|\leqslant$$

$$\leqslant M\left(\frac{\pi}{n}\right)^{\alpha}\int_{-\pi}^{\pi}|\sin nx|\,dx<2\pi M\frac{\pi^{\alpha}}{n^{\alpha}}$$

и, стало быть,

$$|a_n|\leqslant\frac{M\pi^{\alpha}}{n^{1+\alpha}}.$$

Аналогично получается оценка

$$|b_n|\leqslant\frac{M\pi^{\alpha}}{n^{1+\alpha}}.$$

Эти оценки гарантируют сходимость ряда

$$\sum_{n=1}^{\infty}(|a_n|+|b_n|),$$

откуда и подавно следует равномерная сходимость ряда Фурье

$$A+\sum_{n=1}^{\infty}(a_n\cos nx+b_n\sin nx)$$

нашей функции $f(x)$. Сопоставляя это обстоятельство с теоремой 4, завершаем доказательство.

§ 2. Оценка отклонения частных сумм ряда Фурье.

Мы видим, что в широком классе случаев ряд Фурье непрерывной, 2π-периодической функции представляет собой равномерно сходящееся *разложение* этой функции. В этих случаях частные суммы ряда будут служить приближёнными выражениями функции. Так как эти частные суммы суть тригонометрические полиномы, то мы можем сказать, что ряд Фурье является источником получения тригонометрических полиномов, представляющих функцию *) с любой степенью точности. Естественно заняться вопросом о порядке приближения этих полиномов к функции. Этому и посвящён настоящий параграф.

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}} = \frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha \qquad (175)$$

$$(\alpha \neq 2k\pi).$$

В самом деле, применим ко всем слагаемым правой части равенства

$$\sin\frac{2n+1}{2}\alpha = \sin\frac{\alpha}{2} + \left[\sin\frac{3}{2}\alpha - \sin\frac{\alpha}{2}\right] + \\ + \left[\sin\frac{5}{2}\alpha - \sin\frac{3}{2}\alpha\right] + \ldots + \left[\sin\frac{2n+1}{2}\alpha - \sin\frac{2n-1}{2}\alpha\right]$$

известную формулу

$$\sin A - \sin B = 2\sin\frac{A-B}{2}\cos\frac{A+B}{2}.$$

Это приводит к равенству

$$\sin\frac{2n+1}{2}\alpha = 2\sin\frac{\alpha}{2}\left[\frac{1}{2} + \cos\alpha + \cos 2\alpha + \ldots + \cos n\alpha\right],$$

равносильному (175).

Пусть $f(x)$ есть функция класса $C_{2\pi}$ и

$$S_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n}(a_k\cos kx + b_k\sin kx)$$

*) Конечно, это относится не к любой непрерывной, 2π-периодической функции, а лишь к такой, про которую известна разложимость в равномерно сходящийся ряд Фурье.

есть частная сумма её ряда Фурье. Подставив сюда выражения коэффициентов Фурье

$$A=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt,$$

$$a_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\cos kt\,dt,\quad b_k=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\sin kt\,dt,$$

получим

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,dt+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)(\cos kt\cos kx+\sin kt\sin kx)\,dt.$$

Отсюда

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\frac{1}{2}+\sum_{k=1}^{n}\cos k(t-x)\right]dt.$$

На основании тождества (175) мы можем это равенство представить так:

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(t-x)}{\sin\frac{t-x}{2}}\,dt. \tag{176}$$

Интеграл правой части называется *сингулярным интегралом Дирихле*. Для дальнейшего полезно преобразовать полученную формулу. Именно, заменим t на $u+x$. В силу периодичности подинтегральной функции можно сохранить пределы интегрирования

$$S_n(x)=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+x)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\,du.$$

Разбивая интеграл на два, распространённых на промежутки $[-\pi, 0]$ и $[0, \pi]$, сделаем в первом замену u на $-u$:

$$S_n(x) = \frac{1}{2\pi}\int_0^{\pi} [f(x+u) + f(x-u)] \frac{\sin\frac{2n+1}{2}u}{\sin\frac{u}{2}}\, du.$$

Наконец, заменяем u на $2t$:

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} [f(x+2t) + f(x-2t)] \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\, dt. \quad (177)$$

Лемма 2. *Для всякого натурального $n \geqslant 2$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| dt < \frac{2+\ln n}{2}. \quad (178)$$

Доказательство. Разбивая наш интеграл на два, распространённых на сегменты $\left[0, \frac{\pi}{2(2n+1)}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2(2n+1)}, \frac{\pi}{2}\right]$, применим к первому оценку (93): $|\sin nt| \leqslant n|\sin t|$, а ко второму оценку (94): $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$ и оценку $|\sin(2n+1)t| \leqslant 1$. В результате получим

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| dt < \frac{1}{\pi}\int_0^{\frac{\pi}{4n+2}} (2n+1)\, dt + \frac{1}{2}\int_{\frac{\pi}{4n+2}}^{\pi/2} \frac{dt}{t},$$

откуда

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| dt < \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\ln(2n+1).$$

Но $2n+1 < ne$, значит, $\ln(2n+1) < 1 + \ln n$, и потому

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2} \left|\frac{\sin(2n+1)t}{\sin t}\right| dt < \frac{2+\ln n}{2}.$$

Следствие. *Если функция $f(x)$ удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leqslant M$, то частная сумма её ряда Фурье удовлетворяет неравенству*

$$|S_n(x)| \leqslant M(2+\ln n) \qquad (n \geqslant 2). \tag{179}$$

В самом деле, благодаря (177) имеем

$$|S_n(x)| \leqslant \frac{2M}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt,$$

и дело сводится к (178).

Оценка (179) приводит к важной теореме:

Теорема 1 (А. Лебег [1]). *Если наилучшее приближение функции $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка не выше n есть E_n, то для всех x*

$$|S_n(x) - f(x)| \leqslant (3+\ln n) E_n \qquad (n \geqslant 2). \tag{180}$$

Доказательство. Будем обозначать частную сумму ряда Фурье функции $f(x)$ через $S_n[f]$, чтобы подчеркнуть её зависимость от $f(x)$. В таком случае можно написать очевидное соотношение

$$S_n[f-g] = S_n[f] - S_n[g].$$

Заметим, далее, что всякий тригонометрический полином есть сам себе ряд Фурье. В частности, для полинома $T(x)$ порядка не выше n

$$S_n[T] = T(x).$$

Обозначим через $T_n(x)$ полином наилучшего приближения для $f(x)$, так что

$$|f(x) - T_n(x)| \leqslant E_n. \tag{181}$$

В таком случае по (179) имеем

$$|S_n[f-T_n]| \leqslant (2+\ln n) E_n,$$

или, что то же самое,

$$|S_n[f] - T_n(x)| \leqslant (2+\ln n) E_n. \tag{182}$$

Теорема получается простым сопоставлением (181) и (182).

Так как $\ln n$ растёт весьма медленно, то теорема Лебега, грубо говоря, показывает, что приближение функции частными суммами её ряда Фурье «не на много хуже», чем наилучшее.

Между прочим, из теоремы Лебега вытекает разложимость в равномерно сходящийся ряд Фурье всех функций, у которых

$$\lim_{n\to\infty} (E_n \ln n) = 0. \tag{183}$$

Но это не очень удобный критерий сходимости. Удобнее

Теорема 2. *Если модуль непрерывности* $\omega(\delta)$ 2π-*периодической функции* $f(x)$ *удовлетворяет условию*

$$\lim_{\delta\to 0} [\omega(\delta) \ln \delta] = 0, \tag{184}$$

то $f(x)$ *разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье.*

Доказательство. По теореме 1 Джексона из главы IV имеем

$$E_n \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{n}\right).$$

Значит,

$$E_n \ln n \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{n}\right) \left|\ln \frac{1}{n}\right|,$$

и выполнено условие (183).

Приведённое доказательство опирается на глубокую теорему Джексона и потому, несмотря на свою краткость, не может быть признано элементарным. Условие (184) называется *условием Дини-Липшица*. Оно выполняется для функции, удовлетворяющей условию Липшица любого положительного порядка.

§ 3. Пример непрерывной функции, не разлагающейся в ряд Фурье.

Признак сходимости, установленный в конце предыдущего параграфа, имеет очень общий характер. Мы отметили, например, что функция, удовлетворяющая условию Липшица любого положительного порядка, удовлетворяет и условию (184), т. е. разлагается в ряд Фурье. Естественно спросить, нужно ли вообще какое-нибудь ограничение на функцию $f(x)$, кроме её непрерывности, чтобы она разлагалась в ряд Фурье. Оказывается, что вовсе отказаться от всяких требований, кроме непрерывности, *нельзя*. Это было доказано в 1876 году дю-Буа-Реймондом, который построил пример непрерывной функции, не разлагающейся в ряд Фурье. Мы приведём здесь аналогичный пример, принадлежащий Фейеру.

Лемма. *Если*

$$\varphi_n(x) = \left[\frac{\cos x}{n} + \frac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \frac{\cos nx}{1}\right] - \\ - \left[\frac{\cos(n+2)x}{1} + \frac{\cos(n+3)x}{2} + \ldots + \frac{\cos(2n+1)x}{n}\right], \quad (185)$$

то при всех x

$$|\varphi_n(x)| \leqslant 4\sqrt{\pi}. \quad (186)$$

В самом деле,

$$\varphi_n(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n+1-k)x}{k} - \sum_{k=1}^{n} \frac{\cos(n+1+k)x}{k}.$$

Значит, на основании формулы

$$\cos A - \cos B = 2\sin\frac{A+B}{2}\sin\frac{B-A}{2}$$

имеем

$$\varphi_n(x) = 2\sin(n+1)x \sum_{k=1}^{n} \frac{\sin kx}{k},$$

и дело сводится к оценке (118).

Так как $\varphi_n(x)$ есть тригонометрический полином, то формула (185) и есть «разложение $\varphi_n(x)$ в ряд Фурье». Остановимся на частной сумме $S_m[\varphi_n;\ x]$ этого ряда. Для её получения нужно из правой части (185) вычеркнуть косинусы углов ix при $i > m$. Значит,

$$S_m[\varphi_n; x] = \begin{cases} \dfrac{\cos x}{n} + \dfrac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \dfrac{\cos mx}{n+1-m}, \\ \qquad \text{при } 1 \leqslant m \leqslant n, \\ \dfrac{\cos x}{n} + \dfrac{\cos 2x}{n-1} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{1} \\ \qquad \text{при } m = n+1, \\ \left[\dfrac{\cos x}{n} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{1}\right] - \\ \qquad - \left[\dfrac{\cos(n+2)x}{1} + \ldots + \dfrac{\cos mx}{m-n-1}\right] \\ \qquad \text{при } n+2 \leqslant m \leqslant 2n+1, \\ \left[\dfrac{\cos x}{n} + \ldots + \dfrac{\cos nx}{1}\right] - \\ \qquad - \left[\dfrac{\cos(n+2)x}{1} + \ldots + \dfrac{\cos(2n+1)x}{n}\right] \\ \qquad \text{при } m \geqslant 2n+1. \end{cases}$$

Эти равенства показывают, что при любых m и n

$$S_m[\varphi_n; 0] \geqslant 0. \tag{187}$$

Теперь мы определяем интересующую нас функцию:

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \varphi_{2^{n^3}}(x). \tag{188}$$

Она, очевидно, непрерывна и 2π-периодична. Нетрудно видеть, что частная сумма $S_m[f; x]$ её ряда Фурье выражается так:

$$S_m[f; x] = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} S_m[\varphi_{2^{n^3}}; x]. \tag{189}$$

Действительно, чтобы найти косинус-коэффициент

$$a_k(f) = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx, \tag{190}$$

нужно умножить равномерно сходящееся разложение (188) на $\cos kx$ и почленно интегрировать. Это даст

$$a_k(f)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}a_k(\varphi_{2n^3}). \tag{191}$$

Умножая (191) на $\cos kx$ и суммируя от $k=1$ до $k=m$, мы и получим (189). Из (187) и (189) имеем при любых m и n:

$$S_m[f;\ 0]\geqslant\frac{1}{n^2}S_m[\varphi_{2n^3};\ 0]. \tag{192}$$

Пусть, в частности,

$$m=2n^3.$$

Так как

$$S_n[\varphi_n;\ x]=\frac{\cos x}{n}+\frac{\cos 2x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos nx}{1},$$

то

$$S_{2n^3}[\varphi_{2n^3};0]=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{2n^3}.$$

Оценим эту сумму снизу. Ввиду того что

$$\frac{1}{k}>\int_k^{k+1}\frac{dx}{x},$$

ясно, что

$$S_{2n^3}[\varphi_{2n^3};\ 0]>\int_1^{2n^3+1}\frac{dx}{x}=\ln(2n^3+1)>n^3\ln 2.$$

Отсюда и из (192) следует, что

$$S_{2n^3}[f;\ 0]>n\ln 2, \tag{193}$$

и поэтому ряд Фурье функции $f(x)$ расходится в точке $x=0$.

Усложнив конструкцию, можно получить непрерывную функцию, ряд Фурье которой расходится на бесконечном множестве точек. Однако до сих пор не решён вопрос, существуют ли непрерывные функции с *везде расходящимся* рядом Фурье. Небезынтересно отметить, что ряд Фурье непрерывной функции $f(x)$ не может оказаться сходящимся в какой-нибудь точке x_0 к сумме, отличной от $f(x_0)$. Иначе говоря, ряд Фурье функции из $C_{2\pi}$ или вовсе расходится, или сходится именно к этой функции. Этот факт будет доказан ниже.

ГЛАВА VIII.

СУММЫ ФЕЙЕРА И ВАЛЛЕ-ПУССЕНА.

§ 1. Суммы Фейера.

Мы видели, что частные суммы $S_n(x)$ ряда Фурье функции $f(x) \in C_{2\pi}$ могут и не сходиться к этой функции. Однако для любой такой функции, исходя из сумм $S_n(x)$, можно придти к полиномам, равномерно стремящимся к функции.

Теорема 1 (Л. Фейер [1]). *Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и $S_n(x)$—частные суммы её ряда Фурье. Положим*

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n}.$$

Суммы $\sigma_n(x)$ (называемые суммами Фейера) сходятся к $f(x)$ равномерно на всей оси:

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n(x) = f(x).$$

Доказательство. Каждая сумма $S_k(x)$ представляется интегралом Дирихле

$$S_k(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x+2t) + f(x-2t)] \frac{\sin(2k+1)t}{\sin t} dt.$$

Отсюда

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \frac{[f(x+2t) + f(x-2t)]}{\sin t} \left[\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)t \right] dt.$$

Но *)

$$\sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)t = \frac{\sin^2 nt}{\sin t}, \tag{194}$$

и потому

$$\sigma_n(x) = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x+2t) + f(x-2t)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt. \tag{195}$$

Стоящий направо интеграл называется *сингулярным интегралом Фейера*. Таким образом сумма Фейера произвольной функции $f(x)$ выражается через эту функцию с помощью интеграла Фейера. В частности, это будет так для функции $f(x) \equiv 1$. Но «ряд Фурье» этой функции имеет вид

$$1 + \sum_{k=1}^{\infty} 0$$

и, стало быть, для неё все суммы $S_n(x)$, а с ними и суммы Фейера $\sigma_n(x)$, тождественно равны единице. Поэтому формула (195) в применении к этой функции даёт тождество

$$1 = \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} 2 \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt. \tag{196}$$

Умножим (196) на $f(x)$ и вычтем из (195):

$$\sigma_n(x) - f(x) =$$
$$= \frac{1}{n\pi} \int_0^{\pi/2} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)] \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt. \tag{197}$$

---

*) В самом деле, $2 \sin A \sin B = \cos(A-B) - \cos(A+B)$, и потому

$$2\sin t \sum_{k=0}^{n-1} \sin(2k+1)t = \sum_{k=0}^{n-1} [\cos 2kt - \cos(2k+2)t] =$$
$$= 1 - \cos 2nt = 2\sin^2 nt,$$

откуда и следует (194).

Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, подберём такое $\delta > 0$, что при

$$|x'' - x'| < 2\delta$$

будет

$$|f(x'') - f(x')| < \frac{\varepsilon}{2},$$

после чего разобьём интеграл (197) на два, распространённых на промежутки $[0, \delta]$ и $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$. В первом из них

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| < \varepsilon,$$

и потому в силу (196),

$$\left|\frac{1}{n\pi}\int_0^\delta [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt = \frac{\varepsilon}{2}.$$

Во втором интеграле имеем

$$|f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)| \leqslant 4M,$$

где $M = \max|f(x)|$ и, кроме того,

$$\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 \leqslant \frac{1}{\sin^2\delta}.$$

Стало быть,

$$\left|\frac{1}{n\pi}\int_\delta^{\pi/2} [f(x+2t) + f(x-2t) - 2f(x)]\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt\right| \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n\pi}\frac{4M}{\sin^2\delta}\frac{\pi}{2} = \frac{2M}{n\sin^2\delta}.$$

Значит,

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{2M}{n\sin^2\delta}.$$

Если n настолько велико, что

$$\frac{2M}{n\sin^2\delta} < \frac{\varepsilon}{2},$$

то при всех x окажется

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Замечания. 1) Так как $\sigma_n(x)$ есть тригонометрический полином, то мы получаем ещё одно доказательство второй теоремы Вейерштрасса.

2) Из доказанной теоремы сразу вытекает свойство полноты *) тригонометрической системы в $C_{2\pi}$. В самом деле, если функция $f(x)$ ортогональна ко всем функциям (169), то $\sigma_n(x) = 0$, а тогда и $f(x) = \lim \sigma_n(x) = 0$.

3) Допустим, что функция $f(x)$ при всех x удовлетворяет неравенству $|f(x)| \leqslant M$. Из формулы (195) находим, что

$$|\sigma_n(x)| \leqslant \frac{2M}{n\pi} \int_0^{\pi/2} \left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

В силу (196) это последнее неравенство можно переписать так:

$$|\sigma_n(x)| \leqslant M.$$

Таким образом доказана

Теорема 2. *Абсолютная величина суммы Фейера какой-нибудь функции не превосходит максимума модуля этой функции.*

Нам понадобится следующее простое предложение теории пределов:

Лемма. *Если переменная x_n имеет предел, то переменная*

$$y_n = \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n}$$

имеет тот же предел.

---

*) Такое же доказательство полноты можно дать, опираясь на возможность равномерного приближения $f(x)$ интегралом Валле-Пуссена

$$V_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^{2n} \frac{t-x}{2} dt.$$

Доказательство. Действительно, пусть

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l.$$

Для произвольного $\varepsilon > 0$ можно указать такое n_0, что при $n > n_0$

$$|x_n - l| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Для таких n

$$|y_n - l| \leqslant \frac{|x_1 - l| + \ldots + |x_{n_0} - l|}{n} + \frac{|x_{n_0+1} - l| + \ldots + |x_n - l|}{n},$$

так что, полагая

$$A(\varepsilon) = |x_1 - l| + \ldots + |x_{n_0} - l|,$$

мы будем иметь

$$|y_n - l| < \frac{A(\varepsilon)}{n} + \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если n достаточно велико, то $\frac{A(\varepsilon)}{n} < \frac{\varepsilon}{2}$ и

$$|y_n - l| < \varepsilon.$$

Лемма доказана.

Сопоставляя эту лемму с теоремой Фейера, получаем предложение, о котором мы упоминали в конце предыдущей главы: *если ряд Фурье непрерывной, 2π-периодической функции $f(x)$ сходится в некоторой точке x_0, то его сумма равна $f(x_0)$.* В самом деле, если его сумма равна A, то по доказанной лемме и сумма $\sigma_n(x_0)$ должна стремиться к A, а так как пределом $\sigma_n(x_0)$ служит $f(x_0)$, то $A = f(x_0)$.

§ 2. Некоторые оценки для отклонения сумм Фейера.

Теорема 1 (С. Н. Бернштейн [3]). *Если $f(x) \in C_{2\pi}$ и $f(x) \in \mathrm{Lip}_M\,\alpha$, где $0 < \alpha < 1$, то при всех x*

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{C_\alpha M}{n^\alpha}, \tag{198}$$

где C_α — постоянная, зависящая только от α.

Доказательство. Воспользуемся формулой (197). В условиях теоремы

$$|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)| \leqslant 2^{1+\alpha}Mt^{\alpha}.$$

Кроме того, $\sin^2 t > \frac{4}{\pi^2}t^2$. Значит,

$$|\sigma_n(x)-f(x)| < \frac{\pi}{n2^{1-\alpha}} M \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^{2-\alpha}}\,dt.$$

Но подстановка $nt = z$ даёт

$$\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{t^{2-\alpha}}\,dt = n^{1-\alpha} \int_0^{n\pi/2} \frac{\sin^2 z}{z^{2-\alpha}}\,dz.$$

Отсюда

$$|\sigma_n(x)-f(x)| < \frac{M}{n^{\alpha}} \frac{\pi}{2^{1-\alpha}} \int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^{2-\alpha}}\,dz,$$

что и доказывает теорему. Для большей наглядности оценим постоянную C_α. Очевидно,

$$\int_0^{+\infty} \frac{\sin^2 z}{z^{2-\alpha}}\,dz < \int_0^1 z^{\alpha}\,dz + \int_1^{+\infty} \frac{dz}{z^{2-\alpha}} = \frac{2}{1-\alpha^2}.$$

Таким образом

$$C_\alpha < \frac{\pi 2^{\alpha}}{1-\alpha^2}.$$

Из сопоставления этой теоремы Бернштейна с результатами глав IV и V можно было бы сделать заключение, что для функций класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\alpha < 1$ отклонение сумм Фейера имеет тот же порядок убывания, что и наименьшее отклонение. В такой форме, однако, это заключение неверно. Дело в том, что для *отдельных* функций из $\mathrm{Lip}\,\alpha$ наименьшее отклонение E_n убывает гораздо скорее, чем $n^{-\alpha}$. Таковы, например, функции класса $\mathrm{Lip}\,1$ (они и подавно входят в $\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\alpha < 1$). Тем не менее, *для всего класса* $\mathrm{Lip}\,\alpha$ *в целом* порядок убывания отклонения фейеровских сумм совпадает с порядком убывания E_n. Разъясним это утверждение подробнее.

В § 6 главы V мы установили, что в классе $\mathrm{Lip}_1\,\alpha$ тригонометрические полиномы порядка не выше n лежат с плотностью $\Gamma_n(\alpha)$, удовлетворяющей условию

$$\frac{K(\alpha)}{n^\alpha} \leqslant \Gamma_n(\alpha) \leqslant \frac{12}{n^\alpha}. \tag{199}$$

Положим далее

$$\Delta_n(\alpha) = \sup_{f \in \mathrm{Lip}_1 \alpha} \{\max |\sigma_n(x) - f(x)|\}.$$

Эту величину, введённую С. М. Никольским [1], естественно назвать *мерой приближения* всего класса $\mathrm{Lip}_1\,\alpha$ суммами Фейера. Как показано С. М. Никольским, при $\alpha < 1$ имеет место асимптотическая формула

$$\Delta_n(\alpha) = \frac{2\Gamma(\alpha)}{\pi(1-\alpha)} \frac{\sin\frac{\alpha\pi}{2}}{n^\alpha} + \frac{\rho_n}{n^\alpha},$$

где ρ_n стремится к нулю при возрастании n. Из неравенства (198) непосредственно ясно, что при $\alpha < 1$

$$\Delta_n(\alpha) \leqslant \frac{C_\alpha}{n^\alpha},$$

а так как $\Gamma_n(\alpha) \leqslant \Delta_n(\alpha)$, то

$$1 \leqslant \frac{\Delta_n(\alpha)}{\Gamma_n(\alpha)} \leqslant \frac{C_\alpha}{K(\alpha)}.$$

Это соотношение и показывает, что для всего класса $\mathrm{Lip}\,\alpha$ в целом отклонение фейеровских сумм имеет порядок, одинаковый с наилучшим. Однако для $\alpha = 1$ это обстоятельство не имеет места. Для этого случая справедлива такая теорема:

Теорема 2 (С. Н. Бернштейн). *Для всякой 2π-периодической функции $f(x)$ класса $\mathrm{Lip}_M\,1$ справедлива оценка*

$$|\sigma_n(x) - f(x)| < \frac{AM \ln n}{n} \qquad (n>1), \tag{200}$$

где A есть абсолютная постоянная.

Доказательство. Снова пользуемся формулой (197), которая, в силу неравенства

$$|f(x+2t)+f(x-2t)-2f(x)| \leqslant 4Mt,$$

даёт оценку

$$|\sigma_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{4M}{n\pi}\int\limits_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Ввиду того что $\sin t \geqslant \frac{2}{\pi}t$, получаем

$$|\sigma_n(x)-f(x)| \leqslant \frac{\pi M}{n}\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{t}\,dt.$$

Но

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{t}\,dt=\int\limits_0^{n\pi/2}\frac{\sin^2 z}{z}\,dz<\int\limits_0^{\pi/2}dz+\int\limits_{\pi/2}^{n\pi/2}\frac{dz}{z}=\frac{\pi}{2}+\ln n.$$

Если $n \geqslant 8$, то $\ln n > \frac{\pi}{2}$, и потому

$$\int\limits_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{t}\,dt<2\ln n,$$

так что*)

$$|\sigma_n(x)-f(x)| < \frac{2\pi M\ln n}{n}.$$

Порядок оценки (200) окончательный. Это показывает

Теорема 3. *Пусть функция $f(x) \in C_{2\pi}$ в точке x_0 имеет конечные правостороннюю и левостороннюю производные $f'_+(x_0)$ и $f'_-(x_0)$. Тогда*

$$\lim_{n\to\infty}\left\{\frac{n}{\ln n}[\sigma_n(x_0)-f(x_0)]\right\}=\frac{f'_+(x_0)-f'_-(x_0)}{\pi}. \tag{201}$$

---

*) Последнее неравенство устанавливает справедливость оценки (200) лишь для $n \geqslant 8$. Но за счет увеличения A легко получить (200) для всех $n > 1$.

Чтобы доказать эту асимптотическую формулу, заметим, что

$$\lim_{t\to+0}\frac{f(x_0+2t)-f(x_0)}{2\sin t}=f'_+(x_0).$$

Поэтому

$$f(x_0+2t)-f(x_0)=2f'_+(x_0)\sin t+\alpha(t)\sin t,$$

где $\alpha(t)$ стремится к нулю вместе с t. Аналогично

$$f(x_0-2t)-f(x_0)=-2f'_-(x_0)\sin t+\beta(t)\sin t,$$

где $\beta(t)$ бесконечно мало вместе с t. Из этих формул и из равенства (197) находим

$$\sigma_n(x_0)-f(x_0)=$$

$$=\frac{2}{n\pi}[f'_+(x_0)-f'_-(x_0)]\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt+\frac{1}{n}\int_0^{\pi/2}\gamma(t)\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt,$$

где

$$\gamma(t)=\frac{1}{\pi}[\alpha(t)+\beta(t)].$$

Таким образом всё сводится к доказательству равенств

$$\lim_{n\to\infty}\frac{2}{\ln n}\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt=1, \tag{202}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\ln n}\int_0^{\pi/2}\gamma(t)\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt=0. \tag{203}$$

Первое из этих равенств устанавливается так: заменяем в формуле (90) t на $2t$, что даёт тождество

$$\sin^2 nt=[\sin t+\sin 3t+\ldots+\sin(2n-1)t]\sin t.$$

Отсюда

$$\int_0^{\pi/2}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt=1+\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1}.$$

Но при $k\leqslant x<k+1$

$$\frac{1}{2k+1}<\frac{1}{2x-1}\leqslant\frac{1}{2k-1}.$$

Интегрируя это неравенство, получаем

$$\frac{1}{2k+1} < \int_k^{k+1} \frac{dx}{2x-1} < \frac{1}{2k-1};$$

Значит,

$$\frac{1}{3}+\frac{1}{5}+\ldots+\frac{1}{2n-1} < \int_1^n \frac{dx}{2x-1},$$

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{2x-1} < 1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1}$$

и, стало быть,

$$\int_1^{n+1} \frac{dx}{2x-1} < 1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1} < 1+\int_1^n \frac{dx}{2x-1},$$

или, что то же самое,

$$\frac{1}{2}\ln(2n+1) < 1+\frac{1}{3}+\ldots+\frac{1}{2n-1} < 1+\frac{1}{2}\ln(2n-1).$$

Таким образом

$$\frac{1}{2}\ln 2n < \int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt < 1+\frac{1}{2}\ln 2n,$$

откуда и следует (202).

Так как переменная величина, имеющая конечный предел, ограничена, то при всех n

$$\frac{1}{\ln n}\int_0^{\pi/2} \frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt < K, \tag{204}$$

где K — некоторая постоянная. Взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы можем найти такое $\delta > 0$, что в сегменте $[0, \delta]$

$$|\gamma(t)| < \varepsilon.$$

В таком случае

$$\left|\frac{1}{\ln n}\int_0^{\pi/2}\gamma(t)\,\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt\right| <$$

$$< \frac{\varepsilon}{\ln n}\int_0^{\delta}\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt + \frac{1}{\ln n}\int_{\delta}^{\pi/2}|\gamma(t)|\,\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt.$$

Нетрудно видеть, что функция $\gamma(t)$ в сегменте $\left[\delta, \frac{\pi}{2}\right]$ ограничена *): $|\gamma(t)| < A$. Значит, принимая во внимание (204):

$$\left|\frac{1}{\ln n}\int_0^{\pi/2}\gamma(t)\,\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt\right| < K\varepsilon + \frac{A\pi}{2\sin\delta\ln n}$$

и при достаточно больших n

$$\left|\frac{1}{\ln n}\int_0^{\pi/2}\gamma(t)\,\frac{\sin^2 nt}{\sin t}\,dt\right| < (K+1)\,\varepsilon,$$

что и доказывает теорему.

Соотношение (201) можно записать в форме

$$\frac{n}{\ln n}\left[\sigma_n(x_0) - f(x_0)\right] = \frac{1}{\pi}\left[f'_+(x_0) - f'_-(x_0)\right] + \rho_n,$$

где ρ_n — величина бесконечно малая. Отсюда

$$\sigma_n(x_0) - f(x_0) = \frac{\ln n}{\pi n}\left[f'_+(x_0) - f'_-(x_0)\right] + \tau_n,$$

где τ_n есть бесконечно малая более высокого порядка, чем $\frac{\ln n}{n}$.

---

*) Ибо $\gamma(t) = \frac{\alpha(t)+\beta(t)}{\pi}$ и, например,

$$\alpha(t) = \frac{f(x_0+2t) - f(x_0) - 2f'_+(x_0)\sin t}{\sin t}.$$

Теорема 4 (С. М. Никольский). *Если $f(x)$, оставаясь 2π-периодической, пробегает весь класс* $\mathrm{Lip}_1 1$ *и*

$$\Delta_n(1) = \sup\{\max|\sigma_n(x) - f(x)|\},$$

то справедлива асимптотическая формула *)

$$\Delta_n(1) = \frac{2\ln n}{\pi n} + \rho_n \frac{\ln n}{n},$$

где ρ_n стремится к нулю с возрастанием n.

Действительно, в силу (197), имеем

$$|\sigma_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{4}{\pi} \int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt,$$

так что и $\Delta_n(1)$ не превосходит этого интеграла. С другой стороны, 2π-периодическая функция $\theta(x)$, совпадающая с $|x|$ на $[-\pi, \pi]$, входит в $\mathrm{Lip}_1 1$. Значит,

$$\Delta_n(1) \geqslant \max|\sigma_n(x) - \theta(x)| \geqslant \sigma_n(0) - \theta(0) =$$
$$= \frac{4}{n\pi} \int_0^{\pi/2} t\left(\frac{\sin nt}{\sin t}\right)^2 dt.$$

Таким образом

$$\Delta_n(1) = \sigma_n(0) - \theta(0).$$

Согласно (201)

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{n}{\ln n}\Delta_n(1)\right] = \frac{\theta'_+(0) - \theta'_-(0)}{\pi} = \frac{2}{\pi},$$

а это равносильно доказываемой теореме.

В заключение остановимся на одном интересном обстоятельстве. Суммы Фурье сходятся не для всякой непрерывной функции, а суммы Фейера для всякой. С этой стороны суммы Фейера «лучше» сумм Фурье. Однако в отношении качества доставляемого приближения это не так. Если структура приближаемой функции очень хороша (например, она имеет все производ-

---

*) У С. М. Никольского [1] остаточный член дан в более точной форме.

ные), то суммы Фурье, доставляя приближение почти не худшее, чем наилучшее, будут представлять эту функцию с хорошей точностью, тем лучшей, чем лучше структура функции. Суммы же $\sigma_n(x)$, вообще говоря, будут давать приближение только порядка $\frac{1}{n}$, и никакое улучшение свойств функции не повысит этого порядка. Например, для функции

$$f(x) = 1 - \cos x = 2\sin^2\frac{x}{2}$$

оказывается

$$\sigma_n(0) = \frac{4}{n\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 nt\,dt = \frac{1}{n},$$

хотя это целая функция (т. е. разлагающаяся в степенной ряд с бесконечным радиусом сходимости). Выражаясь несколько вольно, можно сказать, что как аппарат приближения суммы Фейера, хотя и мощнее, но зато и грубее, чем суммы Фурье.

§ 3. Суммы Валле-Пуссена.

Суммы Фурье $S_n[f; x]$ функции $f(x)$ обладают тем важным свойством, что при $n \geqslant m$ они совпадают с функцией $f(x)$, если сама эта функция есть тригонометрический полином m-го порядка. Фейеровские суммы $\sigma_n[f; x]$ этим свойством не обладают, но зато они удовлетворяют неравенству

$$|\sigma_n[f; x]| \leqslant \max|f(x)|,$$

которому не удовлетворяют суммы Фурье. Валле-Пуссен*) построил такие суммы $\tau_n(x) = \tau_n[f; x]$, которые обладают обоими указанными свойствами. Именно, он полагает

$$\tau_n(x) = \frac{S_n(x) + S_{n+1}(x) + \ldots + S_{2n-1}(x)}{n}.$$

*) Валле-Пуссен [3], стр. 34.

Легко понять, что если $f(x)$ есть тригонометрический полином порядка m, то при $n \geqslant m$

$$\tau_n[f; x] = f(x).$$

С другой стороны, из определения $\sigma_n(x)$ вытекает, что

$$S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{k-1}(x) = k\sigma_k(x).$$

Отсюда

$$S_k(x) = (k+1)\,\sigma_{k+1}(x) - k\sigma_k(x),$$

и потому

$$S_n(x) + S_{n+1}(x) + \ldots + S_{2n-1}(x) = 2n\sigma_{2n}(x) - n\sigma_n(x),$$

так что

$$\tau_n(x) = 2\sigma_{2n}(x) - \sigma_n(x).$$

Из этого равенства и отмеченного выше свойства сумм Фейера вытекает, что

$$|\tau_n[f; x]| \leqslant 3 \max |f(x)|. \tag{205}$$

Наличие множителя 3 в этой оценке существенной роли не играет.

Теорема 1 (Валле-Пуссен). *Если $f(x) \in C_{2\pi}$, то отклонение сумм Валле-Пуссена $\tau_n(x)$ этой функции удовлетворяет неравенству**)

$$|\tau_n(x) - f(x)| \leqslant 4E_n, \tag{206}$$

где E_n есть наилучшее приближение $f(x)$ тригонометрическими полиномами порядка $\leqslant n$.

В самом деле, аналогично суммам $S_n(x)$ суммы $\tau_n(x)$ обладают тем свойством, что

$$\tau_n[f - g; x] = \tau_n[f; x] - \tau_n[g; x].$$

Отметив это, обозначим через $T(x)$ полином, наименее отклоняющийся от $f(x)$ в H_n^T, так что

$$|f(x) - T(x)| \leqslant E_n. \tag{207}$$

---

*) Читатель обратит внимание на то, что $\tau_n(x)$ имеет порядок не n, а $2n-1$, так что эти суммы не дают решения задачи отыскания в H_n^T полинома, отклонение которого имеет тот же порядок убывания, что и E_n. Эта последняя задача до сих пор ещё не решена.

В таком случае по (205) окажется

$$|\tau_n[f-T; x]| < 3E_n,$$

или, что то же самое,

$$|\tau_n[f; x] - \tau_n[T; x]| < 3E_n,$$

а так как

$$\tau_n[T; x] = T(x),$$

то

$$|\tau_n[f; x] - T(x)| \leqslant 3\,E_n. \tag{208}$$

Из (207) и (208) и вытекает (206).

Покажем одно приложение этой теоремы. В § 1 главы VII мы показали, что ряд Фурье функции $\psi(x) = |\sin x|$ имеет вид

$$\frac{2}{\pi} - \frac{4}{\pi}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

Значит,

$$\psi(x) - S_m(x) = -\frac{4}{\pi}\sum_{\left[\frac{m}{2}\right]+1}\frac{\cos 2kx}{4k^2-1}.$$

Но

$$\psi(x) - \tau_n[\psi; x] = \sum_{m=n}^{2n-1}\frac{\psi(x) - S_m(x)}{n}.$$

Полагая, в частности, $x = 0$, находим

$$|\psi(0) - \tau_n[\psi; 0] = \frac{4}{n\pi}\sum_{m=n}^{2n-1}\left\{\sum_{\left[\frac{m}{2}\right]+1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1}\right\}.$$

Каждая из сумм

$$\sum_{\left[\frac{m}{2}\right]+1}^{\infty}\frac{1}{4k^2-1} \qquad (m = n,\ n+1, \ldots, 2n-1)$$

больше, чем сумма

$$\sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}.$$

Значит,

$$|\psi(0) - \tau_n[\psi; 0]| > \frac{4}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}$$

и, в силу (206),

$$E_n^T(\psi) > \frac{1}{\pi} \sum_{k=n+1}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1}.$$

Но в § 1 главы VII мы уже подсчитали, что

$$\sum_{k=m}^{\infty} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2(2m-1)}.$$

Значит,

$$E_n^T(\psi) > \frac{1}{2\pi(2n+1)}. \tag{209}$$

Об этом результате мы упоминали ещё в § 3 главы V.

Оценка (209) приводит ещё к одному интересному заключению. Именно она показывает, что для любого тригонометрического полинома $U(x)$ не выше n-го порядка

$$\max \Big| |\sin x| - U(x) \Big| > \frac{1}{2\pi(n+1)}. \tag{210}$$

Выберем произвольный полином $T(x) \in H_n^T$ и применим (210) к

$$U(x) = T\left(x - \frac{\pi}{2}\right).$$

Если y_0 есть то значение аргумента, при котором достигается максимум, фигурирующий в (210), то

$$\Big| |\sin y_0| - T\left(y_0 - \frac{\pi}{2}\right) \Big| > \frac{1}{2\pi(2n+1)},$$

или, полагая $y_0 - \frac{\pi}{2} = x_0$,

$$\Big|\,|\cos x_0| - T(x_0)\Big| > \frac{1}{2\pi(2n+1)}.$$

Таким образом, какой бы полином $T(x)$ из H_n^T ни взять, его отклонение от функции $|\cos x|$ больше, чем

$$\frac{1}{2\pi(2n+1)}.$$

В частности, это так для всех *чётных* полиномов

$$T(x) = \sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k x.$$

Иначе говоря, при всяком наборе коэффициентов c_k окажется

$$\max\Big|\,|\cos x| - \sum_{k=0}^{n} c_k \cos^k x\Big| > \frac{1}{2\pi(2n+1)}.$$

Но это предложение равносильно следующей теореме, дополняющей теорему 5 из § 1 главы VII:

Теорема 2. *Наилучшее приближение алгебраическими полиномами функции* $|x|$ *на сегменте* $[-1, +1]$ *удовлетворяет неравенству*

$$E_n(|x|) > \frac{1}{2\pi(2n+1)}.$$

ГЛАВА IX.

НАИЛУЧШЕЕ ПРИБЛИЖЕНИЕ АНАЛИТИЧЕСКИХ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Понятие аналитической функции.

Проще всего определить понятие аналитической функции было бы, используя аппарат теории функций комплексного переменного. Однако, как и до сих пор, мы постараемся обойтись чисто вещественными средствами.

Определение. Функция $f(x)$, заданная на сегменте $[a, b]$, называется *аналитической* на этом сегменте, если существует такое положительное число R, что для всякого $x_0 \in [a, b]$ найдётся степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x_0)(x-x_0)^k,$$

сходящийся при $|x-x_0|<R$ и представляющий функцию $f(x)$ во всех точках, одновременно входящих в $[a, b]$ и (x_0-R, x_0+R):

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x_0)(x-x_0)^k.$$

(Можно было бы не требовать независимости числа R от точки x_0, но это не обобщило бы класса рассматриваемых функций. Если читатель знаком с теоремой Бореля о конечном покрытии, то для него это вполне очевидно.) Класс функций, аналитических на сегменте $[a, b]$, я буду обозначать через $A([a, b])$. В силу элементарных свойств степенных рядов всякая функция класса $A([a, b])$ бесконечно дифференцируема, но обратное неверно. Например, функция *) $e^{-x^{-2}}$, будучи бесконечно дифференцируемой на $[0, 1]$, не разлагается в степенной ряд по степеням x. Действительно, если бы оказалось

$$e^{-x^{-2}} = c_0 + c_1 x + c_2 x^2 + \ldots,$$

то, положив $x = 0$, мы нашли бы $c_0 = 0$. Отсюда

$$\frac{1}{x} e^{-x^{-2}} = c_1 + c_2 x + c_3 x^2 + \ldots$$

и, перейдя к пределу при $x \to 0$, мы нашли бы, что $c_1 = 0$. Подобным образом мы могли бы установить, что все коэффициенты c_k равны нулю, а это явно нелепо, ибо $e^{-x^{-2}} \neq 0$ при $x \neq 0$. Таким образом существование всех производных ещё не означает аналитичности функции: аналитические функции, вообще говоря, лучше, чем бесконечно дифференцируемые. При этом аналитическая функция тем лучше, чем больше число R, фигурировавшее в вышеприведённом определении. Если $R = +\infty$, то функция называется *целой*.

По аналогии с классом $A([a, b])$ введём следующее определение:

Определение. Пусть $f(x)$—непрерывная, 2π-периодическая функция. Если существует такое $R > 0$, что всякому x_0 отвечает степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x_0)(x - x_0)^k,$$

сходящийся при $|x - x_0| < R$ и дающий при этих x функцию $f(x)$:

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x_0)(x - x_0)^k,$$

*) Для $x = 0$ мы уславливаемся считать $e^{-x^{-2}} = 0$.

то мы скажем, что $f(x)$ входит в класс $A_{2\pi}$. Если при этом $R=+\infty$, то функция $f(x)$ называется *целой*. Класс целых 2π-периодических функций мы обозначаем через $G_{2\pi}$.

Всякая функция класса $A_{2\pi}$ входит и в класс $A([0, 2\pi])$. Однако не нужно думать, что достаточно пересечь классы $A([0, 2\pi])$ и $C_{2\pi}$, чтобы получить $A_{2\pi}$. Например, 2π-периодическая функция, совпадающая на $[0, 2\pi]$ с $(x-\pi)^2$, входя в упомянутое пересечение, не входит в $A_{2\pi}$. Само собою ясно, что все функции из $A_{2\pi}$ бесконечно дифференцируемы.

Теорема 1. *Для того чтобы 2π-периодическая и бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ входила в $A_{2\pi}$, необходимо и достаточно, чтобы существовала такая постоянная A, что при всех x и всех m было выполнено неравенство*

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant A^m m^m. \tag{211}$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in A_{2\pi}$. В силу периодичности достаточно установить неравенство (211) при $0 \leqslant x \leqslant 2\pi$.

Выберем столь большое натуральное N, чтобы оказалось

$$\frac{2\pi}{N} < \frac{R}{2e}$$

(где R—число, упоминаемое в определении класса $A_{2\pi}$), и положим

$$x_i = \frac{2\pi}{N} i \qquad (i = 1, 2, \ldots, N).$$

Каждой точке x_i отвечает степенной ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k(x_i)(x-x_i)^k,$$

сходящийся при $|x-x_i| < R$. В силу известных из элементов анализа свойств степенных рядов, сходимость эта будет абсолютная, и потому N положительных рядов

$$\sum_{k=0}^{\infty} |c_k(x_i)| \left(\frac{R}{2}\right)^k \qquad (i=1, 2, \ldots, N) \tag{212}$$

окажутся сходящимися. Пусть $S>1$ есть число большее, чем сумма каждого из рядов (212).

Пусть $x \in [0, 2\pi]$. Тогда найдётся такое i, что

$$|x-x_i| < \frac{R}{2e},$$

и при этом i окажется

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x_i)(x-x_i)^k.$$

Стало быть,

$$f^{(m)}(x) = \sum_{k=m}^{\infty} c_k(x_i) k(k-1)\ldots(k-m+1)(x-x_i)^{k-m},$$

и потому

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant \sum_{k=m}^{\infty} |c_k(x_i)| k^m \left(\frac{R}{2e}\right)^{k-m},$$

откуда

$$|f^{(m)}(x)| < \left(\frac{2e}{R}\right)^m \sum_{k=m}^{\infty} |c_k(x_i)| \frac{k^m}{e^k} \left(\frac{R}{2}\right)^k.$$

Так как

$$e^x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!},$$

то при $x>0$

$$e^x > \frac{x^m}{m!}. \tag{213}$$

Значит,

$$\frac{k^m}{e^k} < m! < m^m$$

и

$$|f^{(m)}(x)| < \left(\frac{2e}{R}\right)^m m^m \sum_{k=m}^{\infty} |c_k(x_l)| \left(\frac{R}{2}\right)^k.$$

Отсюда и подавно

$$|f^{(m)}(x)| < S\left(\frac{2e}{R}\right)^m m^m, \tag{214}$$

а так как $S > 1$, то

$$|f^{(m)}(x)| < \left(\frac{2Se}{R}\right)^m m^m,$$

что и доказывает необходимость условия (211).

Достаточность этого условия доказывается проще. Именно, для любых x_0 и x имеем

$$f(x) = \sum_{k=0}^{m-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}(x - x_0)^m. \tag{215}$$

Остаточный член, в силу (211), не больше, чем

$$\frac{A^m m^m}{m!}|x - x_0|^m,$$

а, в силу (213), эта величина меньше, чем

$$(Ae|x - x_0|)^m.$$

Если $Ae|x - x_0| < 1$, то эта величина стремится к нулю с возрастанием m и, стало быть, для этих x

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x - x_0)^k.$$

Теорема доказана.

Замечание. В целях дальнейшего отметим, что из изложенного доказательства вытекает, что при наличии оценки (211) число R можно считать не меньшим, чем $\frac{1}{Ae}$.

Более того, если неравенство

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant A^m m^m$$

выполняется не при всех m, а только при $m > m_0$, то и в этом случае можно ручаться, что $ARe \geqslant 1$, ибо в равенстве (215) мы с самого начала могли взять $m > m_0$.

Так как (214) можно переписать в виде

$$\frac{\sqrt[m]{M_m}}{m} \leqslant A,$$

где $M_m = \max |f^{(m)}(x)|$, то доказанную теорему можно высказать и в такой форме:

Теорема 2. *Чтобы $f(x)$ входила в $A_{2\pi}$, необходима и достаточна*) ограниченность величины*

$$\frac{\sqrt[m]{M_m}}{m}. \tag{216}$$

Оказывается, что эта же величина позволяет установить принадлежность функции к классу $G_{2\pi}$ целых функций.

Теорема 3. *Для того чтобы 2π-периодическая и бесконечно дифференцируемая функция $f(x)$ входила в $G_{2\pi}$, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt[m]{M_m}}{m} = 0. \tag{217}$$

Доказательство. Пусть $f(x) \in G_{2\pi}$. Возьмём произвольное $\varepsilon > 0$ и подберём столь большое $R > 0$, чтобы оказалось

$$\frac{2e}{R} < \varepsilon.$$

Закрепив это R и дословно воспроизводя рассуждения, приведённые при доказательстве теоремы 1, мы снова придём к неравенству (214), которое можно записать и в таком виде:

$$\frac{\sqrt[m]{M_m}}{m} < \sqrt[m]{S}\,\frac{2e}{R}. \tag{218}$$

Так как (при закреплённом R) число S постоянно, то

$$\lim_{m\to\infty} \sqrt[m]{S} = 1$$

*) Попрежнему предполагаются 2π-периодичность и неограниченная дифференцируемость $f(x)$.

и при достаточно больших m правая часть (218) станет меньше ε, так что и величина (216) станет меньше ε. Итак, условие (217) необходимо для включения $f(x)$ в $G_{2\pi}$.

Достаточность его так же в основном доказана соображениями, приведёнными при доказательстве теоремы 1. Именно, при выполнении этого условия для любого сколь угодно малого A найдётся такое m_0, что при $m > m_0$ окажется

$$\frac{\sqrt[m]{M_m}}{m} < A,$$

откуда $|f^{(m)}(x)| < A^m m^m$ и по замечанию, сделанному в конце доказательства теоремы 1, число R будет не меньше, чем $(Ae)^{-1}$, т. е. $R = +\infty$.

Обе доказанные теоремы переносятся и на случай функций, заданных на сегменте $[a, b]$. Именно, почти дословно повторяя их доказательства, мы получим следующие предложения:

Теорема 4. *Пусть $f(x)$ есть бесконечно дифференцируемая функция, заданная на сегменте $[a, b]$. Для того чтобы она входила в $A([a, b])$, необходимо и достаточно, чтобы её производные удовлетворяли условию*

$$|f^{(m)}(x)| \leqslant A^m m^m.$$

Для того, чтобы эта функция была целой, необходимо и достаточно выполнение условия

$$\lim_{m\to\infty} \frac{\sqrt[m]{M_m}}{m} = 0.$$

§ 2. Теоремы С. Н. Бернштейна о наилучшем приближении периодических аналитических функций.

С. Н. Бернштейну [4,5] принадлежат следующие две теоремы о порядке убывания наилучшего приближения аналитических периодических функций тригонометрическими полиномами:

Теорема 1. *Для того чтобы 2π-периодическая функция $f(x)$ входила в класс $A_{2\pi}$, необходимо и достаточно выполнение неравенства*

$$E_n^T(f) \leqslant Kq^n, \tag{219}$$

где K и $q < 1$—постоянные.

Теорема 2. *Для того чтобы 2π-периодическая функция $f(x)$ входила в класс $G_{2\pi}$, необходимо и достаточно, чтобы было*

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n^T(f)} = 0. \tag{220}$$

Мы докажем эти две теоремы одновременно.

Пусть $f(x) \in A_{2\pi}$. Тогда эта функция разлагается в ряд Фурье. Обозначив частную сумму этого ряда через $S_n(x)$, мы будем иметь

$$E_n^T(f) \leqslant \max |f(x) - S_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} (|a_k| + |b_k|).$$

Оценим коэффициенты a_k и b_k. Для этого применим к правой части формулы

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(x) \cos kx\, dx$$

m раз интегрирование по частям. Получающиеся при этом внеинтегральные члены благодаря условию периодичности исчезают, и мы приходим в зависимости от чётности числа m к одной из следующих формул:

$$a_k = \pm \frac{1}{\pi k^m} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \cos kx\, dx,$$

$$a_k = \pm \frac{1}{\pi k^m} \int_{-\pi}^{\pi} f^{(m)}(x) \sin kx\, dx,$$

откуда

$$|a_k| \leqslant \frac{2M_m}{k^m}. \tag{221}$$

Но по теореме 1 из § 1 должна найтись такая постоянная A, что

$$M_m \leqslant A^m m^m,$$

и потому

$$|a_k| \leqslant \frac{2A^m m^m}{k^m}. \tag{222}$$

Предположим, что $k > 2A$ и $m = \left[\frac{k}{2A}\right]$. Тогда

$$\left(\frac{Am}{k}\right)^m \leqslant \frac{1}{2^m} < \frac{1}{2^{\frac{k}{2A}-1}} = \frac{2}{\left(2^{\frac{1}{2A}}\right)^k}.$$

Отсюда и из (222) следует, что

$$|a_k| < 4q^k,$$

где положено

$$q = 2^{\frac{-1}{2A}}. \tag{223}$$

Аналогичная оценка верна и для b_k, и потому при $n \geqslant 2A$

$$E_n^T(f) < 8 \sum_{k=n+1}^{\infty} q^k = \frac{8q^{n+1}}{1-q}.$$

Обозначим через K число, большее, чем $\frac{8q}{1-q}$ и чем каждая из дробей

$$\frac{E_0^T(f)}{q^0}, \quad \frac{E_1^T(f)}{q^1}, \quad \ldots, \quad \frac{E_{n_0}^T(f)}{q^{n_0}},$$

где n_0 — наибольшее натуральное число, меньшее, чем $2A$. В таком случае *при всех* n будет выполнено (219). Итак, необходимость этого условия для включения $f(x)$ в $A_{2\pi}$ доказана.

Допустим теперь, что $f(x) \in G_{2\pi}$. Тогда она входит и в $A_{2\pi}$, и попрежнему справедлива оценка (221). Так как по теореме 3 из § 1

$$\lim \frac{\sqrt[m]{M_m}}{m} = 0,$$

то, взяв сколь угодно малое $A>0$, мы будем иметь для $m>m_0$

$$M_m < A^m m^m.$$

Закрепив это A, мы для $m>m_0$ попрежнему будем иметь оценку (222). Предполагая k настолько большим, что $\left[\frac{k}{2A}\right]>m_0$, мы снова приходим к неравенствам

$$|a_k|<4q^k, \quad |b_k|<4q^k,$$

где q попрежнему имеет значение (223). Значит, для $n \geqslant n_0=(m_0+1)\,2A$ окажется

$$\sum_{k=n+1}^{\infty}(|a_k|+|b_k|)<8\sum_{k=n+1}^{\infty}q^k$$

и, тем более,

$$E_n^T(f)<\frac{8q}{1-q}\,q^n,$$

а

$$\sqrt[n]{E_n^T(f)}<\sqrt[n]{\frac{8q}{1-q}}\,q. \tag{224}$$

Но взяв произвольное $\varepsilon>0$, мы всегда можем найти такое $A>0$, чтобы оказалось

$$q=2^{\frac{-1}{2A}}<\varepsilon.$$

Будем считать, что нами закреплено именно такое A. Тогда закрепится и число n_0, о котором шла речь выше, так что $n_0=n_0(\varepsilon)$. Для $n \geqslant n_0$ будет выполнено (224). Но если $n>n_1$, то правая часть (224) меньше ε (ибо она стремится к q, когда n возрастает). Значит, если $n>N=\max\{n_0, n_1\}$, то

$$\sqrt[n]{E_n^T(f)}<\varepsilon,$$

чем и доказана необходимость условия (220) для включения $f(x)$ в $G_{2\pi}$.

Перейдём к установлению достаточности условий обеих теорем. Пусть выполнено условие (219).

Обозначим через $T_k(x)$ тригонометрический полином порядка k, наименее уклоняющийся от $f(x)$. Тогда

$$|f(x)-T_k(x)|\leqslant Kq^k.$$

Отсюда

$$f(x)=T_0(x)+\sum_{k=1}^{\infty}[T_k(x)-T_{k-1}(x)].$$

Формальное дифференцирование этого равенства даёт

$$f^{(m)}(x)=\sum_{k=1}^{\infty}[T_k(x)-T_{k-1}(x)]^{(m)} \tag{225}$$

(член $T_0^{(m)}(x)$ равен нулю, так как $T_0(x)$ есть постоянная).

Замечая, что

$$|T_k(x)-T_{k-1}(x)|\leqslant|T_k(x)-f(x)|+\\+|f(x)-T_{k-1}(x)|\leqslant Kq^k+Kq^{k-1}=Lq^k,$$

мы можем утверждать, что, в силу неравенства С. Н. Бернштейна (110), окажется

$$|[T_k(x)-T_{k-1}(x)]^{(m)}|<Lq^kk^m. \tag{226}$$

Поэтому ряд (225) равномерно сходится, и почленное дифференцирование оказывается законным. Но в таком случае из (225) и (226) вытекает оценка

$$|f^{(m)}(x)|<L\sum_{k=1}^{\infty}k^mq^k. \tag{227}$$

Теперь мы оценим стоящую здесь сумму. Для этого продифференцируем m раз тождество

$$\sum_{k=0}^{\infty}x^k=\frac{1}{1-x}$$

и положим $x=q$:

$$\sum_{k=m}^{\infty}k(k-1)\ldots(k-m+1)q^{k-m}=\frac{m!}{(1-q)^{m+1}}.$$

Отсюда, отбрасывая первые m членов, находим

$$\sum_{k=2m}^{\infty} k(k-1)\ldots(k-m+1)\,q^k < \frac{2^m m^m q^m}{(1-q)^{m+1}}.$$

Но когда $k \geqslant 2m$, то $k-m+1 > \frac{k}{2}$ и, стало быть,

$$\sum_{k=2m}^{\infty} k^m q^k < \frac{2^m m^m q^m}{(1-q)^{m+1}}. \tag{228}$$

С другой стороны, наибольшее значение функции

$$x^m q^x,$$

достигающееся при

$$x_0 = -\frac{m}{\ln q},$$

будет меньше, чем

$$x_0^m = m^m \left(-\frac{1}{\ln q}\right)^m.$$

Поэтому

$$\sum_{k=1}^{2m-1} k^m q^k < \sum_{k=1}^{2m-1} m^m \left(-\frac{1}{\ln q}\right)^m < 2m^{m+1}\left(-\frac{1}{\ln q}\right)^m. \tag{229}$$

Из (228) и (229) вытекает, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} k^m q^k < m^m \left[2m\left(-\frac{1}{\ln q}\right)^m + \frac{2^m q^m}{(1-q)^{m+1}}\right]$$

и, стало быть,

$$|f^{(m)}(x)| < Lm^m \left[2m\left(-\frac{1}{\ln q}\right)^m + \frac{2^m q^m}{(1-q)^{m+1}}\right].$$

Отсюда, в силу элементарного неравенства,

$$\sqrt[m]{A+B} \leqslant \sqrt[m]{A} + \sqrt[m]{B}$$

следует, что

$$\frac{\sqrt[m]{|f^{(m)}(x)|}}{m} < \sqrt[m]{L}\left[-\frac{\sqrt[m]{2m}}{\ln q} + \frac{2q}{1-q}\,\frac{1}{\sqrt[m]{1-q}}\right].$$

С возрастанием m правая часть этого неравенства имеет пределом число

$$-\frac{1}{\ln q}+\frac{2q}{1-q}.$$

Поэтому при достаточно больших m окажется

$$\frac{\sqrt[m]{|f^{(m)}(x)|}}{m}<2\left[-\frac{1}{\ln q}+\frac{q}{1-q}\right]=A$$

и

$$|f^{(m)}(x)|<A^m m^m \qquad (m>m_0).$$

Увеличивая A, мы можем добиться выполнения этого неравенства уже при всех m, так что $f(x)\in A_{2\pi}$.

Этим завершено доказательство теоремы 1. Чтобы закончить доказательство теоремы 2, напомним, что согласно замечанию, сделанному в параграфе 1, число R, входящее в определение класса $A_{2\pi}$, в нашем случае может быть взято не меньшим, чем

$$\frac{1}{Ae}=\frac{1}{2e\left[-\frac{1}{\ln q}+\frac{q}{1-q}\right]}. \tag{230}$$

Но если выполнено условие (220), то при *сколь угодно малом* q найдётся такое n_0, что при $n>n_0$

$$E_n^T(f)<q^n.$$

Значит, найдётся такое K, что неравенство

$$E_n^T(f)<Kq^n$$

будет выполняться при *этом* q и любом n. По доказанному отсюда вытекает, что $f(x)$ входит в $A_{2\pi}$, причём число R не меньше числа (230), а так как это последнее число сколь угодно велико при достаточно малом q, то $R=+\infty$ и $f(x)\in G_{2\pi}$.

§ 3. Наилучшее приближение функций, аналитических на сегменте.

Обе теоремы С. Н. Бернштейна из предыдущего параграфа переносятся и в теорию приближения функций алгебраическими полиномами.

Теорема. *Пусть $f(x)$ есть непрерывная функция, заданная на сегменте $[a, b]$, а $E_n=E_n(f)$ — её наилуч-*

шее приближение полиномами из H_n. Для того чтобы $f(x)$ входила в $A([a, b])$, необходимо и достаточно, чтобы было

$$E_n < Kq^n, \tag{231}$$

где K и $q<1$ — постоянные числа. Условие же

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{E_n} = 0 \tag{232}$$

является необходимым и достаточным для того, чтобы функция $f(x)$ была целой.

Наиболее простой способ доказательства этой теоремы основан на привлечении средств теории функций комплексной переменной. Читатель, знакомый с этой теорией, может найти соответствующее изложение как в книге самого С. Н. Бернштейна*), так и в известных руководствах В. Л. Гончарова**) и Я. С. Безиковича***). Мы же приведём здесь чисто вещественное доказательство этих результатов, хотя и более сложное технически, но зато требующее от читателя меньшей подготовки.

Необходимость каждого из условий (231) и (232) устанавливается довольно просто. Именно, как мы покажем ниже, индуцированная функция

$$\psi(\theta) = f\left[\frac{(b-a)\cos\theta + (a+b)}{2}\right]$$

будет входить в $A_{2\pi}$, если $f(x)$ входит в $A([a, b])$, и $\psi(\theta)$ войдёт в $G_{2\pi}$, если $f(x)$ окажется целой функцией. Но так как (лемма 1 из § 1 главы VI)

$$E_n^T(\psi) = E_n(f),$$

то необходимость условий (231) и (232) является непосредственным следствием теорем предыдущего параграфа.

---

*) С. Н. Бернштейн [10], стр. 75 и след.
**) В. Л. Гончаров [1], стр. 292 и след.
***) Я. С. Безикович [1], стр. 216 и след.

Таким образом дело сводится к установлению включений

$$\psi(\theta) \in A_{2\pi}, \quad \psi(\theta) \in G_{2\pi}$$

на основании соответствующих включений для $f(x)$.

Для этой цели напомним прежде всего, что

$$\psi(\theta) = \varphi(\cos\theta),$$

где

$$\varphi(u) = f\left[\frac{(b-a)u + (a+b)}{2}\right],$$

и рассмотрим ближе функцию $\varphi(u)$, предполагая, что $f(x) \in A([a, b])$.

Пусть u_0 и u — две точки из $[-1, +1]$, для которых $|u - u_0| < \frac{2}{b-a} R$, где R есть число, упомянутое в определении класса $A([a, b])$ и соответствующее функции $f(x)$.

Если

$$x = \frac{(b-a)u + (a+b)}{2}, \quad x_0 = \frac{(b-a)u_0 + (a+b)}{2},$$

то $|x - x_0| < R$ и, стало быть,

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x_0)(x - x_0)^k.$$

Но это равенство можно переписать и в такой форме:

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(x_0)\left(\frac{b-a}{2}\right)^k (u - u_0)^k,$$

откуда

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k(u_0)(u - u_0)^k, \tag{233}$$

где положено

$$d_k(u_0) = c_k(x_0)\left(\frac{b-a}{2}\right)^k.$$

Таким образом функция $\varphi(u)$ войдёт в $A([-1, +1])$; если же $f(x)$ оказывается целой, то и $\varphi(u)$ будет целой функцией.

Перейдём теперь к рассмотрению функции $\psi(\theta) = \varphi(\cos\theta)$. Фиксируем какое-нибудь θ_0 и пусть $|\theta-\theta_0| < \frac{2}{b-a} R$. Тогда и $|\cos\theta - \cos\theta_0| < \frac{2}{b-a} R$ и, в силу (233), окажется

$$\psi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k (\cos\theta - \cos\theta_0)^k,$$

где положено для краткости $d_k = d_k(\cos\theta_0)$.

Но из элементов анализа известно, что

$$\cos\theta - \cos\theta_0 = \sum_{i=1}^{\infty} a_i (\theta - \theta_0)^i, \tag{234}$$

так что

$$\psi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i (\theta-\theta_0)^i\right]^k.$$

Так как ряд (234) абсолютно сходящийся, то при возведении его в степень допустимо почленное перемножение и, стало быть,

$$\left[\sum_{i=1}^{\infty} a_i (\theta-\theta_0)^i\right]^k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i^{(k)} (\theta-\theta_0)^i. \tag{235}$$

Отсюда

$$\psi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left[\sum_{i=k}^{\infty} a_i^{(k)} (\theta-\theta_0)^i\right]. \tag{236}$$

С другой стороны,

$$a_i = \frac{1}{i!}\left[\frac{d^i \cos\theta}{d\theta^i}\right]_{\theta=\theta_0},$$

и потому

$$|a_i| \leqslant \frac{1}{i!}.$$

Поэтому модули членов ряда (234) не превосходят соответствующих членов ряда

$$e^{|\theta-\theta_0|}-1=\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\theta-\theta_0|^i}{i!}.$$

Положим

$$\left(\sum_{i=1}^{\infty}\frac{|\theta-\theta_0|^i}{i!}\right)^k=\sum_{i=k}^{\infty}A_i^{(k)}|\theta-\theta_0|^i.$$

Из сказанного выше вытекает, что

$$|a_i^{(k)}|\leqslant A_i^{(k)}.$$

Сопоставим с рядом (236) ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}|d_k|\left[\sum_{i=k}^{\infty}A_i^{(k)}|\theta-\theta_0|^i\right]. \tag{237}$$

Так как ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}d_kz^k$$

абсолютно сходящийся при $|z|<\frac{2}{b-a}R$, то ряд (237) сходится при условии

$$e^{|\theta-\theta_0|}-1<\frac{2}{b-a}R. \tag{238}$$

Предполагая это условие выполненным, мы можем рассматривать ряд (237) как результат суммирования *по строкам* двойного ряда

$$\begin{aligned}
&|d_0|+\\
&\quad+|d_1|A_1^{(1)}|\theta-\theta_0|+|d_1|A_2^{(1)}|\theta-\theta_0|^2+|d_1|A_3^{(1)}|\theta-\theta_0|^3+\ldots+\\
&\qquad\qquad+|d_2|A_2^{(2)}|\theta-\theta_0|^2+|d_2|A_3^{(2)}|\theta-\theta_0|^3+\ldots+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad+|d_3|A_3^{(3)}|\theta-\theta_0|^3+\ldots+\\
&\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad\qquad+\ldots
\end{aligned} \tag{239}$$

Так как этот двойной ряд *положителен*, то из того что он даёт конечную сумму, при суммировании по строкам вытекает, что он есть ряд сходящийся. Но ряд (236) также есть результат суммирования по строкам двойного ряда

$$\begin{aligned} d_0 &+ \\ &+ d_1 a_1^{(1)}(\theta-\theta_0) + d_1 a_2^{(1)}(\theta-\theta_0)^2 + d_1 a_3^{(1)}(\theta-\theta_0)^3 + \ldots + \\ &\qquad + d_2 a_2^{(2)}(\theta-\theta_0)^2 + d_2 a_3^{(2)}(\theta-\theta_0)^3 + \ldots + \\ &\qquad\qquad + d_3 a_3^{(3)}(\theta-\theta_0)^3 + \ldots + \\ &\qquad\qquad\qquad + \ldots \end{aligned} \qquad (240)$$

Из сказанного выше следует, что сходящийся двойной ряд (239) есть мажорантный для (240). Отсюда же вытекает, что этот последний двойной ряд есть *абсолютно сходящийся* и потому допустимо его суммировать *и по столбцам*, что сразу приводит к равенству

$$\psi(\theta) = \sum_{i=0}^{\infty} \lambda_i (\theta - \theta_0)^i. \qquad (241)$$

Так как это последнее равенство верно при единственном условии (238) (из него уже автоматически следует, что $|\theta - \theta_0| < \frac{2}{b-a} R$) и коэффициенты λ_i от θ не зависят, то $\psi(\theta) \in A_{2\pi}$. Если же $f(x)$ — целая функция, то $R = +\infty$ и условие (238) не налагает на θ никаких ограничений, так что $\psi(\theta) \in G_{2\pi}$. Таким образом в части необходимости высказанных условий теорема доказана полностью.

Для доказательства достаточности условий теоремы докажем предварительно следующую лемму:

Лемма. *Если $P(x)$ есть полином степени не выше n, который на сегменте $[a, b]$ по модулю не превосходит числа M, то на более широком сегменте $[a_0, b_0]$, где*

$$a_0 = a - h(b-a), \quad b_0 = b + h(b-a), \qquad (h > 0)$$

этот полином удовлетворяет неравенству

$$|P(x)| \leqslant M(1 + 2h + 2\sqrt{h + h^2})^n. \qquad (242)$$

Доказательство. Пусть

$$Q(u) = P\left[\frac{(b-a)u+(a+b)}{2}\right].$$

Этот полином на сегменте $[-1, +1]$ не превосходит (по модулю) числа M. Значит, в силу (63), при $|u|>1$

$$|Q(u)| \leqslant M\left[|u| + \sqrt{u^2-1}\right]^n.$$

Возьмём какое-нибудь значение x, входящее в $[a_0, b_0]$ и не входящее в $[a, b]$; пусть для конкретности $b < x \leqslant b_0$. Тогда

$$u = \frac{2x-(a+b)}{b-a} > 1,$$

и (ввиду того, что $P(x) = Q(u)$) мы будем иметь

$$|P(x)| \leqslant M\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a} + \sqrt{\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]^2 - 1}\right]^n,$$

откуда

$$|P(x)| \leqslant \frac{M}{(b-a)^n}\left[2x-a-b+2\sqrt{(x-a)(x-b)}\right]^n.$$

Остаётся заметить, что

$$2x-a-b \leqslant (b-a)(1+2h),$$
$$(x-a)(x-b) \leqslant (b-a)^2(h+h^2),$$

чтобы придти к (242). Случай $a_0 \leqslant x < a$ рассматривается аналогично, а для $a \leqslant x \leqslant b$ оценка (242) тривиальна.

Смысл этой леммы заключается в возможности *распространения* оценки полинома с некоторого сегмента на более широкий сегмент.

Возвращаясь к доказательству достаточности условий теоремы С. Н. Бернштейна, предположим, что

$$E_n(f) < Kq^n. \tag{243}$$

Естественный ход мысли был бы таков: вводим индуцированную функцию $\psi(\theta)$; так как $E_n^T(\psi) = E_n(f)$, то из (243) вытекает аналитичность $\psi(\theta)$ и остаётся заключить отсюда об аналитичности исходной функции $f(x)$. Однако этого заключения мы не можем сделать без дополнительного рассуждения (хотя на самом деле это и так: из аналитичности $\psi(\theta)$ следует аналитичность $f(x)$) по той причине, что функция $\arccos x$ не аналитична на всём сегменте $[-1, +1]$. Это обстоятельство и вызывает необходимость некоторого усложнения доказательства.

Введём полиномы наилучшего приближения $P_n(x)$. Тогда

$$|P_n(x) - f(x)| < Kq^n \tag{244}$$

и, стало быть,

$$f(x) = P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(x) - P_{n-1}(x)].$$

Ввиду того что

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| \leqslant |P_n(x) - f(x)| + |f(x) - P_{n-1}(x)|,$$

из (244) вытекает, что

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < Lq^n,$$

где $L = K(1 + q^{-1})$. Эта последняя оценка верна для $a \leqslant x \leqslant b$.

Подберём теперь столь малое $h > 0$, чтобы оказалось

$$q_1 = q(1 + 2h + 2\sqrt{h + h^2}) < 1.$$

Тогда на более широком сегменте $[a_0, b_0]$, где

$$a_0 = a - h(b - a), \quad b_0 = b + h(b - a),$$

окажется

$$|P_n(x) - P_{n-1}(x)| < Lq_1^n.$$

Отсюда вытекает, что ряд

$$P_0(x) + \sum_{n=1}^{\infty} [P_n(x) - P_{n-1}(x)] \tag{245}$$

равномерно сходится на упомянутом более широком сегменте $[a_0, b_0]$. Обозначим его сумму на этом сегменте через $f_0(x)$ (таким образом на исходном сегменте $[a, b]$

функция $f_0(x)$ совпадает с первоначальной функцией $f(x)$). Ввиду того что

$$|f_0(x) - P_n(x)| \leqslant \sum_{k=n+1}^{\infty} |P_k(x) - P_{k-1}(x)| <$$

$$< \sum_{k=n+1}^{\infty} Lq_1^k = \frac{L}{1-q_1} q_1^{n+1},$$

ясно, что

$$E_n(f_0) < \frac{L}{1-q_1} q_1^{n+1}.$$

Теперь мы введём индуцированную функцию*)

$$\psi(\theta) = f_0\left[\frac{(b_0 - a_0)\cos\theta - (a+b)}{2}\right],$$

т. е. (и в этом состоит основная идея рассуждения) мы индуцируем не исходную функцию $f(x)$, а её «продолжение» $f_0(x)$. Ввиду того что $E_n^T(\psi) = E_n(f_0)$, последняя оценка гарантирует нам, что $\psi(\theta)$ входит в класс $A_{2\pi}$, причём соответствующее ей число R удовлетворяет условию

$$R \geqslant \frac{1}{2e\left[-\frac{1}{\ln q_1} + \frac{q_1}{1-q_1}\right]}. \tag{246}$$

Нашей задачей является установить, что исходная функция $f(x)$ будет аналитической на сегменте $[a, b]$. Для этого мы сначала установим аналитичность промежуточной функции

$$\varphi(u) = \psi(\arccos u)$$

на сегменте $\left[-\frac{1}{1+2h}, \frac{1}{1+2h}\right]$.

Если θ и θ_0 — две точки, для которых $|\theta - \theta_0| < R$, то

$$\psi(\theta) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k(\theta_0)(\theta - \theta_0)^k.$$

*) Напомним, что $a_0 + b_0 = a + b$.

Отметим далее, что на сегменте $\left[-\frac{1}{1+2h}, \frac{1}{1+2h}\right]$ производная функции $\arccos u$ по модулю не больше, чем

$$H=\frac{1+2h}{2\sqrt{h+h^2}}.$$

Значит, если u и u_0 — две точки, входящие в $\left[-\frac{1}{1+2h}, \frac{1}{1+2h}\right]$, для которых $|u-u_0|<\frac{R}{H}$, то $|\arccos u-\arccos u_0|<R$ и, стало быть,

$$\varphi(u)=\sum_{k=0}^{\infty} d_k(\arccos u-\arccos u_0)^k, \tag{247}$$

где положено для краткости $d_k=c_k(\arccos u_0)$.

Из элементарного курса анализа известно, что функция $\arccos u$ будет аналитической на всяком сегменте $[-l, +l]$, где $l<1$, причём соответствующее число R для неё будет равно $1-l$. Стало быть, при условии

$$|u-u_0|<\frac{2h}{1+2h},$$

будет

$$\arccos u-\arccos u_0=\sum_{i=1}^{\infty} a_i(u-u_0)^i \tag{248}$$

$\Bigl($разумеется мы попрежнему считаем, что u и u_0 входят в сегмент $\left[-\frac{1}{1+2h}, \frac{1}{1+2h}\right]\Bigr)$. Важно отметить, что

$$a_i=\frac{1}{i!}\left[\frac{d^i \arccos u}{du^i}\right]_{u=u_0}.$$

В силу аналитичности функции $\arccos u$ на сегменте $\left[-\frac{1}{1+2h}, \frac{1}{1+2h}\right]$ найдётся такая постоянная A, что

$$|(\arccos u)^{(i)}|<A^i i^i$$

$$\left(i=1, 2, 3, \ldots;\ -\frac{1}{1+2h}\leqslant u\leqslant\frac{1}{1+2h}\right),$$

откуда

$$|a_i| < A^i \frac{i^i}{i!} < A^i e^i = B^i \qquad (B = Ae).$$

Отметим сразу же, что постоянная B *уменьшается* при увеличении h. Из последней оценки следует, что ряд (248) мажорируется геометрической прогрессией

$$\sum_{i=1}^{\infty} B^i |u - u_0|^i, \tag{249}$$

которая при $B|u - u_0| < 1$ сходится к сумме

$$\frac{B|u-u_0|}{1-B|u-u_0|}.$$

В силу абсолютной сходимости ряда (248) его можно возводить в степень при помощи операции почленного перемножения. То же относится и к мажорантному ряду (249). Таким образом

$$(\arccos u - \arccos u_0)^k = \sum_{i=k}^{\infty} a_i^{(k)} (u - u_0)^i \tag{250}$$

$$\left(|u - u_0| < \frac{2h}{1+2h}\right),$$

$$\left(\frac{B|u-u_0|}{1-B|u-u_0|}\right)^k = \sum_{i=k}^{\infty} A_i^{(k)} |u - u_0|^i \tag{251}$$

$$(B|u - u_0| < 1),$$

причём

$$|a_i^{(k)}| \leqslant A_i^{(k)}.$$

Допуская, что $|u - u_0|$ меньше каждого из чисел $\frac{R}{H}$, $\frac{2h}{1+2h}$, $\frac{1}{B}$, мы из равенства (247) находим

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} d_k \left[\sum_{i=k}^{\infty} a_i^{(k)} (u - u_0)^i\right]. \tag{252}$$

Для этого ряда мажорантным будет ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} |d_k| \left[\sum_{i=k}^{\infty} A_i^{(k)} |u - u_0|^i\right]. \tag{253}$$

Заметим ещё, что ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty} d_k z^k$$

сходится абсолютно при $|z| < R$. Значит, допуская

$$\frac{B\,|u-u_0|}{1-B\,|u-u_0|} < R, \tag{254}$$

мы можем гарантировать сходимость положительного ряда (253). Отсюда, рассуждая совершенно так же, как при доказательстве права перехода от равенства (236) к равенству (241) (т. е. с привлечением двойных рядов), мы убедимся, что равенство (252) можно переписать в форме

$$\varphi(u) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_k (u-u_0)^k, \tag{255}$$

где коэффициенты λ_k не зависят от точки u. Отметим, что равенство (255) нами доказано при условии, что

$$|u-u_0| < \rho = \min\left\{\frac{R}{H},\ \frac{2h}{1+2h},\ \frac{1}{B},\ \frac{R}{B(1+R)}\right\}\ ^{*)}.$$

Итак, аналитичность функции $\varphi(u)$ на сегменте $\left[-\frac{1}{1+2h},\ \frac{1}{1+2h}\right]$ нами установлена. Перейдём теперь к нашей основной функции $f(x)$.

Выберем в $[a, b]$ две точки x и x_0 и положим

$$u = \frac{2x-(a+b)}{b_0-a_0},\quad u_0 = \frac{2x_0-(a+b)}{b_0-a_0}.$$

Легко видеть, что эти числа падают в сегмент $\left[-\frac{1}{1+2h},\ \frac{1}{1+2h}\right]$, причём $|u-u_0| = \frac{2}{b_0-a_0}|x-x_0|$. Значит, если

$$|x-x_0| < \frac{b_0-a_0}{2}\rho,$$

*) Четвёртое из этих чисел появляется из оценки (254). Заметим ещё, что $\frac{R}{1+R} < 1$, и потому можно устранить число $\frac{1}{B}$.

то (поскольку $f(x)=\varphi(u)$) равенство (255) даёт, что

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_k\frac{2^k}{(b_0-a_0)^k}(x-x_0)^k, \tag{256}$$

чем и доказана аналитичность функции $f(x)$. Таким образом мы установили, что условие (231) достаточно для аналитичности функции $f(x)$.

Предположим теперь, что выполнено условие (232). В таком случае мы можем считать, что условие (231) выполняется при любом сколь угодно малом q. Но тогда, взяв заранее сколь угодно большое h, мы можем по нему подобрать столь малое q, чтобы число

$$q_1=q\left(1+2h+2\sqrt{h+h^2}\right)$$

оказалось сколь угодно малым. Сделав это, снова построим функции $f_0(x)$ и $\psi(\theta)$. Как и выше, функция $\psi(\theta)$ окажется аналитической, причём соответствующее ей число R должно будет удовлетворять неравенству (246) и потому может считаться сколь угодно большим (независимо от выбора h!). Отсюда мы снова придём к представимости функции $f(x)$ рядом (256) (причём этот ряд не связан с выбором числа h, ибо разложение функции по степеням $x-x_0$ возможно лишь единственным способом). Для сходимости ряда (256) мы должны наложить на x условие, чтобы было $|x-x_0|<\frac{b_0-a_0}{2}\rho$, или, подробнее, чтобы разность $|x-x_0|$ была меньше каждого из чисел

$$\left.\begin{aligned} u_1&=\frac{R}{H}\,\frac{b-a}{2}(1+2h), \quad u_2=(b-a)\,h,\\ u_3&=\frac{R}{B(1+R)}\cdot\frac{b-a}{2}(1+2h). \end{aligned}\right\} \tag{257}$$

Но так как и R и h независимо друг от друга могут быть взяты сколь угодно большими, то и u_1 и u_2 тоже могут считаться сколь угодно большими. Наконец, ввиду того что

$$\lim_{h\to\infty}\frac{1+2h}{B}=+\infty$$

(ибо B не возрастает при увеличении h), число U_s тоже может считаться сколь угодно большим. Таким образом числа (257) не накладывают на x никаких ограничений, так что ряд (256) сходится при всех x и представляет $f(x)$ при $a \leqslant x \leqslant b$, а это и значит, что $f(x)$ — целая функция.

Теорема С. Н. Бернштейна доказана полностью.

Интересно сопоставить эту теорему с результатами § 3 главы VI. В то время как упомянутые результаты позволяли охарактеризовать структурно-дифференциальные свойства функции лишь *внутри* интервала (a, b), последняя теорема даёт характеристику функции на всём сегменте $[a, b]$. Причина этого обстоятельства состоит в том, что оценка $E_n < Kq^n$ обеспечивает достаточную малость членов ряда (245) не только на исходном сегменте $[a, b]$, но и в более широком сегменте $[a_0, b_0]$, оценки же вида

$$E_n < \frac{A}{n^{p+\alpha}}$$

такой информации нам не доставляют.

Отметим далее одно следствие теорем С. Н. Бернштейна, которое уже было вскользь упомянуто выше:

Следствие. *Пусть $f(x)$ есть функция, заданная на сегменте $[-1, +1]$. Если индуцированная функция $\psi(\theta) = f(\cos\theta)$ оказывается аналитической, то и исходная функция $f(x)$ была аналитической на всём сегменте $[-1, +1]$.*

В самом деле, $E_n(f) = E_n^T(\psi)$. Из аналитичности же $\psi(\theta)$ вытекает, что $E_n^T(\psi) < Kq^n$. Значит, $E_n(f) < Kq^n$ и $f(x)$ — аналитическая.

Наконец, приведём точную формулировку результата С. Н. Бернштейна в терминах теории функций комплексного переменного:

I. *Если наилучшее приближение функции $f(x)$ класса $C([a, b])$ таково, что*

$$\overline{\lim} \sqrt[n]{E_n(f)} = \frac{1}{R} \qquad (R > 1), \qquad (258)$$

то $f(x)$ *голоморфна**) *внутри эллипса с фокусами в точках* a *и* b, *сумма полуосей которого равна* $\frac{b-a}{2}R$, *и имеет особую точку на его контуре.*

II. *Если* $f(x)$ *голоморфна внутри эллипса с фокусами в точках* a *и* b *и имеет особую точку на его контуре, то её наилучшее приближение полиномами на сегменте* $[a, b]$ *удовлетворяет условию* (258), *где* $\frac{b-a}{2}R$ *есть сумма полуосей упомянутого эллипса.*

---

*) Точнее: существует функция комплексного переменного с указанными свойствами и такая, что её значения на $[a, b]$ совпадают с $f(x)$.

ГЛАВА X.

СВОЙСТВА НЕКОТОРЫХ АНАЛИТИЧЕСКИХ АППАРАТОВ ПРИБЛИЖЕНИЯ.

В главах VII и VIII мы исследовали свойства рядов Фурье, а также сумм Фейера и Валле-Пуссена как аппаратов приближения. В этой главе я хочу остановиться ещё на некоторых аналитических аппаратах для приближённого представления функций.

§ 1. Разложения по полиномам Чебышева.

Результаты, полученные нами при изучении рядов Фурье, легко трансформируются в соответствующие результаты относительно разложений функций в ряды, расположенные по полиномам Чебышева $T_n(x)$. В основе такой трансформации лежит следующая простая лемма:

Лемма. *Если 2π-периодическая, непрерывная функция $\psi(\theta)$ оказывается чётной, то её коэффициенты Фурье имеют вид*

$$\left.\begin{aligned} A &= \frac{1}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(\theta)\,d\theta, \\ a_k &= \frac{2}{\pi}\int_0^{\pi} \psi(\theta)\cos k\theta\,d\theta, \qquad b_k = 0. \end{aligned}\right\} \tag{259}$$

Доказательство основано на том, что каждый из коэффициентов A, a_k, b_k представляется соответствующим интегралом, распространённым на сегмент $[-\pi, \pi]$. Разбивая этот интеграл на два, распространённых на $[-\pi, 0]$

и $[0, \pi]$, и производя в первом из них подстановку $\theta = -\theta'$, легко получить формулы (259).

Отсюда вытекает

Теорема. *Если функция $f(x)$ класса $C([-1, +1])$ удовлетворяет условию Дини — Липшица*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) \ln \delta = 0,$$

то она разлагается в равномерно сходящийся ряд по полиномам Чебышева

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x), \tag{260}$$

где

$$A = \frac{1}{\pi} \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)\,dx}{\sqrt{1-x^2}}, \quad a_k = \frac{2}{\pi} \int_{-1}^{+1} f(x)\, T_k(x) \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

При этом частные суммы ряда удовлетворяют неравенству

$$|S_n(x) - f(x)| \leqslant (3 + \ln n) E_n(f) \qquad (n \geqslant 2). \tag{261}$$

Доказательство. Положим

$$\psi(\theta) = f(\cos\theta).$$

Тогда по лемме 2 из § 1 главы VI окажется

$$\omega_\psi(\delta) \leqslant \omega_f(\delta),$$

и функция $\psi(\theta)$, удовлетворяя условию Дини—Липшица (184), разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье

$$\psi(\theta) = A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k \cos k\theta, \tag{262}$$

частные суммы которого удовлетворяют неравенству Лебега (180).

Подставляя сюда $\cos\theta = x$, получаем

$$f(x) = A + \sum_{k=1}^{\infty} a_k T_k(x).$$

При этом подстановка $\theta = \arc \cos x$ даёт

$$A = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \psi(\theta)\,d\theta = \frac{1}{\pi}\int_{-1}^{+1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Аналогично устанавливается выражение a_k. Наконец, ввиду того что $E_n^T(\psi) = E_n(f)$ (глава VI, § 1, лемма 1), неравенство (180) переходит в (261).

Следствие. *Если $f(x)$ имеет производную $f'(x)$, причём*

$$|f'(x)| \leqslant M_1,$$

то она разлагается в ряд (260), *причём*

$$|S_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{12M_1}{n}(3 + \ln n).$$

Действительно, по теореме Джексона $E_n \leqslant \frac{12M_1}{n}$.

§ 2. Некоторые свойства полиномов Бернштейна.

Здесь мы дополним те сведения о полиномах Бернштейна $B_n(x)$, которые были изложены в главе I.

Теорема 1 (Т. Поповичиу). *Если $f(x) \in C([0, 1])$, а $B_n(x)$ — её полином Бернштейна, то**)

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{3}{2}\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{263}$$

Доказательство. Пользуясь формулой (15), находим

$$|B_n(x) - f(x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n}\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Но, в силу неравенства $\omega(\lambda\delta) \leqslant (\lambda + 1)\,\omega(\delta)$, имеем

$$\left|f\left(\frac{k}{n}\right) - f(x)\right| \leqslant \omega\left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\right) \leqslant$$

$$\leqslant \left(\left|\frac{k}{n} - x\right|\sqrt{n} + 1\right)\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

*) Поповичиу [1], Кац [2]; И. П. Натансон [7].

Стало быть, на основании тождества (1)

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left[\sqrt{n}\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+1\right]. \qquad (264)$$

С другой стороны, применяя неравенство Буняковского (71), имеем

$$\left[\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right]^2\leqslant$$
$$\leqslant\left[\sum_{k=0}^{n}\left(\frac{k}{n}-x\right)^2 C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right]\cdot\left[\sum_{k=0}^{n}C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\right],$$

откуда, в силу (1) и (10),

$$\sum_{k=0}^{n}\left|\frac{k}{n}-x\right|C_n^k x^k(1-x)^{n-k}\leqslant\frac{1}{2\sqrt{n}}. \qquad (265)$$

Из (264) и (265) и следует (263).

В частности, если $f(x)\in \mathrm{Lip}_M\alpha$, то

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant\frac{3M}{2\sqrt{n^\alpha}}.$$

Эта последняя оценка была независимо от Т. Поповичиу найдена М. Кацом [1], который показал, что её порядок улучшить нельзя. Таким образом полиномы Бернштейна, давая приближение *любой* непрерывной функции, в смысле точности приближения являются довольно плохим аппаратом. Это последнее обстоятельство можно с особенной наглядностью проследить на следующем результате:

Теорема 2 (Е. В. Вороновская [1]). *Если у ограниченной функции $f(x)$ в точке x существует конечная вторая производная $f''(x)$, то*

$$B_n(x)=f(x)+\frac{f''(x)}{2n}x(1-x)+\frac{\rho_n}{n}, \qquad (266)$$

где ρ_n стремится к нулю с возрастанием n.

Доказательство основано на некоторых вспомогательных предложениях.

Лемма 1. *Полиномы*

$$S_m(x)=\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^m C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{267}$$

$$(m=0,\ 1,\ 2,\ \ldots)$$

связаны рекуррентной формулой

$$S_{m+1}(x)=x(1-x)\left[S'_m(x)+nmS_{m-1}(x)\right]. \tag{268}$$

В самом деле, дифференцируя $S_m(x)$, находим

$$S'_m(x)=$$

$$=\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^{m-1}C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}\left[-nmx(1-x)+(k-nx)^2\right].$$

Отсюда

$$S'_m(x)=-nmS_{m-1}(x)+\sum_{k=0}^{n}(k-nx)^{m+1}C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1}$$

и, следовательно,

$$x(1-x)S'_m(x)=-nmx(1-x)S_{m-1}(x)+S_{m+1}(x),$$

что равносильно (268).

Лемма 2. *Полином $S_m(x)$ представим в форме*

$$S_m(x)=\sum_{i=0}^{\left[\frac{m}{2}\right]}A_{m,\,i}(x)\,n_i,$$

где $A_{m,\,i}(x)$ суть некоторые полиномы, не зависящие от n.

Лемма верна для $m=0,1,2,$ что непосредственно вытекает из тождеств (1), (8) и (2). Допустим, что она доказана для $m\leqslant r$.

Тогда, в силу (268),

$$S_{r+1}(x)=x(1-x)\left[\sum_{i=0}^{\left[\frac{r}{2}\right]}A'_{r,\,i}(x)\,n^i+nr\sum_{i=0}^{\left[\frac{r-1}{2}\right]}A_{r-1,\,i}(x)n^i\right],$$

и остается заметить, что

$$1+\left[\frac{r-1}{2}\right]=\left[\frac{r+1}{2}\right].$$

Следствие. *На сегменте* $[0, 1]$

$$|S_m(x)| \leqslant K(m)\, n^{\left[\frac{m}{2}\right]}, \tag{269}$$

где $K(m)$ *есть постоянная, зависящая от* m, *но не от* n.

Лемма 3. *Если* $\delta>0$ *и* $\Delta(x)$ *есть множество тех* k *из ряда* $0, 1, 2, \ldots, n$, *для которых*

$$\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant \delta,$$

то при любом m

$$\sum_{k\in\Delta(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{K(2m)}{n^m \delta^{2m}}.$$

В самом деле,

$$\sum_{k\in\Delta(x)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant$$

$$\leqslant \frac{1}{n^{2m}\delta^{2m}} \sum_{k=0}^{n} (k-nx)^{2m} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} = \frac{S_{2m}(x)}{n^{2m}\delta^{2m}},$$

и лемма следует из оценки (269).

Полагая, в частности, $m=3$ и $\delta=n^{-1/4}$, находим

$$\sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant n^{-1/4}} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{K(6)}{\sqrt{n^3}}. \tag{270}$$

Теперь можно вернуться к теореме Е. В. Вороновской.

Из существования конечной $f''(x)$ вытекает

$$f(t)=f(x)+f'(x)(t-x)+\left[\frac{f''(x)}{2}+\lambda(t)\right](t-x)^2,$$

где $\lambda(t)$ стремится к нулю вместе с $t-x$.

Отсюда

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=f(x)+f'(x)\left(\frac{k}{n}-x\right)+\left[\frac{f''(x)}{2}+\lambda\left(\frac{k}{n}\right)\right]\left(\frac{k}{n}-x\right)^2.$$

Подставляя эту величину в выражение полинома Бернштейна и принимая во внимание тождества (1) и (2), находим

$$B_n(x) = f(x) + \frac{x(1-x)}{2n} f''(x) + r_n,$$

где

$$r_n = \sum_{k=0}^{n} \lambda\left(\frac{k}{n}\right)\left(\frac{k}{n} - x\right)^2 C_n^k x^k (1-x)^{n-k}. \qquad (271)$$

Выбрав $\varepsilon > 0$, подбираем столь большое n, что при $|t-x| < n^{-1/4}$ будет $|\lambda(t)| < \varepsilon$. При таком n разбиваем сумму, выражающую r_n, на две суммы: $\sum_1$ и $\sum_2$, относя в $\sum_1$ те слагаемые, для которых $\left|\frac{k}{n} - x\right| < n^{-1/4}$, а в $\sum_2$ все остальные.

В силу неравенства (10) будет

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \leq \frac{\varepsilon}{4n}.$$

С другой стороны, функция $\lambda(t)(t-x)^2$ ограничена, и если M верхняя граница модуля этой функции, то, в силу (270), окажется

$$\left|\sum\nolimits_2\right| \leqslant M \sum_{\left|\frac{k}{n}-x\right| \geqslant n^{-1/4}} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \leqslant \frac{MK(6)}{\sqrt{n^3}}.$$

Итак, при достаточно больших n

$$|nr_n| < \frac{\varepsilon}{4} + \frac{MK(6)}{\sqrt{n}}.$$

Если же n подчинить ещё условию,

$$\frac{MK(6)}{\sqrt{n}} < \frac{3}{4}\varepsilon,$$

то окажется

$$|nr_n| < \varepsilon,$$

так что nr_n есть величина, стремящаяся к нулю. Остаётся обозначить её через ρ_n, чтобы придти к (266). Эта формула показывает, что никакое улучшение свойств функции $f(x)$ не даст для полиномов $B_n(x)$ более высокого порядка приближения, чем $\frac{1}{n}$ (исключая случай линейной функции $f(x)$, для которой полиномы $B_n(x)$ при $n>0$ просто совпадают с ней).

Довольно близко по методу доказательства к теореме Вороновской стоит следующее предложение:

Теорема 3. *Если у ограниченной функции $f(x)$ в точке x имеется конечная производная $f'(x)$, то*

$$\lim_{n\to\infty} B_n'(x)=f'(x).$$

Доказательство. Предполагая $0<x<1$, мы можем записать производную $B_n'(x)$ в виде*)

$$B_n'(x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)\,C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1},$$

откуда

$$B_n'(x)=\frac{1}{x(1-x)}\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)\,C_n^k x^k(1-x)^{n-k}.$$

Заменим здесь $f\left(\frac{k}{n}\right)$ по формуле

$$f\left(\frac{k}{n}\right)=f(x)+\left[f'(x)+\lambda\left(\frac{k}{n}\right)\right]\left(\frac{k}{n}-x\right),$$

где $\lambda(t)\to 0$ при $t\to x$. Если принять во внимание тождества (8) и (2), то мы сразу получаем

$$B_n'(x)=f'(x)+\frac{1}{nx(1-x)}\sum_{k=0}^{n}\lambda\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)^2\,C_n^k x^k(1-x)^{n-k},$$

*) Чтобы воспользоваться этой формулой для $x=0$ или $x=1$, нужно предварительно произвести перегруппировку слагаемых, ибо иначе мы встретим слагаемые вида 0^{-1}. Здесь мы сталкиваемся с тем же обстоятельством, как и в случае равенств $1=1+\frac{1}{x}-\frac{1}{x}$ или $1=x\cdot\frac{1}{x}$, которые формально теряют смысл при $x=0$.

или, если воспользоваться обозначением (271),

$$B_n'(x)=f'(x)+\frac{nr_n}{x(1-x)},$$

и теорема вытекает из того, уже доказанного факта, что $nr_n \to 0$.

Случаи $x=0$ или $x=1$ исследуются гораздо проще. Например, для $x=0$ мы переписываем $B_n'(x)$ в виде

$$B_n'(x)=-nf(0)(1-x)^{n-1}+f\left(\frac{1}{n}\right)n(1-nx)(1-x)^{n-2}+$$
$$+\sum_{k=2}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)(k-nx)\,C_n^k x^{k-1}(1-x)^{n-k-1},$$

откуда сразу получается

$$B_n'(0)=n\left[f\left(\frac{1}{n}\right)-f(0)\right]\to f'(0).$$

Доказанная теорема имеет чисто локальный характер.

Существует сходное утверждение нелокального характера:

Теорема 4. *Если $f(x)$ всюду на $[0, 1]$ имеет непрерывную производную $f'(x)$, то $B_n'(x)$ стремится к $f'(x)$ равномерно.*

Для доказательства представляем $B_n(x)$ в форме

$$B_n(x)=f(0)(1-x)^n+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k x^k(1-x)^{n-k}+f(1)x^n.$$

Отсюда

$$B_n'(x)=-nf(0)(1-x)^{n-1}+\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k kx^{k-1}(1-x)^{n-k}-$$
$$-\sum_{k=1}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right)C_n^k(n-k)x^k(1-x)^{n-k-1}+nf(1)x^{n-1},$$

или

$$B'_n(x)=\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k k x^{k-1}(1-x)^{n-k} - \\ -\sum_{k=0}^{n-1} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k (n-k) x^k (1-x)^{n-k-1}.$$

Если в первой сумме ввести новый индекс суммирования $i=k-1$ и снова обозначить его через k, то получится

$$B'_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)(k+1)C_n^{k+1} - \right. \\ \left. - f\left(\frac{k}{n}\right)(n-k)C_n^k\right] x^k(1-x)^{n-1-k}.$$

Но

$$(k+1)C_n^{k+1}=(n-k)C_n^k=nC_{n-1}^k.$$

Значит,

$$B'_n(x)=n\sum_{k=0}^{n-1}\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k}.$$

Так как производная $f'(x)$ существует всюду на $[0, 1]$, то можно воспользоваться формулой Лагранжа, по которой

$$n\left[f\left(\frac{k+1}{n}\right)-f\left(\frac{k}{n}\right)\right]=f'(z_k^{(n)}) \qquad \left(\frac{k}{n}<z_k^{(n)}<\frac{k+1}{n}\right).$$

Таким образом

$$B'_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} f'(z_k^{(n)})\, C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k}.$$

Если мы перепишем это выражение так:

$$B'_n(x)=\sum_{k=0}^{n-1} f'\left(\frac{k}{n-1}\right) C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k} + \\ +\sum_{k=0}^{n-1}\left[f'(z_k^{(n)})-f'\left(\frac{k}{n-1}\right)\right] C_{n-1}^k x^k(1-x)^{n-1-k}, \qquad (272)$$

то первая сумма представит собой полином Бернштейна $(n-1)$-го порядка для производной $f'(x)$ и будет стремиться к $f'(x)$ равномерно на $[0, 1]$. С другой стороны,

$$\frac{k}{n} < z_k^{(n)} < \frac{k+1}{n}, \qquad \frac{k}{n} < \frac{k}{n-1} \leqslant \frac{k+1}{n},$$

и потому

$$\left| z_k^{(n)} - \frac{k}{n-1} \right| < \frac{1}{n},$$

откуда, обозначая модуль непрерывности $f'(x)$ через $\omega_1(\delta)$, находим

$$\left| f'(z_k^{(n)}) - f'\left(\frac{k}{n-1}\right) \right| \leqslant \omega_1\left(\frac{1}{n}\right)$$

и, стало быть, вторая сумма в (272) не больше, чем $\omega_1\left(\frac{1}{n}\right)$, и равномерно стремится к нулю.

Остановимся ещё на одном свойстве полиномов Бернштейна:

Теорема 5. *Если функция $f(x)$ есть полином степени m, то при $n \geqslant m$ её полином Бернштейна $B_n(x)$ имеет степень m (а не n).*

Очевидно, достаточно доказать, что это так, когда $f(x) = x^m$, а это в свою очередь сводится к установлению того факта, что

$$\sum_{k=0}^{n} k^m C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{273}$$

при $n \geqslant m$ есть полином степени m.

Но если тождество

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k z^k = (1+z)^n$$

подвергнуть m раз операции дифференцирования и последующего умножения на z, то слева окажется

$$\sum_{k=0}^{n} k^m C_n^k z^k.$$

В правой же части получится полином попрежнему степени n, но делящийся без остатка на $(1+z)^{n-m}$ (это проверяется индукцией по m).

Значит

$$\sum_{k=0}^{n} k^m C_n^k z^k = (1+z)^{n-m} P_m(z).$$

Полагая $z=\frac{x}{1-x}$ и умножая на $(1-x)^n$, получим слева (273), а справа

$$(1-x)^m P_m\left(\frac{x}{1-x}\right),$$

т. е. полином степени m.

Следствие. *Если полином Бернштейна $B_n(x)$, построенный для функции x^m, обозначить через $B_{n,m}(x)$, то равенство*

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,m}(x) = x^m$$

будет верно для всех вещественных x.

В самом деле, это равенство выполняется для $[0, 1]$, а тогда дело сводится к замечанию, сделанному в § 1 главы II.

Опираясь на это предложение, можно доказать следующую теорему:

Теорема 6 (Л. В. Канторович [1]). *Если $f(x)$ есть целая функция, то её полином Бернштейна $B_n(x)$ сходится к ней на всей оси.*

В самом деле

$$f(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m x^m, \tag{274}$$

причём ряд направо сходится абсолютно на всей оси. Отсюда

$$B_n(x) = \sum_{m=0}^{\infty} c_m B_{n,m}(x). \tag{275}$$

Каждый член ряда (275) с возрастанием n стремится к соответствующему члену ряда (274). Поэтому достаточно показать, что (при фиксированном x) ряд (275) сходится *равномерно* относительно n.

С этой целью заметим прежде всего, что

$$|B_{n,m}(x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^m C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leqslant$$
$$\leqslant \sum_{k=0}^{n} C_n^k |x|^k (1+|x|)^{n-k} = (2|x|+1)^n.$$

Поэтому при $n \leqslant 2m$

$$|B_{n,m}(x)| \leqslant (2|x|+1)^{2m}.$$

С другой стороны, коэффициент при x^r в выражении

$$B_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^m C_n^k x^k (1-x)^{n-k} =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^m C_n^k \left[\sum_{i=0}^{n-k} (-1)^i C_{n-k}^i x^{k+i} \right]$$

равен

$$\lambda_r = \sum_{k=0}^{r} \left(\frac{k}{n}\right)^m C_n^k C_{n-k}^{r-k} (-1)^{r-k}$$

или (так как $C_n^k C_{n-k}^{r-k} = C_n^r C_r^k$)

$$\lambda_r = \frac{C_n^r}{n^m} \sum_{k=0}^{r} (-1)^{r-k} k^m C_r^k. \tag{276}$$

При этом мы можем считать, что $r \leqslant m$, ибо более высоких степеней x в составе $B_{n,m}(x)$ нет. Из (276) следует, что

$$|\lambda_r| \leqslant \frac{C_n^r}{n^m} r^m \sum_{k=0}^{r} C_r^k = \frac{2^r r^m}{n^m} C_n^r$$

и, следовательно,

$$|\lambda_r| < \frac{2^m m^m}{n^m} C_n^r.$$

Если $n > 2m$, то при $r \leqslant m$ будет $C_n^r \leqslant C_n^m$, и потому

$$|\lambda_r| < \frac{2^m m^m}{n^m} C_n^m.$$

Так как

$$B_{n,m}(x) = \lambda_0 + \lambda_1 x + \ldots + \lambda_m x^m,$$

то

$$|B_{n,m}(x)| < (m+1)\frac{2^m m^m}{n^m} C_n^m (|x|+1)^m.$$

Но

$$C_n^m = \frac{n(n-1)\ldots(n-m+1)}{m!} < \frac{n^m}{m!}.$$

Стало быть,

$$|B_{n,m}(x)| < (m+1)\frac{2^m m^m}{m!}(|x|+1)^m$$

и, тем более (см. (213)),

$$|B_{n,m}(x)| < (m+1)\,2^m e^m (|x|+1)^m.$$

Но $m+1 \leqslant 2^m$ и окончательно для $n > 2m$

$$|B_{n,m}(x)| < [4e(|x|+1)]^m.$$

Обозначив через A большее из чисел $(2|x|+1)^2$ и $4e(|x|+1)$, мы будем иметь уже при всех n

$$|B_{n,m}(x)| < A^m.$$

Значит, ряд (275) мажорируется сходящимся рядом

$$\sum_{m=0}^{\infty} |c_m| A^m,$$

члены которого не зависят от n. Теорема доказана. Заметим, что, как это видно из приведённого доказательства, сходимость оказывается равномерной в любом сегменте $[-R, +R]$.

§ 3. Некоторые свойства интеграла Валле-Пуссена.

В этом параграфе я изложу некоторые результаты своих работ, посвящённых свойствам интеграла Валле-Пуссена.

Теорема 1 (И. П. Натансон [7]). *Если $f(x)$—функция класса $C_{2\pi}$ с модулем непрерывности $\omega(\delta)$, а*

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt$$

—её интеграл Валле-Пуссена, то при всех x

$$|V_n(x)-f(x)|\leqslant 3\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{277}$$

Доказательство. Легко видеть, что

$$V_n(x)-f(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}\{f(t)-f(x)\}\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt.$$

Но

$$|f(t)-f(x)|\leqslant\omega(|t-x|),$$

а (в силу неравенства $\omega(\lambda\delta)\leqslant(\lambda+1)\omega(\delta)$)

$$\omega(|t-x|)\leqslant(|t-x|\sqrt{n}+1)\,\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Таким образом

$$|V_n(x)-f(x)|\leqslant$$

$$\leqslant\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)}{2\pi}\int_{x-\pi}^{x+\pi}[|t-x|\sqrt{n}+1]\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt.$$

Если в последнем интеграле сделать замену переменной $\left(\text{приняв за новую переменную } \frac{t-x}{2}\right)$ и учесть равенство

$$\int_{-\pi/2}^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\pi,$$

то мы найдём, что

$$|V_n(x)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\left[1+\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{2\sqrt{n}}{\pi}\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}|t|\cos^{2n}t\,dt\right]\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right).$$

Рассмотрим выражение

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2=2\,\frac{2\cdot 4}{3^2}\,\frac{4\cdot 6}{5^2}\cdots\frac{(2n-2)\cdot 2n}{(2n-1)^2}\,2n.$$

Так как каждая из дробей, написанных здесь, меньше единицы, то

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}<2\sqrt{n}. \tag{278}$$

С другой стороны,

$$\int\limits_{-\pi/2}^{\pi/2}|t|\cos^{2n}t\,dt=2\int\limits_{0}^{\pi/2}t\cos^{2n}t\,dt.$$

Поэтому

$$|V_n(x)-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant\left[1+\frac{8n}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}t\cos^{2n}t\,dt\right]\omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right). \tag{279}$$

Остаётся оценить последний интеграл. Так как при $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$

$$t\leqslant\frac{\pi}{2}\sin t,$$

то

$$\int\limits_{0}^{\pi/2}t\cos^{2n}t\,dt<\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{\pi/2}\cos^{2n}t\sin t\,dt=$$
$$=\frac{\pi}{2}\int\limits_{0}^{1}z^{2n}\,dz=\frac{\pi}{2(2n+1)}<\frac{\pi}{4n}. \tag{280}$$

Сопоставляя (279) и (280), мы и получаем (277).

Следствие. *Если* $f(x) \in \mathrm{Lip}_M \alpha$, *то*

$$|V_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{3M}{\sqrt{n^\alpha}}. \tag{281}$$

Замечание. Порядок оценки (281) улучшить нельзя. Действительно, приняв за $f(x)$ функцию $|\sin x|^\alpha$ (нетрудно показать, что она входит в $\mathrm{Lip}\,\alpha$), мы будем иметь

$$V_n(0) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\pi} \int_0^\pi \sin^\alpha t \cos^{2n} \frac{t}{2}\, dt.$$

Отсюда

$$V_n(0) > \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{\pi} \int_0^{\frac{2}{\sqrt{n}}} \sin^\alpha t \cos^{2n} \frac{t}{2}\, dt,$$

или

$$V_n(0) > \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{2}{\pi} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} \sin^\alpha 2t \cos^{2n} t\, dt.$$

Но, при $n > 1$ будет $\frac{1}{\sqrt{n}} < \frac{\pi}{4}$, так что в промежутке интегрирования

$$\sin 2t > \frac{4}{\pi} t$$

и

$$V_n(0) > A \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} t^\alpha \cos^{2n} t\, dt,$$

где A — некоторая постоянная, зависящая от α.

Так как

$$\left[\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\right]^2 = \frac{2^2}{1\cdot 3} \cdot \frac{4^2}{3\cdot 5} \cdots \frac{(2n-2)^2}{(2n-3)\cdot(2n-1)} \frac{2n}{2n-1} 2n$$

и каждая из написанных дробей больше единицы, то

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} > \sqrt{2n},$$

откуда

$$V_n(0) > A_1 \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} t^\alpha \cos^{2n} t\, dt,$$

где A_1 — некоторая новая постоянная.

С другой стороны,

$$\cos t \geqslant 1 - \frac{t^2}{2}. \tag{282}$$

В самом деле, если $t > 0$, то функция

$$\varphi(t) = \cos t + \frac{t^2}{2}$$

возрастает, ибо $\varphi'(t) = t - \sin t > 0$. Поэтому при $t > 0$ будет $\varphi(t) > \varphi(0) = 1$, что и доказывает неравенство (282) для положительных t, поскольку же обе части его суть чётные функции, то оно верно всегда. Таким образом

$$V_n(0) > A_1 \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} t^\alpha \left(1 - \frac{t^2}{2}\right)^{2n} dt.$$

Наконец, отметим известное в анализе *неравенство Бернулли*

$$(1+x)^m \geqslant 1 + mx,$$

справедливое при всех $x > -1$ (что легко доказывается индукцией по m). Применяя это неравенство, находим

$$V_n(0) > A_1 \sqrt{n} \int_0^{\frac{1}{\sqrt{n}}} t^\alpha (1 - nt^2)\, dt,$$

откуда, вычисляя интеграл,

$$V_n(0) > A_1 \sqrt{n} \left[\frac{1}{\alpha+1} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha+1} - \frac{n}{\alpha+3} \left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)^{\alpha+3} \right] = \frac{A_2}{\sqrt{n^\alpha}},$$

где A_2 — положительная постоянная.

Таким образом порядок оценки (281) окончательный. Этого нельзя сказать о постоянном коэффициенте 3, входящем в эту оценку.

Именно, справедлива

Теорема 2 (И. П. Натансон [9]). *Если*

$$U_n(\alpha) = \sup\{\max|V_n(x) - f(x)|\},$$

где $f(x)$, *оставаясь* 2π-*периодической, пробегает весь класс* $\mathrm{Lip}_1\,\alpha$, *то*

$$U_n(\alpha) = \frac{2^\alpha}{\sqrt{\pi n^\alpha}}\,\Gamma\left(\frac{1+\alpha}{2}\right) + \frac{\rho_n}{\sqrt{n^\alpha}}, \tag{283}$$

где ρ_n *стремится к нулю с возрастанием* n.

Мы докажем эту теорему для частного случая $\alpha = 1$, когда формула (283) принимает более простой вид:

$$U_n(1) = \frac{2}{\sqrt{n\pi}} + \frac{\rho_n}{\sqrt{n}}. \tag{284}$$

Если $f(x) \in \mathrm{Lip}_1\,1$, то

$$|V_n(x) - f(x)| \leqslant \frac{(2n)!!}{(2n-n)!!}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{x-\pi}^{x+\pi}|t-x|\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt =$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt.$$

Поэтому и $U_n(1)$ не превосходит этого интеграла. С другой стороны, 2π-периодическая функция $\theta(x)$, которая на $[-\pi, \pi]$ совпадает с $|x|$, входит в $\mathrm{Lip}_1\,1$. Для неё оказывается

$$V_n(0) - \theta(0) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt,$$

а так как $U_n(1) \geqslant V_n(0) - \theta(0)$, то справедливо точное равенство

$$U_n(1) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{2\pi}\int\limits_{-\pi}^{\pi}|t|\cos^{2n}\frac{t}{2}\,dt =$$

$$= \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{4}{\pi}\int\limits_{0}^{\pi/2}t\cos^{2n}t\,dt.$$

Отсюда

$$U_n(1)=$$
$$=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{4}{\pi}\left[\int_0^{\pi/2}\sin t\cos^{2n}t\,dt+\int_0^{\pi/2}(t-\sin t)\cos^{2n}t\,dt\right]$$

и, стало быть,

$$U_n(1)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{4}{\pi}\left(\frac{1}{2n+1}+\tau_n\right), \tag{285}$$

где положено

$$\tau_n=\int_0^{\pi/2}(t-\sin t)\cos^{2n}t\,dt.$$

Если $0\leqslant t\leqslant\frac{\pi}{2}$, то *)

$$0\leqslant t-\sin t\leqslant\frac{t^3}{6}\leqslant\frac{\pi^3}{48}\sin^3 t.$$

Поэтому

$$0<\tau_n<\frac{\pi^3}{48}\int_0^{\pi/2}\sin^3 t\cos^{2n}t\,dt=\frac{\pi^3}{24(2n+1)(2n+3)}<\frac{\pi^3}{96n^2}. \tag{286}$$

В силу (278) мы получаем из (285) и (286)

$$0<U_n(1)-\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2n+1}<\frac{\pi^2}{12\sqrt{n^3}}.$$

Таким образом

$$U_n(1)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{4}{\pi}\,\frac{1}{2n+1}+\frac{\rho_n'}{\sqrt{n}}\qquad(\lim\rho_n'=0).$$

С другой стороны,

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n+1}t\,dt<\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\,dt<\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}t\,dt.$$

---

*) Мы видели, что $\cos t\geqslant 1-\frac{t^2}{2}$. Значит, функция $\sin t-t+\frac{t^3}{6}$ возрастает, и при $t>0$ она положительна.

Средний интеграл был нами уже вычислен (см. (19)), крайние находятся тем же методом, и мы получаем

$$\frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} < \frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\frac{\pi}{2} < \frac{(2n-2)!!}{(2n-1)!!}.$$

Отсюда*)

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} = \sqrt{2n+\theta_n}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (0 < \theta_n < 1),$$

и потому

$$U_n(1) = \frac{\sqrt{2n+\theta_n}}{2n+1}\frac{4}{\sqrt{2\pi}} + \frac{\rho_n'}{\sqrt{n}},$$

что равносильно формуле (284), так как

$$\frac{\sqrt{2n+\theta_n}}{2n+1}\frac{4}{\sqrt{2\pi}} - \frac{2}{\sqrt{n\pi}} = \frac{\rho_n''}{\sqrt{n}},$$

где ρ_n'' стремится к нулю с возрастанием n.

Изложенные результаты показывают, что интеграл Валле-Пуссена, несмотря на свою общность (он равномерно приближает любую непрерывную функцию!), доставляет, так же как и полиномы Бернштейна, и суммы Фейера, сравнительно плохую точность приближения. При этом никакое улучшение структурных свойств функции не приведёт к ошибке, меньшей, чем $\frac{1}{n}$. Это видно из следующей теоремы:

Теорема 3 (И. П. Натансон [7]). *Если у функции $f(x)$ класса $C_{2\pi}$ при некотором x существует конечная вторая производная $f''(x)$, то для этого значения x справедлива формула*

$$V_n(x) = f(x) + \frac{f''(x)}{n} + \frac{\rho_n}{n},$$

где ρ_n стремится к нулю с возрастанием n.

Доказательство. Рассмотрим отношение

$$\frac{f(t)-f(x)-f'(x)\sin(t-x)}{\sin^2(t-x)}. \tag{287}$$

*) Эта формула называется *формулой Валлиса*.

Когда t приближается к x, то это отношение принимает вид неопределённости $\frac{0}{0}$. Раскроем эту неопределённость методом Лопиталя (допуская существование второй производной в самой точке x, мы тем самым допускаем существование первой в некоторой окрестности x). Дифференцируя числитель и знаменатель отношения (287), получаем

$$\frac{f'(t)-f'(x)\cos(t-x)}{2\sin(t-x)\cos(t-x)}.$$

Так как эта дробь очевидным образом стремится к $\frac{1}{2}f''(x)$, то и

$$\frac{f(t)-f(x)-f'(x)\sin(t-x)}{\sin^2(t-x)}=\frac{1}{2}f''(x)+\alpha(t),$$

где $\alpha(t)$ стремится к нулю вместе с $t-x$. Отсюда вытекает некий аналог формулы Тэйлора

$$f(t)=f(x)+f'(x)\sin(t-x)+\\ +\frac{1}{2}f''(x)\sin^2(t-x)+\alpha(t)\sin^2(t-x). \qquad (288)$$

С другой стороны, мы ещё в первой главе имели такое выражение для интеграла Валле-Пуссена:

$$V_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\{f(x+2t)+f(x-2t)\}\cos^{2n}t\,dt. \qquad (289)$$

В силу (288), мы имеем

$$f(x+2t)=\\ =f(x)+f'(x)\sin 2t+\frac{1}{2}f''(x)\sin^2 2t+\alpha(x+2t)\sin^2 2t,$$

$$f(x-2t)=\\ =f(x)-f'(x)\sin 2t+\frac{1}{2}f''(x)\sin^2 2t+\alpha(x-2t)\sin^2 2t,$$

Отсюда и из (289)

$$V_n(x)=$$

$$=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}[2f(x)+f''(x)\sin^2 2t+\beta(t)\sin^2 2t]\cos^{2n}t\,dt,$$

где

$$\beta(t)=\alpha(x+2t)+\alpha(x-2t)$$

стремится к нулю вместе с t.

В силу (19), имеем

$$V_n(x)=f(x)+\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{f''(x)}{\pi}\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cos^{2n}t\,dt+$$

$$+\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\beta(t)\sin^2 2t\cos^{2n}t\,dt. \qquad (290)$$

Но

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cos^{2n}t\,dt=4\int_0^{\pi/2}(\cos^{2n+2}t-\cos^{2n+4}t)\,dt$$

и, в силу (19), будет

$$\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cos^{2n}t\,dt=\left[\frac{(2n+1)!!}{(2n+2)!!}-\frac{(2n+3)!!}{(2n+4)!!}\right]2\pi. \qquad (291)$$

Значит, равенство (290) принимает вид

$$V_n(x)=f(x)+\frac{f''(x)}{n+2}\frac{2n+1}{2n+2}+\tau_n,$$

где положено

$$\tau_n=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi/2}\beta(t)\sin^2 2t\cos^{2n}t\,dt.$$

Ввиду того что

$$\frac{1}{n+2}\frac{2n+1}{2n+2}=\frac{1}{n}-\frac{5n+4}{n(n+2)(2n+2)},$$

ясно, что для завершения доказательства достаточно проверить справедливость равенства

$$\lim_{n\to\infty}(n\tau_n)=0. \tag{292}$$

С этой целью возьмём произвольное $\varepsilon>0$ и найдём такое $\delta>0$, что в сегменте $[0, \delta]$

$$|\beta(t)|<\varepsilon.$$

Тогда из равенства

$$\tau_n=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\pi}\left\{\int_0^{\delta}\beta(t)\sin^2 2t\cos^{2n}t\,dt+\right.$$

$$\left.+\int_{\delta}^{\pi/2}\beta(t)\sin^2 2t\cos^{2n}t\,dt\right\}$$

вытекает оценка

$$|\tau_n|<\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\,\frac{1}{\pi}\left\{\varepsilon\int_0^{\pi/2}\sin^2 2t\cos^{2n}t\,dt+M\frac{\pi}{2}\cos^{2n}\delta\right\},$$

где M есть верхняя граница функции $\beta(t)\sin^2 2t$ (ограниченность которой вытекает хотя бы из (288)). Отсюда, из (291) и из (278) следует, что

$$|\tau_n|<\frac{2n+1}{2n+2}\,\frac{\varepsilon}{n+2}+M\sqrt{n}\cos^{2n}\delta$$

и, стало быть,

$$|n\tau_n|<\varepsilon+Mn\sqrt{n}\cos^{2n}\delta.$$

При достаточно больших n будет

$$Mn\sqrt{n}\cos^{2n}\delta<\varepsilon$$

и $|n\tau_n|<2\varepsilon$, откуда и следует соотношение (292), а с ним и теорема.

Докажем ещё две теоремы о производной интеграла Валле-Пуссена. По существу их следует считать принадлежащими Лебегу и Гану, так как они вытекают тривиальным образом из общих результатов названных авторов о сингулярных интегралах. В целях простоты изложения я приведу здесь прямые доказательства этих теорем.

Теорема 4. *Если у функции $f(x)$ класса $C_{2\pi}$ при некотором x существует конечная производная $f'(x)$, то при этом значении x*

$$\lim_{n\to\infty} V'_n(x) = f'(x). \tag{293}$$

Доказательство. Производную интеграла $V_n(x)$ можно вычислить по правилу Лейбница, т. е. с помощью дифференцирования под знаком интеграла. Таким образом

$$V'_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos^{2n-1}\frac{t-x}{2}\sin\frac{t-x}{2}\,dt. \tag{294}$$

Отсюда

$$V'_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{n}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x+t)\cos^{2n-1}\frac{t}{2}\sin\frac{t}{2}\,dt$$

(пределы интегрирования не изменены на основании периодичности подинтегральной функции) и, стало быть,

$$V'_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{n}{\pi}\int_{-\pi/2}^{\pi/2} f(x+2t)\cos^{2n-1}t\sin t\,dt.$$

Разбивая последний интегал на два, распространённых на промежутки $\left[-\frac{\pi}{2}, 0\right]$ и $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$, и заменяя в первом t на $-t$, найдём

$$V'_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{n}{\pi}\int_{0}^{\pi/2} [f(x+2t)-f(x-2t)]\cos^{2n-1}t\sin t\,dt.$$

Но в условиях теоремы

$$f(t)=f(x)+f'(x)\sin(t-x)+\alpha(t)\sin(t-x),$$

где $\alpha(t)$ стремится к нулю вместе с $t-x$ (это равенство доказывается тем же способом, что и (288)). Отсюда

$$f(x+2t)-f(x-2t)=2f'(x)\sin 2t+\beta(t)\sin 2t,$$

где $\beta(t)$ стремится к нулю вместе с t. Значит,

$$V'_n(x)=\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{2n}{\pi}f'(x)\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}t\sin t\sin 2t\,dt+$$

$$+\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{n}{\pi}\int_0^{\pi/2}\beta(t)\cos^{2n-1}t\sin t\sin 2t\,dt. \qquad (295)$$

Но

$$\int_0^{\pi/2}\cos^{2n-1}t\sin t\sin 2t\,dt=2\int_0^{\pi/2}\cos^{2n}t\sin^2 t\,dt.$$

Поэтому, применяя формулу (19), легко показать, что коэффициент при $f'(x)$ в равенстве (295) есть $\frac{n}{n+1}$. Что касается до второго члена равенства (295), то он стремится к нулю, что доказывается совершенно так же, как соотношение (292).

Теорема 5. *Если у функции $f(x)\in C_{2\pi}$ существует непрерывная производная, то*

$$\lim_{n\to\infty}V'_n(x)=f'(x)$$

равномерно относительно x.

Эту теорему можно было бы доказать, анализируя поведение остаточного члена формулы (295); но гораздо проще доказать её независимо от теоремы 4. Именно, переписав равенство (294) в форме

$$V'_n(x)=-\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\,d\cos^{2n}\frac{t-x}{2},$$

применим формулу интегрирования по частям:

$$V'_n(x) = -\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\left\{\left[f(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\right]_{-\pi}^{\pi} - \int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt\right\}.$$

Так как внеинтегральный член благодаря свойству периодичности исчезает, то

$$V'_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f'(t)\cos^{2n}\frac{t-x}{2}\,dt.$$

В правой части получился интеграл Валле-Пуссена для производной $f'(t)$, т. е.

$$V'_n[f;\ x] = V_n[f';\ x],$$

а тогда дело сводится к теореме Валле-Пуссена из главы I.

§ 4. Суммы С. Н. Бернштейна—В. Рогозинского.

Укажем ещё один способ*) построения тригонометрических полиномов, дающих равномерное приближение любой функции из $C_{2\pi}$.

Пусть $f(x) \in C_{2\pi}$ и $S_n(x)$ частная сумма ряда Фурье этой функции. Положим **)

$$B_n^*(x) = B_n^*[f;\ x] = \frac{1}{2}\left[S_n\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right) + S_n\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Мы будем называть эту сумму *суммой Бернштейна—Рогозинского.*

---

*) С. Н. Бернштейн [7]; В. Рогозинский [1]; И. П. Натансон [3, 4]; Ф. И. Харшиладзе [1, 3].

**) Мы пишем $B_n^*(x)$, а не $B_n(x)$, чтобы избежать смешения с полиномами Бернштейна.

Ввиду того, что $S_n(x)$ представляется интегралом Дирихле (176), ясно, что

$$B_n^*(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(t)\cos\frac{2n+1}{2}(t-x)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{t-x}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{t-x}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right]dt.$$

Лемма. *Справедливо неравенство*

$$\int_{-\pi}^{\pi}\left|\cos\frac{2n+1}{2}t\right|\times$$
$$\times\left|\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)} - \frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right|dt < 8\pi^2. \quad (296)$$

Действительно, с помощью обычных преобразований, использующих четность подинтегральной функции, придадим входящему сюда интегралу вид

$$4\int_0^{\pi/2}|\cos mt|\left|\frac{1}{\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)} - \frac{1}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)}\right|dt$$
$$(m = 2n+1).$$

Ввиду того что $|\sin\beta - \sin\alpha| \leqslant |\beta-\alpha|$, этот интеграл не больше, чем

$$\frac{4\pi}{m}\int_0^{\pi/2}\left|\frac{\cos mt}{\sin\left(t-\frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(t+\frac{\pi}{2m}\right)}\right|dt.$$

Разобьём последний интеграл на три (обозначив их соответственно через I_1, I_2 и I_3), распространённых на промежутки $\left[0,\ \frac{\pi}{m}\right]$, $\left[\frac{\pi}{m},\ \frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}-\frac{\pi}{2m},\ \frac{\pi}{2}\right]$.

Для оценки I_1 заметим, что при $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{m}$

$$\left| \frac{\cos mt}{\sin\left(t - \frac{\pi}{2m}\right)} \right| = \left| \frac{\sin m\left(t - \frac{\pi}{2m}\right)}{\sin\left(t - \frac{\pi}{2m}\right)} \right| \leqslant m,$$

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2m}\right) \geqslant \sin\frac{\pi}{2m} \geqslant \frac{1}{m}.$$

Отсюда

$$I_1 < \int_0^{\pi/m} m^2\,dt = m\pi.$$

С другой стороны,

$$I_2 < \int_{\pi/m}^{\pi/2 - \pi/2m} \frac{dt}{\sin\left(t - \frac{\pi}{2m}\right)\sin\left(t + \frac{\pi}{2m}\right)}.$$

Если к каждому из сомножителей знаменателя применить оценку $\sin\alpha \geqslant \frac{2}{\pi}\alpha$, то мы найдём

$$I_2 < \frac{\pi^2}{4}\int_{\pi/m}^{\infty} \frac{dt}{t^2 - \frac{\pi^2}{4m^2}} = \frac{\pi m \ln 3}{4} < \frac{\pi m}{2}.$$

Наконец, при $t \in \left[\frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2m}, \frac{\pi}{2}\right]$ будет (поскольку $m \geqslant 3$)

$$\sin\left(t - \frac{\pi}{2m}\right) \geqslant \cos\frac{\pi}{m} \geqslant \frac{1}{2},$$

$$\sin\left(t + \frac{\pi}{2m}\right) \geqslant \cos\frac{\pi}{2m} \geqslant \frac{\sqrt{3}}{2}.$$

Значит,

$$I_3 < \frac{2\pi}{m\sqrt{3}} < \frac{\pi m}{2}.$$

Из оценок для I_1, I_2 и I_3 и вытекает (296).

Следствие. *Если* $|f(t)|\leqslant M$, *то*

$$|B_n^*[f;x]|\leqslant 2\pi M. \tag{297}$$

Теорема. *Для любой функции* $f(x)$ *из* $C_{2\pi}$ *справедливо неравенство*

$$|B_n(x)-f(x)|\leqslant(2\pi+1)E_n+\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right), \tag{298}$$

где E_n *есть наилучшее приближение* $f(x)$ *полиномами из* H_n^T, *а* $\omega(\delta)$ — *модуль непрерывности* $f(x)$.

В самом деле, пусть $T(x)$—полином порядка не выше n, для которого

$$|f(x)-T(x)|\leqslant E_n.$$

Тогда

$$|B_n^*[f;x]-B_n^*[T;x]|=|B_n^*[f-T;x]|\leqslant 2\pi E_n,$$

где применяемые обозначения понятны сами собой.

С другой стороны,

$$|B_n^*[f;x]-f(x)|\leqslant$$
$$\leqslant|B_n^*[f;x]-B_n^*[T;x]|+|B_n^*[T;x]-f(x)|,$$

и потому

$$|B_n^*[f;x]-f(x)|\leqslant 2\pi E_n+|B_n^*[T;x]-f(x)|. \tag{299}$$

Но $T(x)$, будучи тригонометрическим полиномом, есть своя собственная сумма Фурье. Значит,

$$B_n^*[T;x]=\frac{T\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right)+T\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)}{2}.$$

Эта величина отличается от

$$\frac{f\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)}{2} \tag{300}$$

меньше, чем на E_n, а дробь (300), в свою очередь, отличается от $f(x)$ меньше, чем на $\omega\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$. Значит,

$$|B_n^*[T; x] - f(x)| \leqslant E_n + \omega\left(\frac{\pi}{2n+1}\right),$$

откуда в связи с (299) и вытекает (298).

Следствие. *Для любой $f(x) \in C_{2\pi}$ равномерно на всей оси*

$$\lim_{n\to\infty} B_n^*(x) = f(x).$$

Суммы $B_n^*(x)$ обладают и другими интересными свойствами, однако мы не будем их здесь изучать, отсылая читателя к литературе, указанной в начале параграфа.

§ 5. Множители сходимости.

Покажем, что теоремы о равномерном приближении непрерывных 2π-периодических функций суммами Фейера, Бернштейна—Рогозинского и интегралами Валле-Пуссена можно охватить одной общей точкой зрения.

Пусть дана треугольная матрица вещественных чисел:

$$\left.\begin{array}{l} \rho_0^{(0)}, \\ \rho_0^{(1)},\ \rho_1^{(1)}, \\ \rho_0^{(2)},\ \rho_1^{(2)},\ \rho_2^{(2)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots \\ \rho_0^{(n)},\ \rho_1^{(n)},\ \rho_2^{(n)},\ \ldots,\ \rho_n^{(n)}, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{array}\right\} \tag{301}$$

Условимся говорить, что это матрица типа (А), если выполнены следующие два условия:

$$\lim_{n\to\infty} \rho_k^{(n)} = 1, \tag{302}$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\rho_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)}\cos kt\right| dt < K, \tag{303}$$

где K—постоянная, не зависящая от n.

Возьмём произвольную 2π-периодическую непрерывную функцию $f(x)$ и составим её ряд Фурье

$$A+\sum_{k=1}^{\infty}(a_k\cos kx+b_k\sin kx).$$

С помощью этого ряда и матрицы (301) составим полином

$$U_n(x)=U_n[f;x]=$$
$$=\rho_0^{(n)}A+\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)}(a_k\cos kx+b_k\sin kx). \qquad (304)$$

Теорема 1. *Если матрица* (301) *есть матрица типа* (A), *то для любой функции* $f(x)$ *из* $C_{2\pi}$ *равномерно на всей оси*

$$\lim_{n\to\infty}U_n(x)=f(x). \qquad (305)$$

Для доказательства этой теоремы покажем прежде всего, что полином $U_n(x)$ удовлетворяет неравенству

$$|U_n(x)|\leqslant KM, \qquad (306)$$

где $M=\max|f(x)|$. Действительно, если в (304) подставить выражение коэффициентов Фурье A, a_k, b_k, то окажется, что

$$U_n(x)=$$
$$=\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(t)\left[\rho_0^{(n)}+2\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)}\cos k(t-x)\right]dt,$$

отсюда в связи с (303) и вытекает (306).

С другой стороны, если

$$T(x)=P+\sum_{k=1}^{m}(p_k\cos kx+q_k\sin kx)$$

есть некоторый тригонометрический полином порядка m, то при $n \geqslant m$

$$U_n[T; x] = \rho_0^{(n)} P + \sum_{k=1}^{m} \rho_k^{(n)} (p_k \cos kx + q_k \sin kx),$$

откуда благодаря (302) следует, что $U_n[T; x]$ равномерно на всей оси стремится к $T(x)$.

Заметив это, выберем $\varepsilon > 0$ и обозначим через $T(x)$ тригонометрический полином, удовлетворяющий условию

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon.$$

Тогда, в силу (306),

$$|U_n[f; x] - U_n[T; x]| < K\varepsilon.$$

Но

$$|U_n[f; x] - f(x)| \leqslant |U_n[f; x] - U_n[T; x]| + \\ + |U_n[T; x] - T(x)| + |T(x) - f(x)|,$$

и потому

$$|U_n[f; x] - f(x)| < (K+1)\varepsilon + |U_n[T; x] - T(x)|.$$

Значит, для достаточно больших n окажется

$$|U_n[f; x] - f(x)| < (K+2)\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Выбирая числа $\rho_k^{(n)}$ (они называются *множителями сходимости*) тем или иным способом, мы и получим упомянутые теоремы Фейера, Валле-Пуссена и Бернштейна—Рогозинского.

Пример 1. Сумма Фейера

$$\sigma_n(x) = \frac{S_0(x) + S_1(x) + \ldots + S_{n-1}(x)}{n}$$

может быть записана так:

$$\sigma_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n} \left(1 - \frac{k}{n}\right) (a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Иначе говоря, это есть сумма вида (304), в которой

$$\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}. \tag{307}$$

Свойство (302) для матрицы этих чисел очевидно. С другой стороны, опираясь на (89), получаем

$$\rho_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kt =$$
$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n}\left(1 - \frac{k}{n}\right)\cos kt = \frac{1}{n}\left(\frac{\sin\frac{nt}{2}}{\sin\frac{t}{2}}\right)^2.$$

Значит,

$$\rho_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kt \geqslant 0.$$

Поэтому в интеграле, входящем в (303), можно опустить знак абсолютной величины. Но

$$\int_{-\pi}^{\pi} \cos kt\, dt = 0,$$

и потому для чисел (307)

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} \left|\rho_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kt\right| dt = 1.$$

Таким образом теорема Фейера является частным случаем теоремы этого параграфа.

Заметим, что аналогично сказанному в этом примере условие (303) вытекает из (302) каждый раз, когда

$$\rho_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kt \geqslant 0. \tag{308}$$

Пример 2. Докажем, что справедливо тождество

$$\cos^{2n}\frac{t}{2}=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}\left[1+2\sum_{k=1}^{n}\frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!}\cos kt\right]. \tag{309}$$

В самом деле, левая часть этого равенства есть тригонометрический полином порядка n. Поэтому

$$\cos^{2n}\frac{t}{2}=L+\sum_{k=1}^{n}l_k\cos kt. \tag{310}$$

Интегрируя это равенство по промежутку $[-\pi, \pi]$ и используя (19), сразу получаем

$$L=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!},$$

Если же (310) умножить на $\cos mx$ и затем проинтегрировать, то мы найдём

$$\pi l_m=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}\cos mt\,dt.$$

Замечая, что

$$\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}\sin mt\,dt=0,$$

ибо подинтегральная функция здесь нечётная, находим

$$\pi l_m=\int_{-\pi}^{\pi}\cos^{2n}\frac{t}{2}e^{imt}\,dt.$$

Но

$$\cos\frac{t}{2}=\frac{e^{i\frac{t}{2}}+e^{-i\frac{t}{2}}}{2}.$$

Поэтому

$$2^{2n}\cos^{2n}\frac{t}{2}=\sum_{k=0}^{2n}C_{2n}^{k}e^{it(k-n)}$$

и, стало быть,

$$\pi l_m = \frac{1}{2^{2n}} \sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k \int_{-\pi}^{\pi} e^{i(k-n+m)t}\, dt.$$

Если p — целое число, то

$$\int_{-\pi}^{\pi} e^{ipt}\, dt = \begin{cases} 0, & \text{если} \quad p \neq 0; \\ 2\pi, & \text{если} \quad p = 0. \end{cases}$$

Поэтому

$$l_m = \frac{2}{2^{2n}} C_{2n}^{n-m} = \frac{2}{2^{2n}} \frac{(2n)!}{(n-m)!\,(n+m)!} =$$
$$= 2\,\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!} \frac{(n!)^2}{(n-m)!\,(n+m)!},$$

что и доказывает (309).

Подставляя (309) в выражение интеграла Валле-Пуссена

$$V_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} f(t) \cos^{2n} \frac{t-x}{2}\, dt,$$

получаем

$$V_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

где A, a_k, b_k суть коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Поэтому $V_n(x)$ есть полином вида (304), в котором

$$\rho_k^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!}. \tag{311}$$

Числа (311), очевидно, удовлетворяют условию (302). С другой стороны, в силу (309), для них выполнено и условие (308), а значит, и (303). Поэтому теорема Валле-Пуссена также является частным случаем теоремы настоящего параграфа *).

Пример 3. Покажем **), что и суммы Бернштейна—Рогозинского $B_n^*(x)$ также получаются из общей фор-

*) И. П. Натансон [8].
**) Ф. И. Харшиладзе [1, 3].

мулы (304) при некотором выборе чисел $\rho_k^{(n)}$. В самом деле, если

$$S_n(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то

$$B_n^*(x) = \frac{S_n\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) + S_n\left(x - \frac{\pi}{2n+1}\right)}{2} =$$

$$= A + \sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n+1}(a_k \cos kx + b_k \sin kx).$$

Значит, здесь

$$\rho_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{2n+1}. \tag{312}$$

Эти множители, очевидно, удовлетворяют условию (302). Условие же (303) для них мы фактически проверили в предыдущем параграфе. Действительно,

$$\rho_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n} \rho_k^{(n)} \cos kt =$$

$$= 1 + 2\sum_{k=1}^{n} \cos\frac{k\pi}{2n+1} \cos kt =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left[\cos k\left(t + \frac{\pi}{2n+1}\right) + \cos k\left(t - \frac{\pi}{2n+1}\right)\right].$$

Как известно (см. (175)),

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\alpha = \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Значит,

$$\rho_0^{(n)}+2\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)}\cos kt=$$
$$=\frac{\cos\frac{2n+1}{2}t}{2}\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{t}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right].$$

Таким образом для чисел (312) условие (303) выполнено в силу (296).

К доказанной теореме полезно добавить некоторые замечания общего характера. Пусть дана матрица (301). Тогда для любого бесконечного ряда

$$a_0+a_1+a_2+\ldots \tag{313}$$

можно образовать сумму

$$Q_n=\sum_{k=0}^{n}\rho_k^{(n)}a_k.$$

Если существует конечный предел

$$Q=\lim_{n\to\infty}Q_n,$$

то говорят, что ряд (313) *суммируется* методом множителей $\rho_k^{(n)}$, а число Q называют его обобщённой суммой. Представляют интерес такие методы суммирования (их называют *перманентными* методами), с помощью которых суммируется каждый сходящийся в обычном смысле слова ряд и притом так, что его обобщённая сумма совпадает с обычной.

Теорема 2. *Если матрица* (301) *такова, что*

$$\rho_0^{(n)}\geqslant\rho_1^{(n)}\geqslant\ldots\geqslant\rho_n^{(n)}\geqslant 0 \tag{314}$$

и, кроме того, выполнено условие (302), *то порождаемый ею метод суммирования — перманентный.*

В самом деле, пусть ряд (313) сходится и его сумма равна S. Обозначая частные суммы этого ряда через S_k, замечая, что при $k>0$ будет $a_k=S_k-S_{k-1}$, и полагая $\rho_{n+1}^{(n)}=0$, находим

$$Q_n=\sum_{k=0}^{n}(\rho_k^{(n)}-\rho_{k+1}^{(n)})S_k.$$

С другой стороны,

$$\rho_0^{(n)}=\sum_{k=0}^{n}(\rho_k^{(n)}-\rho_{k+1}^{(n)}).$$

Отсюда

$$Q_n-\rho_0^{(n)}S=\sum_{k=0}^{n}(\rho_k^{(n)}-\rho_{k+1}^{(n)})(S_k-S). \qquad (315)$$

Возьмём $\varepsilon>0$ и пусть m таково, что при $k>m$

$$|S_k-S|<\varepsilon.$$

Если $n>m$, то из (314) и (315) вытекает, что

$$|Q_n-\rho_0^{(n)}S|\leqslant\sum_{k=0}^{m}(\rho_k^{(n)}-\rho_{k+1}^{(n)})|S_k-S|+\varepsilon\rho_{m+1}^{(n)}.$$

В силу (302) имеем (m фиксировано!)

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{m}(\rho_k^{(n)}-\rho_{k+1}^{(n)})|S_k-S|=0.$$

Значит, для $n>n_1$

$$\sum_{k=0}^{m}(\rho_k^{(n)}-\rho_{k+1}^{(n)})|S_k-S|<\varepsilon.$$

С другой стороны, опять-таки благодаря (302) при $n>n_2$ будет $\rho_{m+1}^{(n)}<2$. Поэтому, если $n>\max(m, n_1, n_2)$, то

$$|Q_n-\rho_0^{(n)}S|<3\varepsilon.$$

Это показывает, что

$$\lim_{n\to\infty}(Q_n - \rho_0^{(n)} S) = 0,$$

откуда, снова применяя (302), мы находим

$$\lim_{n\to\infty} Q_n = S.$$

Теорема доказана.

Нетрудно видеть, что, в силу теоремы 2, каждый из методов суммирования с помощью множителей

$$\rho_k^{(n)} = 1 - \frac{k}{n}, \quad \rho_k^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-k)!\,(n+k)!}, \quad \rho_k^{(n)} = \cos\frac{k\pi}{2n+1}$$

оказывается перманентным. Для первого и третьего это тривиально, а для второго вытекает из неравенства

$$\frac{\rho_{k+1}^{(n)}}{\rho_k^{(n)}} = \frac{n-k}{n+k+1} < 1.$$

ЧАСТЬ ВТОРАЯ

КВАДРАТИЧЕСКИЕ ПРИБЛИЖЕНИЯ

ГЛАВА I.

ПРОСТРАНСТВО $L_{p(x)}^2$.

§ 1. Постановка вопроса.

В этой части нашего курса, так же как и в предыдущей, мы будем заниматься, главным образом, вопросами приближения произвольных функций полиномами. Однако оценку точности приближения функции $f(x)$ полиномом $P(x)$ мы будем производить иначе, чем раньше.

Именно, раньше мы считали, что полином $P(x)$ близок к функции $f(x)$, заданной и непрерывной на сегменте $[a, b]$, если мала величина

$$\max_{a \leq x \leq b} |P(x) - f(x)|. \tag{1}$$

Теперь же мы скажем, что полином $P(x)$ близок к функции $f(x)$, если мал интеграл *)

$$\int_a^b [P(x) - f(x)]^2 \, dx. \tag{2}$$

Следует указать, что требование непрерывности функции $f(x)$ при оценке точности приближения с помощью выражения (1) лежит в самом существе дела. Действительно, если при таком методе оценки приближения функция $f(x)$ представима полиномами с *любой* степенью точности, то это означает, что $f(x)$ есть предел

---

*) Оценку близости $P(x)$ к $f(x)$ мы будем обычно производить с помощью интегралов несколько более общего вида, чем (2), но сейчас, чтобы не усложнять дела, остановимся на критерии, указанном в тексте.

равномерно сходящейся последовательности полиномов, а это возможно *только* в том случае, когда $f(x)$ непрерывна.

При оценке приближения интегралом (2) дело обстоит не так. Пусть, например, функция $f(x)$ задана на $[-1, +1]$ следующим образом:

$$f(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } \quad 0 < x \leqslant 1. \end{cases}$$

Хотя функция $f(x)$ и разрывна, но существуют такие полиномы $P(x)$, для которых интеграл

$$\int_{-1}^{+1} [P(x) - f(x)]^2 \, dx$$

сколь угодно мал.

Действительно, введём функцию $\varphi(x)$, полагая

$$\varphi(x) = \begin{cases} 0 \text{ при } \quad -1 \leqslant x \leqslant 0, \\ 1 \text{ при } \quad \frac{1}{n} \leqslant x \leqslant 1 \end{cases}$$

и считая $\varphi(x)$ линейной в сегменте $\left[0, \frac{1}{n}\right]$. Легко видеть, что $\varphi(x)$ непрерывна на $[-1, +1]$ и что

$$\int_{-1}^{+1} [\varphi(x) - f(x)]^2 \, dx = \int_{0}^{1/n} [\varphi(x) - f(x)]^2 \, dx < \frac{1}{n},$$

ибо $|\varphi(x) - f(x)| \leqslant 1$. Опираясь на теорему Вейерштрасса, можно подобрать такой полином $P(x)$, что при всех x из $[-1, +1]$

$$|P(x) - \varphi(x)| < \frac{1}{\sqrt{2n}};$$

Для этого полинома, очевидно, окажется

$$\int_{-1}^{+1} [P(x) - \varphi(x)]^2 \, dx < \frac{1}{n}.$$

Так как

$$(a+b)^2 \leqslant 2(a^2+b^2),$$

то

$$[P(x)-f(x)]^2 \leqslant 2\{[P(x)-\varphi(x)]^2+[\varphi(x)-f(x)]^2\},$$

и потому

$$\int_{-1}^{+1}[P(x)-f(x)]^2\,dx < \frac{4}{n},$$

откуда и вытекает наше утверждение, ибо n можно взять сколь угодно большим.

Таким образом при нашей новой точке зрения требование непрерывности приближаемых функций является излишним. Мы этого требования ставить не будем, а введём в рассмотрение и функции разрывные. Однако эти функции не могут всё же быть вполне произвольными, ибо мы должны быть уверены в существовании интеграла (2). Если бы мы положили в основу римановское определение интеграла, то это позволило бы нам изучать только такие разрывные функции, множество точек разрыва которых имеет меру, равную нулю. Это требование, однако, тоже было бы вызвано не сущностью излагаемой теории, а принятым определением интеграла. Чтобы изложение приняло более стройную и законченную форму, мы положим в основу не риманово, а лебегово определение интеграла. Это потребует от читателя знакомства с основными фактами теории функций вещественной переменной. В дальнейшем эти факты считаются известными.

§ 2. Весовая функция. Пространство $L^2_{p(x)}$.

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана неотрицательная и суммируемая функция $p(x)$. Ввиду особой роли, которую этой функции предназначено играть в дальнейшем, мы будем называть её *весовой функцией* или, короче, *весом*. Раз навсегда условимся рассматривать только такие веса $p(x)$, которые обращаются в нуль разве лишь на множестве меры, равной нулю. Впредь мы уже не будем упоминать об этом соглашении.

Каждой весовой функции $p(x)$ соответствуют два класса измеримых функций, заданных на $[a, b]$: класс $L_{p(x)}$ таких функций, для которых суммируемо произведение $p(x)\,f(x)$, и класс $L^2_{p(x)}$ функций $f(x)$, для которых суммируемо произведение $p(x)\,f^2(x)$. В случае, когда $p(x)=1$, мы будем эти классы обозначать просто через L и L^2. Иногда нам потребуется, чтобы в самом обозначении этих классов было указано, на каком именно сегменте заданы все рассматриваемые функции. Тогда мы будем обозначать их соответственно через $L_{p(x)}([a, b])$, $L^2_{p(x)}([a, b])$, $L([a, b])$ и $L^2([a, b])$.

Из неравенства

$$|f(x)| \leqslant \frac{1+f^2(x)}{2}$$

вытекает, что $L^2_{p(x)}$ содержится в $L_{p(x)}$.

Точно так же неравенство

$$|f(x)\,g(x)| \leqslant \frac{f^2(x)+g^2(x)}{2}$$

показывает, что произведение двух функций из $L^2_{p(x)}$ входит в $L_{p(x)}$. Отсюда в свою очередь благодаря тождеству

$$(f \pm g)^2 = f^2 \pm 2fg + g^2$$

следует, что сумма и разность двух функций класса $L^2_{p(x)}$ также входят в этот класс. Наконец, существенно, что вместе с $f(x)$ в $L^2_{p(x)}$ входят и все функции $cf(x)$, где c — постоянная.

Теорема 1. *Если $f(x)$ и $g(x)$ — две функции из $L^2_{p(x)}$, то справедливы неравенства*

$$\left[\int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left[\int_a^b p(x)\,f^2(x)\,dx\right]\left[\int_a^b p(x)\,g^2(x)\,dx\right] \qquad (3)$$

и

$$\sqrt{\int_a^b p(x)\,[f(x)+g(x)]^2\,dx} \leqslant$$

$$\leqslant \sqrt{\int_a^b p(x)\,f^2(x)\,dx} + \sqrt{\int_a^b p(x)\,g^2(x)\,dx}, \quad (4)$$

называемые соответственно неравенствами Буняковского и Коши.

Для доказательства неравенства (3) положим

$$\psi(z) = \int_a^b p(x)\,[zf(x)+g(x)]^2\,dx = Az^2 + 2Bz + C,$$

где

$$A = \int_a^b p(x)\,f^2(x)\,dx, \quad B = \int_a^b p(x)\,f(x)\,g(x)\,dx,$$

$$C = \int_a^b p(x)\,g^2(x)\,dx.$$

Если $A=0$, то $f(x)=0$ (как обычно в метрической теории функций, мы не различаем функций, отличающихся на множестве меры, равной нулю) и неравенство (3) обращается в равенство $0=0$. Если же $A>0$, то (3) вытекает из того, что $\psi(z)\geqslant 0$ и

$$\psi\left(-\frac{B}{A}\right) = \frac{AC-B^2}{A};$$

Итак, (3) доказано. Записывая (3) в форме

$$\int_a^b pfg\,dx \leqslant \sqrt{\int_a^b pf^2\,dx}\,\sqrt{\int_a^b pg^2\,dx},$$

удваивая и прибавляя к обеим частям по

$$\int_a^b pf^2\,dx + \int_a^b pg^2\,dx,$$

приходим к неравенству

$$\int_a^b p(f+g)^2\,dx \leqslant \left[\sqrt{\int_a^b pf^2\,dx}+\sqrt{\int_a^b pg^2\,dx}\right]^2,$$

равносильному (4).

Отнесём каждой функции $f(x)$ из $L^2_{p(x)}$ число

$$\|f\|=\sqrt{\int_a^b p(x)f^2(x)\,dx}.$$

Эта величина, называемая *нормой* функции $f(x)$, обладает следующими свойствами, сходными со свойствами модуля числа:

I. $\|f\|\geqslant 0$, *причём* $\|f\|=0$, *тогда и только тогда, когда* $f(x)=0$;

II. $\|cf\|=|c|\cdot\|f\|$ *и, в частности,* $\|-f\|=\|f\|$.

III. $\|f+g\|\leqslant\|f\|+\|g\|$.

Понятие нормы позволяет ввести удобную геометрическую терминологию.

Пусть E есть множество элементов $x, y, z, \ldots$ любой природы. Если каждой паре элементов x и y множества E поставлено в соответствие вещественное число $r(x, y)$ со свойствами:

1) $r(x, y)\geqslant 0$, *причём* $r(x, y)=0$, *тогда и только тогда, когда* $x=y$,

2) $r(x, y)=r(y, x)$,

3) $r(x, z)\leqslant r(x, y)+r(y, z)$,

то множество E называется *метрическим пространством*, а $r(x, y)$ *расстоянием* между x и y.

Полагая для любых двух функций $f(x)$ и $g(x)$ из $L^2_{p(x)}$

$$r(f, g)=\|f-g\|,$$

мы превращаем $L^2_{p(x)}$ в метрическое пространство.

§ 3. Сходимость в среднем.

Определение 1. Элемент f пространства $L^2_{p(x)}$ называется *пределом* последовательности элементов $f_1, f_2, f_3, \ldots, f_n, \ldots$ того же пространства, если

$$\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0.$$

Это соотношение мы будем записывать обычным образом:

$$\lim_{n\to\infty} f_n = f, \quad f_n \to f,$$

хотя его теоретико-функциональный смысл таков:

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x)\,[f_n(x) - f(x)]^2\,dx = 0.$$

Такой вид сходимости называется *сходимостью в среднем с весом* $p(x)$.

Теорема 1. *Последовательность элементов* $L^2_{p(x)}$ *не может иметь двух различных пределов.*

Действительно, если бы оказалось, что $f_n \to f$ и $f_n \to g$, то предельный переход в неравенстве

$$0 \leqslant \|f - g\| \leqslant \|f - f_n\| + \|f_n - g\|$$

привёл бы к соотношению $\|f - g\| = 0$, откуда $f = g$.

Теорема 2. *Если последовательность функций* $\{f_n(x)\}$ *сходится в среднем к функции* $f(x)$, *то из неё выделяется подпоследовательность* $\{f_{n_k}(x)\}$, *сходящаяся к* $f(x)$ *почти везде.*

Доказательство этой теоремы основано на следующем важном предложении теории функций:

Теорема Б. Леви. *Если на* $[a, b]$ *дан ряд неотрицательных измеримых функций*

$$u_1(x), u_2(x), u_3(x), \ldots$$

и если

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b u_k(x)\,dx < +\infty,$$

*то**) *почти везде на* $[a, b]$

$$\lim_{n\to\infty} u_n(x) = 0.$$

Переходя к доказательству теоремы 2, подбираем такие $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, что

$$\int_a^b p(x)\,[f_{n_k}(x) - f(x)]^2\,dx < \frac{1}{k!}.$$

Тогда по теореме Б. Леви почти везде на $[a, b]$

$$\lim_{k\to\infty} p(x)[f_{n_k}(x) - f(x)]^2 = 0,$$

а так как $p(x)$ почти везде строго положительна, то теорема доказана.

Теорема 3. *Если* $f_n \to f$, *то* $\|f_n\| \to \|f\|$.

Так как

$$\|f\| \leqslant \|f_n\| + \|f - f_n\|, \quad \|f_n\| \leqslant \|f\| + \|f_n - f\|,$$

то

$$\big|\|f_n\| - \|f\|\big| \leqslant \|f_n - f\|.$$

Остальное ясно.

Определение 2. Последовательность $\{f_n\} \subset L^2_{p(x)}$ называется *сходящейся в себе*, если всякому $\varepsilon > 0$ отвечает такое N, что при $n > N$ и $m > N$

$$\|f_n - f_m\| < \varepsilon. \tag{5}$$

Теорема 4. *Последовательность, имеющая предел, сходится в себе.*

Действительно, если $f_n \to f$, то по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такое N, что при $n > N$

$$\|f_n - f\| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Если взять $n > N$ и $m > N$, то окажется

$$\|f_n - f_m\| \leqslant \|f_n - f\| + \|f - f_m\| < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon;$$

---

*) У Б. Леви теорема высказана в более общем виде. См. И. П. Натансон [5], стр. 127.

Справедлива и обратная

Теорема 5 (Э. Фишер [1]). *Если последовательность сходится в себе, то она имеет предел.*

Свойство пространства $L^2_{p(x)}$, выражаемое этой теоремой, называется его *полнотой*.

Для доказательства подбираем такие n_k, что при $n \geqslant n_k$ и $m \geqslant n_k$

$$\| f_n - f_m \| < \frac{1}{k!}.$$

При этом можно считать, что $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ Тогда, в частности,

$$\| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \| < \frac{1}{k!}$$

и сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \| f_{n_{k+1}} - f_{n_k} \|.$$

Если применить неравенство (3) к функциям

$$f = | f_{n_{k+1}} - f_{n_k} | \text{ и } g = 1,$$

то окажется

$$\int_a^b p(x) \, | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) | \, dx \leqslant \sqrt{\int_a^b p(x) \, dx} \, \| f_{n_{k+1}} - f_{n_{k+1}} \|.$$

Стало быть, ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} \int_a^b p(x) \, | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) | \, dx$$

также сходящийся, и по цитированной теореме Б. Леви почти везде сходится ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} p(x) \, | f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) |,$$

а значит, и ряд

$$f_{n_1}(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \{ f_{n_{k+1}}(x) - f_{n_k}(x) \}.$$

Сходимость этого последнего ряда равносильна наличию конечного предела

$$\lim_{k\to\infty} f_{n_k}(x).$$

Введём функцию $f(x)$, равную этому пределу всюду, где он существует и конечен, и равную нулю в остальных точках.

Мы покажем, что эта функция входит в $L^2_{p(x)}$ и что она является пределом для $f_n(x)$. С этой целью, взяв $\varepsilon > 0$, найдём такое N, что при $n > N$ и $m > N$ будет выполнено (5). Затем закрепим $n > N$. При всех достаточно бо́льших k будет $n_k > N$ и, стало быть,

$$\| f_n - f_{n_k} \| < \varepsilon.$$

Воспользуемся следующей теоремой *) теории функций:

Теорема П. Фату. *Если $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x)$, ...—последовательность неотрицательных измеримых функций, заданных на $[a, b]$, почти всюду сходящаяся к функции $\psi(x)$, и если при всех k*

$$\int_a^b \varphi_k(x)\,dx \leqslant A,$$

то и

$$\int_a^b \psi(x)\,dx \leqslant A.$$

В нашем случае роль $\varphi_k(x)$ играют функции $p(x)[f_n(x) - f_{n_k}(x)]^2$ (n закреплено!), роль $\psi(x)$—функция $p(x)[f_n(x) - f(x)]^2$, роль A—величина ε^2.

Значит,

$$\int_a^b p(x)[f_n(x) - f(x)]^2\,dx \leqslant \varepsilon^2. \tag{6}$$

Отсюда уже вытекает, что разность $f_n(x) - f(x)$, а с ней и сама функция $f(x)$, входит в $L^2_{p(x)}$. Так как,

*) См., например, И. П. Натансон [5], стр. 125.

кроме того, для достижения неравенства (6) потребовалось лишь, чтобы было $n > N$, то теорема доказана.

Кроме сходимости в среднем нам придётся иметь дело ещё с так называемой «слабой сходимостью». Последовательность $\{f_n(x)\} \subset L^2_{p(x)}$ называется *слабо сходящейся* к функции $f(x)$ из $L_{p(x)}$, если для *любой* функции $g(x) \in L_{p(x)}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x) f_n(x) g(x)\, dx = \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx.$$

В силу неравенства Буняковского,

$$\left| \int_a^b p f_n g\, dx - \int_a^b p f g\, dx \right| \leqslant \sqrt{\int_a^b p g^2\, dx} \sqrt{\int_a^b p (f_n - f)^2\, dx},$$

а потому из сходимости некоторой последовательности в среднем вытекает её слабая сходимость (к той же предельной функции).

§ 4. Функциональные классы, плотные в $L^2_{p(x)}$

Пусть E метрическое пространство и A — некоторое его подмножество. Если любой элемент E можно представить как предел последовательности элементов множества A, то говорят, что A есть множество, *всюду плотное* в E. Очевидно, для того, чтобы A было всюду плотным в E, необходимо и достаточно, чтобы для любого $f \in E$ и любого $\varepsilon > 0$ существовал такой элемент $g \in A$, что

$$r(f, g) < \varepsilon.$$

Ввиду того что весовую функцию $p(x)$ мы с самого начала предположили суммируемой, ясно, что в класс $L^2_{p(x)}$ входят все измеримые ограниченные функции. Тем более, в него входят все непрерывные функции, а также все ступенчатые функции *).

---

*) Функция $f(x)$, заданная на $[a, b]$, называется *ступенчатой*, если существует конечное число точек: $a = c_1 < c_2 < \cdots < c_s = b$ такого рода, что на интервалах (c_i, c_{i+1}) функция постоянна.

Условимся в следующих обозначениях: M — класс всех измеримых ограниченных функций, C — класс всех непрерывных функций, S — класс всех ступенчатых функций (естественно, что имеются в виду функции, заданные на рассматриваемом сегменте $[a, b]$), P — класс всех полиномов, T — класс всех тригонометрических полиномов.

Теорема. *Каждый из классов M, C, S, P всюду плотен в $L^2_{p(x)}$. Если основной сегмент $[a, b]$, имеет длину 2π, то всюду плотен и класс T.*

Доказательство. 1) Пусть $f(x) \in L^2_{p(x)}$. Возьмём $\varepsilon > 0$ и подберём такое $\delta > 0$, что для любого измеримого множества e, содержащегося в $[a, b]$, с мерой $me < \delta$ будет выполнено неравенство

$$\int_e p(x) f^2(x)\, dx < \varepsilon^2.$$

Подбор такого δ возможен благодаря свойству абсолютной непрерывности интеграла.

Ввиду того что функция $f(x)$ почти везде конечна (иначе она не могла бы входить в $L^2_{p(x)}$), мы имеем

$$m \prod_{n=1}^{\infty} E(|f| > n) = 0. \tag{7}$$

С другой стороны,

$$E(|f| > 1) \supset E(|f| > 2) \supset \cdots \tag{8}$$

Как известно, из (7) и (8) вытекает

$$\lim_{n\to\infty} mE(|f| > n) = 0.$$

Значит, можно указать такое n, что

$$mE(|f| > n) < \delta.$$

Закрепим это n и положим

$$g(x) = \begin{cases} f(x), & \text{если } |f(x)| \leqslant n, \\ 0, & \text{если } |f(x)| > n. \end{cases}$$

Очевидно, $g(x) \in M$ и

$$\|f-g\|^2 = \int_a^b p(f-g)^2\,dx = \int_{E(f \neq g)} p(f-g)^2\,dx =$$
$$= \int_{E(|f|>n)} pf^2\,dx < \varepsilon^2.$$

Итак, для M теорема доказана.

2) Пусть $f(x) \in L^2_{p(x)}$ и $\varepsilon > 0$. Находим такую $g(x)$ из M, что $\|f-g\| < \frac{\varepsilon}{2}$. Пусть $|g(x)| \leqslant K$. По известной теореме Н. Н. Лузина существует такая непрерывная функция $\varphi_\delta(x)$, что

$$mE(g \neq \varphi_\delta) < \delta, \quad |\varphi_\delta(x)| \leqslant K,$$

где δ – любое наперёд заданное положительное число. Для этой функции оказывается

$$\|g-\varphi_\delta\|^2 = \int_{E(g \neq \varphi_\delta)} p(g-\varphi_\delta)^2\,dx \leqslant 4K^2 \int_{E(g \neq \varphi_\delta)} p(x)\,dx.$$

Но благодаря абсолютной непрерывности интеграла число δ можно считать столь малым, что правая часть последнего неравенства меньше $\frac{\varepsilon^2}{4}$. Таким образом для найденной $\varphi_\delta(x)$ окажется

$$\|f-\varphi_\delta\| \leqslant \|f-g\| + \|g-\varphi_\delta\| < \varepsilon.$$

Теорема доказана для класса C.

3) Пусть $f(x) \in L^2_{p(x)}$ и $\varepsilon > 0$. Находим непрерывную функцию $\varphi(x)$, удовлетворяющую условию $\|f-\varphi\| < \frac{\varepsilon}{2}$.

По теореме Кантора сегмент $[a, b]$ можно разложить точками $c_0 = a < c_1 < \cdots < c_n = b$ на такие части $[c_i, c_{i+1}]$, что в каждой из них колебание $\varphi(x)$ будет меньше некоторого наперёд взятого числа $\delta > 0$. Введём функцию $h(x)$, полагая $h(b) = \varphi(b)$, и $h(x) = \varphi(c_i)$ при $c_i \leqslant x < c_{i+1}$ $(i = 0, 1, \ldots, n-1)$. Это—ступенчатая функция, обладающая тем свойством, что при всех x из $[a, b]$ будет выполнено неравенство

$$|h(x) - \varphi(x)| < \delta.$$

В таком случае

$$\|h-\varphi\|^2=\int_a^b p(x)\,[h(x)-\varphi(x)]^2\,dx\leqslant\delta^2\int_a^b p(x)\,dx.$$

Если δ достаточно мало, то правая часть этого неравенства меньше, чем $\frac{\varepsilon^2}{4}$ и $\|f-h\|<\varepsilon$. Теорема доказана для класса S.

4) Для класса P теорема доказывается совершенно аналогично, ибо по первой теореме Вейерштрасса любому $\delta>0$ соответствует полином $P(x)$, удовлетворяющий неравенству

$$|P(x)-\varphi(x)|<\delta.$$

5) Наконец, если $b-a=2\pi$, то мы сначала строим непрерывную $\varphi(x)$, удовлетворяющую условию $\|f-\varphi\|<\frac{\varepsilon}{2}$, а затем вводим новую непрерывную функцию $\psi(x)$, полагая

$$\psi(x)=\varphi(x)\quad\text{на}\quad[a,b-\delta],\qquad\psi(b)=\varphi(a)$$

и считая $\psi(x)$ линейной на $[b-\delta,b]$. При этом δ обозначает некоторое положительное число, выбор которого мы уточним ниже. Если K есть $\max|\varphi(x)|$, то и $|\psi(x)|\leqslant K$. Поэтому

$$\|\varphi-\psi\|^2=\int_{-\delta}^{b} p\,(\varphi-\psi)^2\,dx\leqslant 4K^2\int_{b-\delta}^{b} p(x)\,dx.$$

Будем считать δ столь малым, что правая часть этого неравенства меньше, чем $\frac{\varepsilon^2}{16}$. Тогда

$$\|f-\psi\|<\frac{3}{4}\varepsilon.$$

Вместе с тем $\psi(x)$ уже 2π-периодична, так как $\psi(a)=\psi(b)$. Поэтому (вторая теорема Вейерштрасса!) её можно равномерно приблизить с любой степенью точности тригонометрическим полиномом, что позволяет закончить доказательство так же, как и выше.

ГЛАВА II.

ОРТОГОНАЛЬНЫЕ СИСТЕМЫ.

§ 1. Ортогональность. Примеры.

Пусть $p(x)$ — весовая функция, заданная на сегменте $[a, b]$. Если функции $f(x)$ и $g(x)$ удовлетворяют соотношению

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) \, dx = 0,$$

то говорят, что они *взаимно ортогональны по весу* $p(x)$ *на сегменте* $[a, b]$. Если $p(x) \equiv 1$, то указание на вес опускается и говорят просто, что $f(x)$ и $g(x)$ *взаимно ортогональны на сегменте* $[a, b]$.

Если (конечная или бесконечная) система функций

$$\omega_1(x), \ \omega_2(x), \ \omega_3(x), \ldots \qquad (a \leqslant x \leqslant b) \tag{9}$$

такова, что любые две из них взаимно ортогональны на $[a, b]$ по весу $p(x)$, то эта система называется *ортогональной системой веса* $p(x)$. Если $p(x) \equiv 1$, то о весе не упоминают.

Примерами могут служить тригонометрическая система

$$1, \ \cos x, \ \sin x, \ \cos 2x, \ \sin 2x, \ \cos 3x, \ \ldots, \tag{10}$$

ортогональная на сегменте $[-\pi, \pi]$, а также система полиномов Чебышева

$$T_0(x), \ T_1(x), \ T_2(x), \ \ldots \tag{11}$$
$$(T_n(x) = \cos(n \arccos x)),$$

ортогональная на сегменте $[-1, +1]$ по весу $(1-x^2)^{-1/2}$.

Впредь мы ограничимся рассмотрением только таких ортогональных систем, в которых ни одна из функций $\omega_k(x)$ не эквивалентна нулю и все они входят в класс $L^2_{p(x)}$. Поэтому все интегралы

$$A_k = \int_a^b p(x)\,\omega_k^2(x)\,dx \tag{12}$$

суть конечные положительные числа, $0 < A_k < +\infty$.

Особенно удобны те ортогональные системы, у которых при всех k оказывается $A_k = 1$. Такие системы называются *ортогональными-нормированными* или короче, *ортонормальными* системами.

Легко видеть, что если (9) есть ортогональная система, то система

$$\frac{\omega_1(x)}{\sqrt{A_1}},\quad \frac{\omega_2(x)}{\sqrt{A_2}},\quad \frac{\omega_3(x)}{\sqrt{A_3}},\quad \ldots, \tag{13}$$

будет уже ортонормальной. Переход от (9) к (13) называется *нормированием* функций системы.

Приведём некоторые примеры ортогональных систем, отличных от уже упомянутых систем (10) и (11).

1°. Каждая из систем

$$1,\ \cos x,\ \cos 2x,\ \cos 3x,\ \ldots, \tag{14}$$

$$\sin x,\ \sin 2x,\ \sin 3x,\ \ldots \tag{15}$$

ортогональна на $[0, \pi]$.

2°. Системы Штурма — Лиувилля. Рассмотрим дифференциальное уравнение

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda\, p(x)\, y = 0, \tag{16}$$

в котором $p(x) > 0$ есть непрерывная функция, заданная на сегменте $[a, b]$, а λ — числовой параметр.

Нас будут интересовать такие непрерывные решения этого уравнения $y = y(x)$, которые удовлетворяют *граничным условиям*

$$y(a) = y(b) = 0. \tag{17}$$

Таким решением является, например, тривиальное решение $y \equiv 0$. Если же такое решение $y(x)$ не равно тождественно нулю, то оно называется *фундаментальной функцией* нашей задачи. Фундаментальная функция существует не при всяком значении параметра λ. Поэтому целесообразно выделить те значения λ, для которых существуют фундаментальные функции, и дать им специальное название. Их принято называть *характеристическими числами* задачи.

В теории дифференциальных уравнений доказывается, что характеристические числа всегда существуют и что (с точностью до постоянного множителя) каждому из них отвечает только одна фундаментальная функция.

Выпишем се характеристические числа задачи, подписав под ми соответствующие фундаментальные функции

λ_1	λ_2	λ_3	...
$y_1(x)$	$y_2(x)$	$y_3(x)$	...

$(\lambda_i \neq \lambda_k)$.

Теорема 1. *Система фундаментальных функций*

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), \ldots \tag{18}$$

ортогональна на сегменте $[a,b]$ *по весу* $p(x)$.

Доказательство. Пусть $i \neq k$. Тогда

$$\frac{d^2y_i}{dx^2} + \lambda_i p(x)\, y_i = 0, \qquad \frac{d^2y_k}{dx^2} + \lambda_k p(x)\, y_k = 0.$$

Умножим первое из этих тождеств на y_k, второе на y_i и вычтем второе из первого. Если заметить, что

$$y_k y_i'' - y_i y_k'' = \frac{d}{dx}(y_k y_i' - y_i y_k'),$$

то мы получим

$$\frac{d}{dx}(y_k y_i' - y_i y_k') + (\lambda_i - \lambda_k)\, p(x)\, y_i y_k = 0.$$

Отсюда

$$[y_k y_i' - y_i y_k']_a^b + (\lambda_i - \lambda_k)\int_a^b p(x)\, y_i(x)\, y_k(x)\, dx = 0.$$

Но так как обе функции $y_i(x)$ и $y_k(x)$ удовлетворяют условию (17), то

$$[y_k y_i' - y_i y_k']_a^b = 0$$

и, поскольку $\lambda_i \neq \lambda_k$,

$$\int_a^b p(x) y_i(x)\, y_k(x)\, dx = 0.$$

Теорема доказана.

Всякая система, подобная (18), называется *системой Штурма—Лиувилля*. Примером может служить система (15), отвечающая задаче

$$\frac{d^2y}{dx^2} + \lambda y = 0 \qquad (y(0) = y(\pi) = 0).$$

Характеристические числа этой задачи суть

$$\lambda_k = k^2 \qquad (k = 1, 2, 3, \ldots).$$

3°. Система Радемахера*). Разделим сегмент $[0, 1]$ на 2^k частей точками

$$0,\ \frac{1}{2^k},\ \frac{2}{2^k},\ \ldots,\ \frac{n}{2^k},\ \frac{n+1}{2^k},\ \ldots,\ \frac{2^k-1}{2^k},\ 1, \tag{19}$$

и введём функцию $r_k(x)$, полагая

$$r_k\left(\frac{n}{2^k}\right) = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots, 2^k),$$

$$r_k(x) = (-1)^n \text{ при } \frac{n}{2^k} < x < \frac{n+1}{2^k} \ (n = 0, 1, 2, \ldots, 2^k - 1).$$

Система функций

$$r_1(x),\ r_2(x),\ r_3(x),\ \ldots \tag{20}$$

называется *системой Радемахера*.

Теорема 2. *Система Радемахера ортонормальна на сегменте* $[0, 1]$.

Доказательство. Так как

$$r_k^2(x) = 1$$

*) Радемахер [1].

(кроме точек (19)), то

$$\int_0^1 r_k^2(x)\,dx = 1. \tag{21}$$

Пусть, далее, k и i, где $k < i$ — два натуральных числа. Тогда

$$\int_0^1 r_k(x)\,r_i(x)\,dx = \sum_{n=0}^{2^k-1} \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} r_k(x)\,r_i(x)\,dx =$$

$$= \sum_{n=0}^{2^k-1} (-1)^n \int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} r_i(x)\,dx.$$

Сегмент $\left[\frac{n}{2^k}, \frac{n+1}{2^k}\right]$ разбивается точками $\frac{m}{2^i}$ на *чётное* число частей:

$$\left[\frac{n\cdot 2^{i-k}}{2^i}, \frac{n\cdot 2^{i-k}+1}{2^i}\right],$$

$$\left[\frac{n\cdot 2^{i-k}+1}{2^i}, \frac{n\cdot 2^{i-k}+2}{2^i}\right], \ldots, \left[\frac{n\cdot 2^{i-k}+2^{i-k}-1}{2^i}, \frac{(n+1)\cdot 2^{i-k}}{2^i}\right],$$

внутри которых будет попеременно $r_i(x) = +1$ и $r_i(x) = -1$, и поэтому

$$\int_{\frac{n}{2^k}}^{\frac{n+1}{2^k}} r_i(x)\,dx = 0,$$

откуда и

$$\int_0^1 r_k(x)\,r_i(x)\,dx = 0. \tag{22}$$

Из (21) и (22) и следует теорема.

Если положить *)

$$\operatorname{sign} z = \begin{cases} +1 & \text{при} \quad z > 0, \\ 0 & \text{при} \quad z = 0, \\ -1 & \text{при} \quad z < 0, \end{cases}$$

то определение функции $r_k(x)$ можно записать формулой

$$r_k(x) = \operatorname{sign}\,[\sin(2^k \pi x)].$$

В самом деле, если $x = \frac{n}{2^k}$, то $\sin(2^k\pi x) = 0$, если же $\frac{n}{2^k} < x < \frac{n+1}{2^k}$, то $n\pi < 2^k\pi x < (n+1)\pi$ и $\sin(2^k\pi x)$ будет числом положительным при чётном n и отрицательным при нечётном.

§ 2. Коэффициенты Фурье.

Пусть на сегменте $[a, b]$ задана ортогональная по весу $p(x)$ система (9). Рассмотрим какую-нибудь конечную линейную комбинацию функций этой системы:

$$f(x) = c_1\omega_1(x) + c_2\omega_2(x) + \cdots + c_n\omega_n(x). \tag{23}$$

Умножив (23) на $p(x)\omega_k(x)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, проинтегрируем полученное равенство; это даёт, согласно (12),

$$\int_a^b p(x) f(x)\,\omega_k(x)\,dx = A_k c_k,$$

откуда

$$c_k = \frac{1}{A_k}\int_a^b p(x) f(x)\,\omega_k(x)\,dx. \tag{24}$$

Таким образом, коэффициенты c_k в равенстве (23) определяются однозначно.

В частном случае тригонометрической системы (10) формулы (24) превращаются в хорошо известные формулы для коэффициентов Фурье функции $f(x)$. Поэтому

*) Символ sign есть сокращение латинского слова «signum», обозначающего «знак».

и в общем случае числа (24) называются *коэффициентами Фурье функции $f(x)$ в системе* (9). Для их вычисления вовсе не обязательно, чтобы $f(x)$ была линейной комбинацией функций $\omega_k(x)$, а нужно лишь, чтобы имели смысл интегралы, входящие в (24). Как мы знаем, это во всяком случае имеет место, если $f(x) \in L^2_{p(x)}$.

Таким образом для любой $f(x)$ из $L^2_{p(x)}$ можно составить коэффициенты c_k и образовать ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x) \tag{25}$$

(предполагая систему (9) бесконечной). Этот ряд называется *рядом Фурье функции $f(x)$ в системе* (9). Само собой разумеется, что мы не утверждаем сходимости этого ряда; напротив, нам известен ещё из первой части пример непрерывной функции, у которой тригонометрический ряд Фурье не всюду сходится. Поэтому никаких оснований писать равенство

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x),$$

вообще говоря, нет. Чтобы отметить всё же связь ряда (25) с функцией $f(x)$, употребляется обычно знак соответствия

$$f(x) \sim \sum_{k=1}^{\infty} c_k \omega_k(x).$$

Рассмотрим одну проблему, которая позволит нам подойти к понятию коэффициентов Фурье с новой точки зрения.

Для этого мы снова возьмём систему (9) и поставим вопрос о подборе таких коэффициентов $a_1, a_2, \ldots, a_n$, чтобы линейная комбинация

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k(x) \tag{26}$$

(подчеркнём, что число n закреплено) представляла бы некоторую функцию $f(x)$ из $L^2_{p(x)}$ с наименьшей средней квадратической погрешностью, т. е. чтобы интеграл

$$\|U-f\|^2=\int_a^b p(x)\,[U(x)-f(x)]^2\,dx \tag{27}$$

принял наименьшее возможное значение.

Оказывается, что этот вопрос решается весьма просто. Действительно, замечая, что

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,U(x)\,dx=$$

$$=\sum_{k=1}^n a_k\int_a^b p(x)\,f(x)\,\omega_k(x)\,dx=\sum_{k=1}^n A_k a_k c_k,$$

где c_k — коэффициенты Фурье функции $f(x)$, и что, с другой стороны, в силу ортогональности системы (9)

$$\int_a^b p(x)\,U^2(x)\,dx=\sum_{k=1}^n A_k a_k^2,$$

получаем

$$\|U-f\|^2=\int_a^b p(x)\,f^2(x)\,dx-2\sum_{k=1}^n A_k a_k c_k+\sum_{k=1}^n A_k a_k^2,$$

откуда

$$\|U-f\|^2=\int_a^b p(x)\,f^2(x)\,dx-\sum_{k=1}^n A_k c_k^2+\sum_{k=1}^n A_k(a_k-c_k)^2.$$

В правой части этого равенства от коэффициентов a_k зависит лишь сумма

$$\sum_{k=1}^n A_k(a_k-c_k)^2.$$

Она принимает своё наименьшее возможное значение (равное нулю) тогда и только тогда, когда

$$a_k = c_k \qquad (k = 1, 2, \ldots, n),$$

т. е. когда за искомые коэффициенты берутся коэффициенты Фурье функции $f(x)$.

Таким образом, доказана

Теорема 1 (А. Теплер [1]). *Из всех линейных комбинаций*

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k(x)$$

наименьшее возможное значение интегралу

$$\|U - f\|^2 = \int_a^b p(x)[U(x) - f(x)]^2 dx$$

доставляет отрезок ряда Фурье функции $f(x)$:

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x),$$

причём это наименьшее значение равно

$$\|S_n - f\|^2 = \int_a^b p(x) f^2(x) dx - \sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2. \tag{28}$$

Так как $\|S_n - f\|^2 \geqslant 0$, то из (28) следует *неравенство Бесселя*

$$\sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2 \leqslant \int_a^b p(x) f^2(x) dx.$$

Благодаря произвольности числа n (мы считаем систему (9) бесконечной) ряд

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2$$

сходится, и справедливо неравенство

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \leqslant \int_a^b p(x) f^2(x)\, dx,$$

также называемое неравенством Бесселя.

Если, в частности, окажется, что

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_a^b p(x) f^2(x)\, dx, \tag{29}$$

то это равенство называют *равенством Парсеваля*. Из (28) ясно, что равенство Парсеваля совершенно равносильно соотношению

$$\lim_{n\to\infty} \| S_n - f \| = 0. \tag{30}$$

Теорема 2. *Если $f(x)$ есть конечная линейная комбинация функций системы, то для неё выполняется равенство Парсеваля.*

В самом деле, мы уже видели, что в равенстве

$$f(x) = c_1\omega_1(x) + \ldots + c_n\omega_n(x) \tag{31}$$

коэффициенты c_k необходимо должны быть коэффициентами Фурье функции $f(x)$. Поэтому, умножая (31) на $p(x)\,f(x)$ и интегрируя, сразу приходим к равенству Парсеваля

$$\int_a^b p(x) f^2(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k c_k^2.$$

Можно доказать эту теорему и иначе, если заметить, что при $f(x) = \omega_k(x)$ равенство Парсеваля заведомо выполняется (ибо превращается в самое определение чисел A_k), и установить следующее предложение:

Теорема 3. *Если равенство Парсеваля выполняется для функций*

$$f_1(x),\ f_2(x),\ \ldots,\ f_m(x),$$

то оно выполняется и для их линейной комбинации

$$f(x)=\sum_{i=1}^{m} a_i f_i(x). \tag{32}$$

Доказательство. Будем обозначать n-й отрезок ряда Фурье функции $f(x)$

$$\sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x) \tag{33}$$

через $S_n[f]$; это обозначение подчёркивает зависимость отрезка (33) от функции $f(x)$. Нетрудно видеть, что для функции (32)

$$S_n[f]=\sum_{i=1}^{m} a_i S_n[f_i].$$

Таким образом

$$f(x)-S_n[f]=\sum_{i=}^{m} a_i\{f_i(x)-S_n[f_i]\}$$

и, стало быть,

$$\|f-S_n[f]\| \leqslant \sum_{i=1}^{m} |a_i|\cdot\|f_i-S_n[f_i]\|.$$

Так как для каждой из функций $f_i(x)$ равенство Парсеваля по условию выполнено, то правая часть этого неравенства стремится к нулю с возрастанием n. Значит, имеет место соотношение (30), равносильное равенству Парсеваля (29) для функции $f(x)$.

Установим ещё следующее предложение:

Теорема 4. *Чтобы для функции $f(x)$ выполнялось равенство Парсеваля, необходимо и достаточно, чтобы её можно было приблизить (в смысле метрики пространства $L^2_{p(x)}$) линейными комбинациями функций* (9) *с любой степенью точности, т. е. чтобы для всякого*

$\varepsilon > 0$ *существовала линейная комбинация*

$$U(x) = \sum_{k=1}^{n} a_k \omega_k(x),$$

для которой

$$\| U - f \| < \varepsilon.$$

Необходимость условия теоремы очевидна, ибо за искомую функцию $U(x)$ можно взять n-ю сумму Фурье $S_n(x)$ функции $f(x)$ при достаточно большом n.

Допустим теперь, что для всякого $\varepsilon > 0$ существует требуемая функция $U(x)$. Ввиду того что по теореме Теплера будет выполнено неравенство

$$\| S_n - f \| \leqslant \| U - f \|,$$

то и подавно

$$\| S_n - f \| < \varepsilon.$$

Остальное ясно.

Поставим вопрос об условии, при котором заданная числовая последовательность $\{c_k\}$ является последовательностью коэффициентов Фурье какой-нибудь функции из $L^2_{p(x)}$. Ответ даёт следующая

Теорема 5 (Ф. Рисс [1] — Э. Фишер [1]). *Пусть на сегменте $[a, b]$ дана ортогональная система $\{\omega_k(x)\}$ веса $p(x)$. Если числа $c_1, c_2, c_3, \ldots$ таковы, что ряд*

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 \tag{34}$$

сходится, то в $L^2_{p(x)}$ существует одна и только одна функция $f(x)$, для которой:

1) *числа c_k суть коэффициенты Фурье в системе $\{\omega_k(x)\}$;*

2) *выполнено равенство Парсеваля.*

Доказательство. Положим

$$S_n(x) = \sum_{k=1}^{n} c_k \omega_k(x)$$

и убедимся, что последовательность $\{S_n\}$ сходится в себе. Для этого вычислим $\|S_m - S_n\|$. Если $m > n$, то

$$\|S_m - S_n\|^2 = \left\| \sum_{k=n+1}^{m} c_k \omega_k \right\|^2 =$$

$$= \int_a^b p(x) \left[\sum_{k=n+1}^{m} c_k \omega_k(x) \right]^2 dx = \sum_{k=n+1}^{m} A_k c_k^2.$$

В силу сходимости ряда (34), для всякого $\varepsilon > 0$ будет существовать такое N, что при $m > n > N$ окажется

$$\sum_{k=n+1}^{m} A_k c_k^2 < \varepsilon^2,$$

или, что то же самое, $\|S_m - S_n\| < \varepsilon$, а это и значит, что последовательность $\{S_n\}$ сходится в себе.

Но тогда благодаря полноте пространства $L^2_{p(x)}$ в этом пространстве имеется функция $f(x)$, для которой

$$\lim_{n\to\infty} \|S_n - f\| = 0. \tag{35}$$

Она является искомой.

В самом деле, из (35) вытекает, что последовательность $\{S_n(x)\}$ слабо сходится к $f(x)$, т. е. что для любой $g(x)$ из $L^2_{p(x)}$

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x) S_n(x) g(x)\, dx = \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx.$$

В частности, при $g(x) = \omega_i(x)$ имеем

$$\int_a^b p(x) f(x) \omega_i(x)\, dx = \lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x) S_n(x) \omega_i(x)\, dx,$$

а так как при $n \geqslant i$

$$\int_a^b p(x) S_n(x) \omega_i(x) dx =$$

$$= \int_a^b p(x) \left[\sum_{k=1}^n c_k \omega_k(x) \right] \omega_i(x) dx = A_i c_i,$$

то

$$c_i = \frac{1}{A_i} \int_a^b p(x) f(x) \omega_i(x) dx.$$

Таким образом числа c_k в самом деле служат коэффициентами Фурье для $f(x)$. Но в таком случае $S_n(x)$ есть сумма Фурье для этой функции, и равенство (35) означает, что для неё выполняется равенство Парсеваля.

Остаётся убедиться в единственности требуемой функции. Но если бы их было две, то по условию 1) они имели бы общий ряд Фурье, а так как выполнение равенства Парсеваля означает сходимость (в среднем) сумм Фурье к функции, то по условию 2) они обе должны были бы служить пределом для одной и той же последовательности $\{S_n\}$, откуда должно вытекать совпадение этих функций. Теорема доказана полностью.

§ 3. Полнота и замкнутость.

Определение 1. Ортогональная система называется *замкнутой*, если для любой функции из $L^2_{p(x)}$ имеет место равенство Парсеваля.

Из сказанного выше ясно, что замкнутость ортогональной системы означает, что класс всех линейных комбинаций функций системы всюду плотен в $L_{p(x)}$.

Теорема 1. *Если ортогональная система замкнута, то для любых двух функций* $f(x)$ *и* $g(x)$ *из* $L^2_{p(x)}$

$$\int_a^b p(x) f(x) g(x) dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k a_k b_k, \tag{36}$$

где a_k и b_k соответственно суть коэффициенты Фурье функций $f(x)$ и $g(x)$.

Действительно, для суммы $f(x)+g(x)$ коэффициентами Фурье служат числа a_k+b_k. Поэтому равенство Парсеваля для суммы $f(x)+g(x)$ имеет вид

$$\int_a^b p(f^2+2fg+g^2)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k(a_k^2+2a_kb_k+b_k^2). \qquad (37)$$

Но

$$\int_a^b pf^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k a_k^2, \quad \int_a^b pg^2\,dx = \sum_{k=1}^{\infty} A_k b_k^2.$$

Отсюда и из (37) и следует (36). Формула (36) есть *обобщённое равенство Парсеваля*; при $g(x)=f(x)$ эта формула обращается в обычное равенство Парсеваля.

Теорема 2 (В. А. Стеклов [1]). *Пусть A есть класс функций, всюду плотный в $L^2_{p(x)}$. Если равенство Парсеваля выполняется для всех функций, входящих в A, то рассматриваемая ортогональная система замкнута.*

В самом деле, какова бы ни была функция $f(x)$ из $L^2_{p(x)}$, в классе A можно найти функцию $g(x)$, для которой

$$\|f-g\| < \frac{\varepsilon}{2},$$

где $\varepsilon>0$ взято наперёд. Но для $g(x)$ равенство Парсеваля выполнено. Значит, найдётся линейная комбинация $U(x)$ функций $\omega_k(x)$, для которой $\|U-g\|<\frac{\varepsilon}{2}$. В таком случае

$$\|U-f\| < \varepsilon.$$

Таким образом функцию $f(x)$ можно с любой точностью приблизить линейными комбинациями функций системы, а это и означает, что и для $f(x)$ выполнено равенство Парсеваля.

Следствие 1. *Если равенство Парсеваля выполнено для любого полинома, то система $\{\omega_k(x)\}$ замкнута.*

Действительно, класс P всех полиномов всюду плотен в $L^2_{p(x)}$.

Следствие 2. *Тригонометрическая система* (10) *замкнута, если основной сегмент имеет длину* 2π.

Действительно, для любого тригонометрического полинома равенство Парсеваля выполнено потому, что он является линейной комбинацией функций (10), а класс таких полиномов всюду плотен в $L^2_{p(x)}$.

Определение 2. Система функций $\Phi=\{\varphi(x)\}$ $(a\leqslant x\leqslant b)$ называется *полной*, если в $L^2_{p(x)}$ нет функции (кроме тождественного нуля) ортогональной ко всем $\varphi(x)$ из Φ.

Теорема 3. *Ортогональная система полна тогда и только тогда, когда она замкнута**).

Действительно, если ортогональная система $\{\omega_k(x)\}$ веса $p(x)$ замкнута, а функция $f(x)$ ортогональна ко всем $\omega_k(x)$, то все коэффициенты Фурье функции $f(x)$ суть нули; $c_k=0$. Значит, равенство Парсеваля для $f(x)$ принимает вид

$$\int_a^b p(x)\,f^2(x)\,dx=0,$$

возможный лишь при условии, что $f(x)=0$. Поэтому замкнутость ортогональной системы влечёт её полноту.

Если же система $\{\omega_k(x)\}$ не замкнута, то в $L^2_{p(x)}$ имеется функция $g(x)$, для которой равенство Парсеваля не выполнено.

Если c_k суть её коэффициенты Фурье, то, в силу неравенства Бесселя,

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2<\int_a^b p(x)\,g^2(x)\,dx.$$

По теореме Рисса—Фишера в $L^2_{p(x)}$ существует функция $f(x)$, для которой числа c_k будут служить (так же,

*) Столь простое соотношение между замкнутостью и полнотой имеет место лишь для пространства $L^2_{p(x)}$; см. Г. М. Фихтенгольц [1].

как и для $g(x)$) коэффициентами Фурье, но для которой

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k^2 = \int_b^a p(x) f^2(x)\,dx.$$

Положим $f(x) - g(x) = r(x)$. Эта функция, не будучи тождественной нулю, оказывается всё же ортогональной ко всем функциям $\omega_k(x)$, так что система $\{\omega_k(x)\}$ не полна. Теорема доказана полностью.

Следствие. ***На сегменте длины*** 2π ***тригонометрическая система полна.***

ГЛАВА III.

ЛИНЕЙНО НЕЗАВИСИМЫЕ СИСТЕМЫ ФУНКЦИЙ.

§ 1. Линейная независимость. Определитель Грама. Теорема Шмидта.

Определение 1. Система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots$ $\ldots, \varphi_n(x)$, заданных на сегменте $[a, b]$, называется *линейно зависимой*, если существуют постоянные $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$, из которых хоть одна отлична от нуля, удовлетворяющие условию

$$\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x) \equiv 0 \tag{38}$$

(как всегда, функция, эквивалентная нулю, считается тождественной нулю). Если не существует таких постоянных, а из (38) вытекает, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \ldots = \alpha_n = 0,$$

то система функций называется *линейно независимой.*

Если в числе функций системы имеется функция, эквивалентная нулю, то система линейно зависима. Если некоторая часть системы сама образует линейно зависимую систему, то и вся система линейно зависима.

Примеры. 1°. *Всякая конечная ортогональная система веса $p(x)$ линейно независима.* Действительно, если $\{\omega_k(x)\}$ — такая система и

$$\alpha_1\omega_1(x) + \ldots + \alpha_n\omega_n(x) = 0,$$

то, умножая это равенство на $p(x)\,\omega_i(x)$ и интегрируя, находим, что $\alpha_i = 0$.

2°. *Если $n_1, n_2, \ldots, n_m$ — целые, попарно не равные, числа, то функции $x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_m}$ образуют систему, ли-*

нейно независимую на любом промежутке. Действительно, целый полином может иметь лишь конечное число корней.

Определение 2. Исчислимая система функций называется *линейно независимой*, если линейно независима всякая конечная часть этой системы.

Так, например, линейно независима система 1, x, x^2, x^3, ...

Условимся в следующем обозначении: если $f(x)$ и $g(x)$ — две функции из $L^2_{p(x)}$, то под (f, g) мы будем понимать интеграл

$$(f, g) = \int_a^b p(x) f(x) g(x)\, dx.$$

Определение 3. Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ суть функции, заданные на $[a, b]$ и входящие в $L^2_{p(x)}$. Определитель

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) \ldots (\varphi_1, \varphi_n) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) \ldots (\varphi_2, \varphi_n) \\ \cdots & \cdots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_2) \ldots (\varphi_n, \varphi_n) \end{vmatrix}$$

называется *определителем Грама* *) системы функций $\{\varphi_k(x)\}$.

Теорема 1. *Для того чтобы система функций была линейно зависимой, необходимо и достаточно, чтобы её определитель Грама равнялся нулю.*

Действительно, пусть система $\{\varphi_k(x)\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$ линейно зависима. Тогда найдётся система постоянных α_k, среди которых имеются отличные от нуля, удовлетворяющая условию (38). Умножая (38) последовательно на $p(x)\varphi_1(x)$, $p(x)\varphi_2(x)$, ..., $p(x)\varphi_n(x)$ и каждый раз интегрируя, получим n равенств:

$$\left.\begin{array}{l} \alpha_1(\varphi_1, \varphi_1) + \alpha_2(\varphi_1, \varphi_2) + \ldots + \alpha_n(\varphi_1, \varphi_n) = 0, \\ \alpha_1(\varphi_2, \varphi_1) + \alpha_2(\varphi_2, \varphi_2) + \ldots + \alpha_n(\varphi_2, \varphi_n) = 0, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ \alpha_1(\varphi_n, \varphi_1) + \alpha_2(\varphi_n, \varphi_2) + \ldots + \alpha_n(\varphi_n, \varphi_n) = 0. \end{array}\right\} \quad (39)$$

*) Грам [1].

Иначе говоря, числа $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ образуют решение однородной системы с определителем Δ_n, что возможно лишь при условии

$$\Delta_n = 0.$$

Обратно, если $\Delta_n = 0$, то существуют числа α_k, не все равные нулю и удовлетворяющие соотношениям (39). Запишем (39) в форме

$$\int_a^b p(x)\varphi_1(x)[\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \cdots + \alpha_n\varphi_n(x)]\,dx = 0,$$

$$\int_a^b p(x)\varphi_2(x)[\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x)]\,dx = 0,$$

$$\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\int_a^b p(x)\varphi_n(x)[\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x)]\,dx = 0.$$

Если первое из этих равенств умножить на α_1, второе — на α_2 и т. д. и сложить полученные результаты, то мы найдём

$$\int_a^b p(x)[\alpha_1\varphi_1(x) + \alpha_2\varphi_2(x) + \ldots + \alpha_n\varphi_n(x)]^2\,dx = 0,$$

откуда вытекает (38), т. е. система $\{\varphi_k(x)\}$ линейно зависима.

Следствие. *Если $\Delta_n \neq 0$, то и ни один из определителей*) $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}$ также не равен нулю.*

В самом деле, из того, что $\Delta_n \neq 0$, следует линейная независимость системы $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, но тогда линейно независима и всякая укороченная система $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_m(x)$ $(m < n)$, откуда, в свою очередь, вытекает, что $\Delta_m \neq 0$.

*) Под Δ_1 подразумевается (φ_1, φ_1).

Лемма. *Пусть на* $[a, b]$ *заданы функции* $\varphi_1(x)$, $\varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, *принадлежащие* $L^2_{p(x)}$. *Положим*

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} (\varphi_1, \varphi_1) & (\varphi_1, \varphi_2) \ldots (\varphi_1, \varphi_{n-1}) & \varphi_1(x) \\ (\varphi_2, \varphi_1) & (\varphi_2, \varphi_2) \ldots (\varphi_2, \varphi_{n-1}) & \varphi_2(x) \\ \ldots & \ldots\ldots\ldots\ldots & \ldots \\ (\varphi_n, \varphi_1) & (\varphi_n, \varphi_2) \ldots (\varphi_n, \varphi_{n-1}) & \varphi_n(x) \end{vmatrix}.$$

Тогда

$$(\psi_n, \varphi_k) = \begin{cases} 0, & \text{если } k < n; \\ \Delta_n, & \text{если } k = n. \end{cases} \tag{40}$$

Действительно, чтобы умножить $\psi_n(x)$ на $p(x)\varphi_k(x)$, достаточно умножить на $p(x)\ \varphi_k(x)$ последний столбец определителя, написанного выше. Точно так же интегрирование полученного произведения можно выполнить, интегрируя последний столбец. Остальное не требует пояснений.

Если мы развернём определитель $\psi_n(x)$ по элементам последнего столбца, то получим

$$\psi_n(x) = \alpha_1\varphi_1(x) + \ldots + \alpha_{n-1}\varphi_{n-1}(x) + \Delta_{n-1}\varphi_n(x). \tag{41}$$

Поэтому при условии линейной независимости функций $\varphi_k(x)$ функция $\psi_n(x)$ не может быть нулём (ибо $\Delta_{n-1} \neq 0$). Умножая (41) на $p(x)\ \psi_n(x)$, интегрируя и принимая во внимание (40), находим

$$\int_a^b p(x)\,\psi_n^2(x)\,dx = \Delta_{n-1}\,\Delta_n. \tag{42}$$

Отсюда вытекает, что определитель Δ_n имеет тот же знак, что и Δ_{n-1}. По тем же соображениям одинаковы знаки у Δ_{n-1} и Δ_{n-2}, а значит, и у Δ_n и Δ_{n-2}. Продолжая рассуждать таким же образом, мы установим, что знак Δ_n совпадает со знаком $\Delta_1 = (\varphi_1, \varphi_1) > 0$. Поэтому доказана

Теорема 2. *Определитель Грама линейно независимой системы строго положителен.*

Изложенные соображения позволяют доказать важную «теорему ортогонализации».

Теорема 3 (Э. Шмидт [1]). *Пусть на $[a, b]$ дана конечная или исчислимая линейно независимая система функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \cdots$, входящих в $L^2_{p(x)}$. Тогда можно построить такую ортонормальную систему $\omega_1(x)$, $\omega_2(x), \ldots$, что*

1) *всякая $\omega_n(x)$ есть линейная комбинация первых n функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$;*

2) *всякая $\varphi_n(x)$ есть линейная комбинация первых n функций $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots, \omega_n(x)$.*

Доказательство. Положим

$$\omega_1(x) = \frac{\varphi_1(x)}{\sqrt{\Delta_1}}, \quad \omega_n(x) = \frac{\psi_n(x)}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}}, \qquad (n \geqslant 2)$$

где $\varphi_n(x)$ есть определитель, рассмотренный в лемме.

Так как $\psi_n(x)$ есть линейная комбинация функций $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$, то и $\omega_n(x)$ есть такая же линейная комбинация.

Далее, лемма обеспечивает ортогональность $\psi_n(x)$ ко всем функциям $\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_{n-1}$, а значит, и к их линейным комбинациям. В частности, $\psi_n(x)$, а с ней и $\omega_n(x)$, ортогональна ко всем функциям $\omega_1(x), \omega_2(x), \ldots$ $\ldots, \omega_{n-1}(x)$. Таким образом система $\{\omega_k(x)\}$ ортогональна (напомним, что всё время речь идёт об ортогональности по весу $p(x)$). Из (42) вытекает, что при $n \geqslant 2$

$$\int_a^b p(x)\,\omega_n^2(x)\,dx = 1,$$

а при $n = 1$ это равенство тривиально. Значит, $\{\omega_k(x)\}$ есть ортонормальная система.

Остаётся проверить, что $\varphi_n(x)$ линейно выражается через $\omega_1(x), \omega_2(x), \cdots, \omega_n(x)$. Для $n = 1$ это очевидно. Если это уже доказано для всех $n < m$, то в силу (41) имеем

$$\varphi_m(x) = \frac{1}{\Delta_{m-1}}\psi_m(x) - \sum_{i=1}^{m-1}\frac{a_i}{\Delta_{m-1}}\varphi_i(x).$$

Заменив здесь $\psi_m(x)$ на $\sqrt{\Delta_{m-1}\Delta_m}\,\omega_m(x)$, а каждую $\varphi_i(x)$ $(i = 1, 2, \cdots, m-1)$ линейной комбинацией функций $\omega_1(x), \ldots, \omega_i(x)$, получим, что $\varphi_m(x)$ есть линейная комбинация функций $\omega_1(x), \ldots, \omega_m(x)$.

Теорема доказана полностью.

Процесс построения указанной системы $\{\omega_k(x)\}$ называется «ортогонализацией» исходной системы $\{\varphi_k(x)\}$.

Ввиду того что функция $f(x)$, ортогональная ко всем функциям $\varphi_k(x)$, будет ортогональна и ко всем $\omega_k(x)$ и обратно, справедлива

Теорема 4. *Системы* $\{\varphi_k(x)\}$ *и* $\{\omega_k(x)\}$ *одновременно полны или нет.*

§ 2. Приближение линейно независимыми функциями.

Пусть $\varphi_1(x), \varphi_2(x), \ldots, \varphi_n(x)$ есть линейно независимая система функций, заданных на $[a, b]$ и входящих в $L^2_{p(x)}$.

Возьмём какую-нибудь функцию $f(x) \in L^2_{p(x)}$ и поставим вопрос о наилучшем приближении в среднем функции $f(x)$ линейными комбинациями функций $\varphi_k(x)$. Эту задачу мы уже рассмотрели в предположении, что функции $\varphi_k(x)$ образуют ортогональную систему веса $p(x)$. Сейчас мы этого предположения не делаем.

Ортогонализируя по Шмидту систему $\{\varphi_k(x)\}$, мы придём к системе $\{\omega_k(x)\}$. Всякая линейная комбинация функций $\varphi_k(x)$ будет линейной комбинацией и функций $\omega_k(x)$, и наоборот. Так как по теореме Теплера существует единственная линейная комбинация функций $\omega_k(x)$, доставляющая минимум интегралу

$$\int_a^b p(x)\,[f(x) - U(x)]^2\,dx, \tag{43}$$

а именно n-я сумма Фурье функции $f(x)$, то существует одна и только одна комбинация

$$U(x) = \sum_{i=1}^{n} d_i \varphi_i(x), \tag{44}$$

для которой интеграл (43) принимает наименьшее значение. Заметим, что не только комбинация $U(x)$, но и сами коэффициенты d_i тоже определяются единственным образом. Действительно, если бы $U(x)$ кроме представления (44) допускала представление

$$U(x)=\sum_{i=1}^{n}\bar{d}_i\varphi_i(x),$$

то было бы

$$\sum_{i=1}^{n}(\bar{d}_i-d_i)\varphi_i(x)=0,$$

откуда благодаря линейной независимости функций $\varphi_i(x)$ следовало бы, что $\bar{d}_i=d_i$ $(i=1, 2, \cdots, n)$.

Поставим вопрос о фактическом нахождении чисел d_i и минимального значения интеграла (43).

Лемма. *Линейная комбинация $U(x)$, минимизирующая интеграл*

$$\int_a^b p(x)\,[f(x)-U(x)]^2\,dx,$$

такова, что разность

$$f(x)-U(x) \tag{45}$$

ортогональна ко всем функциям $\varphi_k(x)$.

Доказательство. Если $\{\omega_k(x)\}$ есть ортогональная система, полученная ортогонализацией системы $\{\varphi_k(x)\}$, то $U(x)$ есть n-я сумма Фурье функции $f(x)$:

$$U(x)=\sum_{k=1}^{n}c_k\omega_k(x) \qquad \left(c_k=\int_a^b p(x)\,f(x)\,\omega_k(x)\,dx\right).$$

Вместо ортогональности разности (45) к функциям $\varphi_i(x)$ достаточно проверить её ортогональность к функциям $\omega_i(x)$. Последняя, однако, вполне очевидна, ибо

$$\int_a^b p(x)\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\,\omega_k(x)\right]\omega_i(x)\,dx=c_i-c_i=0.$$

Итак, лемма доказана.

Поэтому искомые числа d_i таковы, что

$$\int_a^b p(x)\left[f(x)-\sum_{k=1}^{n} d_k\varphi_k(x)\right]\varphi_i(x)\,dx=0$$
$$(i=1, 2, \ldots, n).$$

Значит, эти числа мы найдём из системы уравнений

$$\begin{aligned}
&d_1(\varphi_1, \varphi_1)+d_2(\varphi_1, \varphi_2)+\cdots+d_n(\varphi_1, \varphi_n)=(f, \varphi_1),\\
&d_1(\varphi_2, \varphi_1)+d_2(\varphi_2, \varphi_2)+\cdots+d_n(\varphi_2, \varphi_n)=(f, \varphi_2),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots\\
&d_1(\varphi_n, \varphi_1)+d_2(\varphi_n, \varphi_2)+\ldots+d_n(\varphi_n, \varphi_n)=(f, \varphi_n),
\end{aligned}$$

имеющей единственное решение, так как её определителем служит отличный от нуля определитель Грама Δ_n линейно независимой системы $\{\varphi_k(x)\}$. Это единственное решение имеет вид

$$d_i=\frac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n},$$

где $\Delta_n^{(i)}$ есть определитель, получаемый из Δ_n заменой i-го столбца столбцом свободных членов.

Таким образом числа d_i найдены. Перейдём к отысканию минимального значения интеграла (43). Это минимальное значение есть

$$\rho_n=\int_a^b p(x)\left[f(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n}\varphi_i(x)\right]^2 dx.$$

Отсюда

$$\rho_n=\int_a^b p(x)\left[f(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n}\varphi_i(x)\right]f(x)\,dx-$$
$$-\sum_{k=1}^{n}\frac{\Delta_n^{(k)}}{\Delta_n}\int_a^b p(x)\left[f(x)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n}\varphi_i(x)\right]\varphi_k(x)\,dx.$$

В силу леммы вторая сумма, написанная здесь, исчезает и

$$\rho_n=(f, f)-\sum_{i=1}^{n}\frac{\Delta_n^{(i)}}{\Delta_n}(f, \varphi_i). \tag{46}$$

Иначе говоря,

$$\rho_n = \frac{1}{\Delta_n} \times$$

$$\times \left\{ (f,f)\Delta_n - \sum_{i=1}^{n} \begin{vmatrix} (\varphi_1,\varphi_1) \dots (\varphi_1,\varphi_{i-1})(\varphi_1,f)(\varphi_1,\varphi_{i+1}) \dots (\varphi_1,\varphi_n) \\ (\varphi_2,\varphi_1) \dots (\varphi_2,\varphi_{i-1})(\varphi_2,f)(\varphi_2,\varphi_{i+1}) \dots (\varphi_2,\varphi_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\varphi_n,\varphi_1) \dots (\varphi_n,\varphi_{i-1})(\varphi_n,f)(\varphi_n,\varphi_{i+1}) \dots (\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix} (f,\varphi_i) \right\}.$$

Легко сообразить, что выражение, написанное в фигурных скобках, равно определителю

$$D = \begin{vmatrix} (f,f) & (f,\varphi_1) & (f_1,\varphi_2) & \dots & (f,\varphi_n) \\ (\varphi_1,f) & (\varphi_1,\varphi_1) & (\varphi_1,\varphi_2) & \dots & (\varphi_1,\varphi_n) \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ (\varphi_n,f) & (\varphi_n,\varphi_1) & (\varphi_n,\varphi_2) & \dots & (\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix},$$

являющемуся определителем Грама системы функций $f(x)$, $\varphi_1(x), \dots, \varphi_n(x)$.

В самом деле, развернув D по элементам первой строки, найдём

$$D = (f,f)\Delta_n +$$

$$+ \sum_{i=1}^{n} (-1)^i (f,\varphi_i) \begin{vmatrix} (\varphi_1,f)(\varphi_1,\varphi_1) \dots (\varphi_1,\varphi_{i-1})(\varphi_1,\varphi_{i+1}) \dots (\varphi_1,\varphi_n) \\ (\varphi_2,f)(\varphi_2,\varphi_1) \dots (\varphi_2,\varphi_{i-1})(\varphi_2,\varphi_{i+1}) \dots (\varphi_2,\varphi_n) \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ (\varphi_n,f)(\varphi_n,\varphi_1) \dots (\varphi_n,\varphi_{i-1})(\varphi_n,\varphi_{i+1}) \dots (\varphi_n,\varphi_n) \end{vmatrix}.$$

Если в полученных определителях перевести первый столбец на i-е место, то это вызовет появление множителя $(-1)^{i-1}$, и мы в точности придём к выражению, стоящему в фигурных скобках; поэтому

$$\rho_n = \frac{D}{\Delta_n}.$$

Если условиться записывать определитель Грама системы функций $f_1, f_2, \dots, f_n$ в виде

$$\Delta(f_1, f_2, \dots, f_n),$$

то полученный результат можно переписать так:

$$\rho_n = \frac{\Delta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n, f)}{\Delta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}.$$

Такова величина наименьшего квадратического уклонения линейных комбинаций $\varphi_k(x)$ от функции $f(x)$.

Определение. Система $\Phi = \{\varphi(x)\}$ функций, входящих в $L^2_{p(x)}$, называется *фундаментальной*, если класс линейных комбинаций функций системы всюду плотен в $L^2_{p(x)}$.

Для случая ортогональной системы понятие фундаментальности очевидным образом совпадает с понятием замкнутости, и тогда оно равносильно понятию полноты. Это обстоятельство имеет место и в общем случае.

Теорема. *Исчислимая линейно независимая система функций фундаментальна тогда и только тогда, когда она полна.*

Можно было бы показать, что исчислимость и линейная независимость системы не существенны, но такое обобщение теоремы нам не понадобится.

Для доказательства теоремы отметим, что класс линейных комбинаций функций системы совпадает с классом линейных комбинаций функций той ортонормальной системы, которая получается из данной процессом ортогонализации Шмидта. Поэтому фундаментальность исходной системы равносильна фундаментальности, т. е. замкнутости упомянутой ортонормальной системы. Эта же последняя замкнута тогда и только тогда, когда она полна, т. е. когда полна исходная система.

Критерием фундаментальности системы служит выполнение равенства

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta(f, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\Delta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} = 0 \tag{47}$$

для любой функции $f(x)$ из $L^2_{p(x)}$. Однако вполне достаточно, чтобы это равенство выполнялось для функций $f(x)$ из какого-нибудь всюду плотного в $L^2_{p(x)}$ класса A (ибо в этом случае любая функция из $L^2_{p(x)}$ может быть приближена элементом A, а он в свою очередь —

линейной комбинацией функций $\varphi_k(x)$). Более того, если (47) выполняется для всех $f(x)$, принадлежащих какой-нибудь фундаментальной системе функций, то система $\{\varphi_1(x), \varphi_2(x), \varphi_3(x), \ldots\}$ является фундаментальной. Например, система степеней $1, x, x^2, x^3, \ldots$ фундаментальна, потому что класс всех полиномов всюду плотен в $L^2_{p(x)}$. Значит, если система $\{\varphi_k(x)\}$ такова, что при $m = 0, 1, 2, 3, \ldots$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\Delta(x^m, \varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)}{\Delta(\varphi_1, \varphi_2, \ldots, \varphi_n)} = 0,$$

то эта система фундаментальна.

§ 3. Теоремы Мюнтца.

Г. М. Мюнтц [1] рассмотрел вопрос о том, при каких целых неотрицательных показателях $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ система степеней $x^{n_1}, x^{n_2}, x^{n_3}, \ldots$ оказывается фундаментальной в L^2 на сегменте $[0, 1]$ (таким образом здесь весовая функция $p(x)$ равна единице). Согласно сказанному выше для этого необходимо и достаточно, чтобы при $m=0, 1, 2, \ldots$ было

$$\lim_{s\to\infty} \frac{\Delta(x^m, x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_s})}{\Delta(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_s})} = 0. \tag{48}$$

Если один из показателей n_i совпадает с m, то при $s \geqslant i$

$$\Delta(x^m, x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_s}) = 0$$

и (48) имеет место. Поэтому достаточно раассмотреть те значения m, которые не совпадают ни с одним n_i (если бы их не было, то это означало бы, что $\{n_i\}$ исчерпывает весь натуральный ряд, и тогда система $\{x^{n_i}\}$ была бы очевидным образом фундаментальной; поэтому впредь мы этот тривиальный случай исключаем).

Для изучения проблемы Мюнтца понадобится вспомогательная

Теорема Коши. *Справедливо равенство*

$$\begin{vmatrix} \frac{1}{a_1+b_1} & \frac{1}{a_1+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_1+b_n} \\ \frac{1}{a_2+b_1} & \frac{1}{a_2+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_2+b_n} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{a_n+b_1} & \frac{1}{a_n+b_2} & \cdots & \frac{1}{a_n+b_n} \end{vmatrix} = \frac{\prod\limits_{i>k}(a_i-a_k)(b_i-b_k)}{\prod\limits_{i,k}(a_i+b_k)}. \tag{49}$$

Для доказательства следует вычесть последнюю строку определителя из всех предыдущих, затем вынести множитель

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(a_n-a_i)}{(a_n+b_1)(a_n+b_2)\ldots(a_n+b_n)}$$

за знак определителя и в полученном определителе вычесть последний столбец из всех предыдущих. Это позволит вынести за знак определителя множитель

$$\frac{\prod\limits_{i=1}^{n-1}(b_n-b_i)}{(a_1+b_n)(a_2+b_n)\ldots(a_{n-1}+b_n)},$$

после чего порядок определителя понижается на единицу. Повторное применение этого приёма приведёт нас к равенству (49). Подробности вычислений предоставляются читателю.

Переходя к проблеме Мюнтца, заметим, что

$$(x^p, x^q) = \int_0^1 x^{p+q}\,dx = \frac{1}{p+q+1}.$$

Отсюда

$$\Delta(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_s}) = \begin{vmatrix} \frac{1}{n_1+n_1+1} & \frac{1}{n_1+n_2+1} & \cdots & \frac{1}{n_1+n_s+1} \\ \frac{1}{n_2+n_1+1} & \frac{1}{n_2+n_2+1} & \cdots & \frac{1}{n_2+n_s+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \frac{1}{n_s+n_1+1} & \frac{1}{n_s+n_2+1} & \cdots & \frac{1}{n_s+n_s+1} \end{vmatrix},$$

и по формуле (49)

$$\Delta(x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_s}) = \frac{\prod\limits_{i>k} (n_i - n_k)^2}{\prod\limits_{i,k} (n_i + n_k + 1)}.$$

Совершенно аналогично

$$\Delta(x^m, x^{n_1}, x^{n_2}, \ldots, x^{n_s}) =$$

$$= \frac{\prod\limits_{i>k} (n_i - n_k)^2}{\prod\limits_{i,k} (n_i + n_k + 1)} \frac{\prod\limits_{i=1}^{s} (m - n_i)^2}{\prod\limits_{i=1}^{s} (m + n_i + 1)^2} \frac{1}{2m+1}.$$

Отсюда

$$\frac{\Delta(x^m, x^{n_1}, \ldots, x^{n_s})}{\Delta(x^{n_1}, \ldots, x^{n_s})} = \frac{1}{2m+1} \prod_{i=1}^{s} \left(\frac{m - n_i}{m + n_i + 1} \right)^2,$$

и равенство (48) можно записать в виде

$$\lim_{s \to \infty} \prod_{i=1}^{s} \frac{n_i - m}{n_i + m + 1} = 0. \tag{50}$$

Так как мы исключили случай совпадения m с каким-нибудь n_i, то при любом s произведение, входящее в (50), отлично от нуля. С другой стороны, числа n_i неограниченно возрастают. Поэтому, не ограничивая общности, можно считать, что $n_i > m$ при всех i, ибо иначе мы просто исключили бы конечное число множителей из рассмотрения.

Равенство (50) можно записать так:

$$\lim_{s\to\infty}\left[\sum_{i=1}^{s}\ln\left(1-\frac{m}{n_i}\right)-\sum_{i=1}^{s}\ln\left(1+\frac{m+1}{n_i}\right)\right]=-\infty. \quad (51)$$

Если ряд *)

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i} \quad (52)$$

расходится, то

$$\sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1-\frac{m}{n_i}\right)=-\infty, \quad \sum_{i=1}^{\infty}\ln\left(1+\frac{m+1}{n_i}\right)=+\infty, \quad (53)$$

и (51) выполнено. Если же ряд (52) сходится, то сходятся и ряды (53) так, что (51) *не* выполнено. Таким образом доказана

Теорема 1 (Г. М. Мюнтц). *Система степеней*

$$x^{n_1},\ x^{n_2},\ x^{n_3},\ \ldots$$

с целыми неотрицательными показателями

$$n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

фундаментальна в $L^2([0, 1])$ *тогда и только тогда, когда ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty}\frac{1}{n_i}$$

расходится.

В тесной связи с этим результатом находится и другая теорема того же автора, решающая следующую проблему: каково должно быть множество целых

---

*) Само собою разумеется, что при $n_1 = 0$ в ряде (52) суммирование происходит, начиная с $i = 2$.

неотрицательных показателей $\{n_i\}$ $(n_0 < n_1 < n_2 < \ldots)$, чтобы полиномами

$$\sum_{i=0}^{s} c_i x^{n_i} \tag{54}$$

можно было *равномерно* приблизить с любой степенью точности всякую непрерывную на $[0, 1]$ функцию.

Если множество $\{n_i\}$ обладает этим свойством, то говорят, что система степеней $\{x^{n_i}\}$ *фундаментальна* в $C([0, 1])$.

Теорема 2 (Г. М. Мюнтц). *Для того чтобы система степеней $\{x^{n_i}\}$ $(n_0 < n_1 < n_2 < \ldots)$ была фундаментальна в $C([0, 1])$, необходимо и достаточно, чтобы было $n_0 = 0$ и чтобы расходился ряд*

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{n_i}. \tag{55}$$

Необходимость условия $n_0 = 0$ вытекает из простого замечания, что при $n_0 > 0$ все полиномы (54) обращались бы в нуль в точке $x = 0$ и ими нельзя было бы приблизить те непрерывные функции $f(x)$, у которых $f(0) \neq 0$. Далее, если система степеней фундаментальна в $C([0, 1])$, то она и подавно*) фундаментальна в $L^2([0, 1])$, так что по предыдущей теореме ряд (55) расходится.

Переходя к доказательству достаточности условий теоремы, допустим, что оба они выполнены.

Если $i \geqslant 2$, то $n_i > 1$. Одновременно с рядом (55) расходится и ряд

$$\sum_{i=2}^{\infty} \frac{1}{n_i - 1},$$

и потому система степеней $\{x^{n_i - 1}\}$ $(i \geqslant 2)$ фундаментальна в $L^2([0, 1])$. Тем более, это так при $i \geqslant 1$.

*) Ибо класс $C([0, 1])$ всюду плотен в $L^2([0, 1])$.

Заметив это, возьмём произвольное натуральное число m и $\varepsilon > 0$. Функция x^{m-1} входит в $L^2([0, 1])$ и потому существуют такие коэффициенты a_i, что

$$\int_0^1 \left[x^{m-1} - \sum_{i=1}^{s} a_i x^{n_i - 1} \right]^2 dx < \frac{\varepsilon^2}{m^2}.$$

Отсюда, благодаря неравенству Буняковского, следует, что при $0 \leqslant x \leqslant 1$ будет

$$\int_0^x \left| x^{m-1} - \sum_{i=1}^{s} a_i x^{n_i - 1} \right| dx < \frac{\varepsilon}{m},$$

а значит, и подавно

$$\left| x^m - \sum_{i=1}^{s} \frac{m}{n_i} a_i x^{n_i} \right| < \varepsilon.$$

Таким образом полиномами (54) можно приблизить любую степень x^m при $m > 0$. Но так как $n_0 = 0$, то условие $m > 0$ несущественно, и потому *всякий* полином можно с любой степенью точности приблизить полиномом вида (54). Остаётся заметить, что произвольная непрерывная функция с любой степенью точности приближается полиномами.

ГЛАВА IV.

ОБЩИЕ СВОЙСТВА ОРТОГОНАЛЬНЫХ ПОЛИНОМОВ.

§ 1. Основные определения.

Система степеней $\{x^k\}$ $(k=0, 1, 2, \ldots)$ линейно независима на любом сегменте $[a, b]$. Поэтому согласно общей теореме Шмидта её можно ортогонализовать при всякой весовой функции. Остановимся несколько на вопросе о том, как будут выглядеть здесь развитые выше общие соображения.

В теореме Шмидта существенную роль играли определители Грама исходной системы функций. Если мы введём обозначение

$$\int_a^b p(x)\, x^n\, dx = \mu_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots)$$

(эти числа называются *моментами* весовой функции $p(x)$), то найдём

$$(x^p, x^q) = \int_a^b p(x)\, x^{p+q}\, dx = \mu_{p+q}.$$

Поэтому определитель*) Грама

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} (1, 1) & (1, x) \ldots (1, x^n) \\ (x, 1) & (x, x) \ldots (x, x^n) \\ \ldots & \ldots \\ (x^n, 1) & (x^n, x) \ldots (x^n, x^n) \end{vmatrix}$$

---

*) Это определитель порядка $n+1$. Поэтому применяемые здесь обозначения несущественно отличаются от обозначений, употреблявшихся выше, когда Δ_n был определителем порядка n.

принимает вид

$$\Delta_n = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1} \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n} \end{vmatrix}. \tag{56}$$

Далее, функция $\psi_n(x)$, фигурировавшая в лемме § 1 главы III, теперь будет иметь вид

$$\psi_n(x) = \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix},$$

а функции $\omega_n(x)$, образующие ортонормальную систему, будут

$$\left.\begin{aligned} &\omega_0(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_0}} \qquad (\Delta_0 = \mu_0), \\ &\omega_n(x) = \frac{1}{\sqrt{\Delta_{n-1}\Delta_n}} \begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_n & x \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \quad (n = 1, 2, \dots) \end{aligned}\right\}. \tag{57}$$

Заметим, что $\omega_n(x)$ есть полином степени точно равной n, ибо коэффициент при x^n в $\omega_n(x)$ равен

$$\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}} \neq 0.$$

Таким образом ранее доказанная теорема Шмидта принимает следующий вид:

Теорема 1. *Какова бы ни была весовая функция $p(x)$, заданная на $[a, b]$, существует система полиномов*

$$\omega_0(x), \ \omega_1(x), \ \omega_2(x), \ \dots, \tag{58}$$

где $\omega_n(x)$ — полином точно n-й степени, являющаяся ортонормальной системой веса $p(x)$.

Мы видели, что систему (58) можно определить формулой (57). Естественно спросить, не существует ли ортонормальных систем веса $p(x)$, отличных от той, которая строится по формуле (57). Так как умножение одной или нескольких из функций системы (58) на -1 сохраняет ортонормальность системы, то ясно, что полной единственности нет. Однако, если закрепить знак старших коэффициентов рассматриваемых полиномов*) и потребовать, чтобы в системе n-й полином имел точно n-ю степень, то будет иметь место единственность системы (58). Чтобы это установить, потребуется следующая простая

Лемма. *Если*

$$Q_0(x),\quad Q_1(x),\quad Q_2(x),\ \ldots$$

— система полиномов, в которой полином $Q_n(x)$ имеет точно n-ю степень, то всякий полином $P(x)$ степени $m \geqslant 0$ единственным образом представляется в форме

$$P(x) = \alpha_0 Q_0(x) + \alpha_1 Q_1(x) + \ldots + \alpha_m Q_m(x). \qquad (59)$$

Действительно, если

$$Q_n(x) = q_0^{(n)} + q_1^{(n)} x + \ldots + q_n^{(n)} x^n \qquad (q_n^{(n)} \neq 0),$$
$$P(x) = p_0 + p_1 x + \ldots + p_m x^m,$$

то равенство (59) будет иметь место тогда и только тогда, когда

$$\alpha_m q_m^{(m)} = p_m,$$
$$\alpha_{m-1} q_{m-1}^{(m-1)} + \alpha_m q_{m-1}^{(m)} = p_{m-1},$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots$$
$$\alpha_0 q_0^{(0)} + \alpha_1 q_0^{(1)} + \ldots + \alpha_m q_0^{(m)} = p_0.$$

Эти уравнения позволяют последовательно найти (и притом единственным образом) коэффициенты α_m, $\alpha_{m-1}, \ldots, \alpha_0$.

Теорема 2. *Если система полиномов*

$$\varphi_0(x),\quad \varphi_1(x),\quad \varphi_2(x),\ \ldots$$

*) У полиномов (57) старшие коэффициенты положительны.

ортонормальна по весу $p(x)$, полином $\varphi_n(x)$ имеет точно n-ю степень и старший коэффициент $\varphi_n(x)$ положителен, то

$$\varphi_n(x) = \omega_n(x),$$

где $\omega_n(x)$ определены формулой (57).

В самом деле, по лемме

$$\varphi_n(x) = \alpha_0\omega_0(x) + \alpha_1\omega_1(x) + \ldots + \alpha_n\omega_n(x). \tag{60}$$

Но по той же лемме полиномы $\omega_0(x), \omega_1(x), \ldots, \omega_{n-1}(x)$ линейно выражаются через $\varphi_0(x), \varphi_1(x), \ldots, \varphi_{n-1}(x)$ и потому ортогональны к $\varphi_n(x)$. Умножая выражение (60) последовательно на $p(x)\,\omega_0(x)$, $p(x)\,\omega_1(x), \ldots$ $\ldots, p(x)\,\omega_{n-1}(x)$ и каждый раз интегрируя, находим

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0.$$

Значит, $\varphi_n(x) = \alpha_n\omega_n(x)$. Отсюда

$$\int_a^b p(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx = \alpha_n^2 \int_a^b p(x)\,\omega_n^2(x)\,dx.$$

Но оба эти интеграла равны единице. Следовательно, $\alpha_n = \pm 1$, и так как знаки старших коэффициентов $\varphi_n(x)$ и $\omega_n(x)$ совпадают, то $\alpha_n = +1$; теорема доказана.

Из доказанной выше леммы вытекает ещё один важный результат. Именно, всякий полином оказывается линейной комбинацией полиномов (58). Значит, для всякого полинома выполнено равенство Парсеваля, а отсюда по теореме Стеклова вытекает

Теорема 3. *Ортонормальная система* (58) *замкнута.*

Следствие. *Система степеней $1, x, x^2, x^3, \ldots$ полна.*

Впрочем, это следствие тривиально в силу соображений, указанных в конце § 2 главы III.

Так как множество всех полиномов H_n степени не выше n оказывается совпадающим с множеством всех линейных комбинаций полиномов $\omega_0(x), \omega_1(x), \ldots$ $\ldots, \omega_n(x)$, то общая теорема Теплера из главы II приводит к следующему результату:

Теорема 4. *Из всех полиномов $P(x)$ степени не выше n наименьшее значение интегралу*

$$\int_a^b p(x)\,[f(x)-P(x)]^2\,dx, \tag{61}$$

где $f(x)$ — заданная функция из $L^2_{p(x)}$, доставляет сумма Фурье

$$S_n(x)=\sum_{k=0}^{n} c_k\omega_k(x) \qquad \left(c_k=\int_a^b p(x)\,f(x)\,\omega_k(x)\,dx\right)$$

и только эта сумма.

Таким образом задача наилучшего приближения данной функции полиномами решается гораздо проще, когда за меру отклонения полинома от функции принимается интеграл (61), а не

$$\max|f(x)-P(x)|,$$

как это делалось в первой части книги.

Остановимся на величине минимального значения интеграла (61). По общей формуле (28)

$$\int_a^b p(x)\,[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=\int_a^b p(x)\,f^2(x)\,dx-\sum_{k=0}^{n} c_k^2.$$

С другой стороны, система (58) замкнута и

$$\int_a^b p(x)\,f^2(x)\,dx=\sum_{k=0}^{\infty} c_k^2.$$

Стало быть,

$$\int_a^b p(x)\,[f(x)-S_n(x)]^2\,dx=\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k^2.$$

Полиномы $\omega_n(x)$ обладают ещё одним экстремальным свойством кроме указанного в теореме 4.

Теорема 5. *Из всех полиномов степени n со старшим коэффициентом, равным единице, наименьшее значение интегралу*

$$\int_a^b p(x)\,P^2(x)\,dx \tag{62}$$

доставляет полином

$$P(x) = \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\,\omega_n(x) \tag{63}$$

и только он один *).

В самом деле, по лемме любой полином степени n со старшим коэффициентом, равным единице, имеет вид

$$P(x) = \alpha_0\omega_0(x) + \ldots + \alpha_{n-1}\omega_{n-1}(x) + \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\,\omega_n(x), \tag{64}$$

и обратно, всякая подобная линейная комбинация есть полином степени n со старшим коэффициентом, равным единице. Поэтому выбор полинома $P(x)$ равносилен выбору коэффициентов $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}$.

Так как по формуле Парсеваля для полинома (64)

$$\int_a^b p(x)\,P^2(x)\,dx = \sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k^2 + \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}},$$

то ясно, что наименьшее значение интеграл (62) получит тогда и только тогда, когда

$$\alpha_0 = \alpha_1 = \ldots = \alpha_{n-1} = 0.$$

Ниже нам придётся иметь дело с ортогональными, но не ортонормальными системами полиномов. Оказывается, что такая система однозначно определяется заданием старших коэффициентов всех полиномов.

Теорема 6. *Пусть*

$$\varphi_0(x),\ \varphi_1(x),\ \varphi_2(x),\ \ldots$$

— ортогональная система веса $p(x)$, в которой $\varphi_n(x)$

*) Вместо закрепления старшего коэффициента можно наложить на коэффициенты $P(x)$ и другие условия. По этому поводу см. Шохат [1], Я. Л. Геронимус [1].

есть полином точно n-й степени. Если старший коэффициент $\varphi_n(x)$ есть K_n $(n=0, 1, 2, \ldots)$, то необходимо будет

$$\varphi_0(x) = K_0, \quad \varphi_n(x) = K_n \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\, \omega_n(x) \qquad (n \geqslant 1). \quad (65)$$

Действительно, значение $\varphi_0(x)$ очевидно. Выражение для $\varphi_n(x)$ при $n \geqslant 1$ устанавливается так же, как в теореме 2, на основании ортогональности $\varphi_n(x)$ к $\omega_0(x)$, $\omega_1(x)$, $\ldots$, $\omega_{n-1}(x)$. Для частного случая $K_n = 1$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ мы будем применять обозначение*)

$$\tilde{\omega}_0(x) = 1, \quad \tilde{\omega}_n(x) = \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\, \omega_n(x). \qquad (66)$$

Из формул (65) вытекает

$$A_0 = \int_a^b p(x)\, \varphi_0^2(x)\, dx = K_0^2 \Delta_0,$$

$$A_n = \int_a^b p(x)\, \varphi_n^2(x)\, dx = K_n^2 \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}. \qquad (67)$$

(напомним, что числа A_n входят в выражение коэффициентов Фурье для ненормированной ортогональной системы).

В заключение отметим, что для фактического построения системы (58), нахождения чисел Δ_n и т. п. вовсе не нужно знать весовую функцию $p(x)$, а достаточно знать её моменты μ_n, ибо только они входят в формулы (56) и (57).

§ 2. Корни ортогональных полиномов. Рекуррентная формула.

Теорема 1. *Все корни полинома $\omega_n(x)$ вещественные, простые и лежат внутри интервала (a, b).*

Допустим сначала, что в интервале (a, b) нет корней нечётной кратности полинома $\omega_n(x)$. Тогда полином

---

*) Насколько мне известно, это удобное обозначение принадлежит В. Л. Гончарову.

$\omega_n(x)$ на сегменте $[a, b]$ не меняет знака, и ортогональность $\omega_n(x)$ и $\omega_0(x) = \text{const}$, выражаемая равенством

$$\int_a^b p(x)\,\omega_n(x)\,dx = 0,$$

не может иметь места. Итак, внутри интервала (a, b) обязательно имеются корни нечётной кратности. Пусть их число равно r, где $r < n$, и пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_r$ суть эти корни. Положим

$$Q(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2)\ldots(x - \xi_r).$$

Полином $Q(x)$ имеет степень r и потому ортогонален к $\omega_n(x)$ (ибо линейно выражается через ω_0, $\omega_1, \ldots, \omega_r$). Значит, должно быть

$$\int_a^b p(x)\,Q(x)\,\omega_n(x)\,dx = 0,$$

что, однако, невозможно потому, что произведение $Q(x)\,\omega_n(x)$ имеет на (a, b) корни только чётной кратности и не меняет знака на $[a, b]$. Таким образом $r = n$. Остальное не требует пояснений.

Теорема 2. *Три последовательных полинома $\tilde{\omega}_{n+2}(x)$, $\tilde{\omega}_{n+1}(x)$ и $\tilde{\omega}_n(x)$ связаны рекуррентным соотношением*

$$\tilde{\omega}_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2})\,\tilde{\omega}_{n+1}(x) - \lambda_{n+1}\tilde{\omega}_n(x) \tag{68}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

в котором α_{n+2} и λ_{n+1} суть некоторые постоянные числа.

Напомним, что полиномы $\tilde{\omega}_n(x)$, определяемые формулой (66), имеют старшие коэффициенты, равные единице.

Для доказательства рассмотрим произведение $x\tilde{\omega}_{n+1}(x)$. Будучи полиномом степени $n+2$, это произведение может быть представлено в форме

$$x\tilde{\omega}_{n+1}(x) = c_0\tilde{\omega}_0(x) + c_1\tilde{\omega}_1(x) + \ldots + c_{n+2}\,\tilde{\omega}_{n+2}(x). \tag{69}$$

Сравнение старших коэффициентов показывает, что $c_{n+2}=1$. Умножим, далее, равенство (69) на $p(x)\tilde{\omega}_k(x)$, где $k<n$, и проинтегрируем полученное равенство.

Так как произведение $x\tilde{\omega}_k(x)$ есть полином степени низшей, чем $n+1$, то слева получится 0. Справа же останется только член

$$c_k \int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_k^2(x)\,dx,$$

ибо прочие исчезнут в силу ортогональности системы $\{\tilde{\omega}_n(x)\}$; поэтому $c_k=0$. Таким образом

$$c_0=c_1=\ldots=c_{n-1}=0,$$

и равенство (69) принимает вид

$$x\tilde{\omega}_{n+1}(x)=c_n\tilde{\omega}_n(x)+c_{n+1}\tilde{\omega}_{n+1}(x)+\tilde{\omega}_{n+2}(x),$$

вполне равносильный с (68), если положить $c_n=\lambda_{n+1}$ и $c_{n+1}=\alpha_{n+2}$.

Если в (68) заменить полиномы $\tilde{\omega}_n(x)$ их выражениями (66), то получится рекуррентная формула*) для полиномов (58):

$$\sqrt{\frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}}\,\omega_{n+2}(x)=$$
$$=(x-\alpha_{n+2})\sqrt{\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}}\,\omega_{n+1}(x)-\lambda_{n+1}\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\,\omega_n(x). \quad (70)$$

Ввиду некоторой громоздкости этой последней формулы мы будем в дальнейшем чаще пользоваться формулой (68).

Числа α_{n+2} и λ_{n+1}, входящие в (68), легко определяются. Именно, если умножить (68) на $p(x)\tilde{\omega}_{n+1}(x)$ и проинтегрировать, то окажется, что

$$\int_a^b p(x)\,(x-\alpha_{n+2})\,\tilde{\omega}_{n+1}^2(x)\,dx=0.$$

*) Чтобы формула (70) была пригодна и для $n=0$, нужно положить $\Delta_{-1}=1$.

Отсюда вытекает, что

$$\alpha_{n+2}=\frac{\int\limits_a^b p(x)\,x\,\tilde{\omega}_{n+1}^2(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}^2(x)\,dx}. \tag{71}$$

Числитель последней дроби увеличится, если множитель x, стоящий под интегралом, заменить большей величиной b. Стало быть, $\alpha_{n+2}<b$. Аналогично $\alpha_{n+2}>a$. Итак,

$$a<\alpha_{n+2}<b \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots). \tag{72}$$

Чтобы определить λ_{n+1}, умножим (68) на $p(x)\tilde{\omega}_n(x)$ и проинтегрируем полученное равенство. В результате окажется

$$\lambda_{n+1}\int\limits_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_n^2(x)\,dx=\int\limits_a^b p(x)\,x\tilde{\omega}_n(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}(x)\,dx.$$

Но произведение $x\tilde{\omega}_n(x)$ можно представить в форме

$$x\tilde{\omega}_n(x)=\tilde{\omega}_{n+1}(x)+R(x),$$

где $R(x)$ есть полином степени низшей, чем $n+1$, так что

$$\int\limits_a^b p(x)\,R(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}(x)\,dx=0.$$

Поэтому

$$\lambda_{n+1}=\frac{\int\limits_a^b p(x)\tilde{\omega}_{n+1}^2(x)\,dx}{\int\limits_a^b p(x)\tilde{\omega}_n^2(x)\,dx}. \tag{73}$$

Отсюда уже видно, что при всех n

$$\lambda_{n+1}>0. \tag{74}$$

Для дальнейшего этот факт очень важен. Если воспользоваться формулами (67), то (73) примет вид

$$\lambda_{n+1}=\frac{\Delta_{n-1}\Delta_{n+1}}{\Delta_n^2}. \tag{75}$$

Это соотношение верно и для $n=0$, если положить $\Delta_{-1}=1$.

То обстоятельство, что

$$\int_a^b p(x)\,x\tilde{\omega}_n(x)\tilde{\omega}_{n+1}(x)\,dx=\int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}^2(x)\,dx,$$

позволяет дать полезную оценку для λ_{n+1}. Именно, если большее из чисел $|a|$ и $|b|$ обозначить через C:

$$C=\max\{|a|,\ |b|\},$$

то окажется

$$\int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}^2(x)\,dx\leqslant C\int_a^b p(x)\,|\tilde{\omega}_n(x)|\,|\tilde{\omega}_{n+1}(x)|\,dx.$$

В силу неравенства Буняковского, находим

$$\int_a^b p(x)\,|\tilde{\omega}_n(x)|\,|\tilde{\omega}_{n+1}(x)|\,dx\leqslant$$

$$\leqslant\sqrt{\int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_n^2(x)\,dx}\ \sqrt{\int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}^2(x)\,dx}.$$

Значит,

$$\int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}^2(x)\,dx\leqslant$$

$$\leqslant C\sqrt{\int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_n^2(x)\,dx}\ \sqrt{\int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}^2(x)\,dx},$$

откуда в связи с (73) и получается интересующая нас оценка

$$\lambda_{n+1}\leqslant C^2.$$

Из теоремы 2 вытекают два следствия:

I. *Соседние полиномы* $\omega_{n+2}(x)$ *и* $\omega_{n+1}(x)$ *не могут иметь общего корня.*

В самом деле, такой общий корень был бы также и корнем полинома $\omega_n(x)$, а тогда он был бы и корнем $\omega_{n-1}(x)$ и т. д. Рассуждая подобным образом, мы дошли бы в конце концов до того, что этот общий корень был бы и корнем «полинома» $\omega_0(x)$, что нелепо, так как $\omega_0(x)$ есть отличная от нуля постоянная.

II. *Если* x_0 *есть корень полинома* $\omega_{n+1}(x)$, *то числа* $\omega_{n+2}(x_0)$ *и* $\omega_n(x_0)$ *имеют разные знаки.*

Действительно, формула (70) даёт

$$\sqrt{\frac{\Delta_{n+2}}{\Delta_{n+1}}}\,\omega_{n+2}(x_0) = -\lambda_{n+1}\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\,\omega_n(x_0),$$

откуда в связи с (74) и вытекает наше утверждение.

Теорема 3. *Если* $n > 0$, *то корни полиномов* $\omega_n(x)$ *и* $\omega_{n+1}(x)$ *перемежаются.*

Точный смысл этой теоремы состоит в том, что между корнями $x_k^{(n)}$ полинома $\omega_n(x)$ и корнями $x_k^{(n+1)}$ полинома $\omega_{n+1}(x)$ имеют место неравенства

$$a < x_1^{(n+1)} < x_1^{(n)} < x_2^{(n+1)} < \ldots < x_n^{(n+1)} < x_n^{(n)} < x_{n+1}^{(n+1)} < b,$$

так что в каждом из n интервалов

$$(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}),\ (x_2^{(n+1)}, x_3^{(n+1)}),\ \ldots,\ (x_n^{(n+1)}, x_{n+1}^{(n+1)})$$

между двумя соседними корнями полинома $\omega_{n+1}(x)$ содержится в точности по одному корню $\omega_n(x)$.

Доказательство теоремы проводится индуктивно. Именно, пусть сначала $n=1$, и $x_1^{(1)}$ есть единственный корень полинома $\omega_1(x)$. Тогда

$$a < x_1^{(1)} < b.$$

Полином $\omega_0(x)$ есть положительная постоянная. Значит, в силу следствия II предыдущей теоремы, число $\omega_2(x_1^{(1)})$ отрицательно. С другой стороны, числа $\omega_2(a)$ и $\omega_2(b)$ положительны. В самом деле, корни $x_1^{(2)}$ и $x_2^{(2)}$ полинома $\omega_2(x)$ лежат внутри интервала (a, b), и потому знак $\omega_2(a)$ совпадает со знаком $\omega_2(x)$ при $x=-\infty$, а так как это полином второй степени с положительным старшим коэффициентом, то $\omega_2(a)>0$. Так же рассуждаем и для $\omega_2(b)$.

Таким образом каждый из сегментов $[a, x_1^{(1)}]$ и $[x_1^{(1)}, b]$ обладает тем свойством, что на его концах полином $\omega_2(x)$ имеет разные знаки. Отсюда без дальнейших пояснений видно, что

$$a < x_1^{(2)} < x_1^{(1)} < x_2^{(2)} < b.$$

Итак, теорема доказана для $n=1$.

В целях дальнейшего заметим, что при всех n будет $\omega_n(b)>0$ и что $\omega_n(a)$ будет положительно при чётном n и отрицательно при нечётном. Это устанавливается тем же рассуждением, которое мы провели для $\omega_2(a)$.

Допустим теперь, что теорема уже доказана для некоторого значения n.

Отметим точки

$$a,\ x_1^{(n+1)},\ x_2^{(n+1)},\ x_3^{(n+1)},\ \ldots,\ x_{n+1}^{(n+1)},\ b.$$

В точке a полиномы $\omega_{n+2}(x)$ и $\omega_n(x)$ имеют одинаковые знаки, а в точке $x_1^{(n+1)}$ различные. Но в интервале $(a, x_1^{(n+1)})$ полином $\omega_n(x)$ корней не имеет. Значит, $\omega_n(x_1^{(n+1)})$ имеет тот же знак, что и $\omega_n(a)$. Поэтому полином $\omega_{n+2}(x)$ меняет знак при переходе от $x=a$ к $x=x_1^{(n+1)}$ и обязательно имеет корень в интервале $(a, x_1^{(n+1)})$.

В точке $x_2^{(n+1)}$ полиномы $\omega_{n+2}(x)$ и $\omega_n(x)$ снова имеют разные знаки. Но полином $\omega_n(x)$ имеет в интервале $(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)})$ в точности один (простой) корень. Значит, он переменил знак при переходе от $x=x_1^{(n+1)}$ к $x=x_2^{(n+1)}$. Отсюда следует, что и $\omega_{n+2}(x)$ при этом переходе меняет знак и имеет корень в интервале $(x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)})$.

Рассуждая таким же образом, убедимся, что $\omega_{n+2}(x)$ имеет корень в каждом из интервалов

$$(a, x_1^{(n+1)}),\ (x_1^{(n+1)}, x_2^{(n+1)}),\ \ldots,\ (x_{n+1}^{(n+1)}, b),$$

а так как этих интервалов $n+2$, т. е. столько же, сколько корней у $\omega_{n+2}(x)$, то в каждом интервале будет заключено в точности по одному корню $\omega_{n+2}(x)$. Итак, при справедливости теоремы для некоторого значения n она справедлива и для значения на единицу большего. Таким образом теорема доказана.

Проведённое рассуждение полезно иллюстрировать таблицей, построенной (для определённости) для чётного значения n:

	a	$x_1^{(n+1)}$	$x_2^{(n+1)}$	$x_3^{(n+1)}$	...	$x_n^{(n+1)}$	$x_{n+1}^{(n+1)}$	b
Sign $\omega_n(x)$	+	+	—	+	...	—	+	+
Sign $\omega_{n+2}(x)$	+	—	+	—	...	+	—	+

Полиномы $\omega_n(x)$ обладают важным алгебраическим свойством, сближающим их с функциями Штурма, применяемыми при счёте числа корней полинома.

Пусть

$$\sigma_0, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, \ldots, \sigma_n \tag{76}$$

— некоторые вещественные числа, отличные от нуля. Сосчитаем, сколько раз рядом стоящие числа σ_i и σ_{i+1} имеют разные знаки, и полученное число назовём *числом перемен знака* в ряду (76). Иначе говоря, число перемен знака есть число *отрицательных* произведений

$$\sigma_i \sigma_{i+1} \qquad (i = 0, 1, 2, \ldots, n-1).$$

Если же среди чисел (76) имеются нули, то мы вычеркнем эти нули, определим числом перемен знака в оставшемся ряду и назовём его числом перемен знака в исходном ряду (76). Например, в ряду

$$0, 2, 3, -1, 0, 0, 5, -2$$

число перемен знака по определению есть число перемен знака в ряду

$$2,\ 3,\ -1,\ 5,\ -2$$

и равно трём.

Так как в ряду

$$\omega_0(a),\ \omega_1(a),\ \omega_2(a),\ \ldots,\ \omega_n(a)$$

соседние числа имеют разные знаки, то число перемен знака в нём будет n. Напротив в ряду

$$\omega_0(b),\ \omega_1(b),\ \omega_2(b),\ \ldots,\ \omega_n(b)$$

число перемен знака равно нулю. Если мы обозначим число перемен знака в ряду

$$\omega_0(x),\ \omega_1(x),\ \omega_2(x),\ \ldots,\ \omega_n(x) \tag{77}$$

через $\lambda(x)$, то $\lambda(a)=n$, $\lambda(b)=0$.

Теорема 4. *Число корней полинома $\omega_n(x)$, содержащихся в полуоткрытом промежутке $(\alpha, \beta]$, в точности равно разности*

$$\lambda(\alpha)-\lambda(\beta).$$

Допустим сначала, что в точках $x=\alpha$ и $x=\beta$ ни один из полиномов (77) не обращается в нуль. Отметим все точки $z_1, z_2, \ldots, z_m$, лежащие в интервале (α, β) и являющиеся корнями хотя бы одного из полиномов (77). Если в каждом из интервалов (z_i, z_{i+1}) выбрать по точке y_i $(i=1, 2, \ldots, m-1)$ и положить $y_0=\alpha$, $y_m=\beta$, то окажется, что

$$\lambda(\alpha)-\lambda(\beta)=\sum_{i=0}^{m-1}[\lambda(y_i)-\lambda(y_{i+1})].$$

Рассмотрим подробнее разность $\lambda(y_i)-\lambda(y_{i+1})$. В точках y_i и y_{i+1} ни один из полиномов (77) не обращается в нуль, но в интервале (y_i, y_{i+1}) имеется точка z_{i+1}, являющаяся корнем одного или нескольких из полиномов (77), причём это единственная точка этого рода. Предположим, что

$$\omega_n(z_{i+1})\neq 0,$$

но

$$\omega_{k_1}(z_{i+1})=\omega_{k_2}(z_{i+1})=\ldots=\omega_{k_r}(z_{i+1})=0,$$

Чтобы найти $\lambda(y_i)$, нужно составить все произведения

$$\omega_0(y_i)\,\omega_1(y_i),\quad \omega_1(y_i)\,\omega_2(y_i),\quad \ldots,\quad \omega_{n-1}(y_i)\,\omega_n(y_i)$$

и сосчитать, сколько из них отрицательных. Так же находится и $\lambda(y_{i+1})$. Но при переходе от $x=y_i$ к $x=y_{i+1}$ изменяют знак только полиномы $\omega_{k_1}(x)$, $\omega_{k_2}(x)$, ..., $\omega_{k_r}(x)$. Значит, изменить знак могут только такие произведения, как

$$\omega_{k_1-1}(x)\,\omega_{k_1}(x),\quad \omega_{k_1}(x)\,\omega_{k_1+1}(x),$$
$$\omega_{k_2-1}(x)\,\omega_{k_2}(x),\quad \ldots,\quad \omega_{k_r}(x)\,\omega_{k_r+1}(x).$$

Каждый из полиномов $\omega_{k_s}(x)$ входит в два таких произведения.

Но ни одно из чисел $k_1\pm1$, $k_2\pm1$, ..., $k_r\pm1$ не содержится среди чисел $k_1, k_2, \ldots, k_r$, так как соседние полиномы не имеют общих корней. С другой стороны, если j не совпадает с одним из чисел $k_1, k_2, \ldots k_r$, то все три числа

$$\omega_j(y_i),\quad \omega_j(z_{i+1}),\quad \omega_j(y_{i+1})$$

имеют один и тот же знак. А так как

$$\omega_{k_1-1}(z_{i+1})\,\omega_{k_1+1}(z_{i+1})<0,$$

то из двух произведений

$$\omega_{k_1-1}(y_i)\,\omega_{k_1}(y_i),\quad \omega_{k_1}(y_i)\,\omega_{k_1+1}(y_i)$$

одно и только одно отрицательно. Точно так же из двух произведений

$$\omega_{k_1-1}(y_{i+1})\,\omega_{k_1}(y_{i+1}),\quad \omega_{k_1}(y_{i+1})\,\omega_{k_1+1}(y_{i+1})$$

одно и только одно отрицательно.

Значит, независимо от того, производим ли мы подсчёт при $x=y_i$ или при $x=y_{i+1}$, число отрицательных произведений, содержащих множитель $\omega_{k_1}(x)$, равно единице. То же относится и к прочим полиномам $\omega_{k_2}(x)$, ..., $\omega_{k_r}(x)$. Таким образом общее число отрицательных произведений

$$\omega_k(x)\,\omega_{k+1}(x)\qquad (k=0,1,2,\ldots,n-1)\qquad (78)$$

при переходе от $x=y_i$ к $x=y_{i+1}$ не изменяется и

$$\lambda(y_i)=\lambda(y_{i+1}).$$

Предположим теперь, что

$$\omega_n(z_{i+1})=0.$$

Кроме полинома $\omega_n(x)$ в точке z_{i+1} могут обращаться в нуль ещё некоторые полиномы $\omega_{k_1}(x), \ldots, \omega_{k_r}(x)$, но, как и выше, мы убедимся, что число отрицательных произведений (78), в которые входят *эти* полиномы, не изменяется при переходе от $x=y_i$ к $x=y_{i+1}$.

Что же касается произведения

$$\omega_{n-1}(x)\,\omega_n(x), \tag{79}$$

то при $x=y_i$ оно отрицательно, а при $x=y_{i+1}$ положительно. В самом деле, ведь корни полиномов $\omega_{n-1}(x)$ и $\omega_n(x)$ перемежаются. Значит, левее точки z_{i+1} полиномы $\omega_{n-1}(x)$ и $\omega_n(x)$ имеют одинаковое число корней. При переходе x через каждый из этих корней произведение (79) меняет знак. Поэтому при переходе от $x=-\infty$ к $x=y_i$ оно меняет знак *чётное* число раз. При $x=-\infty$ это произведение отрицательно, значит, оно отрицательно и при $x=y_i$. При переходе через z_{i+1} оно ещё раз изменит знак и станет положительным.

Таким образом в рассматриваемом случае окажется

$$\lambda(y_i)-\lambda(y_{i+1})=1.$$

Значит, разность $\lambda(\alpha)-\lambda(\beta)$ равна числу тех точек z_{i+1}, которые являются корнями $\omega_n(x)$.

Остаётся рассмотреть случай, когда одна или обе из точек α, β служат корнем одного или нескольких полиномов (77).

Пусть сначала такой «плохой» точкой является только α. Выберем столь малое $h>0$, чтобы в промежутке $(\alpha, \alpha+h]$ не было корней полиномов (77). По доказанному, число корней $\omega_n(x)$ в интервале $(\alpha+h, \beta)$ (или, что то же самое, в сегменте $[\alpha+h, \beta]$) равно разности

$$\lambda(\alpha+h)-\lambda(\beta).$$

Но так как в промежутках $(\alpha, \beta]$ и $(\alpha+h, \beta]$ находится одна и та же совокупность корней полинома $\omega_n(x)$, то остаётся показать, что $\lambda(\alpha)=\lambda(\alpha+h)$.

Пусть в точке α обращаются в нуль полиномы $\omega_{k_1}(x), \omega_{k_2}(x), \ldots, \omega_{k_r}(x)$, но не сам полином $\omega_n(x)$.

Для подсчёта $\lambda(\alpha)$ нужно из ряда

$$\omega_0(\alpha),\ \omega_1(\alpha),\ \omega_2(\alpha),\ \ldots,\ \omega_n(\alpha)$$

вычеркнуть все нули и, взяв все произведения из двух соседних чисел оставшегося ряда, определить, сколько из них окажется отрицательных. В частности, отрицательными будут все произведения

$$\omega_{k_s-1}(\alpha)\,\omega_{k_s+1}(\alpha) \qquad (s=1, 2, \ldots, r).$$

При переходе к точке $x=\alpha+h$ каждое из этих произведений заменится двумя произведениями

$$\omega_{k_s-1}(\alpha+h)\,\omega_{k_s}(\alpha+h), \quad \omega_{k_s}(\alpha+h)\,\omega_{k_s+1}(\alpha+h),$$

из которых одно и только одно отрицательно. Все прочие произведения $\omega_j(x)\,\omega_{j+1}(x)$ имеют одинаковые знаки и при $x=\alpha$ и при $x=\alpha+h$. Отсюда и видно, что $\lambda(\alpha)=\lambda(\alpha+h)$.

Если же и $\omega_n(\alpha)=0$, то при подсчёте $\lambda(\alpha)$ произведение $\omega_{n-1}(\alpha)\,\omega_n(\alpha)$ будет отсутствовать, а при подсчёте $\lambda(\alpha+h)$ оно хотя и будет фигурировать, но, будучи положительным, на $\lambda(\alpha+h)$ не повлияет. Значит, попрежнему $\lambda(\alpha)=\lambda(\alpha+h)$.

Если же корнем некоторых полиномов (77) будет не α, а β, то мы поступаем совершенно аналогично, т. е. рассматриваем сначала разность $\lambda(\alpha)-\lambda(\beta+h)$, равную числу корней $\omega_n(x)$ в $[\alpha, \beta]$, после чего снова убеждаемся в равенстве $\lambda(\beta)=\lambda(\beta+h)$.

Наконец, общий случай приводится к рассмотренным, если ввести такую точку $\gamma\,(\alpha<\gamma<\beta)$, в которой ни один полином (77) не обращается в нуль. Тогда число корней $\omega_n(x)$ в $(\alpha, \beta]$ получится сложением разностей $\lambda(\alpha)-\lambda(\gamma)$ и $\lambda(\gamma)-\lambda(\beta)$, что и завершает доказательство.

§ 3. Связь с теорией непрерывных дробей.

Если x закреплено, то частное

$$\frac{\tilde{\omega}_n(t)-\tilde{\omega}_n(x)}{t-x} \qquad (n>0)$$

представляет собой целый полином степени $n-1$ относительно t. Ввиду симметричности этой функции она будет целым полиномом степени $n-1$ и относительно x. Значит, функция

$$\psi_n(x)=\int_a^b p(t)\,\frac{\tilde{\omega}_n(t)-\tilde{\omega}_n(x)}{t-x}\,dt \qquad (n>0) \quad (80)$$

тоже есть полином степени $n-1$.

Теорема 1. *Справедлива рекуррентная формула*

$$\psi_{n+2}(x)=(x-\alpha_{n+2})\,\psi_{n+1}(x)-\lambda_{n+1}\,\psi_n(x) \qquad (81)$$

$$(n=1,\ 2,\ \ldots),$$

в которой α_{n+2} *и* λ_{n+1} *имеют те же значения, что и в формуле* (68).

В самом деле, в силу (68):

$$\tilde{\omega}_{n+2}(t)-\tilde{\omega}_{n+2}(x)=t\,\tilde{\omega}_{n+1}(t)-x\,\tilde{\omega}_{n+1}(x)-$$
$$-\alpha_{n+2}\,[\tilde{\omega}_{n+1}(t)-\tilde{\omega}_{n+1}(x)]-\lambda_{n+1}\,[\tilde{\omega}_n(t)-\tilde{\omega}_n(x)].$$

Отсюда

$$\tilde{\omega}_{n+2}(t)-\tilde{\omega}_{n+2}(x)=(t-x)\,\tilde{\omega}_{n+1}(t)+$$
$$+(x-\alpha_{n+2})\,[\tilde{\omega}_{n+1}(t)-\tilde{\omega}_{n+1}(x)]-\lambda_{n+1}\,[\tilde{\omega}_n(t)-\tilde{\omega}_n(x)].$$

Разделив это равенство на $t-x$, умножим результат на $p(t)$ и проинтегрируем. Так как

$$\int_a^b p(t)\,\tilde{\omega}_{n+1}(t)\,dt=0,$$

то мы и получим (81). Формула (81) справедлива и для $n=0$, если условиться, что

$$\psi_0(x)=0.$$

Введём обозначение

$$\lambda_0 = \int_a^b p(x)\,dx = \psi_1(x)$$

и обозначим через α_1 корень полинома $\omega_1(x)$. В таком случае дробь

$$\frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)} \tag{82}$$

представит собой n-ю подходящую для непрерывной дроби

$$\cfrac{\lambda_0}{x-\alpha_1-\cfrac{\lambda_1}{x-\alpha_2-\cfrac{\lambda_2}{x-\alpha_3-\ldots}}}. \tag{83}$$

В самом деле, первая подходящая для (83)—

$$\frac{\lambda_0}{x-\alpha_1} = \frac{\psi_1(x)}{\tilde{\omega}_1(x)},$$

вторая—

$$\cfrac{\lambda_0}{x-\alpha_1-\cfrac{\lambda_1}{x-\alpha_2}} = \cfrac{\psi_1(x)}{\tilde{\omega}_1(x)-\cfrac{\lambda_1}{x-\alpha_2}} =$$

$$= \frac{(x-\alpha_2)\psi_1(x)-\lambda_1\psi_0(x)}{(x-\alpha_2)\tilde{\omega}_1(x)-\lambda_1\tilde{\omega}_0(x)} = \frac{\psi_2(x)}{\tilde{\omega}_2(x)},$$

после чего доказательство нашего утверждения вытекает из общих свойств непрерывных дробей.

Теорема 2 (Т. И. Стилтьес). *Если x — вещественное число, лежащее вне сегмента $[a, b]$, то дробь* (83) *сходится и её значением является интеграл*

$$\int_a^b \frac{p(t)\,dt}{x-t}. \tag{84}$$

Доказательство*). Пусть для определённости будет $x > b$. Рассмотрим функцию от n переменных

---

*) Стилтьес [1] (письмо № 167). Другое доказательство (того же автора) см. в § 3 главы V третьей части.

$z_1, z_2, \ldots, z_n$:

$$\Phi_n(z_1, z_2, \ldots, z_n) = \\ = \int_a^b [1 + z_1(x-t) + z_2(x-t)^2 + \ldots + z_n(x-t)^n]^2 \frac{p(t)\,dt}{x-t}$$

и поставим вопрос о том, при каких значениях $z_1, z_2, \ldots, z_n$ эта функция примет наименьшее значение.

Такие значения заведомо существуют и единственны, потому что поставленная задача есть задача наилучшего приближения в среднем по весу $\frac{p(t)}{x-t}$ функции $f(t) = -1$ линейными комбинациями *линейно независимых* функций $x-t, (x-t)^2, \ldots, (x-t)^n$.

Как известно, искомые значения $z_1, z_2, \ldots, z_n$ должны удовлетворять уравнениям

$$\frac{\partial \Phi_n}{\partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial z_2} = 0, \quad \ldots, \quad \frac{\partial \Phi_n}{\partial z_n} = 0.$$

Поэтому если искомые значения переменных суть $\bar{z}_1, \bar{z}_2, \ldots, \bar{z}_n$, то

$$\frac{1}{2}\frac{\partial \Phi_n}{\partial z_i} = \int_a^b p(t)\,[1 + \bar{z}_1(x-t) + \ldots \\ \ldots + \bar{z}_n(x-t)^n]\,(x-t)^{i-1}\,dt = 0 \quad (85)$$

$$(i = 1, 2, \ldots, n).$$

Положим для краткости

$$1 + \bar{z}_1(x-t) + \bar{z}_2(x-t)^2 + \ldots + \bar{z}_n(x-t)^n = H(t).$$

Тогда (85) означает, что

$$\int_a^b p(t)\,H(t)\,(x-t)^{i-1}\,dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Заменяя здесь i на $1, 2, \ldots, n$, легко убедимся, что

$$\int_a^b p(t)\,H(t)\,t^k\,dt = 0 \qquad (k = 0, 1, \ldots, n-1),$$

т. е. $H(t)$ есть полином степени n, который по весу $p(t)$ ортогонален ко всем низшим степеням t. В таком случае $H(t)$ может лишь постоянным множителем отличаться от $\tilde{\omega}_n(t)$. Итак,

$$H(t) = C\tilde{\omega}_n(t).$$

Полагая здесь $t = x$, получим, что $1 = C\tilde{\omega}_n(x)$, откуда

$$H(t) = \frac{\tilde{\omega}_n(t)}{\tilde{\omega}_n(x)}.$$

Таким образом минимальное значение функции Φ_n, которое мы обозначим через M_n, есть

$$M_n = \int_a^b p(t)\left[\frac{\tilde{\omega}_n(t)}{\tilde{\omega}_n(x)}\right]^2 \frac{dt}{x-t} =$$

$$= \int_a^b p(t)\,\frac{\tilde{\omega}_n(t)}{\tilde{\omega}_n(x)}\left[1 + \sum_{i=1}^{n} \bar{z}_i (x-t)^i\right]\frac{dt}{x-t}.$$

Но

$$\int_a^b p(t)\,\tilde{\omega}_n(t)\,(x-t)^{i-1}\,dt = 0 \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

Значит,

$$M_n = \int_a^b p(t)\,\frac{\tilde{\omega}_n(t)}{\tilde{\omega}_n(x)}\,\frac{dt}{x-t} = \int_a^b p(t)\,\frac{\tilde{\omega}_n(t) - \tilde{\omega}_n(x) + \tilde{\omega}_n(x)}{(x-t)\,\tilde{\omega}_n(x)}\,dt.$$

Отсюда

$$M_n = \int_a^b \frac{p(t)\,dt}{x-t} - \frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)}.$$

Таким образом дело свелось к доказательству равенства

$$\lim_{n\to\infty} M_n = 0. \tag{86}$$

С этой целью рассмотрим

$$M_{n-1} = \min\{\Phi_{n-1}(z_1, z_2, \ldots, z_{n-1})\}.$$

Если значения переменных, доставляющие минимум функции Φ_{n-1}, обозначить через $z_1^*, z_2^*, \ldots, z_{n-1}^*$, то, очевидно, окажется, что при любом λ

$$0 \leqslant M_n \leqslant \int_a^b p(t)\,\Big\{[1+z_1^*(x-t)+\ldots$$
$$\ldots+z_{n-1}^*(x-t)^{n-1}][1-\lambda(x-t)]\Big\}^2 \frac{dt}{x-t},$$

ибо интеграл, стоящий направо, является одним из значений функции Φ_n.

Полагая, в частности, $\lambda=\frac{1}{x-a}$ и замечая, что при $a \leqslant t \leqslant b$

$$0 \leqslant 1-\frac{x-t}{x-a} \leqslant \frac{b-a}{x-a}=q<1,$$

находим

$$0 \leqslant M_n \leqslant q^2 \int_a^b p(t)\,[1+z_1^*(x-t)+\ldots+z_{n-1}^*(x-t)^{n-1}]^2 \frac{dt}{x-t},$$

или, что то же самое,

$$0 \leqslant M_n \leqslant q^2 M_{n-1}.$$

Аналогично

$$0 \leqslant M_{n-1} \leqslant q^2 M_{n-2},$$
$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$
$$0 \leqslant M_2 \leqslant q^2 M_1,$$

и потому

$$0 \leqslant M_n \leqslant q^{2n-2} M_1,$$

откуда и следует (86). Заметим, что сходимость подходящих дробей $\frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)}$ к интегралу (84) оказывается равномерной на любом множестве, расстояние которого от $[a, b]$ положительно.

Интеграл (84) допускает ещё одно интересное разложение. Именно, если $|t|<|x|$, то

$$\frac{1}{1-\frac{t}{x}}=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{x^k},$$

Сходимость этой прогрессии равномерна для $t \in [a, b]$, если *)

$$|x| > \max\{|a|, |b|\}.$$

Для этих значений x оказывается

$$\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\,dt = \frac{1}{x}\int_a^b \frac{p(t)}{1-\frac{t}{x}}\,dt = \frac{1}{x}\int_a^b p(t)\left[\sum_{k=0}^{\infty}\frac{t^k}{x^k}\right]dt.$$

В силу равномерной сходимости допустимо почленное интегрирование, и потому

$$\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{x^{k+1}}\int_a^b p(t)\,t^k\,dt. \tag{87}$$

Интегралы, входящие в правую часть, суть *моменты* весовой функции $p(t)$, и потому окончательно

$$\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{\mu_k}{x^{k+1}}.$$

Теорема 3. *Подходящая* $\dfrac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)}$ *обладает тем свойством, что*

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2n+1}\left[\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\,dt - \frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)}\right] \tag{88}$$

существует и конечен, причём это — единственная рациональная дробь, знаменатель которой имеет степень не выше n, обладающая указанным свойством.

Действительно, из выражения $\psi_n(x)$ вытекает

$$\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\,dt - \frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)} = \frac{1}{\tilde{\omega}_n(x)}\int_a^b p(t)\,\frac{\tilde{\omega}_n(t)}{x-t}\,dt.$$

*) В самом деле, если $C = \max\{|a|, |b|\}$, то $[a, b] \subset [-C, C]$ и при $t \in [a, b]$ будет $|t| \leqslant C$.

Как и для равенства (87), мы убедимся, что для достаточно больших x

$$\int_a^b \frac{p(t)\,\tilde{\omega}_n(t)}{x-t}\,dt = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{x^{k+1}} \int_a^b p(t)\tilde{\omega}_n(t)\,t^k\,dt.$$

Но при $k<n$ функции t^k и $\omega_n(t)$ ортогональны по весу $p(t)$. Стало быть,

$$\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\,dt - \frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)} = \frac{1}{\tilde{\omega}_n(x)}\left[\frac{c_n}{x^{n+1}} + \frac{c_{n+1}}{x^{n+2}} + \ldots\right].$$

Так как

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{x^n}{\tilde{\omega}_n(x)} = 1,$$

то предел (88) существует и равен c_n.

Заметим ещё, что

$$t^n = \tilde{\omega}_n(t) + \rho(t),$$

где степень $\rho(t)$ ниже n, и потому

$$c_n = \int_a^b p(t)\,\tilde{\omega}_n(t)\,t^n\,dt = \int_a^b p(t)\tilde{\omega}_n^2(t)\,dt = \frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}.$$

Остаётся установить, что других рациональных функций с указанными свойствами не существует. Но если бы

$$\frac{h(x)}{q(x)} \qquad (q(x) = a_0 x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots)$$

была такой функцией, то должен был бы существовать конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2n+1}\left[\frac{(x)}{q(x)} - \frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)}\right].$$

С другой стороны, заведомо существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{q(x)\,\tilde{\omega}_n(x)}{x^{2n}} = a_0.$$

Поэтому должен существовать конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} x\,[h(x)\,\tilde{\omega}_n(x)-q(x)\,\psi_n(x)],$$

что, однако, возможно лишь при условии

$$h(x)\,\tilde{\omega}_n(x)-q(x)\,\psi_n(x)=0,$$

так что дробь $\frac{h(x)}{q(x)}$ должна совпадать с нашей подходящей.

Заметим, что дробь $\frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)}$ несократима. В самом деле, из рекуррентных формул (68) и (81) следует, что

$$\psi_{n+1}(x)=(x-\alpha_{n+1})\,\psi_n(x)-\lambda_n\psi_{n-1}(x);$$
$$\tilde{\omega}_{n+1}(x)=(x-\alpha_{n+1})\,\tilde{\omega}_n(x)-\lambda_n\,\tilde{\omega}_{n-1}(x).$$

Отсюда

$$\psi_{n+1}(x)\,\tilde{\omega}_n(x)-\psi_n(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}(x)=$$
$$=\lambda_n[\psi_n(x)\,\tilde{\omega}_{n-1}(x)-\psi_{n-1}(x)\,\tilde{\omega}_n(x)].$$

С помощью дальнейшего понижения значка n мы приходим к формуле

$$\psi_{n+1}(x)\,\tilde{\omega}_n(x)-\psi_n(x)\,\tilde{\omega}_{n+1}(x)=\lambda_n\lambda_{n-1}\ldots\lambda_1\lambda_0>0, \qquad (89)$$

имеющей и самостоятельный интерес. Из неё же, в частности, вытекает отсутствие общих корней у $\psi_n(x)$ и $\tilde{\omega}_n(x)$.

Из теоремы 3 и несократимости дроби $\frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)}$ вытекает, что если знаменатель рациональной дроби $\frac{h(x)}{q(x)}$ имеет степень не выше n и существует конечный предел

$$\lim_{x\to+\infty} x^{2n+1}\left[\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\,dt-\frac{h(x)}{q(x)}\right],$$

то $q(x)$ отличается от $\tilde{\omega}_n(x)$ разве лишь постоянным множителем*). Однако основанный на этом способ построения полиномов $\tilde{\omega}_n(x)$ нам представляется мало практичным.

Иллюстрируем изложенную теорию на примере полиномов Чебышева, которые, как нам известно ещё из первой части курса, образуют на сегменте $[-1, +1]$ ортогональную систему веса $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$.

Рекуррентная формула для полиномов Чебышева имеет вид

$$T_{n+2}(x) = 2xT_{n+1}(x) - T_n(x),$$

но при $n > 0$ старший коэффициент у $T_n(x)$ есть 2^{n-1}. Значит, для полиномов $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}} T_n(x)$ будет

$$\tilde{T}_{n+2}(x) = x\,\tilde{T}_{n+1}(x) - \frac{1}{4}\,\tilde{T}_n(x). \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Таким образом числа, обозначенные в общей теории через α_{n+2} и λ_{n+1}, суть

$$\alpha_{n+2} = 0, \; \lambda_{n+1} = \frac{1}{4} \qquad (n = 1, 2, \ldots).$$

Если же $n = 0$, то

$$T_2(x) = 2xT_1(x) - T_0(x)$$

и

$$T_0(x) = 1 = \tilde{T}_0(x).$$

Значит,

$$\tilde{T}_2(x) = x\tilde{T}_1(x) - \frac{1}{2}\,\tilde{T}_0(x).$$

---

*) Действительно, $\frac{h(x)}{q(x)} = \frac{\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)}$. Значит, $\frac{q(x)\,\psi_n(x)}{\tilde{\omega}_n(x)} = h(x)$, и $q(x)$ делится нацело на $\tilde{\omega}_n(x)$.

Таким образом

$$\alpha_2 = 0 \quad \text{и} \quad \lambda_1 = \frac{1}{2}.$$

Кроме того, α_1 обозначает корень полинома $T_1(x) = x$, и потому $\alpha_1 = 0$. Наконец,

$$\lambda_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

и потому

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(x-t)\sqrt{1-t^2}} = \cfrac{\pi}{x - \cfrac{1/2}{x - \cfrac{1/4}{x - \dots}}}.$$

С помощью подстановки $t = \frac{2u}{1+u^2}$ последний интеграл легко вычисляется:

$$\int_{-1}^{+1} \frac{dt}{(x-t)\sqrt{1-t^2}} = \frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} \qquad (x > 1),$$

и потому

$$\frac{1}{\sqrt{x^2-1}} = \cfrac{1}{x - \cfrac{1/2}{x - \cfrac{1/4}{x - \cfrac{1/4}{x - \dots}}}} \qquad (x > 1).$$

Знаменатели подходящих дробей здесь, как и должно быть, совпадают с полиномами $\tilde{T}_n(x)$.

Заметим, что по биномиальной формуле Ньютона

$$\frac{\pi}{\sqrt{x^2-1}} = \frac{\pi}{x}\left(1 - \frac{1}{x^2}\right)^{-1/2} =$$
$$= \frac{\pi}{x}\left[1 + \frac{1}{2}\,\frac{1}{x^2} + \frac{3!!}{2^2 \cdot 2!}\,\frac{1}{x^4} + \frac{5!!}{2^3 \cdot 3!}\,\frac{1}{x^6} + \dots\right].$$

Значит, моменты весовой функции $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ суть

$$\mu_0 = \int_{-1}^{+1} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} = \pi,$$

$$\mu_{2n-1} = \int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n-1}dx}{\sqrt{1-x^2}} = 0,$$

$$\mu_{2n} = \int_{-1}^{+1} \frac{x^{2n}dx}{\sqrt{1-x^2}} = \frac{(2n-1)!!}{2^n n!}\pi.$$

§ 4. Формула Кристоффеля—Дарбу. Сходимость ортогональных разложений.

Пусть $\{\omega_n(x)\}$ есть ортонормальная система веса $p(x)$ и $f(x)$—какая-нибудь функция из $L_{p(x)}$.

Ряд Фурье этой функции имеет вид

$$\sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(x) \qquad \left(c_k = \int_a^b p(t) f(t) \omega_k(t)\, dt\right). \tag{90}$$

Если частную сумму

$$\sum_{k=0}^{n} c_k \omega_k(x)$$

обозначить через $S_n(x)$, то для $S_n(x)$ получается выражение

$$S_n(x) = \int_a^b p(t) f(t) \left[\sum_{k=0}^{n} \omega_k(t) \omega_k(x)\right] dt. \tag{91}$$

Выражение

$$K_n(t, x) = \sum_{k=0}^{n} \omega_k(t) \omega_k(x) \tag{92}$$

называется *ядром* интеграла (91). Оно играет важную роль при исследовании сходимости ряда (90).

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$K_n(t, x) = \sqrt{\lambda_{n+1}}\,\frac{\omega_{n+1}(t)\,\omega_n(x) - \omega_{n+1}(x)\,\omega_n(t)}{t - x}. \qquad (93)$$

Эта формула называется*) *формулой Кристоффеля — Дарбу.*

Для доказательства перепишем рекуррентную формулу (70), уменьшив значок n на единицу:

$$\sqrt{\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}}\,\omega_{n+1}(x) =$$
$$= (x - \alpha_{n+1})\sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\,\omega_n(x) - \lambda_n\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}}\,\omega_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1). \quad (94)$$

Здесь

$$\lambda_n = \frac{\Delta_{n-2}\Delta_n}{\Delta_{n-1}^2}. \qquad (95)$$

Умножим (94) на $\omega_n(t)$ и из полученного равенства вычтем то равенство, которое получается из него перестановкой букв t и x:

$$\sqrt{\frac{\Delta_{n+1}}{\Delta_n}}\,[\omega_{n+1}(x)\,\omega_n(t) - \omega_{n+1}(t)\,\omega_n(x)] =$$
$$= \sqrt{\frac{\Delta_n}{\Delta_{n-1}}}\,(x - t)\,\omega_n(t)\,\omega_n(x) +$$
$$+ \lambda_n\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_{n-2}}}\,[\omega_n(x)\,\omega_{n-1}(t) - \omega_n(t)\,\omega_{n-1}(x)].$$

Умножив это равенство на $\sqrt{\frac{\Delta_{n-1}}{\Delta_n}}$ и приняв во внимание (95), получаем

$$\sqrt{\lambda_{n+1}}\,[\omega_{n+1}(x)\,\omega_n(t) - \omega_{n+1}(t)\,\omega_n(x)] = (x - t)\,\omega_n(t)\,\omega_n(x) +$$
$$+ \sqrt{\lambda_n}\,[\omega_n(x)\,\omega_{n-1}(t) - \omega_n(t)\,\omega_{n-1}(x)]. \quad (96)$$

Заменим здесь n последовательно на $n-1$, $n-2, \ldots$ $\ldots, 1$ и сложим полученные равенства друг с другом

*) Кристоффель ([1], стр. 73) доказал её для $p(x) = 1$, $a = -1$, $b = +1$, т. е. для полиномов Лежандра, а Дарбу ([1], стр. 411) обобщил на случай произвольного веса.

и с (96). После очевидных сокращений окажется

$$\sqrt{\lambda_{n+1}}\,[\omega_{n+1}(x)\,\omega_n(t)-\omega_{n+1}(t)\,\omega_n(x)]=$$

$$=(x-t)\sum_{k=1}^{n}\omega_k(t)\,\omega_k(x)+\sqrt{\lambda_1}\,[\omega_1(x)\,\omega_0(t)-\omega_1(t)\,\omega_0(x)].$$

Но

$$\omega_0(x)=\omega_0(t)=\frac{1}{\sqrt{\Delta_0}},\quad \omega_1(x)=\sqrt{\frac{\Delta_0}{\Delta_1}}\,(x-\alpha_1),\ \lambda_1=\frac{\Delta_1}{\Delta_0^2}.$$

Значит,

$$\sqrt{\lambda_1}\,[\omega_1(x)\,\omega_0(t)-\omega_1(t)\,\omega_0(x)]=\frac{x-t}{\Delta_0}=(x-t)\,\omega_0(t)\,\omega_0(x),$$

откуда и следует (93).

Как было доказано выше, справедлива оценка

$$\sqrt{\lambda_{n+1}}\leqslant C=\max\{|a|,\ |b|\}.$$

Поэтому

$$K_n(t,\ x)=\theta_n C\,\frac{\omega_{n+1}(t)\,\omega_n(x)-\omega_{n+1}(x)\,\omega_n(t)}{t-x}\qquad (0<\theta_n\leqslant 1).$$

В силу очевидного равенства

$$\int_a^b p(t)\,K_n(t,\ x)\,dt=1,$$

оказывается

$$S_n(x)-f(x)=$$

$$=\theta_n C\int_a^b p(t)\,\varphi_x(t)\,[\omega_{n+1}(t)\,\omega_n(x)-\omega_{n+1}(x)\,\omega_n(t)]\,dt,\qquad (97)$$

где положено для краткости

$$\varphi_x(t)=\frac{f(t)-f(x)}{t-x}.\qquad (98)$$

Предположим, что функция $\varphi_x(t)$ входит в $L^2_{p(t)}$ (это возможно лишь при условии, что и $f(t)$ входит в этот класс).

Если коэффициенты Фурье функции $\varphi_x(t)$ обозначить через d_n, то равенство (97) можно будет записать в форме

$$S_n(x)-f(x)=\theta_n C\,[d_{n+1}\,\omega_n(x)-d_n\,\omega_{n+1}(x)].\qquad (99)$$

В силу сходимости ряда $\sum d_n^2$,

$$\lim_{n\to\infty} d_n = 0.$$

Отсюда и из (99) вытекает

Теорема 2. *Если все полиномы $\omega_n(x)$ в точке x ограничены и функция $\varphi_x(t)$ входит в $L^2_{p(t)}$, то в точке x имеет место равенство*

$$f(x) = \sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(x).$$

Если полиномы $\omega_n(x)$ *равномерно* ограничены *) (таковы, например, полиномы Чебышева), то в теореме 2 нет надобности требовать, чтобы $\varphi_x(t)$ входила в $L^2_{p(t)}$, а достаточно включения $\varphi_x(t) \in L_{p(t)}$.

Чтобы это доказать, потребуется

Теорема 3. *Если полиномы $\omega_n(x)$ равномерно ограничены, то для любой функции $\varphi(x)$ из $L_{p(x)}$*

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x)\varphi(x)\omega_n(x)\,dx = 0.$$

В самом деле, благодаря абсолютной непрерывности интеграла мы можем для любого $\varepsilon > 0$ указать такое $\delta > 0$, что

$$\int_e p(x)|\varphi(x)|\,dx < \varepsilon$$

каково бы ни было множество $e \subset [a, b]$ с мерой $me < \delta$. С другой стороны, для найденного δ можно указать столь большое K, что

$$mE(|\varphi| > K) < \delta.$$

Сделав это, введём функции

$$\varphi_1(x) = \begin{cases} \varphi(x), & \text{если } |\varphi(x)| \leqslant K, \\ 0, & \text{если } |\varphi(x)| > K. \end{cases}$$

$$\varphi_2(x) = \begin{cases} 0, & \text{если } |\varphi(x)| \leqslant K, \\ \varphi(x), & \text{если } |\varphi(x)| > K. \end{cases}$$

---

*) Разумеется, речь идёт об ограниченности на основном сегменте $[a, b]$.

Очевидно,

$$\int_a^b p\varphi\omega_n\,dx = \int_a^b p\varphi_1\omega_n dx + \int_a^b p\varphi_2\omega_n dx.$$

Функция $\varphi_1(x)$, будучи ограниченной, входит в $L^2_{p(x)}$. Значит, её коэффициенты Фурье стремятся к нулю и для достаточно больших n окажется

$$\left|\int_a^b p(x)\,\varphi_1(x)\,\omega_n(x)\,dx\right| < \varepsilon.$$

С другой стороны, если M есть число, которого не превосходят $|\omega_n(x)|$, то при всех n

$$\left|\int_a^b p(x)\,\varphi_2(x)\,\omega_n(x)\,dx\right| \leqslant M \int\limits_{E(|\varphi|>K)} p(x)\,|\varphi(x)|\,dx < M\varepsilon.$$

Значит, для указанных больших n

$$\left|\int_a^b p(x)\,\varphi(x)\,\omega_n(x)\,dx\right| < (M+1)\,\varepsilon.$$

Теорема доказана. Из неё и из (99) вытекает

Теорема 4. *Функция $f(x)$, входящая в $L_{p(x)}$, разлагается в ряд Фурье по любой равномерно ограниченной ортонормальной системе полиномов во всякой точке x, для которой $\varphi_x(t)$ входит в $L_{p(t)}$.*

В частности, эта теорема применима к функциям, входящим в $\mathrm{Lip}\,\alpha$ при любом $\alpha > 0$, если только вес $p(x)$ *ограничен*, а также к функциям класса $\mathrm{Lip}\,1$ при любом весе.

Из изложенных соображений вытекает следующий результат, называемый *принципом локализации*:

Теорема 5. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$, входящие в $L^2_{p(x)}$, совпадают в интервале $(x_0-h,\ x_0+h)$, а в точке x_0 полиномы $\omega_n(x)$ ограничены, то*

$$\lim_{n\to\infty}\{S_n[f;\ x_0]-S_n[g;\ x_0]\}=0.$$

Здесь $S_n[f; x_0]$ означает сумму Фурье функции $f(x)$, вычисленную в точке x_0. Для доказательства теоремы заметим, что

$$S_n[f; x_0]-S_n[g; x_0]=S_n[r; x_0],$$

где $r(x)=f(x)-g(x)$. Так как $r(x_0)=0$, то дело сводится к теореме 2, ибо функция $\frac{r(t)}{x_0-t}$, исчезающая на (x_0-h, x_0+h), заведомо входит в $L^2_{p(t)}$.

Если полиномы $\omega_n(x)$ *равномерно* ограничены на $[a, b]$, то в теореме 5 достаточно потребовать, чтобы функции $f(x)$ и $g(x)$ входили в $L_{p(x)}$.

Если не предполагать ограниченности полиномов $\omega_n(x)$, то предыдущие теоремы неприменимы. Тем не менее справедлива

Теорема 6 (И. П. Натансон [1]). *Если $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$, где $\alpha > \frac{1}{2}$, то равенство*

$$f(x)=\sum_{k=0}^{\infty} c_k \omega_k(x) \tag{100}$$

выполняется почти везде на $[a, b]$.

В самом деле, по теореме Джексона из § 2 главы VI первой части курса найдётся для любого n полином $P_n(x)$ степени не выше n, для которого

$$|P_n(x)-f(x)|<\frac{A}{n^\alpha},$$

где A—некоторая постоянная. Но по теореме Теплера сумма Фурье $S_n(x)$ удовлетворяет условию

$$\int_a^b p(x)[S_n(x)-f(x)]^2\,dx \leqslant \int_a^b p(x)[P_n(x)-f(x)]^2\,dx.$$

Значит,

$$\int_a^b p(x)[S_n(x)-f(x)]^2\,dx \leqslant \frac{A^2\mu_0}{n^{2\alpha}} \qquad \left(\mu_0=\int_a^b p(x)\,dx\right),$$

и ряд

$$\sum_{n=1}^{\infty} \int_a^b p(x)[S_n(x)-f(x)]^2\, dx$$

сходится. Отсюда на основании теоремы Б. Леви и вытекает наше утверждение.

Пользуясь более сильными средствами, А. Н. Колмогоров [2] обобщил этот результат на случай любого $\alpha > 0$. При помощи этих же более сильных средств И. П. Натансон [2] доказал, что любая функция ограниченной вариации почти везде разлагается по полиномам $\omega_n(x)$, если

$$p(x) < \frac{A}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Недостатком всех этих исследований является отсутствие характеристики точек, в которых имеет место (100).

Существует другой подход к проблемам разложения функций в ряды по ортогональным полиномам, связывающий эти проблемы с теорией равномерных приближений. В основе этого подхода лежит то обстоятельство, что для любого $P_n(x)$ степени не выше n

$$S_n[P_n;\ x] = P_n(x).$$

Положим

$$\int_a^b p(t)\,|K_n(t,\ x)|\, dt = L_n(x);$$

эта величина называется *функцией Лебега* ортонормальной системы $\{\omega_n(x)\}$. Из формулы (91) вытекает, что для ограниченной функции $f(x)$, удовлетворяющей неравенству $|f(x)| \leqslant M$,

$$|S_n[f;\ x_0]| \leqslant ML_n(x_0).$$

Отсюда следует

Теорема 7. *Пусть $f(x)$—непрерывная функция, обладающая тем свойством, что её наилучшие прибли-*

жения полиномами удовлетворяют условию

$$L_n(x_0)E_n(f)\xrightarrow[n\to\infty]{}0.$$

В таком случае эта функция в точке x_0 *разлагается в ряд Фурье по полиномам* $\omega_n(x)$.

В самом деле, пусть $P_n(x)$ есть полином наилучшего приближения нашей функции

$$|P_n(x)-f(x)|\leqslant E_n(f).$$

Тогда

$$f(x)-S_n[f;\ x]=f(x)-P_n(x)+S_n[P_n-f;\ x],$$

и потому

$$|f(x_0)-S_n[f;\ x_0]|\leqslant E_n(f)+L_n(x_0)E_n(f), \tag{101}$$

что и доказывает теорему.

Положим

$$L_n=\max L_n(x).$$

Из оценки (101) вытекает, что при условии

$$\lim_{n\to\infty}L_nE_n(f)=0$$

можно гарантировать *равномерную* сходимость ряда

$$\sum_{k=0}^{\infty}c_k\omega_k(x)=f(x).$$

Пример. Найдём функцию Лебега для ортонормальной системы полиномов Чебышева*)

$$\hat{T}_0(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}},\quad \hat{T}_n(x)=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\cos(n\arccos x).$$

Здесь

$$L_n(x)=\int_{-1}^{+1}\left|\sum_{k=0}^{n}\hat{T}_k(t)\,\hat{T}_k(x)\right|\frac{dt}{\sqrt{1-t^2}}.$$

*) Следуя В. Л. Гончарову, мы обозначаем *нормированные* полиномы Чебышева знаком $\hat{T}_n(x)$.

Полагая $\arccos x = \xi$, $\arccos t = \tau$, находим

$$L_n(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{\pi} \left| 1 + 2 \sum_{k=1}^{n} \cos k\tau \cos k\xi \right| d\tau,$$

откуда благодаря чётности подинтегральной функции

$$L_n(x) = \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| 1 + \sum_{k=1}^{n} [\cos k(\tau+\xi) + \cos k(\tau-\xi)] \right| d\tau.$$

Значит,

$$L_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(\tau+\xi) \right| d\tau + \\ + \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k(\tau-\xi) \right| d\tau.$$

Делая в первом интеграле подстановку $\tau = \varphi - \xi$, а во втором $\tau = \varphi + \xi$ (причём, в силу 2π-периодичности, можно оставить прежние пределы интегрирования), получим

$$L_n(x) \leqslant \frac{1}{\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi \right| d\varphi.$$

Но (см. часть первая, формула (175))

$$\frac{1}{2} + \sum_{k=1}^{n} \cos k\varphi = \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \varphi}{2 \sin \frac{\varphi}{2}}.$$

Стало быть,

$$L_n(x) \leqslant \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} \left| \frac{\sin \frac{2n+1}{2} \varphi}{\sin \varphi} \right| d\varphi,$$

откуда

$$L_n(x) \leqslant \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi/2} \left| \frac{\sin(2n+1)t}{\sin t} \right| dt.$$

Пользуясь оценкой (178) из первой части, находим окончательно

$$L_n(x) \leqslant 2 + \ln n.$$

Поэтому все функции $f(x)$, для которых

$$\lim_{n \to \infty} [E_n(f) \ln n] = 0,$$

разлагаются в равномерно сходящийся ряд по полиномам Чебышева.

По теореме Джексона последнее условие заведомо выполнено, если модуль непрерывности функции $f(x)$ таков, что

$$\lim_{\delta \to 0} [\omega(\delta) \ln \delta] = 0,$$

и мы снова получаем теорему, установленную в § 1 главы X первой части.

В заключение приведём чрезвычайно важный отрицательный результат, существенно дополняющий сказанное в этом параграфе.

Теорема 8 (В. Ф. Николаев [1]). *Не существует такого веса $p(x)$, чтобы любая непрерывная функция разлагалась в равномерно сходящийся ряд Фурье по ортогональным полиномам этого веса.*

По поводу доказательства отсылаем читателя к «Добавлению 3» в конце книги.

§ 5. Преобразования весовой функции.

Как мы видели, в вопросах сходимости ортогональных разложений важную роль играет ограниченность полиномов $\omega_n(x)$ в отдельных точках и на всём сегменте $[a, b]$. Представляет интерес установить такие условия, которым должна удовлетворять весовая функция, чтобы эта ограниченность имела место. Для некоторых весовых функций, как, например, для чебышевского веса $(1-x^2)^{-\frac{1}{2}}$ такая ограниченность нам известна. Поэтому естественна следующая

Задача. *Ортогональные полиномы* $\omega_n(x)$, *отвечающие весовой функции* $p(x)$, *ограничены в точке* x_0:

$$|\omega_n(x_0)| \leqslant M \qquad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Рассматривается новая весовая функция)* $p(x)\sigma(x)$ *и соответствующие ортогональные полиномы* $\varphi_n(x)$. *Спрашивается, какие свойства множителя* $\sigma(x)$ *обеспечивают ограниченность* $\varphi_n(x)$ *в точке* x_0.

Теорема 1. *Если* $\sigma(x)$ — *полином, то*

$$|\varphi_n(x_0)| \leqslant \frac{M\sqrt{K}(m+1)}{\sigma(x_0)}, \tag{102}$$

где K — *максимум* $\sigma(x)$, *а* m — *степень* $\sigma(x)$.

В самом деле, $\sigma(x)\,\varphi_n(x)$ допускает представление

$$\sigma(x)\,\varphi_n(x) = c_0\omega_0(x) + c_1\omega_1(x) + \ldots + c_{n+m}\omega_{n+m}(x), \tag{103}$$

где

$$c_i = \int_a^b p(x)\,\sigma(x)\,\varphi_n(x)\,\omega_i(x)\,dx.$$

Если $i<n$, то $c_i=0$, ибо $\varphi_n(x)$ ортогонален по весу $p(x)\sigma(x)$ ко всем полиномам низшей степени. Значит, в (103) имеется лишь $m+1$ слагаемых. Пусть $n \leqslant i \leqslant n+m$. В силу неравенства Буняковского

$$c_i^2 \leqslant \left(\int_a^b p(x)\,\sigma^2(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx\right)\left(\int_a^b p(x)\,\omega_i^2(x)\,dx\right).$$

Последний интеграл равен единице. С другой стороны,

$$\int_a^b p(x)\,\sigma^2(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx \leqslant K\int_a^b p(x)\,\sigma(x)\,\varphi_n^2(x)\,dx = K.$$

Значит,

$$|c_i| \leqslant \sqrt{K},$$

что и доказывает оценку (102).

---

*) Разумеется $\sigma(x)$ неотрицательна, входит в $L_{p(x)}$ и почти везде отлична от нуля.

Следствие 1. *Если полиномы $\omega_n(x)$ равномерно ограничены, а $\sigma(x)$ имеет положительную нижнюю границу, то и $\varphi_n(x)$ равномерно ограничены.*

Следствие 2. *Полиномы, отвечающие весу*

$$(1-x)^{A-\frac{1}{2}}(1+x)^{B-\frac{1}{2}} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1), \tag{104}$$

где A и B — натуральные числа, ограничены в каждой точке интервала $(-1, +1)$.

Теорема 2 (Дж. Пиблс). *Если $\sigma(x)=\frac{1}{Q(x)}$, где $Q(x)$ — полином степени m, то**)*

$$|\varphi_n(x_0)| \leqslant M\sqrt{K}(m+1), \tag{105}$$

где положено $K=\max Q(x)$.

В самом деле, в равенстве

$$\varphi_n(x)=c_0\omega_0(x)+c_1\omega_1(x)+\ldots+c_n\omega_n(x)$$

будет

$$c_i=\int_a^b p(x)\varphi_n(x)\omega_i(x)\,dx.$$

Значит, для $i<n-m$ окажется

$$c_i=\int_a^b p(x)\sigma(x)\varphi_n(x)[Q(x)\omega_i(x)]\,dx=0$$

и, стало быть,

$$\varphi_n(x)=c_{n-m}\omega_{n-m}(x)+\ldots+c_n\omega_n(x). \tag{106}$$

Но, в силу неравенства Буняковского, для $n-m< <i\leqslant n$ будет

$$c_i^2 \leqslant \int_a^b p(x)\varphi_n^2(x)\,dx \leqslant K\int_a^b p(x)\sigma(x)\varphi_n^2(x)\,dx=K,$$

откуда в связи с (106) и вытекает (105).

*) Пиблс [1], стр. 92.

Комбинируя теоремы 1 и 2, нетрудно установить надлежащие оценки и для того случая, когда $\sigma(x)$ есть рациональная дробь.

Теорема 3 (Дж. Кораус [1]). *Если* $\sigma(x)$ *удовлетворяет условию Липшица*

$$|\sigma(y)-\sigma(x)|\leqslant K|y-x|$$

и имеет положительный минимум τ, *то*

$$|\varphi_n(x_0)|\leqslant\frac{\tau+2CK}{\sqrt{\tau^3}}M \qquad (C=\max\{|a|,\ |b|\}).$$

Полином $\varphi_n(x)$ можно записать в форме

$$\varphi_n(x)=\int_a^b p(t)\,\varphi_n(t)\,K_n(t,x)\,dt=$$

$$=\int_a^b p(t)\,\varphi_n(t)\,\omega_n(t)\,\omega_n(x)\,dt+\int_a^b p(t)\,\varphi_n(t)\,K_{n-1}(t,x)\,dt. \quad (107)$$

Так как $K_{n-1}(t,x)$ есть полином степени $n-1$ (относительно t), то

$$\int_a^b p(t)\,\sigma(t)\,\varphi_n(t)\,K_{n-1}(t,x)\,dt=0.$$

Поэтому

$$\sigma(x)\int_a^b p(t)\,\varphi_n(t)\,K_{n-1}(t,x)\,dt=$$

$$=\int_a^b p(t)\,[\sigma(x)-\sigma(t)]\,\varphi_n(t)\,K_{n-1}(t,x)\,dt.$$

На основании формулы Кристоффеля—Дарбу

$$K_{n-1}(t,x)=\sqrt{\lambda_n}\,\frac{\omega_n(x)\,\omega_{n-1}(t)-\omega_n(t)\,\omega_{n-1}(x)}{x-t}.$$

Поэтому последний интеграл равенства (107) можно записать так:

$$\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sigma(x)}\int_a^b p(t)\,\frac{\sigma(x)-\sigma(t)}{x-t}\,\varphi_n(t)\times$$
$$\times[\omega_n(x)\,\omega_{n-1}(t)-\omega_n(t)\,\omega_{n-1}(x)]\,dt.$$

Но

$$\left|\int_a^b p(t)\,\frac{\sigma(x)-\sigma(t)}{x-t}\,\varphi_n(t)\,\omega_n(t)\,dt\right| \leqslant$$
$$\leqslant K\int_a^b p(t)\,|\varphi_n(t)|\;|\omega_n(t)|\,dt,$$

а в силу неравенства Буняковского,

$$\int_a^b p(t)\,|\varphi_n(t)|\,|\,\omega_n(t)\,|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\tau}}\int_a^b p(t)\,\{\sqrt{\sigma(t)}\,|\varphi_n(t)|\}\,|\omega_n(t)|\,dt \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{\sqrt{\tau}}\left\{\int_a^b p(t)\,\sigma(t)\,\varphi_n^2(t)\,dt\right\}^{1/2}\left\{\int_a^b p(t)\,\omega_n^2(t)\,dt\right\}^{1/2}=$$
$$=\frac{1}{\sqrt{\tau}}. \qquad (108)$$

Такая же оценка верна и тогда, когда $\omega_n(t)$ заменён на $\omega_{n-1}(t)$.

Стало быть, в силу (107) и (108),

$$\varphi_n(x)\,|\leqslant\frac{|\,\omega_n(x)\,|}{\sqrt{\tau}}+\frac{\sqrt{\lambda_n}}{\sigma(x)}\,K\,\frac{|\,\omega_n(x)\,|+|\,\omega_{n-1}(x)\,|}{\sqrt{\tau}}\,.$$

Отсюда благодаря неравенству $\sqrt{\lambda_n}\leqslant C$ и следует теорема.

В случае, рассмотренном в теореме 1, когда $\sigma(x)$ есть полином, можно дать явное выражение полиномов $\varphi_n(x)$ через полиномы $\omega_n(x)$. Именно, пусть

$$\sigma(x) = A(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_m)$$

разложение $\sigma(x)$ на линейные множители. Мы ограничимся случаем, когда $\sigma(x)$ имеет только простые корни. Тогда все числа ξ_i (вещественные или комплексные и попарно сопряжённые) будут лежать вне интервала (a, b), так как в этом интервале $\sigma(x)$ не меняет знака. Положим

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} \omega_n(\xi_1) & \omega_n(\xi_2) & \ldots & \omega_n(\xi_m) & \omega_n(x) \\ \omega_{n+1}(\xi_1) & \omega_{n+1}(\xi_2) & \ldots & \omega_{n+1}(\xi_m) & \omega_{n+1}(x) \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \omega_{n+m}(\xi_1) & \omega_{n+m}(\xi_2) & \ldots & \omega_{n+m}(\xi_m) & \omega_{n+m}(x) \end{vmatrix}. \quad (109)$$

Очевидно, $Q_n(x)$ есть полином степени $n+m$, имеющий точки $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ корнями. Значит, частное

$$\frac{Q_n(x)}{\sigma(x)}$$

есть целый полином степени n. С другой стороны, для любого полинома $R_i(x)$ степени $i<n$ будет

$$\int_a^b p(x)\,Q_n(x)\,R_i(x)\,dx = 0, \quad (110)$$

так как $Q_n(x)$ есть линейная комбинация полиномов $\omega_n(x), \ldots, \omega_{n+m}(x)$, каждый из которых ортогонален по весу $p(x)$ к низшим степеням x.

Равенство (110) можно записать в форме

$$\int_a^b p(x)\,\sigma(x)\,\frac{Q_n(x)}{\sigma(x)}\,R_i(x)\,dx = 0.$$

Отсюда вытекает, что полином $\frac{Q_n(x)}{\sigma(x)}$ степени n ортогонален по весу $p(x)\,\sigma(x)$ ко всем полиномам низших степеней. Это возможно лишь тогда, когда этот полином отличается от $\varphi_n(x)$ только постоянным множителем. Значит,

$$\varphi_n(x) = K\frac{Q_n(x)}{\sigma(x)}. \tag{111}$$

Множитель K легко находится из условия нормированности $\varphi_n(x)$:

$$K^2\int_a^b p(x)\sigma(x)\left[\frac{Q_n(x)}{\sigma(x)}\right]^2 dx = 1. \tag{112}$$

Замечание 1. Для полноты проведённого рассуждения мы должны удостовериться, что $Q_n(x)$ не есть тождественный нуль. Обращая внимание на минор элемента $\omega_{n+m}(x)$, мы видим, что для этого достаточна следующая

Лемма. *Если вещественные или комплексные и попарно сопряжённые числа $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_m$ различны между собой и лежат вне интервала (a, b), то определитель*

$$\Delta = \begin{vmatrix} \omega_n(\xi_1) & \omega_n(\xi_2) & \ldots & \omega_n(\xi_m) \\ \omega_{n+1}(\xi_1) & \omega_{n+1}(\xi_2) & \ldots & \omega_{n+1}(\xi_m) \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \omega_{n+m-1}(\xi_1) & \omega_{n+m-1}(\xi_2) & \ldots & \omega_{n+m-1}(\xi_m) \end{vmatrix}$$

отличен от нуля.

Для доказательства *) заметим, что если определитель, столбцы которого вещественны или попарно комплексно сопряжены **), равен нулю, то между его строками имеет место линейная зависимость с вещественными коэффициентами, среди которых есть отличные от нуля.

В самом деле, пусть для конкретности вещественны все столбцы, кроме второго и третьего:

$$D = \begin{vmatrix} a_1 & b_1 + ic_1 & b_1 - ic_1 & \ldots & r_1 \\ a_2 & b_2 + ic_2 & b_2 - ic_2 & \ldots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n + ic_n & b_n - ic_n & \ldots & r_n \end{vmatrix} = 0.$$

*) Это доказательство сообщено мне проф. Д. К. Фаддеевым.

**) Ряд чисел $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ мы для краткости называем вещественным, если вещественны все α_k. Точно так же два ряда $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ и $\beta_1, \beta_2, \ldots, \beta_n$ мы называем взаимно сопряжёнными, если при всех k будет $\alpha_k = \bar{\beta}_k$.

Если прибавить третий столбец ко второму, вынести в полученном определителе множитель 2 из второго столбца и вычесть второй столбец из третьего, то мы увидим, что равен нулю определитель

$$\begin{vmatrix} a_1 & b_1 & c_1 & \dots & r_1 \\ a_2 & b_2 & c_2 & \dots & r_2 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ a_n & b_n & c_n & \dots & r_n \end{vmatrix},$$

в котором уже все элементы вещественны. Поэтому возможен подбор вещественных чисел A_1, A_2, $\dots$, A_n, среди которых есть отличные от нуля и для которых

$$\begin{aligned} A_1 a_1 + A_2 a_2 + \dots + A_n a_n &= 0, \\ A_1 b_1 + A_2 b_2 + \dots + A_n b_n &= 0, \\ A_1 c_1 + A_2 c_2 + \dots + A_n c_n &= 0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ A_1 r_1 + A_2 r_2 + \dots + A_n r_n &= 0. \end{aligned}$$

Но тогда справедливы и такие равенства:

$$\sum A_k a_k = 0, \quad \sum A_k (b_k + i c_k) = 0,$$
$$\sum A_k (b_k - i c_k) = 0, \quad \dots, \quad \sum A_k r_k = 0.$$

Установив это предложение, допустим, что $\Delta = 0$. Тогда найдутся вещественные числа A_1, A_2, $\dots$, A_m (не все равные нулю), для которых

$$A_1 \omega_n(\xi_k) + A_2 \omega_{n+1}(\xi_k) + \dots + A_m \omega_{n+m-1}(\xi_k) = 0$$
$$(k = 1, 2, \dots, m).$$

Положим

$$H(x) = A_1 \omega_n(x) + A_2 \omega_{n+1}(x) + \dots + A_m \omega_{n+m-1}(x).$$

Это — не тождественный нулю полином степени не выше $n + m - 1$, ортогональный ко всем полиномам степени ниже n и имеющий корнями все числа ξ_1, ξ_2, $\dots$, ξ_m. В таком случае $H(x)$ нацело делится на

$$\sigma(x) = (x - \xi_1)(x - \xi_2) \dots (x - \xi_m),$$

причём частное имеет степень не выше $n-1$. Обозначая это частное через $q(x)$, будем иметь

$$\int_a^b p(x)\ H(x)\ q(x)\,dx=0.$$

Но это невозможно, так как произведение

$$H(x)\,q(x)=\sigma(x)\,q^2(x)$$

не меняет знака на $[a, b]$. Лемма доказана.

Замечание 2. Может возникнуть сомнение в возможности нахождения K из равенства (112), так как $Q_n(x)$ есть полином с комплексными коэффициентами, и потому можно думать, что

$$\int_a^b p(x)\,\sigma(x)\left[\frac{Q_n(x)}{\sigma(x)}\right]^2 dx=0. \tag{113}$$

Однако равенство (113) невозможно, так как частное $\frac{Q_n(x)}{\sigma(x)}$ представимо в виде $\frac{\varphi_n(x)}{K}$.

Замечание 3. При указанном построении полиномов $\varphi_n(x)$ мы опирались только на то, что полиномы $\omega_n(x)$ ортогональны по весу $p(x)$, но не использовали факта их нормированности.

Пример. Построить полиномы $U_n(x)$, образующие на $[-1,+1]$ ортонормальную систему по весу $\sqrt{1-x^2}$.

Так как

$$\sqrt{1-x^2}=\frac{1-x^2}{\sqrt{1-x^2}},$$

а для веса $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$ ортогональная система нам известна — она состоит из полиномов Чебышева $T_n(x)$, то искомые полиномы $U_n(x)$ лишь постоянным множителем могут отличаться от

$$\frac{1}{1-x^2}\begin{vmatrix} T_n(1) & T_n(-1) & T_n(x) \\ T_{n+1}(1) & T_{n+1}(-1) & T_{n+1}(x) \\ T_{n+2}(1) & T_{n+2}(-1) & T_{n+2}(x) \end{vmatrix}. \tag{114}$$

Но $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Значит,

$$T_n(1) = 1, \quad T_n(-1) = (-1)^n,$$

и потому (114) есть

$$(-1)^{n+1} 2 \frac{T_{n+2}(x) - T_n(x)}{1 - x^2}.$$

Отсюда

$$U_n(x) = K \frac{T_{n+2}(x) - T_n(x)}{1 - x^2}. \tag{115}$$

Остаётся найти K из условия

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, U_n^2(x)\, dx = 1.$$

Подставляя сюда (115) и делая подстановку $x = \cos\theta$, находим

$$K = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Исходя из (115) и того факта, что $|T_n(x)| \leqslant 1$, мы получаем оценку

$$|U_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 - x^2}. \tag{116}$$

Эта оценка лучше, чем доставляемая теоремой 1. В самом деле, нормированные полиномы Чебышева суть $\sqrt{\frac{2}{\pi}} T_n(x)$ (для $n > 0$). Значит, для нашего случая оценка (102) принимает вид

$$U_n(x)| \leqslant 3 \sqrt{\frac{2}{\pi}} \frac{1}{1 - x^2}.$$

Полиномы $U_n(x)$ обладают многими важными свойствами. Ниже, в главе VI, мы ещё вернёмся к ним. В частности, там мы дадим для них лучшую оценку, чем (116).

ГЛАВА V.

ПОЛИНОМЫ ЛЕЖАНДРА.

§ 1. Формула Родрига.

Определение. Полиномы $X_n(x)$, образующие ортогональную систему веса $p(x)=1$ на сегменте $[-1, +1]$, называются *полиномами Лежандра*.

Так как мы не потребовали здесь нормированности этих полиномов, то предыдущая фраза определяет их лишь с точностью до постоянного множителя. В частности, если этот множитель выбран так, что полином оказывается нормированным (и его старший коэффициент положителен), мы будем, следуя В. Л. Гончарову, обозначать полином через $\hat{X}_n(x)$, а если старший коэффициент полинома равен единице, то через $\tilde{X}_n(x)$.

Рассматриваемые полиномы были введены Лежандром [1] в 1785 году. В 1814 году О. Родригом была дана для них простая и удобная формула.

Чтобы вывести эту формулу, проинтегрируем $X_n(x)$ n раз подряд и полученный в результате полином обозначим через $u_n(x)$. Его степень будет равна $2n$. Постоянные интегрирования мы выберем так, чтобы оказалось

$$u_n(-1) = u'_n(-1) = \ldots = u_n^{(n-1)}(-1) = 0. \quad (117)$$

Соотношения (117) вместе с равенством $u_n^{(n)}(x) = X_n(x)$ определяют $u_n(x)$ с точностью до постоянного множителя.

Обозначим через $v(x)$ произвольный полином степени ниже n. Тогда

$$\int_{-1}^{+1} u_n^{(n)}(x)\, v(x)\, dx = 0. \tag{118}$$

Но согласно обобщённой формуле интегрирования по частям

$$\int_{-1}^{+1} u_n^{(n)} v dx =$$
$$= [u_n^{(n-1)} v - u_n^{(n-2)} v' + \ldots + (-1)^{n-1} u_n v^{(n-1)}]_{-1}^{+1} +$$
$$+ (-1)^n \int_{-1}^{+1} u_n v^{(n)}\, dx.$$

С другой стороны, $v^{(n)}(x)=0$, и потому из (117) и (118) вытекает, что

$$u_n^{(n-1)}(1)\; v(1) -$$
$$- u_n^{(n-2)}(1)\, v'(1) + \ldots + (-1)^{n-1} u_n(1)\, v^{(n-1)}(1) = 0.$$

Но так как числа $v(1), v'(1), \ldots, v^{(n-1)}(1)$ совершенно произвольны*), то необходимо должно быть

$$u_n(1) = u_n'(1) = \ldots = u_n^{(n-1)}(1) = 0. \tag{119}$$

Равенства (117) и (119) показывают, что каждая из точек ± 1 является корнем кратности n полинома $u_n(x)$. Значит, этот полином делится нацело на $(x-1)^n (x+1)^n = (x^2-1)^n$. А так как степень $u_n(x)$ равна $2n$, то

$$u_n(x) = K_n (x^2 - 1)^n,$$

а

$$X_n(x) = K_n \frac{d^n (x^2-1)^n}{dx^n}. \tag{120}$$

---

*) Какие бы числа $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$ ни взять, найдётся полином $v(x)$ степени ниже n, для которого $v^{(k)}(1) = A_k$ $(k=0, 1, \ldots, n-1)$. Именно это будет полином

$$v(x) = A_0 + \frac{A_1}{1!}(x-1) + \ldots + \frac{A_{n-1}}{(n-1)!}(x-1)^{n-1}.$$

Это и есть *формула Родрига.*

Ввиду того что

$$[(x^2-1)^n]^{(n)} = 2n\,(2n-1)\;\ldots\;(n+1)\,x^n + \ldots,$$

ясно, что

$$\tilde{X}_n(x) = \frac{n!}{(2n)!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}. \tag{121}$$

Чтобы найти, при каком значении K_n получаются нормированные полиномы $\hat{X}_n(x)$, снова применим обобщённую формулу интегрирования по частям, положив $v(x)=u_n^{(n)}(x)$. В силу (117) и (119) все внеинтегральные члены исчезают, и потому

$$\int_{-1}^{+1}[u_n^{(n)}(x)]^2\,dx = (-1)^n\int_{-1}^{1}u_n(x)\,u_n^{(2n)}(x)\,dx. \tag{122}$$

Но

$$u_n^{(2n)}(x) = K_n\,(2n)!$$

С другой стороны, полагая

$$I_n = \int_{-1}^{+1}(x^2-1)^n\,dx,$$

имеем

$$I_n = \int_{-1}^{+1}x^2(x^2-1)^{n-1}\,dx - I_{n-1}.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_{-1}^{+1}x^2(x^2-1)^{n-1}\,dx = \frac{1}{2n}\int_{-1}^{+1}x\,d(x^2-1)^n = -\frac{1}{2n}\,I_n.$$

Значит,

$$I_n = -\frac{2n}{2n+1}\,I_{n-1}.$$

Заменяя здесь последовательно n на $n-1$, $n-2$, ..., 1, перемножая полученные равенства и замечая, что $I_0=2$, получаем

$$I_n = (-1)^n \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!}\,2.$$

Таким образом равенство (122) принимает вид

$$\int\limits_{-1}^{+1} X_n^2(x)\,dx = \frac{(2n)!\,(2n)!!}{(2n+1)!!}\,2K_n^2,$$

или

$$\int\limits_{-1}^{+1} X_n^2(x)\,dx = \frac{[(2n)!!]^2}{2n+1}\,2K_n^2.$$

Если потребовать, чтобы этот интеграл равнялся единице, то надо положить

$$K_n = \frac{1}{(2n)!!}\sqrt{\frac{2n+1}{2}}.$$

Итак,

$$\hat{X}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,\frac{1}{(2n)!!}\,\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Согласно общей теории имеет место

Теорема 1. *Все корни полинома $X_n(x)$ вещественны, различны и лежат в интервале* $(-1, +1)$.

Однако это обстоятельство легко установить и не ссылаясь на общую теорию, а исходя из формулы Родрига. Действительно, $u_n(x)=(x^2-1)^n$ имеет корнями кратности n точки ± 1. Стало быть, по теореме Ролля $u_n'(x)$ имеет корень ξ_1 в интервале $(-1, +1)$. Кроме того, точки ± 1 будут корнями $u_n'(x)$ кратности $n-1$. Значит, по теореме Ролля у $u_n''(x)$ имеются корни η_1 и η_2 в интервалах $(-1, \xi_1)$ и $(\xi_1, +1)$. Кроме того, точки ± 1 будут корнями $u_n''(x)$ кратности $n-2$. Допустим, что для $k<n$ производная $u_n^{(k)}(x)$ имеет k различных корней в интервале $(-1, +1)$ и что точки ± 1 суть её корни кратности $n-k$. Тогда по теореме Ролля

у $u_n^{(k+1)}(x)$ будет $k+1$ различных корней в интервале $(-1, +1)$. Отсюда и вытекает теорема.

Из формулы Родрига вытекает и явная формула для $X_n(x)$. Именно,

$$(x^2-1)^n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k C_n^k x^{2n-2k};$$

поэтому

$$X_n(x) = K_n \sum_{k=0}^{\left[\frac{n}{2}\right]} (-1)^k \frac{(2n-2k)!}{(n-2k)!} C_n^k x^{n-2k}. \qquad (123)$$

Формула (123) показывает, что в состав $X_n(x)$ входят только такие степени x, показатели которых одной чётности с n.

Отсюда вытекает, что в рекуррентной формуле

$$\tilde{X}_{n+2}(x) = (x-\alpha_{n+2})\tilde{X}_{n+1}(x) - \lambda_{n+1}\tilde{X}_n(x), \qquad (124)$$

которая должна иметь место по общей теории, будет $\alpha_{n+2}=0$.

Что касается λ_{n+1}, то, как и в общей теории, этот коэффициент находится умножением (124) на $\tilde{X}_n(x)$ и интегрированием. Как и выше,

$$\int_{-1}^{+1} x\tilde{X}_{n+1}(x)\tilde{X}_n(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} \tilde{X}_{n+1}^2(x)\,dx.$$

Стало быть,

$$\lambda_{n+1} = \frac{\int_{-1}^{+1} \tilde{X}_{n+1}^2(x)\,dx}{\int_{-1}^{+1} \tilde{X}_n^2(x)\,dx}.$$

Но мы видели, что

$$\int_{-1}^{+1} X_n^2(x)\,dx = \frac{[(2n)!!]^2}{2n+1} 2K_n^2,$$

а для $\widetilde{X}_n(x)$ коэффициент K_n имеет значение $\frac{n!}{(2n)!}$. Отсюда после простых преобразований получается

$$\lambda_{n+1} = \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}.$$

Значит,

$$\widetilde{X}_{n+2}(x) = x\widetilde{X}_{n+1}(x) - \frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}\widetilde{X}_n(x). \qquad (125)$$

По формуле Родрига $\widetilde{X}_1(x)=x$. Кроме того, $\widetilde{X}_0(x)=1$. Отсюда и из (125) находим

$$\begin{aligned}
\widetilde{X}_0(x) &= 1,\\
\widetilde{X}_1(x) &= x,\\
\widetilde{X}_2(x) &= \frac{1}{3}(3x^2-1),\\
\widetilde{X}_3(x) &= \frac{1}{5}(5x^3-3x),\\
\widetilde{X}_4(x) &= \frac{1}{35}(35x^4-30x^2+3),\\
&\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots
\end{aligned}$$

Рекуррентная формула (125) позволяет составить непрерывную дробь (83), соответствующую полиномам Лежандра. Для этого надо заметить, что $\alpha_1=0$ и $\lambda_0=2$, ибо α_1 есть корень полинома $X_1(x)$, а $\lambda_0=\int_{-1}^{1} dx$. Если принять во внимание, что

$$\int_{-1}^{+1}\frac{dt}{x-t} = \ln\frac{x+1}{x-1} \qquad (x>1),$$

то оказывается

$$\ln\frac{x+1}{x-1} = \cfrac{2}{x-\cfrac{1/3}{x-\cfrac{4/15}{x-\cfrac{9/35}{x-\cdots}}}}.$$

Во многих вопросах представляют интерес полиномы $X_n(x)$, получающиеся из (120) при $K_n = \frac{1}{(2n)!!}$. Мы будем обозначать их через $P_n(x)$:

$$P_n(x) = \frac{1}{(2n)!!}\frac{d^n(x^2-1)^n}{dx^n}.$$

Очевидно,

$$\hat{X}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}}\,P_n(x); \quad \tilde{X}_n(x) = \frac{n!}{(2n-1)!!}P_n(x). \quad (126)$$

Для этих полиномов

$$A_n = \int_{-1}^{+1} P_n^2(x)\,dx = \frac{2}{2n+1}.$$

Рекуррентная формула для них имеет более простой вид:

$$(n+2)P_{n+2}(x) = (2n+3)\,xP_{n+1}(x) - (n+1)P_n(x). \quad (127)$$

Кроме формул (120) и (123), можно привести ещё одну формулу, дающую явное выражение для $X_n(x)$.

Именно, по формуле Лейбница

$$(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k u^{(n-k)} v^{(k)}$$

имеем

$$[(x^2-1)^n]^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} C_n^k [(x-1)^n]^{(n-k)} [(x+1)^n]^{(k)} =$$

$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k \frac{n!}{k!}(x-1)^k \frac{n!}{(n-k)!}(x+1)^{n-k}.$$

Отсюда

$$X_n(x) = K_n n! \sum_{k=0}^{n} [C_n^k]^2 (x-1)^k (x+1)^{n-k}.$$

В частности,

$$P_n(1) = 1, \quad P_n(-1) = (-1)^n. \quad (128)$$

Из формулы Родрига вытекает

Теорема 2. *Полином Лежандра $y = X_n(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + n(n+1)\,y = 0. \tag{129}$$

Действительно, дифференцируя равенство

$$u = (x^2-1)^n$$

и умножая результат на x^2-1, получаем

$$u'\,(x^2-1) = 2nxu.$$

Возьмём от обеих частей этого равенства производные порядка $n+1$. Если применить формулу Лейбница, то окажется

$$\sum_{k=0}^{n+1} C_{n+1}^k u^{(n+2-k)}(x^2-1)^{(k)} = 2n \sum_{k=0}^{n} C_{n+1}^k u^{(n+1-k)} x^{(k)}.$$

Отсюда

$$u^{(n+2)}(x^2-1) + (n+1)\,u^{(n+1)}2x + \frac{(n+1)\,n}{2}\,2u^{(n)} =$$
$$= 2n\left[u^{(n+1)}x + (n+1)\,u^{(n)}\right].$$

Замечая, что $u^{(n)} = y$, мы приходим к (129).

Наконец, отметим ещё одно тождество, связывающее три последовательных полинома Лежандра:

$$P'_{n+1}(x) - P'_{n-1}(x) = (2n+1)\,P_n(x). \tag{130}$$

Для его доказательства запишем левую часть в форме

$$\alpha = \left\{\left[\frac{(x^2-1)^{n+1}}{(2n+2)!!}\right]^{(n+1)} - \left[\frac{(x^2-1)^{n-1}}{(2n-2)!!}\right]^{(n-1)}\right\}'.$$

Это выражение можно переписать так:

$$\alpha = \left\{\left[\frac{(x^2-1)^{n+1}}{(2n+2)!!}\right]'' - \frac{(x^2-1)^{n-1}}{(2n-2)!!}\right\}^{(n)}.$$

Но

$$\left[\frac{(x^2-1)^{n+1}}{(2n+2)!!}\right]'' = \frac{(2n+1)\,x^2-1}{(2n)!!}\,(x^2-1)^{n-1}.$$

Отсюда

$$\alpha=\left\{\left[\frac{(2n+1)x^2-1}{(2n)!!}-\frac{1}{(2n-2)!!}\right](x^2-1)^{n-1}\right\}^{(n)}=$$
$$=\frac{2n+1}{(2n)!!}\left[(x^2-1)^n\right]^{(n)},$$

что и доказывает тождество (130).

§ 2. Производящая функция.

Рассмотрим функцию

$$X(t,x)=\frac{1}{\sqrt{1-2tx+t^2}}.$$

Покажем, что при закреплённом x и достаточно малом $|t|$ эта функция может быть разложена в ряд по степеням t. В самом деле, в биномиальной формуле

$$(1-z)^{-1/2}=1+\frac{1}{2}z+\frac{3!!}{2^2\,2!}z^2+\frac{5!!}{2^3\,3!}z^3+\ldots \quad (131)$$

все коэффициенты положительны. Заменяя в ней z на $2tx-t^2$, мы получим представление $X(t,x)$ в форме ряда

$$X(t,x)=\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(2tx-t^2)^k, \quad (132)$$

в котором все α_k положительны. С другой стороны, если в (131) положить $z=2|tx|+t^2$, то ряд

$$\sum_{k=0}^{\infty}\alpha_k(2|tx|+t^2) \quad (133)$$

оказывается сходящимся при $2|tx|+t^2<1$. Ряд (132) можно записать в форме двойного ряда:

$$\begin{aligned}&\alpha_0+\\&\quad+\alpha_1 2tx-\quad\alpha_1t^2+\\&\qquad\qquad+4\alpha_2x^2t^2-4\alpha_2xt^3+\alpha_2t^4+\\&\qquad\qquad\qquad+\ldots\end{aligned}$$

Этот двойной ряд сходится *абсолютно* потому, что он мажорируется подобным же положительным двойным рядом, полученным из (133). Но тогда в этом ряду допустимы любые перестановки его членов. В частности, можно объединить все члены, содержащие одинаковые степени t, что и приводит к равенству вида

$$X(t, x) = \sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) t^n. \tag{134}$$

Полагая $t=0$, находим $\alpha_0(x)=1$. Дифференцируя (134) по t и снова полагая $t=0$, находим $\alpha_1(x)=x$. Таким образом

$$\alpha_0(x) = P_0(x), \quad \alpha_1(x) = P_1(x).$$

Мы покажем, что и при любом n будет $\alpha_n(x) = P_n(x)$. Для этой цели продифференцируем (134) по t:

$$\frac{x-t}{(1-2tx+t^2)^{3/2}} = \sum_{n=1}^{\infty} n\alpha_n(x) t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1}(x) t^n.$$

Умножим это равенство на $1-2tx+t^2$ и заменим в левой части $(1-2tx+t^2)^{-1/2}$ по формуле (134):

$$(x-t)\sum_{n=0}^{\infty} \alpha_n(x) t^n = (1-2tx+t^2)\sum_{n=0}^{\infty} (n+1)\alpha_{n+1}(x) t^n.$$

Сравнение коэффициентов при t^n даёт (для $n \geqslant 1$)

$$x\alpha_n(x) - \alpha_{n-1}(x) = (n+1)\alpha_{n+1}(x) - 2nx\alpha_n(x) + (n-1)\alpha_{n-1}(x).$$

Отсюда

$$(n+1)\alpha_{n+1}(x) = (2n+1)x\alpha_n(x) - n\alpha_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1).$$

Заменяя здесь n на $n+1$, мы приходим к формуле

$$(n+2)\alpha_{n+2}(x) = (2n+3)x\alpha_{n+1}(x) - (n+1)\alpha_n(x) \quad (n \geqslant 0),$$

имеющей в точности тот же вид, что и формула (127), связывающая три последовательных полинома $P_n(x)$. Итак, нами доказана

Теорема 1. *Справедлива формула*

$$(1-2tx+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(x)\,t^n. \qquad (135)$$

Левая часть этой формулы называется *производящей функцией* для полиномов Лежандра.

В качестве приложения формулы (135) можно указать оценку для полиномов $P_n(x)$.

Теорема 2. *На сегменте* $[-1, +1]$ *справедливо неравенство*

$$|P_n(x)|\leqslant 1. \qquad (136)$$

Действительно, выбрав точку x из $[-1, +1]$, запишем её в виде $x=\cos\theta$. По формуле (135)

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-\frac{1}{2}}=\sum_{n=0}^{\infty}P_n(\cos\theta)\,t^n.$$

Но

$$1-2t\cos\theta+t^2=(1-te^{i\theta})(1-te^{-i\theta}).$$

Отсюда, в силу биномиальной формулы (131),

$$(1-2t\cos\theta+t^2)^{-1/2}=$$
$$=\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^ke^{ik\theta}\right]\left[1+\sum_{k=1}^{\infty}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}t^ke^{-ik\theta}\right].$$

Перемножая обычным способом эти ряды, мы получаем, что коэффициент $P_n(\cos\theta)$ при t^n имеет вид

$$P_n(\cos\theta)=\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}e^{in\theta}+$$
$$+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{[2(n-k)-1]!!}{[2(n-k)]!!}e^{i(2k-n)\theta}+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}e^{-in\theta}.$$

Важно заметить, что все коэффициенты в правой части положительны. Значит,

$$|P_n(\cos\theta)|\leqslant\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}+\sum_{k=1}^{n-1}\frac{(2k-1)!!}{(2k)!!}\,\frac{(2n-2k-1)!!}{(2n-2k)!!}+\frac{(2n-1)!!}{(2n)!!}.$$

Но правая часть этого равенства есть не что иное, как $P_n(\cos 0) = P_n(1) = 1$. Теорема доказана. В следующем параграфе мы дадим и другие оценки для полиномов Лежандра.

Другим примером применения формулы (135) может служить вывод трёх важных соотношений, связывающих полиномы Лежандра. Именно, дифференцируя формулу (135) один раз по x, а другой раз по t, находим

$$t(1-2tx+t^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n'(x)\, t^n,$$

$$(x-t)(1-2tx+t^2)^{-3/2} = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, nt^{n-1}.$$

Отсюда

$$(x-t)\sum_{n=1}^{\infty} P_n'(x)\, t^n = \sum_{n=1}^{\infty} P_n(x)\, nt^n,$$

или, что то же самое*),

$$\sum_{n=1}^{\infty} xP_n'(x)\, t^n - \sum_{n=1}^{\infty} P_{n-1}'(x)\, t^n = \sum_{n=1}^{\infty} nP_n(x)\, t^n.$$

Сравнивая коэффициенты при одинаковых степенях t, мы находим первое из интересующих нас соотношений:

$$xP_n'(x) - P_{n-1}'(x) = nP_n(x). \tag{137}$$

Вычитая это равенство из (130), получим второе из упомянутых соотношений:

$$P_{n+1}'(x) - xP_n'(x) = (n+1)\, P_n(x).$$

Наконец, заменяя здесь n на $n-1$ и исключая $P_{n-1}'(x)$ из полученного равенства и (137), приходим к последнему из указанных выше соотношений:

$$(1-x^2)\, P_n'(x) = nP_{n-1}(x) - nxP_n(x).$$

*) Во второй сумме можно суммировать от $n=1$, а не от $n=2$, ибо при $n=1$ имеем $P_{n-1}'(x) = 0$.

§ 3. Интеграл Лапласа.

Рассмотрим функцию

$$y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right]^n d\theta.$$

Так как $y_0(x) = 1$ и $y_1(x) = x$, то

$$y_0(x) = P_0(x), \quad y_1(x) = P_1(x).$$

Мы покажем, что равенство $y_n(x) = P_n(x)$ имеет место при любом n. Для этого, очевидно, достаточно показать, что три последовательные функции y_n, y_{n+1}, y_{n+2} связаны той же рекуррентной зависимостью

$$(n+2)\,y_{n+2} - (2n+3)\,xy_{n+1} + (n+1)\,y_n = 0, \tag{138}$$

что и полиномы Лежандра $P_n(x)$.

С этой целью положим временно $\alpha = x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta$. Тогда

$$y_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \alpha^n\,d\theta,$$

$$y_{n+1}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right]\alpha^n\,d\theta,$$

$$y_{n+2}(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^\pi \left[x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right]^2\alpha^n\,d\theta.$$

Вносяэти выражения в левую часть (138), запишем её в виде

$$\frac{1}{\pi}\int_0^\pi \beta\alpha^n\,d\theta,$$

где положено для краткости

$$\beta = (n+2)\left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)^2 - \\ -(2n+3)\,x\left(x + i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right) + n + 1.$$

После простых преобразований получаем

$$\beta=(n+1)(1-x^2)\sin^2\theta+\\ +i\sqrt{1-x^2}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)\cos\theta.$$

Обозначим

$$(n+1)(1-x^2)\sin^2\theta \text{ через } \gamma,$$

а

$$i\sqrt{1-x^2}\left(x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right)\cos\theta \text{ через } \delta.$$

Тогда $\beta=\gamma+\delta$. Но

$$\int_0^\pi \delta\alpha^n\,d\theta=i\sqrt{1-x^2}\int_0^\pi \alpha^{n+1}\cos\theta\,d\theta.$$

Интегрируя по частям, находим

$$\int_0^\pi \delta\alpha^n\,d\theta=\\ =i\sqrt{1-x^2}\left\{[\alpha^{n+1}\sin\theta]_0^\pi-(n+1)\int_0^\pi \alpha^n\alpha'\sin\theta\,d\theta\right\}.$$

Так как $\alpha'=-i\sqrt{1-x^2}\sin\theta$, то

$$\int_0^\pi \delta\alpha^n\,d\theta=-(n+1)(1-x^2)\int_0^\pi \alpha^n\sin^2\theta\,d\theta=-\int_0^\pi \gamma\alpha^n\,d\theta.$$

Отсюда

$$\int_0^\pi \beta\alpha^n\,d\theta=0,$$

и наше утверждение доказано. Таким образом мы установили, что полиномы Лежандра допускают интегральное представление

$$P_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^\pi\left[x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta\right]^n d\theta. \qquad (139)$$

Стоящий здесь интеграл называется *интегралом Лапласа*.

Ввиду того что при $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta| = \sqrt{x^2+(1-x^2)\cos^2\theta} \leqslant 1,$$

ясно, что при этих x оказывается

$$P_n(x) \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi |x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|^n\,d\theta \leqslant 1,$$

т. е. мы снова получили оценку (136). Для точек, лежащих *внутри* интервала $(-1, +1)$, можно получить более точную оценку. Именно, представив $|x+i\sqrt{1-x^2}\cos\theta|$ в форме

$$\sqrt{1-(1-x^2)\sin^2\theta},$$

находим

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^\pi [1-(1-x^2)\sin^2\theta]^{\frac{n}{2}}\,d\theta.$$

Разбивая этот интеграл на два, распространённых на промежутки $\left[0, \frac{\pi}{2}\right]$ и $\left[\frac{\pi}{2}, \pi\right]$, сделаем во втором из них замену θ на $\pi-\theta$. Это даёт неравенство

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi}\int\limits_0^{\pi/2} [1-(1-x^2)\sin^2\theta]^{\frac{n}{2}}\,d\theta.$$

Но при $0 \leqslant \theta \leqslant \frac{\pi}{2}$ будет, как известно,

$$\sin\theta \geqslant \frac{2}{\pi}\theta.$$

Значит,

$$1-(1-x^2)\sin^2\theta \leqslant 1-\frac{4}{\pi^2}(1-x^2)\,\theta^2.$$

С другой стороны, при $\alpha > 0$

$$1-\alpha < e^{-\alpha}.$$

(В самом деле, при $\alpha > 0$ производная функции $\varphi(\alpha) = e^{-\alpha}+\alpha-1$ положительна, и потому $\varphi(\alpha) > \varphi(0) = 0$.)

Таким образом

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{\pi/2} e^{-\frac{2n}{\pi^2}(1-x^2)\theta^2} d\theta$$

и, тем более,

$$|P_n(x)| \leqslant \frac{2}{\pi} \int\limits_0^{+\infty} e^{-\frac{2n}{\pi^2}(1-x^2)\theta^2} d\theta.$$

Полагая здесь $\theta = \frac{\pi}{\sqrt{2n(1-x^2)}} t$, находим

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2}{n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt.$$

Но

$$\int\limits_0^{+\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2},$$

и потому окончательно

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1). \qquad (140)$$

§ 4. Разложения по полиномам Лежандра.

В силу соотношений

$$|P_n(x)| \leqslant 1, \quad \hat{X}_n(x) = \sqrt{\frac{2n+1}{2}} P_n(x),$$

мы получаем, что ядро $K_n(t, x)$ системы полиномов Лежандра допускает оценку

$$|K_n(t, x)| = \left| \sum_{k=0}^{n} \hat{X}_k(t) \hat{X}_k(x) \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} \frac{2k+1}{2} = \frac{(n+1)^2}{2}.$$

Значит, для соответствующей функции Лебега

$$L_n(x) = \int\limits_{-1}^{+1} |K_n(t, x)| dt$$

оказывается

$$L_n(x) \leqslant (n+1)^2.$$

Отсюда на основании теоремы 7 из § 4 главы IV вытекает, что всякая непрерывная функция $f(x)$, наилучшие приближения которой удовлетворяют условию

$$\lim_{n\to\infty} n^2 E_n(f) = 0, \tag{141}$$

разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра, причём сходимость этого ряда равномерна на всём сегменте $[-1, +1]$. В силу теоремы Джексона (см. часть первую, главу VI, § 2) условие (141) заведомо выполняется для функций, имеющих непрерывную вторую производную.

Таким образом, установлена

Теорема 1. *Если функция $f(x)$, заданная на $[-1, +1]$, имеет непрерывную вторую производную $f''(x)$, то она разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по полиномам Лежандра.*

Если не требовать разложимости $f(x)$ на всём сегменте $[-1, +1]$, а ограничиться рассмотрением сегмента $[-1+h, 1-h]$ $(0 < h < 1)$, то можно значительно ослабить условия, налагаемые на $f(x)$. Это обстоятельство объясняется тем, что оценка $|P_n(x)| \leqslant 1$ (которую для всего сегмента $[-1, +1]$ улучшить нельзя, ибо $P_n(1) = 1$) для сегмента $[-1+h, 1-h]$ может быть заменена оценкой

$$|P_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{\pi}{2n}} \frac{1}{h}, \tag{142}$$

вытекающей из неравенства (140).

Теорема 2. *Если $f(x)$ на всём сегменте $[-1, +1]$ удовлетворяет условию Дини—Липшица*

$$\lim_{\delta\to 0} \omega(\delta) \ln \delta = 0, \tag{143}$$

то во всех точках интервала $(-1, +1)$ она разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра, причём сходимость этого ряда равномерна на любом сегменте $[-1+h, 1-h]$.

Чтобы доказать эту теорему, разобьём интеграл

$$L_n(x)=\int_{-1}^{+1}|K_n(t,\,x)|\,dt$$

на пять интегралов по схеме

$$L_n(x)=\int_{-1}^{-1+\frac{h}{2}}+\int_{-1+\frac{h}{2}}^{x-\frac{1}{n}}+\int_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}}+\int_{x+\frac{1}{n}}^{1-\frac{h}{2}}+\int_{1-\frac{h}{2}}^{1}=$$
$$=I_1+I_2+I_3+I_4+I_5.$$

Интегралы I_1 и I_5 оцениваются следующим образом: по формуле Кристоффеля — Дарбу

$$K_n(t,\,x)=\theta_n\frac{\hat{X}_{n+1}(t)\,\hat{X}_n(x)-\hat{X}_{n+1}(x)\,\hat{X}_n(t)}{t-x}\qquad(0\leqslant\theta_n\leqslant 1).$$

Но когда $-1+h\leqslant x\leqslant 1-h,\ -1\leqslant t\leqslant -1+\frac{h}{2}$, то $|t-x|\geqslant\frac{h}{2}$. Кроме того, в силу (142),

$$|\hat{X}_n(x)|<\sqrt{\frac{2n+1}{2}}\sqrt{\frac{\pi}{2n}}\,\frac{1}{h}<\frac{\sqrt{\pi}}{h},$$

и такая же оценка верна для $\hat{X}_{n+1}(x)$. Поэтому

$$I_1\leqslant\frac{2\sqrt{\pi}}{h^2}\left[\int_{-1}^{+1}|\hat{X}_n(t)|\,dt+\int_{-1}^{+1}|\hat{X}_{n+1}(t)|\,dt\right].$$

В силу неравенства Буняковского,

$$\int_{-1}^{+1}|\hat{X}_n(t)|\,dt\leqslant\sqrt{2},$$

и потому

$$I_1\leqslant\frac{4\sqrt{2\pi}}{h^2}.$$

То же верно и для I_5.

Перейдём к рассмотрению интегралов I_2 и I_4, остановившись для определённости на I_4. Здесь

$$|\hat{X}_n(x)| < \frac{\sqrt{\pi}}{h}, \quad |\hat{X}_n(t)| < \frac{2\sqrt{\pi}}{h},$$

и потому

$$|K_n(t, x)| \leqslant \frac{4\pi}{h^2(t-x)},$$

откуда

$$I_4 \leqslant \frac{4\pi}{h^2} \int\limits_{x+\frac{1}{n}}^{1-\frac{h}{2}} \frac{dt}{t-x} = \frac{4\pi}{h^2}\left[\ln n + \ln\left(1 - \frac{h}{2} - x\right)\right].$$

Но

$$\ln\left(1 - \frac{h}{2} - x\right) \leqslant \ln 2$$

и, стало быть,

$$I_4 < \frac{4\pi}{h^2}\ln n + \frac{4\pi}{L^2}\ln 2.$$

То же верно и для I_2.

Наконец, I_3 оценивается так:

$$|\hat{X}_k(x)| < \frac{\sqrt{\pi}}{h}, \quad |\hat{X}_k(t)| < \frac{2\sqrt{\pi}}{h},$$

значит,

$$|K_n(t, x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\hat{X}_k(t)\hat{X}_k(x)| \leqslant \frac{2\pi}{h^2}(n+1)$$

и, следовательно,

$$I_3 = \int\limits_{x-\frac{1}{n}}^{x+\frac{1}{n}} |K_n(t, x)|\, dt \leqslant \frac{4\pi(n+1)}{nh^2} < \frac{8\pi}{h^2}.$$

Таким образом для функции $L_n(x)$ нами установлена оценка

$$L_n(x) < \frac{8\sqrt{2\pi}}{h^2} + \frac{8\pi}{h^2}\ln n + \frac{8\pi}{h^2} + \frac{8\pi}{h^2}\ln 2. \qquad (144)$$

Если условие (143) выполнено, то по теореме Джексона будет

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f)\ln n = 0$$

и, стало быть (в силу (144)),

$$\lim_{n\to\infty} E_n(f)L_n(x) = 0,$$

что и доказывает теорему.

В теоремах 1 и 2 предполагается, что разлагаемая функция $f(x)$ имеет определённые структурно-дифференциальные свойства на всём сегменте $[-1, +1]$. В соответствии с этим удаётся установить разложимость $f(x)$ также или на всём сегменте $[-1, +1]$ или на интервале $(-1, +1)$. Таким образом эти теоремы имеют нелокальный характер. Так как в каждой внутренней точке x интервала $(-1, +1)$ полиномы $\hat{X}_n(x)$ ограничены одним числом

$$|\hat{X}_n(x)| \leqslant \frac{\sqrt{\pi}}{2}\sqrt{\frac{2n+1}{n}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \leqslant \frac{\sqrt{3\pi}}{2\sqrt{1-x^2}}, \tag{145}$$

то, исходя из теоремы 2 § 4 главы IV, мы можем получить и чисто локальный результат:

Теорема 3. *Функция $f(x)$ класса L^2 разлагается в ряд Фурье по полиномам Лежандра в каждой точке x интервала $(-1, +1)$, в которой выполнено условие*

$$\int_{-1}^{+1}\left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right]^2 dt < +\infty. \tag{146}$$

В частности, условие (146) выполнено, если существует конечная $f'(x)$.

Оценка (145) позволяет перенести на полиномы Лежандра общий принцип локализации, доказанный в теореме 5 § 4 главы IV:

Теорема 4. *Если две функции $f(x)$ и $g(x)$ из L^2 совпадают в интервале (x_0-h, x_0+h), то*

$$\lim_{n\to\infty}\{S_n[f, x_0] - S_n[g, x_0]\} = 0.$$

Здесь $S_n[f, x]$ и $S_n[g, x]$ суть частные суммы разложений по полиномам Лежандра.

Теорема 5. *Пусть $f(t)$ функция класса L^2 и в некоторой точке x интервала $(-1, +1)$ существуют пределы $f(x-0)$ и $f(x+0)$.*

Если конечны интегралы

$$\int_{-1}^{x}\left[\frac{f(t)-f(x-0)}{t-x}\right]^2 dt, \quad \int_{x}^{+1}\left[\frac{f(t)-f(x+0)}{t-x}\right]^2 dt, \tag{147}$$

то ряд Фурье функции $f(x)$ по полиномам Лежандра в точке x сходится к сумме

$$\frac{f(x-0)+f(x+0)}{2}.$$

Для доказательства рассмотрим сначала простейшую функцию $h(t)$, равную 1 при $-1 \leqslant t \leqslant x$ и равную 0 при $x < t \leqslant 1$. Её коэффициенты Фурье таковы:

$$c_k = \int_{-1}^{x} \hat{X}_k(t)\,dt.$$

Но, в силу (130), при $k \geqslant 1$

$$\hat{X}_k(t) = \sqrt{\frac{2k+1}{2}}\,P_k(t) = \frac{1}{\sqrt{4k+2}}\left[P'_{k+1}(t) - P'_{k-1}(t)\right].$$

Значит, благодаря тому, что $P_{k+1}(-1) = P_{k-1}(-1) = (-1)^{k-1}$,

$$c_k = \frac{1}{\sqrt{4k+2}}\left[P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)\right].$$

С другой стороны, $\hat{X}_0(x) = \frac{1}{\sqrt{2}}$ и $c_0 = \frac{x+1}{\sqrt{2}}$. Поэтому частная сумма Фурье для функции $h(t)$ в точке x такова:

$$S_n(x) = \frac{1+x}{2} + \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{\sqrt{4k+2}}\left[P_{k+1}(x) - P_{k-1}(x)\right]\hat{X}_k(x).$$

Но $\hat{X}_k(x)=\sqrt{\frac{2k+1}{2}}\,P_k(x)$, и потому

$$S_n(x)=\frac{1+x}{2}+\frac{1}{2}\sum_{k=1}^{n}[P_{k+1}(x)P_k(x)-P_k(x)P_{k-1}(x)]=$$

$$=\frac{1}{2}[1+x+P_{n+1}(x)P_n(x)-P_1(x)P_0(x)].$$

Замечая, что $P_0(x)=1$, $P_1(x)=x$, получаем окончательно

$$S_n(x)=\frac{1}{2}+\frac{1}{2}P_{n+1}(x)P_n(x),$$

откуда

$$\lim_{n\to\infty}S_n(x)=\frac{1}{2}.$$

С другой стороны, сумма $S_n(x)$ может быть вычислена по формуле

$$S_n(x)=\int_{-1}^{x}K_n(t,x)\,dt.$$

Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{x}K_n(t,x)\,dt=\frac{1}{2},\tag{148}$$

а так как интеграл от ядра $K_n(t,x)$ по всему сегменту $[-1,+1]$ равен единице, то

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x}^{1}K_n(t,x)\,dt=\frac{1}{2}.$$

Переходя к рассмотрению функции $f(t)$, представим её частную сумму Фурье в виде

$$\int_{-1}^{x}f(t)K_n(t,x)\,dt+\int_{x}^{1}f(t)K_n(t,x)\,dt.$$

Для доказательства теоремы достаточно установить, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{x} f(t)K_n(t, x)\,dt=\frac{1}{2}f(x-0),$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{x}^{1} f(t)K_n(t, x)\,dt=\frac{1}{2}f(x+0).$$

Мы ограничимся установлением первого из этих равенств, так как второе доказывается совершенно аналогично. В силу (148) дело сводится к доказательству равенства

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-1}^{x}[f(t)-f(x-0)]K_n(t, x)\,dt=0. \tag{149}$$

Но по формуле Кристоффеля—Дарбу

$$K_n(t, x)=\theta_n\frac{\hat{X}_{n+1}(t)\hat{X}_n(x)-\hat{X}_{n+1}(x)\hat{X}_n(t)}{t-x}\qquad(0\leqslant\theta_n\leqslant 1).$$

Значит, интеграл, входящий в (149), можно записать так:

$$\theta_n[d_{n+1}\hat{X}_n(x)-d_n\hat{X}_{n+1}(x)],$$

где

$$d_n=\int_{-1}^{x}\frac{f(t)-f(x-0)}{t-x}\hat{X}_n(t)\,dt$$

и аналогично для d_{n+1}. Числа d_n суть коэффициенты Фурье функции, равной $\frac{f(t)-f(x-0)}{t-x}$ при $-1\leqslant t\leqslant x$ и равной нулю при $x<t\leqslant 1$. По условию эта функция входит в L^2, и потому её коэффициенты Фурье стремятся к нулю с возрастанием n. С другой стороны, числа $\hat{X}_n(x)$ ограничены. Отсюда вытекает (149). Теорема доказана.

Оценки

$$|\hat{X}_n(x)| \leqslant \sqrt{\frac{2n+1}{2}} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

$$|\hat{X}_n(x)| < \frac{c}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1),$$

установленные для полиномов Лежандра, позволяют получить и некоторые результаты относительно разложений по полиномам $\varphi_n(x)$, образующим ортогональную систему веса $\sigma(x)$, отличного от единицы. Действительно, в силу теорем § 5 главы IV, в тех случаях, когда $\sigma(x)$ есть функция, удовлетворяющая условию Липшица, с положительной нижней границей на $[-1, +1]$, в частности, когда $\sigma(x) = Q(x)$ или $\sigma(x) = \frac{1}{Q(x)}$, где $Q(x)$ есть полином, не имеющий корней на $[-1, +1]$, для полиномов $\varphi_n(x)$ $(n \geqslant 1)$ будут справедливы оценки

$$|\varphi_n(x)| \leqslant A\sqrt{n} \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1), \tag{150}$$

$$|\varphi_n(x)| \leqslant \frac{A}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1),$$

где A—некоторая постоянная. Отсюда вытекает

Теорема 6. *Функция $f(x)$, имеющая непрерывную вторую производную $f''(x)$, разлагается на $[-1, +1]$, в равномерно сходящийся ряд по полиномам $\varphi_n(x)$. Если же $f(x)$ имеет производную только первого порядка $f'(x)$, удовлетворяющую условию Липшица, с показателем $\alpha > \frac{1}{2}$, то она разлагается по полиномам $\varphi_n(x)$ в интервале $(-1, +1)$, причём сходимость полученного ряда будет равномерной в каждом сегменте $[-1+h, 1-h]$.*

В самом деле, в силу только что сказанного, для ядра $K_n(t, x)$ $(n \geqslant 1)$ будут справедливы оценки

$$|K_n(t, x)| \leqslant A_1 n^2 \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1, \ -1 \leqslant t \leqslant 1),$$

$$|K_n(t, x)| \leqslant \frac{A_1}{\sqrt{1-x^2}} \sum_{k=1}^{n} \sqrt{k} \qquad (-1 < x < 1, \ -1 \leqslant t \leqslant 1),$$

где A_1 — некоторая новая*) постоянная. Поэтому для функции Лебега

$$L_n(x) = \int_{-1}^{+1} |K_n(t, x)|\, dt$$

окажется

$$L_n(x) \leqslant 2A_1 n^2 \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1),$$

$$L_n(x) \leqslant \frac{2A_1}{\sqrt{1-x^2}}\, n^{3/2} \qquad (-1 < x < 1).$$

Отсюда, в силу общих результатов § 4 главы IV, с одной стороны, и теорем Джексона — с другой, и вытекает справедливость наших утверждений.

---

*) В состав ядра входит слагаемое $\varphi_0(t)\,\varphi_0(x)$, для которого неравенство (150) неприменимо. Это и вызывает необходимость увеличения постоянной.

ГЛАВА VI.
ПОЛИНОМЫ ЯКОБИ.

§ 1. Обобщённая формула Родрига.

Определение. *Полиномами Якоби* *) называются полиномы, образующие на сегменте $[-1, +1]$ ортогональную систему веса

$$p(x) = (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}.$$

Так как мы всегда предполагаем вес суммируемым, то показатели α и β должны удовлетворять условиям

$$\alpha > -1, \ \beta > -1.$$

Так же как и для полиномов Лежандра, вышеприведённое определение определяет полиномы Якоби лишь с точностью до постоянного множителя. В тех случаях, когда этот множитель мы не будем фиксировать, полиномы Якоби будут обозначаться через $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. В случае, когда множитель выбирается так, что старший коэффициент полинома равен единице, будет применяться обозначение $\mathcal{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Когда речь будет идти о нормированных полиномах Якоби (причём старший коэффициент полинома положителен), то они будут обозначаться через $\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. В дальнейшем потребуется также ещё один специальный выбор упомянутого множителя, но о нём мы будем говорить ниже.

Нетрудно видеть, что полиномы Лежандра являются частным случаем полиномов Якоби, отвечающим значе-

---

*) Якоби [1].

ниям $\alpha=\beta=0$. Точно так же при $\alpha=\beta=-\frac{1}{2}$ полиномы Якоби превращаются в уже рассмотренные нами полиномы Чебышева. Ниже мы остановимся на так называемых *полиномах Чебышева второго рода*, являющихся также частным случаем полиномов Якоби, отвечающим значениям $\alpha=\beta=+\frac{1}{2}$. Надо заметить, что вообще случай равных показателей $\alpha=\beta$ представляет некоторые особенности; соответствующие этому случаю полиномы Якоби называются *ультрасферическими* полиномами.

При изучении полиномов Якоби очень полезной оказывается формула

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=K_n(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}], \quad (151)$$

являющаяся прямым обобщением формулы Родрига, в которую и переходит формула (151) при $\alpha=\beta=0$.

Для доказательства этой формулы заметим, что по формуле Лейбница

$$\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]=\sum_{k=0}^{n}h_k(1-x)^{\alpha+n-k}(1+x)^{\beta+k},$$

где h_k — некоторые постоянные коэффициенты. Поэтому

$$\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}]=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y_n(x), \quad (152)$$

где $y_n(x)$ есть некоторый полином степени не выше n. Мы скоро убедимся, что степень $y_n(x)$ в точности равна n, а пока отметим лишь, что $y_n(x)$ не есть тождественный нуль *).

*) Если бы оказалось, что $y_n(x)\equiv 0$, то это означало бы, что $(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}$ — полином степени не выше $n-1$. Но это невозможно, ибо единственными корнями функции $(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}$ служат точки ± 1. Значит, если бы эта функция была полиномом степени $\leqslant n-1$, то имело бы место тождество $(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}=(1-x)^{a}(1+x)^{b}$, где a и b — целые неотрицательные числа и $a+b\leqslant n-1$. В свою очередь это влечёт за собой равенство $\alpha+n=a$, противоречащее условию $\alpha>-1$.

Отметим далее, что по той же формуле Лейбница при $m < n$ будет

$$\varphi_m(x) = \frac{d^m}{dx^m}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}] =$$

$$= \sum_{k=0}^{m} h'_k (1-x)^{\alpha+n-k}(1+x)^{\beta+n-m+k}.$$

В последней сумме показатели $\alpha+n-k$ и $\beta+n-m+k$ строго положительны. Поэтому

$$\varphi_m(-1) = \varphi_m(+1) = 0. \tag{153}$$

Установив это, рассмотрим интеграл

$$J = \int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta} v(x)\, y_n(x)\, dx, \tag{154}$$

где $v(x)$ есть произвольный полином степени ниже n. Согласно (152), этот интеграл можно записать так:

$$J = \int_{-1}^{+1} u^{(n)}(x)\, v(x)\, dx,$$

где положено

$$u(x) = (1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}.$$

В силу обобщённой формулы интегрирования по частям:

$$J = [u^{(n-1)}v - u^{(n-2)}v + \cdots + (-1)^{n-1}uv^{(n-1)}]_{-1}^{+1} +$$

$$+ (-1)^n \int_{-1}^{+1} uv^{(n)}\, dx. \tag{155}$$

Но благодаря (153) внеинтегральный член правой части равен нулю, а так как и $v^{(n)}(x) = 0$, то

$$J = 0.$$

Таким образом $y_n(x)$ ортогонален по весу

$$(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$$

ко всем полиномам степени ниже n. Значит, степень $y_n(x)$ не может оказаться ниже n, ибо в этом случае он был бы ортогонален сам к себе, что невозможно, так как $y_n(x)$ — не тождественный нуль. Итак, $y_n(x)$ есть полином степени n, ортогональный по весу $(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$ ко всем полиномам низших степеней. Как мы знаем, это и показывает, что $y_n(x)$ и $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ могут отличаться друг от друга лишь постоянным множителем. Формула (151) доказана.

Если мы рассмотрим интеграл (154), положив в нём $v(x)=y_n(x)$, то, снова применив формулу (155), найдём

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y_n^2(x)\,dx=(-1)^n\int_{-1}^{+1}u(x)\,y_n^{(n)}(x)\,dx.$$

Но

$$y_n^{(n)}(x)=n!\,q_n,$$

где q_n есть старший коэффициент $y_n(x)$. Значит,

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^\alpha(1+x)^\beta y_n^2(x)\,dx=$$
$$=(-1)^n n!\,q_n\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}\,dx.$$

Полагая в последнем интеграле $x=2t-1$, приведём его к виду

$$2^{\alpha+\beta+2n+1}\int_0^1(1-t)^{\alpha+n}t^{\beta+n}\,dt=$$
$$=2^{\alpha+\beta+2n+1}\,\mathrm{B}(\alpha+n+1,\ \beta+n+1),$$

где

$$\mathrm{B}(p,q)=\int_0^1(1-x)^{p-1}x^{q-1}\,dx$$

есть известный интеграл Эйлера.

Так как

$$B(p, q) = \frac{\Gamma(p)\Gamma(q)}{\Gamma(p+q)},$$

то

$$\int_{-1}^{+1} (1-x)^{\alpha} (1+x)^{\beta} y_n^2(x)\, dx =$$

$$= (-1)^n n!\, q_n 2^{\alpha+\beta+2n+1} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)\,\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}. \qquad (156)$$

Теперь мы постараемся найти выражение для q_n — старшего коэффициента полинома $y_n(x)$. Попутно мы найдём и следующий за ним коэффициент, p_n, с которым в состав $y_n(x)$ входит x^{n-1}, что также потребуется в дальнейшем.

Для этого прежде всего заметим, что так как

$$y_n(x) = (1-x)^{-\alpha} (1+x)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(1-x)^{\alpha+n} (1+x)^{\beta+n}],$$

то на основании формулы Лейбница

$$y_n(x) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-1)^k (\alpha+n) \ldots (\alpha+n-k+1) \times$$
$$\times (1-x)^{n-k} (\beta+n) \ldots (\beta+k+1)(1+x)^{\beta+k}. \qquad (157)$$

С другой стороны, при $x > 1$

$$(x-1)^{-\alpha} (x+1)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^{\alpha+n} (x+1)^{\beta+n}] =$$
$$= \sum_{k=0}^{n} C_n^k (\alpha+n) \ldots (\alpha+n-k+1)(x-1)^{n-k} (\beta+n) \ldots$$
$$\ldots (\beta+k+1)(x+1)^{\beta+k}. \qquad (158)$$

Сравнивая (157) и (158), мы видим, что для $x > 1$ полином $y_n(x)$ можно представить в форме

$$y_n(x) =$$
$$= (-1)^n (x-1)^{-\alpha} (x+1)^{-\beta} \frac{d^n}{dx^n} [(x-1)^{\alpha+n} (x+1)^{\beta+n}]. \qquad (159)$$

Но, в силу биномиальной формулы Ньютона,

$$(x-1)^{\alpha+n}=x^{\alpha+n}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{\alpha+n}=x^{\alpha+n}-(\alpha+n)\,x^{\alpha+n-1}+\ldots,$$

$$(x+1)^{\beta+n}=x^{\beta+n}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{\beta+n}=x^{\beta+n}+(\beta+n)\,x^{\beta+n-1}+\ldots$$

Отсюда

$$(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}=x^{\alpha+\beta+2n}+(\beta-\alpha)\,x^{\alpha+\beta+2n-1}+\ldots$$

и

$$\begin{aligned}\frac{d^n}{dx^n}&[(x-1)^{\alpha+n}(x+1)^{\beta+n}]=\\ &=(\alpha+\beta+2n)\ldots(\alpha+\beta+n+1)\,x^{\alpha+\beta+n}+\\ &+(\beta-\alpha)(\alpha+\beta+2n-1)\ldots(\alpha+\beta+n)\,x^{\alpha+\beta+n-1}+\ldots\end{aligned} \tag{160}$$

Аналогичным образом

$$\begin{aligned}(x-1)^{-\alpha}(x+1)^{-\beta}&=x^{-\alpha-\beta}\left(1-\frac{1}{x}\right)^{-\alpha}\left(1+\frac{1}{x}\right)^{-\beta}=\\ &=x^{-\alpha-\beta}+(\alpha-\beta)\,x^{-\alpha-\beta-1}+\ldots\end{aligned} \tag{161}$$

Сопоставляя (159), (160) и (161), находим

$$\begin{aligned}y_n(x)=(-1)^n[(\alpha+\beta+2n)&\ldots(\alpha+\beta+n+1)\,x^n+\\ &+(\alpha-\beta)\,n\,(\alpha+\beta+2n-1)\ldots(\alpha+\beta+n+1)\,x^{n-1}+\ldots]\end{aligned}$$

Таким образом

$$\begin{aligned}q_n&=(-1)^n(\alpha+\beta+2n)\ldots(\alpha+\beta+n+1)=\\ &=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)},\\ p_n&=(-1)^n(\alpha-\beta)\,n\,(\alpha+\beta+2n-1)\ldots(\alpha+\beta+n+1)=\\ &=(-1)^n\,n\,(\alpha-\beta)\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}.\end{aligned} \tag{162}$$

Подставляя q_n в (156) и замечая, что

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+2)}=\frac{1}{\alpha+\beta+2n+1},$$

находим

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y_n^2(x)\,dx=$$

$$=2^{\alpha+\beta+2n+1}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}\frac{n!}{\alpha+\beta+2n+1}. \quad (163)$$

В силу обобщённой формулы Родрига (151)

$$J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=K_n y_n(x).$$

Значит,

$$\tilde{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)}y_n(x), \quad (164)$$

$$\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(-1)^n\times$$

$$\times\sqrt{2^{-(\alpha+\beta+2n+1)}\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}\frac{\alpha+\beta+2n+1}{n!}}\,y_n(x), \quad (165)$$

причём

$$y_n(x)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Эти формулы пригодны для всех $n>0$. Они верны и при $n=0$, если только $\alpha+\beta+1\neq 0$. Если же $n=\alpha+\beta+1=0$, то формулы теряют смысл. Однако непосредственно ясно, что

$$y_0(x)=1.$$

Значит,

$$\tilde{J}_0^{(\alpha,\beta)}(x)=y_0(x).$$

С другой стороны, подстановка $x=2t-1$ даёт

$$\int_{-1}^{+1}(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}\,dx=2^{\alpha+\beta+1}\int_0^1(1-t)^{\alpha}t^{\beta}\,dt=$$

$$=2^{\alpha+\beta+1}\,\mathrm{B}(\alpha+1,\beta+1)=2^{\alpha+\beta+1}\frac{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2)}.$$

Поэтому при $\alpha+\beta+1=0$ имеем*)

$$\hat{J}_0^{(\alpha,\beta)}(x)=\frac{1}{\sqrt{\Gamma(\alpha+1)\Gamma(\beta+1)}}.$$

---

*) Учитывая, что $\Gamma(\alpha+\beta+2)=\Gamma(1)=1$.

В некоторых случаях удобно рассматривать полиномы Якоби, отвечающие значению $K_n = \frac{(-1)^n}{2^n n!}$. Эти полиномы мы будем обозначать через $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$. Таким образом

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{(-1)^n}{2^n n!}(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}\frac{d^n}{dx^n}[(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}].$$

Формулы (164) и (165) принимают вид

$$\mathcal{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+\beta+2n+1)} 2^n n!\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x), \tag{166}$$

$$\hat{\mathcal{J}}_n^{(\alpha,\beta)}(x) = \\ = \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)\Gamma(\beta+n+1)}\frac{\alpha+\beta+2n+1}{2^{\alpha+\beta+1}}}\, n!\, P_n^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{167}$$

В заключение отметим, что обобщённая формула Родрига позволяет дать новое представление полиномов Чебышева:

$$T_n(x) = K_n\sqrt{1-x^2}\,\frac{d^n(1-x^2)^{n-\frac{1}{2}}}{dx^n}.$$

§ 2. Рекуррентная формула. Производящая функция. Дифференциальное уравнение.

Согласно общей теории ортогональных полиномов три последовательных полинома Якоби должны быть связаны рекуррентной формулой

$$\mathcal{J}_{n+2}^{(\alpha,\beta)}(x) = (x-\alpha_{n+2})\,\mathcal{J}_{n+1}^{(\alpha,\beta)}(x) - \lambda_{n+1}\mathcal{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x). \tag{168}$$

Параметр α_{n+2} легко находится сравнением коэффициентов при x^{n+1}. В силу формул (164) и (162) после простых преобразований получаем

$$\alpha_{n+2} = \frac{\beta^2-\alpha^2}{(\alpha+\beta+2n+2)(\alpha+\beta+2n+4)}. \tag{169}$$

Коэффициент λ_{n+1} определяется по формулам (73), (164) и (163). Очевидно,

$$\lambda_{n+1} = \frac{(\alpha+n+1)(\beta+n+1)(\alpha+\beta+n+1)}{(\alpha+\beta+2n+1)(\alpha+\beta+2n+2)^2(\alpha+\beta+2n+3)}4(n+1). \tag{170}$$

Для ультрасферических функций, когда $\beta=\alpha$, формулы (169) и (170) упрощаются и принимают вид

$$\alpha_{n+2}=0,\quad \lambda_{n+1}=\frac{2\alpha+n+1}{(2\alpha+2n+1)(2\alpha+2n+3)}(n+1).$$

Так как $\tilde{J}_0^{(\alpha,\beta)}(x)=1$, а*)

$$\tilde{J}_1^{(\alpha,\beta)}(x)=x+\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+2},\tag{171}$$

то рекуррентная формула (168) позволяет вычислять полиномы $\tilde{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ один за другим. Однако их выражение становится всё более и более громоздким. Например, уже $\tilde{J}_2^{(\alpha,\beta)}(x)$ имеет вид

$$\tilde{J}_2^{(\alpha,\beta)}(x)=x^2+2\frac{\alpha-\beta}{\alpha+\beta+4}x+\frac{(\alpha-\beta)^2-(\alpha+\beta)-4}{(\alpha+\beta+3)(\alpha+\beta+4)}.$$

Другим источником для получения полиномов Якоби может служить их производящая функция. Именно, можно показать**), что полиномы $P_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ служат коэффициентами при t^n в разложении функции

$$J(t,x)=\frac{2^{\alpha+\beta}}{\sqrt{1-2tx+t^2}}\times$$
$$\times\left(1-t+\sqrt{1-2tx+t^2}\right)^{-\alpha}\left(1+t+\sqrt{1-2tx+t^2}\right)^{-\beta}.$$

Однако и здесь вычисления носят весьма тягостный характер. Пожалуй, наиболее практичной для фактического вычисления полиномов Якоби является формула

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(x)=$$
$$=\frac{1}{2^n n!}\sum_{k=0}^{n}C_n^k\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(\alpha+n-k+1)}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+k+1)}(x-1)^{n-k}(x+1)^k,\tag{172}$$

непосредственно вытекающая из (157).

---

*) Равенство (171) непосредственно следует из (164) и обобщённой формулы Родрига.

**) См., например, В. Л. Гончаров [1], стр. 193.

В частности, из (172) следует, что

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(1)=\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!\,\Gamma(\alpha+1)}, \tag{173}$$

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(-1)=(-1)^n\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{n!\,\Gamma(\beta+1)}. \tag{174}$$

Теорема. *Полином $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению*

$$(1-x^2)y''+[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2)x]y'+\\+n(\alpha+\beta+n+1)y=0. \tag{175}$$

Для доказательства заметим, что

$$y=J_n^{(\alpha,\beta)}(x)=(1-x)^{-\alpha}(1+x)^{-\beta}u^{(n)}, \tag{176}$$

где

$$u=(1-x)^{\alpha+n}(1+x)^{\beta+n}.$$

Так как

$$u'=(1-x)^{\alpha+n-1}(1+x)^{\beta+n-1}[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2n)x],$$

то

$$(1-x^2)u'=[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2n)x]u.$$

От обеих частей этого равенства возьмём производные порядка $n+1$. По формуле Лейбница будем иметь

$$\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k(1-x^2)^{(k)}u^{(n+2-k)}=\\=\sum_{k=0}^{n+1}C_{n+1}^k[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2n)x]^{(k)}u^{(n+1-k)}.$$

Отсюда

$$(1-x^2)u^{(n+2)}-2(n+1)xu^{(n+1)}-(n+1)nu^{(n)}=\\=[\beta-\alpha-(\alpha+\beta+2n)x]u^{(n+1)}-(n+1)(\alpha+\beta+2n)u^{(n)}$$

и, стало быть,

$$(1-x^2)u^{(n+2)}+[\alpha-\beta+(\alpha+\beta-2)x]u^{(n+1)}+\\+(n+1)(\alpha+\beta+n)u^{(n)}=0. \tag{177}$$

Но из (176) следует, что

$$u^{(n)}=(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}y.$$

Находя отсюда $u^{(n+1)}$ и $u^{(n+2)}$ и подставляя их в (177), мы и приходим к (175).

§ 3. Оценки полиномов Якоби. Проблема разложения.

Установим некоторые оценки для полиномов Якоби. При этом мы ограничимся рассмотрением тех случаев, когда

$$\sigma=\max\{\alpha,\beta\}\geqslant-\frac{1}{2}, \tag{178}$$

так как для $\sigma<-2^{-1}$ исследование оказывается значительно более трудным.

Теорема 1. *При условии* (178) *наибольшее по модулю (на сегменте* $[-1,+1]$) *значение* $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ *достигается в одной из точек* ± 1 *).

Для доказательства обозначим $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ через y и положим

$$\psi(x)=y^2+\frac{1-x^2}{n(\alpha+\beta+n+1)}y'^2. \tag{179}$$

Тогда

$$\psi'(x)=2yy'-\frac{2x}{n(\alpha+\beta+n+1)}y'^2+\frac{1-x^2}{n(\alpha+\beta+n+1)}2y'y''.$$

Но, так как y удовлетворяет дифференциальному уравнению (175), то

$$\psi'(x)=\frac{2}{n(\alpha+\beta+n+1)}[(\alpha+\beta+1)x-(\beta-\alpha)]y'^2.$$

Предположим сначала, что

$$\alpha>-\frac{1}{2},\quad \beta>-\frac{1}{2}. \tag{180}$$

---

*) Если $\sigma<-\frac{1}{2}$, то $\max|J_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$ достигается *внутри* $(-1,+1)$.

Тогда $\alpha+\beta+1>0$ и
$$\psi'(x)=K^2(x-x_0)y'^2,$$
где положено
$$x_0=\frac{\beta-\alpha}{\alpha+\beta+1}.$$

Из (180) вытекает, что
$$-1<x_0<1,$$
и выражение для $\psi'(x)$ показывает, что $\psi'(x)<0$ при $-1\leqslant x<x_0$ и $\psi'(x)>0$ при $x_0<x\leqslant 1$. Значит, $\psi(x)$ убывает на сегменте $[-1, x_0]$ и возрастает на сегменте $[x_0, +1]$. Отсюда вытекает, что при $x_0\leqslant x<+1$
$$\psi(x)<\psi(1).$$
Но
$$[J_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2\leqslant\psi(x),\quad [J_n^{(\alpha,\beta)}(1)]^2=\psi(1).$$
Значит,
$$|J_n^{(\alpha,\beta)}(x)|<|J_n^{(\alpha,\beta)}(1)|\qquad (x_0\leqslant x<1),$$
т. е. в сегменте $[x_0, 1]$ наибольшее по модулю значение полинома $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ достигается в точке $x=+1$.

Аналогично устанавливается, что
$$\max_{-1\leqslant x\leqslant x_0}|J_n^{(\alpha,\beta)}(x)|=|J_n^{(\alpha,\beta)}(-1)|.$$

Таким образом для случая (180) теорема доказана.

Пусть, далее,
$$\alpha\geqslant-\frac{1}{2},\quad \beta<-\frac{1}{2}. \tag{181}$$

Тогда относительно суммы $\alpha+\beta+1$ возможны все три предположения:
$$\alpha+\beta+1\begin{cases}=0,\\>0,\\<0.\end{cases}$$

В первом из этих случаев будет $\psi'(x)>0$ при всех вещественных x, кроме конечного числа точек, где $y'=0$. Во втором, из того, что $2\beta<-1$, вытекает, что при

$-1 \leqslant x \leqslant 1$ будет $\psi'(x) > 0$ (опять-таки за исключением корней производной y'). В третьем случае, опираясь на неравенство $2\alpha \geqslant 1$, снова получим, что $\psi'(x) > 0$, всюду на $[-1, +1]$, кроме точек, где $y' = 0$ (и точки $x = +1$ при $\alpha = -\frac{1}{2}$). Таким образом в случае (181) функция $\psi(x)$ строго возрастает на $[-1, +1]$, и те же рассуждения, что и выше показывают, что

$$\max_{-1 \leqslant x \leqslant 1} |J_n^{(\alpha,\beta)}(x)| = J_n^{(\alpha,\beta)}(+1)|.$$

Если же $\alpha < -\frac{1}{2}$, $\beta \geqslant -\frac{1}{2}$, то сходные рассуждения приводят к тому, что $\max |J_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$ достигается при $x = -1$.

В случае $\alpha > -\frac{1}{2}$, $\beta = -\frac{1}{2}$ будет $\psi'(x) = K^2(x+1)y'^2$, т. е. $\psi'(x) > 0$ при $x > -1$. Значит, $\psi(x)$ возрастает и попрежнему $\max |J_n^{(\alpha,\beta)}(x)|$ достигается при $x = +1$. Аналогично рассматривается случай $\alpha = -\frac{1}{2}$, $\beta > -\frac{1}{2}$.

Остаётся рассмотреть случай, когда $\alpha = \beta = -\frac{1}{2}$ (т. е. случай полиномов Чебышева). В этом случае $\psi'(x) = 0$ и, стало быть, $\psi(x)$ постоянна. Поэтому

$$[J_n^{(\alpha,\beta)}(x)]^2 \leqslant \psi(x) = \psi(1) = [J_n^{(\alpha,\beta)}(1)]^2,$$

и теорема очевидна.

Отметим теперь некоторые простые свойства функции

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1}\, dt. \qquad (x > 0)$$

Её производная $\Gamma'(x)$ имеет единственный корень u_0, причём $1 < u_0 < 2$.

Действительно, так как

$$\Gamma''(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} \ln^2 t\, dt > 0,$$

то $\Gamma'(x)$ возрастает и больше одного корня иметь не может. С другой стороны,

$$\Gamma(1)=\Gamma(2)=1,$$

и по теореме Ролля между 1 и 2 обязательно имеется корень $\Gamma'(x)$. Очевидно, что при $x \geqslant u_0$ функция $\Gamma(x)$ возрастает. Оценим характер её роста.

Лемма. *Если $\alpha>-1$, $\beta>-1$, то при любом натуральном n*

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}<Cn^{\beta},$$

где C есть постоянная, зависящая от α и β.

Действительно,

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}=\frac{(\alpha+\beta+n)(\alpha+\beta+n-1)\ldots(\alpha+\beta+2)\,\Gamma(\alpha+\beta+2)}{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+2)\,\Gamma(\alpha+2)}.$$

Значит,

$$\ln\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}=\ln\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+2)}+\sum_{k=2}^{n}\ln\left(1+\frac{\beta}{\alpha+k}\right).$$

Но при $x>-1$

$$\ln(1+x)\leqslant x.$$

Стало быть,

$$\ln\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\leqslant\ln\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+2)}+\beta\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\alpha+k}.$$

С другой стороны, если $k-1<x<k$, то

$$\frac{1}{\alpha+k}<\frac{1}{\alpha+x}<\frac{1}{\alpha+k-1}\qquad(k\geqslant 2).$$

Значит,

$$\frac{1}{\alpha+k}<\int_{k-1}^{k}\frac{dx}{\alpha+x}<\frac{1}{\alpha+k-1}\qquad(k\geqslant 2)$$

и

$$\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\alpha+k}<\ln\frac{\alpha+n}{\alpha+1}<\sum_{k=1}^{n-1}\frac{1}{\alpha+k}.$$

Отсюда

$$\ln\frac{\alpha+n}{\alpha+1}-\frac{1}{\alpha+1}<\sum_{k=2}^{n}\frac{1}{\alpha+k}<\ln\frac{\alpha+n}{\alpha+1}$$

и

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\leqslant\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+2)}\left(\frac{\alpha+n}{\alpha+1}\right)^{\beta} \qquad (\text{при } \beta\geqslant 0),$$

$$\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}<\frac{\Gamma(\alpha+\beta+2)}{\Gamma(\alpha+2)}e^{\frac{-\beta}{\alpha+1}}\left(\frac{\alpha+n}{\alpha+1}\right)^{\beta} \qquad (\text{при } \beta<0).$$

Лемма доказана *).

Теорема 2. *Если выполнено условие* (178), *то нормированные полиномы Якоби удовлетворяют неравенству*

$$|\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)|<Mn^{\alpha+\frac{1}{2}}$$
$$(-1\leqslant x\leqslant 1,\ n=1,2,3,\ldots), \tag{182}$$

где M — постоянная, зависящая от α и β.

Действительно, по предыдущей теореме

$$|\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)|\leqslant\max\{|\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(+1)|,\ |\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(-1)|\}.$$

Но, в силу (167), (173) и (174):

$$|\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(+1)|=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\alpha+1)}\sqrt{\frac{\alpha+\beta+2n+1}{2^{\alpha+\beta+1}}}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\beta+n+1)}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{\Gamma(n+1)}},$$

$$|\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(-1)|=$$
$$=\frac{1}{\Gamma(\beta+1)}\sqrt{\frac{\alpha+\beta+2n+1}{2^{\alpha+\beta+1}}}\sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+\beta+n+1)}{\Gamma(\alpha+n+1)}\frac{\Gamma(\beta+n+1)}{\Gamma(n+1)}}.$$

---

*) В самом деле, отношение $\dfrac{\left(\frac{\alpha+n}{\alpha+1}\right)^{\beta}}{n^{\beta}}$ с возрастанием n стремится к единице и потому ограничено.

Отсюда и из предыдущей леммы следует

$$|\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(+1)| < C_1 n^{\alpha+\frac{1}{2}}, \quad |\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(-1)| < C_2 n^{\beta+\frac{1}{2}},$$

где C_1 и C_2 — постоянные, зависящие от α и β.

Теорема доказана.

Теорема 3. *Пусть $\sigma \geqslant -\frac{1}{2}$ и p есть натуральное число, не меньшее, чем $2\sigma+2$. Всякая функция $f(x)$, заданная на $[-1, +1]$ и имеющая непрерывную производную порядка p, разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по полиномам $\hat{J}_n^{(\alpha,\beta)}(x)$.*

В самом деле, из (182) вытекает

$$|K_n(t, x)| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |\hat{J}_k^{(\alpha,\beta)}(t)|\,|\hat{J}_k^{(\alpha,\beta)}(x)| < A^2 + M^2 \sum_{k=1}^{n} k^{2\sigma+1},$$

где $A = \hat{J}_0^{(\alpha,\beta)}(x)$. Значит, при $n \geqslant 1$

$$|K_n(t, x)| < M_1 n^{2\sigma+2},$$

где M_1 — новая постоянная. Отсюда для функции Лебега $L_n(x)$ вытекает оценка

$$L_n(x) < 2M_1 n^{2\sigma+2}.$$

С другой стороны, по теореме Джексона

$$\lim_{n\to\infty} n^p E_n(f) = 0.$$

В силу теоремы 7 § 4 главы IV наше утверждение доказано. Дальнейшие подробности о полиномах Якоби читатель может найти в монографии Сеге [1].

§ 4. Полиномы Чебышева второго рода.

Полиномами Чебышева второго рода называются полиномы $U_n(x)$, образующие на $[-1, +1]$ ортогональную систему веса $\sqrt{1-x^2}$. Мы уже упоминали о них в § 5 главы IV. Сейчас мы остановимся на них более подробно.

Лемма 1. *Справедливо тождество*

$$\frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta} = 2^n \cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1} \lambda_k^{(n)} \cos^k\theta.$$

Лемма доказывается индуктивно на основании формулы

$$\sin(n+1)\theta = \sin n\theta\cos\theta + \cos n\theta\sin\theta$$

и того факта, что

$$\cos n\theta = 2^{n-1}\cos^n\theta + \sum_{k=0}^{n-1} \mu_k^{(n)} \cos^k\theta.$$

Следствие. *Если* $|x| \leqslant 1$, *то функция*

$$\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \tag{183}$$

есть полином степени n со старшим коэффициентом 2^n.

Лемма 2. *Полиномы* $\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$ *образуют на* $[-1, +1]$ *ортогональную систему веса* $\sqrt{1-x^2}$.

В самом деле, интеграл

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \frac{\sin(m+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}} \sqrt{1-x^2}\,dx$$

подстановкой $x = \cos\theta$ сводится к интегралу

$$\int_0^{\pi} \sin(n+1)\theta\sin(m+1)\theta\,d\theta = 0.$$

Таким образом для полиномов $U_n(x)$ получается формула

$$U_n(x) = K_n \frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{184}$$

Замечание. Формулу (184) можно вывести из самого определения полинома $U_n(x)$. Именно, для всякого полинома $R(x)$ степени ниже n будет

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\, R(x)\, U_n(x)\, dx = 0.$$

Полагая здесь $x = \cos\theta$, находим

$$\int_0^{\pi} R(\cos\theta)\, U_n(\cos\theta) \sin^2\theta\, d\theta = 0.$$

Так как $\sin^2\theta\, U_n(\cos\theta)$ есть тригонометрический полином порядка $n+2$, то

$$\sin^2\theta\, U_n(\cos\theta) = \sum_{k=0}^{n+2} A_k \cos k\theta.$$

Подставляя это в предшествующий интеграл и беря в качестве $R(\cos\theta)$ функцию $\cos m\theta$, где $m < n$, находим

$$\int_0^{\pi} \cos m\theta \left[\sum_{k=0}^{n+2} A_k \cos k\theta\right] d\theta = 0.$$

Отсюда следует, что $A_m = 0$. Таким образом

$$\sin^2\theta U_n(\cos\theta) =$$
$$= A_n \cos n\theta + A_{n+1} \cos(n+1)\theta + A_{n+2} \cos(n+2)\theta.$$

Положим здесь $\theta = 0$ и $\theta = \pi$. Это даёт два условия на коэффициенты A:

$$A_n + A_{n+1} + A_{n+2} = 0, \quad A_n - A_{n+1} + A_{n+2} = 0.$$

Отсюда $A_{n+1} = 0$ и $A_{n+2} = -A_n$. Значит,

$$\sin^2\theta\, U_n(\cos\theta) = A_n[\cos n\theta - \cos(n+2)\theta] =$$
$$= 2A_n \sin(n+1)\theta \sin\theta,$$

что снова приводит к формуле (184).

Чтобы получить полином $\widetilde{U}_n(x)$ со старшим коэффициентом 1, надо положить $K_n = 2^{-n}$. Ввиду того что

$$\int_{-1}^{+1} U_n^2(x) \sqrt{1-x^2}\, dx = K_n^2 \int_0^{\pi} \sin^2(n+1)\theta\, d\theta = \frac{\pi}{2} K_n^2,$$

ясно, что нормированные полиномы $\hat{U}_n(x)$ получаются при $K_n = \sqrt{\frac{2}{\pi}}$.

Рекуррентная формула для $U_n(x)$ получается проще всего из формулы

$$\sin(n+3)\theta + \sin(n+1)\theta = 2\sin(n+2)\theta\cos\theta,$$

откуда

$$\tilde{U}_{n+2}(x) = x\tilde{U}_{n+1}(x) - \frac{1}{4}\tilde{U}_n(x). \tag{185}$$

Так как

$$\tilde{U}_0(x) = 1, \quad \tilde{U}_1(x) = x,$$

то

$$\tilde{U}_2(x) = x^2 - \frac{1}{4},$$

$$\tilde{U}_3(x) = x^3 - \frac{1}{2}x,$$

$$\tilde{U}_4(x) = x^4 - \frac{3}{4}x + \frac{1}{16},$$

$$\cdots\cdots\cdots\cdots\cdots$$

Чтобы написать непрерывную дробь, связанную с полиномами $U_n(x)$, отметим, что для них

$$\alpha_{n+2} = 0, \; \lambda_{n+1} = \frac{1}{4} \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Кроме того *), $\alpha_1 = 0$, $\lambda_0 = \frac{\pi}{2}$.

Так как при $x > 1$

$$\int_{-1}^{+1} \frac{\sqrt{1-t^2}}{x-t}\,dt = \pi\left(x - \sqrt{x^2-1}\right),$$

---

*) Ибо α_1 есть корень $U_1(x)$, а $\lambda_0 = \int_{-1}^{+1} \sqrt{1-x^2}\,dx$.

то

$$2(x-\sqrt{x^2-1})=\cfrac{1}{x-\cfrac{{}^1/_4}{x-\cfrac{{}^1/_4}{x-\dots}}}.$$

Отметим ещё, что корни полиномов $U_n(x)$ суть

$$x_k^{(n)}=\cos\frac{k\pi}{n+1} \qquad (k=1, 2, \dots, n).$$

Отсюда легко получить, что предельная плотность распределения этих корней при n, стремящемся к бесконечности, такая же, как у полиномов $T_n(x)$, т. е. равная

$$\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Впрочем, это ясно и из того обстоятельства, что полином $U_n(x)$ является производной*) полинома $T_{n+1}(x)$. Действительно,

$$\frac{dT_{n+1}(x)}{dx}=\frac{d}{dx}[\cos(n+1)\arccos x]=$$
$$=(n+1)\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Переходя к вопросам разложения по полиномам $U_n(x)$, отметим, что

$$|\hat{U}_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}(n+1) \qquad (-1\leqslant x\leqslant 1),$$
$$|\hat{U}_n(x)|\leqslant\sqrt{\frac{2}{\pi}}\frac{1}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1<x<1).$$

Отсюда, на основании общих теорем главы IV получаются следующие результаты:

I. *Всякая функция, имеющая непрерывную третью производную, разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по полиномам* $\hat{U}_n(x)$.

---

*) В связи с этим возникает задача изучения таких ортогональных по некоторому весу систем функций, что их производные ортогональны по другому весу. См. Б. М. Гагаев [1].

II. *Всякая функция из $L^2 \sqrt{1-x^2}$ разлагается в ряд Фурье по полиномам $U_n(x)$ в каждой точке x, в которой*

$$\int_{-1}^{+1} \left[\frac{f(t)-f(x)}{t-x}\right]^2 \sqrt{1-t^2}\, dt < +\infty .$$

Однако с помощью тригонометрических рядов Фурье можно получить более точный результат:

Теорема 1. *Если функция $f(x)$, заданная на $[-1, +1]$, удовлетворяет условию Дини — Липшица*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) \ln \delta = 0,$$

то в интервале $(-1, +1)$ она разлагается в ряд Фурье по полиномам $\hat{U}_n(x)$, причём сходимость этого ряда равномерна в каждом сегменте $[-1+h, 1-h]$.

Действительно, 2π-периодическая функция $\sin\theta\, f(\cos\theta)$ тоже будет удовлетворять условию Дини — Липшица *) и потому разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье. Так как эта функция нечётная, то

$$\sin\theta\, f(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \sin(n+1)\theta$$

$$\left(b_n = \frac{2}{\pi} \int_0^{\pi} \sin\theta\, f(\cos\theta) \sin n\theta\, d\theta\right).$$

Отсюда при $0 < \theta < \pi$

$$f(\cos\theta) = \sum_{n=0}^{\infty} b_{n+1} \frac{\sin(n+1)\theta}{\sin\theta},$$

причём сходимость этого ряда равномерна в каждом сегменте $[\eta, \pi-\eta]$. Полагая $\theta = \arccos x$, мы и приходим

*) Если $|\theta_1 - \theta_2| \leqslant \delta$, то, полагая $f(\cos\theta) = \psi(\theta)$, будем иметь $|\sin\theta_1\, \psi(\theta_1) - \sin\theta_2\, \psi(\theta_2)| \leqslant$

$$\leqslant |\sin\theta_1 - \sin\theta_2|\, |\psi(\theta_1)| + |\sin\theta_2|\, |\psi(\theta_1) - \psi(\theta_2)| \leqslant K\delta + \omega(\delta).$$

к высказанной теореме, ибо

$$b_{n+1}=\sqrt{\frac{2}{\pi}}\int_{-1}^{+1} f(x)\,\hat{U}_n(x)\sqrt{1-x^2}\,dx.$$

В заключение докажем интересное экстремальное свойство полиномов $U_n(x)$.

Теорема 2 (Е. И. Золотарёв — А. Н. Коркин). *Из всех полиномов $P_n(x)$ степени n со старшим коэффициентом, равным единице, наименьшее значение интегралу*

$$\int_{-1}^{+1} |\tilde{P}_n(x)|\,dx \tag{186}$$

доставляет полином $\tilde{U}_n(x)$ *).

Для доказательства потребуются некоторые предварительные соображения.

Лемма 1. *Пусть n — натуральное число, а m — одно из чисел* 0, 1, 2, ..., *n. Тогда*

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{km\pi}{n+1}=\frac{(-1)^{n+m}-1}{2}. \tag{187}$$

Действительно,

$$\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{km\pi}{n+1}=R\left[\sum_{k=1}^{n}\left(-e^{\frac{im\pi}{n+1}}\right)^k\right]=$$

$$=R\left[\frac{(-1)^{n+m}-e^{\frac{im\pi}{n+1}}}{1+e^{\frac{im\pi}{n+1}}}\right].$$

Если числа n и m разной чётности, то

$$\frac{(-1)^{n+m}-e^{\frac{im\pi}{n+1}}}{1+e^{\frac{im\pi}{n+1}}}=-1. \tag{188}$$

*) А. Н. Коркин и Е. И. Золотарёв [1].

Если же n и m одной чётности, то левая часть (188) есть число чисто мнимое, ибо

$$\frac{1-e^{i\theta}}{1+e^{i\theta}}=\frac{1-\cos\theta-i\sin\theta}{1+\cos\theta+i\sin\theta}=-i\operatorname{tg}\frac{\theta}{2}.$$

Лемма доказана.

Лемма 2. *Если n—натуральное число, а r—одно из чисел* $0, 1, \ldots, n-1$, *то*

$$I=\int_0^\pi \cos^r\theta\sin\theta\operatorname{sign}[\sin(n+1)\theta]\,d\theta=0.$$

В самом деле, если

$$k\pi<(n+1)\theta<(k+1)\pi,$$

то

$$\operatorname{sign}[\sin(n+1)\theta]=(-1)^k;$$

Отсюда

$$I=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\int_{\frac{k\pi}{n+1}}^{\frac{(k+1)\pi}{n+1}}\cos^r\theta\sin\theta\,d\theta$$

и, стало быть,

$$I=\frac{1}{r+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\left[\cos^{r+1}\frac{(k+1)\pi}{n+1}-\cos^{r+1}\frac{k\pi}{n+1}\right].$$

Но

$$\cos^{r+1}\theta=\sum_{m=0}^{r+1}a_m\cos m\theta.$$

Значит, дело сводится к доказательству равенства

$$\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\left[\cos\frac{(k+1)m\pi}{n+1}-\cos\frac{km\pi}{n+1}\right]=0, \qquad (189)$$

которое можно привести к виду

$$\sum_{k=1}^{n+1}(-1)^k\cos\frac{km\pi}{n+1}+\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\cos\frac{km\pi}{n+1}=0,$$

или

$$(-1)^{n+1}\cos m\pi+2\sum_{k=1}^{n}(-1)^k\cos\frac{km\pi}{n+1}+1=0.$$

Это же последнее равенство равносильно (187).

Следствие. *Если n — натуральное число, а r — одно из чисел* $0, 1, 2, \ldots, n-1$, *то*

$$\int_{-1}^{+1} x^r \operatorname{sign}[\tilde{U}_n(x)]\,dx=0. \tag{190}$$

Лемма 3. *Справедливо равенство*

$$\int_{-1}^{+1} x^n \operatorname{sign}[\tilde{U}_n(x)]\,dx=\frac{1}{2^{n-1}}. \tag{191}$$

Аналогично предыдущему дело сводится к доказательству равенства

$$\int_{0}^{\pi}\cos^n\theta\sin\theta\operatorname{sign}[\sin(n+1)\theta]\,d\theta=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Но последний интеграл равен

$$\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}\left[\cos^{n+1}\frac{(k+1)\pi}{n+1}-\cos^{n+1}\frac{k\pi}{n+1}\right].$$

Замечая, что

$$\cos^{n+1}\theta=\frac{\cos(n+1)\theta}{2^n}+\sum_{m=0}^{n}a_m\cos m\theta,$$

и учитывая (189), сводим лемму к очевидному равенству

$$\frac{1}{2^n(n+1)}\sum_{k=0}^{n}(-1)^{k+1}[\cos(k+1)\pi-\cos k\pi]=\frac{1}{2^{n-1}}.$$

Возвращаясь к теореме Золотарёва — Коркина, обозначим через $\tilde{P}_n(x)$ произвольный полином степени n

со старшим коэффициентом, равным единице. В силу (190) и (191) имеем

$$\int_{-1}^{+1} \tilde{P}_n(x) \operatorname{sign}[\tilde{U}_n(x)]\, dx = \frac{1}{2^{n-1}}.$$

Отсюда

$$\frac{1}{2^{n-1}} \leqslant \int_{-1}^{+1} |\tilde{P}_n(x)|\, dx.$$

С другой стороны, при $\tilde{P}_n(x) = \tilde{U}_n(x)$ мы имеем здесь точное равенство. Таким образом интеграл (186) действительно минимизируется полиномом $\tilde{U}_n(x)$. Остаётся показать, что нет других решений проблемы. Но если бы оказалось, что

$$\int_{-1}^{+1} |\tilde{P}_n(x)|\, dx = \frac{1}{2^{n-1}},$$

то отсюда следовало бы, что

$$\int_{-1}^{+1} |\tilde{P}_n(x)| \{1 - \lambda(x)\}\, dx = 0,$$

где $\lambda(x) = \operatorname{sign}[\tilde{P}_n(x)] \cdot \operatorname{sign}[\tilde{U}_n(x)]$. Значит, необходимо $\lambda(x) = 1$, т. е. полиномы $\tilde{P}_n(x)$ и $\tilde{U}_n(x)$ имеют одинаковые знаки. Так как $\tilde{U}_n(x)$ меняет знак при переходе через каждый свой корень, то то же должно иметь место и для $\tilde{P}_n(x)$. Иначе говоря, $\tilde{P}_n(x)$ и $\tilde{U}_n(x)$ имеют общие корни, а так как и старшие коэффициенты у них одинаковы, то эти два полинома должны быть тождественны.

Теорема Золотарёва — Коркина была неоднократно обобщаема в различных направлениях *), но мы ограничимся сказанным.

---

*) См. Н. И. Ахиезер и М. Г. Крейн [2], Я. Л. Геронимус [2,3].

§ 5. Полиномы Якоби для $\alpha=\frac{1}{2}$, $\beta=-\frac{1}{2}$.

В заключение главы о полиномах Якоби остановимся вкратце ещё на одном их частном случае, именно на полиномах $W_n(x)$, образующих на $[-1, +1]$ ортогональную систему веса

$$p(x)=\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}.$$

Явная формула для полиномов $W_n(x)$ может быть выведена из следующих соображений: для любого полинома $R(x)$ степени ниже n

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}R(x)\,W_n(x)\,dx=0.$$

Полагая здесь $x=\cos\theta$ и замечая, что

$$\sqrt{\frac{1-\cos\theta}{1+\cos\theta}}=\operatorname{tg}\frac{\theta}{2},$$

находим

$$\int_0^{\pi}R(\cos\theta)\,(1-\cos\theta)\,W_n(\cos\theta)\,d\theta=0.$$

Но $W_n(\cos\theta)$ есть тригонометрический полином порядка n. Значит,

$$(1-\cos\theta)\,W_n(\theta)=\sum_{k=0}^{n+1}A_k\cos k\theta.$$

Подставляя это в предшествующий интеграл и принимая за $R(\cos\theta)$ функцию $\cos m\theta$ при $m<n$, находим $A_m=0$. Таким образом

$$(1-\cos\theta)\,W_n(\cos\theta)=A_n\cos n\theta+A_{n+1}\cos(n+1)\theta.$$

Отсюда при $\theta=0$ получается, что $A_{n+1}=-A_n$ и

$$(1-\cos\theta)\,W_n(\cos\theta)=A_n[\cos n\theta-\cos(n+1)\theta].$$

Значит *),

$$W_n(\cos\theta) = A_n \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Используя формулу (175) из первой части, придадим последнему равенству вид

$$W_n(\cos\theta) = A_n[1 + 2(\cos\theta + \cos 2\theta + \ldots + \cos n\theta)],$$

откуда вытекает представление $W_n(x)$ через полиномы Чебышева:

$$W_n(x) = A_n\{1 + 2[T_1(x) + T_2(x) + \ldots + T_n(x)]\}.$$

Так как старший коэффициент у $T_n(x)$ есть 2^{n-1}, то

$$\widetilde{W}_n(x) = \frac{1}{2^n} \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}} \qquad (\theta = \arccos x).$$

---

*) Ещё проще получается эта формула на основании того, что $\sqrt{\frac{1-x}{1+x}} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}(1-x)$, так что применима формула (111). Именно, в обозначениях § 5 главы IV имеем

$$Q_n(x) = \begin{vmatrix} T_n(1) & T_n(x) \\ T_{n+1}(1) & T_{n+1}(x) \end{vmatrix} = T_{n+1}(x) - T_n(x),$$

откуда

$$W_n(x) = K_n \frac{T_{n+1}(x) - T_n(x)}{1-x} = K_n \frac{\cos(n+1)\theta - \cos n\theta}{1-\cos\theta} =$$

$$= -K_n \frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}.$$

Чтобы найти нормированные полиномы $\hat{W}_n(x)$, заметим, что

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-x}{1+x}}W_n^2(x)\,dx=A_n^2\int_0^\pi(1-\cos\theta)\frac{\sin^2\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin^2\frac{\theta}{2}}d\theta=$$

$$=2A_n^2\int_0^\pi\sin^2\frac{2n+1}{2}\theta\,d\theta=A_n^2\pi.$$

Значит,

$$\hat{W}_n(x)=\frac{1}{\sqrt{\pi}}\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}\qquad(\theta=\arccos x).$$

Отсюда следуют оценки

$$|\hat{W}_n(x)|\leqslant\frac{2n+1}{\sqrt{\pi}}\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1),$$

$$|\hat{W}_n(x)|<\sqrt{\frac{2}{\pi}}\,\frac{1}{\sqrt{1-x}}\qquad(-1\leqslant x<1).$$

Опираясь на эти оценки и на общие результаты главы IV, можно было бы получить теоремы разложения по полиномам $\hat{W}_n(x)$. Так, например, всякая функция, имеющая на $[-1, +1]$ непрерывную третью производную, разлагается в равномерно сходящийся ряд Фурье по полиномам $\hat{W}_n(x)$. Однако более точный результат получается, если заметить, что

$$K_n(t, x)=\sum_{k=0}^{n}\hat{W}_k(t)\hat{W}_k(x)=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\tau}{2}}\sum_{k=0}^{n}\left[\cos\frac{2k+1}{2}(\tau-\theta)-\cos\frac{2k+1}{2}(\tau+\theta)\right],$$

где $\theta=\arccos x$, $\tau=\arccos t$. Действительно, отсюда вытекает

$$K_n(t, x)=\frac{1}{4\pi\sin\frac{\theta}{2}\sin\frac{\tau}{2}}\left[\frac{\sin(n+1)(\tau-\theta)}{\sin\frac{\tau-\theta}{2}}-\frac{\sin(n+1)(\tau+\theta)}{\sin\frac{\tau+\theta}{2}}\right].$$

Значит,

$$L_n(x)=\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,|K_n(t,x)|\,dt=$$

$$=\frac{1}{2\pi\sin\frac{\theta}{2}}\int_0^{\pi}\sin\frac{\tau}{2}\left|\frac{\sin(n+1)(\tau-\theta)}{\sin\frac{\tau-\theta}{2}}-\frac{\sin(n+1)(\tau+\theta)}{\sin\frac{\tau+\theta}{2}}\right|d\tau.$$

Отсюда обычными методами выводится

$$L_n(x)<\frac{C\ln n}{\sin\frac{\theta}{2}}=\frac{C_1\ln n}{\sqrt{1-x}}$$

и, стало быть, любая функция $f(x)$, удовлетворяющая условию Дини — Липшица $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(\delta)\ln\delta=0$, разлагается в ряд Фурье по полиномам $\hat{W}_n(x)$ во всех точках промежутка $[-1,+1)$, открытого справа, причём сходимость ряда равномерна в каждом сегмент $[-1,1-h]$.

Из формулы

$$W_n(x)=A_n\,\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\theta}{\sin\frac{\theta}{2}}$$

вытекает, что корни полинома $W_n(x)$ суть

$$x_k=\cos\frac{2k\pi}{2n+1}\qquad(k=1,\,2,\,\ldots,\,n).$$

Предоставляем читателю найти рекуррентную формулу для полиномов $\tilde{W}_n(x)$ и связанное с ней разложение интеграла

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{\frac{1-t}{1+t}}\,\frac{dt}{x-t}=\pi\frac{\sqrt{x+1}-\sqrt{x-1}}{\sqrt{x+1}}\qquad(x>1)$$

в непрерывную дробь.

ГЛАВА VII.

ПРОБЛЕМА МОМЕНТОВ ДЛЯ КОНЕЧНОГО ПРОМЕЖУТКА.

§ 1. Постановка вопроса

Мы уже говорили, что числа

$$\mu_n = \int_a^b x^n p(x)\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots) \quad (192)$$

называются *моментами* весовой функции $p(x)$. Зная эти числа, мы можем построить ортогональную систему полиномов веса $p(x)$, хотя бы сам этот вес нам и не был известен. Это довольно естественно потому, что моменты весовой функции определяют её однозначным образом (если, как обычно, не различать между собою эквивалентных функций). Для случая, когда $p(x)$ *суммируема с квадратом*, это ясно из того, что система степеней $\{x^n\}$ полна в L^2, однако справедлива более общая

Теорема 1. *Если $f(x)$ — суммируемая функция и*

$$\int_a^b x^n f(x)\,dx = 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots), \quad (193)$$

то $f(x)$ есть тождественный нуль.

В самом деле, полагая

$$F(x) = \int_a^x f(t)\,dt,$$

получаем из (193) при $n=0$, что $F(b)=0$. Далее, интегрируя по частям, при $n>0$ имеем

$$\int_a^b x^n f(x)\,dx=[x^n F(x)]_a^b-n\int_a^b x^{n-1}F(x)\,dx,$$

откуда в связи с (193)

$$\int_a^b x^{n-1}F(x)\,dx=0 \quad (n=1, 2, 3, \ldots). \quad (194)$$

Так как $F(x)$ *непрерывна*, то из (194) следует, что $F(x)$ есть тождественный нуль, а тогда и $f(x)$ есть тождественный нуль.

Из этой теоремы ясно, что совпадение всех моментов двух весовых функций влечёт тождественность этих функций *). Однако, как мы увидим дальше, вовсе не всякая наперёд заданная числовая последовательность является последовательностью моментов какой-нибудь весовой функции. Если это всё же так, то мы будем называть заданную последовательность *моментной последовательностью*. Более общим образом мы будем говорить, что последовательность $\{\mu_n\}$ есть моментная последовательность сегмента $[a, b]$, если существует

---

*) Отсюда следует, что вес $p(x)$ определяется (с точностью до множителя $K>0$) своими ортогональными полиномами *однозначно*. Действительно, система $\{\omega_n(x)\}$, ортогональная по весу $p(x)$, такова же и по весу $Kp(x)$. Обратно, зная

$$\tilde{\omega}_n(x)=x^n+\sigma_1^{(n)}x^{n-1}+\cdots+\sigma_n^{(n)}$$

и полагая

$$\mu_0=\int_a^b p(x)\,dx=1,$$

находим

$$\int_a^b p(x)\,\tilde{\omega}_n(x)\,dx=\mu_n+\sigma_1^{(n)}\mu_{n-1}+\cdots+\sigma_{n-1}^{(n)}\mu_1+1=0.$$

Эти равенства определяют все моменты μ_n.

функция *ограниченной вариации* $g(x)$, для которой

$$\int_a^b x^n dg(x) = \mu_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots), \quad (195)$$

причём входящий сюда интеграл понимается в смысле Стилтьеса. Самую функцию $g(x)$ мы будем называть в этом случае *интегральным весом* в отличие от *дифференциального веса* $p(x)$, о котором шла речь выше. Ясно, что наличие суммируемого дифференциального веса, при котором выполнено (192), влечёт существование абсолютно непрерывного интегрального веса

$$g(x) = \int_a^x p(t)\,dt.$$

Если при этом $p(x)$ — положительная функция, то $g(x)$ — *возрастающая* функция.

В этой главе мы изложим принадлежащие Хаусдорфу [1] признаки того, является ли заданная последовательность моментной или нет. Этот вопрос и называется *проблемой моментов*.

Как известно, интеграл Стилтьеса

$$\int_a^b f(x)\,dg(x) \qquad (196)$$

не меняется, если к $g(x)$ добавить любую постоянную. Отсюда уже видно, что интегральный вес не определяется своими моментами однозначно. С целью избежать возможности изменения веса за счёт постоянного слагаемого, мы раз навсегда условимся рассматривать только такие веса, для которых

$$g(a) = 0. \qquad (197)$$

Однако и это соглашение ещё не приводит к однозначной определяемости интегрального веса его моментами, ибо интеграл (196) не изменится, если мы произвольным образом изменим значение функции $g(x)$ в какой-нибудь точке *интервала* (a, b) (это видно из того, что мы можем не включать эту точку в число точек деления при составлении сумм Римана—Стилтьеса). Чтобы всё же добиться однозначной определяемости веса моментами, введём следующее

Определение. Функция ограниченной вариации $g(x)$, заданная на $[a, b]$, называется *правильной*, если при $a < x < b$

$$g(x) = \frac{g(x-0)+g(x+0)}{2}.$$

Лемма. *Для всякой функции ограниченной вариации $g(x)$, заданной на $[a, b]$, существует одна и только одна правильная функция ограниченной вариации $\bar{g}(x)$, которая совпадает с $g(x)$ во всех точках, где $g(x)$ непрерывна, а также при $x=a$ и $x=b$.*

Действительно, положим $\bar{g}(a)=g(a)$, $\bar{g}(b)=g(b)$ и

$$\bar{g}(x) = \frac{g(x-0)+g(x+0)}{2} \qquad (a < x < b).$$

Ясно, что $\bar{g}(x)$ совпадает с $g(x)$ там, где $g(x)$ непрерывна. Далее, $\bar{g}(x)$ также есть функция ограниченной вариации*). Ввиду того что множество точек непрерывности $g(x)$ всюду плотно на $[a, b]$, ясно, что

$$\bar{g}(x-0)=g(x-0), \quad \bar{g}(x+0)=g(x+0).$$

Значит, $\bar{g}(x)$ правильна. Если бы нашлась ещё одна правильная функция $\underline{g}(x)$, удовлетворяющая условиям леммы, то, совпадая с $\bar{g}(x)$ на всюду плотном множестве, она должна была бы быть с ней тождественной.

Условимся называть функцию $\bar{g}(x)$, о которой говорится в лемме, *ядром* функции $g(x)$.

---

*) В самом деле, пусть $g(x)=\pi(x)-\nu(x)$ есть разложение $g(x)$ на возрастающие компоненты. Тогда функции $\bar{\pi}(x)$ и $\bar{\nu}(x)$, совпадающие с $\pi(x)$ и $\nu(x)$ в точках a и b и равные, соответственно, $\frac{\pi(x-0)+\pi(x+0)}{2}$ и $\frac{\nu(x-0)+\nu(x+0)}{2}$ в (a, b), тоже возрастают. Но $\bar{g}(x)=\bar{\pi}(x)-\bar{\nu}(x)$.

Теорема 2. *Не может существовать двух различных правильных интегральных весов с одинаковыми моментами.*

Действительно, если бы существовали такие веса, то их разность была бы правильной функцией, у которой все моменты равны нулю. Обозначим эту разность через $g(x)$. Тогда из того, что

$$g(b)-g(a)=\int_a^b dg(x)=0,$$

и из (197) вытекает, что $g(b)=0$.

Далее, интегрируя по частям, находим

$$0=\int_a^b x^n\,dg(x)=[x^n g(x)]_a^b-n\int_a^b x^{n-1}g(x)\,dx$$
$$(n=1, 2, 3, \ldots),$$

откуда

$$\int_a^b x^{n-1}g(x)\,dx=0 \qquad (n=1, 2, 3, \ldots).$$

В силу теоремы 1 функция $g(x)$ должна быть эквивалентной нулю. Значит, множество точек, где она равна нулю, всюду плотно. Используя именно это множество для вычисления $g(x-0)$ и $g(x+0)$, мы убеждаемся в том, что эти величины суть нули, откуда, в силу правильности $g(x)$, ясно, что эта функция тождественна нулю.

Так как сам вес и его ядро имеют одни и те же моменты (ибо при составлении сумм Римана—Стилтьеса за точки деления можно выбирать только точки непрерывности веса), то ядро интегрального веса (в отличие от самого веса), определяется его моментами однозначно.

Заметим, что проблему моментов достаточно решить для сегмента [0,1], чтобы она была решена для любого сегмента. В самом деле, пусть

$$\mu_n=\int_a^b x^n dg(x),$$

Положим
$$h(t)=g[a+t(b-a)].$$

Нетрудно видеть, что это — функция ограниченной вариации, или монотонная на $[0,1]$, если этим свойством обладает $g(x)$ на $[a,b]$. Так как
$$\mu_n=\int_0^1 [a+t(b-a)]^n\,dh(t),$$
то, обозначая моменты $h(t)$ через λ_n, имеем
$$\mu_n=\sum_{k=0}^{n} C_n^k\,a^{n-k}(b-a)^k\lambda_k.$$

Таким образом всякое условие, наложенное на числа μ_n, можно выразить через λ_n, и обратно. Поэтому в дальнейшем мы ограничимся решением проблемы моментов для $[0,1]$.

В заключение приведём без доказательства две важные теоремы Хелли *), используемые ниже.

I. Принцип выбора Хелли. *Пусть на* $[a,b]$ *задана последовательность функций ограниченной вариации* $\{g_n(x)\}$. *Если все функции последовательности и их полные вариации ограничены одним числом*
$$|g_n(x)|\leqslant K,\quad \operatorname*{Var}_a^b(g_n)\leqslant K,$$
то существует такая последовательность номеров $n_1<n_2<n_3<\ldots$, *что последовательность* $\{g_{n_k}(x)\}$ *сходится в каждой точке* $[a,b]$ *к некоторой функции ограниченной вариации.*

II. Предельный переход под знаком интеграла Стилтьеса. *Пусть на* $[a,b]$ *дана последовательность функций ограниченной вариации* $\{g_n(x)\}$, *которая в каждой точке* $[a,b]$ *сходится к некоторой функции ограниченной вариации* $g(x)$. *Если вариации*

---

*) См., например, И. П. Натансон [5], стр. 184 и 194.

всех $g_n(x)$ ограничены одним числом, то при любой непрерывной функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$,

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b f(x)\,dg_n(x) = \int_a^b f(x)\,dg(x).$$

§ 2. Теоремы Хаусдорфа.

Условимся в следующем обозначении. Пусть дана произвольная последовательность вещественных чисел

$$\mu_0, \mu_1, \mu_2, \mu_3, \ldots \tag{198}$$

Положим

$$\Delta^0\mu_k = \mu_k, \quad \Delta^{n+1}\mu_k = \Delta^n\mu_k - \Delta^n\mu_{k+1}.$$

Очевидно,

$$\Delta^1\mu_k = \mu_k - \mu_{k+1},$$
$$\Delta^2\mu_k = \mu_k - 2\mu_{k+1} + \mu_{k+2}$$

и вообще

$$\Delta^n\mu_k = \sum_{i=0}^{n} C_n^i (-1)^i \mu_{k+i}, \tag{199}$$

что легко доказывается индукцией по n. Если сопоставить (199) с разложением $x^k(1-x)^n$ по степеням x, то легко заметить, что $\Delta^n\mu_k$ получается из этого разложения заменой $1, x, \ldots, x^{n+k}$ числами $\mu_0, \mu_1, \ldots, \mu_{n+k}$.

Теорема 1 (Ф. Хаусдорф). 1) *Если числа* (198) *суть моменты возрастающего интегрального веса, то*

$$\Delta^n\mu_k \geqslant 0 \tag{200}$$
$$(k = 0, 1, 2, \ldots;\ n = 0, 1, 2, \ldots).$$

2) *Если числа* (198) *суть моменты интегрального веса ограниченной вариации, то*

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| \leqslant K \tag{201}$$
$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где K не зависит от n.

Заметим, что в обоих случаях, говоря о моментах, мы имеем в виду моменты, связанные с сегментом $[0, 1]$.

Допустим, что

$$\mu_k = \int_0^1 x^k dg(x),$$

где $g(x)$ — функция ограниченной вариации. Тогда, в силу (199),

$$\int_0^1 x^k (1-x)^n dg(x) = \sum_{i=0}^n (-1)^i C_n^i \int_0^1 x^{k+i} dg(x) = \Delta^n \mu_k. \quad (202)$$

Если функция $g(x)$ возрастающая, то интеграл $\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dg(x)$ не отрицателен, что и доказывает первую часть теоремы.

Не предполагая более $g(x)$ возрастающей, имеем из (202)

$$\Delta^{n-k} \mu_k = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k} dg(x).$$

Отсюда, полагая

$$\varepsilon_k^{(n)} = \operatorname{sign} [\Delta^{n-k} \mu_k],$$

находим

$$\sum_{k=0}^n C_n^k |\Delta^{n-k} \mu_k| = \int_0^1 \left[\sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{(n)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right] dg(x).$$

Но так как при $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\left| \sum_{k=0}^n \varepsilon_k^{(n)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \right| \leqslant 1,$$

то

$$\sum_{k=0}^n C_n^k |\Delta^{n-k} \mu_k| \leqslant \operatorname*{Var}_0^1 (g),$$

что и завершает доказательство.

Оказывается, что доказанная теорема обратима.

Теорема 2 (Ф. Хаусдорф). 1) *Если выполнено условие* (200), *то числа* (198) *являются моментами возрастающего интегрального веса.* 2) *Если выполнено условие* (201), *то числа* (198) *являются моментами интегрального веса ограниченной вариации.*

Прежде всего заметим, что числа, удовлетворяющие условию (200), удовлетворяют также и условию (201). В самом деле, в этом случае

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| = \sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^{n-k}\mu_k.$$

Согласно замечанию, сделанному перед теоремой 1, правую часть этого равенства можно вычислить, развернув

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k} \tag{203}$$

по степеням x и заменив x^i на μ_i $(i=0, 1, 2, \ldots)$.

Но выражение (203) равно единице. Значит,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k \Delta^{n-k}\mu_k = \mu_0.$$

Переходя к доказательству теоремы, введём ступенчатую функцию $g_n(x)$, задав её на $[0, 1]$ следующим образом:

$$g_n(0)=0,$$

$$g_n(x) = C_n^0\Delta^n\mu_0 \quad \text{при} \quad 0<x\leqslant\frac{1}{n},$$

$$g_n(x) = C_n^0\Delta^n\mu_0 + C_n^1\Delta^{n-1}\mu_1 \quad \text{при} \quad \frac{1}{n}<x\leqslant\frac{2}{n},$$

. . . .

$$g_n(x) = \sum_{k=0}^{n-1} C_n^k\Delta^{n-k}\mu_k \quad \text{при} \quad \frac{n-1}{n}<x<1,$$

$$g_n(1) = \sum_{k=0}^{n} C_n^k\Delta^{n-k}\mu_k.$$

Если выполнено условие (201), то

$$|g_n(x)| \leqslant K, \quad \mathop{\mathrm{Var}}_0^1 (g_n) \leqslant K.$$

Если же выполнено условие (200), то к сказанному можно добавить, что $g_n(x)$ есть функция возрастающая.

На основании принципа выбора Хелли существует такая последовательность номеров $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, что последовательность $\{g_{n_i}(x)\}$ в каждой точке $[0, 1]$ сходится к некоторой функции ограниченной вариации $g(x)$. При этом если все функции $g_n(x)$ возрастающие, то такова же и $g(x)$.

По второй теореме Хелли можно утверждать, что

$$\int_0^1 x^m dg(x) = \lim_{i \to \infty} \int_0^1 x^m dg_{n_i}(x). \tag{204}$$

Но так как $g_n(x)$—ступенчатая функция со скачками $C_n^k \Delta^{n-k} \mu_k$ в точках $\frac{k}{n}$, то

$$\int_0^1 x^m dg_n(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^m C_n^k \Delta^{n-k} \mu_k.$$

Правая часть этого равенства получается из полинома Бернштейна

$$B_{n,m}(x) = \sum_{k=0}^{n} \left(\frac{k}{n}\right)^m C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

построенного для функции x^m заменой x^i на μ_i.

Иначе говоря, если *)

$$B_{n,m}(x) = a_0^{(n,m)} + a_1^{(n,m)} x + \cdots + a_m^{(n,m)} x^m,$$

то

$$\int_0^1 x^m dg_n(x) = a_0^{(n,m)} \mu_0 + a_1^{(n,m)} \mu_1 + \cdots + a_m^{(n,m)} \mu_m. \tag{205}$$

---

*) Напомним, что степень $B_{n,m}(x)$ есть m, а не n.

По теореме С. Н. Бернштейна равномерно на $[0, 1]$

$$\lim_{n\to\infty} B_{n,m}(x) = x^m.$$

Как мы знаем ещё из первой части, отсюда следует, что квазинорма разности стремится к нулю:

$$\lim_{n\to\infty}\left[\sum_{i=0}^{m-1}|a_i^{(n,m)}| + |a_m^{(n,m)} - 1|\right] = 0. \tag{206}$$

Из (205) и (206) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^1 x^m dg_n(x) = \mu_m,$$

откуда в связи с (204) имеем

$$\int_0^1 x^m dg(x) = \mu_m.$$

Ввиду произвольности m теорема доказана.

Теорема 3 (Ф. Хаусдорф). *Для того чтобы было*

$$\mu_n = \int_0^1 x^n \varphi(x)\,dx \tag{207}$$

$$(n = 0, 1, 2, \ldots),$$

где $\varphi(x)$ — измеримая ограниченная функция, необходимо и достаточно, чтобы при всех n было

$$(n+1)\, C_n^k\, |\Delta^{n-k}\mu_k| \leqslant K \tag{208}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, n),$$

где K не зависит от n.

Если имеет место (207), причём $|\varphi(x)| \leqslant K$, то

$$|\Delta^{n-k}\mu_k| = \left|\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\varphi(x)\,dx\right| \leqslant K\int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}dx.$$

Но

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx = \mathrm{B}(k+1, n-k+1) =$$
$$= \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{1}{(n+1)\,C_n^k}, \qquad (209)$$

откуда и следует (208).

Пусть теперь выполнено (208). Тогда и подавно выполнено (201) и, стало быть,

$$\mu_k = \int_0^1 x^k\,dg(x),$$

где $g(x)$ — функция ограниченной вариации, которую можно считать правильной. Условие (208) означает, что

$$\left|\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dg(x)\right| \leqslant K \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx.$$

Отсюда, полагая $u(x) = Kx - g(x)$, $v(x) = Kx + g(x)$, имеем

$$\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,du(x) \geqslant 0, \qquad \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dv(x) \geqslant 0.$$

Если λ_k суть моменты $v(x)$, то последнее неравенство означает, что $\Delta^{n-k}\lambda_k \geqslant 0$. Значит *), λ_k суть моменты некоторой возрастающей функции. По теореме 2 из § 1 её ядром служит $v(x)$, а так как ядро возрастающей функции возрастает, то $v(x)$ возрастает. Значит, если $x < y$, то

$$Kx + g(x) \leqslant Ky + g(y),$$

т. е.

$$g(x) - g(y) \leqslant K(y - x).$$

---

*) Здесь мы опираемся на предыдущую теорему. Правда, в ней фигурировали числа $\Delta^n\mu_k$, а здесь $\Delta^{n-k}\lambda_k$, но это, очевидно, всё равно, так как $\Delta^m\mu_k = \Delta^{n-k}\mu_k$, где $n = m + k$.

Аналогично, используя функцию $u(x)$, убеждаемся, что

$$K(x-y) \leqslant g(x) - g(y).$$

Значит, $g(x)$ удовлетворяет условию Липшица с коэффициентом K. Но тогда

$$g(x) = \int_0^x \varphi(t)\,dt,$$

где $|\varphi(x)| \leqslant K$, и имеет место (207).

Теорема 4 (Ф. Хаусдорф). *Для того чтобы имели место равенства* (207), *где* $\varphi(x) \in L^2$, *необходимо и достаточно, чтобы было*

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}[C_n^k \Delta^{n-k}\mu_k]^2 \leqslant K \tag{210}$$

$$(n=0, 1, 2, \ldots),$$

где K не зависит от n.

Действительно, если имеет место (207), причём $\varphi(x) \in L^2$, то

$$\Delta^{n-k}\mu_k = \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\varphi(x)\,dx.$$

В силу неравенства Буняковского,

$$(\Delta^{n-k}\mu_k)^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\,dx\right\}\left\{\int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\varphi^2(x)\,dx\right\},$$

откуда, принимая во внимание (209), получаем

$$(n+1)\,C_n^k(\Delta^{n-k}\mu_k)^2 \leqslant \int_0^1 x^k(1-x)^{n-k}\varphi^2(x)\,dx.$$

Значит,

$$(n+1)\sum_{k=0}^{n}[C_n^k\Delta^{n-k}\mu_k]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \int_0^1 \Big[\sum_{k=0}^{n} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\Big]\varphi^2(x)\,dx = \int_0^1 \varphi^2(x)\,dx.$$

Таким образом необходимость условия (210) установлена. Его достаточность мы докажем ниже в § 3.

§ 3. Линейные функционалы в C и L^2.

Пусть каждой непрерывной функции $f(x)$, заданной на сегменте $[a, b]$, отнесено вещественное число $\Phi(f)$, причём соблюдены условия

$$\Phi(f_1+f_2)=\Phi(f_1)+\Phi(f_2), \tag{211}$$

$$|\Phi(f)| \leqslant K \max|f(x)|. \tag{212}$$

В этом случае $\Phi(f)$ называется *линейным функционалом*, заданным на $C([a, b])$.

Примером линейного функционала служит всякий интеграл Стилтьеса

$$\Phi(f)=\int_a^b f(x)\,dg(x), \tag{213}$$

где $g(x)$ — функция ограниченной вариации. Для этого функционала достаточно положить $K=\mathrm{Var}(g)$, чтобы было выполнено условие (212).

Если линейный функционал обладает тем свойством, что для неотрицательной $f(x)$ оказывается $\Phi(f) \geqslant 0$, то такой функционал называется *положительным*. Примером положительного функционала служит интеграл (213) с возрастающей интегрирующей функцией $g(x)$.

Оказывается, что никаких других линейных функционалов, кроме (213), не существует. Доказательству этого факта и посвящён настоящий параграф.

Лемма. *Если $\Phi(f)$ — линейный функционал, то*

$$\Phi(kf)=k\Phi(f). \tag{214}$$

Для $k=0$ равенство (214) следует из (211), если взять $f_1(x)=f_2(x)=0$. Для натурального k требуемое соотношение также легко доказывается методом полной индукции, исходя из (211). Но тогда оно очевидно и для k вида $\frac{1}{n}$, где n — натуральное. Значит, (214) имеет место при всех положительных рациональных k. Далее, если k — отрицательное рациональное число, то

$$\Phi(kf)+\Phi(-kf)=\Phi(0)=0,$$

и потому (214) справедливо при всех рациональных k.

Наконец, если k — число иррациональное, а r — рациональное, то

$$|\Phi(kf)-k\Phi(f)|\leqslant|\Phi[(k-r)f]|+|k-r|\,|\Phi(f)|$$

и, в силу (212),

$$|\Phi(kf)-k\Phi(f)|\leqslant 2K\,|k-r|\max|f(x)|,$$

и (214) очевидно, ибо правая часть последнего неравенства может быть сделана сколь угодно малой.

Теорема 1 (Ф. Рисс [2]). *Всякий линейный функционал $\Phi(f)$, заданный на $C([a,b])$, может быть представлен в форме* (213), *где $g(x)$ — некоторая функция ограниченной вариации.*

Заметим, что достаточно доказать эту теорему для сегмента $[0,1]$, ибо общий случай приводится к этому с помощью линейной подстановки. Для этого частного случая теорема Рисса легко выводится из теоремы Хаусдорфа.

Действительно, пусть $\Phi(f)$ — линейный функционал, заданный на $C([0,1])$. Положим

$$\Phi(x^n)=\mu_n \quad (n=0,1,2,\ldots). \tag{215}$$

Тогда

$$\Delta^n\mu_k=\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i\mu_{k+i}=$$

$$=\Phi\left[\sum_{i=0}^{n}(-1)^i C_n^i x^{k+i}\right]=\Phi[x^k(1-x)^n]. \tag{216}$$

Отсюда

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| = \Phi\left[\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k^{(n)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right],$$

где $\varepsilon_k^{(n)} = \operatorname{sign}(\Delta^{n-k}\mu_k)$.

Ввиду того что при $0 \leqslant x \leqslant 1$

$$\left|\sum_{k=0}^{n} \varepsilon_k^{(n)} C_n^k x^k (1-x)^{n-k}\right| \leqslant 1,$$

условие (212) даёт

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| \leqslant K.$$

Таким образом числа μ_k удовлетворяют условию (201), и потому существует функция ограниченной вариации, моментами которой они являются. Иначе говоря,

$$\Phi(x^n) = \int_0^1 x^n\, dg(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots). \quad (217)$$

Отсюда следует, что равенство (213) верно тогда, когда $f(x)$ есть произвольный полином, а так как всякая непрерывная функция есть предел равномерно сходящейся последовательности полиномов, то теорема доказана.

Ещё проще доказывается

Теорема 2 (Ф. Рисс). *Всякий положительный линейный функционал, заданный на $C([a, b])$, представим в форме*

$$\Phi(f) = \int_a^b f(x)\, dg(x),$$

где $g(x)$ — некоторая возрастающая функция.

В самом деле, снова ограничиваясь случаем сегмента $[0, 1]$, вводим числа (215). Тогда из (216) и того факта, что $x^k(1-x)^{n-k} \geqslant 0$ (при $0 \leqslant x \leqslant 1$), мы видим, что

$\Delta^n \mu_k \geqslant 0$. Значит, найдётся возрастающая функция $g(x)$, удовлетворяющая условиям (217), после чего доказательство заканчивается так же, как и выше.

Наряду с линейными функционалами в C нам понадобятся линейные функционалы в L^2.

Если каждой функции $f(x)$, суммируемой с квадратом на сегменте $[a, b]$, отнесено вещественное число $\Phi(f)$, причём

$$\Phi(f_1+f_2)=\Phi(f_1)+\Phi(f_2), \qquad |\Phi(f)| \leqslant K \sqrt{\int_a^b f^2(x)\,dx},$$

то говорят, что $\Phi(f)$ есть линейный функционал, заданный в пространстве L^2 (причём само это пространство связано с основным сегментом $[a, b]$). Аналогично случаю пространства C и здесь будет иметь место соотношение (214).

Примером линейного функционала в L^2 служит

$$\Phi(f)=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx,$$

где $\varphi(x)$ сама входит в L^2. Оказывается, что это есть *общий вид* таких функционалов. Действительно, справедлива

Теорема 3 (М. Фреше). *Всякий линейный функционал $\Phi(f)$ в L^2 представим в форме*

$$\Phi(f)=\int_a^b f(x)\,\varphi(x)\,dx, \tag{218}$$

где $\varphi(x) \in L^2$.

Для доказательства выберем какую-нибудь полную ортонормальную систему $\{\omega_k(x)\}$ и положим

$$\Phi(\omega_k)=A_k.$$

Тогда

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^2 = \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} A_k\omega_k\right) \leqslant$$

$$\leqslant K \sqrt{\int_a^b \left[\sum_{k=1}^{n} A_k\omega_k(x)\right]^2 dx} = K \sqrt{\sum_{k=1}^{n} A_k^2},$$

и потому

$$\sum_{k=1}^{\infty} A_k^2 \leqslant K^2.$$

В таком случае существует суммируемая с квадратом функция $\varphi(x)$, для которой числа A_k служат коэффициентами Фурье в системе $\{\omega_k(x)\}$. Эта функция и удовлетворяет соотношению (218). В самом деле, если $f(x)$ — произвольная функция из L^2 и $\{c_k\}$ — её коэффициенты Фурье, то

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b \left[f(x) - \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k(x)\right]^2 dx = 0.$$

Но

$$\left|\Phi(f) - \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k\right)\right| \leqslant K \left\| f - \sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k \right\|.$$

Значит,

$$\Phi(f) = \lim_{n\to\infty} \Phi\left(\sum_{k=1}^{n} c_k\omega_k\right) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k c_k = \sum_{k=1}^{\infty} A_k c_k,$$

а по обобщённой формуле Парсеваля последняя часть этой цепи равенств есть $\int_a^b f(x)\varphi(x)\,dx$.

Эта теорема позволяет закончить доказательство четвёртой теоремы Хаусдорфа из § 2. Действительно, пусть $\{\mu_n\}$ есть последовательность, удовлетворяющая условию (210).

В таком случае, в силу неравенства Буняковского,

$$\sum_{k=0}^{n} C_n^k |\Delta^{n-k}\mu_k| \leqslant \sqrt{n+1} \sqrt{\sum_{k=0}^{n} [C_n^k \Delta^{n-k}\mu_k]^2} \leqslant \sqrt{K},$$

и по второй теореме Хаусдорфа найдётся функция ограниченной вариации $g(x)$, для которой

$$\int_0^1 x^n \, dg(x) = \mu_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Заметив это, возьмём произвольную непрерывную функцию $f(x)$ и составим её полином Бернштейна

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k}.$$

Тогда

$$\int_0^1 B_n(x) \, dg(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k \Delta^{n-k}\mu_k$$

и, в силу неравенства Буняковского,

$$\left[\int_0^1 B_n(x) \, dg(x)\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\sum_{k=0}^{n} f^2\left(\frac{n}{k}\right)\right\} \left\{\sum_{k=0}^{n} [C_n^k \Delta^{n-k}\mu_k]^2\right\}.$$

Отсюда на основании (210) получаем

$$\left[\int_0^1 B_n(x) \, dg(x)\right]^2 \leqslant K \sum_{k=0}^{n} f^2\left(\frac{k}{n}\right) \frac{1}{n}$$

и потому, увеличивая n и переходя к пределу:

$$\left|\int_0^1 f(x) \, dg(x)\right| \leqslant \sqrt{K} \sqrt{\int_0^1 f^2(x) \, dx}. \qquad (219)$$

Пусть

$$\int_0^1 f(x)\,dg(x) = \Phi(f).$$

Этот линейный функционал задан в пространстве C. Распространим его на всё пространство L^2. Для этого, взяв произвольную функцию $f(x)$ из L^2, найдём последовательность непрерывных функций $\{f_n(x)\}$, сходящуюся к $f(x)$ в среднем.

Тогда эта последовательность сходится в себе, а так как

$$|\Phi(f_n) - \Phi(f_m)| \leqslant \sqrt{K}\sqrt{\int_0^1 (f_n - f_m)^2\,dx},$$

то существует конечный предел

$$\lim_{n\to\infty} \Phi(f_n).$$

Этот предел мы и примем за $\Phi(f)$. Легко понять, что он не зависит от выбора той последовательности непрерывных функций, которая послужила для его определения *). Очевидно также, что функционал $\Phi(f)$ линеен**) и по теореме Фреше представим в форме (218), где $\varphi(x) \in L^2$. Отсюда

$$\int_0^1 x^n \varphi(x)\,dx = \Phi(x^n) = \int_0^1 x^n\,dg(x) = \mu_n,$$

и доказательство теоремы Хаусдорфа завершено.

---

*) Действительно, если $\{f_n'(x)\}$ — другая последовательность непрерывных функций, сходящаяся в среднем к $f(x)$, то разность $f_n(x) - f_n'(x)$ в среднем сходится к нулю и (в силу (219)) $\lim\,[\Phi(f_n) - \Phi(f_n')] = 0$.

**) Если $f'(x)$ и $f''(x)$ — две функции из L^2, а $\{f_n'\}$ и $\{f_n''\}$ — сходящиеся к ним (в среднем) последовательности непрерывных функций, то последовательность $\{f_n' + f_n''\}$ сходится в среднем к $f'(x) + f''(x)$ и, стало быть, $\Phi(f' + f'') = \Phi(f') + \Phi(f'')$. Неравенство же $|\Phi(f)| \leqslant \sqrt{K}\,\|f\|$ получается предельным переходом из (219).

§ 4. Позитивные последовательности.

Теорема Рисса о линейных функционалах в пространстве C позволяет дать ещё одну характеристику последовательности моментов возрастающего интегрального веса.

Условимся называть последовательность вещественных чисел $\{\mu_n\}$ $(n = 0, 1, 2, \ldots)$ *позитивной* на промежутке*) $<a, b>$, если для всякого полинома

$$P(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n,$$

нетождественного нулю и неотрицательного на $<a, b>$,

$$\Phi(P) = a_0\mu_0 + a_1\mu_1 + \ldots + a_n\mu_n \geqslant 0.$$

Если же для всякого такого полинома будет $\Phi(P) > 0$, то последовательность $\{\mu_n\}$ будем называть *строго позитивной*.

Теорема 1. *Для того чтобы существовала возрастающая на $[a, b]$ функция $g(x)$, для которой*

$$\int_a^b x^n \, dg(x) = \mu_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\mu_n\}$ была позитивна на $[a, b]$.

В самом деле, пусть выполнено условие теоремы. Тогда

$$\Phi(P) = \int_a^b P(x) \, dg(x),$$

и позитивность последовательности $\{\mu_n\}$ очевидна.

Обратно, пусть последовательность $\{\mu_n\}$ позитивна на $[a, b]$. Возьмём произвольный полином

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$$

*) Это может быть сегмент $[a, b]$, интервал (a, b) и т. п. Случаи $a = -\infty$ или $b = +\infty$ мы также не исключаем.

и пусть

$$M = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |P(x)|.$$

Тогда каждый из полиномов

$$M + P(x), \quad M - P(x)$$

неотрицателен на $[a, b]$, и потому

$$(M + a_0)\mu_0 + a_1\mu_1 + \cdots + a_n\mu_n \geqslant 0,$$
$$(M - a_0)\mu_0 - a_1\mu_1 - \cdots - a_n\mu_n \geqslant 0.$$

Отсюда следует, что

$$|\Phi(P)| \leqslant \mu_0 \max |P(x)|. \tag{220}$$

Заметив это, рассмотрим произвольную непрерывную функцию $f(x)$, заданную на $[a, b]$. По теореме Вейерштрасса найдётся последовательность полиномов $\{P_n(x)\}$, равномерно сходящаяся к $f(x)$. Для всякого $\varepsilon > 0$ найдётся такое N, что при $n > N$

$$|P_n(x) - f(x)| < \frac{\varepsilon}{2}.$$

Значит, если $n > N$ и $m > N$, то

$$|P_n(x) - P_m(x)| < \varepsilon$$

и, в силу (220),

$$|\Phi(P_n) - \Phi(P_m)| < \mu_0\varepsilon.$$

Таким образом последовательность $\{\Phi(P_n)\}$ сходится в себе и, стало быть, имеет конечный предел, который мы обозначим через $\Phi(f)$. Нетрудно видеть, что величина $\Phi(f)$ зависит только от функции $f(x)$ (и последовательности $\{\mu_n\}$), но не от выбора полиномов $P_n(x)$. Действительно, если $\{Q_n(x)\}$ — другая последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к $f(x)$, то

$$|\Phi(P_n) - \Phi(Q_n)| \leqslant \mu_0 \max |P_n(x) - Q_n(x)|,$$

а правая часть этого неравенства стремится к нулю.

Итак, мы определили функционал $\Phi(f)$ на множестве всех непрерывных на $[a, b]$ функций. Легко видеть, что это положительный линейный функционал. В самом деле, если $f(x)=f_1(x)+f_2(x)$ и имеет место равномерное стремление

$$P_n^{(1)}(x)\rightrightarrows f_1(x),\quad P_n^{(2)}(x)\rightrightarrows f_2(x),$$

то $P_n^{(1)}(x)+P_n^{(2)}(x)\rightrightarrows f(x)$. Значит,

$$\Phi(f)=\lim\Phi\left[P_n^{(1)}+P_n^{(2)}\right]=\Phi(f_1)+\Phi(f_2).$$

Далее, если $f(x)\geqslant 0$, то и полиномы $P_n(x)$ можно взять неотрицательными *), откуда вытекает, что $\Phi(f)\geqslant 0$.

Наконец, если $f(x)$ — произвольная непрерывная на $[a, b]$ функция и $M=\max|f(x)|$, то обе функции $M\pm f(x)$ неотрицательны, откуда

$$M\mu_0\pm\Phi(f)\geqslant 0$$

и

$$|\Phi(f)|\leqslant\mu_0 M.$$

Таким образом $\Phi(f)$ — положительный линейный функционал и по теореме Рисса

$$\Phi(f)=\int_a^b f(x)\,dg(x),$$

где $g(x)$ — возрастающая функция. Остаётся заметить, что $\Phi(x^n)=\mu_n$.

Для того чтобы выяснить, какую роль может играть условие *строгой* позитивности последовательности, введём следующее определение:

Определение. Пусть $g(x)$ возрастающая функция, заданная на $[a, b]$. Будем говорить, что точка x_0 $(a<x_0<b)$ есть *точка роста* функции $g(x)$, если при любых y и z, где $a\leqslant y<x_0<z\leqslant b$, будет $g(y)<g(z)$. Точно так же точка a есть точка роста $g(x)$, если

*) Действительно, пусть $\{Q_n(x)\}$ — какая-то последовательность полиномов, равномерно сходящаяся к $f(x)$. Положим $\rho_n=\max|Q_n(x)-f(x)|$. Очевидно, $\rho_n\to 0$. Полиномы

$$P_n(x)=Q_n(x)+\rho_n$$

будут неотрицательными и равномерно стремящимися к $f(x)$.

$g(a) < g(x)$ при любом x из $(a, b]$. Аналогичное соглашение устанавливается для точки b.

Лемма 1. *Отличная от постоянной возрастающая функция $g(x)$ имеет хотя бы одну точку роста.*

В самом деле, по условию $g(b) > g(a)$. Положим $c = \frac{a+b}{2}$. Одна, по крайней мере, из разностей $g(c) - g(a)$ и $g(b) - g(c)$ — положительна. Обозначим через $[a_1, b_1]$ тот из сегментов $[a, c]$ и $[c, b]$, для которого $g(a_1) < g(b_1)$. Продолжая этот процесс, мы построим последовательность вложенных друг в друга сегментов $[a_n, b_n]$, для каждого из которых $g(a_n) < g(b_n)$. Если x_0 есть общая точка всех этих сегментов, то она и будет точкой роста $g(x)$.

Следствие. *Если возрастающая на $[a, b]$ функция $g(x)$ имеет конечное число точек роста, то это — ступенчатая функция, постоянная между своими точками роста.*

Лемма 2. *Если $g(x)$ — возрастающая функция с бесконечным числом точек роста, то для всякого нетождественного нулю неотрицательного полинома $P(x)$ справедливо неравенство*

$$\int_a^b P(x)\,dg(x) > 0.$$

Если же у $g(x)$ — только конечное число точек роста, то найдётся нетождественный нулю неотрицательный полином $P(x)$, для которого

$$\int_a^b P(x)\,dg(x) = 0.$$

В самом деле, в первом случае для всякого полинома $P(x)$ можно найти точку роста x_0 функции $g(x)$, которая не является корнем $P(x)$. Пусть $h > 0$ столь мало, что $[x_0 - h, x_0 + h]$ содержится в $[a, b]$ и в $[x_0 - h, x_0 + h]$ нет корней $P(x)$. Тогда, обозначая через m наименьшее значение $P(x)$ на $[x_0-h, x_0+h]$, будем иметь

$$\int_a^b P(x)\,dg(x) \geqslant$$

$$\geqslant \int_{x_0-h}^{x_0+h} P(x)\,dg(x) \geqslant m\,[g(x_0+h)-g(x_0-h)] > 0 \text{ *)}.$$

Во втором случае, обозначим через $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ все точки роста $g(x)$. Если

$$P(x)=(x-\xi_1)^2(x-\xi_2)^2\ldots(x-\xi_s)^2,$$

то $P(x)\geqslant 0$ и

$$\int_a^b P(x)\,dg(x)=\sum_{k=1}^{s} P(\xi_k)\,[g(\xi_k+0)-g(\xi_k-0)]=0.$$

Теперь следующая теорема становится очевидной.

Теорема 2. *Для того чтобы на сегменте* $[a, b]$ *существовала возрастающая функция* $g(x)$ *с бесконечным множеством точек роста, для которой*

$$\int_a^b x^n\,dg(x)=\mu_n \qquad (n=0, 1, 2, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы последовательность $\{\mu_n\}$ *была строго позитивной на* $[a, b]$.

Надо заметить, что установленные здесь характеристики моментных последовательностей менее эффективны, чем характеристики Хаусдорфа, ибо мы не располагаем признаком того, является ли данная последовательность позитивной, или нет. Как будет показано

---

*) Это рассуждение показывает, что неравенство $\int_a^b P\,dg>0$ выполняется при условии, что число точек роста $g(x)$ больше, чем степень $P(x)$. Ниже нам придётся воспользоваться этим замечанием.

ниже, для бесконечного промежутка $(-\infty, +\infty)$ такой признак всё же существует*).

Читатель, желающий углубить свои сведения по вопросам этой главы, с большой пользой прочтёт очень содержательную, хотя и несколько трудную монографию Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [2] **).

---

*) Впрочем, условие Хаусдорфа $\Delta^n \mu_k \geqslant 0$ можно рассматривать, как эффективный критерий позитивности последовательности $\{\mu_k\}$ на сегменте $[0,1]$.

**) См. также Л. В. Канторович [2].

ГЛАВА VIII.

СЛУЧАЙ БЕСКОНЕЧНОГО ПРОМЕЖУТКА.

§ 1. Предварительные замечания.

Во всём предыдущем изложении основной промежуток $[a, b]$ предполагался конечным. Теперь мы остановимся на случае бесконечного промежутка. Основное отличие от предыдущего здесь состоит в том, что теперь уже не имеет места теорема Вейерштрасса, а значит, и все результаты, которые были основаны на этой теореме.

Мы попрежнему будем рассматривать классы $L_{p(x)}$ и $L^2_{p(x)}$, где $p(x)$—измеримая неотрицательная весовая функция, обращающаяся в нуль только на множестве меры нуль*). Функцию $p(x)$ мы будем, кроме того, предполагать имеющей все моменты

$$\mu_n = \int_a^b x^n p(x)\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

(Для конечного промежутка существование всех моментов вытекало из суммируемости веса $p(x)$. Теперь это не так. Например, вес $p(x) = \frac{1}{1+x^2}$ суммируем на $(-\infty, +\infty)$, но μ_n не существует при $n > 0$.) Функцию

*) Функция, заданная на бесконечном промежутке, называется измеримой, если она измерима на всяком конечном сегменте, входящем в её промежуток задания. Неограниченное множество называется измеримым, если измеримо его пересечение со всяким конечным промежутком. Оно имеет меру нуль, если таковы его пересечения с конечными промежутками.

$f(x)$ мы будем включать в $L_{p(x)}$, если она измерима и

$$\int_a^b |f(x)|\, p(x)\, dx < +\infty.$$

Этот интеграл понимается как несобственный, т. е., например, для $a=0$, $b=+\infty$ как

$$\lim_{A\to+\infty} \int_0^A |f(x)|\, p(x)\, dx.$$

Если $f(x)$ измерима и $f^2(x) \in L_{p(x)}$, то мы скажем, что $f(x)$ принадлежит $L^2_{p(x)}$. Попрежнему*) имеет место включение $L^2_{p(x)} \subset L_{p(x)}$, ибо $|f(x)| \leqslant \frac{1}{2}[1+f^2(x)]$.

Попрежнему имеют место неравенства Коши и Буняковского, а также вся основанная на них геометрическая картина. Попрежнему все ограниченные измеримые функции входят в $L_{p(x)}$, но этого уже нельзя сказать обо всех непрерывных функциях.

Например, если $a=0$, $b=+\infty$, $p(x)=e^{-x}$ (вес Лагерра), то $f(x)=e^x$ не входит в $L_{e^{-x}}$ и тем более в $L^2_{e^{-x}}$.

Тем не менее справедлива

Теорема. *Класс C ограниченных непрерывных функций всюду плотен в* $L^2_{p(x)}$.

Докажем эту теорему, например, для случая $a=0$, $b=+\infty$.

Пусть $f(x) \in L^2_{p(x)}$ и $\varepsilon > 0$. Тогда можно закрепить столь большое A, чтобы оказалось

$$\int_A^{+\infty} p(x) f^2(x)\, dx < \frac{\varepsilon^2}{2}.$$

---

*) Если бы $p(x)$ не предполагалась суммируемой, то это было бы не так. Например, при $a=1$, $b=+\infty$, $p(x)=1$ функция $\frac{1}{x}$ входила бы в L^2, но не в L.

Так как для конечного сегмента теорема уже была доказана, то можно построить на $[0, A]$ непрерывную функцию $\psi_0(x)$, для которой

$$\int_0^A p(x)[f(x)-\psi_0(x)]^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{8}.$$

Пусть $\delta<A$ есть положительное число, выбор которого мы уточним ниже. Введём функцию $\psi(x)$, полагая $\psi(A)=0$, $\psi(x)=\psi_0(x)$ при $0\leqslant x\leqslant A-\delta$ и считая $\psi(x)$ линейной на сегменте $[A-\delta, A]$. Если $M=\max|\psi_0(x)|$, то

$$\int_0^A p(x)[\psi_0(x)-\psi(x)]^2\,dx\leqslant 4M^2\int_{A-\delta}^A p(x)\,dx.$$

Будем считать δ столь малым, чтобы правая часть последнего неравенства была меньше, чем $\frac{\varepsilon^2}{8}$. Тогда

$$\int_0^A p(x)[f(x)-\psi(x)]^2\,dx<\frac{\varepsilon^2}{2}.$$

Если теперь положить

$$\varphi(x)=\begin{cases}\psi(x) & \text{при } 0\leqslant x\leqslant A,\\ 0 & \text{при } x>A,\end{cases}$$

то $\varphi(x)$ будет непрерывной ограниченной функцией, для которой

$$\|f-\varphi\|<\varepsilon.$$

Теорема доказана.

Замечание. Из доказательства теоремы видно, что в $L^2_{p(x)}$ всюду плотен уже класс таких непрерывных функций, которые обращаются в нуль при всех достаточно больших x.

Однако класс всех полиномов уже не обязан быть всюду плотным в $L^2_{p(x)}$.

Пример*) (Стилтьес). Пусть

$$a=0,\ b=+\infty,\ p(x)=x^{-\ln x}.$$

*) Стилтьес [2] (русский перевод, стр. 100).

Функция $p(x)$ непрерывна и ограничена. В самом деле,

$$\ln p(x) = -\ln^2 x.$$

Значит, при $x \to 0$ и при $x \to +\infty$ будет $p(x) \to 0$.

У $p(x)$ существуют все моменты. Действительно, на всяком конечном промежутке $[0, A]$ функция $p(x)$ суммируема.

С другой стороны, при $x > e^{n+2}$ будет

$$x^n p(x) < \frac{1}{x^2}$$

и существует

$$\int_A^{+\infty} x^n p(x)\, dx \qquad (A = e^{n+2}).$$

Таким образом $p(x)$ является весовой функцией указанного выше типа.

Пусть

$$f(x) = \sin(2\pi \ln x).$$

Эта функция ограничена и потому входит в $L^2_{p(x)}$.

Покажем, что $f(x)$ по весу $p(x)$ ортогональна ко всем функциям x^n $(n = 0, 1, 2, \ldots)$.

Действительно, с помощью подстановки

$$x = e^{t + \frac{n+1}{2}}$$

получаем

$$\int_0^{+\infty} x^n f(x)\, p(x)\, dx = (-1)^{n+1} e^{\left(\frac{n+1}{2}\right)^2} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-t^2} \sin 2\pi t\, dt.$$

Последний же интеграл очевидным образом равен нулю, ибо подинтегральная функция *нечётная*.

Но тогда и для любого полинома $P(x)$ будет

$$\int_a^b f(x)\, P(x)\, p(x)\, dx = 0.$$

Значит,

$$\int_0^{+\infty} p(x) f^2(x)\,dx = \int_0^{+\infty} p(x) f(x)\,[f(x) - P(x)]\,dx.$$

Отсюда, в силу неравенства Буняковского,

$$\left\{\int_0^{+\infty} p(x) f^2(x)\,dx\right\}^2 \leqslant$$

$$\leqslant \left\{\int_0^{+\infty} p(x) f^2(x)\,dx\right\} \left\{\int_0^{+\infty} p(x)\,[f(x)-P(x)]^2\,dx\right\}$$

и, стало быть,

$$\|f-P\| \geqslant \|f\|,$$

т. е. ни один полином не подходит к $f(x)$ ближе, чем на величину $\|f\| > 0$.

Тем не менее существуют всё же веса $p(x)$ такого рода, что класс всех полиномов всюду плотен в $L^2_{p(x)}$. Ниже мы увидим, что такими весами являются, например, вес Лагерра e^{-x} на $[0, +\infty)$ и вес Эрмита e^{-x^2} на $(-\infty, +\infty)$. Не вдаваясь в подробности, скажем, что суть дела здесь в надлежащей быстроте убывания весовой функции на бесконечности.

Заметим, далее, что и при бесконечном промежутке пространство $L^2_{p(x)}$ обладает свойством полноты: последовательность, сходящаяся в себе, имеет предел. Это доказывается совершенно так же, как и для конечного промежутка.

Совершенно так же строится и теория ортогональных систем, включая теорему Рисса-Фишера. В частности, для ортогональных систем попрежнему будут эквивалентны свойства полноты и замкнутости, а для произвольных линейно независимых систем—свойства полноты и фундаментальности.

Попрежнему сохраняются экстремальное свойство коэффициентов Фурье (теорема Теплера), неравенство Бесселя, теорема ортогонализации Шмидта и т. п.

В частности, ортогонализируя систему степеней x^n, мы попрежнему можем строить ортогональные системы полиномов (здесь, именно, и существенно наличие всех моментов у весовой функции). Мы не будем заниматься рассмотрением общих свойств таких полиномиальных систем, а ограничимся в ближайших параграфах рассмотрением двух частных случаев: полиномов Лагерра и полиномов Эрмита.

§ 2. Полиномы Лагерра.

Полиномы, образующие на промежутке $[0, +\infty)$ ортогональную систему веса e^{-x}, называются *полиномами Лагерра* *). Они определяются (с точностью до постоянного множителя) формулой

$$L_n(x) = e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^n e^{-x}),$$

аналогичной формуле Родрига. Чтобы доказать это утверждение, положим

$$U_n(x) = x^n e^{-x}.$$

По формуле Лейбница имеем

$$U_n^{(m)}(x) = \sum_{k=0}^{m} (-1)^{m-k} C_m^k n(n-1)\ldots(n-k+1)\, x^{n-k} e^{-x}. \quad (221)$$

Отсюда видно, что $L_n(x)$ есть действительно полином степени n, имеющий явное представление

$$L_n(x) = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} C_n^k n(n-1)\ldots(n-k+1)\, x^{n-k}. \quad (222)$$

В частности, старший коэффициент у $L_n(x)$ есть $(-1)^n$, так что

$$\tilde{L}_n(x) = (-1)^n e^x \frac{d^n (x^n e^{-x})}{dx^n}.$$

---

*) Лагерр [1].

Равенство (221) показывает, что при $m=0, 1, \ldots n-1$

$$U_n^{(m)}(0)=U_n^{(m)}(+\infty)=0.$$

Значит, если $V(x)$—полином степени ниже n, то

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}V(x)L_n(x)\,dx=$$

$$=\int_0^{+\infty} U_n^{(n)}V\,dx=\left[U_n^{(n-1)}V-\ldots+(-1)^{n-1}U_nV^{(n-1)}\right]_0^{+\infty}+$$

$$+(-1)^n\int_0^{+\infty} U_nV^{(n)}\,dx=0.$$

Таким образом $L_n(x)$ действительно образуют ортогональную систему веса e^{-x}.

Если в последнем равенстве положить $V(x)=L_n(x)$, то окажется, что

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}[L_n(x)]^2\,dx=(-1)^n\int_0^{+\infty} U_nV^{(n)}\,dx,$$

а так как $V^{(n)}=(-1)^n n!$, то

$$\int_0^{+\infty} e^{-x}L_n^2(x)\,dx=n!\int_0^{+\infty} x^ne^{-x}\,dx=(n!)^2. \tag{223}$$

Отсюда

$$\hat{L}_n(x)=\frac{(-1)^n}{n!}e^x\frac{d^n(x^ne^{-x})}{dx^n}.$$

В рекуррентной формуле

$$\tilde{L}_{n+2}(x)=(x-\alpha_{n+2})\tilde{L}_{n+1}(x)-\lambda_{n+1}\tilde{L}_n(x) \tag{224}$$

по общей теории

$$\lambda_{n+1}=\frac{\int_0^{+\infty} e^{-x}\tilde{L}_{n+1}^2(x)\,dx}{\int_0^{+\infty} e^{-x}\tilde{L}_n^2(x)\,dx}$$

и, в силу (223), будет $\lambda_{n+1}=(n+1)^2$.

Коэффициент α_{n+2} проще всего найти, сравнивая в (224) коэффициенты при x^{n+1}. Благодаря (222) получаем $\alpha_{n+2}=2n+3$ и формула (224) принимает вид

$$\tilde{L}_{n+2}(x)=[x-(2n+3)]\,\tilde{L}_{n+1}(x)-(n+1)^2\,\tilde{L}_n(x). \quad (225)$$

Так как $\tilde{L}_0(x)=1$, $\tilde{L}_1(x)=x-1$, то

$$\tilde{L}_2(x)=x^2-4x+2,$$
$$\tilde{L}_3(x)=x^3-9x^2+18x-6,$$
$$\dots\dots\dots\dots\dots\dots$$

Рассмотрим функцию

$$L(t,\,x)=\frac{1}{1+t}\,e^{\frac{xt}{1+t}}. \quad (226)$$

Нетрудно видеть, что при $|t|<1$ она разлагается в ряд по степеням t:

$$L(t,\,x)=A_0(x)+A_1(x)\,t+A_2(x)\,t^2+\dots$$

Покажем, что $A_n(x)=\hat{L}_n(x)$. В самом деле, очевидно, что $A_0(x)=1$. Кроме того,

$$\frac{\partial L(t,\,x)}{\partial t}=\left[\frac{x}{(1+t)^2}-\frac{1}{1+t}\right]L(t,\,x). \quad (227)$$

Отсюда прежде всего $A_1(x)=x-1=\hat{L}_1(x)$.

Если же мы перепишем (227) в форме

$$(1+t)^2\,L_t'(t,\,x)=(x-t-1)\,L(t,\,x)$$

и сравним коэффициенты при t^{n+1}, то увидим, что

$$(n+2)\,A_{n+2}(x)=[x-(2n+3)]\,A_{n+1}(x)-(n+1)\,A_n(x)$$
$$(n=0,\,1,\,2,\,\dots).$$

Отсюда, умножая на $(n+1)!$ и сравнивая с (225), мы убедимся, что

$$n!\;A_n(x)=\tilde{L}_n(x),$$

что и доказывает наше утверждение. Таким образом *функция* (226) *есть производящая функция полиномов Лагерра*.

Нетрудно показать, что полиномы Лагерра $L_n(x)$ удовлетворяют дифференциальному уравнению

$$xy'' + (1-x)y' + ny = 0. \tag{228}$$

Действительно, если

$$u = x^n e^{-x},$$

то $xu' = (n-x)u$. Беря отсюда производные порядка $n+1$ и применяя формулу Лейбница, находим

$$xu^{(n+2)} + (x+1)u^{(n+1)} + (n+1)u^{(n)} = 0. \tag{229}$$

Но $u^{(n)} = e^{-x}L_n(x) = e^{-x}y$. Отсюда и из (229) и следует (228).

§ 3. Обобщённые полиномы Лагерра.

В некоторых вопросах играют роль полиномы более общего вида, чем $L_n(x)$. Это — так называемые *обобщённые полиномы Лагерра* $L_n^{(\alpha)}(x)$, образующие на $[0, +\infty)$ ортогональную систему веса $x^\alpha e^{-x}$, где $\alpha > -1$. Перечислим вкратце их простейшие свойства, которые доказываются также, как для обыкновенных полиномов Лагерра.

1. Полиномы $L_n^{(\alpha)}(x)$ определяются формулой

$$L_n^{(\alpha)}(x) = K_n x^{-\alpha} e^x \frac{d^n}{dx^n}(x^{\alpha+n}e^{-x}).$$

2. Полиномы $\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x)$ со старшим коэффициентом, равным единице, получаются при $K_n = (-1)^n$, а нормированные полиномы $\hat{L}_n^{(\alpha)}(x)$ — при

$$K_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}}.$$

3. Рекуррентная формула для $L_n^{(\alpha)}(x)$ такова:

$$\tilde{L}_{n+2}^{(\alpha)}(x) =$$
$$= (x-\alpha-2n-3)\,\tilde{L}_{n+1}^{(\alpha)}(x) - (n+1)(n+\alpha+1)\,\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x).$$

4. Производящей функцией для этих полиномов служит

$$L^{(\alpha)}(t, x) = \frac{1}{(1+t)^{\alpha+1}} e^{\frac{xt}{1+t}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tilde{L}_n^{(\alpha)}(x)}{n!} t^n.$$

Докажем следующий факт:

Теорема (В. А. Стеклов [4]). *Множество всех полиномов всюду плотно в пространстве $L^2_{p(x)}$, если $p(x)$ есть вес Лагерра*

$$p(x) = x^{\alpha} e^{-x} \quad (0 \leqslant x < +\infty, \ \alpha > -1).$$

В самом деле, в силу замечания к теореме § 1, непрерывные функции, обращающиеся в нуль для достаточно больших x, лежат в $L^2_{p(x)}$ всюду плотно. Для каждой такой функции $f(x)$ интеграл

$$I = \int_0^{+\infty} x^{\alpha} e^{-x} \left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k e^{-kx} \right]^2 dx$$

подстановкой *) $x = -\ln t$ сводится к интегралу

$$I = \int_0^1 |\ln t|^{\alpha} \left[\varphi(t) - \sum_{k=0}^{n} c_k t^k \right]^2 dt,$$

где $\varphi(t) = f[-\ln t]$ есть непрерывная **) функция. Так как $\varphi(t)$ допускает сколь угодно хорошее (даже равномерное!) приближение полиномами, то интеграл I за счёт выбора коэффициентов c_k можно сделать сколь угодно малым. Таким образом «полиномы» $\sum c_k e^{-kx}$ лежат в $L^2_{p(x)}$ всюду плотно и достаточно показать, что именно их можно приблизить обыкновенными полиномами с любой степенью точности. Для этого, в свою очередь, достаточно обнаружить возможность приближения поли-

---

*) Ввиду специального характера функции $f(x)$ здесь отпадают трудности, связанные с подстановкой в интегралах Лебега.

**) Если $f(x) = 0$ при $x \geqslant A$, то $\varphi(t) = 0$ при $0 \leqslant t \leqslant e^{-A}$. В сегменте же $[e^{-A}, 1]$ $\varphi(t)$ есть суперпозиция непрерывных функций.

номами любой функции e^{-mx} $(m=0, 1, 2, \ldots)$. При $m=0$ это вполне тривиально, а для прочих m, очевидно, сводится к проверке выполнения равенства Парсеваля:

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x}(e^{-mx})^2\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} c_n^2, \tag{230}$$

где

$$c_n = \int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-x} e^{-mx} \hat{L}_n^{(\alpha)}(x)\,dx.$$

Но

$$\int_0^{+\infty} x^\alpha e^{-(2m+1)x}\,dx = \frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2m+1)^{\alpha+1}}.$$

С другой стороны, полагая

$$u = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}} x^{\alpha+n} e^{-x}, \quad v = e^{-mx},$$

находим

$$c_n = \int_0^{+\infty} u^{(n)} v\,dx =$$

$$= [u^{(n-1)}v - \ldots + (-1)^n u v^{(n-1)}]_0^{+\infty} + (-1)^n \int_0^{+\infty} u v^{(n)}\,dx.$$

Внеинтегральный член здесь исчезает, и потому

$$c_n = \frac{(-m)^n}{\sqrt{n!\,\Gamma(\alpha+n+1)}} \int_0^{+\infty} x^{\alpha+n} e^{-(m+1)x}\,dx =$$

$$= \frac{(-m)^n}{(m+1)^{\alpha+n+1}} \sqrt{\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}}.$$

Значит, подлежащее доказательству равенство (230) принимает вид

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(2m+1)^{\alpha+1}} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!} \frac{m^{2n}}{(m+1)^{2\alpha+2n+2}}. \tag{231}$$

Если положить

$$\frac{m}{m+1}=x,$$

то равенство (231) переходит в равенство

$$\frac{\Gamma(\alpha+1)}{(1-x^2)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\Gamma(\alpha+n+1)}{n!}x^{2n}$$

или же в равенство

$$\frac{1}{(1-x^2)^{\alpha+1}}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\alpha+n)(\alpha+n-1)\ldots(\alpha+1)}{n!}x^{2n},$$

а это есть биномиальная формула Ньютона.

Теорема доказана. В частности, из неё следует, что ортонормальная система $\{\hat{L}_n^{(\alpha)}(x)\}$ замкнута в пространстве $L^2_{p(x)}$ при $p(x)=x^{\alpha}e^{-x}$.

§ 4. Полиномы Эрмита.

Полиномы Эрмита *) образуют ортогональную систему веса

$$p(x)=e^{-x^2}\quad(-\infty<x<+\infty). \tag{232}$$

Теорема 1. *Полиномы Эрмита определяются формулой*

$$H_n(x)=e^{x^2}\frac{d^n(e^{-x^2})}{dx^n}. \tag{233}$$

В самом деле, если

$$u=e^{-x^2},$$

то

$$u'=-2xe^{-x^2},\quad u''=(4x^2-2)e^{-x^2},\quad u'''=(-8x^3+12x)e^{-x^2}$$

и вообще

$$u^{(n)}=H_n(x)e^{-x^2},$$

*) Эрмит [1].

где $H_n(x)$ есть полином степени n со старшим коэффициентом, равным $(-2)^n$. Это легко проверяется методом полной индукции. Значит, функция $H_n(x)$, определённая формулой (233), действительно есть полином степени n.

Так как

$$u^{(n)}(-\infty)=u^{(n)}(+\infty)=0,$$

то из формулы

$$\int_{-\infty}^{+\infty} u^{(n)}v\,dx=$$

$$=[u^{(n-1)}v-\ldots+(-1)^{n-1}uv^{(n-1)}]_{-\infty}^{+\infty}+(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty} uv^{(n)}\,dx$$

следует, что для любого полинома $v(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n(x)v(x)\,dx=(-1)^n\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}v^{(n)}(x)\,dx. \quad (234)$$

В частности, если степень $v(x)$ ниже n, то последний интеграл равен нулю, откуда и следует, что полиномы (233) образуют ортогональную систему веса e^{-x^2}.

Если в (234) положить $v(x)=H_n(x)$ и учесть, что старший коэффициент $H_n(x)$ есть $(-2)^n$, то мы найдём, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}H_n^2(x)\,dx=2^n n!\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\,dx=2^n n!\sqrt{\pi}. \quad (235)$$

Таким образом

$$\left.\begin{aligned}\tilde{H}_n(x)&=\left(-\frac{1}{2}\right)^n H_n(x),\\ \hat{H}_n(x)&=\frac{(-1)^n}{\sqrt{2^n n!\sqrt{\pi}}}H_n(x).\end{aligned}\right\} \quad (236)$$

Рекуррентная формула для полиномов Эрмита такова:

$$\tilde{H}_{n+2}(x)=x\tilde{H}_{n+1}(x)-\frac{n+1}{2}\tilde{H}_n(x).$$

В самом деле, из (233) методом полной индукции легко убедиться, что в состав $H_n(x)$ входят только те степени x^k, показатели которых имеют одинаковую чётность с n, откуда ясно, что $\alpha_{n+2}=0$. Кроме того, в силу (73),

$$\lambda_{n+1}=\frac{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\tilde{H}^2_{n+1}(x)\,dx}{\int\limits_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\tilde{H}^2_n(x)\,dx},$$

и из (235) и (236) вытекает, что $\lambda_{n+1}=\frac{n+1}{2}$.

Производящая функция полиномов Эрмита есть

$$H(t,\,x)=e^{-2tx-t^2}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{H_n(x)}{n!}t^n. \tag{237}$$

Действительно, если $\varphi(z)=e^{-z^2}$, то по формуле Тэйлора

$$\varphi(x+t)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\varphi^{(n)}(x)}{n!}t^n.$$

Но $\varphi^{(n)}(x)=e^{-x^2}H_n(x)$, откуда и следует (237).

Нетрудно вывести дифференциальное уравнение, которому удовлетворяет $y=H_n(x)$. Именно, если $u=e^{-x^2}$, то $u'=-2xu$. Беря отсюда производные порядка $n+1$, находим

$$u^{(n+2)}+2xu^{(n+1)}+2(n+1)u^{(n)}=0,$$

но $u^{(n)}=e^{-x^2}y$, и потому

$$y''-2xy'+2ny=0.$$

В заключение докажем полноту системы полиномов Эрмита.

Теорема 2 (В. А. Стеклов [3]). *При весе Эрмита*

$$p(x)=e^{-x^2} \qquad (-\infty<x<+\infty)$$

полиномы образуют множество всюду плотное в $L^2_{p(x)}$.

Так как непрерывные функции, равные нулю при достаточно больших $|x|$, лежат в $L^2_{1(x)}$ всюду плотно, то достаточно показать, что именно эти функции можно приблизить полиномами с любой степенью точности.

Более того, не ограничивая общности, можно допустить, что рассматриваемые функции обращаются в нуль в некоторых малых интервалах $(-a, +a)$, ибо и такие функции лежат в $L^2_{1(x)}$ всюду плотно.

Итак, пусть $f(x)$ — непрерывная функция, отличная от нуля только при $a < |x| < A$. Предполагая её *чётной*, будем иметь

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^{2k}\right]^2 dx =$$

$$= 2\int_{0}^{+\infty} e^{-x^2}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^{2k}\right]^2 dx.$$

С помощью подстановки $x^2 = z$, получаем

$$I = \int_{0}^{+\infty} \frac{e^{-z}}{\sqrt{z}}\left[\varphi(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right]^2 dz.$$

Функция $\varphi(z) = f(\sqrt{z})$, будучи непрерывной и ограниченной, входит в $L^2_{p(z)}$ при лагерровом весе $p(z) = z^{-1/2}e^{-z}$. Но в этом пространстве полиномы лежат всюду плотно, и за счёт выбора коэффициентов c_k интеграл I можно сделать сколь угодно малым.

Если же $f(x)$ — функция *нечётная*, то та же подстановка даёт

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-x^2}\left[f(x) - \sum_{k=0}^{n} c_k x^{2k+1}\right]^2 dx =$$

$$= \int_{0}^{+\infty} \sqrt{z}\, e^{-z}\left[\varphi(z) - \sum_{k=0}^{n} c_k z^k\right]^2 dz,$$

где $\varphi(z)=\frac{f(\sqrt{z})}{\sqrt{z}}$ непрерывна и ограничена. Значит, опираясь на плотность полиномов в $L^2_{p(z)}$ при $p(z)=z^{+1/2}e^{-z}$, мы снова можем сделать I сколь угодно малым. Остаётся заметить, что всякая функция $f(x)$ может быть представлена в виде

$$f(x)=\frac{f(x)+f(-x)}{2}+\frac{f(x)-f(-x)}{2},$$

причём первое слагаемое есть функция чётная, а второе — нечётная.

§ 5. Проблема моментов для бесконечного промежутка.

Проблема моментов для бесконечного промежутка существенно сложнее, чем для конечного. Дело в том, что, как мы видели выше, интегральный вес ограниченной вариации определяется своими моментами на конечном промежутке «почти» однозначно, ибо ими определяется его ядро. Для бесконечного промежутка это уже не так. Например, как мы видели в § 1, справедливы равенства

$$\int_0^{+\infty} x^{-\ln x}\sin(2\pi\ln x)\,x^n\,dx=0 \quad (n=0,\ 1,\ 2,\ \ldots).$$

Значит, два неотрицательных дифференциальных веса

$$p_1(x)=x^{-\ln x},\quad p_2(x)=x^{-\ln x}\,[1-\sin(2\pi\ln x)]$$

имеют одни и те же моменты на промежутке $[0,\ +\infty]$.

Если положить

$$g_i(x)=\int_0^x p_i(t)\,dt \qquad (i=1,\ 2),$$

то мы получим две различные строго возрастающие непрерывные интегральные весовые функции с одинаковыми моментами.

Поэтому встаёт задача выделения таких моментных последовательностей, которые и для бесконечного промежутка определяют свою весовую функцию однозначно (с учётом сделанных выше оговорок).

Мы, однако, оставим этот вопрос в стороне, ограничившись рассмотрением условий, при которых заданная числовая последовательность $\{\mu_n\}$ является моментной последовательностью на промежутке $(-\infty, +\infty)$.

При этом мы ограничимся случаем возрастающего интегрального веса $g(x)$ с бесконечным числом точек роста. Интегралы Стилтьеса

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, dg(x), \tag{238}$$

с которыми нам придётся иметь дело, мы будем понимать, как несобственные, т. е. как*)

$$\lim \int_A^B x^n \, dg(x) \qquad (A \to -\infty, \ B \to +\infty).$$

Так как

$$\int_A^B dg(x) = g(B) - g(A),$$

то интеграл (238) уже при $n=0$ может существовать, только для *ограниченного* веса $g(x)$. Это условие мы также будем предполагать выполненным.

Лемма 1. *Если полином $P(x)$ с вещественными коэффициентами неотрицателен при всех вещественных x, то он представим в виде суммы квадратов двух полиномов с вещественными же коэффициентами.*

В самом деле, вещественные корни $P(x)$ (если они вообще у него имеются) должны иметь чётную кратность. Обозначая эти корни через $c_1, c_2, \ldots, c_m$, будем иметь

$$P(x) = Q(x) R^2(x),$$

где $R(x) = (x-c_1)^{\alpha_1}(x-c_2)^{\alpha_2}\ldots(x-c_m)^{\alpha_m}$, а $Q(x)$ имеет только комплексные и попарно сопряжённые корни. При этом два взаимно сопряжённых комплексных корня

*) Очевидно, что если такой интеграл существует, то он сходится *абсолютно*.

$a+bi$ и $a-bi$ имеют одинаковую кратность. Значит,

$$Q(x)=A^2\prod_{k=1}^{s}[(x-a_k-b_ki)(x-a_k+b_ki)]^{\sigma_k}=$$
$$=A^2\prod_{k=1}^{s}[(x-a_k)^2+b_k^2]^{\sigma_k}.$$

Таким образом $Q(x)$ есть произведение некоторого количества множителей, каждый из которых есть сумма квадратов двух полиномов. Но, в силу тождества

$$(A^2+B^2)(C^2+D^2)=(AC-BD)^2+(AD+BC)^2,$$

такое произведение также есть сумма квадратов двух полиномов. Остальное ясно.

Теорема 1. *Последовательность* $\{\mu_n\}$ *будет строго позитивной на* $(-\infty, +\infty)$, *тогда и только тогда, когда строго положительны все определители* *)

$$\Delta_n=\begin{vmatrix}\mu_0 & \mu_1 & \dots & \mu_n\\ \mu_1 & \mu_2 & \dots & \mu_{n+1}\\ \dots & \dots & \dots & \dots\\ \mu_n & \mu_{n+1} & \dots & \mu_{2n}\end{vmatrix}\qquad (n=0, 1, 2, \dots).$$

Для доказательства определим на множестве всех полиномов $\{P(x)\}$ функционал $\Phi[P(x)]$, полагая для

$$P(x)=a_0+a_1x+\dots+a_nx^n$$

функционал равным

$$\Phi[P(x)]=a_0\mu_0+a_1\mu_1+\dots+a_n\mu_n.$$

Это функционал, очевидно, таков, что

$$\Phi[P_1(x)+P_2(x)]=\Phi[P_1(x)]+\Phi[P_2(x)],$$
$$\Phi[kP(x)]=k\Phi[P(x)].$$

*) При этом $\Delta_0=\mu_0$.

Пусть

$$\psi_n(x)=\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_{n-1} & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n & x \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \ldots & \mu_{2n-1} & x^n \end{vmatrix} \qquad (n=1, 2, \ldots). \quad (239)$$

Кроме того, мы положим $\psi_0(x)=1$. Тогда

$$x^k\psi_n(x)=\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_{n-1} & x^k \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n & x^{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \ldots & \mu_{2n-1} & x^{k+n} \end{vmatrix},$$

а

$$\Phi[x^k\psi_n(x)]=$$

$$=\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \ldots & \mu_{n-1} & \Phi[x^k] \\ \mu_1 & \mu_2 & \ldots & \mu_n & \Phi[x^{k+1}] \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \ldots & \mu_{2n-1} & \Phi[x^{k+n}] \end{vmatrix}=\begin{vmatrix} \mu_0 & \ldots & \mu_{n-1} & \mu_k \\ \mu_1 & \ldots & \mu_n & \mu_{k+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & \ldots & \mu_{2n-1} & \mu_{k+n} \end{vmatrix}.$$

Значит,

$$\Phi[\psi_n(x)]=\Phi[x\psi_n(x)]=\ldots=\Phi[x^{n-1}\psi_n(x)]=0, \quad (240)$$

$$\Phi[x^n\psi_n(x)]=\Delta_n. \quad (241)$$

Из (240) вытекает, что для любого полинома $R(x)$ степени ниже n

$$\Phi[R(x)\psi_n(x)]=0. \quad (242)$$

С другой стороны, разлагая $\psi_n(x)$ по элементам последнего столбца, находим

$$\psi_n(x)=\Delta_{n-1}x^n+R(x),$$

где степень $R(x)$ ниже n. Значит,

$$\Phi[\psi_n^2(x)]=\Delta_{n-1}\Delta_n.$$

Предположим теперь последовательность $\{\mu_n\}$ строго позитивной. Тогда прежде всего будет $\Delta_0=\mu_0>0$, ибо $\mu_0=\Phi[1]$, а «полином» 1 нетождественен нулю и неотрицателен. В таком случае полином $\psi_1(x)$ будет нетождественен нулю (ибо он есть $\Delta_0 x + \mathrm{const}$) и

$$\Delta_0 \Delta_1 = \Phi[\psi_1^2(x)] > 0,$$

откуда $\Delta_1 > 0$. Но тогда $\psi_2(x)$ — не тождественный нуль и

$$\Delta_1 \Delta_2 = \Phi[\psi_2^2(x)] > 0,$$

откуда $\Delta_2 > 0$. Допустим, что мы уже доказали, что $\Delta_{n-1} > 0$. Тогда $\psi_n(x)$ — не нуль и

$$\Delta_{n-1} \Delta_n = \Phi[\psi_n^2(x)] > 0,$$

откуда $\Delta_n > 0$. Итак, для строго позитивной последовательности $\{\mu_n\}$ все определители Δ_n положительны.

Обратно, допустим, что $\Delta_n > 0$ для $n = 0, 1, 2, \ldots$ Рассмотрим какой-нибудь нетождественный нулю полином $P(x)$. Если его степень n, то его можно записать в виде

$$P(x) = A_0 \psi_0(x) + A_1 \psi_1(x) + \ldots + A_n \psi_n(x) \qquad (A_n \neq 0).$$

Тогда

$$\Phi[P^2(x)] = \Phi\left[\left\{\sum_{k=0}^{n} A_k \psi_k(x)\right\}^2\right] = \sum_{i,k} A_i A_k \Phi[\psi_i(x)\psi_k(x)].$$

Но, в силу (242),

$$\Phi[\psi_i(x)\psi_k(x)] = 0 \qquad (i \neq k).$$

Значит *),

$$\Phi[P^2(x)] = \sum_{k=0}^{n} A_k^2 \Phi[\psi_k^2(x)] = \sum_{k=0}^{n} A_k^2 \Delta_{k-1} \Delta_k > 0.$$

Если теперь $P(x) \not\equiv 0$ — любой неотрицательный полином, то по лемме 1 он представляется в виде

$$P(x) = P_1^2(x) + P_2^2(x)$$

*) Полагая $\Delta_{-1} = 1$.

и по доказанному

$$\Phi[P(x)] = \Phi[P_1^2(x)] + \Phi[P_2^2(x)] > 0.$$

Значит, последовательность $\{\mu_n\}$ строго позитивна. Теорема доказана.

Теорема 2. *Если $g(x)$ — возрастающая ограниченная функция с бесконечным множеством точек роста и все интегралы*

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, dg(x) \quad (n = 0, 1, 2, \ldots) \tag{243}$$

существуют, то последовательность их строго позитивна на $(-\infty, +\infty)$.

В самом деле, если $P(x)$ — неотрицательный и не тождественный нулю полином, то

$$\Phi[P(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x) \, dg(x) \geqslant \int_{A}^{B} P(x) \, dg(x),$$

где A и B — любые конечные числа. Но если их выбрать так, чтобы число точек роста $g(x)$ в $[A, B]$ было больше степени $P(x)$, то по примечанию к лемме 2 из § 4 главы VII окажется

$$\int_{A}^{B} P(x) \, dg(x) > 0,$$

откуда $\Phi[P(x)] > 0$, и теорема доказана.

Оказывается, что справедлива и обратная

Теорема 3 (Г. Гамбургер [1]). *Если последовательность строго позитивна на $(-\infty, +\infty)$, то существует такая возрастающая ограниченная функция $g(x)$ с бесконечным множеством точек роста, что при всех n будет иметь место равенство*

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, dg(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Доказательство этой теоремы имеет довольно сложный характер. Мы предпошлём ему ряд вспомогательных предложений.

Лемма 2. *Если последовательность* $\{\mu_n\}$ *строго позитивна на* $(-\infty, +\infty)$, *то все корни полинома* (239) *вещественные и простые.*

Прежде всего $\psi_n(x)$ имеет вещественные корни нечётной кратности. Действительно, в противном случае $\psi_n(x)$ был бы не тождественный нулю неотрицательный полином, и соотношение

$$\Phi[\psi_n(x)]=0$$

противоречило бы строгой позитивности $\{\mu_n\}$.

Пусть $\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_s$ суть *все* корни нечётной кратности $\psi_n(x)$. Если бы оказалось $s<n$, то, положив

$$R(x)=(x-\xi_1)(x-\xi_2)\ldots(x-\xi_s),$$

мы имели бы (см. (242))

$$\Phi[R(x)\psi_n(x)]=0,$$

что также противоречит строгой позитивности $\{\mu_n\}$, ибо $R(x)\psi_n(x)$ — неотрицательный полином. Значит, $s=n$ и лемма доказана.

Лемма 3. *В тех же условиях для любого полинома* $P(x)$ *степени ниже* $2n$

$$\Phi[P(x)]=\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} P(\xi_k^{(n)}), \tag{244}$$

где $\xi_k^{(n)}$ *суть корни* $\psi_n(x)$, *а*

$$A_k^{(n)}=\Phi\left[\frac{\psi_n(x)}{\psi_n'(\xi_k^{(n)})(x-\xi_k^{(n)})}\right].$$

В самом деле, деля $P(x)$ на $\psi_n(x)$, получим

$$P(x)=R(x)\psi_n(x)+\rho(x),$$

где степени $R(x)$ и $\rho(x)$ ниже n. В силу (242), имеем

$$\Phi[P(x)]=\Phi[\rho(x)].$$

Но

$$\rho(x)=\sum_{k=1}^{n}\frac{\psi_n(x)}{\psi_n'(\xi_k^{(n)})(x-\xi_k^{(n)})}\rho(\xi_k^{(n)}),$$

ибо обе части этого равенства суть полиномы степени ниже n, совпадающие в n точках $\xi_k^{(n)}$. Остаётся заметить, что $\rho(\xi_k^{(n)})=P(\xi_k^{(n)})$.

Лемма 4. *В тех же условиях коэффициенты $A_k^{(n)}$ положительны.*

Действительно, пусть i есть одно из чисел $1, 2, \ldots, n$. Положим

$$P(x)=\left[\frac{\psi_n(x)}{x-\xi_i^{(n)}}\right]^2.$$

Это—многочлен степени $2n-2$. Подставив его в (244) и заметив, что при $k\neq i$

$$P(\xi_k^{(n)})=0,$$

а $P(\xi_i^{(n)})=[\psi_n'(\xi_i^{(n)})]^2$, находим

$$\Phi[P(x)]=A_i^{(n)}[\psi_n'(\xi_i^{(n)})]^2,$$

откуда $A_i^{(n)}>0$.

Теперь мы можем перейти к доказательству теоремы Гамбургера. Именно, считая корни $\xi_k^{(n)}$ полинома $\psi_n(x)$ перенумерованными в порядке возрастания

$$\xi_1^{(n)}<\xi_2^{(n)}<\ldots<\xi_n^{(n)},$$

введём ступенчатую функцию $g_n(x)$, полагая

$$\begin{array}{ll}
g_n(x)=0 & \text{при } -\infty<x<\xi_1^{(n)},\\
g_n(x)=A_1^{(n)} & \text{при } \xi_1^{(n)}<x\leqslant\xi_2^{(n)},\\
g_n(x)=A_1^{(n)}+A_2^{(n)} & \text{при } \xi_2^{(n)}<x\leqslant\xi_3^{(n)},\\
\dots\dots\dots & \dots\dots\dots\\
g_n(x)=A_1^{(n)}+A_2^{(n)}+\ldots+A_{n-1}^{(n)} & \text{при } \xi_{n-1}^{(n)}<x\leqslant\xi_n^{(n)},\\
g_n(x)=A_1^{(n)}+A_2^{(n)}+\ldots+A_{n-1}^{(n)}+A^{(n)} & \text{при } \xi_n^{(n)}<x<+\infty.
\end{array}$$

По лемме 4 это — возрастающая функция. Для любого i

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^i \, dg_n(x) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} [\xi_k^{(n)}]^i.$$

С другой стороны, если $i < 2n$, то по лемме 3

$$\mu_i = \Phi[x^i] = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} [\xi_k^{(n)}]^i. \tag{245}$$

Значит, при $i = 0, 1, 2, \ldots, 2n-1$

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i \, dg_n(x).$$

Если в формуле (245) взять $i = 0$, то окажется

$$g_n(+\infty) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} = \mu_0.$$

В связи с тем, что $g_n(-\infty) = 0$, это показывает, что возрастающие функции $g_n(x)$ ограничены в совокупности. Но тогда на основании принципа выбора Хелли *) найдётся такая последовательность номеров $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, что при всех вещественных x существует предел

$$\lim_{m\to\infty} g_{n_m}(x) = g(x).$$

Функция $g(x)$, очевидно, — ограниченная и возрастающая. Покажем, что она и является искомым интегральным весом.

---

*) Этот принцип обычно доказывается для конечного сегмента. Но, взяв последовательность сегментов $[-1, +1] \subset [-2, +2] \subset [-3, +3] \subset \ldots$, мы можем сначала выбрать последовательность функций $\{g_n^{(1)}(x)\}$, сходящуюся на $[-1, +1]$, из неё выделить последовательность $\{g_n^{(2)}(x)\}$, сходящуюся на $[-2, +2]$, и т. д. Диагональная последовательность $\{g_n^{(n)}(x)\}$ будет сходиться на всей оси.

Закрепим некоторое i и пусть $n_m > i$. Тогда

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i \, dg_{n_m}(x).$$

Пусть $A < 0 < B$. Тогда

$$\left| \mu_i - \int_A^B x^i \, dg_{n_m}(x) \right| \leqslant \int_{-\infty}^{A} |x^i| \, dg_{n_m}(x) + \int_B^{+\infty} x^i \, dg_{n_m}(x).$$

Обозначим через $2r$ какое-нибудь чётное число, большее, чем i. Тогда

$$\int_{-\infty}^{A} |x|^i \, dg_{n_m}(x) \leqslant \frac{1}{|A|^{2r-i}} \int_{-\infty}^{A} x^{2r} dg_{n_m}(x),$$

$$\int_B^{+\infty} x^i \, dg_{n_m}(x) \leqslant \frac{1}{B^{2r-i}} \int_B^{+\infty} x^{2r} \, dg_{n_m}(x).$$

Значит, если $M = \min\{|A|, B\}$, то

$$\int_{-\infty}^{A} |x|^i \, dg_{n_m}(x) + \int_B^{+\infty} x^i \, dg_{n_m}(x) \leqslant \frac{1}{M^{2r-i}} \int_{-\infty}^{+\infty} x^{2r} \, dg_{n_m}(x).$$

Когда n_m станет больше, чем $2r$, последний интеграл сделается равным μ_{2r}. Поэтому при таком n_m мы будем иметь

$$\left| \mu_i - \int_A^B x^i \, dg_{n_m}(x) \right| \leqslant \frac{\mu_{2r}}{M^{2r-i}}.$$

Но для конечного сегмента $[A, B]$ можно применить теорему Хелли о предельном переходе под знаком интеграла Стилтьеса, что даёт

$$\left| \mu_i - \int_A^B x^i dg(x) \right| \leqslant \frac{\mu_{2r}}{M^{2r-i}}.$$

Если теперь $A \to -\infty$ и $B \to +\infty$, то $M \to +\infty$; поэтому

$$\mu_i = \int_{-\infty}^{+\infty} x^i \, dg(x).$$

Остаётся установить, что у $g(x)$ есть бесконечное множество точек роста. Но если бы их было только конечное число, то для неотрицательного полинома $P(x)$, имеющего их своими корнями, оказалось бы

$$\Phi[P(x)] = \int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\, dg(x) = 0,$$

что, однако, невозможно, так как последовательность $\{\mu_n\}$ по условию строго позитивна на $(-\infty, +\infty)$. Теорема Гамбургера доказана полностью.

Из простого сопоставления результатов этого параграфа вытекает *)

Теорема 4. *Для того чтобы существовала ограниченная возрастающая функция $g(x)$ с бесконечным множеством точек роста, удовлетворяющая условиям*

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x^n \, dg(x) = \mu_n \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots),$$

необходимо и достаточно, чтобы было

$$\begin{vmatrix} \mu_0 & \mu_1 & \cdots & \mu_n \\ \mu_1 & \mu_2 & \cdots & \mu_{n+1} \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \mu_n & \mu_{n+1} & \cdots & \mu_{2n} \end{vmatrix} > 0 \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Дальнейшие подробности читатель найдёт в монографии Н. И. Ахиезера и М. Г. Крейна [2].

---

*) Это и есть первоначальная формулировка теоремы Гамбургера.

§ 6. Теорема Фавара.

С помощью теоремы Гамбургера доказывается следующее предложение*):

Теорема. *Пусть* $\{\omega_n(x)\}$ $(n=0, 1, 2, \ldots)$ — *система полиномов, в которой* $\omega_n(x)$ *есть полином степени* n *со старшим коэффициентом, равным единице. Если имеет место рекуррентная формула*

$$\omega_{n+2}(x)=(x-\alpha_{n+2})\,\omega_{n+1}(x)-\lambda_{n+1}\,\omega_n(x) \qquad (246)$$
$$(n=0, 1, 2, \ldots),$$

причём $\lambda_{n+1}>0$, *то существует такая ограниченная возрастающая функция* $g(x)$ *с бесконечным множеством точек роста, что при* $i\neq k$

$$\int\limits_{-\infty}^{+\infty}\omega_i(x)\,\omega_k(x)\,dg(x)=0.$$

Иначе говоря, формула (246) при условии $\lambda_{n+1}>0$ позволяет утверждать, что $\{\omega_n(x)\}$ есть ортогональная система некоторого возрастающего интегрального веса.

Для доказательства этой теоремы положим

$$\omega_n(x)=x^n+\sigma_1^{(n)}x^{n-1}+\ldots+\sigma_n^{(n)}$$

и определим числа $\{\mu_n\}$ следующими условиями:

$$\mu_0=1,$$
$$\mu_n+\sigma_1^{(n)}\mu_{n-1}+\ldots+\sigma_n^{(n)}\mu_0=0 \qquad (n=1, 2, \ldots). \qquad (247)$$

Равенства (247) позволяют определять числа μ_n одно за другим.

С помощью $\{\mu_n\}$, как и выше, строим функционал $\Phi[P(x)]$, определив его для полинома

$$P(x)=a_0x^n+a_1x^{n-1}+\ldots+a_n$$

*) Фавар [1]. Эта теорема была найдена мною в 1935 году независимо от Фавара, о чём я тогда же сделал сообщение в семинаре С. Н. Бернштейна. Однако в связи с появлением статьи Фавара моя работа не была напечатана.

равенством

$$\Phi[P(x)] = a_0\mu_n + a_1\mu_{n-1} + \ldots + a_n\mu_0.$$

Тогда равенства (247) показывают, что

$$\Phi[\omega_n(x)] = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{248}$$

Установим более общую формулу

$$\Phi[x^k\omega_{n+k}(x)] = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{249}$$

Для $k = 0$ она верна, ибо приводится к (248). Допустим, что для $k = m$ она уже доказана. Тогда, в силу равенства

$$\omega_{n+m+2}(x) = (x - \alpha_{n+m+2})\,\omega_{n+m+1}(x) - \lambda_{n+m+1}\,\omega_{n+m}(x),$$

имеем

$$\Phi[x^m\omega_{n+2+m}(x)] = \Phi[x^{m+1}\omega_{n+m+1}(x)] - \\ - \alpha_{n+m+2}\Phi[x^m\omega_{n+1+m}(x)] - \lambda_{n+m+1}\Phi[x^m\omega_{n+m}(x)].$$

По допущению все члены здесь, кроме первого члена правой части, равны нулю. Значит,

$$\Phi[x^{m+1}\omega_{n+m+1}(x)] = 0,$$

и формула (249) доказана. Если изменить обозначения, то её можно записать так:

$$\Phi[x^k\omega_n(x)] = 0$$
$$(n = 1, 2, 3, \ldots;\quad k = 0, 1, \ldots, n-1).$$

Отсюда следует, что для любого полинома $R(x)$ степени ниже n

$$\Phi[R(x)\,\omega_n(x)] = 0 \quad (n = 1, 2, 3, \ldots). \tag{250}$$

С другой стороны, из (246) следует, что

$$\Phi[x^n\omega_{n+2}(x)] = \\ = \Phi[x^{n+1}\omega_{n+1}(x)] - \alpha_{n+2}\Phi[x^n\omega_{n+1}(x)] - \lambda_{n+1}\Phi[x^n\omega_n(x)].$$

Отсюда

$$\Phi[x^{n+1}\omega_{n+1}(x)] = \lambda_{n+1}\Phi[x^n\omega_n(x)],$$

и последовательное понижение значка n даёт

$$\Phi[x^n\omega_n(x)] = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n. \tag{251}$$

Ввиду того что

$$\omega_n(x) = x^n + R(x),$$

где степень $R(x)$ ниже n, из (250) и (251) следует

$$\Phi[\omega_n^2(x)] = \lambda_1\lambda_2\ldots\lambda_n.$$

Для нас важно, что

$$\Phi[\omega_n^2(x)] > 0, \tag{252}$$

причём это неравенство имеет место и для $n=0$, ибо $\Phi[1]=1$.

Установив это, рассмотрим какой-нибудь не тождественный нулю полином $P(x)$. Если его степень n, то

$$P(x) = c_0\omega_0(x) + c_1\omega_1(x) + \ldots + c_n\omega_n(x).$$

Значит,

$$\Phi[P^2(x)] = \sum_{i,k} c_i c_k \Phi[\omega_i(x)\,\omega_k(x)].$$

В силу (250), все слагаемые, у которых $i \neq k$, исчезают, и потому благодаря (252)

$$\Phi[P^2(x)] = \sum_{k=0}^{n} c_k^2 \Phi[\omega_k^2(x)] > 0. \tag{253}$$

Так как всякий неотрицательный полином есть сумма квадратов двух полиномов, то из (253) вытекает строгая позитивность последовательности $\{\mu_n\}$ на $(-\infty, +\infty)$. Но тогда существует возрастающая ограниченная функция $g(x)$, имеющая бесконечное множество точек роста и такая, что

$$\mu_n = \int_{-\infty}^{+\infty} x^n dg(x) \qquad (n = 0, 1, 2, \ldots).$$

Для любого полинома $P(x)$

$$\int_{-\infty}^{+\infty} P(x)\,dg(x) = \Phi[P(x)],$$

и соотношение (250) показывает, что

$$\int_{-\infty}^{+\infty} R(x)\,\omega_n(x)\,dg(x) = 0,$$

каков бы ни был полином $R(x)$ степени ниже n. Теорема доказана*).

*) По поводу настоящего и предыдущего параграфов см. Я. Л. Геронимус [4, 5].

ЧАСТЬ ТРЕТЬЯ

ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕ И МЕХАНИЧЕСКИЕ КВАДРАТУРЫ

ГЛАВА I.

РАЗЛИЧНЫЕ ВИДЫ ИНТЕРПОЛИРОВАНИЯ.

§ 1. Постановка вопроса.

На предыдущих страницах мы познакомились с многочисленными и разнообразными способами построения алгебраических и тригонометрических полиномов, дающих приближённое выражение заданной непрерывной функции $f(x)$. Это были полиномы Бернштейна, частные суммы ортогональных разложений функции $f(x)$, суммы Фурье, Фейера, Валле-Пуссена и т. п. В этой последней части книги мы остановимся ещё на одном методе получения приближающих полиномов: *методе интерполирования*. Суть дела здесь заключается в построении такого полинома $P(x)$, который в заранее заданных точках («узлах интерполирования») совпадал бы с функцией $f(x)$. Если речь идёт об обыкновенном алгебраическом полиноме, то с геометрической точки зрения вопрос приводится к построению некоторой параболы надлежащей степени, проходящей через точки $(x_i, f(x_i))$, где x_i — узлы интерполирования. По этой причине процесс построения упомянутого полинома называется параболическим интерполированием. В этой главе мы займёмся, главным образом, формальной стороной дела. В дальнейших главах мы изучим поведение интерполяционного полинома $P(x)$ при безграничном увеличении числа узлов. Если не налагать на функцию $f(x)$ никаких ограничений, то её значения в узлах (а только они определяют полином $P(x)$) не будут ни в какой степени связаны со значениями функции в других точках. Поэтому увеличение числа узлов вовсе не повлечёт за собой приближения полинома $P(x)$ к функции $f(x)$ в точках, отличных от узлов интерполирования. Для того чтобы этого избежать, мы, как и в первой части книги, ограничимся рассмотрением функций непрерывных, хотя многое из сказанного ниже можно было бы перенести на более широкий класс функций, интегрируемых по Риману *).

В связи с этим нас, главным образом, будет интересовать вопрос о *равномерном* приближении интерполирующего полинома $P(x)$ к интерполируемой функции $f(x)$. Кроме того, мы остановимся и на проблеме среднего квадратичного приближения $P(x)$ к $f(x)$.

Как мы увидим ниже, одной непрерывности функции $f(x)$ недостаточно для того, чтобы интерполяционный полином приближался к ней с возрастанием числа узлов. В следующей главе будет приведён ряд результатов отрицательного характера, иллюстрирующих это утверждение. Однако, если на функцию $f(x)$ наложены дополнительные ограничения, то при удачном выборе закона расширения множества узлов можно получить уже и положительные результаты.

Примерно та же проблематика возникает и при интерполировании не алгебраическими, а тригонометрическими полиномами. Этот вид интерполяции совершенно естественен, если интерполируемая функция 2π-периодична.

§ 2. Формула Лагранжа.

Рассмотрим следующую задачу: даны две группы из n вещественных чисел:

$$x_1,\ x_2,\ x_3,\ \ldots,\ x_n, \tag{1}$$

$$y_1,\ y_2,\ y_3,\ \ldots,\ y_n, \tag{2}$$

причём все числа (1) различны между собой (о числах (2) мы этого не предполагаем). Требуется построить

---

*) Как известно, множество точек разрыва таких функций не может быть очень «обширным»: оно всегда имеет меру нуль.

полином $L(x)$ по возможности наинизшей степени так, чтобы оказалось

$$L(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n). \quad (3)$$

Для решения этой задачи достаточно заметить, что полином

$$l_k(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)} \quad (4)$$

таков, что

$$l_k(x_i) = \begin{cases} 0 & \text{при } i \neq k, \\ 1 & \text{при } i = k. \end{cases}$$

Поэтому полином

$$L(x) = \sum_{k=}^{n} y_k l_k(x) \quad (5)$$

удовлетворяет требованиям (3). Степень этого полинома не выше $n-1$. С другой стороны, никакого другого полинома $M(x)$ степени не выше $n-1$, удовлетворяющего условиям (3), существовать не может, ибо иначе разность $L(x) - M(x)$ была бы не тождественным нулю полиномом степени не выше $n-1$, имеющим n корней (1), что невозможно. Таким образом полином $L(x)$ и является единственным решением поставленной задачи. Формула (5), дающая его представление через x_i и y_i, называется *интерполяционной формулой Лагранжа*.

Полиному $l_k(x)$ (который называется *фундаментальным* полиномом) можно дать более компактное выражение. Именно, если мы положим

$$\omega(x) = (x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \quad (6)$$

то окажется

$$(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n) = \frac{\omega(x)}{x-x_k},$$

$$(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n) = \\ = \lim_{x \to x_k} \frac{\omega(x)}{x-x_k} = \omega'(x_k),$$

и потому

$$l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}. \tag{7}$$

Если $P(x)$ есть некоторый полином степени не выше $n-1$, а $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — различные значения аргумента, то справедливо тождество

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n} P(x_k)\, l_k(x), \tag{8}$$

ибо обе его части суть полиномы степени ниже n, совпадающие в n точках x_i. В частности,

$$\sum_{k=1}^{n} l_k(x)=1. \tag{9}$$

Если же $f(x)$ есть произвольная функция, заданная в некотором сегменте $[a, b]$, и узлы x_i взяты из этого сегмента, то полином

$$L(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x) \tag{10}$$

есть единственный полином степени не выше $n-1$, который совпадает с $f(x)$ в узлах x_i. Разумеется, что при $x \neq x_i$ совпадения $L(x)$ и $f(x)$ может и не быть. Полином (10) называется *интерполяционным полиномом Лагранжа* для функции $f(x)$. Чтобы подчеркнуть его зависимость от этой функции, мы будем иногда обозначать его через $L[f; x]$. Формула (8) означает, что

$$L[P; x]=P(x), \tag{11}$$

если $P(x)$ — полином степени ниже n.

Пусть $f(x)$ функция, заданная на $[a, b]$ и имеющая там конечную производную порядка n. Тогда можно найти удобное выражение для разности $f(x)-L(x)$ при x, не совпадающем ни с одним из узлов x_i. Действительно, положим*) для такого x (считая его *закреплённым* в сегменте $[a, b]$)

$$K = \frac{f(x) - L(x)}{\omega(x)}, \tag{12}$$

и пусть

$$\varphi(z) = f(z) - L(z) - K\omega(z).$$

Это функция, заданная на $[a, b]$ и имеющая там конечную производную порядка n, причём

$$\varphi^{(n)}(z) = f^{(n)}(z) - Kn!, \tag{13}$$

ибо $L(z)$ есть полином степени ниже n, а $\omega^{(n)}(z) = n!$ Очевидно, что

$$\varphi(x_1) = \varphi(x_2) = \ldots = \varphi(x_n) = 0.$$

Кроме того, в силу (12),

$$\varphi(x) = 0.$$

Значит, в n интервалах между $n+1$ точками x, x_1, x_2, $\ldots$, x_n имеется n корней производной $\varphi'(z)$, причём все они оказываются различными между собой (теорема Ролля).

Вторичное применение теоремы Ролля показывает, что в $n-1$ интервалах между n корнями $\varphi'(z)$ имеется $n-1$ (различных!) корней второй производной $\varphi''(z)$. Продолжая это рассуждение, мы убедимся, что между наименьшим и наибольшим из чисел $x, x_1, \ldots, x_n$ обязательно имеется корень n-й производной $\varphi^{(n)}(z)$. Обозначая его через ξ, получаем из (13)

$$K = \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!},$$

и тогда формула (12) приводит к *интерполяционной формуле Лагранжа с остаточным членом*:

$$f(x) = L(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\omega(x). \tag{14}$$

Важно заметить, что $a < \xi < b$.

*) Так как $x \neq x_i$ $(i = 1, 2, \ldots, n)$, то $\omega(x) \neq 0$.

Из формулы (14) вытекает следующая простая

Теорема. *Если $f(x)$ есть целая функция, заданная на $[a, b]$, то при любом законе введения узлов, лишь бы число их неограниченно возрастало и они не выходили из $[a, b]$, равномерно на $[a, b]$*

$$\lim_{n\to\infty} L(x) = f(x).$$

В самом деле, при $x \in [a, b]$ будет $|\omega(x)| \leqslant (b-a)^n$. С другой стороны, если положить

$$M_n = \max|f^{(n)}(x)|,$$

то из (14) вытекает

$$|f(x) - L(x)| \leqslant \frac{M_n}{n!}(b-a)^n.$$

Но в § 1 главы IX первой части мы доказали, что

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt[n]{M_n}}{n} = 0.$$

Отсюда

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{\sqrt[n]{M_n}}{n} e\,(b-a)\right] = 0$$

и, тем более,

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{M_n}{n^n} e^n (b-a)^n\right] = 0. \tag{15}$$

Так как

$$\frac{n^n}{n!} < e^n,$$

то из (15) следует, что

$$\lim_{n\to\infty}\left[\frac{M_n}{n!}(b-a)^n\right] = 0.$$

Теорема доказана.

§ 3. Другой вид формулы Лагранжа. Формула Ньютона.

Представим себе, что нам известны значения $f(x_1), \ldots, f(x_n)$ некоторой функции в узлах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и мы хотим найти её значение в точках, отличных от узлов. Как мы знаем, в случае достаточно хороших структурных свойств функции её интерполяционный полином Лагранжа $L(x)$ хорошо представляет её, если только число узлов достаточно велико. Поэтому естественно и принять значение $L(x)$ за неизвестное нам значение $f(x)$.

Пусть, например, $f(x)$ есть давление пара в котле при температуре x. Произведя измерения этого давления при температурах $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и составив интерполяционный полином, мы получим формулу, позволяющую вычислять давление и при ненаблюдённой температуре*). Однако на этом примере видно неудобство записи интерполяционного полинома в форме (10). В самом деле, если мы произведём ещё одно измерение давления при температуре x_{n+1}, то в сумме (10) изменятся *все* слагаемые и всё вычисление придётся производить заново. Поэтому возникает идущая ещё от Ньютона идея записывать полином $L(x)$ не в форме (10), а в форме

$$L(x)=A_0+A_1(x-x_1)+A_2(x-x_1)(x-x_2)+\ldots \\ \ldots+A_{n-1}(x-x_1)\ldots(x-x_{n+1}). \quad (16)$$

Полагая здесь последовательно $x=x_1, x=x_2, \ldots, x=x_n$ и учитывая, что $L(x_i)=y_i$, мы найдём все коэффициенты $A_0, A_1, \ldots, A_{n-1}$. Непосредственно ясно, что A_{k-1} зависит только от $x_1, x_2, \ldots, x_k$ и $y_1, y_2, \ldots, y_k$, но не от x_i и y_i при $i>k$. Поэтому добавление нового узла потребует лишь введения в (16) одного нового слагаемого с сохранением всех старых.

Выведем формулу для вычисления A_{k-1}. Так как полином

$$L_k(x)=A_0+A_1(x-x_1)+\ldots+A_{k-1}(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})$$

при значениях $x=x_1, x_2, \ldots, x_k$ принимает значения $y_1, y_2, \ldots, y_k$, то его можно записать в лагранжевой

*) Я намеренно схематизирую ситуацию. В действительности непосредственное использование интерполяционного полинома для получения «эмпирической формулы» применяется редко.

форме (5)

$$L_k(x) = \sum_{i=1}^{k} \frac{\omega_k(x)}{\omega'_k(x_i)(x - x_i)} y_i,$$

где

$$\omega_k(x) = (x - x_1)(x - x_2) \ldots (x - x_k).$$

Значит, его старший коэффициент A_{k-1} есть

$$A_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{y_i}{\omega'_k(x_i)}. \tag{17}$$

Остаётся заметить, что

$$\omega'_k(x_i) = (x_i - x_1) \ldots (x_i - x_{i-1})(x_i - x_{i+1}) \ldots (x_i - x_k). \tag{18}$$

Например,

$$A_0 = y_1, \quad A_1 = \frac{y_1}{x_1 - x_2} + \frac{y_2}{x_2 - x_1},$$

$$A_2 = \frac{y_1}{(x_1 - x_2)(x_1 - x_3)} + \frac{y_2}{(x_2 - x_1)(x_2 - x_3)} + \frac{y_3}{(x_3 - x_1)(x_3 - x_2)}.$$

Остановимся подробнее на важном частном случае, когда узлы образуют арифметическую прогрессию. С этой целью определим понятие *разности*. Пусть

$$y_0, \; y_1, \; y_2, \; y_3, \; \ldots \tag{19}$$

есть некоторый конечный или бесконечный ряд чисел. Положим *)

$$\begin{aligned} \Delta y_k &= y_{k+1} - y_k, \\ \Delta^2 y_k &= \Delta y_{k+1} - \Delta y_k, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ \Delta^{n+1} y_k &= \Delta^n y_{k+1} - \Delta^n y_k \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \end{aligned}$$

Нетрудно видеть, что

$$\begin{aligned} \Delta^2 y_k &= y_{k+2} - 2y_{k+1} + y_k, \\ \Delta^3 y_k &= y_{k+3} - 3y_{k+2} + 3y_{k+1} - y_k \end{aligned}$$

*) Собственно, исходя из переменной y, мы составляем новые переменные Δy, $\Delta^2 y$, ... Поэтому естественнее были бы обозначения $(\Delta y)_k$, $(\Delta^2 y)_k$, ...

и вообще

$$\Delta^n y_k = \sum_{r=0}^{n} (-1)^{n-r} C_n^r y_{k+r}, \tag{20}$$

что легко подтвердить методом полной индукции. Величины Δy_k, $\Delta^2 y_k$, ... называются разностями 1-го, 2-го, ... порядков ряда (19).

Заметив это, вернёмся к формуле (16), предполагая, что узлы x_i суть

$$x_1 = a, \quad x_2 = a + h, \quad x_3 = a + 2h, \quad \ldots, \quad x_n = a + (n-1)h,$$

где h — число, отличное от нуля.

В этом случае будет

$$x_i - x_r = (i - r)\, h,$$

и потому из (18) следует

$$\omega_k'(x_i) = (-1)^{k-i} h^{k-1} (i-1)!\, (k-i)!$$

Подставляя это в (17), находим

$$A_{k-1} = \sum_{i=1}^{k} \frac{(-1)^{k-i} y_i}{h^{k-1} (i-1)!\, (k-i)!},$$

или

$$A_{k-1} = \frac{1}{h^{k-1}(k-1)!} \sum_{r=0}^{k-1} (-1)^{k-1-r} C_{k-1}^r y_{r+1}.$$

Сопоставляя этот результат с (20), находим окончательно

$$A_{k-1} = \frac{\Delta^{k-1} y_1}{h^{k-1}(k-1)!},$$

и формула (16) принимает вид

$$L(x) = y_1 + \frac{\Delta y_1}{h} \frac{x-a}{1!} + \frac{\Delta^2 y_1}{h^2} \frac{(x-a)(x-a-h)}{2!} + \ldots$$
$$\ldots + \frac{\Delta^{n-1} y_1}{h^{n-1}} \frac{(x-a)(x-a-h)\ldots[x-a-(n-2)h]}{(n-1)!}. \tag{21}$$

Формула (21) называется *интерполяционной формулой Ньютона.*

В том случае, когда

$$y_k = f[a+(k-1)h],$$

применяется обозначение

$$\Delta^n y_k = \Delta^n f\,[a+(k-1)h].$$

При таком обозначении формула Ньютона принимает вид*)

$$L[f;\,x] = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta^k f(a)}{h^k}\,\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots[x-a-(k-1)h]}{k!}. \quad (22)$$

Если, в частности, $P(x)$ есть полином степени ниже n, то при любых a и h справедливо тождество

$$P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{\Delta^k P(a)}{h^k}\,\frac{(x-a)(x-a-h)\ldots[x-a-(k-1)h]}{k!}. \quad (23)$$

Пример. Пусть

$$P(x) = \frac{(n-x)(n-1-x)\ldots(2-x)}{n!}, \quad a=0, \; h=1.$$

В этом случае

$$P(a)=1, \quad P(a+h)=\frac{1}{n},$$

$$P(a+2h)=\ldots=P[a+(n-1)h]=0,$$

и потому

$$\Delta^k P(a) = \sum_{r=0}^{k} (-1)^{k-r} C_k^r P(a+rh) = (-1)^k \frac{n-k}{n}.$$

Стало быть,

$$\frac{(n-x)(n-1-x)\ldots(2-x)}{n!} = \sum_{k=0}^{n-1} (-1)^k \frac{n-k}{n}\,\frac{x(x-1)\ldots(x-k+1)}{k!}.$$

---

*) При этом $\Delta^0 y_k = y_k$, $\Delta^0 f(a) = f(a)$.

Полагая, в частности, $x=n+m$, получаем полезное тождество:

$$\sum_{k=0}^{n-1}(-1)^k\frac{n-k}{n}C_{n+m}^k=(-1)^{n-1}\frac{(n+m-2)!}{(m-1)!\,n!}. \qquad (24)$$

В дальнейшем это тождество придётся использовать в несколько иной форме.

Именно, заменив в (24) индекс k на $n-i$ и поменяв ролями n и m, находим

$$\sum_{i=0}^{m}(-1)^{m-i}\frac{i}{n}C_{n+m}^{n+i}=(-1)^{m-1}\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,n!}. \qquad (25)$$

§ 4. Интерполирование с кратными узлами.

В предыдущих параграфах интерполяционный полином строился по его собственным значениям в узлах. Теперь мы поставим более общую задачу: даны узлы (1) и числа

$$\begin{array}{l} y_1,\ y_1',\ \ldots,\ y_1^{(a_1-1)}, \\ y_2,\ y_2',\ \ldots,\ y_2^{(a_2-1)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ y_n,\ y_n',\ \ldots,\ y_n^{(a_n-1)}. \end{array}$$

Требуется построить полином $H(x)$ наинизшей степени, удовлетворяющий условиям

$$H^{(r)}(x_i)=y_i^{(r)} \qquad (26)$$

$$(i=1,2,\ldots,n;\ r=0,1,\ldots,a_i-1).$$

Такой вид интерполирования изучал Эрмит [2].

Легко видеть, что поставленная задача имеет решение и притом единственное. В самом деле, положим

$$P_i(x)=A_0^{(i)}+A_1^{(i)}(x-x_i)+\ \ldots\ +A_{a_i-1}^{(i)}(x-x_i)^{a_i-1},$$

и пусть

$$H(x)=P_1(x)+(x-x_1)^{a_1}P_2(x)+\ \ldots$$
$$\ldots+(x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\ldots(x-x_{n-1})^{a_{n-1}}P_n(x). \qquad (27)$$

Так как $H(x)-P_1(x)$ имеет точку x_1 корнем кратности a_1, то, дифференцируя (27) последовательно a_1-1 раз и полагая в (27) и в полученных равенствах $x=x_1$, мы найдём все коэффициенты полинома $P_1(x)$. После этого, опираясь на равенство

$$\frac{H(x)-P_1(x)}{(x-x_1)^{a_1}}=$$
$$=P_2(x)+\ \dots\ +(x-x_2)^{a_2}\dots(x-x_{n-1})^{a_{n-1}}P_n(x),$$

мы тем же способом найдём коэффициенты полинома $P_2(x)$ и т. д. В результате все коэффициенты $H(x)$ будут определены. Ясно, что степень $H(x)$ будет не выше $m-1$, где $m=a_1+a_2+\ \dots\ +a_n$. С другой стороны, никакой другой полином $M(x)$ степени не выше $m-1$ не может удовлетворять всем условиям (26), ибо иначе разность $H(x)-M(x)$ имела бы m корней (с учётом их кратности).

Можно было бы найти формулы, выражающие коэффициенты полинома $H(x)$ через условия задачи, но мы, не рассматривая этого вопроса в общем виде, ограничимся тремя частными случаями.

I. Если $a_1=a_2=\dots=a_n=1$, то рассматриваемая задача приводится к построению лангражева интерполяционного полинома.

II. Если $n=1$, т. е. имеется лишь один узел, то решением задачи служит полином Тэйлора

$$H(x)=y_1+\frac{y_1'}{1!}(x-x_1)+\ \dots\ +\frac{y_1^{(a_1-1)}}{(a_1-1)!}(x-x_1)^{a_1-1}.$$

III. Если $a_1=a_2=\ \dots\ =a_n=2$, то решение задачи даётся формулой

$$H(x)=\sum_{k=1}^{n}y_k\left[1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right]l_k^2(x)+$$
$$+\sum_{k=1}^{n}y_k'(x-x_k)l_k^2(x),\qquad(28)$$

где, как и выше,

$$\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2) \dots (x - x_n), \quad l_k(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}.$$

Для доказательства формулы (28) прежде всего заметим, что степень полинома $H(x)$ не выше $2n - 1$. С другой стороны, легко проверить, что

$$H(x_i) = y_i, \; H'(x_i) = y'_i \quad (i = 1, 2, \dots, n). \tag{29}$$

Действительно,

$$l'_k(x) = \frac{\omega'(x)(x - x_k) - \omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)^2}.$$

Значит, по правилу Лопиталя

$$l'_k(x_k) = \lim_{x \to x_k} l_k(x) =$$
$$= \lim_{x \to x_k} \frac{\omega''(x)(x - x_k) + \omega'(x) - \omega'(x)}{2\omega'(x_k)(x - x_k)} = \frac{\omega''(x_k)}{2\omega'(x_k)}.$$

Поэтому полином $q_k(x) = l_k^2(x)$ удовлетворяет условиям

$$q_k(x_i) = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k); \end{cases} \quad q'_k(x_i) = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ \dfrac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} & (i = k). \end{cases}$$

Отсюда ясно, что полиномы

$$A(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k \left[1 - (x - x_k) \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} \right] q_k(x),$$

$$B(x) = \sum_{k=1}^{n} y'_k (x - x_k) q_k(x)$$

таковы, что

$$A(x_i) = y_i, \quad A'(x_i) = 0,$$
$$B(x_i) = 0, \quad B'(x_i) = y'_i,$$

а это равносильно условиям (29).

В дальнейшем мы будем записывать формулу (28) в форме

$$H(x)=\sum_{k=1}^{n} y_k A_k(x)+\sum_{k=1}^{n} y'_k B_k(x), \tag{30}$$

где положено

$$\left.\begin{aligned} A_k(x) &= \left[1-\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x-x_k)\right] l_k^2(x),\\ B_k(x) &= (x-x_k) l_k^2(x). \end{aligned}\right\} \tag{31}$$

Возвращаясь к общему случаю, допустим, что на некотором сегменте $[a, b]$ дана функция $f(x)$, имеющая конечную производную порядка $m=a_1+a_2+\ldots+a_n$, где $a_k \geqslant 1$.

Пусть $x_1, x_2, \ldots, x_n$ — узлы, лежащие в $[a, b]$, и

$$y_i^{(r)}=f^{(r)}(x_i)$$

$$(i=1, 2, \ldots, n;\ r=0, 1, \ldots, a_i-1).$$

Построим эрмитов интерполяционный полином $H(x)$ по условиям (26) и изучим разность

$$f(x)-H(x)$$

при закреплённом x, взятом из $[a, b]$ и отличном от узлов x_i.

Полагая

$$\Omega(z)=(z-x_1)^{a_1}(z-x_2)^{a_2}\ldots(z-x_n)^{a_n},$$

введём функцию

$$\varphi(z)=f(z)-H(z)-K\Omega(z),$$

где

$$K=\frac{f(x)-H(x)}{\Omega(x)}. \tag{32}$$

Легко видеть, что

$$\varphi^{(r)}(x_i)=0$$

$$(i=1, 2, \ldots, n;\ r=0, 1, \ldots;\ a_i-1),$$

ибо x_i есть корень $\Omega(z)$ кратности a_i. Кроме того, из (32) следует, что

$$\varphi(x)=0.$$

Значит (с учётом их кратности), функция $\varphi(z)$ имеет на $[a, b]$ не меньше $m+1$ корней.

На основании теоремы Ролля можно утверждать, что у $\varphi'(z)$ имеется m, у $\varphi''(z)$ имеется $(m-1)$ и т. д. корней.

В частности, у $\varphi^{(m)}(z)$ имеется корень ξ. Но

$$\varphi^{(m)}(z) = f^{(m)}(z) - Km!$$

Отсюда

$$K = \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}$$

и

$$f(x) = H(x) + \frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}\Omega(x)$$
$$(a < \xi < b).$$

Это — *интерполяционная формула Эрмита с остаточным членом*. Как и выше, из неё вытекает, что для *целой* функции интерполяционный полином Эрмита будет равномерно стремиться к этой функции при любом способе введения узлов, лишь бы число их неограниченно возрастало.

§ 5. Тригонометрическое интерполирование.

Пусть в полуоткрытом промежутке $[0, 2\pi)$ заданы $2n+1$ точки

$$x_0,\ x_1,\ x_2,\ \ldots,\ x_{2n}. \tag{33}$$

Легко построить тригонометрический полином $T(x)$ наинизшего порядка, который в узлах (33) принимает заранее заданные значения $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$.

В самом деле, так как

$$\sin\frac{x-a}{2}\sin\frac{x-b}{2} = \frac{1}{2}\left[\cos\frac{b-a}{2} - \cos\left(x - \frac{a+b}{2}\right)\right]$$

есть тригонометрический полином первого порядка, то

$t_k(x) =$

$$= \frac{\sin\frac{x-x_0}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{k-1}}{2}\sin\frac{x-x_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{x-x_{2n}}{2}}{\sin\frac{x_k-x_0}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_{k-1}}{2}\sin\frac{x_k-x_{k+1}}{2}\ldots\sin\frac{x_k-x_{2n}}{2}} \tag{34}$$

(важно, что число сомножителей числителя *чётное*) есть тригонометрический полином порядка n.

Легко видеть, что

$$t_k(x_i)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad i \neq k, \\ 1 & \text{при} \quad i = k. \end{cases}$$

Но тогда полином

$$T(x)=\sum_{k=0}^{2n} y_k t_k(x) \tag{35}$$

очевидным образом удовлетворяет условиям

$$T(x_i)=y_i \tag{36}$$

$$(i=0, 1, \ldots, 2n).$$

Порядок $T(x)$ — не выше n. Других же полиномов $M(x)$ порядка не выше n, удовлетворяющих этим условиям, быть не может, ибо иначе разность $T(x)-M(x)$ была бы не тождественным нулю тригонометрическим полиномом порядка не выше n, имеющим $2n+1$ корней (33), что невозможно.

Совершенно аналогично, задав в $[0, \pi]$ $n+1$ узел

$$x_0, x_1, \ldots, x_n \tag{37}$$

и положив

$$c_k(x)=\frac{(\cos x-\cos x_0)\ldots(\cos x-\cos x_{k-1})}{(\cos x_k-\cos x_0)\ldots(\cos x_k-\cos x_{k-1})}\times$$

$$\times\frac{(\cos x-\cos x_{k+1})\ldots(\cos x-\cos x_n)}{(\cos x_k-\cos x_{k+1})\ldots(\cos x_k-\cos x_n)},$$

$$C(x)=\sum_{k=0}^{n} y_k c_k(x),$$

мы получим *чётный* тригонометрический полином порядка не выше n, для которого

$$C(x_i)=y_i \tag{38}$$

$$(i=0, 1, \ldots, n).$$

Других чётных полиномов порядка не выше n с тем же свойством быть не может. Действительно, если бы $M(x)$ был таким полиномом, то разность $C(x)-M(x)$

обращалась бы в нуль не только в точках (37), но и в точках $-x_i$. Если считать $x_0 < x_1 < \ldots < x_n$, то даже в случае, когда $x_0 = 0$ и $x_n = \pi$, у разности $C(x) - M(x)$ оказалось бы $2n+1$ неэквивалентных корней, ибо $x_0 = 0$ был бы корнем двойным.

Наконец, задав в интервале $(0, \pi)$ n узлов $x_1, \ldots, x_n$ и положив

$$s_k(x) = \frac{(\cos x - \cos x_1)\ldots(\cos x - \cos x_{k-1})}{(\cos x_k - \cos x_1)\ldots(\cos x_k - \cos x_{k-1})} \times$$
$$\times \frac{(\cos x - \cos x_{k+1})\ldots(\cos x - \cos x_n)}{(\cos x_k - \cos x_{k+1})\ldots(\cos x_k - \cos x_n)} \frac{\sin x}{\sin x_k},$$

$$S(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k s_k(x),$$

мы получаем *нечётный* полином порядка не выше n, для которого

$$S(x_i) = y_i \qquad (i = 1, 2, \ldots, n).$$

И здесь легко устанавливается его единственность.

Различие в числе узлов, которые приходится задавать в каждом из этих случаев, легко объясняется тем, что для полного определения полинома надо знать все его коэффициенты, а так как

$$T(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

$$C(x) = A + \sum_{k=1}^{n} a_k \cos kx, \qquad S(x) = \sum_{k=1}^{n} b_k \sin kx,$$

то этих коэффициентов имеется $2n+1$ у $T(x)$, $n+1$ у $C(x)$ и n у $S(x)$. Условие (36) равносильно линейному уравнению

$$A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx_i + b_k \sin kx_i) = y_i \tag{39}$$

относительно коэффициентов A, a_k, b_k. Число узлов как раз и оказывается равным числу линейных уравнений, потребных для нахождения всех коэффициентов.

Заметим, между прочим, что из факта однозначной разрешимости системы уравнений типа (39) вытекает, что определитель

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \sin x_0 & \cos 2x_0 & \ldots & \sin nx_0 \\ 1 & \cos x_1 & \sin x_1 & \cos 2x_1 & \ldots & \sin nx_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cos x_{2n} & \sin x_{2n} & \cos 2x_{2n} & \ldots & \sin nx_{2n} \end{vmatrix}$$

отличен от нуля при условии, что $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_{2n} < 2\pi$. Аналогичным образом отличны от нуля и определители

$$\begin{vmatrix} 1 & \cos x_0 & \cos 2x_0 & \ldots & \cos nx_0 \\ 1 & \cos x_1 & \cos 2x_1 & \ldots & \cos nx_1 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & \cos x_n & \cos 2x_n & \ldots & \cos nx_n \end{vmatrix}, \qquad \begin{vmatrix} \sin x_1 & \sin 2x_1 & \ldots & \sin nx_1 \\ \sin x_2 & \sin 2x_2 & \ldots & \sin nx_2 \\ \cdot & \cdot & \cdot & \cdot \\ \sin x_n & \sin 2x_n & \ldots & \sin nx_n \end{vmatrix}$$

при условии $0 \leqslant x_0 < x_1 < \ldots < x_n \leqslant \pi$ для первого и $0 < x_1 < x_2 < \ldots < x_n < \pi$ для второго из них. В неоднократно цитированной монографии В. Л. Гончарова читатель найдёт и точные значения всех этих определителей *).

Особый интерес представляет случай *равноотстоящих* узлов

$$x_k = \frac{2k\pi}{2n+1} \tag{40}$$

$$(k = 0, 1, 2, \ldots, 2n).$$

Для этого случая можно сразу написать фундаментальный полином

$$t_k(x) = \frac{1}{2n+1} \frac{\sin \frac{2n+1}{2}(x - x_k)}{\sin \frac{x - x_k}{2}}.$$

Действительно, соотношения

$$t_k(x_i) = \begin{cases} 0 & (i \neq k), \\ 1 & (i = k) \end{cases}$$

---

*) В. Л. Гончаров [1], стр. 43.

совершенно очевидны, а тот факт, что $t_k(x)$ есть полином порядка n, вытекает из формулы*)

$$\frac{\sin\frac{2n+1}{2}\alpha}{2\sin\frac{\alpha}{2}}=\frac{1}{2}+\cos\alpha+\ldots+\cos n\alpha. \tag{41}$$

Таким образом интерполяционный полином для узлов (40) имеет вид

$$T(x)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}, \tag{42}$$

напоминающий интеграл Дирихле. Следует отметить, что между поведением полинома $T(x)$ и поведением частных сумм Фурье имеется далеко идущая аналогия.

Найдём значения коэффициентов A, a_m, b_m, входящих в выражение полинома (42), если его записать в «канонической форме»:

$$T(x)=A+\sum_{m=1}^{n}(a_m\cos mx+b_m\sin mx). \tag{43}$$

С этой целью подставим в (42) выражения для $t_k(x)$, получающиеся из (41):

$$T(x)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k\left[1+2\sum_{m=1}^{n}\cos m(x-x_k)\right].$$

Отсюда

$$T(x)=\frac{1}{2n+1}\left(\sum_{k=0}^{2n} y_k\right)+\frac{2}{2n+1}\sum_{m=1}^{n}\left[\left(\sum_{k=0}^{2n} y_k\cos mx_k\right)\cos mx+\left(\sum_{k=0}^{2n} y_k\sin mx_k\right)\sin mx\right] \tag{44}$$

*) Часть первая, формула (175).

и, стало быть,

$$A=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k,$$

$$a_m=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k\cos mx_k,\qquad b_m=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n} y_k\sin mx_k.$$

Если $y_0, y_1, \ldots, y_{2n}$ суть значения некоторой функции $f(x)$ в узлах (40), то полученные значения коэффициентов A, a_m, b_m оказываются не чем иным, как суммами Римана для коэффициентов Фурье

$$\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\,dx,\qquad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\cos mx\,dx,\quad \frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x)\sin mx\,dx. \tag{45}$$

Если n велико, то коэффициенты A, a_m, b_m близки к интегралам (45), а полином $T(x)$ близок к сумме Фурье $S_n(x)$ функции $f(x)$. Конечно, это — лишь наводящее соображение, а не точная теорема.

ГЛАВА II.
РЕЗУЛЬТАТЫ ОТРИЦАТЕЛЬНОГО ХАРАКТЕРА.

§ 1. Теоремы С. Н. Бернштейна и Г. Фабера.

Поставим следующую проблему. На сегменте $[a, b]$ выбираются узлы, образующие бесконечную треугольную матрицу

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)}, \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \\ x_1^{(3)},\ x_2^{(3)},\ x_3^{(3)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)} \ldots,\ x_n^{(n)} \\ \cdots\cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{46}$$

Далее, для определённой функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, строится последовательность интерполяционных полиномов Лагранжа $L_n(x)$, причём для построения $L_n(x)$ используются узлы n-й строки матрицы (46). Иначе говоря,

$$L_n(x_k^{(n)}) = f(x_k^{(n)}) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Спрашивается, будет ли иметь место стремление $L_n(x)$ к $f(x)$ во всех точках сегмента $[a, b]$.

Мы уже знаем, что это будет так (и притом равномерно), если функция $f(x)$ целая. Желательно освободиться от этого тяжелого условия на функцию. Оказывается, что для всякой матрицы (46) существует свой класс функций, для которых имеет место равномерная сходимость интерполяционного процесса, порождённого матрицей *). Однако этот класс *всегда* существенно уже класса $C([a, b])$ всех непрерывных функций, заданных на $[a, b]$. Иначе говоря, универсальной для всех непрерывных функций матрица (46) быть не может. Доказательство этого факта составляет содержание теоремы Фабера, которой в основном посвящён этот параграф.

При исследовании проблем сходимости полиномов $L_n(x)$ к функции $f(x)$ существенную роль играет величина

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(x)|, \tag{47}$$

где $l_k^{(n)}(x)$—фундаментальные полиномы n-й строки матрицы (46), т. е.

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})} \qquad \left(\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k^{(n)})\right).$$

Функция $\lambda_n(x)$ аналогична функции Лебега, которую мы рассматривали в теории ортогональных полиномов. Если положить

$$\lambda_n = \max \lambda_n(x) \qquad (a \leqslant x \leqslant b), \tag{48}$$

то имеет место

Теорема 1 (С. Н. Бернштейн—Г. Фабер). *Для всякой матрицы* (46) *справедливо неравенство*

$$\lambda_n > \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}. \tag{49}$$

Доказательство **) этой важной теоремы основано на следующих двух леммах.

Лемма 1. *Каковы бы ни были n точек $\theta_1, \theta_2, \ldots, \theta_n$ $(0 \leqslant \theta_k \leqslant \pi)$, существует чётный тригонометрический полином $T(\theta)$ порядка не выше $n-1$, для которого*

$$|T(\theta_i)| \leqslant 8\sqrt{\pi} \qquad (i = 1, 2, \ldots, n) \tag{50}$$

*) Этот класс всегда не пуст, ибо содержит все целые функции (и, совершенно тривиальным образом, все полиномы).

**) С. Н. Бернштейн [6], Фабер [1]. Ниже приводимое доказательство принадлежит Фейеру [3].

и который в некоторой точке $\alpha \in [0, \pi]$ *удовлетворяет неравенству*

$$\mathcal{T}(\alpha) > \ln n. \tag{51}$$

В самом деле, пусть $c_k(\theta)$ — чётные тригонометрические полиномы порядка не выше $n-1$, для которых

$$c_k(\theta_i) = \begin{cases} 0 \text{ при } i \neq k, \\ 1 \text{ при } i = k. \end{cases}$$

Пусть, далее,

$$A(\theta) = \frac{\cos\theta}{n-1} + \frac{\cos 2\theta}{n-2} + \ldots + \frac{\cos(n-1)\theta}{1},$$

$$B(\theta) = \frac{\cos(n+1)\theta}{1} + \frac{\cos(n+2)\theta}{2} + \ldots + \frac{\cos(2n-1)\theta}{n-1}.$$

Как мы знаем*) при всех θ

$$|A(\theta) - B(\theta)| \leqslant 4\sqrt{\pi}. \tag{52}$$

Введём, наконец, полином

$$U(\theta) = A(2\theta) - \sum_{k=1}^{n} [B(\theta_k + \theta) + B(\theta_k - \theta)]\, c_k(\theta).$$

Это — чётный тригонометрический полином. Нетрудно видеть, что

$$\int_0^\pi U(\theta)\, d\theta = \frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi} U(\theta)\, d\theta = 0. \tag{53}$$

В самом деле, $A(2\theta)$ есть тригонометрический полином без свободного члена. Значит, этот полином на сегменте $[-\pi, \pi]$ ортогонален к 1. С другой стороны, $B(\theta_k + \theta) + B(\theta_k - \theta)$ есть линейная комбинация членов вида $\cos m\theta$ при $m > n$, и потому эта комбинация ортогональна к полиномам $c_k(\theta)$, имеющим порядок ниже n.

Но в таком случае на сегменте $[0, \pi]$ обязательно имеется точка α, в которой

$$U(\alpha) = 0.$$

*) Часть первая, неравенство (186).

Заметив это, положим

$$T(\theta)=$$
$$=[A(\theta+\alpha)+A(\theta-\alpha)]-\sum_{k=0}^{n}[B(\theta_k+\alpha)+B(\theta_k-\alpha)]c_k(\theta).$$

Это—чётный тригонометрический полином порядка не выше*) $n-1$. Вместе с тем

$$T(\theta_i)=[A(\theta_i+\alpha)-B(\theta_i+\alpha)]+[A(\theta_i-\alpha)-B(\theta_i-\alpha)],$$

так что в силу (52) выполнено (50). С другой стороны,

$$T(\alpha)=A(0)+U(\alpha)=A(0).$$

Иначе говоря,

$$T(\alpha)=1+\frac{1}{2}+\ldots+\frac{1}{n-1}>\int_1^n\frac{dx}{x}=\ln n$$

и выполнено (51).

Лемма 2. *Каковы бы ни были узлы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ $(a\leqslant x<b)$, существует полином $P(x)$ степени не выше $n-1$, для которого*

$$|P(x_i)|\leqslant 8\sqrt{\pi}\quad (i=1,\ 2,\ \ldots,\ n)\tag{54}$$

и который в некоторой точке $c\in[a, b]$ удовлетворяет неравенству

$$P(c)>\ln n.\tag{55}$$

Эта лемма легко сводится к предыдущей. Действительно, подстановка

$$\theta=\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}$$

переводит сегмент $[a, b]$ в сегмент $[0, \pi]$. Пусть при этом точки x_k переходят в точки θ_k. Если $T(\theta)$—тот полином, существование которого установлено в лемме 1, то полином

$$P(x)=T\left[\arccos\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]$$

*) Ведь $B(\theta_k+\alpha)$ и $B(\theta_k-\alpha)$ — постоянные числа.

удовлетворяет соотношениям (54) и (55), причём

$$c=\frac{b-a}{2}\cos\alpha+\frac{a+b}{2}.$$

Возвращаясь к теореме Бернштейна—Фабера, заметим, что полином $P(x)$, о котором шла речь в лемме 2, можно записать в форме

$$P(x)=\sum_{k=1}^{n}P(x_k)\,l_k(x).$$

Отсюда

$$|P(x)|\leqslant 8\sqrt{\pi}\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|$$

и, в силу (55),

$$\sum_{k=1}^{n}|l_k(c)|>\frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}.$$

Здесь узлы интерполяции были произвольными точками из $[a, b]$. В частности, они могут образовывать n-ю строку матрицы (46). Теорема доказана.

Теорема 2 (Г. Фабер). *Какова бы ни была матрица* (46), *существует непрерывная**) *функция* $f(x)$, *для которой интерполяционный полином* $L_n(x)$, *порождённый* n*-й строкой матрицы, не стремится равномерно к* $f(x)$.

Докажем теорему от противного. Пусть некоторая матрица (46) обладает тем свойством, что для всякой функции $f(x)\in C([a, b])$ имеет место равномерное стремление интерполяционного полинома $L_n[f; x]=L_n(x)$ к функции $f(x)$. Как и выше, полагаем

$$\lambda_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|l_k^{(n)}(x)|,\quad \lambda_n=\max\lambda_n(x), \tag{56}$$

*) Все узлы матрицы предполагаются лежащими в закреплённом сегменте $[a, b]$. Функция $f(x)$ также определяется на этом сегменте.

и пусть точка $z_n \in [a, b]$ такова, что

$$\lambda_n(z_n) = \lambda_n. \tag{57}$$

Построим для каждого натурального n непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, полагая

$$\varphi_n(x_k^{(n)}) = \operatorname{sign} l_k^{(n)}(z_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{58}$$

и считая $\varphi_n(x)$ линейной между узлами $x_k^{(n)}$. Чтобы функция $\varphi_n(x)$ была задана на всём $[a, b]$, нужно указать ещё, какова она на сегментах*) $[a, x_1^{(n)}]$ и $[x_n^{(n)}, b]$; будем считать $\varphi_n(x)$ в этих сегментах постоянной. Вполне очевидно, что при всех x из $[a, b]$

$$|\varphi_n(x)| \leqslant 1. \tag{59}$$

С другой стороны,

$$L_n[\varphi_n; z_n] = \sum_{k=1}^{n} \varphi_n(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(z_n) =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} |l_k^{(n)}(z_n)| = \lambda_n(z_n) = \lambda_n. \tag{60}$$

Построим теперь возрастающую последовательность натуральных чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$, выбрав их следующим образом: число n_1 подбираем из условия

$$\lambda_{n_1} > 2 \cdot 2 \cdot 3,$$

что возможно, ибо, в силу теоремы 1, числа λ_n неограниченно растут. Так как функция $\frac{\varphi_{n_1}(x)}{3}$ непрерывна, то по допущению для неё процесс сходится равномерно. Значит, для всех $n > n'$

$$\left| L_n\left[\frac{\varphi_{n_1}}{3}; x\right] \right| < 1.$$

Число n_2 берём так, чтобы было $n_2 > n'$, $n_2 > n_1$ и, кроме того,

$$\lambda_{n_2} > 2 \cdot 3 \cdot 3^2.$$

*) Мы считаем узлы перенумерованными так, что

$$a \leqslant x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \leqslant b.$$

Так как функция

$$\frac{\varphi_{n_1}(x)}{3} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{3^2}$$

непрерывна и её модуль меньше $\frac{1}{3} + \frac{1}{3^2} < 1$, то найдётся такое n'', что для $n > n''$

$$\left| L_n \left[\frac{\varphi_{n_1}}{3} + \frac{\varphi_{n_2}}{3^2};\ x \right] \right| < 1.$$

Мы возьмём $n_3 > n''$, $n_3 > n_2$ и, кроме того, позаботимся, чтобы было

$$\lambda_{n_3} > 2 \cdot 4 \cdot 3^3.$$

Продолжая этот процесс, мы и получим упомянутую последовательность номеров n_m, причём

$$\left| L_{n_m} \left[\frac{\varphi_{n_1}}{3} + \frac{\varphi_{n_2}}{3^2} + \ldots + \frac{\varphi_{n_{m-1}}}{3^{m-1}};\ x \right] \right| < 1, \tag{61}$$

$$\lambda_{n_m} > 2(m+1)\,3^m. \tag{62}$$

С помощью чисел n_m вводим функцию

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_k}(x)}{3^k}.$$

Её непрерывность очевидна. Если положить

$$A(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_k}(x)}{3^k}, \quad B(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_k}(x)}{3^k},$$

то окажется

$$f(x) = A(x) + \frac{\varphi_{n_m}(x)}{3^m} + B(x),$$

откуда

$$L_{n_m}[f;\ x] = L_{n_m}[A;\ x] + \frac{1}{3^m} L_{n_m}[\varphi_{n_m};\ x] + L_{n_m}[B;\ x].$$

Согласно (61) имеем

$$|L_{n_m}[A;\ x]| < 1. \tag{63}$$

С другой стороны,

$$|L_{n_m}[B; x]| = \left|\sum_{k=1}^{n_m} B(x_k^{(n_m)})\, l_k^{(n_m)}(x)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \max|B(x)| \sum_{k=1}^{n_m} |l_k^{(n_m)}(x)|$$

и, значит

$$|L_{n_m}[B; x]| \leqslant \lambda_{n_m} \max|B(x)|.$$

Но

$$|B(x)| \leqslant \frac{1}{3^{m+1}} + \frac{1}{3^{m+2}} + \ldots = \frac{1}{2\cdot 3^m} \tag{64}$$

и, стало быть,

$$|L_{n_m}[B; x]| \leqslant \frac{\lambda_{n_m}}{2\cdot 3^m}. \tag{65}$$

Так как

$$L_{n_m}[f; z_{n_m}] \geqslant$$

$$\geqslant \frac{1}{3^m} L_{n_m}[\varphi_{n_m}; z_{n_m}] - |L_{n_m}[A; z_{n_m}]| - |L_{n_m}[B; z_{n_m}]|,$$

то на основании (60), (63) и (65) находим

$$L_{n_m}[f; z_{n_m}] > \frac{\lambda_{n_m}}{3^m} - 1 - \frac{\lambda_{n_m}}{2\cdot 3^m} = \frac{\lambda_{n_m}}{2\cdot 3^m} - 1$$

и, в силу (62),

$$L_{n_m}[f; z_{n_m}] > m. \tag{66}$$

Таким образом

$$\lim_{m\to\infty} L_{n_m}[f; z_{n_m}] = +\infty \tag{67}$$

и равномерного стремления $L_n[f; x]$ к $f(x)$ вопреки сделанному предположению нет*).

Теорема Фабера показывает, что для каждой матрицы (46) существует своя собственная функция $f(x)$, для которой интерполяционный процесс не сходится

*) Метод доказательства этой теоремы применяется весьма часто. Я предлагаю назвать его «методом скользящего горба».

равномерно. Интересно выяснить, не существует ли такой функции общей для всех матриц (46). На этот вопрос приходится ответить отрицательно. Действительно, имеет место

Теорема 3 (И. Марцинкевич [1]). *Для всякой непрерывной функции $f(x)$ существует такая матрица (46), что соответствующая последовательность интерполяционных полиномов равномерно сходится к $f(x)$.*

В самом деле, пусть $P_{n-1}(x)$ есть полином степени не выше $n-1$, имеющий наименьшее отклонение от $f(x)$ по сравнению со всеми полиномами из H_{n-1}. Тогда существует $(n+1)$-членный чебышевский альтернанс, состоящий из точек $y_1 < y_2 < \ldots < y_{n+1}$, в которых разность $P_{n-1}(x) - f(x)$ принимает значения разных знаков. Значит, в каждом интервале (y_k, y_{k+1}) имеется по корню $x_k^{(n)}$ упомянутой разности. Примем эти корни за узлы n-й строки матрицы (46). Тогда полином $P_{n-1}(x)$ и будет интерполяционным полиномом для $f(x)$ по узлам $x_k^{(n)}$.

Остаётся заметить, что с возрастанием n полином $P_{n-1}(x)$ равномерно стремится к $f(x)$.

§ 2. Пример С. Н. Бернштейна.

В теореме Фабера речь идёт об отсутствии *равномерной* сходимости полиномов $L_n(x)$ к функции $f(x)$. Таким образом не исключено, что в некоторых (а может быть, даже и во всех) точках полиномы $L_n(x)$ стремятся к $f(x)$. Нижеследующий пример иллюстрирует возможность расходимости интерполяционного процесса в отдельных точках.

Теорема (С. Н. Бернштейн [6]). *Интерполяционный полином $L_n(x)$, построенный для функции $|x|$ по равноотстоящим узлам сегмента $[-1, +1]$ (так что $x_1 = -1$, $x_n = +1$), не стремится с возрастанием n к $|x|$ ни в одной точке сегмента $[-1, +1]$, отличной*) от -1, 0 и $+1$.*

*) Точки ± 1 служат узлами, и в них интерполяционный полином при всех n совпадает с $|x|$.

Мы проведём доказательство теоремы для точки x, где $-1<x<0$. Случай $0<x<1$ исследуется аналогично.

Для доказательства введём функцию

$$\varphi(x)=\begin{cases} 0 & \text{при} \quad -1\leqslant x\leqslant 0, \\ x & \text{при} \quad 0\leqslant x\leqslant 1. \end{cases}$$

Так как $|x|=2\varphi(x)-x$, то достаточно установить расходимость интерполяционного процесса для функции $\varphi(x)$. С этой целью рассмотрим $2n+1$ узлов вида

$$x_k=-1+\frac{k-1}{n} \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n+1) \tag{68}$$

и обозначим через $L_{2n+1}(x)$ интерполяционный полином, совпадающий в узлах (68) с функцией $\varphi(x)$.

Согласно формуле Ньютона (22) имеем

$$L_{2n+1}(x)=\sum_{k=0}^{2n} n^k \frac{\Delta^k\varphi(-1)}{k!}(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_k). \tag{69}$$

Но, в силу (20),

$$\Delta^k\varphi(-1)=\sum_{r=0}^{k}(-1)^{k-r}C_k^r\varphi\left(-1+\frac{r}{n}\right).$$

Если $r\leqslant n$, то $\varphi\left(-1+\frac{r}{n}\right)=0$, и потому

$$\Delta^k\varphi(-1)=0 \qquad (k=0, 1, 2, \ldots, n).$$

Если же $r=n+i$ $(i=1, 2, \ldots, n)$, то $\varphi\left(-1+\frac{r}{n}\right)=\frac{i}{n}$. Значит, при $k=n+m$ $(m=1, 2, \ldots, n)$ будет

$$\Delta^{n+m}\varphi(-1)=\sum_{i=1}^{m}(-1)^{m-i}C_{n+m}^{n+i}\frac{i}{n},$$

или на основании (25)

$$\Delta^{n+m}\varphi(-1)=(-1)^{m-1}\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,n!}.$$

Поэтому равенство (69) принимает вид

$$L_{2n+1}(x)=\sum_{m=1}^{n}(-1)^{m-1}\frac{(m+n-2)!}{(m-1)!\,n!}\,\frac{n^{n+m}}{(n+m)!}\,(x+1)\times$$
$$\times\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\ldots\left(x+\frac{1}{n}\right)x\left(x-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(x-\frac{m-1}{n}\right). \quad (70)$$

Покажем, что все слагаемые здесь имеют одинаковые знаки. Действительно, пусть

$$-\frac{i+1}{n}<x\leqslant-\frac{i}{n}. \quad (71)$$

Произведение

$$(x+1)\left(x+\frac{n-1}{n}\right)\ldots\left(x+\frac{1}{n}\right)\times$$
$$\times x\left(x-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(x-\frac{m-1}{n}\right) \quad (72)$$

содержит $n+m$ множителей. Из них $m+i$ множителей

$$\left(x+\frac{i}{n}\right)\left(x+\frac{i-1}{n}\right)\ldots\left(x+\frac{1}{n}\right)x\left(x-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(x-\frac{m-1}{n}\right)$$

отрицательны, а остальные положительны. Значит, знак произведения (72) есть $(-1)^{m+i}$. Отсюда и следует, что все слагаемые суммы (70) имеют один и тот же знак и потому абсолютная величина этой суммы больше, чем у её последнего слагаемого, т. е.

$$|L_{2n+1}(x)|\geqslant\frac{\left|(x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right)\ldots\left(x-\frac{n-1}{n}\right)\right|}{2(2n-1)(n!)^2}\,n^{2n}.$$

В силу (71), имеем

$$x=-\frac{i}{n}-\frac{\theta_n}{n}\qquad(0\leqslant\theta_n<1).$$

Поэтому

$$|L_{2n+1}(x)|\geqslant\frac{n^{2n}}{2(2n-1)(n!)^2}\left(\frac{n-i}{n}-\frac{\theta_n}{n}\right)\left(\frac{n-i-1}{n}-\frac{\theta_n}{n}\right)\ldots$$
$$\ldots\left(\frac{1}{n}-\frac{\theta_n}{n}\right)\frac{\theta_n}{n}\left(\frac{1}{n}+\frac{\theta_n}{n}\right)\ldots\left(\frac{n+i-1}{n}+\frac{\theta_n}{n}\right).$$

Правая часть последнего неравенства не увеличится, если в первых $n-i-1$ сомножителях мы заменим θ_n

единицей, а в последних $n+i-1$ — нулём. Поэтому

$$|L_{2n+1}(x)| \geqslant \frac{(n-i-1)!\,(n+i-1)!}{2(2n-1)(n!)^2}\,\theta_n(1-\theta_n).$$

Рассмотрим в отдельности множитель

$$\sigma_n = \frac{(n-i-1)!\,(n+i-1)!}{2(2n-1)(n!)^2}.$$

Очевидно,

$$\sigma_n = \frac{1}{4n-2}\,\frac{1}{n-1}\,\frac{1}{n}\left(1+\frac{i+1}{n-i}\right)\left(1+\frac{i+1}{n-i+1}\right)\ldots\left(1+\frac{i+1}{n-2}\right).$$

Из последних $i-1$ скобок наименьшей является последняя. Значит,

$$\sigma_n > \frac{1}{4n^3}\left(1+\frac{i+1}{n-2}\right)^{i-1}.$$

Но, в силу (71),

$$\frac{i+1}{n-2} > -x, \quad i-1 > -nx-2.$$

Стало быть,

$$\sigma_n > \frac{1}{4n^3}\,(1-x)^{-nx-2}. \tag{73}$$

Отсюда видно, что

$$\lim_{n\to\infty} \sigma_n = +\infty. \tag{74}$$

До сих пор n было произвольным натуральным числом. Теперь мы специализируем его выбор. С этой целью закрепим число q, подчинив его условию

$$0 < q < \frac{1+x}{2}.$$

Тогда при любом натуральном i длина интервала $\left(\frac{i+q}{-x}, \frac{i+1-q}{-x}\right)$ больше единицы, и в нём обязательно имеется хоть одно натуральное число n

$$\frac{i+q}{-x} < n < \frac{i+1-q}{-x}.$$

При таком n (его можно считать сколь угодно большим за счёт выбора i) будет

$$\frac{i}{n}+\frac{q}{n}<-x<\frac{i+1}{n}-\frac{q}{n}.$$

Значит, для такого n будет

$$\theta_n > q, \quad 1-\theta_n > q,$$

и потому

$$|L_{2n+1}(x)| > q^2\sigma_n,$$

откуда в связи с (74) и следует теорема.

Добавление. *В точке $x=0$ интерполяционный полином, о котором шла речь в теореме, стремится к функции $|x|$.*

В самом деле, если число узлов нечётное, то точка $x=0$ является одним из этих узлов и говорить не о чем. Пусть же число узлов чётное и равно $2n$:

$$x_k=-1+\frac{2(k-1)}{2n-1} \qquad (k=1, 2, \ldots, 2n).$$

Запишем интерполяционный полином по этим узлам в форме Лагранжа

$$L_{2n}(x)=$$
$$=\sum_{k=1}^{2n}|x_k|\frac{(x-x_1)\cdots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\cdots(x-x_{2n})}{(x_k-x_1)\cdots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\cdots(x_k-x_{2n})}.$$

Тогда

$$|L_{2n}(0)| \leqslant$$
$$\leqslant\sum_{k=1}^{2n}\frac{|x_1x_2x_3\cdots x_{2n}|}{|x_k-x_1|\cdots|x_k-x_{k-1}|\,|x_k-x_{k+1}|\cdots|x_k-x_{2n}|}.$$

Замечая, что

$$x_k-x_i=\frac{2(k-i)}{2n-1},$$

находим

$$|L_{2n}(0)| \leqslant |x_1x_2\ldots x_{2n}|\sum_{k=1}^{2n}\frac{(2n-1)^{2n-1}}{2^{2n-1}(k-1)!\,(2n-k)!}.$$

С другой стороны,

$$|x_1x_2\ldots x_{2n}| = \frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n-1)^{2n}}.$$

Отсюда

$$|L_{2n}(0)| \leqslant \frac{[(2n-1)!!]^2}{2^{2n-1}(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n} \frac{1}{(k-1)!\,(2n-k)!},$$

или, что то же самое,

$$|L_{2n}(0)| \leqslant \frac{[(2n-1)!!]^2}{2^{2n-1}(2n)!\,(2n-1)} \sum_{k=1}^{2n} kC_{2n}^k.$$

Но по формуле Стирлинга*)

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}(1+\omega_n) \qquad (\lim \omega_n = 0)$$

имеем

$$\frac{[(2n-1)!!]^2}{(2n)!} = \frac{(2n)!}{[(2n)!!]^2} = \frac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2} = \frac{1+\lambda_n}{\sqrt{\pi n}} \qquad (\lim \lambda_n = 0).$$

С другой стороны, дифференцируя тождество

$$\sum_{k=0}^{2n} C_{2n}^k x^k = (1+x)^{2n}$$

и полагая $x=1$, находим

$$\sum_{k=1}^{2n} kC_{2n}^k = n2^{2n}.$$

Значит,

$$|L_{2n}(0)| \leqslant \frac{2n}{2n-1}\,\frac{1+\lambda_n}{\sqrt{\pi n}} \tag{75}$$

и, стало быть, $L_{2n}(0)$ стремится к нулю.

Замечание. В работе самого С. Н. Бернштейна случай $x=0$ не рассматривался. На сходимость процесса для этого случая впервые указал в 1939 году

*) Эта формула доказывается в «Добавлении 1» в конце книги.

Д. Л. Берман в студенческой курсовой работе. Как было указано С. М. Лозинским, справедлива оценка

$$|L_{2n}(0)| < \frac{A}{n},$$

более точная, чем (75). Оценка С. М. Лозинского следует из равенства

$$L_{2n}(0) = \left[\frac{(2n-3)!!}{2^{n-1}(n-1)!}\right]^2,$$

но мы не будем останавливаться на его доказательстве.

§ 3. Пример И. Марцинкевича.

Как мы знаем, причины расходимости интерполяционных процессов лежат в неограниченности функции $\lambda_n(x)$. Неравенство (73) показывает, что для равноотстоящих узлов имеет место оценка

$$|L_{2n+1}(x)| > \frac{q^2}{4n^3}(1-x)^{-nx-2} \qquad (x < 0),$$

причём n здесь может принимать хотя и не все подряд, но всё же сколь угодно большие натуральные значения. Если заметить, что функция $\varphi(x)$, для которой строился полином $L_{2n+1}(x)$, по модулю не больше единицы, то станет ясно, что при всех n

$$|L_{2n+1}(x)| \leqslant \lambda_{2n+1}(x).$$

Поэтому функция $\lambda_n(x)$, построенная для равноотстоящих узлов, растёт быстрее общего члена геометрической прогрессии*). Именно этот чрезвычайно быстрый рост $\lambda_n(x)$ и обусловливает расходимость интерполяционного процесса даже для такой «хорошей» функции, как $|x|$. Естественно поставить вопрос о возможности построения таких непрерывных функций, для которых всюду расходятся интерполяционные процессы, соответствующие более медленному росту $\lambda_n(x)$. Из теоремы Бернштейна—Фабера следует, что медленнее,

*) По крайней мере для бесконечного множества значений n.

чем $\ln n$, функция $\lambda_n(x)$ расти не может. С другой стороны, ниже устанавливается, что для чебышевских узлов

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n) \tag{76}$$

функция $\lambda_n(x)$ растёт и не быстрее, чем $\ln n$. С этой точки зрения узлы (76) оказываются наилучшими. И всё же, как будет показано, существуют непрерывные функции, для которых интерполяционный процесс по узлам (76) оказывается всюду расходящимся.

Такие непрерывные функции были независимо друг от друга и одновременно построены И. Марцинкевичем [2] и Г. Грюнвальдом [1]. Я излагаю с несущественными изменениями конструкцию Марцинкевича. Пример Грюнвальда читатель может найти в книге Я. С. Безиковича*).

Лемма 1. *Отнесём каждому натуральному числу n две группы чисел*

$$A(n) = \left\{\frac{1}{n}, \frac{3}{n}, \ldots, \frac{2n-1}{n}\right\},$$
$$B(n) = \left\{\frac{1}{n+1}, \frac{3}{n+1}, \ldots, \frac{2n+1}{n+1}\right\}.$$

Тогда $A(n)B(n) = 0$. Кроме того, каково бы ни было конечное множество S рациональных чисел из интервала $(0,2)$, найдутся сколь угодно большие значения n, при которых $A(n)S = 0$, а пересечение $B(n)S$ или пусто, или содержит только число 1.

Первое утверждение леммы очевидно**). Далее, пусть S состоит из несократимых дробей $\frac{p_i}{q_i}$ $(i=1, 2, \ldots, s)$. Положим

$$n = 2mq_1q_2 \ldots q_s,$$

*) Я. С. Безикович [1], стр. 168—180.

**) Если $\frac{2k-1}{n} = \frac{2i-1}{n+1}$, то $\left(1+\frac{1}{n}\right)(2k-1) = 2i-1$. Отсюда $\frac{2k-1}{n}$ — число целое и n нечётно, но тогда $\frac{2i-1}{n+1}$ не может быть целым.

где m — натуральное число. Если бы оказалось, что

$$\frac{p_i}{q_i}=\frac{2k-1}{n},$$

то отсюда вытекало бы нелепое равенство

$$2mp_iq_1\ldots q_{i-1}q_{i+1}\ldots q_s=2k-1.$$

Значит, $A(n)S=0$.

С другой стороны, если

$$\frac{p_i}{q_i}=\frac{2k-1}{n+1},$$

то

$$2mp_iq_1\ldots q_{i-1}q_{i+1}\ldots q_s+\frac{p_i}{q_i}=2k-1.$$

Стало быть, $\frac{p_i}{q_i}$ есть число целое, и потому $\frac{p_i}{q_i}=1$.

Остаётся заметить, что n сколь угодно велико вместе с m.

Будем обозначать через $L_n[f;x]$ интерполяционный полином, совпадающий с функцией $f(x)$ в узлах (76). Этот полином имеет вид

$$L_n[f;x]=\sum_{k=1}^{n}f(x_k^{(n)})\frac{T_n(x)}{T_n'(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})},\tag{77}$$

где *) $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$. Так как

$$T_n'(x)=n\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

то, полагая $x=\cos\theta$ $(0\leqslant\theta\leqslant\pi)$ и $\theta_k=\frac{2k-1}{2n}\pi$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, мы можем переписать $L_n[f;x]$ так:

$$L_n[f;x]=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}f(x_k^{(n)})\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-\cos\theta_k}\sin\theta_k.\tag{78}$$

*) Строго говоря, в соответствии с (6) надо было бы принять $\omega(x)=\widetilde{T}_n(x)$. Но в формулу Лагранжа входят лишь *отношения* $\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)}$. Поэтому $\omega(x)$ можно снабдить любым постоянным множителем.

Лемма 2. *При любом k из совокупности $1, 2, \ldots, n$ справедливо неравенство*

$$\frac{1}{n}\left|\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-\cos\theta_k}\right|\sin\theta_k\leqslant 2.$$

Действительно, пусть для определённости $\theta\neq\theta_k$. Так как $\cos n\theta_k=0$, то

$$|\cos n\theta|=|\cos n\theta-\cos n\theta_k|\leqslant 2\left|\sin\frac{n(\theta_k-\theta)}{2}\right|.$$

Отсюда

$$\frac{|\cos n\theta|}{|\cos\theta-\cos\theta_k|}\sin\theta_k\leqslant\frac{2\left|\sin\frac{n(\theta_k-\theta)}{2}\right|\sin\theta_k}{2\sin\frac{\theta_k+\theta}{2}\left|\sin\frac{\theta_k-\theta}{2}\right|}\leqslant n\,\frac{\sin\theta_k}{\sin\frac{\theta_k+\theta}{2}},$$

ибо $|\sin n\alpha|\leqslant n|\sin\alpha|$.

С другой стороны,

$$\frac{\sin\theta_k}{\sin\frac{\theta_k+\theta}{2}}\leqslant\frac{\sin\theta_k+\sin\theta}{\sin\frac{\theta_k+\theta}{2}}=2\cos\frac{\theta_k-\theta}{2}\leqslant 2,$$

откуда и следует лемма.

Лемма 3. *Пусть на сегменте $[a, b]$ дана непрерывная функция $\varphi(x)$ и пусть $x_1<x_2<\ldots<x_n$ суть различные точки этого сегмента. Каково бы ни было $\varepsilon>0$, существует полином $R(x)$, для которого*)*

$$R(x_k)=\varphi(x_k)\qquad(k=1, 2, \ldots, n),\tag{79}$$

$$|R(x)-\varphi(x)|<\varepsilon\qquad(a\leqslant x\leqslant b).\tag{80}$$

Действительно, пусть

$$q=\min(x_{k+1}-x_k)\quad(k=1, 2, \ldots, n-1)$$

и

$$Q=1+n\left(\frac{b-a}{q}\right)^{n-1}.$$

В силу теоремы Вейерштрасса, существует полином $P(x)$, для которого

$$|P(x)-\varphi(x)|<\frac{\varepsilon}{Q}.$$

*) Заметим, что о степени полинома $R(x)$ в лемме не утверждается ничего.

Пусть
$$\rho_k = P(x_k) - \varphi(x_k).$$
Положим
$$\rho(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)}\rho_k.$$
Очевидно, что
$$\rho(x_k) = \rho_k, \quad |\rho(x)| < \frac{\varepsilon}{Q} n \left(\frac{b-a}{q}\right)^{n-1}.$$
Поэтому полином
$$R(x) = P(x) - \rho(x)$$
удовлетворяет соотношениям (79) и (80).

Лемма 4. *Пусть $p > 2$ есть натуральное число. Существует полином $R_p(x)$, удовлетворяющий неравенству*
$$|R_p(x)| \leqslant 2 \qquad (-1 \leqslant x \leqslant 1) \tag{81}$$
и такой, что для всякого x из сегмента $\left[-\cos\frac{\pi}{p}, \cos\frac{\pi}{p}\right]$ найдётся индекс $n = n(x) > p$, при котором
$$|L_n[R_p; x]| > p. \tag{82}$$

Пусть m есть натуральное число. Его выбор мы уточним ниже, а пока будем предполагать только, что $m > p$.

Кроме того, условимся обозначать через S_n множество узлов $\{x_k^{(n)}\}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$, а через $S_n(a)$ — множество тех из этих узлов, которые попадают в сегмент $[-1, \cos a]$. В силу леммы 1 имеем $S_n S_{n+1} = 0$.

Положим $n_1 = m$ и определим функцию $\varphi(x)$ на точках множества $S_{n_1} + S_{n_1+1}$, положив
$$\varphi(x_k^{(n_1)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_k^{(n_1)} \in S_{n_1} - S_{n_1}\left(\frac{\pi}{m}\right), \\ (-1)^{k-1}, & \text{если } x_k^{(n_1)} \in S_{n_1}\left(\frac{\pi}{m}\right); \end{cases}$$
$$\varphi(x_k^{(n_1+1)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_k^{(n_1+1)} \in S_{n_1+1} - S_{n_1+1}\left(\frac{\pi}{m}\right), \\ (-1)^{k-1}, & \text{если } x_k^{(n_1+1)} \in S_{n_1+1}\left(\frac{\pi}{m}\right). \end{cases}$$

Проделав это, найдём натуральное число $n_2 > n_1$, для которого пересечение $(S_{n_2} + S_{n_2+1})(S_{n_1} + S_{n_1+1})$ или пусто, или состоит только из точки $0 = \cos\frac{\pi}{2}$. Такое число существует в силу леммы 1. Определим теперь нашу функцию и на точках множества $S_{n_2} + S_{n_2+1}$ (исключая точку 0, если в ней $\varphi(x)$ уже была определена) следующим образом:

$$\varphi(x_k^{(n_2)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_k^{(n_2)} \in S_{n_2} - S_{n_2}\left(\frac{2\pi}{m}\right), \\ (-1)^{k-1}, & \text{если } x_k^{(n_2)} \in S_{n_2}\left(\frac{2\pi}{m}\right); \end{cases}$$

$$\varphi(x_k^{(n_2+1)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_k^{(n_2+1)} \in S_{n_2+1} - S_{n_2+1}\left(\frac{2\pi}{m}\right), \\ (-1)^{k-1}, & \text{если } x_k^{(n_2+1)} \in S_{n_2+1}\left(\frac{2\pi}{m}\right). \end{cases}$$

Допустим, что мы уже определили числа $n_1 < < n_2 < \ldots < n_{i-1}$, где $i < m$. Тогда число $n_i > n_{i-1}$ мы выбираем так, чтобы множество $S_{n_i} + S_{n_{i+1}}$ или вовсе не имело общих точек с множеством

$$\sum_{k=1}^{i-1} (S_{n_k} + S_{n_{k+1}})$$

или чтобы единственной общей точкой у них была точка 0. Найдя n_i, мы определяем функцию $\varphi(x)$ в точках множества $S_{n_i} + S_{n_i+1}$ (кроме точки 0, если $\varphi(0)$ уже определено) следующим образом:

$$\varphi(x_k^{(n_i)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_k^{(n_i)} \in S_{n_i} - S_{n_i}\left(\frac{i\pi}{m}\right), \\ (-1)^{k-1}, & \text{если } x_k^{(n_i)} \in S_{n_i}\left(\frac{i\pi}{m}\right); \end{cases}$$

$$\varphi(x_k^{(n_i+1)}) = \begin{cases} 0, & \text{если } x_k^{(n_i+1)} \in S_{n_i+1} - S_{n_i+1}\left(\frac{i\pi}{m}\right), \\ (-1)^{k-1}, & \text{если } x_k^{(n_i+1)} \in S_{n_i+1}\left(\frac{i\pi}{m}\right). \end{cases}$$

Таким образом мы можем считать, что нами определены числа $n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$ и что функция $\varphi(x)$ определена на всех точках множества

$$\sum_{i=1}^{m-1} (S_{n_i} + S_{n_{i+1}}). \tag{83}$$

Положим $\varphi(-1) = \varphi(+1) = 0$ и доопределим $\varphi(x)$ во всех точках сегмента $[-1, +1]$, считая её линейной между теми точками, где она уже была определена. Очевидно, что $|\varphi(x)| \leqslant 1$. Обозначим через $R(x)$ полином*), совпадающий с $\varphi(x)$ на точках множества (83) и такой, что при всех x из $[-1, +1]$ будет $|R(x) - \varphi(x)| < 1$. Ясно, что $|R(x)| < 2$ при $-1 \leqslant x \leqslant 1$.

Пусть теперь $-\cos\frac{\pi}{p} \leqslant x \leqslant \cos\frac{\pi}{p}$. Положим $\theta = \arccos x$; тогда $\frac{\pi}{p} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\pi}{p}$. Определим число i условием $\frac{i-1}{m}\pi \leqslant \theta < \frac{i}{m}\pi$ и рассмотрим полиномы $L_{n_i}[R; x]$ и $L_{n_{i+1}}[R; x]$. Если обозначить через r наименьшее из значений k, при которых

$$\frac{i}{m}\pi \leqslant \theta_k^{(n_i)} \qquad \left(\theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi\right),$$

то согласно (78) мы будем иметь

$$L_{n_i}[R; x] = \frac{\cos n_i\theta}{n_i} \sum_{k=r}^{n_i} \frac{\sin\theta_k^{(n_i)}}{\cos\theta - \cos\theta_k^{(n_i)}} + \alpha(i). \tag{84}$$

Здесь $\alpha(i) = 0$, если точка 0 не является одним из узлов $x_k^{(n_i)}$; в противном случае возможно, что $\alpha(i) \neq 0$, но (в силу леммы 2) можно ручаться, что $|\alpha(i)| \leqslant 4$.

Рассмотрим теперь отдельно сумму, стоящую направо, опуская для краткости значок i. Функция

$$\frac{\sin x}{\cos\theta - \cos x}$$

на промежутке (θ, π) убывает, так как её производная есть

$$\frac{\cos\theta\cos x - 1}{(\cos\theta - \cos x)^2} \leqslant 0.$$

*) Его существование обеспечивается леммой 3.

Поэтому при $\theta_k \leqslant x \leqslant \theta_{k+1}$ будет

$$\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} \geqslant \frac{\sin x}{\cos\theta - \cos x}.$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{n}\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} > \int\limits_{\theta_k}^{\theta_{k+1}} \frac{\sin x}{\cos\theta - \cos x}\,dx$$

$$(k = r, r+1, \ldots, n-1).$$

Кроме того,

$$\frac{\pi}{2n}\frac{\sin\theta_n}{\cos\theta - \cos\theta_n} > \int\limits_{\theta_n}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos\theta - \cos x}\,dx.$$

Таким образом

$$\frac{\pi}{n}\sum_{k=r}^{n} \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} > \int\limits_{\theta_r}^{\pi} \frac{\sin x}{\cos\theta - \cos x}\,dx,$$

откуда

$$\frac{1}{n}\sum_{k=r}^{n} \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} > \frac{1}{\pi}\ln\frac{1+\cos\theta}{\cos\theta - \cos\theta_r}.$$

Но $\cos\theta \geqslant -\cos\frac{\pi}{p}$. С другой стороны,

$$\cos\theta - \cos\theta_r \leqslant \theta_r - \theta =$$

$$= \left(\theta_r - \frac{i}{m}\pi\right) + \left(\frac{i}{m}\pi - \theta\right) < \frac{\pi}{n} + \frac{\pi}{m} \leqslant \frac{2\pi}{m}.$$

Отсюда имеем

$$\frac{1}{n}\sum_{k=r}^{n} \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} > \frac{1}{\pi}\ln\left(\frac{1-\cos\frac{\pi}{p}}{2\pi}m\right).$$

До сих пор мы не уточняли выбора m. Будем считать его выбранным настолько большим, чтобы правая часть последнего неравенства оказалась больше, чем

$$p^2 + 4p.$$

Тогда, в силу (84), окажется, что

$$|L_{n_i}[R; x]| > (p^2+4p)|\cos n_i\theta| - 4. \tag{85}$$

Совершенно аналогичные рассуждения приведут к оценке

$$|L_{n_{i+1}}[R; x]| > (p^2+4p)|\cos (n_i+1)\theta| - 4. \tag{86}$$

Но так как $\frac{\pi}{p} \leqslant \theta \leqslant \pi - \frac{\pi}{p}$, то

$$\sin\theta \geqslant \sin\frac{\pi}{p} \geqslant \frac{2}{p}. \tag{87}$$

С другой стороны,

$$\sin\theta = \sin(n+1)\theta\cos n\theta - \sin n\theta\cos(n+1)\theta.$$

Поэтому

$$\sin\theta \leqslant |\cos n_i\theta| + |\cos(n_i+1)\theta|$$

и хоть одно из чисел n_i и n_i+1 (обозначим его просто через n) таково*), что

$$|\cos n\theta| \geqslant \frac{1}{p}.$$

Значит, в силу (85) и (86), или для $n = n_i$ или для $n = n_i + 1$ окажется

$$|L_n[R; x]| > p. \tag{88}$$

Таким образом полином $R(x)$ удовлетворяет условиям (81) и (82).

Замечание. Мы видим, что индекс $n = n(x)$, при котором выполняется (88), может быть выбран из совокупности чисел $n_1, n_1+1, n_2, \ldots, n_{m-1}, n_{m-1}+1$. Значит, $n > p$. Кроме того, обозначив через $N(p)$ число $n_{m-1}+1$ (важно, что m вполне определяется заданием p), мы будем иметь

$$n(x) \leqslant N(p) \qquad \left(-\cos\frac{\pi}{p} \leqslant x \leqslant \cos\frac{\pi}{p}\right).$$

Теорема. *Существует непрерывная на сегменте* $[-1, +1]$ *функция* $f(x)$, *для которой интерполяцион-*

---

*) Иначе невозможно (87).

ный процесс по узлам

$$x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

расходится во всех точках интервала $(-1, +1)$.

Доказательство проводится тем же «методом скользящего горба», что и теорема Фабера из § 1. Именно, положим

$$\lambda_n = \max\sum_{k=1}^{n}\left|\frac{T_n(x)}{T_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}\right| \quad (-1 \leqslant x \leqslant 1).$$

Тогда для любой функции $f(x)$, заданной на $[-1, +1]$, имеем

$$|L_n[f; x]| \leqslant \lambda_n \max|f(x)|.$$

Заметив это, построим полиномы $R_p(x)$, о которых шла речь в лемме 4, для $p = 3, 4, 5, \ldots$, и обозначим через $r(p)$ степень полинома $R_p(x)$, а через $n(x, p)$ то значение индекса n, при котором

$$|L_n[R; x]| > p \qquad \left(-\cos\frac{\pi}{p} \leqslant x \leqslant \cos\frac{\pi}{p}\right).$$

В силу предшествующего замечания, окажется

$$p \leqslant n(x, p) \leqslant N(p) \qquad \left(-\cos\frac{\pi}{p} \leqslant x \leqslant \cos\frac{\pi}{p}\right). \tag{89}$$

Определим числа $p_1, p_2, p_3, \ldots$ следующим образом:

$$p_1 = 3,$$

$$p_{k+1} > \max\{r(p_1), r(p_2), \ldots, r(p_k)\}, \tag{90}$$

$$p_{k+1} > p_k^2, \tag{91}$$

$$p_{k+1} > \max\{\lambda_{p_k}^2, \lambda_{p_k+1}^2, \ldots, \lambda_{N(p_k)}^2\}. \tag{92}$$

В таком случае функция

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty}\frac{R_{p_k}(x)}{\sqrt{p_k}} \tag{93}$$

требуемая.

В самом деле, ряд (93) мажорируется рядом

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{p_k}}, \tag{94}$$

сходящимся по признаку Даламбера, благодаря (91). Значит, $f(x)$ непрерывна.

Пусть $-1 < x_0 < 1$ и m настолько велико, что

$$-\cos\frac{\pi}{p_m} \leqslant x_0 \leqslant \cos\frac{\pi}{p_m}.$$

Тогда

$$f(x) = A(x) + \frac{R_{p_m}(x)}{\sqrt{p_m}} + B(x),$$

где

$$A(x) = \sum_{k=1}^{m-1} \frac{R_{p_k}(x)}{\sqrt{p_k}}, \quad B(x) = \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{R_{p_k}(x)}{\sqrt{p_k}}.$$

Пусть $n = n(x_0, p_m)$. Тогда

$$L_n[f; x_0] = L_n[A; x_0] + \frac{1}{\sqrt{p_m}} L_n[R_{p_m}; x_0] + L_n[B; x_0]. \tag{95}$$

Второй член правой части этого равенства по абсолютной величине больше $\sqrt{p_m}$. Далее, $A(x)$ есть полином степени $\leqslant \max\{r(p_1), r(p_2), \ldots, r(p_{m-1})\} < p_m$ и (благодаря (89))

$$L_n[A; x] = A(x),$$

так что при всех x из $[-1, +1]$

$$|L_n[A; x]| \leqslant S, \tag{96}$$

где через S обозначена сумма ряда (94). Наконец, при всех x из $[-1, +1]$

$$|L_n[B; x]| \leqslant \lambda_n \max|B(x)|,$$

откуда

$$|L_n[B; x]| \leqslant \lambda_n \sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{p_k}}.$$

Но в силу (91)

$$p_{m+2} > p_{m+1}^2, \quad p_{m+3} > p_{m+2}p_{m+1}, \quad \ldots, \quad p_{m+i+1} > p_{m+i}p_{m+1}, \ldots,$$

что легко подтвердить индукцией по i. Значит,

$$\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{2}{\sqrt{p_k}} < \frac{1}{\sqrt{p_{m+1}}}\left[2 + \frac{2}{\sqrt{p_{m+1}}} + \frac{2}{\sqrt{p_{m+2}}} + \ldots\right] < \frac{2+S}{\sqrt{p_{m+1}}},$$

откуда

$$|L_n[B; x]| \leqslant \frac{\lambda_n}{\sqrt{p_{m+1}}}(2+S)$$

и благодаря (92)

$$|L_n[B; x]| \leqslant 2+S.$$

Сопоставляя это с (95) и (96), находим

$$|L_n[f; x_0]| > \sqrt{p_m} - 2(1+S).$$

Устремив m к бесконечности, получаем *)

$$\lim L_n[f; x_0] = \infty. \tag{97}$$

Теорема доказана. Несколько усложнив конструкцию, легко получить и такую функцию, для которой процесс будет расходиться не только в интервале $(-1, +1)$, но и в сегменте $[-1, +1]$. Для этого достаточно прибавить к $f(x)$ непрерывную функцию $g(x)$, для которой интерполяционный процесс сходится в интервале $(-1, +1)$ и расходится в точках ± 1, но мы не будем заниматься построением такой функции.

Весьма сходным образом строится непрерывная, 2π-периодическая функция, для которой тригонометрический интерполяционный процесс по узлам

$$x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1} \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, 2n) \tag{98}$$

расходится во всех точках $[0, 2\pi]$. Мы отмечали аналогию между интерполяционным полиномом по узлам (98)

---

*) В соотношении (97) индекс $n = n(x_0, p_m)$ пробегает не весь натуральный ряд, а некоторую возрастающую последовательность натуральных значений.

для функции $f(x)$ и её частной суммой Фурье. Благодаря этой аналогии среди ряда специалистов до появления работ Грюнвальда и Марцинкевича было распространено мнение, что проблема построения непрерывной, 2π-периодической функции с всюду расходящимся интерполяционным (по узлам (98)) процессом, если и не равносильна, то очень тесно связана с проблемой построения непрерывной функции, имеющей всюду расходящийся ряд Фурье. Однако это оказалось не так. Мы уже отмечали в первой части, что вторая из указанных проблем и до сих пор не разрешена *).

*) А. Н. Колмогоровым [1] построена *суммируемая* функция с всюду расходящимся рядом Фурье.

ГЛАВА III.

СХОДИМОСТЬ ИНТЕРПОЛЯЦИОННЫХ ПРОЦЕССОВ.

§ 1. Роль функции $\lambda_n(x)$.

Рассмотрим, как и выше, матрицу узлов, расположенных на конечном сегменте $[a, b]$:

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)}, \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}, \\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot\ \cdot \end{array}\right\} \tag{99}$$

Пусть, как и выше,

$$\omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n} (x - x_k^{(n)}), \quad l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})},$$

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\, l_k^{(n)}(x)\,|, \qquad \lambda_n = \max_{a \leqslant x \leqslant b} |\lambda_n(x)|.$$

Как мы знаем, числа λ_n при любой матрице (99) стремятся к бесконечности. Выражаясь несколько вольно, можно сказать, что чем медленнее рост этих чисел, тем обширнее класс функций, для которых сходится интерполяционный процесс. Именно, имеет место

Теорема 1. *Пусть $f(x)$ — непрерывная на сегменте $[a, b]$ функция и E_n — её наилучшее приближение полиномами степени не выше n. Если*

$$\lim_{n \to \infty} \lambda_n(x_0) E_{n-1} = 0,$$

то интерполяционный полином $L_n[f; x]$, совпадающий с функцией $f(x)$ в узлах $x_k^{(n)}$ $(k=1, 2, \ldots, n)$, в точке x_0 стремится к $f(x_0)$ при возрастании n. Если же

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n E_{n-1} = 0,$$

*то**) *$L_n[f; x]$ стремится к $f(x)$ равномерно на $[a, b]$.*

В самом деле; пусть $P_{n-1}(x)$ есть полином, наименее отклоняющийся от $f(x)$ по сравнению со всеми полиномами из H_{n-1}. Так как $L_n[P_{n-1}; x] = P_{n-1}(x)$, то

$$|L_n[f; x] - f(x)| \leqslant |L_n[f; x] - L_n[P_{n-1}; x]| + |P_{n-1}(x) - f(x)|.$$

Но

$$L_n[f; x] - L_n[P_{n-1}; x] = L_n[f - P_{n-1}; x].$$

Отсюда, ввиду того для всякой функции $f(x)$

$$|L_n[f; x]| \leqslant \lambda_n(x) \max |f(x)|,$$

вытекает, что

$$|L_n[f; x] - f(x)| \leqslant [\lambda_n(x) + 1] E_{n-1}.$$

Остальное ясно.

Замечание. Доказанная теорема допускает следующее очевидное усиление: *если S есть произвольное множество, содержащееся в $[a, b]$, и μ_n есть точная верхняя граница $\lambda_n(x)$ на этом множестве, то условие*

$$\lim_{n\to\infty} \mu_n E_{n-1} = 0$$

достаточно для равномерной сходимости $L_n[f; x]$ к $f(x)$ на множестве S.

Покажем, как применяется теорема 1.

Теорема 2 (С. Н. Бернштейн [6]). *Пусть матрица* (99) *составлена из узлов Чебышева*

$$x_k = x_k^{(n)} = \cos \frac{2k-1}{2n} \pi.$$

*) По поводу необходимости условий теоремы см. С. М. Лозинский [4].

Тогда

$$\lambda_n \leqslant 8 + \frac{4}{\pi} \ln n. \tag{100}$$

В самом деле, здесь

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{T_n(x)}{x - x_k} \right| \sqrt{1 - x_k^2}, \tag{101}$$

причём $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Полагая

$$\theta = \arccos x, \quad \theta_k = \theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n}\pi,$$

имеем

$$\lambda_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} \right| \sin\theta_k.$$

Если θ совпадает с одной из точек θ_k, то $\lambda_n(x) = 1$ и доказывать нечего. Пусть же

$$\theta_m < \theta < \theta_{m+1}.$$

Тогда

$$\lambda_n(x) =$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m} \frac{|\cos n\theta|}{\cos\theta_k - \cos\theta} \sin\theta_k + \frac{1}{n} \sum_{k=m+1}^{n} \frac{|\cos n\theta|}{\cos\theta - \cos\theta_k} \sin\theta_k, \tag{102}$$

причём, если $0 \leqslant \theta < \theta_1$, то отсутствует первая, а если $\theta_n < \theta \leqslant \pi$, то вторая сумма. Обе суммы оцениваются одинаково. Мы займёмся для определённости первой из них (предполагая, стало быть, что $\theta_1 < \theta$). Обозначая эту сумму через σ, имеем

$$\sigma = \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{m-2} \frac{|\cos n\theta|}{\cos\theta_k - \cos\theta} \sin\theta_k + \frac{1}{n} \frac{|\cos n\theta|}{\cos\theta_{m-1} - \cos\theta} \sin\theta_{m-1} +$$
$$+ \frac{1}{n} \frac{|\cos n\theta|}{\cos\theta_m - \cos\theta} \sin\theta_m. \tag{103}$$

Если $m = 1$, то налицо только третье слагаемое правой части, если $m = 2$, то второе и третье, а если $m > 2$, то все три слагаемых.

Согласно лемме 2 из § 3 главы II второе и третье слагаемые правой части не превосходят 2. Значит,

$$\sigma \leqslant 4+\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k-\cos\theta}.$$

Но функция

$$\frac{\sin x}{\cos x-\cos\theta}$$

возрастает при $0\leqslant x<\theta$. Следовательно,

$$\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k-\cos\theta}\leqslant\frac{\sin x}{\cos x-\cos\theta}\qquad(\theta_k\leqslant x\leqslant\theta_{k+1}).$$

Отсюда

$$\frac{\pi}{n}\,\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k-\cos\theta}<\int_{\theta_k}^{\theta_{k+1}}\frac{\sin x\,dx}{\cos x-\cos\theta}$$

и, стало быть,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{m-2}\frac{\sin\theta_k}{\cos\theta_k-\cos\theta}<\frac{1}{\pi}\int_{\theta_1}^{\theta_{m-1}}\frac{\sin x\,dx}{\cos x-\cos\theta}.$$

Значит, и подавно

$$\sigma<4+\frac{1}{\pi}\int_{0}^{\theta_{m-1}}\frac{\sin x\,dx}{\cos x-\cos\theta}=4+\frac{1}{\pi}\ln\frac{1-\cos\theta}{\cos\theta_{m-1}-\cos\theta}.$$

Но

$$1-\cos\theta\leqslant 2,\qquad \cos\theta_{m-1}-\cos\theta>\cos\theta_{m-1}-\cos\theta_m.$$

Отсюда

$$\sigma<4-\frac{1}{\pi}\ln\sin\frac{\theta_{m-1}+\theta_m}{2}-\frac{1}{\pi}\ln\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Ввиду того, что

$$\frac{\pi}{2n}<\theta_{m-1}<\pi-\frac{\pi}{2n},\qquad \frac{\pi}{2n}<\theta_m\leqslant\pi-\frac{\pi}{2n},$$

ясно, что

$$\sin\frac{\theta_{m-1}+\theta_m}{2}>\sin\frac{\pi}{2n}.$$

Поэтому

$$\sigma < 4 - \frac{2}{\pi} \ln \sin \frac{\pi}{2n}$$

и, тем более $\left(\text{поскольку } \sin \frac{\pi}{2n} > \frac{1}{n}\right)$,

$$\sigma < 4 + \frac{2}{\pi} \ln n.$$

Та же оценка верна и для второй суммы, входящей в (102). Теорема доказана.

Следствие. *Если функция* $f(x)$ *на сегменте* $[-1, +1]$ *удовлетворяет условию Дини-Липшица*

$$\lim_{\delta \to 0} \omega(\delta) \ln \delta = 0, \tag{104}$$

то интерполяционный полином $L_n[f; x]$, *совпадающий с* $f(x)$ *в узлах Чебышева, равномерно на* $[-1, +1]$ *стремится к* $f(x)$.

В самом деле, для такой функции

$$\lim_{n \to \infty} \omega\left(\frac{1}{n-1}\right) \ln n = 0,$$

а по теореме Джексона $E_{n-1} \leqslant 12\omega\left(\frac{1}{n-1}\right)$.

Замечание. Теорема, аналогичная теореме 1, имеет место и для тригонометрического интерполирования, только функцию $f(x)$ нужно предполагать 2π-периодической, под E_n разуметь её наилучшее приближение тригонометрическими полиномами, а функцию $\lambda_n(x)$ определять формулой

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=0}^{2n} |t_k^{(n)}(x)|,$$

где фундаментальные полиномы $t_k^{(n)}(x)$ даются равенством (34). В случае равноотстоящих узлов

$$x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1} \quad (k = 0, 1, \ldots, 2n) \tag{105}$$

для функции $\lambda_n(x)$ верна оценка

$$\lambda_n(x) < A + B \ln n,$$

которая доказывается примерно так же, как и неравенство (100), а потому для 2π-периодических функций, удовлетворяющих условию (104), тригонометрический интерполяционный процесс по узлам (105) равномерно сходится на всей оси.

§ 2. Теоремы Грюнвальда—Турана.

Интересные результаты были получены в совместной работе Г. Грюнвальда и П. Турана [1] относительно матриц (99), составленных из корней полиномов какой-нибудь ортогональной системы.

Часть этих результатов мы излагаем в настоящем параграфе.

Условимся в следующих обозначениях: $\{\omega_n(x)\}$ есть ортогональная на сегменте $[a, b]$ по весу $p(x)$ система полиномов и

$$x_1^{(n)} < x_2^{(n)} < \ldots < x_n^{(n)} \tag{106}$$

суть корни полинома $\omega_n(x)$. Если $f(x)$ — какая-нибудь функция, заданная на $[a, b]$, то $L_n[f; x]$ есть её интерполяционный полином по узлам (106).

Лемма. *Если $i \neq k$, то фундаментальные полиномы*

$$l_i^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i^{(n)})(x - x_i^{(n)})}, \quad l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}$$

взаимно ортогональны на $[a, b]$ по весу $p(x)$.

В самом деле, частное

$$q(x) = \frac{\omega_n(x)}{(x - x_i^{(n)})(x - x_k^{(n)})},$$

будучи целым полиномом степени $n-2$, ортогонально на $[a, b]$ по весу $p(x)$ к полиному $\omega_n(x)$, а так как

$$l_i^{(n)}(x)\, l_k^{(n)}(x) = \frac{q(x)\,\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i^{(n)})\,\omega_n'(x_k^{(n)})},$$

то

$$\int_a^b p(x)\, l_i^{(n)}(x)\, l_k^{(n)}(x)\, dx = 0. \tag{107}$$

Следствие. *В тех же обозначениях*

$$\sum_{k=1}^{n} \int_a^b p(x)\,[l_k^{(n)}(x)]^2\,dx = \int_a^b p(x)\,dx. \tag{108}$$

Действительно, ещё в главе I было отмечено, что

$$\sum_{k=1}^{n} l_k^{(n)}(x) = 1.$$

Возвышая это равенство в квадрат, умножая на $p(x)$ и интегрируя, мы и получаем (108), потому что благодаря (107) интегралы от всех удвоенных произведений исчезают.

Теорема 1. *Пусть $a = -1$, $b = +1$. Если весовая функция $p(x)$ удовлетворяет условию*

$$p(x) \geqslant m > 0, \tag{109}$$

то

$$\lambda_n \leqslant An, \tag{110}$$

а при $-1 < x < 1$

$$\lambda_n(x) \leqslant \frac{B\sqrt{n}}{\sqrt{1-x^2}}. \tag{111}$$

Действительно, закрепим $x_0 \in [-1, +1]$, положим

$$\varepsilon_k = \operatorname{sign}\{l_k^{(n)}(x_0)\}$$

и введём в рассмотрение функцию

$$\psi(x) = \sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k l_k^{(n)}(x).$$

Это полином степени $n-1$, и потому

$$\psi(x) = \sum_{k=0}^{n-1} c_k \hat{X}_k(x),$$

где $\hat{X}_k(x)$ — нормированные полиномы Лежандра, а c_k — коэффициенты Фурье функции $\psi(x)$ в системе полиномов Лежандра. Если применить к написанной сумме неравенство Буняковского, то окажется

$$\psi^2(x) \leqslant \left[\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2\right] \left[\sum_{k=0}^{n-1} \hat{X}_k^2(x)\right]. \tag{112}$$

Пользуясь сначала формулой Парсеваля, а затем неравенством (109), находим

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 = \int_{-1}^{+1} \psi^2(x)\,dx \leqslant \frac{1}{m}\int_{-1}^{+1} p(x)\psi^2(x)\,dx.$$

Но так как числа ε_k могут принимать лишь значения -1, 0 и $+1$, то в силу (107) и (108),

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\psi^2(x)\,dx = \int_{-1}^{+1} p(x)\left[\sum_{k=1}^{n} \varepsilon_k l_k^{(n)}(x)\right]^2 dx \leqslant \int_{-1}^{+1} p(x)\,dx.$$

Таким образом

$$\sum_{k=0}^{n-1} c_k^2 \leqslant M^2 = \frac{1}{m}\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx. \tag{113}$$

С другой стороны, в главе V второй части было показано (см. формулы (126), (136) и (140)), что

$$\left.\begin{array}{c} |\hat{X}_k(x)| \leqslant \sqrt{\dfrac{2k+1}{2}} \\ (-1 \leqslant x \leqslant 1,\ k=0, 1, 2, \ldots), \\ |\hat{X}_k(x)| \leqslant \sqrt{\dfrac{(2k+1)\pi}{4k(1-x^2)}} \\ (-1 < x < 1,\ k=1, 2, 3, \ldots). \end{array}\right\} \tag{114}$$

Если положить

$$\frac{3\pi}{4} = C^2,$$

то второе из этих неравенств можно усилить:

$$|\hat{X}_k(x)| < \frac{C}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 < x < 1). \tag{115}$$

В таком виде оно справедливо и для $k=0$. Из (114) вытекает, что при $-1\leqslant x\leqslant 1$

$$\sum_{k=0}^{n-1}\hat{X}_k^2(x)\leqslant\frac{n^2}{2},$$

откуда в связи с (112) и (113) следует оценка

$$|\psi(x)|\leqslant\frac{Mn}{\sqrt{2}},$$

а так как $\psi(x_0)=\lambda_n(x_0)$, то неравенство (110) доказано. Неравенство (111) аналогичным образом вытекает из (112), (113) и (115).

Из сопоставления этой теоремы с результатами § 1 и теоремами Джексона из первой части вытекает

Теорема 2. *В условиях теоремы 1 соотношение*

$$\lim_{n\to\infty}L_n[f;x]=f(x) \tag{116}$$

выполняется равномерно на $[-1,+1]$ для всякой функции $f(x)$, имеющей непрерывную производную $f'(x)$. Если $f(x)\in\mathrm{Lip}\,\alpha$ при $\alpha>\frac{1}{2}$, то соотношение (116) выполняется во всех точках интервала $(-1,+1)$ и притом равномерно на всяком сегменте $[a,b]$, содержащемся в $(-1,+1)$.

Условия теорем 1 и 2 выполняются, в частности, для веса Якоби $p(x)=(1-x)^\alpha(1+x)^\beta$, если $\alpha\leqslant 0$, $\beta\leqslant 0$. Однако (мы не будем этого доказывать) при интерполировании по корням полиномов Якоби интерполяционный полином сходится к функции $f(x)$ равномерно в каждом сегменте $[a,b]\subset(-1,+1)$ при любых α и β, если только $f(x)$ удовлетворяет условию Дини-Липшица *) (104).

Теорема 3. *Если $a=-1$, $b=+1$ и весовая функция $p(x)$ удовлетворяет условию*

$$p(x)\geqslant\frac{m}{\sqrt{1-x^2}}>0, \tag{117}$$

*) Сеге [1], стр. 328.

то

$$\lambda_n \leqslant A\sqrt{n}.$$

Доказательство последней оценки ничем не отличается от доказательства теоремы 1, только функцию $\psi(x)$ нужно разлагать не по полиномам Лежандра, а по полиномам Чебышева и использовать факт равномерной ограниченности этих последних полиномов на $[-1, +1]$.

Опираясь на теорему 3, легко показать, что *при условии* (117) *равенство* (116) *имеет место равномерно на* $[-1, +1]$ *для любой* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *при* $\alpha > \frac{1}{2}$.

В заключение отметим, что (117) выполняется для веса Якоби $(1-x)^{\alpha}(1+x)^{\beta}$ при $\alpha \leqslant -\frac{1}{2}$, $\beta \leqslant -\frac{1}{2}$. Однако, как указано выше, этот факт сравнительно мало интересен, ибо для интерполирования по корням полиномов Якоби сходимость процесса имеет место для более широкого класса функций.

§ 3. Сходимость в среднем.

Теорема Фабера из предыдущей главы устанавливает, что *равномерной* сходимости интерполяционного процесса для любой непрерывной функции нельзя обеспечить никаким выбором узлов. По отношению к сходимости в среднем положение вещей оказывается гораздо более благоприятным. Именно, в предположениях и обозначениях предыдущего параграфа справедлива.

Теорема. *Для любой непрерывной функции* $f(x)$ *имеет место равенство**)

$$\lim_{n\to\infty} \int_a^b p(x)\{L_n[f; x] - f(x)\}^2\,dx = 0. \tag{118}$$

*) Этот результат (и притом в более общем виде) установлен в работе Эрдеша и Турана [1]. Приведённое в тексте доказательство заимствовано из статьи Р. О. Кузьмина и И. П. Натансона [1].

Действительно, пусть E_n есть наилучшее приближение $f(x)$ полиномами из H_n и $P_n(x)$ самый полином наилучшего приближения. Тогда

$$|P_{n-1}(x) - f(x)| \leqslant E_{n-1} \tag{119}$$

и, стало быть,

$$\int_a^b p(x)\,[P_{n-1}(x) - f(x)]^2\,dx \leqslant E_{n-1}^2 \int_a^b p(x)\,dx. \tag{120}$$

С другой стороны, $P_{n-1}(x) = L_n[P_{n-1}; x]$. Поэтому

$$L_n[f; x] - P_{n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^{(n)}) - P_{n-1}(x_k^{(n)})]\, l_k^{(n)}(x).$$

Отсюда на основании (107) вытекает

$$\int_a^b p(x)\,\{L_n[f; x] - P_{n-1}(x)\}^2\,dx =$$

$$= \sum_{k=1}^{n} [f(x_k^{(n)}) - P_{n-1}(x_k^{(n)})]^2 \int_a p(x)\,[l_k^{(n)}(x)]^2\,dx.$$

В силу (119) и (108), последнее неравенство можно усилить:

$$\int_a^b p(x)\,\{L_n[f; x] - P_{n-1}(x)\}^2\,dx \leqslant E_{n-1}^2 \int_a^b p(x)\,dx. \tag{121}$$

Но, как известно, $(A+B)^2 \leqslant 2(A^2+B^2)$. Поэтому из (120) и (121) вытекает, что

$$\int_a^b p(x)\,\{L_n[f; x] - f(x)\}^2\,dx \leqslant 4E_{n-1}^2 \int_a^b p(x)\,dx.$$

Теорема доказана.

Следствие. *Если весовая функция удовлетворяет условию*

$$p(x) \geqslant m > 0,$$

то

$$\lim_{n\to\infty}\int_a^b \{L_n[f;x]-f(x)\}^2\,dx=0. \tag{122}$$

Интересно спросить, не будет ли справедливым соотношение (122) без дополнительных условий на вес. Э. Фельдгейм [1] указал, что это не так, и отметил без доказательства, что если

$$p(x)=\sqrt{1-x^2},$$

то существуют непрерывные функции, для которых (122) не выполняется. В упомянутой работе Р. О. Кузьмина и И. П. Натансона построен пример такой функции *).

§ 4. Интерполяционный процесс Л. Фейера.

До сих пор мы занимались вопросами сходимости интерполяционных процессов Лагранжа. Для процессов Эрмита, т. е. для интерполирования с кратными узлами, Л. Фейером был установлен целый ряд результатов положительного характера. Простейший из них мы приведём в этом параграфе.

Теорема (Л. Фейер [2]). *Пусть*

$$x_k=x_k^{(n)}=\cos\frac{2k-1}{2n}\pi \quad (k=1, 2, \ldots, n)$$

суть узлы Чебышева, а $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на $[-1,+1]$. Если $H_{2n-1}(x)$ есть полином степени не выше $2n-1$, удовлетворяющий условиям

$$H_{2n-1}(x_k)=f(x_k),\ H'_{2n-1}(x_k)=0, \tag{123}$$

то равномерно на $[-1,+1]$ будет

$$\lim_{n\to\infty}H_{2n-1}(x)=f(x). \tag{124}$$

Действительно, для рассматриваемых узлов

$$\omega(x)=T_n(x)=\cos(n\arccos x).$$

*) По поводу вопросов, затронутых в этом параграфе, см. С. М. Лозинский [1, 2].

Так как

$$T'_n(x) = n\frac{\sin(n\arccos x)}{\sqrt{1-x^2}},$$

$$T''_n(x) = n\frac{x\sin(n\arccos x) - n\sqrt{1-x^2}\cos(\arccos x)}{(1-x^2)^{3/2}},$$

то

$$\omega'(x_k) = \frac{(-1)^{k-1}n}{\sqrt{1-x_k^2}}, \quad \omega''(x_k) = \frac{(-1)^{k-1}n}{(1-x_k^2)^{3/2}}x_k,$$

$$l_k(x) = \frac{(-1)^{k-1}T_n(x)}{n(x-x_k)}\sqrt{1-x_k^2}.$$

Поэтому для узлов Чебышева общие формулы (31) и (30) принимают вид

$$\left.\begin{aligned} A_k^{(n)}(x) &= \left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right]^2(1-xx_k);\\ B_k^{(n)}(x) &= \left[\frac{T_n(x)}{n(x-x_k)}\right]^2(1-x_k^2)(x-x_k), \end{aligned}\right\} \qquad (125)$$

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k A_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k B_k^{(n)}(x). \qquad (126)$$

Ввиду того что $-1 < x_k < +1$, ясно, что

$$A_k^{(n)}(x) \geqslant 0 \quad (-1 \leqslant x \leqslant +1). \qquad (127)$$

Как мы увидим, это неравенство играет весьма важную роль.

Если $P(x)$ есть произвольный полином степени не выше $2n-1$, то он совпадает со своим интерполяционным полиномом Эрмита по узлам $x_k^{(n)}$, и потому

$$P(x) = \sum_{k=1}^{n} P(x_k)A_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} P'_k(x_k)B_k^{(n)}(x). \qquad (128)$$

В частности,

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)}(x) = 1. \qquad (129)$$

Полином $H_{2n-1}(x)$, удовлетворяющий условиям (123), согласно (126) имеет вид

$$H_{2n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)A_k^{(n)}(x). \tag{130}$$

Отсюда, из (129) и из (127) вытекает

$$|H_{2n-1}(x)-f(x)|\leqslant \sum_{k=1}^{n}|f(x_k)-f(x)|\,A_k^{(n)}(x). \tag{131}$$

Возьмём $\varepsilon>0$ и подберём такое $\delta>0$, чтобы неравенство $|x''-x'|<\delta$ влекло неравенство

$$|f(x'')-f(x')|<\varepsilon.$$

Сделав это, разобьем (при закреплённом x из $[-1,+1]$) множество чисел $1, 2, \ldots, n$ на две группы I и II,—отнеся в I те k, для которых $|x_k-x|<\delta$, а в II—остальные числа. Очевидно (благодаря (127) и (129)),

$$\sum_{k\in \mathrm{I}}|f(x_k)-f(x)|\,A_k^{(n)}(x)\leqslant \varepsilon\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}(x)=\varepsilon. \tag{132}$$

С другой стороны, если $k\in\mathrm{II}$, то из (125) следует, что

$$A_k^{(n)}(x)\leqslant\frac{2}{n^2\delta^2}, \tag{133}$$

ибо $0<1-xx_k<2$ и $|T_n(x)|\leqslant 1$. Таким образом, обозначая через M наибольшее значение $|f(x)|$, имеем

$$\sum_{k\in \mathrm{II}}|f(x_k)-f(x)|\,A_k^{(n)}(x)\leqslant\frac{4M}{n\delta^2}, \tag{134}$$

ибо число слагаемых в последней сумме не больше n. Сопоставляя (131), (132) и (134), получаем

$$|H_{2n-1}(x)-f(x)|\leqslant\varepsilon+\frac{4M}{n\delta^2},$$

и при достаточно больших n

$$|H_{2n-1}(x)-f(x)|<2\varepsilon.$$

Теорема доказана.

§ 5. Обобщение предыдущего результата.

Вышеизложенная теорема была найдена Фейером в 1916 году. В 1930 году Фейер снова вернулся к тому же вопросу и получил более общие результаты. При их изложении мы сохраняем все обозначения предыдущего параграфа.

Из (125) вытекает, что

$$B_k^{(n)}(x) = \frac{x - x_k}{1 - xx_k}(1 - x_k^2) A_k^{(n)}(x). \tag{135}$$

Но дробь

$$\varphi(x) = \frac{x - x_k}{1 - xx_k}$$

(её знаменатель на сегменте $[-1, +1]$ строго положителен) при $|x| \leqslant 1$ удовлетворяет неравенству $|\varphi(x)| \leqslant 1$. В самом деле,

$$\varphi'(x) = \frac{1 - x_k^2}{(1 - xx_k)^2} > 0,$$

т. е. $\varphi(x)$ — возрастающая функция. Остаётся заметить, что $\varphi(1) = 1$ и $\varphi(-1) = -1$. Таким образом из (135) и вытекает

$$|B_k^{(n)}(x)| \leqslant A_k^{(n)}(x) \qquad (-1 \leqslant x \leqslant +1)$$

и потому (см. (129))

$$\sum_{k=1}^{n} |B_k^{(n)}(x)| \leqslant 1 \qquad (-1 \leqslant x \leqslant +1). \tag{136}$$

Из сказанного вытекает

Теорема 1 (Л. Фейер [3]). *Если полином $P(x)$ степени не выше $2n - 1$ в узлах Чебышева*

$$x_k = x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$$

удовлетворяет условиям

$$|P(x_k)| \leqslant A, \quad |P'(x_k)| \leqslant B, \tag{137}$$

то для всех x из $[-1,+1]$

$$|P(x)|\leqslant A+B. \tag{138}$$

В самом деле, достаточно записать $P(x)$ в форме (128), чтобы (опираясь на (127), (129) и (136)) убедиться в справедливости (138).

Оценка (138) точная, ибо для линейной функции в ней достигается знак равенства (при $n=1$).

Наряду с (136) справедлива оценка

$$\sum_{k=1}^{n}|B_k^{(n)}(x)|\leqslant\frac{1}{n}\left(8+\frac{4}{\pi}\ln n\right)\qquad(-1\leqslant x\leqslant 1). \tag{139}$$

В самом деле, из (125) благодаря неравенству $|T_n(x)|\leqslant 1$ вытекает

$$|B_k^{(n)}(x)|\leqslant\frac{1}{n^2}\left|\frac{T_n(x)}{x-x_k}\right|(1-x_k^2).$$

Отсюда и из (100) получается оценка

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{|B_k^{(n)}(x)|}{\sqrt{1-x_k^2}}\leqslant\frac{1}{n}\left(8+\frac{4}{\pi}\ln n\right), \tag{140}$$

даже более сильная, чем (139).

Из (139) вытекает

Теорема 2 (Л. Фейер [3]). *Если полином $P(x)$ степени не выше $2n-1$ удовлетворяет условиям* (137), *то для всех x из $[-1,+1]$*

$$|P(x)|\leqslant A+\frac{B}{n}\left(8+\frac{4}{\pi}\ln n\right). \tag{141}$$

Более того, благодаря (140), неравенство (141) следует из условий

$$|P(x_k)|\leqslant A,\quad |P'(x_k)|\leqslant\frac{B}{\sqrt{1-x_k^2}},$$

более общих, чем (137).

Оценки (139) и (140) позволяют следующим образом усилить теорему из § 4:

Теорема 3 (Л. Фейер [3]). *Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на $[-1, +1]$. Если*

$$x_k = x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi$$

и полином $H_{2n-1}(x)$ удовлетворяет условиям

$$H_{2n-1}(x_k) = f(x_k), \quad |H'_{2n-1}(x_k)| < \frac{\varepsilon_n}{\sqrt{1-x_k^2}}\,\frac{n}{\ln n}, \tag{142}$$

где ε_n стремится к нулю с возрастанием n, то равномерно на $[-1, +1]$

$$\lim_{n\to\infty} H_{2n-1}(x) = f(x).$$

Действительно, согласно (128) имеем

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,A_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} H'_{2n-1}(x_k)\,B_k^{(n)}(x).$$

Первая из этих сумм с возрастанием n равномерно стремится к $f(x)$ по теореме предыдущего параграфа, а вторая (тоже равномерно) стремится к нулю благодаря второму из условий (142) и неравенству (140). Теорема доказана.

§ 6. Нормальные матрицы.

Вернёмся к матрице (99), попрежнему предполагая все узлы $x_k = x_k^{(n)}$ содержащимися в конечном сегменте $[a, b]$. Если сохранить все обозначения § 1 этой главы, то эрмитова интерполяционная формула (30) примет вид

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} y_k\,A_k^{(n)}(x) + \sum_{k=1}^{n} y'_k\,B_k^{(n)}(x),$$

где

$$A_k^{(n)}(x) = \left[1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k)\right] l_k^2(x),$$

$$B_k^{(n)}(x) = (x - x_k)\,l_k^2(x),$$

$$l_k(x) = l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x - x_k)}, \quad \omega(x) = \omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k).$$

Остановим своё внимание на линейных функциях

$$v_k(x) = v_k^{(n)}(x) = 1 - \frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)}(x - x_k), \tag{143}$$

входящих в выражение $A_k^{(n)}(x)$.

Определение. Если при всех x из $[a, b]$ и при всех k и n ($n = 1, 2, 3, \ldots; k = 1, 2, \ldots, n$) оказывается

$$v_k^{(n)}(x) \geqslant 0,$$

то матрица (99) называется *нормальной*. Она называется *строго нормальной* (или ρ-нормальной), если при тех же условиях

$$v_k^{(n)}(x) \geqslant \rho > 0.$$

Эти понятия были введены Фейером [4], показавшим их важную роль в теории интерполирования (и притом не только эрмитова, но и лагранжева).

Здесь мы излагаем некоторые результаты Фейера о нормальных матрицах. Самое существование подобных матриц обнаруживается на следующих примерах (также принадлежащих Фейеру).

Пример 1. *Если узлы $x_k = x_k^{(n)}$ суть корни полинома Якоби $J_n^{(\alpha, \beta)}(x)$, то матрица* (99) *нормальна при $\alpha \leqslant 0$, и $\beta \leqslant 0$ и строго нормальна при $\alpha < 0$, $\beta < 0$.*

Здесь основным сегментом $[a, b]$ является сегмент $[-1, +1]$. Поэтому для доказательства высказанного утверждения достаточно рассмотреть величины $v_k(1)$ и $v_k(-1)$. Во второй части (формула (175)) было показано, что полином Якоби $\omega(x) = J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1 - x^2)\,\omega''(x) + [\beta - \alpha - (\alpha + \beta + 2)\,x]\,\omega'(x) + \\ + n(\alpha + \beta + n + 1)\,\omega(x) = 0.$$

Так как x_k есть корень $\omega(x)$, то

$$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = \frac{(\alpha + \beta + 2)\,x_k - \beta + \alpha}{1 - x_k^2},$$

Значит,

$$v_k(x) = 1 - \frac{(\alpha+\beta+2)x_k - \beta + \alpha}{1 - x_k^2}(x - x_k).$$

Отсюда

$$v_k(1) = -\alpha + (1+\beta)\frac{1-x_k}{1+x_k},$$

и, стало быть,

$$v_k(1) > -\alpha,$$

ибо $-1 < x_k < +1$ и $\beta > -1$. Аналогичным образом

$$v_k(-1) > -\beta.$$

Поэтому при $-1 \leqslant x \leqslant 1$

$$v_k(x) > \rho = \min\{-\alpha, -\beta\}.$$

В частности, матрица корней полиномов Лежандра нормальна, а матрица корней полиномов Чебышева $\frac{1}{2}$-нормальна.

Пример 2. *Матрица, n-я строка которой состоит из корней полинома*

$$\omega(x) = \omega_n(x) = \int_{-1}^{x} X_{n-1}(t)\,dt$$

(*где* $X_{n-1}(t)$ — *полином Лежандра*), *1-нормальна* *).

В пояснение заметим, что $\omega_1(x) = x + 1$, так что $x_1^{(1)} = -1$.

Если же $n \geqslant 2$, то полином $\omega_n(x)$ можно записать в форме

$$\omega_n(x) = \frac{1}{n(n-1)}(x^2 - 1)X'_{n-1}(x). \tag{144}$$

Действительно, $X_{n-1}(t)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-t^2)X''_{n-1}(t) - 2tX'_{n-1}(t) + n(n-1)X_{n-1}(t) = 0, \tag{145}$$

откуда

$$\frac{d}{dt}[(1-t^2)X'_{n-1}(t)] + n(n-1)X_{n-1}(t) = 0.$$

*) Здесь также речь идёт о сегменте $[-1, +1]$.

Интегрируя это равенство по промежутку $[-1, x]$, мы и получим (144). Из (144) вытекает, что $\omega_n(x)$ имеет n различных корней $x_k = x_k^{(n)}$, причём

$$x_1^{(n)} = -1, \quad x_n^{(n)} = +1,$$

$$-1 < x_k^{(n)} < +1 \quad (k = 2, 3 \ldots, n-1).$$

Из определения $\omega(x)$ следует, что при $n \geqslant 2$ *)

$$\frac{\omega''(x_k)}{\omega'(x_k)} = \frac{X'_{n-1}(x_k)}{X_{n-1}(x_k)}.$$

Если $1 < k < n$, то x_k есть корень $X'_{n-1}(t)$ и потому

$$v_k(x) = 1.$$

Если же $k = 1$, то (как это видно из (145))

$$\frac{X'_{n-1}(-1)}{X_{n-1}(-1)} = -\frac{n(n-1)}{2}$$

и, стало быть,

$$v_1(x) = 1 + \frac{n(n-1)}{2}(x+1) \geqslant 1.$$

Аналогичным образом

$$v_n(x) = 1 - \frac{n(n-1)}{2}(x-1) \geqslant 1.$$

Лемма 1. *Если матрица нормальна и* $0 < h < \frac{b-a}{2}$, *то в сегменте* $[a+h, b-h]$

$$v_k(x) \geqslant \frac{h}{b-a}. \tag{146}$$

В самом деле, $v_k(x)$ есть линейная функция и $v_k(x_k) = 1$. Если $v_k(x)$ есть величина постоянная, то оценка (146) тривиальна. Если $v_k(x)$ — убывающая функция, то

$$v_k(x) \geqslant v_k(b-h) \qquad (x \leqslant b-h).$$

*) Случай $n = 1$ вообще можно не рассматривать, ибо для любой матрицы $\omega_1''(x) = 0$ и $v_1^{(1)}(x) = 1$.

С другой стороны*)

$$\frac{v_k(x_k)-v_k(b)}{x_k-b}=\frac{v_k(b-h)-v_k(b)}{-h},$$

откуда

$$v_k(b-h)=v_k(b)+\frac{h}{b-x_k}[1-v_k(b)]\geqslant$$

$$\geqslant v_k(b)+\frac{h}{b-a}[1-v_k(b)]\geqslant\frac{h}{b-a}.$$

Аналогично проверяется (146) для того случая, когда $v_k(x)$ есть функция возрастающая.

Лемма 2. *Если матрица нормальна, то при* $a+h\leqslant x\leqslant b-h$

$$\lambda_n(x)\leqslant\sqrt{\frac{b-a}{h}}\sqrt{n}. \tag{147}$$

Если же матрица ρ*-нормальна, то*

$$\lambda_n\leqslant\frac{1}{\sqrt{\rho}}\sqrt{n}. \tag{148}$$

В самом деле,

$$\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}(x)=1. \tag{149}$$

Это означает, что

$$\sum_{k=1}^{n}v_k(x)\,l_k^2(x)=1.$$

Отсюда и из леммы 1 следует, что

$$\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)\leqslant\frac{b-a}{h}\qquad(a+h\leqslant x\leqslant b-h). \tag{150}$$

Но, в силу неравенства Буняковского,

$$\lambda_n(x)=\sum_{k=1}^{n}|l_k(x)|\leqslant\sqrt{n}\sqrt{\sum_{k=1}^{n}l_k^2(x)},$$

*) Приращение линейной функции пропорционально приращению аргумента.

чем и доказано (147). Аналогично устанавливается (148). Из доказанной леммы непосредственно вытекает

Теорема 1. *Если* $f(x) \in \mathrm{Lip}\,\alpha$ *при* $\alpha > \frac{1}{2}$, *то при интерполировании по узлам нормальной матрицы интерполяционный полином Лагранжа* $L_n(x)$ *сходится к* $f(x)$ *всюду в интервале* (a, b) *и притом равномерно в каждом сегменте* $[a+h,\ b-h]$. *Если же матрица строго нормальна, то равномерная сходимость* $L_n(x)$ *к* $f(x)$ *имеет место на всём* $[a, b]$.

Если, в частности, узлы интерполирования суть корни полиномов Якоби $J_n^{(\alpha,\beta)}(x)$ $(\alpha \leqslant 0,\ \beta \leqslant 0)$, то получаются результаты того же характера, что и в § 2.

В заключение приведём один результат, относящийся к теории эрмитова интерполирования.

Теорема 2. *Пусть* $f(x)$ *задана на* $[a, b]$ *и имеет непрерывную производную* $f'(x)$. *Если матрица узлов* $x_k = x_k^{(n)}$ *нормальна и* $H_{2n-1}(x)$ *есть эрмитов интерполяционный полином, удовлетворяющий условиям*

$$H_{2n-1}(x_k) = f(x_k), \quad H'_{2n-1}(x_k) = f'(x_k),$$

то всюду на (a, b)

$$\lim_{n\to\infty} H_{2n-1}(x) = f(x), \tag{151}$$

причём это соотношение выполняется равномерно на всяком сегменте $[a+h,\ b-h]$. *Если же матрица строго нормальна, то* (151) *имеет место равномерно на* $[a, b]$.

Действительно, пусть E'_n есть наилучшее приближение производной $f'(x)$ полиномами степени не выше n и пусть $P'_n(x)$ — самый полином наилучшего приближения. Тогда

$$|P'_n(x) - f'(x)| \leqslant E'_n. \tag{152}$$

Положим

$$P_n(x) = f(a) + \int_a^x P'_n(t)\,dt.$$

Очевидно,

$$|P_n(x) - f(x)| \leqslant (b-a) E'_n. \tag{153}$$

Так как $P_{2n-2}(x)$—полином степени не выше $2n-1$, то

$$P_{2n-2}(x)=\sum_{k=1}^{n} P_{2n-2}(x_k)\,A_k^{(n)}(x)+\sum_{k=1}^{n} P'_{2n-2}(x_k)\,B_k^{(n)}(x).$$

С другой стороны,

$$H_{2n-1}(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,A_k^{(n)}(x)+\sum_{k=1}^{n} f'(x_k)\,B_k^{(n)}(x).$$

Если принять во внимание, что $A_k^{(n)}(x)\geqslant 0$ (ибо матрица нормальна) и соотношение (149), то из (152) и (153) станет ясно, что

$$|H_{2n-1}(x)-P_{2n-2}(x)|\leqslant E'_{2n-2}\left[b-a+\sum_{k=1}^{n}|B_k^{(n)}(x)|\right].$$

Но $B_k^{(n)}(x)=(x-x_k)\,l_k^2(x)$ и $|x-x_k|\leqslant b-a$. Значит, (см. (150)):

$$\sum_{k=1}^{n}|B_k^{(n)}(x)|\leqslant (b-a)\sum_{k=1}^{n} l_k^2(x)\leqslant \frac{(b-a)^2}{h}.$$

Таким образом

$$|H_{2n-1}(x)-P_{2n-2}(x)|\leqslant (b-a)\left(1+\frac{b-a}{h}\right)E'_{2n-2}$$

и, тем более,

$$|H_{2n-1}(x)-f(x)|\leqslant (b-a)\left(2+\frac{b-a}{h}\right)E'_{2n-2},$$

откуда и следует первая часть теоремы. Вторая доказывается аналогично, ибо для ρ-нормальной матрицы

$$\sum_{k=1}^{n}|B_k^{(n)}(x)|\leqslant\frac{b-a}{\rho}.$$

Дальнейшие подробности о нормальных матрицах читатель найдёт в статьях Д. Л. Бермана [1] и Г. Грюнвальда [2].

ГЛАВА IV.

НЕКОТОРЫЕ СХОДЯЩИЕСЯ ПРОЦЕССЫ, СВЯЗАННЫЕ С ИНТЕРПОЛИРОВАНИЕМ.

§ 1. Первый процесс С. Н. Бернштейна.

Как мы видели в главе II, интерполяционные полиномы не представляют собой аппарата, дающего равномерное приближение для любой непрерывной функции. В этом отношении они подобны частным суммам Фурье. Но ещё в первой части мы видели, что, исходя из частных сумм Фурье непрерывной функции, можно получить и такие тригонометрические полиномы, которые доставляют сколь угодно хорошее равномерное приближение этой функции. Таковы, например, суммы Фейера или Валле-Пуссена и т. п. Возникает естественная мысль построить такие сходящиеся процессы, исходя из интерполяционных полиномов. Эта мысль с большим успехом была в различных направлениях проведена С. Н. Бернштейном, указавшим целый ряд подобных сходящихся процессов *). Особенно просто строятся эти процессы, исходя из тригонометрических интерполяционных полиномов по равноотстоящим узлам

$$x_k = x_k^{(n)} = \frac{2k\pi}{2n+1} \qquad (k = 0, 1, \ldots, 2n), \qquad (154)$$

ибо (как уже отмечалось) сами эти полиномы весьма аналогичны частным суммам Фурье.

В этом параграфе мы приведём процесс С. Н. Бернштейна, аналогичный процессу Чезаро—Фейера.

*) См. также И. П. Натансон [6].

Пусть

$$T_n(x) = A^{(n)} + \sum_{m=1}^{n} \left(a_m^{(n)} \cos mx + b_m^{(n)} \sin mx\right)$$

есть тригонометрический полином, который в узлах (154) совпадает с некоторой функцией $f(x)$ из $C_{2\pi}$. В § 5 главы I было установлено, что

$$\left.\begin{aligned} A^{(n)} &= \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k), \\ a_m^{(n)} &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \cos mx_k, \\ b_m^{(n)} &= \frac{2}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \sin mx_k. \end{aligned}\right\} \qquad (155)$$

Положим $T_{n,0}(x) = A^{(n)}$ и пусть

$$T_{n,p}(x) = A^{(n)} + \sum_{m=1}^{p} \left(a_m^{(n)} \cos mx + b_m^{(n)} \sin mx\right) \qquad (1 \leqslant p \leqslant n).$$

Подставляя сюда выражения коэффициентов $A^{(n)}$, $a_m^{(n)}$, $b_m^{(n)}$, находим

$$T_{n,p}(x) = \\ = \frac{1}{2n+1} \left\{ \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) + 2 \sum_{m=1}^{p} \left[\sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \cos m(x - x_k) \right] \right\}.$$

Отсюда

$$T_{n,p}(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{p} \cos m(x - x_k) \right].$$

Опираясь на формулу (41), получим

$$T_{n,p}(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \frac{\sin \frac{2p+1}{2}(x - x_k)}{\sin \frac{x - x_k}{2}}. \qquad (156)$$

Это представление $T_{n,p}(x)$ пригодно и для $p = 0$.

Положим теперь

$$U_q^{(n)}(x)=\frac{T_{n,0}(x)+T_{n,1}(x)+\ldots+T_{n,q}(x)}{q+1}.$$

Пользуясь формулой (156), имеем

$$U_q^{(n)}(x)=$$
$$=\frac{1}{(2n+1)(q+1)}\sum_{k=0}^{2n}\frac{f(x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\left[\sum_{p=0}^{q}\sin\frac{2p+1}{2}(x-x_k)\right].$$

Но ещё в первой части (формула (194)) было показано, что

$$\sum_{p=0}^{q}\sin\frac{2p+1}{2}\,\alpha=\frac{\sin^2\frac{q+1}{2}\alpha}{\sin\frac{\alpha}{2}}.$$

Поэтому

$$U_q^{(n)}(x)=\frac{1}{(2n+1)(q+1)}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)\left[\frac{\sin\frac{q+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right]^2. \tag{157}$$

Теорема (С. Н. Бернштейн [9]). *Если n и q $(q\leqslant n)$ неограниченно возрастают, то равномерно на всей оси*

$$\lim U_q^{(n)}(x)=f(x).$$

Действительно, рассмотрим, какой вид примет $U_q^{(n)}(x)$, если $f(x)\equiv 1$. Прежде всего согласно (157)

$$U_q^{(n)}(x)=\frac{1}{(2n+1)(q+1)}\sum_{k=0}^{2n}\left[\frac{\sin\frac{q+1}{2}(x-x_k)}{\sin\frac{x-x_k}{2}}\right]^2. \tag{158}$$

С другой стороны, для $f(x)\equiv 1$ имеем

$$A^{(n)}=1,$$

$$a_m^{(n)}=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\cos mx_k,\quad b_m^{(n)}=\frac{2}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\sin mx_k.$$

Покажем, что при $1 \leqslant m \leqslant n$

$$\sum_{k=0}^{2n} \cos mx_k = \sum_{k=0}^{2n} \sin mx_k = 0. \tag{159}$$

Обе эти суммы суть вещественная и мнимая компоненты суммы

$$\sum_{k=0}^{2n} e^{imx_k}.$$

Но так как узлы x_k образуют арифметическую прогрессию, то

$$\sum_{k=0}^{2n} e^{imx_k} = \frac{1 - e^{i2m\pi}}{1 - e^{i\frac{2m\pi}{2n+1}}} = 0,$$

откуда и следует (159).

Таким образом $a_m^{(n)} = b_m^{(n)} = 0$. Значит,

$$T_{n,p}(x) = A^{(n)} = 1 \qquad (p = 0, 1, \ldots, n),$$

и потому для $f(x) \equiv 1$ оказывается

$$U_q^{(n)}(x) = 1.$$

Сопоставляя это с (158), получаем тождество

$$1 = \frac{1}{(2n+1)(q+1)} \sum_{k=0}^{2n} \left[\frac{\sin \frac{q+1}{2}(x - x_k)}{\sin \frac{x - x_k}{2}} \right]^2. \tag{160}$$

Из (157) и (160) вытекает, что *)

$$|U_q^{(n)}(x) - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \frac{1}{(2n+1)(q+1)} \sum_{k=0}^{2n} |f(x_k) - f(x)| \left[\frac{\sin \frac{q+1}{2}(x - x_k)}{\sin \frac{x - x_k}{2}} \right]^2.$$

*) Мы считаем, что $0 \leqslant x < 2\pi$. Ввиду 2π-периодичности $f(x)$ достаточно ограничиться этими значениями x.

Возьмём $\varepsilon > 0$ и подберём такое $\delta > 0$, чтобы неравенство $|x'' - x'| < \delta$ влекло неравенство $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$. Сделав это, разобьём числа $0, 1, 2, \ldots, n$ в две группы I и II, отнеся k в группу I в следующих трёх случаях:

$$|x_k - x| < \delta, \quad |x_k - x + 2\pi| < \delta, \quad |x_k - x - 2\pi| < \delta,$$

и в группу II, если не выполнено ни одно из этих трёх неравенств.

Так как $f(x \pm 2\pi) = f(x)$, то, опираясь на (160), имеем

$$\frac{1}{(2n+1)(q+1)} \sum_{k \in \mathrm{I}} |f(x_k) - f(x)| \left[\frac{\sin\frac{q+1}{2}(x - x_k)}{\sin\frac{x - x_k}{2}}\right]^2 < \varepsilon.$$

С другой стороны, если $k \in \mathrm{II}$, то *)

$$\left|\sin\frac{x - x_k}{2}\right| \geqslant \sin\frac{\delta}{2}.$$

Поэтому, обозначив через M наибольшее значение $|f(x)|$, имеем

$$\frac{1}{(2n+1)(q+1)} \sum_{k \in \mathrm{II}} |f(x_k) - f(x)| \left[\frac{\sin\frac{q+1}{2}(x - x_k)}{\sin\frac{x - x_k}{2}}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{(2n+1)(q+1)\sin^2\frac{\delta}{2}} \sum_{k=0}^{2n} \sin^2\frac{q+1}{2}(x - x_k)$$

и, тем более,

$$\frac{1}{(2n+1)(q+1)} \sum_{k \in \mathrm{II}} |f(x_k) - f(x)| \left[\frac{\sin\frac{q+1}{2}(x - x_k)}{\sin\frac{x - x_k}{2}}\right]^2 \leqslant$$

$$\leqslant \frac{2M}{(q+1)\sin^2\frac{\delta}{2}}.$$

---

*) Очевидно, $|x_k - x| < 2\pi$, поэтому при $k \in \mathrm{II}$ будет

$$\frac{\delta}{2} \leqslant \left|\frac{x_k - x}{2}\right| \leqslant \pi - \frac{\delta}{2}.$$

Итак, при любых n и q $(q \leqslant n)$

$$|U_q^{(n)}(x) - f(x)| < \varepsilon + \frac{2M}{(q+1)\sin^2\frac{\delta}{2}},$$

что и доказывает теорему.

§ 2. Второй процесс С. Н. Бернштейна.

Другой способ получения сумм, равномерно приближающих любую непрерывную, 2π-периодическую функцию, представляет аналог процесса Бернштейна—Рогозинского, рассмотренного в главе X первой части.

Пусть, как и выше, $\mathscr{T}_n(x) \in H_n^T$ есть тригонометрический полином, совпадающий в узлах (154) с некоторой функцией $f(x)$ из $C_{2\pi}$. Положим вместе с С. Н. Бернштейном *)

$$U_n(x) = U_n[f; x] = \frac{T_n\left(x + \frac{\pi}{2n+1}\right) + T_n\left(x - \frac{\pi}{2n+1}\right)}{2}. \tag{161}$$

Теорема 1 (С. Н. Бернштейн). *Для любой $f(x) \in C_{2\pi}$ равномерно на всей оси*

$$\lim_{n\to\infty} U_n(x) = f(x). \tag{162}$$

Для доказательства этого факта мы установим сначала некоторые вспомогательные утверждения.

Теорема 2 (А. Зигмунд). *Если $K(x)$ есть тригонометрический полином порядка не выше n, то* **)

$$\int_0^{2\pi} |K'(x)|\,dx \leqslant 2n \int_0^{2\pi} |K(x)|\,dx. \tag{163}$$

*) С. Н. Бернштейн [9]. См. также Ф. И. Харшиладзе [2]. Я следую здесь изложению Харшиладзе.

**) Зигмунд [1], стр. 156—157. В другом месте Зигмунд показал, что без нарушения справедливости неравенства (163) в правой его части можно устранить множитель 2.

В самом деле, если

$$K(x) = A + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx),$$

то

$$a_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t) \cos kt\, dt,$$

$$b_k = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t) \sin kt\, dt.$$

Подставляя эти выражения в равенство

$$K'(x) = \sum_{k=1}^{n} k (b_k \cos kx - a_k \sin kx),$$

находим, что

$$K'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t) \left[\sum_{k=1}^{n} k \sin k(t-x) \right] dt.$$

Но

$$\int_0^{2\pi} K(t) \left[\sum_{k=1}^{n-1} k \sin (2n-k)(t-x) \right] dt = 0,$$

ибо функция

$\sin(2n-k)(t-x) =$
$= \sin(2n-k)t \cos(2n-k)x - \cos(2n-k)t \sin(2n-k)x$

при $1 \leqslant k \leqslant n-1$ ортогональна на $[0, 2\pi]$ к полиному $K(t)$, порядок которого не выше n. Значит,

$$K'(x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} K(t) \left\{ n \sin n(t-x) + \sum_{k=1}^{n-1} k [\sin k(t-x) + \sin(2n-k)(t-x)] \right\} dt,$$

откуда

$$K'(x)=$$

$$=\frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} K(t)\sin n(t-x)\left[n+2\sum_{k=1}^{n-1} k\cos(n-k)(t-x)\right]dt.$$

Но в первой части (формула (89)) было установлено, что

$$n+2\sum_{k=1}^{n-1} k\cos(n-k)t \geqslant 0.$$

Значит,

$$|K'(x)| \leqslant \frac{1}{\pi}\int\limits_0^{2\pi} |K(t)|\left[n+2\sum_{k=1}^{n-1} k\cos(n-k)(t-x)\right]dt.$$

Интегрируя это неравенство, меняя в правой части порядок интегрирований и замечая, что

$$\int\limits_0^{2\pi}\left[n+2\sum_{k=1}^{n-1}\cos(n-k)(t-x)\right]dx=2n\pi,$$

мы и приходим к (163).

Следствие. *Если* $K(x)\in H_n^T$ *и* $x_k=\frac{2k\pi}{2n+1}$, *то*

$$\left|\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}|K(x_k)|-\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|K(t)|\,dt\right| \leqslant \int\limits_0^{2\pi}|K(t)|\,dt. \tag{164}$$

В самом деле,

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|K(t)|\,dt=\frac{1}{2\pi}\sum_{k=0}^{2n}\int\limits_{x_k}^{x_{k+1}}|K(t)|\,dt.$$

Применяя к каждому слагаемому теорему о среднем, находим

$$\frac{1}{2\pi}\int\limits_0^{2\pi}|K(t)|\,dt=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}|K(\xi_k)| \qquad (x_k\leqslant\xi_k\leqslant x_{k+1}).$$

Поэтому левая часть неравенства (164) не больше, чем *)

$$\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}|K(x_k)-K(\xi_k)|\leqslant\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}\int_{x_k}^{\xi_k}|K'(t)|\,dt.$$

Но сегменты $[x_k, \xi_k]$ не имеют общих внутренних точек и все содержатся в сегменте $[0, 2\pi]$. Поэтому

$$\sum_{k=0}^{2n}\int_{x_k}^{\xi_k}|K'(t)|\,dt\leqslant\int_0^{2\pi}|K'(t)|\,dt.$$

Отсюда и из (163) и вытекает (164).

Возвращаясь к теореме С. Н. Бернштейна, заметим, что, в силу (42),

$$T_n(x)=\frac{1}{2n+1}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)\frac{\sin\frac{2n+1}{2}(x_k-x)}{\sin\frac{x_k-x}{2}}.$$

Поэтому

$$U_n(x)=\frac{1}{4n+2}\sum_{k=0}^{2n}f(x_k)\cos\frac{2n+1}{2}(x_k-x)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{x_k-x}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{x_k-x}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right]. \quad (165)$$

Положим (считая x закреплённым)

$$K(t)=\cos\frac{2n+1}{2}(t-x)\times$$
$$\times\left[\frac{1}{\sin\left(\frac{t-x}{2}+\frac{\pi}{4n+2}\right)}-\frac{1}{\sin\left(\frac{t-x}{2}-\frac{\pi}{4n+2}\right)}\right].$$

Это — тригонометрический полином порядка n, относительно которого в первой части (неравенство (296)) было доказано, что

$$\int_0^{2\pi}|K(t)|\,dt<8\pi^2.$$

*) Надо учесть, что $||a|-|b||\leqslant|a-b|$.

Применяя к нему неравенство (164), получим

$$\frac{1}{4n+2}\sum_{k=0}^{2n}|K(x_k)|\leqslant 2\pi+4\pi^2.$$

Отсюда и из (165) вытекает

$$|U_n[f;x]|\leqslant(2\pi+4\pi^2)M, \tag{166}$$

где $M=\max|f(x)|$.

Дальнейшие рассуждения уже не представляют затруднений. Именно, обозначая через $T(x)$ тригонометрический полином порядка не выше n, наименее отклоняющийся от $f(x)$, будем иметь

$$|T(x)-f(x)|\leqslant E_n.$$

Поэтому

$$|U_n[T-f;\ x]|\leqslant(2\pi+4\pi^2)E_n,$$

или, что то же самое,

$$|U_n[T;\ x]-U_n[f;x]|\leqslant(2\pi+4\pi^2)E_n.$$

Но так как полином $T(x)$ совпадает со своим интерполяционным полиномом, то

$$U_n[T;x]=\frac{T\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right)+T\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)}{2}.$$

Эта величина отличается от

$$\frac{f\left(x+\frac{\pi}{2n+1}\right)+f\left(x-\frac{\pi}{2n+1}\right)}{2} \tag{167}$$

меньше, чем на E_n, а дробь (167) в свою очередь отличается от $f(x)$ меньше, чем на $\omega\left(\frac{\pi}{2n+1}\right)$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности функции $f(x)$. Таким образом

$$|U_n[f;x]-f(x)|<(1+2\pi+4\pi^2)E_n+\omega\left(\frac{2\pi}{2n+1}\right),$$

что и доказывает теорему.

§ 3. Теорема С. М. Лозинского и процесс С. И. Раппопорт.

Рассуждения предыдущего параграфа допускают существенное обобщение:

Теорема 1 (С. М. Лозинский). *Пусть матрица множителей*

$$\begin{array}{llll} \rho_0^{(0)}, & & & \\ \rho_0^{(1)}, & \rho_1^{(1)}, & & \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ \rho_0^{(n)}, & \rho_1^{(n)}, & \dots, & \rho_n^{(n)}, \\ \dots & \dots & \dots & \dots \end{array}$$

удовлетворяет условиям

$$\lim_{n\to\infty} \rho_k^{(n)} = 1,$$

$$\frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi}\left|\rho_0^{(n)} + 2\sum_{k=1}^{n}\rho_k^{(n)}\cos kt\right| dt < K.$$

Если $f(x) \in C_{2\pi}$ *и*

$$T_n(x) = A^{(n)} + \sum_{m=}^{n}\left(a_m^{(n)}\cos mx + b_m^{(n)}\sin mx\right)$$

есть полином, совпадающий с $f(x)$ *в узлах* $x_k = \frac{2k\pi}{2n+1}$ $(k = 0, 1, \dots, 2n)$, *то полином*

$$L_n(x) = L_n[f; x] =$$

$$= \rho_0^{(n)}A^{(n)} + \sum_{m=1}^{n}\rho_m^{(n)}\left(a_m^{(n)}\cos mx + b_m^{(n)}\sin mx\right)$$

с возрастанием n *равномерно стремится*) к* $f(x)$.

---

*) С. М. Лозинский [3], стр. 237. В работе Лозинского устанавливается несколько более общий результат, чем в тексте.

В самом деле, подставляя в $L_n(x)$ вместо коэффициентов $A^{(n)}$, $a_m^{(n)}$, $b_m^{(n)}$ их выражения (155), находим

$$L_n(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \left[\rho_0^{(n)} + 2 \sum_{m=1}^{n} \rho_m^{(n)} \cos m (x_k - x) \right]$$

или

$$L_n(x) = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) K(x_k),$$

где положено для краткости

$$K(t) = \rho_0^{(n)} + 2 \sum_{m=1}^{n} \rho_m^{(n)} \cos m (t - x).$$

По условию теоремы

$$\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |K(t)| \, dt < K.$$

Значит, на основании (164)

$$\frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} |K(x_k)| < (2\pi + 1) K,$$

и потому

$$|L_n[f;\, x]| \leqslant (2\pi + 1) KM, \tag{168}$$

где $M = \max |f(x)|$.

Заметив это, возьмём $\varepsilon > 0$, и пусть

$$U(x) = R + \sum_{m=1}^{q} (r_m \cos mx + s_m \sin mx)$$

— тригонометрический полином, удовлетворяющий неравенству

$$|U(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Тогда благодаря (168)

$$|L_n[U;\, x] - L_n[f;\, x]| < (2\pi + 1) K\varepsilon.$$

Но при $n \geqslant q$ полином $U(x)$ совпадает со своим интерполяционным полиномом по узлам x_k. Значит,

$$L_n[U;x] = \rho_0^{(n)} R + \sum_{m=1}^{q} \rho_m^{(n)} (r_m \cos mx + s_m \sin mx)$$

и, в силу условия

$$\lim_{n\to\infty} \rho_m^{(n)} = 1,$$

для достаточно больших n справедливо неравенство

$$|L_n[U;x] - U(x)| < \varepsilon.$$

При этих n, очевидно, окажется

$$|L_n[f;x] - f(x)| < [(2\pi+1)K+2]\varepsilon,$$

что и завершает доказательство.

По существу эта интересная теорема означает, что *всякий* процесс, позволяющий получать равномерное приближение, исходя из частных сумм Фурье, применим и к тригонометрическому интерполированию по равноотстоящим узлам.

Положим, в частности,

$$\rho_m^{(n)} = \frac{(n!)^2}{(n-m)!\,(n+m)!}.$$

Полином $L_n(x)$ перейдёт в полином

$$R_n(x) = A^{(n)} + \sum_{m=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-m)!\,(n+m)!} (a_m^{(n)} \cos mx + b_m^{(n)} \sin mx),$$

которому на основании (155) можно дать вид

$$R_n(x) = \\ = \frac{1}{2n+1} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \left[1 + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-m)!\,(n+m)!} \cos m(x_k - x) \right].$$

Но в первой части было показано (формула (309)), что

$$1 + 2 \sum_{m=1}^{n} \frac{(n!)^2}{(n-m)!\,(n+m)!} \cos mt = \frac{(2n)!!}{(2n-1)!!} \cos^{2n} \frac{t}{2}.$$

Поэтому полином $R_n(x)$ можно переписать в форме, аналогичной интегралу Валле-Пуссена

$$R_n(x) = \frac{(2n)!!}{(2n+1)!!} \sum_{k=0}^{2n} f(x_k) \cos^{2n} \frac{x_k - x}{2}.$$

Таким образом, получается*)

Теорема 2 (С. И. Раппопорт). *Если* $f(x) \in C_{2\pi}$, *то равномерно на всей оси*

$$\lim_{n \to \infty} R_n(x) = f(x).$$

§ 4. Третий процесс С. Н. Бернштейна.

В предыдущей главе был изложен интерполяционный процесс Фейера, состоящий в построении полинома $H_{2n-1}(x)$, совпадающего с заданной непрерывной функцией $f(x)$ в чебышевских узлах $x_k^{(n)}$ и равномерно стремящегося к этой функции с возрастанием n. При этом, однако, полином $H_{2n-1}(x)$, будучи не лагранжевым, а эрмитовым интерполяционным полиномом, имел степень $2n-1$, совпадая с функцией лишь в n узлах. Естественно попытаться построить такие равномерно сходящиеся интерполяционные процессы, в которых отношение степени n-го полинома к числу точек, в которых он совпадает с интерполируемой функцией, было бы по возможности близко к единице. Эта проблема была поставлена С. Н. Бернштейном. Ему же принадлежит**) одно из возможных её решений, которое и излагается в этом параграфе.

Пусть $x_k = x_k^{(n)} = \cos \theta_k$, где $\theta_k = \theta_k^{(n)} = \frac{2k-1}{2n} \pi$ суть узлы Чебышева. Обозначим через l какое-нибудь натуральное число и, предполагая $n \geqslant 2l$, разобьём всё мно-

*) С. И. Раппопорт [1]. В работе показано, между прочим, что $|R_n(x) - f(x)| \leqslant \omega\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right)\left(3 + \frac{2\pi}{\sqrt{2n+1}}\right)$, где $\omega(\delta)$ — модуль непрерывности $f(x)$.

**) С. Н. Бернштейн [8].

жество узлов

$$x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ x_3^{(n)},\ \ldots,\ x_n^{(n)}$$

на группы по $2l$ узлов в каждой (кроме последней, в которой число узлов будет меньше чем $2l$, если n не делится нацело на $2l$).

Если $n=2lq+r$ $(0\leqslant r<2l)$, то упомянутые группы таковы:

$$\begin{array}{llll}
x_1, & x_2, & \ldots, & x_{2l},\\
x_{2l+1}, & x_{2l+2}, & \ldots, & x_{4l},\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
x_{2l(s-1)+1}, & x_{2l(s-1)+2}, & \ldots, & x_{2ls},\\
\ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\
x_{2lq+1}, & x_{2lq+2}, & \ldots, & x_{2lq+r}.
\end{array}$$

Пусть $f(x)$ — произвольная непрерывная функция, заданная на $[-1, +1]$. Положим

$$A_k=A_k^{(n)}=f(x_k^{(n)}),$$

если k есть число (из ряда $1, 2, \ldots, n$), не делящееся на $2l$; если же k делится на $2l$ и $k=2ls$ $(s=1, 2, \ldots, q)$, то мы полагаем *)

$$A_{2ls}=A_{2ls}^{(n)}=[f(x_{2l(s-1)+1})+f(x_{2l(s-1)+3})+\cdots+f(x_{2ls-1})]-$$
$$-[f(x_{2l(s-1)+2})+f(x_{2l(s-1)+4})+\cdots+f(x_{2ls-2})].$$

С помощью чисел $A_k^{(n)}$ построим полином

$$P_n(x)=P_n[f;x]=\sum_{k=1}^{n}A_k^{(n)}\frac{T_n(x)}{T_n'(x_k)(x-x_k)},$$

где $T_n(x)=\cos(n\arccos x)$ есть полином Чебышева. Степень полинома $P_n(x)$ равна $n-1$. Так как $P_n(x_k^{(n)})=A_k^{(n)}$, то при k, не делящемся на $2l$, окажется

$$P_n(x_k^{(n)})=f(x_k^{(n)}).$$

*) Например, при $l=4$ будет

$$A_{16}=[f(x_9)+f(x_{11})+f(x_{13})+f(x_{15})]-[f(x_{10})+f(x_{12})+f(x_{14})].$$

Таким образом $P_n(x)$ совпадает с $f(x)$ в $n-q$ узлах $x_k^{(n)}$, где $k \neq 2l, 4l, \ldots, 2lq$. Значит, отношение степени $P_n(x)$ к числу точек, в которых имеет место совпадение $P_n(x)$ с $f(x)$, равно

$$\frac{n-1}{n-q}.$$

Но $q=\frac{n-r}{2l}$. Поэтому

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n-1}{n-q}=\frac{2l}{2l-1},$$

а эта величина при достаточно большом l сколь угодно близка к единице (надо заметить, однако, что l есть заранее выбранное и закреплённое число).

Теперь мы установим, что равномерно на $[-1, +1]$

$$\lim_{n\to\infty} P_n(x)=f(x). \tag{169}$$

Для этого прежде всего заметим, что

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{T_n(x)}{T_n'(x_k)(x-x_k)}=1$$

и, стало быть,

$$P_n(x)-f(x)=\sum_{k=1}^{n}[A_k-f(x)]\frac{T_n(x)}{T_n'(x_k)(x-x_k)}.$$

Если заменить здесь $T_n(x)$ и $T_n'(x)$ их выражениями, то мы получим

$$P_n(x)-f(x)=$$
$$=\frac{\cos(n\arccos x)}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[A_k-f(x)]\frac{\sqrt{1-x_k^2}}{x-x_k},$$

или, вводя обозначение $\theta=\arccos x$,

$$P_n(x)-f(x)=$$
$$=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k+1}[A_k-f(x)]\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-\cos\theta_k}\sin\theta_k.$$

Пусть $\theta_p \leqslant \theta < \theta_{p+1}$. Тогда последнюю сумму можно разбить на две суммы по схеме

$$P_n(x) - f(x) = \sum_{k=1}^{p} + \sum_{k=p+1}^{n}$$

(если $\theta < \theta_1$, то отсутствует первая, а если $\theta \geqslant \theta_n$, — то вторая сумма). Обе эти суммы изучаются одинаковым образом, поэтому мы ограничимся рассмотрением лишь второй суммы

$$\tau_n(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=p+1}^{n} (-1)^{k+1} [A_k - f(x)] \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} \sin\theta_k.$$

Таким образом мы предполагаем, что $\theta < \theta_n$. Но тогда с увеличением n число узлов θ_k, попавших в интервал (θ, π), будет неограниченно возрастать. Обозначим через h некоторое натуральное число, большее, чем $2l$. В дальнейшем мы уточним выбор этого числа h. Предполагая n настолько большим, что $n-p$ (т. е. число узлов $\theta_k = \theta_k^{(n)}$, попавших в (θ, π)) больше чем h, положим

$$\tau_n'(x) = \frac{1}{n} \sum_{k=p+1}^{p+h} (-1)^{k+1} [A_k - f(x)] \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} \sin\theta_k,$$

и пусть $\tau_n''(x) = \tau_n(x) - \tau_n'(x)$.

Если k есть одно из чисел $p+1, p+2, \ldots, p+h$ и k не делится на $2l$, то

$$|A_k - f(x)| = |f(x_k) - f(x)| \leqslant \omega(|x_k - x|) \leqslant \omega(\theta_{p+h} - \theta_p),$$

ибо

$$|x_k - x| = |\cos\theta_k - \cos\theta| \leqslant \theta_k - \theta \leqslant \theta_{p+h} - \theta_p.$$

Но $\theta_{p+h} - \theta_p = \frac{h\pi}{n}$. Значит, для указанных значений k

$$|A_k - f(x)| \leqslant \omega\left(\frac{h\pi}{n}\right).$$

Кроме того (см. лемму 2 из § 3 главы II),

$$\frac{1}{n}\left|\frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \theta\cos_k}\right| \sin\theta_k \leqslant 2. \tag{170}$$

Поэтому сумма тех слагаемых $\tau'_n(x)$, которые отвечают значениям k, не кратным $2l$, не больше, чем

$$2h\omega\left(\frac{h\pi}{n}\right)$$

(ибо число этих k во всяком случае не больше h).

Если же $k=2ls$, то

$$|A_{2ls}-f(x)|\leqslant|f(x_{2l(s-1)+1})-f(x_{2l(s-1)+2})|+\cdots$$
$$\cdots+|f(x_{2ls-3})-f(x_{2ls-2})|+|f(x_{2ls-1})-f(x)|.$$

Каждое слагаемое правой части, кроме последнего, не больше*), чем $\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)$. Последнее же слагаемое не больше, чем $\omega(|\theta_{2ls-1}-\theta|)$. Но

$$\theta_p\leqslant\theta<\theta_{p+1},\qquad \theta_{p+1}\leqslant\theta_{2ls}\leqslant\theta_{p+h}.$$

Второе из этих двойных неравенств показывает, что

$$\theta_p\leqslant\theta_{2ls-1}\leqslant\theta_{p+h-1}.$$

Значит,

$$|\theta_{2ls-1}-\theta|\leqslant\theta_{p+h-1}-\theta_p=\frac{h-1}{n}\pi<\frac{h\pi}{n}.$$

Таким образом

$$|A_{2ls}-f(x)|\leqslant(l-1)\,\omega\left(\frac{\pi}{n}\right)+\omega\left(\frac{h\pi}{n}\right)\leqslant l\omega\left(\frac{h\pi}{n}\right).$$

Если принять во внимание оценку (170) и заметить, что среди чисел $p+1,\ p+2,\ \ldots,\ p+h$ имеется не больше**), чем $\frac{h-1}{2l}+1$, кратных $2l$, то станет ясным,

---

*) Ибо $|x_{k+1}-x_k|\leqslant\theta_{k+1}-\theta_k=\frac{\pi}{n}$.

**) Если это суть числа

$$2l(i+1),\quad 2l(i+2),\ \ldots,\ 2l(i+m),$$

то их количество есть m. Но

$$2l(i+m)\leqslant p+h,\qquad 2l(i+1)\geqslant p+1.$$

Стало быть,

$$2l(m-1)\leqslant h-1.$$

что сумма тех слагаемых $\tau_n'(x)$, которые отвечают значениям k, делящимся на $2l$, не больше

$$\left(\frac{h-1}{2l}+1\right)2l\omega\left(\frac{h\pi}{n}\right) < (h+2l)\,\omega\left(\frac{h\pi}{n}\right).$$

Сопоставляя это со сказанным выше, получаем

$$|\tau_n'(x)| < (3h+2l)\,\omega\left(\frac{h\pi}{n}\right). \tag{171}$$

Установив это, перейдём к рассмотрению суммы

$$\tau_n''(x)=\frac{1}{n}\sum_{k=p+h+1}^{n}(-1)^{k+1}\,[A_k-f(x)]\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-\cos\theta_k}\sin\theta_k.$$

В этой сумме мы прежде всего выделим группу $2l$ слагаемых S_s, отвечающих значениям

$$k=2l(s-1)+1,\quad 2l(s-1)+2,\quad \ldots,\quad 2ls-1,\quad 2ls. \tag{172}$$

Если ввести обозначения

$$f(x_k)=f_k,\quad f(x)=f,\quad \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta-\cos\theta_k}=u_k,$$

то упомянутая часть суммы $\tau_n''(x)$ равна

$$S_s=\frac{\cos n\theta}{n}\sum_{k=2l(s-1)+1}^{2ls-1}(-1)^{k+1}(f_k-f)\,u_k-$$
$$-\frac{\cos n\theta}{n}\{[f_{2l(s-1)+1}+f_{2l(s-1)+3}+\cdots+f_{2ls-1}]-$$
$$-[f_{2l(s-1)+2}+\cdots+f_{2ls-2}]-f\}\,u_{2ls},$$

или; что то же самое,

$$S_s=\frac{\cos n\theta}{n}\left\{\sum(-1)^k f u_k+\sum(-1)^{k+1}f_k(u_k-u_{2ls})\right\},$$

причём суммирование распространяется на все числа (172).

Отсюда

$$|S_s|\leqslant\frac{M}{n}\left\{\left|\sum(-1)^k u_k\right|+\sum|u_k-u_{2ls}|\right\}, \tag{173}$$

где $M=\max|f(x)|$.

Замечая, что положительная величина

$$u_k = \frac{\sin \theta_k}{\cos \theta - \cos \theta_k}$$

с возрастанием k *убывает* *), мы видим, что

$$\left| \sum (-1)^k u_k \right| = (u_{2l(s-1)+1} - u_{2l(s-1)+2}) + \cdots$$
$$\cdots + (u_{2ls-1} - u_{2ls}) = u_{2l(s-1)+1} - (u_{2l(s-1)+2} - u_{2l(s-1)+3}) - \cdots$$
$$\cdots - (u_{2ls-2} - u_{2ls-1}) - u_{2ls},$$

откуда

$$\left| \sum (-1)^k u_k \right| \leqslant u_{2l(s-1)+1} - u_{2ls}. \tag{174}$$

С другой стороны, все разности $u_k - u_{2ls}$ положительны, и каждая из них не больше, чем $u_{2l(s-1)+1} - u_{2ls}$. Значит,

$$\sum | u_k - u_{2ls} | < (2l-1)(u_{2l(s-1)+1} - u_{2ls}).$$

Отсюда и из (173) и (174) следует, что

$$| S_s | \leqslant \frac{2Ml}{n} (u_{2l(s-1)+1} - u_{2ls}).$$

Пусть в ряду чисел $p+h+1,\ p+h+2, \ldots,\ n$ содержатся группы (172) для $s = \mu,\ \mu+1, \ldots, \lambda$. Кроме того, в этом ряду может быть некоторое количество чисел, не попадающих ни в одну из групп (172). Таких значений k (т. е. не попавших в группы (172)) во всяком случае *меньше*, чем $4l$. Так как $|A_k| \leqslant (2l-1)M$, то часть суммы $\tau_n''(x)$, отвечающая *этим* значениям k, меньше, чем

$$\frac{2lM}{n} \sum_{k \in Q} u_k,$$

где через Q обозначено множество этих k.

---

*) Ибо $\left(\dfrac{\sin x}{\cos \theta - \cos x} \right)' = \dfrac{\cos \theta \cos x - 1}{(\cos \theta - \cos x)^2} < 0.$

Таким образом

$$|\tau_n''(x)| \leqslant \frac{2Ml}{n}\left\{\sum_{s=\mu}^{\lambda}[u_{2l(s-1)+1}-u_{2ls}]+\sum_{k\in Q}u_k\right\}.$$

Но

$$\sum_{s=\mu}^{\lambda}[u_{2l(s-1)+1}-u_{2ls}]=u_{2l(\mu-1)+1}-(u_{2l\mu}-u_{2l\mu+1})-\dots$$
$$\dots-(u_{2l(\lambda-1)}-u_{2l(\lambda-1)+1})-u_{2l\lambda}<u_{2l(\mu-1)+1}.$$

Значит,

$$|\tau_n''(x)| \leqslant \frac{2Ml}{n}\left\{u_{2l(\mu-1)+1}+\sum_{k\in Q}u_k\right\}.$$

Все фигурирующие здесь индексы не меньше, чем $p+h+1$. Значит, учитывая, что u_k убывает с возрастанием k, мы находим

$$|\tau_n''(x)| \leqslant \frac{8Ml^2}{n}u_{p+h+1}.$$

Остаётся оценить u_{p+h+1}. Но

$$u_{p+h+1}=\frac{\sin\theta_{p+h+1}}{\cos\theta-\cos\theta_{p+h+1}}<\frac{\sin\theta_{p+h+1}}{\cos\theta_{p+1}-\cos\theta_{p+h+1}}$$

и, тем более,

$$u_{p+h+1}<\frac{\sin\theta_{p+1}+\sin\theta_{p+h+1}}{\cos\theta_{p+1}-\cos\theta_{p+h+1}}=$$
$$=\frac{2\sin\dfrac{\theta_{p+1}+\theta_{p+h+1}}{2}\cos\dfrac{\theta_{p+h+1}-\theta_{p+1}}{2}}{2\sin\dfrac{\theta_{p+1}+\theta_{p+h+1}}{2}\sin\dfrac{\theta_{p+h+1}-\theta_{p+1}}{2}},$$

откуда

$$u_{p+h+1}<\frac{1}{\sin\dfrac{\theta_{p+h+1}-\theta_{p+1}}{2}}.$$

Замечая, что $\theta_{p+h+1}-\theta_{p+1}=\frac{h\pi}{n}$, имеем

$$u_{p+h+1}<\frac{1}{\sin\dfrac{h\pi}{2n}}<\frac{n}{h}.$$

Таким образом

$$|\tau_n''(x)| < \frac{8Ml^2}{h}.$$

Сопоставляя это с неравенством (171), имеем

$$|\tau_n(x)| \leqslant 4h\omega\left(\frac{h\pi}{n}\right) + \frac{8Ml^2}{h}.$$

Та же оценка имеет место и для суммы

$$\frac{\cos n\theta}{n} \sum_{k=1}^{p} (-1)^{k+1} [A_k - f(x)] \frac{\sin\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}.$$

Поэтому

$$|P_n(x) - f(x)| < 8h\omega\left(\frac{h\pi}{n}\right) + \frac{16Ml^2}{h}.$$

Теперь, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, мы закрепляем такое h, что

$$\frac{16Ml^2}{h} < \frac{\varepsilon}{2},$$

после чего берём n столь большим, что

$$8h\omega\left(\frac{h\pi}{n}\right) < \frac{\varepsilon}{2}.$$

При таком n будет

$$|P_n(x) - f(x)| < \varepsilon,$$

чем и доказано (169).

§ 5. Некоторые общие свойства сумматорных формул.

В этом параграфе мы рассмотрим некоторые свойства так называемых сумматорных формул. Пусть заданы две треугольные матрицы:

«узлов»

$$\left.\begin{array}{l} x_1^{(1)}, \\ x_1^{(2)},\ x_2^{(2)}, \\ \dots\dots \\ x_1^{(n)},\ x_2^{(n)},\ \dots,\ x_n^{(n)}, \\ \dots\dots\dots\dots\dots \end{array}\right\} \qquad (175)$$

и «фундаментальных функций»

$$\left.\begin{array}{l}\varphi_1^{(1)}(x),\\ \varphi_1^{(2)}(x),\ \varphi_2^{(2)}(x),\\ \dots\dots\dots\dots\\ \varphi_1^{(n)}(x),\ \varphi_2^{(n)}(x),\ \dots,\varphi_n^{(n)}(x),\\ \dots\dots\dots\dots\dots\end{array}\right\} \qquad (176)$$

При этом все узлы $x_k^{(n)}$ лежат на некотором сегменте $[a, b]$, в котором определены и функции $\varphi_k^{(n)}(x)$.

В таком случае каждой функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, можно сопоставить «сумматорный полином»

$$\Phi_n(x) = \Phi_n[f; x] = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, \varphi_k^{(n)}(x). \qquad (177)$$

Таким образом понятие сумматорного полинома содержит как частный случай понятие интерполяционного полинома Лагранжа, но является существенно более общим. Например, полиномы Бернштейна

$$B_n(x) = \sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

или полиномы Фейера

$$H_{2n-1}(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \left[\frac{T_n(x)}{n(x - x_k^{(n)})}\right]^2 (1 - x x_k^{(n)})$$

являются сумматорными полиномами.

Точно так же (если только не ставить несущественного условия, чтобы n-е строки вышеуказанных матриц содержали точно по n элементов) тригонометрические интерполяционные полиномы и полиномы, получающиеся из них в результате тех или иных процессов суммирования, являются сумматорными. Поэтому теоремы, относящиеся к сумматорным полиномам, обладают значительной степенью общности. Впредь, не оговаривая этого, мы будем предполагать, что все фундаментальные функции $\varphi_k^{(n)}(x)$ ограничены (но не обязательно одним числом).

Каждой паре матриц (175) и (176) отнесём функции

$$\lambda_n(x) = \sum_{k=1}^{n} |\varphi_k^{(n)}(x)|$$

и числа

$$\lambda_n = \sup\{\lambda_n(x)\} \qquad (a \leqslant x \leqslant b).$$

Теорема 1. *Для того чтобы для всякой функции $f(x)$ класса $C([a, b])$ равномерно на $[a, b]$ выполнялось соотношение*

$$\lim_{n \to \infty} \Phi_n(x) = f(x), \tag{178}$$

необходимо и достаточно выполнение двух условий:

1) *соотношение* (178) *выполняется* (*равномерно*) *всякий раз, когда $f(x)$ есть полином* *);

2) *существует такая постоянная K, что при всех n*

$$\lambda_n \leqslant K.$$

Достаточность этих условий почти очевидна. В самом деле, пусть они выполнены и пусть $f(x)$ — функция класса $C([a, b])$. Тогда, взяв произвольное $\varepsilon > 0$, подбираем такой полином $P(x)$, что при $a \leqslant x \leqslant b$

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

Легко видеть, что

$$|\Phi_n[P;\ x] - \Phi_n[f;\ x]| = |\Phi_n[P - f;\ x]| < K\varepsilon.$$

Отсюда и из того, что

$$|\Phi_n[f; x] - f(x)| \leqslant |\Phi_n[f;\ x] - \Phi_n[P;\ x]| + \\ + |\Phi_n[P;\ x] - P(x)| + |P(x) - f(x)|,$$

вытекает неравенство

$$|\Phi_n[f; x] - f(x)| < (K + 1)\varepsilon + |\Phi_n[P; x] - P(x)|,$$

и, в силу условия 1, при достаточно больших n ока-

*) Требование, чтобы $f(x)$ была полиномом, можно заменить требованием, чтобы $f(x)$ принадлежала какому-нибудь классу, всюду плотному в $C([a, b])$.

жется

$$|\Phi_n[f; x] - f(x)| < (K+2)\varepsilon.$$

Переходя к рассмотрению необходимости условий 1 и 2, мы видим, что необходимость условия 1 тривиальна, ибо если соотношение (178) имеет место для всякой непрерывной функции, то это тем более так для полинома. Необходимость условия 2 доказывается от противного методом «скользящего горба» аналогично теореме Фабера из главы II.

Именно, предполагая для всякой непрерывной функции соотношение (178) выполненным и допуская, что условие 2 не выполнено, находим точки z_n, в которых

$$\lambda_n(z_n) > \lambda_n - 1.$$

Затем для каждого натурального n строим функцию $\psi_n(x)$, полагая

$$\psi_n(x_k^{(n)}) = \operatorname{sign} \varphi_k^{(n)}(z_n) \qquad (k = 1, 2, \ldots, n)$$

и считая её линейной между узлами $x_k^{(n)}$ и концами сегмента $[a, b]$, в которых полагаем $\psi_n(x)$ равной нулю (если только она уже не определена там).

Сделав это, подбираем такое натуральное n_1, что

$$\lambda_{n_1} > 2 \cdot 2 \cdot 3,$$

что возможно, ибо условие 2 не выполнено.

Так как $\psi_{n_1}(x)$ непрерывна, то, в силу условия (178),

$$\Phi_n\left[\frac{\psi_{n_1}}{3};\ x\right] \rightrightarrows \frac{\psi_{n_1}(x)}{3},$$

и для $n > n'$ будет при всех x из $[a, b]$

$$\left|\Phi_n\left[\frac{\psi_{n_1}}{3};\ x\right]\right| < \frac{1}{2}.$$

Пусть $n_2 > n'$, $n_2 > n_1$ и, кроме того,

$$\lambda_{n_2} > 2 \cdot 3 \cdot 3^2.$$

Так как

$$\left|\frac{\psi_{n_1}(x)}{3} + \frac{\psi_{n_2}(x)}{3^2}\right| < \frac{1}{2},$$

то найдётся такое $n_3 > n_2$, что

$$\left|\Phi_{n_3}\left[\frac{\psi_{n_1}}{3}+\frac{\psi_{n_2}}{3^2};\ x\right]\right|<\frac{1}{2}, \quad \lambda_{n_3}>2\cdot 4\cdot 3^3.$$

Продолжая этот процесс, мы построим бесконечную последовательность чисел $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ таких, что

$$\left|\Phi_{n_m}\left[\frac{\psi_{n_1}}{3}+\ldots+\frac{\psi_{n_{m-1}}}{3^{m-1}};\ x\right]\right|<\frac{1}{2},$$

$$\lambda_{n_m} > 2(m+1)\,3^m.$$

Проделав это, положим

$$f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}\frac{\psi_{n_k}(x)}{3^k}.$$

Ясно, что $f(x)$—непрерывная функция. Если положить

$$A(x)=\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\psi_{n_k}(x)}{3^k}, \quad B(x)=\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\psi_{n_k}(x)}{3^k},$$

то окажется

$$\Phi_{n_m}[f;\ x]\geqslant\frac{\Phi_{n_m}[\psi_{n_m};\ x]}{3^m}-|\Phi_{n_m}[A;\ x]|-|\Phi_{n_m}[B;\ x]|.$$

Но по построению

$$|\Phi_{n_m}[A;\ x]|<\frac{1}{2}.$$

Далее,

$$|\Phi_{n_m}[B;\ x]|=\left|\sum_{k=1}^{n_m}B(x_k^{(n_m)})\,\varphi_k^{(n_m)}(x)\right|\leqslant\lambda_{n_m}\max|B(x)|,$$

а так как

$$|B(x)|\leqslant\frac{1}{3^{m+1}}+\frac{1}{3^{m+2}}+\frac{1}{3^{m+3}}+\ldots=\frac{1}{2\cdot 3^m},$$

то

$$|\Phi_{n_m}[B;\ x]|\leqslant\frac{\lambda_{n_m}}{2\cdot 3^m}.$$

Наконец,

$$\Phi_{n_m}[\psi_{n_m}; z_{n_m}] = \\ = \sum_{k=1}^{n_m} \psi_{n_m}(x_k^{n_m}) \varphi_k^{(n_m)}(z_{n_m}) = \lambda_{n_m}(z_{n_m}) > \lambda_{n_m} - 1.$$

Таким образом

$$\Phi_{n_m}[f; z_{n_m}] > \frac{\lambda_{n_m} - 1}{3^m} - \frac{1}{2} - \frac{\lambda_{n_m}}{2 \cdot 3^m}$$

и, тем более,

$$\Phi_{n_m}[f; z_{n_m}] > \frac{\lambda_{n_m}}{2 \cdot 3^m} - 1 > m.$$

Значит, для построенной функции $f(x)$ полином $\Phi_n(x)$ не стремится к ней равномерно.

Теорема доказана полностью.

Нетрудно получить также условия того, чтобы сумматорный полином равномерно сходился к любой функции класса $C_{2\pi}$, нужно лишь в условии 1 говорить не об обыкновенном алгебраическом, а о тригонометрическом полиноме.

Практически иногда удобнее иметь критерий сходимости в другой форме:

Теорема 2. *Для того чтобы соотношение*

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = f(x)$$

выполнялось равномерно для всякой $f(x) \in C([a, b])$, достаточно, чтобы выполнялись условие 2 теоремы 1 и условия:

1′) *при безграничном возрастании n*

$$\sum_{k=1}^{n} \varphi_k^{(n)}(x) \rightrightarrows 1;$$

1″) *существует функция $\alpha_n(\delta)$, стремящаяся к нулю при каждом постоянном $\delta > 0$ и возрастающем n и такая, что если обозначить через $\Delta_n(x, \delta)$ множество тех k из ряда $1, 2, \ldots, n$, для которых $|x_k^{(n)} - x| \geqslant \delta$, то*

$$\sum_{k \in \Delta_n(x,\delta)} |\varphi_k^{(n)}(x)| < \alpha_n(\delta).$$

В самом деле, пусть все эти условия выполнены. Если $f(x) \in C([a, b])$, то

$$|\Phi_n[f; x] - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant \left|\Phi_n[f; x] - f(x)\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(n)}(x)\right| + |f(x)|\left|\sum_{k=1}^{n}\varphi_k^{(n)}(x) - 1\right|.$$

Второе слагаемое правой части равномерно стремится к нулю, и потому достаточно убедиться в равномерном стремлении к нулю суммы

$$\sum_{k=1}^{n}[f(x_k^{(n)}) - f(x)]\,\varphi_k^{(n)}(x). \tag{179}$$

Взяв $\varepsilon > 0$, подбираем такое $\delta > 0$, что при $|x'' - x'| < \delta$ будет $|f(x'') - f(x')| < \varepsilon$, и разбиваем сумму (179) на две: $\sum_1$ и $\sum_2$, отнеся в $\sum_1$ слагаемые, отвечающие тем k, для которых $|x_k^{(n)} - x| < \delta$, а в $\sum_2$ все остальные. Легко понять, что

$$\left|\sum\nolimits_1\right| \leqslant \varepsilon\lambda_n, \quad \left|\sum\nolimits_2\right| \leqslant 2M\alpha_n(\delta),$$

где $M = \max|f(x)|$. Таким образом сумма (179) меньше, чем

$$K\varepsilon + 2M\alpha_n(\delta).$$

Остальное ясно.

Само собою разумеется, что условие 1′ необходимо для выполнения (178). Не так обстоит дело с условием 1″. Это показывает следующий

Пример. Пусть $a = 0$, $b = 1$

$$x_k^{(n)} = \frac{k}{n}, \quad \varphi_k^{(n)}(x) = C_n^k x^k (1 - x)^{n-k} + \tau_k$$
$$(k = 0, 1, \ldots, n),$$

где

$$\tau_0 = 1, \quad \tau_1 = -1, \quad \tau_2 = \tau_3 = \ldots = \tau_n = 0.$$

Легко понять, что

$$\Phi_n[f; x] = B_n[f; x] + f(0) - f\left(\frac{1}{n}\right),$$

где $B_n[f; x]$ есть полином Бернштейна функции $f(x)$. Значит, (178) выполняется. Вместе с тем при $\delta = \frac{1}{3}$

$$\sum_{k \in \Delta_n\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{3}\right)} \left|\varphi_k^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| > \left|\varphi_0^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| + \left|\varphi_1^{(n)}\left(\frac{1}{2}\right)\right| = 2 - \frac{n-1}{2^n},$$

и 1″ не выполнено *).

В заключение установим ещё одно предложение.

Теорема 3. *Если сумматорный полином обладает тем свойством, что для всякого полинома $P_n(x)$ степени $\leqslant n$*

$$\Phi_n[P_n; x] \equiv P_n(x), \tag{180}$$

то соотношение

$$\lim_{n\to\infty} \Phi_n(x) = f(x)$$

выполняется равномерно для всех функций $f(x)$, наилучшее приближение $E_n(f)$ которых удовлетворяет условию

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n E_n(f) = 0.$$

В самом деле, если $f(x)$ — такая функция и $P_n(x)$ — её полином наилучшего приближения, то

$$|\Phi_n[f; x] - f(x)| \leqslant$$
$$\leqslant |\Phi_n[f - P_n; x]| + |P_n(x) - f(x)| \leqslant (\lambda_n + 1) E_n(f),$$

что и доказывает теорему.

Условие (180) представляет собой усиление условия 1 теоремы 1, зато здесь не требуется ограниченности чисел λ_n.

---

*) Как показала С. И. Раппопорт, в случае, когда все фундаментальные функции $\varphi_k^{(n)}(x)$ *неотрицательны,* условие 1″ также становится необходимым для равномерного стремления $\Phi_n(x)$ к $f(x)$.

ГЛАВА V.

МЕХАНИЧЕСКИЕ КВАДРАТУРЫ.

§ 1. Постановка вопроса.

Пусть $f(x)$ — непрерывная функция, заданная на сегменте $[a, b]$; требуется вычислить интеграл

$$\int_a^b f(x)\,dx. \tag{181}$$

В тех случаях, когда известна функция $F(x)$, являющаяся первообразной для $f(x)$, задача решается по формуле Ньютона — Лейбница

$$\int_a^b f(x)\,dx = F(b) - F(a).$$

Однако весьма часто этой формулой воспользоваться невозможно, так как $F(x)$ нам неизвестна. Тогда приходится искать других путей для вычисления интеграла (181). Одним из таких других путей является следующий: выбираем на $[a, b]$ n точек $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и строим интерполяционный полином Лагранжа $L(x)$, совпадающий с $f(x)$ в точках x_k:

$$L(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\, l_k(x).$$

Если $f(x)$ — «хорошая» функция (например, целая), то полином $L(x)$ можно считать её приближённым выражением. Значит, вместо интеграла (181) можно вычислить

$$\int_a^b L(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} f(x_k) \int_a^b l_k(x)\,dx.$$

Полагая

$$\int_a^b l_k(x)\,dx = A_k,$$

мы получим приближённую формулу

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k). \tag{182}$$

Формулы такого вида называются *формулами механических квадратур*. Они могут быть весьма разнообразными ввиду возможности различного выбора узлов x_k. Важно заметить при этом, что

$$l_k(x) = \frac{(x-x_1)\ldots(x-x_{k-1})(x-x_{k+1})\ldots(x-x_n)}{(x_k-x_1)\ldots(x_k-x_{k-1})(x_k-x_{k+1})\ldots(x_k-x_n)},$$

так что коэффициенты A_k от выбора функции $f(x)$ не зависят. Это замечание имеет следующее приложение: пусть нам приходится вычислять много интегралов вида (181), в которых стоят разные подинтегральные функции $f(x)$, но промежуток $[a, b]$ один и тот же. Тогда можно заранее выбрать узлы x_k и вычислить коэффициенты A_k, после чего применять формулу (182) для различных $f(x)$. Это облегчает работу вычислителя.

В качестве примера установим так называемую «формулу трапеций». Именно, если взять $n=2$ и за узлы выбрать концы сегмента $[a, b]$, то полином Лагранжа будет

$$L(x) = \frac{x-b}{a-b} f(a) + \frac{x-a}{b-a} f(b).$$

Так как

$$\int_a^b \frac{x-b}{a-b}\,dx = \int_a^b \frac{x-a}{b-a}\,dx = \frac{b-a}{2},$$

то формула (182) принимает вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)]. \tag{183}$$

Это и есть *формула трапеций.*

В тех случаях, когда подинтегральная функция имеет одну (или несколько) производных, можно вместо лагранжева интерполяционного полинома применять полином Эрмита. Это приводит, вообще говоря, к таким формулам квадратур, в которых, кроме значений самой функции $f(x)$ в узлах, присутствуют также значения её производных. Впрочем, иногда члены с производными исчезают, и мы снова получаем формулы вида (182). Интересным примером этого является так называемая «формула Симпсона».

Для её вывода положим

$$c=\frac{a+b}{2}$$

и построим интерполяционный полином Эрмита $H(x)$ по условиям *)

$$H(a)=f(a),\ H(c)=f(c),\ H'(c)=f'(c),\ H(b)=f(b). \tag{184}$$

Согласно с результатами § 4 главы 1 мы должны ввести полиномы

$$P_1(x)=A, \quad P_2(x)=B, \quad P_3(x)=C_1+C_2(x-c)$$

и, положив

$$H(x)=A+B(x-a)+(x-a)(x-b)[C_1+C_2(x-c)], \tag{185}$$

подобрать коэффициенты A, B, C_1, C_2 так, чтобы удовлетворить условиям (184).

Полагая $x=a$, сразу находим $A=f(a)$. Далее, учитывая найденное значение A и полагая $x=b$, находим

$$B=\frac{f(b)-f(a)}{b-a}.$$

*) Таким образом мы предполагаем существование $f'(x)$, по крайней мере, в точке $x=c$.

Наконец, полагая в (185) $x=c$, находим

$$C_1 = 2\frac{f(a)+f(b)-2f(c)}{(b-a)^2}.$$

Что касается коэффициента C_2, то его выражение будет содержать $f'(c)$, но в окончательную формулу этот коэффициент не войдёт. Поэтому мы не будем его находить.

Полагая

$$\int_a^b f(x)\,dx = \int_a^b H(x)\,dx$$

и пользуясь формулой (185), получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = A\int_a^b dx + B\int_a^b (x-a)\,dx +$$
$$+ C_1\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx + C_2\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\,dx.$$

Но *)

$$\int_a^b dx = b-a, \quad \int_a^b (x-a)\,dx = \frac{(b-a)^2}{2},$$
$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{6},$$
$$\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\,dx = 0.$$

*) Первое и второе равенства очевидны. Для нахождения третьего и четвёртого интегралов целесообразна подстановка $x = c + t\frac{b-a}{2}$. Например, $\int_a^b (x-a)(x-b)(x-c)\,dx =$ $= \frac{(b-a)^4}{16}\int_{-1}^{+1} t(t^2-1)\,dt = 0$, ибо подинтегральная функция нечётна.

Поэтому

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}\left[f(a) + 4f(c) + f(b)\right]. \qquad (186)$$

Это и есть *формула Симпсона.*

Изложенные соображения естественно приводят к целому ряду проблем. Прежде всего возникает вопрос о том, можно ли этим путём за счёт надлежащего выбора узлов x_k получить для всякой непрерывной функции $f(x)$ значение интеграла (181) с любой наперёд заданной степенью точности.

Если принять во внимание тот факт, что никакой закон введения узлов не позволяет получить интерполяционного процесса, равномерно сходящегося для всякой непрерывной функции, то покажется вероятным, что и на поставленный вопрос следует дать отрицательный ответ. Тем не менее это не так. Например, ниже будет показано, что если $a = -1$, $b = +1$, и узлы x_k суть корни полинома Лежандра $X_n(x)$, то при достаточно большом n ошибка формулы (182) будет сколь угодно мала.

Далее, естественно искать выражение остаточного члена формулы (182), если относительно функции $f(x)$ сделаны надлежащие предположения. Затем возникает вопрос о наиболее рациональном выборе узлов, т. е. о таком их выборе, при котором или точность формулы (182) оказалась бы по возможности высокой или коэффициенты A_k были бы наиболее простыми, и т. п.

Ниже мы и занимаемся как указанными вопросами, так и другими, относящимися к исследованию формулы (182).

§ 2. Остаточный член формулы квадратур.

Если функция $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка n включительно (где n есть число узлов x_k), то, как было установлено ещё в главе I, имеет место точная формула

$$f(x) = L(x) + \frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\,\omega(x) \qquad (a < \xi < b),$$

где $\omega(x) = (x - x_1)(x - x_2)\ldots(x - x_n)$. Отсюда

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) + \frac{1}{n!}\int_a^b f^{(n)}(\xi)\,\omega(x)\,dx. \qquad (187)$$

Точное выражение остаточного члена найти затруднительно, ибо нам неизвестна зависимость ξ от x, но оценку его дать нетрудно. Действительно, если

$$M_n = \max |f^{(n)}(x)|,$$

то очевидно, что*)

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k)\right| \leqslant \frac{M_n}{n!}\int_a^b |\omega(x)|\,dx. \qquad (188)$$

Отсюда видно, что для *целой* функции $f(x)$ при любом законе введения узлов, при котором число n этих узлов неограниченно возрастает, справедливо равенство**)

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) = \int_a^b f(x)\,dx.$$

---

*) По теореме Коркина — Золотарёва (стр. 425) множитель $\int_a^b |\omega(x)|\,dx$ имеет наименьшее значение, если за узлы интерполирования приняты корни полинома

$$\frac{\sin(n+1)\arccos\dfrac{2x-(a+b)}{b-a}}{\sqrt{(x-a)(b-x)}}.$$

**) Действительно, $\int_a^b |\omega(x)|\,dx \leqslant (b-a)^{n+1}$, а для целой функции $\lim \dfrac{M_n(b-a)^n}{n!} = 0$.

Если квадратурная формула получена интегрированием интерполяционного полинома Эрмита $H(x)$, построенного по условиям

$$H^{(i)}(x_k)=f^{(i)}(x_k)$$
$$(k=1,\,2,\,\ldots,\,n;\; i=0,\,1,\,\ldots,\,a_k-1),$$

то её ошибка не превзойдет величины

$$\frac{M_m}{m!}\int_a^b|\Omega(x)|\,dx, \tag{189}$$

где $m=a_1+a_2+\ldots+a_n$, $M_m=\max|f^{(m)}(x)|$, а*)

$$\Omega(x)=(x-x_1)^{a_1}(x-x_2)^{a_2}\ldots(x-x_n)^{a_n}.$$

В том случае, когда полином $\Omega(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$ (это будет так, например, когда все числа $a_1, a_2, \ldots, a_n$ — чётные), вместо границы (189) можно дать точное выражение остаточного члена в виде

$$\frac{f^{(m)}(\xi)}{m!}\int_a^b\Omega(x)\,dx \qquad (a\leqslant\xi\leqslant b). \tag{190}$$

Так как значение ξ нам неизвестно, то (190) приводит к той же оценке (189), но зато теперь ясно, что порядок этой оценки нельзя улучшить, ибо граница (189) будет *достигаться* для функций, у которых m-я производная постоянна. Точно так же, в тех случаях, когда $\omega(x)$ сохраняет знак на $[a, b]$, формула (187) может быть записана так:

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^n A_k f(x_k)+\frac{f^{(n)}(\xi)}{n!}\int_a^b\omega(x)\,dx. \tag{191}$$

---

*) Если $a_1=a_2=\ldots=a_n=2$, то $\int_a^b|\Omega(x)|\,dx$ получит наименьшее значение, когда x_k суть корни полинома $X_n\left[\frac{2x-(a+b)}{b-a}\right]$, где $X_n(t)$ — полином Лежандра.

Рассмотрим для примера остаточные члены формул трапеций и Симпсона.

Для формулы трапеций имеем $n=2$ и $\omega(x)=(x-a)(x-b)$. Таким образом здесь как раз имеет место сохранение знака $\omega(x)$ на $[a, b]$, и потому, замечая, что *)

$$\int_a^b (x-a)(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^3}{6},$$

мы получаем

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2}[f(a)+f(b)] - \frac{(b-a)^3}{12} f''(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{192}$$

Аналогично в случае формулы Симпсона будет $m=4$ и $\Omega(x)=(x-a)(x-c)^2(x-b)$, где $2c=a+b$. И здесь также имеет место сохранение знака $\Omega(x)$ на $[a, b]$, и потому, замечая что **)

$$\int_a^b (x-a)(x-c)^2(x-b)\,dx = -\frac{(b-a)^5}{120},$$

мы находим

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{6}[f(a)+4f(c)+f(b)] - \frac{(b-a)^5}{2880} f^{(4)}(\xi) \quad (a \leqslant \xi \leqslant b). \tag{193}$$

Для повышения точности квадратурной формулы можно увеличивать число узлов и тем самым поднимать степень интерполяционного полинома. По этому поводу надо заметить следующее: закон введения новых узлов, вообще говоря, не безразличен; для целой функции,

*) Этот интеграл проще всего вычисляется подстановкой $x=a+t(b-a)$.

**) Рекомендуется подстановка $x=c+\frac{b-a}{2}t$.

как было указано выше, всякий способ введения новых узлов позволяет добиться любой степени точности, но для произвольной непрерывной функции это не так. Кроме того, построение интерполяционного полинома высокой степени связано с весьма тягостными вычислениями.

Поэтому на практике применяют, кроме указанного, и другой способ повышения точности квадратурной формулы. Именно, разбив промежуток интегрирования на части, применяют к каждому частичному промежутку квадратурную формулу с малым числом узлов и затем складывают результаты.

Иллюстрируем этот способ на примерах формул трапеций и Симпсона.

Допустим, что промежуток $[a, b]$ разбит точками

$$x_0 = a < x_1 < x_2 < \ldots < x_n = b$$

на *n равных* частей $[x_k, x_{k+1}]$. Применяя к сегментам $[x_k, x_{k+1}]$ формулу трапеций (183), находим n приближённых равенств

$$\int_{x_k}^{x_{k+1}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}(y_k + y_{k+1}) \qquad (k = 0, 1, 2, \ldots, n-1), \quad (194)$$

где положено для краткости $f(x_k) = y_k$. Отсюда вытекает «большая» формула трапеций

$$\int_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{2n}\left[y_0 + 2(y_1 + y_2 + \ldots + y_{n-1}) + y_n\right]. \quad (195)$$

Найдём ошибку этой формулы. Ошибка каждого из равенств (194) (в предположении, что существует непрерывная вторая производная $f''(x)$) есть

$$-\frac{(b-a)^3}{12n^3} f''(\xi_k) \qquad (x_k \leqslant \xi_k \leqslant x_{k+1}).$$

Значит, ошибка формулы (195) равна

$$-\frac{(b-a)^3}{12n^3} \sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k).$$

Легко видеть, что величина

$$\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k)$$

лежит между наименьшим и наибольшим значениями $f''(x)$ на $[a, b]$. Поэтому благодаря непрерывности $f''(x)$ на $[a, b]$ найдётся точка ξ, в которой

$$f''(\xi)=\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1} f''(\xi_k).$$

Таким образом

$$\int_a^b f(x)\,dx=\frac{b-a}{2n}\left[y_0+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+y_n\right]-\\ -\frac{(b-a)^3}{12n^2}f''(\xi) \qquad (a\leqslant\xi\leqslant b). \quad (196)$$

Формула (196) показывает, что для любой функции $f(x)$ с непрерывной второй производной справедливо равенство

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b-a}{2n}\left[y_0+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+y_n\right]=\\ =\int_a^b f(x)\,dx. \quad (197)$$

Однако равенство (197) справедливо не только для таких функций, но и для любой функции, интегрируемой R. В самом деле, ведь

$$\frac{b-a}{2n}\left[y_0+2(y_1+y_2+\ldots+y_{n-1})+y_n\right]$$

есть полусумма двух римановых сумм

$$\left.\begin{aligned}\sigma_1&=\frac{b-a}{n}(y_0+y_1+\ldots+y_{n-1}),\\ \sigma_2&=\frac{b-a}{n}(y_1+y_2+\ldots+y_n),\end{aligned}\right\} \quad (198)$$

каждая из которых стремится к интегралу функции $f(x)$.

Аналогичным образом, разбивая $[a, b]$ на *чётное* число n равных промежутков $[x_k, x_{k+1}]$ и применяя к каждому *двойному* промежутку $[x_{2k}, x_{2k+2}]$ формулу Симпсона (193), находим

$$\int\limits_{x_{2k}}^{x_{2k+2}} f(x)\,dx = \frac{b-a}{3n}\left[y_{2k} + 4y_{2k+1} + y_{2k+2}\right] - \frac{(b-a)^5}{90n^5} f^{(4)}(\xi_k),$$

откуда вытекает «большая» формула Симпсона с остаточным членом:

$$\int\limits_a^b f(x)\,dx = \frac{b-a}{3n}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \right.$$
$$\left. + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n\right] - \frac{(b-a)^5}{90n^4} f^{(4)}(\xi). \quad (199)$$

Наличие степени n^4 в знаменателе остаточного члена указывает на большую точность формулы Симпсона *) по сравнению с формулой (196), в остаточном члене которой стоит только n^2. При этом затрата вычислительного труда при пользовании обеими формулами (при одинаковых n) примерно одинакова.

Те же рассуждения, что и выше, показывают, что для любой функции, интегрируемой R:

$$\lim_{n\to\infty} \frac{b-a}{3n}\left[y_0 + 4(y_1 + y_3 + \ldots + y_{n-1}) + \right.$$
$$\left. + 2(y_2 + y_4 + \ldots + y_{n-2}) + y_n\right] = \int\limits_a^b f(x)\,dx. \quad (200)$$

Действительно, полагая

$$\sigma_3 = \frac{2(b-a)}{n}(y_1 + y_3 + y_5 + \ldots + y_{n-1}),$$

---

*) Мы выражаемся здесь не абсолютно точно. Формулы (196) и (199) — не приближённые, а *точные*. Речь идёт о формуле (195) и о приближённой формуле, получаемой из (199) откидыванием остаточного члена.

будем иметь

$$\frac{b-a}{3n}[y_0+4(y_1+y_3+\ldots+y_{n-1})+$$

$$+2(y_2+y_4+\ldots+y_{n-2})+y_n]=\frac{\sigma_1+\sigma_2+\sigma_3}{3},$$

где σ_1 и σ_2 определены в (198). Остаётся заметить, что и σ_3 есть риманова сумма функции $f(x)$, отвечающая дроблению $[a, b]$ точками $x_0, x_2, x_4, \ldots, x_{2n}$.

§ 3. Квадратуры типа Гаусса.

Квадратурная формула

$$\int_a^b f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{201}$$

при любом выборе узлов x_k абсолютно точна всякий раз, когда $f(x)$ есть полином степени $\leqslant n-1$, ибо в этом случае имеет место точное равенство функции $f(x)$ своему интерполяционному полиному Лагранжа. Гаусс [1] поставил и решил задачу такого специального подбора узлов x_k, чтобы формула (201) оказывалась точной для всякой функции $f(x)$, являющейся полиномом степени не выше $2n-1$. Впоследствии результат Гаусса был обобщён К. А. Поссе [1]. Мы излагаем здесь теорию К. А. Поссе, расширенную и дополненную в работах А. А. Маркова [1, 2] и Стилтьеса [1].

Пусть на $[a, b]$ дана весовая функция $p(x)\geqslant 0$ с обычными предположениями её суммируемости и обращения в нуль разве лишь на множестве меры 0. Выбираем на $[a, b]$ узлы $x_1, x_2, \ldots, x_n$ и для любой непрерывной $f(x)$ строим интерполяционный полином Лагранжа

$$L(x)=\sum_{k=1}^{n} f(x_k)\,l_k(x), \tag{202}$$

где, как всегда,

$$l_k(x)=\frac{\omega(x)}{\omega'(x_k)(x-x_k)}, \quad \omega(x)=\prod_{k=1}^{n}(x-x_k).$$

Умножая (202) на $p(x)$ и интегрируя, находим

$$\int_a^b p(x)\,L(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),$$

где

$$A_k=\int_a^b p(x)\,l_k(x)\,dx. \tag{203}$$

Считая, что $L(x)$ есть приближённое выражение для $f(x)$, получаем приближённую формулу квадратур

$$\int_a^b p(x)\,f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k), \tag{204}$$

которая, как и формула (201), абсолютно точна всякий раз, когда $f(x)$ есть полином степени $\leqslant n-1$. Ставится вопрос о таком выборе узлов x_k, при котором формула (204) оказывается точной, если $f(x)$ есть полином степени $\leqslant 2n-1$. Проблема Гаусса получается отсюда как частный случай при $p(x)=1$. Условимся называть узлы x_k *узлами типа Гаусса,* если выполнено поставленное требование.

Теорема 1. *Для того чтобы узлы x_k были узлами типа Гаусса, необходимо и достаточно, чтобы они были корнями полинома $\omega_n(x)$, имеющего степень n и ортогонального по весу $p(x)$ ко всем полиномам низших степеней.*

Доказательство. Пусть узлы x_k суть узлы типа Гаусса.

Положим

$$\omega_n(x)=(x-x_1)(x-x_2)\ldots(x-x_n), \tag{205}$$

и пусть $\theta(x)$ есть любой полином степени $\leqslant n-1$. Тогда произведение $f(x)=\theta(x)\,\omega_n(x)$ есть полином степени

$\leqslant 2n-1$, и потому справедливо точное равенство

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k).$$

Но $f(x_1) = f(x_2) = \ldots = f(x_n) = 0$. Значит,

$$\int_a^b p(x)\, \theta(x)\, \omega_n(x)\, dx = 0$$

и $\omega_n(x)$ ортогонален по весу $p(x)$ к $\theta(x)$. Ввиду произвольности полинома $\theta(x)$ необходимость условий теоремы доказана.

Теперь предположим, что полином (205) ортогонален по всему весу $p(x)$ ко всем полиномам низших степеней.

Допустим, что $f(x)$ есть произвольный полином степени $\leqslant 2n-1$. Деля $f(x)$ на $\omega_n(x)$, получим

$$f(x) = \theta(x)\, \omega_n(x) + \rho(x), \tag{206}$$

где степени частного $\theta(x)$ и остатка $\rho(x)$ не выше $n-1$.

Отсюда

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \int_a^b p(x)\, \theta(x)\, \omega_n(x)\, dx + \int_a^b p(x)\, \rho(x)\, dx.$$

В силу сделанного предположения, первый интеграл правой части равен нулю, и потому

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \int_a^b p(x)\, \rho(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k\, \rho(x_k).$$

Но из (206) видно, что $\rho(x_k) = f(x_k)$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$. Поэтому справедливо точное равенство

$$\int_a^b p(x) f(x)\, dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k),$$

и узлы x_k суть узлы типа Гаусса.

Следствие. *Если* $a=-1$, $b=+1$, $p(x)=1$, *то решением задачи Гаусса являются корни полинома Лежандра* $X_n(x)$.

Отметим, что коэффициенты A_k формулы (204) (при любом выборе узлов) удовлетворяют соотношению

$$\sum_{k=1}^{n} A_k = \int_a^b p(x)\,dx, \tag{207}$$

ибо формула (204) верна для любого полинома степени $\leqslant n-1$ и, в частности, для $f(x)=1$.

Если же узлы суть узлы типа Гаусса (в этом случае мы будем называть формулу (204) *формулой типа Гаусса*), то, кроме (207), имеет место

Лемма. *Все коэффициенты* A_k *формулы типа Гаусса положительны.*

В самом деле, подставим в (204) функцию

$$f(x)=\left[\frac{\omega_n(x)}{x-x_i}\right]^2.$$

Так как это — полином степени $2n-2$, то справедливо равенство

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=\sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k).$$

Но

$$f(x_k)=\begin{cases} 0, & \text{если } k\neq i;\\ [\omega_n'(x_i)]^2, & \text{если } k=i.\end{cases}$$

Значит,

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=A_i[\omega_n'(x_i)]^2$$

и

$$A_i=\int_a^b p(x)\left[\frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_i)(x-x_i)}\right]^2 dx, \tag{208}$$

что и доказывает лемму*).

*) Отметим, что $\omega_n'(x_i)\neq 0$, ибо x_i есть *простой* корень полинома $\omega_n(x)$.

С помощью этой леммы легко доказывается

Теорема 2 (Т. И. Стилтьес [1]). *Пусть, $p(x)$ — весовая функция и $\{\omega_n(x)\}$ — ортогональная система полиномов, отвечающая этому весу. Пусть, далее, $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ суть корни полинома $\omega_n(x)$, а $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$ суть коэффициенты квадратурной формулы, отвечающей этим узлам. Тогда для любой непрерывной функции $f(x)$*

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}) = \int_a^b p(x) f(x)\,dx. \tag{209}$$

В самом деле, если $f(x)$ непрерывна, то по любому $\varepsilon > 0$ можно найти такой полином $P(x)$, что при всех x из $[a, b]$ будет выполнено неравенство

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon. \tag{210}$$

Полагая для краткости

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}), \tag{211}$$

будем иметь

$$\left|\int_a^b p(x) f(x)\,dx - Q_n(f)\right| \leqslant$$

$$\leqslant \left|\int_a^b p(x) f(x)\,dx - \int_a^b p(x) P(x)\,dx\right| +$$

$$+\left|\int_a^b p(x) P(x)\,dx - Q_n(P)\right| + |Q_n(P) - Q_n(f)|.$$

Но, в силу (210),

$$\left|\int_a^b p(x) f(x)\,dx - \int_a^b p(x) P(x)\,dx\right| \leqslant \varepsilon \int_a^b p(x)\,dx,$$

$$|Q_n(P) - Q_n(f)| =$$

$$= \left|\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} \{P(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})\}\right| \leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} = \varepsilon \int_a^b p(x)\,dx.$$

Таким образом

$$\left|\int_a^b p(x) f(x)\, dx - Q_n(f)\right| \leqslant$$

$$\leqslant 2\varepsilon \int_a^b p(x)\, dx + \left|\int_a^b p(x) P(x)\, dx - Q_n(P)\right|.$$

Если m есть степень полинома $P(x)$, то при $2n-1 \geqslant m$ будет

$$Q_n(P) = \int_a^b p(x) P(x)\, dx,$$

и для этих n

$$\left|\int_a^b p(x) f(x)\, dx - Q_n(f)\right| \leqslant 2\varepsilon \int_a^b p(x)\, dx,$$

что и доказывает теорему *).

Заметим, что теорема Стилтьеса (из § 3 главы IV второй части) о разложении интеграла

$$\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\, dt$$

в непрерывную дробь является простым следствием только что доказанной теоремы.

Действительно, если x лежит вне сегмента $[a, b]$, то функция

$$f(t) = \frac{1}{x-t}$$

непрерывна на $[a, b]$ и, в силу (209),

$$\int_a^b \frac{p(t)}{x-t}\, dt = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^{(n)}}{x - x_k^{(n)}}. \tag{212}$$

---

*) Эта теорема является также непосредственным следствием теоремы § 3 главы III о сходимости в среднем интерполяционного полинома Лагранжа.

Но (в обозначениях § 3 главы IV второй части)

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{\omega_n'(x_k^{(n)})} \int_a^b p(t) \frac{\omega_n(t)}{t - x_k^{(n)}}\, dt = \frac{\psi_n(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})}.$$

Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^{(n)}}{x - x_k^{(n)}} = \sum_{k=1}^{n} \frac{\psi_n(x_k^{(n)})}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}.$$

Правая часть этого равенства есть разложение рациональной дроби

$$\frac{\psi_n(x)}{\omega_n(x)} = \frac{\psi_n(x)}{(x - x_1^{(n)})(x - x_2^{(n)}) \dots (x - x_n^{(n)})}$$

на простейшие дроби *). Поэтому

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{A_k^{(n)}}{x - x_k^{(n)}} = \frac{\psi_n(x)}{\omega_n(x)}$$

и (212) принимает вид

$$\int_a^b \frac{p(t)}{x - t}\, dt = \lim_{n \to \infty} \frac{\psi_n(x)}{\omega_n(x)}.$$

Это доказательство проще, чем приведённое во второй части книги, но зато здесь не установлена равномерность стремления дроби $\frac{\psi_n(x)}{\omega_n(x)}$ к разлагаемому интегралу.

В заключение остановимся на вопросе об оценке точности формулы типа Гаусса, предполагая, что функ-

---

*) Из элементов алгебры известно, что

$$\frac{\psi_n(x)}{\omega_n(x)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{c_k}{x - x_k^{(n)}}.$$

Умножая это равенство на $x - x_i^{(n)}$ и полагая $x = x_i^{(n)}$, находим $c_i = \frac{\psi_n(x_i^{(n)})}{\omega_n'(x_i^{(n)})}$.

ция $f(x)$ имеет непрерывные производные до порядка $2n$ включительно.

Именно, если построить интерполяционный полином Эрмита $H(x)$ по условиям

$$H(x_k)=f(x_k), \quad H'(x_k)=f'(x_k) \qquad (k=1, 2, \ldots, n),$$

то, в силу результатов § 4 главы I, окажется

$$f(x)=H(x)+\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}(x-x_1)^2(x-x_2)^2\ldots(x-x_n)^2.$$

Отсюда

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=$$

$$=\int_a^b p(x)H(x)\,dx+\frac{1}{(2n)!}\int_a^b p(x)f^{(2n)}(\xi)\,\omega_n^2(x)\,dx.$$

Но степень $H(x)$ не выше $2n-1$. Значит,

$$\int_a^b p(x)H(x)\,dx=Q_n(H)=Q_n(f).$$

С другой стороны, множитель $p(x)\omega_n^2(x)$ положителен.

Поэтому окончательно *)

$$\int_a^b p(x)f(x)\,dx=Q_n(f)+\frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_a^b p(x)\,\omega_n^2(x)\,dx. \qquad (213)$$

Эта формула принадлежит А. А. Маркову [1].

§ 4. Частные случаи квадратур типа Гаусса.

1. Формула Гаусса. Если $p(x)=1$, $a=-1$, $b=+1$, то, как уже указывалось, узлами типа Гаусса

*) Полезно отметить, что в этом параграфе через $\omega_n(x)$ мы обозначаем тот ортогональный полином веса $p(x)$, старший коэффициент которого есть 1 (т. е. $\widetilde{\omega}_n(x)$ в обозначениях второй части).

будут корни полинома Лежандра $X_n(x)$. Обозначая эти корни через $\xi_1^{(n)}, \xi_2^{(n)}, \ldots, \xi_n^{(n)}$, получим формулу квадратур

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(\xi_k^{(n)}), \tag{214}$$

в которой

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{X'_n(\xi_k^{(n)})} \int_{-1}^{+1} \frac{X_n(t)}{t-\xi_k^{(n)}}\,dt \tag{215}$$

и которая верна всякий раз, когда $f(x)$ есть полином степени не выше $2n-1$. Эта формула принадлежит самому Гауссу [1].

Согласно общей формуле А. А. Маркова (213) остаточный член формулы (214) будет

$$R_n = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!} \int_{-1}^{+1} \tilde{X}_n^2(t)\,dt.$$

Но в § 1 главы V второй части было показано, что

$$\int_{-1}^{+1} \tilde{X}_n^2(t)\,dt = 2\,\frac{[(2n)!!]^2}{2n+1} \left[\frac{n!}{(2n)!}\right]^2.$$

Значит

$$R_n = 2^{2n+1} \frac{(n!)^4}{[(2n)!]^3} \frac{f^{(2n)}(\xi)}{2n+1} \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant +1).$$

Числа $\xi_k^{(n)}$ и $A_k^{(n)}$ были найдены ещё Гауссом для $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Мы приводим (см. таблицу) их значения для $n \leqslant 5$, отсылая читателя, интересующегося случаями $n=6$ и $n=7$, к монографии А. А. Маркова [4].

Кристоффель [1] нашёл весьма простые выражения для коэффициентов $A_k^{(n)}$ формулы Гаусса. Чтобы вывести эти выражения, применим формулу Кристоффеля—Дарбу (часть вторая, формула (93)) к полиномам Лежандра.

n	$\xi_k^{(n)}$	$A_k^{(n)}$	$\log A_k^{(n)}$
1	0	2	0,3010300
2	−0,5773503 +0,5773503	1 1	0 0
3	−0,7745967 0 +0,7745967	$\frac{5}{9}=0,5555556$ $\frac{8}{9}=0,8888889$ $\frac{5}{9}=0,5555556$	$\bar{1},7447275$ $\bar{1},9488475$ $\bar{1},7447275$
4	−0,8611363 −0,3399810 0,3399810 0,8611363	0,3478548 0,6521452 0,6521452 0,3478548	$\bar{1},5413981$ $\bar{1},8143443$ $\bar{1},8143443$ $\bar{1},5413981$
5	−0,9061799 −0,5384693 0 0,5384693 0,9061799	0,2369269 0,4786287 0,5688889 0,4786287 0,2369269	$\bar{1},3746143$ $\bar{1},6799987$ $\bar{1},7550275$ $\bar{1},6799987$ $\bar{1},3746143$

Так как для этих полиномов $\lambda_{n+1}=\frac{(n+1)^2}{(2n+1)(2n+3)}$, то упомянутая формула будет (после замены n на $n-1$):

$$\sum_{k=0}^{n-1}\hat{X}_k(t)\hat{X}_k(x)=$$

$$=\frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}\,\frac{\hat{X}_n(t)\hat{X}_{n-1}(x)-\hat{X}_n(x)\hat{X}_{n-1}(t)}{t-x}.$$

Интегрируя это равенство и вспоминая, что $\hat{X}_0(t)=\frac{\sqrt{2}}{2}$, получим

$$1=\frac{n}{\sqrt{(2n-1)(2n+1)}}\int_{-1}^{+1}\frac{\hat{X}_n(t)\hat{X}_{n-1}(x)-\hat{X}_n(x)\hat{X}_{n-1}(t)}{t-x}\,dt.$$

Если вместо нормированных полиномов $\hat{X}_n(x)$ ввести в рассмотрение полиномы Лежандра

$$P_n(x)=\sqrt{\frac{2}{2n+1}}\,\hat{X}_n(x),$$

то предыдущее равенство примет вид

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)P_{n-1}(x)-P_n(x)P_{n-1}(t)}{t-x}\,dt=\frac{2}{n}.$$

Положим, здесь $x=\xi_k^{(n)}$. Так как $P_n(\xi_k^{(n)})=0$, то

$$\int_{-1}^{+1}\frac{P_n(t)}{t-\xi_k^{(n)}}\,dt=\frac{2}{nP_{n-1}(\xi_k^{(n)})}.$$

Но в § 2 главы V второй части было установлено, что

$$(1-x^2)P_n'(x)=nP_{n-1}(x)-nxP_n(x).$$

Значит

$$nP_{n-1}(\xi_k^{(n)})=[1-(\xi_k^{(n)})^2]\,P_n'(\xi_k^{(n)}),$$

и в связи с (215) мы получаем окончательно

$$A_k^{(n)}=\frac{2}{1-[\xi_k^{(n)}]^2}\,\frac{1}{[P_n'(\xi_k^{(n)})]^2}. \tag{216}$$

Формула Гаусса полезна не только тогда, когда требуется вычислить интеграл по промежутку $[-1, +1]$. Действительно, всякий другой промежуток сводится к этому линейной подстановкой.

II. Формула Эрмита. Пусть $a=-1$, $b=+1$, $p(x)=\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. В этом случае за узлы x_k следует принять корни полинома Чебышева $\mathscr{T}_n(x)$, ибо это и есть ортогональный полином веса $\frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$. Ввиду того что $\mathscr{T}_n(x) = \cos(n \arccos x)$, эти корни суть

$$x_k = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Коэффициенты A_k формулы квадратур суть

$$A_k = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)}{T'_n(x_k)(x-x_k)} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Полагая $x = \cos\theta$, находим

$$A_k = \frac{1}{T'_n(x_k)} \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} d\theta \qquad \left(\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi\right).$$

Так как $\frac{T_n(x)}{x-x_k}$ есть целый полином (степени $n-1$), то

$$\frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k}$$

есть полином степени $n-1$ относительно $\cos\theta$ и, стало быть, это тригонометрический полином порядка $n-1$, т. е.

$$\frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} = B_0 + B_1\cos\theta + \ldots + B_{n-1}\cos(n-1)\theta. \quad (217)$$

В таком случае

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta\, d\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} = \pi B_0.$$

Остаётся найти B_0. С этой целью положим в (217) последовательно

$$\theta = \theta_k, \quad \theta = \theta_k + \frac{2\pi}{n},$$

$$\theta = \theta_k + 2\frac{2\pi}{n}, \quad \ldots, \quad \theta = \theta_k + (n-1)\frac{2\pi}{n},$$

Так как

$$\left.\frac{\cos n\theta}{\cos\theta-\cos\theta_k}\right|_{\theta=\theta_k}=n\,\frac{\sin n\theta_k}{\sin\theta_k},$$

а*)

$$\frac{\cos n\left(\theta_k+m\,\frac{2\pi}{n}\right)}{\cos\left(\theta_k+m\,\frac{2\pi}{n}\right)-\cos\theta_k}=0\qquad(m=1,\,2,\,\ldots,\,n-1),$$

то мы получим n равенств

$$B_0+B_1\cos\theta_k+B_2\cos 2\theta_k+\ldots$$
$$\ldots+B_{n-1}\cos(n-1)\,\theta_k=n\,\frac{\sin n\theta_k}{\sin\theta_k},$$

$$B_0+B_1\cos\left(\theta_k+\frac{2\pi}{n}\right)+B_2\cos 2\left(\theta_k+\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+B_{n-1}\cos(n-1)\left(\theta_k+\frac{2\pi}{n}\right)=0,$$

. . . .

$$B_0+B_1\cos\left(\theta_k+(n-1)\,\frac{2\pi}{n}\right)+$$
$$+B_2\cos 2\left(\theta_k+(n-1)\,\frac{2\pi}{n}\right)+\ldots$$
$$\ldots+B_{n-1}\cos(n-1)\left(\theta_k+(n-1)\,\frac{2\pi}{n}\right)=0.$$

---

*) Числитель этой дроби очевидно равен нулю. Знаменатель же её отличен от нуля. Действительно равенство $\cos\alpha=\cos\beta$ возможно в двух случаях: $\alpha-\beta=2N\pi$ и $\alpha+\beta=2N\pi$. Но $\left(\theta_k+m\,\frac{2\pi}{n}\right)-\theta_k\neq 2N\pi$, так как $m=1,\,2,\,\ldots,\,n-1$. С другой стороны, $2\theta_k+m\,\frac{2\pi}{n}=\frac{2k-1+2m}{n}\,\pi\neq 2N\pi$, ибо $2k-1+2m\neq 2Nn$.

Складывая эти равенства и замечая, что *)

$$\sum_{r=0}^{n-1} \cos m\left(\theta_k + r\frac{2\pi}{n}\right) = 0,$$

находим

$$B_0 = \frac{\sin n\theta_k}{\sin \theta_k}.$$

Таким образом

$$A_k = \frac{1}{T'_n(x_k)}\,\pi\,\frac{\sin n\theta_k}{\sin \theta_k}. \tag{218}$$

С другой стороны, $T_n(x) = \cos(n \arccos x)$. Значит,

$$T'_n(x) = n\frac{\sin(n \arccos x)}{\sqrt{1-x^2}} = n\frac{\sin n\theta}{\sin \theta}$$

и

$$T'_n(x_k) = n\frac{\sin n\theta_k}{\sin \theta_k}. \tag{219}$$

Сопоставляя (218) и (219), находим окончательно

$$A_k = \frac{\pi}{n}.$$

Весьма замечательно, что A_k не зависит от k.

Таким образом для рассматриваемого случая квадратурная формула имеет вид

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right). \tag{220}$$

---

*) В самом деле, умножая сумму

$$S = \sum_{r=0}^{n-1} \cos m\left(\theta_k + r\frac{2\pi}{n}\right)$$

на $2\sin\frac{m\pi}{n} \neq 0$ и применяя формулу

$$2\cos A \sin B = \sin(A+B) - \sin(A-B),$$

находим

$$2S\sin\frac{m\pi}{n} = \sin m\left(\theta_k + \frac{2n-1}{n}\pi\right) - \sin m\left(\theta_k - \frac{\pi}{n}\right) = 0.$$

Эта формула обычно называется *формулой Эрмита*. Её остаточный член согласно общей теории имеет вид

$$R_n = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1}\tilde{T}_n^2(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}} \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant +1).$$

Но $\tilde{T}_n(x) = \frac{1}{2^{n-1}}\cos(n \arccos x)$. Значит,

$$R_n = \frac{\pi}{(2n)!\, 2^{2n-1}} f^{(2n)}(\xi).$$

Чтобы использовать формулу (220) для вычисления интеграла

$$I = \int_a^b F(t)\, dt,$$

следует сделать подстановку $t = \frac{(b-a)x + a + b}{2}$, приводящую интеграл I к виду

$$I = \int_{-1}^{+1} \varphi(x)\, dx,$$

и затем положить $f(x) = \varphi(x)\sqrt{1-x^2}$. Тогда

$$I = \int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\, dx$$

и можно применить формулу (220).

III. Если $a = -1$, $b = +1$ и $p(x) = \sqrt{1-x^2}$, то за узлы надлежит принять корни полинома Чебышева второго рода, т. е. полинома

$$U_n(x) = \frac{\sin[(n+1)\arccos x]}{\sqrt{1-x^2}}.$$

Эти корни суть

$$x_k = \cos\frac{k\pi}{n+1} \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Коэффициенты A_k для рассматриваемого случая таковы:

$$A_k = \int_{-1}^{+1} \frac{U_n(x)}{U'_n(x_k)(x-x_k)} \sqrt{1-x^2}\, dx =$$

$$= \frac{1}{U_n(x_k)} \int_0^{\pi} \frac{\sin(n+1)\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} \sin\theta\, d\theta,$$

где положено $\theta_k = \frac{k\pi}{n+1}$. Но

$$\sin(n+1)\theta \sin\theta = \frac{1}{2}[\cos n\theta - \cos(n+2)\theta].$$

Замечая, что *) $\cos(n+2)\theta_k = \cos n\theta_k$, получим

$$A_k = \frac{1}{2U'_n(x_k)} \left\{ \int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta - \cos n\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} d\theta - \right.$$

$$\left. - \int_0^{\pi} \frac{\cos(n+2)\theta - \cos(n+2)\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} d\theta \right\}.$$

Полином $T_n(x) - T_n(x_k)$ делится на $x - x_k$ нацело. Поэтому

$$\frac{\cos n\theta - \cos n\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}$$

есть тригонометрический полином порядка $n-1$:

$$\frac{\cos n\theta - \cos n\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} = B_0 + B_1\cos\theta + \ldots + B_{n-1}\cos(n-1)\theta,$$

откуда

$$\int_0^{\pi} \frac{\cos n\theta - \cos n\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k} d\theta = \pi B_0.$$

Как и выше, коэффициент B_0 оказывается равным

$$B_0 = \frac{\sin n\theta_k}{\sin\theta_k},$$

*) Это следует из того, что $(n+2)\theta_k + n\theta_k = 2k\pi$.

причём и способ нахождения B_0 точно такой, как и выше.

Аналогично получается

$$\int_0^\pi \frac{\cos(n+2)\theta - \cos(n+2)\theta_k}{\cos\theta - \cos\theta_k}\,d\theta = \pi\frac{\sin(n+2)\theta_k}{\sin\theta_k}.$$

Таким образом

$$A_k = \frac{\pi}{2U_n'(x_k)}\frac{\sin n\theta_k - \sin(n+2)\theta_k}{\sin\theta_k} =$$

$$= -\frac{\pi}{U_n'(x_k)}\cos(n+1)\theta_k = \frac{(-1)^{k+1}\pi}{U_n'(x_k)}.$$

Но

$$U_n(x) = \frac{-(n+1)\cos[(n+1)\arccos x] + \sin[(n+1)\arccos x]\frac{x}{\sqrt{1-x^2}}}{1-x^2}.$$

Значит,

$$U_n'(x_k) = \frac{-(n+1)\cos(n+1)\theta_k}{\sin^2\theta_k} = (-1)^{k+1}\frac{n+1}{\sin^2\theta_k}.$$

Отсюда следует

$$A_k = \frac{\pi}{n+1}\sin^2\theta_k,$$

и формула квадратур имеет вид

$$\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,f(x)\,dx = \frac{\pi}{n+1}\sum_{k=1}^{n}\sin^2\frac{k\pi}{n+1}\,f\left(\cos\frac{k\pi}{n+1}\right).$$

Остаточный член этой формулы есть

$$R_n = \frac{f^{(2n)}(\xi)}{(2n)!}\int_{-1}^{+1}\sqrt{1-x^2}\,\tilde{U}_n^2(x)\,dx.$$

Но $\tilde{U}_n(x) = \dfrac{1}{2^n}\dfrac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}}$. Поэтому

$$R_n = \frac{\pi}{(2n)!\,2^{2n+1}}f^{(2n)}(\xi) \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant 1).$$

IV. Не вдаваясь в подробности выкладок, которые очень похожи на предыдущие, отметим, что для $a = -1$, $b = +1$ и

$$p(x) = \sqrt{\frac{1-x}{1+x}}$$

получается квадратурная формула

$$\int_{-1}^{+1} \sqrt{\frac{1-x}{1+x}} f(x)\, dx = \frac{4\pi}{2n+1} \sum_{k=1}^{n} \sin^2 \frac{k\pi}{2n+1} f\left(\cos \frac{2k\pi}{2n+1}\right),$$

остаточный член которой имеет вид

$$R_n = \frac{\pi}{(2n)!\, 2^{2n}} f^{(2n)}(\xi) \qquad (-1 \leqslant \xi \leqslant +1).$$

ГЛАВА VI.

ДОПОЛНИТЕЛЬНЫЕ СВЕДЕНИЯ ПО ТЕОРИИ МЕХАНИЧЕСКИХ КВАДРАТУР.

§ 1. Общий квадратурный процесс и его сходимость.

Формула

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{n} A_k f(x_k) \tag{221}$$

была получена нами в результате интегрирования приближённого равенства $f(x) = L(x)$, где $L(x)$ есть лагранжев интерполяционный полином функции $f(x)$. Однако к подобной формуле мы приходим не только исходя из интерполяционного полинома. Действительно, всякое приближённое представление $f(x)$ с помощью сумматорной формулы

$$f(x) \approx \sum_{k=1}^{n} f(x_k)\varphi_k(x)$$

после интегрирования приведёт нас к приближённой формуле вида (221). Например, используя полиномы Бернштейна

$$\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right) C_n^k x^k (1-x)^{n-k},$$

получаем квадратурную формулу,

$$\int_0^1 f(x)\,dx = \sum_{k=}^{n} A_k f\left(\frac{k}{n}\right).$$

Здесь

$$A_k = C_n^k \int_0^1 x^k (1-x)^{n-k}\, dx = C_n^k \mathrm{B}(k+1, n-k+1) =$$
$$= C_n^k \frac{\Gamma(k+1)\,\Gamma(n-k+1)}{\Gamma(n+2)} = \frac{1}{n+1}.$$

Ещё более общим образом можно рассматривать формулы вида (221), совершенно не ставя вопроса о том, каково происхождение коэффициентов A_k. Само собой разумеется, что в отличие от ранее рассмотренного случая, когда формула (221) была получена интегрированием интерполяционного полинома, теперь уже нельзя утверждать, что формула будет точной для всякого полинома степени $\leqslant n-1$.

Всё сказанное естественно приводит к постановке следующего вопроса: даны две треугольные матрицы— узлов и коэффициентов

$$\left.\begin{array}{ll} x_1^{(1)}, & A_1^{(1)}, \\ x_1^{(2)}, x_2^{(2)}, & A_1^{(2)}, A_2^{(2)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \\ x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)} & A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}, \\ \cdots\cdots\cdots\cdots & \cdots\cdots\cdots\cdots \end{array}\right\} \tag{222}$$

причём узлы принадлежат некоторому сегменту $[a, b]$. Для всякой функции $f(x)$, заданной на $[a, b]$, составляется функционал

$$Q_n(f) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} f(x_k^{(n)}). \tag{223}$$

Спрашивается, при каких условиях

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(f) = \int_a^b f(x)\, dx. \tag{224}$$

В тех случаях, когда (224) выполнено, мы будем говорить, что для функции $f(x)$ *квадратурный процесс*, порождаемый матрицами (222), *сходится*.

Теорема 1. *Для того чтобы квадратурный процесс, порождаемый матрицами* (222), *сходился для всякой функции* $f(x)$, *непрерывной на* $[a, b]$, *необходимо и достаточно выполнение двух условий:*

1) *процесс сходится для всякого полинома;*

2) *существует такая постоянная* K, *что*

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant K \quad (k = 1, 2, \ldots, n). \tag{225}$$

Достаточность *) условий теоремы устанавливается так: пусть эти условия выполнены и $f(x) \in C([a,b])$. Взяв любое $\varepsilon > 0$, мы можем подобрать такой полином $P(x)$, что при всех x из $[a, b]$ будет выполняться неравенство

$$|P(x) - f(x)| < \varepsilon.$$

В таком случае

$$|Q_n(P) - Q_n(f)| = \left| \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} [P(x_k^{(n)}) - f(x_k^{(n)})] \right| \leqslant$$

$$\leqslant \varepsilon \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant K\varepsilon,$$

и неравенство

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - Q_n(f) \right| \leqslant \left| \int_a^b f(x)\, dx - \int_a^b P(x)\, dx \right| +$$

$$+ \left| \int_a^b P(x)\, dx - Q_n(P) \right| + |Q_n(P) - Q_n(f)|$$

показывает, что

$$\left| \int_a^b f(x)\, dx - Q_n(f) \right| \leqslant \varepsilon [b - a + K] + \left| \int_a^b P(x)\, dx - Q_n(P) \right|.$$

---

*) Достаточность условий теоремы была впервые доказана В. А. Стекловым [2], необходимость — Г. Полиа [1].

Ввиду того что $P(x)$ есть полином, при достаточно больших n окажется

$$\left|\int_a^b P(x)\,dx - Q_n(P)\right| < \varepsilon,$$

и при этих n будет

$$\left|\int_a^b f(x)\,dx - Q_n(f)\right| < \varepsilon\,[b-a+K+1],$$

так что выполнено (224).

В доказательстве необходимости нуждается лишь условие 2. Проведём его от противного «методом скользящего горба». Именно, предположим, что квадратурный процесс сходится для всякой непрерывной функции, но условие 2 не выполнено. Зададим на $[a, b]$ непрерывную функцию $\varphi_n(x)$, удовлетворяющую условиям

$$|\varphi_n(x)| \leqslant 1, \quad \varphi_n(x_k^{(n)}) = \operatorname{sign} A_k^{(n)} \qquad (k=1, 2, \ldots, n).$$

Для этого достаточно задать эту функцию сначала только в узлах $x_k^{(n)}$ и определить её как линейную между узлами (и как постоянную в сегментах $[a, x_1^{(n)}]$ и $[x_n^{(n)}, b]$). Нетрудно видеть, что

$$Q_n(\varphi_n) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} \varphi_n(x_k^{(n)}) = \sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}|.$$

В целях простоты обозначений положим

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| = L_n, \tag{226}$$

так что

$$Q_n(\varphi_n) = L_n.$$

Построив функции $\varphi_n(x)$ для всех натуральных n, положим $n_1 = 1$. Так как для функции $\varphi_{n_1}(x)$ (она непрерывна!) квадратурный процесс сходится, то

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\varphi_{n_1}) = \int_a^b \varphi_{n_1}(x)\,dx.$$

Но $|\varphi_{n_1}(x)| \leqslant 1$. Значит,

$$\left|\int_a^b \varphi_{n_1}(x)\,dx\right| \leqslant b-a,$$

и найдётся такое N_1, что при $n > N_1$ окажется

$$|Q_n(\varphi_{n_1})| < e(b-a).$$

С другой стороны, условие 2 не выполнено, и найдётся такой номер $n_2 \geqslant N_1$, что

$$L_{n_2} > 2 \cdot 2!.$$

Функция

$$\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}$$

непрерывна, для неё квадратурный процесс сходится, а

$$\left|\int_a^b \left[\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}\right] dx\right| \leqslant \left(\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}\right)(b-a) < (e-1)(b-a).$$

Поэтому найдётся такое N_2, что при $n > N_2$ окажется

$$\left|Q_n\left[\frac{\varphi_{n_1}(x)}{1!} + \frac{\varphi_{n_2}(x)}{2!}\right]\right| < e(b-a).$$

С другой стороны, условие 2 не выполнено, и найдётся такой номер $n_3 > N_2$, что

$$L_{n_3} > 3 \cdot 3!$$

Допустим, что нами уже построены номера $n_1, n_2, \ldots, n_{m-1}$. Функция

$$\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}$$

непрерывна, и для неё квадратурный процесс сходится. Но

$$\left|\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right| < \sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{i!} = e - 1.$$

Поэтому

$$\left|\int_a^b \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right] dx\right| \leqslant (e-1)(b-a),$$

и найдётся такое N_{m-1}, что при $n > N_{m-1}$ будет

$$\left|Q_n \left[\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right]\right| < e(b-a).$$

С другой стороны, условие 2 не выполнено и, стало быть, найдётся номер $n_m > N_{m-1}$, для которого

$$L_{n_m} > m \cdot m! \tag{227}$$

Таким образом можно считать, что нами определена бесконечная последовательность номеров $n_1, n_2, n_3, \ldots$

Положим

$$f(x) = \sum_{i=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}.$$

Это, очевидно, — непрерывная функция. Однако вопреки сделанному допущению, квадратурный процесс для неё *расходится*. В самом деле, пусть $m > 1$ — натуральное число. Тогда

$$f(x) = \sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!} + \frac{\varphi_{n_m}(x)}{m!} + \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}$$

и

$$Q_{n_m}(f) =$$

$$= Q_{n_m}\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right) + \frac{1}{m!} L_{n_m} + Q_{n_m}\left(\sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right). \tag{228}$$

Так как $n_m > N_{m-1}$, то

$$\left|Q_{n_m}\left(\sum_{i=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}\right)\right| < e(b-a). \tag{229}$$

С другой стороны, функция

$$\rho(x) = \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_i}(x)}{i!}$$

допускает оценку

$$|\rho(x)| < \sum_{i=m+1}^{\infty} \frac{1}{i!} = \\ = \frac{1}{(m+1)!}\left[1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \ldots\right].$$

Но

$$1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)(m+3)} + \ldots < 1 + \frac{1}{m+2} + \frac{1}{(m+2)^2} + \ldots = \\ = \frac{m+2}{m+1} < \frac{m+1}{m}.$$

Значит,

$$|\rho(x)| < \frac{1}{m \cdot m!}.$$

В таком случае

$$|Q_{n_m}(\rho)| = \left|\sum_{k=1}^{n_m} A_k^{(n_m)} \rho(x_k^{(n_m)})\right| < \frac{L_{n_m}}{m \cdot m!}. \qquad (230)$$

Сопоставляя (228), (229) и (230), находим

$$Q_{n_m}(f) > \frac{1}{m!} L_{n_m} - e(b-a) - \frac{1}{m \cdot m!} L_{n_m},$$

и благодаря (227)

$$Q_{n_m}(f) > m - 1 - e(b-a).$$

Таким образом

$$\lim_{m\to\infty} Q_{n_m}(f) = +\infty,$$

и квадратурный процесс для $f(x)$ расходится. Теорема доказана.

Как видно из формулы (223), функционал $Q_n(f)$ зависит от $2n$ параметров: $x_1^{(n)}, x_2^{(n)}, \ldots, x_n^{(n)}$ и $A_1^{(n)}, A_2^{(n)}, \ldots, A_n^{(n)}$. Вообще говоря, эти параметры независимы друг от друга. Каждое условие, наложенное на $Q_n(f)$, понижает число свободных параметров. Например, требование Гаусса, чтобы формула квадратур была точна для всех полиномов степени не выше $2n-1$, даёт как раз $2n$ условий и тем самым однозначно определяет и узлы и коэффициенты.

В тех случаях, когда матрицы (222) связаны соотношениями

$$A_k^{(n)} = \int_a^b l_k^{(n)}(x)\,dx, \tag{231}$$

где

$$l_k^{(n)}(x) = \frac{\omega_n(x)}{\omega_n'(x_k^{(n)})(x - x_k^{(n)})}, \quad \omega_n(x) = \prod_{k=1}^{n}(x - x_k^{(n)}),$$

мы будем говорить, что квадратурный процесс является *интерполяционно-квадратурным*. В таком процессе узлы произвольны, а коэффициенты определены однозначно.

Теорема 2. *Для того чтобы квадратурный процесс был интерполяционно-квадратурным, необходимо и достаточно, чтобы формула*

$$Q_n(f) = \int_a^b f(x)\,dx \tag{232}$$

была точна для всякого полинома степени ниже n.

Действительно, пусть выполнено (231). Если $f(x)$ есть полином степени ниже n, то $f(x)$ совпадает со своим лагранжевым интерполяционным полиномом по узлам $x_k^{(n)}$:

$$f(x) = \sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)})\, l_k^{(n)}(x).$$

Интегрируя это равенство и принимая во внимание (231), мы приходим к (232). Обратно, если равенство (232) справедливо для всякого полинома степени ниже n, то, в частности, оно справедливо для $l_i^{(n)}(x)$:

$$\sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} l_i^{(n)}(x_k^{(n)}) = \int_a^b l_i^{(n)}(x)\,dx. \tag{233}$$

Но $l_i^{(n)}(x_i^{(n)}) = 1$ и $l_i^{(n)}(x_k^{(n)}) = 0$ при $k \neq i$. Поэтому (233) приводится к (231).

Интерполяционно-квадратурный процесс очевидным образом сходится для всякого полинома, ибо если $f(x)$ полином степени m, то при $n > m$ выполняется (232). Таким образом получается

Теорема 3. *Для сходимости интерполяционно-квадратурного процесса для всякой непрерывной функции необходимо и достаточно, чтобы выполнялось неравенство*

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant K. \tag{234}$$

Отметим в заключение одно необходимое условие сходимости квадратурного процесса.

Теорема 4 (В. А. Стеклов [2]). *Если квадратурный процесс сходится для всякой непрерывной функции, то для всякого сегмента* $[p, q] \subset [a, b]$ *можно указать такое* N, *что при* $n > N$ *имеются узлы* $x_k^{(n)}$, *содержащиеся в* $[p, q]$.

В самом деле, пусть это условие не выполнено и $[p, q]$ есть такой частичный сегмент, для которого нет соответствующего числа N. Тогда найдётся бесконечная последовательность номеров $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ такого рода, что ни один из узлов $x_k^{(n_i)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n_i)$ не попадает в $[p, q]$.

Пусть $h = \frac{q-p}{3}$ и функция $\psi(x)$ определена следующим образом *):

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leqslant x \leqslant p \text{ и } q \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при } p+h \leqslant x \leqslant q-h, \\ \text{линейна} & \text{при } p \leqslant x \leqslant p+h \text{ и } q-h \leqslant x \leqslant q. \end{cases}$$

*) Читателю рекомендуется начертить график функции $\psi(x)$.

Так как $\psi(x)$ непрерывна, то должно быть

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(\psi) = \int_a^b \psi(x)\,dx.$$

Но это явно нелепо. Действительно, $x_k^{(n_i)} \not\subset [p, q]$. Значит, $\psi(x_k^{(n_i)}) = 0$ и

$$Q_{n_i}(\psi) = \sum_{k=1}^{n_i} A_k^{(n_i)} \psi(x_k^{(n_i)}) = 0,$$

а, с другой стороны, $\psi(x)$ неотрицательна и

$$\int_a^b \psi(x)\,dx > \int_{p+h}^{q-h} \psi(x)\,dx = h > 0.$$

Теорема доказана.

§ 2. Случай положительных коэффициентов.

Остановимся на изучении таких квадратурных процессов, в которых все коэффициенты $A_k^{(n)}$ неотрицательны. Эти процессы обладают рядом интересных особенностей.

Теорема 1 (В. А. Стеклов [2]). *Если все коэффициенты $A_k^{(n)}$ неотрицательны, то, для того чтобы квадратурный процесс сходился для всякой непрерывной функции, необходимо и достаточно, чтобы он сходился для всякого полинома.*

В самом деле, необходимость условия теоремы тривиальна. Его достаточность вытекает из того, что функция $f(x) \equiv 1$ есть полином и, стало быть,

$$\lim_{n\to\infty} Q_n(1) = \int_a^b dx = b - a.$$

Значит, числа $Q_n(1)$ ограничены. С другой стороны,

$$Q_n(1) = \sum_{k=1}^{n} A_k^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \left| A_k^{(n)} \right|,$$

и потому выполнено и второе условие теоремы 1 § 1, что и обеспечивает сходимость процесса для всякой непрерывной функции.

Следствие. *Интерполяционно-квадратурный процесс с неотрицательными коэффициентами сходится для всякой непрерывной функции.*

Действительно, мы уже отмечали, что интерполяционно-квадратурный процесс сходится для всякого полинома.

Примером интерполяционно-квадратурного процесса с неотрицательными коэффициентами $A_k^{(n)}$ является процесс Гаусса, т. е. процесс, в котором $a=-1$, $b=+1$, а узлы $x_k^{(n)}$ суть корни полинома Лежандра. Это доказано нами в лемме § 3 главы V.

Приведём примеры других интерполяционно-квадратурных процессов, в которых коэффициенты $A_k^{(n)}$ неотрицательны.

Теорема 2. *Если $a=-1$, $b=+1$, а узлы $x_k^{(n)}$ суть корни полинома Чебышева $T_n(x)$, то коэффициенты $A_k^{(n)}$ положительны* *).

Заметим, что эта теорема не содержится в лемме § 3 главы V, ибо указанная лемма для нашего случая даёт положительность коэффициентов

$$\int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)}{T_n'(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})} \frac{dx}{\sqrt{1-x^2}},$$

а нам нужно рассмотреть коэффициенты

$$A_k^{(n)} = \int_{-1}^{+1} \frac{T_n(x)}{T_n'(x_k^{(n)})(x-x_k^{(n)})} dx. \tag{235}$$

Переходя к доказательству теоремы, положим в (235) $x=\cos\theta$. Замечая, что

$$T_n'(x_k^{(n)}) = \frac{(-1)^{k-1}}{\sin\theta_k} \qquad \left(\theta_k = \frac{2k-1}{2n}\pi\right),$$

*) Фейер [5].

получим

$$A_k^{(n)} = (-1)^{k-1} \frac{\sin\theta_k}{n} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k} \sin\theta\, d\theta. \qquad (236)$$

Положим

$$\varphi_k(\theta) = \sum_{r=1}^{n-1} \cos r\theta \cos r\theta_k.$$

Тогда, в силу известной тригонометрической формулы, мы будем иметь

$$2\varphi_k(\theta) = \sum_{r=1}^{n-1} [\cos r(\theta + \theta_k) + \cos r(\theta - \theta_k)].$$

Отсюда (в силу той же тригонометрической формулы)

$$4\varphi_k(\theta)\cos\theta = \sum_{r=1}^{n-1} \{\cos[(r+1)\theta + r\theta_k] + \cos[(r-1)\theta + r\theta_k] + \\ + \cos[(r+1)\theta - r\theta_k] + \cos[(r-1)\theta - r\theta_k]\}.$$

Аналогично

$$4\varphi_k(\theta)\cos\theta_k = \\ = \sum_{r=1}^{n-1} \{\cos[r\theta + (r+1)\theta_k] + \cos[r\theta + (r-1)\theta_k] + \\ + \cos[r\theta - (r-1)\theta_k] + \cos[r\theta - (r+1)\theta_k]\}.$$

Вычитая это равенство из предыдущего и производя надлежащие группировки слагаемых, получаем

$$4\varphi_k(\theta)(\cos\theta - \cos\theta_k) = \cos[n\theta + (n-1)\theta_k] - \\ - \cos[(n-1)\theta + n\theta_k] + \cos[n\theta - (n-1)\theta_k] - \\ - \cos[(n-1)\theta - n\theta_k] - 2(\cos\theta - \cos\theta_k). \qquad (237)$$

Но

$$\cos[n\theta + (n-1)\theta_k] + \cos[n\theta - (n-1)\theta_k] = \\ = 2\cos n\theta \cos(n-1)\theta_k$$

$$\cos[(n-1)\theta + n\theta_k] + \cos[(n-1)\theta - n\theta_k] = \\ = 2\cos(n-1)\theta \cos n\theta_k.$$

Замечая, что $\cos n\theta_k = 0$, $\cos(n-1)\theta_k = \sin n\theta_k \sin\theta_k = (-1)^{k-1}\sin\theta_k$, придадим равенству (237) вид

$$2\varphi_k(\theta)(\cos\theta - \cos\theta_k) = (-1)^{k-1}\sin\theta_k \cos n\theta - (\cos\theta - \cos\theta_k).$$

Отсюда

$$(-1)^{k-1}\frac{\cos n\theta}{\cos\theta - \cos\theta_k}\sin\theta_k = 1 + 2\varphi_k(\theta).$$

Поэтому формула (236) примет вид

$$A_k^{(n)} = \frac{1}{n}\int_0^{\pi}\left[1 + 2\sum_{r=1}^{n-1}\cos r\theta\cos r\theta_k\right]\sin\theta\, d\theta.$$

Но

$$2\int_0^{\pi}\cos r\theta\sin\theta\, d\theta = \int_0^{\pi}[\sin(r+1)\theta - \sin(r-1)\theta]\, d\theta.$$

Если r — число нечётное, то интеграл, стоящий в правой части, равен нулю. Если же r — число чётное, то его значение есть

$$-\left(\frac{2}{r-1} - \frac{2}{r+1}\right).$$

Стало быть,

$$A_k^{(n)} = \frac{2}{n}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right)\cos 2\theta_k - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right)\cos 4\theta_k - \ldots - \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right)\cos m\theta_k\right\},$$

где $m = n-1$ при нечётном n и $m = n-2$ при чётном n.

В таком случае

$$A_k^{(n)} > \frac{2}{n}\left\{1 - \left(1 - \frac{1}{3}\right) - \right.$$
$$\left. - \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{5}\right) - \ldots - \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1}\right)\right\} = \frac{2}{n(m+1)}$$

и, тем более, $A_k^{(n)} > 0$. Теорема доказана.

Сходным образом доказывается

Теорема 3. *Если* $a=-1$, $b=+1$, *а узлы суть корни полинома Чебышева второго рода*

$$U_n(x)=\frac{\sin(n+1)\arccos x}{\sqrt{1-x^2}},$$

то коэффициенты $A_k^{(n)}$ *положительны* *).

Мы не будем останавливаться на доказательстве этой теоремы.

Теорема 4. *Если квадратурный процесс с неотрицательными коэффициентами* **) *сходится для всякой непрерывной функции и*

$$B_n=\max A_k^{(n)}\qquad (k=1,\,2,\,\ldots,\,n),$$

то

$$\lim_{n\to\infty} B_n=0.$$

Теорема доказывается от противного. Если B_n не стремится к нулю, то найдётся число $\sigma>0$ и бесконечная последовательность номеров n_i такого рода, что

$$B_{n_i}>\sigma.$$

Пусть $k(i)$ таково, что $A_{k(i)}^{(n_i)}=B_{n_i}$. Точки $x_{k(i)}^{(n_i)}$ имеют на $[a,b]$ точку сгущения ξ. Пусть для определённости $a<\xi<b$.

---

*) Фейер [5]. Теоремы 2 и 3 были обобщены Сеге [1], стр. 350, показавшим, что $A_k^{(n)}>0$, если $x_k^{(n)}$ суть корни ультрасферического полинома Якоби $J_n^{(\alpha,\alpha)}(x)$ при $-1<\alpha\leqslant 0$ и $\frac{1}{2}\leqslant\alpha\leqslant 1$. Если $-1<\alpha\leqslant\frac{3}{2}$, то неравенство $A_k^{(n)}>0$ выполняется для достаточно больших n.

**) Условие $A_k^{(n)}>0$ существенно. Например, процесс

$$Q_n(f)=\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)+f(1)-f\left(\frac{n-1}{n}\right)$$

сходится для любой $f(x)\in C([0,1])$, но

$$\max|A_k^{(n)}|>1.$$

Введём в рассмотрение число $\delta > 0$, выбор которого мы уточним ниже, а пока подчиним его условиям

$$\delta < \frac{\xi - a}{2}, \quad \delta < \frac{b - \xi}{2}.$$

Сделав это, введём функцию $\psi(x)$, положив*)

$$\psi(x) = \begin{cases} 0 & \text{при } a \leqslant x \leqslant \xi - 2\delta \text{ и } \xi + 2\delta \leqslant x \leqslant b, \\ 1 & \text{при } \xi - \delta \leqslant x \leqslant \xi + \delta, \\ \text{линейна} & \text{при } \xi - 2\delta \leqslant x \leqslant \xi - \delta,\ \xi + \delta \leqslant x \leqslant \xi + 2\delta. \end{cases}$$

Так как $\psi(x)$ непрерывна, то

$$\lim_{n \to \infty} Q_n(\psi) = \int_a^b \psi(x)\, dx. \tag{238}$$

Но

$$\int_a^b \psi(x)\, dx = \int_{\xi - 2\delta}^{\xi + 2\delta} \psi(x)\, dx \leqslant 4\delta,$$

ибо $\psi(x) \leqslant 1$. С другой стороны, найдутся сколь угодно большие i, при которых $x_{k(i)}^{(n_i)} \in [\xi - \delta,\ \xi + \delta]$; при таких i

$$Q_n\ (\psi) = \sum_{k=1}^{n_i} A_k^{(n_i)} \psi\left(x_k^{(n_i)}\right) \geqslant A_{k(i)}^{(n_i)} > \sigma.$$

Поэтому, если позаботиться, чтобы было $4\delta < \sigma$, то равенство (238) будет невозможным. Теорема доказана.

§ 3. Теорема Р. О. Кузьмина.

Предыдущие результаты показывают, что «хорошими» интерполяционно-квадратурными процессами являются такие, у которых

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| < K, \tag{239}$$

*) Читателю рекомендуется сделать чертёж.

так как они сходятся для всякой непрерывной функции. Мы видели, что такие хорошие процессы получаются, если за узлы выбраны корни полиномов Лежандра или корни полиномов Чебышева, но у нас ещё не было ни одного примера, когда условие (239) не соблюдается. Можно предположить, что все интерполяционно-квадратурные процессы удовлетворяют условию (239). Нижеследующая теорема показывает, что это не так. Оказывается, что равноотстоящие узлы приводят к «плохому» интерполяционно-квадратурному процессу. Это довольно естественно, ибо мы видели в главе II, что интерполяционный процесс по равноотстоящим узлам ведёт себя чрезвычайно плохо благодаря очень быстрому росту функции $\lambda_n(x)$.

Теорема (Р. О. Кузьмин [1]). *Если за узлы интерполяционно-квадратурного процесса взяты равноотстоящие точки сегмента* $[-1, +1]$ (*причём* $x_1 = -1$, $x_n = +1$), *то условие*

$$\sum_{k=1}^{n} |A_k^{(n)}| \leqslant K$$

не выполнено.

Собственно говоря, Р. О. Кузьминым доказано больше, чем утверждает приведённая теорема, ибо им даны асимптотические формулы для всех коэффициентов $A_k^{(n)}$, показывающие, что все эти коэффициенты неограниченно возрастают (по модулю) с увеличением n, но я ограничусь доказательством формулированной теоремы. Приводимое доказательство любезно сообщено мне Р. О. Кузьминым в личной беседе. Оно значительно проще, чем вывод упомянутых асимптотических формул.

Переходя к доказательству теоремы, рассмотрим узлы

$$x_k = -1 + \frac{k-1}{n} \qquad (k = 1, 2, \ldots, 2n+1). \tag{240}$$

Коэффициент A_{n+1} для этих узлов имеет вид

$$A_{n+1} = \int_{-1}^{+1} \frac{(x-x_1)\cdots(x-x_n)(x-x_{n+2})\cdots(x-x_{2n+1})}{(x_{n+1}-x_1)\cdots(x_{n+1}-x_n)(x_{n+1}-x_{n+2})\cdots(x_{n+1}-x_{2n+1})}\, dx.$$

Значит,

$$A_{n+1} = \\ = \int_{-1}^{+1} \frac{(x+1)\left(x+1-\frac{1}{n}\right)\cdots\left(x+\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{1}{n}\right)\cdots(x-1)}{\frac{n}{n}\,\frac{n-1}{n}\cdots\frac{1}{n}\,\frac{-1}{n}\,\frac{-2}{n}\cdots\frac{-n}{n}}\,dx,$$

откуда

$$A_{n+1} = \\ = \frac{(-1)^n n^{2n}}{(n!)^2} \int_{-1}^{+1} (x+1)\ldots\left(x+\frac{1}{n}\right)\left(x-\frac{1}{n}\right)\ldots(x-1)\,dx.$$

С помощью подстановки $nx = t$ находим

$$A_{n+1} = \frac{(-1)^n}{n\,(n!)^2} \int_{-n}^{n} (t+n)\ldots(t+1)(t-1)\ldots(t-n)\,dt.$$

Подинтегральная функция здесь чётная, и потому

$$A_{n+1} = \frac{(-1)^n 2}{n\,(n!)^2} \int_{0}^{n} (t+n)\ldots(t+1)(t-1)\ldots(t-n)\,dt. \tag{241}$$

Рассмотрим отдельно величину

$$\alpha_n = \frac{(-1)^n 2}{n\,(n!)^2} \int_{0}^{1} (t+n)\ldots(t+1)(t-1)\ldots(t-n)\,dt.$$

Нетрудно видеть, что

$$\alpha_n = \frac{2}{n}\int_{0}^{1}\left(1-\frac{t^2}{1^2}\right)\left(1-\frac{t^2}{2^2}\right)\ldots\left(1-\frac{t^2}{n^2}\right)dt.$$

Подинтегральная функция здесь положительная и не превосходит единицы. Значит, $0 < \alpha_n < \frac{2}{n}$, откуда

$$\lim_{n\to\infty} \alpha_n = 0. \tag{242}$$

В интеграле

$$\int_1^n (t+n)\ldots(t+1)(t-1)\ldots(t-n)\,dt$$

сделаем подстановку $t=n-z$. Это приведёт нас к формуле

$$A_{n+1}=\alpha_n+\frac{(-1)^n 2}{n(n!)^2}\times$$
$$\times\int_0^{n-1}(2n-z)\ldots(n+1-z)(n-1-z)\ldots(1-z)(-z)\,dz,$$

откуда

$$A_{n+1}=\alpha_n+\frac{(-1)^{n+1}2}{n(n!)^2}\int_0^{n-1}\psi(z)\frac{z\,dz}{n-z}, \tag{243}$$

где положено для краткости

$$\psi(z)=(2n-z)(2n-1-z)\ldots(1-z). \tag{244}$$

Разобьём интеграл

$$I=\int_0^{n-1}\psi(z)\frac{z\,dz}{n-z}$$

на слагаемые по схеме

$$\int_0^{n-1}=\int_0^1+\int_1^2+\int_2^3+\int_3^4+\int_4^5+\int_5^{n-1}, \tag{245}$$

обозначив эти слагаемые, соответственно, через I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 и I^*. Оказывается, что главным из них будет I_0, а остальные будут бесконечно малы по сравнению с I_0.

Интеграл I_0 имеет вид

$$I_0=\int_0^1[(2n-z)(2n-1-z)\ldots(2-z)]\frac{(1-z)z}{n-z}\,dz.$$

Множитель, стоящий в квадратных скобках, больше чем $(2n-1)!$. Значит,

$$I_0 > (2n-1)! \int_0^1 \frac{(1-z)z}{n-z}\,dz,$$

а так как

$$\int_0^1 \frac{(1-z)z}{n-z}\,dz > \frac{1}{n}\int_0^1 (1-z)z\,dz = \frac{1}{6n},$$

то

$$I_0 > \frac{(2n-1)!}{6n}. \tag{246}$$

Теперь мы покажем, что каждый из интегралов I_0, I_1, I_2, I_3, I_4 (кроме I_0) бесконечно мал по сравнению с предыдущим. Действительно,

$$I_{k+1} = \int_{k+1}^{k+2} (2n-z)(2n-1-z)\ldots(2-z)\frac{(1-z)z}{n-z}\,dz.$$

Сделаем здесь подстановку $z = 1+u$:

$$I_{k+1} = \int_k^{k+1} (2n-1-u)(2n-2-u)\ldots(1-u)\frac{-u(1+u)}{n-1-u}\,du.$$

Этот интеграл можно переписать так:

$$I_{k+1} = -\int_k^{k+1} \frac{(1+u)(n-u)}{(n-1-u)(2n-u)} \times$$
$$\times [(2n-u)(2n-1-u)\ldots(1-u)]\frac{u\,du}{n-u},$$

откуда

$$|I_{k+1}| < \int_k^{k+1} \frac{(1+u)(n-u)}{(n-1-u)(2n-u)} |(2n-u)\ldots(1-u)| \frac{u\,du}{n-u}.$$

Но при $k \leqslant u \leqslant k+1$ имеем

$$\frac{(1+u)(n-u)}{(n-1-u)(2n-u)} < \frac{(k+2)(n-k)}{(n-k-2)(2n-k-1)}.$$

Поэтому

$$|I_{k+1}| < \frac{(k+2)(n-k)}{(n-k-2)(2n-k-1)} \int_k^{k+1} |(2n-u)\ldots(1-u)| \frac{u\,du}{n-u}.$$

Произведение $(2n-u)(2n-1-u)\ldots(1-u)$ в сегменте $[k, k+1]$ сохраняет знак *) $(-1)^k$. Значит,

$$|(2n-u)\ldots(1-u)| = (-1)^k (2n-u)\ldots(1-u).$$

Отсюда

$$|I_{k+1}| < \frac{(k+2)(n-k)}{(n-k-2)(2n-k-1)} (-1)^k \int_k^{k+1} (2n-u)\ldots(1-u) \frac{u}{n-u} du,$$

а так как интеграл, стоящий направо, есть не что иное, как I_k, то

$$|I_{k+1}| < \frac{(k+2)(n-k)}{(n-k-2)(2n-k-1)} |I_k|,$$

откуда и вытекает, что I_{k+1} бесконечно мал по сравнению с I_k.

Но в таком случае каждый из интегралов I_1, I_2, I_3, I_4, а, значит, и их сумма, есть величина бесконечно малая по сравнению с I_0:

$$I_1 + I_2 + I_3 + I_4 = \beta_n I_0 \qquad (\lim \beta_n = 0). \tag{247}$$

Остаётся изучить интеграл I^*. С этой целью обратим внимание на то, что

$$\psi(z+1) = (2n-1-z)(2n-2-z)\ldots(1-z)(-z),$$

откуда в связи с (244) вытекает функциональное уравнение для $\psi(z)$

$$\frac{\psi(z+1)}{\psi(z)} = \frac{-z}{2n-z},$$

или, что то же самое,

$$\psi(z+1) = \frac{-z}{2n-z} \psi(z).$$

---

*) Ибо в нём имеется ровно k отрицательных множителей $(k-u), (k-1-u), \ldots, (1-u)$.

Пусть M_k есть максимальное значение $|\psi(z)|$ на сегменте $[k, k+1]$. Тогда предыдущее соотношение показывает, что

$$M_{k+1} < \frac{k+1}{2n-k-1} M_k. \tag{248}$$

Написав такие неравенства для $k = 0, 1, 2, 3, 4$, перемножим их. Это даёт неравенство

$$M_5 < \frac{120}{(2n-1)(2n-2)(2n-3)(2n-4)(2n-5)} M_0.$$

Но из (244) непосредственно видно, что $M_0 = (2n)!$. Значит,

$$M_5 < \frac{K(2n)!}{n^5}, \tag{249}$$

где K—абсолютная постоянная.

С другой стороны, если $k+1 \leqslant n-1$, то

$$\frac{k+1}{2n-k-1} \leqslant \frac{n-1}{n+1} < 1.$$

Отсюда и из (248) следует, что

$$M_{k+1} < M_k \qquad (k \leqslant n-2).$$

Таким образом каждая из величин $M_6, M_7, \ldots, M_{n-2}$ удовлетворяет тому же неравенству (249), что и M_5. Значит, на всём сегменте $[5, n-1]$ будет

$$|\psi(z)| < \frac{K(2n)!}{n^5}.$$

Отсюда следует, что

$$|I^*| = \left| \int_5^{n-1} \psi(z) \frac{z\,dz}{n-z} \right| < K\frac{(2n)!}{n^5} \int_5^{n-1} \frac{z\,dz}{n-z}.$$

Но при $5 \leqslant z \leqslant n-1$

$$0 < \frac{z}{n-z} \leqslant \frac{n-1}{n-(n-1)} < n.$$

Значит,

$$|I^*| < K\frac{(2n)!}{n^3} = 2K\frac{(2n-1)!}{n^2}.$$

Сопоставляя этот результат с (246), мы видим, что и I^* бесконечно мал по сравнению с I_0:

$$I^* = \gamma_n I_0 \qquad (\lim \gamma_n = 0). \quad (250)$$

Таким образом из (243), (245), (247) и (250) получается, что

$$A_{n+1} = \alpha_n + \frac{(-1)^{n+1} 2}{n(n!)^2}(1 + \beta_n + \gamma_n) I_0,$$

где α_n, β_n, γ_n стремятся к нулю с возрастанием n.

Если n настолько велико, что

$$|\alpha_n| < 1, \quad |\beta_n| < \frac{1}{4}, \quad |\gamma_n| < \frac{1}{4},$$

то (учитывая, что $I_0 > 0$) справедливо неравенство

$$|A_{n+1}| > \frac{1}{n(n!)^2} I_0 - 1$$

и, в силу (246),

$$|A_{n+1}| > \frac{(2n-1)!}{6n^2(n!)^3} - 1.$$

По формуле Стирлинга *)

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}(1 + \omega_n) \qquad (\lim \omega_n = 0)$$

имеем

$$\frac{(2n-1)!}{(n!)^2} = \frac{1}{2n}\frac{(2n)!}{(n!)^2} =$$

$$= \frac{1}{2n}\frac{\sqrt{4\pi n}\,(2n)^{2n} e^{-2n}}{2\pi n\, n^{2n} e^{-2n}}\frac{1 + \omega_{2n}}{(1 + \omega_n)^2} = \frac{2^{2n-1}}{\sqrt{\pi n^3}}(1 + \sigma_n),$$

где σ_n стремится к нулю. Значит,

$$|A_{n+1}| > \frac{2^{2n-1}}{6n^3\sqrt{\pi n}}(1 + \sigma_n) - 1,$$

---

*) См. «Добавление 1» в конце книги.

откуда вытекает, что

$$\lim_{n\to\infty} |A_{n+1}| = +\infty.$$

Теорема доказана.

Из неё вытекает, что среди коэффициентов $A_k^{(n)}$, отвечающих равноотстоящим узлам, обязательно должны появляться *отрицательные*. Действительно, из теоремы Кузьмина вытекает, что существуют непрерывные функции, для которых интерполяционно-квадратурный процесс по равноотстоящим узлам расходится, а тогда сделанное утверждение сразу следует из теоремы Стеклова.

§ 4. Проблема П. Л. Чебышева и теорема С. Н. Бернштейна.

Наш великий математик П. Л. Чебышев уделял значительное внимание потребностям вычислительной практики. Исходя из интересов этой практики, он обратил внимание на то, что вычисление интеграла по квадратурной формуле

$$\int_a^b f(x)\,dx = \sum_{k=1}^n A_k f(x_k)$$

требует производства n умножений $A_k \times f(x_k)$ и n сложений, что влечёт за собой весьма тягостные выкладки, если, как это бывает обычно, коэффициенты A_k выражаются числами с большим количеством десятичных знаков. В то же время, если бы все коэффициенты A_k оказались *равными* друг другу, формула приняла бы вид

$$\int_a^b f(x)\,dx = A \sum_{k=1}^n f(x_k) \tag{251}$$

и выкладка потребовала бы n сложений и лишь *одного* умножения.

Поэтому представляет интерес построение квадратурной формулы *) типа (251). Однако такая формула будет совершенно бесполезной, если она (хотя бы для «хороших» функций $f(x)$) не будет давать удовлетворительной точности. В связи с этим естественно наложить на формулу (251) требование, чтобы она оказывалась точной всякий раз, когда $f(x)$ есть полином по возможности высокой степени.

При этом достаточно уметь строить формулу типа (251) для сегмента $[-1, +1]$, ибо любой другой сегмент сводится к этому с помощью линейной подстановки.

Для того чтобы формула

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \tag{252}$$

была точна для всякого полинома степени не выше m, необходимо и достаточно, чтобы она была верна для функций $f(x) = x^r$ $(r = 0, 1, 2, \ldots, m)$, т. е. чтобы выполнялись $m+1$ условий

$$A\sum_{k=1}^{n} x_k^r = \int_{-1}^{+1} x^r dx. \tag{253}$$

---

*) Полезно заметить, что формула Эрмита (220) не имеет отношения к затронутому вопросу. Действительно, чтобы вычислить интеграл $I = \int_{-1}^{+1} F(x)\,dx$ по формуле (220), его следует записать в виде $I = \int_{-1}^{+1} f(x)\frac{dx}{\sqrt{1-x^2}}$, т. е. ввести функцию $f(x) = F(x)\sqrt{1-x^2}$. Значит, правая часть формулы (220) будет $\frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} F(x_k)\sqrt{1-x_k^2}$, и коэффициентами при значениях подинтегральной функции будут *не равные* между собою числа $\frac{\pi}{n}\sqrt{1-x_k^2}$.

Так как в нашем распоряжении имеется $n+1$ параметр A, x_1, x_2, ..., x_n, то естественно требовать, чтобы было $m=n$.

Все эти соображения привели П. Л. Чебышева [4] к постановке следующей задачи: *для заданного n подобрать коэффициент A и узлы x_1, x_2, ..., x_n так, чтобы формула* (252) *оказывалась точной всякий раз, когда $f(x)$ есть полином степени не выше n.*

Согласно сказанному для этого надо решить $n+1$ уравнений (253). В частности, при $r=0$ сразу находим

$$A=\frac{2}{n}. \tag{254}$$

Величины же x_1, x_2, ..., x_n надо найти из остальных n нелинейных уравнений (253). П. Л. Чебышев фактически решил эту систему для $n=1, 2, 3, 4, 5, 6, 7$.

Для $n=1$ мы будем иметь лишь одно уравнение

$$2x_1=\int_{-1}^{+1} x\,dx=0,$$

откуда $x_1=0$, и формула Чебышева примет вид

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=2f(0).$$

Для $n=2$ получается система уравнений

$$x_1+x_2=\int_{-1}^{+1} x\,dx=0,$$

$$x_1^2+x_2^2=\int_{-1}^{+1} x^2dx=\frac{2}{3}.$$

Отсюда $-x_1=x_2=\frac{\sqrt{3}}{3}=0{,}5773503$, и формула Чебышева такова:

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=f\left(-\frac{\sqrt{3}}{3}\right)+f\left(\frac{\sqrt{3}}{3}\right).$$

Для $n=3$ получится система уравнений

$$x_1+x_2+x_3=0,$$
$$x_1^2+x_2^2+x_3^2=1,$$
$$x_1^3+x_2^3+x_3^3=0.$$

Если из первого уравнения найти x_3 и подставить в третье уравнение, то мы придём к уравнению

$$x_1x_2(x_1+x_2)=0.$$

Отсюда $x_1x_2x_3=0$. Примем $x_2=0$ (мы считаем $x_1<x_2<x_3$). Это даёт

$$-x_1=x_3=\frac{\sqrt{2}}{2}=0{,}7071068,$$

и формула Чебышева будет

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx=\frac{2}{3}\left[f\left(-\frac{\sqrt{2}}{2}\right)+f(0)+f\left(\frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right].$$

Проведём решение ещё для $n=4$. Система уравнений будет:

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+x_3+x_4&=0,\\ x_1^2+x_2^2+x_3^2+x_4^2&=\frac{4}{3},\\ x_1^3+x_2^3+x_3^3+x_4^3&=0,\\ x_1^4+x_2^4+x_3^4+x_4^4&=\frac{4}{5}. \end{aligned}\right\} \tag{255}$$

Прежде всего ни одно из неизвестных не равно нулю. Действительно, если принять, например, $x_4=0$, то из первых трёх уравнений, как и в предыдущем случае, найдём $x_1=-\sqrt{\frac{2}{3}}$, $x_2=0$, $x_3=\sqrt{\frac{2}{3}}$, что не удовлетворяет четвёртому уравнению.

Так как четыре не равных нулю величины не могут попарно иметь разных знаков, то можно принять, что

x_1 и x_2 имеют одинаковые знаки и $x_1+x_2 \neq 0$. Представив первое уравнение в форме

$$x_1+x_2 = -(x_3+x_4), \tag{256}$$

возведя его в куб и сопоставив с третьим уравнением, найдём

$$(x_1+x_2)(x_1x_2 - x_3x_4) = 0,$$

откуда $x_1x_2 = x_3x_4$ и, стало быть, x_3 и x_4 одного знака. Будем считать x_1 и x_2 отрицательными, а x_3 и x_4 положительными.

Если равенство (256) возвести в квадрат и учесть, что $x_1x_2 = x_3x_4$, то станет ясно, что

$$x_1^2+x_2^2 = x_3^2+x_4^2. \tag{257}$$

Отсюда и из второго уравнения (255)

$$x_1^2+x_2^2 = \frac{2}{3}. \tag{258}$$

Возводя (257) в квадрат и сопоставляя с четвёртым уравнением (255), находим

$$x_1^4+x_2^4 = \frac{2}{5}.$$

Отсюда и из (258) без труда получаем, считая $x_1 < x_2$,

$$x_1 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}} = -0{,}7946544,$$

$$x_2 = -\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}} = -0{,}1875925.$$

Аналогичный подсчёт даёт $x_3 = -x_2$, $x_4 = -x_1$. Значит, для $n = 4$ формула Чебышева будет иметь вид

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{1}{2}\left[f\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}\right) + f\left(-\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}\right) + \right.$$

$$\left. + f\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}-2}{3\sqrt{5}}}\right) + f\left(\sqrt{\frac{\sqrt{5}+2}{3\sqrt{5}}}\right)\right].$$

Как уже отмечалось, П. Л. Чебышев построил свои формулы ещё для $n=5, 6, 7$. Когда же, уже после опубликования работы Чебышева, было проведено решение системы для $n=8$, то корни её оказались мнимыми. С. Н. Бернштейн подробно исследовал проблему Чебышева. С помощью замечательно изящных соображений он установил, что при $n>9$ задача Чебышева неразрешима. Этот результат мы и излагаем.

Лемма 1. *Пусть формула*

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = A\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \tag{259}$$

верна для всякого полинома степени не выше $2m-1$, *где* $m<n$. *Обозначим через* $X_m(x)$ *полином Лежандра степени* m *и пусть* $\xi_1^{(m)}$ — *его наименьший корень. Тогда, считая узлы* x_k *перенумерованными в порядке возрастания, будем иметь*

$$x_1 < \xi_1^{(m)}.$$

В самом деле, пусть

$$P(x) = \frac{X_m^2(x)}{x-\xi_1^{(m)}}.$$

Так как $\dfrac{X_m(x)}{x-\xi_1^{(m)}}$ есть полином степени $m-1$, то этот полином ортогонален к $X_m(x)$.

Отсюда

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx = 0.$$

С другой стороны, степень $P(x)$ есть $2m-1$, и потому предыдущий интеграл можно вычислить и по формуле (259). Значит,

$$\sum_{k=1}^{n} P(x_k) = 0.$$

Все n слагаемых здесь не могут быть нулями, так как у $P(x)$ только m различных корней, а $n>m$, Поэтому имеются и отрицательные слагаемые. Но $P(x)<0$ при $x<\xi_1^{(m)}$. Стало быть, есть такие k, что $x_k<\xi_1^{(m)}$, а тогда и подавно $x_1<\xi_1^{(m)}$, ибо это наименьший из узлов x_k.

Дальнейшее основано на сопоставлении формулы Чебышева (259) с формулой Гаусса

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \sum_{k=1}^{m} A_k^{(m)} f(\xi_k^{(m)}), \tag{260}$$

в которой узлами являются корни полинома Лежандра.

Лемма 2. *Если формула Чебышева*

$$\int_{-1}^{+1} f(x)\,dx = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k) \tag{261}$$

верна для всех полиномов степени не выше $2m-1$, где $m<n$, то

$$\frac{2}{n} < A_1^{(m)}. \tag{262}$$

В самом деле, пусть

$$P(x) = \left[\frac{X_m(x)}{X'_m(\xi_1^{(m)})(x-\xi_1^{(m)})}\right]^2.$$

Это полином степени $2m-2$. Значит, интеграл

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx$$

можно вычислять как по формуле Чебышева (261), так и по формуле*) Гаусса (260). Первый способ вычисления даёт

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx = \frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} P(x_k),$$

*) Напомним, что формула Гаусса верна для всех полиномов степени $\leqslant 2m-1$.

а второй:

$$\int_{-1}^{+1} P(x)\,dx = A_1^{(m)},$$

ибо $P(\xi_k^{(m)}) = 0$, если $k > 1$ и $P(\xi_1^{(m)}) = 1$.

Значит,

$$\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} P(x_k) = A_1^{(m)}.$$

Так как полином $P(x)$ не отрицателен, то

$$\frac{2}{n} P(x_1) \leqslant A_1^{(m)}. \tag{263}$$

Полином $P(x)$ имеет корни второй кратности $\xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}, \ldots, \xi_m^{(m)}$. Значит, все эти $m-1$ точки суть корни и его производной $P'(x)$. Кроме того, по теореме Ролля у $P'(x)$ имеется $m-2$ корня в интервалах $(\xi_2^{(m)}, \xi_3^{(m)}), \ldots, (\xi_{m-1}^{(m)}, \xi_m^{(m)})$. Таким образом в сегменте $[\xi_2^{(m)}, \xi_m^{(m)}]$, а тем более в сегменте $[\xi_1^{(m)}, \xi_m^{(m)}]$, имеется $2m-3$ корня $P'(x)$. Но $P'(x)$ есть полином степени как раз $2m-3$. Значит, при $x < \xi_1^{(m)}$ у $P'(x)$ корней нет, и $P'(x)$ сохраняет знак в интервале $(-\infty, \xi_1^{(m)})$. Но, будучи полиномом нечётной степени, $P'(x)$ становится отрицательным при $x \to -\infty$. Стало быть, упомянутый знак $P'(x)$ в интервале $(-\infty, \xi_1^{(m)})$ есть минус. Поэтому $P(x)$ в этом интервале *убывает*. По лемме 1 имеем $x_1 < \xi_1^{(m)}$. Следовательно, $P(x_1) > P(\xi_1^{(m)}) = 1$. Сопоставляя это с (263), мы и приходим к (262).

Теорема (С. Н. Бернштейн [11, 12]). *Задача Чебышева неразрешима при* $n > 9$.

Доказательство этой теоремы с большой простотой вытекает из предыдущей леммы и принадлежащих С. Н. Бернштейну же оценок

$$A_1^{(m)} < \frac{\pi}{m}\sqrt{1 - [\xi_1^{(m)}]^2}, \tag{264}$$

$$-1 < \xi_1^{(m)} < -1 + \frac{3}{m(m+1)} \quad (m > 6). \tag{265}$$

В самом деле, из этих оценок следует, что при $m > 6$

$$A_1^{(m)} < \frac{\pi\sqrt{6}}{m^2}. \tag{266}$$

Установив это, допустим, что задача Чебышева разрешима для какого-нибудь $n > 11$. Предположим сначала это n нечётным и пусть $2m-1=n$. В силу леммы 2 будет выполнено (262), а так как $m > 6$, то из (266) вытекает, что

$$\frac{2}{n} < \frac{4\pi\sqrt{6}}{(n+1)^2}.$$

Значит, $(n+1)^2 < 16n$ и

$$n^2 - 14n + 1 < 0,$$

так что n лежит между корнями трёхчлена $x^2 - 14x + 1$. Больший из этих корней есть

$$7 + \sqrt{48} < 14.$$

Таким образом $n \leqslant 13$. Допустим, что формула Чебышева верна для $n = 13$ при каком-нибудь выборе узлов. Тогда, полагая $m = 7$, будем иметь в силу (262)

$$\frac{2}{13} < A_1^{(7)}. \tag{267}$$

Но, как уже было упомянуто, коэффициент $A_1^{(7)}$ был вычислен Гауссом. Его значение таково:

$$A_1^{(7)} = 0{,}12958\ldots \tag{268}$$

В то же время

$$\frac{2}{13} = 0{,}153\ldots$$

Таким образом (267) неверно, и для $n = 13$ формулу Чебышева построить нельзя. То же заключение надо сделать и для $n = 11$, ибо

$$A_1^{(6)} = 0{,}17132 < \frac{2}{11}. \tag{269}$$

Итак, наибольшее нечётное n, при котором может существовать формула Чебышева, есть $n = 9$ (и она действительно существует для этого n, что было установлено уже после Чебышева).

Перейдём теперь к рассмотрению чётных n.

Допустим, что система уравнений

$$\left.\begin{aligned} x_1+x_2+\ldots+x_n&=0,\\ x_1^2+x_2^2+\ldots+x_n^2&=\frac{n}{3},\\ x_1^3+x_2^3+\ldots+x_n^3&=0,\\ \ldots\ldots\ldots&\ldots\\ x_1^{n-1}+x_2^{n-1}+\ldots+x_n^{n-1}&=0,\\ x_1^n+x_2^n+\ldots+x_n^n&=\frac{n}{n+1}\end{aligned}\right\} \qquad (270)$$

оказалась разрешимой, причём в найденном её решении все x_i вещественны, различны и лежат в сегменте $[-1, +1]$. Если наложить требование, чтобы было $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$, то числа x_i определяются системой (270) *однозначно*. В самом деле, как известно из алгебры, заданием степенных сумм

$$\sum_{i=1}^{n} x_i^k = s_k \qquad (k=1, 2, \ldots, n)$$

однозначно определяется уравнение, имеющее числа x_i корнями. Иначе говоря, степенные суммы s_k определяют всю совокупность чисел x_i, а тогда неравенства $x_1 < x_2 < \ldots < x_n$ однозначно определяют и самые x_i. С другой стороны, ясно, что при чётном n наряду с решением $(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ система (270) имеет также решение $(-x_1, -x_2, \ldots, -x_n)$.

Значит, благодаря упомянутой однозначности будет

$$x_1=-x_n, \quad x_2=-x_{n-1}, \ \ldots, \ x_{\frac{n}{2}}=-x_{\frac{n}{2}+1},$$

откуда

$$x_1^{n+1}+x_2^{n+1}+\ldots+x_n^{n+1}=0.$$

Таким образом, если n — число чётное и равенство

$$\int_{-1}^{+1} x^r\,dx=\frac{2}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^r$$

справедливо для $r = 0, 1, 2, \ldots, n$, то оно само собой будет верным и для $r = n + 1$.

Это показывает, что при чётном n формула Чебышева с n узлами, справедливая для всех полиномов степени не выше n, будет, так сказать, «автоматически» справедливой и для полиномов степени $n + 1$. Заметив это, предположим, что для некоторого чётного $n > 10$ решена задача Чебышева.

Полагая $2m - 1 = n + 1$, будем иметь на основании (262) и (266)

$$\frac{2}{n} < \frac{4\pi\sqrt{6}}{(n+2)^2}.$$

Отсюда $(n+2)^2 < 16n$ и

$$n^2 - 12n + 4 < 0.$$

Так как больший из корней трёхчлена $x^2 - 12x + 4$ есть

$$6 + \sqrt{32} < 12,$$

то $n \leqslant 10$.

Значит, для $n > 10$ задача Чебышева неразрешима. Но и для $n = 10$ она тоже неразрешима, ибо

$$A_1^{(6)} < \frac{1}{5}.$$

Таким образом всё приведено к доказательству неравенств (264) и (265). Второе из них доказывается сравнительно просто. Именно, записав $x^2 - 1$ в форме

$$x^2 - 1 = (x+1)^2 - 2\,(x+1),$$

имеем по биномиальной формуле Ньютона

$$(x^2 - 1)^n = \sum_{k=0}^{n} C_n^k (-2)^{n-k} (x+1)^{n+k}.$$

Отсюда

$$[(x^2-1)^n]^{(n)} =$$

$$= (-2)^n \sum_{k=0}^{n} (-1)^k (n+k)(n+k-1)\ldots(k+1)\, C_n^k \left(\frac{x+1}{2}\right)^k.$$

Так как полиномы Лежандра определяются с точностью до постоянного множителя, то можно положить

$$X_n(x)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n+k)(n+k-1)\ldots(k+1)C_n^k\left(\frac{x+1}{2}\right)^k.$$

Значит, $X_n(-1)=n!$. С другой стороны,

$$X_n\left(-1+\frac{3}{n(n+1)}\right)=$$
$$=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k(n+k)(n+k-1)\ldots(k+1)C_n^k\left[\frac{3}{2n(n+1)}\right]^k.$$

Положим, считая n закреплённым,

$$u_k=C_n^k(n+k)\ldots(k+1)\left[\frac{3}{2n(n+1)}\right]^k.$$

Тогда

$$\frac{u_k}{u_{k-1}}=\frac{3}{2}\,\frac{(n+k)(n-k+1)}{k^2n(n+1)}=\frac{3}{2}\,\frac{1-\dfrac{k(k-1)}{n(n+1)}}{k^2}. \tag{271}$$

Отсюда видно, что отношение $\frac{u_k}{u_{k-1}}$ с возрастанием k *убывает*.

Так как $u_k>0$ и

$$X_n\left(-1+\frac{3}{n(n+1)}\right)=\sum_{k=0}^{n}(-1)^k u_k,$$

то очевидно, что

$$X_n\left(-1+\frac{3}{n(n+1)}\right)<$$
$$<(u_0-u_1+u_2-u_3)+(u_4+u_6+u_8+\ldots).$$

Вычислим отдельно $u_0-u_1+u_2-u_3$. Эта сумма равна

$$-n!\left[\frac{1}{32}+\frac{3}{8n(n+1)}+\frac{9}{8n^2(n+1)^2}\right].$$

Значит, при всех n будет

$$u_0 - u_1 + u_2 - u_3 < -\frac{n!}{32}.$$

С другой стороны, так как $\frac{u_k}{u_{k-1}}$ убывает, то мы имеем

$$\frac{u_{2k}}{u_{2k-2}} = \frac{u_{2k}}{u_{2k-1}}\,\frac{u_{2k-1}}{u_{2k-2}} > \frac{u_{2k+2}}{u_{2k+1}}\,\frac{u_{2k+1}}{u_{2k}} = \frac{u_{2k+2}}{u_{2k}}.$$

Стало быть,

$$\frac{u_6}{u_4} > \frac{u_8}{u_6} > \frac{u_{10}}{u_8} > \ldots$$

Отсюда

$$\frac{u_8}{u_4} = \frac{u_8}{u_6}\cdot\frac{u_6}{u_4} < \left(\frac{u_6}{u_4}\right)^2; \quad \frac{u_{10}}{u_4} < \left(\frac{u_6}{u_4}\right)^3; \ldots$$

$$u_4 + u_6 + u_8 + \ldots <$$

$$< u_4\left[1 + \frac{u_6}{u_4} + \left(\frac{u_6}{u_4}\right)^2 + \ldots\right] = \frac{u_4}{1 - \frac{u_6}{u_4}}.$$

Ввиду (271) будет*)

$$\frac{u_6}{u_4} = \frac{9}{4}\,\frac{1 - \frac{30}{n(n+1)}}{6^2}\,\frac{1 - \frac{20}{n(n+1)}}{5^2} < \frac{1}{400}.$$

Кроме того, опять-таки опираясь на (271), находим

$$u_4 = \frac{81}{16}\,\frac{1 - \frac{12}{n(n+1)}}{4^2}\,\frac{1 - \frac{6}{n(n+1)}}{3^2}\,\frac{1 - \frac{2}{n(n+1)}}{2^2}\,\frac{1}{1^2}\,n! < \frac{9n!}{1024}.$$

Значит,

$$\frac{u_4}{1 - \frac{u_6}{u_4}} < \frac{9n!}{1024\cdot\frac{399}{400}} = \frac{75n!}{8512}.$$

Таким образом

$$X_n\left(-1 + \frac{3}{n(n+1)}\right) < n!\left[\frac{75}{8512} - \frac{1}{32}\right] < 0.$$

Значит, $X_n(x)$ меняет знак между -1 и $-1 + \frac{3}{n(n+1)}$, чем и доказано (265).

---

*) Напомним, что $n > 6$.

Остаётся доказать неравенство (264). С этой целью введём в рассмотрение лежандров полином

$$P_m(x) = \frac{1}{(2m)!!} \frac{d^m (x^2-1)^m}{dx^m},$$

и пусть

$$\varphi(\theta) = \sqrt{\sin\theta}\, P_m(\cos\theta). \tag{272}$$

Тогда

$$\varphi''(\theta) = \\ = \frac{4\sin^4\theta\, P''_m(\cos\theta) - 8\sin^2\theta\cos\theta\, P'_m(\cos\theta) - (1+\sin^2\theta) P_m(\cos\theta)}{4\sqrt{\sin^3\theta}}.$$

Но полином Лежандра $P_m(x)$ удовлетворяет дифференциальному уравнению

$$(1-x^2)\,y'' - 2xy' + m(m+1)\,y = 0.$$

Подставляя сюда $P_m(x)$, заменяя x на $\cos\theta$ и умножая на $4\sin^2\theta$, находим

$$4\sin^4\theta\, P''_m(\cos\theta) - 8\sin^2\theta\cos\theta\, P'_m(\cos\theta) = \\ = -4m(m+1)\sin^2\theta\, P_m(\cos\theta).$$

Отсюда и из (272) получаем

$$\varphi''(\theta) = -\frac{(2m+1)^2\sin^2\theta + 1}{4\sin^2\theta}\,\varphi(\theta).$$

Если положить

$$\lambda(\theta) = \frac{2\sin\theta}{\sqrt{(2m+1)^2\sin^2\theta + 1}},$$

то предыдущее равенство примет вид

$$\lambda^2(\theta)\,\varphi''(\theta) + \varphi(\theta) = 0. \tag{273}$$

Заметив это, введём функцию

$$u(\theta) = \varphi^2(\theta) + \lambda^2(\theta)\,\varphi'^2(\theta).$$

Дифференцируя эту функцию и принимая во внимание (273), сразу находим, что

$$u'(\theta) = 2\lambda(\theta)\,\lambda'(\theta)\,\varphi'^2(\theta).$$

Но

$$2\lambda(\theta)\lambda'(\theta)=\frac{8\sin\theta\cos\theta}{[(2m+1)^2\sin^2\theta+1]^2}.$$

Это показывает, что при $\frac{\pi}{2}<\theta<\pi$

$$2\lambda(\theta)\lambda'(\theta)<0.$$

С другой стороны, из определения $u(\theta)$ видно, что

$$u(\theta)\geqslant\lambda^2(\theta)\varphi'^2(\theta).$$

Значит,

$$\frac{2\lambda(\theta)\lambda'(\theta)}{\lambda^2(\theta)}u(\theta)\leqslant 2\lambda(\theta)\lambda'(\theta)\varphi'^2(\theta)=u'(\theta).$$

Отсюда вытекает неравенство

$$\frac{u'(\theta)}{u(\theta)}\geqslant\frac{2\lambda'(\theta)}{\lambda(\theta)}\qquad\left(\frac{\pi}{2}<\theta<\pi\right).$$

Интегрируя это неравенство по сегменту $\left[\frac{\pi}{2},\ \theta\right]$, находим

$$u(\theta)>\frac{u\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\lambda^2(\theta).$$

Замечая, что

$$\varphi'(\theta)=\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}P_m(\cos\theta)-\sqrt{\sin^3\theta}\,P_m'(\cos\theta),$$

и учитывая определение $u(\theta)$, видим, что при $\frac{\pi}{2}<\theta<$

$$\sin\theta P_m^2(\cos\theta)+$$

$$+\lambda^2(\theta)\left[\frac{\cos\theta}{2\sqrt{\sin\theta}}P_m(\cos\theta)-\sqrt{\sin^3\theta}\,P_m'(\cos\theta)\right]^2>$$

$$>\frac{u\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\lambda^2(\theta).$$

Заменим здесь θ на $\arccos x$. Тогда для $-1 < x < 0$ получается неравенство

$$\sqrt{1-x^2}\,P_m^2(x) + \\ + \lambda^2(\arccos x)\left[\frac{x}{2\sqrt[4]{1-x^2}}P_m(x) - \sqrt[4]{(1-x^2)^3}\,P_m'(x)\right]^2 > \\ > \frac{u\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}\lambda^2(\arccos x).$$

Подставим сюда $x = \xi_1^{(m)}$. Если учесть, что это корень полинома $P_m(x)$, то мы сразу получаем

$$\left(1 - \left[\xi_1^{(m)}\right]^2\right)^{3/2} P_m'^2\left(\xi_1^{(m)}\right) > \frac{u\left(\frac{\pi}{2}\right)}{\lambda^2\left(\frac{\pi}{2}\right)}.$$

Но

$$\lambda^2\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{2m^2+2m+1},$$

а

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_m^2(0) + \frac{2}{2m^2+2m+1}P_m'^2(0).$$

Если m — число чётное, то $P_m'(0)=0$ и*)

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = P_m^2(0) = \left[\frac{(m-1)!!}{m!!}\right]^2.$$

Но (часть первая, стр. 263 (формула Валлиса)) при чётном m

$$\frac{m!!}{(m-1)!!} = \sqrt{m+\theta}\sqrt{\frac{\pi}{2}} \qquad (0 < \theta < 1).$$

---

*) Из рекуррентной формулы (127) (часть вторая) вытекает при $x=0$ и чётном n, что

$$P_{n+2}(0) = \frac{n+1}{n+2}P_n(0).$$

Полагая $n = 0, 2, 4, \ldots, m-2$ и перемножая полученные равенства, находим

$$P_m(0) = \frac{(m-1)!!}{m!!}P_0(0) = \frac{(m-1)!!}{m!!}.$$

Значит,

$$\left[\frac{(m-1)!!}{m!!}\right]^2 > \frac{2}{\pi(m+1)}$$

и

$$\left(1-\left[\xi_1^m\right]^2\right)^{3/2} P_m'^2\left(\xi_1^m\right) > \frac{2m^2+2m+1}{\pi(m+1)} > \frac{2m}{\pi}.$$

Если m — число нечётное, то $P_m(0)=0$ и

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{2m^2+2m+1} P_m'^2(0).$$

Во второй части (глава V, § 2) было показано, что

$$(1-x^2) P_m'(x) = mP_{m-1}(x) - mxP_m(x).$$

Полагая $x=0$, находим

$$P_m'(0) = mP_{m-1}(0).$$

Значит,

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) = \frac{2}{2m^2+2m+1} m^2 \left[\frac{(m-2)!!}{(m-1)!!}\right]^2 =$$

$$= \frac{2m^2}{2m^2+2m+1} \frac{2}{(m-1+\theta)\pi}.$$

Отсюда

$$u\left(\frac{\pi}{2}\right) > \frac{4m}{(2m^2+2m+1)\pi}$$

и

$$\left(1-\left[\xi_1^{(m)}\right]^2\right)^{3/2} P_m'^2\left(\xi_1^{(m)}\right) > \frac{2m}{\pi}.$$

Таким образом последнее неравенство справедливо при всех m, так что при всех m

$$\frac{\pi}{m}\sqrt{1-[\xi_1^{(m)}]^2} > \frac{2}{1-[\xi_1^{(m)}]^2} \frac{1}{P_m'^2(\xi_1^{(m)})}.$$

Остаётся сослаться на формулу (216), чтобы придти к (264). Теорема С. Н. Бернштейна доказана полностью.

Замечание. Неразрешимость задачи Чебышева своей единственной причиной может иметь наличие среди корней системы

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^r = \frac{n}{2}\int_{-1}^{+1} x^r\,dx \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n) \qquad (274)$$

мнимых чисел.

Действительно, из алгебры известно, что *любое* задание степенных сумм

$$s_r = \sum_{k=1}^{n} x_k^r \qquad (r = 0, 1, 2, \ldots, n)$$

позволяет построить алгебраическое уравнение степени n, имеющее числа $x_1, x_2, \ldots, x_n$ своими корнями. Таким образом с чисто алгебраической точки зрения система (274) разрешима всегда. Но при чётном n последнее из уравнений (274) имеет вид

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^n = \frac{n}{n+1}.$$

Поэтому в случае вещественности всех x_k они обязательно попадали бы в $[-1, +1]$, и задача Чебышева оказалась бы разрешимой. То же рассуждение можно провести и для нечётного n, так как тогда предпоследнее уравнение (274) будет

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{n-1} = 1.$$

Таким образом теорема Бернштейна позволяет утверждать, что среди корней системы (274) при $n > 9$ имеются мнимые. Р. О. Кузьмин [2, 3] установил закон распределения этих корней на плоскости при весьма больших n.

§ 5. Теорема К. А. Поссе.

Мы уже обращали внимание читателя на то, что коэффициенты квадратурной формулы Эрмита

$$\int_{-1}^{+1} \frac{f(x)}{\sqrt{1-x^2}}\,dx = \frac{\pi}{n}\sum_{k=1}^{n} f(x_k^{(n)}) \qquad \left(x_k^{(n)} = \cos\frac{2k-1}{2n}\pi\right)$$

не зависят от k. Естественно встаёт вопрос о существовании других формул типа Гаусса с тем же свойством. К. А. Поссе [1] установил, что формула Эрмита *единственная*, обладающая указанным свойством. В настоящем параграфе я даю доказательство Я. Л. Геронимуса [6] этой теоремы Поссе. Я. Л. Геронимусом доказан следующий более общий результат:

Теорема. *Пусть $p(x)$ весовая функция, заданная на сегменте $[-1, +1]$, а $x_k^{(n)}$ $(k = 1, 2, \ldots, n)$—корни полинома $\omega_n(x)$, ортогонального по весу $p(x)$ ко всем полиномам низших степеней. Если при всяком n существует постоянная A_n такого рода, что формула*

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\,x^m\,dx = A_n \sum_{k=1}^{n} [x_k^{(n)}]^m \tag{275}$$

верна для) $m = 0, 1, 2$, то $p(x)$ есть вес Чебышева.*

Доказательство. Полагая в формуле (275) $m=0$, находим

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx = nA_n.$$

Не ограничивая общности, можно считать, что

$$\int_{-1}^{+1} p(x)\,dx = 1$$

(вес можно снабдить любым положительным постоянным множителем). Стало быть,

$$A_n = \frac{1}{n}.$$

*) Значение $m = 2$ рассматривается только для $n > 1$.

Полагая в (275) $m = 1$, получим

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} x_k^{(n)} = \mu_1 \qquad \left(\mu_1 = \int_{-1}^{+1} p(x)\,x\,dx\right).$$

Если записать полином $\omega_n(x)$ (считая его старший коэффициент равным единице) в форме

$$\omega_n(x) = x^n + p_n x^{n-1} + q_n x^{n-2} + \ldots,$$

то, как известно из алгебры,

$$\sum_{k=1}^{n} x_k^{(n)} = -p_n.$$

Таким образом

$$p_n = -n\mu_1. \tag{276}$$

Сравним в рекуррентной формуле

$$\omega_{n+2}(x) = (x - \alpha_{n+2})\,\omega_{n+1}(x) - \lambda_{n+1}\,\omega_n(x) \qquad (n \geqslant 0) \tag{277}$$

коэффициенты при x^{n+1}:

$$p_{n+2} = -\alpha_{n+2} + p_{n+1}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} p_{n+1} &= -\alpha_{n+1} + p_n, \\ p_n &= -\alpha_n + p_{n-1}, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_2 &= -\alpha_2 + p_1. \end{aligned}$$

Складывая все эти равенства, находим

$$p_{n+2} = -(\alpha_2 + \alpha_3 + \ldots + \alpha_{n+2}) + p_1.$$

Но $\omega_1(x) = x + p_1 = x - \alpha_1$. Стало быть,

$$p_n = -\sum_{k=1}^{n} \alpha_k.$$

Сравнение этого равенства с (276) показывает, что

$$\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = n\mu_1.$$

Полагая здесь последовательно $n = 1, 2, 3, 4, \ldots$, найдём, что

$$\alpha_1 = \alpha_2 = \alpha_3 = \alpha_4 = \ldots = \mu_1.$$

Пусть для краткости $\alpha_k = \alpha$.

Применим, наконец, формулу (275) к случаю $m = 2$ (считая $n \geqslant 2$):

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}[x_k^{(n)}]^2 = \mu_2 \qquad \left(\mu_2 = \int_{-1}^{+1} p(x)\, x^2\, dx\right).$$

Как известно,

$$\sum_{k=1}^{n}[x_k^{(n)}]^2 = \left[\sum_{k=1}^{n} x_k^{(n)}\right]^2 - 2\sum_{i<k} x_i^{(n)} x_k^{(n)} = p_n^2 - 2q_n.$$

Поэтому

$$q_n = \frac{1}{2}[p_n^2 - n\mu_2] = \frac{n}{2}[n\mu_1^2 - \mu_2]. \tag{278}$$

С другой стороны, сравнение коэффициентов при x^n в формуле (277) даёт

$$q_{n+2} = -\alpha p_{n+1} + q_{n+1} - \lambda_{n+1}.$$

Аналогично

$$\begin{aligned} q_{n+1} &= -\alpha p_n + q_n - \lambda_n, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots \\ q_3 &= -\alpha p_2 + q_2 - \lambda_2, \\ q_2 &= -\alpha p_1 - \lambda_1. \end{aligned}$$

Отсюда после сложения

$$q_{n+2} = -\alpha \sum_{k=1}^{n+1} p_k - \sum_{k=1}^{n+1} \lambda_k.$$

Учитывая, что $p_k = -k\alpha$, получим

$$q_n = \frac{n(n-1)}{2}\alpha^2 - \sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k \qquad (n \geqslant 2).$$

Сравнение этого равенства с (278) даёт

$$2\sum_{k=1}^{n-1}\lambda_k = n(\mu_2 - \mu_1^2).$$

Полагая здесь последовательно $n = 2, 3, 4, \ldots$, находим

$$\frac{\lambda_1}{2} = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \ldots = \frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2).$$

Пусть *)

$$\frac{1}{2}(\mu_2 - \mu_1^2) = \frac{\sigma^2}{4}.$$

Тогда

$$\lambda_1 = \frac{\sigma^2}{2}, \quad \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = \ldots = \frac{\sigma^2}{4}.$$

Таким образом, рекуррентная формула (277) примет вид

$$\omega_{n+2}(x) = (x - \alpha)\,\omega_{n+1}(x) - \frac{\sigma^2}{4}\,\omega_n(x) \qquad (n \geqslant 1),$$

$$\omega_2(x) = (x - \alpha)\,\omega_1(x) - \frac{\sigma^2}{2}\,\omega_0(x).$$

Кроме того,

$$\omega_0(x) = 1, \quad \omega_1(x) = x - \alpha.$$

Напомним, что полиномы Чебышева $\widetilde{T}_n(x)$ таковы, что

$$\widetilde{T}_0(x) = 1, \quad \widetilde{T}_1(x) = x,$$

$$\widetilde{T}_2(x) = x\widetilde{T}_1(x) - \frac{1}{2}\widetilde{T}_0(x),$$

$$\widetilde{T}_{n+2}(x) = x\widetilde{T}_{n+1}(x) - \frac{1}{4}\widetilde{T}_n(x) \qquad (n \geqslant 1).$$

Сравнение этих формул с полученными для $\omega_n(x)$ показывает прежде всего, что

$$\omega_0(x) = \widetilde{T}_0\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right), \quad \omega_1(x) = \sigma\widetilde{T}_1\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right).$$

---

*) Напомним, что $\lambda_k > 0$.

Отсюда

$$\omega_2(x) = (x-\alpha)\,\sigma\widetilde{\mathscr{P}}_1\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) - \frac{\sigma^2}{2}\widetilde{\mathscr{P}}_0\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) = \\ = \sigma^2\left[\frac{x-\alpha}{\sigma}\widetilde{\mathscr{P}}_1\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right) - \frac{1}{2}\widetilde{\mathscr{P}}_0\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right)\right]$$

и, стало быть,

$$\omega_2(x) = \sigma^2\widetilde{\mathscr{P}}_2\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right).$$

С помощью полной индукции легко показать, что

$$\omega_n(x) = \sigma^n\widetilde{\mathscr{P}}_n\left(\frac{x-\alpha}{\sigma}\right).$$

Отсюда следует, что корни полинома $\omega_n(x)$ суть

$$x_k^{(n)} = \alpha + \sigma\cos\frac{2k-1}{2n}\pi \qquad (k = 1, 2, \ldots, n).$$

Эти корни при $n = 1, 2, 3, \ldots$ расположены всюду плотно в сегменте $[\alpha-\sigma, \alpha+\sigma]$, не выходя из этого сегмента.

С другой стороны, квадратурная формула типа Гаусса сходится для любой непрерывной функции. Буквально повторяя доказательство теоремы 4 (Стеклова) из § 1, мы убедимся, что узлы $x_k^{(n)}$ должны быть расположены всюду плотно в $[-1, +1]$, не выходя из этого сегмента.

Стало быть,

$$\alpha - \sigma = -1, \quad \alpha + \sigma = 1,$$

откуда $\alpha = 0$, $\sigma = 1$ и

$$\omega_n(x) = \widetilde{\mathscr{P}}_n(x).$$

Поскольку ортогональные полиномы определяют свой вес ортогонализации (для случая конечного промежутка) *однозначно*, теорема доказана.

ДОБАВЛЕНИЕ 1.

Формула Стирлинга.

На предыдущих страницах вам неоднократно приходилось пользоваться *формулой Стирлинга*

$$n! = \sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n} (1 + \omega_n) \qquad (\lim \omega_n = 0). \tag{279}$$

Так как эта формула не всегда выводится в курсах анализа, то мы дадим её доказательство. С этой целью рассмотрим переменную

$$x_n = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!}.$$

Нашей ближайшей целью будет показать, что x_n имеет конечный предел, для чего мы убедимся, что x_n есть возрастающая и ограниченная величина.

Так как $x_{n+1} = \dfrac{(n+1)^{n+1}\sqrt{n+1}}{e^{n+1}(n+1)!}$, то

$$\frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^{n+\frac{1}{2}} \frac{1}{e}$$

и, стало быть,

$$\ln \frac{x_{n+1}}{x_n} = \left(n + \frac{1}{2}\right) \ln\left(1 + \frac{1}{n}\right) - 1.$$

Так как гипербола $xy = 1$ обращена вогнутостью вверх, то площадь криволинейной трапеции, ограниченной этой гиперболой, осью абсцисс и ординатами $x = n$ и $x = n + 1$, *больше*, чем площадь прямолинейной трапеции, ограниченной осью абсцисс, теми же ординатами и касательной к гиперболе в точке $\left(n + \frac{1}{2},\ \frac{2}{2n+1}\right)$

(черт. 2). Из этого замечания следует, что

$$\int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x} > \frac{2}{2n+1},$$

откуда

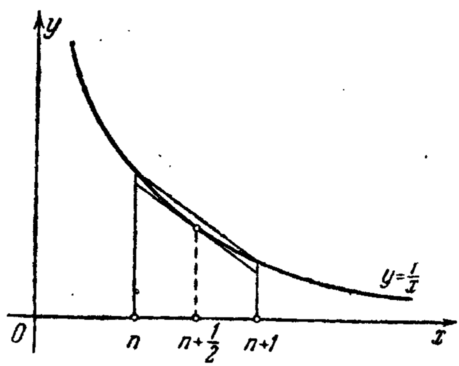
$$\left(n+\frac{1}{2}\right) \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) > 1$$

и, стало быть,

$$\ln \frac{x_{n+1}}{x_n} > 0.$$

Последнее неравенство означает, что $x_{n+1} > x_n$, так что x_n возрастает.

С другой стороны, площадь упомянутой криволинейной трапеции меньше, чем площадь прямолинейной



Черт. 2.

трапеции, ограниченной осью абсцисс, теми же ординатами и хордой, соединяющей точки $\left(n, \frac{1}{n}\right)$ и $\left(n+1, \frac{1}{n+1}\right)$ нашей гиперболы.

Отсюда

$$\int\limits_{n}^{n+1} \frac{dx}{x} < \frac{1}{2}\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n+1}\right) = \frac{n+\frac{1}{2}}{n(n+1)}$$

и, стало быть,

$$\left(n+\frac{1}{2}\right)\ln\left(1+\frac{1}{n}\right)<\frac{\left(n+\frac{1}{2}\right)^2}{n(n+1)}=1+\frac{1}{4n(n+1)}.$$

Отсюда вытекает, что

$$\ln\frac{x_{n+1}}{x_n}<\frac{1}{4n(n+1)}=\frac{1}{4}\left(\frac{1}{n}-\frac{1}{n+1}\right). \qquad (280)$$

Полагая в этом неравенстве $n=1, 2, \ldots, m-1$ и складывая полученные неравенства, находим

$$\ln\frac{x_2}{x_1}+\ln\frac{x_3}{x_2}+\ldots+\ln\frac{x_m}{x_{m-1}}<$$
$$<\frac{1}{4}\left[\left(1-\frac{1}{2}\right)+\left(\frac{1}{2}-\frac{1}{3}\right)+\ldots+\left(\frac{1}{m-1}-\frac{1}{m}\right)\right],$$

откуда

$$\ln\frac{x_m}{x_1}<\frac{1}{4}\left(1-\frac{1}{m}\right).$$

Тем более,

$$\ln\frac{x_n}{x_1}<\frac{1}{4}$$

и $x_n<x_1\sqrt[4]{e}$. Значит, переменная x_n имеет предел. Обозначим этот предел через A:

$$A=\lim_{n\to\infty}\frac{n^n\sqrt{n}}{e^n n!}.$$

В первой части (формула Валлиса, стр. 263) нами было установлено, что

$$\frac{(2n)!!}{(2n-1)!!}=\sqrt{\pi n+\theta_n\pi} \quad \left(0<\theta_n<\frac{1}{2}\right).$$

Но

$$(2n)!!=2^n n!, \quad (2n-1)!!=\frac{(2n)!}{(2n)!!}=\frac{(2n)!}{2^n n!}.$$

Таким образом предыдущая формула принимает вид

$$\frac{2^{2n}(n!)^2}{(2n)!}=\sqrt{n\pi+\theta_n\pi}. \qquad (281)$$

Из самого определения переменной x_n имеем

$$n! = \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n x_n}, \quad (2n)! = \frac{(2n)^{2n} \sqrt{2n}}{e^{2n} x_{2n}},$$

и формула (281) принимает вид

$$\frac{x_{2n}}{x_n^2} \sqrt{\frac{n}{2}} = \sqrt{n\pi + \theta_n \pi}.$$

Деля обе части этого равенства на $\sqrt{\frac{n}{2}}$ и переходя к пределу при возрастающем n, находим

$$\frac{A}{A^2} = \sqrt{2\pi},$$

откуда $A = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}$.

Итак,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n^n \sqrt{n}}{e^n n!} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}.$$

Стало быть,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{n!} = 1,$$

что равносильно формуле (279).

Замечание. Нетрудно дать оценку точности формулы Стирлинга. Действительно, из (280) вытекает, что

$$\ln \frac{x_{n+m}}{x_n} < \frac{1}{4}\left[\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+1}\right) + \ldots + \left(\frac{1}{n+m-1} - \frac{1}{n+m}\right)\right] = \\ = \frac{1}{4}\left(\frac{1}{n} - \frac{1}{n+m}\right).$$

Увеличивая m и переходя к пределу, находим

$$\ln \frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x_n} \leqslant \frac{1}{4n}.$$

Значит,

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}\, x_n} \leqslant e^{\frac{1}{4n}}$$

и $\sqrt{2\pi}\, x_n \geqslant e^{-\frac{1}{4n}}$. С другой стороны, x_n возрастает и потому остаётся меньше своего предела $A=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$, так что $\sqrt{2\pi}\, x_n < 1$. Таким образом

$$e^{-\frac{1}{4n}} \leqslant \frac{\sqrt{2\pi n}\, n^n e^{-n}}{n!} < 1,$$

т. е.

$$e^{-\frac{1}{4n}} \leqslant \frac{1}{1+\omega_n} < 1,$$

откуда

$$0 < \omega_n \leqslant e^{\frac{1}{4n}} - 1.$$

ДОБАВЛЕНИЕ 2.

О теоремах Мюнтца.

В целях простоты изложения в теоремах Мюнтца (часть вторая, глава III, § 3) показатели n_i предполагались целыми и неотрицательными. Однако существом дела эти ограничения не вызывались. Рассмотрим проблемы Мюнтца с большей общностью.

Пусть $\{p_i\}$ — произвольные вещественные числа, подчинённые единственному условию $p_i > -\frac{1}{2}$ (это условие надо поставить, чтобы функции x^{p_i} входили в $L^2([0, 1])$).

Так же, как и ранее, мы убеждаемся, что множество степеней $\{x^{p_i}\}$ фундаментально в $L^2([0, 1])$ тогда и только тогда, когда для всякого неотрицательного и целого m выполнено условие

$$\lim_{s\to\infty} \prod_{i=1}^{s} \frac{|p_i - m|}{m+p_i+1} = 0. \tag{282}$$

Если

$$\lim p_i = +\infty,$$

то, как и в основном тексте, мы увидим, что (282) равносильно соотношению

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

Допустим теперь, что

$$\lim p_i = a \qquad \left(-\frac{1}{2} < a < +\infty\right).$$

В этом случае система степеней $\{x^{p_i}\}$ обязательно фундаментальна в $L^2([0, 1])$. Действительно, при неотрицательном m

$$-(m+a+1) < a-m < m+a+1,$$

так что

$$\frac{|a-m|}{m+a+1} < 1.$$

Выбрав число q, лежащее в интервале $\left(\frac{|a-m|}{a+m+1}, 1\right)$, для достаточно больших i будем иметь

$$\frac{|p_i-m|}{m+p_i+1} < q,$$

откуда следует (282).

Рассмотрим, наконец, случай

$$\lim p_i = -\frac{1}{2}.$$

Считая i_0 настолько большим, что при $i \geqslant i_0$ будет $p_i < 0$, получим

$$\ln \prod_{i=i_0}^{s} \frac{m-p_i}{m+p_i+1} =$$

$$= \sum_{i=i_0}^{s} \ln\left(1 - \frac{p_i+\frac{1}{2}}{m+\frac{1}{2}}\right) - \sum_{i=i_0}^{s} \ln\left(1 + \frac{p_i+\frac{1}{2}}{m+\frac{1}{2}}\right)$$

Отсюда ясно, что условие (282) равносильно соотношению

$$\sum_{i=1}^{\infty}\left(p_i+\frac{1}{2}\right)=+\infty.$$

Из сказанного вытекает

Теорема (Г. М. Мюнтц). *Система степеней* $\{x^p\}$ $\left(p>-\frac{1}{2}\right)$ *фундаментальна в случае, если из множества показателей* $\{p\}$ *выделяется последовательность* $\{p_i\}$ *одного из трёх типов*:

1) $\lim p_i=+\infty,\qquad \sum\frac{1}{p_i}=+\infty;$

2) $\lim p_i=a,\qquad -\frac{1}{2}<a<+\infty;$

3) $\lim p_i=-\frac{1}{2},\qquad \sum\left(p_i+\frac{1}{2}\right)=+\infty.$

В противном случае система $\{x^p\}$ *не фундаментальна.*

В доказательстве нуждается только последнее утверждение теоремы. Пусть из $\{p\}$ нельзя выделить последовательности одного из указанных трёх типов. Не имея внутри интервала $\left(-\frac{1}{2},\ \infty\right)$ точек сгущения, множество $\{p\}$ разве лишь исчислимо: $\{p\}=\{p_i\}$. Разобьём это множество на две части: A и B, включив в A все отрицательные, а в B все неотрицательные p_i.

Тогда *) при $p_i\in A$

$$\lim p_i=-\frac{1}{2},\quad \sum\left(p_i+\frac{1}{2}\right)<+\infty,$$

а при $p_i\in B$

$$\lim p_i=+\infty,\quad \sum\frac{1}{p_i}<+\infty.$$

Значит, оба бесконечных произведения

$$\prod_A\frac{|m-p_i|}{m+p_i+1},\quad \prod_B\frac{|m-p_i|}{m+p_i+1}$$

отличны от нуля, и (282) не выполнено.

*) Мы предполагаем, что A и B бесконечны, иначе всё тривиально.

Переходя к рассмотрению условий, при которых линейными комбинациями степеней $\{x^p\}$ можно с любой степенью точности равномерно приблизить всякую функцию из $C([0, 1])$, заметим, что все показатели p можно предполагать неотрицательными. Действительно, если бы среди них и были отрицательные, то всё равно члены вида cx^p при $p < 0$ в приближающие полиномы не войдут (иначе такой полином обращался бы в бесконечность при $x = 0$).

Нижеследующий результат в основном принадлежит С. Н. Бернштейну*) и был получен им ранее опубликования работы Мюнтца.

Теорема. *Пусть $S = \{p\}$ — множество неотрицательных вещественных чисел. Для того чтобы полиномы*

$$\sum_{k=1}^{n} c_k x^{p_k} \qquad (p_k \in S)$$

образовывали множество, всюду плотное в $C([0, 1])$, достаточно, чтобы число $p = 0$ входило в S и, кроме того, S удовлетворяло одному из условий:

1) *Из S выделяется последовательность $\{p_i\}$, у которой*

$$\lim p_i = +\infty, \quad \sum \frac{1}{p_i} = +\infty.$$

2) *Из S выделяется последовательность $\{p_i\}$, у которой*

$$0 < \lim p_i < +\infty.$$

Достаточность условия 1) (в соединении с включением $0 \in S$) доказывается, как в основном тексте книги.

Если выполнено условие 2) и

$$\lim p_i > \frac{1}{2},$$

то система степеней $\{x^{p_i - 1}\}$ фундаментальна в $L^2([0, 1])$, откуда без труда вытекает доказательство теоремы.

*) С. Н. Бернштейн [3]. Метод С. Н. Бернштейна отличен от приводимого нами.

Допустим теперь, что $\lim p_i \leqslant \frac{1}{2}$. Подберём столь большое s, чтобы было $\lim sp_i > \frac{1}{2}$. По доказанному полиномы $\sum c_k x^{sp_k}$ образуют множество, всюду плотное в $C([0, 1])$. Заметив это, возьмём произвольную функцию $f(x) \in C([0, 1])$ и положим $\varphi(y) = f(y^s)$. Эта функция тоже входит в $C([0, 1])$, и потому найдутся коэффициенты c_k, при которых

$$\left|\sum c_k y^{sp_k} - f(y^s)\right| < \varepsilon \qquad (0 \leqslant y \leqslant 1),$$

где $\varepsilon > 0$ задано наперёд. Остаётся заменить y^s через x.

ДОБАВЛЕНИЕ 3.

Теоремы С. М. Лозинского — Ф. И. Харшиладзе и В. Ф. Николаева.

В § 4 главы IV второй части мы уже упоминали о теореме В. Ф. Николаева, согласно которой не существует такой ортонормальной по какому-нибудь весу системы полиномов, чтобы всякая непрерывная функция разлагалась в равномерно сходящийся ряд по этим полиномам. Этот результат был доложен В. Ф. Николаевым на заседании семинара по теории функций при кафедре математического анализа Ленинградского университета. Участниками семинара С. М. Лозинским и Ф. И. Харшиладзе было замечено, что метод Николаева позволяет доказать и значительно более общую теорему. В настоящем добавлении излагаются указанные результаты.

Условимся в следующем способе речи: пусть каждой функции $\varphi(x) \in C([a, b])$ отнесена некоторая функция $\psi(x)$ того же класса $C([a, b])$

$$\psi(x) = \psi[\varphi; x] = U(\varphi).$$

Если соблюдены условия

α) $U(\varphi_1 + \varphi_2) = U(\varphi_1) + U(\varphi_2)$,

β) $\max|\psi(x)| \leqslant K \max|\varphi(x)|$, причём постоянная K не зависит от выбора $\varphi(x)$, то говорят, что $U(\varphi)$ есть *«линейный оператор* из пространства $C([a,b])$ в пространство $C([a,b])$».

Нетрудно понять, что такой оператор *однороден*, т. е. при любой постоянной c

$$\gamma)\ U(c\varphi)=cU(\varphi).$$

Числа K, удовлетворяющие неравенству β), неотрицательны. Значит, они имеют точную нижнюю границу K_0. Легко видеть, что K_0 также удовлетворяет неравенству β). Число K_0 называется *нормой* оператора $U(\varphi)$ и обозначается через $\|U\|$.

Лемма 1. *Пусть* $U_1(\varphi)$, $U_2(\varphi)$, $U_3(\varphi)$, ... *есть последовательность линейных операторов из* $C([a,b])$ *в* $C([a,b])$. *Если для каждой функции* $\varphi(x)$ *соответствующие функции*

$$\psi_n(x)=U_n(\varphi)$$

ограничены на $[a,b]$ *одним числом, не зависящим от* n,

$$|\psi_n(x)|\leqslant A(\varphi) \qquad (a\leqslant x\leqslant b;\quad n=1,2,3,\ldots),$$

то нормы операторов $U_n(\varphi)$ *также ограничены числом, не зависящим от* n.

Доказательство проводится «методом скользящего горба». Именно, допуская, что нормы операторов $U_n(\varphi)$ не ограничены, построим для каждого n такую функцию $\bar\varphi_n(x)$, чтобы было справедливо неравенство*)

$$\max|U_n(\bar\varphi_n)|>\frac{1}{2}\|U_n\|\max|\bar\varphi_n(x)|.$$

Полагая $2M_n=\|U_n\|$ и

$$\varphi_n(x)=\frac{\bar\varphi_n(x)}{\max|\bar\varphi_n(x)|},$$

*) Если при некоторых n будет $\|U_n\|=0$, то такие n мы не будем рассматривать. Значит, $\frac{1}{2}\|U_n\|<\|U_n\|$ и $\bar\varphi_n(x)$ существует.

будем иметь при всех n:

$$\max|U_n(\varphi_n)| > M_n, \quad \max|\varphi_n(x)| = 1,$$

причём множество чисел M_n не ограничено.

Построив функции $\varphi_n(x)$, определим возрастающую последовательность $n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$ следующим способом. Пусть $n_1 = 1$. За n_2 берём такое натуральное число, что

$$M_{n_2} > 3 \cdot 4^2 \left[A\left(\frac{\varphi_{n_1}}{4}\right) + 2\right],$$

далее обозначаем через n_3 такое натуральное число, что

$$M_{n_3} > 3 \cdot 4^3 \left[A\left(\frac{\varphi_{n_1}}{4} + \frac{\varphi_{n_2}}{4^2}\right) + 3\right],$$

причём $n_3 > n_2$. Продолжая этот процесс, мы определим n_m под условием, чтобы было

$$M_{n_m} > 3 \cdot 4^m \left[A\left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_k}}{4^k}\right) + m\right],$$

причём $n_m > n_{m-1}$. Это и будет требуемая последовательность.

Пусть

$$\varphi(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_k}(x)}{4^k}.$$

Это непрерывная функция. Значит, при всех n будет

$$|U_n(\varphi)| \leqslant A(\varphi). \tag{283}$$

С другой стороны,

$$U_{n_m}(\varphi) = U_{n_m}\left(\sum_{k=1}^{m-1} \frac{\varphi_{n_k}(x)}{4^k}\right) + \frac{1}{4^m} U_{n_m}(\varphi_{n_m}) + \\ + U_{n_m}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty} \frac{\varphi_{n_k}(x)}{4^k}\right).$$

По условию

$$\left|U_{n_m}\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\varphi_{n_k}}{4^k}\right)\right|\leqslant A\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\varphi_{n_k}}{4^k}\right).$$

Кроме того,

$$\left|U_{n_m}\left(\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_k}}{4^k}\right)\right|\leqslant \|U_{n_m}\|\max\left|\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{\varphi_{n_k}(x)}{4^k}\right|\leqslant$$

$$\leqslant 2M_{n_m}\sum_{k=m+1}^{\infty}\frac{1}{4^k}=\frac{2M_{n_m}}{3\cdot 4^m}.$$

Стало быть, при всех $x\in[a,b]$ будет

$$|U_{n_m}(\varphi)|\geqslant\frac{1}{4^m}|U_{n_m}(\varphi_{n_m})|-A\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\varphi_{n_k}}{4^k}\right)-\frac{2M_{n_m}}{3\cdot 4^m}.$$

Но по самому построению функции $\varphi_{n_m}(x)$ найдётся такая точка $x_m\in[a,b]$, в которой

$$|U_{n_m}(\varphi_{n_m})|>M_{n_m}.$$

В этой точке окажется

$$|U_{n_m}(\varphi_{n_m})|>\frac{M_{n_m}}{3\cdot 4^m}-A\left(\sum_{k=1}^{m-1}\frac{\varphi_{n_k}}{4^k}\right)>m,$$

что противоречит неравенству (283). Лемма доказана.

Лемма 2. *Пусть $U_n(\varphi)$—линейный оператор из $C([0,\pi])$ в $C([0,\pi])$, обладающий следующими двумя свойствами:*

1) *Для всякой $\varphi(x)\in C([0,\pi])$ значение оператора $U_n(\varphi)$ есть чётный тригонометрический полином порядка не выше n.*

2) *Если $T_n(x)$ есть чётный тригонометрический полином порядка не выше n, то*

$$U_n(T_n)\equiv T_n(x).$$

В таком случае верна оценка

$$\|U_n\|\geqslant\frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}.$$

Для доказательства введём полиномы

$$A(x)=\frac{\cos x}{n}+\frac{\cos 2x}{n-1}+\ldots+\frac{\cos nx}{1},$$

$$B(x)=\frac{\cos(n+2)x}{1}+\frac{\cos(n+3)x}{2}+\ldots+\frac{\cos(2n+1)x}{n},$$

которые мы уже рассматривали в первой части (гл. VII, § 3), где установили, что

$$|A(x)-B(x)|\leqslant 4\sqrt{\pi}.$$

Пусть y—некоторое постоянное число и

$$Q_y(x)=U_n[B(x+y)+B(x-y)].$$

Так как

$$B(x+y)+B(x-y)=\sum_{k=n+2}^{2n+1}\frac{2\cos kx\cos ky}{k-n-1},$$

то

$$Q_y(x)=\sum_{k=n+2}^{2n+1}V_k(x)\cos ky,$$

где положено для краткости

$$V_k(x)=U_n\left(\frac{2\cos kx}{k-n-1}\right).$$

Важно отметить, что порядок $V_k(x)$ не выше n. Поэтому

$$\int_0^\pi Q_y(y)\,dy=\frac{1}{2}\int_{-\pi}^{\pi}\left[\sum_{k=n+2}^{2n+1}V_k(y)\cos ky\right]dy=0.$$

С другой стороны, $A(2y)$ есть полином без свободного члена и потому

$$\int_0^\pi A(2y)\,dy=0.$$

Но тогда

$$\int_0^{\pi} [A(2y) - Q_y(y)]\,dy = 0$$

и на $[0, \pi]$ обязательно имеется такая точка a, что

$$A(2a) - Q_a(a) = 0.$$

Установив это, положим

$$T(x) = [A(x+a) + A(x-a)] - [B(x+a) + B(x-a)].$$

Ясно, что

$$|T(x)| \leqslant 8\sqrt{\pi}.$$

С другой стороны, если $V(x) = U_n(T)$, то

$$V(x) = A(x+a) + A(x-a) - Q_a(x)$$

и, стало быть,

$$V(a) = A(0) = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k} > \ln n.$$

Таким образом

$$\ln n < \max|V(x)| \leqslant \|U_n\| \max|T(x)| \leqslant 8\sqrt{\pi}\,\|U_n\|.$$

Лемма доказана.

Лемма 3. *Если $U_n(\varphi)$—линейный оператор, переводящий любую функцию $\varphi(x) \in C([a, b])$ в некоторый алгебраический полином степени $\leqslant n$ и такой, что всякий такой полином $P_n(x)$ переводится сам в себя*

$$U_n(P_n) \equiv P_n(x),$$

то

$$\|U_n\| \geqslant \frac{\ln n}{8\sqrt{\pi}}.$$

Действительно, установим взаимно однозначное соответствие между $C([a, b])$ и $C([0, \pi])$, относя каждой $\varphi(x) \in C([a, b])$ индуцированную функцию

$$\bar{\varphi}(\theta) = \varphi\left[\frac{(b-a)\cos\theta + a + b}{2}\right].$$

Важно отметить, что это соответствие относит сумме $\varphi_1 + \varphi_2$ сумму $\bar{\varphi}_1 + \bar{\varphi}_2$ и что $\max|\varphi(x)| = \max|\bar{\varphi}(\theta)|$.

При этом соответствии множество H_n всех алгебраических полиномов степени $\leqslant n$ (которое входит в класс $C([a, b])$) отобразится взаимно однозначным образом на множество всех чётных тригонометрических полиномов порядка $\leqslant n$.

Значит, задать функцию $\varphi(x) \in C([a, b])$ — это то же самое, что задать соответствующую ей функцию $\bar{\varphi}(\theta) \in C([0, \pi])$, и то же относится к полиномам. Но тогда оператор U_n может считаться заданным на $C([0, \pi])$ и обладающим свойствами 1) и 2) леммы 2. Остальное ясно.

Теперь уже без труда получается теорема Лозинского—Харшиладзе:

Теорема. *Не может существовать такой последовательности линейных операторов* $\{U_n(\varphi)\}$ $(n = 1, 2, 3, \ldots)$, *чтобы*

1) $U_n(\varphi)$ *переводил всякую* $\varphi \in C([a, b])$ *в полином из* H_n.

2) *Для всякого* $P(x) \in H_n$ *было* $U_n(P) \equiv P(x)$.

3) *Для любой* $\varphi(x) \in C([a, b])$ *равномерно на* $[a, b]$ *было*

$$\lim_{n \to \infty} U_n(\varphi) = \varphi(x).$$

В самом деле, если бы такие операторы существовали, то по лемме 3 их нормы должны были бы оказаться неограниченными, а из условия 3) вытекает, что при всех n будет

$$|U_n(\varphi)| \leqslant A(\varphi),$$

что противоречит лемме 1.

Если заметить, что частные суммы ряда Фурье непрерывной функции по любой ортонормальной системе полиномов представляют собой линейные операторы, для которых очевидно выполняются условия 1) и 2) доказанной теоремы, то станет ясной справедливость и вышеупомянутой теоремы Николаева.

В заключение отметим, что и теорема Фабера также есть следствие теоремы Лозинского—Харшиладзе.

ЦИТИРОВАННАЯ ЛИТЕРАТУРА.

Ахиезер Н. И. и Крейн М. Г.

[1] О наилучшем приближении тригонометрическими суммами дифференцируемых периодических функций. ДАН, **15** (1937), 107—112.

[2] О некоторых вопросах теории моментов. Харьков, ГОНТИ УССР (1938).

Безикович Я. С.

[1] Исчисление конечных разностей. Л., Изд. ун-та (1939).

Берман Д. Л.

[1] Об одном интерполяционном процессе Эрмита. ДАН, **58** (1947), 1569—1571.

Бернштейн С. Н.

[1] Demonstration du théorème de Weierstrass fondée sur le calcul des probabilités. Харьков, *Сообщ. матем. об-ва* (2), **13** (1912), 1—2.

[2] Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques. *C. R. Acad. Sc.*, **155** (1912), 1062—1065.

[3] Sur l'ordre de la meilleure approximation des fonctions continues par des polynômes de degré donné. *Mém. Acad. de Belgique* (2), **4** (1912), 1—103.

[4] Об асимптотическом значении наилучшего приближения аналитических функций. Харьков, *Сообщ. матем. об-ва* (2), **13** (1913), 263—273.

[5] Sur la valeur asymptotique de la meilleure approximation des fonctions analytiques, admettant des singularités données. *Bull. Acad. de Belgique*, 2 (1913), 76—90.

[6] Quelques remarques sur l'interpolation. Харьков, *Сообщ. матем. об-ва* (2), **15** (1916), 49—61.

[7] Sur un procédé de sommation des séries trigonométriques. *C. R. Acad. Sc.*, **191** (1930), 976—979.

[8] Sur une modification de la formule d'interpolation de Lagrange. Харьков, *Зап. матем. т-ва* (4), **5** (1932), 49—57.

[9] О тригонометрическом интерполировании по способу наименьших квадратов. ДАН, **4** (1934), 1—8.

[10] Экстремальные свойства полиномов и наилучшее приближение непрерывных функций одной вещественной переменной. М.—Л., ОНТИ (1937).
[11] О формулах квадратур Котеса и Чебышева. ДАН, **14** (1937), 323—327.
[12] Sur un système d' équations indéterminées. *Journ. math. pur. et appl.* (9), **17** (1938), 179—186.
[13] Sur le problème inverse de la théorie de la meilleure approximation des fonctions continues. *C. R. Acad. Sc.*, **206** (1938), 1520—1523.
[14] Обобщение одного результата С. М. Никольского. ДАН, **53** (1946), 587—589.

Борель (Borel E.).
[1] Leçonssur les fonctions de variables réelles. Paris (1905).

Валле-Пуссен (Vallée-Poussin Ch.-J.).
[1] Sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle et de leur dérivées par des polynômes et des suites finies de Fourier. *Bull. Acad. de Belgique*, 3 (1908), 193—254.
[2] L'approximation des fonctions d'une variable réelle. *L'Enseign. math.*, I (1918).
[3] Leçons sur l'approximation des fonctions d'une variable réelle. Paris (1919).

Вейерштрасс (Weierstrass K.).
[1] Ueber die analytische Darstellbarkeit sogenannter willkürlicher Funktionen einer reellen Veränderlichen. *Sitzungsberichte der Akad. zu Berlin* (1885), 633—639; 789—805.

Вороновская Е. В.
[1] Определение асимптотического вида приближения функций полиномами С. Н. Бернштейна. ДАН (А), (1932), 79—85.

Гагаев Б. М.
[1] О некоторых классах ортогональных функций. ИАН, *сер. матем.*; **10** (1946), 197—206.

Гамбургер (Hamburger H.).
[1] Ueber eine Erweiterung des Stieltjesschen Momentenproblems. *Math. Ann.*, **81** (1920), 235—319; **82** (1921), 120—164, 168—187.

Гаусс (Gauss C. F).
[1] Methodus nova integralium valores per approximationem inveniendi. (1814). Werke, Bd. **3**, S. 163—196.

Геронимус Я. Л.
[1] On a problem of M. J. Shohat. *Amer. Journ. Math.*, **54** (1932), 85—91.
[2] О некоторых экстремальных задачах. ИАН, *сер. матем.* (1937), 185—202.
[3] Об одной экстремальной задаче Чебышева. ИАН, *сер. матем.* (1938), 445—456.

[4] Обобщённые ортогональные полиномы и формула Кристоффеля-Дарбу. ДАН, **26** (1940), 843—846.
[5] О некоторых свойствах обобщённых ортогональных полиномов. ДАН, **29** (1940), 5—8.
[6] On Gauss and Tchebycheff's quadrature Formulas. *Bull. Amer. Math. Soc.*, **50** (1944), 217—221.

Гончаров В. Л.
[1] Теория интерполирования и приближения функций. М.—Л., ГТТИ (1934).

Грам (Gram I. P.).
[1] Ueber die Entwicklung reeller Funktionen in Reihen mittels der Methode der kleinsten Quadrate. *Journ. für Math.*, **94** (1883), 41—73.

Грюнвальд (Grünwald G.).
[1] Ueber Divergenzerscheinungen der Lagrangeschen Interpolationspolynome stetiger Funktionen. *Ann. of Math.*, **37** (1936), 908—918.
[2] On the theory of interpolation. *Acta Math.*, **75** (1943), 219—245.

Грюнвальд и Туран (Grünwald G. und Turán P.).
[1] Ueber Interpolation. *Ann. di Sc. Norm. di Pisa*, **7** (1938), 137—146.

Дарбу (Darboux G.).
[1] Mémoire sur l'approximation des fonctions de très grands nombres. *Journ. de Math.* (3), **4** (1878), 5—56; 377—416.

Джексон (Jackson D.).
[1] Ueber die Genauigkeit der Annäherung stetiger Funktionen durch ganze rationale Funktionen. *Dissertation*, Göttingen (1911).
[2] On approximation by trigonometric sums and polynomials. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **14** (1912), 491—515.

Зигмунд (Zygmund A.).
[1] Тригонометрические ряды. М.—Л. (1939).
[2] Smooth Functions. *Duke Math. Journ.*, **12** (1945), 47—76.

Канторович Л. В.
[1] О сходимости последовательности полиномов С. Н. Бернштейна за пределами основного интервала. ИАН, *сер. физ.-матем.* (1931), 1103—1115.
[2] К проблеме моментов для конечного интервала. ДАН, **14** (1937), 531—536.

Кац (Кас М.)
[1] Une remarque sur les polynômes de M. S. Bernstein. *Studia Math.*, **7** (1938), 49—51.
[2] Reconnaissance de priorité relative á ma Note «Une remarque sur les polynômes de M. S. Bernstein». *Studia Math.*, **8** (1939), 170.

Колмогоров А. Н.
[1] Une série de Fourier-Lebesgue divergente partout. *C. R. Acad. Sci.*, **183** (1926), 1327—1328.
[2] О сходимости рядов по ортогональным полиномам. ДАН, **1** (1934), 291—294.
[3] Zur Grössenordnung des Restgliedes Fourierscher Reihen differenzierbarer Funktionen. *Ann. of Math.*, **36** (1935), 521—526.

Кораус (Korous J.).
[1] O rozvojí funkcí jedné réalné proměnné v řadu jistých ortogonálních polynomů. *Rozpravy České Akademie*, **48** (1938), 1—12.

Коркин А. Н. и Золотарёв Е. И.
[1] Sur un certain minimum (1873). Собр. соч. Е. И. Золотарёва, т. I, 138—153.

Кристоффель (Christoffel E. B.).
[1] Ueber die Gaussische Quadratur und eine Verallgemeinerung derselben. *Journ. für Math.*, **55** (1858), 61—82.

Кузьмин Р. О.
[1] К теории механических квадратур. Л., *Изв. политехн. ин-та, отд. техн. естеств. и матем.*, **33** (1931), 5—14.
[2] Sur la méthode de Tchebycheff pour l'évaluation approchée des intégrales. C. *R. Acad. Sc.*, **201** (1935), 1094—1095.
[3] О распределении корней полиномов, связанных с квадратурами Чебышева. ИАН, *сер. матем.* (1938), 427—444.

Кузьмин Р. О. и Натансон И. П.
[1] О сильной сходимости интерполяционного полинома Лагранжа. Л., *Учён. зап. ун-та, сер. матем.*, 37 : **6** (1939), 81—89.

Лагерр (Laguerre E. N.).
[1] Sur l'intégrale $\int_x^\infty \frac{e^x}{x}dx$. *Bull. Soc. Math. de France,* **7** (1879), 72—81.

Лебег (Lebesgue H.).
[1] Sur les intégrales singulières. *Ann. de Toulouse*, I (1909), 25—117.

Лежандр (Légendre A. M.).
[1] Recherches sur l'attraction des sphéroides homogènes. *Mém. math.-phys. présentés à l'Acad. Sc.*, **10** (1785), 411—434.

Лозинский С. М.
[1] О сильной сходимости интерполяционных процессов. ДАН, **28** (1940), 202—205.
[2] О сильной сходимости интерполяционных процессов. ДАН, **30** (1941), 384—388.
[3] On convergence and summability of Fourier series and interpolation processes. *Матем. сб.*, **14** (56), (1944), 175—268.

[4] Пространства $\widetilde{C}_\omega$ и $\widetilde{C}^*_\omega$ и сходимость интерполяционных процессов в них. ДАН, **59** (1948), 1389—1392.

Марков А. А.

[1] О некоторых приложениях алгебраических непрерывных дробей. СПБ (1884).

[2] Sur la méthode de Gauss pour le calcul approché des intégrales *Math. Ann.*, **25** (1885), 427—432.

[3] Об одном вопросе Д. И. Менделеева. СПБ, ИАН, **62** (1889), 1—24.

[4] Исчисление конечных разностей. Одесса (1910).

Марков В. А.

[1] О функциях, наименее уклоняющихся от нуля в данном промежутке. СПБ (1892).

Марцинкевич (Marcinkiewicz I.)

[1] Quelques remarques sur l'interpolation. *Acta Litterarum ac Scientiarum*, Szeged, 8 (1937), 127—130.

[2] Sur la divergence des polynômes d'interpolation. *Acta Litterarum ac Scientiarum*, Szeged, 8 (1937), 131—135.

Мюнтц (Muntz Ch.).

[1] Ueber den Approximationssatz von Weierstrass. Schwarz Festschrift (1914), 303—312.

Натансон И. П.

[1] К вопросу о разложении функций по ортогональным полиномам. ИАН, *сер. физ.-матем.* (1933), 85—88.

[2] О сходимости рядов по ортогональным полиномам. ДАН, **2** (1934), 209—212.

[3] О суммировании рядов Фурье по методу С. Н. Бернштейна и В. Рогозинского. Л., *Труды индустр. ин-та, раздел физ.-матем.*, **4** (1937), 39—44.

[4] К теории бернштейновского способа суммирования рядов Фурье. Л., *Труды ин-та точной механики и оптики*, **1** : 3 (1941), 197—206.

[5] Основы теории функций вещественной переменной. Л., изд. ун-та (1941).

[6] On the convergence of trigonometrical interpolation at equidistant knots. *Ann. of Math.*, **45** (1944), 457—471.

[7] Некоторые оценки, связанные с сингулярным интегралом Валле-Пуссена. ДАН, **45** (1944), 290—293.

[8] Приложения интеграла Валле-Пуссена в теории рядов Фурье. ДАН, **49** (1945), 402—404.

[9] О приближённом представлении функций, удовлетворяющих условию Липшица, с помощью интеграла Валле-Пуссена. ДАН, **54** (1946), 11—14.

Николаев В. Ф.

[1] К вопросу о приближении непрерывных функций полиномами. ДАН, **61** (1948), 201—204.

Никольский С. М.
[1] Об асимптотическом поведении остатка при приближении функций, удовлетворяющих условию Липшица, суммами Фейера. ИАН, *сер. матем.*, **4** (1940), 501—507.
[2] Приближение периодических функций тригонометрическими полиномами. *Труды матем. ин-та им. Стеклова*, **15** (1945).
[3] Наилучшее приближение многочленами функций, удовлетворяющих условию Липшица. ДАН, **52** (1946), 7—9.
[4] Ряд Фурье функции с данным модулем непрерывности. ДАН, **52** (1946), 191—194.

Пиблс (Peebles G.).
[1] Some generalizations of the theory of orthogonal polynomials. *Duke Math. Journ.*, **6** (1940), 89—100.

Полиа (Polya G.).
[1] Ueber die Konvergenz von Quadraturverfahren. *Math. Z.*, **37** (1933), 264—286.

Поповичиу (Popoviciu T.).
[1] Sur l'approximation des fonctions convexes d'ordre supérieur. *Mathematica*, **10** (1934), 49—54.

Поссе К. А.
[1] Sur les quadratures. *Nouv. Ann. de Math.* (2) **14** (1875), 49—62.

Радемахер (Rademacher H.).
[1] Einige Sätze über Reihen von allgemeinen Orthogonalfunktionen. *Math. Ann.*, 87 (1922), 112—138.

Рапопорт С. И.
[1] Об одном процессе приближения функций тригонометрическими полиномами. ДАН, **56** (1947), 11—12.

Рисс (Riesz F.).
[1] Sur les systémes orthogonaux de fonctions. *C. R. Acad. Sc*, **144** (1907), 615—619; 734—736.
[2] Sur les opérations fonctionnelles linéaires. *C. R. Acad. Sc.*, **149** (1909), 974—977.

Рогозинский (Rogosinski W.).
[1] Ueber die Abschnitte trigonometrischer Reihen. *Math. Ann.*, **95** (1925), 110—134.

Сеге (Szegö G.).
[1] Orthogonal polynomials. *Amer. Math. Soc. Colloq, Public.*, 23 (1939).

Стеклов В. А.
[1] Sur la théorie de fermeture des systèmes de fonctions orthogonales dépendant d'un nombre quelconque de variables. Зап. АН (8), **30**: 4 (1911), 1—86.

[2] О приближённом вычислении определённых интегралов при помощи формул механических квадратур. ИАН (6), **10** (1916), 169—186.
[3] Théorème de fermeture pour les polynômes de Laplace-Hermite-Tchébychef. ИАН (6), **10** (1916), 403—416.
[4] Théorème de fermeture pour les polynômes de Tchébychef-Laguerre. ИАН (6), **10** (1916), 633—642.

Стилтьес (Stieltjes T. J.).
[1] Quelques recherches sur la théorie des quadratures dites mécaniques. *Ann. de l'Ec. Norm.*, **1** (1884), 409—426.
[2] Исследования о непрерывных дробях. Харьков (1936). (Перевод из *Ann. de Toulouse*, **8** (1894), 1—122; **9** (1895), 1—47.)
[3] Correspondance d'Hermite et de Stieltjes, t. I, Paris (1905).

Теплер (Toepler A.).
[1] Bemerkenswerte Eigenschaften der periodischen Reihen. *Wiener Akad. Anz.*, **13** (1876), 205—209.

Фабер (Faber G.).
[1] Ueber die interpolatorische Darstellung stetiger Funktionen. *Jahresber. der DMV*, **23** (1914), 192—210.

Фавар (Favard J.).
[1] Sur les polynômes de Tchebicheff. *C. R. Acad. Sc.*, **200** (1935), 2052—2053.

Фейер (Fejér L.).
[1] Untersuchungen über Fouriersche Reihen. *Math. Ann.*, **58** (1904), 501—569.
[2] Ueber Interpolation. *Gött. Nachr.* (1916), 66—91.
[3] Die Abschätzung eines Polynoms in einem Intervalle, wenn Schranken für seine Werte und ersten Ableitungswerte in einzelnen Punkten des Intervalles gegeben sind, und ihre Anwendung auf die Konvergenzfrage Hermitescher Interpolationsreihen. *Math. Z.*, **32** (1930), 426—457.
[4] Lagrangesche Interpolation und die zugehörigen konjugierten Punkte. *Math. Ann.*, **106** (1932), 1—55.
[5] Mechanische Quadraturen mit positiven Cotesschen Zahlen. *Math. Z.*, **37** (1933), 287—309.

Фельдгейм (Feldheim E.).
[1] О характере сходимости при интерполировании методом Лагранжа. ДАН, **14** (1937), 329—333.

Фихтенгольц Г. М.
[1] Sur la notion de fermeture des systèmes de fonctions. *Rend. Cir Mat. Palermo*, **50** (1926), 385—398.

Фишер (Fischer E.).
[1] Sur la convergence en moyenne. *C. R. Acad. Sc.*, **144** (1907), 1022—1024; 1148—1150.

Ф р е ш е (F r é c h e t M.).
[1] Sur les ensembles de fonctions et les opérations linéaires. *C. R. Acad. Sc.*, **144** (1907), 1414—1416.

Х а р ш и л а д з е Ф. И.
[1] О методе суммирования С. Н. Бернштейна и В. Роговинского. ДАН, **30** (1941), 692—695.
[2] Об одной теореме С. Н. Бернштейна из теории интерполяций. Л., *Труды ин-та точн. механ. и оптики*, **1** : 3 (1941), 207—212.
[3] О методе суммирования С. Н. Бернштейна. *Матем. сб.*, **11** (53), (1942), 121—148.

Х а у с д о р ф (H a u s d o r f f F.).
[1] Momentprobleme für ein endliches Intervall. *Math. Z.*, **16** (1923), 220—248.

Ч е б ы ш е в П. Л.
[1] Теория механизмов, известных под именем параллелограммов. (1853). *Сочинения*, т. I, стр. 111—143.
[2] Вопросы о наименьших величинах, связанных с приближённым представлением функций. (1857—1859). *Сочинения*, т. I, стр. 273—378.
[3] О функциях, мало удаляющихся от нуля при некоторых величинах переменной. (1880—1881), *Сочинения*, т. II, стр. 335—356.
[4] О квадратурах. (1873). *Сочинения*, т. II, стр. 165—180.

Ш м и д т (S c h m i d t E.).
[1] Entwicklung willkürlicher Funktionen nach Systemen vorgeschriebener. *Math. Ann.*, **63** (1907), 433—476.

Ш о х а т (S h o h a t J.).
[1] On a general formula in the theory of Tchebyscheff polynomial and its applications. *Trans. Amer. Math. Soc.*, **29** (1927), 569—583.

Э р д е ш и Т у р а н (E r d ö s P. and T u r á n P.).
[1] On interpolation, I. *Ann. of Math.*, **38** (1937), 142—155.

Э р м и т (H e r m i t e Ch.).
[1] Sur un nouveau développement en série de fonctions. *C. R. Acad. Sc.*, **58** (1864), 93—100; 266—273.
[2] Sur la formule d'interpolation de Lagrange. *Journ. für Math.*, **84** (1878), 70—79.

Я к о б и (J a c o b i C. G. J.).
[1] Untersuchungen über die Differentialgleichung der hypergeometrischen Reihe. *Journ. für Math.*, **56** (1859), 149—165.

ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ.