ОБЪ ИНТЕГРИРОВАНІИ
ДИФФЕРЕНЦІАЛЬНЫХЪ УРАВНЕНІЙ
СЪ ЧАСТНЫМИ ПРОИЗВОДНЫМИ ОДНОЙ ФУНКЦІИ
ПЕРВАГО ПОРЯДКА СО МНОГИМИ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМѢННЫМИ И ВТОРАГО ПОРЯДКА СЪ ДВУМЯ НЕЗАВИСИМЫМИ ПЕРЕМѢННЫМИ.

Кандидата П. С. Назимова.

(Сочиненіе, удостоенное преміи Заслуженнаго Профессора Брашмана на Университетскомъ актѣ 12-го января 1880 г.)

Изданіе Императорскаго Московскаго Университета.

Москва. 1880. Въ Университетской типографіи (М. Катковъ), на Страстномъ бульварѣ.

Краткій историческій очеркъ.

Первую задачу, относящуюся до уравненій съ частными производными, рѣшилъ еще въ 1734 году Эйлеръ. Въ позднѣйшихъ своихъ сочиненіяхъ онъ изслѣдовалъ не только уравненія 1-го порядка, но и высшихъ, такъ что одинъ изъ методовъ рѣшенія линейныхъ уравненій 2-го порядка носитъ его имя. Этотъ методъ впослѣдствіи былъ усовершенствованъ Лапласомъ, и въ такомъ видѣ онъ приводится въ сочиненіи Грэндоржа. Этотъ способъ примѣняется къ уравненіямъ вида

$$R\frac{d^2z}{dx^2}+S\frac{d^2z}{dxdy}+T\frac{d^2z}{dy^2}+P\frac{dz}{dx}+Q\frac{dz}{dy}+Nz+M=0,$$

гдѣ R, S, T, P, Q, N и M — нѣкоторыя функціи x и y. Онъ состоитъ въ замѣнѣ перемѣнныхъ x и y двумя другими u и v такимъ образомъ, что двѣ производныя втораго порядка $\frac{d^2z}{du^2}$ и $\frac{d^2z}{dv^2}$ уничтожаются, и остается только производная $\frac{d^2z}{dudv}$. Въ частномъ случаѣ, когда въ первоначальномъ уравненіи одна изъ производныхъ 2-го порядка не входитъ, получается уравненіе другой формы. Преобразованное такимъ образомъ уравненіе Лапласъ или интегрируетъ непосредственно (въ томъ случаѣ, когда коэффиціенты этого уравненія удовлетворяютъ извѣстному условію), или дѣлаетъ надъ этимъ уравненіемъ преобразованія до тѣхъ поръ, пока преобразованное уравненіе можно будетъ интегрировать, или выяснится невозможность интегрированія.

Одновременно съ Эйлеромъ занимался вопросами, относящимися до уравненій съ частными производными д'Аламберъ, который дока-

залъ, что интегралы такихъ уравненій содержатъ произвольныя функціи, и указалъ способъ опредѣлить число этихъ произвольныхъ функцій для уравненій различныхъ порядковъ.

Но всѣ эти изслѣдованія были очень отрывочны, и къ 1772 году, когда этимъ вопросомъ сталъ заниматься Лагранжъ, вполнѣ были изслѣдованы только линейныя уравненія перваго порядка съ двумя независимыми перемѣнными. Лагранжъ далъ способъ рѣшенія линейныхъ уравненій 1-го порядка со сколькими угодно независимыми перемѣнными.

Къ этому же времени относятся столь извѣстныя изслѣдованія Монжа объ уравненіяхъ втораго порядка, линейныхъ относительно производныхъ втораго порядка. Эти изслѣдованія были вызваны задачею о наименьшихъ поверхностяхъ. Монжъ интеграцію уравненій 2-го порядка съ двумя независимыми перемѣнными замѣняетъ интеграціею трехъ уравненій съ полными дифференціалами; изъ этихъ трехъ уравненій два онъ называетъ характеристическими; третье же $dz=pdx+qdy$. Такихъ системъ изъ 3 уравненій—двѣ. Изъ этихъ Монжевыхъ уравненій обыкновенно нельзя составить такое дифференціальное уравненіе, которое интегрировалось бы обычными пріемами, употребляемыми для интеграціи уравненій съ полными дифференціалами. Но иногда можно составить изъ характеристическихъ уравненій и изъ $dz=pdx+qdy$ одно интегрируемое уравненіе, иногда—два; а иногда для каждой системы можно составить по два интегрируемыхъ уравненія. Вотъ этотъ послѣдній случай и разсматривалъ Монжъ.

Тою же задачею о наименьшихъ поверхностяхъ занимался Лежандръ, который по поводу этой задачи далъ первый методъ свой рѣшенія уравненій втораго порядка. Посредствомъ этого метода можно интегрировать уравненія вида $r+Ss+Tt+Pp+Qq+Nz=0$, гдѣ S, T, P, Q и N—извѣстныя функціи x и y, z—неизвѣстная функція x и y, p и q—частныя производныя 1-го порядка, r, s и t—частныя производныя втораго порядка. Лежандръ замѣняетъ это уравненіе двумя уравненіями 1-го порядка съ двумя функціями: искомою z и вспомогательною z'. Если одно уравненіе случайно содержитъ только вспомогательную функцію z', то ее можно найти, и тогда z найдется изъ другаго уравненія. Если же оба уравненія содержатъ какъ z, такъ и z', то предпринимается рядъ преобразованій даннаго уравненія до тѣхъ поръ, пока или получится уравненіе, содержащее только одну функцію, или выяснится невозможность интеграціи по методу Лежандра.

Лежандру же принадлежитъ другой способъ интеграціи уравненія вида $Rr+Ss+Tt=0$, гдѣ R, S и T—функціи только p и q, т. е. первыхъ производныхъ. Способъ состоитъ въ томъ, что данное уравненіе замѣняется другимъ такого же вида, но въ которомъ R, S и T будутъ уже функціи независимыхъ перемѣнныхъ x и y. Если извѣстенъ интегралъ втораго уравненія, то изъ него посредствомъ простыхъ вычисленій получится интегралъ перваго.

Мнѣ кажется, что тѣ же формулы Лежандра могутъ быть примѣнены для преобразованія уравненія $Rr+Ss+Tt=0$, въ которомъ R, S и T функціи x и y, въ другое уравненіе, въ которомъ R, S и T функціи p и q. Въ самомъ дѣлѣ Лежандръ замѣняетъ z другою функціею u, опредѣляемою уравненіемъ $u=px+qy-z$. Изъ этого уравненія имѣю $du=xdp+ydq$. Слѣдовательно

$$x=\frac{du}{dp},\ y=\frac{du}{dq}.$$

Дифференцируя эти послѣднія, имѣю:

$$\frac{d^2u}{dp^2}=\frac{dx}{dp},\ \frac{d^2u}{dpdq}=\frac{dx}{dq}=\frac{dy}{dp},\ \frac{d^2u}{dq^2}=\frac{dy}{dq}.$$

Изъ уравненій же $dp=rdx+sdy$ и $dq=sdx+tdy$ легко вывести:

$$\frac{dx}{dp}=\frac{t}{rt-s^2},\ \frac{dx}{dq}=\frac{dy}{dp}=-\frac{s}{rt-s^2},\ \frac{dy}{dq}=\frac{r}{rt-s^2}.$$

Такимъ образомъ уравненіе

$$R(x,y)r+S(x,y)s+T(x,y)t=0\ldots\ldots(1)$$

можно замѣнить уравненіемъ

$$R\left(\frac{du}{dp},\frac{du}{dq}\right)\frac{d^2u}{dq^2}-S\left(\frac{du}{dp},\frac{du}{dq}\right)\frac{d^2u}{dpdq}+T\left(\frac{du}{dp},\frac{du}{dq}\right)\frac{d^2u}{dp^2}=0\ldots.(2).$$

Между тѣмъ какъ для перваго уравненія способы Монжа и Ампера не всегда дадутъ даже частный интегралъ, уравненіе (2) всегда

разрѣшится методомъ Ампера. Въ самомъ дѣлѣ, одно изъ Монжевыхъ уравненій въ этомъ случаѣ будетъ

$$Rmdp+Tdq=0\ldots\ldots(3),$$

$$\text{гдѣ } Rm=\frac{S}{2}\pm\sqrt{\frac{S^2}{4}-TR}.$$

Уравненіе (3) всегда имѣетъ интегралъ, такъ какъ въ него входятъ только p и q. Найдя этотъ частный интегралъ, содержащій одно произвольное постоянное, можно, пользуясь формулами, данными Амперомъ, найти условія, которымъ долженъ удовлетворять всякій интегралъ уравненія (2). Пользуясь этими формулами, надо только найти такой частный интегралъ съ 3 произвольными постоянными, который бы не удовлетворялъ интегралу уравненія (3); тогда исключеніе p и q изъ формулъ

$$u=px+qy-z,\ x=\frac{du}{dp},\ y=\frac{du}{dq}$$

дастъ частный интегралъ съ 3 произвольными постоянными уравненія (1). Методъ Имшенецкаго дастъ формулы, служащія для отысканія общаго интеграла. Частный интегралъ уравненія (2) непремѣнно долженъ быть такой, чтобы p, выведенная изъ него, была функціею не только q, но и x, и y.

Примѣръ.

$$x^2r-2xys+y^2t=0\ldots\ldots(4).$$

Уравненіе (2) для этого примѣра будетъ

$$p^2t+2pqs+q^2r=0\ldots\ldots(5).$$

Изъ уравненія (3) получаю $pq=\alpha$, откуда

$$z=\beta x+\frac{\alpha}{\beta}y+\gamma\ldots\ldots(6).$$

Но пользуясь формулою (6), нельзя найти частный интегралъ (4); для этого надо найти другой частный интегралъ, такой, чтобы p, выведенная изъ него, была бы функціею не только q, но и x, и y. Методъ Ампера для отысканія общаго интеграла даетъ:

$$\frac{d\gamma}{d\beta}+x-\frac{\alpha}{\beta^2}y=0\ldots\ldots(7),$$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}+\frac{y}{\beta}=0\ldots\ldots.(8),$$

$$\frac{dy}{dx}=\frac{p}{q}=\frac{\beta^2}{\alpha}.$$

Послѣднее уравненіе преобразовывается въ слѣдующее:

$$\beta^2\frac{d^2\gamma}{d\beta^2}-2\frac{d\gamma}{d\alpha}=0\ldots\ldots(9).$$

Этому уравненію можно удовлетворить, положивъ

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}=\frac{a}{\alpha}\text{ и }\frac{d^2\gamma}{d\beta^2}=\frac{2a}{\beta^2}.$$

Слѣдовательно можно положить $\gamma=a(lg\alpha-lg\beta^2)+b\beta+c$. Уравненія (7) и (8) дадутъ:

$$\beta=\frac{a}{b+x},\ \alpha=\frac{-a^2}{y(b+x)}\text{ и }\gamma=alg\left(-\frac{b+x}{y}\right)-\frac{ab}{b+x}+c.$$

Измѣняя нѣсколько значенія постоянныхъ a, b и c, я получаю интегралъ уравненія (5):

$$z=c+alg\frac{b+x}{y}.$$

Для полученія же интеграла уравненія (4) надо исключить p и q изъ уравненій

$$c+alg\frac{b+p}{q}=px+qy-z,\quad x=\frac{a}{b+p}\text{ и }y=-\frac{a}{q}.$$

Это исключеніе даетъ:

$$c+alg\left(-\frac{y}{x}\right)=-bx-z.$$

Изъ этого интеграла способомъ Имшенецкаго получаются формулы для опредѣленія общаго интеграла уравненія (4). Для этого требуется разрѣшить уравненіе

$$\left(\frac{dc}{db}\right)^2\frac{d^2c}{da^2}-4\left(\frac{dc}{db}\right)\frac{d^2c}{dadb}+4\frac{d^2c}{db^2}=0.$$

Въ томъ же мемуарѣ, въ которомъ изложены два предъидущіе способа, Лежандръ даетъ способъ интегрированія нелинейныхъ уравненій вида $r=f(s,t)$. Этотъ способъ состоитъ въ томъ, что интеграція нелинейнаго уравненія приводится къ интеграціи линейнаго, коэффиціенты котораго—функціи независимыхъ перемѣнныхъ. Этотъ способъ, также какъ и два предъидущіе, примѣняется только въ частныхъ случаяхъ, потому что уравненіе линейное, у котораго коэффиціенты—функціи независимыхъ перемѣнныхъ, не всегда интегрируются съ помощью методовъ Монжа и Ампера.

Къ этому же времени, когда Монжъ и Лежандръ дѣлали изысканія въ области линейныхъ уравненій втораго порядка, относится первая удачная теорія интегрированія нелинейныхъ уравненій 1-го порядка. Въ 1784 году Шарпи, судя по словамъ Грэндоржа, подалъ французской академіи наукъ сочиненіе объ интеграціи уравненій нелинейныхъ 1-го порядка съ двумя независимыми перемѣнными. Методъ состоитъ въ томъ, что подыскивается такое уравненіе, которое опредѣляло бы съ даннымъ такъ p и q, чтобы уравненіе $dz=pdx+qdy$ интегрировалось. При этомъ Шарпи указываетъ на тѣсную связь, существующую между интеграціею нелинейныхъ уравненій съ частными производными, линейныхъ тоже съ частными производными и совмѣстныхъ уравненій съ полными дифференціалами. Шарпи даже примѣнялъ свой методъ, но неудачно, къ интегрированію нелинейныхъ уравненій со многими неизвѣстными. Это сочиненіе не было напечатано, и вслѣдствіе этого Шарпи долженъ былъ раздѣлить честь открытія съ Лагранжемъ.

Лагранжъ уже въ 1772 и 1774 году показалъ, что интеграція нелинейныхъ уравненій съ двумя независимыми перемѣнными приводится къ интеграціи линейныхъ уравненій съ 4 независимыми перемѣнными. Но еще въ 1785 году онъ объявляетъ о неумѣніи окончить интеграцію; это неумѣніе происходило отъ того, что онъ не зналъ, что интеграція приводится къ уравненіямъ съ полными дифференціалами. Въ концѣ концовъ онъ достигъ полнаго рѣшенія, и его методъ въ окончательной формѣ получилъ большое сходство съ методомъ Шарпи.

Но еще большая заслуга Лагранжа состоитъ въ томъ, что онъ ввелъ понятіе о полномъ интегралѣ, чѣмъ значительно упростилъ задачу. Лагранжъ изобрѣлъ остроумный методъ варіяціи произвольныхъ постоянныхъ. Благодаря этому методу, нахожденіе общаго интеграла замѣнилось нахожденіемъ полнаго интеграла. Лагранжъ примѣнилъ этотъ методъ не только къ уравненіямъ 1-го порядка, но и къ уравненіямъ 2-го порядка; къ уравненіямъ 1-го порядка методъ примѣнялся очень просто, къ уравненіямъ же 2-го порядка не такъ просто. Вслѣдствіе этого Лагранжъ былъ настолько скроменъ, что объявилъ, что его методъ не даетъ полезныхъ результатовъ, а только любопытные результаты въ примѣненіи къ уравненіямъ 2-го порядка. Это его мнѣніе до того укоренилось, что и въ настоящее время, по словамъ Ливенцова, ту же мысль повторяетъ въ своихъ лекціяхъ Бертранъ. Тѣмъ не менѣе, такъ какъ этотъ методъ для большинства уравненій 2-го порядка пока единственный, я счелъ необходимымъ сдѣлать нѣкоторыя развитія его въ главѣ IV этого сочиненія.

За Лагранжемъ слѣдуетъ Пфаффъ, который далъ способъ, впослѣдствіи оставленный вслѣдствіе сложности, рѣшать уравненія со сколькими угодно независимыми перемѣнными 1-го порядка. «Задача Пфаффа» состоитъ въ интегрированіи полнаго дифференціальнаго уравненія

$$U_1du_1 + U_2du_2 + \ldots + U_ndu_n = 0 \ldots (A).$$

Пфаффъ даетъ способъ, при n четномъ, привести посредствомъ замѣны перемѣнныхъ данный дифференціалъ къ другому дифференціалу $\zeta(Z_1dz_1 + Z_2dz_2 + \ldots + Z_{n-1}dz_{n-1})$, гдѣ $Z_1, Z_2 \ldots Z_{n-1}$ — функціи только $z_1, z_2 \ldots z_{n-1}$, а ζ кромѣ того — функція u_n. Для нахожденія новыхъ перемѣнныхъ надо интегрировать систему дифференціальныхъ уравненій съ полными дифференціалами. Такое преобразованіе даетъ ему возможность интегрировать уравненіе (A). Если n нечетное, онъ полагаетъ $u_n = const.$ и приводитъ задачу къ случаю n четнаго. Когда n четное, то онъ данное уравненіе приводитъ къ виду

$$\zeta(Z_1dz_1 + Z_2dz_2 + Z_3dz_3 + \ldots + Z_{n-1}dz_{n-1}) = 0$$

и такимъ образомъ уменьшаетъ число перемѣнныхъ. Далѣе онъ полагаетъ $z_{n-1} =$ пост., а предъидущее уравненіе приводитъ къ виду

$$\tau(T_1dt_1 + T_2dt_2 + T_3dt_3 + \ldots + T_{n-3}dt_{n-3}) = 0.$$

Далѣе полагаетъ $t_{n-3} =$ пост. И такъ далѣе. Въ концѣ концовъ получается уравненіе $X_1dx_1 + X_2dx_2 = 0$, которое интегрируется и даетъ $f(x_1, x_2) =$ пост. Рядъ уравненій $z_{n-1} =$ пост., $t_{n-3} =$ пост. $\ldots f(x_1, x_2) =$ пост. представляетъ интегральную систему даннаго уравненія, которую можно назвать полнымъ интеграломъ. Изъ этого полнаго интеграла можно получить такъ называемый общій интегралъ. Гауссъ впослѣдствіи далъ другой способъ рѣшенія. Какъ же примѣняется эта «задача Пфаффа» къ интегрированію уравненія съ частными производными? Для этого Пфаффъ разсматриваетъ уравненіе

$$p_1dx + p_2dx_2 + \ldots + p_ndx_n + 0.dp_1 + \ldots 0.dp_{n-1} + (-1)\ dz = 0,$$

гдѣ p_n предполагается опредѣленнымъ изъ даннаго уравненія, и гдѣ $p_1, p_2 \ldots p_n$ обозначаютъ частныя производныя отъ функціи z по независимымъ перемѣннымъ $x_1, x_2 \ldots x_n$. Въ этомъ уравненіи онъ старается уменьшить число перемѣнныхъ, которыхъ — четное число. Для уменьшенія надо рѣшить вполнѣ систему уравненій, рѣшаемыхъ вполнѣ же въ методѣ Коши, и для которой ищутъ только одинъ интегралъ въ методѣ Якоби. Уменьшивъ число перемѣнныхъ, одно новое перемѣнное приравниваютъ постоянному. Далѣе интегрируютъ новую систему и повторяютъ аналогичныя вычисленія n разъ. Въ результатѣ получаемъ n уравненій съ n постоянными, изъ которыхъ исключаютъ $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$ и получаютъ полный интегралъ. Изъ этого краткаго и, боюсь, не вполнѣ яснаго изложенія способа Пфаффа видно все его несовершенство: во 1) приходится n разъ вполнѣ интегрировать различныя системы обыкновенныхъ уравненій, во 2) изъ этихъ системъ только первую можно изобразить общею формулою, а остальныя придется вычислить для каждаго примѣра отдѣльно. Число интеграцій въ этомъ методѣ почти вдвое болѣе, чѣмъ въ методѣ Якоби.

Къ тому же времени, когда Пфаффъ дѣлалъ свои открытія, относятся работы Ампера; эти работы относятся къ теоріи уравненій 2-го порядка. Но такъ какъ я желаю, чтобы мой очеркъ былъ по возможности яснѣе, то я позволю себѣ при дальнѣйшемъ изложеніи отступить отъ хронологическаго порядка, и сначала разскажу, какъ усовершенствовалась теорія уравненій перваго порядка, а потомъ уже объ усовершенствованіи теоріи уравненій 2-го порядка.

Въ 1819 году Коши открылъ новый методъ интеграціи нелинейныхъ уравненій 1-го порядка со сколькими угодно независимыми перемѣнными; его изслѣдованія не были напечатаны, а литографированы, почему и были неизвѣстны до 1834 года. Одинъ изъ принциповъ этого метода, замѣна перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$ другими $x_{10}, x_{20}, x_{30} \ldots x_{n-1,0} x_n$, былъ навѣянъ работами Ампера относительно интеграціи билинейнаго уравненія. Но другой принципъ, не менѣе важный чѣмъ первый, всецѣло принадлежитъ Коши: это принципъ замѣны даннаго уравненія дифференціаломъ его. Что эти два принципа должно отдѣлять, видно изъ работъ новѣйшихъ математиковъ (напр. Давидова, Петерсона), которые посредствомъ сочетанія обоихъ принциповъ даютъ для уравненій 2-го порядка съ 2 перемѣнными формулы, отличныя отъ формулъ Ампера; причемъ методъ Ампера и для билинейныхъ, и для нелинейныхъ уравненій можетъ не давать рѣшенія, между тѣмъ какъ методы новыхъ математиковъ дадутъ рѣшеніе, и на оборотъ. Я не стану описывать методъ Коши, который излагается даже въ нѣкоторыхъ учебникахъ (Serret, Souchon, Lacroix). Не стану также излагать то знаменитое исключеніе, которое казалось подрывало общность разсужденій Коши, и которое было разсмотрѣно Серре, доказавшимъ, что въ случаѣ этого исключенія интегралъ даннаго уравненія въ общемъ его видѣ есть полный интегралъ (это изслѣдованіе помѣщено въ учебникѣ Серре). Упомяну только, что есть другой кажущійся случай исключенія: это тотъ случай, когда данное уравненіе полулинейно (замѣчу, что не всегда полулинейность вызываетъ кажущееся исключеніе). Въ этомъ случаѣ обычный методъ не даетъ полнаго интеграла. Для этого случая Дарбу и Майеръ даютъ очень простой пріемъ нахожденія полнаго интеграла. Разница въ томъ, что въ способѣ Коши постоянныя, входящія въ полный интегралъ,

суть первоначальныя значенія перемѣнныхъ и функціи z; въ способѣ же Майера постоянными берутся начальныя величины производныхъ перваго порядка $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$; эти начальныя величины я обозначаю черезъ $p_{10}, p_{20} \ldots p_{n-1,0}$. Этотъ способъ—прямое слѣдствіе изслѣдованій Коши, если только ихъ излагать въ той болѣе общей формѣ, въ какой они изложены въ сочиненіи Мансіона; такое изложеніе основано на одной замѣткѣ самого Коши. Методъ Коши требуетъ $2n—1$ интеграцій, гдѣ n число независимыхъ перемѣнныхъ. Но надо сознаться, что интегралы сложны, сложнѣе тѣхъ, которые получаются по общеупотребительному методу Якоби. Кромѣ того къ этому присоединяется неудобство практическое, состоящее въ необходимости исключить $p_{10}, p_{20}, p_{30} \ldots p_{n-1,0}$. На мой взглядъ главное достоинство этого метода—его теоретическая сторона; воззрѣнія, на которыхъ онъ основанъ, при примѣненіи къ уравненіямъ высшаго порядка, разрѣшаютъ и этотъ вопросъ, хотя и не вполнѣ.

Важное мѣсто въ исторіи интеграціи уравненій 1-го порядка занимаютъ изслѣдованія Якоби, который далъ два различные метода.

Еще въ 1827 году онъ обнародовалъ способъ, очень сходный со способомъ Пфаффа, но который имѣетъ точкою исхода условія интегрируемости уравненія $dz = p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n$. Вслѣдъ затѣмъ въ 1836 году онъ обнародовалъ усовершенствованный методъ Пфаффа. На окончательное же усовершенствованіе Якоби былъ наведенъ работами Гамильтона, относящимися къ интеграціи уравненій динамики. Исторія этого вопроса изложена въ сочиненіи Грэндоржа: Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique. Въ механикѣ, какъ извѣстно, постоянныя интеграловъ дифференціальныхъ уравненій движенія обыкновенно суть начальныя значенія координатъ, или начальныя скорости. Якоби возъимѣлъ мысль: новыми перемѣнными, которыми замѣняются $x_2, x_3 \ldots x_n$, $z, p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$ въ уравненіи Пфаффа

$$p_1 dx_1 + p_2 dx_2 + \ldots + p_n dx_n + 0 \,.\, dp_1 + \ldots + 0 \,.\, dp_{n-1} - dz = 0,$$

выбрать начальныя значенія $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$, $x_2, x_3 \ldots x_n$, z, которыя вмѣстѣ съ тѣмъ—постоянныя при интеграціи совмѣстныхъ уравненій съ полными дифференціалами. Это даетъ возможность ограничиться интеграціею первой системы Пфаффа. Такимъ образомъ въ этомъ методѣ интегрируются вполнѣ тѣ же совмѣстныя уравненія, что и въ методѣ Коши. Различіе состоитъ: 1) въ выводѣ формулъ, и 2) въ томъ, что у Коши изъ интеграловъ опредѣляются $z, x_2, x_3 \ldots x_n$ какъ функціи x_1 и постоянныхъ и исключаются постоянныя $p_{10}, p_{20} \ldots p_{n-1,0}$; въ методѣ же Якоби опредѣляются $x_{20}, x_{30} \ldots x_{n0}, z_0$ какъ функціи $z, x_1, x_2 \ldots x_n$, $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$ и исключаются $p_1, p_2 \ldots p_{n-1}$.

Но болѣе извѣстенъ другой методъ Якоби, который отличается замѣчательною удобопримѣнимостью на практикѣ. Этотъ методъ впервые былъ опубликованъ Клебшемъ въ LX томѣ Креллева журнала въ 1862 году; но Якоби уже обладалъ имъ въ 1838 году. Этотъ методъ еще прежде 1862 года самостоятельно открытъ Ліувилемъ, Буромъ и Донкиномъ. Методъ этотъ имѣетъ то преимущество, что даетъ большую возможность выбора путей для рѣшенія задачи. Но съ другой стороны онъ требуетъ въ общемъ случаѣ большаго числа интеграцій, чѣмъ методъ Коши, а именно $\frac{n(n-1)}{2}+1$ интеграцій. Но это только въ самомъ невыгодномъ случаѣ; въ примѣненіи же метода къ примѣрамъ очень часто число интеграцій уменьшается. Есть даже нѣсколько общихъ случаевъ, разобранныхъ Мансіономъ на страницахъ 155—161, когда методъ Якоби упрощается (напр. случай, когда перемѣнныя раздѣлены). Мансіонъ забылъ только одинъ, самый обширный однако же, случай.

Первая система, которую интегрируютъ въ методѣ Якоби, тождественна съ системою, интегрируемою вполнѣ въ методѣ Коши. Въ методѣ же Якоби ищутъ только 1 интегралъ этой системы, отличающійся отъ даннаго уравненія. Но можетъ случиться, что легко найти еще нѣсколько интеграловъ, содержащихъ производныя. Если теперь эти интегралы $\varphi_1 = a_1$, $\varphi_2 = a_2 \ldots \varphi_m = a_m$ и данное уравненіе $\varphi_0 = 0$, гдѣ $\varphi_0, \varphi_1 \ldots \varphi_m$ обозначаютъ функціи $x_1, x_2 \ldots x_n$, $p_1, p_2 \ldots p_n$ (заимствую всѣ обозначенія со страницы 12 Mémoire sur l'intégration des équations de la Mécanique, Graindorge, на которой приведена аналогичная теорема для уравненій динамики), обращаютъ символы Пуассона въ нули, такъ что $(\varphi_i, \varphi_k) = 0$ для всякихъ значеній i и k отъ 0 до m; то такіе интегралы можно всѣ взять для опредѣленія производныхъ $p_1, p_2, p_3 \ldots$ и p_n, и вмѣсто

того, чтобы интегрировать постепенно 2-ю, 3-ю и т. д. системы Якоби, прямо перейти къ отысканію интеграла для $m+1$-й системы. Но еще болѣе: если встрѣтится при интеграціи того уравненія, которымъ заключается нахожденіе интеграла общаго, напримѣръ, p-ой системы, такой случай, что нѣсколько интеграловъ этого уравненія $\varphi_1 = a_1$, $\varphi_2 = a_2 \ldots\ldots \varphi_k = a_k$ обращаютъ въ нули символы Пуассона $(\varphi_i, \varphi_l) = 0$ (гдѣ и i, и l имѣютъ всѣ значенія отъ 1 до k); то, такъ какъ уже и безъ того символы, составленные изъ какого-нибудь φ и какого-либо изъ интеграловъ прежнихъ $p-1$ системъ, равны нулю, всѣ эти рѣшенія $\varphi_1 = a_1$, $\varphi_2 = a_2 \ldots \varphi_k = a_k$ можно принять для опредѣленія $p_1, p_2 \ldots p_n$, и, если они отличны отъ интеграловъ прежнихъ системъ, переходить прямо къ интеграціи $p+k+1$-ой системы.

Есть нѣкоторые случаи, когда на первый взглядъ видна возможность такой интеграціи; къ такимъ случаямъ относятся всѣ примѣры, приведенные въ сочиненіяхъ Мансіона и Грэндоржа. Такъ въ случаѣ, когда уравненіе, разрѣшенное относительно p_n, линейно относительно перемѣнныхъ $x_1, x_2, x_3 \ldots\ldots x_{n-1}$, есть возможность найти всѣ $n-1$ интеграла для опредѣленія $p_1, p_2 \ldots p_n$ интеграціею 1-й системы. Въ самомъ дѣлѣ въ такомъ случаѣ производныя относительно $x_1, x_2, x_3 \ldots x_{n-1}$ зависятъ только отъ $x_n, p_1, p_2, p_3 \ldots p_{n-1}$, и, такъ какъ при примѣненіи метода Якоби z въ уравненіи уничтожено, то, взявъ тѣ $n-1$ дифференціальныхъ уравненій, въ которыя входятъ дифференціалы $dx_n, dp_1, dp_2 \ldots dp_{n-1}$, я могу получить $n-1$ интеграловъ, которые будутъ только функціями $x_n, p_1, p_2 \ldots\ldots p_{n-1}$; слѣдовательно символы, которые равны

$$\sum_{l=1}^{l=n-1}\left(\frac{d\varphi_i}{dp_l}\frac{d\varphi_k}{dx_l} - \frac{d\varphi_i}{dx_l}\cdot\frac{d\varphi_k}{dp_l}\right),$$

будутъ $= 0$. Къ такимъ уравненіямъ принадлежитъ примѣръ, приведенный Мансіономъ на страницѣ 169. Подобное же будетъ, если можно найти такіе интегралы, изъ которыхъ каждый содержалъ такіе иксы, которые соотвѣтствуютъ производнымъ, не входящимъ въ другія уравненія.

Очень важнымъ шагомъ впередъ была теорія Бура интеграціи совмѣстныхъ уравненій 1-го порядка съ одною функціею. Теорія состоитъ въ томъ, что на данныя m совмѣстныхъ уравненій смотрятъ, какъ на интегралы $m—1$ первыхъ системъ Якоби, и потому продолжаютъ интеграцію, начиная съ m-ой системы; въ результатѣ получается полный интегралъ съ $n—m+1$ постоянными. Впрочемъ такая интеграція будетъ немедленно приложима только въ томъ случаѣ, когда всѣ m уравненій обращаютъ $\frac{m(m—1)}{2}$ символа Пуассона въ нули. Если же этого нѣтъ, то символы Пуассона, не обращающіеся въ нули, причисляются къ даннымъ уравненіямъ, и тогда общій интегралъ имѣетъ меньшее, чѣмъ упомянуто, число постоянныхъ. Можетъ случиться, что нѣкоторые символы равны постоянному или функціи только иксовъ, или что число всѣхъ уравненій, данныхъ и прибавочныхъ, превышаетъ n; во всѣхъ этихъ случаяхъ данныя уравненія не имѣютъ общаго интеграла.

Недостатокъ метода Якоби—большое число интеграцій—былъ устраненъ слѣдовавшими за нимъ геометрами, причемъ эти упрощенія являлись вслѣдствіе изученія совмѣстныхъ уравненій съ частными производными одной функціи. Сначала Клебшъ даетъ способъ интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій (т. е. уравненій, обращающихъ попарно символы Пуассона въ нули), и этотъ способъ Вейлеръ прилагаетъ къ интеграціи системъ линейныхъ уравненій Якоби; при этомъ число интеграцій сводится къ $2n—4$. Потомъ Майеръ, изслѣдуя вопросъ объ интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій, примѣняетъ свой методъ къ системамъ Якоби и интегрируетъ ихъ n интеграціями (1872 годъ). Способу Майера предшествовалъ способъ Буля интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій. Этотъ способъ Буля, а также изслѣдованія Натани и Дюбуа-Рэймона облегчили Майеру созданіе его теоріи. Теорія эта очень замѣчательна; въ ней двѣ главныя идеи: 1) всякой системѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій съ частными производными одной функціи соотвѣтствуетъ система уравненій съ полными дифференціалами, и интеграція первой системы зависитъ отъ нахожденія интегральной системы второй; и на оборотъ всѣ частные интегралы первой составляютъ интегральную систему второй; 2) замѣна прежнихъ постоянныхъ новыми

такимъ образомъ, что при интеграціи системы уравненій съ полными дифференціалами можно опустить всѣ дифференціалы независимыхъ перемѣнныхъ, кромѣ одного. Всѣ эти методы, уменьшая число интеграцій, вводятъ другое осложненіе, именно измѣненіе перемѣнныхъ, и кромѣ того уменьшаютъ свободу выбора путей для рѣшенія задачи. Поэтому иногда придется предпочесть методъ Якоби, особенно въ случаяхъ, когда онъ допускаетъ упрощенія. Такимъ образомъ была усовершенствована теорія интеграціи совмѣстныхъ линейныхъ уравненій.

Для интеграціи же совмѣстныхъ нелинейныхъ уравненій до 1869 года былъ извѣстенъ одинъ только методъ Бура. Въ 1869 году въ Comptes rendus de l'Académie de Paris былъ напечатанъ методъ Коркина интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ нелинейныхъ уравненій 1-го порядка. Онъ состоитъ въ томъ, что рѣшаютъ одно уравненіе и получаютъ полный интегралъ съ n произвольными постоянными; эти произвольныя постоянныя опредѣляются такъ, чтобы второе изъ данныхъ уравненій удовлетворялось. Новыя постоянныя опредѣляются условіемъ, чтобы третье удовлетворялось, и т. д., и т. д.

Наконецъ Ли предпринялъ рядъ изслѣдованій, главнѣйшимъ результатомъ которыхъ была новая теорія интеграціи совмѣстныхъ нелинейныхъ уравненій. Эта теорія до такой степени аналогична теоріи Майера, что самъ Ли въ одномъ мемуарѣ указалъ на то, что теорія Майера есть слѣдствіе его теоріи. Гораздо однако же проще разсматривать теорію Ли, какъ слѣдствіе теоріи Майера. Такъ какъ вообще эта теорія изложена у Мансіона слишкомъ сложно и неясно, то я счелъ полезнымъ изложить въ этомъ сочиненіи теорію Ли, какъ слѣдствіе теоріи Майера, а также развилъ подробнѣе вопросъ о примѣненіи метода Ли къ интеграціи одного уравненія, вопросъ, о которомъ Мансіонъ говоритъ очень неясно нѣсколько строчекъ. Мансіонъ говоритъ въ введеніи: Combinée (т. е. методъ Ли) avec celle de Jacobi, elle s'applique à une seule équation à $n+1$ variables, surtout dans les cas les plus défavorables. Потомъ на страницѣ 265 излагаетъ очень кратко, какимъ образомъ Ли интегрируетъ одно уравненіе; но это изложеніе несогласно съ только что приведенными словами изъ введенія, такъ какъ въ немъ ничего не говорится о комбинаціи метода Ли съ методомъ Якоби, а только о комбинаціи метода Якоби съ методомъ Коши.

На мой взглядъ такая комбинація метода Якоби съ методомъ Коши была бы вѣрна только въ томъ случаѣ, когда послѣ рѣшенія каждой системы Якоби данное уравненіе не преобразовывалось бы замѣною одной производной нѣкоторою функціею другихъ производныхъ и перемѣнныхъ, т. е. въ методѣ не упрощенномъ, который излагается у Грэндоржа въ 6 главѣ. Для разъясненія моей мысли разсмотрю, какъ прилагаются слова Мансіона къ первой системѣ Якоби. Пусть

$$p_1 = f_1(p_2, p_3 \ldots p_n,\ x_1, x_2 \ldots x_n) \ldots\ldots (10)$$

—данное уравненіе, не содержащее z явно. Тогда интеграція по методу Коши состоитъ въ нахожденіи $2n-1$ интеграловъ слѣдующей системы:

$$dx_1 = -\,dx_l : \frac{df_1}{dp_l} = dp_l : \frac{df_1}{dx_l} = dz : \left(p_1 - \sum p_l \frac{df_1}{dp_l}\right) \ldots\ldots (11),$$

гдѣ l имѣетъ всѣ значенія отъ 2 до n. Въ методѣ Якоби ищутъ только одинъ интегралъ уравненій (11) или интегралъ уравненія

$$\frac{d\psi}{dx_1} + \sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_1}{dx_l}\cdot\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_1}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right) = 0 \ldots\ldots (12);$$

пусть изъ этого интеграла получится

$$p_2 = f_2(p_3, p_4 \ldots p_n,\ x_1, x_2 \ldots x_n).$$

Пусть при замѣнѣ p_2 черезъ f_2 вмѣсто (10) получается $p_1 = f^{\times}_1$. Далѣе ищутъ интегралъ общій двумъ линейнымъ уравненіямъ:

$$\left(p_1 - f^{\times}_1, \psi\right) = \Big/^{p_2=f_2}\left\{\frac{d\psi}{dx_1} + \sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_1}{dx_l}\cdot\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_1}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right) + \right.$$

$$\left. + \frac{df_1}{dp_2}\sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_2}{dx_l}\cdot\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_2}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right)\right\} = 0 \ldots\ldots (13)$$

$$\text{и}\ \left(p_2 - f_2, \psi\right) = \frac{d\psi}{dx_2} + \sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_2}{dx_l}\cdot\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_2}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right) = 0 \ldots\ldots (14).$$

Для этого ищутъ одинъ интегралъ системы совмѣстныхъ уравненій съ полными дифференціалами:

$$dx_1 = dx_2 : 0 = -dx_l : \Big/^{p_2=f_2}\left(\frac{df_1}{dp_l} + \frac{df_1}{dp_2}\cdot\frac{dp_2}{dp_l}\right)$$

$$= dp_l : \Big/^{p_2=f_2}\left(\frac{df_1}{dx_l} + \frac{df_1}{dp_2}\frac{dp_2}{dx_l}\right) \ldots\ldots (15)$$

Если найденный интегралъ φ_1 не удовлетворяетъ уравненію (14), то въ это уравненіе (14) подставляютъ постепенно функціи

$$\varphi_2 = (p_2 - f_2, \varphi_1),\ \varphi_3 = (p_2 - f_2, \varphi_2),\ \varphi_4 = (p_2 - f_2, \varphi_3) \ldots\ldots$$

Всѣ эти функціи φ_2, φ_3, $\varphi_4 \ldots\ldots$ суть интегралы уравненія (13) и системы (15). Пусть такихъ интеграловъ $2n-4$; всѣ эти интегралы не удовлетворяютъ (14). Тогда, говоритъ Мансіонъ, можно, пользуясь этими интегралами, докончить интеграцію методомъ Коши. Но простое сравненіе системы (15) съ системою (11) показываетъ, что интегралъ системы (15) не всегда будетъ интеграломъ системы (11), или не всякій интегралъ (13) будетъ интеграломъ (12). Можно только сказать, что всякій интегралъ (15), удовлетворяющій линейному уравненію (14), удовлетворяетъ тоже и (12), а слѣдовательно есть интегралъ (11), ибо въ такомъ случаѣ уравненіе (15) принимаетъ на основаніи (14) слѣдующій видъ:

$$\frac{d\psi}{dx_1} + \Big/^{p_2=f_2}\sum_{l=3}^{l=n}\left(\frac{df_1}{dx_l}\frac{d\psi}{dp_l} - \frac{df_1}{dp_l}\cdot\frac{d\psi}{dx_l}\right) - \Big/^{p_2=f_2}\frac{df_1}{dp_2}\frac{d\psi}{dx_2} = 0.$$

Послѣднее уравненіе совпадаетъ съ (12), такъ какъ ψ по условію не содержитъ ни p_1, ни p_2, а f_2 содержитъ произвольное постоянное. Понятно, что все сказанное о первой системѣ Якоби распространяется и на другія системы Якоби; только формулы въ такомъ случаѣ будутъ сложнѣе.

Ли еще, по словамъ Мансіона, дѣлаетъ попытки слить методы Коши и Якоби. На сколько эти изслѣдованія помѣщены у Мансіона, я не могу придать имъ большой важности, такъ какъ сліяніе происходитъ на почвѣ безконечностей различныхъ порядковъ, почвѣ очень туманной.

Замѣчательно еще воззрѣніе Ли на происхожденіе дифференціальныхъ уравненій съ частными производными изъ одного уравненія между z, перемѣнными и произвольными постоянными, въ случаѣ нелинейнаго уравненія,—изъ n уравненій въ случаѣ линейнаго (n—число перемѣнныхъ),—и изъ нѣсколькихъ уравненій, число которыхъ менѣе числа независимыхъ перемѣнныхъ, въ случаѣ полулинейности.

Перейду теперь къ исторіи интеграціи уравненій 2-го порядка. Исторія эта очень кратка. Въ началѣ нынѣшняго столѣтія Амперъ далъ рѣшеніе билинейнаго уравненія, т. е. уравненія вида $Hr+2Ks+Lt+N(rt-s^2)+M=0$, гдѣ r, s и t—производныя 2-го порядка, H, K, L, N и M—функціи x, y, z и производныхъ перваго порядка p и q; при этомъ онъ высказалъ ту мысль, что интеграція Монжевыхъ уравненій, а также тѣхъ уравненій, которыя онъ далъ для рѣшенія билинейнаго уравненія, состоитъ въ составленіи изъ этихъ уравненій (посредствомъ умноженія ихъ на неопредѣленные множители и сложенія) такого уравненія, первая часть котораго полный дифференціалъ. Онъ же далъ методъ отысканія общаго интеграла по извѣстному частному интегралу съ тремя произвольными постоянными для линейныхъ уравненій въ томъ случаѣ, когда можно найти частный интегралъ Монжевыхъ уравненій. Въ такомъ случаѣ нахожденіе общаго интеграла зависитъ отъ разрѣшенія уравненія 2-го порядка, которое вообще не интегрируется методомъ Ампера. Первую теорію Амперъ распространилъ и на уравненія нелинейныя.

Въ послѣдствіи Морганъ въ 1856 году и Буръ въ 1862 году усовершенствовали методъ Ампера, приведя нахожденіе частнаго интеграла (или, если возможно, и общаго интеграла) къ рѣшенію двухъ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій перваго порядка, что было особенно значительнымъ облегченіемъ до появленія теоріи Майера, о которой я уже говорилъ прежде. Формулы обоихъ совпадаютъ; но выводы ихъ различны: у Бура два линейныя

уравненія являются, какъ условія, которымъ должна удовлетворять нѣкоторая функція, чтобы ея дифференціалъ могъ составиться изъ совмѣстныхъ уравненій Монжа, или Ампера. Морганъ выводитъ тѣ же уравненія, отыскивая условія, необходимыя для того, чтобы данное билинейное уравненіе имѣло промежуточный интегралъ, содержащій одну произвольную функцію въ одномъ ея видѣ. Около того же времени Буль далъ свое рѣшеніе билинейнаго уравненія, въ которомъ старался быть какъ можно ближе къ методу Монжа.

Наконецъ Импшенецкій въ своемъ сочиненіи, переведенномъ на французскій языкъ въ 1868 году, даетъ способъ находить по частному интегралу, содержащему 3 произвольныхъ постоянныхъ, общій интегралъ билинейнаго уравненія. Вопросъ приводится къ рѣшенію другаго уравненія втораго порядка, но уже линейнаго. Его методъ не требуетъ, чтобы частный интегралъ былъ полученъ методомъ Ампера. При выводѣ уравненія 2-го порядка, отъ котораго зависитъ нахожденіе общаго интеграла, Имшенецкій пользовался строкою Тэйлора, которая въ разсматриваемомъ имъ случаѣ прекращалась на членахъ, содержащихъ вторыя степени тѣхъ разностей, относительно которыхъ развита строка (разности прежнихъ значеній производныхъ вторыхъ порядковъ и тѣхъ значеній, которыя получатся изъ общаго интеграла). Вслѣдствіе этого методъ вообще не будетъ примѣнимъ къ уравненіямъ нелинейнымъ, хотя строку Тэйлора, соотвѣтствующую каждому случаю, можно легко найти. Такимъ образомъ въ случаѣ нелинейнаго уравненія придется для отысканія общаго интеграла прибѣгать къ методу Лагранжа.

Рѣшеніемъ уравненій нелинейныхъ 2-го порядка, а также и высшихъ порядковъ, въ послѣднее время съ особымъ стараніемъ занимались русскіе математики. Сначала А. Ю. Давидовъ, примѣняя методъ Коши къ уравненіямъ высшихъ порядковъ, далъ уравненія, помѣченныя въ 5-й главѣ этого сочиненія номеромъ (27), а также въ нѣсколько иной формѣ уравненія (29) и (29^{bis}), на которыя онъ смотритъ только, какъ на условія интегрируемости. Это изслѣдованіе помѣщено въ первомъ томѣ «Математическаго Сборника». По словамъ Преображенскаго, одновременно съ Давидовымъ такія же иследованія были произведены германскимъ ученымъ Дюбуа-Рэймономъ. Въ седьмомъ томѣ «Математическаго Сборника» помѣщены изслѣдованія Преображенскаго и Сонина, которые предлагаютъ въ случаѣ невозможности найти интегралы втораго порядка (т. е. интегралы, посредствомъ которыхъ интегрируютъ Давидовъ и Дюбуа-Рэймонъ, и которые я называю дополняющими) искать интегралы высшихъ порядковъ. Мнѣ кажется, что это очень частный способъ. Невозможность найти интегралы втораго порядка происходитъ вслѣдствіе того, что уравненія, помѣченныя мною во второй главѣ номерами 25^{bis} и 26^{bis} (впервые, какъ кажется, встрѣчаемые у Сонина), Сонинъ разсматриваетъ только въ случаѣ ихъ тождественности. Наконецъ въ 8-омъ томѣ «Математическаго Сборника» Петерсонъ интегрируетъ съ помощью уравненій, помѣченныхъ въ 5-й главѣ номеромъ (27), перемѣняя при интеграціи независимыя перемѣнныя. Наконецъ есть два метода—Монжа и Лежандра—для интеграціи уравненій 2-го порядка съ 3 независимыми перемѣнными.

Всѣ вышеупомянутые методы для рѣшенія уравненій 2-го порядка съ двумя независимыми перемѣнными отличаются тѣмъ, что они въ большинствѣ случаевъ не примѣняются. Теорія уравненій съ частными производными 2-го порядка далеко отстала отъ теоріи уравненій 1-го порядка. Во второмъ случаѣ, если нельзя будетъ найти интегралъ, то это или вслѣдствіе неумѣнія найти данную квадратуру, или вслѣдствіе неумѣнія рѣшить предлежащія полныя дифференціальныя уравненія съ 1 независимымъ перемѣннымъ. Въ первомъ же случаѣ невозможность рѣшенія будетъ происходить просто отъ того, что формулы частныя (по крайней мѣрѣ въ томъ смыслѣ, въ какомъ мы умѣемъ ими пользоваться) и могутъ рѣшать только частные вопросы; это не исключаетъ затрудненій, общихъ съ уравненіями 1-го порядка.

Въ предъидущемъ историческомъ очеркѣ говорилось только объ уравненіяхъ съ частными производными одной функціи; это потому, что изслѣдованій относительно уравненій съ 2-мя и нѣсколькими функціями я не встрѣчалъ, исключая одного мемуара Коши, помѣщеннаго въ его Exercices d'Analyse et de Physique Mathématique, томъ 1, въ которомъ Коши на страницахъ 76—93 говоритъ объ интеграціи совмѣстныхъ линейныхъ уравненій, число которыхъ равно числу неизвѣстныхъ функцій; уравненія эти съ постоянными коэффиціентами и какого угодно порядка. Впрочемъ общеизвѣстно

еще, что самое общее рѣшеніе такого уравненія, въ которомъ первая часть есть функціональный опредѣлитель, а вторая нуль, состоитъ въ томъ, что одна изъ функцій равна произвольной функціи всѣхъ остальныхъ.

Дальнѣйшее мое изложеніе будетъ состоять въ слѣдующемъ:

1) Изложеніе метода Ли, какъ онъ вытекаетъ изъ метода Майера.

2) Выводъ формулъ, примѣнимыхъ въ частныхъ случаяхъ для рѣшенія уравненій втораго и высшихъ порядковъ съ двумя независимыми перемѣнными (при этомъ выводѣ я придерживаюсь идей Коши и Ампера).

3) Разборъ метода Лагранжа для отысканія общаго интеграла уравненія 2-го порядка съ 2 независимыми перемѣнными по полному интегралу.

4) Я стараюсь указать, пользуясь формулами, аналогичными формуламъ, употребляемымъ въ методахъ Лагранжа и Якоби для интеграціи уравненій 1-го порядка, причину частности всѣхъ пріемовъ интеграціи уравненій 2-го порядка съ 2 перемѣнными; при этомъ намѣчается путь, какимъ образомъ ощупью дойти до полнаго интеграла въ томъ случаѣ, когда общеупотребительные методы его не даютъ.

ГЛАВА I.

О выводѣ метода Ли для интеграціи нелинейныхъ совмѣстныхъ уравненій изъ метода Майера и о примѣненіи метода Ли къ интеграціи одного уравненія.

Пусть даны вполнѣ совмѣстныя уравненія:

$$\left.\begin{array}{l} p_1 = f_1(x_1, x_2 \ldots x_m, \; y_1, y_2 \ldots y_n, \; q_1, q_2 \ldots q_n), \\ p_2 = f_2(x_1, x_2 \ldots x_m, y_1, y_2 \ldots y_n, q_1, q_2 \ldots q_n), \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ p_m = f_m(x_1, x_2 \ldots x_m, \; y_1, y_2 \ldots y_n, q_1, q_2 \ldots q_n). \end{array}\right\} \ldots\ldots (1)$$

Въ этихъ уравненіяхъ $x_1, x_2, x_3 \ldots x_m, \; y_1, y_2, \ldots y_n$—независимыя перемѣнныя, z—функція этихъ перемѣнныхъ, не входящая явно въ данныя уравненія (что всегда можно сдѣлать, примѣнивъ предварительно преобразованіе Якоби), $p_1, p_2 \ldots p_m$—частныя производныя z по $x_1, x_2 \ldots x_m$, а $q_1, q_2 \ldots q_n$ такія же частныя производныя по $y_1, y_2 \ldots y_n$. Я называю вполнѣ совмѣстными такія уравненія, которыя имѣютъ полный интегралъ съ $n+1$ произвольными постоянными; какъ извѣстно, для этого всѣ $\dfrac{m(m-1)}{2}$ символы Пуассона должны равняться нулю. Также извѣстно, что въ случаѣ неполной совмѣстности методъ Бура даетъ возможность дополнить данныя уравненія такъ, чтобы прежнія и вновь полученныя составляли систему вполнѣ совмѣстныхъ уравненій. Буду впередъ обозначать полные дифференціалы значкомъ d, а частные δ.

Допустивъ все это, предположу, что я интегрирую только первое уравненіе изъ (1). Тогда по методу Коши я долженъ проинтегрировать вполнѣ слѣдующія уравненія:

$$dx_1 = \frac{dx_k}{0} = -dy_l : \frac{\delta f_1}{\delta q_l} = dq_l : \frac{\delta f_1}{\delta y_l} = dz : \left(f_1 - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_1}{\delta q_l}\right) \ldots (2),$$

гдѣ l имѣетъ всѣ значенія отъ 1 до n, а k отъ 2 до m. Если я найду интегральную систему этихъ уравненій, то пріемъ Майера для полулинейныхъ уравненій дастъ мнѣ возможность составить полный интегралъ. Но къ тѣмъ же уравненіямъ (2) я приду, если буду интегрировать линейное уравненіе:

$$\frac{\delta\psi}{\delta x_1} + \left(f_1 - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_1}{\delta q_l}\right)\frac{\delta\psi}{\delta z} + \sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\delta\psi}{\delta q_l}\cdot\frac{\delta f_1}{\delta y_l} - \frac{\delta\psi}{\delta y_l}\cdot\frac{\delta f_1}{\delta q_l}\right) = 0 \ldots (3).$$

Это линейное уравненіе я для краткости буду обозначать символомъ:

$$\sigma(p_1 - f_1, \psi) = 0 \ldots\ldots (4).$$

Если же я интегрирую только уравненіе второе изъ (1), то система (2) измѣнится только тѣмъ, что вмѣсто f_1 надо подставить f_2, dx_2 дѣлится на 1, а dx_1 на нуль. Въ уравненіи же (3) надо $\dfrac{\delta\psi}{\delta x_1}$ замѣнить $\dfrac{\delta\psi}{\delta x_2}$, а f_1 замѣнить f_2. Подобное же будетъ и для всѣхъ уравненій (1), — третьяго, четвертаго, ...m-аго. Буду обозначать линейныя уравненія, соотвѣтствующія всѣмъ этимъ уравненіямъ (1), посредствомъ

$$\sigma(p_2 - f_2, \psi) = 0, \; \sigma(p_3 - f_3, \psi) = 0 \ldots\ldots \sigma(p_m - f_m, \psi) = 0 \ldots\ldots (4).$$

Прежде, чѣмъ идти далѣе, установлю относительно системъ (1) и (4) двѣ теоремы.

Теорема 1. Если (1) система вполнѣ совмѣстна, то и система (4) вполнѣ совмѣстна.

Доказательство. Условія полной совмѣстности уравненій (4), какъ извѣстно, состоятъ въ томъ, что каждый коэффиціентъ одного уравненія, поставленный въ другое уравненіе, даетъ такой же результатъ, какой получается отъ подстановки коэффиціента при томъ же частномъ производномъ въ другомъ уравненіи въ первое уравненіе, т. е.

$$\sigma\left(p_k - f_k, f_i - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, f_k - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) \ldots (1''),$$

$$\sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta y_h}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta y_h}\right) \ldots\ldots (2''),$$

$$\sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta q_h}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta q_h}\right) \ldots\ldots (3'').$$

Требуется доказать, что всѣ эти $\frac{(2n+1)m(m-1)}{2}$ условій удовлетворяются, если (1) система вполнѣ совмѣстна. Для доказательства достаточно только написать подробно три вышенаписанныхъ равенства. Начну со втораго.

$$\frac{\delta^2 f_i}{\delta x_k \delta y_h} + \left(f_k - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) \frac{\delta^2 f_i}{\delta z \delta y_h} +$$

$$+ \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_k}{\delta y_l} \frac{\delta^2 f_i}{\delta q_l \delta y_h} - \frac{\delta f_k}{\delta q_l} \frac{\delta^2 f_i}{\delta y_l \delta y_h}\right) = \frac{\delta^2 f_k}{\delta x_i \delta y_h} +$$

$$+ \left(f_i - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) \frac{\delta^2 f_k}{\delta z \delta y_h} + \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_i}{\delta y_l} \frac{\delta^2 f_k}{\delta q_l \delta y_h} - \frac{\delta f_i}{\delta q_l} \frac{\delta^2 f_k}{\delta y_l \delta y_h}\right) \ldots (5).$$

Но условія полной совмѣстности уравненій (1) состоятъ въ $\frac{m(m-1)}{2}$ условіяхъ вида:

$$\frac{\delta f_i}{\delta x_k} - \frac{\delta f_k}{\delta x_i} + \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_k}{\delta y_l} \frac{\delta f_i}{\delta q_l} - \frac{\delta f_k}{\delta q_l} \frac{\delta f_i}{\delta y_l}\right) = 0 \ldots\ldots (6).$$

Такъ какъ въ f_i и f_k не входитъ z явно, то $\frac{\delta^2 f_i}{\delta z \delta y_h} = 0$; а также $\frac{\delta^2 f_k}{\delta z \delta y_h} = 0$. Послѣ этого ясно, что уравненіе (5) получается изъ тождества (6) дифференцированіемъ послѣдняго по y_h; а потому, если равенство (6)—тождество, то и равенство (5)—тождество.

Легко доказать такимъ же образомъ, что

$$\sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta q_h}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta q_h}\right)$$

получается изъ (6) дифференцированіемъ относительно q_h.

Остается разсмотрѣть

$$\sigma\left(p_k - f_k, f_i - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) = \sigma\left(p_i - f_i, f_k - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right).$$

Понятно, что это равенство можно представить въ такомъ видѣ:

$$\sigma(p_k - f_k, f_i) - \sigma(p_i - f_i, f_k) +$$

$$+ \sum_{l=1}^{l=n} \left\{ \sigma\left(p_i - f_i, q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) - \sigma\left(p_k - f_k, q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) \right\} = 0 \ldots\ldots (7).$$

Первые два члена

$$= \frac{\delta f_i}{\delta x_k} - \frac{\delta f_k}{\delta x_i} + 2 \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_i}{\delta q_l} \frac{\delta f_k}{\delta y_l} - \frac{\delta f_i}{\delta y_l} \cdot \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right),$$

что̀, на основаніи (6),

$$= \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_i}{\delta q_l} \frac{\delta f_k}{\delta y_l} - \frac{\delta f_i}{\delta y_l} \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right).$$

Легко послѣ этого сообразить, что уравненіе (7) можно представить въ видѣ уравненія

$$\sum_{l=1}^{l=n} q_l \left\{ \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) - \sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) \right\} = 0,$$

которое есть тождество, такъ какъ каждый членъ суммы—дифференціалъ (6) по q_l, умноженный на q_l.

Теорема 2. Если (4) система вполнѣ совмѣстна, то и система (1) вполнѣ совмѣстпа.

Доказательство. Первая часть тождества

$$\sigma\left(p_k - f_k, f_i - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) - \sigma\left(p_i - f_i, f_k - \sum_{l=1}^{l=n} q_l \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) = 0,$$

какъ видно изъ доказательства предъидущей теоремы, можетъ быть изображена такъ:

$$\text{1-я часть ур. (6)} + \sum_{l=1}^{l=n} q_l \left\{ \sigma\left(p_i - f_i, \frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right) - \sigma\left(p_k - f_k, \frac{\delta f_i}{\delta q_l}\right) \right\} = 0.$$

Но сумма равна 0 на томъ основаніи, что уравненія (4) предполагаются вполнѣ совмѣстными. И такъ я имѣю тождественно:

$$\frac{\delta f_i}{\delta x_k} - \frac{\delta f_k}{\delta x_i} + \sum_{l=1}^{l=n} \left(\frac{\delta f_i}{\delta q_l} \cdot \frac{\delta f_k}{\delta y_l} - \frac{\delta f_i}{\delta y_l} \cdot \frac{\delta f_k}{\delta q_l} \right) = 0;$$

что̀ и требовалось доказать.

Первая изъ этихъ теоремъ показываетъ, что для интеграціи системъ (4) я могу употребить методъ Майера. Этотъ методъ состоитъ въ томъ, что перемѣнныя $x_1, x_2, x_3 \ldots . x_m$ замѣняются новыми $u_1, u_2, u_3 \ldots . u_m$, опредѣляемыми изъ уравненій

$$\left.\begin{aligned} x_1 &= x_{10} + (u_1 - u_{10}) v_1, \\ x_2 &= x_{20} + (u_1 - u_{10}) v_2, \\ &\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ x_m &= x_{m0} + (u_1 - u_{10}) v_m \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (14),$$

гдѣ $x_{10}, x_{20} \ldots . x_{m0}$, u_{10}—начальныя значенія перемѣнныхъ $x_1, x_2 \ldots x_m$ и u_1, а $v_1, v_2 \ldots . v_m$—функціи $u_1, u_2, u_3 \ldots . u_m$, вполнѣ опредѣлен-

ныя и не обращающіяся въ безконечность при $u_1 = u_{10}$. Въ такомъ случаѣ, обозначая черезъ a съ двойнымъ значкомъ коэффиціенты въ уравненіяхъ системы (4), а черезъ b съ двойнымъ значкомъ коэффиціенты въ новыхъ уравненіяхъ (первый значокъ будетъ обозначать уравненіе, изъ котораго взятъ коэффиціентъ, а второй значокъ производную, при которой стоитъ коэффиціентъ), имѣю: (смотри сочиненіе Мансіона, страница 215)

$$b_{1k} = \sum_{i=1}^{i=m} a_{ik} v_i + (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} a_{ik}, \; b_{hk} = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} a_{ik}.$$

Въ примѣненіи къ системѣ (4) эти формулы дадутъ: 1) для коэффиціентовъ передъ производными отъ ψ по y_k:

$$\left.\begin{aligned} b_{1k} &= -\sum_{i=1}^{i=m} v_i \frac{\delta f_i}{\delta q_k} - (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} \frac{\delta f_i}{\delta q_k}, \\ b_{hk} &= -(u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} \frac{\delta f_i}{\delta q_k} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (8),$$

2) для коэффиціентовъ передъ производными отъ ψ по q_k:

$$b_{1k} = \sum_{i=1}^{i=m} v_i \frac{\delta f_i}{\delta y_k} + (u - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} \frac{\delta f_i}{\delta y_k}, \; b_{hk} = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} \frac{\delta f_i}{\delta y_k} (9),$$

3) для коэффиціентовъ передъ производною отъ ψ по z:

$$b_1 = \sum_{i=1}^{i=m} f_i v_i + (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} f_i - \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{l=1}^{l=n} v_i q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}$$

$$- (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{l=1}^{l=n} \frac{\delta v_i}{\delta u_1} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l}, \; b_h = (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} f_i$$

$$- (u_1 - u_{10}) \sum_{i=1}^{i=m} \sum_{l=1}^{l=n} \frac{\delta v_i}{\delta u_h} q_l \frac{\delta f_i}{\delta q_l} \ldots\ldots (10).$$

Разсматривая всѣ эти коэффиціенты, легко замѣтить, что, если обозначимъ производныя по u отъ ψ черезъ ω со значками, новыя линейныя уравненія будутъ ни болѣе, ни менѣе, какъ

$$\left.\begin{array}{l} \sigma\left(\omega_1-\sum\limits_{i=1}^{i=m} v_i f_i-(u_1-u_{10})\sum\limits_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_1} f_i, \psi\right)=0, \\ \sigma\left(\omega_2-(u_1-u_{10})\sum\limits_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_2} f_i, \psi\right)=0, \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots \\ \sigma\left(\omega_m-(u_1-u_{10})\sum\limits_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_m} f_i, \psi\right)=0 \end{array}\right\}\dots\dots(11).$$

Для интеграціи этихъ уравненій употребляются тѣже уравненія съ полными дифференціалами, что для интеграціи слѣдующихъ нелинейныхъ уравненій:

$$\omega_1-\sum_{i=1}^{i=m} f_i\left(v_i+(u_1-u_{10})\frac{\partial v_i}{\partial u_1}\right)=0\dots\dots(12),$$

$$\omega_2-(u_1-u_{10})\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_2} f_i=0, \qquad \omega_3-(u_1-u_{10})\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_3} f_i=0,$$

$$\dots\dots \omega_m-(u_1-u_{10})\sum_{i=1}^{i=m}\frac{\partial v_i}{\partial u_m} f_i=0\dots\dots(13).$$

Майеръ показалъ, что интегральная система перваго изъ уравненій (11) есть также интегральная система каждаго изъ остальныхъ уравненій системы (11), если при нахожденіи интегральной системы перваго уравненія всѣ u кромѣ u_1 принимались за постоянныя, если интеграціонными постоянными были начальныя значенія перемѣнныхъ y, z, q, u_1, и если y_0, z_0, q_0 (начальныя значенія y, z и q) будутъ постоянныя, независимыя отъ $u_2, u_3 \dots u_m$ (т. е. при разрѣшеніи интеграловъ относительно y_0, z_0, q_0 всѣ члены, зависящія только отъ $u_2, u_3 \dots u_m$, уничтожаются).

Интегральная система каждаго изъ уравненій (11), какъ уже сказано, есть интегральная система тѣхъ совмѣстныхъ уравненій съ полными дифференціалами, которыя служатъ по методу Коши для опредѣленія полнаго интеграла каждаго изъ уравненій (12) и (13). Если я буду интегрировать уравненіе (12) по методу Коши, то во время интеграціи y_0, q_0 не считаются зависимыми отъ $u_2 \dots u_m$, которыя принимаются за постоянныя; слѣдовательно стоитъ только въ полномъ интегралѣ уравненія (12) z_0 считать за постоянное, независящее отъ $u_2, u_3 \dots u_m$, чтобы этотъ полный интегралъ былъ общій для всѣхъ уравненій (12) и (13), ибо онъ получается для всѣхъ уравненій изъ одной и той же интегральной системы.

Легко замѣтить, что уравненія (12) и (13) могутъ получаться непосредственно изъ уравненій (1) замѣною перемѣнныхъ $x_1, x_2, \dots x_m$ новыми перемѣнными $u_1, u_2 \dots u_m$. Поэтому полный интегралъ системы (1) прямо получится, когда въ полномъ интегралѣ системы 12—13 замѣнимъ $u_1, u_2, \dots u_m$ обратно чрезъ $x_1, x_2, \dots x_m$.

Ясно, что ходъ вычисленія полнаго интеграла для системы (1) будетъ такой: 1) замѣняю перемѣнныя $x_1, x_2 \dots x_m$ новыми u_1, u_2 $u_3 \dots u_m$, опредѣленными изъ уравненій (14), и получаю систему 12—13; 2) ищу полный интегралъ для (12), въ которомъ z_0 постоянное; 3) дѣлаю въ найденномъ полномъ интегралѣ обратную замѣну $u_1, u_2 \dots u_m$ черезъ $x_1, x_2 \dots x_m$ съ помощью уравненій (14).

Ли употреблялъ подстановку болѣе простую, чѣмъ (14); а именно онъ полагалъ $x_1=u_1$, $x_2=x_{20}+(u_1-u_{10})u_2$, $x_3=x_{30}+(u_1-u_{10})u_3$ $\dots\dots x_m=x_{m0}+(u_1-u_{10})u_m \dots\dots(15)$. Тогда уравненія (12) и (13) замѣнятся слѣдующими:

$$\omega_1-f_1-\sum_{i=2}^{i=m} u_i f_i=0\dots\dots(16),$$

$$\omega_k-(x_1-x_{10})f_k=0\dots\dots(17),$$

гдѣ k имѣетъ всѣ значенія отъ 2 до m.

Замѣчательны условія полной совмѣстности для уравненій (12) и (13); они таковы, что $m-1$ уравненій, показывающихъ совмѣстность (12) съ каждымъ изъ (13), заключаютъ въ себѣ всѣ $\frac{m(m-1)}{2}$ условія совмѣстности уравненій (1). Въ самомъ дѣлѣ эти $m-1$ условій имѣютъ видъ:

$$\sum_{i=1}^{i=m}\sum_{k=1}^{k=m}\left(\frac{\delta v_i}{\delta u_1}\frac{\delta v_k}{\delta u_h}-(u_1-u_{10})v_i\frac{\delta v_k}{\delta u_h}\right)\cdot\left\{\frac{\delta f_i}{\delta x_k}-\frac{\delta f_k}{\delta x_i}+\sum_{l=1}^{l=n}\left(\frac{\delta f_i}{\delta q_l}\cdot\frac{\delta f_k}{\delta y_l}-\frac{\delta f_i}{\delta y_l}\cdot\frac{\delta f_k}{\delta q_l}\right)\right\}=0\ldots\ldots(18),$$

гдѣ h имѣетъ всѣ значенія отъ 2 до $m-1$. Такъ какъ выраженія

$$\frac{\delta v_i}{\delta u_1}\frac{\delta v_k}{\delta u_h}-(u_1-u_{10})\,v_i\frac{\delta v_k}{\delta u_h}$$

вообще неравны нулю и кромѣ того заключаютъ произвольныя постоянныя, если мы въ уравненіи (18) замѣнимъ перемѣнныя u черезъ перемѣнныя x, то $m-1$ равенствъ (18) влекутъ за собою $\frac{m(m-1)}{2}$ равенствъ (6).

Наоборотъ, изъ тѣхъ же уравненій (18) видно, что равенства (6) имѣютъ слѣдствіемъ равенства (18), а также, легко показать, имѣютъ слѣдствіемъ и равенства полной совмѣстности уравненій 13-хъ между собою.

Хотя, казалось бы, вышеизложенный способъ ничего не оставляетъ желать относительно простоты требуемыхъ имъ вычисленій, но все таки желательно нѣсколько его видоизмѣнить. Главное несовершенство его состоитъ въ томъ, что онъ непремѣнно требуетъ нахожденія интеграла методомъ Коши. Не говоря уже о важности имѣть возможность выбирать путь рѣшенія (въ чемъ состоитъ одно изъ преимуществъ метода Якоби), методъ Коши требуетъ $2n-1$ интеграцій, между тѣмъ какъ методъ Майера для интеграціи системъ Якоби (системъ линейныхъ уравненій, служа-

щихъ для отысканія уравненій, изъ которыхъ можно опредѣлить производныя p), а также нижеизложенный методъ для интеграціи одного уравненія даютъ возможность ограничиться n интеграціями. Всѣ эти соображенія заставляютъ поставить вопросъ: зная какой нибудь полный интегралъ, какъ найти интегралъ, получаемый методомъ Коши? Въ самомъ дѣлѣ, если этотъ вопросъ будетъ рѣшенъ, то можно искать полный интегралъ уравненія (12) какимъ угодно методомъ. Для того, чтобы рѣшить этотъ вопросъ, докажу сначала двѣ теоремы.

Теорема 3. Если

$$z=\gamma+F(x_1,x_2\ldots x_n,\ \alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})\ldots\ldots(19)$$

—полный интегралъ уравненія

$$p_1=f_1(x_1,x_2,x_3\ldots x_n,\ p_2,p_3\ldots p_n)\ldots\ldots(22);$$

то уравненія

$$z=\gamma+F,\quad p_k=\frac{\delta F}{\delta x_k},\quad \xi_l=\frac{\delta F}{\delta \alpha_l}\ldots\ldots(20),$$

гдѣ k имѣетъ всѣ значенія отъ 2 до n, а l отъ 1 до $n-1$, составляютъ интегральную систему $2n-1$ уравненій

$$dx_1=-dx_k:\frac{\delta f_1}{\delta p_k}=dp_k:\frac{\delta f_1}{\delta x_k}=dz:\left(f_1-\sum_{k=2}^{k=n}p_k\frac{\delta f_1}{\delta p_k}\right)\ldots\ldots(21).$$

Доказательство. Посмотрю сначала, какія тождества влечетъ за собою условіе, что (19) есть интегралъ (22). Если я опредѣлю изъ уравненія (19) различныя p:

$$p_1=\frac{\delta F}{\delta x_1},\ p_2=\frac{\delta F}{\delta x_2},\ \ldots p_n=\frac{\delta F}{\delta x_n},$$

и подставлю въ уравненіе (22), то получу тождество относительно всѣхъ x и всѣхъ α. Если я продифференцирую это тождество относительно какого нибудь x, или какого нибудь α, то получу $2n-1$ тождествъ двухъ видовъ:

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k} = \frac{\partial f_1}{\partial x_k} + \sum_{l=2}^{l=n} \frac{\partial f_1}{\partial p_l}\frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_k} \dots\dots (23),$$

гдѣ k имѣетъ всѣ значенія отъ 1 до n, и

$$\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \alpha_k} = \sum_{l=2}^{l=n}\frac{\partial f_1}{\partial p_l}\frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial \alpha_k}\dots\dots (24),$$

гдѣ k имѣетъ всѣ значенія отъ 1 до $n-1$.

2) Докажу, что уравненіе $p_k=\frac{\partial F}{\partial x_k}$ можетъ получиться изъ уравненій (21). Для доказательства беру такія отношенія изъ (21):

$$dp_k : \frac{\partial f_1}{\partial x_k} = dx_1 = -dx_2 : \frac{\partial f_1}{\partial p_2} = -dx_3 : \frac{\partial f_1}{\partial p_3} = \dots = -dx_n : \frac{\partial f_1}{\partial p_n}.$$

Умножаю числителей и знаменателей: 2-го отношенія на $-\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k}$ 3-го на $+\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_k}$......, послѣдняго на $\frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_k}$, и составлю производную пропорцію

$$dx_1 = \left(dp_k - \frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial x_k}dx_1 - \frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial x_k}dx_2 - \dots\dots - \frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial x_k}dx_n\right) : 0,$$

откуда

$$dp_k - \sum_{l=1}^{l=n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial x_k}dx_l = 0.$$

Но этому уравненію удовлетворяетъ $p_k=\frac{\partial F}{\partial x_k}$.

3) Докажу, что уравненіе (19)—также одинъ изъ интеграловъ уравненій (21). Для этого изъ уравненій (21) составляю производную пропорцію

$$dz = f_1 dx_1 + \sum_{k=2}^{k=n} p_k dx_k.$$

Замѣнивъ въ этомъ уравненіи p_k ихъ величинами $\frac{\partial F}{\partial x_k}$ (что можно сдѣлать, такъ какъ доказано, что $p_k=\frac{\partial F}{\partial x_k}$ — интегралъ (21)), и замѣчая, что $\frac{\partial F}{\partial x_1}$ тождественно

$$= f_1\left(x_1, x_2, \dots x_n, \frac{\partial F}{\partial x_2}, \frac{\partial F}{\partial x_3} \dots \frac{\partial F}{\partial x_n}\right),$$

получаю дифференціальное уравненіе, котораго интегралъ есть (19).

Наконецъ, для того чтобы доказать, что $\xi=\frac{\partial F}{\partial \alpha}$ —также интегралъ уравненій (21), беру пропорціи

$$dx_1 = dx_2 : -\frac{\partial f_1}{\partial p_2} = \dots\dots = dx_n : -\frac{\partial f_1}{\partial p_n},$$

и умножаю числителей и знаменателей отношеній: 1-го на $\frac{\partial^2 F}{\partial x_1 \partial \alpha}$, 2-го на $\frac{\partial^2 F}{\partial x_2 \partial \alpha}$......, послѣдняго на $\frac{\partial^2 F}{\partial x_n \partial \alpha}$; тогда, изъ тождества (24) вывожу дифференціальное уравненіе

$$\sum_{l=1}^{l=n}\frac{\partial^2 F}{\partial x_l \partial \alpha}dx_l = 0.$$

Интегралъ этого дифференціальнаго уравненія — $\xi = \frac{\partial F}{\partial \alpha}$. Итакъ доказано, что всѣ уравненія (20)—интегралы уравненій (21); но такъ какъ эти уравненія (20) всѣ различны, и такъ какъ они содержатъ $2n-1$ произвольныхъ постоянныхъ, то заключаю, что система (20) составляетъ интегральную систему совмѣстныхъ уравненій (21).

Слѣдствіе. Если постоянныя въ полномъ интегралѣ будутъ $z_0, x_{20}, x_{30}, \dots\dots x_{n0}$, то интегральная система (20) приметъ видъ:

$$z = z_0 + F(x_1, x_2, x_3 \dots x_n,\ x_{20}, x_{30} \dots x_{n0}),\ p_k = \frac{\partial F}{\partial x_k},\ \beta_k = \frac{\partial F}{\partial x_{k0}}\ .(25).$$

Здѣсь постоянныя β_k можно замѣнить черезъ p_{k0}. Въ самомъ дѣлѣ уравненіе $p_k - \beta_k = \frac{\delta F}{\delta x_k} - \frac{\delta F}{\delta x_{ko}}$ показываетъ, что β_k равно такому p_k, которое соотвѣтствуетъ величинамъ $x_1, x_2 \ldots x_n$ равнымъ $x_{10}, x_{20} \ldots x_{no}$; а такую начальную величину p_k можно обозначить черезъ p_{ko}.

Теорема 4. Если найденъ какимъ нибудь образомъ полный интегралъ, содержащій въ качествѣ постоянныхъ начальныя значенія перемѣнныхъ, то такой интегралъ совпадаетъ съ интеграломъ, который можно получить методомъ Коши.

Доказательство. Если

$$z = z_0 + F(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n,\ x_{20}, x_{30} \ldots x_{no}) \ldots\ldots (27)$$

— полный интегралъ уравненія (22), то уравненія (25) составляютъ интегральную систему уравненій (21). Изъ этихъ уравненій (25) я могу опредѣлить всѣ x и z:

$$\left.\begin{aligned} x_i &= \psi(x_1, x_{20}, x_{30} \ldots x_{no},\ p_{20}, p_{30} \ldots p_{no}), \\ z &= z_0 + F(x_1, x_{20} \ldots x_{no},\ p_{20}, p_{30} \ldots p_{no}) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (26).$$

По методу Коши для отысканія полнаго интеграла должно исключить изъ (26) $p_{20}, p_{30} \ldots p_{no}$. Такое исключеніе, понятно, приведетъ къ уравненію (27).

Теорема 5. Чтобы изъ интеграла вида $z = \gamma + F(x_1, x_2 \ldots x_n, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1})$ получить такой интегралъ, въ которомъ постоянныя были бы начальныя значенія перемѣнныхъ и функціи, надо составить уравненіе

$$z = z_0 + F(x_1, x_2 \ldots x_n,\ \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}) - F(x_{10}, x_{20} \ldots x_{no},$$
$$\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}) = z_0 + F - F_0 \ldots\ldots (28)$$

и, принявъ $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_{n-1}$ за функціи $x_1, x_2, x_3 \ldots x_n$, исключить эти функціи изъ уравненій (28) и

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha_1} = \frac{\delta F_0}{\delta \alpha_1},\ \frac{\delta F}{\delta \alpha_2} = \frac{\delta F_0}{\delta \alpha_2},\ \frac{\delta F}{\delta \alpha_3} = \frac{\delta F_0}{\delta \alpha_3} \ldots\ldots \frac{\delta F}{\delta \alpha_{n-1}} = \frac{\delta F_0}{\delta \alpha_{n-1}} \ldots (29).$$

Для доказательства достаточно показать, что уравненіе (28), если въ немъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ замѣнены изъ уравненій (29), даетъ

значенія $p_1, p_2 \ldots p_n$, отличающіяся только тѣмъ отъ значеній, даваемыхъ (19), что постоянныя $\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_n$ замѣнены ихъ функціями изъ уравненій (29). Чтобы это показать, дифференцирую (28) въ предположеніи, что $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ замѣнены:

$$p_k = \frac{\delta F}{\delta x_k} + \sum_{s=1}^{s=n-1} \left(\frac{\delta F}{\delta \alpha_s} - \frac{\delta F_0}{\delta \alpha_s} \right) \frac{d\alpha_s}{dx_n}.$$

Это уравненіе на основаніи (29) обращается въ $p_k = \frac{\delta F}{\delta x_k}$;

ч. и т. д.

Примѣръ. Уравненіе $p_1 p_2 p_3 = x_1 x_2 x_3$ имѣетъ полный интегралъ

$$z = k + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \frac{x_3^2}{8\alpha\beta}.$$

(Этотъ интегралъ получается, раздѣляя перемѣнныя, т. е. полагая

$$\frac{p_1}{x_1} = 2\alpha, \frac{p_2}{x_2} = 2\beta, \frac{p_3}{x_3} = \frac{1}{4\alpha\beta}).$$

Составляю уравненія:

$$z = z_0 + \alpha x_1^2 + \beta x_2^2 + \frac{1}{8\alpha\beta} x_3^2 - \alpha x_{10}^2 - \beta x_{20}^2 - \frac{1}{8\alpha\beta} x_{30}^2;$$

$$x_1^2 - \frac{x_3^2}{8\alpha^2\beta} + x_{10}^2 - \frac{x_{30}^2}{8\alpha^2\beta} = 0;\ x_2^2 - \frac{x_3^2}{8\alpha\beta^2} - x_{20}^2 + \frac{x_{30}^2}{8\alpha\beta^2} = 0.$$

Исключая изъ этихъ трехъ уравненій α и β, получаю:

$$z = z_0 + \frac{3}{2} \sqrt[3]{(x_1^2 - x_{10}^2)(x_2^2 - x_{20}^2)(x_3^2 - x_{30}^2)}.$$

Такимъ образомъ возможность отысканія интеграла для уравненія (12) какимъ угодно методомъ установлена. Но можно еще желать имѣть интегралъ, общій для уравненій (12) и (13), такого же вида, какого тотъ интегралъ, который первоначально былъ найденъ для (12),—положимъ, методомъ Якоби.

Теорема 6. Если $z=z_0+F(x_1,x_2\ldots x_n,\ u_1,u_2\ldots u_m,\ \alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})-F(x_{10},x_{20}\ldots x_{n0},\ u_1,u_2\ldots u_m,\ \alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1})=z_0+F-F_0\ldots(28)$, гдѣ $\alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_{n-1}$ замѣнены изъ уравненій

$$\frac{\delta F}{\delta\alpha_k}=\frac{\delta F_0}{\delta\alpha_k}\ldots\ldots(29),$$

есть интегралъ даннаго дифференціальнаго уравненія; то

$$z=z'_0+F-F_0+F(x_{10},x_{20}\ldots x_{n0},\ u_{10},u_{20}\ldots u_{m0},\ \alpha_{10},\alpha_{20}\ldots\alpha_{n-10})$$
$$=z'_0+F-F_0+F_{00}\ldots\ldots(30),$$

гдѣ $\alpha_1,\alpha_2,\alpha_3\ldots\alpha_{n-1}$ замѣнены изъ уравненій (29), а $x_{20},x_{30}\ldots x_{n0}$ предполагаются также функціями $x_1,x_2\ldots x_n$, $u_1,u_2\ldots u_m$, опредѣляемыми изъ уравненій

$$\frac{\delta F_0}{\delta x_{20}}=\frac{\delta F_{00}}{\delta x_{20}},\ \frac{\delta F_0}{\delta x_{30}}=\frac{\delta F_{00}}{\delta x_{30}},\ldots\frac{\delta F_0}{\delta x_{n0}}=\frac{\delta F_{00}}{\delta x_{n0}}\ldots\ldots(31),$$

есть также интегралъ уравненія $p_1=f_1$, и даетъ для производныхъ $\omega=\frac{\delta z}{\delta u}$ значенія, отличающіяся отъ значеній, даваемыхъ интеграломъ (28)—(29), только замѣною $x_{20},x_{30}\ldots x_{n0}$ нѣкоторыми функціями $x_1,x_2\ldots x_n$, $u_1,u_2\ldots u_m$.

Для доказательства продифференцирую уравненіе (30) относительно какого нибудь x:

$$p_k=\frac{\delta F}{\delta x_k}+\sum_{l=1}^{l=n-1}\left(\frac{\delta F}{\delta\alpha_l}-\frac{\delta F_0}{\delta\alpha_l}\right)\frac{d\alpha_l}{dx_k}-\sum_{l=2}^{l=n}\left(\frac{\delta F_0}{\delta x_{l0}}-\frac{\delta F_{00}}{\delta x_{l0}}\right)\frac{dx_{l0}}{dx_k};$$

это уравненіе на основаніи (29) и (31) обращается въ слѣдующее: $p_k=\frac{\delta F}{\delta x_k}$. Но легко также доказать, что и для (28) уравненія $p_k=\frac{\delta F}{\delta x_k}$. Въ обоихъ случаяхъ производныя отъ F по x_k отличаются только тѣмъ, какія изъ постоянныхъ замѣнены функціями x и u; стало быть, если однѣ изъ этихъ величинъ удовлетворяютъ уравненію $p_1=f_1$, то и другія также.

Далѣе ω, даваемая уравненіями (28) и (29), выражается такъ:

$$\omega=\frac{\delta(F-F_0)}{\delta u}+\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\delta(F-F_0)}{\delta\alpha_k}\frac{d\alpha_k}{du};$$

а также производная, даваемая (29), (30) и (31), представится въ такомъ видѣ:

$$\omega=\frac{\delta(F-F_0)}{\delta u}+\sum_{k=1}^{k=n-1}\frac{\delta(F-F_0)}{\delta\alpha_k}\frac{\delta\alpha_k}{\delta u}+\sum_{k=2}^{k=n}\frac{\delta(F_0-F_{00})}{\delta x_{k0}}\frac{dx_{k0}}{du}.$$

Но оба значенія приводятся къ одному и тому же $\frac{\delta(F-F_0)}{\delta u}$, отличающемуся въ обоихъ случаяхъ только тѣмъ, какія изъ постоянныхъ замѣнены функціями.

Предположу, что ищется полный интегралъ, общій (12) и 13-мъ; положу, что интегралъ найденъ для (12): $z=\gamma+F(u_1,u_2\ldots u_m,\ y_1,y_2\ldots y_n,\ \alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)$. Тогда способомъ, указаннымъ въ теоремѣ 5, нахожу интегралъ, получаемый методомъ Коши:

$$z=z_0+F(u_1,u_2,u_3\ldots u_m,\ y_1,y_2\ldots y_n,\ \alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)-F(u_{10},u_2\ldots u_m,$$
$$y_{10},y_{20}\ldots y_{n0},\ \alpha_1,\alpha_2\ldots\alpha_n)=z_0+F-F_0,\ \frac{\delta F}{\delta\alpha_k}=\frac{\delta F_0}{\delta\alpha_k}\ldots\ldots(32).$$

Такъ какъ при вычитаніи F_0 изъ F всѣ члены, содержащіе только $u_2\ldots u_m$, уничтожаются, то заключаю, что интегралъ (32) также интегралъ и для всѣхъ уравненій (13). Если же интегралъ (32) —интегралъ общій (12) и всѣмъ (13), то интегралъ

$$z=z'_0+F-F_0+F(u_{10},u_{20}\ldots u_{m0},\ y_{10},y_{20}\ldots y_{n0},\ \alpha_{10},\alpha_{20}\ldots\alpha_{n0}),$$
$$\frac{\delta F}{\delta\alpha}=\frac{\delta F_0}{\delta\alpha},\ \frac{\delta F_0}{\delta y_0}=\frac{\delta F_{00}}{\delta y_0}\ldots\ldots(33)$$

на основаніи теоремы (6) — также интегралъ, общій (12) и всѣмъ (13).

Понятно, что на практикѣ я могу прямо отъ интеграла $z=\gamma+F$ переходить къ интегралу

$$z = z'_0 + F - F_0 + F_{00}, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha} = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha}, \quad \frac{\partial F_0}{\partial y_0} = \frac{\partial F_{00}}{\partial y_0},$$

при чемъ все равно, по какимъ изъ послѣднихъ $2n$ уравненій опредѣляются α и по какимъ y_0.

Доказательства теоремъ 5-й и 6-й предполагали, что можно опредѣлить всѣ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-1}$ изъ уравненій

$$\frac{\partial F}{\partial \alpha_1} = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha_1}, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_2} = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha_2} \ldots \frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-1}} = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha_{n-1}}.$$

Но въ случаѣ, когда одинъ или нѣсколько α входятъ въ интегралъ $z=\gamma+F$ въ первой степени и умножаются на функціи такихъ α, которыя не входятъ въ другія части интеграла, въ такомъ случаѣ такія α не опредѣлятся; исключеніе же остальныхъ α даетъ не одно уравненіе, а нѣсколько. Этотъ случай встрѣтится только тогда, когда данное дифференціальное уравненіе или однородно, или полулинейно, или линейно. Но если въ такомъ случаѣ нахожденіе интеграла съ начальными значеніями перемѣнныхъ измѣняется, то нахожденіе интеграла прежняго вида дѣлается также, т. е. для его нахожденія надо исключить всѣ α и всѣ x_0 изъ уравненій

$$z = z'_0 + F - F_0 + F_{00}, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_l} = \frac{\partial F_0}{\partial \alpha_l}, \quad \frac{\partial F_0}{\partial x_{k0}} = \frac{\partial F_{00}}{\partial x_{k0}},$$

гдѣ k имѣетъ всѣ значенія отъ 2 до n, а l—отъ 1 дн $n-1$.

Положимъ для большей ясности, что въ найденномъ интегралѣ уравненія (12) только два постоянныхъ, входящихъ линейно и умножающихся на такія постоянныя, которыя не входятъ въ другія части уравненія; пусть такое уравненіе имѣетъ видъ:

$$z = \lambda + F(y_1, y_2 \ldots y_n, u_1, u_2 \ldots u_m, \alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_p) +$$

$$\beta\varphi(y_1, y_2 \ldots y_n, u_1, u_2 \ldots u_m, \alpha_{p+1}, \alpha_{p+2} \ldots \alpha_q) +$$

$$\gamma\psi(y_1, y_2 \ldots y_n, u_1, u_2 \ldots u_m, \alpha_{q+1} \ldots \alpha_{n-2}) = K + \lambda \ldots\ldots (65).$$

Въ такомъ случаѣ, принявъ $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}$, β, γ за функціи $y_1, y_2 \ldots y_n$, $u_1, u_2 \ldots u_m$, составивъ уравненіе (59): $z = z_0 + F - F_0 +$

$\beta(\varphi-\varphi_0)+\gamma(\psi-\psi_0)$, и поступая также, какъ сказано въ теоремѣ 5-й, я получу рядъ уравненій:

$$\frac{\partial(F-F_0)}{\partial \alpha_1} = 0, \ldots \frac{\partial(F-F_0)}{\partial \alpha_p} = 0, \frac{\partial(\varphi-\varphi_0)}{\partial \alpha_{p+1}} = 0, \ldots \frac{\partial(\varphi-\varphi_0)}{\partial \alpha_q} = 0,$$

$$\frac{\partial(\psi-\psi_0)}{\partial \alpha_{q+1}} = 0, \ldots \frac{\partial(\psi-\psi_0)}{\partial \alpha_{n-2}} = 0 \ldots\ldots (60)$$

$$\text{и } \varphi-\varphi_0=0, \; \psi-\psi_0=0 \ldots\ldots (61).$$

Изъ этихъ уравненій (59), (60) и (61) могу исключить только $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}$, и получу три уравненія:

$$z = z_0 + F^\times - F_0^\times, \quad \varphi^\times - \varphi_0^\times = 0, \quad \psi^\times - \psi_0^\times = 0 \ldots\ldots (62),$$

гдѣ для краткости ставлю значекъ $^\times$, чтобы показать, что α замѣнены величинами, опредѣленными изъ (60). Но изъ трехъ уравненій (62) можно получить дифференціальныя полулинейныя уравненія (смотри сочиненіе Мансіона, страница 24), если будемъ исключать β, γ, $y_{10}, y_{20}, y_{30} \ldots y_{n0}$ между уравненіями:

$$\varphi^\times - \varphi_0^\times = 0, \; \psi^\times - \psi_0^\times = 0 \ldots\ldots (70),$$

$$\omega_1 = \frac{\partial F^\times}{\partial u_1} + \beta\frac{\partial\varphi^\times}{\partial u_1} + \gamma\frac{\partial\psi^\times}{\partial u_1} \ldots\ldots (69),$$

$$\omega_l = \frac{\partial(F^\times - F_0^\times)}{\partial u_l} + \beta\frac{\partial(\varphi^\times-\varphi_0^\times)}{\partial u_l} + \gamma\frac{\partial(\psi^\times-\psi_0)}{\partial u_l} \ldots\ldots (64),$$

$$q_k = \frac{\partial F^\times}{\partial y_k} + \beta\frac{\partial\varphi^\times}{\partial y_k} + \gamma\frac{\partial\psi^\times}{\partial y_k} \ldots\ldots (63),$$

гдѣ сначала взяты дифференціалы, а потомъ уже подставлены величины α изъ (60). Но исключеніе $\beta, \gamma, y_{10}, y_{20} \ldots y_{n0}$ между (70), (69) и (63) даетъ тоже, что исключеніе β, γ, $y_{10}, y_{20} \ldots y_{n0}$, $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}$ между формулами

$$\varphi-\varphi_0=0, \; \psi-\psi_0=0, \; \omega_1 = \frac{\partial K}{\partial u_1}, \; q_k = \frac{\partial K}{\partial y_k} \text{ и } (60).$$

Но такъ какъ $\omega_1 = \frac{\partial K}{\partial u_1}$, $q_k = \frac{\partial K}{\partial y_k}$ не содержатъ явно $y_{10}, y_{20} \ldots$

y_{n0}, то результатъ отъ исключенія β, γ, всѣхъ α и всѣхъ y_0 получится тотъ же, что отъ исключенія β, γ и всѣхъ α между уравненіями $\omega_1 = \frac{\delta K}{\delta u_1}$, $q_k = \frac{\delta K}{\delta y_k}$; но отъ такого исключенія получится дифференціальное уравненіе, у котораго интегралъ —

$$z = \lambda + F + \beta\varphi + \gamma\psi = \lambda + K \ldots\ldots (65).$$

Изъ всего вышесказаннаго заключаю, что три уравненія (62) получаются изъ интегральной системы, соотвѣтствующей уравненію (12). По теоріи Майера слѣдуетъ, что уравненія (62) получаются также изъ интегральныхъ системъ всѣхъ уравненій (13), ибо величины, содержащія только $u_2, u_3 \ldots u_m$ сокращаются при вычитаніи K_0 изъ K. Итакъ всѣ совмѣстныя уравненія (12) и (13) получатся изъ уравненій (70), (69), (63) и (64) посредствомъ исключенія β, γ, $y_{10}, y_{20} \ldots y_{n0}$. Если же теперь возьму уравненіе

$$z = \lambda' + K - K_0 + K(y_{10}, y_{20} \ldots y_{n0},\ u_{10}, u_{20} \ldots u_{m0},$$

$$\alpha_{10}, \alpha_{20} \ldots \alpha_{n-2,0}, \beta_0, \gamma_0) = \lambda' + K - K_0 + K_{00} \ldots\ldots (66)$$

и стану исключать изъ него $\alpha_1, \alpha_2 \ldots \alpha_{n-2}$, $\beta, \gamma, y_{10}, y_{20} \ldots y_{n0}$ посредствомъ уравненій

$$\frac{\delta K}{\delta \alpha_k} = \frac{\delta K_0}{\delta \alpha_k},\ \varphi - \varphi_0 = 0,\ \psi - \psi_0 = 0,\ \frac{\delta K_0}{\delta y_{k0}} = \frac{\delta K_{00}}{\delta y_{k0}} \ldots\ldots (67),$$

то я получу для q_k и ω_l такія значенія:

$$q_k = \frac{\delta K}{\delta y_k},\ \omega_1 = \frac{\delta K}{\delta u_1},\ \omega_l = \frac{\delta(K - K_0)}{\delta u_l};$$

это тѣ же значенія, которыя я получилъ бы, исключая $\beta, \gamma, y_{10}, y_{20}, \ldots y_{n0}$ изъ уравненій

$$q_k = \frac{\delta K^\times}{\delta y_k},\ \omega_1 = \frac{\delta K^\times}{\delta u_1},\ \omega_l = \frac{\delta(K^\times - K_0^\times)}{\delta u_l},$$

$$\varphi^\times - \varphi_0^\times = 0,\ \psi^\times - \psi_0^\times = 0 \text{ и } \frac{\delta K_0^\times}{\delta y_0} = \frac{\delta K_{00}}{\delta y_0} \ldots\ldots (68),$$

въ которыхъ сначала сдѣлана дифференціація, а потомъ подстановка. Но первыя $m+n+2$ уравненія изъ (68) не содержатъ $\alpha_{10}, \alpha_{20} \ldots \alpha_{m0}$, β_0 и γ_0, которыя входятъ только въ K_{00}; слѣдовательно дифференціальныя уравненія, для которыхъ (66) служитъ интеграломъ, могутъ всѣ получиться отъ исключенія $\beta, \gamma, y_{10}, y_{20} \ldots y_{n0}$ между уравненіями (70), (69), (64) и (63); т. е. интегралъ (66) есть интегралъ, общій тѣмъ же уравненіямъ (12) и (13). И такъ способъ, указанный на страницѣ 38 для нахожденія по полному интегралу (12) полнаго интеграла, общаго (12) и (13), вѣренъ и для случая однородности, полулинейности и линейности.

Замѣчу, что въ нѣкоторыхъ случаяхъ переходъ отъ интеграла уравненія (12) къ интегралу, общему (12) и всѣмъ (13), значительно упрощается. Такъ 1) если функція F_0 такова, что вовсе не содержитъ перемѣнныхъ $u_2, u_3 \ldots u_m$, то уравненія

$$\frac{\delta F}{\delta \alpha} = \frac{\delta F_0}{\delta \alpha},\ \frac{\delta F_0}{\delta y_0} = \frac{\delta F_{00}}{\delta y_0}$$

даютъ $\alpha_1 = \alpha_{10}$, $\alpha_2 = \alpha_{20}, \ldots \alpha_n = \alpha_{n0}$, и слѣдовательно интегралъ общій будетъ именно интегралъ, найденный для (12) уравненія: $z = z_0 + F$. 2) Если $F_0 =$ нѣкоторой функціи φ только $u_2, u_3 \ldots u_m$ $+$ функціи независимой отъ $u_2, u_3 \ldots u_m$, то, преобразовавъ интегралъ уравненія (12) изъ $z = z_0 + F$ въ $z = z'_0 + F - \varphi$ (40), я опять получу интегралъ уравненія (12). Но такъ какъ уравненіе (40) кромѣ того таково, что $F_0 - \varphi$ не содержитъ $u_2, u_3 \ldots u_m$, то оно есть интегралъ, общій (12) и (13).

Привожу примѣръ примѣненія метода Ли.

Найти полный интегралъ двухъ вполнѣ совмѣстныхъ уравненій:

$$p_1 = \frac{2x_1 x_2 p_4}{p_3 p_4 - 2x_1 x_3} + \frac{x_4 p_4}{x_1},\ p_2 = \frac{x_3 p_3 p_4 - 2x_1 x_3^2}{x_2 p_4} \ldots\ldots (33).$$

Полагаю $x_2 = 1 + x_1 u_2$, $x_{10} = 0$, $x_{20} = 1$; тогда получаю:

$$\frac{dz}{dx_1} = p'_1 = \frac{2x_1(1 + x_1 u_2) p_4}{p_3 p_4 - 2x_1 x_3} + \frac{x_4 p_4}{x_1} + \frac{u_2 x_3 p_3 p_4 - 2u_2 x_1 x_3^2}{(1 + x_1 u_2) p_4} = \psi \ldots (34);$$

$$\frac{dz}{du_2} = v_2 = \frac{x_1 x_3 p_3 p_4 - 2x_1^2 x_3^2}{(1 + x_1 u_2) p_4} \ldots\ldots (35).$$

Для интеграціи (34) ищу $\frac{d\psi}{dx_3}, \frac{d\psi}{dx_4}, \frac{d\psi}{dp_3}$:

$$\frac{d\psi}{dx_4} = \frac{p_4}{x_1}, \frac{d\psi}{dx_3} = \frac{4x_1^2(1+x_1u_2)p_4}{(p_3p_4-2x_1x_3)^2} +$$

$$+ \frac{u_2p_3p_4-4u_2x_1x_3}{(1+x_1u_2)p_4}, \frac{d\psi}{dp_3} = \frac{-2x_1u_3(1+x_1u_2)p_4^2}{(p_3p_4-2x_1x_3)^2} + \frac{u_2x_3}{1+x_1u_2}.$$

Во первыхъ изъ уравненія $dx_1 = dp_4 : \frac{p_4}{x_1}$, имѣю

$$p_4 = \alpha x_1 \ldots\ldots.(36).$$

Потомъ беру уравненія:

$$dx_1 = -dx_3 : \frac{d\psi}{dp_3} = dp_3 : \frac{d\psi}{dx_3};$$

изъ этихъ уравненій составляю такое:

$$p_4 dp_3 - 2x_1 dx_3 - \frac{u_2p_3p_4 dx_1}{1+x_1u_2} + \frac{2u_2x_1x_3}{1+x_1u_2} dx_1 = 0.$$

Замѣняю p_4 черезъ αx_1 и дѣлю все уравненіе на $1+x_1u_2$:

$$\frac{\alpha dp_3}{1+x_1u_2} - \frac{\alpha u_2p_3 dx_1}{(1+x_1u_2)^2} - \frac{2dx_3}{1+x_1u_2} + \frac{2u_2x_3dx_1}{(1+x_1u_2)^2} = 0.$$

Интегрируя, получаю:

$$\frac{2x_3}{\alpha} + \beta(1+x_1u_2) = p_3 \ldots\ldots(37).$$

Такъ какъ уравненія (36) и (37) обращаютъ символъ Пуассона въ нуль, то можно прямо опредѣлить изъ (34) p'_1, а потомъ интегрировать уравненіе $dz = \sum pdx$. Это и исполняю:

$$p'_1 = \frac{2x_1}{\beta} + \alpha x_4 + \beta u_2 x_3;$$

$$dz = \frac{2x_1dx_1}{\beta} + \alpha x_1 dx_4 + \alpha x_4 dx_1 + \beta u_2 x_3 dx_1 + \beta(1+x_1u_2)dx_3 + \frac{2x_3dx_3}{\alpha}.$$

Интегрируя, имѣю:

$$z = \gamma + \frac{x_1^2}{\beta} + \alpha x_1 x_4 + \frac{x_3^2}{\alpha} + \beta(1+x_1u_2)x_3 \ldots.(38).$$

Такъ какъ это (38) уравненіе имѣетъ то свойство, что въ немъ u_2 пропадаетъ, когда беремъ $x_3 = x_{30}$, $x_4 = x_{40}$, $x_1 = x_{10} = 0$, то оно—тоже интегралъ для уравненія (35). Чтобы найти интегралъ для уравненій (33), подставляю въ (38) вмѣсто u_2 ему равную величину $u_2 = \frac{x_2-1}{x_1}$, тогда получаю:

$$z = z_0 + \frac{x_1^2}{\beta} + \frac{x_3^2}{\alpha} + \beta x_2 x_3 + \alpha x_1 x_4 \ldots\ldots(39).$$

Въ заключеніе этой главы упомяну о примѣненіи метода Ли къ рѣшенію одного нелинейнаго уравненія. Майеръ даетъ способъ найти интегралъ 1 уравненія съ помощью n интеграцій (гдѣ n число независимыхъ перемѣнныхъ); но его методъ, мнѣ кажется, тѣмъ неудобенъ, что требуетъ для каждой системы совмѣстныхъ линейныхъ уравненій, употребляемыхъ въ методѣ Якоби, особаго каждый разъ преобразованія перемѣнныхъ; кромѣ того при нахожденіи каждаго интеграла 1-го уравненія системы приходится его подставить въ остальныя совмѣстныя уравненія линейной системы. Поэтому я считаю не безъинтереснымъ указать, какимъ образомъ методъ Ли непосредственно можетъ быть примѣненъ къ нахожденію интеграла 1 уравненія, хотя и такой пріемъ не лишенъ многихъ недостатковъ.

Пусть дано уравненіе

$$p_1 = f(x_1, x_2, x_3 \ldots x_n, p_2, p_3, \ldots p_n) \ldots\ldots(41).$$

Для разрѣшенія этого уравненія по методу Коши надо найти $2n-1$ интеграловъ системы

$$dx_1 = -dx_l : \frac{df}{dp_l} = dp_l : \frac{df}{dx_l} = dz : \left(f - \sum_{l=2}^{l=n} p_l \frac{df}{dp_l}\right).$$

Но я найду одинъ только интегралъ этихъ совмѣстныхъ уравненій, интегралъ, который бы содержалъ одно или нѣсколько p и не содержалъ z. На практикѣ мнѣ не придется вычислять всѣ производныя f, а только такія, чтобы изъ вычисленныхъ отношеній можно было составить интегрируемое уравненіе; также отношеніе съ dz излишне. Пусть отысканный интегралъ будетъ $p_2 = \varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_n,\ p_3, p_4 \ldots p_n,\ \alpha_1)$. Извѣстно изъ теоріи Якоби, что уравненія $p_1 = f$ и $p_2 = \varphi_2$ вполнѣ совмѣстны, ибо обращаютъ символъ $(p_1 - f_1,\ p_2 - \varphi_2)$ тождественно въ нуль. Эти два совмѣстныя уравненія упрощаю тѣмъ, что въ первомъ p_2 замѣняю φ_2; такимъ образомъ получаю:

$$\left.\begin{aligned} p_1 &= \varphi_1(x_1, x_2 \ldots x_n,\ \alpha_1,\ p_3 \ldots p_n), \\ p_2 &= \varphi_2(x_1, x_2 \ldots x_n,\ \alpha_1,\ p_3 \ldots p_n) \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (42).$$

Къ этимъ двумъ вполнѣ совмѣстнымъ уравненіямъ примѣняю преобразованіе Ли; для этого положу

$$x_2 = \xi_2 + (x_1 - x_{10})u_2 \ldots\ldots (56).$$

(Понятно, можно примѣнить подстановку (14); но я для ясности изложенія беру болѣе простую подстановку). Тогда получаю:

$$p'_1 = \varphi_1 + u_2\varphi_2 = \psi \ldots\ldots (43)$$

$$\text{и}\ \ \omega_2 = (x_1 - x_{10})\varphi_2 \ldots\ldots (44).$$

Если я найду полный интегралъ уравненія (43), то изложеннымъ выше преобразованіемъ получу изъ него полный интегралъ, общій для (43) и (44). Поэтому, забывъ на время объ уравненіи (44), я ищу полный интегралъ (43), предполагая u_2 постояннымъ.

Для этого ищу одинъ интегралъ уравненій

$$dx_1 = -dx_l : \frac{d\psi}{dp_l} = dp_l : \frac{d\psi}{dx_l},$$

содержащій производныя. Пусть этотъ интегралъ будетъ

$$p_3 = \varphi_3(x_1, u_2, x_3 \ldots x_n,\ \alpha_1, \alpha_2,\ p_4 \ldots p_n).$$

Замѣняя p_3 въ уравненіи (43) черезъ φ_3, я получаю два вполнѣ совмѣстныхъ уравненія:

$$p'_1 = \psi_1(x_1, u_2, x_3 \ldots x_n,\ \alpha_1, \alpha_2,\ p_4, p_5 \ldots p_n) \text{ и } p_3 = \varphi_3 \ldots\ldots (45).$$

Полагаю

$$x_3 = \xi_3 + (x_1 - x_{10})u_3 \ldots\ldots (57)$$

и преобразовываю (45) въ новыя:

$$p''_1 = \psi_1 + u_3\varphi_3 = \psi_2 \ldots\ldots (46)$$

$$\text{и}\ \ \omega_3 = (x_1 - x_{10})\varphi_3 \ldots\ldots (47).$$

Опять ищу интегралъ системы

$$dx_1 = -dx_l : \frac{d\psi_2}{dp_l} = dp_l : \frac{d\psi_2'}{dx_l}.$$

Опять получаю два совмѣстныя уравненія: (46) и вновь найденный интегралъ; съ этими двумя уравненіями поступаю также, какъ поступилъ съ двумя уравненіями (45). Продолжая искать уравненія совмѣстныя 1-му изъ преобразованныхъ способомъ Ли парныхъ уравненій, дойду наконецъ до системы двухъ совмѣстныхъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned} &p_1^{(n-3)} = \delta_3(x_1, u_2 \ldots u_{n-3},\ x_{n-2}, x_{n-1}, x_n,\ \alpha_1 \ldots \alpha_{n-3}, p_{n-1}, p_n) \\ &\text{и}\ p_{n-2} = \delta_2(x_1, u_2, u_3 \ldots u_{n-3},\ x_{n-2}, x_{n-1}, x_n, \alpha_1 \ldots \alpha_{n-3},\ p_{n-1} p_n) \end{aligned}\right\} (48).$$

Полагаю

$$x_{n-2} = \xi_{n-2} + (x_1 - x_{10})u_{n-2} \ldots\ldots (53),$$

тогда вмѣсто (48) имѣю:

$$p_1^{(n-3)} = \delta_1 + u_{n-2}\delta_2 = \varepsilon \ldots\ldots (49)$$

$$\text{и}\ \ \omega_{n-2} = (x_1 - x_{10})\delta_2 \ldots\ldots (50).$$

Пусть одинъ изъ интеграловъ системы

$$dx_1 = -dx_{n-1} : \frac{d\varepsilon}{dp_{n-1}} = -dx_n : \frac{d\varepsilon}{dp_n} = dp_{n-1} : \frac{d\varepsilon}{dx_{n-1}} = dp_n : \frac{d\varepsilon}{dx_n}$$

будетъ

$$p_{n-1} = \mu_2(x_1, u_2, u_3 \ldots u_{n-2},\ x_{n-1}, x_n,\ \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \ldots \alpha_{n-2}, p_n) \ldots (51).$$

Это уравненіе будетъ вполнѣ совмѣстно съ (49), а также съ уравненіемъ

$$p_1^{(n-3)}=\mu_1(x_1, u_2, u_3 \dots u_{n-2}, x_{n-1}, x_n, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \dots \alpha_{n-2}, p_n) \dots (71),$$

получаемымъ изъ (49) замѣною p_{n-1} черезъ μ_2.

Полагая

$$x_{n-1}=\xi_{n-1}+(x_1-x_{10})u_{n-1} \dots\dots (55),$$

привожу уравненія (51) и (71) къ виду:

$$p_1^{(n-2)}=\mu_1+u_{n-1}\mu_2=\lambda \dots\dots (52)$$

$$\text{и } \omega_{n-1}=(x_1-x_{10})\mu_2 \dots\dots (54).$$

Далѣе, найдя интегралъ, содержащій p_n, изъ уравненій

$$dx_1=-dx_n : \frac{d\lambda}{dp_n}=dp_n : \frac{d\lambda}{dx_n},$$

я прямо получаю полный интегралъ (52) изъ дифференціальнаго уравненія: $dz=p_1^{(n-2)}dx_1+p_n dx_n$. Послѣднее уравненіе непремѣнно интегрируется, такъ какъ величина p_n получается изъ одного изъ интеграловъ линейнаго уравненія $(p_1^{(n-2)}-\lambda, \gamma)=0$. Въ формулахъ 53, 55, 56 и 57 величины $x_{10}, \xi_2, \xi_3 \dots \xi_{n-2}$ и ξ_{n-1} могутъ быть выбраны нами по произволу, однакоже съ тѣмъ ограниченіемъ, чтобы члены преобразуемыхъ уравненій не обращались въ безконечность и [illegible] опредѣленныя значенія при $x_1=x_{10}$. Я обозначалъ эти числовыя величины не черезъ x_0 съ тою цѣлью, чтобы не смѣшивать ихъ съ тѣми начальными значеніями перемѣнныхъ, которыя явятся при нахожденіи интеграла общаго парамъ совмѣстныхъ уравненій.

Продолжаю. Пусть $z=\gamma+F(x_1, u_2, u_3 \dots u_{n-1}, x_n, \alpha_1, \alpha_2 \dots \alpha_{n-1})$ будетъ интегралъ уравненія (52). Тогда интегралъ (52) и (54) получится исключеніемъ x_n и α_{n0-1} изъ трехъ уравненій:
$z=z'_0+F-F$ (въ которомъ x_1 и x_n замѣнены x_{10} и x_{n0})$+F$ (въ которомъ x_1, u_{n-1} x_n и α_{n-1} замѣнены x_{10}, u_{n-10} x_{n0} и $\alpha_{n-1,0}$)

$$=z'_0+F-F_0+F_{00}, \quad \frac{\partial F}{\partial \alpha_{n-1}}=\frac{\partial F_0}{\partial \alpha_{n-1}} \text{ и } \frac{\partial F_0}{\partial x_{n0}}=\frac{\partial F_{00}}{\partial x_{n0}}.$$

Въ этомъ интегралѣ u_{n-1} замѣняю дробью $\dfrac{x_{n-1}-\xi_{n-1}}{x_1-x_{10}}$; тогда

получаю интегралъ двухъ уравненій (51) и (71); а слѣдовательно это будетъ также полный интегралъ уравненія (49). Обозначивъ этотъ интегралъ черезъ $z=\gamma+\chi$, нахожу интегралъ, общій (49) и (50), исключая α_{n-2}, $\alpha_{n-1,0}$, x_{n-10} и x_{n0} изъ пяти уравненій:

$$z=z'_0+\chi-\chi_0+\chi_{00}, \quad \frac{\delta\chi}{\delta\alpha_{n-2}}=\frac{\delta\chi_0}{\delta\alpha_{n-2}}, \quad \frac{\delta\chi}{\delta\alpha_{n-1,0}}=\frac{\delta\chi_0}{\delta\alpha_{n-1,0}},$$

$$\frac{\delta\chi_0}{\delta x_{n-1,0}}=\frac{\delta\chi_{00}}{\delta x_{n0}}, \quad \frac{\delta\chi_0}{\delta x_{n0}}=\frac{\delta\chi_{00}}{\delta x_{n0}}.$$

Замѣняя же въ этомъ новомъ интегралѣ u_{n-2} дробью $(x_{n-2}-\xi_{n-2}):(x_1-x_{10})$, получаю интегралъ уравненій (48), или того уравненія, интегрируя которое получили второе изъ (48).

Продолжая такимъ образомъ дѣйствовать, я дойду до полнаго интеграла даннаго уравненія. При послѣднемъ преобразованіи интеграла придется исключать постоянныя $\alpha_1, \alpha_{20}, \alpha_{300}, \alpha_{4000} \dots$, x_{20}, $x_{30} \dots x_{n0}$ между $2n-1$ уравненіями. Понятно, что при вычисленіи уравненія (44), (47), (50) и (54) будетъ излишне писать.

Вышеизложенныя вычисленія во многихъ случаяхъ сократятся. Такъ, если можно найти для какой нибудь изъ системъ совмѣстныхъ уравненій, соотвѣтствующихъ уравненіямъ (43), (46), ...(49) нѣсколько интеграловъ, обращающихъ попарно символы Пуассона въ нули, то система, состоящая изъ двухъ уравненій, замѣнится системою вполнѣ совмѣстныхъ уравненій изъ 3, 4 и болѣе уравненій, которыя преобразуются способомъ Ли въ такія совмѣстныя уравненія, которыхъ общій интегралъ легко получается изъ интеграла перваго изъ уравненій системы. Также можетъ случиться, что интегралъ уравненія (52) безъ всякихъ преобразованій будетъ интеграломъ даннаго уравненія или получится болѣе простыми пріемами, чѣмъ обыкновенно. Нижеслѣдующій примѣръ представляетъ одинъ изъ такихъ случаевъ.

Примѣръ.

$$p_1=\frac{2x_3x_2^2x_4^2}{x_3p_3-2x_4p_4}+\frac{2x_2p_2}{x_1}-\frac{6x_2^3x_3^2}{x_1p_4}=\psi \dots\dots (58).$$

Вычисляю $\dfrac{d\psi}{dp_3}$, $\dfrac{d\psi}{dp_4}$, $\dfrac{d\psi}{dx_4}$ и $\dfrac{d\psi}{dx_3}$ и составляю уравненіе:

$$x_3 \frac{d\psi}{dx_3} - p_3 \frac{d\psi}{dp_3} - 2x_4 \frac{d\psi}{dx_4} + 2p_4 \frac{d\psi}{dp_4} + \frac{x_3 p_3 - 2x_4 p_4}{x_3} \frac{d\psi}{dp_3} = 0;$$

на основаніи этого уравненія составляю слѣдующее:

$$\frac{x_3 dp_3 + p_3 dx_3 - 2x_4 dp_4 - 2p_4 dx_4}{x_3 p_3 - 2x_4 p_4} - \frac{dx_3}{x_3} = 0.$$

Интегралъ $x_3 p_3 - 2x_4 p_4 = \alpha x_3$ или $p_3 = \frac{2p_4 x_4}{x_3} + \alpha$. Полагая $x_3 = 1 + (x_1 - 1)u_3$, составляю уравненія:

$$p'_1 = \frac{3x_2^2 x_1^2}{\alpha} + \frac{2x_2 p_2}{x_1} - \frac{6x_2^2(1 + x_1 u_3 - u_3)^2}{x_1 p_4} + \frac{2u_3 p_4 x_4}{1 + x_1 u_3 - u_3} + \alpha u_3 = \psi_1 \; (59),$$

$$\frac{d\psi_1}{dx_4} = \frac{2u_3 p_4}{1 + x_1 u_3 - u_3}.$$

Интегрирую далѣе уравненіе

$$\frac{2u_3 dx_4}{1 + x_1 u_3 - u_3} = \frac{dp_4}{p_4},$$

которое даетъ $p_4 = \beta\,(1 + x_1 u_3 - u_3)^2$. Такъ какъ послѣдній интегралъ изъ перемѣнныхъ содержитъ только x_4, а $\frac{d\psi_1}{dx_2}$ и $\frac{d\psi_1}{dp_2}$ не содержатъ x_4, то я могу искать прямо p_2, зная напередъ, что символъ Пуассона будетъ равенъ нулю. Для этого беру уравненія:

$$dx_1 = -dx_2 : \frac{2x_2}{x_1} = dp_2 : \left(\frac{6x_2 x_1^2}{\alpha} + \frac{2p_2}{x_1} - \frac{18x_2^2}{\beta x_1}\right),$$

откуда получаю

$$x_2 dp_2 + p_2 dx_2 - \frac{9x_2^2 dx_2}{\beta} + \frac{12x_2 x_1^3 dx_2}{\alpha} + \frac{18x_1^2 x_2^2 dx_1}{\alpha} = 0,$$

откуда

$$p_2 = \frac{\gamma}{x_2} + \frac{3x_2^2}{\beta} - \frac{6x_2 x_1^3}{\alpha}.$$

Наконецъ

$$p'_1 = \alpha u_3 + 2\beta u_3 x_4 (1 + x_1 u_3 - u_3) - \frac{9x_2^2 x_1^2}{\alpha} + \frac{2\gamma}{x_1}.$$

Полный интегралъ уравненія (59) будетъ

$$z = \delta + \alpha u_3 x_1 + 2\gamma \lg x_1 + \gamma \lg x_2 + \frac{x_2^3}{\beta} - \frac{3x_2^2 x_1^3}{\alpha} + \beta x_4 (1 + x_1 u_3 - u_3)^2.$$

Дѣлая $x_1 = 1$, я получаю членъ зависящій только отъ $u_3, \alpha u_3$; поэтому стоитъ только въ предъидущемъ интегралѣ положить $\delta = \varepsilon - \alpha u_3$ и сдѣлать обратную подстановку, и тогда получу интегралъ уравненія (58):

$$z = \varepsilon + \alpha x_3 + 2\gamma \lg x_1 + \gamma \lg x_2 + \frac{x_2^3}{\beta} - \frac{3x_2^2 x_1^3}{\alpha} + \beta x_3^2 x_4.$$

ГЛАВА II.

О нахожденіи полнаго интеграла уравненія втораго порядка съ двумя независимыми перемѣнными.

Дано уравненіе

$$f(x,y,z,p,q,r,s,t)=0\ldots\ldots(1),$$

гдѣ x и y—независимыя перемѣнныя, z—функція этихъ перемѣнныхъ, p и q—производныя перваго порядка, r, s и t—производныя втораго порядка. Буду обозначать для краткости

$$\frac{\partial f}{\partial x}=X,\ \frac{\partial f}{\partial y}=Y,\ \frac{\partial f}{\partial z}=Z,\ \frac{\partial f}{\partial p}=P,$$

$$\frac{\partial f}{\partial q}=Q,\ \frac{\partial f}{\partial r}=R,\ \frac{\partial f}{\partial s}=S \text{ и } \frac{\partial f}{\partial t}=T.$$

Положимъ, что u—нѣкоторая, покуда неопредѣленная, функція x и y, и положимъ, что въ данномъ уравненіи старыя перемѣнныя x и y замѣняются новыми x и u. Въ такомъ случаѣ интегралъ даннаго уравненія, кромѣ того что долженъ удовлетворять данному уравненію, долженъ еще удовлетворять слѣдующимъ 6 уравненіямъ:

$$\frac{dz}{dx}=p+q\frac{dy}{dx},\ \frac{dp}{dx}=r+s\frac{dy}{dx},\ \frac{dq}{dx}=s+t\frac{dy}{dx}\ldots\ldots(2),$$

$$\frac{dz}{du}=q\frac{dy}{du},\ \frac{dp}{du}=s\frac{dy}{du},\ \frac{dq}{du}=t\frac{dy}{du}\ldots\ldots(3).$$

Но данное (1) уравненіе будетъ удовлетворено послѣ того, какъ будутъ приданы приличныя частныя значенія произвольнымъ величинамъ, если оба частныхъ дифференціала первой части уравненія (1) обращаются въ нуль; поэтому задача приводится къ отысканію значеній y,z,p,q,r,s и t, удовлетворяющихъ (2), (3) и слѣдующимъ уравненіямъ:

$$X+Y\frac{dy}{dx}+Z\frac{dz}{dx}+P\frac{dp}{dx}+Q\frac{dq}{dx}+R\frac{dr}{dx}+S\frac{ds}{dx}+T\frac{dt}{dx}=0\ldots(4),$$

$$Y\frac{dy}{du}+Z\frac{dz}{du}+P\frac{dp}{du}+Q\frac{dq}{du}+R\frac{dr}{du}+S\frac{ds}{du}+T\frac{dt}{du}=0\ldots\ldots(5).$$

Уравненія (2), (3), (4) и (5) можно значительно упростить. Для этого опредѣляю $\frac{dr}{du}$ и $\frac{ds}{du}$ изъ (2) и (3) тѣмъ же способомъ, какъ это дѣлаетъ Коши для опредѣленія $\frac{dp}{du}$, т. е. дифференцирую (2) относительно u, а (3) относительно x и вычитаю; тогда

$$\frac{ds}{du}+\frac{dt}{du}\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{du},$$

$$\frac{dr}{du}=\frac{ds}{dx}\frac{dy}{du}-\frac{ds}{du}\frac{dy}{dx}=\frac{ds}{dx}\frac{dy}{du}+\frac{dt}{du}\frac{dy^2}{dx^2}-\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dx}\frac{dy}{du}.$$

Замѣняю въ уравненіи (5) $\frac{ds}{du}$ и $\frac{dr}{du}$ только что опредѣленными ихъ значеніями:

$$\frac{dy}{du}\left(Y+Zq+Ps+Qt+R\frac{ds}{dx}-R\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dx}+S\frac{dt}{dx}\right)+$$

$$+\frac{dt}{du}\left(R\frac{dy^2}{dx^2}-S\frac{dy}{dx}+T\right)=0\ldots\ldots(6).$$

Такъ какъ функція u неопредѣленная, то я могу ее выбрать такъ, чтобы коэффиціентъ при $\frac{dt}{du}$ обращался въ нуль. Тогда вмѣсто (6) имѣю два уравненія:

$$Y+Zq+Ps+Qt+R\frac{ds}{dx}-R\frac{dt}{dx}\frac{dy}{dx}+S\frac{dt}{dx}=0\ldots\ldots(7),$$

$$R\frac{dy^2}{dx^2}-S\frac{dy}{dx}+T=0\ldots\ldots(8).$$

Къ этимъ двумъ уравненіямъ надо присоединить уравненія (2), (3) и (4). Придавъ уравненію (8) слѣдующій видъ:

$$\frac{dy}{dx}=\frac{S\pm\sqrt{S^2-4RT}}{2R}\ldots\ldots(8^{bis}),$$

я легко преобразовываю уравненія (7) и (4) въ слѣдующія:

$$Y+Zq+Ps+Qt+R\frac{ds}{dx}+\frac{S\mp\sqrt{S^2-4RT}}{2}\frac{dt}{dx}=0\ldots\ldots(7^{bis}),$$

$$X+Zp+Pr+Qs+R\frac{dr}{dx}+\frac{S\mp\sqrt{S^2-4RT}}{2}\frac{ds}{dx}=0\ldots\ldots(4^{bis}).$$

Итакъ нахожденіе интеграла уравненія (1) приводится къ нахожденію величинъ y,z,p,q,r,s и t, удовлетворяющихъ уравненіямъ (4^{bis}), (7^{bis}), (8^{bis}), (2) и (3), и начальныя значенія которыхъ y_0,z_0,p_0,q_0,r_0,s_0 и t_0 (т. е. значенія, которыя принимаютъ y,z,p,q,r, s и t при $x=x_0$) удовлетворяютъ уравненію $f(x_0,y_0,z_0,p_0,q_0,r_0,s_0,t_0)=0$. Если я найду y,z,p,q,r,s и t въ функціяхъ x и u, удовлетворяющихъ требуемымъ условіямъ, то, желая сдѣлать обратную замѣну перемѣнныхъ x и u перемѣнными x и y, я долженъ буду исключить u изъ этихъ уравненій. Тогда z выразится въ функціи x и y такимъ образомъ, что p,q,r,s и t будутъ на основаніи (2) и (3) частныя производныя z; кромѣ того уравненіе (1) удовлетворится, потому что оба его дифференціала будутъ равны нулю, и кромѣ того начальныя значенія удовлетворяютъ ему непосредственно.

Подобное же встрѣчается въ методѣ Коши для уравненій 1-го порядка. Но тамъ было большое преимущество въ томъ, что тѣ уравненія, въ которыя не входятъ производныя по u, были въ числѣ равномъ числу зависимыхъ перемѣнныхъ, и слѣдовательно могли всегда интегрироваться какъ полныя дифференціальныя уравненія. Въ разбираемомъ же случаѣ уравненія (8^{bis}), (4^{bis}), (7^{bis}) и три (2)

самостоятельно обыкновенно не интегрируются. Тѣмъ не менѣе это не значитъ, что въ большинствѣ случаевъ задача невозможна: такъ какъ y,z,p,q,r,s и t—не только функціи x, но и u, то понятно, что вышеупомянутыя уравненія могутъ быть удовлетворены иначе, чѣмъ если эти уравненія полныя.

Иногда однако же можно составить изъ уравненій (8^{bis}), (4^{bis}), (7^{bis}) и (2) одно или нѣсколько уравненій, интегрируемыхъ какъ полныя уравненія. Тотъ случай, когда для каждой системы можно составить по два интегрирующіяся уравненія, разобранъ Петерсономъ. Но могутъ быть случаи, когда число такихъ интегрирующихся уравненій будетъ меньше. Въ этой главѣ я разбираю именно тотъ частный случай, когда возможно составить хоть одно уравненіе, отличное отъ полнаго дифференціала даннаго уравненія, которое можно интегрировать какъ полное. Этотъ частный случай будетъ соотвѣтствовать случаю Ампера для линейныхъ и билинейныхъ уравненій.

Положу, что изъ уравненій (4^{bis}), (7^{bis}), (8^{bis}) и (2) можно составить такое уравненіе, которое будетъ полнымъ дифференціаломъ нѣкоторой функціи V отъ перемѣнныхъ x,y,z,p,q,r,s и t. Пусть такое дифференціальное уравненіе получилось отъ умноженія уравненій (2) на α,β,γ, (7^{bis}) на λ, (4^{bis}) на μ и (8^{bis}) на ρ. Вотъ это уравненіе:

$$\left(\lambda\frac{\Delta f}{\Delta y}+\mu\frac{\Delta f}{\Delta x}-\alpha p-\beta r-\gamma s-\rho\frac{S\mp\sqrt{S^2-4RT}}{2}\right)dx+$$

$$(\rho R-\alpha q-\beta s-\gamma t)dy+\alpha dz+\beta dp+\gamma dq+\mu R dr+$$

$$+\left(\lambda R+\frac{S\mp\sqrt{S^2-4RT}}{2}\mu\right)ds+\lambda\frac{S\mp\sqrt{S^2-4RT}}{2}dt=0\ldots(10).$$

Я для сокращенія буду употреблять слѣдующія обозначенія:

$$\frac{\Delta f}{\Delta x}=X+Zp+Pr+Qs,\ \frac{\Delta f}{\Delta y}=Y+Zq+Ps+Qt,$$

$$\omega_1=\frac{S\pm\sqrt{S^2-4RT}}{2R},\quad \omega_2=\frac{S\mp\sqrt{S^2-4RT}}{2R}\ldots\ldots(9).$$

Если первая часть уравненія (10)—полный дифференціалъ V, то

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dV}{dx}=\lambda\frac{\Delta f}{\Delta y}+\mu\frac{\Delta f}{\Delta x}-\alpha p-\beta r-\gamma s-\rho R\omega_1,\\ &\frac{dV}{dy}=\rho R-\alpha q-\beta s-\gamma t,\ \frac{dV}{dz}=\alpha,\ \frac{dV}{dp}=\beta,\ \frac{dV}{dq}=\gamma,\\ &\frac{dV}{dr}=\mu R,\ \frac{dV}{ds}=\lambda R+\mu R\omega_2,\ \frac{dV}{dt}=\lambda R\omega_2 \end{aligned}\right\}\ldots\ldots(13).$$

По исключеніи изъ всѣхъ этихъ уравненій $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu$ и ρ, я получаю

$$T\frac{dV}{ds}=R\omega_1\frac{dV}{dt}+\omega_2 T\frac{dV}{dr}\ldots\ldots(11),$$

или, такъ какъ $R\omega_1\omega_2=T$,

$$\frac{dV}{ds}=\omega_2\frac{dV}{dr}+\frac{1}{\omega_2}\frac{dV}{dt}\ldots\ldots(11^{bis}).$$

Кромѣ того я получаю другое уравненіе:

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}+\omega_1\frac{\Delta V}{\Delta y}-\frac{1}{R}\frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{dV}{dr}-\frac{1}{R\omega_2}\frac{\Delta f}{\Delta y}\frac{dV}{dt}=0\ldots\ldots(12).$$

Такъ какъ ω_1 и ω_2 имѣютъ каждая два значенія, то системъ (11)—(12) будутъ двѣ: одна система получится, если брать верхніе знаки у радикаловъ, другая, если нижніе. Для того, чтобы изъ уравненій (7^{bis}), (8^{bis}), (4^{bis}) и (2) можно было составить такое уравненіе, которое интегрировалось бы какъ уравненіе съ полными дифференціалами, необходимо, чтобы уравненія (11) и (12) имѣли общій интегралъ. Но этого также и достаточно, такъ какъ, если V—интегралъ (11) и (12) уравненій, то изъ уравненій (13) вообще можно будетъ опредѣлить $\alpha,\beta,\gamma,\lambda,\mu,\rho$, и онѣ опредѣлятся такъ, что по умноженіи на нихъ уравненій (7^{bis}), (8^{bis}), (4^{bis}) и (2) получимъ полный дифференціалъ.

Теорема 1. Одинъ изъ интеграловъ системы (11)—(12)—данное уравненіе. Доказательство этой теоремы такъ просто, что я позволю себѣ его не приводить.

Слѣдствіе отсюда то, что каждая изъ системъ (11)—(12) можетъ имѣть только по одному интегралу, содержащему вторыя производныя r,s и t и отличающемуся отъ даннаго уравненія. Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (11) можетъ имѣть только два частныхъ интеграла, вполнѣ отличныхъ по величинамъ r,s и t.

Такъ какъ уравненіе (11) не содержитъ производныхъ V относительно x,y,z,p и q; то, если можемъ найти такое выраженіе V, которое не содержало бы r,s и t и удовлетворяло бы (12) независимо отъ значеній, придаваемыхъ r,s и t,—такое выраженіе есть интегралъ, общій уравненіямъ (11) и (12).

Теорема 2. Если данное уравненіе содержитъ всѣ три производныя r,s и t, и если система (11)—(12) имѣетъ интегралъ, отличающійся отъ даннаго уравненія и содержащій или всѣ, или нѣкоторыя изъ трехъ величинъ r,s и t; то, приравнявъ этотъ интегралъ постоянному и составивъ для этого новаго уравненія системы (11)—(12), я получу такія системы, одной изъ которыхъ удовлетворяетъ данное уравненіе.

Такія два уравненія, изъ которыхъ каждое обладаетъ свойствомъ быть интеграломъ одной изъ системъ, соотвѣтствующихъ другому уравненію, я для краткости буду называть *дополняющимися.*

Доказательство. Пусть данное уравненіе—$f(x,y,z,p,q,r,s,t)=0$, и пусть $F(x,y,z,p,q,r,s,t)$ удовлетворяетъ системѣ (11^{bis})—(12). Составляю системы, аналогичныя (11^{bis})—(12) для уравненія $F(x,y,z,p,q,r,s,t)=\alpha$. Назову для этого $\frac{dF}{dr}=A$, $\frac{dF}{ds}=B$, $\frac{dF}{dt}=C$; эти величины A,B и C удовлетворяютъ нѣкоторымъ условіямъ вслѣдствіе того, что F удовлетворяетъ (11^{bis}) и (12). Прежде всего изъ уравненія (11^{bis}) слѣдуетъ

$$B=\omega_2 A+\frac{C}{\omega_2}\ldots\ldots(17).$$

Опредѣлю ω'_1 и ω'_2, значенія ω_1 и ω_2 для $F=\alpha$. Для этого надо разрѣшить уравненіе

$$Au^2-\left(\omega_2 A+\frac{C}{\omega_2}\right)u+C=0,$$

откуда

$$u=\frac{1}{2}\left(\omega_2+\frac{C}{A\omega_2}\right)\pm\frac{1}{2}\sqrt{\left(\omega_2+\frac{C}{A\omega_2}\right)^2-\frac{4C}{A}}=$$

$$=\frac{1}{2}\left(\omega_2+\frac{C}{A\omega_2}\right)\pm\frac{1}{2}\left(\omega_2-\frac{C}{A\omega_2}\right).$$

Слѣдовательно $\omega'_1=\omega_2$, $\omega'_2=\dfrac{C}{A\omega_2}$.

Разсмотрю систему, для которой коэффиціентъ передъ $\dfrac{\triangle V}{\triangle y}$ есть $\dfrac{C}{A\omega_2}$. Эта система будетъ

$$\frac{dV}{ds}=\omega_2\frac{dV}{dr}+\frac{1}{\omega_2}\frac{dV}{dt}\,\ldots\ldots(14)$$

и

$$\frac{\triangle V}{\triangle x}+\frac{C}{A\omega_2}\frac{\triangle V}{\triangle y}-\frac{1}{A}\frac{\triangle F}{\triangle x}\frac{dV}{dr}-\frac{1}{A\omega_2}\frac{\triangle F}{\triangle y}\frac{dV}{dt}=0\ldots\ldots(15).$$

Уравненіе (14) совпадаетъ съ однимъ изъ (11^{bis}). На основаніи же того, что (12) удовлетворяется при $V=F$, имѣю тождество:

$$\frac{\triangle F}{\triangle x}+\omega_1\frac{\triangle F}{\triangle y}-\frac{1}{R}\frac{\triangle f}{\triangle x}\frac{dF}{dr}-\frac{1}{R\omega_2}\frac{\triangle f}{\triangle y}\frac{dF}{dt}=0$$

или

$$\frac{\triangle f}{\triangle x}+\frac{C}{A\omega_2}\frac{\triangle f}{\triangle y}-\frac{R}{A}\frac{\triangle F}{\triangle x}-\frac{R\omega_1}{A}\frac{\triangle F}{\triangle y}=0\ldots\ldots(16).$$

Замѣтивъ же, что

$$\frac{R\omega_1}{A}=\frac{T}{A\omega_2},$$

я вижу, что тождество (16) получается изъ (15) подстановкою вмѣсто V функціи $f(x,y,z,q,p,r,s,t)$, ч. и т. д.

Относительно производныхъ дополняющихся уравненій можно вывести рядъ формулъ. Во 1) изъ уравненія (17) и уравненія $S=\omega_2 R+\dfrac{T}{\omega_2}$ я могу опредѣлить ω_2 и $\dfrac{1}{\omega_2}$:

$$\omega_2=\frac{BT-SC}{AT-RC}=\frac{c}{b}\text{ и }\frac{1}{\omega_2}=\frac{SA-BR}{AT-RC}=\frac{a}{b}.$$

Отсюда заключаю, что

$$ac-b^2=0\ldots\ldots(18).$$

Во 2) уравненіе (16) можно представить въ такомъ видѣ:

$$A\frac{\triangle f}{\triangle x}-R\frac{\triangle F}{\triangle x}+\frac{a}{b}\left(C\frac{\triangle f}{\triangle y}-T\frac{\triangle F}{\triangle y}\right)=0\ldots\ldots(19).$$

Называю опредѣлители: составленный изъ R, A, $\dfrac{\triangle f}{\triangle x}$ и $\dfrac{\triangle F}{\triangle x}$ черезъ $\mathfrak{X}_r$, составленный изъ S, B, $\dfrac{\triangle f}{\triangle x}$ и $\dfrac{\triangle F}{\triangle x}$ черезъ $\mathfrak{X}_s$, опредѣлитель изъ T, C, $\dfrac{\triangle f}{\triangle x}$ и $\dfrac{\triangle F}{\triangle x}$ черезъ $\mathfrak{X}_t$. Такіе же опредѣлители, въ которыхъ $\triangle x$ замѣненъ черезъ $\triangle y$ называю $\mathfrak{U}_r$, $\mathfrak{U}_s$ и $\mathfrak{U}_t$. Я могу замѣнить (19) слѣдующимъ равенствомъ:

$$\mathfrak{X}_r:\mathfrak{U}_t=-a:b\ldots\ldots(19^{bis}).$$

Въ 3) замѣтивъ, что

$$c\mathfrak{X}_r-b\mathfrak{X}_s+a\mathfrak{X}_t=\frac{\triangle F}{\triangle x}\left(c\frac{df}{dr}-b\frac{df}{ds}+a\frac{df}{dt}\right)-$$

$$-\frac{\triangle f}{\triangle x}\left(c\frac{dF}{dr}-b\frac{dF}{ds}+a\frac{dF}{dt}\right)=0$$

(потому что выраженія, стоящія въ скобкахъ, суть опредѣлители съ двумя одинаковыми строками) и замѣтивъ также, что $c\mathfrak{U}_r-b\mathfrak{U}_s+a\mathfrak{U}_t=0$, я могу вывести два еще тождества на основаніи (18) и (19).

a) Выражая $\mathfrak{X}_r$ въ (19^{bis}) съ помощію $\mathfrak{X}_s$ и $\mathfrak{X}_t$, имѣю

$$b\mathfrak{X}_s-a\mathfrak{X}_t+b\mathfrak{U}_t=0\text{ или }(\mathfrak{X}_s+\mathfrak{U}_t):\mathfrak{X}_t=a:b\ldots\ldots(20);$$

b) замѣняя $\mathfrak{U}_t$ въ томъ же уравненіи (19^{bis}), получаю

$$b\mathfrak{X}_r+b\mathfrak{U}_s-c\mathfrak{U}_r=0\text{ или }(\mathfrak{X}_r+\mathfrak{U}_s):\mathfrak{U}_r=c:b=b:a\ldots\ldots(21).$$

Всѣ эти формулы (19), (18), (20) и (21) упростятъ мои дальнѣйшія вычисленія, которыя будутъ состоять въ отысканіи третьяго уравненія, содержащаго r,s и t. Назову это третье уравненіе черезъ $K=\beta$, гдѣ β произвольное постоянное. Должно найти такое уравненіе $K=\beta$, чтобы, опредѣливъ изъ уравненій:

$$f=0,\ F=\alpha \text{ и } K=\beta \ldots\ldots (22)$$

величины r,s и t, а послѣ того опредѣливъ p,q и z изъ уравненій $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$, $dz=pdx+qdy$, я имѣлъ

$$\frac{dr}{dy}=\frac{ds}{dx},\ \frac{ds}{dy}=\frac{dt}{dx}.$$

Поэтому для вывода величины K я продифференцирую всѣ три уравненія (22) и буду замѣнять вездѣ $\frac{dr}{dy}$ и $\frac{ds}{dy}$ черезъ $\frac{ds}{dx}$ и $\frac{dt}{dx}$. Тогда я имѣю уравненія, которыя отмѣчаю нумеромъ (23):

$$\frac{\triangle f}{\triangle x}+\frac{df}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{df}{ds}\frac{ds}{dx}+\frac{df}{dt}\frac{dt}{dx}=0=\frac{\triangle f}{\triangle y}+\frac{df}{dr}\frac{ds}{dx}+\frac{df}{ds}\frac{dt}{dx}+\frac{df}{dt}\frac{dt}{dy},$$

$$\frac{\triangle F}{dx}+\frac{dF}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dx}+\frac{dF}{dt}\frac{dt}{dx}=0=\frac{\triangle F}{\triangle y}+\frac{dF}{dr}\frac{ds}{dx}+\frac{dF}{ds}\frac{dt}{dx}+\frac{dF}{dt}\frac{dt}{dy},$$

$$\frac{\triangle K}{\triangle x}+\frac{dK}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dK ds}{ds\, dx}+\frac{dK}{dt}\frac{dt}{dx}=0=\frac{\triangle K}{\triangle y}+\frac{dK}{dr}\frac{ds}{dx}+\frac{dK}{ds}\frac{dt}{dx}+\frac{dK}{dt}\frac{dt}{dy}.$$

Изъ этихъ 6 уравненій я исключу $\frac{dr}{dx}, \frac{ds}{dx}, \frac{dt}{dx}$ и $\frac{dt}{dy}$ и получу, понятно, два уравненія. Этимъ двумъ уравненіямъ K должно непремѣнно удовлетворять для того, чтобы возможно было исполненіе тѣхъ требованій, которымъ я желаю подчинить K. Для исключенія опредѣляю $\frac{ds}{dx}$ и $\frac{dt}{dx}$ изъ трехъ правыхъ, а потомъ тѣ же величины изъ трехъ лѣвыхъ. Буду для краткости обозначать опредѣлитель, составленный изъ производныхъ f, F и K по r,s и t черезъ $\triangle$; опредѣлители, получаемые изъ $\triangle$ замѣною строки производныхъ по r черезъ $\frac{\triangle f}{\triangle x}, \frac{\triangle F}{\triangle x}$ и $\frac{\triangle K}{\triangle x}$, называю ξ_r, опредѣлители же, которые получаются изъ $\triangle$ такою же замѣною строчекъ производныхъ по s и t, называю ξ_s и ξ_t; подобнымъ же образомъ опредѣлители, получаемые замѣною строчекъ $\triangle$ строчкою $\frac{\triangle f}{\triangle y}, \frac{\triangle F}{\triangle y}$ и $\frac{\triangle K}{\triangle y}$, буду называть η_r, η_s и η_t. Тогда получаю изъ (23) слѣдующія четыре уравненія:

$$\triangle\frac{ds}{dx}+\xi_s=0,\ \triangle\frac{dt}{dx}+\xi_t=0,\ \triangle\frac{ds}{dx}+\eta_r=0 \text{ и } \triangle\frac{dt}{dx}+\eta_s=0\ (24),$$

изъ которыхъ получаю два искомыхъ уравненія:

$$\eta_r=\xi_s\ldots\ldots(25) \text{ и } \eta_s=\xi_t\ldots\ldots(26).$$

Расположивъ же эти уравненія по производнымъ K, получаю

$$\mathfrak{X}_t\frac{dK}{dr}+\mathfrak{U}_t\frac{dK}{ds}-\left(\mathfrak{X}_r+\mathfrak{U}_s\right)\frac{dK}{dt}-b\frac{\triangle K}{\triangle x}-c\frac{\triangle K}{\triangle y}=0\ldots(25^{bis}),$$

$$-\left(\mathfrak{X}_s+\mathfrak{U}_t\right)\frac{dK}{dr}+\mathfrak{X}_r\frac{dK}{ds}+\mathfrak{U}_r\frac{dK}{dt}+a\frac{\triangle K}{\triangle x}+b\frac{\triangle K}{\triangle y}=0\ldots(26^{bis}).$$

Вспоминая теперь формулы (19^{bis}), (20), (21) и (22), я вижу, что оба уравненія (25^{bis}) и (26^{bis}) тождественны другъ другу. Слѣдовательно для опредѣленія K я могу взять одно изъ этихъ уравненій, напр. (25^{bis}). Дальнѣйшее изложеніе докажетъ, что для удовлетворенія тѣмъ требованіямъ, которыя изложены на страницѣ 59, не только необходимо удовлетворить уравненію (25^{bis}), но достаточно найти такое K, которое бы было частнымъ интеграломъ (25^{bis}) и содержало нѣкоторыя изъ производныхъ r,s и t. Слѣдовательно K будетъ одинъ изъ интеграловъ системы обыкновенныхъ дифференціальныхъ уравненій:

$$dr:\ \mathfrak{X}_t=ds:\ \mathfrak{U}_t=dt:-(\mathfrak{X}_r+\mathfrak{U}_s)=-dp:\ (br+cs)=-dq:\ (bs+ct)$$
$$=-dz:\ (br+cq)=-dx:\ b=-dy:\ c.\ldots\ldots(27).$$

Такъ какъ уравненія (25) и (26) состоятъ изъ опредѣлителей, то два изъ интеграловъ уравненій (27) будутъ f и F, ибо, подставляя эти функціи вмѣсто K въ уравненія (25) и (26), я дѣлаю двѣ строчки въ каждомъ изъ опредѣлителей η_r, ξ_s, η_s и ξ_t одинаковыми. Но уравненія (27) имѣютъ еще третій интегралъ, содержащій r,s и t, и этотъ третій интегралъ и будетъ K.

Уравненіямъ (27) можно придать иную форму. K опредѣляется съ тою цѣлью, чтобы можно было, пользуясь имъ, опредѣлить надлежащимъ образомъ r,s и t въ функціяхъ p,q,z,x и y; поэтому задача въ сущности состоитъ въ нахожденіи одной изъ производныхъ r,s, или t. Предположу, что два дополняющіяся уравненія разрѣшены относительно r и t. Пусть въ такомъ случаѣ $r=M$

и $t = N$. Подставивъ эти величины r и t въ (27), я могу откинуть 1-ое и 3-е отношенія какъ излишнія. Тогда во 1) $c:b = \omega_2$; во 2) при подстановкѣ M и N въ данныя уравненія я получаю тождество относительно каждой изъ буквъ x,y,z,p,q,r,s и t; слѣдовательно я могу написать

$$\frac{\Delta f}{\Delta y} + \frac{df}{dr}\frac{\Delta M}{\Delta y} + \frac{df}{dt}\frac{\Delta N}{\Delta y} = 0,\quad \frac{\Delta F}{\Delta y} + \frac{dF}{dr}\frac{\Delta M}{\Delta y} + \frac{dF}{dt}\frac{\Delta N}{\Delta y} = 0.$$

Изъ этихъ тождествъ я получаю: $\mathfrak{U}_t = -b\frac{\Delta M}{\Delta y}$. Такимъ образомъ уравненія (27) замѣняются слѣдующими:

$$ds\colon \frac{\Delta M}{\Delta y} = dp\colon (M + \omega_2 s) = dq\colon (s + \omega_2 N) =$$

$$dz\colon (p + \omega_2 q) = dy\colon \omega_2 = dx \ldots\ldots (28).$$

Положимъ теперь, что K найденъ. Тогда, чтобы окончить рѣшеніе задачи и найти z какъ функцію x, y и постоянныхъ, интегрируютъ уравненія: $dp = rdx + sdy$, $dq = sdx + tdy$, $dz = pdx + qdy$ (57), гдѣ r,s и t опредѣлены изъ даннаго уравненія и изъ двухъ уравненій $F = \alpha$ и $K = \beta$.

Теорема 3. Уравненія (57) интегрируются, если r,s и t опредѣлены изъ даннаго уравненія и изъ двухъ уравненій $F = \alpha$ и $K = \beta$, гдѣ F и K двѣ функціи, удовлетворяющія уравненіямъ (25) и (26).

Доказательство. Подъ словомъ «интегрируются» я подразумѣваю то обстоятельство, что изъ этихъ трехъ уравненій (57) всегда можно составить такія три новыхъ, въ которыхъ первая часть была бы полнымъ дифференціаломъ, а вторая нуль. По теоріи Майера существованіе такихъ трехъ уравненій обусловливается тѣмъ, что коэффиціентъ при dx въ каждомъ изъ этихъ уравненій, будучи подставленъ вмѣсто ω въ выраженіе

$$\frac{d\omega}{dy} + q\frac{d\omega}{dz} + s\frac{d\omega}{dp} + t\frac{d\omega}{dq} = \frac{\Delta\omega}{\Delta y},$$

давалъ бы тотъ же результатъ, что коэффиціентъ при dy изъ того же уравненія, когда онъ подставленъ въ выраженіе

$$\frac{d\omega}{dx} + p\frac{d\omega}{dz} + r\frac{d\omega}{dp} + s\frac{d\omega}{dq} = \frac{\Delta\omega}{\Delta x}.$$

Примѣню эту теорему къ разсматриваемымъ уравненіямъ. 1) коэффиціенты p и q при подстановкѣ дадутъ s и s. 2) Если я въ уравненіяхъ $f = 0$, $F = \alpha$ и $K = \beta$ замѣню r,s и t ихъ величинами, то я получу тождества; а слѣдовательно я имѣю тождественно

$$\frac{\Delta f}{\Delta x} + \frac{df}{dr}\frac{\Delta r}{\Delta x} + \frac{df}{ds}\frac{\Delta s}{\Delta x} + \frac{df}{dt}\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0 \ldots\ldots (55),$$

$$\frac{\Delta f}{\Delta y} + \frac{df}{dr}\frac{\Delta r}{\Delta y} + \frac{df}{ds}\frac{\Delta s}{\Delta y} + \frac{df}{dt}\frac{\Delta t}{\Delta y} = 0 \ldots\ldots (56)$$

и четыре подобныя равенства, гдѣ f замѣненъ чрезъ F и K. Исключая изъ тождествъ вида (56) $\frac{\Delta t}{\Delta y}$, я имѣю два тождества:

$$\frac{\Delta F}{\Delta y}\frac{df}{dt} - \frac{\Delta f}{\Delta y}\frac{dF}{dt} + \left(\frac{dF}{dr}\frac{df}{dt} - \frac{dF}{dt}\frac{df}{dr}\right)\frac{\Delta r}{\Delta y} +$$

$$+ \left(\frac{dF}{ds}\frac{df}{dt} - \frac{dF}{dt}\frac{df}{ds}\right)\frac{\Delta s}{\Delta y} = 0 \ldots\ldots (58)$$

и подобное же уравненіе, въ которомъ вмѣсто F стоитъ K.

Но такъ какъ F и K удовлетворяютъ уравненіямъ (25) и (26), то три лѣвыя уравненія (23) даютъ для $\frac{ds}{dx}$ и $\frac{dt}{dx}$ значенія, тождественныя значеніямъ, даваемымъ тремя правыми (23), или значеніямъ, даваемымъ тремя (55). Поэтому въ правыхъ (23) могу $\frac{ds}{dx}$ и $\frac{dt}{dx}$ замѣнить $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta t}{\Delta x}$; тогда, исключая $\frac{dt}{dy}$, я получу два тождества:

$$\frac{\Delta F}{\Delta y}\frac{df}{dt} - \frac{\Delta f}{\Delta y}\frac{dF}{dt} + \left(\frac{dF}{dr}\frac{df}{dt} - \frac{dF}{dt}\frac{df}{dr}\right)\frac{\Delta s}{\Delta x} +$$

$$+ \left(\frac{dF}{ds}\frac{df}{dt} - \frac{dF}{dt}\frac{df}{ds}\right)\frac{\Delta t}{\Delta x} = 0 \ldots\ldots (59)$$

и такое же, гдѣ F замѣненъ чрезъ K. Вычитая уравненія (59) изъ (58), первое изъ перваго, второе изъ втораго, имѣю

$$\left(\frac{dF}{dr}\frac{df}{dt}-\frac{dF}{dt}\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{\triangle r}{\triangle y}-\frac{\triangle s}{\triangle x}\right)+$$

$$+\left(\frac{dF}{ds}\frac{df}{dt}-\frac{dF}{dt}\frac{df}{ds}\right)\left(\frac{\triangle s}{\triangle y}-\frac{\triangle t}{\triangle x}\right)=0\ldots\ldots(60),$$

$$\left(\frac{dK}{dr}\frac{df}{dt}-\frac{dK}{dt}\frac{df}{dr}\right)\left(\frac{\triangle r}{\triangle y}-\frac{\triangle s}{\triangle x}\right)+$$

$$+\left(\frac{dK}{ds}\frac{df}{dt}-\frac{dK}{dt}\frac{df}{ds}\right)\left(\frac{\triangle s}{\triangle y}-\frac{\triangle t}{\triangle x}\right)=0\ldots\ldots(61).$$

Изъ уравненій (60) и (61) вообще слѣдуетъ

$$\frac{\triangle r}{\triangle y}-\frac{\triangle s}{\triangle x}=0 \text{ и } \frac{\triangle s}{\triangle y}-\frac{\triangle t}{\triangle x}=0\ldots\ldots(62),$$

ч. и т. д.

Примѣчаніе 1. Предъидущее доказательство вѣрно до тѣхъ поръ, пока изъ четырехъ коэффиціентовъ при

$$\frac{\triangle r}{\triangle y}-\frac{\triangle s}{\triangle x} \text{ и } \frac{\triangle s}{\triangle y}-\frac{\triangle t}{\triangle x}$$

въ уравненіяхъ (60) и (61) два, стоящіе предъ различными изъ этихъ выраженій въ различныхъ уравненіяхъ, не равны нулю.

Случай, гдѣ всѣ четыре коэффиціента равны нулю, не возможенъ, такъ какъ это означало бы, что $\frac{\triangle r}{\triangle y}$, $\frac{\triangle s}{\triangle x}$ и $\frac{\triangle t}{\triangle x}$ не могутъ быть опредѣлены изъ трехъ уравненій (55), или что r, s и t не могутъ быть опредѣлены изъ трехъ уравненій $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$.

Но можетъ случиться, что или три коэффиціента равны нулю, или два при одномъ и томъ же изъ выраженій

$$\frac{\triangle r}{\triangle y}-\frac{\triangle s}{\triangle x}, \text{ или } \frac{\triangle s}{\triangle y}-\frac{\triangle t}{\triangle x}.$$

Въ такомъ случаѣ уравненія (60) и (61) докажутъ только, что одно изъ уравненій (62) вѣрно. Но и въ такомъ случаѣ легко до-

казать, что и другое равенство (62) имѣетъ мѣсто.

Въ самомъ дѣлѣ въ числѣ девяти частныхъ опредѣлителей, составленныхъ изъ

$$\frac{df}{dr},\ \frac{df}{ds},\ \frac{df}{dt},\ \frac{dF}{dr},\ \frac{dF}{ds},\ \frac{dF}{dt},\ \frac{dK}{dr},\ \frac{dK}{dr} \text{ и } \frac{dK}{dt},$$

три не равны нулю; иначе r, s и t не могли бы опредѣляться изъ уравненій $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$ (если бы не было трехъ частныхъ опредѣлителей, не равныхъ нулю и составленныхъ каждый изъ различныхъ функцій, то это значило бы, что всѣ коэффиціенты при $\frac{\triangle r}{\triangle x}$, $\frac{\triangle s}{\triangle x}$ и $\frac{\triangle t}{\triangle x}$ въ двухъ изъ уравненій (55) пропорціональны между собою). Изъ этихъ трехъ опредѣлителей первый составленъ изъ производныхъ по r и s, второй по s и t, а третій изъ производныхъ по r и t. Составлю теперь тождество, подобное (58), исключая $\frac{\triangle t}{\triangle y}$ между вторымъ и третьимъ изъ уравненій (56) (т. е. между уравненіями, содержащими функціи K и F), и подобнымъ же образомъ составлю другое тождество, подобное (59). Вычту тождество (59) изъ (58); тогда я получу такого рода тождество, въ которомъ коэффиціентъ при $\frac{\triangle r}{\triangle y}-\frac{\triangle s}{\triangle x}$ не равенъ нулю, если онъ равенъ нулю въ тождествахъ (60) и (61).

Примѣчаніе 2. Предъидущее доказательство предполагаетъ только, что F и K удовлетворяютъ уравненіямъ (25) и (26), и что изъ $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$ можно опредѣлить r, s и t; поэтому теорема будетъ вѣрна и въ томъ случаѣ, когда K и F получатся пріемомъ, изложеннымъ въ 3-й главѣ.

Для интеграціи уравненій (57) можно поступать различно. Въ наиболѣе простыхъ случаяхъ можно будетъ прямо отыскивать квадратуру каждаго изъ трехъ уравненій. Въ болѣе сложныхъ случаяхъ придется составлять посредствомъ сложенія составныя изъ этихъ трехъ уравненія. Въ этихъ же болѣе сложныхъ случаяхъ можно прибѣгать къ двумъ пріемамъ: 1) къ методу Майера для интеграціи совмѣстныхъ уравненій, 2) интегрировать отдѣльно каждое изъ уравненій:

$$\frac{d\omega}{dx}+p\frac{d\omega}{dz}+r\frac{d\omega}{dp}+s\frac{d\omega}{dq}=0 \text{ и } \frac{d\omega}{dy}+q\frac{d\omega}{dz}+s\frac{d\omega}{dp}+t\frac{d\omega}{dq}=0;$$

для каждаго изъ этихъ уравненій получится интегральная система изъ четырехъ интеграловъ, и изъ этихъ двухъ интегральныхъ системъ всегда можно составить третью, состоящую изъ трехъ интеграловъ и удовлетворяющую обоимъ линейнымъ уравненіямъ.

Какъ бы не интегрировались уравненія (57), всегда получится интегральная система, содержащая пять произвольныхъ постоянныхъ: два отъ прежнихъ интеграцій и три отъ интеграціи уравненій (57). Исключеніе изъ этихъ трехъ интеграловъ p и q дасть полный интегралъ даннаго уравненія. Что получится интегралъ, это легко доказать: дѣйствительно уравненія (57) указываютъ, что p, q, r, s и t суть именно производныя z по x и по y; а такъ какъ r, s и t опредѣлялись изъ $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$, то $f=0$ удовлетворится величинами p, q, r, s и t, выведенными изъ выраженія z въ функціи x, y и пяти постоянныхъ.

Примѣръ 1.

$$(r-t)^2-(p+q)(r-2s+t)=0.$$

Изъ двухъ системъ (11)—(12) только одна дасть одинъ интегралъ; это система:

$$\frac{dV}{ds}+\frac{dV}{dt}+\frac{dV}{dr}=0,$$

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}+\frac{p+q+2(r-t)}{2(r-t)-p-q}\frac{\Delta V}{\Delta y}-\frac{(r+s)(r-2s+t)}{p+q-2(r-t)}\frac{dV}{dr}+$$

$$+\frac{(s+t)(r-2s+t)}{p+q-2(r-t)}\frac{dV}{dt}=0;$$

интегралъ этотъ

$$(r-2s+t)\,e^{-\frac{x+y}{4}}.$$

Приравнивая этотъ интегралъ α^2, получаю дополнительное уравненіе:

$$r-2s+t=\alpha^2 e^{\frac{x+y}{4}}.$$

Для нахожденія третьяго интеграла, опредѣляющаго r, s, и t, составляю изъ (27) слѣдующее уравненіе:

$$(dr+2ds+dt):(\mathfrak{X}_t+2\mathfrak{U}_t-\mathfrak{X}_r-\mathfrak{U}_s)=$$

$$-(dp+dq):\{b(r+s)+c(t+s)\}.$$

Послѣ нѣкоторыхъ вычисленій это уравненіе обращается въ слѣдующее:

$$(dr+2ds+dt):\{2(r+2s+t)+p+q\}=(dp+dq):4(p+q);$$

откуда имѣю

$$\frac{r+2s+t}{\sqrt{p+q}}-\frac{1}{2}\sqrt{p+q}=-\frac{1}{2}\gamma.$$

Слѣдовательно

$$r+2s+t=\frac{1}{2}(p+q)-\frac{1}{2}\gamma\sqrt{p+q};\quad r-2s+t=\alpha^2 e^{\frac{x+y}{4}};$$

$$r-t=\alpha e^{\frac{x+y}{8}}\sqrt{p+q}.$$

Для дальнѣйшей интеграціи составлю уравненіе:

$$d(p+q)=(r+s)dx+(s+t)dy=\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(p+q)-\frac{1}{2}\gamma\sqrt{p+q}+\right.$$

$$\left.+\alpha e^{\frac{x+y}{8}}\sqrt{p+q}\right\}dx+\frac{1}{2}\left\{\frac{1}{2}(p+q)-\frac{1}{2}\gamma\sqrt{p+q}-\alpha e^{\frac{x+y}{8}}\sqrt{p+q}\right\}dy;$$

$$e^{-\frac{x+y}{8}}\sqrt{p+q}=\gamma e^{-\frac{x+y}{8}}+\beta+\frac{1}{4}\alpha(x-y),$$

$$\text{или } p+q=\left(\gamma+\beta e^{\frac{x+y}{8}}+\frac{1}{4}\alpha(x-y)e^{\frac{x+y}{8}}\right)^2.$$

Второе уравненіе для опредѣленія p и q я составляю такъ:

$$dp-dq=(r-s)dx+(s-t)dy=$$

$$=\frac{1}{2}\left\{\alpha^2 e^{\frac{x+y}{4}}+\alpha e^{\frac{x+y}{8}}\sqrt{p+q}\right\}dx+\frac{1}{2}\left\{\alpha e^{\frac{x+y}{8}}\sqrt{p+q}-\alpha^2 e^{\frac{x+y}{4}}\right\}dy;$$

интегрируя, получаю

$$p-q=\delta+\frac{1}{2}\alpha^2(x-y)e^{\frac{x+y}{4}}+4\alpha\gamma e^{\frac{x+y}{8}}+2\alpha\beta e^{\frac{x+y}{4}}.$$

Наконецъ z опредѣляется изъ уравненія

$$dz=pdx+qdy;$$

эта интеграція даетъ

$$z=\omega+\frac{1}{2}\delta(x-y)+\frac{1}{2}\gamma^2(x+y)+8\gamma\beta e^{\frac{x+y}{8}}+2\beta^2 e^{\frac{x+y}{4}}+$$

$$+\alpha(x-y)e^{\frac{x+y}{8}}\left(2\gamma+\beta e^{\frac{x+y}{8}}\right)+\frac{1}{8}\alpha^2(x-y)^2e^{\frac{x+y}{8}}\dots\dots (34).$$

Возможенъ еще иной способъ нахожденія z въ функціи x и y, когда уже получены три уравненія ($f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$), опредѣляющія r, s и t; этотъ способъ состоитъ въ полной интеграціи уравненій (27), или (28). Для того чтобы это понять, надо вспомнить слѣдующее: во 1) r, s и t, опредѣляемыя изъ трехъ уравненій $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$, таковы, что удовлетворяютъ двумъ условіямъ (62), каковы ни были бы значенія, придаваемыя p, q и z; во 2), такъ какъ r, s и t опредѣлились и изъ $f=0$, то онѣ удовлетворяютъ данному уравненію.

Положимъ, что интегрируемъ вполнѣ уравненія (27). Тогда y, z, p, q, r, s и t выражаются въ функціяхъ x и шести постоянныхъ, и удовлетворяютъ данному уравненію (если постоянныя, получаемыя при интеграціи, удовлетворяютъ уравненію $f_0=0=f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)$), потому что f есть одинъ изъ интеграловъ уравненій (27). Кромѣ того имѣю

$$\frac{dz}{dx}=p+q\frac{dy}{dx},\ \frac{dp}{dx}=r+s\frac{dy}{dx},\ \frac{dq}{dx}=s+t\frac{dy}{dx}\dots\dots\dots (63).$$

Постоянныя y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0 и t_0 можно принимать за функціи u, перемѣннаго независимаго отъ x, и все таки данное уравненіе удовлетворится, если функціи эти удовлетворяютъ условію $f_0=0$. Болѣе того: и (62) будутъ по прежнему удовлетворяться,

если функціи, замѣняющія постоянныя, удовлетворяютъ двумъ условіямъ $f_0=0$ и $F_0=\alpha$ (здѣсь α постоянное), и если u опредѣляется какъ функція x и y изъ интеграловъ уравненій (27). Въ самомъ дѣлѣ при такихъ условіяхъ (25) и (26) остаются попрежнему тождественными, и $K=\beta$ будетъ по прежнему интеграломъ уравненія (25), хотя β уже будетъ функціею x и y; а этого достаточно, чтобы (62) имѣли мѣсто.

Зададимся же вопросомъ: какъ выбрать эти функціи y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0 и t_0 такъ, чтобы не только (63) удовлетворялись, но и слѣдующія уравненія:

$$\frac{dz}{du}=q\frac{dy}{du},\ \frac{dp}{du}=s\frac{dy}{du}\text{ и }\frac{dq}{du}=t\frac{dy}{du}\dots\dots\dots (64)?$$

Въ такомъ случаѣ исключеніе u дастъ намъ такія z, p, q, r, s, t, что послѣднія пять будутъ производными первой.

Положимъ, что при подстановкѣ величинъ y, z, p, q, s, t, опредѣленныхъ полною интеграціею уравненій (27), въ уравненія (64), эти уравненія (64) не удовлетворяются, и положимъ, что

$$\frac{dz}{du}=q\frac{dy}{du}+L,\ \frac{dp}{du}=s\frac{dy}{du}+M,\ \frac{dq}{du}=t\frac{dy}{du}+N\dots (65),$$

гдѣ L, M и N — нѣкоторыя функціи x и u. Дифференцируя равенство (63) по u, а тождество (65) по x, я легко вывожу слѣдующія три уравненія:

$$\frac{dp}{du}+\frac{dq}{du}\frac{dy}{dx}=\frac{dq}{dx}\frac{dy}{du}+\frac{dL}{dx},\ \frac{dr}{du}+\frac{ds}{du}\frac{dy}{dx}=\frac{ds}{dx}\frac{dy}{du}+\frac{dM}{dx},$$

$$\frac{ds}{du}+\frac{dt}{du}\frac{dy}{dx}=\frac{dt}{dx}\frac{dy}{du}+\frac{dN}{dx}\dots\dots\dots (66).$$

Первое изъ этихъ равенствъ на основаніи (63) и (65) обращается въ слѣдующее:

$$\frac{dL}{dx}=M+N\frac{dy}{dx}\dots\dots\dots\dots (67).$$

Для уничтоженія же производныхъ по u въ двухъ остальныхъ посмотрю, какъ выражаются эти производныя, если r, s и t опредѣлены изъ трехъ уравненій $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$ (K здѣсь вообще какой бы то ни было интегралъ (27), содержащій r, s и t и отличный отъ f и F). Достаточно будетъ вывести выраженія производныхъ t:

$$\frac{dt}{dx}=\frac{\partial t}{\partial x}+\frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{dx}+\frac{\partial t}{\partial z}\left(p+q\frac{dy}{dx}\right)+\frac{\partial t}{\partial p}\left(r+s\frac{dy}{dx}\right)+$$

$$+\frac{\partial t}{\partial q}\left(s+t\frac{dy}{dx}\right)=\frac{\Delta t}{\Delta x}+\frac{\Delta t}{\Delta y}\frac{dy}{dx};\quad \frac{dt}{du}=\frac{\partial t}{\partial y}\frac{dy}{du}+\frac{\partial t}{\partial z}\frac{dz}{du}+$$

$$+\frac{\partial t}{\partial p}\frac{dp}{du}+\frac{\partial t}{\partial q}\frac{dq}{du}=\frac{\Delta t}{\Delta y}\frac{dy}{du}+L\frac{\partial t}{\partial z}+M\frac{\partial t}{\partial p}+N\frac{\partial t}{\partial q}.$$

Также понятно:

$$\frac{dr}{dx}=\frac{\Delta r}{\Delta x}+\frac{\Delta r}{\Delta y}\frac{dy}{dx};\quad \frac{ds}{dx}=\frac{\Delta s}{\Delta x}+\frac{\Delta s}{\Delta y}\frac{dy}{dx};\quad \frac{dr}{du}=\frac{\Delta r}{\Delta y}\frac{dy}{du}+$$

$$+L\frac{\partial r}{\partial z}+M\frac{\partial r}{\partial p}+N\frac{\partial r}{\partial q};\quad \frac{ds}{du}=\frac{\Delta s}{\Delta y}\frac{dy}{du}+L\frac{\partial s}{\partial z}+M\frac{\partial s}{\partial p}+N\frac{\partial s}{\partial q}.$$

Подставивъ эти выраженія въ равенства (66) и вспомнивъ, что въ нашей задачѣ

$$\frac{\Delta r}{\Delta y}=\frac{\Delta s}{\Delta x}\ \text{и}\ \frac{\Delta s}{\Delta y}=\frac{\Delta t}{\Delta x},$$

я получаю слѣдующія три равенства:

$$\left.\begin{array}{l}
L\left(\frac{\partial r}{\partial z}+\frac{\partial s}{\partial z}\frac{dy}{dx}\right)+M\left(\frac{\partial r}{\partial p}+\frac{\partial s}{\partial p}\frac{dy}{dx}\right)+N\left(\frac{\partial r}{\partial q}+\frac{\partial s}{\partial q}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dM}{dx},\\
L\left(\frac{\partial s}{\partial z}+\frac{\partial t}{\partial z}\frac{dy}{dx}\right)+M\left(\frac{\partial s}{\partial p}+\frac{\partial t}{\partial p}\frac{dy}{dx}\right)+N\left(\frac{\partial s}{\partial q}+\frac{\partial t}{\partial q}\frac{dy}{dx}\right)=\frac{dN}{dx},\\
\qquad M+L\frac{dy}{dx}=\frac{dL}{dx}
\end{array}\right\}(67).$$

На эти три равенства можно смотрѣть какъ на совмѣстныя уравненія съ тремя неизвѣстными функціями L, M и N и одною перемѣнною x (понятно, что u не имѣетъ вліянія при интеграціи

такихъ уравненій); эти равенства линейны относительно неизвѣстныхъ функцій и съ коэффиціентами—функціями x.

Положимъ, что l_1, m_1, n_1—частная интегральная система уравненій (67), т. е. такая система, которая вовсе не содержитъ произвольныхъ постоянныхъ кромѣ тѣхъ, которыя встрѣчаются въ коэффиціентахъ уравненій (67). Пусть также l_2, m_2 и n_2 другая такая же система, и l_3, m_3 и $\varkappa_3$ третья. Тогда общая интегральная система уравненій выразится такъ:

$$\left.\begin{array}{l}
C_1m_1+C_2m_2+C_3m_3=M,\\
C_1n_1+C_2n_2+C_3n_3=N,\\
C_1l_1+C_2l_2+C_3l_3=L
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (68),$$

гдѣ C_1, C_2 и C_3 три произвольныя функціи u. Положимъ теперь, что въ (68) уравненіяхъ x замѣненъ x_0. Тогда вмѣсто этихъ уравненій получу, обозначая замѣну x черезъ x_0 значкомъ ^{0},

$$\left.\begin{array}{l}
C_1m_1{}^0+C_2m_2{}^0+C_3m_3{}^0=M^0,\\
C_1n_1{}^0+C_2n_2{}^0+C_3n_3{}^0=N^0,\\
C_1l_1{}^0+C_2l_2{}^0+C_3l_3{}^0=L^0
\end{array}\right\}\ \ldots\ldots\ldots\ldots (69).$$

Если опредѣлитель, составленный изъ значеній $m_1{}^0$, $n_1{}^0$, $l_1{}^0$, $m_2{}^0$, $n_2{}^0$, $l_2{}^0$, $m_3{}^0$, $n_3{}^0$, $l_3{}^0$, не равенъ нулю, то три функціи u C_1, C_2 и C_3 могутъ выразиться линейно черезъ начальныя значенія неизвѣстныхъ функцій M, N и L:

$$C_1=k_1M^0+k_2N^0+k_3L^0,\quad C_2=k_4M^0+k_5N^0+k_6L^0,$$

$$C_3=k_7M^0+k_8N^0+k_9L^0.\ \ldots\ldots\ldots\ldots (71).$$

Для того, чтобы $L=0$, $M=0$ и $N=0$, необходимо и достаточно, чтобы $C_1=0$, $C_2=0$ и $C_3=0$; это слѣдуетъ изъ уравненій (68); впрочемъ это вѣрно только въ томъ случаѣ, когда частныя рѣшенія l_1, l_2, l_3, m_1, m_2, m_3, n_1, n_2 и n_3 не обращаются въ безконечность при тѣхъ значеніяхъ x, которыя разсматриваются. Изъ уравненій же (71) слѣдуетъ: для того, чтобы $L=0$, $M=0$ и $N=0$, необходимо и достаточно, чтобы $M^0=0$, $N^0=0$ и $L^0=0$, если только опредѣлитель, о которомъ упомянуто выше, не равенъ нулю.

Итакъ, чтобы p, q, r, s и t были частными производными z, надо выбрать такія функціи u вмѣсто y_0, z_0, p_0, q_0, s_0 и t_0, чтобы $M^0=0$, $N^0=0$ и $L^0=0$; конечно это вѣрно только при тѣхъ ограниченіяхъ, которыя высказаны выше. Но такъ какъ y_0, z_0, p_0, q_0, s_0 и t_0 только функціи u, то предположеніе $M^0=0$, $N^0=0$ и $L^0=0$ требуетъ удовлетворенія трехъ равенствъ:

$$\frac{dz_0}{du}=q_0\frac{dy_0}{du},\ \frac{dp_0}{du}=s_0\frac{dy_0}{du},\ \frac{dq_0}{du}=t_0\frac{dy_0}{du}\ \ldots\ldots (70).$$

Эти равенства могутъ быть удовлетворены двояко. 1) Полагаемъ y_0, z_0, p_0, q_0 постоянными и только s_0 и t_0 зависящими отъ u. При этомъ s_0 будетъ опредѣленъ черезъ t_0, потому что кромѣ даннаго уравненія $f=0$ должно удовлетворить дополняющее уравненіе $F=\alpha$, гдѣ α постоянное (иначе уравненія (25) и (26) не будутъ тождественны); слѣдовательно исключеніе t_0 влечетъ за собою исключеніе u. Въ такомъ случаѣ исключеніе t_0 изъ двухъ уравненій, связывающихъ z, y, x и шесть постоянныхъ, дастъ намъ полный интегралъ даннаго уравненія $f=0$. Такимъ образомъ изъ уравненій (27) можно получить полный интегралъ, если ихъ интегрировать также, какъ уравненія Коши, если опредѣлять r_0 и s_0 изъ уравненій $f(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)=0$ и $F(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)=\alpha$ и если исключать t_0, p, q, r, s и t изъ семи интеграловъ уравненій (27). (Можно, понятно, не опредѣлять r_0 и s_0 прежде интеграціи, а, уже проинтегрировавъ уравненія (27), исключать r_0, s_0, t_0, p, q, r, s и t между семью интегралами и двумя уравненіями $f_0=0$ и $F_0=\alpha$).

2) Возможенъ и другой способъ удовлетворенія уравненій (70): это—предположеніе

$$z_0=\varphi(y_0),\ q_0=\varphi'(y_0),\ t_0=\varphi''(y_0),\ p_0=\psi(y_0),\ s_0=\psi'(y_0),$$

гдѣ y_0 нѣкоторая функція u. Тогда исключеніе y_0, p, q, r, s и t изъ семи интеграловъ, въ которыхъ z_0, p_0, q_0, s_0 и t_0 замѣнены вышеобозначенными функціями y_0, дастъ интегралъ даннаго уравненія. Но такъ какъ величины y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0 и t_0 должны

удовлетворять двумъ условіямъ $f_0=0$ и $F_0=\alpha$, то функціи φ и ψ будутъ связаны однимъ условнымъ уравненіемъ перваго порядка относительно функціи ψ и 2-го порядка относительно φ; это условіе получится, если исключимъ r_0 изъ двухъ уравненій $f_0=0$ и $F_0=\alpha$. Такимъ образомъ, если $z=\lambda(x, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)$ и $y=\varepsilon(x, y_0, z_0, p_0, r_0, s_0, t_0)$ получаются изъ (27), то интегралъ даннаго уравненія получится отъ исключенія r_0, y_0 и $\psi(y_0)$ между уравненіями $f_0=0$, $F_0=\alpha$, $z=\lambda$ и $y=\varepsilon$, гдѣ α произвольное постоянное, а z_0, p_0, q_0, s_0 и t_0 замѣнены $\varphi(y_0)$, $\varphi'(y_0)$, $\varphi''(y_0)$, $\psi(y_0)$ и $\psi'(y_0)$.

Примѣръ 2.

$$r=\frac{1}{3}t^3.$$

Изъ совмѣстныхъ уравненій

$$\frac{dV}{ds}+t\frac{dV}{dr}+\frac{1}{t}\frac{dV}{dt}=0$$

и

$$\frac{dV}{dx}+t\frac{dV}{dy}+(p+tq)\frac{dV}{dz}+(r+st)\frac{dV}{dp}+(s+t^2)\frac{dV}{dq}=0,$$

интегрируя ихъ по методу Бура, легко найти слѣдующій интегралъ:

$$s=\frac{1}{2}t^2+\alpha.$$

Замѣтивъ, что $\mathfrak{X}_r=0$ и $\mathfrak{U}_s=0$, имѣю для дальнѣйшей интеграціи даннаго уравненія (уравненія (27))

$$dt:0=dp:\left(\frac{1}{3}t^3-st\right)=dq:(s-t^2)=dz:(p-tq)=-dy:t=dx;$$

изъ этихъ уравненій слѣдуетъ

$$t=t_0,\ p=p_0-\alpha t_0x-\frac{1}{6}t_0^3x,\ q=q_0+\alpha x-\frac{1}{2}t_0^2x,$$

$$z=z_0+p_0x+\frac{1}{6}t_0^3x^2-q_0t_0x-\alpha t_0x^2\ \text{и}\ y_0-y=t_0x.$$

Изъ двухъ послѣднихъ исключаю t_0 и получаю полный интегралъ:

$$z=z_0+p_0x+q_0(y-y_0)+\alpha x(y-y_0)+\frac{1}{6}\frac{(y_0-y)^3}{x}.$$

Чтобы получить интегралъ уравненія

$$r=\frac{1}{3}t^3$$

съ одною произвольною функціею, полагаю $p_0=\psi(y_0)$, $z_0=\varphi(y_0)$; дополняющее уравненіе даетъ возможность опредѣлить ψ черезъ φ:

$$\psi'(y_0)=\frac{1}{2}\varphi''(y_0)^2+\alpha;\ \psi(y_0)=\beta+\alpha y_0+\frac{1}{2}\int\varphi''(y_0)^2dy_0.$$

Частный интегралъ съ одною произвольною функціею опредѣлится исключеніемъ y_0 изъ двухъ уравненій:

$$y_0-y=x\varphi''(y_0),\ z=\varphi(y_0)+\left\{\beta+\alpha y_0-\varphi'(y_0)\varphi''(y_0)+\frac{1}{2}\int\varphi''(y_0)^2dy_0\right\}x$$

$$+x^2\varphi''(y_0)\left\{\frac{1}{6}\varphi''(y_0)^2-\alpha\right\}.$$

Замѣчаніе. Полный интегралъ уравненія вида $r=f(s,t)$, или $F(r,s,t)=0$, можно найти гораздо легче. Для этого стоитъ предположить

$$s=\alpha,\ t=\beta \text{ и } r=f(\alpha,\beta);\ \text{тогда } p=p_0'+\alpha y+xf(\alpha,\beta),$$

$$q=q_0'+\alpha x+\beta y.$$

Полный же интегралъ будетъ

$$z=\gamma+p_0'x+q_0'y+\alpha xy+\frac{1}{2}\beta y^2+\frac{1}{2}x^2f(\alpha,\beta)\ \dots\ (33).$$

Это распространяется и на тотъ случай, когда одной производной недостаетъ въ данномъ уравненіи.

Только что описанный способъ обладаетъ всѣми недостатками метода Коши, даже, можетъ быть, еще въ большей степени. И также, какъ для метода Коши, при полной интеграціи (27) будетъ

случай, подобный тому, который встрѣчается при полулинейности даннаго уравненія 1-го порядка; это тотъ случай вообще, когда изъ уравненій (27) получаются или y, или z, p, q, или какая нибудь функція перечисленныхъ величинъ, безъ того чтобы предварительно были найдены всѣ три интеграла, опредѣляющіе r, s и t. Въ такомъ случаѣ, если искать полный интегралъ тѣмъ способомъ, который изложенъ на страницахъ 67—71, то можетъ получиться интегралъ, имѣющій только 3—4 произвольныхъ постоянныхъ. Но въ такомъ случаѣ независимо отъ того, что интеграція остается возможною посредствомъ способа, изложеннаго на страницахъ 61—65 (точнѣе выражаясь, такая интеграція дастъ полный интегралъ съ пятью постоянными), мы можемъ примѣнить къ этому случаю и способъ Коши.

Во 1) остается возможность принимать y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0 и t_0 за функціи u и поступать также, какъ изложено на страницахъ 71 и 72 подъ рубрикою 2). Тогда получимъ интегралъ, имѣющій одну произвольную функцію и въ большинствѣ случаевъ выражаемый двумя уравненіями, двумя интегралами уравненій (27), содержащими z, y, x и произвольныя функціи y_0, а иногда и тремя уравненіями, если мы не умѣемъ опредѣлить одну изъ функцій черезъ другую, пользуясь уравненіями $f_0=0$ и $F_0=\alpha$. Тогда всегда можно придать такія частныя значенія функціямъ, входящимъ въ вышеупомянутыя уравненія, чтобы число постоянныхъ по исключеніи y_0 было надлежащее, т. е. пять.

Во 2) можетъ быть примѣненъ нѣкоторый пріемъ, нѣсколько схожій со способомъ Майера для полулинейныхъ уравненій (сочиненіе Мансіона, страница 237). Этотъ пріемъ состоитъ въ томъ, чтобы принять y_0 нѣкоторою функціею u, а p_0 нѣкоторою функціею y_0; t_0 же принимается за постоянное. Тогда уравненія (70) удовлетворяются слѣдующимъ образомъ:

$$p_0=\psi(y_0),\ s_0=\psi'(y_0),\ q_0=q_0'+t_0y_0,\ z_0=z_0'+q_0'y_0+\frac{1}{2}t_0y_0^2,$$

гдѣ ψ не произвольная функція, а опредѣляющаяся на томъ основаніи, что $f_0=0$ и $F_0=\alpha$.

Возможны и другія комбинаціи. Здѣсь я приведу примѣръ примѣненія перваго изъ только что описанныхъ пріемовъ; второй же способъ примѣненъ ниже къ болѣе простому уравненію $s^2=pt$.

Примѣръ 1. Уравненіе $(r-t)^2-(p+q)(r-2s+t)=0$, какъ видѣли, имѣетъ дополняющее уравненіе

$$r-2s+t=\alpha^2 e^{\frac{x+y}{4}}.$$

Уравненія (27) даютъ вслѣдствіе того, что $\omega_2=-1$,

$$\frac{dp}{r-s}=\frac{dq}{s-t}=\frac{dz}{p-q}=dx=\frac{dy}{-1}\ \ldots\ldots\ (72).$$

Обыкновенно за числовую величину принимаютъ или x_0, или y_0; но, понятно, можно принять и всякую функцію x_0 и y_0. Во избѣжаніе длинныхъ вычисленій я приму $x_0+y_0=\beta$ и $x_0-y_0=0$.

Изъ (72) составляю слѣдующія уравненія:

$$\frac{d(x+y)}{0}=\frac{1}{2}\,d(x-y)=\frac{dz}{p-q}=\frac{d(p-q)}{r-2s+t};$$

интегрируя ихъ, имѣю

$$x+y=\beta,\quad p-q=p_0-q_0+\frac{1}{2}\,\alpha^2(x-y)e^{\frac{\beta}{4}},$$

$$z=z_0+\frac{1}{2}\,(p_0-q_0)\,(x-y)+\frac{1}{8}\,\alpha^2(x-y)^2e^{\frac{\beta}{4}}\ \ldots\ldots\ (73).$$

Положу β нѣкоторою функціею u, $z_0=\varphi(\beta)$; тогда

$$\varphi'(\beta)=\frac{1}{2}\,(p_0+q_0),\quad \varphi''(\beta)=\frac{1}{4}\,(r_0+2s_0+t_0).$$

Положу $p_0-q_0=\psi(\beta)$; тогда $r_0-t_0=2\psi'(\beta)$. Для опредѣленія одной функціи черезъ другую имѣю уравненіе:

$$(r_0-t_0)^2=\alpha^2(p_0+q_0)e^{\frac{\beta}{4}}\quad \text{или}\quad \psi'(\beta)^2=\frac{1}{2}\,\alpha^2\varphi'(\beta)e^{\frac{\beta}{4}}.$$

Положу

$$\varphi'(\beta)=\frac{1}{2}\left(\gamma+\delta e^{\frac{\beta}{8}}\right)^2;$$

тогда $$\psi'(\beta)=\frac{1}{2}\,\alpha e^{\frac{\beta}{8}}\left(\gamma+\delta e^{\frac{\beta}{8}}\right),\ \psi(\beta)=p_0-q_0=\lambda+4\alpha\gamma e^{\frac{\beta}{8}}+2\,\alpha\delta e^{\frac{\beta}{4}},$$

$$\varphi(\beta)=z_0=\varepsilon+\frac{1}{2}\,\gamma^2\beta+8\gamma\delta e^{\frac{\beta}{8}}+2\delta^2e^{\frac{\beta}{4}}.$$

Подставляя эти значенія z_0 и p_0-q_0 въ уравненіе (73) и замѣняя β черезъ $x+y$, получаю полный интегралъ:

$$z=\varepsilon+\frac{1}{2}\,\gamma^2(x+y)+2\delta e^{\frac{x+y}{8}}\left(4\gamma+\delta e^{\frac{x+y}{8}}\right)+\frac{1}{2}\,\lambda(x-y)+$$

$$+\alpha(x-y)e^{\frac{x+y}{8}}\left(2\gamma+\delta e^{\frac{x+y}{8}}\right)+\frac{1}{8}\,\alpha^2(x-y)^2e^{\frac{x+y}{4}}.$$

Если методъ полной интеграціи (27) имѣетъ за собою всѣ неудобства метода Коши, то методъ, состоящій въ интеграціи трехъ вполнѣ совмѣстныхъ уравненій $dp=rdx+sdy$, $dq=sdx+tdy$ и $dz=pdx+qdy$, можетъ иногда затруднять тѣмъ, что онъ требуетъ опредѣленія r, s и t въ функціяхъ, которыя могутъ быть сложны. Прежде чѣмъ перейти къ изложенію частныхъ случаевъ, я нахожу небезполезнымъ указать на одинъ пріемъ, который доставитъ возможность докончить интеграцію, не опредѣляя r, s и t изъ трехъ уравненій $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$, и такимъ образомъ позволитъ отложить исключеніе r, s, t, p и q къ концу задачи. Опредѣлю

$$\frac{dr}{dx},\ \frac{ds}{dx},\ \frac{dt}{dx}\ \text{и}\ \frac{dt}{dy}$$

изъ четырехъ уравненій:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{df}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{df}{ds}\frac{ds}{dx}+\frac{df}{dt}\frac{dt}{dx}+\frac{\triangle f}{\triangle x}=0,\\
&\frac{df}{dr}\frac{ds}{dx}+\frac{df}{ds}\frac{dt}{dx}+\frac{df}{dt}\frac{dt}{dy}+\frac{\triangle f}{\triangle y}=0,\\
&\frac{dK}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dK}{ds}\frac{ds}{dx}+\frac{dK}{dt}\frac{dt}{dx}+\frac{\triangle K}{\triangle x}=0,\\
&\frac{dK}{dr}\frac{ds}{dx}+\frac{dK}{ds}\frac{dt}{dx}+\frac{dK}{dt}\frac{dt}{dy}+\frac{\triangle K}{\triangle y}=0
\end{aligned}\right\}\ \ldots\ldots\ (74).$$

При этомъ опредѣленіи для краткости буду обозначать частные опредѣлители, составленные изъ производныхъ f и K, тѣми же буквами, какими я обозначалъ такіе же опредѣлители изъ производныхъ f и F при выводѣ уравненій (25), (26) и (27); только для отличія буду ставить значекъ $'$.

Изъ уравненій (74) легко выводится

$$a'\frac{ds}{dx}+b'\frac{dt}{dx}=\mathfrak{X}_r' \text{ и } b'\frac{ds}{dx}+c'\frac{dt}{dx}=-\mathfrak{U}_t'.$$

Изъ этихъ уравненій вывожу

$$\frac{ds}{dx}=\frac{c'\mathfrak{X}_r'+b'\mathfrak{U}_t'}{a'c'-b'^2} \text{ и } \frac{dt}{dx}=-\frac{a'\mathfrak{U}_t'+b'\mathfrak{X}_r'}{a'c'-b'^2} \ldots\ldots (75).$$

Для опредѣленія $\frac{dr}{dx}$ составляю изъ тѣхъ же (74) такое уравненіе:

$$a'\frac{dr}{dx}-c'\frac{dt}{dx}+\mathfrak{X}_s'=0; \text{ тогда } a'\frac{dr}{dx}=-\mathfrak{X}_s'+\frac{-a'c'\mathfrak{U}_t'-b'c'\mathfrak{X}_r'}{a'c'-b'^2}.$$

Вспомнивъ тождество

$$a'\mathfrak{X}_t'-b'\mathfrak{X}_s'+c'\mathfrak{X}_r'=0,$$

легко получаю

$$\frac{dr}{dx}=\frac{-c'(\mathfrak{U}_t'+\mathfrak{X}_s')+b'\mathfrak{X}_t'}{a'c'-b'^2} \ldots\ldots (75).$$

Такимъ же образомъ изъ уравненія

$$a'\frac{dt}{dx}+b'\frac{dt}{dy}=\mathfrak{U}_r'$$

съ помощью тождества $a'\mathfrak{U}_t'-b'\mathfrak{U}_s'+c'\mathfrak{U}_r'=0$ получаю

$$\frac{dt}{dy}=\frac{a'(\mathfrak{U}_s'+\mathfrak{X}_r')-b'\mathfrak{U}_r'}{a'c'-b'^2}.$$

Если я желаю найти третье уравненіе $V=\alpha$ такое, чтобы оно вмѣстѣ съ $f=0$ и $K=\beta$ опредѣляло r, s и t, то я долженъ найти частный интегралъ, удовлетворяющій двумъ уравненіямъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dV}{dx}+p\frac{dV}{dz}+r\frac{dV}{dp}+s\frac{dV}{dq}+\frac{b'\mathfrak{X}_t'-c'(\mathfrak{U}_t'+\mathfrak{X}_s')}{a'c'-b'^2}\frac{dV}{dr}+\\
&\qquad+\frac{c'\mathfrak{X}_r'+b'\mathfrak{U}_t'}{a'c'-b'^2}\frac{dV}{ds}-\frac{a'\mathfrak{U}_t'+b'\mathfrak{X}_r'}{a'c'-b'^2}\frac{dV}{dt}=0,\\
&\frac{dV}{dy}+q\frac{dV}{dz}+s\frac{dV}{dp}+t\frac{dV}{dq}+\frac{c'\mathfrak{X}_r'+b'\mathfrak{U}_t'}{a'c'-b'^2}\frac{dV}{dr}\\
&\qquad-\frac{a'\mathfrak{U}_t'+b'\mathfrak{X}_t'}{a'c'-b'^2}\frac{dV}{ds}+\frac{a'(\mathfrak{U}_s'+\mathfrak{X}_r')-b'\mathfrak{U}_r'}{a'c'-b'^2}\frac{dV}{dt}=0
\end{aligned}\right\}(76).$$

Эти два уравненія имѣютъ интегралами $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$; это можно было бы доказать вычисленіемъ; но оно понятно и безъ вычисленій, такъ какъ уравненія (76) получились изъ тѣхъ же уравненій (23), только исключеніе $\frac{dr}{dx}$, $\frac{ds}{dx}$, $\frac{dt}{dx}$ и $\frac{dt}{dy}$ производилось инымъ путемъ. Кромѣ того доказано, что уравненія

$$\frac{dV}{dx}+p\frac{dV}{dz}+r\frac{dV}{dp}+s\frac{dV}{dq}=0 \text{ и } \frac{dV}{dy}+q\frac{dV}{dz}+s\frac{dV}{dp}+t\frac{dV}{dq}=0$$

имѣютъ три общихъ интеграла, если r, s и t опредѣлены изъ $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$. Отсюда заключаю, что уравненія (76) имѣютъ шесть общихъ интеграловъ, т. е. вполнѣ совмѣстны. Эти шесть общихъ интеграловъ найдутся или методомъ Майера, или разрѣшая каждое уравненіе отдѣльно и потомъ составляя изъ двухъ интегральныхъ системъ третью.

Замѣтка. Предъидущій выводъ основанъ на предположеніи, что $a'c'-b'^2$ не равно нулю; поэтому если и K—интегралъ одной изъ системъ (11)—(12), то изложенный пріемъ не примѣняется, такъ какъ уравненіе (11)—ни болѣе, ни менѣе, какъ $a'c'-b'^2=0$. Но и въ такомъ случаѣ можно иногда составить уравненія, подобныя (76). Пусть K—интегралъ одной изъ системъ (11)—(12), а F другой системы, при чемъ и F, и K содержатъ производныя втораго порядка. Для вывода формулъ аналогичныхъ (76) беру уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dF}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dF}{ds}\frac{ds}{dx}+\frac{dF}{dt}\frac{dt}{dx}+\frac{\triangle F}{\triangle x}=0,\\
&\frac{dF}{dr}\frac{ds}{dx}+\frac{dF}{ds}\frac{dt}{dx}+\frac{dF}{dt}\frac{dt}{dy}+\frac{\triangle F}{\triangle y}=0,\\
&\frac{dK}{dr}\frac{dr}{dx}+\frac{dK}{ds}\frac{ds}{dx}+\frac{dK}{dt}\frac{dt}{dx}+\frac{\triangle K}{\triangle x}=0,\\
&\frac{dK}{dr}\frac{ds}{dx}+\frac{dK}{ds}\frac{dt}{dx}+\frac{dK}{dt}\frac{dt}{dy}+\frac{\triangle K}{\triangle y}=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (77),$$

и изъ этихъ то уравненій я опредѣляю

$$\frac{dr}{dx},\ \frac{ds}{dx},\ \frac{dt}{dx}\ \text{и}\ \frac{dt}{dy}.$$

Понятно, что, обозначая частные опредѣлители, составленные изъ производныхъ F и K, тѣми же буквами, но со значкомъ ″, я получу вмѣсто (76) уравненій слѣдующія уравненія:

$$\frac{dV}{dx}+p\frac{dV}{dz}+r\frac{dV}{dp}+s\frac{dV}{dq}+\frac{b''\mathfrak{X}_t''-c''(\mathfrak{U}_t''+\mathfrak{X}_s'')}{a''c''-b''^2}\frac{dV}{dr}+$$

$$+\frac{c''\mathfrak{X}_r''+b''\mathfrak{U}_t''}{a''c''-b''^2}\frac{dV}{ds}-\frac{a''\mathfrak{U}_t''+b''\mathfrak{X}_r''}{a''c''-b''^2}\frac{dV}{dt}=0\ldots\ldots\ldots (78)$$

и еще другое, вполнѣ сходное со вторымъ изъ (76). Такія два уравненія будутъ имѣть общіе интегралы f, F, K и еще три интеграла.

Все предъидущее изложено въ томъ предположеніи, что найденъ одинъ только интегралъ одной изъ системъ (11)—(12).

Разсмотрю теперь случаи, когда системы (11)—(12) даютъ болѣе одного интеграла. Эти случаи буду разсматривать въ такомъ порядкѣ: 1) случай, когда каждая изъ системъ (11)—(12) даетъ по интегралу, содержащему r, s и t, 2) случай, когда одна изъ системъ (11)—(12) имѣетъ два общихъ интеграла, изъ которыхъ по крайней мѣрѣ одинъ содержитъ r, s и t, 3) случай, когда каждая изъ системъ (11)—(12) имѣетъ по два интеграла.

Теорема 4. Если обѣ системы (11)—(12) имѣютъ по интегралу, содержащему r, s и t, именно F и F_1, то по подстановкѣ этихъ

интеграловъ въ уравненія (25^{bis}) и (26^{bis}) вмѣсто F и K получимъ тождества.

Доказательство. Если F—интегралъ одной изъ системъ (11^{bis})—(12), то имѣютъ мѣсто уравненія (16) и (17) страницъ 56 и 57. На основаніи же того, что F_1—интегралъ другой системы, могу въ уравненіяхъ (16) и (17) ω_2 замѣнить ω_1, а ω_1 замѣнить ω_2, также A, B, C замѣнить A_1, B_1, C_1; тогда получу

$$B_1=\omega_1 A_1+\frac{C_1}{\omega_1}\ldots\ldots\ldots (29)$$

и

$$\frac{\triangle F_1}{\triangle x}+\omega_2\frac{\triangle F_1}{\triangle y}=\frac{A_1}{R}\frac{\triangle f}{\triangle x}+\frac{C_1}{R\omega_1}\frac{\triangle f}{\triangle y}\ldots\ldots (30).$$

Замѣтивъ, что

$$b\frac{\triangle F_1}{\triangle x}+c\frac{\triangle F_1}{\triangle y}=b\left(\frac{\triangle F_1}{\triangle x}+\omega_2\frac{\triangle F_1}{\triangle y}\right),$$

подставлю въ уравненіе (25^{bis}) величину B_1 вмѣсто $\frac{dK}{ds}$ и величину

$b\frac{\triangle F_1}{\triangle x}+c\frac{\triangle F_1}{\triangle x}$ вмѣсто $b\frac{\triangle K}{\triangle x}+c\frac{\triangle K}{\triangle y}$, при этомъ $\frac{dK}{dr}$ и $\frac{dK}{ds}$ замѣняю A_1 и C_1. Тогда вмѣсто (25^{bis}) получаю

$$A_1\left[\mathfrak{X}_t+\omega_1\mathfrak{U}_t-\frac{b}{R}\frac{\triangle f}{\triangle x}\right]-C_1\left[\mathfrak{X}_r+\mathfrak{U}_s-\frac{1}{\omega_1}\mathfrak{U}_t+\frac{b}{R\omega_1}\frac{\triangle f}{\triangle y}\right]=$$

$$A_1\left[R\mathfrak{X}_t-T\mathfrak{X}_r-b\frac{\triangle f}{\triangle x}\right]:R-C_1\left[\mathfrak{U}_s-\left(\frac{1}{\omega_2}+\frac{1}{\omega_1}\right)\mathfrak{U}_t+\frac{b}{R\omega_1}\frac{\triangle f}{\triangle y}\right]=0.$$

Коэффиціентъ у A_1 равенъ нулю, ибо это опредѣлитель съ двумя одинаковыми строчками. Коэффиціентъ же при C_1 можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{1}{T}\left[T\mathfrak{U}_s-S\mathfrak{U}_t+c\frac{\triangle f}{\triangle y}\right].$$

Легко замѣтить, что стоящее въ скобкахъ тоже—опредѣлитель съ двумя одинаковыми строчками. Итакъ (25^{bis}) есть тождество.

Что касается до (26^{bis}), то оно тождественно (25^{bis}) на основаніи того, что F—интегралъ одной изъ системъ (11)—(12).

Изъ этой теоремы слѣдствіе: если каждая изъ системъ (11)—(12) имѣетъ интегралъ, содержащій r, s и t и отличный отъ даннаго уравненія, то, опредѣливъ изъ даннаго уравненія и изъ двухъ интеграловъ r, s и t, для окончательной интеграціи надо будетъ интегрировать слѣдующія совмѣстныя уравненія:

$$dp:(r+\omega_2 s)=dq:(s+\omega_2 t)=dz:(p+\omega_2 q)=dy:\omega_2=dx\ \ldots\ldots (31),$$

въ которыхъ r, s и t замѣнены функціями x, y, z, p, q, α и β; послѣ интеграціи должно замѣнить β постоянными α, t_0, p_0, q_0, z_0 и y_0 и исключить изъ четырехъ интеграловъ уравненій (31) постоянное t_0 и величины p и q. Впрочемъ, если r, s и t трудно или неудобно опредѣлить, можно интегрировать уравненія (27).

При только что описанной интеграціи мы принимали интегралъ системы, у которой передъ $\frac{dV}{dy}$ стоитъ ω_1, за то F, которое входитъ въ уравненія (25), (26) и (27) и дѣлаетъ (25) и (26) тождественными. Но, понятно, можно принять за F интегралъ другой системы; тогда для окончанія интеграціи буду имѣть

$$dp:(r+\omega_1 s)=dq:(s+\omega_1 t)=dz:(p+\omega_1 q)=dy:\omega_1=dx\ \ldots\ (31^{bis}).$$

Формулы (31^{bis}) тождественны съ тѣми, на основаніи которыхъ выведены (11) и (12); недостаетъ только двухъ уравненій (7^{bis}) и (4^{bis}). Но вспомнимъ, что два изъ интеграловъ системы (4^{bis}), (7^{bis}), (8^{bis}) и (31^{bis}) уже найдены нами прежде: первый изъ нихъ—данное уравненіе; а другой—интегралъ той системы (11)—(12), въ которой передъ $\frac{dV}{dy}$ стоитъ ω_1. Такимъ образомъ въ этомъ случаѣ интегрируемости обѣихъ системъ (11)—(12) мы имѣемъ возможность удовлетворить системѣ (4^{bis}), (7^{bis}), (8^{bis}) и (2) такъ, какъ будто бы функціи r, s, t, p, q, z и y, въ нихъ входящія, были функціями одного перемѣннаго x. Для этого эти семь функцій опредѣляются изъ даннаго уравненія, изъ двухъ интеграловъ $F=\alpha$ и $K=\beta$ и изъ четырехъ интеграловъ уравненій (31^{bis}); тогда получаются такого рода функціи x, что

постоянныя, входящія въ нихъ, всегда можно такъ замѣнить функціями u, чтобы и (3) уравненія удовлетворялись.

Какъ выбираются эти функціи u, описано на страницѣ 71, выводы которой, понятно, вѣрны и для разбираемаго случая. Замѣчу только, что, если я пользуюсь уравненіями (31^{bis}), или (2) и $dy=\omega_1 dx$, то я долженъ замѣнить α функціями β, t_0, p_0, q_0, z_0 и y_0. Такимъ образомъ β будетъ входить какъ постоянное въ полный интегралъ, или интегралъ, содержащій одну произвольную функцію.

Нечего говорить, что нахожденіе полнаго интеграла въ этомъ случаѣ также возможно посредствомъ интеграціи уравненій

$$dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy \text{ и } dz=pdx+qdy,$$

въ которыхъ r, s и t опредѣлены изъ двухъ найденныхъ интеграловъ системъ (11)—(12), $F=\alpha$ и $F_1=\beta$, и изъ даннаго уравненія. Какъ избѣжать въ этомъ случаѣ опредѣленія r, s и t передъ интеграціею, уже изложено мною выше.

Перехожу къ случаю, когда одна изъ системъ (11)—(12) имѣетъ два интеграла. Пусть эти два интеграла—F и F_1. Тогда всякая произвольная функція F и F_1 удовлетворяетъ обоимъ уравненіямъ (11) и (12). Формулы (18), (19), (20) и (21) доказаны только при томъ предположеніи, что F — интегралъ системы (11)—(12); поэтому $F-\varphi(F_1)$ тоже обращаетъ уравненія (25) и (26) въ два тождественныхъ (здѣсь φ знакъ произвольной функціи).

Такимъ образомъ я могу въ этомъ случаѣ поступать двояко.

1) Можно откинуть интегралъ F_1 и искать полный интегралъ даннаго уравненія такъ, какъ бы система (11)—(12) имѣла только одинъ интегралъ; получивъ полный интегралъ, можно найти общій съ помощью метода Лагранжа. На практикѣ такой способъ, мнѣ кажется, будетъ наиболѣе удобенъ.

2) Можно также замѣнить въ уравненіи (25) F черезъ $F-\varphi(F_1)$. Въ такомъ случаѣ вмѣсто (25) получимъ уравненіе вида:

$$\eta_r-\xi_s-\varphi'(F_1)\{\eta_r'-\xi_s'\}=0,$$

гдѣ φ'—производная функція φ, а η_r' и ξ_s' то, во что обращаются η_r и ξ_s, когда F замѣненъ F_1. Соотвѣтственно этому въ уравненіяхъ (27) надо будетъ замѣнить

$$\mathfrak{X}_r,\ \mathfrak{X}_s,\ \mathfrak{X}_t,\ \mathfrak{U}_r,\ \mathfrak{U}_s,\ \mathfrak{U}_t,\ a,\ b,\ c$$

черезъ

$$\mathfrak{X}_r-\varphi'(F_1)\mathfrak{X}_r',\ \mathfrak{X}_s-\varphi'(F_1)\mathfrak{X}_s',\ \mathfrak{X}_t-\varphi'(F_1)\mathfrak{X}_t',$$

$$\mathfrak{U}_r-\varphi'(F_1)\ \mathfrak{U}_r',\ldots\ldots a-\varphi'(F_1)a',\ b-\varphi'(F_1)b' \text{ и } c-\varphi'(F_1)c'.$$

Такимъ образомъ интеграція уравненій (27) будетъ затруднена присутствіемъ произвольной функціи. Чтобы нѣсколько облегчить интеграцію въ такомъ случаѣ, можно положить

$$F_1(r,\ s,\ t,\ p,\ q,\ z,\ y,\ x)=K\ \ldots\ldots\ldots\ldots (79);$$

тогда

$$F(r,\ s,\ t,\ p,\ q,\ z,\ y,\ x)=\varphi(K)\ \ldots\ldots\ldots\ldots (80).$$

Изъ уравненій (79), (80) и изъ даннаго я опредѣлю r, s и p (можно и всякія другія изъ величинъ r, s, t, p, q, z, y и x) какъ функціи t, q, x, y, z и K; также, дифференцируя эти три уравненія, я могу опредѣлить dr, ds и dp въ функціяхъ t, q, z, x, y, K и ихъ дифференціаловъ. Всѣ эти величины, которыми я замѣню r, s, p, dr, ds и dp въ уравненіяхъ (27), содержатъ произвольныя функціи φ и φ'; но облегченіе будетъ въ томъ, что произвольная функція имѣетъ несложный аргументъ K. Замѣняя r, s, p, dp въ уравненіяхъ (27), я получу обыкновенныя дифференціальныя уравненія, изъ которыхъ, вѣроятно, всего удобнѣе будетъ опредѣлить t, q, x, y и z въ функціи K и постоянныхъ t_0, q_0, z_0, y_0 и K_0; изъ этихъ постоянныхъ K_0 опредѣляется изъ (79) въ функціи r_0, s_0, t_0, p_0, q_0, z_0 и y_0. Предполагая z_0 произвольною функціею y_0, а p_0 такою функціею, которая опредѣляется на основаніи (80), я приведу задачу къ исключенію y_0, p_0, r_0, K, t и q между пятью интегралами (27) и уравненіями:

$$F\left(r_0,\ \frac{dp_0}{dy_0},\ \frac{d^2z_0}{dy_0^2},\ p_0,\ \frac{dz_0}{dy_0},\ z_0,\ y_0,\ x_0\right)=\varphi\ \left\{F_1\left(r_0,\frac{dp_0}{dy_0},\ \frac{d^2z_0}{dy_0^2},\right.\right.$$

$$\left.\left.p_0,\ \frac{dz_0}{dy_0},\ z_0,\ y_0,\ x_0\right)\right\} \text{ и } f\left(r_0,\ \frac{dp_0}{dy_0},\ \frac{d^2z_0}{dy_0^2},\ p_0,\ \frac{dz_0}{dy_0}, y_0, z_0, x_0\right)=0.$$

Такое исключеніе, если оно только возможно, должно дать общій интегралъ даннаго уравненія, ибо этотъ интегралъ будетъ содержать двѣ произвольныя функціи φ и z_0.

Впрочемъ я не придаю большаго значенія такому пріему. Можетъ быть, на практикѣ удобнѣе будетъ, пользуясь уравненіемъ $F=\alpha$ и тѣмъ уравненіемъ $K=\beta$, которое получится изъ (27), интегрировать прямо уравненія

$$dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy,\ dz=pdx+qdy$$

съ тѣмъ, чтобы общій интегралъ искать методомъ Лагранжа.

Разсмотримъ случай, когда обѣ системы (11)—(12) имѣютъ по два интеграла.

Теорема 4-ая была доказана только въ предположеніи, что F—интегралъ одной изъ системъ (11)—(12), а K—интегралъ другой системы. Положимъ теперь, что F и F_1—интегралы одной изъ системъ (11)—(12); тогда $F-\varphi(F_1)$—интегралъ той же системы. Пусть также K и K_1—интегралы другой системы. Тогда я буду имѣть два выраженія $F-\varphi(F_1)$ и $K-\psi(K_1)$, гдѣ φ и ψ произвольныя функціи; для этихъ двухъ выраженій теорема 4-ая вѣрна.

Если же $F-\varphi(F_1)$ и $K-\psi(K_1)$ удовлетворяютъ двумъ уравненіямъ (25) и (26), то r, s и t, опредѣляемыя изъ трехъ уравненій $f=0$ (даннаго), $F-\varphi(F_1)=0$ и $K-\psi(K_1)=0$ обращаютъ уравненія

$$dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy \text{ и } dz=pdx+qdy\ \ldots\ldots (57)$$

въ уравненія вполнѣ совмѣстныя. Интегрируя эти вполнѣ совмѣстныя уравненія и исключая изъ трехъ интеграловъ p и q, я получу общій интегралъ даннаго уравненія, содержащій двѣ произвольныя функціи φ и ψ.

Но интеграція уравненій съ двумя произвольными функціями затруднительна. Для облегченія этой интеграціи можно употреблять методъ Петерсона, который разсмотрѣлъ этотъ случай четырехъ интеграловъ въ 8-мъ томѣ Математическаго Сборника, издаваемаго Московскимъ Математическимъ Обществомъ. Этотъ пріемъ состоитъ во введеніи двухъ новыхъ функцій k и l, опредѣляемыхъ уравненіями

$$F_1=k \text{ и } K_1=l\ \ldots\ldots\ldots\ldots (81).$$

Тогда два дополнительные интеграла принимаютъ видъ:

$$F=\varphi(k) \text{ и } K=\psi(l)\ \ldots\ldots\ldots\ldots (82).$$

Данное уравненіе и уравненія (81) и (82) даютъ возможность опредѣлить пять изъ величинъ r, s, t, p, q, z, y и x черезъ три остальныя и черезъ k и l, а дифференціалы этихъ пяти величинъ черезъ дифференціалы остальныхъ и черезъ dk и dl. Подставляя всѣ эти величины въ (57), интегрируютъ (57) и получаютъ три уравненія. Исключеніе k, l, p, q, r, s и t изъ трехъ интеграловъ (57), изъ даннаго уравненія и изъ четырехъ уравненій (81) и (82) даютъ общій интегралъ съ двумя произвольными функціями. Такъ какъ въ большинствѣ случаевъ исключеніе невозможно совершить, то интегралъ будетъ представляться нѣсколькими уравненіями, въ которыя входятъ подлежащія исключенію величины.

Можно интеграцію въ этомъ случаѣ производить и иначе: не принимать въ разсчетъ интегралы F_1 и K_1 и опредѣлять r, s и t изъ уравненій $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$. Такая интеграція дастъ только полный интегралъ; но методъ Лагранжа по полному интегралу дастъ общій. Я привожу въ IV главѣ примѣръ такой интеграціи.

Можетъ быть еще случай, когда одна изъ системъ (11)—(12) даетъ два интеграла, а другая только одинъ. Опредѣливъ r, s, t и p, напримѣръ, изъ уравненій $f=0$, $F_1=k$, $F=\varphi(k)$ и $K=\beta$, гдѣ β — функція начальныхъ значеній x, y, z, p, q, r, s и t, подставляю эти величины, также какъ и dp, въ уравненія

$$\frac{dp}{r+s\omega_2}=\frac{dq}{s+t\omega_2}=\frac{dz}{p+q\omega_2}=dx=\frac{dy}{\omega_2}.$$

Проинтегрировавъ эти уравненія, получу четыре интеграла. Замѣнивъ въ этихъ четырехъ интегралахъ z_0 и p_0 произвольными функціями y_0, я долженъ буду изъ нихъ, изъ $f_0=0$ и изъ $F_0=\varphi(F_{10})$ исключить k, q, y_0, p_0 и r_0, чтобы получить общій интегралъ уравненія $f=0$.

Разсмотрю, какъ измѣняются предъидущія формулы и теоремы въ томъ случаѣ, когда данное уравненіе содержитъ только *двѣ* производныя, изъ которыхъ одна s, или *одну* производную. Въ послѣднемъ случаѣ будутъ два подслучая: 1) если производная есть s, и 2) если производная — r. Случай, когда въ данное уравненіе входятъ r и t, но не входитъ s, не представляетъ особенностей.

I. Уравненіе данное $f(s, t, p, q, z, y, x)=0$. Въ такомъ случаѣ $R=0$, $\omega_1=\infty$ и $\omega_2=T:S$. Уравненія (11^{bis}) и (12) замѣняются слѣдующими двумя системами:

$$\frac{dV}{dr}=0\ (35),\ S\frac{\triangle V}{\triangle x}+T\frac{\triangle V}{\triangle y}-\frac{\triangle f}{\triangle x}\frac{dV}{ds}-\frac{\triangle f}{\triangle y}\frac{dV}{dt}=0=\mathfrak{X}_s+\mathfrak{U}_t\ (36)$$

$$\text{и}\ \frac{dV}{ds}=\frac{T}{S}\frac{dV}{dr}+\frac{S}{T}\frac{dV}{dt}\ (37),\ T\frac{\triangle V}{\triangle y}-\frac{\triangle f}{\triangle y}\frac{dV}{dt}=0=\mathfrak{U}_t\ (38).$$

Вторая система можетъ дать интегралъ, содержащій r, s и t, замѣчательный между прочимъ тѣмъ, что производная по r этого интеграла равна производной по t, и еще тѣмъ, что онъ содержитъ произвольную функцію x. Легко доказать, что этотъ интегралъ обладаетъ всѣми свойствами уравненія, дополнительнаго до даннаго. Для окончанія интеграціи въ этомъ случаѣ можно пользоваться уравненіями (27), потому что по прежнему изъ формулъ (23) получаются формулы (25^{bis}) и (26^{bis}); только въ опредѣлителяхъ a, b, c, $\mathfrak{X}_r$, $\mathfrak{X}_s$, $\mathfrak{X}_t$, $\mathfrak{U}_r$, $\mathfrak{U}_s$ и $\mathfrak{U}_t$ нѣкоторые члены будутъ нули. Такимъ образомъ, если не откидывать произвольной функціи x, изъ (27) иногда можно будетъ найти общій интегралъ способомъ, уже описаннымъ мною на страницахъ 82 и 83.

Если же интегралъ получается изъ уравненій (35) и (36), то въ такомъ случаѣ уравненіе (26^{bis}) обращается на основаніи (36) въ $0=0$; это значитъ, что K должно удовлетворять одному уравненію (25^{bis}). Въ самомъ дѣлѣ, если мы обратимся къ уравненіямъ (23), то увидимъ, что въ разбираемомъ случаѣ $\frac{dr}{dx}$ входитъ только въ одно уравненіе; поэтому $\frac{ds}{dx}$, $\frac{dt}{dx}$ и $\frac{dt}{dy}$ можно исключить изъ пяти уравненій, не содержащихъ $\frac{dr}{dx}$. При такомъ исключеніи получу два уравненія, изъ которыхъ одно не содержитъ K и есть уже удовлетворенное уравненіе (36). K долженъ удовлетворять двумъ уравненіямъ: одному, полученному посредствомъ исключенія $\frac{ds}{dx}$, $\frac{dt}{dx}$ и $\frac{dt}{dy}$, и другому, содержащему $\frac{dr}{dx}$; вотъ эти уравненія:

$$\mathfrak{X}_t \frac{dK}{dr} + \mathfrak{U}_t \frac{dK}{ds} - \mathfrak{U}_s \frac{dK}{dt} - c\frac{\triangle K}{\triangle y} = 0 \;\ldots\ldots (39),$$

$$\frac{\triangle K}{\triangle x} + \frac{dK}{dr}\frac{dr}{dx} + \frac{dK}{ds}\frac{ds}{dx} + \frac{dK}{dt}\frac{dt}{dx} = 0 \;\ldots\ldots (40).$$

Изъ этихъ уравненій (39) совпадаетъ съ (25^{bis}). Уравненіе же (40) излишне; дѣйствительно, если найдемъ K, удовлетворяющее (39), то $\frac{ds}{dx}$ и $\frac{dt}{dx}$ опредѣляются на основаніи $f=0$ и $F=\alpha$, а $\frac{dr}{dx}$ опредѣлится изъ дифференціала K по x, т. е. изъ уравненія (40); такимъ образомъ, каковъ бы не былъ K, уравненіе (40) удовлетворится тѣми значеніями r, s и t, которыя получаются изъ $f=0$, $F=\alpha$ и $K=\beta$.

Итакъ для полученія K придется найти одинъ интегралъ уравненій:

$$dx:\ 0=dy:\ c=dz:\ qc=dp:\ sc=dq:\ tc=$$

$$dt:\ \mathfrak{U}_s=-ds:\ \mathfrak{U}_t=-dr:\ \mathfrak{X}_t \;\ldots\ldots\ldots (41).$$

Разсматривая уравненія (41), я замѣчаю, что при полной интеграціи этихъ уравненій я встрѣчусь съ тѣмъ обстоятельствомъ, о которомъ уже говорено прежде; а именно, изъ этихъ уравненій можно опредѣлить q, z и y, не опредѣливъ r. Поэтому, если желаю найти интегралъ съ помощью уравненій (41), я интегрирую только уравненія

$$dq:\ t=dp:\ s=dz:\ q=dy=dx:\ 0 \;\ldots\ldots (41^{bis}),$$

при чемъ числовую величину придаю y_0 (t и s предполагаются опредѣленными изъ $f=0$ и $F=\alpha$). Исключивъ изъ интеграловъ уравненій (41^{bis}) p и q, получаю два уравненія:

$$x=x_0 \text{ и } L(z,\ y,\ x_0,\ z_0,\ p_0,\ q_0,\ \alpha)=0.$$

Далѣе могу поступать двояко. 1) Полагая

$$z_0=\varphi(x_0),\ p_0=\varphi'(x_0),\ q_0=\psi(x_0) \text{ и } s_0=\psi'(x_0),$$

исключаю x_0, t_0 и функцію ψ между четырьмя уравненіями:

$$x=x_0,\ L(z,\ y,\ x_0,\ \varphi(x_0),\ \varphi'(x_0),\ \psi(x_0),\ \alpha)=0,$$

$$f(x_0,\ y_0,\ \varphi(x_0),\ \varphi'(x_0),\ \psi(x_0),\ \psi'(x_0),\ t_0)=0,$$

$$F(x_0,\ y_0,\ \varphi(x_0),\ \varphi'(x_0),\ \psi(x_0),\ \psi'(x_0),\ t_0)=\alpha.$$

2) Полагая r_0 постояннымъ, $q_0=\psi(x_0)$, $s_0=\psi'(x_0)$, исключаю x_0, t_0 и функцію ψ между уравненіями:

$$x=x_0,\ L(z,\ y,\ x_0,\ z_0,\ p_0,\ \psi(x_0),\ \alpha)=0,$$

$$f(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ \psi(x_0),\ \psi'(x_0),\ t_0)=0$$

$$\text{и } F(x_0,\ y_0,\ z_0,\ p_0,\ \psi(x_0),\ \psi'(x_0),\ t_0)=\alpha,$$

гдѣ $p_0=p_0'+r_0x_0$, $z_0=z'_0+p_0'x_0+\frac{1}{2}r_0x_0^2$ (z'_0 и p'_0 постоянныя, независимыя отъ x_0).

Примѣръ 3. Найти полный интегралъ уравненія

$$s^2=pt.$$

Изъ системы

$$\frac{dV}{dr}=0,\ \ 2s\frac{\triangle V}{\triangle x}-p\frac{\triangle V}{\triangle y}+tr\frac{dV}{ds}+ts\frac{dV}{dt}=0$$

получаю интегралъ $te^{-\frac{x}{2}}$. Приравниваю этотъ интегралъ постоянному и опредѣляю t изъ этого уравненія:

$$t=\alpha^2e^{\frac{x}{2}}.$$

Интеграцію продолжаю съ помощью уравненій (41^{bis}):

$$dx:\ 0=dy=dz:\ q=dq:\ t,$$

при чемъ полагаю $y_0=0$. Интегрируя два послѣднія уравненія въ предположеніи x постояннаго, получаю

$$q=q_0+\alpha^2ye^{\frac{x}{2}},\ \ z=z_0+q_0y+\frac{1}{2}\alpha^2y^2e^{\frac{x}{2}} \;\ldots\ldots (42).$$

Чтобы изъ уравненія (42) получить полный интегралъ, полагаю r_0 постояннымъ, а z_0, p_0, q_0, s_0 и t_0 нѣкоторыми функціями x_0, или все равно x. Тогда

$$p_0=\gamma+r_0x,\ z_0=\varepsilon+\gamma x+\frac{1}{2}r_0x^2\ldots\ldots\ldots(43).$$

Далѣе s_0 опредѣляется изъ уравненія $s_0{}^2=p_0t_0$:

$$s_0=\alpha e^{\frac{x}{4}}\sqrt{\gamma+r_0x.}$$

Интегрируя послѣднее уравненіе относительно x, получаю

$$q_0=\beta+\alpha\int e^{\frac{x}{4}}\sqrt{\gamma+r_0x}\,dx\ldots\ldots\ldots(43).$$

Замѣняя въ интегралѣ (42) z_0 и q_0 черезъ равныя имъ функціи (43), имѣю полный интегралъ:

$$z=\varepsilon+\gamma x+\frac{1}{2}r_0x^2+\beta y+\alpha y\int e^{\frac{x}{4}}\sqrt{\gamma+r_0x}\,dx+\frac{1}{2}\alpha^2y^2e^{\frac{x}{2}}\,(44).$$

Проинтегрирую тоже уравненіе другимъ способомъ: съ помощью уравненій (57). Въ такомъ случаѣ я долженъ предварительно найти третій интегралъ, опредѣляющій r, s и t; для этого я имѣю уравненія (27), или (41). Легко вычислить

$$\mathfrak{X}_t=\frac{1}{2}pte^{-\frac{x}{2}}+rte^{-\frac{x}{2}},\ \mathfrak{U}_t=ste^{-\frac{x}{2}},\ \mathfrak{U}_s=0,\ c=-2se^{-\frac{x}{2}}.$$

Уравненія (41) даютъ

$$dr:\left(\frac{1}{2}p+r\right)=dp:\frac{2s^2}{t}=dp:2p.$$

Интеграція послѣдняго уравненія даетъ

$$\frac{r}{\sqrt{p}}-\frac{1}{2}\sqrt{p}=-\frac{1}{2}\gamma.$$

Слѣдовательно

$$r=\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\gamma\sqrt{p},\quad t=\alpha^2e^{\frac{x}{2}},\quad s=\alpha e^{\frac{x}{4}}\sqrt{p}.$$

Совмѣстныя уравненія для опредѣленія p, q и z будутъ

$$dp=\left(\frac{1}{2}p-\frac{1}{2}\gamma\sqrt{p}\right)dx+\alpha e^{\frac{x}{4}}\sqrt{p}\,dy,\ dq=\alpha e^{\frac{x}{4}}\sqrt{p}\,dx+\alpha^2e^{\frac{x}{2}}\,dy,$$

$$dz=pdx+qdy.$$

Интегрируя первое уравненіе, получаю

$$e^{-\frac{x}{4}}\sqrt{p}=\beta+\gamma e^{-\frac{x}{4}}+\frac{1}{2}\alpha y\quad\text{или}\quad p=\left(\gamma+\beta e^{\frac{x}{4}}+\frac{1}{2}\alpha ye^{\frac{x}{4}}\right)^2.$$

Интегрирую второе уравненіе:

$$dq=\alpha\gamma e^{\frac{x}{4}}dx+\alpha\beta e^{\frac{x}{2}}dx+\frac{1}{2}\alpha^2ye^{\frac{x}{2}}dx+\alpha^2e^{\frac{x}{2}}dy,$$

и получаю

$$q=\delta+4\alpha\gamma e^{\frac{x}{4}}+2\alpha\beta e^{\frac{x}{2}}+\alpha^2ye^{\frac{x}{2}}.$$

Наконецъ интеграція послѣдняго уравненія даетъ полный интегралъ:

$$z=\varepsilon+\delta y+\gamma^2x+8\gamma\beta e^{\frac{x}{4}}+2\beta^2e^{\frac{x}{2}}+2\alpha ye^{\frac{x}{4}}(2\gamma+\beta e^{\frac{x}{4}})+$$
$$+\frac{1}{2}\alpha^2y^2e^{\frac{x}{2}}.$$

II. Уравненіе данное $f(s,\ p,\ q,\ x,\ y,\ z)=0$.

Двѣ системы, замѣняющія (11)—(12):

$$\frac{dV}{dr}=0,\ S\frac{\triangle V}{\triangle x}-\frac{\triangle f}{\triangle x}\frac{dV}{ds}-\frac{\triangle f}{\triangle y}\frac{dV}{dt}=0=\mathfrak{X}_s+\mathfrak{U}_t\ (45);$$

$$\frac{dV}{dt}=0,\ S\frac{\triangle V}{\triangle y}-\frac{\triangle f}{\triangle x}\frac{dV}{dr}-\frac{\triangle f}{\triangle y}\frac{dV}{ds}=0=\mathfrak{X}_r+\mathfrak{U}_s\ (46).$$

Вижу, что одинъ интегралъ не долженъ содержать r, а другой не долженъ содержать t. Если я нашелъ одинъ интегралъ, то для дальнѣйшей интеграціи я имѣю уравненія (41), потому что система (39)—(40) остается вѣрною и для этого случая. Если я нашелъ оба интеграла, то всего лучше будетъ прямо находить общій интегралъ. Въ самомъ дѣлѣ интегралъ системы (45) будетъ содержать произвольную функцію y; а интегралъ (46) системы будетъ содержать произвольную функцію x; поэтому, если изъ этихъ двухъ интеграловъ и изъ даннаго уравненія опредѣлимъ r, s и t и подставимъ въ уравненія

$$dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy \text{ и } dz=pdx+qdy,$$

то послѣ интеграціи этихъ вполнѣ совмѣстныхъ уравненій и послѣ исключенія p и q получу интегралъ съ двумя произвольными функціями.

Но если даже я нашелъ одинъ только интегралъ, то можно также искать прямо общій интегралъ. Пусть мы нашли интегралъ для системы (45), $F(t, s, p, q, z, y, x)$; тогда этой же системѣ удовлетворяетъ интегралъ съ произвольною функціею: $F-\xi(y)$. Этимъ послѣднимъ интеграломъ замѣняю F въ уравненіяхъ (41), что на самомъ дѣлѣ не зачѣмъ исполнять, такъ какъ интегрировать будемъ только уравненія:

$$dy=dz:\ q=dp:\ s=dq:\ t\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (47),$$

гдѣ s и t опредѣляются изъ двухъ уравненій $f=0$ и $F=\xi(y)$. При интеграціи x должно принимать за постоянное: это прямо слѣдуетъ изъ (41). Числовымъ постояннымъ принимаю y_0.

Пусть мы нашли три интеграла уравненій (47); тогда, исключая изъ этихъ трехъ интеграловъ p и q, я найду нѣкоторое уравненіе между x, y, z, $\xi(y)$, разными видами этой функціи, z_0, p_0 и q_0:

$$H(x,\ y,\ \xi(y),\ z,\ z_0,\ p_0,\ q_0)=0.$$

Такъ какъ на основаніи (41) $x=x_0$, то я полагаю

$$z_0=\varphi(x),\ p_0=\varphi'(x),\ r_0=\varphi''(x),\ q_0=\psi(x),\ s_0=\psi'(x).$$

Такъ какъ t не входитъ въ данное уравненіе, а t_0 въ уравненіе $H=0$, то общій интегралъ получится отъ исключенія произвольной функціи ψ изъ двухъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{r} H(x,\ y,\ z,\ \xi(y),\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \psi(x))=0, \\ f(x,\ y_0,\ \varphi(x),\ \varphi'(x),\ \psi(x),\ \psi'(x))=0 \end{array}\right\}\ .\ .\ .\ .\ (48).$$

Такое исключеніе вообще невозможно, между прочимъ потому что требуетъ разрѣшенія дифференціальнаго уравненія 1-го порядка съ однимъ независимымъ перемѣннымъ, уравненія, содержащаго произвольныя функціи; но во всякомъ случаѣ два уравненія (48) всегда дадутъ возможность найти частный интегралъ, если придать произвольнымъ функціямъ частныя значенія.

III. Уравненіе данное $f(r,\ p,\ q,\ x,\ y,\ z)=0$.

Двѣ системы (11)—(12) сливаются въ одну:

$$\frac{dV}{dt}=0,\ R\frac{\triangle V}{\triangle x}-\frac{\triangle f}{\triangle x}\frac{dV}{dr}-\frac{\triangle f}{\triangle y}\frac{dV}{ds}=0=\mathfrak{X}_r+\mathfrak{U}_s\ .\ .\ .\ .\ (49).$$

Символъ Пуассона, составленный изъ первыхъ частей уравненій (49) обращается въ выраженіе

$$-\frac{df}{dq}\cdot\frac{dV}{ds}.$$

Слѣдовательно, чтобы уравненія (49) были совмѣстны, необходимо: или 1) $\frac{df}{dq}=0$, или 2) $\frac{dV}{ds}=0$; это показываетъ, что система (49) можетъ дать интегралъ, содержащій s (единственный интегралъ, который необходимъ для примѣненія предъидущей теоріи къ этому случаю), только въ томъ случаѣ, если данное уравненіе не содержитъ q. Но если данное уравненіе не содержитъ q, то оно можетъ интегрироваться какъ обыкновенное дифференціальное уравненіе 2-го порядка въ предположеніи y постояннаго; два интеграціонныхъ постоянныхъ будутъ произвольныя функціи y.

Замѣчу еще, что для случая II можно искать также интегралъ съ тремя произвольными постоянными. Въ самомъ дѣлѣ, если предположить уравненіе разрѣшеннымъ относительно s, то въ такомъ случаѣ можно примѣнить методъ Имшенецкаго.

До сихъ поръ я предполагалъ, что интегралъ системы (11)—(12) содержитъ r, s, или t. Но можетъ быть такой случай, что системы

(11)—(12) не имѣютъ интеграловъ, отличныхъ отъ даннаго уравненія и содержащихъ r, s и t, но имѣютъ интегралы, содержащіе первыя производныя; или одна только изъ системъ (11)—(12) имѣетъ интегралъ съ p и q, но безъ r, s и t. Иногда же бываетъ, что система имѣетъ только интегралы, не содержащіе производныхъ. Разсмотрю случай, когда интегралъ (11)—(12) содержитъ p и q, но не содержитъ r, s и t.

Теорема 5. Интегралъ системы (11)—(12), не содержащій r, s и t, но содержащій p и q, будучи приравненъ произвольному постоянному, даетъ промежуточный интегралъ даннаго уравненія.

Доказательство. Пусть данное уравненіе разрѣшено относительно r и даетъ

$$r=f(s,\ t,\ p,\ q,\ z,\ y,\ x).$$

Въ такомъ случаѣ интегралъ, о которомъ рѣчь и который я обозначаю черезъ V, удовлетворяетъ независимо отъ значеній s и t уравненію

$$\frac{dV}{dx}+p\frac{dV}{dz}+f\frac{dV}{dp}+s\frac{dV}{dq}+$$

$$+\omega_1\left(\frac{dV}{dy}+q\frac{dV}{dz}+s\frac{dV}{dp}+t\frac{dV}{dq}\right)=0\ \ldots\ldots\ldots (51).$$

Но изъ отысканнаго интеграла получаю

$$\frac{dV}{dx}+p\frac{dV}{dz}+r\frac{dV}{dp}+s\frac{dV}{dq}=0,\ \frac{dV}{dy}+q\frac{dV}{dz}+s\frac{dV}{dp}+t\frac{dV}{dq}=0.$$

Слѣдовательно уравненіе (51) даетъ намъ

$$\frac{dV}{dp}\ (r-f)=0\ \ldots\ldots\ldots (50).$$

Предположеніе $\frac{dV}{dp}=0$ невозможно, потому что въ уравненіи (51) s и t произвольны; а слѣдовательно, если ω_1 развернемъ по степенямъ s и t, то коэффиціентъ при каждомъ одночленѣ, составленномъ изъ степеней s и t, долженъ отдѣльно равняться нулю. Но степень t при $\frac{dV}{dq}$ будетъ всегда выше, чѣмъ при остальныхъ производныхъ; а потому предположеніе $\frac{dV}{dp}=0$ влечетъ за собою $\frac{dV}{dq}=0$; т. е. въ такомъ случаѣ система (11)—(12) не имѣетъ интеграла, содержащаго p и q. Слѣдовательно изъ уравненія (50) слѣдуетъ, что уравненіе $r=f$ обращается въ тождество, когда въ немъ r и t замѣнены величинами, опредѣленными изъ $V=0$, что и требовалось доказать.

Если уравненіе

$$\frac{\Delta V}{\Delta x}+\omega_1\frac{\Delta V}{\Delta y}=0\ \ldots\ldots\ldots (51)$$

допускаетъ два интеграла, то V можно представить въ видѣ разности одного интеграла и произвольной функціи другаго; а слѣдовательно въ силу предъидущей теоремы мы будетъ имѣть промежуточный общій интегралъ, содержащій произвольную функцію. Въ такомъ случаѣ общій интегралъ получится непосредственно.

Если же мы будемъ имѣть одинъ только интегралъ уравненія (51), содержащій p и q, то можно будетъ найти частный интегралъ съ тремя произвольными постоянными. Общій же интегралъ получится методомъ Имшенецкаго, если только строку Тэйлора, встрѣчающуюся въ этомъ методѣ, можно суммировать, или если эта строка оканчивается на какомъ нибудь членѣ. Если же невозможно примѣнить методъ Имшенецкаго, то надо искать полный интегралъ посредствомъ пріема, изложеннаго въ третьей главѣ, или инымъ образомъ; потомъ къ этому полному интегралу можно будетъ примѣнить методъ Лагранжа.

Вспомню, что Амперъ далъ методы для опредѣленія частнаго интеграла съ тремя постоянными для линейныхъ, билинейныхъ и нелинейныхъ уравненій. Легко доказать, что интегралъ, получаемый методомъ Ампера, какъ въ случаѣ линейнаго, такъ и билинейнаго и нелинейнаго уравненій, удовлетворяетъ всегда уравненію (51), въ которомъ r замѣненъ f, независимо отъ величинъ s и t. Для линейнаго и билинейнаго уравненій доказывается это тѣмъ, что коэффиціенты при s и t и коэффиціентъ, независимый отъ s и t, въ уравненіи (51) суть первыя части уравненій Бура. Здѣсь я приведу доказательство только для нелинейнаго уравненія; доказательство это однако же распространяется и на линейныя, и на билинейныя уравненія.

Интеграція уравненія (51) приводится къ отысканію какого нибудь интеграла, независящаго отъ s и t, системы

$$dx = \frac{dy}{\omega_1} = \frac{dz}{p+q\omega_1} = \frac{dp}{r+s\omega_1} = \frac{dq}{s+t\omega_1}.$$

Изъ этихъ уравненій имѣю

$$s = \frac{dq}{dx} - t\frac{dy}{dx},\quad r = \frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2}.$$

Но между r, s и t есть связь—данное уравненіе. Поэтому интеграція приводится къ интеграціи совмѣстныхъ уравненій:

$$R\frac{dy^2}{dx^2} + S\frac{dy}{dx} + T = 0 \ldots\ldots\ldots (53),$$

$$f\left(\frac{dp}{dx} - \frac{dq}{dx}\frac{dy}{dx} + t\frac{dy^2}{dx^2},\ \frac{dq}{dx} - t\frac{dy}{dx}, t, q, p, z, y, x\right) = 0 \ldots\ldots (52),$$

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx} \ldots\ldots\ldots (54),$$

гдѣ $f=0$ данное уравненіе; эти три уравненія должны быть удовлетворены независимо отъ t. Но методъ Ампера состоитъ въ томъ, чтобы удовлетворить (54) и (52) независимо отъ t; для этого (52) развертывается по степенямъ t. Такъ какъ (53) даетъ при развертываніи по степенямъ t тѣ же коэффиціенты, кромѣ перваго, что и (52), то заключаю, что всякій интегралъ, полученный методомъ Ампера, удовлетворяетъ (51).

Примѣчаніе. Уравненія (11) и (12) можно вывести иначе, чѣмъ это сдѣлано въ началѣ этой главы, а именно изъ уравненій (25^{bis})—(26^{bis}). Предполагая эти два уравненія тождественными, т. е. коэффиціенты обоихъ уравненій пропорціональными, я получаю четыре пропорціи, изъ которыхъ двѣ—слѣдствія двухъ остальныхъ. Двѣ пропорціи даютъ

$$ac - b^2 = 0 \text{ и } b(\mathfrak{X}_s + \mathfrak{U}_t) - a\mathfrak{X}_t = 0 \ldots\ldots\ldots (84).$$

Первое уравненіе послѣ нѣкоторыхъ простыхъ преобразованій даетъ (11), а второе съ помощью (11)—уравненіе (12). Поэтому я могу замѣнить интеграцію уравненій (11) и (12) интеграціею уравненій (84); эту интеграцію можно совершить методомъ Бура.

ГЛАВА III.

О пріемѣ, могущемъ дать полный интегралъ уравненія 2-го порядка съ двумя перемѣнными въ томъ случаѣ, когда методъ, описанный во 2-й главѣ, вовсе не примѣняется.

Давно уже извѣстно, что формулы Монжа, Ампера, а также формулы, выведенныя въ главѣ второй, даютъ рѣшеніе только въ очень рѣдкихъ случаяхъ именно вслѣдствіе того, что эти уравненія мы умѣемъ интегрировать, только разсматривая ихъ какъ обыкновенныя дифференціальныя уравненія, которыя не всегда совмѣстны. Но всѣмъ извѣстно, что уравненія (2), (4^{bis}), (7^{bis}), (8^{bis}) въ сущности—не дифференціальныя уравненія съ полными дифференціалами, такъ какъ y, z, p, q, r, s и t не только функціи x, но и u. Но такое вполнѣ точное пониманіе дѣла не только не даетъ возможность рѣшить задачу въ случаѣ, когда пріемы Монжа и Ампера не примѣняются, но даже, на сколько мнѣ извѣстно, не намѣчаетъ пути, которымъ хоть ощупью иногда можно было бы достигнуть рѣшенія уравненія 2-го порядка. Правда, на страницѣ 139-й своего сочиненія Грэндоржъ даетъ формулы, изъ которыхъ выводитъ нѣсколько частныхъ теоремъ; но для интеграціи эти формулы непригодны. Въ такомъ случаѣ остается прибѣгнуть къ рѣшенію съ помощью рядовъ, или къ какимъ нибудь другимъ частнымъ пріемамъ.

Мнѣ кажется, что формулы, приведенныя мною въ главѣ **2-й** подъ нумерами (25^{bis}) и (26^{bis}), имѣютъ то преимущество, что не только указываютъ на причину частности рѣшенія, но еще показываютъ, какъ можно иногда найти ощупью рѣшеніе.

Формулы (25^{bis}) и (26^{bis}) были выведены посредствомъ исключенія

$$\frac{dr}{dx},\ \frac{ds}{dx},\ \frac{dt}{dx} \text{ и } \frac{dt}{dy}$$

изъ шести дифференціальныхъ уравненій, изъ которыхъ четыре получились дифференціаціею двухъ неизвѣстныхъ уравненій, а два остальныхъ дифференціаціею даннаго уравненія. Два неизвѣстныя уравненія должны вмѣстѣ съ даннымъ опредѣлить r, s и t какъ функціи p, q, z, x и y. Въ случаѣ, если я найду двѣ функціи K и F, содержащія r, s и t и удовлетворяющія уравненіямъ (25) и (26), данное уравненіе и два уравненія $K=\alpha$ и $F=\beta$ всегда опредѣлятъ r, s и t такимъ образомъ, что три уравненія

$$dp=rdx+sdy,\quad dq=sdx+tdy \text{ и } dz=pdx+qdy$$

вполнѣ совмѣстны (это доказано на страницахъ 61—64). Въ главѣ 2-й было доказано, что уравненія (25) и (26) тождественны, если одна изъ функцій K и F удовлетворяетъ (11) и (12) (въ частныхъ случаяхъ одно изъ уравненій (25) и (26) обращается въ $0=0$). Такимъ образомъ методъ, изложенный въ главѣ 2-й, разсматриваетъ только тотъ случай, когда оба уравненія (25) и (26), разсматриваемыя какъ линейныя дифференціальныя уравненія съ одною неизвѣстною функціею K, тождественны. Но эти же уравненія могутъ дать рѣшеніе и въ другомъ случаѣ, именно въ томъ случаѣ, когда функція F опредѣлена такъ, что оба линейныя уравненія, въ которыхъ уже одна неизвѣстная функція K, вполнѣ совмѣстны.

Въ такомъ случаѣ рѣшеніе двухъ вполнѣ совмѣстныхъ уравненій дастъ шесть различныхъ между собою интеграловъ, между которыми будутъ $K=f$ и $K=F$. Приравнивая нулю интегралъ f и пяти произвольнымъ постояннымъ остальные пять интеграловъ, я получу шесть уравненій, изъ которыхъ полный интегралъ выводится посредствомъ исключенія пяти величинъ r, s, t, p и q. Что это такъ, легко доказать. Дѣйствительно функція z, опредѣляемая этими уравненіями, такова, что

$$dz=pdx+qdy;$$

p и q же таковы, что

$$dp=rdx+sdy \text{ и } dq=sdx+tdy.$$

Въ этомъ можно убѣдиться, разрѣшивъ оба линейныя уравненія (25) и (26) относительно $\frac{dK}{dx}$ и $\frac{dK}{dy}$; тогда мы получимъ два линейныя уравненія, рѣшеніе которыхъ по Майеру соотвѣтствуетъ нахожденію интегральной системы для вполнѣ совмѣстныхъ уравненій:

$$dz=pdx+qdy,\ dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy,\ dr=\alpha dx+\beta dy,$$
$$ds=\beta dx+\gamma dy \text{ и } dt=\gamma dx+\delta dy.$$

(Значенія α, β, γ и δ разъяснены далѣе). Наконецъ r, s, t, p, q и z, опредѣляемыя изъ найденной интегральной системы, удовлетворяютъ данному уравненію (такъ какъ $f=0$ въ предъидущемъ изложеніи означаетъ данное уравненіе).

Тутъ возникаютъ два вопроса: 1) можно ли найти такую функцію F, которая дѣлала бы два уравненія (25^{bis}) и (26^{bis}) двумя вполнѣ совмѣстными уравненіями съ одною функціею K; 2) если можно, то какъ найти эту функцію F?

Для разрѣшенія перваго вопроса разсмотрю условія полной совмѣстности уравненій (25^{bis}) и (26^{bis}) въ томъ случаѣ, когда эти уравненія разсматриваются какъ уравненія съ одною функціею K. Разрѣшу уравненія (25^{bis}) и (26^{bis}) относительно $\frac{dK}{dx}$ и $\frac{dK}{dy}$; тогда имѣю

$$\frac{dK}{dx}+p\frac{dK}{dz}+r\frac{dK}{dp}+s\frac{dK}{dq}+\alpha\frac{dK}{dr}+\beta\frac{dK}{ds}+\gamma\frac{dK}{dt}=0=A(K).(1),$$

$$\frac{dK}{dy}+q\frac{dK}{dz}+s\frac{dK}{dp}+t\frac{dK}{dq}+\beta\frac{dK}{dr}+\gamma\frac{dK}{ds}+\delta\frac{dK}{dt}=0=B(K)..(2),$$

гдѣ α, β, γ и δ опредѣляются изъ четырехъ уравненій:

$$\frac{\triangle f}{\triangle x}+\alpha\frac{df}{dr}+\beta\frac{df}{ds}+\gamma\frac{df}{dt}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (3),$$

$$\frac{\triangle f}{\triangle y}+\beta\frac{df}{dr}+\gamma\frac{df}{ds}+\delta\frac{df}{dt}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (4),$$

$$\frac{\triangle F}{\triangle x}+\alpha\frac{dF}{dr}+\beta\frac{dF}{ds}+\gamma\frac{dF}{dt}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (5),$$

$$\frac{\triangle F}{\triangle y}+\beta\frac{dF}{dr}+\gamma\frac{dF}{ds}+\delta\frac{dF}{dt}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ (6).$$

Въ послѣднихъ четырехъ уравненіяхъ символы $\frac{\triangle}{\triangle x}$ и $\frac{\triangle}{\triangle y}$ означаютъ первыя четыре дифференціальныя дѣйствія въ (1) и (2).

Условія полной совмѣстности двухъ уравненій (1) и (2), какъ извѣстно, состоятъ въ томъ, чтобы каждый коэффиціентъ при различныхъ производныхъ K въ первомъ уравненіи, будучи подставленъ во второе уравненіе, давалъ тотъ же результатъ, какой получается отъ подстановки въ первое уравненіе коэффиціента при той же производной во второмъ уравненіи. Обозначаю черезъ $A(K)$ и $B(K)$ операціи, производимыя при подстановкѣ функціи K въ (1) и (2) уравненія, а коэффиціенты при различныхъ производныхъ K въ (1) уравненіи черезъ $a_1, a_2 \dots a_6$, а во (2) черезъ $b_1, b_2 \dots b_6$; тогда я могу условія полной совмѣстности выразить уравненіемъ

$$A(b_i)=B(a_i),$$

и такихъ условій шесть. Но при $i=1$, 2, 3 мы получаемъ тождества $s=s$, $\beta=\beta$ и $\gamma=\gamma$; остаются слѣдовательно три условія:

$$A(\beta)=B(\alpha),\ A(\gamma)=B(\beta) \text{ и } A(\delta)=B(\gamma)\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (7).$$

Теорема 1. Достаточно удовлетворить одному изъ условій (7), чтобы два остальныя были также удовлетворены.

Доказательство. Сдѣлаю надъ уравненіемъ (3) операцію B, а надъ уравненіемъ (4) операцію A. Тогда, обозначая по прежнему первыя четыре дифференціальныя операціи уравненій (1) и (2) черезъ $\frac{\triangle}{\triangle x}$ и $\frac{\triangle}{\triangle y}$, получаю

$$\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{\triangle f}{\triangle x}\right)+\beta\frac{df}{dp}+\gamma\frac{df}{dq}+\beta\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{df}{dr}\right)+\gamma\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{df}{ds}\right)+\delta\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{df}{dt}\right)+$$
$$+\alpha\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{df}{dr}\right)+\beta\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{df}{ds}\right)+\gamma\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{df}{dt}\right)+\alpha\beta\frac{d^2f}{dr^2}+\beta\gamma\frac{d^2f}{ds^2}+$$
$$+\gamma\delta\frac{d^2f}{dt^2}+(\alpha\gamma+\beta^2)\frac{d^2f}{drds}+(\alpha\delta+\beta\gamma)\frac{d^2f}{drdt}+(\beta\delta+\gamma^2)\frac{d^2f}{dsdt}+$$
$$+B(\alpha)\frac{df}{dr}+B(\beta)\frac{df}{ds}+B(\gamma)\frac{df}{dt}=0\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ .\ (8),$$

$$\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f}{\Delta y}\right)+\beta\frac{df}{dp}+\gamma\frac{df}{dq}+\beta\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{df}{dr}\right)+\ldots\ldots+\alpha\frac{\Delta}{\Delta y}\left(\frac{df}{dr}\right)+\ldots$$

$$+\gamma\frac{\Delta}{\Delta y}\left(\frac{df}{dt}\right)+\alpha\beta\frac{d^2f}{dr^2}+\ldots\ldots+(\beta\gamma+\alpha\delta)\frac{d^2f}{dr\,dt}+(\beta\delta+\gamma^2)\frac{d^2f}{ds\,dt}+$$

$$+A(\beta)\frac{df}{dr}+A(\gamma)\frac{df}{ds}+A(\delta)\frac{df}{dt}=0\ldots\ldots\ldots\ (9).$$

Въ этихъ формулахъ

$$\frac{\Delta}{\Delta y}\left(\frac{\Delta f}{\Delta x}\right)=\frac{\Delta}{\Delta x}\left(\frac{\Delta f}{\Delta y}\right);$$

это легко видѣть, написавъ оба выраженія подробно. Если въ (8) и (9) α, β, γ и δ замѣнены изъ уравненій (3), (4), (5) и (6), то (8) и (9)—тождества. Изъ этихъ двухъ тождествъ вывожу третье тождество:

$$\frac{df}{dr}\{A(\beta)-B(\alpha)\}+\frac{df}{ds}\{A(\gamma)-B(\beta)\}+\frac{df}{dt}\{A(\delta)-B(\gamma)\}=0\ldots\ (10).$$

Производя тѣ же вычисленія съ (5) и (6) уравненіями, имѣю тождество:

$$\frac{dF}{dr}\{A(\beta)-B(\alpha)\}+\frac{dF}{ds}\{A(\gamma)-B(\beta)\}+\frac{dF}{dt}\{A(\delta)-B(\gamma)\}=0\ldots(11).$$

Если положу удовлетвореннымъ одно изъ равенствъ (7), напримѣръ первое, то изъ тождествъ (10) и (11) будутъ слѣдовать равенства

$$A(\gamma)=B(\beta)\ \text{и}\ A(\delta)=B(\gamma),$$

что̀ и требовалось доказать.

Примѣчаніе. Предъидущее доказательство предполагало, что всѣ три величины r, s и t встрѣчаются въ f и F; впрочемъ нѣтъ необходимости, чтобы всѣ три величины входили въ f и всѣ три въ F; но только требуется, чтобы въ каждомъ изъ f и F находились двѣ изъ величинъ r, s и t. Но и въ тѣхъ случаяхъ, когда одна изъ функцій, f или F, содержитъ только одну изъ величинъ r, s и t, или когда одна изъ величинъ r, s и t не встрѣчается ни въ f, ни въ F, теорема вѣрна; только нельзя уже выбирать изъ

равенствъ (7) любое для удовлетворенія. Только къ тому случаю, когда f и F содержатъ только одну изъ величинъ r, s и t (напримѣръ только r), не примѣняется теорема. Но такой случай и не разсматривается, такъ какъ F ищется вполнѣ отличное отъ f относительно выраженій r, s и t; если же въ обѣ функціи входитъ только одна вторая производная, напримѣръ r, то онѣ не различны.

Итакъ, въ сущности,—*одно* условіе полной совмѣстности уравненій (1) и (2). Слѣдовательно F, разсматриваемая какъ неизвѣстная функція, должна удовлетворять одному уравненію 2-го порядка съ восемью независимыми перемѣнными, уравненію линейному относительно производныхъ втораго порядка; кромѣ того F должна быть отлична отъ f относительно r, s и t.

Анализъ не обладаетъ еще точнымъ доказательствомъ, что всякое уравненіе съ частными производными 2-го порядка имѣетъ интегралъ. Всѣ доказательства существованія интеграла, даже для уравненій 1-го порядка съ одною независимою перемѣнною, основываются на разложеніи въ рядъ неизвѣстной функціи; такой способъ, даже доведенный до совершенства (доказательство въ учебникѣ Serret для обыкновенныхъ уравненій 1-го порядка), доказываетъ существованіе интеграла подъ нѣкоторыми ограниченіями. Поэтому, не отвѣчая положительно, что всегда можно выбрать F такъ, чтобы (1) и (2) были вполнѣ совмѣстны, я могу однако сказать, что эта возможность вѣроятна во многихъ случаяхъ, и что кругъ этихъ случаевъ обширнѣе круга случаевъ тождественности двухъ уравненій (25^{bis}) и (26^{bis}).

Вмѣстѣ съ тѣмъ разрѣшается и 2-й вопросъ: какъ найти F, обращающую (1) и (2) въ уравненія вполнѣ совмѣстныя? Отвѣтъ: надо отыскать частный интегралъ одного изъ уравненій (7), или такого уравненія 2-го порядка съ восемью перемѣнными, удовлетвореніе котораго влечетъ за собою удовлетвореніе (7). При настоящемъ положеніи анализа задачу эту возможно разрѣшить только ощупью.

Когда F найдена, то интеграція доканчивается нахожденіемъ остальныхъ четырехъ интеграловъ вполнѣ совмѣстныхъ уравненій:

$$dr=\alpha dx+\beta dy,\ ds=\beta dx+\gamma dy,\ dt=\gamma dx+\delta dy,\ dp=rdx+sdy,$$
$$dq=sdx+tdy\ \text{и}\ dz=pdx+qdy.$$

Эта интеграція можетъ быть значительно облегчена, если двѣ изъ величинъ r, s и t опредѣлены изъ $f=0$ и $F=$произ. пост. въ функціяхъ x, y, z и остальныхъ производныхъ z. Въ такомъ случаѣ придется интегрировать четыре уравненія. Впрочемъ можно опредѣлять изъ $f=0$ и $F=$пост. всякія другія изъ величинъ r, s, t, p, q, z, y и x, и въ такомъ случаѣ число уравненій уменьшится на два.

Выведу въ заключеніе уравненіе втораго порядка, которое всегда можетъ замѣнить (7). Обозначаю для краткости

$$\left.\begin{aligned}
AA(V)&=\mathfrak{M}A(V)+\frac{dV}{dr}A(\alpha)+\frac{dV}{ds}A(\beta)+\frac{dV}{dt}A(\gamma),\\
AB(V)&=\mathfrak{M}B(V)+\frac{dV}{dr}A(\beta)+\frac{dV}{ds}A(\gamma)+\frac{dV}{dt}A(\delta),\\
BA(V)&=\mathfrak{N}A(V)+\frac{dV}{dr}B(\alpha)+\frac{dV}{ds}B(\beta)+\frac{dV}{dt}B(\gamma),\\
BB(V)&=\mathfrak{N}B(V)+\frac{dV}{dr}B(\beta)+\frac{dV}{ds}B(\gamma)+\frac{dV}{dt}B(\delta)
\end{aligned}\right\}\ \ldots (13).$$

Такимъ образомъ значки $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ обозначаютъ операціи A и B, совершенныя въ предположеніи α, β, γ и δ постоянныхъ. Предполагая, что въ уравненіяхъ (3), (4), (5) и (6) α, β, γ и δ замѣнены функціями r, s, t, p, q, z, y и x, я имѣю четыре тождества. Предполагая же, что (7) удовлетворены, я имѣю шесть тождествъ:

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{M}A(f)+\frac{df}{dr}A(\alpha)+\frac{df}{ds}A(\beta)+\frac{df}{dt}A(\gamma)=0,\\
&\mathfrak{M}B(f)+\frac{df}{dr}A(\beta)+\frac{df}{ds}A(\gamma)+\frac{df}{dt}A(\delta)=0,\\
&\mathfrak{N}B(f)+\frac{df}{dr}A(\gamma)+\frac{df}{ds}A(\delta)+\frac{df}{dt}B(\delta)=0
\end{aligned}\right\}\ \ldots . (12),$$

$$\left.\begin{aligned}
&\mathfrak{M}A(F)+\frac{dF}{dr}A(\alpha)+\frac{dF}{ds}A(\beta)+\frac{dF}{dt}A(\gamma)=0,\\
&\mathfrak{M}B(F)+\frac{dF}{dr}A(\beta)+\frac{dF}{ds}A(\gamma)+\frac{dF}{dt}A(\delta)=0,\\
&\mathfrak{N}B(F)+\frac{dF}{dr}A(\gamma)+\frac{dF}{ds}A(\delta)+\frac{dF}{dt}B(\delta)=0
\end{aligned}\right\}\ \ldots . (14).$$

Помножая уравненія (12) на $\frac{dF}{dr}$, $\frac{dF}{ds}$ и $\frac{dF}{dt}$, а уравненія (14) на $\frac{df}{dr}$, $\frac{df}{ds}$ и $\frac{df}{dt}$ и вычитая попарно, имѣю

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{dr}\mathfrak{M}A(F)-\frac{dF}{dr}\mathfrak{M}A(f)+\left(\frac{df}{dr}\frac{dF}{ds}-\frac{df}{ds}\frac{dF}{dr}\right)A(\beta)+\\
&\qquad+\left(\frac{df}{dr}\frac{dF}{dt}-\frac{df}{dt}\frac{dF}{dr}\right)A(\gamma)=0 \ldots\ldots (16),\\
&\frac{df}{ds}\mathfrak{M}B(F)-\frac{dF}{ds}\mathfrak{M}B(f)+\left(\frac{df}{ds}\frac{dF}{dr}-\frac{df}{dr}\frac{dF}{ds}\right)A(\beta)+\\
&\qquad+\left(\frac{df}{ds}\frac{dF}{dt}-\frac{df}{dt}\frac{dF}{ds}\right)A(\delta)=0 \ldots\ldots (17),\\
&\frac{df}{dt}\mathfrak{N}B(F)-\frac{dF}{dt}\mathfrak{N}B(f)+\left(\frac{df}{dt}\frac{dF}{dr}-\frac{df}{dr}\frac{dF}{dt}\right)A(\gamma)+\\
&\qquad+\left(\frac{df}{dt}\frac{dF}{ds}-\frac{df}{ds}\frac{dF}{dt}\right)A(\delta)=0 \ldots\ldots (18).
\end{aligned}$$

Складываю всѣ эти равенства:

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{dr}\mathfrak{M}A(F)-\frac{dF}{dr}\mathfrak{M}A(f)+\frac{df}{ds}\mathfrak{M}B(F)-\frac{dF}{ds}\mathfrak{M}B(f)+\frac{df}{dt}\mathfrak{N}B(F)-\\
&\qquad-\frac{dF}{dt}\mathfrak{N}B(f)=0 \ldots\ldots\ldots (15).
\end{aligned}$$

Въ послѣднемъ уравненіи $\mathfrak{M}B(F)$ и $\mathfrak{M}B(f)$ можно замѣнять чрезъ $\mathfrak{N}A(F)$ и $\mathfrak{N}A(f)$.

Уравненіе (15) есть слѣдствіе уравненій (7). Наоборотъ, уравненія (7) суть слѣдствія уравненія (15).

Доказательство. Уравненія (16) и (17) тождества, если даже (7) не удовлетворены; а (18) не тождество, но получается отъ вычитанія изъ (15) уравненій (16) и (17). Кромѣ того имѣю тождественно, безъ удовлетворенія (7),

$$\begin{aligned}
&\frac{df}{dt}\mathfrak{N}B(F)-\frac{dF}{dt}\mathfrak{N}B(f)+\left(\frac{df}{dt}\frac{dF}{dr}-\frac{df}{dr}\frac{dF}{dt}\right)B(\beta)+\\
&\qquad+\left(\frac{df}{dt}\frac{dF}{ds}-\frac{df}{ds}\frac{dF}{dt}\right)B(\gamma)=0 \ldots\ldots\ldots (19).
\end{aligned}$$

Если (15) удовлетворено, то изъ (18) и (19) слѣдуетъ тождество:

$$\left(\frac{df}{dt}\frac{dF}{dr}-\frac{df}{dr}\frac{dF}{dt}\right)\{A(\gamma)-B(\beta)\}+$$

$$+\left(\frac{df}{dt}\frac{dF}{ds}-\frac{dF}{dt}\frac{df}{ds}\right)\{A(\delta)-B(\gamma)\}=0\ldots\ldots(20).$$

Изъ тождествъ (10), (11) и (20) слѣдуютъ уравненія (7), что̀ и требовалось доказать.

Примѣчаніе. Легко замѣтить, что въ случаяхъ, когда или r, или t не встрѣчается ни въ f, ни въ F, изъ уравненій (3), (4), (5) и (6) можно исключить α, β, γ и δ, такъ какъ или α, или δ вовсе не входитъ въ эти уравненія. По исключеніи мы получимъ или уравненіе (36) главы 2-й, или аналогичное ему; т. е. въ такомъ случаѣ F удовлетворяетъ системѣ (11)—(12) главы 2-й, и изъ двухъ уравненій (1) и (2) одно излишне, такъ какъ удовлетворяется всѣми значеніями K, удовлетворяющими другому. Итакъ изъ трехъ производныхъ r, s и t въ разбираемомъ случаѣ только s можетъ отсутствовать въ обѣихъ функціяхъ f и F. Благодаря этой замѣткѣ, можно доказать, что (15) всегда можетъ замѣнить (7). Въ самомъ дѣлѣ, въ равенствѣ (20) или оба опредѣлителя не равны нулю, или одинъ равенъ нулю, или оба равны нулю. 1) Если оба опредѣлителя не равны нулю, то f и F содержатъ всѣ три производныя r, s и t, и слѣдовательно всѣ три разности $A(\beta)-B(\alpha)$, $A(\gamma)-B(\beta)$ и $A(\delta)-B(\gamma)$ входятъ въ три уравненія (10), (11) и (20). 2) Если первый изъ опредѣлителей (20) равенъ нулю, то f или F содержатъ s (иначе уравненія $f=0$ и $F=$пост. не могутъ служить для опредѣленія r, s и t); а потому и въ такомъ случаѣ всѣ три разности входятъ въ (10), (11) и (20). 3) Если второй опредѣлитель (20) равенъ нулю, то, такъ какъ или f, или F содержатъ t, разность $A(\delta)-B(\gamma)$ входитъ въ одно изъ равенствъ (10) и (11). 4) Оба опредѣлителя могутъ равняться нулю: a) въ томъ случаѣ, когда ни f, ни F не содержатъ t, b) когда производныя F по r, s и t пропорціональны такимъ же производнымъ отъ f. Первый случай не подлежитъ разсмотрѣнію. Во второмъ же случаѣ f и F тождественны относительно r, s и t.

Чтобы облегчить пользованіе уравненіемъ (15), прилагаю значенія функцій $\mathfrak{M}A(f)$, $\mathfrak{M}B(f)$ и $\mathfrak{N}B(f)$:

$$\mathfrak{M}A(f)=\frac{\triangle^2 f}{\triangle x^2}+\alpha\frac{df}{dp}+\beta\frac{df}{dq}+2\alpha\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{df}{dr}\right)+2\beta\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{df}{ds}\right)+$$

$$+2\gamma\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{df}{dt}\right)+\alpha^2\frac{d^2f}{dr^2}+\beta^2\frac{d^2f}{ds^2}+\gamma^2\frac{d^2f}{dt^2}+2\alpha\beta\frac{d^2f}{drds}+2\alpha\gamma\frac{d^2f}{drdt}+$$

$$+2\beta\gamma\frac{d^2f}{dsdt}\ldots\ldots\ldots(21);$$

$$\mathfrak{M}B(f)=\mathfrak{N}A(f)=\frac{\triangle^2 f}{\triangle x\triangle y}+\beta\frac{df}{dp}+\gamma\frac{df}{dq}+\beta\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{df}{dr}\right)+$$

$$+\gamma\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{df}{ds}\right)+\delta\frac{\triangle}{\triangle x}\left(\frac{df}{dt}\right)+\alpha\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{df}{dr}\right)+\beta\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{df}{ds}\right)+$$

$$+\gamma\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{df}{dt}\right)+\alpha\beta\frac{d^2f}{dr^2}+\beta\gamma\frac{d^2f}{ds^2}+\gamma\delta\frac{d^2f}{dt^2}+(\alpha\gamma+\beta^2)\frac{d^2f}{drds}+$$

$$+(\alpha\delta+\beta\gamma)\frac{d^2f}{drdt}+(\beta\delta+\gamma^2)\frac{d^2f}{dsdt}\ldots\ldots\ldots(21);$$

$$\mathfrak{N}B(f)=\frac{\triangle^2 f}{\triangle y^2}+\gamma\frac{df}{dp}+\delta\frac{df}{dq}+2\beta\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{df}{dr}\right)+2\gamma\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{df}{ds}\right)+$$

$$+2\delta\frac{\triangle}{\triangle y}\left(\frac{df}{dt}\right)+\beta^2\frac{d^2f}{dr^2}+\gamma^2\frac{d^2f}{ds^2}+\delta^2\frac{d^2f}{dt^2}+2\beta\gamma\frac{d^2f}{drds}+2\beta\delta\frac{d^2f}{drdt}+$$

$$+2\gamma\delta\frac{d^2f}{dsdt}\ldots\ldots\ldots(21).$$

Въ этихъ формулахъ α, β, γ и δ должны быть замѣнены изъ (3), (4), (5) и (6).

По формуламъ (15) и (21) иногда очень легко находится F (въ другихъ случаяхъ, напротивъ, изъ нихъ трудно вывести заключеніе). Такъ $F=r$, если при предположеніи $r=const.$ α, β, γ и δ опредѣляются такъ, что $\mathfrak{M}A(f)=0$. Случай $F=t$ возможенъ только при условіи $\mathfrak{N}B(f)=0$. Предположеніе $F=s$ требуетъ удовлетворенія $\mathfrak{M}B(f)=\mathfrak{N}A(f)=0$. Вообще F можно принять функціею только r, s и t, когда можно удовлетворить уравненію:

$$\frac{dF}{dr}\mathfrak{M}A(f)+\frac{dF}{ds}\mathfrak{M}B(f)+\frac{dF}{dt}\mathfrak{N}B(f)=0.$$

Примѣръ 1.

$$r=s^2+y^3t\ldots\ldots\ldots(22).$$

Если положу $F=r=\mu$, гдѣ μ произвольное постоянное, то изъ уравненія (6) имѣю $\beta=0$; а слѣдовательно $\mathfrak{M}A(f)=0$, что̀ показываетъ возможность принять $F=r=\mu$. Для дальнѣйшей интеграціи беру вполнѣ совмѣстныя уравненія:

$$ds=\beta dx+\gamma dy,\quad dp=\mu dx+sdy,\quad dq=sdx+tdy \text{ и } dz=pdx+qdy,$$

гдѣ γ и t должны быть опредѣлены изъ (22). Дифференцируя (22) по x, имѣю

$$\alpha=2s\beta+y^3\gamma;$$

но $\alpha=0$ и $\beta=0$ на основаніи $r=\mu$; слѣдовательно $\gamma=0$, $ds=0$, $s=\lambda$. Послѣ этого изъ (22) имѣю

$$t=\frac{\mu-\lambda^2}{y^3}.$$

Постепенная интеграція уравненій $dp=\mu dx+\lambda dy$, $dq=\lambda dx+tdy$, $dz=pdx+qdy$ даетъ

$$z=\varepsilon+\gamma x+\delta y+\frac{1}{2}\mu x^2+\lambda xy+\frac{\mu-\lambda^2}{2y}.$$

Примѣръ 2.

$$r=\frac{1}{2}t^2+qs\ \ldots\ldots\ldots\ldots (23).$$

Полагая $F=t=\mu$ и замѣчая, что

$$\frac{\triangle f}{\triangle y}=ts,$$

я вижу, что уравненіе $\mathfrak{N}B(f)=0$ удовлетворяется при $\gamma=0$ и $\delta=0$; но эти послѣднія равенства даются въ (5) и (6). Слѣдовательно я могу положить $F=t=\mu$. Дифференцируя (23) по y, получаю

$$\beta=ts=\mu s.$$

Слѣдовательно s опредѣлится изъ уравненія $ds=\mu s dx$; интегрируя, получаю

$$s=\nu e^{\mu x}.$$

Далѣе опредѣляю q изъ уравненія $dq=sdx+tdy$:

$$q=\lambda+\mu y+\frac{\nu}{\mu}e^{\mu x}.$$

Послѣ этого изъ уравненія (23) получаю

$$r=\frac{1}{2}\mu^2+\lambda\nu e^{\mu x}+\mu\nu y e^{\mu x}+\frac{\nu^2}{\mu}e^{2\mu x}.$$

Далѣе опредѣляю p:

$$dp=rdx+sdy=\left(\frac{1}{2}\mu^2+\lambda\nu e^{\mu x}+\mu\nu y e^{\mu x}+\frac{\nu^2}{\mu}e^{2\mu x}\right)dx+\nu e^{\mu x}dy;$$

$$p=\varepsilon+\frac{\lambda\nu}{\mu}e^{\mu x}+\frac{\nu^2}{2\mu^2}e^{2\mu x}+\nu y e^{\mu x}+\frac{1}{2}\mu^2 x.$$

Полагая далѣе для простоты $\frac{\nu}{\mu}=\rho$, я изъ уравненія $dz=pdx+qdy$ получаю

$$z=\omega+\varepsilon x+\lambda y+\frac{1}{4}\mu^2x^2+\frac{1}{2}\mu y^2+\frac{\lambda\rho}{\mu}e^{\mu x}+\frac{\rho^2}{4\mu}e^{2\mu x}+\rho y e^{\mu x}.$$

Примѣръ 3.

$$r=\frac{s^2}{4t}-2q+2yt\ \ldots\ldots (24).$$

Такъ какъ $\frac{\triangle f}{\triangle y}=0$, то могу положить $t=\lambda$. Дѣйствительно тогда $\gamma=0$, $\delta=0$ на основаніи (5) и (6); а слѣдовательно $\mathfrak{N}B(f)=0$. Уравненія (25^{bis}) и (26^{bis}) 2-ой главы при $K=t$ обращаются въ слѣдующія: $\mathfrak{X}_r+\mathfrak{U}_s=0$, $\mathfrak{U}_r=0$. Въ эти уравненія не входитъ $\frac{dF}{ds}$; а потому могу положить

$$F=s=\mu.$$

Опредѣляю q:

$$q=\mu x+\lambda y+\nu.$$

Опредѣляю r изъ (24):

$$r=\frac{\mu^2}{4\lambda}-2\mu x-2\nu.$$

Слѣдовательно

$$p = \varepsilon + \mu y - \mu x^2 + \left(\frac{\mu^2}{4\lambda} - 2\nu\right)x.$$

Полный же интегралъ будетъ

$$z = \omega + \varepsilon x + \nu y + \mu xy + \frac{1}{2}\lambda y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{4\lambda} - 2\nu\right)x^2 - \frac{1}{3}\mu x^3.$$

Примѣръ 4.

$$xrt - ys = 0. \; . \; . \; . \; . \; . \; (27).$$

Въ этомъ примѣрѣ $\mathfrak{N}B(f) = -2\gamma + 2x\beta\delta$; слѣдовательно можно положить $t = \lambda$, ибо тогда $\gamma = 0$ и $\delta = 0$. Для опредѣленія s я долженъ найти еще β; для этого дѣлаю операцію B надъ (27):

$$\beta xt - s = 0.$$

Слѣдовательно

$$ds = \frac{s}{xt}dx, \; s = (\mu x)^{\frac{1}{\lambda}}.$$

Изъ уравненія (27) слѣдуетъ

$$r = \frac{\mu^{\frac{1}{\lambda}}}{\lambda} y x^{\frac{1-\lambda}{\lambda}}.$$

Опредѣляю постепенно p, q и z:

$$p = \varepsilon + y(\mu x)^{\frac{1}{\lambda}}; \; q = \omega + \lambda y + \frac{\lambda\mu^{\frac{1}{\lambda}} x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{\lambda+1};$$

$$z = \rho + \varepsilon x + \omega y + \frac{1}{2}\lambda y^2 + \frac{\lambda\mu^{\frac{1}{\lambda}} y x^{\frac{\lambda+1}{\lambda}}}{\lambda+1}.$$

Примѣръ 5.

$$s(r+t) = (x+y)^2. \; . \; . \; . \; . \; . \; (28).$$

Въ этомъ примѣрѣ

$$\mathfrak{M}A(f) = -2 + 2\alpha\beta + 2\beta\gamma, \; \mathfrak{N}B(f) = -2 + 2\beta\gamma + 2\gamma\delta,$$

$$\mathfrak{M}A(f) - \mathfrak{N}B(f) = 2\gamma(\beta - \delta) + 2\beta(\alpha - \gamma).$$

Отсюда вижу, что можно предположить $r - t = 2\lambda$, ибо тогда $\alpha = \gamma$ и $\beta = \delta$. Далѣе дѣлаю операціи A и B надъ (28); это дастъ намъ

$$2(x+y) = 2s\alpha + (r+t)\beta, \; 2(x+y) = 2s\beta + (r+t)\alpha,$$

откуда

$$\alpha = \beta = \gamma = \delta = 2(x+y)s\colon \, [2s^2 + (x+y)^2].$$

Для опредѣленія s имѣю уравненіе:

$$ds = \beta dx + \gamma dy \text{ или } 2ds + \frac{(x+y)^2 ds}{s^2} - \frac{2(x+y)d(x+y)}{s} = 0,$$

откуда

$$2s - \frac{(x+y)^2}{s} = 4\mu, \; s = \mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{(x+y)^2}{2}}.$$

Послѣ этого легко получаемъ

$$r = \lambda + \frac{(x+y)^2}{2s} = \lambda - \mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{(x+y)^2}{2}},$$

$$t = -\lambda - \mu + \sqrt{\mu^2 + \frac{(x+y)^2}{2}}.$$

Постепенно интегрируя уравненія

$$dp = rdx + sdy, \; dq = sdx + tdy \text{ и } dz = pdx + qdy,$$

мы придемъ къ слѣдующему интегралу:

$$z = \rho + \varepsilon x + \omega y + \frac{1}{2}\lambda(x^2 - y^2) - \frac{1}{2}\mu(y-x)^2 +$$

$$+ \frac{1}{\sqrt{2}} \Big/^{t=x+y} \int dt \int dt \sqrt{2\mu^2 + t^2}.$$

Двойной интегралъ, входящій въ предъидущее уравненіе, легко находится, если полагать при обѣихъ интеграціяхъ

$$\sqrt{2\mu^2 + t^2} = u - t.$$

Примѣръ 6.

$$s(r+t)=x^2+y^2 \ldots\ldots (29).$$

Можно положить $s=\lambda$, ибо тогда

$$\beta=0,\ \gamma=0 \text{ и } \mathfrak{M}B(f)=0.$$

Дѣлая операціи A и B надъ (29), имѣю

$$\alpha=\frac{2x}{\lambda},\ \delta=\frac{2y}{s}=\frac{2y}{\lambda}.$$

Опредѣляю t изъ уравненія:

$$dt=\gamma dx+\delta dy=\frac{2ydy}{\lambda};\ t=\frac{y^2}{\lambda}+\mu.$$

Изъ (29) слѣдуетъ

$$r=\frac{x^2}{\lambda}-\mu.$$

Послѣ этого полный интегралъ легко находится:

$$z=\rho+\varepsilon x+\omega y+\frac{1}{2}\mu(y^2-x^2)+\lambda xy+\frac{x^4+y^4}{12\lambda}.$$

Примѣръ 7.

$$s(r+t)=xy \ldots\ldots (30).$$

Принимаю $r=\lambda$, ибо $\mathfrak{M}A(f)=2\alpha\beta+2\beta\gamma$. Тѣми же пріемами нахожу полный интегралъ:

$$z=\rho+\omega x+\varepsilon y+\frac{1}{2}\lambda(x^2-y^2)+x\int dy\sqrt{y^2+\mu^2}.$$

Примѣръ 8.

$$rt-xys=0 \ldots\ldots (31).$$

Такъ какъ $\mathfrak{M}A(f)=-2\beta y+2\alpha\gamma$, то могу положить

$$r=\lambda,\ \alpha=0,\ \beta=0.$$

Дѣлая надъ (31) операціи A и B, получаю

$$\gamma=\frac{ys}{r}=\frac{ys}{\lambda},\ \delta=\frac{xs(\lambda+y^2)}{\lambda^2}.$$

Опредѣляю s изъ уравненія:

$$ds=\beta dx+\gamma dy=\frac{ysdy}{\lambda};\ s=\mu e^{\frac{y^2}{2\lambda}}.$$

Изъ уравненія (31)

$$t=\frac{\mu}{\lambda}xye^{\frac{y^2}{2\lambda}}.$$

Постепенною интеграціею уравненій

$$dp=rdx+sdy,\ dq=sdx+tdy,\ dz=pdx+qdy$$

получаю полный интегралъ:

$$z=\rho+\omega x+\varepsilon y+\frac{1}{2}\lambda x^2+\mu x\int e^{\frac{y^2}{2\lambda}}dy.$$

Примѣръ 9.

$$(2rx-ys)(2ty-xs)-4s(p-xr)^2=0 \ldots\ldots (32).$$

Если положу

$$p-xr=F=\mu \ldots (33),$$

то $\frac{\triangle F}{\triangle x}=0$. Такъ какъ (33) не содержитъ ни s, ни t, то возможность принять (33) зависитъ на основаніи (10) и (11) отъ того, удовлетворяется или нѣтъ какое нибудь изъ двухъ послѣднихъ уравненій группы (7), напримѣръ $A(\gamma)=B(\beta)$. Изъ уравненія (5) имѣю $\alpha=0$, изъ (6) $\beta=\frac{s}{x}$, а изъ (3) $\gamma=\frac{s}{y}$; уравненіе же $A(\gamma)=B(\beta)$ обращается въ $\frac{\beta}{y}=\frac{\gamma}{x}$; а это—тождество на основаніи (32) и (33). Итакъ (33) можно принять.

Уравненія (25^{bis}) и (26^{bis}) главы 2-ой можно изобразить такъ:

$$s\frac{df}{dt}\frac{dK}{ds}-\left(x\frac{\triangle f}{\triangle x}+s\frac{df}{ds}\right)\frac{dK}{dt}+x\frac{df}{dt}\frac{\triangle K}{\triangle x}=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\ (34),$$

$$-s\frac{df}{dt}\frac{dK}{dr}+x\frac{\triangle f}{\triangle x}\frac{dK}{ds}+\left(s\frac{df}{dr}+x\frac{\triangle f}{\triangle y}\right)\frac{dK}{dt}-$$

$$-x\frac{df}{ds}\frac{\triangle K}{\triangle x}-x\frac{df}{dt}\frac{\triangle K}{\triangle y}=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\ (35).$$

Буду интегрировать (35) и интегралы провѣрять на (34). Уравненіе (35) между прочимъ приводитъ къ слѣдующимъ совмѣстнымъ уравненіямъ съ полными дифференціалами:

$$ds:\frac{\triangle f}{\triangle x}=-dx:\frac{df}{ds}=-dy:\frac{df}{dt}.$$

Изъ этихъ уравненій легко выводится

$$ds\ :\ s=(xdy+ydx)\ :\ xy,$$

что дастъ $s=2\lambda xy$. Функція $\frac{s}{xy}$ удовлетворяетъ и (34).

Найдя s, я могу опредѣлить p изъ уравненія:

$$dp=rdx+sdy=\frac{p-\mu}{x}\,dx+2\lambda xydy.$$

Помножаю все уравненіе на $\frac{1}{x}$:

$$\frac{dp}{x}-\frac{pdx}{x^2}=-\frac{\mu dx}{x^2}+2\lambda ydy.$$

Изъ послѣдняго уравненія имѣю

$$p=\mu+\varepsilon x+\lambda xy^2.$$

Далѣе можно найти t изъ даннаго уравненія; оно даетъ

$$2ty=xs+\frac{4\mu^2 s}{2xr-ys}=2\lambda x^2y+\frac{4\mu^2\lambda xy}{p-\mu-\lambda xy^2},$$

$$t=\lambda x^2+\frac{2\mu^2\lambda x}{p-\mu-\lambda xy^2}=\lambda x^2+\frac{2\mu^2\lambda}{\varepsilon}.$$

Теперь могу опредѣлить q изъ уравненія $dq=sdx+tdy$:

$$q=\nu+\lambda x^2y+\frac{2\mu^2\lambda}{\varepsilon}\,y.$$

Наконецъ изъ уравненія

$$dz=pdx+qdy$$

получаю полный интегралъ:

$$z=\rho+\mu x+\frac{1}{2}\varepsilon x^2+\nu y+\frac{\mu^2\lambda}{\varepsilon}\,y^2+\frac{1}{2}\lambda x^2y^2.$$

Примѣръ 10.

$$rt=pq\,.\,.\,.\,.\,.\ (36).$$

Дѣлая надъ этимъ уравненіемъ операціи A и B, получаю

$$t\alpha+r\gamma=ps+qr,\ t\beta+r\delta=pt+qs\ .\,.\,.\,.\ (37).$$

Самое простое рѣшеніе уравненій (37) было бы въ томъ случаѣ, если бы $\beta=p$ и $\gamma=q$, т. е. если бы

$$s=z+\varepsilon\,.\,.\,.\,.\,.\,.\ (38).$$

Посмотрю можно ли принять $s=z+\varepsilon$; возможность зависитъ отъ того, удовлетворяется ли первое, или третье изъ уравненій (7). Повѣрю $A(\beta)=B(\alpha)$. Во первыхъ, $A(\beta)=r$. Во вторыхъ, изъ (37) имѣемъ

$$\alpha=\frac{ps}{t};$$

слѣдовательно

$$B(\alpha)=\frac{s^2}{t}+\frac{pq}{t}-\frac{ps\delta}{t^2}=\frac{s^2}{t}+\frac{pq}{t}-\frac{s^2}{t}=r.$$

Итакъ (38) можно принять.

Тогда r опредѣляется изъ уравненія

$$dr=\alpha dx+\beta dy=\frac{ps}{t}dx+pdy\ \text{или}\ tdr=psdx+ptdy.$$

Вычту изъ послѣдняго уравненія

$$pdq = psdx + ptdy.$$

Тогда послѣ нѣкоторыхъ преобразованій имѣемъ $\frac{dr}{r} = \frac{dq}{q}$, откуда $r = \mu q$, и слѣдовательно $t = \frac{p}{\mu}$. Для дальнѣйшей интеграціи имѣемъ три вполнѣ совмѣстныя уравненія:

$$dp = \mu q dx + (z + \varepsilon)dy,\ dq = (z + \varepsilon)dx + \frac{p}{\mu}dy,\ dz = pdx + qdy.$$

Исключая изъ этихъ уравненій dx и dy, получаю уравненіе:

$$\frac{p^2}{\mu}dp + \mu q^2 dq = (z + \varepsilon)(pdq + qdp) + pqdz - (z + \varepsilon)^2 dz;$$

интегрируя это уравненіе, получаю

$$\frac{p^3}{\mu} + \mu q^3 + (z + \varepsilon)^3 = 3pq(z + \varepsilon) + \lambda \ldots . (39).$$

Задача приводится къ нахожденію полнаго интеграла уравненія (39); при нахожденіи этого полнаго интеграла къ прежнимъ тремъ произвольнымъ постояннымъ прибавятся новыя двѣ.

Для нахожденія втораго интеграла, опредѣляющаго p и q, должно найти интегралъ уравненія:

$$dp : [3p(z + \varepsilon)^2 - 3p^2 q] = dq : [3q(z + \varepsilon)^2 - 3pq^2]$$

$$\text{или } dp : p = dq : q.$$

Слѣдовательно $p = \rho q$; а потому полный интегралъ получится изъ уравненія:

$$dz = q(dy + \rho dx),$$

откуда

$$y + \rho x = \nu + \int \frac{dz}{q} \ldots . (40).$$

Въ уравненіи (40) q — функція z, опредѣляемая изъ уравненія:

$$(\mu + \frac{\rho^3}{\mu})q^3 - 3\rho(z + \varepsilon)q^2 = \lambda - (z + \varepsilon)^3 \ldots . (41).$$

Такъ какъ при рѣшеніи уравненія (41) получатся кубичные корни, и слѣдовательно $\int \frac{dz}{q}$ нельзя будетъ опредѣлить извѣстными намъ методами, то я и оставляю полный интегралъ изображеннымъ двумя уравненіями (40) и (41).

Въ случаѣ линейности или билинейности даннаго уравненія относительно r, s и t можно удовольствоваться отысканіемъ частнаго интеграла съ тремя постоянными, потому что для отысканія общаго интеграла есть для этого случая методъ Имшенецкаго. Для нахожденія этого частнаго интеграла предположу, что L и K нѣкоторыя функціи p, q, z, x и y, и пусть данное уравненіе будетъ

$$Rr + 2Ss + Tt + N(rt - s^2) + M = 0 \ldots . (42).$$

Задаюсь такою задачею: опредѣлить функціи K и L такъ, чтобы r, s и t, опредѣляемыя изъ уравненій

$$L = \alpha \text{ и } K = \beta \ldots\ldots . (43),$$

удовлетворяли уравненію (42). Для рѣшенія этой задачи дифференцирую уравненія (43) по x и по y:

$$\frac{dL}{dx} + p\frac{dL}{dz} + r\frac{dL}{dp} + s\frac{dL}{dq} = 0 \ldots\ldots\ldots (44),$$

$$\frac{dL}{dy} + q\frac{dL}{dz} + s\frac{dL}{dp} + t\frac{dL}{dq} = 0 \ldots\ldots\ldots (45),$$

$$\frac{dK}{dx} + p\frac{dK}{dz} + r\frac{dK}{dp} + s\frac{dK}{dq} = 0 \ldots\ldots\ldots (46),$$

$$\frac{dK}{dy} + q\frac{dK}{dz} + s\frac{dK}{dp} + t\frac{dK}{dq} = 0 \ldots\ldots\ldots (47).$$

Буду обозначать для краткости

$$\frac{dF}{dx} + p\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial x} \text{ и } \frac{dF}{dy} + q\frac{dF}{dz} = \frac{\partial F}{\partial y}.$$

Исключеніе r, s и t изъ уравненій (42), (44), (45), (46) и (47) даетъ намъ два слѣдующія уравненія:

$$\frac{\partial L}{\partial x}\frac{dK}{dp}-\frac{dL}{dp}\frac{\partial K}{dx}+\frac{\partial L}{\partial y}\frac{dK}{dq}-\frac{dL}{dq}\frac{\partial K}{\partial y}=0\,\ldots\,(48),$$

$$R\left(\frac{dL}{dq}\frac{\partial K}{\partial x}-\frac{\partial L}{\partial x}\frac{dK}{dq}\right)+2S\left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{dK}{dp}-\frac{dL}{dp}\frac{\partial K}{\partial x}\right)+$$

$$+T\left(\frac{\partial L}{\partial y}\frac{dK}{dp}-\frac{dL}{dp}\frac{\partial K}{\partial y}\right)+M\left(\frac{dL}{dp}\frac{dK}{dq}-\frac{dL}{dq}\frac{dK}{dp}\right)+$$

$$+N\left(\frac{\partial L}{\partial x}\frac{\partial K}{\partial y}-\frac{\partial L}{\partial y}\frac{\partial K}{\partial x}\right)=0\,\ldots\ldots\,(49).$$

Замѣчу, что уравненіе (48) ни болѣе, ни менѣе какъ приравненный нулю символъ Пуассона; правда обыкновенно вмѣсто

$$\frac{\partial K}{\partial x},\ \frac{\partial K}{\partial y},\ \frac{\partial L}{\partial x}\ \text{и}\ \frac{\partial L}{\partial y}$$

пишутъ

$$\frac{dK}{dx},\ \frac{dK}{dy},\ \frac{dL}{dx}\ \text{и}\ \frac{dL}{dy};$$

это потому, что обыкновенно z предполагается не входящимъ явно въ K и L. Это уравненіе (48) показываетъ, что p и q, опредѣленныя изъ уравненій $L=\alpha$ и $K=\beta$, удовлетворяютъ условію:

$$\frac{dp}{dy}+q\frac{dp}{dz}=\frac{dq}{dx}+p\frac{dq}{dz}\,\ldots\ldots\ldots\,(50).$$

Если найду K и L, удовлетворяющія двумъ уравненіямъ (48) и (49), то r, s и t, опредѣленныя изъ (44), (45), (46) и (47), удовлетворяютъ данному уравненію (42). Если я опредѣлю изъ двухъ уравненій $L=\alpha$ и $K=\beta$ p и q въ функціи z, x и y, то, какъ извѣстно, уравненіе

$$dz=pdx+qdy\,\ldots\ldots\,(51),$$

въ которомъ p и q замѣнены только что найденными величинами, интегрируется, потому что L и K удовлетворяютъ (48) (а слѣдовательно условіе (50) интегрируемости (51) удовлетворено). Послѣ интеграціи уравненія (51) получимъ уравненіе между z, y, x и тремя постоянными, при чемъ p и q, опредѣляемыя изъ $L=\alpha$ и

$K=\beta$, будутъ частными производными z. Если же p и q производныя z по x и y, то r, s и t, опредѣляемыя (44), (45), (46) и (47) уравненіями,—вторыя производныя z по x и y. Это слѣдуетъ изъ того, что первыя части упомянутыхъ уравненій суть производныя по x и по y отъ функцій K и L. Итакъ дѣло все въ томъ, чтобы удовлетворить двумъ уравненіямъ (48) и (49).

При разрѣшеніи этого вопроса объ удовлетвореніи двухъ уравненій (48) и (49), я опять разсматриваю эти уравненія (48) и (49) какъ два линейныя уравненія съ одною неизвѣстною функціею K и предполагаю L уже извѣстною. Тогда надо различать два случая: 1) оба уравненія (48) и (49) тождественны; т. е. коэффиціенты при одинаковыхъ производныхъ K пропорціональны; 2) оба уравненія (48) и (49) вполнѣ совмѣстны, т. е. (опять предполагая L извѣстнымъ) имѣютъ три общіе частные интеграла, двумя менѣе числа перемѣнныхъ x, y, z, p и q.

Въ первомъ случаѣ, выражая пропорціональность коэффиціентовъ при одинаковыхъ производныхъ K въ уравненіяхъ (48) и (49), получаю четыре пропорціи, изъ которыхъ только двѣ даютъ различные результаты, другія же двѣ удовлетворяются на основаніи удовлетворенія первыхъ двухъ. Эти двѣ пропорціи, при нѣкоторыхъ легкихъ преобразованіяхъ, даютъ столь извѣстныя уравненія Бура (Serret, Cours de calcul différentiel et intégral, tome II, стр. 656, уравн. (15)). Я не привожу этихъ вычисленій. Замѣчу только, что двѣ пропорціи дадутъ два уравненія 1-го порядка, но 2-ой степени относительно производныхъ L; дѣлая эти уравненія линейными, мы и получимъ двѣ системы Бура. Если я нашелъ хоть одинъ интегралъ одной изъ системъ Бура, то, подставляя его въ уравненіе (48), могу найти функцію K; для этого я долженъ найти интегралъ, содержащій p и q и отличный отъ L, для системы совмѣстныхъ уравненій:

$$dx:\frac{dL}{dp}=dy:\frac{dL}{dq}=dz:\left(p\frac{dL}{dp}+q\frac{dL}{dq}\right)=$$

$$=-dp:\frac{\partial L}{\partial x}=-dq:\frac{\partial L}{\partial y}\,\ldots\ldots\ldots\,(52).$$

Найдя K, можно найти интегралъ съ тремя постоянными, интегрируя уравненіе

$$dz = pdx + qdy.$$

Можно интегрировать уравненія (52) вполнѣ, какъ это дѣлается въ методѣ Коши, при чемъ p_0 опредѣлять изъ уравненія

$$L(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0) = \alpha.$$

При такой интеграціи получатся четыре интеграла, изъ которыхъ можно опредѣлить p, q, z и y въ функціяхъ x и четырехъ произвольныхъ постоянныхъ: y_0, z_0, q_0 и α. Эти функціи y, z, p и q удовлетворяютъ уравненію $L=\alpha$; онѣ будутъ удовлетворять тому же уравненію и въ томъ случаѣ, когда предположимъ y_0, z_0 и q_0 нѣкоторыми функціями u. Задаемся задачею: какъ опредѣлить эти функціи u такимъ образомъ, чтобы не только удовлетворялось уравненіе

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx} \quad \ldots\ldots\ldots (53),$$

которое слѣдуетъ изъ (52), но и уравненіе

$$\frac{dz}{du} = q\frac{dy}{du} \quad \ldots\ldots\ldots (54)?$$

Въ такомъ случаѣ, по исключеніи u изъ четырехъ интеграловъ уравненій (52), z, p и q будутъ равны такимъ функціямъ x и y что p и q будутъ частными производными z по x и по y.

Пусть при подстановкѣ функцій, которымъ равны y, z, p и q, въ уравненіе (54) мы имѣемъ

$$\frac{dz}{du} = q\frac{dy}{du} + I \quad \ldots\ldots\ldots (55).$$

Дифференцируя уравненіе (53) относительно u, а (55) относительно x и вычитая второй результатъ изъ перваго, я получаю

$$\frac{dp}{du} + \frac{dq}{du}\frac{dy}{dx} = \frac{\partial q}{\partial x}\frac{dy}{du} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{dx}\frac{dy}{du} + \frac{dI}{dx} = \frac{\partial p}{\partial y}\frac{dy}{du} + \frac{\partial q}{\partial y}\frac{dy}{du}\frac{dy}{dx} +$$
$$+ I\left(\frac{dp}{dz} + \frac{dq}{dz}\frac{dy}{dx}\right).$$

(Символы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ значатъ тоже, что на страницѣ 116). Но такъ

какъ уравненіе (50) удовлетворено, если p и q опредѣляются изъ $L=\alpha$ и $K=\beta$, то имѣю

$$\frac{dI}{dx} = I\left(\frac{dp}{dz} + \frac{dq}{dz}\frac{dy}{dx}\right),$$

откуда

$$I = I_0 e^{\int_{x_0}^{x}\left(\frac{dp}{dz} + \frac{dq}{dz}\frac{dy}{dx}\right)}$$

Такимъ образомъ для того, чтобы $I=0$ и чтобы p и q были частными производными z, необходимо и достаточно, чтобы $I_0 = 0$; послѣдняго же достигаемъ, удовлетворяя уравненію

$$\frac{dz_0}{du} = q_0\frac{dy_0}{du}.$$

Удовлетворить же послѣднему уравненію можно двояко. 1) Можно полагать z_0 и y_0 постоянными, а q_0 считать функціею u. Въ такомъ случаѣ исключеніе q_0 изъ двухъ интеграловъ уравненій (52), опредѣляющихъ y и z въ функціяхъ x, y_0, z_0, q_0 и α, дастъ интегралъ даннаго уравненія съ тремя произвольными постоянными. 2) Можно полагать y_0 функціею u, $z_0=\varphi(y_0)$ и $q_0=\varphi'(y_0)$ и исключать y_0. Тогда получу интегралъ даннаго уравненія съ одною произвольною функціею и одною постоянною α.

Такимъ образомъ интегралъ даннаго уравненія можетъ получиться или интегрированіемъ $dz=pdx+qdy$, или полною интеграціею (52).

Замѣчу еще, что уравненія (52) именно тѣ, которыя по методу Коши надо проинтегрировать, чтобы получить интегралъ уравненія $L=\alpha$, и весь ходъ вычисленій, описанный выше, таковъ, какъ будто ищутъ полный интегралъ уравненія $L=\alpha$. Итакъ, получивъ интегралъ одной изъ системъ Бура, можно его прямо интегрировать, что уже давно извѣстно.

Перехожу ко второму случаю, когда L опредѣленъ такъ, что оба уравненія (48) и (49) вполнѣ совмѣстны. Предположимъ, что эти уравненія (48) и (49) разрѣшены относительно

$$\frac{dK}{dx} \text{ и } \frac{dK}{dy};$$

тогда получимъ два уравненія (46) и (47), въ которыхъ только r, s и t замѣнены функціями, опредѣленными изъ трехъ уравненій (42), (44) и (45) (полагаю L извѣстнымъ). По Майеру этимъ двумъ линейнымъ уравненіямъ (46) и (47) соотвѣтствуютъ три совмѣстныя уравненія съ полными дифференціалами:

$$dp = rdx + sdy,\ dq = sdx + tdy \text{ и } dz = pdx + qdy \ldots\ldots (56),$$

гдѣ r, s и t замѣнены изъ уравненій (42), (44) и (45). Если уравненія (46) и (47) вполнѣ совмѣстны, то вполнѣ совмѣстны и уравненія (56). Частные интегралы уравненій (46) и (47), приравненные произвольнымъ постояннымъ, даютъ интегральную систему уравненій (56). Интегрируя уравненія (56), или находя какимъ нибудь другимъ образомъ интегралы, общіе (48) и (49), и въ послѣднемъ случаѣ приравнивая эти частные интегралы произвольнымъ постояннымъ, я получу три интеграла съ тремя произвольными постоянными. Одинъ изъ этихъ интеграловъ непремѣнно $L = \alpha$; это слѣдуетъ изъ того, что оба уравненія (48) и (49) обращаются въ $0 = 0$ при $K = L$.

Исключая изъ трехъ интеграловъ p и q, я получу уравненіе между z, x, y и тремя постоянными. Это уравненіе будетъ частный интегралъ даннаго уравненія. Въ этомъ легко убѣдиться. Дѣйствительно во 1) p, q, r, s и t, опредѣляемыя изъ этого уравненія, удовлетворяютъ уравненіямъ (56), а слѣдовательно суть частныя производныя z по x и по y. Во 2) функціи, замѣняющія r, s и t въ уравненіяхъ (56), опредѣлены между прочимъ и изъ даннаго уравненія; слѣдовательно данное уравненіе удовлетворяется тѣми r, s и t, которыя выведены изъ найденнаго z.

Остается найти условія, которымъ долженъ удовлетворять L для того, чтобы по подстановкѣ его въ уравненія (48) и (49) получились два вполнѣ совмѣстныя уравненія. Обозначая операціи, производимыя съ K въ уравненіяхъ (46) и (47), символами $A(K)$ и $B(K)$, имѣю три условія полной совмѣстности:

$$A(q) = B(p) \ldots\ldots\ldots\ldots (57),$$
$$A(s) = B(r) \ldots\ldots\ldots\ldots (58),$$
$$A(t) = B(s) \ldots\ldots\ldots\ldots (59),$$

гдѣ r, s и t опредѣлены изъ (42), (44) и (45). Но уравненіе (57) даетъ $s = s$; изъ двухъ же другихъ условій одно излишне.

Теорема 2. Если одно изъ условій (58) и (59) удовлетворено, то удовлетворено и другое условіе.

Доказательство. Произведу надъ (44) операцію B, а надъ (45) операцію A, при чемъ r, s и t полагаю замѣненными изъ (42), (44) и (45); стало быть я буду имѣть дѣло съ тождествами:

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) + s\frac{dL}{dz} + s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dL}{dp}\right) + t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dL}{dq}\right) + r\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dL}{dp}\right) +$$
$$+ s\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dL}{dq}\right) + rs\frac{d^2L}{dp^2} + (rt+s^2)\frac{d^2L}{dp\,dq} + st\frac{d^2L}{dq^2} + B(r)\frac{dL}{dp} +$$
$$+ B(s)\frac{dL}{dq} = 0 \ldots\ldots\ldots (60),$$

$$\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) + s\frac{dL}{dz} + r\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dL}{dp}\right) + s\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dL}{dq}\right) + s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dL}{dp}\right) +$$
$$+ t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dL}{dq}\right) + rs\frac{d^2L}{dp^2} + (s^2+rt)\frac{d^2L}{dpdq} + ts\frac{d^2L}{dq^2} + A(s)\frac{dL}{dp} +$$
$$+ A(t)\frac{dL}{dq} = 0 \ldots\ldots\ldots (61).$$

Въ этихъ равенствахъ

$$\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{\partial L}{\partial x}\right) = \frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{\partial L}{\partial y}\right) = \frac{d^2L}{dxdy} + q\frac{d^2L}{dxdz} + p\frac{d^2L}{dydz} + pq\frac{d^2L}{dz^2}.$$

Вычитаю тождество (60) изъ тождества (61) и получаю третье тождество:

$$\frac{dL}{dp}\{A(s) - B(r)\} + \frac{dL}{dq}\{A(t) - B(s)\} = 0 \ldots\ldots (62).$$

Это тождество (62) доказываетъ теорему въ томъ случаѣ, когда L предполагается содержащимъ p и q. Если же L не содержитъ, напримѣръ, q, то уравненіе (62) показываетъ, что (58) само по себѣ удовлетворено, и остается удовлетворить (59). Но во всякомъ случаѣ L долженъ содержать хоть одну изъ производныхъ p и q.

Выведу формулу, болѣе симметричную чѣмъ (58) и (59) и аналогичную формулѣ (15). Для удобства буду обозначать

$$AA(f)=\mathfrak{M}A(f)+\frac{df}{dp}A(r)+\frac{df}{dq}A(s),$$

$$AB(f)=\mathfrak{M}B(f)+\frac{df}{dp}A(s)+\frac{df}{dq}A(t),$$

$$BA(f)=\mathfrak{N}A(f)+\frac{df}{dp}B(r)+\frac{df}{dq}B(s)$$

и

$$BB(f)=\mathfrak{N}B(f)+\frac{df}{dp}B(s)+\frac{df}{dq}B(t).$$

Такимъ образомъ черезъ $\mathfrak{M}$ и $\mathfrak{N}$ я обозначаю операціи A и B, сдѣланныя въ предположеніи r, s и t постоянныхъ. По прежнему данное уравненіе (42) обозначаю для краткости чрезъ

$$f=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(63).$$

Произведу операціи A и B надъ (42) и (44), а надъ (45) операцію B:

$$\mathfrak{M}(f)+(R+Nt)A(r)+2(S-Ns)A(s)+(T+Nr)A(t)=0\,.\,.\,.\,(64);$$

$$\mathfrak{N}(f)+(R+Nt)B(r)+2(S-Ns)B(s)+(T+Nr)B(t)=0\,.\,.\,.\,(65);$$

$$\mathfrak{M}A(L)+\frac{dL}{dp}A(r)+\frac{dL}{dq}A(s)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(66);$$

$$\mathfrak{M}B(L)+\frac{dL}{dp}B(r)+\frac{dL}{dq}B(s)=\mathfrak{N}A(L)+\frac{dL}{dp}B(r)+\frac{dL}{dq}B(s)=0\ldots(67);$$

$$\mathfrak{N}B(L)+\frac{dL}{dp}B(s)+\frac{dL}{dq}B(t)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(68).$$

Исключу изъ (64) и (66) $A(r)$, а изъ (65) и (68) $B(t)$; получу

$$(R+Nt)\mathfrak{M}A(L)-\frac{dL}{dp}\mathfrak{M}(f)+\left\{(R+Nt)\frac{dL}{dq}-2(S-Ns)\frac{dL}{dp}\right\}A(s)-$$

$$-(T+Nr)\frac{dL}{dp}A(t)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(69).$$

$$(T+Nr)\mathfrak{N}B(L)-\frac{dL}{dq}\mathfrak{N}(f)-(R+Nt)\frac{dL}{dq}B(r)+$$

$$+\left\{-2(S-Ns)\frac{dL}{dq}+(T+Nr)\frac{dL}{dp}\right\}B(s)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(70).$$

Наконецъ умножаю (67) на $2(S-Ns)$ и складываю (67), (69) и (70), предполагая при этомъ (58) и (59) удовлетворенными:

$$(R+Nt)\mathfrak{M}A(L)+2(S-Ns)\mathfrak{M}B(L)+(T+Nr)\mathfrak{N}B(L)-$$

$$-\frac{dL}{dp}\mathfrak{M}(f)-\frac{dL}{dq}\mathfrak{N}(f)=0\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,.\,(71).$$

Въ этой формулѣ символы $\mathfrak{M}A(L)$, $\mathfrak{M}B(L)$, $\mathfrak{N}B(L)$, $\mathfrak{M}(f)$ и $\mathfrak{N}(f)$ означаютъ слѣдующее:

$$\left.\begin{aligned}
\mathfrak{M}A(L)&=\frac{\partial^2 L}{\partial x^2}+r\frac{dL}{dz}+2r\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dL}{dp}\right)+2s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dL}{dq}\right)+\\
&\quad+r^2\frac{d^2L}{dp^2}+2rs\frac{d^2L}{dpdq}+s^2\frac{dL^2}{dq^2},\\
\mathfrak{M}B(L)=\mathfrak{N}A(L)&=\frac{\partial^2 L}{\partial x\partial y}+s\frac{dL}{dz}+r\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dL}{dp}\right)+s\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dL}{dq}\right)+\\
&\quad+s\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dL}{dp}\right)+t\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{dL}{dq}\right)+rs\frac{d^2L}{dp^2}+(rt+s^2)\frac{d^2L}{dpdq}+st\frac{d^2L}{dq^2},\\
\mathfrak{N}B(L)&=\frac{\partial^2 L}{\partial y^2}+t\frac{dL}{dz}+2s\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dL}{dp}\right)+2t\frac{\partial}{\partial y}\left(\frac{dL}{dq}\right)+\\
&\quad+s^2\frac{d^2L}{dp^2}+2st\frac{d^2L}{dpdq}+t^2\frac{d^2L}{dq^2},\\
\mathfrak{M}(f)&=rA(R)+2sA(S)+tA(T)+A(M)+(rt-s^2)A(N),\\
\mathfrak{N}(f)&=rB(R)+2sB(S)+tB(T)+B(M)+(rt-s^2)B(N)
\end{aligned}\right\}\ldots(72).$$

Здѣсь символы $\frac{\partial}{\partial x}$ и $\frac{\partial}{\partial y}$ по прежнему означаютъ два первые дифференціальныя дѣйствія въ уравненіяхъ $A(L)=0$ и $B(L)=0$. Въ формулахъ (72) и (71) r, s и t предполагаются замѣненными величинами, опредѣленными изъ (42), (44) и (45).

Уравненіе (71) будетъ удовлетворено, если удовлетворены (58) и (59) уравненія; наоборотъ легко доказать, что, удовлетворяя (71), удовлетворимъ (58) и (59). Въ самомъ дѣлѣ, вычитая изъ (71) тождества (69), (70) и (67), умноженное на $2(S - Ns)$, имѣю

$$\left\{2(S - Ns)\frac{dL}{dp} - (R + Nt)\frac{dL}{dq}\right\}\{A(s) - B(r)\} +$$

$$+ (T + Nr)\frac{dL}{dp}\{A(t) - B(s)\} = 0.$$

Это равенство вмѣстѣ съ (62) доказываютъ, что (58) и (59) удовлетворены.

Изъ всего вышесказаннаго ясно, что въ случаѣ непримѣнимости метода Ампера интеграція состоитъ: во 1) въ подыскапіи частнаго интеграла безъ постоянныхъ, удовлетворяющаго (71), во 2) въ интеграціи двухъ вполнѣ совмѣстныхъ уравненій (48) и (49).

Если методъ Импенецкаго прилагается съ пользою къ какому нибудь нелинейному уравненію, то можно искать для такого нелинейнаго уравненія не полный интегралъ, а частный съ тремя постоянными. Для такого случая легко вывести формулы, аналогичныя (48) и (49). Въ самомъ дѣлѣ уравненіе (48) остается безъ измѣненія; вмѣсто же уравненія (49) имѣю слѣдующее:

$$f\left(\frac{\xi q}{\triangle}, -\frac{\xi p}{\triangle}, -\frac{\eta p}{\triangle}, p, q, z, y, x\right) = 0 \ldots\ldots (73),$$

предполагая, что

$$f(r, s, t, p, q, z, y, x) = 0 \ldots\ldots\ldots\ldots (74)$$

— данное уравненіе. Въ формулѣ (73) $\triangle$, ξq, ξp и ηp имѣютъ слѣдующія значенія:

$$\left.\begin{aligned} \triangle &= \frac{dL}{dp}\frac{dK}{dq} - \frac{dL}{dq}\frac{dK}{dp}, \quad \xi p = \frac{\partial K}{\partial x}\frac{dL}{dp} - \frac{\partial L}{\partial x}\frac{dK}{dp}, \\ \xi q &= \frac{\partial K}{\partial x}\frac{dL}{dq} - \frac{dK}{dq}\frac{\partial L}{\partial x}, \quad \eta p = \frac{\partial K}{\partial y}\frac{dL}{dp} - \frac{\partial L}{\partial y}\frac{dK}{dp} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (75).$$

Формулы (58) **и** (59) остаются безъ измѣненія; формула **же** (71) замѣняется слѣдующею:

$$\frac{df}{dr}\mathfrak{M}A(L) + \frac{df}{ds}\mathfrak{M}B(L) + \frac{df}{dt}\mathfrak{N}B(L) - \frac{dL}{dp}\mathfrak{M}(f) - \frac{dL}{dq}\mathfrak{N}(f) = 0 \ (76).$$

Въ окончательномъ результатѣ въ уравненіи (76) r, s и t замѣняются величинами, опредѣленными изъ уравненій (74), (44) и (45).

Примѣръ 11.

$$xr + yt - xy = 0 \ldots\ldots (77).$$

Уравненіе (71) обращается въ слѣдующее:

$$x\mathfrak{M}A(L) + y\mathfrak{N}B(L) = \frac{dL}{dp}(r - y) + \frac{dL}{dq}(t - x).$$

Чтобы составить L, предполагаю, что оно содержитъ только q; тогда я долженъ получить въ первой части послѣдняго уравненія $-x$; слѣдовательно къ q я долженъ придать $-\frac{1}{2}x^2$. Кромѣ того въ 1-й части я долженъ имѣть такой членъ, который равнялся бы t; для этого въ L къ прежнимъ членамъ прибавляю $-lgy$. Такимъ образомъ

$$L = q - \frac{1}{2}x^2 - lgy = \alpha;$$

это выраженіе удовлетворяетъ условію интегрируемости, ибо изъ него имѣю

$$t = \frac{1}{y}, \ \frac{dL}{dq} = 1, \ \mathfrak{M}A(L) = -1, \ \mathfrak{N}B(L) = \frac{1}{y^2}.$$

Опредѣляю t и s изъ $L = \alpha$, а r изъ (77):

$$s = x; \ t = \frac{1}{y}; \ r = y - \frac{1}{x}.$$

Опредѣляю p:

$$dp = rdx + sdy; \ p = \beta + xy - lgx.$$

Опредѣляю z:

$$z = \gamma + \beta x + \alpha y + y(lgy - 1) + x(1 - lgx) + \frac{1}{2}x^2y.$$

Примѣръ 12.

$$qr + pt - z = 0 \ldots\ldots (78).$$

Уравненіе (71) даетъ

$$q\mathfrak{M}A(L)+p\mathfrak{N}B(L)=\frac{dL}{dp}\{r(s+t)-p\}+\frac{dL}{dq}\{t(r+s)-q\}\ldots(79).$$

Предполагаю, что L содержитъ p въ первой степени; тогда въ первой части равенства (79) долженъ встрѣчаться членъ $-p$; т. е. $\mathfrak{N}B(L)=-1$; слѣдовательно къ p для составленія L должно прибавить $-\frac{1}{2}y^2$. Я могу положить $L=p-\frac{1}{2}y^2$, ибо тогда (79) удовлетворяется. Итакъ

$$p=\frac{1}{2}(y^2+\lambda^2),\ r=0,\ s=y.$$

Опредѣляю t изъ (78):

$$t=\frac{2z}{y^2+\lambda^2}.$$

Далѣе я долженъ интегрировать два вполнѣ совмѣстныя уравненія:

$$dq=ydx+\frac{2zdy}{y^2+\lambda^2}\ \text{и}\ 2dz=(y^2+\lambda^2)dx+2qdy;$$

исключаю для этого изъ нихъ dx:

$$(y^2+\lambda^2)\,dq+2qydy=2zdy+2ydz;\ q=\frac{\mu+2yz}{y^2+\lambda^2}.$$

Наконецъ полный интегралъ получится по интеграціи уравненія:

$$2dz=(y^2+\lambda^2)dx+\frac{2\mu dy+4yzdy}{y^2+\lambda^2}$$

или

$$\frac{2dz}{y^2+\lambda^2}-\frac{4yzdy}{(y^2+\lambda^2)^2}=dx+\frac{2\mu dy}{(y^2+\lambda^2)^2}.$$

Интегрируя, получаю

$$\frac{2z}{y^2+\lambda^2}=\rho+x+\frac{\mu}{\lambda^3}\,arctg\frac{y}{\lambda}+\frac{\mu y}{\lambda^2(y^2+\lambda^2)}.$$

Разрѣшаю это уравненіе относительно z:

$$z=\frac{1}{2}\left(\rho+x+\frac{\mu}{\lambda^3}\,arctg\frac{y}{\lambda}\right)(y^2+\lambda^2)+\frac{\mu y}{2\lambda^2}.$$

ГЛАВА IV.

Методъ Лагранжа для нахожденія по полному интегралу общаго интеграла.

Лагранжъ въ своемъ сочиненіи «sur les intégrales particulières des équations différentielles» примѣняетъ свой методъ варіяціи постоянныхъ къ отысканію общаго интеграла уравненій съ частными производными втораго порядка съ двумя независимыми перемѣнными. Онъ находитъ этотъ интегралъ или изъ полнаго интеграла съ пятью постоянными, или изъ промежуточнаго интеграла, если такой существуетъ.

Во второмъ случаѣ мы имѣемъ дѣло съ интеграломъ, содержащимъ только двѣ произвольныя постоянныя. Этотъ интегралъ можно изобразить такъ:

$$f(p,\ q,\ z,\ x,\ y,\ a,\ b)=0,$$

гдѣ a и b произвольныя постоянныя. Если желаемъ замѣнить a и b нѣкоторыми функціями x и y, то эти функціи должны быть таковы, чтобы при дифференцированіи уравненія $f=0$ получались такія же уравненія, какъ и въ томъ случаѣ, когда a и b постоянныя. Но дифференцированіе уравненія $f=0$, если предполагаемъ, что b — нѣкоторая функція a, а a въ свою очередь — функція x и y, даетъ прибавочные члены:

$$\left(\frac{df}{da}+\frac{df}{db}\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dx}\ \text{и}\ \left(\frac{df}{da}+\frac{df}{db}\frac{db}{da}\right)\frac{da}{dy}.$$

Слѣдовательно, чтобы получить прежнія уравненія втораго порядка, достаточно положить

$$\frac{df}{da}+\frac{df}{db}\frac{db}{da}=0.$$

Пусть $b = \varphi(a)$; тогда для полученія общаго интеграла стоитъ исключить a изъ двухъ уравненій:

$$f(x, y, z, a, \varphi(a)) = 0 \quad \text{и} \quad \frac{df}{da} + \frac{df}{db}\varphi'(a) = 0.$$

Лагранжъ примѣняетъ этотъ способъ къ интегрированію уравненія $r - As + Bt = 0$, гдѣ A и B постоянныя.

Перехожу къ случаю, когда нельзя найти промежуточный интегралъ. Обозначу полный интегралъ черезъ

$$F(x, y, z, a, b, c, d, e) = 0,$$

гдѣ a, b, c, d и e произвольныя постоянныя. Этотъ интегралъ по прежнему будетъ удовлетворять данному уравненію, если вмѣсто a, b, c, d и e подставлены такія функціи x и y, что при нахожденіи p, q, r, s и t изъ новаго интеграла я получаю значенія, отличающіяся отъ старыхъ значеній p, q, r, s и t тѣмъ только, что a, b, c, d и e замѣнены вышеупомянутыми функціями x и y. Для удовлетворенія этому условію достаточно приравнять нулю тѣ части полныхъ дифференціаловъ уравненій

$$F = 0, \ \frac{dF}{dx} = 0 \ \text{и} \ \frac{dF}{dy} = 0$$

($\frac{dF}{dx}$ и $\frac{dF}{dy}$ полныя производныя F по x и по y въ предположеніи, что a, b, c, d и e не измѣняются), которыя произошли отъ измѣненія произвольныхъ постоянныхъ; дѣйствительно, если полные дифференціалы будутъ равны нулю, то также будутъ равны нулю и частные дифференціалы по x и по y. Такимъ образомъ для опредѣленія пяти функцій a, b, c, d и e будемъ имѣть три уравненія:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{dF}{da}da + \frac{dF}{db}db + \frac{dF}{dc}dc + \frac{dF}{dd}dd + \frac{dF}{de}de = 0,\\
&\frac{d^2F}{dxda}da + \frac{d^2F}{dxdb}db + \frac{d^2F}{dxdc}dc + \frac{d^2F}{dxdd}dd + \frac{d^2F}{dxde}de = 0,\\
&\frac{d^2F}{dyda}da + \frac{d^2F}{dydb}db + \frac{d^2F}{dydc}dc + \frac{d^2F}{dydd}dd + \frac{d^2F}{dyde}de = 0
\end{aligned}\right\} \text{(A).}$$

«Такъ какъ такимъ образомъ», говоритъ Лагранжъ, «мы имѣемъ только три уравненія для опредѣленія пяти перемѣнныхъ a, b, c, d и e, то ясно, что двѣ изъ этихъ перемѣнныхъ можно положить нѣкоторыми неопредѣленными функціями трехъ остальныхъ; требуется только сдѣлать такъ, чтобы можно было потомъ выразить эти пять перемѣнныхъ конечнымъ образомъ въ функціяхъ x, y и z; тогда останется только подставить эти величины въ полный интегралъ $f = 0$, чтобы получить общій интегралъ даннаго уравненія втораго порядка; этотъ интегралъ будетъ содержать двѣ произвольныя функціи.»

Далѣе Лагранжъ отыскиваетъ вышеизложеннымъ способомъ интегралъ уравненія:

$$\frac{d^2z}{dy^2} = m\frac{d^2z}{dx^2},$$

гдѣ m нѣкоторая постоянная. Это уравненіе имѣетъ полный интегралъ:

$$z = a + bx + cy + lx^2 + gxy + mly^2,$$

который легко получается, если положимъ

$$\frac{d^2z}{dx^2} = l.$$

Дифференцируя полный интегралъ, получаемъ

$$p = b + 2lx + gy, \ q = c + gx + 2mly.$$

Слѣдовательно уравненія (A) примутъ въ этомъ примѣрѣ такой видъ:

$$da + xdb + ydc + x^2dl + xydg + my^2dl = 0,$$

$$db + 2xdl + ydg = 0, \ dc + xdg + 2mydl = 0.$$

Лагранжъ складываетъ два послѣднія уравненія, помноживъ первое изъ нихъ на неопредѣленную постоянную μ; такимъ образомъ получимъ

$$\mu db + dc + x(dg + 2\mu dl) + \mu y\left(dg + \frac{2m}{\mu}dl\right) = 0.$$

Чтобы x и y умножались на тѣ же величины, достаточно сдѣлать $\mu = \frac{m}{\mu}$; тогда получимъ уравненіе:

$$dc + db\sqrt{m} + (x + y\sqrt{m})\ (dg + 2\sqrt{m}dl),$$

въ которое входятъ двѣ перемѣнныя $c + b\sqrt{m}$ и $g + 2l\sqrt{m}$. Лагранжъ полагаетъ

$$c + b\sqrt{m} = \varphi(g + 2l\sqrt{m})$$

и такимъ образомъ получаетъ уравненіе:

$$\varphi'(g + 2l\sqrt{m}) + x + y\sqrt{m} = 0.$$

Посредствомъ этихъ двухъ уравненій опредѣлимъ g, l, c и b въ функціяхъ x и y, потому что вслѣдствіе двойнаго значенія $\sqrt{m}$ каждое изъ этихъ уравненій даетъ два уравненія. Положимъ для простоты

$$x + y\sqrt{m} = t,\ x - y\sqrt{m} = u,$$

и пусть T нѣкоторая функція t, а U нѣкоторая функція u. Ясно, что

$$g + 2l\sqrt{m} = T,\ g - 2l\sqrt{m} = U;$$

слѣдовательно

$$dc + db\sqrt{m} + tdT = 0,\ dc - db\sqrt{m} + udU = 0,$$

откуда

$$c + b\sqrt{m} = -\int tdT,\ c - b\sqrt{m} = -\int udU.$$

Такимъ образомъ получимъ

$$g = \frac{T + U}{2},\ l = \frac{T - U}{4\sqrt{m}},\ c = \frac{-\int tdT - \int udU}{2},$$

$$b = \frac{-\int tdT + \int udU}{2\sqrt{m}},\ a = \frac{\int t^2dT - \int u^2dU}{4\sqrt{m}}.$$

Подставляемъ эти величины въ полный интегралъ и получаемъ

$$z = \frac{\int t^2dT - 2t\int tdT + t^2T}{4\sqrt{m}} - \frac{\int u^2dU - 2u\int udU + u^2U}{4\sqrt{m}}$$

или проще

$$z = \frac{\int dt\int Tdt - \int du\int Udu}{2\sqrt{m}}.$$

Такъ какъ T и U совершенно произвольныя функціи, то можемъ написать

$$z = \Phi(x + y\sqrt{m}) + \psi(x - y\sqrt{m}).$$

«Впрочемъ», продолжаетъ Лагранжъ, «мы видимъ изъ этого примѣра, который въ добавокъ одинъ изъ наиболѣе простыхъ, что методъ, о которомъ рѣчь, хотя и прямой и общій, однако болѣе любопытенъ, чѣмъ полезенъ, по причинѣ трудностей, которыя могутъ встрѣтиться при интеграціи условныхъ уравненій; вотъ почему мы не останавливаемся на немъ болѣе».

Разсмотримъ однако какимъ образомъ можно иногда рѣшить уравненія (A). Пусть

$$z = f(x,\ y,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon),$$

гдѣ α, β, γ, δ и ε произвольныя постоянныя, будетъ полный интегралъ. Пусть изъ него вывели

$$p = \psi \text{ и } q = \varphi.$$

Положивъ α, β, γ, δ и ε равными функціямъ x и y, могу получить три уравненія, подобныя уравненіямъ (A). Эти уравненія буду рѣшать, замѣнивъ x и y другими независимыми перемѣнными. Эта замѣна можетъ быть сдѣлана различно; такъ въ разобранномъ только что примѣрѣ, для того чтобы придти къ полезнымъ результатамъ, надо принять за эти независимыя перемѣнныя или 1) $g + 2l\sqrt{m}$ и $g - 2l\sqrt{m}$, или 2) $x + y\sqrt{m}$ и $x - y\sqrt{m}$, или 3) $c + b\sqrt{m}$ и $c - b\sqrt{m}$ (чтобы это вывести, стоитъ только принять за независимыя перемѣнныя нѣкоторыя, на время неопредѣленныя, величины ξ и η; тогда вмѣсто трехъ условныхъ уравненій получимъ шесть; исключивъ изъ этихъ уравненій x и y и стараясь упростить полученныя такимъ образомъ уравненія, получимъ высказанный только что результатъ).

Я разсмотрю только тотъ случай, когда примемъ независимыми перемѣнными два произвольныя постоянныя, напримѣръ α и β. [1]) Въ такомъ случаѣ новыя p и q выразятся такъ:

$$\psi+\frac{df}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{df}{d\beta}\frac{d\beta}{dx} \text{ и } \varphi+\frac{df}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{df}{d\beta}\frac{d\beta}{dy},$$

гдѣ въ φ и ψ вмѣсто пяти постоянныхъ подставлены пять функцій, ихъ замѣняющихъ. Очевидно, что для полученія прежнихъ p и q я долженъ положить

$$\frac{df}{d\alpha}=0\ldots(2) \text{ и } \frac{df}{d\beta}=0\ldots(3).$$

Когда эти два условія соблюдены, то новыя значенія r, s и t выразятся, если будемъ обозначать черезъ r_1, s_1 и t_1 старыя значенія r, s и t, такимъ образомъ

$$r=r_1+\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\psi}{d\beta}\frac{d\beta}{dx},$$

$$s=s_1+\frac{d\psi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\psi}{d\beta}\frac{d\beta}{dy}=s_1+\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dx}\ldots..(1),$$

$$t=t_1+\frac{d\varphi}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d\varphi}{d\beta}\frac{d\beta}{dy}.$$

Понятно, что я удовлетворю равенствамъ $r=r_1$, $s=s$ и $t=t_1$, если положу

---

[1]) Общій интегралъ уравненія $\frac{d^2z}{dy^2}=m\frac{d^2z}{dx^2}$ можно получить такъ: искать полный интегралъ пріемомъ, изложеннымъ во 2-й главѣ; тогда этотъ интегралъ получится не въ формѣ, приводимой Лагранжемъ, а въ слѣдующей формѣ:

$$z=\gamma+\delta x+\varepsilon y+\frac{\alpha-\beta}{4\sqrt{m}}x^2+\frac{\alpha+\beta}{2}xy+\frac{(\alpha-\beta)\sqrt{m}}{4}y^2.$$

Потомъ надо принять α и β за независимыя перемѣнныя и поступать также, какъ ниже я поступаю съ четырьмя приведенными мною примѣрами 1—4.

$$\frac{d\psi}{d\alpha}=0\ldots(4),\ \frac{d\psi}{d\beta}=0\ldots(5),\ \frac{d\varphi}{d\alpha}=0\ldots(6),\ \frac{d\varphi}{d\beta}=0\ldots.(7).$$

Такимъ образомъ достаточно, чтобы новыя функціи α, β, γ, δ и ε удовлетворяли шести уравненіямъ: (2), (3), (4), (5), (6) и (7), въ которыхъ дифференціалы берутся въ предположеніи x и y постоянныхъ. Такъ какъ въ силу уравненія (1) одно изъ уравненій (2), (3), (4), (5), (6) и (7) удовлетворяется, если удовлетворимъ пяти остальнымъ, то я имѣю пять дифференціальныхъ уравненій для опредѣленія пяти функцій.

При рѣшеніи шести уравненій (2)—(7) могутъ быть два существенно различные случая: первый случай тотъ, когда можно составить изъ шести уравненій (2)—(7) такія четыре, которыя не содержали бы одной изъ функцій γ, δ и ε и были бы по прежнему перваго порядка; второй случай, когда такихъ четырехъ уравненій нельзя составить.

1 случай. Въ этомъ случаѣ для нахожденія общаго интеграла исключаю x и y изъ четырехъ уравненій, не содержащихъ одной изъ функцій γ, δ и ε, и получаю два уравненія между α, β, γ и δ и производными перваго порядка отъ γ и δ по α и β.

Для дальнѣйшаго рѣшенія задачи слѣдуетъ исключить одну изъ функцій γ и δ. Опредѣляю для этого изъ обоихъ уравненій $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ и $\frac{d\gamma}{d\beta}$. Пусть

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}=\xi\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\frac{d\delta}{d\alpha},\frac{d\delta}{d\beta}\right)\ldots.(8),$$
$$\frac{d\gamma}{d\beta}=\eta\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\frac{d\delta}{d\alpha},\frac{d\delta}{d\beta}\right)\ldots.(9).$$

Дифференцирую (8) по β, а (9) по α и приравниваю обѣ величины, которымъ равна $\frac{d^2\gamma}{d\alpha d\beta}$; тогда получаю уравненіе:

$$\frac{d\xi}{d\beta}+\frac{d\xi}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta}+\frac{d\xi}{d\delta}\frac{d\delta}{d\beta}+\frac{d\xi}{dp'}\frac{d^2\delta}{d\alpha d\beta}+\frac{d\xi}{dq'}\frac{d^2\delta}{d\beta^2}$$
$$=\frac{d\eta}{d\alpha}+\frac{d\eta}{d\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}+\frac{d\eta}{d\delta}\frac{d\delta}{d\alpha}+\frac{d\eta}{dp'}\frac{d^2\delta}{d\alpha^2}+\frac{d\eta}{dq'}\frac{d^2\delta}{d\alpha d\beta}\ldots.(10),$$

гдѣ

$$p' = \frac{d\delta}{d\alpha}, \quad q' = \frac{d\delta}{d\beta}.$$

Подставляя въ это уравненіе вмѣсто $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ и $\frac{d\gamma}{d\beta}$ имъ равныя выраженія изъ уравненій (8) и (9), могу опредѣлить γ:

$$\gamma = \theta\left(\alpha, \beta, \delta, \frac{d\delta}{d\alpha}, \frac{d\delta}{d\beta}, \frac{d^2\delta}{d\alpha^2}, \frac{d^2\delta}{d\alpha d\beta}, \frac{d^2\delta}{d\beta^2}\right) \ldots . \quad (11).$$

Подставляя эту величину γ въ уравненія (8) и (9), получаю два уравненія третьяго порядка. Для краткости буду обозначать первыя производныя δ по α и β буквами p' и q', вторыя производныя буквами r', s' и t', третьи буквами l, k, m и n. Два найденныя уравненія можно представить въ такомъ видѣ:

$$\frac{d\theta}{dr'} l + \frac{d\theta}{ds'} k + \frac{d\theta}{dt'} m = \xi(\alpha, \beta, \delta, p', q', \theta) - \frac{\triangle\theta}{\triangle\alpha} = M \ldots . \quad (12),$$

$$\frac{d\theta}{dr'} k + \frac{d\theta}{ds'} m + \frac{d\theta}{dt'} n = \eta(\alpha, \beta, \delta, p', q', \theta) - \frac{\triangle\theta}{\triangle\beta} = N \ldots . \quad (13),$$

гдѣ символы $\frac{\triangle}{\triangle\alpha}$ и $\frac{\triangle}{\triangle\beta}$ означаютъ первыя четыре дифференціальныя дѣйствія при опредѣленіи производныхъ по α и β отъ γ.

О рѣшеніи этихъ уравненій потомъ. Теперь же замѣчу, что, если эти два уравненія рѣшены, γ опредѣляется уравненіемъ (11). Такъ какъ уравненія (8) и (9) удовлетворены въ томъ случаѣ, когда γ замѣнена чрезъ θ, ибо тогда они обращаются въ уравненія (12) и (13); то слѣдовательно два уравненія (8) и (9) такимъ образомъ рѣшены.

Два остальныя изъ четырехъ уравненій, которыя мы выдѣлили изъ шести, опредѣляютъ α и β въ функціяхъ x и y (въ большинствѣ случаевъ только при частныхъ значеніяхъ γ и δ). Наконецъ изъ послѣднихъ двухъ уравненій исключаю x, y, γ и δ и получаю два уравненія, изъ которыхъ опредѣлится ε въ функціи α и β.

Теорема 1. За исключеніемъ частнаго случая, два уравненія опредѣляющія ε совмѣстны.

Доказательство. Предположеніе о возможности исключить ε, $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ и $\frac{d\varepsilon}{d\beta}$ изъ шести уравненій (2) — (7) безъ повышенія порядка этихъ уравненій и такъ, чтобы получились четыре уравненія, не содержащія ε, $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ и $\frac{d\varepsilon}{d\beta}$, равносильно тому, что въ эти 6 уравненій не входитъ ε, или, другими словами, что ε въ полномъ интегралѣ умножается или на постоянную, или на функцію x и y. Положимъ теперь, что ε опредѣленъ въ функціи α и β изъ уравненія, содержащаго $\frac{d\varepsilon}{d\beta}$; такъ какъ ε въ этомъ уравненіи нѣтъ, то ε(= опредѣленной функціи α и β + произвольной функціи α)$=F(\alpha, \beta) + \Phi(\alpha)$. Если теперь подставимъ въ уравненіе, содержащее $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$, найденныя нами величины x, y, γ и опредѣлимъ изъ этого уравненія $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$, то получимъ другое значеніе для $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$, чѣмъ то, которое получается дифференціаціею уравненія $\varepsilon = F(\alpha, \beta) + \Phi(\alpha)$; назову это значеніе черезъ $\frac{d\varepsilon'}{d\alpha}$.

Ясно, что интегралъ, въ которомъ α, β, γ, δ и ε замѣнены только что найденными ихъ величинами, не дастъ производныхъ перваго и втораго порядковъ, отличающихся отъ получаемыхъ изъ полнаго интеграла только замѣною постоянныхъ функціями. Но понятно, что отъ новыхъ производныхъ перваго порядка (p и q) можемъ придти къ старымъ, если $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ замѣнимъ чрезъ $\frac{d\varepsilon'}{d\alpha}$. Слѣдов.

$$p + \frac{df}{d\varepsilon}\frac{d(\varepsilon' - \varepsilon)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx} = \psi, \quad q + \frac{df}{d\varepsilon}\frac{d(\varepsilon' - \varepsilon)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} = \varphi \ldots . . \quad (14).$$

Точно также и выраженія $\frac{d\psi}{dy}$ и $\frac{d\varphi}{dx}$ становятся равными s_1, если въ нихъ $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$ замѣню чрезъ $\frac{d\varepsilon'}{d\alpha}$; такимъ образомъ

$$\frac{d\psi}{dy} + \frac{d\psi}{d\varepsilon}\frac{d(\varepsilon' - \varepsilon)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy} = s_1 = \frac{d\varphi}{dx} + \frac{d\varphi}{d\varepsilon}\frac{d(\varepsilon' - \varepsilon)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}.$$

Изъ предъидущихъ равенствъ вывожу

$$\frac{d}{dy}\left[\frac{df}{d\varepsilon}\frac{d(\varepsilon'-\varepsilon)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}\right]-\frac{d}{dx}\left[\frac{df}{d\varepsilon}\frac{d(\varepsilon'-\varepsilon)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}\right]=\frac{d\psi}{dy}-\frac{d\varphi}{dx}=$$

$$=\frac{d\varphi}{d\varepsilon}\frac{d(\varepsilon'-\varepsilon)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}-\frac{d\psi}{d\varepsilon}\frac{d(\varepsilon'-\varepsilon)}{d\alpha}\frac{d\alpha}{dy}\,\ldots\ldots\ldots(15).$$

Если произвести дифференціацію надъ выраженіями, стоящими въ скобкахъ, а потомъ сдѣлать приведеніе, то получимъ

$$\frac{df}{d\varepsilon}\frac{d^2(\varepsilon'-\varepsilon)}{d\alpha d\beta}\left[\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}\right]=0\,\ldots\ldots\ldots\ldots(16),$$

потому что $\frac{df}{d\varepsilon}$ не содержитъ α и β.

Но $\frac{df}{d\varepsilon}$ не равна нулю. Слѣдовательно, если только опредѣлитель

$$\frac{d\alpha}{dx}\frac{d\beta}{dy}-\frac{d\alpha}{dy}\frac{d\beta}{dx}$$

не равенъ нулю, т. е. если α не есть функція только одной β, а также функція x, то

$$\frac{d^2(\varepsilon'-\varepsilon)}{d\alpha d\beta}=0\,\ldots\ldots\ldots(17).$$

Это вѣрно, если даже коэффиціентъ у ε въ полномъ интегралѣ — постоянная, ибо тогда

$$\frac{d\varphi}{d\varepsilon}=0 \text{ и } \frac{d\psi}{d\varepsilon}=0,$$

и слѣдовательно все-таки изъ равенства (15) получится равенство (16).

Что же значитъ равенство (17)? Такъ какъ ε' и ε — функціи только α и β, то это равенство (17) можно представить въ слѣдующемъ видѣ:

$$\frac{d\varepsilon'}{d\alpha}=\frac{d\varepsilon}{d\alpha}+\text{нѣкоторая функція } \alpha.$$

Но $\varepsilon = F(\alpha,\beta) +$ пр. ф. α; эту произвольную функцію можно такъ выбрать, чтобы *нѣкоторая функція* α равнялась нулю; что и требовалось доказать.

Въ предъидущихъ вычисленіяхъ я полагалъ, что уравненія (8) и (9) содержатъ γ и δ, при томъ функцію γ такъ, что она не уничтожается въ (10) послѣ подстановки $\frac{d\gamma}{d\alpha}$ и $\frac{d\gamma}{d\beta}$ изъ (8) и (9). Но если уравненія (8) и (9) не содержатъ или обѣихъ γ и δ, или одной изъ нихъ, или γ исключается въ (10); то вмѣсто двухъ уравненій 3-го порядка можно всегда получить одно уравненіе 2-го порядка, линейное относительно производныхъ втораго порядка. Въ такомъ случаѣ уравненіе (10), будучи удовлетворено, показываетъ, что оба уравненія (9) и (8) совмѣстны и слѣдовательно даютъ γ, если ихъ интегрировать. То же можно сказать и объ ε, потому что теорема 1-ая остается вѣрна и на этотъ случай.

Примѣръ 1 (взятый изъ статьи Петерсона).

$$r + t\,e^{2s} = 0.$$

Для составленія полнаго интеграла можно три производныя r, s и t приравнять произвольнымъ постояннымъ. Я полагаю

$$r=\frac{1}{2}(e^{2\alpha}+e^{2\beta}),\ s=\alpha+\beta,\ t=-\frac{1}{2}(e^{-2\alpha}+e^{-2\beta}).$$

Въ такомъ видѣ выразятся r, s и t, если ихъ опредѣлять изъ даннаго уравненія и изъ двухъ интеграловъ, приравненныхъ произвольнымъ постояннымъ, системъ (11)—(12) главы 2-ой. Къ той же формѣ придемъ, желая упростить общій интегралъ, полученный при другой формѣ постоянныхъ.

Полный интегралъ будетъ

$$z=\varepsilon+\delta x+\gamma y+\frac{1}{4}(e^{2\alpha}+e^{2\beta})x^2+(\alpha+\beta)xy-\frac{1}{4}(e^{-2\alpha}+e^{-2\beta})y^2.$$

Шесть уравненій (2)—(7) въ этомъ примѣрѣ даютъ

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha}+x\frac{d\delta}{d\alpha}+y\frac{d\gamma}{d\alpha}+\frac{1}{2}e^{2\alpha}x^2+xy+\frac{1}{2}e^{-2\alpha}y^2=0,\ \frac{d\delta}{d\alpha}+e^{2\alpha}x+y=0,$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\beta}+x\frac{d\delta}{d\beta}+y\,\frac{d\gamma}{d\beta}+\frac{1}{2}\,e^{2\beta}x^2+xy+\frac{1}{2}\,e^{-2\beta}y^2=0,\ \frac{d\delta}{d\beta}+e^{2\beta}x+y=0,$$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}+x+e^{-2\alpha}y=0,\ \frac{d\gamma}{d\beta}+x+e^{-2\beta}y=0.$$

Изъ четырехъ уравненій, не содержащихъ ε, имѣю

$$\frac{d\delta}{d\alpha}=e^{2\alpha}\,\frac{d\gamma}{d\alpha},\ \ \frac{d\delta}{d\beta}=e^{2\beta}\,\frac{d\gamma}{d\beta}.$$

Исключаю δ:

$$e^{2\alpha}\,\frac{d^2\gamma}{d\alpha d\beta}=e^{2\beta}\,\frac{d^2\gamma}{d\alpha d\beta};\ \text{т. е.}\ \frac{d^2\gamma}{d\alpha d\beta}=0,$$

откуда $\gamma=\varphi(\alpha)+\psi(\beta)$, гдѣ φ и ψ произвольныя функціи. Послѣ этого δ опредѣляется изъ дифференціальнаго уравненія:

$$d\delta=e^{2\alpha}\frac{d\gamma}{d\alpha}\,d\alpha+e^{2\beta}\,\frac{d\gamma}{d\beta}\,d\beta,$$

которое даетъ

$$\delta=\int e^{2\alpha}\varphi'(\alpha)d\alpha+\int e^{2\beta}\psi'(\beta)d\beta.$$

Функціи α и β опредѣляются посредствомъ двухъ послѣднихъ уравненій изъ шести:

$$\varphi'(\alpha)+x+e^{-2\alpha}y=0\ \text{ и }\ \psi'(\beta)+x+e^{-2\beta}y=0.$$

Наконецъ для опредѣленія ε имѣю уравненія:

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha}+\frac{1}{2}\,x\,\frac{d\delta}{d\alpha}+\frac{1}{2}\,y\,\frac{d\gamma}{d\alpha}=0,\ \frac{d\varepsilon}{d\beta}+\frac{1}{2}\,x\,\frac{d\delta}{d\beta}+\frac{1}{2}\,y\,\frac{d\gamma}{d\beta}$$

$$\text{или}\ \frac{d\varepsilon}{d\beta}=\frac{1}{2}\,e^{2\alpha}\varphi'(\alpha)^2,\ \frac{d\varepsilon}{d\beta}=\frac{1}{2}\,e^{2\beta}\psi'(\beta)^2.$$

Стало быть

$$\varepsilon=\frac{1}{2}\int e^{2\alpha}\varphi'(\alpha)^2d\alpha+\frac{1}{2}\int e^{2\beta}\psi'(\beta)^2d\beta.$$

Слѣдовательно общій интегралъ получится по исключеніи α и β изъ трехъ уравненій:

$$\varphi'(\alpha)+x+e^{-2\alpha}y=0,\ \psi'(\beta)+x+e^{-2\beta}y=0,$$

$$z=\frac{1}{2}\left(\int e^{2\alpha}\varphi'(\alpha)^2d\alpha+\int e^{2\beta}\psi'(\beta)^2d\beta\right)+x\left(\int e^{2\alpha}\varphi'(\alpha)da+\int e^{2\beta}\psi'(\beta)d\beta\right)+$$

$$+y(\varphi(\alpha)+\psi(\beta))+\frac{1}{4}\,(e^{2\alpha}+e^{2\beta})x^2+(\alpha+\beta)xy-\frac{1}{4}\,(e^{-2\alpha}+e^{-2\beta})y^2.$$

Примѣръ 2. Найти общій интегралъ уравненія $s^2=pt$.

Для этого беру изъ второй главы полный интегралъ:

$$z=\omega+\delta y+\gamma^2x+8\gamma\beta e^{\frac{x}{4}}+2\,\beta^2e^{\frac{x}{2}}+2\alpha ye^{\frac{x}{4}}(2\gamma+\beta e^{\frac{x}{4}})+\frac{1}{2}\,\alpha^2y^2e^{\frac{x}{2}},$$

изъ котораго получаю

$$p=(\gamma+\beta e^{\frac{x}{4}}+\frac{1}{2}\,\alpha ye^{\frac{x}{4}})^2,\ q=\delta+2\alpha e^{\frac{x}{4}}(2\gamma+\beta e^{\frac{x}{4}})+\alpha^2ye^{\frac{x}{2}}.$$

Шесть уравненій, опредѣляющихъ $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ и ω, будутъ

$$\frac{d\omega}{d\beta}+y\,\frac{d\delta}{d\beta}+2\gamma x\frac{d\gamma}{d\beta}+8\beta e^{\frac{x}{4}}\frac{d\gamma}{d\beta}+8\gamma e^{\frac{x}{4}}+4\beta e^{\frac{x}{2}}+$$

$$+2\,\alpha ye^{\frac{x}{4}}(2\,\frac{d\gamma}{d\beta}+e^{\frac{x}{4}})=0\ \ldots\ldots\ (18),$$

$$\frac{d\omega}{d\alpha}+y\,\frac{d\delta}{d\alpha}+2\gamma x\,\frac{d\gamma}{d\alpha}+8\beta e^{\frac{x}{4}}\frac{d\gamma}{d\alpha}+2ye^{\frac{x}{4}}(2\gamma+\beta e^{\frac{x}{4}})+$$

$$+4\alpha ye^{\frac{x}{4}}\frac{d\gamma}{d\alpha}+\alpha y^2e^{\frac{x}{2}}=0\ \ldots\ldots\ (19),$$

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}+\frac{1}{2}\,ye^{\frac{x}{4}}=0\ \ldots\ (20),\ \frac{d\gamma}{d\beta}+e^{\frac{x}{4}}=0\ \ldots\ (21),$$

$$\frac{d\delta}{d\beta}+2\alpha e^{\frac{x}{4}}(2\,\frac{d\gamma}{d\beta}+e^{\frac{x}{4}})=0\ \ldots\ (22),$$

$$\frac{d\delta}{d\alpha}+2e^{\frac{x}{4}}(2\gamma+\beta e^{\frac{x}{4}})+4\alpha e^{\frac{x}{4}}\frac{d\gamma}{d\alpha}+2\,\alpha ye^{\frac{x}{2}}=0\ \ldots\ (23).$$

Вмѣсто уравненій (22) и (23) могу написать

$$\frac{d\delta}{d\beta} + 2\alpha e^{\frac{x}{4}} \frac{d\gamma}{d\beta} = 0 \ldots\ldots\ldots (24),$$

$$\frac{d\delta}{d\alpha} + 2e^{\frac{x}{4}}(2\gamma + \beta e^{\frac{x}{4}}) = 0 \ldots. (25).$$

Исключая x изъ уравненій (21), (24) и (25), получаю два уравненія:

$$\frac{d\delta}{d\beta} - 2\alpha\left(\frac{d\gamma}{d\beta}\right)^2 = 0 \ldots\ldots.. (26),$$

$$\frac{d\delta}{d\alpha} - 2\,\frac{d\gamma}{d\beta}(2\gamma - \beta\frac{d\gamma}{d\beta}) = 0 \ldots.. (27).$$

Изъ уравненій (26) и (27) могу исключить функцію δ, если продифференцирую первое по α, а второе по β; получаю уравненіе втораго порядка:

$$\alpha\frac{d\gamma}{d\beta}\frac{d^2\gamma}{d\alpha d\beta} + (\beta\frac{d\gamma}{d\beta} - \gamma)\frac{d^2\gamma}{d\beta^2} = 0 \ldots. (28).$$

Когда изъ уравненія (28) будетъ опредѣлена функція γ, то α и β опредѣляются въ функціяхъ x и y изъ уравненій (20) и (21); δ же опредѣлится въ функціи α и β изъ (26) и (27), которыя будутъ совмѣстны, потому что уравненіе (28) удовлетворено, и наконецъ ω опредѣлится изъ двухъ уравненій (18) и (19), послѣ того какъ исключимъ въ этихъ уравненіяхъ x, y, γ и δ. Было доказано, что (18) и (19) будутъ совмѣстны; легко это доказать для этого примѣра вычисленіемъ, не зная общаго выраженія γ, а только помня, что (26), (27) и (28) удовлетворены.

При изложеніи второй главы мы видѣли, что въ томъ случаѣ, когда одна изъ системъ (11)—(12) второй главы имѣетъ одинъ интегралъ, вмѣсто полнаго интеграла можно найти частный съ одною произвольною функціею. Такой частный интегралъ долженъ быть и для разбираемаго примѣра. Этотъ интегралъ легко вывести изъ шести уравненій (18), (19), (20), (21), (22) и (23). Для этого стоитъ считать α постоянною (т. е. та постоянная, которая входитъ въ интегралъ (11)—(12) системы, не варьируется). Въ такомъ случаѣ

уравненія (19), (20) и (23) должны быть отброшены; для опредѣленія β,γ,δ и ω остаются три уравненія:

$$\frac{d\gamma}{d\beta} + e^{\frac{x}{4}} = 0,\ \frac{d\delta}{d\beta} - 2\,\alpha e^{\frac{x}{2}} = 0,\ \frac{d\omega}{d\beta} - 2e^{\frac{x}{4}}(x\gamma - 4\gamma + 2\beta e^{\frac{x}{4}}) = 0,$$

уравненія, показывающія, что β,γ,δ и ω выражаются съ помощью произвольной функціи x, чего и слѣдовало ожидать, такъ какъ въ уравненіяхъ (41) главы второй dx дѣлится на 0. Если полагать

$$\gamma = \xi\ (x),$$

то получимъ

$$\beta = -\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{x}{4}}\xi'(x)dx,\ \ \delta = -2\alpha\int_{x_0}^{x} e^{\frac{x}{4}}\ \xi'(x)dx,$$

$$\omega = 2\int_{x_0}^{x}(4 - x)\xi(x)\xi'(x)dx + 4\int_{x_0}^{x} e^{\frac{x}{4}}\ \xi'(x)\,dx\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{x}{4}}\ \xi'(x)dx.$$

Подставляя все это въ полный интегралъ и полагая

$$\xi(x) - e^{\frac{x}{4}}\int_{x_0}^{x} e^{-\frac{x}{4}}\ \xi'(x)dx = \eta(x),$$

получаю интегралъ съ одною произвольною функціею:

$$z = z_0 + \int_{x_0}^{x}\eta(x)^2 dx + \alpha y\int_{x_0}^{x} e^{\frac{x}{4}}\ \eta(x)dx + \frac{1}{2}\alpha^2 y^2 e^{\frac{x}{2}}.$$

Полагаю $y_0 = 0$.

Примѣръ 3. Уравненіе $r = \frac{s^2}{4t} - 2q + 2yt$ имѣетъ полный интегралъ:

$$z = \omega + \varepsilon x + \nu y + \mu xy + \frac{1}{2}\lambda y^2 + \frac{1}{2}\left(\frac{\mu^2}{4\lambda} - 2\nu\right)x^2 - \frac{1}{3}\mu x^3.$$

Уравненія опредѣляющія ε,ν,μ и λ:

$$\frac{d\nu}{d\mu}+x=0, \frac{d\nu}{d\lambda}+y=0, \frac{d\varepsilon}{d\mu}+y-x^2+\frac{\mu x}{2\lambda}-2x\frac{d\nu}{d\mu}=0,$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\lambda}-\frac{\mu^2}{4\lambda^2}x-2x\frac{d\nu}{d\lambda}=0.$$

Для опредѣленія ν имѣю

$$\frac{d^2\nu}{d\lambda^2}+\frac{\mu}{2\lambda}\frac{d^2\nu}{d\mu d\lambda}+\left(2\frac{d\nu}{d\lambda}+\frac{\mu^2}{4\lambda^2}\right)\frac{d^2\nu}{d\mu^2}=0.$$

Примѣръ 4. Уравненіе $s(r+t)=xy$ имѣетъ полный интегралъ:

$$z=\rho+\omega x+\varepsilon y+\frac{1}{2}\lambda(x^2-y^2)+x\int dy\sqrt{y^2+\alpha^2}.$$

Принимаю α и λ за функціи x и y, а ρ, ω и ε за функціи λ и α. Шесть уравненій, изъ которыхъ опредѣляются функціи, замѣняющія произвольныя постоянныя, будутъ

$$\frac{d\omega}{d\lambda}+x=0, \frac{d\omega}{d\alpha}+\alpha\int\frac{dy}{\sqrt{y^2+\alpha^2}}=0, \frac{d\varepsilon}{d\lambda}-y=0, \frac{d\varepsilon}{d\alpha}+\frac{\alpha x}{\sqrt{y^2+\alpha^2}}=0,$$

$$\frac{d\rho}{d\lambda}-\frac{1}{2}x^2+\frac{1}{2}y^2=0, \frac{d\rho}{d\alpha}-\frac{\alpha xy}{\sqrt{y^2+\alpha^2}}=0.$$

Исключаю изъ четырехъ послѣднихъ x и y:

$$\frac{d\rho}{d\alpha}+\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\frac{d\varepsilon}{d\lambda}=0, \frac{d\rho}{d\lambda}+\frac{1}{2}\left(\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right)^2-\frac{1}{2\alpha^2}\left\{\alpha^2+\left(\frac{d\varepsilon}{d\lambda}\right)^2\right\}\left(\frac{d\varepsilon}{d\alpha}\right)^2=0.$$

Для опредѣленія ε имѣю

$$pt+\frac{1}{\alpha^2}p^2qs+p\left(1+\frac{1}{\alpha^2}q^2\right)r=\frac{p^2q^2}{\alpha^3},$$

$$\text{гдѣ } p=\frac{d\varepsilon}{d\alpha}, q=\frac{d\varepsilon}{d\lambda}, r=\frac{d^2\varepsilon}{d\alpha^2}, s=\frac{d^2\varepsilon}{d\alpha d\lambda} \text{ и } t=\frac{d^2\varepsilon}{d\lambda^2}.$$

Перехожу теперь къ интеграціи уравненій (12) и (13), при чемъ для простоты буду вездѣ замѣнять

$$\frac{d\gamma}{d\alpha}, \frac{d\gamma}{d\beta}, \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2}, \frac{d^2\gamma}{d\alpha d\beta}, \frac{d^2\gamma}{d\beta^2}, \frac{d^3\gamma}{d\alpha^3}, \frac{d^3\gamma}{d\alpha^2 d\beta}, \frac{d^3\gamma}{d\alpha d\beta^2}, \frac{d^3\gamma}{d\beta^3}$$

буквами p, q, r, s, t, l, k, m, n. Положимъ, что

$$K=\lambda \text{ и } L=\mu,$$

(гдѣ λ и μ произвольныя постоянныя)—два уравненія между x, y, z, p, q, r, s, t (замѣняю также α, β и γ черезъ x, y, z), изъ которыхъ можно получить такія значенія k, l, m и n, которыя удовлетворяли бы уравненіямъ (12) и (13). Въ дальнѣйшихъ выводахъ буду употреблять тѣ же символы, что̀ и на страницѣ 59 въ главѣ второй; только въ опредѣлителяхъ $\triangle$, ξ_r, ξ_s, ξ_t, η_r, η_s и η_t я долженъ вездѣ вмѣсто $\frac{\triangle\theta}{\triangle x}$ и $\frac{\triangle\theta}{\triangle y}$ ставить $-M$ и $-N$.

Дифференцирую два уравненія $K=\lambda$ и $L=\mu$; тогда получаю

$$\frac{dK}{dr}l+\frac{dK}{ds}k+\frac{dK}{dt}m+\frac{\triangle K}{\triangle x}=0 \quad \ldots\ldots (29),$$

$$\frac{dK}{dr}k+\frac{dK}{ds}m+\frac{dK}{dt}n+\frac{\triangle K}{\triangle y}=0 \quad \ldots\ldots (30),$$

$$\frac{dL}{dr}l+\frac{dL}{ds}k+\frac{dL}{dt}m+\frac{\triangle L}{\triangle x}=0 \quad \ldots\ldots (31),$$

$$\frac{dL}{dr}k+\frac{dL}{ds}m+\frac{dL}{dt}n+\frac{\triangle L}{\triangle y}=0 \quad \ldots\ldots (32).$$

Изъ уравненій (12), (29) и (31) получаю

$$\triangle k+\xi_s=0, \ \triangle m+\xi_t=0. \ldots\ldots (33),$$

а изъ уравненій (13), (30) и (32) получаю

$$\triangle k+\eta_r=0 \text{ и } \triangle m+\eta_s=0 \ldots\ldots (34),$$

гдѣ символы $\triangle$, ξ_s, ξ_t, η_r и η_s означаютъ то же, что̀ и въ главѣ второй. Сравнивая (33) и (34), получаю

$$\eta_r=\xi_s \ldots. (35), \ \eta_s=\xi_t \ldots. (36).$$

Если я найду функціи K и L, удовлетворяющія уравненіямъ (35) и (36), то, приравнявъ эти функціи произвольнымъ постоннымъ, я получу такія два уравненія, изъ дифференціаловъ которыхъ опредѣлятся k, l, m и n, удовлетворяющія уравненіямъ (12) и (13).

Для большей ясности дальнѣйшаго изложенія я отложу пока вопросъ объ отысканіи K и L, а также разсмотрѣніе всѣхъ наиболѣе выгодныхъ случаевъ. Теперь же, предполагая, что K и L найдены, приступлю къ изложенію дальнѣйшей интеграціи (12) и (13) уравненій. Прежде всего для уравненій (12) и (13) также легко получается полный интегралъ, какъ для одного уравненія втораго порядка. Для этого стоитъ интегрировать систему уравненій съ полными дифференціалами:

$$dr = ldx + kdy,\ ds = kdx + mdy,\ dt = mdx + ndy,$$

$$dp = rdx + sdy,\ dq = sdx + tdy \text{ и } dz = pdx + qdy \ldots\ldots (37),$$

въ которыхъ l, k, m и n опредѣлены изъ уравненій (29)—(32).

Теорема 2. Если K и L опредѣлены изъ уравненій (35) и (36) и если части ихъ производныхъ по x и по y, содержащія l, k, m и n, отличны отъ такихъ же частей уравненій (12) и (13), то система (37) вполнѣ совмѣстна.

Доказательство. Для краткости обозначаю черезъ $A(V)$ и $B(V)$ операціи

$$\frac{\triangle V}{\triangle x} + \frac{dV}{dr}l + \frac{dV}{ds}k + \frac{dV}{dt}m \text{ и } \frac{\triangle V}{\triangle y} + \frac{dV}{dr}k + \frac{dV}{ds}m + \frac{dV}{dt}n,$$

гдѣ k, l, m и n замѣнены изъ уравненій (29), (30), (31) и (32).

Условія полной совмѣстности уравненій (37) будутъ

$$A(k) = B(l),\ A(m) = B(k) \text{ и } A(n) = B(m).$$

Докажу, что они тождества въ нашемъ случаѣ. Для этого дѣлаю операцію A надъ (13), (30) и (32) и операцію B надъ (12), (29) и (31) и вычитаю попарно; тогда посредствомъ вычисленій, совершенно схожихъ съ тѣми, которыя помѣщены въ 3-ей главѣ на страницахъ 100 и 101, я получаю слѣдующія тождества (тождества, потому что k, l, m и n замѣнены изъ (29), (30), (31) и (32)):

$$\frac{dK}{dr}\Big\{A(k) - B(l)\Big\} + \frac{dK}{ds}\Big\{A(m) - B(k)\Big\} +$$
$$+ \frac{dK}{dt}\Big\{A(n) - B(m)\Big\} = 0 \ldots\ldots (38),$$

$$\frac{dL}{dr}\Big\{A(k) - B(l)\Big\} + \frac{dK}{ds}\Big\{A(m) - B(k)\Big\} +$$
$$+ \frac{dL}{dt}\Big\{A(n) - B(m)\Big\} = 0 \ldots\ldots (39),$$

$$\frac{d\theta}{dr}\Big\{A(k) - B(l)\Big\} + \frac{d\theta}{ds}\Big\{A(m) - B(k)\Big\} + \frac{d\theta}{dt}\Big\{A(n) - B(m)\Big\} =$$
$$= A\Big(N + \frac{\triangle\theta}{\triangle y}\Big) - B\Big(M + \frac{\triangle\theta}{\triangle x}\Big) = A(\eta) - B(\xi) \ldots\ldots (40).$$

Но уравненіе (10), послѣ того какъ въ немъ θ поставлена вмѣсто γ, можно представить въ видѣ:

$$A(\eta) = B(\xi) \ldots\ldots (41);$$

это уравненіе дѣлается тождествомъ при замѣнѣ k, l, m и n изъ (12) и (13) (а слѣдовательно изъ (29), (30), (31) и (32)). Поэтому изъ уравненій (38), (39) и (40) слѣдуетъ

$$A(k) = B(l),\ A(m) = B(k) \text{ и } A(n) = B(m),$$

что и требовалось доказать.

Замѣчу, что всѣ интегралы системы (37) даютъ въ то же время частные интегралы, общіе двумъ уравненіямъ (35) и (36). Въ самомъ дѣлѣ, если разрѣшимъ уравненія (35) и (36) относительно $\frac{dK}{dx}$ и $\frac{dK}{dy}$, то получимъ два уравненія (29) и (30), въ которыхъ k, l, m и n замѣнены величинами, опредѣленными изъ (12), (13), (31) и (32); но по Майеру интегралы такихъ двухъ уравненій, приравненные произвольнымъ постояннымъ, составляютъ интегральную систему (37).

Перехожу къ вопросу объ отысканіи общаго интеграла (12) и (13).

Теорема 3. Если найдены всѣ интегралы уравненій (35) и (36), то всегда можно составить такое уравненіе $\theta = G(x, y, z, p, q, \alpha)$, посредствомъ дифференціаціи котораго, и послѣ исключенія α, возстановляются оба уравненія (12) и (13).

Доказательство. 1) Называя по прежнему черезъ ξ и η выраженія

$$M + \frac{\triangle\theta}{\triangle x} \text{ и } N + \frac{\triangle\theta}{\triangle y},$$

имѣю изъ уравненій (12) и (13)

$$d\theta = \xi(x, y, z, p, q, \theta)dx + \eta(x, y, z, p, q, \theta)dy.$$

Подставлю въ функціи ξ и η величины z, p и q, полученныя изъ полнаго интеграла и выраженныя черезъ x, y и шесть постоянныхъ; получаю

$d\theta = \xi(x, y, \theta$ и 6 постоянныхъ$)\, dx + \eta(x, y, \theta$ и 6 пост.$)dy$ . . . .(42).

Но изъ (10) намъ извѣстно, что

$$\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\xi}{dz}q + \frac{d\xi}{dp}s + \frac{d\xi}{dq}t + \frac{d\xi}{d\theta}\eta =$$

$$= \frac{d\eta}{dx} + \frac{d\eta}{dz}p + \frac{d\eta}{dp}r + \frac{d\eta}{dq}s + \frac{d\eta}{d\theta}\xi.$$

Когда же я подставлю z, p, q, r, s и t, опредѣленныя изъ полнаго интеграла, то послѣднее уравненіе выразится такъ:

$$\frac{d\xi}{dy} + \frac{d\xi}{d\theta}\eta = \frac{d\eta}{dx} + \xi\frac{d\eta}{d\theta};$$

но это уравненіе прямо показываетъ, что (42) имѣетъ интегралъ: $U(x, y$, 6 постоянныхъ, $\theta) = \alpha$ или $\theta = L\,(x, y$, 6 пост., $\alpha)$. Если этотъ интегралъ дифференцировать относительно x, или относительно y, а потомъ исключать α, то получатся два уравненія:

$$\frac{d\theta}{dx} = \xi(x, y, 6 \text{ пост.}, \theta) \text{ и } \frac{d\theta}{dy} = \eta(x, y, 6 \text{ пост.}, \theta).$$

Если замѣню шесть постоянныхъ ихъ функціями x, y, z, p, q, r, s и t, которыя можно получить изъ интегральной системы уравненій (37), то получу

$$\theta = L(x, y, z, p, q, r, s, t, \alpha) \text{ . . . . } (43).$$

2) Уравненіе (43) должно обладать тѣмъ свойствомъ, что при дифференцированіи и исключеніи α должны получиться: при дифференцированіи по x уравненіе (12), при дифференцированіи по y уравненіе (13). Но дифференцируя (43), я получу

$$A(\theta) = \frac{dL}{dx} + \frac{dL}{dz}p + \frac{dL}{dp}r + \frac{dL}{dq}s + \frac{dL}{dr}l + \frac{dL}{ds}k + \frac{dL}{dt}m,$$

$$B(\theta) = \frac{dL}{dy} + \frac{dL}{dz}q + \frac{dL}{dp}s + \frac{dL}{dq}t + \frac{dL}{dr}k + \frac{dL}{ds}m + \frac{dL}{dt}n.$$

Во вторыя части этихъ уравненій входятъ l, k, m и n. Такъ какъ въ уравненіяхъ (12) и (13) m, n, l и k входятъ не иначе, какъ въ дифференціалъ θ, при исключеніи же α параметры l, k, m и n вновь не входятъ, то заключаю, что уравненіе (43) не можетъ содержать r, s и t иначе, какъ въ видѣ функціи θ, т. е. что уравненіе (43) имѣетъ видъ:

$$\theta = L(x, y, z, p, q, \theta, \alpha) \text{ или } \theta = G(x, y, z, p, q, \alpha) \text{ . . . . } (44),$$

что̀ и требовалось доказать.

Если въ функцію θ подставить r, s, t, p, q и z, найденныя изъ полнаго интеграла, то должна получиться функція, тождественно равная $G(x, y, z, p, q, \alpha)$, въ которой z, p и q замѣнены оттуда же; слѣдовательно α равна функціи шести интеграціонныхъ постоянныхъ; поэтому одну изъ постоянныхъ всегда можно выразить черезъ α и пять остальныхъ. Чтобы найти слѣдовательно общій интегралъ уравненій (12) и (13), должно въ полномъ интегралѣ одну изъ постоянныхъ замѣнить функціею α и пяти остальныхъ.

Въ полномъ интегралѣ, такимъ образомъ полученномъ, варьируемъ всѣ постоянныя, кромѣ α, и варьируемъ такъ, чтобы p, q, r, s и t, полученныя изъ новаго интеграла, отличались отъ прежнихъ только тѣмъ, что вмѣсто пяти постоянныхъ подставлены нѣкоторыя функціи. Рѣшеніе шести уравненій, такимъ образомъ полученныхъ, и даетъ намъ общій интегралъ уравненій (12) и (13). Въ самомъ дѣлѣ, такъ какъ p, q, r, s и t отличаются отъ прежнихъ только замѣною пяти постоянныхъ нѣкоторыми функціями x и y, то уравненіе (44) удовлетворяется и новыми значеніями p, q, r, s и t; а такъ какъ α осталась постоянною, то дифференцированіе уравненія (44) и исключеніе α по прежнему дастъ два уравненія (12) и (13); т. е. (12) и (13) удовлетворяются новыми значеніями z, p, q, r, s, t, l, k, m и n.

Вообще уравненіе (44) вполнѣ замѣняетъ уравненія (12) и (13); а потому, если умѣемъ рѣшить (44) съ помощью рядовъ, или знаемъ опредѣленный интегралъ, выражающій общій интегралъ этого уравненія, то общій интегралъ даннаго уравненія отысканъ.

Перехожу къ вопросу объ отысканіи K и L, функцій, удовлетворяющихъ двумъ уравненіямъ (35) и (36). Если расположимъ уравненія (35) и (36) относительно производныхъ K, то получимъ уравненія, отличающіяся отъ уравненій (26^{bis}) и (25^{bis}) второй главы только тѣмъ, что $\frac{\Delta\theta}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta\theta}{\Delta y}$ замѣнены $-M$ и $-N$. Также, какъ и уравненія (25^{bis}) и (26^{bis}), уравненія (35) и (36) можно разсматривать: или 1) какъ тождественныя уравненія съ одною неизвѣстною функціею K, или 2) какъ два вполнѣ совмѣстныя уравненія съ одною неизвѣстною функціею K.

Для того, чтобы уравненія (35) и (36) были тождественны относительно функціи K, нужно, чтобы коэффиціенты при тѣхъ же производныхъ K въ этихъ уравненіяхъ были пропорціональны. Употребляя тѣ же обозначенія, какъ во второй главѣ, имѣю четыре пропорціи:

$$a : b = b : c = \mathfrak{U}_r : (\mathfrak{X}_r + \mathfrak{U}_s) = -\mathfrak{X}_r : \mathfrak{U}_t = (\mathfrak{X}_s + \mathfrak{U}_t) : \mathfrak{X}_t \ldots (45).$$

Теорема 4. Изъ четырехъ пропорцій (45) достаточно удовлетворить двумъ, и тогда остальныя тоже удовлетворятся.

Доказательство этой теоремы можно найти въ началѣ второй главы на страницѣ 58.

Такимъ образомъ интеграція уравненій (12) и (13) въ этомъ случаѣ приводится къ отысканію интеграла, удовлетворяющаго двумъ совмѣстнымъ уравненіямъ перваго порядка:

$$ac - b^2 = 0 \ldots (46) \text{ и } b\mathfrak{X}_r + a\mathfrak{U}_t = 0 \ldots (47).$$

Эти два уравненія можно представить въ линейномъ видѣ. Обозначая черезъ ω_1 и ω_2 два корня уравненія

$$\frac{d\theta}{dr}\omega^2 - \frac{d\theta}{ds}\omega + \frac{d\theta}{dt} = 0,$$

имѣю вмѣсто (46)

$$\frac{dL}{ds} = \omega_2 \frac{dL}{dr} + \frac{1}{\omega_2}\frac{dL}{dt} \ldots\ldots (48),$$

уравненіе, вполнѣ аналогичное (11^{bis}) изъ 2-ой главы. Замѣтивъ же, что $\omega_2 = b:a$, и обозначая для краткости $\frac{d\theta}{dr}, \frac{d\theta}{ds}$ и $\frac{d\theta}{dt}$ черезъ R, S и T, могу замѣнить (47) слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\frac{\Delta L}{\Delta x} + \omega_1 \frac{\Delta L}{\Delta y} + \frac{M}{R}\frac{dL}{dr} + \frac{N}{R\omega_2}\frac{dL}{dt} = 0 \ldots\ldots (49).$$

Системъ (48)—(49) двѣ.

Искомый интегралъ L системы (48)—(49) долженъ содержать r, s и t; интеграловъ, вполнѣ отличныхъ относительно r, s и t, обѣ системы имѣютъ только три (и другіе интегралы могутъ содержать r, s и t; но производныя этихъ интеграловъ по r, по s и по t не будутъ отличаться отъ такихъ же производныхъ упомянутыхъ трехъ интеграловъ). Въ самомъ дѣлѣ одинъ изъ интеграловъ каждаго изъ уравненій (48) есть $\theta +$ произв. ф. (x, y, z, p, q).

Теорема 5. Если обѣ системы (48) — (49) имѣютъ общій интегралъ, содержащій r, s и t, то два уравненія (12) и (13) суть частные дифференціалы по x и по y этого интеграла.

Доказательство. Такой интегралъ имѣетъ видъ

$$\theta + f(x, y, z, p, q)$$

и удовлетворяетъ двумъ уравненіямъ

$$\frac{\Delta(\theta + f)}{\Delta x} + \omega_1 \frac{\Delta(\theta + f)}{\Delta y} + M + N\omega_1 = 0$$

$$\text{и } \frac{\Delta(\theta + f)}{\Delta x} + \omega_2 \frac{\Delta(\theta + f)}{\Delta y} + M + N\omega_2 = 0.$$

Вычитая одно изъ послѣднихъ уравненій изъ другаго, а потомъ вычитая по умноженіи ихъ на ω_2 и ω_1, имѣю

$$\frac{\Delta(\theta + f)}{\Delta y} + N = 0 \text{ и } \frac{\Delta(\theta + f)}{\Delta x} + M = 0,$$

что и требовалось доказать.

Теорема 6. Если каждая система (48) — (49) имѣетъ по одному интегралу, содержащему r, s и t и вполнѣ отличному отъ другаго относительно этихъ производныхъ, то оба эти интеграла обращаютъ уравненія (35) и (36) въ тождества.

Доказательство совершенно схоже съ доказательствомъ теоремы четвертой въ главѣ второй (на страницѣ 80); а потому я позволю себѣ его не приводить.

Когда найденъ интегралъ, содержащій r, s и t, для одной изъ системъ (48) — (49), то полный интегралъ найдется изъ системы (37), которую можемъ интегрировать, не опредѣляя предварительно K и опредѣляя k, l, m и n изъ (12), (13) и $L=\alpha'$. Тоже вѣрно и въ томъ случаѣ, если нашли для каждой системы по интегралу. Если же нашли интегралъ, общій обѣимъ системамъ, то нечего искать полный интегралъ, потому что полный интегралъ ищется съ цѣлью нахожденія уравненія (44).

Но можно найти полный интегралъ, интегрируя вполнѣ систему:

$$dr : \left(\frac{d\theta}{dt}\frac{\triangle L}{\triangle x} + M\frac{dL}{dt}\right) = ds : \left(\frac{d\theta}{dt}\frac{\triangle L}{\triangle y} + N\frac{dL}{dt}\right) =$$

$$-dt : \left(\frac{d\theta}{dr}\frac{\triangle L}{\triangle x} + M\frac{dL}{dr} + \frac{d\theta}{ds}\frac{\triangle L}{\triangle y} + N\frac{dL}{ds}\right) = -dp : (br + cs) =$$

$$-dq : (bs + ct) = -dz : (bp + cq) = -dx : b = -dy : c \ldots . (50).$$

Полная интеграція этой системы, а потомъ исключеніе p, q, r, s, t и r_0 (или s_0 ; t_0 же опредѣляется изъ $L_0=\alpha'$) дастъ намъ полный интегралъ съ шестью произвольными постоянными. Но не всякій такой полный интегралъ можно принять за интегралъ (12) и (13). Для того, чтобы это понять, стоитъ вспомнить доказательство на страницахъ 67—72, основанное на другомъ доказательствѣ на страницахъ 61 — 63. Въ самомъ дѣлѣ, эти доказательства предполагаютъ существованіе трехъ функцій, изъ дифференціаловъ которыхъ получаются уравненія (12), (29) и (31) и еще три дифференціальныя уравненія, отличающіяся отъ (13), (30) и (32) тѣмъ, что k, m и n замѣнены чрезъ

$$\frac{\triangle r}{\triangle y}, \frac{\triangle s}{\triangle y} \text{ и } \frac{\triangle t}{\triangle y}.$$

Поэтому ясно, что произвольныя постоянныя должны удовлетворять не одному условію $L(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0)=\alpha'$, а еще

другому $\theta(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, r_0, s_0, t_0) = G(x_0, y_0, z_0, p_0, q_0, \alpha)$. Исключеніе r_0, s_0, t_0, r, s, t, p, q между вышеупомянутыми двумя уравненіями и семью интегралами (50) даетъ полный интегралъ (12) и (13) или, что̀ тоже, полный интегралъ (44), ибо (44) будетъ одинъ изъ интеграловъ системы (50); въ самомъ дѣлѣ изъ (50) выводится

$$\frac{d\theta}{dx} = \xi + \eta\frac{dy}{dx}.$$

Также какъ и въ аналогичномъ случаѣ для одного уравненія втораго порядка, изъ системы (50) можно найти интегралъ съ одною произвольною функціею. Для этого стоитъ принять $z_0=\varphi(y_0)$, $p_0=\psi(y_0)$ и исключать y_0, r_0, p, q, r, s, t и функцію ψ между семью интегралами и двумя уравненіями:

$$L(x_0, y_0, \varphi(y_0), \varphi'(y_0), \varphi''(y_0), \psi(y_0), \psi'(y_0), r_0) = \alpha',$$
$$\theta(x_0, y_0, \varphi(y_0), \varphi'(y_0), \varphi''(y_0), \psi(y_0), \psi'(y_0), r_0) =$$
$$G(x_0, y_0, \varphi(y_0), \varphi'(y_0), \psi(y_0), \alpha).$$

Доказательства всего этого не привожу, такъ какъ оно вполнѣ схоже съ доказательствами на страницахъ 61—63 и 67—72.

Если интегралъ L одной изъ системъ (48) — (49) содержитъ произвольную функцію, то можно найти непосредственно общій интегралъ способомъ, изложеннымъ во второй главѣ на страницахъ 82 и 83.

Если же каждая изъ системъ (48)—(49) имѣетъ по интегралу съ произвольною функціею, то можно найти интегралъ, содержащій двѣ произвольныя функціи, способомъ Петерсона. Пусть такіе интегралы будутъ

$$K = \varphi(K_1) \text{ и } L = \psi(L_1).$$

Дифференцируя ихъ по x и y, получу

$$\frac{\triangle K}{\triangle x} + \frac{dK}{dr}l + \frac{dK}{ds}k + \frac{dK}{dt}m =$$

$$\varphi'(K_1)\left\{\frac{\triangle K_1}{\triangle x} + \frac{dK_1}{dr}l + \frac{dK_1}{ds}k + \frac{dK_1}{dt}m\right\}$$

и еще три подобныя уравненія. Изъ этихъ четырехъ уравненій и изъ уравненій $K_1 = \lambda$ и $L_1 = \mu$ (λ и μ нѣкоторыя новыя функціи x и y) могу опредѣлить l, k, m, n, двѣ изъ величинъ r, s, t, p, q, z, y, x и полные дифференціалы этихъ величинъ черезъ остальныя шесть величинъ, ихъ дифференціалы, λ, μ, $d\lambda$ и $d\mu$. Интеграція уравненій (37), такъ измѣненныхъ, дастъ намъ общій интегралъ (если только эту интеграцію можно будетъ исполнить), послѣ того какъ будутъ исключены изъ шести интеграловъ, изъ $K_1 = \lambda$ и $L_1 = \mu$ величины p, q, r, s, t, λ и μ. Что это такъ, слѣдуетъ изъ той теоремы, по которой k, l, m и n, опредѣленныя изъ $K = \varphi(K_1)$ и $L = \psi(L_1)$, двухъ рѣшеній (35) и (36), удовлетворяютъ уравненіямъ (12) и (13) и дѣлаютъ систему (37) вполнѣ совмѣстною.

Если системы (48) и (49) вовсе не имѣютъ интеграловъ, содержащихъ r, s и t, то уравненія (35) и (36) могутъ быть вполнѣ совмѣстны. Условія полной совмѣстности этихъ уравненій легче вывести, разрѣшивъ эти уравненія относительно $\dfrac{dK}{dx}$ и $\dfrac{dK}{dy}$; тогда получимъ уравненія (29) и (30), въ которыхъ k, l, m и n замѣнены величинами, полученными изъ (12), (13), (31) и (32). Условія полной совмѣстности будутъ

$$A(k) = B(l),\ A(m) = B(k) \text{ и } A(n) = B(m). \ldots (51).$$

Теорема 7. Достаточно удовлетворить одному изъ условій (51), чтобы и остальныя два удовлетворялись.

Доказательство во всемъ схоже съ такимъ же доказательствомъ теоремы первой на страницахъ 100 и 101; надо только помнить, что

$$B(M - \frac{\Delta\theta}{\Delta x}) = A(N - \frac{\Delta\theta}{\Delta y}).$$

Такимъ образомъ L должно удовлетворять одному уравненію втораго порядка. Найдя L, переходимъ къ интеграціи (37).

Уравненія (51) можно замѣнить слѣдующимъ уравненіемъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{d\theta}{dr}\mathfrak{M}A(L) + \frac{d\theta}{ds}\mathfrak{M}B(L) + \frac{d\theta}{dt}\mathfrak{N}B(L) = \\ &= \frac{dL}{dr}\mathfrak{M}(F) + \frac{dL}{ds}\mathfrak{M}(F_1) + \frac{dL}{dt}\mathfrak{N}(F_1)\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (52),$$

$$\left.\begin{aligned}&\text{гдѣ } F = \frac{d\theta}{dr}l + \frac{d\theta}{ds}k + \frac{d\theta}{dt}m - M \\ &\text{и } F_1 = \frac{d\theta}{dr}k + \frac{d\theta}{ds}m + \frac{d\theta}{dt}n - N\end{aligned}\right\}\ldots\ldots (53).$$

Выводъ этой формулы и доказательство того, что (52) замѣняетъ (51), во всемъ подобны тѣмъ, которые приведены на страницахъ 103, 104 и 105.

Второй случай, тотъ, когда нельзя составить четырехъ уравненій перваго порядка, не содержащихъ одной функціи, мною вовсе не разобранъ. Тому причиною, кромѣ сложности вопроса, то соображеніе, что рѣшеніе задачи очень часто зависитъ отъ удачнаго выбора независимыхъ перемѣнныхъ. Поэтому все предъидущее изслѣдованіе не имѣетъ характера общности; а потому разъ оно приводитъ къ такимъ осложненіямъ, какъ къ рѣшенію четырехъ дополняющихся уравненій четвертаго порядка, то оно не представляетъ большаго интереса. Тѣмъ болѣе, что возможны и другіе пріемы, которые дозволятъ избѣгнуть такихъ сложныхъ вычисленій. Что наше изслѣдованіе въ этомъ случаѣ приведетъ къ четыремъ уравненіямъ четвертаго порядка, я сейчасъ покажу.

Если предположимъ, что изъ шести уравненій

$$\frac{dz}{d\alpha} = 0,\ \frac{dz}{d\beta} = 0,\ \frac{dp}{d\alpha} = 0,\ \frac{dp}{d\beta} = 0,\ \frac{dq}{d\alpha} = 0,\ \frac{dq}{d\beta} = 0$$

нельзя исключить ни одной изъ трехъ функцій α и β: γ, δ и ε, то для рѣшенія этихъ уравненій надо будетъ изъ нихъ исключить x и y. По исключеніи получимъ четыре уравненія, содержащія три функціи γ, δ, ε, двѣ независимыя перемѣнныя α и β и производныя перваго порядка отъ γ, δ и ε по α и β. Исключеніе δ и ε можно совершить, опредѣляя $\dfrac{d\varepsilon}{d\alpha}$, $\dfrac{d\varepsilon}{d\beta}$, $\dfrac{d\delta}{d\alpha}$ и $\dfrac{d\delta}{d\beta}$ (конечно, это возможно только въ очень рѣдкихъ случаяхъ). Пусть

$$\frac{d\delta}{d\alpha} = \varphi\left(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \varepsilon,\ \frac{d\gamma}{d\alpha},\ \frac{d\gamma}{d\beta}\right) \ldots\ldots\ (54),$$

$$\frac{d\delta}{d\beta} = \psi\left(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \varepsilon,\ \gamma,\ \frac{d\gamma}{d\alpha},\ \frac{d\gamma}{d\beta}\right) \ldots\ldots\ (55),$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\alpha} = \xi\left(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \varepsilon,\ \gamma,\ \frac{d\gamma}{d\alpha},\ \frac{d\gamma}{d\beta}\right) \ldots\ldots\ (56),$$

$$\frac{d\varepsilon}{d\beta} = \eta\left(\alpha,\ \beta,\ \delta,\ \varepsilon,\ \gamma,\ \frac{d\gamma}{d\alpha},\ \frac{d\gamma}{d\beta}\right) \ldots\ldots\ (57).$$

Дифференцирую уравненіе (54) по β, а (55) по α и въ результатѣ замѣняю

$$\frac{d\delta}{d\alpha},\ \frac{d\delta}{d\beta},\ \frac{d\varepsilon}{d\alpha}\ \text{и}\ \frac{d\varepsilon}{d\beta}$$

черезъ φ, ψ, ξ и η; тогда получаю

$$\frac{d\varphi}{d\beta} + \frac{d\varphi}{d\delta}\psi + \frac{d\varphi}{d\varepsilon}\eta + \frac{d\varphi}{d\gamma}q + \frac{d\varphi}{dp}s + \frac{d\varphi}{dq}t = \frac{d\psi}{d\alpha} + \frac{d\psi}{d\delta}\varphi + \frac{d\psi}{d\varepsilon}\xi +$$

$$+ \frac{d\psi}{d\gamma}p + \frac{d\psi}{dp}r + \frac{d\psi}{dq}s \ldots\ldots\ (58)$$

$$\left(\text{гдѣ}\ p = \frac{d\gamma}{d\alpha},\ q = \frac{d\gamma}{d\beta},\ r = \frac{d^2\gamma}{d\alpha^2},\ s = \frac{d^2\gamma}{d\alpha d\beta}\ \text{и}\ t = \frac{d^2\gamma}{d\beta^2}\right).$$

Изъ уравненія (58) могу опредѣлить ε:

$$\varepsilon = \theta(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t) \ldots\ldots\ (59).$$

Подставляю θ вмѣсто ε въ уравненія (54), (55), (56) и (57); при этомъ въ уравненіяхъ (56) и (57) явятся $\frac{d\delta}{d\alpha}$ и $\frac{d\delta}{d\beta}$, которыя опять замѣняются φ и ξ; но эти φ и ξ, понятно, уже такія, въ которыхъ ε замѣненъ θ. При подстановкѣ θ въ уравненія (56) и (57) можетъ случиться, что не только ε, но и δ исключится; въ такомъ случаѣ мы получимъ два уравненія третьяго порядка, линейныя относительно производныхъ третьяго порядка; отъ рѣшенія этихъ уравненій будетъ зависѣть отысканіе общаго интеграла.

Если же δ и ε не исключаются разомъ, то получимъ два уравненія, изъ которыхъ можно опредѣлить δ; при этомъ получимъ

два различныя выраженія для δ, такъ какъ одно уравненіе не будетъ содержать производной $\frac{d^3\gamma}{d\alpha^3}$, а другое $\frac{d^3\gamma}{d\beta^3}$:

$$\delta = \tau(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ l,\ k,\ m) \ldots\ (60),$$

$$\delta = \sigma(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ k,\ m,\ n) \ldots\ (61),$$

$$\text{гдѣ}\ l = \frac{d^3\gamma}{d\alpha^3},\ k = \frac{d^3\gamma}{d\alpha^2 d\beta},\ m = \frac{d^3\gamma}{d\alpha d\beta^2}\ \text{и}\ n = \frac{d^3\gamma}{d\beta^3}.$$

Подставлю въ уравненія (54) и (55) сначала вмѣсто δ функцію τ, а потомъ вмѣсто δ функцію σ; тогда получу четыре вышеупомянутыя уравненія четвертаго порядка:

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{\Delta\tau}{\Delta\alpha} + \frac{d\tau}{dl}d + \frac{d\tau}{dk}e + \frac{d\tau}{dm}g = \varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ p,\ q,\ \theta,\ \tau),\\
&\frac{\Delta\tau}{\Delta\beta} + \frac{d\tau}{dl}e + \frac{d\tau}{dk}g + \frac{d\tau}{dm}h = \psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ p,\ q,\ \theta,\ \tau),\\
&\frac{\Delta\sigma}{\Delta\alpha} + \frac{d\sigma}{dk}e + \frac{d\sigma}{dm}g + \frac{d\sigma}{dn}h = \varphi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ p,\ q,\ \theta,\ \sigma),\\
&\frac{\Delta\sigma}{\Delta\beta} + \frac{d\sigma}{dk}g + \frac{d\sigma}{dm}h + \frac{d\sigma}{dn}i = \psi(\alpha,\ \beta,\ \gamma,\ p,\ q,\ \theta,\ \sigma)
\end{aligned}\right\} \ldots\ (62),$$

Въ уравненіяхъ (62) символы $\frac{\Delta}{\Delta\alpha}$ и $\frac{\Delta}{\Delta\beta}$ обозначаютъ производныя по α и β, взятыя въ предположеніи k, l, m и n постоянныхъ, а

$$d = \frac{d^4\gamma}{d\alpha^4},\ e = \frac{d^4\gamma}{d\alpha^3 d\beta},\ g = \frac{d^4\gamma}{d\alpha^2 d\beta^2},\ h = \frac{d^4\gamma}{d\alpha d\beta^3}\ \text{и}\ i = \frac{d^4\gamma}{d\beta^4}.$$

Такимъ образомъ относительно метода Лагранжа я имѣю право повторить только слова Бура, что этотъ методъ иногда даетъ полезные результаты. Кромѣ того методъ Лагранжа въ настоящее время единственный для большинства нелинейныхъ уравненій.

Методъ Имшенецкаго прилагается только въ томъ случаѣ, когда рядъ Тэйлора, который входитъ въ этотъ методъ, суммируется. Кромѣ того для нелинейныхъ уравненій этотъ методъ приводитъ рѣшеніе задачи къ интегрированію нелинейнаго же уравненія, между тѣмъ какъ методъ Лагранжа можетъ иногда привести къ линейному уравненію втораго порядка. Для большей ясности приведу примѣръ: $r=e^t$. Это уравненіе имѣетъ полный интегралъ:

$$z=\gamma+\delta x+\varepsilon y+\frac{1}{2}e^{\alpha}x^2+\beta xy+\frac{1}{2}\alpha y^2.$$

Методъ Лагранжа приводитъ къ линейному уравненію:

$$\frac{d^2\varepsilon}{d\alpha^2}=e^{\alpha}\frac{d^2\varepsilon}{d\beta^2}.$$

Для примѣненія метода Имшенецкаго достаточно взять интегралъ: $z=\gamma+\delta x+\varepsilon y$; тогда отысканіе общаго интеграла зависитъ отъ интегрированія уравненія:

$$\frac{d^2\gamma}{d\delta^2}+De^{-\frac{1}{D}\frac{d^2\gamma}{d\varepsilon^2}}=0,\text{ гдѣ } D=\frac{d^2\gamma}{d\delta^2}\cdot\frac{d^2\gamma}{d\varepsilon^2}-\left(\frac{d^2\gamma}{d\varepsilon d\delta}\right)^2.$$

Кромѣ того вспомнимъ, что рѣшеніе задачи зависитъ отъ выбора независимыхъ перемѣнныхъ; оно также зависитъ отъ того, удобная ли форма придана полному интегралу.

Я теперь рѣшу одинъ примѣръ, въ которомъ небольшое отклоненіе отъ рутиннаго рѣшенія задачи дозволитъ съ успѣхомъ примѣнить методъ Лагранжа къ отысканію общаго интеграла для цѣлаго вида уравненій; я думаю, что это рѣшеніе представляетъ нѣкоторый интересъ.

Примѣръ 5. Требуется найти общій интегралъ уравненія:

$$r-t=\frac{2mp}{x}\;\ldots\ldots\ldots(63),$$

въ которомъ m—нѣкоторое цѣлое, положительное или отрицательное число.

Для составленія полнаго интеграла ищу частный интегралъ уравненія (15) главы 3-ей. Посмотримъ, можетъ ли такой интегралъ не содержать r и t. Если F не содержитъ r и t, то уравненіе (15) принимаетъ видъ:

$$\mathfrak{M}A(F)-\mathfrak{N}B(F)-\frac{dF}{ds}\left\{\frac{2ms}{x^2}-\frac{2m\beta}{x}\right\}=0,\text{ гдѣ } \beta=\frac{ds}{dx}.$$

Легко замѣтить, что можно положить $F=\frac{s}{x}$; дѣйствительно, въ такомъ случаѣ

$$\mathfrak{N}B(F)=0,\ \mathfrak{M}A(F)=\frac{2s}{x^3}-\frac{2\beta}{x^2};$$

слѣдовательно при $s=ax$ имѣю $\mathfrak{M}A(F)=0$ и коэффиціентъ при $\frac{dF}{ds}$ равенъ нулю. Уравненіе

$$s=ax\;\ldots\ldots(64)$$

будетъ дополнительнымъ уравненія (63) при всякомъ значеніи m.

Изъ уравненія (64) получаю

$$\frac{d^3z}{dx^2dy}=a,\ \frac{d^3z}{dxdy^2}=0;$$

а изъ уравненія (63) дифференцированіемъ получаю

$$\frac{d^3z}{dy^3}=(1-2m)a.$$

Далѣе получаю

$$t=(1-2m)ay+b$$

и изъ уравненія (63)

$$r=\frac{2mp}{x}+(1-2m)ay+b.$$

Наконецъ интегрированіе уравненій

$$dp=rdx+sdy \text{ и } dq=sdx+tdy$$

дастъ величины p и q:

$$q=\frac{1}{2}ax^2+\frac{(1-2m)ay^2}{2}+by+c$$

$$p=axy-\frac{bx}{2m-1}+dx^{2m}.$$

Въ величинѣ z мы не нуждаемся.

Три уравненія (A), приведенныя на страницѣ 129, дадутъ

$$\left.\begin{aligned}&\frac{1}{2}\{x^2+(1-2m)y^2\}da+ydb+dc=0\\ &\frac{y}{x^{2m-1}}da-\frac{1}{(2m-1)x^{2m-1}}db+dd=0\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(65).$$

Полагаю a и b независимыми перемѣнными. Въ такомъ случаѣ, чтобы уравненія (65) интегрировались обычными пріемами, надо удовлетворить двумъ условіямъ:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dy}{da}=x\frac{dx}{db}+(1-2m)y\frac{dy}{db}\\ &\frac{dx}{da}=(1-2m)y\frac{dx}{db}+x\frac{dy}{db}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(66).$$

Опять принимаю за независимыя перемѣнныя x и y. Тогда легко найти

$$\frac{da}{dx}=\frac{dy}{db}:D,\ \frac{db}{dx}=-\frac{dy}{da}:D,\ \frac{da}{dy}=-\frac{dx}{db}:D,\ \frac{db}{dy}=\frac{dx}{da}:D,$$

$$\text{гдѣ }D=\frac{dx}{da}\frac{dy}{db}-\frac{dx}{db}\frac{dy}{da}.$$

Поэтому уравненія (66) можно замѣнить слѣдующими:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{db}{dx}=x\frac{da}{dy}+(2m-1)y\frac{da}{dx}\\ &\frac{db}{dy}=(2m-1)y\frac{da}{dy}+x\frac{da}{dx}\end{aligned}\right\}\ldots\ldots(67).$$

Исключая изъ этихъ уравненій дифференцированіемъ функцію b, получаю для опредѣленія a уравненіе:

$$x\left\{\frac{d^2a}{dy^2}-\frac{d^2a}{dx^2}\right\}+2(m-1)\frac{da}{dx}=0,$$

т. е. то же уравненіе, что̀ и данное, только съ измѣненнымъ коэффиціентомъ при первой производной. Но вотъ еще что̀ замѣчательно: если найду a въ функціи x и y, то, интегрируя два раза s, получу

$$z=\int dx\int axdy;$$

слѣдовательно изъ пяти постоянныхъ достаточно найти одно a.

Для удобства приму далѣе такія обозначенія: функцію z, опредѣляемую уравненіемъ (63), буду обозначать черезъ a_m; производныя отъ a_n буду обозначать вообще черезъ p_n, q_n, r_n, s_n и t_n. Слѣдовательно я имѣю рядъ равенствъ:

$$s_m=a_{m-1}x;\ s_{m-1}=a_{m-2}x.\ldots\ldots s_1=a_0x,\ s_0=a_{-1}x,\ s_{-1}=a_{-2}x,$$
$$s_{-2}=a_{-3}x.\ldots\ldots s_{-m}=a_{-m-1}x\ldots\ldots(68).$$

Но a_0—интегралъ уравненія $r-t=0$, частнаго случая примѣра, разобраннаго Лагранжемъ. Общій интегралъ этого уравненія извѣстенъ:

$$a_0=\varphi(x+y)+\psi(x-y),$$

гдѣ φ и ψ произвольныя функціи.

Послѣ этого легко сообразить, что интегралъ уравненія (63) при m положительномъ цѣломъ выразится такимъ образомъ:

$$z=\overline{\underline{\int dx\int xdy}}^{\,m}_{\,m}\{\varphi(x+y)+\psi(x-y)\}\ldots\ldots(69),$$

а въ случаѣ m отрицательнаго цѣлаго, равнаго—n, такъ:

$$a_{-n}=z=\left[\frac{1}{x}\frac{d^2}{dxdy}\right]^n_n\{\varphi(x+y)+\psi(x-y)\}\ldots\ldots(70),$$

гдѣ значки

$$\overline{\underline{\qquad}}^{\,m}_{\,m}\ \text{и}\ \Big[\ \Big]^m_m$$

поставлены для обозначенія того, что операціи

$$\int dx\int xdy\ \text{и}\ \frac{1}{x}\frac{d^2}{dxdy}$$

совершаются m разъ. Такимъ образомъ для уравненія

$$t-r-\frac{4p}{x}=0$$

имѣю

$$z = -\frac{1}{x^3}\{\varphi + \psi\} + \frac{1}{x^2}\{\varphi' + \psi'\},$$

гдѣ φ и ψ замѣняютъ прежнія φ''' и ψ'''. Также для уравненія

$$t - r + \frac{4p}{x} = 0,$$

замѣняя въ формулѣ (69) φ и ψ черезъ φ^{VI} и ψ^{VI}, т. е. шестыми производными нѣкоторыхъ произвольныхъ функцій φ и ψ, получу

$$z = 3\varphi(x+y) + 3\psi(x-y) - 3x\{\varphi'(x+y) + \psi'(x-y)\} +$$
$$+ x^2\{\varphi''(x+y) + \psi''(x-y)\}.$$

Примѣръ 6. Въ заключеніе этой главы покажу, какъ можно найти общій интегралъ уравненія $s^2 = pt$, хотя и выраженный произвольными суммами и безконечными рядами.

Въ началѣ этой главы приведены значенія z, p и q, полученныя изъ полнаго интеграла. Эти значенія содержатъ пять произвольныхъ постоянныхъ. Слѣдуя теоріи Лагранжа, если желаемъ замѣнить $\alpha, \beta, \gamma, \delta$ и ω функціями x и y, мы должны удовлетворить тремъ дифференціальнымъ уравненіямъ:

$$d\gamma + e^{\frac{x}{4}}d\beta + \frac{1}{2}ye^{\frac{x}{4}}d\alpha = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (71),$$

$$d\delta - 2\alpha e^{\frac{x}{2}}d\beta + (4\gamma e^{\frac{x}{4}} + 2\beta e^{\frac{x}{2}})d\alpha = 0 \;.\;.\;.\;. (72),$$

$$d\omega + (2\gamma x + 8\beta e^{\frac{x}{4}})d\gamma + (8\gamma e^{\frac{x}{4}} + 4\beta e^{\frac{x}{2}})d\beta - \alpha y^2 e^{\frac{x}{2}}d\alpha = 0 \;.\;.\;. (73).$$

Я прямо написалъ три Лагранжева уравненія въ нѣсколько упрощенной формѣ.

Въ началѣ главы за независимыя перемѣнныя приняты были α и β; теперь я приму за независимыя перемѣнныя α и x. Тогда четыре функціи γ, δ, y и β опредѣляются изъ четырехъ уравненій:

$$\frac{d\gamma}{d\alpha} + \frac{1}{2}ye^{\frac{x}{4}} + e^{\frac{x}{4}}\frac{d\beta}{d\alpha} = 0 \;.\;.\;.\;. (74), \quad \frac{d\gamma}{dx} + e^{\frac{x}{4}}\frac{d\beta}{dx} = 0 \;.\;.\;.\;. (75),$$

$$\frac{d\delta}{d\alpha} - 2\alpha e^{\frac{x}{2}}\frac{d\beta}{d\alpha} + 4\gamma e^{\frac{x}{4}} + 2\beta e^{\frac{x}{2}} = 0 \;.\;.\;.\;. (76),$$

$$\frac{d\delta}{dx} - 2\alpha e^{\frac{x}{2}}\frac{d\beta}{dx} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (77).$$

Я говорю, что четыре функціи должны удовлетворять четыремъ уравненіямъ; дѣйствительно изъ теоремы 1-ой этой главы я знаю, что первая часть уравненія (73) полный дифференціалъ въ томъ случаѣ, когда (74), (75), (76) и (77) удовлетворены, и слѣдовательно уравненіе (73) опредѣляетъ только ω.

Функція y опредѣлится изъ (74); для опредѣленія же γ, δ и β имѣемъ три уравненія: (75), (76) и (77).

Исключу дифференцированіемъ δ изъ (76) и (77); для этого (76) дифференцирую по x, а (77) по α. Сокращая съ помощью уравненія (75), получаю

$$\gamma = \alpha e^{\frac{x}{4}}\frac{d\beta}{d\alpha} - \beta e^{\frac{x}{4}} \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\; (78).$$

Теперь изъ уравненій (78) и (75) исключу γ, диференцируя уравненіе (78) по x и подставляя въ (75) вмѣсто $\frac{d\gamma}{dx}$ ей равную величину; по сокращеніи получу

$$\frac{d^2\beta}{d\alpha dx} + \frac{1}{4}\frac{d\beta}{d\alpha} - \frac{\beta}{4\alpha} = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\;.\;.\;. (79).$$

Это уравненіе могу написать такъ:

$$4\frac{d^2\beta}{dlg\alpha dx} + \frac{d\beta}{dlg\alpha} - \beta = 0 \;.\;.\;.\;.\;.\; (80).$$

Для рѣшенія этого уравненія употреблю пріемъ, употребляемый при рѣшеніи линейныхъ уравненій съ постоянными коэффиціентами, т. е. положу $\beta = e^{nx + mlg\alpha}$ и потомъ опредѣлю n черезъ m на основаніи уравненія (80).

Такимъ образомъ получу частный интегралъ, выраженный въ видѣ произвольной суммы:

$$\beta = \sum a_i \alpha^{m_i} e^{\frac{(1-m_i)x}{4m_i}},$$

гдѣ всѣ a_i и m_i произвольныя постоянныя.

Остается найти другую произвольную сумму. Эту произвольную сумму я нашелъ съ помощью пріема, описаннаго у г. Ващенко-Захарченко на страницѣ 79 его сочиненія: «Символическое исчисленіе.....». Этимъ пріемомъ можно найти два частные интеграла, изъ которыхъ одинъ содержитъ произвольную функцію x, а другой произвольную функцію α. Оба интеграла представляются въ видѣ довольно сложныхъ рядовъ. Такимъ образомъ я получаю общій интегралъ уравненія (79):

$$\beta = \sum a_i \alpha^{m_i} e^{\frac{(1-m_i)x}{4m_i}} + \sum b_i \sum_{n=0}^{n=\infty} \frac{\left(\frac{1}{4} lg\alpha\right)^{p_i+n} x^n e^{-\frac{x}{4}}}{n!(p_i+n)(p_i+n-1)\dots(p_i-1)} \quad (81),$$

гдѣ a_i, b_i, m_i и p_i произвольныя постоянныя, а $n!$ при $n=0$ замѣняется единицею.

Понятно, что γ опредѣлится изъ уравненія (78). δ опредѣлится изъ уравненій (76) и (77), которыя вполнѣ совмѣстны, потому что условіе ихъ полной совмѣстности, уравненіе (78), удовлетворено. Функція y опредѣлится изъ уравненія (74). Функція ω получится простыми квадратурами изъ уравненія (73). Подставляя найденныя величины β, γ, δ и ω въ полный интегралъ, получу общій интегралъ, если исключу α изъ такъ преобразованнаго полнаго интеграла и изъ уравненія, опредѣляющаго y въ функціи x и α. Такимъ образомъ общій интегралъ получится въ видѣ двухъ уравненій, для полученія которыхъ придется продѣлать рядъ сложныхъ, но не затруднительныхъ вычисленій; этихъ вычисленій, по ихъ сложности, я и не привожу, не привожу также и окончательнаго результата, который не интересенъ.

ГЛАВА V.

Нѣкоторыя соображенія объ интегрированіи уравненій высшихъ порядковъ съ двумя независимыми перемѣнными.

Если теорія интегрированія уравненій 2-го порядка очень несовершенна, то еще болѣе несовершенна теорія интегрированія уравненій высшихъ порядковъ. Такъ какъ методы, употребляемые для интеграціи уравненій высшихъ порядковъ, совершенно тождественны съ методами, изложенными въ главахъ 2-ой, 3-ей и 4-ой, и отличаются еще большею неудобопримѣнимостью, то я позволю себѣ излагать вкратцѣ многіе выводы, а также не буду слишкомъ настаивать на подробностяхъ, такъ какъ это было бы преждевременно. Къ особымъ недостаткамъ помѣщаемаго изслѣдованія должно отнести незначительность всего, что̀ касается метода Лагранжа.

Планъ этой главы тотъ же, что̀ и трехъ предъидущихъ главъ: 1) я даю формулы, аналогичныя формуламъ Бура; 2) я стараюсь примѣнить методъ Шарпи къ отысканію полнаго интеграла уравненій высшихъ порядковъ.

Сначала о формулахъ, аналогичныхъ формуламъ Бура, для случая уравненій, линейныхъ относительно производныхъ n-го порядка. Пусть дано линейное уравненіе:

$$A_n z^n + A_{n-1} z_1^{n-1} + A_{n-2} z_2^{n-2} + \dots\dots + A_1 z^1_{n-1} + \\ + A_0 z_n + B = 0 \dots\dots\dots (1),$$

гдѣ $z^n, z_1^{n-1}, z_2^{n-2} \dots\dots z_n$ частныя производныя n-го порядка отъ z; A_n, A_{n-1}, $A_{n-2} \dots\dots A_0$ и B функціи x, y, z и всѣхъ производныхъ z низшихъ порядковъ отъ перваго до n—1-го. Верхній значокъ у z обозначаетъ число дифференціацій функціи z по x, а нижній по y. Буду обозначать производныя n—1-го порядка функціи z черезъ q съ однимъ значкомъ, при чемъ чѣмъ болѣе значокъ, тѣмъ болѣе дифференцированій по y.

Предполагаю, что перемѣнныя x и y замѣняются другими перемѣнными x и v. Опредѣлю $z^n, z_1^{\;n-1}, z_2^{\;n-2} \ldots\ldots z^1_{\;n-1}$ черезъ z_n и производныя по x функцій $q_1, q_2, \ldots q_n$, взятыя въ предположеніи, что независимыя перемѣнныя x и v; для этого имѣю слѣдующія уравненія:

$$\frac{dq_1}{dx} = z^n + z_1^{\;n-1}\frac{dy}{dx}, \; \frac{dq_2}{dx} = z_1^{\;n-1} + z_2^{\;n-2}\frac{dy}{dx}, \ldots\ldots$$

$$\frac{dq_{n-1}}{dx} = z^2_{\;n-2} + z^1_{\;n-1}\frac{dy}{dx}, \; \frac{dq_n}{dx} = z^1_{\;n-1} + z_n\frac{dy}{dx} \ldots\ldots (2).$$

Начинаю для удобства опредѣленіе съ конца и полагаю

$$\frac{dy}{dx} = -u;$$

тогда имѣю

$$z^1_{\;n-1} = \frac{dq_n}{dx} + u z_n, \; z^2_{\;n-2} = \frac{dq_{n-1}}{dx} + u\frac{dq_n}{dx} + u^2 z_n, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots z^m_{\;n-m} = \frac{dq_{n-m+1}}{dx} + u\frac{dq_{n-m+2}}{dx} + \ldots\ldots + u^m z_n, \ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots z^n = \frac{dq_1}{dx} + u\frac{dq_2}{dx} + u^2\frac{dq_3}{dx} + \ldots\ldots + u^{n-1}\frac{dq_n}{dx} + u^n z_n.$$

Подставивъ эти величины въ уравненіе (1), имѣю

$$z_n(A_n u^n + A_{n-1}u^{n-1} + A_{n-2}u^{n-2} + \ldots\ldots + A_1 u + A_0) +$$
$$+ A_n\frac{dq_1}{dx} + [u]\frac{dq_2}{dx} + [u^2]\frac{dq_3}{dx} + [u^3]\frac{dq_4}{dx} + \ldots\ldots + [u^{n-1}]\frac{dq_n}{dx} +$$
$$+ B = 0 \ldots\ldots (3),$$

гдѣ

$$[u^m] = A_n u^m + A_{n-1}u^{m-1} + A_{n-2}u^{m-2} + \ldots\ldots + A_{n-m+1}u + A_{n-m}.$$

Выберемъ v, функцію x и y, такъ, чтобы коэффиціентъ при z_n равнялся нулю; тогда u опредѣлится изъ уравненія n-ой степени:

$$A_n u^n + A_{n-1}u^{n-1} + A_{n-2}u^{n-2} + \ldots\ldots + A_1 u + A_0 = 0 \ldots\ldots (4).$$

Будемъ впередъ называть черезъ u одинъ изъ корней уравненія (4); тогда задача приводится къ разрѣшенію совмѣстныхъ уравненій:

$$\left.\begin{array}{l}
A_n\frac{dq_1}{dx} + [u]\frac{dq_2}{dx} + [u^2]\frac{dq_3}{dx} + \ldots\ldots + [u^{n-1}]\frac{dq_n}{dx} + B = 0, \\
\frac{dy}{dx} + u = 0, \frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx} = r + s\frac{dy}{dx}, \frac{dq}{dx} = s + t\frac{dy}{dx}, \\
\frac{dr}{dx} = z^3 + z_1^{\;2}\frac{dy}{dx}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dz^{n-2}}{dx} = q_1 + q_2\frac{dy}{dx}, \\
\frac{dz_1^{\;n-3}}{dx} = q_2 + q_3\frac{dy}{dx}, \ldots \frac{dz_{n-2}}{dx} = q_{n-1} + q_n\frac{dy}{dx}, \frac{dz}{dv} = q\frac{dy}{dv}, \\
\frac{dp}{dv} = s\frac{dy}{dv}, \frac{dq}{dv} = t\frac{dy}{dv}, \ldots\ldots\ldots\ldots \frac{dz_{n-2}}{dv} = q_n\frac{dy}{dv}.
\end{array}\right\} \ldots (5).$$

Такихъ системъ n, по числу корней уравненія (4). Уравненій, не считая тѣхъ, въ которыя входятъ производныя по v, въ каждой системѣ

$$2 + 1 + 2 + 3 + \ldots\ldots + n - 1 = 2 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Найдемъ условія, при которыхъ изъ уравненій (5) можно составить такое уравненіе, которое бы интегрировалось какъ дифференціальное уравненіе съ полными дифференціалами. Для этого помножаю каждое изъ l первыхъ уравненій группы (5) соотвѣтственно на неопредѣленные множители $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_l$, гдѣ

$$l = 2 + \frac{n(n-1)}{2}.$$

Пусть V означаетъ ту функцію, дифференціалъ которой составится изъ уравненій (5). Чтобы нѣкоторое сочетаніе уравненій (5) было полнымъ дифференціаломъ, необходимо, чтобы коэффиціентъ при всякомъ дифференціалѣ вновь полученнаго уравненія равнялся одной изъ частныхъ производныхъ функціи V:

$$\frac{dV}{dx},\ \frac{dV}{dy},\ \frac{dV}{dz},\ \frac{dV}{dp},\ \ldots\ldots\ \frac{dV}{dq_1},\ \ldots\ldots\ \frac{dV}{dq_n}.$$

Такимъ образомъ получаю между коэффиціентами даннаго уравненія $(B, A_1, A_2, \ldots A_n)$, частными производными V и неопредѣленными множителями $2+n+\frac{n(n-1)}{2}$ уравненій. Слѣдовательно, по исключеніи всѣхъ неопредѣленныхъ множителей, получу систему n линейныхъ совмѣстныхъ уравненій съ частными производными функціи V. Выведу ее.

Прежде всего напишу уравненія, содержащія неопредѣленные коэффиціенты:

$$\frac{dV}{dq_1}=a_1 A_n,\ \frac{dV}{dq_2}=a_1[u],\ \frac{dV}{dq_3}=a_1[u^2],\ \ldots\ldots\ \frac{dV}{dq_{n-1}}=a_1[u^{n-2}],$$

$$\frac{dV}{dq_n}=a_1[u^{n-1}],\ \frac{dV}{dz}=a_3,\ \frac{dV}{dp}=a_4,$$

$$\frac{dV}{dq}=a_5,\ \frac{dV}{dr}=a_6,\ \ldots\ldots\ \frac{dV}{dz'_{n-3}}=a_{l-1},\ \frac{dV}{dz_{n-2}}=a_l,$$

$$\frac{dV}{dy}=a_2-a_3q-a_4s-a_5t-\ldots\ldots-a_{l-1}q_{n-1}-a_lq_n,$$

$$\frac{dV}{dx}=Ba_1+a_2u-a_3p-a_4r-a_5s-\ldots\ldots-a_{l-1}q_{n-2}-a_lq_{n-1}.$$

Называя для краткости

$$\frac{dV}{dx}+p\frac{dV}{dz}+r\frac{dV}{dp}+\ldots\ldots+q_{n-2}\frac{dV}{dz'_{n-3}}+q_{n-1}\frac{dV}{dz_{n-2}}=\left(\frac{dV}{dx}\right)$$

и $$\frac{dV}{dy}+q\frac{dV}{dz}+s\frac{dV}{dp}+\ldots\ldots+q_{n-1}\frac{dV}{dz'_{n-3}}+q_n\frac{dV}{dz_{n-2}}=\left(\frac{dV}{dy}\right),$$

имѣю слѣдующія совмѣстныя линейныя уравненія:

$$\left.\begin{aligned}&\frac{dV}{dq_2}=\frac{[u]}{A_n}\frac{dV}{dq_1},\ \frac{dV}{dq_3}=\frac{[u^2]}{A_n}\frac{dV}{dq_1},\ \ldots\ldots\ \frac{dV}{dq_{n-1}}=\frac{[u^{n-2}]}{A_n}\frac{dV}{dq_1},\\ &\frac{dV}{dq_n}=\frac{[u^{n-1}]}{A_n}\frac{dV}{dq_1},\ \left(\frac{dV}{dx}\right)=u\left(\frac{dV}{dy}\right)+\frac{B}{A_n}\frac{dV}{dq_1}\end{aligned}\right\}\ (6)..$$

Такихъ системъ n.

Въ частныхъ случаяхъ можетъ представиться необходимость замѣнить эти системы другими, что всегда легко сдѣлать. Замѣчу только, что уравненіе

$$\frac{dV}{dq_n}=\frac{[u^{n-1}]}{A_n}\frac{dV}{dq_1}$$

легко замѣняется слѣдующимъ:

$$A_0\frac{dV}{dq_1}+A_nu\frac{dV}{dq_n}=0.$$

Теорема 1. Если нѣкоторая функція V перемѣнныхъ $x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots\ldots q_1, q_2, \ldots\ldots q_n$ удовлетворяетъ линейнымъ уравненіямъ (6), то $V=const.$ есть промежуточный интегралъ даннаго уравненія (1).

Доказательство. Изъ уравненія $V=const.$ имѣю два дифференціальныя уравненія:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right)+z^n\frac{dV}{dq_1}+\ldots\ldots+z'_{n-1}\frac{dV}{dq_n}=0,$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)+z_1^{n-1}\frac{dV}{dq_1}+\ldots\ldots+z_n\frac{dV}{dq_n}=0.$$

Замѣняя въ этихъ уравненіяхъ частныя производныя V ихъ величинами изъ уравненій (6), имѣю два уравненія:

$$u\left(\frac{dV}{dy}\right)+\frac{dV}{dq_1}\left\{z^n+\frac{[u]}{A_n}z_1^{n-1}+\ldots\ldots+\frac{[u^{n-1}]}{A_n}z'_{n-1}+\frac{B}{A_n}\right\}=0,$$

$$\left(\frac{dV}{dy}\right)+\frac{dV}{dq_1}\left\{z_1^{n-1}+\frac{[u]}{A_n}z_2^{n-2}+\frac{[u^2]}{A_n}z_3^{n-3}+\ldots\ldots+\frac{[u^{n-1}]}{A_n}z_n\right\}=0.$$

Если исключу $\left(\frac{dV}{dy}\right)$ и потомъ сокращу на множитель $\frac{dV}{dq_1}$, то получится

$$A_n z^n + \{[u] - A_n u\} z_1^{n-1} + \{[u^2] - u[u]\} z_2^{n-2} + \ldots +$$
$$+ \{[u^m] - u[u^{m-1}]\} z_m^{n-m} + \ldots - u[u^{n-1}] z_n + B = 0.$$

Но легко видѣть, что

$$[u^m] - u[u^{m-1}] = A_{n-m}, \quad -u[u^{n-1}] = A_0.$$

Уравненія (6) могутъ или не имѣть вовсе интеграловъ, или имѣть 1, 2 и болѣе. Петерсонъ въ IX томѣ Математическаго Сборника разсматриваетъ тотъ случай, когда каждая изъ n системъ (6) имѣетъ по два интеграла. Я разсмотрю тотъ случай, когда можно найти одинъ интегралъ, содержащій $q_1, q_2, q_3 \ldots q_n$, и когда для этого промежуточнаго интеграла можно какимъ нибудь образомъ найти полный интегралъ.

Для нахожденія общаго интеграла я долженъ измѣнить произвольныя постоянныя такъ, чтобы новыя значенія $p, q, r, s, t, \ldots q_1, \ldots q_n$ отличались отъ прежнихъ только вставкою вмѣсто постоянныхъ нѣкоторыхъ функцій x и y. Тогда уравненіе $V = const.$ удовлетворится. Для этого необходимо и достаточно удовлетворить $\frac{n(n-1)}{2}$ уравненіямъ:

$$\partial V_1 = 0,\ \partial\left(\frac{dV_1}{dx}\right) = 0,\ \partial\left(\frac{dV_1}{dy}\right) = 0, \ldots \ldots \partial\left(\frac{d^{n-2}V_1}{dy^{n-2}}\right) = 0 \ldots (7),$$

гдѣ $V_1 = 0$ — полный интегралъ уравненія $V = \alpha$ (обозначаю черезъ α произвольную постоянную) и гдѣ значокъ ∂ обозначаетъ дифференціалъ, взятый въ предположеніи, что $x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots z_{n-2}$ не измѣняются. Во всѣхъ этихъ уравненіяхъ $z, p, q, r, s, t, \ldots z_{n-2}$ суть величины, опредѣляемыя изъ уравненій:

$$V_1 = 0,\ \frac{dV_1}{dx} + p\frac{dV_1}{dz} = 0,\ \frac{dV_1}{dy} + q\frac{dV_1}{dz} = 0,$$
$$\frac{d^2V_1}{dx^2} + 2p\frac{d^2V_1}{dxdz} + r\frac{dV_1}{dz} = 0, \text{ и т. д.} \ldots (8).$$

Такимъ образомъ V не измѣнится; остается только сдѣлать такъ, чтобы уравненіе $V = \alpha$ по прежнему осталось промежуточнымъ интеграломъ даннаго уравненія.

Для вывода условій, необходимыхъ, чтобы $V = \alpha$ было по прежнему интеграломъ, дифференцирую $V = \alpha$ по x и y; получаю уравненія:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) + z^n\frac{dV}{dq_1} + \ldots \ldots + z^1_{n-1}\frac{dV}{dq_n} = \frac{d\alpha}{dx},$$
$$\left(\frac{dV}{dy}\right) + z_1^{n-1}\frac{dV}{dq_1} + \ldots \ldots + z_n\frac{dV}{dq_n} = \frac{d\alpha}{dy}.$$

Производя же всѣ тѣ дѣйствія, что и въ теоремѣ 1-ой, и принимая во вниманіе то условіе, что уравненіе (1) все таки удовлетворяется, имѣю

$$\frac{d\alpha}{dx} = u\frac{d\alpha}{dy} \ldots (9), \text{ или } \frac{dy}{dx} = -u \ldots \ldots (10).$$

Уравненіе (9) предполагаетъ независимыми перемѣнными x и y а (10) x и нѣкоторую другую перемѣнную v.

Общій интегралъ такимъ образомъ долженъ удовлетворить уравненіямъ (7), (8) и (10) (или (9)). Какъ удовлетворить имъ вообще, не стану разбирать. Разсмотрю только частный случай, когда полный интегралъ найденъ въ видѣ:

$$z = \omega(x, y, \alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots)$$

и когда мы ищемъ общій интегралъ, принимая за независимыя перемѣнныя α и β. Тогда уравненія (7) замѣнятся слѣдующими:

$$\frac{d\omega}{d\alpha} = 0,\ \frac{d\omega}{d\beta} = 0,\ \frac{d\omega'}{d\alpha} = 0,\ \frac{d\omega'}{d\beta} = 0,\ \frac{d\omega_1}{d\alpha} = 0, \ldots$$
$$\ldots \ldots \frac{d\omega_{n-2}}{d\alpha} = 0,\ \frac{d\omega_{n-2}}{d\beta} = 0 \ldots (11),$$

въ которыхъ верхніе значки при ω обозначаютъ дифференцированіе по x, а нижніе по y. Изъ уравненій (11) нѣкоторыя излишни, вслѣдствіе того что s, z_1^2, z_2^1, z_1^3, ……q_2, q_3, ……q_{n-1} имѣютъ одно и тоже значеніе, выведены ли онѣ изъ производныхъ p, r, s, $z^3, \ldots\ldots z^{n-2}, \ldots\ldots z^1{}_{n-3}$, или изъ производныхъ q, s, t, $z_1{}^2, \ldots\ldots z_1{}^{n-3}, \ldots\ldots z_{n-2}$. Такимъ образомъ излишнихъ уравненій будетъ

$$1+2+3+\ldots\ldots+(n-2)=\frac{(n-2)(n-1)}{2}.$$

Слѣдовательно $\frac{n(n+1)}{2}$ функцій должны удовлетворять

$$n(n-1)-\frac{(n-2)(n-1)}{2}=\frac{(n+2)(n-1)}{2}=\frac{n(n+1)}{2}-1$$

уравненіямъ, различнымъ между собою. Кромѣ того должно удовлетворить условію (10). Уравненія (11) линейны и перваго порядка относительно производныхъ по α и β.

Опредѣливъ изъ (11) y и x въ функціяхъ α, β, другихъ произвольныхъ постоянныхъ и ихъ производныхъ по α и β, вычисляю $\frac{dx}{d\beta}$ и $\frac{dy}{d\beta}$ [1]), чтобы подставить въ (10), и тогда получу уравненіе втораго порядка, но съ нѣсколькими функціями. Для опредѣленія y и x можно взять какія угодно изъ уравненій (11).

Для преобразованія (9) удобнѣе взять одно изъ послѣднихъ $n-1$ уравненій группы (11). Такъ, если предположить, что полный интегралъ найденъ въ формѣ $z=\omega$, могу для этой цѣли взять уравненія:

$$\frac{d\omega^{n-2}}{d\alpha}=0 \text{ и } \frac{d\omega^{n-2}}{d\beta}=0$$

(или какія либо другія изъ $n-1$ послѣднихъ). Дифференцирую оба уравненія относительно x и y:

[1]) При перемѣнѣ независимыхъ перемѣнныхъ y и x на другія независимыя перемѣнныя α и β, получаемъ формулы:

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{dy}{d\beta}:D,\ \frac{d\alpha}{dy}=-\frac{dx}{d\beta}:D, \text{ гдѣ } D=\frac{dx}{d\alpha}\frac{dy}{d\beta}-\frac{dx}{d\beta}\frac{dy}{d\alpha}.$$

Слѣдовательно уравненіе (10) замѣняется слѣдующимъ:

$$\frac{dy}{d\beta}+u\frac{dx}{d\beta}=0.$$

$$\left.\begin{aligned}
&\frac{d\omega^{n-1}}{d\alpha}+\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\alpha^2}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\beta d\alpha}\frac{d\beta}{dx}=0,\\
&\frac{d\omega^{n-1}}{d\beta}+\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\beta d\alpha}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\beta^2}\frac{d\beta}{dx}=0,\\
&\frac{d\omega_1{}^{n-2}}{d\alpha}+\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\alpha^2}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\alpha d\beta}\frac{d\beta}{dy}=0,\\
&\frac{d\omega_1{}^{n-2}}{d\beta}+\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\alpha d\beta}\frac{d\alpha}{dy}+\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\beta^2}\frac{d\beta}{dy}=0
\end{aligned}\right\}\ldots\ldots\ldots(12).$$

Обозначаю для краткости

$$D=\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\alpha^2}\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\beta^2}-\left(\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\alpha d\beta}\right)^2\ldots\ldots(13);$$

тогда имѣю

$$\frac{d\alpha}{dx}=\frac{1}{D}\left\{\frac{d\omega^{n-1}}{d\beta}\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\alpha d\beta}-\frac{d\omega^{n-1}}{d\alpha}\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\beta^2}\right\},$$

$$\frac{d\alpha}{dy}=\frac{1}{D}\left\{\frac{d\omega_1{}^{n-2}}{d\beta}\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\alpha d\beta}-\frac{d\omega_1{}^{n-2}}{d\alpha}\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\beta^2}\right\}.$$

Такимъ образомъ уравненіе (9) замѣнится слѣдующимъ уравненіемъ втораго порядка:

$$\left(\frac{d\omega^{n-1}}{d\beta}-u\frac{d\omega_1{}^{n-2}}{d\beta}\right)\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\alpha d\beta}$$
$$-\left(\frac{d\omega^{n-1}}{d\alpha}-u\frac{d\omega_1{}^{n-2}}{d\alpha}\right)\frac{d^2\omega^{n-2}}{d\beta^2}=0.\ldots\ldots(14).$$

Это уравненіе выведено въ томъ предположеніи, что интегралъ разрѣшенъ относительно z.

Легко вывести подобныя же уравненія въ случаѣ интеграла, не разрѣшеннаго относительно z. Возьму для этого уравненія:

$$\frac{d}{d\alpha}\left(\frac{d^{n-2}V_1}{dx^m dy^{n-m-2}}\right)=0 \text{ и } \frac{d}{d\beta}\left(\frac{d^{n-2}V_1}{dx^p dy^{n-p-2}}\right)=0$$

($\frac{d}{d\alpha}$ и $\frac{d}{d\beta}$ берутся въ предположеніи x, y, z, p, $q\ldots$ постоянныхъ, также какъ производныя по x и y берутся въ предположеніи, что α, β и другія произвольныя постоянныя не измѣняются) и обозначу ихъ для краткости черезъ

$$\frac{d\varphi}{d\alpha}=0 \text{ и } \frac{d\psi}{d\beta}=0$$

(но можно взять и $\frac{d\psi}{d\alpha}=0$).

Дифференцируя эти уравненія по y и по x, имѣю

$$\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)+\frac{d^2\varphi}{d\alpha^2}\frac{d\alpha}{dx}+\frac{d^2\varphi}{d\alpha d\beta}\frac{d\beta}{dx}=0$$

и еще три уравненія. Дѣлая съ ними тѣ же вычисленія, что дѣлали съ уравненіями (12), получаемъ

$$\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)-u\,\frac{d}{dy}\left(\frac{d\varphi}{d\alpha}\right)\right]\frac{d^2\psi}{d\beta^2}$$

$$-\left[\frac{d}{dx}\left(\frac{d\psi}{d\beta}\right)-u\,\frac{d}{dy}\left(\frac{d\psi}{d\beta}\right)\right]\frac{d^2\varphi}{d\alpha d\beta}=0\ldots\ldots(15).$$

Этимъ уравненіямъ (14) и (15) я не придаю большаго значенія, такъ какъ 1) можетъ случиться, что другія формулы удобнѣе употребить, 2) эти уравненія содержатъ нѣсколько функцій, производныя которыхъ будутъ перваго и втораго порядка.

Какъ рѣшить $n(n-1)$ уравненій перваго порядка и одно уравненіе втораго порядка съ $\frac{n(n+1)}{2}$ неизвѣстными функціями, отвѣтить на этотъ вопросъ я не рѣшаюсь; но нѣтъ сомнѣнія, что въ благопріятныхъ случаяхъ вышеизложенный способъ можетъ дать рѣшеніе. Такъ можетъ случиться, что z^{n-2} содержитъ только x, y, α, β и еще одну функцію α и β; въ такомъ случаѣ, исключая x и y изъ уравненій (14) и изъ

$$\frac{dz^{n-2}}{d\alpha}=0,\ \frac{dz^{n-2}}{d\beta}=0\ldots.(16),$$

я получу уравненіе втораго порядка съ одною функціею. Также можетъ случиться, что изъ (16) съ помощью другихъ уравненій

(11) исключены всѣ функціи α и β, кромѣ x, y и еще одной, высшій порядокъ которой m; тогда вмѣсто (14) получаемъ линейное уравненіе $m+1$-го порядка.

Только что описанный способъ нахожденія общаго интеграла относится и къ двумъ разбираемымъ ниже случаямъ.

Разсмотрю еще случай, когда каждая изъ системъ (6) дастъ по интегралу, содержащему q_1, q_2,.....q_n, и когда изъ этихъ промежуточныхъ интеграловъ можно опредѣлить всѣ q_1, q_2,.....q_n въ функціяхъ x, y, z, низшихъ производныхъ z и n произвольныхъ постоянныхъ. Въ такомъ случаѣ для нахожденія полнаго интеграла должно интегрировать систему вполнѣ совмѣстныхъ уравненій:

$$dz=pdx+qdy,\ dp=rdx+sdy,\ldots..dz^{n-2}=q_1dx+q_2dy,$$

$$dz_1^{\,n-3}=q_2dx+q_3dy,\ldots..dz_{n-2}=q_{n-1}dx+q_ndy\ \ldots\ldots(17).$$

Эту систему можно интегрировать или способомъ Майера, или посредствомъ различныхъ комбинацій этихъ уравненій. Докажу постоянную возможность интегрированія уравненій (17).

Теорема 2. Уравненія (17) вполнѣ совмѣстны, если въ нихъ q_1, q_2, q_3,.....q_n опредѣлены изъ интеграловъ уравненій (6).

Доказательство. Уравненія (17) вполнѣ совмѣстны, если два линейныя уравненія:

$$\frac{dV}{dx}+p\frac{dV}{dz}+r\frac{dV}{dp}+s\frac{dV}{dq}+\ldots\ldots+q_{n-1}\frac{dV}{dz_{n-2}}=0=A(V)$$

$$\text{и } \frac{dV}{dy}+q\frac{dV}{dz}+s\frac{dV}{dp}+t\frac{dV}{dq}+\ldots\ldots+q_n\frac{dV}{dz_{n-2}}=0=B(V)$$

вполнѣ совмѣстны. Условія же полной совмѣстности этихъ уравненій состоитъ въ томъ, что результатъ отъ подстановки коэффиціента перваго уравненія во второе равенъ результату отъ подстановки соотвѣтствующаго коэффиціента втораго уравненія въ первое. Эти условія даютъ для первыхъ $\frac{(n-2)(n-1)}{2}$ коэффиціентовъ тождества

$$s=s,\ldots\ldots q_2=q_2,\ q_3=q_3,\ldots\ldots q_{n-1}=q_{n-1}.$$

Чтобы доказать, что и послѣднія $n-1$ условій удовлетворяются, вспомню, что $q_1, q_2, \ldots q_n$ опредѣляются изъ n слѣдующихъ уравненій:

$$V_1=\alpha,\ V_2=\beta,\ V_3=\gamma, \ldots \ldots V_n=\delta,$$

въ которыхъ первыя части — интегралы системъ (6), при чемъ это интегралы различныхъ системъ, а вторыя части — произвольныя постоянныя. Сдѣлаю операціи A и B надъ каждымъ изъ этихъ уравненій:

$$\left(\frac{dV_m}{dx}\right)+\sum_{l=1}^{l=n}\frac{dV_m}{dq_l}A(q_l)=0,\quad \left(\frac{dV_m}{dy}\right)+\sum_{l=1}^{l=n}\frac{dV_m}{dq_l}B(q_l)=0.$$

На основаніи (6), эти уравненія можно преобразовать въ слѣдующія:

$$u_m\left(\frac{dV_m}{dy}\right)+\frac{dV_m}{dq_1}\left\{A(q_1)+\frac{[u_m]}{A_n}A(q_2)+\frac{[u^2{}_m]}{A_n}A(q_3)+\ldots+\frac{B}{A_n}\right\}=0,$$

$$\left(\frac{dV_m}{dy}\right)+\frac{dV_m}{dq_1}\left\{B(q_1)+\frac{[u_m]}{A_n}B(q_2)+\ldots+\frac{[u_m{}^{n-1}]}{A_n}B(q_n)\right\}=0.$$

Придавая m всѣ значенія отъ 1 до n и исключая изъ этихъ уравненій $A(q_1)$ и $B(q_n)$, я имѣю $\frac{n(n-1)}{2}$ системъ по два уравненія вида:

$$u_m\left(\frac{dV_m}{dy}\right)\frac{dV_p}{dq_1}-u_p\left(\frac{dV_p}{dy}\right)\frac{dV_m}{dq_1}+$$

$$+\frac{dV_m}{dq_1}\frac{dV_p}{dq_1}\sum_{l=2}^{l=n}\frac{1}{A_n}\{[u_m{}^{l-1}]-[u_p{}^{l-1}]\}A(q_l)=0 \ \ldots\ldots (18),$$

$$u_m\left(\frac{dV_m}{dy}\right)\frac{dV_p}{dq_1}-u_p\left(\frac{dV_p}{dy}\right)\frac{dV_m}{dq_1}+$$

$$+\frac{dV_m}{dq_1}\frac{dV_p}{dq_1}\sum_{l=1}^{l=n-1}\frac{1}{A_n}\{u_m[u_m{}^{l-1}]-u_p[u_p{}^{l-1}]\}B(q_l)=0 \ \ldots\ldots (19).$$

При выводѣ послѣдней формулы надо вспомнить, что $[u_m{}^{n-1}]=-A_0 : u_m$. Замѣтивъ же, что $[u_m{}^{l-1}]-u_m[u_m{}^{l-2}]=A_{n-l+1}$, я вижу, что $[u_m{}^{l-1}]-[u_p{}^{l-1}]=u_m[u_m{}^{l-2}]-u_p[u_p{}^{l-2}]$; слѣдовательно, если я вычту изъ уравненія (18) уравненіе (19) и сокращу на

$$\frac{1}{A_n}\frac{dV_m}{dq_1}\frac{dV_p}{dq_1},$$

то получу

$$\sum_{l=1}^{l=n-1}\{[u_m{}^l]-[u_p{}^l]\}\{A(q_{l+1})-B(q_l)\}=0 \ \ldots\ldots\ldots (20).$$

Такихъ уравненій можно составить $\frac{n(n-1)}{2}$. Отсюда заключаю, что $A(q_{l+1})=B(q_l)$ при всѣхъ значеніяхъ l отъ 1 до $n-1$, что и требовалось доказать.

Общій интегралъ можно найти такимъ же путемъ, какъ и въ предъидущемъ случаѣ; при этомъ выборъ корня u въ уравненіи (9) зависитъ отъ нашего желанія.

Наконецъ разсмотрю, какъ поступать въ томъ случаѣ, если системы (6) даютъ менѣе n интеграловъ (т. е. не каждая система даетъ интегралъ) и болѣе одного. Пусть число этихъ интеграловъ будетъ m. Въ такомъ случаѣ $m-1$ интеграловъ могутъ упростить интегрированіе m-го. Въ самомъ дѣлѣ, нахожденіе полнаго интеграла уравненія $n-1$-го порядка можетъ быть приведено къ отысканію $n-1$ уравненій, содержащихъ $n-1$ произвольныхъ постоянныхъ; изъ этихъ уравненій и изъ того уравненія, для котораго ищется полный интегралъ, можно опредѣлить производныя $n-1$-го порядка посредствомъ болѣе низшихъ производныхъ. Въ нашемъ же случаѣ уже m уравненій между $q_1, q_2, \ldots q_n$ извѣстны; стало быть стоитъ только найти $n-m$ такихъ уравненій, дополняющихъ до интегрируемаго нами уравненія и отличныхъ отъ извѣстныхъ уже намъ. Положимъ, мы нашли эти $n-m$ интеграловъ, содержащихъ $q_1, q_2, q_3, \ldots q_n$; тогда эти $n-m$ интеграловъ и прежніе m дадутъ возможность опредѣлить всѣ q въ функціяхъ x, y, z и низшихъ производныхъ, послѣ чего остается интегрировать уравненія (17).—Но можно $m-1$ извѣстными интегралами пользоваться или для исключенія нѣкоторыхъ q изъ m-го интеграла, который интегрируется, или для какихъ либо другихъ упрощеній при интеграціи m-го интеграла.

Перехожу къ интегрированію уравненій нелинейныхъ и такихъ линейныхъ, которыя невозможно интегрировать только что описанными способами. Буду обозначать по прежнему производныя различныхъ порядковъ, кромѣ первыхъ двухъ и n—1-го, посредствомъ z съ двумя значками, изъ которыхъ верхній показываетъ число дифференцированій по x, а нижній по y; такимъ образомъ

$$z^p_m = \frac{d^{p+m}z}{dx^p dy^m}.$$

Подобнымъ же образомъ обозначаю производныя отъ первой части даннаго уравненія

$$f = 0 \;\ldots\ldots\; (21)$$

относительно z^n, z_1^{n-1}, z_2^{n-2}, ... z_n посредствомъ Z^n, Z_1^{n-1}, Z_2^{n-2}, ... Z_n. Ради краткости буду употреблять также слѣдующія обозначенія:

$$\left.\begin{aligned} X &= \frac{df}{dx} + p\frac{df}{dz} + r\frac{df}{dp} + s\frac{df}{dq} + \ldots\ldots\ldots \\ &+ z^n\frac{df}{dq_1} + z_1^{n-1}\frac{df}{dq_2} + \ldots\ldots + z^1_{n-1}\frac{df}{dq_n}, \\ Y &= \frac{df}{dy} + q\frac{df}{dz} + s\frac{df}{dp} + t\frac{df}{dq} + \ldots\ldots\ldots \\ &+ z_1^{n-1}\frac{df}{dq_1} + z_2^{n-2}\frac{df}{dq_2} + \ldots\ldots + z_n\frac{df}{dq_n} \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (22).$$

Выводъ формулъ, приводимыхъ у Петерсона, а также формулъ, аналогичныхъ формуламъ Бура, производится также, какъ и выводъ подобныхъ формулъ главы второй; поэтому я буду излагать эти выводы по возможности короче.

Предположу, что прежнія перемѣнныя x и y замѣняются новыми x и v; тогда, полагая для краткости

$$\frac{dy}{dx} = -u,$$

имѣю

$$\frac{dq_1}{dx} = z^n - z_1^{n-1}u,\; \frac{dq_2}{dx} = z_1^{n-1} - z_2^{n-2}u, \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dq_{n-1}}{dx} = z^2_{n-2} - z^1_{n-1}u,\; \frac{dq_n}{dx} = z^1_{n-1} - z_n u \;\ldots\ldots\ldots\ldots\; (23),$$

$$\frac{dq_1}{dv} = z_1^{n-1}\frac{dy}{dv},\; \frac{dq_2}{dv} = z_2^{n-2}\frac{dy}{dv}, \ldots\ldots\ldots\; \frac{dq_{n-2}}{dv} = z^2_{n-2}\frac{dy}{dv},$$

$$\frac{dq_{n-1}}{dv} = z^1_{n-1}\frac{dy}{dv},\; \frac{dq_n}{dv} = z_n\frac{dy}{dv} \;\ldots\ldots\ldots\; (24).$$

Дифференцируя (23) относительно v, а (24) относительно x, я вычитаю вторые результаты изъ первыхъ и по сокращеніи получаю

$$\frac{dz^n}{dv} = u\frac{dz_1^{n-1}}{dv} + \frac{dy}{dv}\frac{dz_1^{n-1}}{dx},\; \frac{dz_1^{n-1}}{dv} = u\frac{dz_2^{n-2}}{dv} + \frac{dy}{dv}\frac{dz_2^{n-2}}{dx}, \ldots\ldots$$

$$\frac{dz^3_{n-3}}{dv} = u\frac{dz^2_{n-2}}{dv} + \frac{dy}{dv}\frac{dz^2_{n-2}}{dx},\; \frac{dz^2_{n-2}}{dv} = u\frac{dz^1_{n-1}}{dv} + \frac{dy}{dv}\frac{dz^1_{n-1}}{dx},$$

$$\frac{dz^1_{n-1}}{dv} = u\frac{dz_n}{dv} + \frac{dy}{dv}\frac{dz_n}{dx} \;\ldots\ldots\ldots\; (25).$$

Начиная съ конца, я могу опредѣлить всѣ производныя по v черезъ $\frac{dz_n}{dv}$ и черезъ производныя z-овъ по x:

$$\frac{dz^1_{n-1}}{dv} = u\frac{dz_n}{dv} + \frac{dy}{dv}\frac{dz_n}{dx},\; \frac{dz^2_{n-2}}{dv} = u^2\frac{dz_n}{dv} + \frac{dy}{dv}\left(u\frac{dz_n}{dx} + \frac{dz^1_{n-1}}{dx}\right),$$

$$\frac{dz^3_{n-3}}{dv} = u^3\frac{dz_n}{dv} + \frac{dy}{dv}\left(u^2\frac{dz_n}{dx} + u\frac{dz^1_{n-1}}{dx} + \frac{dz^2_{n-2}}{dx}\right), \ldots\ldots\ldots\ldots$$

$$\frac{dz_1^{n-1}}{dv} = u^{n-1}\frac{dz_n}{dv} + \frac{dy}{dv}\left(u^{n-2}\frac{dz_n}{dx} + \ldots\ldots + u\frac{dz_3^{n-3}}{dx} + \frac{dz_2^{n-2}}{dx}\right),$$

$$\frac{dz^n}{dv} = u^n\frac{dz_n}{dv} + \frac{dy}{dv}\left(u^{n-1}\frac{dz_n}{dx} + \ldots\ldots + u\frac{dz_2^{n-2}}{dx} + \frac{dz_1^{n-1}}{dx}\right) \ldots (25^{bis}).$$

Предположу теперь, что данное уравненіе дифференцировано относительно v и что послѣ дифференцированія

$$\frac{dz^1_{n-1}}{dv}, \frac{dz^2_{n-2}}{dv}, \ldots\ldots \frac{dz^n}{dv}$$

замѣнены съ помощью уравненій (25^{bis}); тогда имѣю

$$\frac{dz_n}{dv}(Z^n u^n + Z_1^{n-1} u^{n-1} + Z_2^{n-2} u^{n-2} + \ldots + Z^1_{n-1} u + Z_n) +$$

$$+\frac{dy}{dv}\left\{Y + Z^n \frac{dz_1^{n-1}}{dx} + [u]\frac{dz_2^{n-2}}{dx} + [u^2]\frac{dz_3^{n-3}}{dx} + [u^3]\frac{dz_4^{n-4}}{dx} + \ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots + [u^{n-2}]\frac{dz_{n-1}}{dx} + [u^{n-1}]\frac{dz_n}{dx}\right\} = 0.$$

Въ этой послѣдней формулѣ символъ $[u^m]$ означаетъ слѣдующее:

$$[u^m] = Z^n u^m + Z_1^{n-1} u^{m-1} + \ldots\ldots + Z^{n-m+1}_{m-1} u + Z^{n-m}_m \ldots (26).$$

Выбираю такъ неизвѣстную функцію v, чтобы коэффиціентъ при $\frac{dz_n}{dv}$ равнялся нулю; тогда имѣю два уравненія. Къ этимъ двумъ уравненіямъ надо прибавить (23) и (24) и еще нѣсколько подобныхъ уравненій, которыя обозначаютъ, что нѣкоторыя величины суть производныя другихъ величинъ, и наконецъ данное уравненіе. Но лучше данное уравненіе, какъ это дѣлаетъ Коши для уравненій перваго порядка, замѣнить его производною по x. Не приводя всѣхъ вычисленій, выписываю только всю получаемую систему, при чемъ u обозначаетъ нѣкоторый корень уравненія:

$$Z^n u^n + Z_1^{n-1} u^{n-1} + Z_2^{n-2} u^{n-2} + \ldots + Z^1_{n-1} u + Z_n = 0 \ldots (27).$$

Система, о которой рѣчь, будетъ

$$\frac{dy}{dx} + u = 0 \ldots\ldots\ldots (27),$$

$$Y + Z^n \frac{dz_1^{n-1}}{dx} + [u]\frac{dz_2^{n-2}}{dx} + [u^2]\frac{dz_3^{n-3}}{dx} + \ldots\ldots + [u^{n-1}]\frac{dz_n}{dx} = 0 \ldots (27),$$

$$X + Z^n \frac{dz^n}{dx} + [u]\frac{dz_1^{n-1}}{dx} + [u^2]\frac{dz_2^{n-2}}{dx} \ldots + [u^{n-1}]\frac{dz^1_{n-1}}{dx} = 0\,(27),$$

$$\frac{dz}{dx} = p + q\frac{dy}{dx}, \frac{dp}{dx} = r + s\frac{dy}{dx}, \frac{dq}{dx} = s + t\frac{dy}{dx} \ldots \text{уравненія } 23 \ldots (27),$$

$$\frac{dz}{dv} = q\frac{dy}{dv}, \frac{dp}{dv} = s\frac{dy}{dv}, \frac{dq}{dv} = t\frac{dy}{dv} \ldots\ldots \text{уравненія } 24 \ldots\ldots (27).$$

Для составленія третьяго уравненія я пользовался формулою:

$$u[u^{m-1}] + Z^{n-m}_m = [u^m].$$

Задаюсь теперь задачею: найти условія, при которыхъ изъ первыхъ $\frac{n(n+1)}{2} + 3$ уравненій (27) можно составить посредствомъ сложенія такое уравненіе, которое было бы дифференціаломъ уравненія $V = \alpha$, гдѣ V—функція x, y, z и производныхъ z до n-го порядка включительно, а α произвольная постоянная.

Помножу p первыхъ уравненій группы (27) на a_1, a_2, a_3, a_4,... ...a_p (гдѣ $p = 3 + \frac{n(n+1)}{2}$) и сложу. Требуется опредѣлить неопредѣленные множители $a_1, a_2, a_3, a_4, \ldots a_p$ такъ, чтобы коэффиціентъ при каждомъ дифференціалѣ равнялся коэффиціенту при томъ же дифференціалѣ въ уравненіи:

$$\frac{dV}{dx}dx + \frac{dV}{dy}dy + \frac{dV}{dz}dz + \frac{dV}{dp}dp + \ldots + \frac{dV}{dz^1_{n-1}}dz^1_{n-1} +$$

$$+\frac{dV}{dz_n}dz_n = 0 \ldots (28).$$

Всѣхъ дифференціаловъ какъ въ этомъ уравненіи, такъ и въ получаемыхъ изъ (27) $\frac{n(n+1)}{2} + 3 + n$; поэтому отъ приравниванія коэффиціентовъ получу $\frac{n(n+1)}{2} + 3 + n$ уравненій, содержащихъ $\frac{n(n+1)}{2} + 3$ неопредѣленныхъ множителей. Исключеніе этихъ множителей дастъ систему изъ n линейныхъ уравненій, которымъ должна удовлетворять функція V. Выведу эти уравненія.

Во первыхъ, всѣ коэффиціенты отъ a_4 до a_p опредѣляются каждый только однимъ членомъ полнаго дифференціала (28):

$$a_4 = \frac{dV}{dz},\ a_5 = \frac{dV}{dp},\ a_6 = \frac{dV}{dq},\ a_7 = \frac{dV}{dr},\ \ldots\ldots a_p = \frac{dV}{dq_n}.$$

Во вторыхъ, коэффиціенты при диференціалахъ производныхъ z n-го порядка выразятся такъ:

$$\frac{dV}{dz^n} = Z^n a_3,\ \frac{dV}{dz_1{}^{n-1}} = [u]\, a_3 + Z^n a_2,\ \frac{dV}{dz_2{}^{n-2}} = [u^2]\, a_3 + [u]\, a_2,$$

вообще

$$\frac{dV}{dz_m{}^{n-m}} = [u^m]\, a_3 + [u^{m-1}]\, a_2.$$

Наконецъ имѣю еще два уравненія:

$$\frac{dV}{dx} = a_1 u - a_4 p - a_5 r - a_6 s - a_7 z^3 - a_8 z_1^2 - \ldots - a_p z^1_{n-1} +$$
$$+ a_2 Y + a_3 X,$$

$$\frac{dV}{dy} = a_1 - a_4 q - a_5 s - a_6 t - a_7 z_1{}^2 - a_8 z_2{}^1 - \ldots - a_p z^n.$$

Буду для краткости употреблять слѣдующія обозначенія:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = \frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz} + r\frac{dV}{dp} + s\frac{dV}{dq} + z^3\frac{dV}{dr} + \ldots + z^1_{n-1}\frac{dV}{dq_n}$$

и $$\left(\frac{dV}{dy}\right) = \frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz} + s\frac{dV}{dp} + t\frac{dV}{dq} + z_1{}^2\frac{dV}{dr} + \ldots + z_n\frac{dV}{dq_n}.$$

Исключеніе произвольныхъ множителей дастъ n уравненій:

$$\frac{dV}{dz_1{}^{n-1}} = \frac{[u]}{Z^n}\frac{dV}{dz^n} + \frac{Z^n}{[u^{n-1}]}\frac{dV}{dz_n},\ \frac{dV}{dz_2{}^{n-2}} = \frac{[u^2]}{Z^n}\frac{dV}{dz^n} + \frac{[u]}{[u^{n-1}]}\frac{dV}{dz_n}, \ldots$$

$$\ldots \frac{dV}{dz_m{}^{n-m}} = \frac{[u^m]}{Z^n}\frac{dV}{dz^n} + \frac{[u^{m-1}]}{[u^{n-1}]}\frac{dV}{dz_n},\ \ldots\ldots \frac{dV}{dz^1{}_{n-1}} = \frac{[u^{n-1}]}{Z^n}\frac{dV}{dz^n} +$$

$$+ \frac{[u^{n-2}]}{[u^{n-1}]}\frac{dV}{dz_n},\ \left(\frac{dV}{dx}\right) = u\left(\frac{dV}{dy}\right) + \frac{X}{Z^n}\frac{dV}{dz^n} + \frac{Y}{[u^{n-1}]}\frac{dV}{dz_n} \ldots\ldots \quad (29)$$

Послѣднее изъ этихъ уравненій можно написать такъ:

$$\left(\frac{dV}{dx}\right) = u\left(\frac{dV}{dy}\right) + \frac{X}{Z^n}\frac{dV}{dz^n} - \frac{Yu}{Z_n}\frac{dV}{dz_n} \ldots\ldots \quad (29^{bis}).$$

Такихъ системъ въ n линейныхъ уравненій будетъ n; каждая система соотвѣтствуетъ одному изъ корней уравненія:

$$Z^n u^n + Z_1{}^{n-1}u^{n-1} + Z_2{}^{n-2}u^{n-2} + \ldots + Z^1{}_{n-1}u + Z_n = 0 \ldots (27).$$

Первая часть даннаго уравненія—непремѣнно интегралъ каждой такой системы. Это и такъ понятно, но можно доказать и непосредственно. Вставлю для доказательства вмѣсто V въ m-ое уравненіе и въ n-ое группы (29) первую часть даннаго уравненія. Тогда m-ое уравненіе обращается въ слѣдующее:

$$Z_m{}^{n-m} = [u^m] - u\,[u^{m-1}],$$

что — тождество, ибо

$$[u^m] = Z^n u^m + Z_1{}^{n-1}u^{m-1} + \ldots + Z^{n-m+1}_{m-1}u + Z_m{}^{n-m},$$

$$[u^{m-1}] = Z^n u^{m-1} + Z_1{}^{n-2}u^{m-2} + \ldots\ldots\ldots + Z^{n-m+1}_{m-1};$$

n-ое уравненіе будетъ

$$X = u\,Y + X - u\,Y.$$

Кромѣ первой части даннаго уравненія система (29) можетъ допускать еще одинъ общій интегралъ, содержащій производныя n-го порядка (я говорю одинъ въ томъ смыслѣ, что часть интеграла, содержащая производныя n-го порядка, кромѣ той, которая встрѣчается въ данномъ уравненіи, можетъ быть только единственная; но система (29) можетъ имѣть болѣе интеграловъ, содержащихъ производныя n-го порядка). Кромѣ того уравненія (29) могутъ допускать и интегралы, не содержащіе производныхъ n-го порядка. Интегралы, содержащіе производныя n-го порядка, иногда даютъ всѣ системы; иногда же нѣкоторыя системы такихъ интеграловъ не дадутъ, между тѣмъ какъ другія дадутъ; иногда даже не будетъ системы, дающей такого рода интегралъ. Въ послѣднемъ случаѣ для отысканія интеграла придется прибѣгнуть къ другимъ способамъ.

Разсмотрю различные случаи, которые могутъ встрѣтиться.

1-й случай, когда каждая изъ системъ (29) имѣетъ по крайней мѣрѣ два интеграла, разобранъ подробно Петерсономъ въ VIII томѣ Математическаго Сборника, издаваемаго Московскимъ Математическимъ Обществомъ. Понятно однако же, что и въ этомъ случаѣ уравненіе можно интегрировать также, какъ и уравненія, о которыхъ говорится ниже во второмъ случаѣ, съ тѣмъ чтобы по полученіи полнаго интеграла примѣнить методъ Лагранжа.

2-й случай. Если каждая изъ системъ (29) имѣетъ по одному интегралу, содержащему производныя n-го порядка и отличающемуся отъ даннаго уравненія, то прежде отысканія общаго интеграла придется искать полный интегралъ. Для этого изъ даннаго уравненія и изъ n интеграловъ, приравненныхъ произвольнымъ постояннымъ, можно опредѣлить всѣ производныя n-го порядка $z^n, z_1^{n-1}, z_2^{n-2}, \ldots z_n$ въ функціяхъ $x, y, z, p, q, r, s, t, \ldots q_1, q_2, \ldots q_n$ и n постоянныхъ. Дальнѣйшее будетъ состоять въ интегрированіи системы:

$$dq_1 = z^n\,dx + z_1^{n-1}\,dy,\ dq_2 = z_1^{n-1}\,dx + z_2^{n-2}\,dy,\ \ldots\ldots\ldots$$
$$dp = r dx + s dy,\ dq = s dx + t dy,\ dz = p dx + q dy \ldots\ldots (30).$$

Теорема 3. Уравненія (30) вполнѣ совмѣстны.

Доказательство. Уравненія (30) вполнѣ совмѣстны, если вполнѣ совмѣстны два уравненія:

$$\left.\begin{aligned} &\frac{dU}{dx} + p\frac{dU}{dz} + r\frac{dU}{dp} + s\frac{dU}{dq} + \ldots\ldots + \\ &+ z^n\frac{dU}{dq_1} + \ldots\ldots + z^1_{n-1}\frac{dU}{dq_n} = A(U) = 0, \\ &\frac{dU}{dy} + q\frac{dU}{dz} + s\frac{dU}{dp} + t\frac{dU}{dq} + \ldots\ldots + \\ &+ z_1^{n-1}\frac{dU}{dq_1} + \ldots\ldots + z_n\frac{dU}{dq_n} = B(U) = 0 \end{aligned}\right\} \ldots\ldots (31);$$

а уравненія (31) вполнѣ совмѣстны, если удовлетворяется для всѣхъ значеній k отъ 1 до $\frac{n(n+1)}{2}$ условіе:

$$B(a_k) = A(b_k) \ldots\ldots\ldots (32).$$

Въ равенствахъ (32) a со значками обозначаютъ коэффиціенты при разныхъ частныхъ производныхъ U въ первомъ изъ уравненій (31), а b съ такими же значками коэффиціенты во второмъ изъ уравненій (31); k же обозначаетъ мѣсто этихъ коэффиціентовъ въ уравненіяхъ (31), считая слѣва на право. Для k отъ 1 до $\frac{n(n-1)}{2}$ условія (32) дадутъ тождества:

$$s = s,\ z_1^2 = z_1^2,\ z_2^1 = z_2^1,\ z_1^3 = z_1^3, \ldots\ldots z_1^{n-1} = z_1^{n-1},$$
$$z_2^{n-2} = z_2^{n-2}, \ldots\ldots\ldots z^1_{n-1} = z^1_{n-1}.$$

Остается доказать вѣрность теоремы для послѣднихъ n коэффиціентовъ. Обозначу данное и n дополнительныхъ уравненій такъ:

$$f = 0,\ f_1 = \alpha_1,\ f_2 = \alpha_2, \ldots\ldots\ldots f_n = \alpha_n \ldots\ldots\ldots (33),$$

гдѣ α произвольныя постоянныя. Сдѣлаю операціи A и B надъ $f = 0$ и $f_m = \alpha_m$:

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{df}{dz^n}A(z^n) + \frac{df}{dz_1^{n-1}}A(z_1^{n-1}) + \ldots\ldots + \frac{df}{dz_n}A(z_n) = 0,$$
$$\left(\frac{df_m}{dx}\right) + \frac{df_m}{dz^n}A(z^n) + \frac{df_m}{dz_1^{n-1}}A(z_1^{n-1}) + \ldots\ldots + \frac{df_m}{dz_n}A(z_n) = 0,$$
$$\left(\frac{df}{dy}\right) + \frac{df}{dz^n}B(z^n) + \frac{df}{dz_1^{n-1}}B(z_1^{n-1}) + \ldots\ldots + \frac{df}{dz_n}B(z_n) = 0,$$
$$\left(\frac{df_m}{dy}\right) + \frac{df_m}{dz^n}B(z^n) + \frac{df_m}{dz_1^{n-1}}B(z_1^{n-1}) + \ldots\ldots + \frac{df_m}{dz_n}B(z_n) = 0.$$

Эти тождества (тождества, потому что $z^n, z_1^{n-1}, z_2^{n-2}, \ldots\ldots z_n$ предполагаются замѣненными выраженіями, опредѣленными изъ (33)) можно преобразовать (на томъ основаніи, что и f, и f_m — интегралы такой системы (29), въ которой u замѣнено чрезъ u_m) въ слѣдующія:

$$\left(\frac{df}{dx}\right) + \frac{df}{dz^n}\left\{A(z^n) + \frac{[u_m]}{Z^n}A(z_1^{n-1}) + \ldots\ldots + \frac{[u_m^{n-1}]}{Z^n}A(z^1_{n-1})\right\} +$$
$$+ \frac{df}{dz_n}\left\{\frac{Z^n}{[u_m^{n-1}]}A(z_1^{n-1}) + \frac{[u_m]}{[u_m^{n-1}]}A(z_2^{n-2}) + \ldots\ldots\right.$$
$$\left.\ldots\ldots + \frac{[u^{m-2}]}{[u^{m-1}]}A(z^1_{n-1}) + \frac{[u_m^{n-1}]}{[u_m^{n-1}]}A(z_n)\right\} = 0 \ldots\ldots\ldots (34),$$

такое же (35), получаемое изъ (34) замѣною f черезъ f_m,

$$\left(\frac{df}{dy}\right)+\frac{df}{dz^n}\left\{B(z^n)+\frac{[u_m]}{Z^n}B(z_1{}^{n-1})+\ldots\ldots+\frac{[u_m{}^{n-1}]}{Z^n}B(z^1{}_{n-1})\right\}+$$

$$+\frac{df}{dz_n}\left\{\frac{Z^n}{[u_m{}^{n-1}]}B(z_1{}^{n-1})+\frac{[u_m]}{[u_m{}^{n-1}]}B(z_2{}^{n-2})+\ldots\ldots\right.$$

$$\left.\ldots\ldots+\frac{[u_m{}^{n-1}]}{[u_m{}^{n-1}]}B(z_n)\right\}=0\ \ldots\ldots\ldots\ (36),$$

тождество (37), получаемое изъ (36) замѣною f черезъ f_m. Исключу изъ (35) и (34) $A(z^n)$, а изъ (36) и (37) $B(z_n)$:

$$\left(\frac{df}{dx}\right)\frac{df_m}{dz^n}-\left(\frac{df_m}{dx}\right)\frac{df}{dz^n}-\frac{1}{Z_n}\left\{\frac{df}{dz_n}\frac{df_m}{dz^n}-\frac{df_m}{dz_n}\frac{df}{dz^n}\right\}\{Z^n u_m A(z_1{}^{n-1})+$$

$$+u_m[u_m]A(z_2{}^{n-2})+\ldots\ldots+u_m[u_m{}^{n-1}]A(z_n)\}=0\ \ldots\ldots\ (38);$$

$$\left(\frac{df}{dy}\right)\frac{df_m}{dz_n}-\left(\frac{df_m}{dy}\right)\frac{df}{dz_n}-\frac{1}{Z^n}\left\{\frac{df}{dz_n}\frac{df_m}{dz^n}-\frac{df_m}{dz_n}\frac{df}{dz^n}\right\}\{Z^n B(z^n)+$$

$$+[u_m]B(z_1{}^{n-1})+[u_m{}^2]B(z_2{}^{n-2})+\ldots\ldots+[u_m{}^{n-1}]B(z^1{}_{n-1})\}=0\ (39).$$

Помножу тождество (38) на

$$Z_n : u_m = -[u_m{}^{n-1}],$$

а (39) на Z^n, и вычту (39) изъ (38), сокративъ при этомъ на

$$\frac{df}{dz_n}\frac{df_m}{dz^n}-\frac{df}{dz^n}\frac{df_m}{dz_n};$$

тогда на основаніи послѣдняго изъ уравненій (29) имѣю

$$Z^n\{B(z^n)-A(z_1{}^{n-1})\}+[u_m]\{B(z_1{}^{n-1})-A(z_2{}^{n-2})\}+$$

$$+[u_m{}^2]\{B(z_2{}^{n-2})-A(z_3{}^{n-3})\}+\ldots\ldots$$

$$\ldots\ldots+[u_m{}^{n-1}]\{B(z^1{}_{n-1})-A(z_n)\}=0.\ \ldots\ldots\ (40).$$

Такихъ тождествъ будетъ n, по числу корней уравненія $[u^n]=0$. Изъ тождествъ (40) слѣдуетъ, что уравненія (32) будутъ удовлетворяться и для послѣднихъ n коэффиціентовъ двухъ уравненій (31), что и требовалось доказать.

Перехожу къ вопросу объ отысканіи общаго интеграла по полному. Пусть полный интегралъ будетъ

$$F(x,\ y,\ z,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \ldots)=0,\ \ldots\ldots\ldots\ (41);$$

требуется, чтобы и по замѣнѣ α, β, γ, ... нѣкоторыми функціями получалось выраженіе, удовлетворяющее данному уравненію; для этого достаточно, чтобы при дифференцированіи уравненія $F=0$ и всѣхъ его производныхъ по x и по y до n—1-го порядка включительно тѣ части дифференціаловъ, которыя произошли отъ измѣненія $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$, были равны нулю. Такимъ образомъ получаемъ слѣдующія условныя уравненія:

$$\partial F=0,\ \partial\left(\frac{dF}{dx}\right)=0,\ \partial\left(\frac{dF}{dy}\right)=0,\ldots\partial\left(\frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}\right)=0\ \ldots\ (42),$$

гдѣ d обозначаетъ дифференцированіе въ предположеніи $\alpha, \beta, \gamma, \ldots$ постоянныхъ, а ∂ дифференцированіе въ предположеніи

$$x,\ y,\ z,\ p,\ q,\ r,\ s,\ t,\ \ldots q_1,\ \ldots\ q_n$$

постоянныхъ. По исключеніи изъ уравненій (42) $p, q, r, s, t, \ldots q_n$ съ помощью уравненій:

$$\frac{dF}{dx}=0,\ \frac{dF}{dy}=0,\ \frac{d^2F}{dx^2}=0,\ldots\ \frac{d^{n-1}F}{dy^{n-1}}=0$$

получимъ уравненія, которыя вмѣстѣ съ уравненіемъ $F=0$ опредѣлятъ общій интегралъ.

Въ случаѣ, если полный интегралъ найденъ только что описаннымъ способомъ, можно искать иногда общій интегралъ, принимая двѣ изъ постоянныхъ за независимыя перемѣнныя, а остальныя постоянныя за функціи первыхъ двухъ. Предположу для простоты разсужденія, что полный интегралъ разрѣшенъ относительно z, и пусть

$$z=\psi(x,\ y,\ \alpha,\ \beta,\ \gamma,\ \delta,\ \ldots\ldots)\ \ldots\ (43);$$

пусть α и β — функціи x и y, а γ, δ, ε, ... функціи α и β. Опредѣлю различныя производныя z до n—1-го порядка включительно въ томъ предположеніи, что α, β, γ, δ, ... постоянныя:

$p=\psi_1(x,y,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots..)$, $q=\psi'(x,y,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots.)$, $r=\psi_2$, $s=\psi'_1$, $t=\psi^2,\ldots.$
$\ldots.q_1=\psi_{n-1}(x,y,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots)$, $q_2=\psi'_{n-2},\ldots\, q_n=\psi^{n-1}(x,y,\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots)$ (44).

Предполагая $x, y, \gamma, \delta, \ldots.$ функціями α и β, выбираю $\alpha, \beta, \gamma, \delta,\ldots$ такъ, чтобы

$$z, p, q, r, s, t, \ldots. q_1, \ldots.\, q_n, z^n, z_1^{n-1}, \ldots.\, z_n$$

отличались отъ значеній, получаемыхъ изъ полнаго интеграла, тѣмъ только, что вмѣсто постоянныхъ подставлены нѣкоторыя функціи x и y. Для того чтобы это исполнить, я долженъ удовлетворить слѣдующимъ $n(n+1)$ уравненіямъ:

$$\frac{\partial\psi}{\partial\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\alpha}+\frac{\partial\psi}{\partial\delta}\frac{d\delta}{d\alpha}+\ldots\ldots=\frac{d\psi}{d\alpha}=0,\ \frac{d\psi_1}{d\alpha}=0,\ \frac{d\psi'}{d\alpha}=0,\ \ldots.$$

$$\ldots.\frac{d\psi^{n-1}}{d\alpha}=0,\ \frac{\partial\psi}{\partial\beta}+\frac{\partial\psi}{\partial\gamma}\frac{d\gamma}{d\beta}+\frac{\partial\psi}{\partial\delta}\frac{d\delta}{d\beta}+\ldots\ldots=\frac{d\psi}{d\beta}=0,$$

$$\frac{\partial\psi_1}{\partial\beta}=0,\ \frac{d\psi'}{d\beta}=0,\ \ldots.\ \frac{d\psi_{n-1}}{d\beta}=0,\ \ldots\ \frac{d\psi^{n-1}}{d\beta}=0\ \ldots.\ (45).$$

Изъ этихъ уравненій я долженъ опредѣлить $\frac{n(n+3)}{2}$ функцій. Изъ уравненій (45) не всѣ представляютъ вполнѣ различныя условія; вполнѣ отличныхъ условій будетъ столько, сколько функцій. Въ самомъ дѣлѣ, то обстоятельство, что

$$s,\ z_1^{\,2},\ z_2^{\,1},\ z_3^{\,1},\ z_2^{\,2},\ z_1^{\,3},\ldots.q_2,\ldots.q_{n-1},\ z_1^{\,n-1},\ z_2^{\,n-2},\ z_3^{\,n-3},\ldots.z^1_{\,n-1}$$

могутъ получиться двоякимъ образомъ, дастъ $\frac{n(n-1)}{2}$ тождествъ, связывающихъ величины, опредѣляемыя уравненіями (45); такимъ образомъ $\frac{n(n+3)}{2}$ функцій должны будутъ удовлетворить

$$n(n+1)-\frac{n(n-1)}{2}=\frac{n(n+3)}{2}$$

вполнѣ отличнымъ условіямъ. Разрѣшеніе уравненій (45) зависитъ отъ исключенія изъ этихъ уравненій всѣхъ функцій α и β, кромѣ одной. Это исключеніе, совершаемое тѣми же пріемами, какіе упо-

треблялись въ главѣ IV, должны привести къ труднымъ вычисленіямъ.

3-й случай. Разсмотрю наконецъ случай, когда только нѣкоторыя изъ системъ (29) дадутъ по интегралу, содержащему производныя n-го порядка, или когда ни одна изъ системъ не дастъ ихъ.

Положимъ, что

$$f=0\ \ldots\ldots\ (46)$$

—данное уравненіе. Назову производныя первой части этого уравненія относительно производныхъ n—го порядка функціи z черезъ

$$C,\ D,\ E,\ \ldots.\ N;$$

пусть остальныя части производныхъ f по x и y будутъ X и Y, такъ что

$$X=\frac{df}{dx}+p\frac{df}{dz}+r\frac{df}{dp}+s\frac{df}{dq}+\ldots\ldots+z^1_{n-1}\frac{df}{dq_n},$$

$$Y=\frac{df}{dy}+q\frac{df}{dz}+s\frac{df}{dp}+t\frac{df}{dq}+\ldots\ldots+z_n\frac{df}{dq_n}.$$

Чтобы найти полный интегралъ уравненія (46), должно найти еще n уравненій между x, y, z и производными z; эти уравненія вмѣстѣ съ даннымъ должны опредѣлять

$$z^n,\ z_1^{\,n-1},\ z_2^{\,n-2},\ \ldots..\ z_n$$

такимъ образомъ, чтобы удовлетворялись n условій:

$$A(z_m^{\,n-m})=B(z_{m-1}^{\,n-m+1})\ \ldots\ldots\ (47),$$

гдѣ A и B означаютъ тѣ же операціи, что и въ теоремѣ 3-й. Пусть такія n новыхъ уравненій будутъ

$$f_1=\alpha_1,\ f_2=\alpha_2,\ \ldots..\ f_n=\alpha_n\ \ldots\ldots\ (48),$$

гдѣ α произвольныя постоянныя, и пусть величины, подобныя тѣмъ, которыя я обозначалъ для даннаго уравненія черезъ $C,D,E,\ldots..$ N,X,Y, будутъ для перваго изъ (48) $C_1,D_1,E_1,\ldots\ldots N_1,X_1,Y_1$, для втораго $C_2,D_2,E_2,\ldots..N_2,X_2,Y_2$ и т. д., вообще для m—го

$C_m, D_m, E_m, \ldots N_m, X_m$ и Y_m. Дифференцируя (46) и (48) по x и y, я получу $2(n+1)$ уравненій вида:

$$\left.\begin{array}{l} CA(z^n)+DA(z_1^{\,n-1})+EA(z_2^{\,n-2})+\ldots\ldots+NA(z_n)+X=0,\\ C_1A(z^n)+D_1A(z_1^{\,n-1})+E_1A(z_2^{\,n-2})+\ldots+N_1A(z_n)+X_1=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_nA(z^n)+D_nA(z_1^{\,n-1})+E_nA(z_2^{\,n-2})+\ldots+N_nA(z_n)+X_n=0 \end{array}\right\}\ (49),$$

$$\left.\begin{array}{l} CB(z^n)+DB(z_1^{\,n-1})+EB(z_2^{\,n-2})+\ldots\ldots+NB(z_n)+Y=0,\\ C_1B(z^n)+D_1B(z_1^{\,n-1})+E_1B(z_2^{\,n-2})+\ldots+N_1B(z_n)+Y_1=0,\\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\\ C_nB(z^n)+D_nB(z_1^{\,n-1})+E_nB(z_2^{\,n-2})+\ldots+N_nB(z_n)+Y_n=0 \end{array}\right\}\ (50).$$

Предположивъ, что (47) удовлетворяются, и исключивъ при такомъ предположеніи всѣ $A(z_m^{\,n-m})$, а также $B(z_n)$ изъ уравненій (49) и (50), т.-е. изъ $2(n+1)$ уравненій $n+2$ величины, получу n диффенціальныхъ уравненій съ частными производными перваго порядка n неизвѣстныхъ функцій и съ

$$2+\frac{(n+1)(n+2)}{2}$$

независимыми перемѣнными; этимъ уравненіямъ должны удовлетворять первыя части уравненій (48). Рѣшеніе задачи зависитъ отъ умѣнья найти одну частную систему изъ n интеграловъ, удовлетворяющихъ этимъ уравненіямъ; интегралы эти не содержатъ произвольныхъ постоянныхъ. Если такая одна частная система найдена, то условія (47) удовлетворены, такъ какъ въ такомъ случаѣ полныя производныя по x и по y уравненій (46) и (48) будутъ именно уравненія (49) и (50); но уравненія (50) удовлетворятся также, если въ нихъ всѣ $B(z_m^{\,n-m})$, кромѣ $B(z^n)$, замѣнены $A(z_{m+1}^{\,n-m-1})$; слѣдовательно условія (47) удовлетворяются. Послѣ этого нахожденіе полнаго интеграла будетъ зависѣть отъ разрѣшенія уравненій

(30), уравненій вполнѣ совмѣстныхъ, для чего имѣется методъ Майера.

Представлю эти n совмѣстныхъ уравненій съ n неизвѣстными функціями въ видѣ опредѣлителей. При этомъ могутъ быть два случая.

1) *Когда n четно*, тогда для опредѣленія $n+2$ величинъ $A(z_m^{\,n-m})$ и $B(z^n)$, которыя я для сокращенія назову $\alpha,\beta,\gamma,\delta,\ldots$, достаточно взять $q=\frac{n+2}{2}$ уравненій изъ (49) и $q=\frac{n+2}{2}$ уравненій изъ (50); потомъ подставляю эти величины въ остальныя n уравненій и получаю искомыя n уравненій двухъ видовъ:

$$G=\begin{vmatrix} C, & D, & E, & \ldots & N, & 0, & X\\ C_1, & D_1, & E_1, & \ldots & N_1, & 0, & X_1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0, & C, & D, & \ldots & M, & N, & Y\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0, & C_{q-1}, & D_{q-1}, & \ldots & M_q, & N_{q-1}, & Y_{q-1}\\ C_p, & D_p, & E_p, & \ldots & N_p, & 0, & X_p \end{vmatrix}=0\ \ldots\ (51),$$

$$F=\begin{vmatrix} C, & D, & E, & \ldots & N, & 0, & X\\ 0, & C, & D, & \ldots & M, & N, & Y\\ C_1, & D_1, & E_1, & \ldots & N_1, & 0, & X_1\\ 0, & C_1, & D_1, & \ldots & M_1, & N_1, & Y_1\\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\\ 0, & C_{q-1}, & D_{q-1}, & \ldots & M_{q-1}, & N_{q-1}, & Y_{q-1}\\ 0, & C_p, & D_p, & \ldots & M_p, & N_p, & Y_p \end{vmatrix}=0\ \ldots\ (52).$$

Въ этихъ уравненіяхъ p имѣетъ всѣ значенія отъ q до n включительно. Этимъ уравненіямъ можно придать видъ:

$$X_p+C_p\alpha+D_p\beta+\ldots+N_p\mu=0\ \ldots\ldots\ (53),$$

$$Y_p+C_p\beta+D_p\gamma+\ldots+N_p\nu=0\ \ldots\ldots\ (54),$$

гдѣ $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots$ — дроби, у которыхъ знаменатель — опредѣлитель (55), а числитель есть минусъ опредѣлитель, получаемый изъ

$$\begin{vmatrix} C, & D, & E, & \ldots\ldots & N, & 0 \\ 0, & C, & D, & \ldots\ldots & M, & N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_{q-1}, & D_{q-1}, & E_{q-1}, & \ldots & N_{q-1}, & 0 \\ 0, & C_{q-1}, & D_{q-1}, & \ldots & M_{q-1}, & N_{q-1} \end{vmatrix} \ldots\ldots\ldots (55)$$

замѣною одного столбца столбцомъ $X, Y, X_1, Y_1, \ldots X_{q-1}, Y_{q-1}$.

Изъ n уравненій (51) и (52) легко исключить $\frac{n}{2}$ неизвѣстныхъ функцій $f_q, f_{q+1}, \ldots f_n$, и тогда получимъ вмѣсто n уравненій, въ которыя входятъ производныя только перваго порядка n неизвѣстныхъ функцій, такія $\frac{n}{2}$ уравненій съ $\frac{n}{2}$ неизвѣстными функціями, которыя содержатъ производныя перваго и втораго порядка неизвѣстныхъ функцій. Для вывода этихъ уравненій предположу, что $f_1, f_2, \ldots f_{q-1}$ извѣстны; тогда на уравненія (53) и (54) можно смотрѣть какъ на два совмѣстныя линейныя уравненія съ одною неизвѣстною функціею; неизвѣстныя функціи $f_q, f_{q+1}, \ldots f_n$ будутъ интегралами этихъ двухъ уравненій; легко также замѣтить, что $f, f_1, f_2, \ldots f_{q-1}$ —тоже интегралы этихъ двухъ уравненій. Условій полной совмѣстности уравненій (53) и (54) будетъ всего $n+1$, такъ какъ остальныя условія суть тождества; вотъ эти $n+1$ условій:

$$G(\beta) = F(\alpha),\ G(\gamma) = F(\beta), \ldots\ldots\ G(\nu) = F(\mu) \ldots\ldots (56).$$

Теорема 4. Достаточно удовлетворить $\frac{n}{2}$ условіямъ изъ (56), и тогда вообще остальныя $\frac{n}{2}+1$ условій удовлетворяются въ силу первыхъ $\frac{n}{2}$.

Доказательство. Сдѣлаю операцію F надъ каждымъ изъ q первыхъ равенствъ въ (49) и операцію G надъ каждымъ изъ q первыхъ въ (50) и вычту каждое изъ тождествъ, получаемыхъ изъ (50), изъ тождества, полученнаго операціею F изъ того равенства (49), которое по порядку, въ какомъ оно мною написано на страницѣ 189 между равенствами (49), то же, что и вычитаемое между (50); тогда я послѣ нѣкоторыхъ сокращеній получу $\frac{n}{2}+1$ тождествъ вида:

$$C_s[G(\beta) - F(\alpha)] + D_s[G(\gamma) - F(\beta)] \ldots + N_s[G(\nu) - F(\mu)] = 0 \quad (57),$$

гдѣ s имѣетъ всѣ значенія отъ 0, точнѣе ничего, до $q-1=\frac{n}{2}$. Если теперь $\frac{n}{2}$ изъ уравненій (56) удовлетворены, то $\frac{n}{2}+1$ тождествъ (57) показываютъ, что остальныя $\frac{n}{2}+1$ удовлетворены, что и требовалось доказать.

Изъ всего предъидущаго слѣдствіе: если найдены $\frac{n}{2}$ функцій, удовлетворяющихъ (56), то нахожденіе полнаго интеграла зависитъ отъ интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ уравненій:

$$dz^n = \alpha dx + \beta dy, \ldots\ldots dz_n = \mu dx + \nu dy, \ldots\ldots dq = sdx + tdy,$$
$$dp = rdx + sdy,\ dz = pdx + qdy.$$

2) *Когда n нечетно*, то для опредѣленія $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \ldots\ldots$ можно взять $q+1 = \frac{n+3}{2}$ уравненій изъ (49) и $q = \frac{n+1}{2}$ уравненій изъ (50); тогда всѣ эти $\alpha, \beta, \gamma, \delta \ldots\ldots$ опредѣлятся дробями, у которыхъ знаменатель

$$\begin{vmatrix} C, & D, & E, & \ldots\ldots & N, & 0 \\ 0, & C, & D, & \ldots\ldots & M, & N \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ 0, & C_{q-1}, & D_{q-1}, & \ldots\ldots & M_{q-1}, & N_{q-1} \\ C_q, & D_q, & E_q, & \ldots\ldots & N_q, & 0 \end{vmatrix} \ldots\ldots (58),$$

а числители—опредѣлители, получаемые изъ (58) замѣною одного изъ столбцовъ столбцомъ $X, Y, X_1, Y_1, \ldots\ldots X_{q-1}, Y_{q-1}, X_q$ и перемѣною знака. Подставляя эти величины въ остальныя уравненія (49) и (50), получу трехъ видовъ уравненія:

$$K=\begin{vmatrix} C, & D, & E, & \ldots\ldots & N, & 0, & X \\ 0, & C, & D, & \ldots\ldots & M, & N, & Y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_q, & D_q, & E_q, & \ldots\ldots & N_q, & 0, & X_q \\ 0, & C_q, & D_q, & \ldots\ldots & M_q, & N_q, & Y_q \end{vmatrix}=0\ \ldots\ldots (59),$$

$$G=\begin{vmatrix} C, & D, & E, & \ldots\ldots & N, & 0, & X \\ 0, & C, & D, & \ldots\ldots & M, & N, & Y \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_q, & D_q, & E_q, & \ldots\ldots & N_q, & 0, & X_q \\ C_s, & D_s, & E_s, & \ldots\ldots & N_s, & 0, & X_s \end{vmatrix}=0\ \ldots\ldots (60),$$

$$F=\begin{vmatrix} C, & D, & E, & \ldots\ldots & N, & 0, & X \\ 0, & C, & D, & \ldots\ldots & M, & N, & Y \\ C_1, & D_1, & E_1, & \ldots\ldots & N_1, & 0, & X_1 \\ 0, & C_1, & D_1, & \ldots\ldots & M_1, & N_1, & Y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \\ C_q, & D_q, & E_q, & \ldots\ldots & N_q, & 0, & X_q \\ 0, & C_s, & D_s, & \ldots\ldots & M_s, & N_s, & Y_s \end{vmatrix}=0\ \ldots\ldots (61),$$

гдѣ s имѣетъ всѣ значенія отъ $q+1$ до n включительно. Всѣ эти уравненія можно короче представить такъ:

$$X_s + C_s\alpha + D_s\beta + \ldots\ldots + N_s\mu = 0 \ldots\ldots (62),$$
$$Y_s + C_s\beta + D_s\gamma + \ldots\ldots + N_s\nu = 0 \ldots\ldots (63).$$

Если принимать $f_1, f_2, \ldots f_q$ за величины уже извѣстныя, то уравненія (62) и (63) можно разсматривать какъ два совмѣстныя уравне-

нія, для которыхъ надо найти $n-q$ общихъ частныхъ интеграловъ; $q+1$ же общихъ интеграловъ уже найдены. Условія полной совмѣстности этихъ уравненій будутъ опять (56); но для этого случая теорема 4-ая измѣнится въ нижеслѣдующую теорему.

Теорема 5. Достаточно удовлетворить $\frac{n-1}{2}$ условіямъ изъ (56) и уравненію (59), и тогда остальныя условія (56) будутъ удовлетворены.

Доказательство то же, что́ и въ теоремѣ 4-ой.

Слѣдовательно въ этомъ случаѣ мы можемъ замѣнить рѣшеніе n уравненій вида (59), (60) и (61) рѣшеніемъ одного уравненія (59), содержащаго только производныя перваго порядка неизвѣстныхъ функцій, и $\frac{n-1}{2}$ уравненій вида (56), содержащихъ и производныя перваго порядка, и производныя втораго порядка, вторыя въ первой степени.

Теорема 6. Если $V = f_p$—интегралъ одной изъ системъ (29), то два уравненія (51) и (52) тождественны.

Доказательство. Изъ уравненій (29) легко выводятся слѣдующія тождества:

$$\left.\begin{array}{l} D_p - u_p C_p = \dfrac{D}{C} C_p + \dfrac{C}{[u_p^{n-1}]} N_p, \\ E_p - u_p C_p = \dfrac{E}{C} C_p + \dfrac{D}{[u_p^{n-1}]} N_p, \\ H_p - u_p E_p = \dfrac{H}{C} C_p + \dfrac{E}{[u_p^{n-1}]} N_p, \\ \ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots\ldots \\ M_p - u_p L_p = \dfrac{M}{C} C_p + \dfrac{L}{[u_p^{n-1}]} N_p, \\ N_p - u_p M_p = \dfrac{N}{C} C_p + \dfrac{M}{[u_p^{n-1}]} N_p, \\ X_p - u_p Y_p = \dfrac{X}{C} C_p + \dfrac{Y}{[u_p^{n-1}]} N_p \end{array}\right\} \ldots\ldots (64).$$

Помножу уравненіе (54) на u_p и вычту его изъ (53):

$$X_p - u_p Y_p + C_p \alpha + (D_p - u_p C_p)\beta + (E_p - u_p D_p)\gamma + \dots + \\ + (N_p - u_p M_p)\mu - u_p N_p \nu = 0.$$

Это равенство на основаніи равенствъ (64) легко преобразовать въ слѣдующее:

$$\frac{C_p}{C}\{C\alpha + D\beta + E\gamma + \dots\dots + M\lambda + N\mu + X\}$$

$$-\frac{u_p}{N}N_p\{C\beta + D\gamma + E\delta + \dots\dots\dots + N\nu + Y\} = 0.$$

Но $\alpha, \beta, \gamma, \delta, \dots\dots \mu, \nu$ опредѣлены изъ q первыхъ уравненій (49) и (50), между которыми находятся и двѣ производныя даннаго уравненія $f = 0$; слѣдовательно оба выраженія, стоящія въ скобкахъ въ послѣднемъ равенствѣ, тождественно равны нулю; т. е. послѣднее равенство — тождество, каковы бы ни были значенія $f_1, f_2, \dots f_{q-1}$. Если же это равенство—тождество, то (53) тождественно съ (54).

Замѣчаніе. Таже теорема вѣрна и для двухъ уравненій (60) и (61), если $V = f_2$ — интегралъ одной изъ системъ (29).

Теорема 7. Если $V = f_1$ — интегралъ одной изъ системъ (29), то уравненія (51), (52), (59), (60) и (61) — тождества.

Доказательство. Докажу эту теорему только для уравненія (52), такъ какъ для остальныхъ доказательство совершенно такое же. Помножу первую строчку опредѣлителя, стоящаго въ первой части (52), на $C_1 : C$, а вторую на $N_1 : [u_1^{\,n-1}]$; этимъ мы не нарушаемъ равенства, такъ какъ такое умноженіе тождественно съ умноженіемъ всего опредѣлителя на $C_1 N_1 : C[u_1^{\,n-1}]$. Замѣню далѣе первую строчку суммою двухъ первыхъ; опять можно это сдѣлать, такъ какъ это значитъ, что къ данному опредѣлителю прибавляется такой, у котораго двѣ строчки равны. Въ такъ измѣненномъ опредѣлителѣ умножу четвертую строчку на u_1 и замѣню третью строчку разностью третьей и четвертой строчекъ. Тогда я получу опредѣлитель съ двумя равными строчками: первою и третьею. Въ самомъ дѣлѣ, первые члены въ обѣихъ строчкахъ C_1; предпослѣдніе члены $N_1 N : [u_1^{\,n-1}]$ и $-u_1 N_1$, ве-

личины равныя; остальные же члены въ обѣихъ строчкахъ суть вторыя части уравненій (56), въ которыхъ p сдѣланъ равнымъ единицѣ, что̀ и требовалось доказать.

Теорема 8. Если въ опредѣлителяхъ (51), (52), (60), (61) и (59) f замѣненъ f_k, и f_k, f_1 и f_2 — три рѣшенія различныхъ трехъ системъ (29), то такой опредѣлитель тождественно равенъ нулю.

Доказательство. Возьму опредѣлитель (52); по замѣнѣ f черезъ f_k онъ принимаетъ слѣдующій видъ:

$$T = \begin{vmatrix} C_k, D_k, E_k, \dots\dots\dots\dots N_k, 0, & X_k \\ 0, \ C_k, \ D_k, \dots\dots\dots\dots M_k, N_k, & Y_k \\ C_1, D_1, E_1, \dots\dots\dots\dots N_1, 0, & X_1 \\ 0, \ C_1, \ D_1, \dots\dots\dots\dots M_1, N_1, & Y_1 \\ C_2, D_2, E_2, \dots\dots\dots\dots N_2, 0, & X_2 \\ 0, \ C_2, \ D_2, \dots\dots\dots\dots M_2, N_2, & Y_2 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & \end{vmatrix}$$

Не измѣняя величины этого опредѣлителя, мы можемъ первую и третью строчки замѣнить строчками слѣдующаго вида:

C_p, всѣ вторыя части равенствъ (64), $\dfrac{NN_p}{[u_p^{\,n-1}]}$ и $\dfrac{X}{C}C_p + \dfrac{YN_p}{[u_p^{\,n-1}]}$,

замѣнивъ предварительно p для первой строчки черезъ k, а для третьей черезъ 1. Но такой опредѣлитель равенъ суммѣ четырехъ опредѣлителей:

$$T = T_1 + T_2 + T_3 + T_4.$$

Я напишу подробно только T_1 и T_2:

$$T_1 = \frac{C_k C_1}{C^2}\begin{vmatrix} C, D, E, \dots\dots\dots N, & 0, & X \\ 0, C_k, D_k, \dots\dots\dots M_k, & N_k, & Y_k \\ C, D, E, \dots\dots\dots N, & 0, & X \\ 0, C_1, D_1, \dots\dots\dots M_1, & N_1, & Y_1 \\ \dots\dots\dots\dots\dots\dots\dots & & \end{vmatrix},$$

$$T_2 = \frac{C_k u_1}{C}\begin{vmatrix} C, & D, & E, & \ldots\ldots & N, & 0, & X \\ 0, & C, & D, & \ldots\ldots & M, & N, & Y \\ 0, & C_k, & D_k, & \ldots\ldots & M_k, & N_k, & Y_k \\ 0, & C_1, & D_1, & \ldots\ldots & M_1, & N_1, & Y_1 \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots\ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{vmatrix}.$$

Легко замѣтить, что $T_1 = 0$. Если же назовемъ опредѣлитель, входящій въ T_2, черезъ S, то

$$T_2 = \frac{C_k u_1 S}{C}.$$

Что̀ касается до T_3 и до T_4, то легко доказать, что

$$T_3 = -\frac{C_1 u_k S}{C} \text{ и } T_4 = 0.$$

Итакъ, если f_k и f_1—рѣшенія двухъ различныхъ системъ (29), то

$$T = (C_k u_1 - C_1 u_k)\frac{S}{C}.$$

Если же и f_2—рѣшеніе третьей изъ системъ (29), то $S=0$; слѣдовательно теорема доказана.

Теорема 9. Если одна строчка какого нибудь опредѣлителя состоитъ изъ производныхъ f, а двѣ строчки изъ производныхъ f_k, при чемъ f_k— рѣшеніе одной изъ системъ (29); то такой опредѣлитель отличается только множителемъ отъ опредѣлителя, въ которомъ двѣ строчки заняты производными f, а одна строчка производными f_k [1]).

Доказательство. Одну изъ строчекъ съ производными f_k въ первомъ опредѣлителѣ можно замѣнить вторыми частями уравненій

[1]) Строчки предполагаются двухъ видовъ:

$$C_p, D_p, E_p, \ldots\ldots\ldots\ldots N_p, 0, \quad X,$$
$$0, \ C_p, D_p, \ldots\ldots\ldots\ldots M_p, N_p, Y;$$

при этомъ двухъ вполнѣ одинаковыхъ строчекъ въ опредѣлителяхъ не встрѣчается.

(64); а такой опредѣлитель равенъ суммѣ $\alpha S_1 + \beta S_2$, гдѣ α и β равны $\frac{C_k}{C}$ и $\frac{N_k}{[u_k^{n-1}]}$, S_1 и S_2 — опредѣлители съ двумя строчками, содержащими производныя f, и одною строчкою, содержащею производныя f_k. Смотря по тому, какова была строчка съ производными f, входящая въ первый опредѣлитель, или S_2, или S_1 будетъ равенъ нулю. Такимъ образомъ данный опредѣлитель равенъ или αS_1, или βS_2, что̀ и требовалось доказать.

Непосредственное слѣдствіе теоремъ 6, 7, 8 и 9 состоитъ въ томъ, что въ случаѣ, когда нѣкоторыя изъ системъ (29) даютъ интегралы, для составленія совмѣстныхъ уравненій, которымъ должны удовлетворять искомые интегралы, можно брать оба уравненія группъ (49) и (50) съ производными f и по одному уравненію съ производными уже извѣстныхъ интеграловъ; уравненія же съ производными неизвѣстныхъ интеграловъ надо брать всѣ, и тогда получимъ всѣ различимыя условія.

Примѣню эти теоремы къ тѣмъ случаямъ, когда нѣкоторые изъ интеграловъ системъ (29) найдены.

Начну съ легчайшаго случая: пусть только одна система не имѣетъ интеграла, содержащаго производныя n-го порядка. Въ такомъ случаѣ всѣ опредѣлители равны нулю, кромѣ того, который получится отъ исключенія α, β, γ, δ, ... μ и ν (страница 189) между двумя производными даннаго уравненія, всѣми (49) уравненіями и двумя уравненіями съ производными неизвѣстнаго интеграла; другіе же способы исключенія дадутъ или тождества, или уравненія, тождественныя (на основаніи 6 и 9 теоремъ) съ описаннымъ нами. Такимъ образомъ неизвѣстный интегралъ долженъ удовлетворять одному линейному уравненію перваго порядка.

Если двѣ изъ системъ (29) не даютъ интеграловъ, то можно составить два различные опредѣлителя, тождественно не равные нулю. Въ одинъ изъ этихъ опредѣлителей будетъ входить строчка $C_n, D_n, E_n, \ldots\ldots N_n, 0, X_n$, а въ другой $0, C_n, D_n, \ldots\ldots\ldots M_n, N_n, Y_n$ (предполагаю f_n и f_{n-1} неизвѣстными интегралами). Разсматривая эти уравненія какъ два линейныя, въ которыхъ одна неизвѣстная функція, я приду къ уравненіямъ (56), въ которыхъ G и F обозначаютъ операціи, совершаемыя въ только что описанныхъ уравненіяхъ надъ f_n; въ этихъ уравненіяхъ $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \mu, \nu$ замѣнены величинами, опредѣленными изъ всѣхъ уравненій (49), кромѣ послѣдняго, изъ перваго и предпослѣдняго изъ (50). Можно доказать, что достаточно удовлетворить одному изъ (56). Такимъ образомъ задача приводится къ нахожденію одного частнаго интеграла уравненія втораго порядка, а потомъ къ нахожденію частнаго интеграла двухъ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій перваго порядка.

Наконецъ разсмотрю общій случай, когда извѣстны m интеграловъ, опредѣленныхъ изъ (29), а надо найти остальные $n-m$ интеграловъ, не даваемые системами (29). Составлю опредѣлители такимъ образомъ, чтобы въ каждый опредѣлитель входили двѣ строчки съ производными f и по одной строчкѣ съ производными $f_1, f_2, f_3, \ldots f_m$. Кромѣ того, если $n-m$ четно, то въ каждый опредѣлитель будутъ входить по двѣ строчки съ производными

$$f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\ldots f_{m+\frac{n-m}{2}};$$

различаться же будутъ всѣ эти опредѣлители одною строчкою, которая различна для различныхъ опредѣлителей; эта строчка будетъ состоять изъ производныхъ какой нибудь изъ функцій

$$f_{m+\frac{n-m}{2}+1}, \ldots\ldots f_n.$$

Если же $n-m$ нечетно, то одинъ изъ опредѣлителей составится, когда будемъ брать по двѣ строчки производныхъ

$$f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\ldots f_{m+\frac{n-m+1}{2}};$$

всѣ же остальные опредѣлители въ этомъ случаѣ будутъ содержать по двѣ строчки изъ производныхъ отъ каждой изъ функцій

$$f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\ldots f_{m+\frac{n-m-1}{2}}$$

и одну строчку съ производными

$$f_{m+\frac{n-m+1}{2}};$$

различаться же между собою эти остальные опредѣлители опять, какъ и въ случаѣ $n-m$ четнаго, будутъ только одною строчкою, которая будетъ состоять изъ производныхъ какой либо изъ функцій

$$f_{m+\frac{n-m+3}{2}}, \ldots\ldots f_n.$$

Во всякомъ случаѣ получаются $n-m$ уравненій съ $n-m$ неизвѣстными функціями.

Опять рѣшеніе этихъ уравненій можемъ замѣнить рѣшеніемъ (56) съ тѣмъ, чтобы послѣ отысканія $\frac{n-m}{2}$ неизвѣстныхъ функцій, удовлетворяющихъ $\frac{n-m}{2}$ уравненіямъ изъ группы (56), найти $\frac{n-m}{2}$ частныхъ интеграловъ, общихъ двумъ вполнѣ совмѣстнымъ уравненіямъ перваго порядка; это въ случаѣ $n-m$ четнаго. Въ случаѣ же $n-m$ нечетнаго рѣшеніе $n-m$ уравненій перваго порядка замѣняется рѣшеніемъ одного уравненія перваго порядка и $\frac{n-m-1}{2}$ уравненій втораго порядка. Чтобы оправдать эти мои слова, докажу двѣ теоремы.

Теорема 10. Если для $n-m$ четнаго удовлетворены $\frac{n-m}{2}$ изъ уравненій (56), въ которыхъ G и F обозначаютъ опредѣлители, составленные, какъ описано выше; то остальныя уравненія (56) тоже удовлетворятся. [1])

Доказательство. Теорема 6-ая вѣрна независимо отъ того, какія строчки, кромѣ содержащей производныя f_p, входятъ въ уравненія (51) и (52). Поэтому, если въ опредѣлители G и F входитъ строчка, содержащая X_p, а не входитъ строчка, содержащая Y_p (f_p—интегралъ одной изъ системъ (29)), то $\alpha, \beta, \gamma, \ldots\ldots \nu$, опредѣленные какъ разсказано выше, обращаютъ въ тождество и то изъ уравненій (50), которое содержитъ Y_p. Послѣ этого ясно, что въ разбираемомъ случаѣ послѣ замѣны $\alpha, \beta, \gamma, \ldots \nu$ частными двухъ опредѣлителей, составленныхъ, какъ описано на страницѣ 191, изъ двухъ строчекъ съ производными f, изъ одной строчки съ производными

---

[1]) Опредѣлители G и F можно иначе выразить такъ:

$$X_x + C_x\alpha + D_x\beta + \ldots\ldots + N_x\mu,\quad Y_x + C_x\beta + D_x\gamma + \ldots\ldots + N_x\nu.$$

каждой изъ функцій $f_1, f_2, \ldots f_m$ и изъ двухъ строчекъ съ производными каждой изъ функцій

$$f_{m+1}, f_{m+2}, \ldots\ldots f_{m+\frac{n-m}{2}},$$

мы получимъ ровно $n+m+2$ тождествъ. Дѣлая надъ тѣми изъ этихъ тождествъ, которыя принадлежатъ къ уравненіямъ (49), операціи F, а надъ тождествами, встрѣчающимися въ рядѣ (50), операцію G, и вычитая попарно, я получу $\frac{n+m}{2}+1$ тождествъ вида (57). А это и показываетъ, что достаточно удовлетворить $\frac{n-m}{2}$ изъ уравненій (56).

Теорема 11. Достаточно въ случаѣ $n-m$ нечетнаго удовлетворить $\frac{n-m-1}{2}$ уравненіямъ изъ группы (56) и тому уравненію перваго порядка, въ которое входятъ двѣ строчки съ производными $f_{m+\frac{n-m+1}{2}}$, чтобы остальныя $\frac{n+m+3}{2}$ уравненій изъ группы (56) тоже удовлетворялись.

Доказательство то же, что́ и въ теоремѣ 10-ой.

Когда въ случаѣ $n-m$ четнаго удовлетворю уравненіямъ (56), то продолженіе интеграціи состоитъ въ нахожденіи $\frac{n-m}{2}$ интеграловъ двухъ вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій, для которыхъ уже извѣстны $\frac{n+m}{2}+1$ интеграловъ; говорится, понятно, объ интегралахъ, содержащихъ производныя n-го порядка. Также въ случаѣ $n-m$ нечетнаго, послѣ того какъ удовлетворены уравненія (56) и то уравненіе перваго порядка, о которомъ говорено въ теоремѣ 11-ой, надо будетъ найти $\frac{n-m-1}{2}$ интеграловъ двухъ линейныхъ уравненій, для которыхъ уже извѣстны $\frac{n+m+1}{2}+1$ интеграловъ. Послѣ этого въ обоихъ случаяхъ останется интегрировать вполнѣ совмѣстныя уравненія (30).

Впрочемъ можно искать всѣ интегралы двухъ вышеупомянутыхъ вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій.

Также можно, удовлетворя (56), приступать къ интеграціи вполнѣ совмѣстныхъ уравненій:

$$dz^n = A(z^n)dx + A(z_1^{\,n-1})dy, \ldots\ldots dz_n = A(\dot{z}_n)dx + B(z_n)dy \quad (65)$$

и уравненій (30); изъ уравненій (65) нѣкоторыя излишни.

Въ случаѣ линейности даннаго уравненія, или билинейности (смотри сочиненіе Петерсона, IX томъ, выпускъ 1-й, Математическаго Сборника) можно вывести формулы, аналогичныя предъидущимъ, и не прибѣгая къ повышенію порядка даннаго уравненія. Такія же формулы можно вывести и для нелинейнаго уравненія; но въ нихъ будетъ входить общій знакъ функціи, и полученныя въ такомъ случаѣ уравненія не будутъ первой степени относительно различныхъ производныхъ. Такъ какъ линейныя уравненія можно разсматривать какъ билинейныя, въ которыхъ коэффиціенты у билинейныхъ членовъ равны нулю, то я выведу формулы только для билинейнаго уравненія.

Обозначая черезъ $a_1, a_2, a_3, \ldots\ldots a_{n+1}$ производныя n-го порядка функціи z, я могу выразить билинейное уравненіе такъ:

$$B + A_1 a_1 + A_2 a_2 + A_3 a_3 + \ldots\ldots\ldots + A_{n+1} a_{n+1} +$$
$$+\sum_{m=2}^{m=n} N_m(a_{m-1}a_{m+1} - a_m^2) - \sum_{m=2}^{m=n-1} M_m(a_m a_{m+1} - a_{m+2}a_{m-1})$$
$$-\sum_{m=2}^{m=n-2} L_m(a_m a_{m+2} - a_{m+3}a_{m-1}) - \ldots\ldots = 0 = f \ldots\ldots (66),$$

гдѣ $B, A_1, A_2, \ldots\ldots A_{n+1}, N_m, M_m, L_m, \ldots\ldots$ — функціи x y, z и производныхъ функціи z отъ перваго до $n-1$-го порядковъ.

Пусть

$$f_1 = \alpha_1,\ f_2 = \alpha_2,\ f_3 = \alpha_3, \ldots\ldots f_n = \alpha_n \ldots\ldots \quad (67)$$

($\alpha_1, \alpha_2, \ldots\ldots \alpha_n$ произвольныя постоянныя) — n первыхъ интеграловъ уравненія (66). Продифференцирую каждое изъ этихъ уравненій относительно x и y и буду употреблять по прежнему сокращенныя обозначенія X, Y, C, D, E, ... K, подразумѣвая подъ двумя первыми буквами производныя отъ f по x и y въ томъ предположеніи, что производныя функціи n — 1-го порядка z не измѣняются, а подъ C, D, E, ... K производныя отъ f относительно производныхъ n—1-го порядка z. Каждое изъ уравненій (67) дастъ два уравненія:

$$X_p + C_p a_1 + D_p a_2 + E_p a_3 + \ldots\ldots + K_p a_n = 0 \ldots\ldots\ldots (68),$$

$$Y_p + C_p a_2 + D_p a_3 + E_p a_4 + \ldots\ldots + K_p a_{n+1} = 0 \ldots\ldots\ldots (69);$$

въ этихъ уравненіяхъ p имѣетъ всѣ значенія отъ 1 до n.

Исключеніе изъ уравненій (66), (68) и (69) $n+1$ величинъ a_1, a_2, ... a_{n+1} дастъ намъ n уравненій съ частными производными n неизвѣстныхъ функцій. Предположу, что a_1, a_2, a_3, ... a_n опредѣлены изъ уравненій (68), а также a_2, a_3, ... a_n, a_{n+1} изъ уравненій (69). Обозначу черезъ $\triangle$ функціональный опредѣлитель

$$D\frac{f_1, f_2, f_3, \ldots\ldots\ldots f_n}{q_1, q_2, q_3, \ldots\ldots\ldots q_n} \ldots\ldots\ldots (70),$$

гдѣ q_1, q_2, q_3, ... q_n—производныя n—1-го порядка, и назову черезъ ξ_s тотъ опредѣлитель, который получается замѣною строчки изъ производныхъ по q_s строчкою X_1, X_2, X_3, ... X_n, а черезъ η_s опредѣлитель, который получается замѣною строчки производныхъ по q_s посредствомъ строчки Y_1, Y_2, Y_3, ... Y_n. Тогда имѣю

$$a_1 = -\xi_1 : \triangle,\ a_2 = -\xi_2 : \triangle = -\eta_1 : \triangle,\ a_3 = -\xi_3 : \triangle = -\eta_2 : \triangle,$$

$$\ldots\ldots a_n = -\xi_n : \triangle = -\eta_{n-1} : \triangle,\ a_{n+1} = -\eta_n : \triangle \ldots\ldots (71).$$

Вставляя въ уравненіе (66), я получаю:

$$B.\triangle = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + \ldots\ldots + A_n\xi_n + A_{n+n}\eta_n$$

$$-\frac{1}{\triangle}\sum_{m=2}^{m=n} N_m(\xi_{m-1}\xi_{m+1} - \xi^2_m) + \frac{1}{\triangle}\sum_{m=2}^{m=n-1} M_m(\xi_m\xi_{m+1} - \xi_{m+2}\xi_{m-1}) +$$

$$+\frac{1}{\triangle}\sum_{m=2}^{m=n-2} L_m(\xi_m\xi_{m+2} - \xi_{m+3}\xi_{m-1}) + \ldots\ldots$$

Разсмотрю членъ

$$\xi_{m-1}\xi_{m+1} - \xi^2_m;$$

этотъ членъ можно представить въ другомъ видѣ:

$$\xi_{m-1}\eta_m - \xi_m\eta_{m-1}.$$

Но опредѣлитель ξ_{m-1} можетъ быть выраженъ въ видѣ суммы членовъ слѣдующаго вида: нѣкоторые опредѣлители изъ $(n-2)^2$ членовъ, умноженные на

$$X_p\frac{df_s}{dq_m} - X_s\frac{df_p}{dq_m},$$

гдѣ p и s должны получать всевозможныя значенія отъ 1 до n. Опредѣлители же

$$\eta_m,\ \xi_m \text{ и } \eta_{m-1}$$

будутъ состоять изъ суммы произведеній такихъ же частныхъ опредѣлителей на другіе множители; эти множители слѣдующіе:

$$Y_s\frac{df_p}{dq_{m-1}} - Y_p\frac{df_s}{dq_{m-1}},$$

$$X_s\frac{df_p}{dq_{m-1}} - X_p\frac{df_s}{dq_{m-1}} \text{ и } Y_p\frac{df_s}{dq_m} - Y_s\frac{df_p}{dq_m}.$$

Въ свою очередь $\triangle$—такая же сумма, въ которой множимыя тѣ же, а множители

$$\frac{df_p}{dq_{m-1}}\frac{df_s}{dq_m} - \frac{df_s}{dq_{m-1}}\frac{df_r}{dq_m}.$$

Если же обозначу черезъ $(\xi_m\eta_{m-1})$ то, что получается отъ замѣны въ $\triangle$ строчки съ производными по q_m строчкою, состоящею изъ

$$X_1,\ X_2,\ \ldots . X_n,$$

и строчки съ производными по q_{m-1} строчкою, состоящею изъ

$$Y_1,\ Y_2,\ \ldots\ldots Y_n;$$

то новый опредѣлитель есть сумма произведеній, въ которыхъ множимыя будутъ тѣ же частные опредѣлители съ $(n-2)^2$ членами, а множители имѣютъ видъ:

$$Y_p X_s - Y_s X_p.$$

Но

$$\left(X_p \frac{df_s}{dq_m} - X_s \frac{df_p}{dq_m}\right)\left(Y_s \frac{df_p}{dq_{m-1}} - Y_p \frac{df_s}{dq_{m-1}}\right)$$
$$-\left(X_s \frac{df_p}{dq_{m-1}} - X_p \frac{df_s}{dq_{m-1}}\right)\left(Y_p \frac{df_s}{dq_m} - Y_s \frac{df_p}{dq_m}\right) =$$
$$-\left(\frac{df_p}{dq_{m-1}} \frac{df_s}{dq_m} - \frac{df_p}{dq_m} \frac{df_s}{dq_{m-1}}\right)(Y_p X_s - X_p Y_s).$$

Слѣдовательно

$$\xi_{m-1}\xi_{m+1} - \xi^2_m = -\triangle . (\xi_m \eta_{m-1}).$$

Предъидущій выводъ не зависитъ отъ того, что обѣ замѣняемыя строчки стоятъ въ $\triangle$ рядомъ; поэтому предъидущее преобразованіе распространяется на всѣ билинейные члены. Такимъ образомъ имѣю

$$\xi_m \xi_{m+1} - \xi_{m+2}\xi_{m-1} = \eta_{m-1}\xi_{m+1} - \eta_{m+1}\xi_{m-1} = \triangle . (\xi_{m+1}\eta_{m-1}),$$
$$\xi_m \xi_{m+2} - \xi_{m+3}\xi_{m-1} = \eta_{m-1}\xi_{m+2} - \eta_{m+2}\xi_{m-1} = \triangle . (\xi_{m+2}\eta_{m-1}),$$

и т. д.

Такимъ образомъ исключеніе

$$a_1,\ a_2, \ldots . a_n,\ a_{n+1}$$

приводитъ меня къ n уравненіямъ перваго порядка и первой степени относительно производныхъ перваго порядка каждой функціи, разсматриваемой отдѣльно; вотъ эти уравненія:

$$\xi_2 = \eta_1,\ \xi_3 = \eta_2,\ \xi_4 = \eta_3, \ldots . \xi_{n-1} = \eta_{n-2},\ \xi_n = \eta_{n-1},$$
$$\triangle . B = A_1\xi_1 + A_2\xi_2 + A_3\xi_3 + \ldots\ldots + A_n\xi_n + A_{n+1}\eta_n +$$
$$+ \sum_{m=2}^{m=n} N_m . (\xi_m \eta_{m-1}) + \sum_{m=2}^{m=n-1} M_m . (\xi_{m+1}\eta_{m-1}) +$$
$$+ \sum_{m=2}^{m=n-2} L_m . (\xi_{m+2}\eta_{m-1}) + \ldots\ldots (72).$$

Для линейныхъ уравненій стоитъ только положить

$$N_m = 0,\ M_m = 0,\ L_m = 0, \ldots\ldots$$

въ послѣдней изъ формулъ (72).

Замѣчаніе. Пусть

$$f(x,y,z,p,q,r,s,t, \ldots . q_1, \ldots . q_n, a_1, a_2, \ldots . a_n, a_{n+1}) = 0 \ldots\ldots (73)$$

—нѣкоторое нелинейное уравненіе n—го порядка; тогда первыя части n промежуточныхъ интеграловъ n—1-го порядка

$$f_1 = \alpha_1,\ f_2 = \alpha_2,\ f_3 = \alpha_3, \ldots\ldots f_{n-1} = \alpha_{n-1} \text{ и } f_n = \alpha_n$$

должны удовлетворять слѣдующимъ n уравненіямъ:

$$\left.\begin{array}{l} \xi_2 = \eta_1,\ \xi_3 = \eta_2, \ldots . \xi_n = \eta_{n-1}, \\ f\left(x,y,z,p,q, \ldots q_1, \ldots q_n, -\dfrac{\xi_1}{\triangle}, -\dfrac{\xi_2}{\triangle} \ldots -\dfrac{\xi_n}{\triangle}, -\dfrac{\eta_n}{\triangle}\right) = 0 \end{array}\right\} \ldots (74).$$

Также какъ и въ предъидущихъ формулахъ, выведенныхъ для отысканія полнаго интеграла нелинейнаго уравненія, уравненія (72) можно замѣнить половиннымъ числомъ уравненій втораго порядка. Я эти уравненія не стану выводить, только объясню нѣкоторыя ихъ свойства. Тутъ должно различать два случая: случай n четнаго и случай n нечетнаго.

1) Въ случаѣ n четнаго предположу, что $n+1$ величинъ $a_1, a_2, a_3, \ldots a_{n+1}$ опредѣлены изъ уравненія (66), $\frac{n}{2}$ первыхъ уравненій (68) и $\frac{n}{2}$ первыхъ уравненій (69). Тогда, обозначая черезъ $\mathfrak{M}(V)$ и $\mathfrak{N}(V)$ операціи

$$\frac{dV}{dx} + p\frac{dV}{dz} + r\frac{dV}{dp} + \ldots + \frac{dV}{dq_1}a_1 + \frac{dV}{dq_2}a_2 + \ldots\ldots + \frac{dV}{dq_n}a_n$$

и

$$\frac{dV}{dy} + q\frac{dV}{dz} + s\frac{dV}{dp} + \ldots + \frac{dV}{dq_1}a_2 + \frac{dV}{dq_2}a_3 + \ldots\ldots + \frac{dV}{dq_n}a_{n+1}$$

и предполагая $a_1, a_2, \ldots a_n, a_{n+1}$ извѣстными, я могу разсматривать всѣ остальныя уравненія (68) и (69) какъ только два совмѣстныя линейныя уравненія, для которыхъ надо найти $\frac{n}{2}$ интеграловъ, отличныхъ отъ $\frac{n}{2}$ уже найденныхъ и содержащихъ высшія производныя $q_1, q_2, \ldots q_n$. Но это предполагаетъ полную совмѣстность такихъ двухъ уравненій, а слѣдовательно удовлетвореніе условій:

$$\mathfrak{M}(a_2)=\mathfrak{N}(a_1),\ \mathfrak{M}(a_3)=\mathfrak{N}(a_2), \ldots \ldots \mathfrak{M}(a_{n+1})=\mathfrak{N}(a_n) \ldots (75).$$

Но легко доказать, что $\frac{n}{2}$ этихъ уравненій втораго порядка удовлетворяются, если удовлетворятся $\frac{n}{2}$ остальныхъ. Итакъ рѣшеніе задачи можетъ быть измѣнено такъ: требуется найти $\frac{n}{2}$ функцій, удовлетворяющихъ $\frac{n}{2}$ уравненіямъ втораго порядка.

Найдя эти $\frac{n}{2}$ интеграловъ, требуется найти всѣ остальные интегралы двухъ вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій:

$$\frac{dV}{dx}+p\frac{dV}{dz}+\ldots\ldots+\frac{dV}{dq_1}a_1+\frac{dV}{dq_2}a_2+\ldots\ldots+\frac{dV}{dq_n}a_n=0,$$

$$\frac{dV}{dy}+q\frac{dV}{dz}+\ldots\ldots+\frac{dV}{dq_1}a_2+\frac{dV}{dq_2}a_3+\ldots\ldots+\frac{dV}{dq_n}a_{n+1}=0,$$

гдѣ $a_1, a_2, \ldots\ldots a_{n+1}$ опредѣлены изъ даннаго уравненія и изъ найденныхъ $\frac{n}{2}$ интеграловъ, приравненныхъ произвольнымъ постояннымъ.

Можно поступать и иначе: приравнявъ найденные $\frac{n}{2}$ интеграловъ произвольнымъ постояннымъ, переходить прямо къ интеграціи въ такомъ случаѣ вполнѣ совмѣстныхъ уравненій:

$$dq_1=a_1dx+a_2dy, \ldots\ldots dq_n=a_ndx+a_{n+1}dy, \ldots\ldots dp=rdx+sdy,$$
$$dz=pdx+qdy,$$

которыхъ число излишне велико, такъ какъ $\frac{n}{2}$ интеграловъ этой системы уже найдены.

2) Въ случаѣ n нечетнаго для опредѣленія $a_1, a_2, a_3, \ldots a_n, a_{n+1}$ беру $\frac{n+1}{2}$ первыхъ уравненій (68) и $\frac{n+1}{2}$ первыхъ уравненій (69). Предположу, что такія величины $a_1, a_2, \ldots a_{n+1}$ удовлетворяютъ уравненію (66). Тогда опять получаю два линейныя уравненія, которыя вполнѣ совмѣстны, если уравненія (75) удовлетворены. Но въ такомъ случаѣ я могу доказать, что достаточно удовлетворить $\frac{n-1}{2}$ уравненіямъ изъ группы (75), чтобы удовлетворились остальныя $\frac{n+1}{2}$ изъ (75). Такимъ образомъ задача приводится къ тому, чтобы удовлетворить посредствомъ $\frac{n+1}{2}$ функцій уравненію (66) (съ замѣненными a) и $\frac{n-1}{2}$ уравненіямъ втораго порядка.

Окончательная интеграція состоитъ въ полной интеграціи двухъ вполнѣ совмѣстныхъ линейныхъ уравненій, для которыхъ уже найдены $\frac{n+1}{2}$ интеграловъ.

ОПЕЧАТКИ и ПОПРАВКИ

къ статьѣ П. С. Назимова.

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Слѣдуетъ читать.*
7	5 св.	$-2\frac{d\gamma}{d\alpha}$	$-2\alpha\frac{d\gamma}{d\alpha}$
7	10 св.	$-\frac{ab}{b+x}$	$+\frac{ab}{b+x}$
14	13 св.	$p+k+1$ — ой	$p+k$ — ой
15	14 сн.	$2n-4$	$2n-2$
15	11 сн.	ихъ	данное уравненіе
15	2 сн.	составляютъ	доставляютъ
17	7 сн.	$\sum\limits_{l=3}^{l=n}$	$\sum\limits_{l=2}^{l=n}$
18	5 св.	$=dp_l$	$=dp_l$:
18	10 св.	и системы (15).	и, приравненныя произвольнымъ постояннымъ, даютъ интегралы системы (15).
18	7 сн.	(15)	(13)
28	5 сн.	$(u-u_{10})$	(u_1-u_{10})
31	6 и 9 св.	$-(u_1-u_{10})$	$+(u_1-u_{10})$
36	8 сн.	$+x^2_{10}-$	$-x^2_{10}+$
39	12 и 13 св.	однородно,	однородно относительно производныхъ z,
40	8 сн.	$\gamma\frac{\partial(\psi^\times-\psi_0)}{\partial u_l}$	$\gamma\frac{\partial(\psi^\times-\psi_0^\times)}{\partial u_l}$
43	3 св.	въ выраженіи $\frac{d\psi}{dp_3}$ уничтожить u_3.	
46	14 св.	∂_3	∂_1
47	5 сн.	x_n и α_{n0-1}	x_{n0} и α_{n-1}
48	6 св.	$\frac{\partial\chi_0}{\partial x_{n-1,0}}=\frac{\partial\chi_{00}}{\partial x_{n0}}$,	$\frac{\partial\chi_0}{\partial x_{n-1,0}}=\frac{\partial\chi_{00}}{\partial x_{n-1,0}}$,
48	12 и 13 св.	$\alpha_1, \alpha_{20}, \alpha_{300}, \alpha_{4000}\ldots x_{20}, x_{30}\ldots x_n$, между $2n-1$ уравненіями.	$\alpha_2, \alpha_{30}, \alpha_{400},\ldots x_{30}, x_{40},\ldots x_{n0}$ между $2n-3$ уравненіями.
48	17 св.	(43),	(41), (43),
50	5 св.	$\varepsilon-\alpha u_3$	$\varepsilon+\alpha-\alpha u_3$
60	7 св.	(22),	(18),
61	3 св.	данныя	дополняющіяся
61	4 св.	x, y, z, p, q, r, s и t;	x, y, z, p, q и s;

Стран.	*Строка.*	*Напечатано.*	*Слѣдуетъ читать.*
62	7 сн.	даваемымъ тремя (55).	даваемымъ $\frac{\Delta s}{\Delta x}$ и $\frac{\Delta t}{\Delta x}$ тремя (55).
68	9 сн.	равенство (63) по u, а тождество (65)	равенства (63) по u, а тождества (65)
69	4 сн.	$L\frac{dy}{dx}$	$N\frac{dy}{dx}$
73	3 сн.	недостатками	неудобствами
78	4 св.	вмѣсто $\mathfrak{X}'_t$ читай	$\mathfrak{X}'_r$
82	13 св.	найденныхъ	приравненныхъ постояннымъ
86	5 св.	$T\frac{\Delta V}{\Delta y}-\frac{\Delta f}{\Delta y}\frac{dV}{dt}=0=\mathfrak{U}_t$	$T\frac{\Delta V}{\Delta y}-\frac{T}{S}\frac{\Delta f}{\Delta x}\frac{dV}{dr}-\frac{\Delta f}{\Delta y}\frac{dV}{dt}=0$
86	6 св.	r, s и t,	r и t
86	8 св.	производной по t,	производной по t, умноженной на $-\frac{1}{\omega^2_2}$,
131	3 св.	$dc+$	$0=dc+$
133	8 сн.	$s=s$	$s=s_1$
136	11 св.	γ	γ и ∂
138	10 сн.	вмѣсто $e^{2^\alpha}, e^{-2^\alpha}, e^{2^\beta}$	читай $e^{2\alpha}, e^{-2\alpha}, e^{2\beta}$
139	2 св.		
140	1 св.		
139	5 сн.	или $\frac{d\varepsilon}{d\beta}$	или $\frac{d\varepsilon}{d\alpha}$
143	1 сн.	вмѣсто γ вездѣ читай ∂	
144	4 св.	α, β и γ	α, β и ∂
148	11 сн.	шести уравненій,	трехъ уравненій съ полными дифференціалами,
153	4 сн.	$B\left(M-\frac{\Delta\theta}{\Delta x}\right)=A\left(N-\frac{\Delta\theta}{\Delta y}\right)$.	$B\left(M+\frac{\Delta\theta}{\Delta x}\right)=A\left(N+\frac{\Delta\theta}{\Delta y}\right)$.
157	10 св.	въ 1-й формулѣ вм. ε читай ∂, и обратно.	
184	1 сн.	$+\frac{[u^{m-2}]}{[u^{m-1}]}A(z^1{}_{n-1})$	$+\frac{[u_m{}^{n-2}]}{[u_m{}^{n-1}]}A(z^1{}_{n-1})$
194	6 сн.	$E_p-u_pC_p$	$E_p-u_pD_p$
197	— —	вездѣ u_1, u_k замѣнить чрезъ $-\frac{N_1}{[u_1{}^{n-1}]}$, $-\frac{N_k}{[u_k{}^{n-1}]}$; въ подстр. примѣчаніи X, Y чрезъ X_p, Y_p.	
203	3 сн.	$+A_{n+n}\,\eta_n$	$+A_{n+1}\,\eta_n$

Примѣчаніе. Величины $u_{10}, u_{20},\ldots u_{m0}, u_{n-1,0}$, встрѣчаемыя на стр. 38, 41 и 47, суть нѣкоторыя числовыя постоянныя.