

АКАДЕМИЯ НАУК СССР  
Ордена Трудового Красного Знамени  
ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ

Е. И. НЕФЁДОВ

ДИФРАКЦИЯ  
ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ  
ВОЛН  
НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ  
СТРУКТУРАХ



---

ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»

МОСКВА

1 9 7 9

Нефёдов Е. И. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрических структурах. М.: Наука, 1979.

Монография посвящена широкому кругу вопросов математической теории дифракции электромагнитных (звуковых) волн на диэлектрических структурах. Дан обзор физических задач и схем практически применяемых устройств. Основное внимание уделено исследованию элементов конструкций, находящихся применение в квазиоптической области (миллиметровый и субмиллиметровый диапазоны).

Более подробно рассмотрены наиболее общие методы, позволяющие либо построить полное решение задачи, либо указать подход к разработке и построению удобного и эффективного вычислительного алгоритма. Впервые приведено полное геометрико-оптическое решение задачи о диэлектрическом клине. Рассмотрено применение диэлектриков для решения различных задач в закрытых и открытых волноводящих и резонансных структурах, а также задачи возбуждения волн в световодах.

Книга рассчитана на научных работников и инженеров-проектировщиков аппаратуры новых диапазонов электромагнитных колебаний. Она окажется полезной и рекомендуется аспирантам и студентам старших курсов радиофизических и радиотехнических специальностей.

Ответственный редактор  
профессор  
А. С. ИЛЬИНСКИЙ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В поистине громадном многообразии задач и проблем *математической теории дифракции* изучение процессов *отражения, преломления и рассеяния волн на прозрачных (или полупрозрачных) объектах* представляет интереснейшую область исследования. В этой книге мы рассматриваем в основном дифракцию электромагнитных (звуковых) волн пассивными линейными диэлектрическими структурами. Разумеется, общий предмет — дифракция на прозрачных и полупрозрачных телах волн различной природы (упругие, пластичные и многие другие) — охватывает значительно более обширный круг задач, чем можно рассмотреть в пределах одной книги. И хотя в поведении волн разной природы у рассматриваемых объектов много общего, нет никакой возможности объединить их изучение в одном месте. Конечно, единый подход к широкому классу физических явлений всегда очень ценен и дает в руки исследователя некий общий инструмент, но применение его зачастую оказывается столь сложным, что получение практически приемлемого результата требует и больших усилий и большого времени.

Замечательным примером общего адекватного описания широчайшего класса физических явлений служат *уравнения Максвелла*. Однако к ним необходимо присоединить ряд условий, обеспечивающих, во-первых, необходимые требования теорем существования и единственности решения (условия излучения, непрерывности, поведения поля у острых кромок, ребер и многое другое). И, во-вторых, для определения материальных констант  $\epsilon$  и  $\mu$ , входящих в уравнения Максвелла, необходимо решение более общих систем уравнений (например, получение *самосогласованных решений уравнений Максвелла и уравнений движения заряженных частиц* — в электронике, теории плазмы и др.). В теории дифракции электромагнитных волн материальные константы  $\epsilon$  и  $\mu$  — диэлектрическую и магнитную проницаемости принято считать *заданными* (постоянными или переменными во времени и пространстве) в некоторой области  $V$ , ограниченной поверхностью  $S$ . Вид области  $V$ , ее относительные к длине волны  $\lambda$  размеры и зависимости  $\epsilon = \epsilon(r, t)$  и  $\mu = \mu(r, t)$  на практике столь разнообразны, что каждый раз приходится исходя из общей постановки разрабатывать новый метод или прием, пригодный для решения данной задачи.

В данной книге, носящей в основе своей монографический характер, рассмотрен некоторый круг вопросов теории дифракции,

относящейся к различным разделам классической и современной физики: геометрическая и физическая оптика, геометрическая теория дифракции, теория открытых и закрытых волноведущих и резонансных структур, содержащих диэлектрические тела, квазиоптика и ряду других областей.

Мысль написать эту книгу возникла довольно давно. Но, как это часто бывает, осуществить задуманное по ряду причин долго не удавалось. Несколько раз менялся план книги, расположение материала, его выбор, подробности изложения различных разделов и многое другое. В определенной мере на изложение материала оказал влияние курс лекций, прочитанный автором для молодых научных сотрудников в Школе по численным методам решения задач дифракции (г. Телави, осень 1977 г.). Автору трудно судить, насколько удачен предлагаемый вариант книги, и он будет терпеливо ждать суда и приговора читателей.

В заключение мне предстоит выполнить исключительно приятную обязанность и принести искреннюю благодарность Б. З. Каценеленбауму, А. Г. Свешникову, В. П. Шестопазову и Я. Н. Фельду, с которыми в разное время обсуждались затронутые в книге вопросы.

Пункт 1.3 Введения написан автором совместно с В. Ф. Взятыхшевым. §§ 3.2 и 3.6 написаны О. К. Ильинской и содержат ряд ранее не опубликованных результатов. Некоторые численные расчеты были проделаны заново или проверены И. Е. Нефёдовым. Автор выражает В. Ф. Взятыхшеву, О. К. Ильинской и И. Е. Нефёдову глубокую благодарность.

К сожалению, среди нас уже нет замечательного человека и большого ученого — Георгия Даниловича Малюжинца. Ему принадлежит ряд классических результатов строгой теории дифракции и, в частности, дифракции в угловых областях. В конечном итоге эта книга — дань уважения памяти Г. Д. Малюжинца, обратившего мое внимание на затронутый в книге круг интересных задач.

Москва, 27.XII 1978 г.

Е. Нефёдов

## ВВЕДЕНИЕ

### § 1

#### Обзор физических задач, рассматриваемых в книге. Применение диэлектрических структур в радиофизических устройствах

1.1. *Диэлектрические структуры* представляют обширный класс материальных тел, широко используемых в самых разнообразных приложениях в радиофизике, акустике, теории упругих колебаний и в других областях. В рамках одной сравнительно небольшой по объему книги дать сколько-нибудь полный анализ всего многообразия интересных задач дифракции не представляется возможным. Поэтому отбор материала определялся в основном научными интересами автора и теми результатами, которые были получены им и его коллегами по ИРЭ АН СССР в процессе выполнения некоторых общих научно-исследовательских программ. Вместе с тем в книге в целом рассмотрено достаточно большое количество задач, позволяющих судить об уровне развития аналитических и численных методов расчета, а также описан ряд применений диэлектрических структур для решения конкретных технических задач. Некоторая часть используемых на практике структур рассматривается во введении.

Мы старались включить в рассмотрение в основном *базовые или ключевые структуры*, которые позволяют, с одной стороны, выяснить основные особенности *физической картины явления*, а с другой — являются критерием истинности различных *приближенных способов описания* дифракции у тел непростой формы.

Замечательным примером ключевой структуры является клин с идеально проводящими гранями  $S$  (в пределе он переходит в полуплоскость):

$$u \Big|_S = 0 \text{ или } \frac{\partial u}{\partial N} \Big|_S = 0, \quad N \text{ — нормаль к поверхности } S. \quad (1.1)$$

Соответствующая ключевая задача о дифракции плоской волны клином, решенная А. Зоммерфельдом, явилась фактически первой строго рассмотренной задачей математической теории дифракции

[1]. Как отмечал автор [1], при постановке задачи он вынужден был «...ограничиться самыми простыми случаями и настолько идеализировать граничные условия, что, пожалуй, можно усомниться, можно ли такую трактовку считать, с физической точки зрения, «точным решением» дифракционной задачи» (см. [1, с. 849]). Поэтому действительно решения модельных, идеализированных задач представляют интерес в первую очередь как тесты, позволяющие установить точность различных приближенных подходов, основанных на различных априорных, интуитивных, ассоциативных и т. п. соображениях. Но вместе с тем строгий подход позволяет, даже при определенной идеализации исходной постановки задачи, выяснить принципиальные особенности физики явления. Применительно к упоминавшейся задаче Зоммерфельда о дифракции на идеальной полуплоскости нулевой толщины «...здесь дело идет об углубленном понимании фундаментального факта (подчеркнуто мною. — Е. Н.) — отбрасывания тени непрозрачными телами» [1].

Желательно в идеале иметь точную теорию, которая бы описывала сколь угодно хорошо все тонкие детали физического процесса дифракции. В принципе теория Максвелла удовлетворяет таким требованиям. Однако сложность реальных условий (в достаточной степени «произвольная» форма объекта дифракции, неоднородность внутренней структуры, нелинейность свойств, дисперсия и т. п.) делают математически невозможной разрешимость полной системы уравнений Максвелла. Поэтому первым и необходимым этапом теории является разработка моделей, адекватных в некотором смысле реальной структуре. В наиболее общем плане это, например, требование линейности задачи, т. е. независимости свойств объекта от величины электромагнитного  $E$ -,  $H$ -поля, постоянства во времени, однородности и т. д. и т. п. Разумеется, каждая конкретная ситуация требует особого внимания и осторожности при формулировке исходной задачи.

Прекрасным примером в этом отношении является один классический результат, принадлежащий В. А. Фоку [2]. Рассматривая дифракцию на шаре, В. А. Фок показал, что для тел с конечной кривизной главный член в выражении для поля в области за телом выражается через интеграл Френеля. Этот главный член не зависит от материала тела. В более точном решении к этому основному члену прибавляется некоторый дополнительный, определяющий некий «фон», уже зависящий от материала тела. Таким образом, «двигаясь» последовательно, можно достигать уточнения решения «нулевого» приближения. Этот результат представляется тем более важным, что В. А. Фоку принадлежит строгая теория дифракции волн вокруг Земли [3], из которой упомянутый выше результат из [2] следует непосредственно (см. также [4, 5]).

Следующим важным для математической теории дифракции этапом развития строгой теории было обобщение Г. Д. Малюжиным метода разветвленных в пространстве Римана решений урав-

нения колебаний на случай клина с импедансными гранями [5, 6]:

$$u + w \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ на } S. \quad (1.2)$$

Импеданс  $w$  определяется свойствами поверхности граней клина. При  $|w| \Rightarrow 0$  или  $|w| \Rightarrow \infty$  приходим к идеальным граничным условиям (1.1) первого или второго рода соответственно. Граничные условия (1.2), носящие название *граничных условий Щукина — Леонтовича*, первоначально использовались для тел с очень высоким показателем преломления. С их помощью было решено большое число практических задач теории дифракции: распространение электромагнитных, звуковых, упругих и т. п. волн, задачи теории антенн и волноведущих структур в самых разных частотных диапазонах и условиях (см., например, [5—12]).

Поверхностный импеданс  $w$  может иметь сложную структуру, например, для анизотропных структур носить *тензорный характер*. Большое число примеров на применение анизотропных импедансных граничных условий, когда  $w \equiv \|w\|$  — тензор, содержится в монографии [11]. Среди практических структур, свойства которых можно достаточно полно описать с помощью анизотропных импедансных граничных условий, отметим следующие: граница раздела вакуум — анизотропная поглощающая среда, тонкий анизотропный слой на идеально проводящей плоскости, тонкие ферритовые пленки [13], частопериодические гофрированные поверхности [12] и т. п.

Отметим здесь еще один класс граничных условий вида (1.2), когда  $w$  представляет собою комплексную величину. Эти граничные условия получили название *импедансных граничных условий резонансного типа* и описывают характер поведения поля в *открытых резонансных структурах* [11, 12, 14, 15].

В более общем случае импеданс  $w$  может иметь и вид интегрально-дифференциального оператора [11, 16].

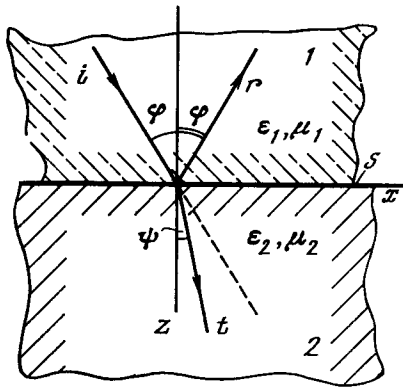
В дальнейшем мы отметим эквивалентные *двусторонние граничные условия* для диэлектрического слоя [17] и других диэлектрических структур, условия для областей с мелкозернистой границей [18] и др.

Из сложных ключевых задач для структур с анизотропными импедансными граничными условиями

$$u + \|w\| \frac{\partial u}{\partial N} = 0 \text{ на } S \quad (1.3)$$

отметим строгое решение для обобщенной задачи Зоммерфельда о дифракции волны полуплоскостью [19, 11] с граничными условиями (1.3) по обеим сторонам полуплоскости. Пока до конца удалось довести решение только для случая треугольной матрицы поверхностного импеданса  $\|w\|$ .

Широкий класс электродинамических структур, допускающих строгое решение методами теории функций комплексного пере-



Р и с. 1. Простейшая ключевая структура: плоская граница раздела двух однородных изотропных сред с постоянными коэффициентами преломления:  $i$ ,  $r$ ,  $t$  — соответственно падающий, отраженный и преломленный лучи

менно, составляют плоский и круглый волноводы, решетка из идеально проводящих эквидистантных полуплоскостей и др. [14, 12, 15, 20—24]. Эти задачи явились ключевыми при рассмотрении дифракции волн на конечных (но больших по сравнению с длиной волны) структурах типа ленты (щели), ленточного, цилиндрического, коаксиального открытых резонаторов и дифракционно связанных систем, состоящих из этих резонаторов, а также на многих других практически интересных структурах [14, 15, 25—30].

С другой стороны, точное решение ключевых задач послужило основанием для развития различных методов *физической теории дифракции* (геометрическая теория дифракции [31, 32], метод теневых токов [33], метод краевых волн [34] и многое другое), которые в существенном опираются на знание поведения поля в ключевой структуре. В дальнейшем мы подробнее остановимся на некоторых из этих методов, представляющих интерес для рассмотрения дифракции волн диэлектрическими структурами.

1.2. *Простейшие диэлектрические структуры.* Примером ключевой структуры этого типа является плоская гладкая граница раздела двух однородных сред с постоянными, но разными значениями показателя преломления (рис. 1). По существу задача о падении плоской волны на плоскую границу раздела была первой из строго решенных электродинамических задач [35—41]. В отличие от граничных условий (1.1) — (1.3), здесь (рис. 1) на границе раздела сред 1 и 2 должны быть выполнены условия непрерывности тангенциальных границе ( $\tau$ ) компонент электрического и магнитного полей  $E^{(1)}$ ,  $H^{(1)}$  и  $E^{(2)}$ ,  $H^{(2)}$ :

$$E_{\tau}^{(1)} = E_{\tau}^{(2)} \text{ и } H_{\tau}^{(1)} = H_{\tau}^{(2)} \text{ на } S. \quad (1.4)$$

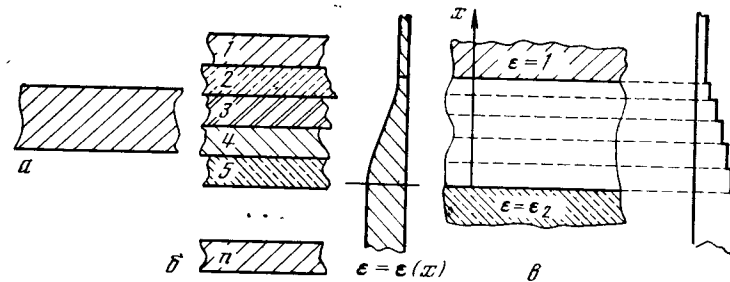
Здесь индексы 1 и 2 относятся к верхнему (1) и нижнему (2) полу-

пространствам соответственно. Граничные условия (1.4) являются точными, однако в этом состоит сложность их применения к анализу реальных конкретных диэлектрических структур. Дело в том, что, используя граничные условия типа (1.2) и отчасти (1.3), мы отвлекаемся от рассмотрения картины поля внутри тела, заменяя, таким образом, действие тела неким интегральным эффектом — *эквивалентными граничными условиями*. В ряде случаев такой подход позволяет получить приемлемые для практики результаты, в то время как решение полной задачи сплошь и рядом не представляется возможным.

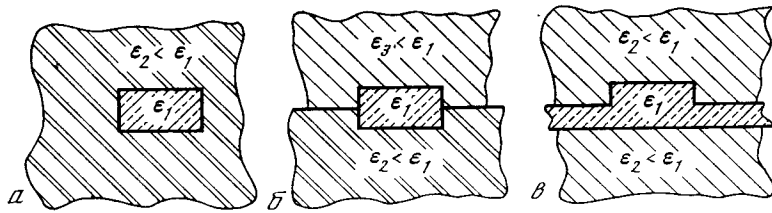
Следующей группой простейших диэлектрических структур являются *слоистые среды*. Они имеют двойной смысл: собственно слоистые среды (рис. 2, а, б) и слоистые модели сред с непрерывным распределением показателя преломления (рис. 2, в). Одно- и многослойные диэлектрические структуры находят широкое поле приложений на практике. Прежде всего это многослойные просветляющие покрытия в оптике, акустике, радиофизике и т. д. [42—46].

В последнее время большое применение и развитие находят *диэлектрические волноводы* [46—48] в основном для миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов и *световоды* [49, 50], а также *газонаполненные диэлектрические волноводы* [51].

1.3. *Диэлектрические волноводы* (ДВ) наряду с *полосковыми и микрополосковыми структурами* [30] находят широкое применение в микроэлектронике и обусловили появление целого научного направления — *интегральной оптики* [429, 426]. Устройства и линии *интегральной оптики* предназначены для использования как в оптическом, так и в микроволновом диапазонах. В этом отношении в ближайшем будущем «ожидается встреча» микрополосковых структур, развивающихся в сторону укорочения длины рабочей волны, и диэлектрических волноводов и устройств интегральной оптики, где наблюдается обратная тенденция — идет освоение все более длинноволновых диапазонов. Наиболее вероятным «ме-



Р и с. 2. Слоистые диэлектрические структуры: а — одиночный слой, б — многослойная диэлектрическая среда, в — среда с непрерывным изменением  $\epsilon = \epsilon(x)$  от  $\epsilon_1$  до  $\epsilon_2$ ; слева показан реальный профиль  $\epsilon = \epsilon(x)$ , справа — его аппроксимация слонистой структурой



Р и с. 3. Примеры диэлектрических направляющих структур — диэлектрических волноводов

стом встречи» этих двух направлений, по-видимому, окажется коротковолновая часть миллиметрового диапазона и субмиллиметровый диапазон.

В этом пункте мы дадим короткий обзор некоторых свойств ДВ и их применений. На рис. 3 приведены примеры ряда ДВ. ДВ в простейшем случае представляет собою неограниченный по ширине слой из высококачественного диэлектрика (диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_1$ ), расположенный в среде с меньшей диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  (рис. 3, а). Внешняя среда может быть неоднородной, например, может состоять из двух полупространств с  $\epsilon_2 < \epsilon_1$  и  $\epsilon_3 < \epsilon_1$  (рис. 3, б). Внешняя среда может содержать также слой с  $\epsilon_1$ , если его толщина меньше поперечного размера стержня ДВ (рис. 3, в).

Распространение волн вдоль ДВ можно трактовать либо как последовательное переотражение пучка плоских волн от границ между диэлектриками с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ , либо как переотражение поверхностной волны, распространяющейся в слое с  $\epsilon_1$ , от областей резкого изменения его толщины.

Отличие ДВ от МВ имеет глубокий физический характер и проявляется в следующем. Во-первых, отражение от границы двух диэлектриков не сопровождается диссипативными потерями, как отражение от металла. Если граница шероховатая или ось ДВ не прямолинейна, отражение сопровождается некоторым рассеянием, но соответствующие потери легко могут быть сделаны на несколько порядков меньше, чем потери при отражении от металла. Это справедливо в диапазоне частот от СВЧ до оптического диапазона.

Потери при распространении между отражениями изменяются пропорционально частоте  $f$  и могут быть существенно уменьшены подбором соответствующих материалов. Именно это обстоятельство является причиной того, что ДВ обеспечивают значительно меньшее затухание, чем металлические волноводы (МВ) на СВЧ и более высоких частотах, включая оптический диапазон.

Во-вторых, характеристики распространения и преобразования волн в ДВ определяются не поверхностным распределением токов проводимости в стенках, как в случае МВ, а объемным распределением токов поляризации в направляющем стержне ДВ.

Следствием этого являются на порядок меньшие допуски на размеры поперечного сечения ДВ по сравнению с допусками в МВ. Свойства нерегулярностей, например, в виде резких нарушений размеров и формы поперечного сечения, также кардинально отличаются от свойств подобных нерегулярностей в МВ.

И наконец, в-третьих, модуль и фаза коэффициента  $R$  (от стенки ДВ) сильно изменяются с изменением угла падения  $\varphi$ . Зависимость  $\text{Arg } R(\varphi)$  в области полного отражения  $\varphi > \arcsin \sqrt{\epsilon_2/\epsilon_1}$  приводит к специфическим зависимостям фазовой  $v_\varphi$  и групповой  $v_{gr}$  скоростей распространения от частоты. Нарушение же полного отражения при достаточно крутых углах падения (или на достаточно низких частотах при фиксированных типах волн и размерах поперечного сечения ДВ) приводит к двум важным следствиям.

Во-первых, отражения от диэлектрических нерегулярностей в ДВ оказываются необычайно малыми. Это связано с тем, что рассеянные на таких нерегулярностях лучи, прежде чем повернуть назад, испытывают несколько переотражений под крутыми углами, при этом излучение интенсивно. Борьба же с излучением технически много проще, чем с отражением. Во-вторых, на частотах ниже критической, когда отражение от стенок перестает быть полным, волны в ДВ также могут распространяться, испытывая при этом некоторое излучение. Такие волны с радиационным затуханием называются *вытекающими*. Скорость роста этого затухания с понижением частоты оказалась удивительно небольшой [426].

В сравнении с лучевыми волноводами ДВ имеют некоторое преимущество, ибо устройства на ДВ могут быть выполнены достаточно миниатюрными. При  $\epsilon_1/\epsilon_2 > 2$  размер области поля может не превышать длины волны  $\lambda$ , а радиус изгиба оси без появления заметного излучения — нескольких  $\lambda$ .

Основное применение находят ДВ с прямоугольной формой поперечного сечения. На подход к выбору формы и размеров сечения ДВ для работы в некотором диапазоне частот влияют следующие особенности собственных волн ДВ.

1. Основных типов волн (с минимальной критической частотой) у ДВ, как правило, два (у МВ — только один). Правда, у ДВ с неоднородной внешней средой критические частоты низших волн отличаются. Однако реализовать полностью одноволновый режим удается не всегда.

2. У ДВ с однородной внешней средой при приближении частоты к критической все большая доля энергии распространяется во внешней среде. Это обстоятельство позволяет получать затухания, значительно меньшие, чем затухание плоской волны в материале волновода. Вместе с тем необходимо учитывать, что при приближении к критической частоте резко ухудшаются направляющие свойства ДВ. Проявляется это в первую очередь в том, что

радиусы кривизны оси ДВ, при которых появляется заметное радиационное затухание, быстро увеличиваются.

Задача выбора критериев для определения границ рабочего диапазона включает, во-первых, выбор одного или группы критических параметров и, во-вторых, установление предельных значений этих параметров. Особенности ДВ позволяют сформулировать следующие критерии.

а) По преобразованию в волны излучения: потери на излучение при заданном уровне плавных нерегулярностей не должны превышать некоторого допустимого уровня. Это требование сводится к заданию минимально допустимой величины  $\xi_{\min}$  замедления  $\xi$  рабочего типа волны

$$\xi = \frac{c}{v_{\text{фр}} \sqrt{\epsilon_2}} - 1. \quad (1.5)$$

Указанный критерий определяет длинноволновую границу диапазона  $\lambda_{\max}$ .

б) По преобразованию в высшие типы волн: наличие в тракте либо распространяющихся, либо вытекающих \* высших типов волн не должно вызывать существенных потерь или интерференционных эффектов. Данный критерий определяет коротковолновую границу диапазона  $\lambda_{\min}$ . В зависимости от конкретной постановки задачи она оказывается либо несколько выше, либо несколько ниже критической длины волны опасного высшего типа колебаний.

в) По преобразованию в паразитный основной тип волны. Эти преобразования в основном происходят на нерегулярностях типа скрутки. Потери на преобразование в первом приближении обратно пропорциональны квадрату замедлений  $\Delta \xi = \xi_{\text{раб}} - \xi_{\text{пар}}$  рабочего и паразитного типов волн. А поскольку разность замедлений  $\Delta \xi$  имеет экстремальную частотную зависимость, указанный критерий, задавая  $\Delta \xi_{\min}$ , может определять как  $\lambda_{\max}$ , так и  $\lambda_{\min}$ .

Таким образом, выбор размеров и формы сечения ДВ в силу специфики его направляющих свойств должен осуществляться с учетом уровня наиболее характерных нерегулярностей тракта — в первую очередь изгибов и скруток.

При разработке технологии производства ДВ и методов построения устройств на них было установлено, что *прямоугольная форма поперечного сечения* обладает рядом значительных преимуществ по сравнению с другими, например, эллиптической или овальной.

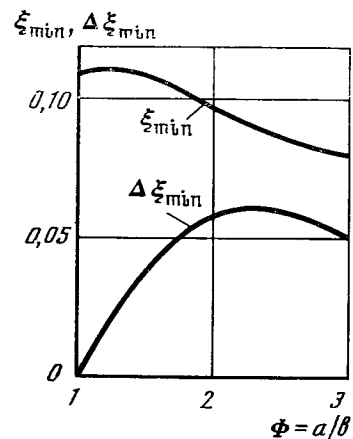
Основными типами волн ДВ являются волны  $HE_{\parallel}$  и  $HE_{\perp}$ , где символы  $\parallel$  и  $\perp$  соответствуют основным волнам  $HE_{\parallel}$  и  $HE_{\perp}$ ,

поляризованным параллельно и перпендикулярно широкой грани ДВ. Было показано, что диапазонность  $D = \lambda_{\max}/\lambda_{\min}$  у волны  $HE_{\parallel}$  всегда больше, чем у волны  $HE_{\perp}$ . Таким образом, в качестве рабочего типа волны более целесообразно использовать тот основной тип, где электрическое поле параллельно широкой грани сечения ДВ.

Выбор оптимального размера сечения. На рис. 4 показаны зависимости  $\xi_{\min}$  и  $\Delta \xi_{\min}$  от формата  $\Phi$  сечения ДВ ( $\Phi = a/b$ ) для рабочего типа волны  $HE_{\parallel}$  и величины  $D = 1,5$ , соответствующей стандартным диапазонам миллиметровых волн. Величина  $\lambda_{\min}$  выбрана из условия, чтобы замедление  $\xi_b$  ближайшего высшего типа волны было равно 0,02. Хотя вблизи  $\lambda_{\min}$  высший тип волны и может распространяться, он будет весьма неустойчив, так что изгибы и скрутки приведут к большому излучению энергии этой волны. Кроме того, структура поля этой волны сильно отличается от структуры поля рабочего типа, что уменьшает взаимное преобразование.

Волновод широкого применения может подвергаться как изгибам, так и скруткам. Для изгибов желательно иметь максимум  $\xi_{\min}$ , а для скруток — максимум  $\Delta \xi_{\min}$ . Из рис. 4 следует, что приходится выбирать компромиссное значение формата  $\Phi$ . Значение около двух наиболее удобно.

Расширение областей применения технических устройств коротковолновой части СВЧ и оптического диапазонов (ОД) предъявляет повышенные требования к габаритам и весу аппаратуры, к устойчивости ее по отношению к внешним воздействиям — механическим и климатическим (вибрации, температура, влаж-



Р и с. 4. К выбору оптимального соотношения размеров (формата  $\Phi$ ) сечения прямоугольного диэлектрического волновода ( $D = 1,5$ ;  $\epsilon = 2,3$ )

\* «Вытекание» может быть вызвано либо тем, что частота ниже критической для данного типа волны, либо непрямолинейностью оси волновода, либо наличием во внешней среде конструктивных или специальных фильтрующих диэлектрических элементов.

ность и др.). Желательно также одновременно снижать стоимость производства и трудоемкость настройки и эксплуатации.

Перечисленные требования применительно к сравнительно низкочастотным схемам привели к возникновению и расцвету *интегральной технологии* и созданию *интегральных схем* (ИС). В СВЧ-диапазоне принципиальная возможность создания ИС появилась с изобретением и внедрением *микророскопических линий* и последовавшим за этим продвижением полупроводниковых генерирующих, усиливающих и управляющих приборов вплоть до сантиметрового диапазона. Продвижению техники микророскопических линий в ММ-диапазон и далее препятствуют чрезмерно большое затухание в таких линиях и очень высокие требования к точности выполнения.

Идея диэлектрических ИС (ДИС) — схем из ДВ, вида рис. 5, выполненных в едином блоке подложки с  $\epsilon_2$ , — впервые, по-видимому, была сформулирована применительно к ОД волн в 1969 г. [49]. Направление, изучающее ДИС ОД, получило название *интегральной оптики* (ИО).

Когда ДВ имеют малые, сравнимые с  $\lambda$ , размеры только в одном направлении, т. е. имеют вид пленок, используется также термин «*планарная оптика*». Волны в планарных ДВ являются собственно направляемыми волнами только в направлении, перпендикулярном плоскости пленки; в плоскости же пленки они являются свободно распространяющимися волновыми пучками. По существу до последнего времени подавляющее большинство работ по ДВ для ДИС ОД посвящено именно планарным моделям.

Можно указать по крайней мере две причины такого положения. Во-первых, планарные ДВ много проще технологически. У ДВ с малыми размерами в двух направлениях существующими

технологическими приемами трудно обеспечить хорошее качество поверхности и точный размер в направлении, параллельном плоскости подложки. Во-вторых, большая часть экспериментальных работ в ОД проводится с лазерами, выходные волновые пучки которых имеют большую протяженность в двух направлениях. Устройства для преобразования таких пучков в волну планарного ДВ выполняются легче.

В последние годы появились предложения выполнять ИС ММ-диапазона на основе ДВ на подложке, т. е. примерно так, как это делается в ИО. Интересно, что здесь явно заметно заимствование идей ДИС ОД, хотя ДВ были созданы сначала для СВЧ и только потом был сделан переход к оптическому диапазону. Основной причиной такого «забегания вперед» техники ДИС ОД является, вероятнее всего, то обстоятельство, что в оптическом диапазоне ДВ является практически единственной линией передачи когерентного излучения. На ММ-волнах необходимость создания ИС до последнего времени сдерживалась отсутствием твердотельных генераторов. Только с их разработкой появилась возможность реализовать потенциальные преимущества ММ-волн — резкое сокращение габаритов радиосистем.

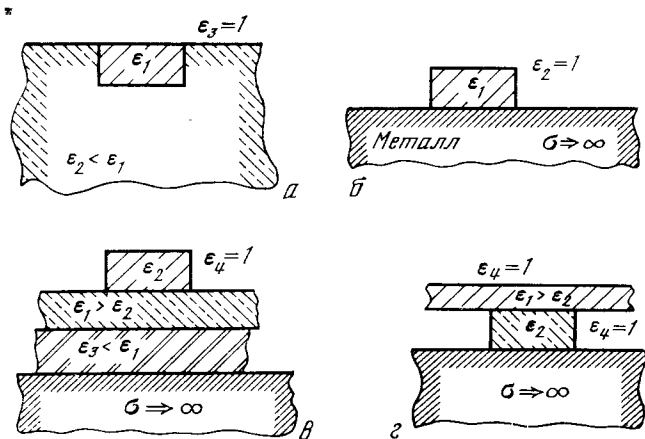
В электродинамическом отношении ДИС ММ и ОД имеют много общего. Однако количественное (на 4 порядка!) отличие частот, различие (на несколько порядков!) относительных (в  $\lambda$ ) размеров устройств и изменение свойств и даже состава материалов не могут не привести и к существенным различиям.

Остановимся на некоторых проблемах ДИС ММ-волн. Одна из основных задач конструирования ДИС — сокращение габаритов. Последние ограничиваются габаритами нерегулярных участков, в первую очередь изгибов [47, 426—429]. Допустимые радиусы изгибов  $R_{из}$  зависят в основном от замедления  $\xi$  (1.5). До сих пор применялись два варианта ДВ: с малым замедлением ( $\xi \leq 0,01$ ), которые практически не допускают изгибов, и со средним замедлением ( $\xi \geq 0,10$ ) — волноводы серии ПДВ, которые при работе в диапазоне частот с  $D = 1,5$  допускают  $R_{из} \geq 20\lambda$ .

Возможность резкого уменьшения  $R_{из}$  основана на весьма сильной зависимости  $R_{из}$  ( $\epsilon_1$ ). Расчеты [47] и эксперименты показывают, что уже при  $\epsilon_1 = 4$  ДВ без высших типов волн может иметь  $\xi = 0,35—0,45$ , что допускает изгибы с излучением не более 0,05 дБ/рад при  $R_{из} \geq 2,5\lambda$ .

Особенностью ДИС СВЧ является возможность использования наряду с диэлектрической (рис. 5, а) также и металлической подложки (рис. 5, б). Анализ дисперсионных характеристик ДВ на такой подложке показывает, что высшие типы в нем возникают при больших размерах стержня ДВ и при больших замедлениях основного, рабочего типа. Это позволяет либо уменьшить  $R_{из}$ , либо увеличить  $D$  по сравнению с ДВ без подложки.

Недостатком такого ДВ обычно считается весьма большое дополнительное линейное затухание за счет токов проводимости



Р и с. 5. Диэлектрические волноводы на металлических и комбинированных подложках



в подложке. Однако в миниатюрных устройствах, имеющих малые суммарные длины ДВ, линейное затухание играет второстепенную роль. Более того, полные потери в ДИС на металлической подложке, содержащих изогнутые участки, могут даже уменьшиться из-за отмеченной выше возможности уменьшения  $R_{и}$ .

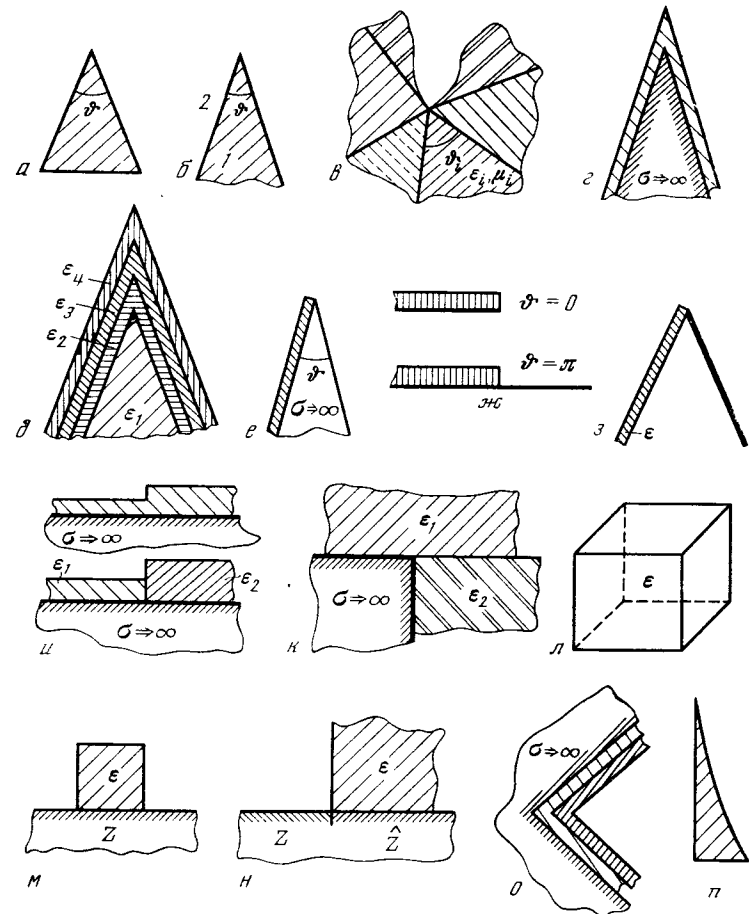
Изучение свойств ДВ на диэлектрической подложке, называемых иногда также композиционными ДВ, показало, что, меняя геометрию и материалы подложки, можно менять свойства таких ДВ в широких пределах и добиться такого их сочетания, которое невозможно у ДВ без подложки. Замедление волны  $\xi$  по отношению к воздуху уже не является в этом случае основным параметром. Излучение с изгибов в плоскости подложки в большей степени определяется замедлением по отношению к материалу подложки  $\xi_2 = (c/v_{\phi}\sqrt{\epsilon_2}) - 1$ . Это обстоятельство требует дополнительного увеличения  $\epsilon_1$ , так чтобы достаточно велика была величина  $\epsilon_1/\epsilon_2$ .

Однако излучение с такого изгиба, когда изгибается сама подложка, продолжает зависеть от величины  $\xi$ , так что величины потерь на излучение, вызванных изгибом одного и того же ДВ в разных плоскостях, могут различаться на 1,5—2 порядка.

Для создания и широкого использования ДИС ММ необходимо решить ряд электродинамических, конструкторских и технологических проблем. Кроме затронутых выше и общих для всех ДВ, для ДИС возникают некоторые специфические проблемы. В первых, эта разработка способов борьбы с излучением, ушедшим в подложку и направляемым ее границами, а также с вытекающими волнами. Во-вторых, — отыскание оптимальных конструкций ДВ для ДИС среди множества возможных. И наконец, — подбор соответствующих сочетаний материалов для ДИС и разработка методов грушовой технологии, которые могут удовлетворить ужесточающимся с ростом частоты требованиям к точности выполнения размеров.

1.4. Диэлектрическая призма (клин) (рис. 6, а, б) явилась одним из первых оптических приборов [35—39, 41]. С ее помощью было проведено разложение естественного света на спектральные составляющие (ср. [53]). Известно много разнообразных приборов, работающих практически во всем спектре электромагнитных волн, в основе действия которых лежат отклоняющие свойства диэлектрического клина. Собственно, вся наша книга, за малым исключением, посвящена рассмотрению различных задач с участием диэлектрического клина.

Особое внимание исследователей в последние годы привлекает задача о рассеянии волн в клиновидной области (рис. 6, в), каждая из  $N$  однородных частей которой ( $N = 1, 2, \dots$ ) в пределах угла  $\vartheta_i$  имеет свои параметры  $\epsilon_i, \mu_i$  [6, 10, 17, 40]. Одним из наиболее эффективных методов решения задач в клиновидных областях явился метод контурного интеграла Зоммерфельда. Значительное расширение возможностей этого метода и перенесение его идей на



Р и с. 6. Диэлектрический клин и некоторые составные структуры в свободном пространстве

широкий класс угловых структур (прозрачных и с импедансными и идеальными граничными условиями) оказалось возможным благодаря фундаментальным работам Г. Д. Малюжинца. В них была введена и исследована некоторая специальная функция  $\psi_{\phi}(z)$ , позволяющая проводить численные расчеты дифракционного поля [6, 10, 54]. В дальнейшем мы остановимся на этом более подробно.

Предельными случаями общей угловой структуры (рис. 6, в) являются клиновидные области с идеально отражающими [1], импедансными [6] и идеально поглощающими [55—57] гранями.

Особое место занимают задачи дифракции на прозрачном однородном диэлектрическом клине (рис. 6, в) [58—63]. К сожалению, в некоторых работах, посвященных прозрачному клину,

допущены ошибки [61, 64], связанные обычно с неверным учетом особенности поля на ребре ( $r \Rightarrow 0$ ) [65—70]. В частности, на ошибки в [64] \* указано в [71]. Аналогичного рода неточности встречались и ранее. Например, неточный учет особенности поля в угловой области в работе [72] привел к неверным результатам (см. [73]).

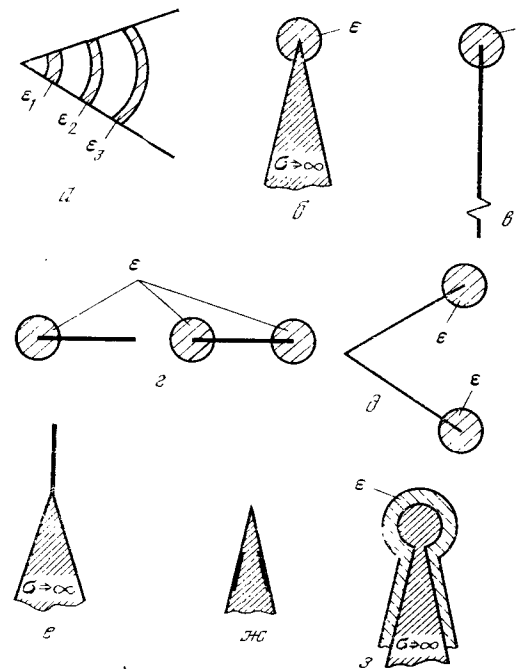
В ряде работ рассмотрены различные модификации геометрии ключевых структур типа показанных на рис. 6, б, в; так, влияние снежного покрова на дифракционное поле УКВ у горного хребта [75] привело к модели идеального клина с однослойным диэлектрическим покрытием, нанесенным на обе грани клина (рис. 6, з). Для ряда приложений представляют интерес многослойные диэлектрические покрытия, нанесенные на обе (рис. 6, д; [76, 77]) или только на одну (рис. 6, е; [78, 79]) грань диэлектрического и(или) идеального (проводящего, поглощающего) клина. Находят применение конструкции, являющиеся частными случаями рассмотренных структур. Так, например, бесконечный или полубесконечный диэлектрический (плазменный) слой на идеальной полуплоскости (рис. 6, ж;  $\vartheta = 0$ ) или плоскости ( $\vartheta = \pi$ ); идеальная полуплоскость на бесконечном диэлектрическом слое; угловая область из полубесконечных слоя и плоскости (рис. 6, з; [80]); стыки полубесконечных диэлектрических слоев разной толщины или с разными значениями диэлектрических проницаемостей, расположенных на идеальном экране (рис. 6, и).

Структура рис. 6, и также представляет интерес как модели скачкообразных неоднородностей в диэлектрических волноводах и световодах [47]. Частный случай скачка двух импедансов явился в свое время моделью для исследования береговой рефракции радиоволн [4].

Дифракция плоских и поверхностных волн на областях с прямоугольными диэлектрическими и идеальными призмами (рис. 6, к; [81, 82]) интересна с точки зрения использования таких структур в качестве ключевых для прямоугольных диэлектрических резонаторов в свободном пространстве (рис. 6, л; [83—86]), в линиях поверхностной волны, микрополосковых линиях и др. (рис. 6, м; [30, 87—91]). Ключевой структурой для резонатора рис. 6, м является диэлектрическое четвертьпространство, установленное на скачке импеданса ( $Z - \hat{Z}$ ) в линии поверхностной волны (рис. 6, н; [92]; ср. [93]). Отметим еще уголкового отражатели (излучатели) с диэлектрическим покрытием \*\* (рис. 6, о), импеданс-

\* Автор [64] пользуется методом комплексного двумерного преобразования Лапласа, развитым им ранее применительно к задаче дифракции волны идеальной четверть — плоскостью в [74]. Обобщение метода Винера — Хопфа в [74], как, к сожалению, оказалось, содержит некорректность и поэтому перенос идей [74] к задаче [64] неверен.

\*\* Широкое применение находят также рупорные излучатели с импедансными, например, гофрированными стыками. Этим вопросам мы здесь касаться не будем.



Р и с. 7. Металлический клин с диэлектрическими насадками

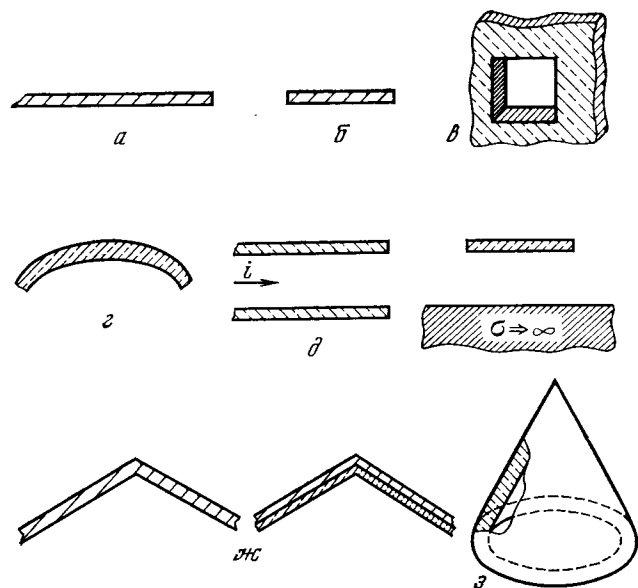
ный клин в анизотропной среде [94], неоднородные диэлектрические клин (рис. 6, п; [95]) и конус [96].

Неоднородные и гиротропные клиновидные структуры находят широкое использование в устройствах модуляции и сканирования лазерного излучения механическим и электрическим способами, а также оптической обработки информации [97—101]. В последнее время находят применение акустооптические [111], [112] и электрооптические [113] дефлекторы. Последние дают неплохие результаты при использовании кристалла ниобата лития [113].

К излучательным (приемным) рупорным структурам (типа рис. 6, о; [102, 103]) примыкают уголкового отражатели, заполненные концентрическими диэлектрическими слоями (рис. 7, а; [104]). Такая конструкция позволяет получить более широкую полосу частот, увеличенное значение коэффициента усиления и т. д. Большое влияние на диаграмму рассеяния волны на проводящем клине оказывает диэлектрический цилиндр малого диаметра, размещенный на острове клина (рис. 7, б; [105]), полуплоскости (рис. 7, в; [106]; ср. [107]) и ленты (рис. 7, г; [108]). Применение диэлектрических насадок позволяет, например, улучшить переизлучающие свойства уголкового отражателя (рис. 7, д; [108]).

Исследовалась система из идеального клина, во внешней части которого размещена поглощающая полоса (рис. 7, *е*; [109]); полоса может размещаться и на гранях клина (рис. 7, *ж*; [152]), а также клин с металлической насадкой при наличии плазменного слоя (рис. 7, *з*; [110]).

*Диэлектрическая полуплоскость* (рис. 8, *а*), являясь в некотором смысле вырожденным диэлектрическим клином (рис. 6, *б*  $\Phi \Rightarrow 0$ ,  $\epsilon, \mu \Rightarrow \infty$ , так что, если  $d$  — толщина пластины, то  $kd \sqrt{\epsilon\mu}$  — конечная величина), в то же время служит, равно как и идеальная полуплоскость, ключевой структурой для целого ряда интересных в приложениях и теории конструкций. Некоторые задачи по дифракции на прозрачных полубесконечных и анизотропных слоях были рассмотрены в [11], а также целом ряде других работ [114—120]. Эти результаты применимы, во-первых, для описания картины поля у края фазового экрана [121, 122], а также к задаче отражения радиоволн от наклонных и конусообразных метеорных следов [123, 163] и, во-вторых, могут служить основой для решения задачи рассеяния на диэлектрической ленте (рис. 8, *б*; [124—130]) и зеркале (рис. 8, *г*; [131]). В свою очередь рассеяние на крае диэлектрической полуплоскости позволило предложить фазовые лучеводы (рис. 8, *в*; [132]) — новый тип *диа-*



Р и с. 8. Вырожденный диэлектрический клин — полуплоскость (*а*) и ее модификации: лента (*б*), ячейка диафрагменной линии из прямоугольного отверстия в диэлектрическом листе (*в*), зеркало (*г*), открытый конец волновода (*д*), открытый ленточный резонатор с полупрозрачным зеркалом (*е*), антенные обтекатели (*ж*, *з*)

*фрагментной линии* (ср. [11, 12, 15]). При этом диэлектрические рамки могут иметь различные формы: прямоугольную, кольцевую, спиральную и т. п., а кроме того, в качестве основы для линии может использоваться металлический экран с диэлектрической насадкой (см., например, рис. 7, *б*, *в*) не обязательно цилиндрической формы.

Интересным классом ключевых структур являются также полубесконечные плоские и цилиндрические волноводы с диэлектрическими прозрачными или полупрозрачными стенками (рис. 8, *д*; [133—137]). Полубесконечный открытый конец волновода служит моделью для возбуждения его в торец (см. далее п. 1.9), а также позволяет обобщить результат теории открытых резонаторов [11, 14, 15] с идеальными стенками на резонаторы с прозрачными и полупрозрачными стенками (рис. 8, *е*).

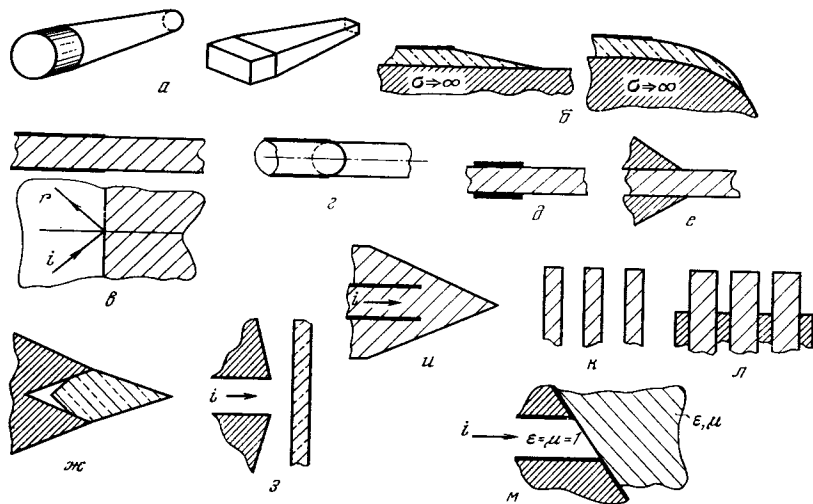
Широкий класс устройств представляют *антенные обтекатели* [138], моделями которых служат полые одно- или многослойные диэлектрические клин и конус (рис. 8, *ж*, *з*; [139—143]); используются, разумеется, и другие формы обтекателей (например, цилиндрическая, сферическая и т. д. [144]). К современным антенным обтекателям, кроме естественных для радиофизика и специалиста по антенным устройствам электродинамических требований, предъявляются весьма жесткие требования, касающиеся прочности, веса, способности выдерживать значительные ударные нагрузки и т. п. Данный круг вопросов выпадает из нашего рассмотрения, хотя и является важным для практических приложений.

Важным классом антенных устройств СВЧ-диапазона являются *диэлектрические антенны и периодические структуры из диэлектрических антенн* [145—156]. Они обычно представляют собою стержни конечной длины круглого или прямоугольного сечения (рис. 9, *а*) и относятся к классу *антенн вытекающих (бегающих) волн*. С волноводной точки зрения диэлектрические антенны являются открытыми линиями с медленно меняющимся в продольном направлении параметрами [46, 157, 158]. В равной мере это относится также и к бурно развивающемуся разделу современной физики — *оптическим волноводам*, точнее, к нерегулярностям (искусственным или случайным) в них [47, 49, 158]. Известны различные модификации диэлектрических антенн. Расположенные на плоскости или изогнутой поверхности (рис. 9, *б*), они относятся к классу невыступающих антенн [160—162].

В обычной схеме стержневая диэлектрическая антенна возбуждается открытым концом волновода, в который она вставлена\*.

\* Известно, что к идее диэлектрической антенны привела необходимость закрывать открытый конец волновода, используемого в качестве антенны или ее облучателя, радиопрозрачной втулкой (шайбой). Было замечено, что такая конструкция способствует сужению диаграммы направленности антенны. Дальнейшие исследования привели к созданию стержневой антенны в том виде, в котором она используется в настоящее время.

Существует, впрочем, и противоположная задача. В современных коротковолновых приложениях используются весьма широкие волноводы,

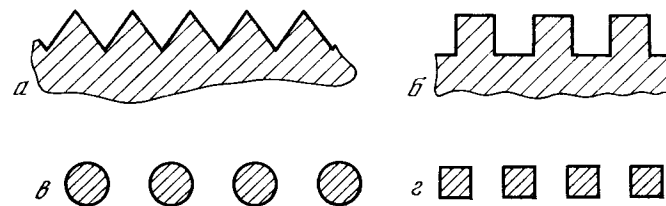


Р и с. 9. Диэлектрические антенны: а — стержневого типа, б — невыступающие, в — е — ключевые структуры для диэлектрических антенн, ж — и — излучающие структуры — металлический клин и диэлектрическая антенна, к — л — периодические диэлектрические антенны, м — излучение из скошенного рупора в диэлектрическое полупространство

Первой моделью диэлектрической антенны был, таким образом, бесконечно протяженный диэлектрический стержень (или слой), вставленный в полубесконечный волновод (рис. 9, в, г). Такая задача допускает строгое решение методом Винера — Ховфа — Фока [11, 21, 165—170]. В дальнейшем (§ 2.2) мы остановимся на задачах этого класса. Отметим, что важность отмеченных задач объясняется, кроме непосредственно даваемых ими результатов, их фундаментальностью, позволяющей выяснить глубокое физическое содержание в смежных областях радиофизики. Так, например, строгое решение задачи о «косом» набегаении волны плоского волновода на открытый конец апертуры (нижняя часть рис. 9, в), рассмотренное в работе [171], позволило построить удовлетворительную количественную теорию открытой несимметричной полосковой линии [172, 173], создав тем самым *электродинамическую основу* для системы *машинного проектирования интегральных схем СВЧ* [174].

Практически используются и полубесконечные структуры из *диэлектрических слоев и трубок* [133—137, 175]. Для их анализа привлекаются различные приближенные методы [11, 12, 146, 176, 177].

обладающие в силу этого узкой диаграммой направленности. В ряде случаев ее нужно расширить. Один из примеров расширения диаграммы направленности с использованием рассеивающей линзы исследовался в работе [164].



Р и с. 10. Периодические диэлектрические структуры

Зачастую полубесконечные модели (типа рис. 9, в, г) с нулевой толщиной стенок для приближения модели к реальной конструкции требуют либо учета конечной толщины стенок (рис. 9, д), либо вообще диэлектрическая антенна имеет фланцы (рис. 9, е). Структура с фланцами (рис. 9, е) представляет собою соответствующее усложнение задачи о многосекторной среде (рис. 6, в) на случай двух дифракционно связанных угловых областей. Интересно отметить, что только в двух случаях структура рис. 9, е имеет строгое решение: при  $\vartheta = \pi$  (бесконечный регулярный волновод) и при  $\vartheta = 0$  (полубесконечная структура — переход к случаю, показанному на рис. 9, в). Реальные излучающие устройства, модели которых представлено на рис. 9, е—ж, находят широкое применение и им посвящено много работ [178—207, 217—219]. В дальнейшем мы более подробно остановимся на анализе некоторых из них. Отметим попутно, что ныне большое значение имеет развитие антенных и, в частности, диэлектрических стержневых структур для интегральных схем СВЧ [216].

К рассмотренным выше структурам примыкают различного рода *периодические диэлектрические структуры*. Они применяются в качестве поверхностных согласователей (поглотителей) и используются либо в виде многослойных магнитодиэлектрических структур [42—45, 208], либо в виде одно- и(или) двумерных периодических структур разного профиля (рис. 10; [209—214]). В большинстве случаев для их анализа необходимо знать функцию Грина каждой элементарной области [12, 24, 34, 55—58]. В случае произвольно неоднородной по материалу или профилю границы раздела используются статистические подходы [18, 210, 215].

1.5. *Диэлектрические тела конечных размеров* составляют большой класс интересных и важных объектов дифракции. Прежде всего это обширная группа однородных по  $\epsilon$  и  $\mu$  структур с «правильными» геометрическими формами: шар, цилиндр, сфероид, эллипсоид и т. д., т. е. те структуры, для которых в волновом уравнении разделяются переменные\*. При этом знание решений

\* Здесь мы перечислим 11 систем координат, в которых переменные в волновом уравнении разделяются: прямоугольные, круговые цилиндрические (вращения), эллиптические цилиндрические, параболические цилиндрические

уравнений Максвелла для регулярных диэлектрических структур типа кругового цилиндра из однородного магнитодиэлектрика представляет многоплановый интерес. Прежде всего это уже упоминавшиеся выше регулярные диэлектрические волноводы (лучеводы, световоды) [46, 47, 49—52, 221—223] \*. Знание собственных функций и собственных чисел регулярных ДВ позволяет применять для расчета плавно нерегулярных в продольном направлении структур, например, диэлектрических антенн, способы типа *метода поперечных сечений* [46, 157, 162], а для резких нерегулярностей типа скачка импеданса или сечения ДВ — разложение по полной системе собственных функций открытого волновода [46, 92, 93]. И наконец, это исследование добротных колебаний в диэлектрических резонаторах (ДР), представляющих собою часть ДВ произвольного сечения, заключенного между идеальными зеркалами (безграничные плоскости, диски, фокусирующие зеркала и т. п.; рис. 11). Наиболее широко распространенными являются цилиндрические и дисковые и кольцевые диэлектрические резонаторы (рис. 11, б, в; [226—230])\*\*, находящие самое разнообразное применение в физике. Сферические открытые магнитодиэлектрические резонаторы также широко используются для построения функциональных элементов и узлов (фильтры, фазовращатели, ограничители мощности, вращатели плоскости поляризации и многое другое [231, 232]). Интересными свойствами твердотельных намагниченных ферритовых резонаторов являются резонансный характер взаимодействия внешнего поля с резонатором и относительно простая возможность перестройки его резонансной частоты за счет магнитного поля. В ряде случаев (особенно при высоких значениях показателя преломления ферродиэлектрического резонатора) анализ свойств таких резонаторов или их систем может быть существенно упрощен введением импедансных анизотропных граничных условий [11]. В этом направлении проводятся интенсивные исследования (см., например, [233]).

Открытые ДР сферической и цилиндрической формы обладают интересными свойствами — колебаниями типа «шепчущей галереи» (рис. 11, д; [234—238, 467]; ср. с [239], где были рассмотрены колебания типа «шепчущей галереи» в открытых дисковых резонансных структурах). Они обладают весьма высокой радиацион-

ские, сферические (вращения), копические, параболические (вращения), вытянутые сфероидальные (вращения), сплюснутые сфероидальные (вращения), эллипсоидальные и параболаидальные координаты.

Особое место занимают бисферические и тороидальные координаты [220, т. 2, с. 612].

\* Количество публикуемых работ по этим вопросам довольно быстро растет. Нет никакой возможности да и особой необходимости о многих из них упоминать. Мы ограничимся поэтому указанием на имеющиеся библиографические справочники [224, 225].

\*\* Ср. с рассмотренными в [11, 12] открытыми дисковыми резонансными структурами с круговыми металлическими частотопериодическими решетками.

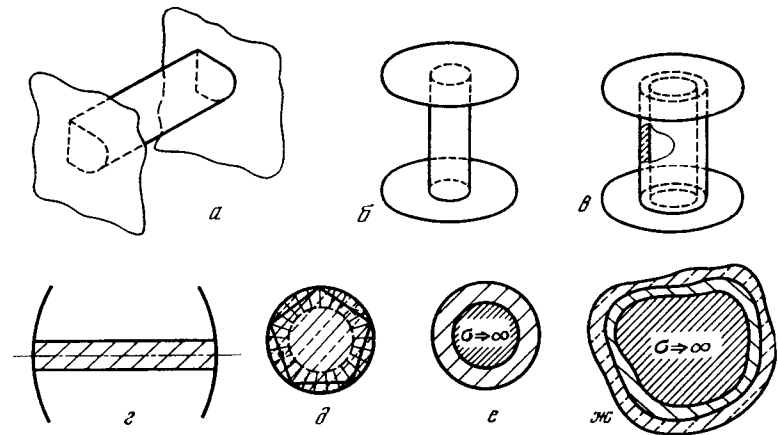


Рис. 11. Диэлектрические структуры в открытых резонаторах: а — стержень между двумя плоскостями, б, в — дисковый открытый резонатор со стержнем (б) и трубкой (в), г — резонатор с фокусирующими зеркалами и диэлектрическим стержнем, д — волны шепчущей галереи в цилиндрическом или сферическом диэлектрическом резонаторе, е, ж — одно- (е) и многослойное (ж) диэлектрическое покрытие на металлическом основании

ной добротностью [235, 467] и представляют интерес, например, для устройств интегральной оптики, так как отсутствие поля в центре диска позволяет использовать это пространство для размещения различных вспомогательных элементов структур (ср. [30]).

Однородные диэлектрические структуры (ограниченные или моделирующие в общем случае угловую область, как, например, на рис. 6, в) являются предельным случаем неоднородных тел или сред, у которых материальные константы  $\epsilon$  и  $\mu$  являются функциями координат:  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$ ,  $\mu = \mu(\mathbf{r})$ . Это широкий класс дифракционных структур, связанный прежде всего с распространением радиоволн в естественных условиях. О различных подходах к описанию сред в таких условиях мы уже упоминали (например, слоистые среды [4, 10, 42, 43], волноведущие структуры с медленным изменением параметров в направлении распространения [46, 157] и т. п.) и еще раз обратимся к различным аспектам проблемы в главе о методах решения задач дифракции (гл. 1). Здесь же нам хотелось бы отметить ряд (диэлектрических) структур с неоднородным или кусочно-однородным диэлектрическим заполнением.

Прежде всего это задачи дифракции на хорошо проводящих телах с *одно- или многослойными диэлектрическими покрытиями* (рис. 11, с, ж [240—242]). Внимание к ограниченным структурам с диэлектрическими покрытиями в значительной мере определялось потребностями исследований космических объектов и условий радиосвязи, радиолокации и радионавигации в космическом и околоземном пространствах [243—247]. Аналогичные модели широко используются при различных исследованиях, связанных

с изучением реальных и лабораторных плазменных образований [248—250]. В последнее время интенсивно рассматривается проблема регистрации и анализа картины собственных СВЧ-излучений естественных источников, радиотепловое излучение земных покровов и атмосферы, СВЧ-излучение равновесной и неравновесной плазмы и многое другое [251]. Последний круг вопросов представляет большой интерес в связи с проблемой изучения ресурсов Земли [252].

В отмеченном круге задач модели с идеально и хорошо проводящим телом внутри слоистой оболочки интересны еще и тем, что границей с хорошим отражением может служить плазменный слой, у которого при данной частоте  $\epsilon = 0$ . Это предоставляет некоторые возможности в задачах диагностики тонкой структуры плазмы. В заключение данного раздела отметим класс ограниченных диэлектрических неоднородных структур [242, 253—263] и различные составные тела типа усеченного конуса с двумя шаровыми сегментами, диэлектрической антенны из чередующихся колец и т. д. [264—266]. Упомянутому кругу вопросов в литературе уделено много внимания как в практическом, так и теоретико-вычислительном аспектах. За редким исключением, все задачи требуют применения, а в ряде случаев и разработки эффективных вычислительных алгоритмов [267—275], рассчитанных на применение самых современных ЦЭВМ. Наряду с широким использованием ЦЭВМ в последнее время широкое применение находят аналоговые вычислительные средства. В недалеком будущем намечается построение гибридных структур, объединяющих возможности ЦЭВМ и АВМ.

1.6. Диэлектрический клин в закрытых волноводах находит самое широкое применение. На рис. 12 показаны некоторые примеры использования клина в качестве плавного согласующего перехода незаполненной диэлектриком части волновода к полностью заполненной (рис. 12. а — г [276—283]). Обычно применяется линейная форма перехода как более технологичная при выполнении, но известны плавные переходы и со сложной формой образующей [284—287]. В частности, сложная форма перехода позволяет решить задачу синтеза — подбора наиболее выгодной с электродинамической (минимальное значение коэффициента отражения в максимально широкой полосе частот) и с конструктивной (минимальные габариты) точек зрения [271, 277].

Чрезвычайно важным примером использования плавных переходов являются волноводные нагрузки — поглотители СВЧ-энергии. В связи со значительным ростом мощностей передающих устройств (от 10 до 1 МВт в диапазоне от 1 до 10 ГГц в режиме непрерывного излучения [288]) возросла роль калориметрических нагрузок. К ним предъявляются весьма высокие требования, касающиеся прежде всего надежности и хороших эксплуатационных характеристик. Использование твердых поглотителей по схемам рис. 12, а — г или пленочных (рис. 12, д, е) структур на высо-

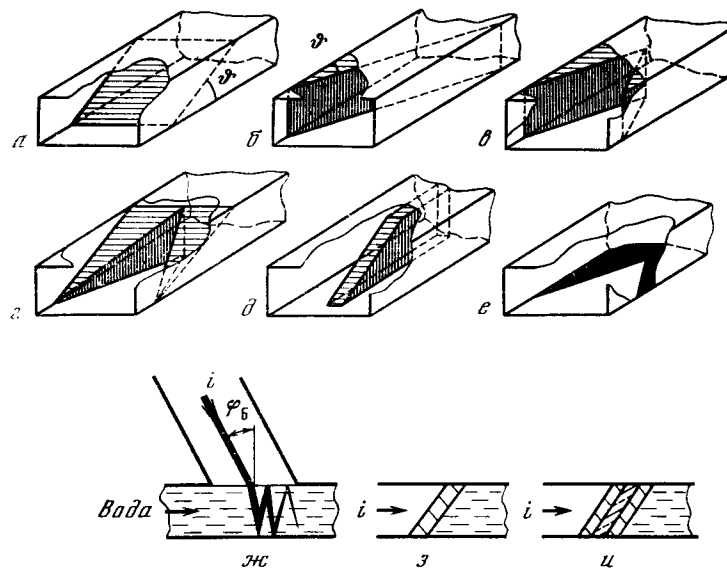
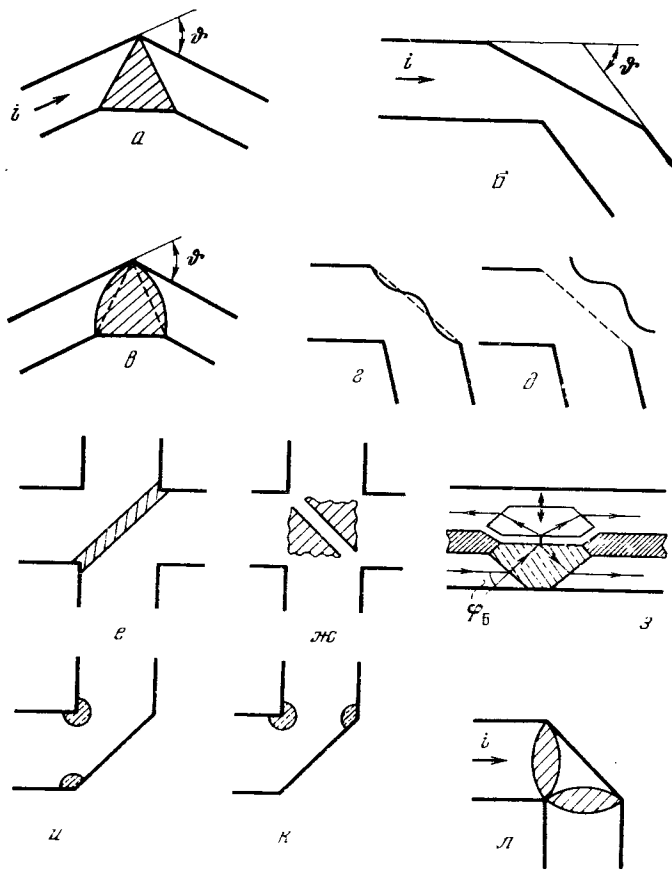


Рис. 12. Примеры согласующих устройств и калориметрических нагрузок в закрытых волноводах

ких уровнях мощности недопустимо. Поэтому был разработан широкий класс нагрузок жидкостным поглотителем (вода, этиленгликоль и многое другое) СВЧ-энергии с непосредственным контактом между волной и поглотителем (рис. 12, ж) и через одно- или многослойное диэлектрическое окно (рис. 12, з, и [289—297]). Угол падения волны выбирается близким к углу Брюстера  $\varphi_B$ . Известны применения клиньев с магнитными потерями [298], а также управляемые (например, оптическим способом [299]) нагрузки и комбинированные, в которых одновременно изменяется размер поперечного сечения волновода и размер диэлектрика [300].

Плавные нагрузки обычно выполняются с малым углом при вершине диэлектрического клина  $\vartheta$  (это не относится, разумеется, к узкополосным нагрузкам типа показанной на рис. 12, ж, когда угол падения равен углу Брюстера). Увеличение угла  $\vartheta$  приводит, во-первых, к увеличению коэффициента отражения основной волны (см., например, [276]; коэффициент отражения в первом приближении пропорционален  $\vartheta$ ) и, во-вторых, к эффективному возбуждению волн высших номеров [303, 304]. Последнее обстоятельство особенно важно при конструировании мощных калориметрических нагрузок в одноволновых волноводах, так как при этом структура поля у поглотителя оказывается весьма сложной и возникает опасность электрического пробоя\*.

\* Наряду с электродинамическими расчетами нагрузки на большие уровни мощности требуют тщательных температурных расчетов [301, 302].



Р и с. 13. Диэлектрическая призма и металлическое зеркало в изломах волноводов: а, б — геометрические призма (а) и зеркало (б), в — д — скомпенсированные призма (в) и зеркало (д), е — ж — ответвители (е, ж) и регулируемый разделитель каналов (з), комбинированные зеркала (и — к)

новодах возможен *попутный (обратный) поток* мощности на паразитных волнах. Следует также иметь в виду возможность возникновения *попутного потока* в заполненной диэлектриком части волновода, ибо здесь волновод может оказаться многоволновым. В этом случае возможны резонансные явления в заполненном участке волновода на высших типах колебаний за счет отражений их от критических сечений [157, 305].

По мере укорочения длины волны и перехода в диапазон миллиметровых и субмиллиметровых волн все большее число элементов волноводного тракта стало заимствоваться из классической оптики. Может быть, наиболее показательными в этом отношении оказались *преломляющая диэлектрическая призма*

(рис. 13, а; [306—308]) и *металлическое зеркало* (рис. 13, б; [197—199]). Призма оказалась эффективной при малых углах излома волновода  $\varphi$ , а зеркало — при больших  $\varphi$ . Однако очень скоро выяснилось, что на работу этих устройств существенное влияние оказывает *дифракция*. Оказалось необходимым, во-первых, ее *учитывать*, а во-вторых, применять различные меры к *уменьшению дифракции*. Так, граням призмы и поверхностям зеркала стали придавать слегка *фокусирующие свойства* [308, 309]. Некоторые примеры этого приведены на рис. 13, в — д.

По аналогии с призмой и зеркалом в изломе широкого волновода предложены и реализованы *направленные ответвители* с диэлектрической пленкой (рис. 13, е; [310]) или с призмами (рис. 13, ж; [311]), *делители мощности, аттенюаторы* и т. п. (рис. 13, з; [312—315]). Для улучшения согласования применяются *мелкопериодические структуры* (рис. 13, ж; [311]) или призмы с использованием эффекта Брюстера (рис. 13, з; [312]). Системы из двух призм допускают регулировку степени ответвления за счет изменения расстояния между призмами (рис. 13, ж, з). В частности, для направленного ответвителя (рис. 13, з; [312]), выполненного на тefлоновых призмах в диапазоне 80—90 ГГц, получены значения развязки больше чем 25 дБ; вносимые потери порядка 0,3 дБ (при этом диэлектрические потери составили примерно 0,25 дБ, а потери на отражении 0,05 дБ). Наряду с диэлектрическими призмами в устройствах ответвления, деления и т. п. широкое применение находят *густые решетки* одно- и многослойные [12, 24].

Наряду с зеркалами в изломах волновода [15, 309, 316—325] и призмами предложено использовать различные *комбинированные корректоры*. Так, например, зеркала с диэлектрическими вкладышами (рис. 13, и, к; [326]) вблизи ребер позволили снизить коэффициент отражения в изломе на  $90^\circ$  от 0,5 до 0,15 в полосе частот  $\pm 10\%$ . Способствует уменьшению потерь на преобразовании в высшие типы, а также уменьшению омических потерь структура с *фокусирующими линзами* (рис. 13, л). Линзы служат для уменьшения размера освещенного пятна на зеркале и способствуют тем самым снижению потерь.

1.7. *Диэлектрический прямоугольный клин, пластина и линза в многоволновых волноводах* находят самое разнообразное применение. Выше уже отмечалось использование двухлинзовой структуры в изломе волновода (рис. 13, л). Линзы применяются и в других случаях [327—329]. Отметим также использование моделей линз, например, в качестве *ускоряющей волноводной линзы* [330] и др.

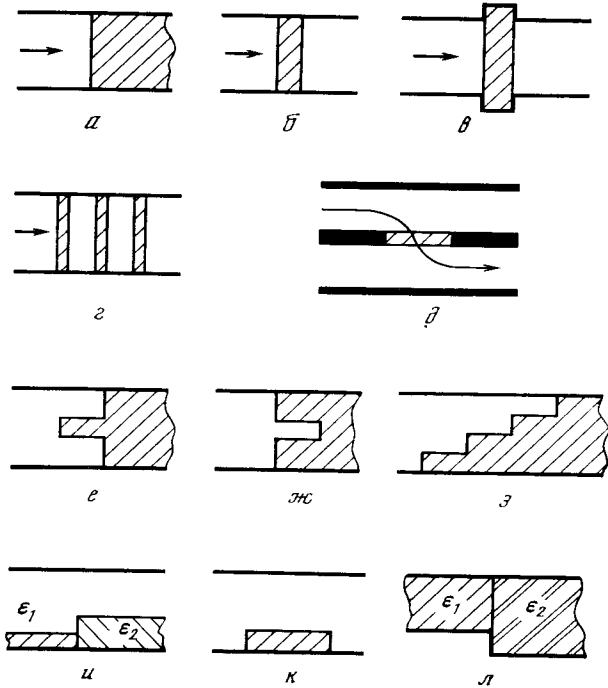
В простейшем случае это волновод со *скачком диэлектрического заполнения* (рис. 14, а; [331]) или *ненаклоненное диэлектрическое окно* (рис. 14, б, в; [327, 332, 333]) или система окон (рис. 14, г; [334—336]). Широкое применение находят структуры типа показанных на рис. 14, б—г, когда в качестве препятствия

устанавливается тонкая, например, *резистивная пленка* [337—340]. Они выполняют роли пробок, нагрузок, модуляторов и многое другое. Несанкционированный перекос границы приводит, как мы уже отмечали [305], к потерям на преобразование в волны других номеров [297, 342, 343].

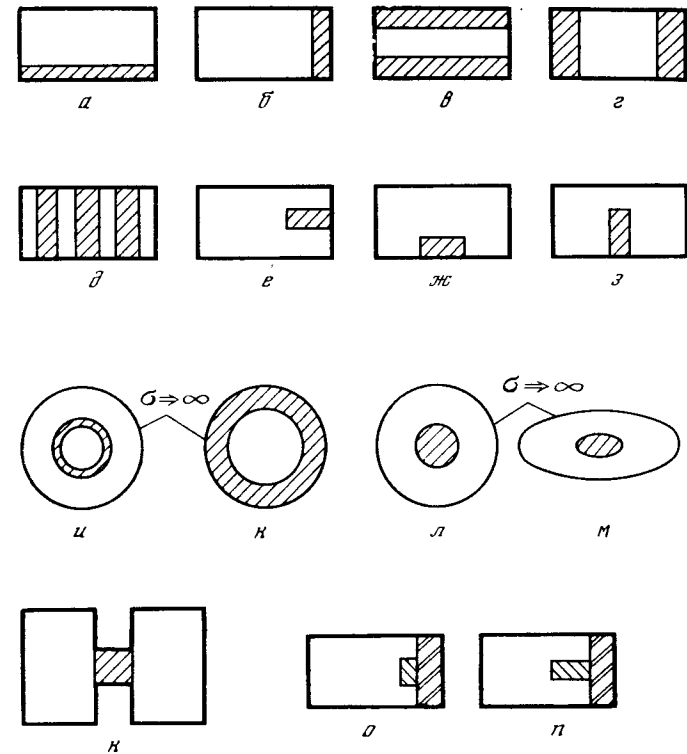
Пленки, в частности проводящие, применяются также в *бесцелевых направленных ответвителях* (рис. 14, *д*) для волноводов и световодов [344—346].

Отмеченные выше примеры скачков диэлектрического заполнения (рис. 14, *а, б, в, г*) являются частными случаями широкого класса скачкообразных неоднородностей в волноводах. Прежде всего это *согласующие трансформаторы* (рис. 14, *е—з*; [347—351]), *аттенюаторы*, *фазовращатели* и многое другое (рис. 14, *и, к*; [352—357]), а также комбинированные структуры (рис. 14, *л*; [358]) и структуры со скачкообразным во времени изменением диэлектрической проницаемости [359].

Анализ электромагнитных полей в структурах с плавным (рис. 12) и скачкообразным (рис. 14) изменением диэлектрического заполнения предполагает знание *полной системы собственных функций* частично заполненного диэлектриком металлического



Р и с. 14. Диэлектрическая призма в закрытом волноводе — скачкообразное изменение свойств заполнения



Р и с. 15. Поперечные сечения регулярных волноводов с кусочно однородным заполнением магнитодиэлектриком

волновода. На рис. 15 показаны некоторые примеры: поперечные сечения волноводов с частичным заполнением. Нужно сказать, что этому кругу вопросов посвящено довольно много работ [360—374]. Большое число параметров, определяющих структуру поля в поперечном сечении, приводит к необходимости применения численных методов. Только редкие случаи — близость  $\epsilon$  к 1 ( $\epsilon - 1 \ll 1$ ), широкий волновод ( $ka \gg 1$ ; [364]), малость возмущения (пленка на стенке и т. д. [12]) — позволяют получить приближенные аналитические выражения для поперечных собственных чисел [276, 282, 360, 362, 375]. Частично заполненные волноводы составляют основу для закрытых моделей *полосковых и микрополосковых линий* [30], *широких волноводов с малыми потерями* [12, 364], *пленочных нагрузок* [365, 366], основу конструкции элементов для *твердотельных интегральных схем* [362, 367], *диэлектрических резонаторов* и их дифракционно связанных систем в закрытых волноводах и резонаторах [374, 376—383] и многого другого.



1.8. Диэлектрическая призма в открытых линиях и открытых резонаторах особенно широко используется в связи с задачами освоения миллиметрового, субмиллиметрового и светового диапазонов электромагнитных волн и колебаний. В простейшем случае конечная призма (рис. 16, а) отклоняет геометрический луч  $i$  на некоторый угол  $\vartheta$ , связанный с углом при вершине  $2\theta$  и величиной диэлектрической проницаемости материала призмы с следующими основными соотношениями геометрической оптики призмы:

$$\varphi_1 + \varphi_2 = \vartheta + 2\theta, \quad \psi_1 + \psi_2 = 2\theta. \quad (1.2)$$

Входящие сюда углы  $\varphi_j, \psi_j, j = 1, 2$  (см. рис. 16, а) связаны законом преломления

$$\sin \varphi_j = n \sin \psi_j, \quad j = 1, 2, \quad (1.3)$$

в котором  $n$  — показатель преломления материала призмы.

При использовании призмы в качестве поворотного элемента открытой линии ее устанавливают симметрично (рис. 16, б). В этом случае угол отклонения  $\vartheta$  экстремален,  $d\vartheta/d\varphi_1 = 0$  и, поскольку  $\varphi_1 = \varphi_2, \psi_1 = \psi_2$ , то из (1.2) и (1.3) непосредственно можно получить явное выражение для минимального угла отклонения  $\vartheta_0$  в виде

$$\vartheta_0 = 2 \arcsin(n \sin \theta) - 2\theta. \quad (1.4)$$

При этом углы падения и преломления на левой грани призмы можно записать так:

$$2\varphi_1 = \vartheta_0 + 2\theta, \quad \psi_1 = \theta. \quad (1.5)$$

Если призма освещается параллельным пучком монохроматического света (рис. 16, в), то за счет дисперсии  $n = n(\lambda)$  материала призмы угол отклонения также будет функцией  $\lambda$ :  $\vartheta = \vartheta(\lambda)$ . При этом величина

$$\frac{d\vartheta}{d\lambda} = \frac{d\vartheta}{dn} \frac{dn}{d\lambda}, \quad (1.6)$$

соответствующая постоянному углу падения  $\varphi_1$ , называется *угловой дисперсией* призмы. В положении минимума отклонения угловая дисперсия призмы (1.6), т. е. угол  $\delta\vartheta$  между волновыми фронтами, относящимися к длинам волн  $\lambda$  и  $\lambda + \delta\lambda$ , будет определяться так:

$$\delta\vartheta = \frac{t}{l} \frac{dn}{d\lambda} \delta\lambda, \quad (1.7)$$

где  $l$  — ширина пучка,  $t$  — максимальный размер пучка в призме (рис. 16, в). В оптике говорят, что когда вся призма заполнена светом,  $b$  — есть длина основания призмы [41].

В классической оптике, кроме простейшей преломляющей призмы (рис. 16, а, б), изменяющей направление геометрического луча, широкое применение находит большое число различ-

ных конструкций. Упомянем только некоторые из них. На рис. 16, в—д показаны призма Порро (рис. 16, в), пентапризма (рис. 16, г) и ромбовидальная призма (рис. 16, д). Они используют явление полного внутреннего отражения и применяются в качестве зеркал. Призма Добе (рис. 16, е) переворачивает изображение, не изменяя при этом направления распространения светового луча.

Интересные преобразования с пучком света позволяют производить призмы Рошона и Волластона (рис. 16, ж, з). Они дают возможность получить из естественного света два пучка, поляризованных во взаимно перпендикулярных плоскостях и распро-

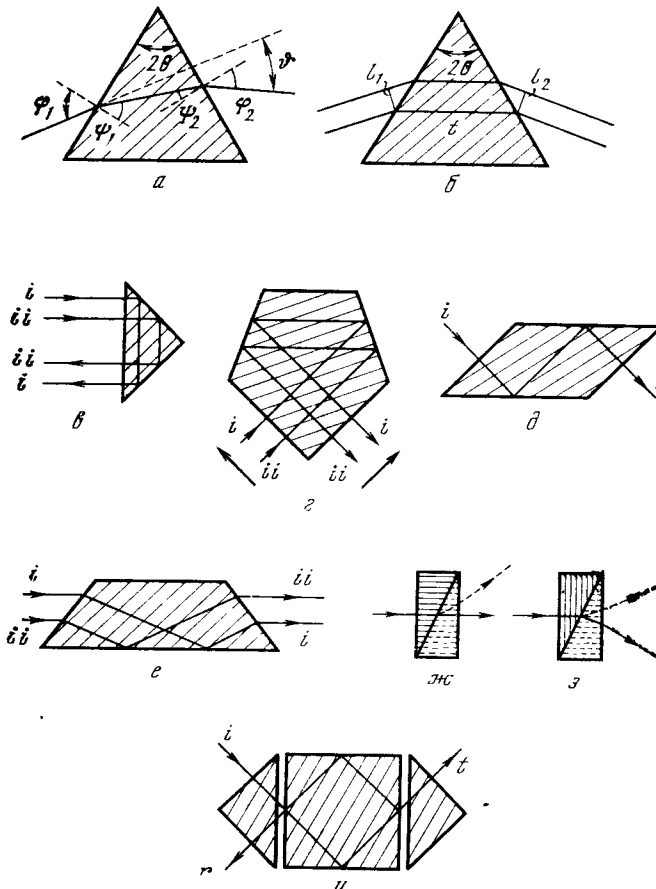


Рис. 16. Классические геометрические диэлектрические призмы: а — трехгранная призма (прохождение луча; общий случай), б — трехгранная призма (симметричное прохождение волнового пучка), в — призма Порро, г — пентапризма, д — ромбовидальная призма, е — призма Добе, ж — призма Рошона, з — призма Волластона, и — интерференционный модулятор Фабри — Перо с призмами полного внутреннего отражения

страняющихся в разных направлениях. На рис. 16, ж, з показаны ориентации оптических осей кристалла, который использован в призмах (черточками представлены оптические оси, перпендикулярные плоскости чертежа). Как видно из приведенных рисунков (рис. 16, ж, з), призма Волластона (рис. 16, з) дает большее разделение (разрешение) пучков, а призма Рошона сохраняет направление одного из пучков неизменным. Если в призме Рошона сделать малыми углы клиньев (так что разделение угла практически не будет происходить), то мы приходим к широкому классу компенсаторов, из которых наиболее употребительным, по-видимому, является *компенсатор Бабиня* [41]. Основным назначением компенсаторов является определение малых примесей поляризованного света в смеси естественного и поляризованного света.

Большую степень разделения обыкновенного и необыкновенного лучей можно получить в *призмах Николя, Фуко и Глана—Томпсона*, а также в различных их модификациях, таких, как, например, *призма Корню* и др.

Названные выше основные элементы классической оптики, а также различные их комбинации также находят широкое применение в структурах, связанных с монохроматическим излучением. Это различные устройства, предназначенные для *модуляции и сканирования* оптического лазерного излучения [100, 101], *призменные ответвители и волномеры поглощающего типа* и многое другое [315, 395—401]. Призма, введенная в открытый резонатор струйного лазера, способствует сужению полосы генерации [402, 403]. На рис. 16, и показана схема многолучевого *интерференционного модулятора Фабри — Перо* с призмами полного внутреннего отражения [100].

По-видимому, одним из первых примеров применения преломляющей призмы для преодоления излома открытой линии — однопроводной линии поверхностной волны (ЛПВ) — был опыт (рис. 17, а), проведенный в работе [393]. Применение призмы привело к существенному снижению потерь при изменении направления линии по сравнению с изломом [46, 47]. В этом случае дело по существу сводится к исследованию преломления и отражения на гранях призмы неоднородной плоской волны. Ключевой задачей здесь является задача о диэлектрическом препятствии, установленном на скачке импеданса в линии поверхностной волны (рис. 6, н [92]; граница на однородном импедансе — [93]).

Были осуществлены также различные *уголковые повороты ЛПВ* (например, поворот ЛПВ с плоским проводником, покрытым слоем диэлектрика [394]), а также исследованы различные повороты ЛПВ [405], изгибы с неоднородным импедансом и т. п. [46, 406, 407, 424].

Естественным обобщением использования призмы в структуре с ЛПВ (рис. 17, а) было ее применение в открытых волноводах типа *линзовой или диафрагменной линии* (см., например, [55])

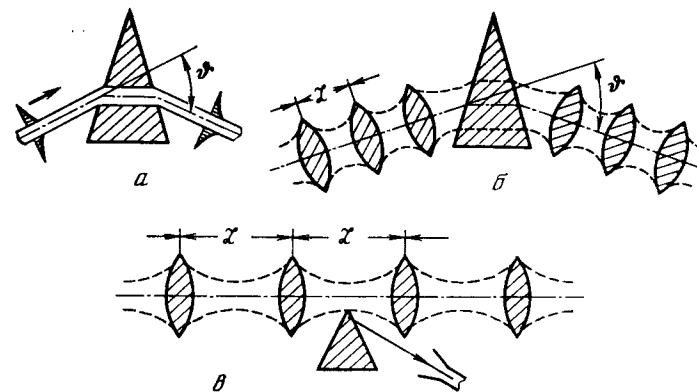


Рис. 17. Диэлектрическая призма в открытых линиях: а, б — поворот линии поверхностной волны (а) и линзового лучевода (б), ответвитель мощности в квазиоптической линзовой линии

Здесь призма может использоваться в основном в двух режимах: *поворот линии*, например, линзовой (рис. 17, б; [404]) на некоторый угол  $\varphi$  или *ответвление части мощности* из линии (рис. 17, в [55, 315]). Возможны и другие применения призмных устройств — как *волномеров поглощающего типа, аттенюаторов* и т. д. [395, 396, 399]. Ключевыми задачами в этом круге вопросов оказались задачи о движении центра тяжести и изменении ширины волновых пакетов [408], об отражении и преломлении гауссовых и эрмит-гауссовых пучков на плоской границе раздела двух диэлектрических сред [409—411], диэлектрическом слое [412], периодической, в том числе и диэлектрической, структуре [412], на диэлектрическом цилиндре (линзе) [413—415], на одиночных и двойных круговых или прямоугольных апертурах [416—419], прохождении диэлектрического волновода или ЛПВ через металлическую диафрагму [420, 421], пучки в анизотропных средах [422, 423] и др.

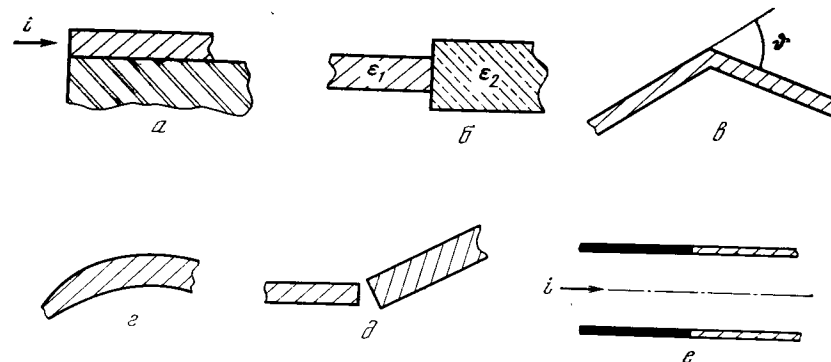
В силу линейности отмеченных выше задач эффективным аппаратом для анализа полей в этих структурах оказалось *преобразование Фурье*. Разлагая пучок по плоским волнам и зная решение для каждой (эти плоские волны отличаются друг от друга углами падения), в итоге приводят его сворачивание, т. е. задачу сводят к квадратурам. В ряде случаев, например, в приближении Френеля, коэффициенты перед преломленными и отраженными волнами оказываются разложимыми в ряд Тейлора. При этом отраженные и преломленные поля представимы в виде суперпозиции гауссовых пучков. Их амплитуды пропорциональны коэффициентам разложения в ряд Тейлора и обратно пропорциональны отношению ширины пучка к  $\lambda$  в степени, равной порядку гауссова пучка. Был выяснен механизм отклонения направлений отраженного и преломленного пучков от геометрических направлений.

Как оказалось, отличие это обязано наличию в составе отраженного и преломленного лучей пучков высших порядков (ср. [408, 409]).

1.9. *Диэлектрическая призма в устройствах интегральной оптики и световодной технике* конструктивно и технологически оказалась весьма удобной и главное эффективным с электродинамической точки зрения устройством. Основными способами ввода (вывода) измерения в оптические микроволноводы являются возбуждение их с помощью *дифракционных решеток, диэлектрических призм и непосредственное возбуждение «в торец»* [424—431] \*. На выбор каждого из этих способов возбуждения влияет в основном соотношение между эффективной толщиной микроволновода  $h_{эф}$  и длиной волны  $\lambda$ . Под  $h_{эф}$  подразумевается поперечный (по отношению к направлению распространения) размер световода и окружающего его пространства, в которых сосредоточена вся или почти вся энергия распространяющегося типа волны (или сумма энергий распространяющихся типов волн). Обычно различают два частных случая:  $h_{эф}/\lambda \gg 1$  и  $h_{эф}/\lambda \sim 1$ . При  $h_{эф}/\lambda \gg 1$  мы имеем дело с так называемым одноволновым световодом, у которого разность между показателями преломления несущего слоя и окружающего пространства мала. В силу этого поперечные размеры несущего слоя существенно превышают  $\lambda$ , стало быть, торец такого волновода представляет большую апертуру, удобную для ввода (вывода) энергии. Для эффективного возбуждения нужного типа волны в слое необходимо с помощью устройства возбуждения с максимально возможной точностью воссоздать поперечное распределение поля волны данного типа на торце (рис. 18, а). Это обстоятельство хорошо известно в теории возбуждения радиоволноводов более длинноволновых диапазонов. Ситуация  $h_{эф}/\lambda \gg 1$  имеет место и в случае слабого замедления, когда поле поверхностной волны имеет большую протяженность, чем весь направляющий слой. Эффективность возбуждения в этом случае требует большой апертуры у возбуждателя [429].

К задаче о возбуждении оптического микроволновода в торец примыкает группа задач о неоднородностях типа *скачка поперечного сечения, излома, изгиба, разрыва* и т. д. (рис. 18, б—д; [158, 221, 432—437]). Сюда же следует отнести группу задач о *излучении (возбуждении) из открытого конца плоского или круглого волноводов с прозрачными стенками* (рис. 18, д; [133—137, 438]), их возбуждение с помощью металлических волноводов (рис. 18, е; [137, 170—176]) и др. (см. также п. 1.4).

Если  $h_{эф}/\lambda \simeq 1$ , то возбуждение в торец становится малоэффективной и сложной в реализации задачей [426—429]. Конку-



Р и с. 18. Неоднородности в диэлектрических волноводах: а — возбуждение в торец, б — скачкообразное изменение размеров и материала волновода, в — излом, г — изгиб, д — разрыв с одновременным изменением направления (изломом) волновода, е — возбуждение диэлектрического волновода со стороны металлического волновода тех же поперечных размеров

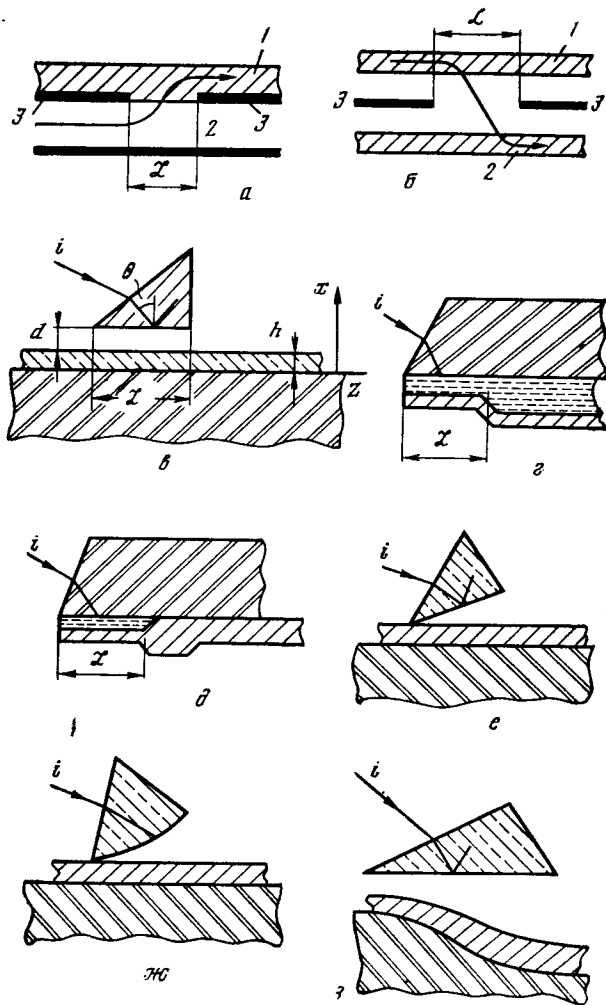
рентоспособным методом возбуждению в торец оказался способ ввода (вывода) излучения *через боковую поверхность световода*. По существу это реализация известной волноводной ситуации при направленном ответвлении мощности в двух связанных линиях. Простейшими примерами в этом отношении являются схема возбуждения поверхностных волн в открытой линии 1 через щель в стенке металлического волновода 2 (рис. 19, а [439]) и схема связи двух пленочных световодов 1 и 2 через широкое окно (рис. 19, б; [345]). В принципиальном отношении обе схемы совершенно идентичны. Участок связи между линиями определяется размером щели  $L$ . При распространении поверхностных волн вдоль пленок на участке  $L$  мы имеем систему из двух *связанных пленочных волноводов* (для структуры на рис. 19, а в качестве второго пленочного волновода можно считать зеркальное отображение пленки 1 в идеально проводящей нижней стенке волновода 2) с воздушным промежутком между слоями диэлектрика [48, 136]. Вне участка  $L$  связь исключается за счет экранов 3 \*. Процесс взаимной перекачки энергии волны одного волновода в другой на участке  $L$  носит название *биений*. Длина волны биений определяется так:

$$\Lambda = \frac{2\pi}{h_{ov} - h_{od}}, \quad (1.8)$$

где  $h_{ov}$ ,  $h_{od}$  — продольные волновые числа четной и нечетной волн

\* Мы здесь отмечаем только основные обзорные работы, касающиеся этих главных способов возбуждения. Несомненный интерес для приложений представляют и другие схемы, например, возбуждение поверхностной волноводной волны в тонкой полупроводниковой пленке непосредственно тонкопленочным полупроводниковым лазером [427] и некоторые другие.

\* Разумеется, есть некоторая переходная область  $\Delta L$ , где связь отлична от нуля за счет дифракции поверхностных или волноводных волн на краях щели  $L$ . Обычно  $\Delta L/L \ll 1$ .



Р и с. 19. Схемы возбуждения диэлектрических волноводов (световодов): целевые — а — через щели связи между диэлектрическим (1) и металлическим (2) волноводами, б — через щель между двумя световодами (1 и 2); призмные — в — с постоянной величиной зазора, г, д — через подложку, е — линейный зазор, ж — квадратичный закон изменения величины зазора, з — более сложный закон изменения величины зазора

трехслойного симметричного волновода (на  $L$ ). Подбирая длину участка взаимодействия  $L$  кратной целому (точнее, почти целому) числу полуволн биений  $\Delta$ , можно добиться эффективной перекачки энергии из одной линии в другую. Мы рассмотрим эту процедуру в дальнейшем более подробно (§ 4.5).

Возбуждение в пленочном волноводе  $m$ -й поверхностной волны с помощью диэлектрической призмы (рис. 19, в) в принципиаль-

ном отношении ничем не отличается от только что рассмотренного процесса биений. Действительно, монохроматическая волна  $\text{exp}\{ikr\}$  возбуждения ( $i$ ) должна иметь  $z$ -компоненту волнового вектора, равную  $kn_m^*$  ( $k_z = n^*k$ ), что превышает величину  $kn$  для пленки и зазора (между призмой и пленкой) [429]. Нужной проекцией  $k_z$  обладает поле, которое в зазоре имеет вид поверхностной волны, т. е. луч  $i$  на нижнюю грань призмы должен попасть под углом полного внутреннего отражения. Если показатель преломления материала призмы  $n_{\text{пр}} > n_m^*$ , то использование в волне  $i$  подходящей поляризации и подбор угла  $\theta$  позволяют выполнить условие фазового синхронизма волны возбуждения и  $m$ -й собственной (поверхностной) волны пленки. Это условие имеет вид  $n_{\text{пр}} \sin \theta = n_m^*$ . Механизм фазового синхронизма широко используется в СВЧ-электронике, когда для эффективного взаимодействия поля с электронным потоком необходимо уравнивать скорость электронов  $v_{\text{эл}}$  с фазовой скоростью одной из поверхностных (замедленных) волн  $v_{\text{ф}}$ , так что  $v_{\text{ф}} \simeq v_{\text{эл}}$ . В электронике поверхностные волны иногда называют *пространственными гармониками*.

Механизм ввода энергии в световод через его боковую поверхность на схеме рис. 19, в получил название *туннельного ввода*; иногда его называют также *призменным вводом*.

При призмном вводе излучения в пленку также необходимо обеспечить максимальную перекачку энергии из волны возбуждения  $i$  в пленку. Механизм здесь тот же, что и в структурах со щелью (рис. 19, а, б), — необходимо обеспечить экранирование связи волноведущих пленок друг с другом вне участка взаимодействия  $L$ . Мы приведем два варианта с так называемым *вводом излучения через подложку* (рис. 19, г, д; [427]). Здесь в качестве воздушного зазора (ср. с рис. 19, в) применен диэлектрик с малым коэффициентом преломления. Излучение вводится в пленку через скос в подложку, таким образом, в этих схемах нет отдельной призмы, как это было, например, в схеме возбуждения, представленной на рис. 19, в. Такие конструкции (без отдельной призмы) удобны для интегральных оптических структур. Участок взаимодействия  $L$  в схеме рис. 19, г справа ограничен резким увеличением величины зазора, что делает переизлучение в призму пренебрежимо малым. В схеме рис. 19, д, напротив, участок взаимодействия  $L$  справа ограничен резким увеличением толщины пленки. Это увеличение, естественно, таково, что волна с участка  $L$  может эффективно проходить через нерегулярный участок и в регулярном волноводе не возбуждаются высшие типы волн [427, 429, 440—442].

В отличие от схем с резкими изменениями свойств на конце участка взаимодействия (как, например, на рис. 19, г, д) разработана целая группа вводов энергии с зазором, *меняющимся по линейному* (рис. 19, е; [427, 441—443]), *квадратичному* (рис. 19, ж;

[444]) или более сложному закону (рис. 19, б; [441, 445—450]). Подбором конструкции плавного перехода можно, во всяком случае теоретически, достичь 100% ввода энергии пучка в волновод. Практически достигнутые результаты ниже и составляют величины порядка 60—80%.

Объемные элементы, основанные на принципах геометрической оптики (призмы, линзы, зеркала, дифракционные решетки, направленные ответвители, фильтры и т. д.), находят применение также и в планарных двумерных вариантах, удобно согласуясь с планарными или квазипланарными конструкциями линий передачи интегральной оптики. Этот раздел интегральной оптики получил название тонкопленочной оптики [427, 429, 450]. Было показано, что в области существования волны  $m$ -го типа ее эффективный показатель преломления  $n_m^*$  монотонно увеличивается с увеличением толщины пленки. В пленочной (двумерной), равно как и в объемной, оптике для эйконала  $\varphi(x, z)$ , определяющего фазу поля  $v(x, z) = A(x, z) \exp\{ik\varphi(x, z)\}$ , можно получить уравнение

$$[\text{grad } \varphi(x, z)]^2 = [n^*(x, z)]^2 = N^2(x, z), \quad (1.9)$$

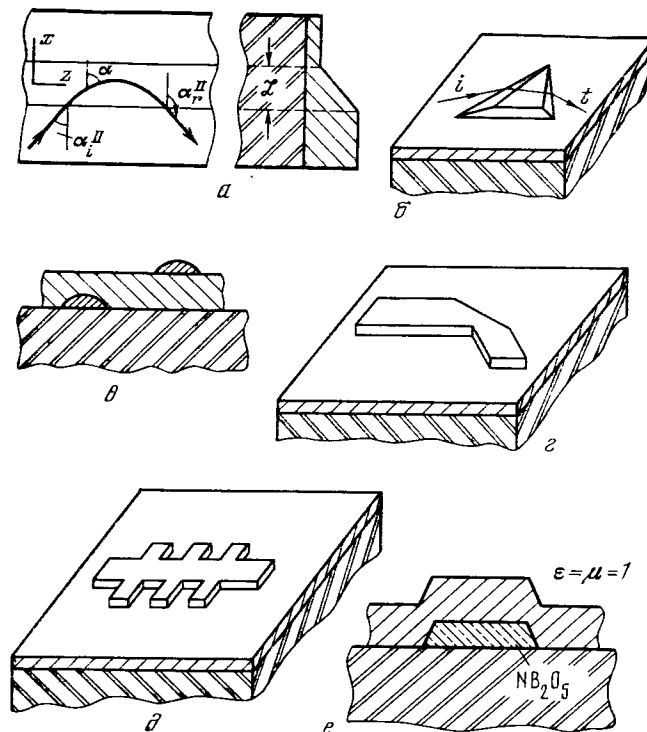
применимость которого ограничена условием  $|k \text{ grad } N| \ll 1$ . Последнее условие требует больших размеров переходной области  $\mathcal{L}$  (по сравнению с  $\lambda$ ). Из уравнения эйконала непосредственно (по обычным правилам классической оптики (см., например, [40, 41]) следует закон преломления света при переходе от области с  $n^* = N^I$  в область с  $n^* = N^{II}$

$$N^I \sin \alpha_I = N^{II} \sin \alpha_{II}. \quad (1.10)$$

Угол преломления  $\alpha_{II}$  не зависит от профиля поперечного сечения переходной области  $\mathcal{L}$  (рис. 20, а). Однако, как и в классической теории волноводов, профиль перехода  $\mathcal{L}$  определяет потери на отражение излучения и преобразование в высшие типы волн. Кроме того, от закона изменения профиля перехода зависит интегральная характеристика — величина смещения пучка вдоль границы раздела [42, 450—452]. При определенных условиях в фактически двумерной клинообразной пленочной структуре (рис. 20, а) возможно полное внутреннее отражение, когда толщина пленки оказывается меньше критической, т. е.  $h_I < h_{\min}$ . При этом для полного отражения (возвращения луча в регулярную область II) необходимо и достаточно чтобы

$$\alpha_i^{II} > \alpha_c, \quad \text{где } \alpha_c = \arcsin(N^I/N^{II}). \quad (1.11)$$

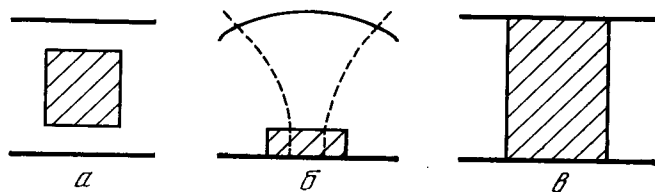
Известны два варианта формирования призм и линз в тонкопленочной оптике: изменением толщины пленки (рис. 20, б) и внедрением подходящим образом сформированного слоя с высоким показателем (рис. 20, в). В отличие от классической оптики, в которой призмы, линзы и другие элементы находятся в среде (обычно вакуум, воздух, иногда вода), показатель преломления



Р и с. 20. Тонкопленочные элементы интегральной оптики: а — рефракционный поворот луча в пленке с изменяющейся толщиной, б — тонкопленочная призма поверхностной волны, в — введение инородных включений в пленку и подложку, г — поворот пленочного лучевода с «зеркалом». д — фильтр, переменный разделитель H- и E-волн в планарном световоде

которой ниже, чем у данного элемента, в тонкопленочной оптике эффективный коэффициент преломления среды может быть большим или меньшим по отношению к эффективному коэффициенту преломления пленки. Это зависит от профиля поперечного сечения и в тонкопленочной оптике имеется, таким образом, широкая свобода выбора профиля при создании элементов с необходимыми свойствами.

Примечательно, что основные законы геометрической оптики оказываются справедливыми и для пленочных волноведущих структур. Это дает, во-первых, принципиальную возможность создания различных тонкопленочных элементов ИО, а, во-вторых, позволяет пользоваться фактически тем же математическим аппаратом для описания работы пленочного элемента. Так, например, угол отклонения луча пленочной призмой (рис. 20, б) и ее дисперсия  $\partial\theta/\partial\lambda$  вычисляются по обычным формулам для трехмерной призмы с очевидной заменой ее показателя преломле-



Р и с. 21. Диэлектрическая призма в ленточном (а) и полусферическом (б) открытых резонаторах

ния на относительный показатель преломления  $N_R = N^{II}/N^I$ . В тонкопленочной оптике относительный показатель преломления  $N_R$  и его дисперсия

$$\frac{d \ln N_R}{d\lambda} = \frac{d \ln N^{II}}{d\lambda} - \frac{d \ln N^I}{d\lambda} \quad (1.12)$$

выбором толщины пленки могут изменяться в весьма широких пределах.

Указанные возможности реализуются в целом ряде устройств: *зеркал, фильтров* (рис. 20, г, д), *призмных разделителей И- и Е-волн* с углом пространственного разделения порядка  $1^\circ$  [451], *разветвителей, трансформаторов волн* (например,  $H_1 \rightleftharpoons H_2$  [453]), *резонаторов бегущей волны, переключателей* и многого другого [451—458, 499—500].

1.10. *Диэлектрические тела в открытых резонансных структурах* выполняют разные роли. Прежде всего диэлектрики вводятся в ОР для исследования свойств и измерения параметров самих диэлектриков [14, 459—461]. При этом диэлектрик обычно существенно меняет картину собственных колебаний ОР (без диэлектрика), в отличие от закрытого резонатора, полностью заполненного диэлектриком\*. В теоретическом плане исследования ОР даже с зеркалами «правильной формы», но с диэлектрическим телом оказываются чрезвычайно сложной задачей математической теории дифракции. За редким исключением для нахождения добротных колебаний необходимо привлекать численные методы. Однако зачастую они оказываются весьма неэффективными даже для наиболее современных быстродействующих ЭВМ, ибо необходимо оперировать с матрицами очень большого порядка.

Для некоторых структур, например, прямоугольной двумерной диэлектрической призмы в ленточном ОР можно получить приближенные выражения для полей и собственных частот [14], используя *импедансные граничные условия резонансного типа* [11, 12, 14, 15]. Применение этих граничных условий по существу сводит задачу об ОР к задаче об эквивалентном закрытом резонаторе, что

существенно облегчает решение. Однако такой подход применим далеко не всегда, является принципиально приближенным и требует большой внимательности и осторожности при анализе результатов. Несомненным достоинством такого подхода является простота, физическая наглядность и возможность получения простых аналитических формул. В гл. 4 разбирается ряд примеров ОР с диэлектрическими телами.

Малые диэлектрические тела в ОР используются для исследования свойств самих ОР [23, 462]. Они не должны сколько-нибудь заметно влиять на свойства ОР и учитываются по методу малых возмущений.

Имеется и ряд других применений призм в ОР. Выше мы отмечали использование призмы в лазере для сужения полосы генерации [402]. В дальнейшем мы снова обратимся к этому кругу вопросов.

Интересным классом задач в ОР являются колебания типа *шепчущей галереи* [233—239, 466, 467]. Они определяют, в частности, паразитные типы колебаний в ОР с диэлектрическим стержнем [235], а также ограничивают возможность получения лазерных систем с большой апертурой (например, *дисковый усилитель* [466]).

\* \* \*

Проведенный краткий обзор возможных применений диэлектрических тел и, в частности, клина в электродинамике коротковолновых диапазонов волн свидетельствует о большом разнообразии задач, с которыми сталкивается здесь теория. Трудно себе представить, чтобы можно было бы развить единый эффективный математический аппарат для адекватного описания столь широкого класса физических задач. В силу этого приходится к каждой новой задаче применять новый подход, пригодный для решения именно этой задачи. Это не всегда удобно, но другого выхода, по-видимому, нет.

## § 2

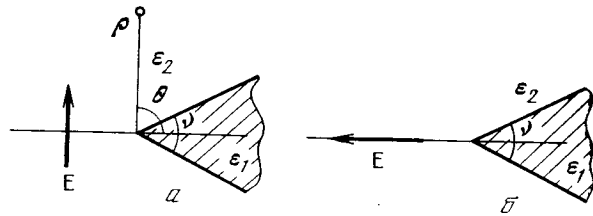
### Постановка задачи дифракции волны на однородном диэлектрическом клине. Условие на ребре

2.1. Электромагнитное поле  $E(r)$ ,  $H(r)$ , рассеянное однородным неограниченным магнито-диэлектрическим клином (рис. 6, б; 22) должно удовлетворять уравнениям Максвелла

$$\text{rot } E = ik\mu_j H, \quad \text{rot } H = -ike_j E, \quad j = 1, 2, \quad (2.1)$$

при временной зависимости  $\exp\{-i\omega t\}$ ; как обычно, всюду в дальнейшем множитель  $\exp\{-i\omega t\}$  не пишется, но подразумевается. В уравнениях (2.1) индекс  $j$  определяет область внутри

\* Собственные функции пустого закрытого резонатора и полностью заполненного однородным диэлектриком без потерь идентичны.



Р и с. 22. К установлению условий на ребре диэлектрического клина

( $j = 1$ ) и вне ( $j = 2$ ) клина (у полей  $E$ ,  $H$  в (2.1) индекс  $j$  опущен).

На обеих гранях  $S$  клина тангенциальные граничные компоненты полей внутри и вне клина должны быть непрерывными:

$$E^{(1)}(S) = E^{(2)}(S), \quad H^{(1)}(S) = H^{(2)}(S) \quad \text{для } r \in S. \quad (2.2)$$

Источниками поля  $E$ ,  $H$  являются сторонние токи  $j_{ст}$  и заряды  $\rho_{ст}$ , занимающие ограниченный объем  $V_{ст}$ , расположенный на конечном расстоянии от вершины клина ( $r = 0$ ). Объем  $V_{ст}$  с источниками может быть как вне объема клина, так и внутри него. Источники могут быть размещены и на гранях клина, но при этом они обязаны занимать ограниченную поверхность  $S_{ст}$  грани и  $S_{ст}$  должна быть на конечном расстоянии от вершины клина. При этих условиях в соответствии с требованиями теоремы единственности поле  $E$ ,  $H$  в бесконечно удаленной точке ( $r \rightarrow \infty$ ) для непоглощающей среды должно удовлетворять принципу излучения Зоммерфельда

$$\begin{aligned} \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial E}{\partial r} - ikE \right) &= 0, \\ \lim_{r \rightarrow \infty} r \left( \frac{\partial H}{\partial r} - ikH \right) &= 0. \end{aligned} \quad (2.3)$$

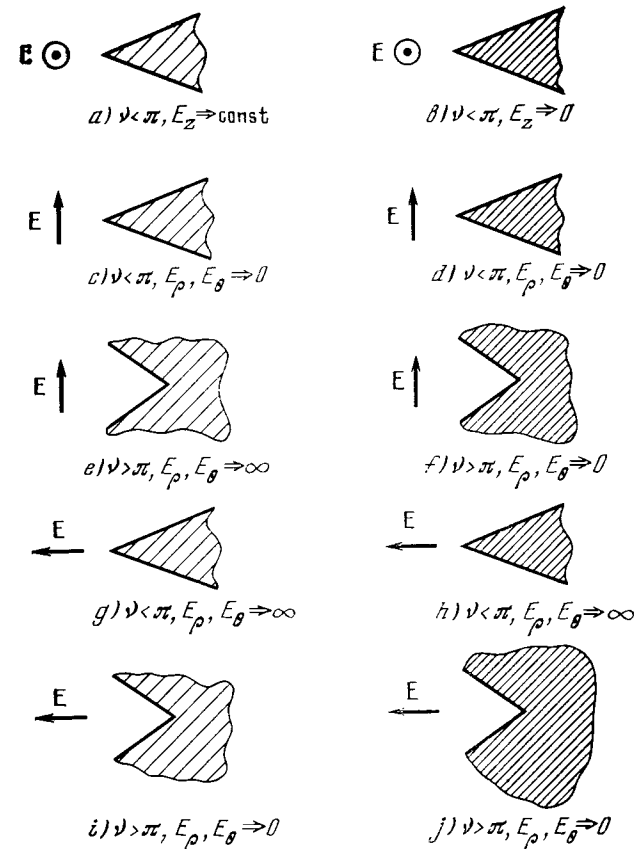
Обычно на практике более целесообразно пользоваться не условиями излучения в форме (2.3) для непоглощающей среды, а предполагать при исходной постановке задачи, что диэлектрическая и (или) магнитная проницаемость обеих сред комплексны:

$$\epsilon_j = \epsilon'_j + i\epsilon''_j, \quad \mu_j = \mu'_j + i\mu''_j, \quad j = 1, 2. \quad (2.4)$$

После получения решения в окончательных результатах можно перейти к пределу  $\epsilon''_j \rightarrow 0$ ,  $\mu''_j \rightarrow 0$ , т. е. записать итоговые соотношения для непоглощающей среды\*.

2.2. *Условие на ребре.* В предыдущем параграфе (с. 18) мы уже отмечали, что для выполнения требований теоремы единственности

\* В ряде случаев введение предположения о малых потерях энергии в каждой точке пространства позволяет сделать ход решения чрезвычайно наглядным. Так, например, при применении метода Винера — Хопфа — Фока появляется полоса регулярности.

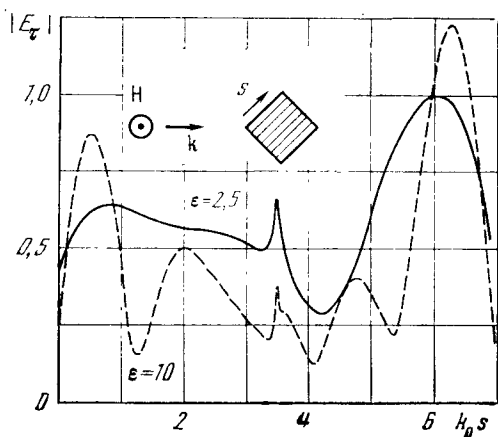


Р и с. 23. Схематическое представление поведения компонент электромагнитного поля вблизи диэлектрических (слева) и идеально проводящих (справа) клиновидных структур

дифракционное поле должно удовлетворять условию на ребре\*. Это условие, как известно, исключает для искомого поля появление источников (или стоков) вблизи вершины клина, являющейся геометрической сингулярностью задачи дифракции на прозрачном клине. Ввиду принципиальной важности этого момента остановимся на нем несколько подробнее.

Поскольку условие на ребре есть условие предельного типа, т. е. должно быть выполнено при  $r \rightarrow 0$  ( $r$  — расстояние до ребра), естественно все же говорить о безразмерном расстоянии, каковым

\* Иногда эти условия необоснованно называют условиями Майкснера. Работа Майкснера датирована, как известно, 1954 г. (более полно и подробно см. [66]), а условие на ребре диэлектрического клина для произвольного числа сред было установлено Г. А. Гринбергом в 1938 г. [65]. Кроме того, теория Майкснера [66] является, как показано в [70], внутренне противоречивой.

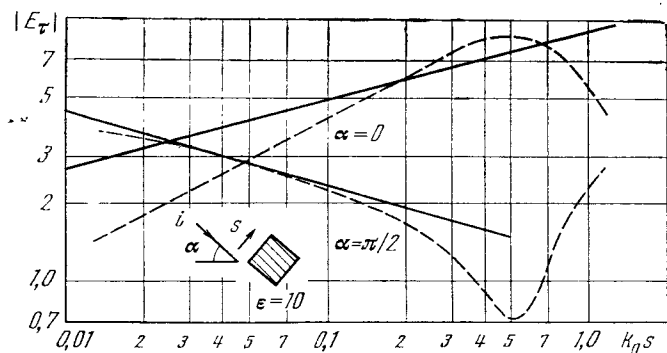


Р и с. 24. Распределение интенсивности тангенциальной компоненты электрического поля вдоль грани диэлектрического прямоугольного стержня

является величина  $kr$ . Требование  $kr \Rightarrow 0$  фактически обозначает переход к статическому случаю, который исследован достаточно подробно [65, 67]. Поле при  $kr \Rightarrow 0$  действительно может иметь сингулярный характер\*. При этом в «чисто» статическом случае, когда  $r \Rightarrow 0$ , электрическое поле стремится к бесконечности как величина

$$r^{\eta_{\min}-1}, \quad (2.5)$$

где  $\eta_{\min}$  — наименьший из положительных корней следующих



Р и с. 25. Распределение интенсивности тангенциальной компоненты электрического поля вблизи вершины диэлектрического клина: 1 — численные результаты [70]; 2 — статика

\* Сингулярность отсутствует в случае симметричного возбуждения клина. Эти случаи показаны на рис. 22 [70].

уравнений [65]:

$$\sin \pi \eta \mp \alpha \sin (\pi - \nu) \eta = 0. \quad (2.6)$$

Здесь  $\alpha = (\epsilon_1 - \epsilon_2)/(\epsilon_1 + \epsilon_2)$  (см. рис. 22).

К настоящему времени отсутствует электродинамическая теория поведения поля у ребра прозрачного клина при  $kr \Rightarrow 0$ . Вместе с тем в работе [70] проведены тщательные численные исследования характера изменения полевых величин у ребра. Некоторые результаты этих расчетов приведены на рис. 23—25. На схеме рис. 23 дано схематическое представление поведения полей при  $kr \Rightarrow 0$  для прозрачного и идеально проводящего клиньев при различной ориентации вектора напряженности электрического поля  $E$ . На рис. 24 и 25 представлены зависимости распределения интенсивностей тангенциальных компонент электрического поля вдоль грани конечной призмы. Наиболее важным является вывод и утверждение [70] о том, что характер сингулярности поля и ребра диэлектрического клина в электродинамическом случае соответствует характеру *статического поля* (формулы (2.5) и (2.6)).

Более сложной, чем рассмотренная выше, является ситуация у ребра металлического клина, расположенного на границе раздела диэлектрик — феррит (ср. рис. 6, в). Устройства, содержащие элементы с такими гранями, чрезвычайно широко используются на практике особенно в последнее время в связи с созданием большого числа устройств миллиметрового диапазона с анизотропными включениями [11, 13]. Анализ функциональных структур этого класса весьма непрост и требует особой тщательности при установлении условия на ребре клина, которое в общем случае зависит от ориентации вектора подмагничивания, отношения компонент тензора магнитной проницаемости и т. д. Интересные исследования по этому кругу вопросов содержатся в работе [62].



## МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

В этой главе мы проведем короткий обзор методов математической теории дифракции, нашедших, в частности, приложение к задаче рассеяния на диэлектрических структурах. Разумеется, сделать полный обзор имеющегося большого числа методов весьма сложно, поэтому был проведен отбор из числа тех методов, которые, как нам представляется, нашли наибольшее применение.

Здесь же мы рассмотрим ряд фундаментальных результатов теории дифракции (формулы Френеля, метод интеграла Зоммерфельда и др.), являющихся ключевыми в теории дифракции. Они позволяют, с одной стороны, проводить проверку точности различных приближенных подходов, которыми приходится столь часто пользоваться на практике из-за их простоты, универсальности, доступности и т. д. С другой стороны, ключевые задачи (и структуры) являются тем надежным фундаментом, на котором строится здание современной теории дифракции. Основным подходом здесь является *метод последовательных дифракций* или *последовательных приближений*, идеи которого восходят к работам Шварцшильда (Math. Ann., 1902, 55, 177). Не представляет принципиальной сложности написание получающегося при такой процедуре ряда последовательных дифракций (иногда его называют рядом Неймана) или знаменателя Фредгольма (для резонансных структур). Основная сложность состоит в доказательстве сходимости такой процедуры к строгому решению применительно к каждой конкретной задаче. К настоящему времени в этом направлении получены сильные результаты и к ним мы будем не раз еще обращаться на протяжении данной главы и всей книги в целом.

### § 1.1

#### Геометрическая оптика. Формулы Френеля

1.1.1. *Геометрическая оптика* является предельным случаем *волновой оптики*, когда длина волны стремится к нулю ( $\lambda \Rightarrow 0$ ). Однако, поскольку  $\lambda$  величина размерная, говорить о пределе  $\lambda \Rightarrow 0$  бессмысленно, если не принять во внимание характерную величину  $a$  объекта дифракции. Таким образом, переход от волновой теории электромагнетизма к геометрической оптике требует

наличия в структуре задачи большого параметра  $ka^*$ . В пределе при  $ka \Rightarrow \infty$  волновое уравнение переходит в *уравнение эйконала* для фазы лучей. Если речь идет о неоднородной среде, то в качестве параметра следует взять характерный масштаб  $\mathcal{L}$  изменения параметров среды  $\varepsilon(\mathbf{r})$ ,  $\mu(\mathbf{r})$ , амплитуды волны  $A$  и т. п. [247, 478].

Итак, пусть монохроматическая волна описывается скалярным уравнением Гельмгольца

$$(\Delta + k^2 \in \mu)u(\mathbf{r}) = 0. \quad (1.1.1)$$

Будем искать решение уравнения (1.1.1) в виде дебаевского разложения по обратным степеням волнового числа  $k$ :

$$u(\mathbf{r}) = e^{ik\psi(\mathbf{r})} \sum_{m=0}^{\infty} \frac{1}{(ik)^m} A_m(\mathbf{r}). \quad (1.1.2)$$

Подставляя (1.1.2) в (1.1.1) и приравнивая члены при одинаковых степенях малого параметра  $1/k$  к нулю, получим следующую систему уравнений для фазы (эйконала)  $\psi(\mathbf{r})$  и амплитудных коэффициентов  $A_m(\mathbf{r})$ :

$$(\nabla\psi)^2 = \varepsilon\mu, \quad (1.1.3)$$

$$2\nabla A_0 \nabla\psi + A_0 \Delta\psi = 0, \quad (1.1.4)$$

$$2\nabla A_1 \nabla\psi + A_1 \Delta\psi = -\Delta A_0, \quad (1.1.5)$$

• • • • •

Уравнение для фазы  $\psi(\mathbf{r})$  (1.1.3) называется *уравнением эйконала*; рекуррентная последовательность уравнений (1.1.4), (1.1.5) и т. д. для амплитуд  $A_m$  в разложении (1.1.2) представляет собой *уравнения переноса* соответственно нулевого, первого, второго и последующих приближений. В большинстве случаев ограничиваются рассмотрением нулевого приближения  $u \simeq A_0 \exp\{ik\psi\}$ .

Уравнения (1.1.3), (1.1.4) и т. д. можно переписать в безразмерном виде. Пусть  $1/\mathcal{L} \sim (1/\varepsilon) |\nabla\varepsilon| \ll 2\pi/\lambda = k$ . Введем безразмерные координаты  $\mathbf{r}_1 = \mathbf{r}k$ . Тогда уравнение (1.1.1) можно записать так:

$$(\Delta_1 + \varepsilon\mu)u = 0, \quad \Delta_1 \equiv \frac{\partial^2}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial y_1^2} + \frac{\partial^2}{\partial z_1^2} \quad (1.1.6)$$

и его решение можно искать в следующем виде:

$$u(\mathbf{r}_1) = \exp\left\{\frac{i}{\sigma} \Psi(\sigma\mathbf{r}_1)\right\} \sum_{m=0}^{\infty} \left(\frac{\sigma}{i}\right)^m A_m(\sigma\mathbf{r}_1), \quad (1.1.7)$$

где  $\sigma \sim 1/k\mathcal{L} \ll 1$ .

\* Следует помнить, что малой по сравнению с размерами препятствия должна быть  $\lambda$  в поле падающей волны (а не в материале объекта дифракции).

Подстановка (1.1.7) в (1.1.6) и приравнивание нулю коэффициентов при одинаковых степенях малого параметра  $\sigma$  приводит к искомой системе уравнений эйконала и переноса

$$(\nabla_2 \Psi)^2 = \epsilon \mu, \quad (1.1.8)$$

$$2(\nabla_2 A_0 \nabla_2 \Psi) + A_0 \Delta_2 \Psi = 0, \quad (1.1.9)$$

где  $\nabla_2 \equiv (\partial/\partial(\sigma x_1), \partial/\partial(\sigma y_1), \partial/\partial(\sigma z_1))$ .

Приведенная форма решения в виде (1.1.7) предполагает, что амплитудные коэффициенты  $A_m$  и градиент фазы  $\nabla_1(\Psi/\sigma) = \nabla_2 \Psi$  являются медленно меняющимися функциями координат. Это означает, что функция  $u(\mathbf{r}_1)$  в виде (1.1.7) представляет собой почти плоскую волну.

1.1.2. *Формулы Френеля*, описывающие процесс падения, отражения и преломления плоской волны на плоскую границу раздела двух однородных сред, являются основными соотношениями геометрической оптики. Однако область их применимости, как мы не раз увидим в дальнейшем, гораздо шире, чем это кажется на первый взгляд. Дело в том, что формулы Френеля носят локальный характер и при определенных условиях (например, достаточно гладкая граница раздела) реальное поле «в основном» хорошо согласуется с геометрикооптическим описанием, а отклонения от плоской модели являются малыми возмущениями по отношению к основному эффекту (ср. п. 1.1.1).

Вывод формул Френеля хорошо известен, и мы его здесь приводить не будем, отсылая читателя к многочисленным учебникам (см., например, [37—41, 331]). Задачу падения плоской электромагнитной волны с произвольной ориентацией векторов  $\mathbf{E}$  и  $\mathbf{H}$  (рис. 1) под углом  $\varphi$  на плоскую границу ( $z = 0$ ) раздела однородных изотропных сред 1 и 2 с различными диэлектрическими и магнитными проницаемостями принято разбивать на две отдельные задачи с четкой фиксацией векторов поля падающей волны по отношению к плоскости падения (плоскость  $xoz$  на рис. 1). Первая задача — магнитное поле падающей волны перпендикулярно плоскости падения; поле имеет компоненты  $H_y, E_x, E_z$ . Иногда этот случай называют *s*-поляризацией. Вторая задача — электрическое поле падающей волны перпендикулярно плоскости падения, а, стало быть, поле имеет компоненты  $E_y, H_x, H_z$ : *p*-поляризация. В силу линейности исходной задачи случай произвольной ориентации векторов поля можно описать суммой решений двух указанных задач.

Пусть плоская волна первой (*s*) поляризации  $H_y^i(x, z) = \exp\{ik(x \sin \varphi + z \cos \varphi)\}$  падает на границу раздела  $z = 0$  двух сред  $\epsilon_1 = \mu_1 = 1$  и  $\epsilon_2 = \epsilon, \mu_2 = \mu$ . Это предположение не уменьшает общности, но делает выкладки более простыми. Поле в верхней среде будет содержать, кроме падающей, еще и отраженную волну  $H_y^r(x, z) = R_1 \exp\{ik(x \sin \varphi - z \cos \varphi)\}$ ,

уходящую от границы  $z = 0$  под углом  $\varphi$ . В нижней среде 2 поле представляется обобщенной плоской волной  $H_y^t(x, z) = D_1 \exp\{ik(x \sin \varphi + zv)\}$ , уходящей от границы раздела под углом  $\psi$ , направляющий косинус  $v$  которой удовлетворяет закону преломления  $v = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$ ,  $n = \sqrt{\epsilon \mu}$  — показатель преломления нижней среды. Требуя непрерывности тангенциальных границе раздела компонент поля  $H_y$  и  $E_x$  при  $z = 0$ , получим для коэффициента отражения  $R_1$  и коэффициента прохождения  $D_1$  первой поляризации (по магнитному полю)

$$R_1 = \frac{\epsilon \cos \varphi - v}{\epsilon \cos \varphi + v}, \quad D_1 = \frac{2\epsilon \cos \varphi}{\epsilon \cos \varphi + v}. \quad (1.1.10)$$

Поступая аналогично для случая второй поляризации, получим коэффициенты отражения  $R_2$  и прохождения  $D_2$  (по электрическому полю):

$$R_2 = \frac{\mu \cos \varphi - v}{\mu \cos \varphi + v}, \quad D_2 = \frac{2\mu \cos \varphi}{\mu \cos \varphi + v}. \quad (1.1.11)$$

Представляет интерес коротко отметить глубокое физическое содержание формул Френеля (1.1.10) и (1.1.11). Мы уже отмечали, что в них содержится известный закон отражения: угол падения равен углу отражения. Здесь также содержится хорошо известный закон преломления  $\sin \varphi = n \sin \psi$ .

Прежде всего рассмотрим случай нормального падения  $\varphi = 0$  волны на границу  $z = 0$ . Из формул (1.1.10) и (1.1.11) непосредственно следует, что  $R = -R_1 = R_2$  и  $D = wD_1 = D_2$ ,  $w = \sqrt{\mu/\epsilon}$ , и, таким образом, наступает поляризационное безразличие, а коэффициенты отражения  $R$  и преломления  $D$  могут быть представлены в следующем виде:

$$R = \frac{w - 1}{w + 1}, \quad D = \frac{2w}{w + 1}. \quad (1.1.12)$$

Последние соотношения хорошо известны из теории линий передачи с *ТЕМ*-волной. Именно так выражаются коэффициенты отражения и прохождения для двух линий с различными волновыми сопротивлениями  $w$  и 1.

Полное отражение волны от границы раздела имеет место, например, если  $\mu = \text{const} < \infty$ , а  $\epsilon \Rightarrow \infty$ . Тогда коэффициенты отражения волн обеих поляризаций стремятся к своим предельным значениям  $R_1 = 1$  и  $R_2 = -1$ . Напротив, при  $\epsilon = \text{const} < \infty$ , а  $\mu \Rightarrow \infty$   $R_1 = -1$  и  $R_2 = 1$ .

Однако полное отражение, чрезвычайно широко используемое на практике, может быть реализовано и при конечных значениях  $\epsilon$  и  $\mu$ . Так, например, если  $v = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$  равно нулю или является чисто мнимой величиной, то  $|R_1| = |R_2| = 1$  при условии  $n^2 \ll \sin^2 \varphi$ . Сюда относится явление *полного внутреннего отражения* (при падении волны на границу  $z = 0$  из среды 2; рис. 1) и явления в присутствии границ сред с  $\epsilon < 1$ . Об этом

мы будем подробно говорить в разделе о двухслойном диэлектрическом волноводе (§ 4.5) и некоторых других местах книги.

*Полное прохождение* волны через границу раздела, когда  $R_1 = 0$ , также представляет обширный практический интерес. Оно, как известно, реализуется для волн первой поляризации, когда падение волны происходит под углом Брюстера

$$\operatorname{tg} \varphi_B = n. \quad (1.1.13)$$

1.1.3. *Обобщенные формулы Френеля.* В электродинамике широкое применение находят различные типы приближенных граничных условий. По-видимому, наиболее известными из них являются *граничные условия Шукина—Леонтовича* для тел с большим по модулю комплексным показателем преломления  $n = n' + in''$ ,  $n'' \gg 1$ :

$$E_x = \omega H_y, \quad E_y = -\omega H_x. \quad (1.1.14)$$

Известны также и *импедансные анизотропные граничные условия*, обобщающие условия (1.1.14). Они имеют вид

$$E_x = -Z_{11}H_x + Z_{12}H_y, \quad E_y = -Z_{21}H_x + Z_{22}H_y. \quad (1.1.15)$$

Большое число примеров по реализации тензора импеданса  $\|Z\|$  содержится в монографии [11], а также работах [7, 12, 13]. Значение приближенных граничных условий типа (1.1.14), (1.1.15) и ряда подобных им по духу условий типа *импедансных граничных условий резонансного типа* [15, 12], *условий Вайнштейна—Сивова* [12] и т. п. состоит в том, что они позволяют заменить реальную структуру некоторыми граничными условиями на ее поверхности или, в общем, на некоторой достаточно произвольной поверхности, заключающей в себе рассматриваемый объект дифракции. Так, например, удовлетворив импедансным анизотропным граничным условиям (1.1.15) для падения волны первой ( $s$ ) поляризации на границу  $z = 0$ , получим обобщенные формулы Френеля

$$R_s^{(1)} = \frac{(\cos \varphi - a_{12})(1 + a_{21} \cos \varphi) + a_{11}a_{22} \cos \varphi}{A},$$

$$R_p^{(1)} = \frac{2a_{22} \cos \varphi}{A}, \quad (1.1.16)$$

где  $A = (\cos \varphi + a_{12})(1 + a_{21} \cos \varphi) - a_{11}a_{22} \cos \varphi$  и коэффициенты  $a_{ij}$  линейным образом связаны с  $Z_{ij}$ ,  $i, j = 1, 2$  (см. [11, гл. 2]).

Аналогично для волны второй ( $p$ ) поляризации обобщенные формулы Френеля имеют вид

$$R_p^{(2)} = \frac{(\cos \varphi + a_{12})(1 - a_{21} \cos \varphi) + a_{11}a_{22} \cos \varphi}{A}, \quad R_s^{(2)} = \frac{2a_{11} \cos \varphi}{A}. \quad (1.1.17)$$

Наличие коэффициентов отражения  $R_p^{(1)}$  и  $R_s^{(2)}$  в формулах (1.1.16) и (1.1.17) связано с появлением в отраженной волне второй поляризации за счет анизотропии в граничных условиях (1.1.15).

Вторая поляризация не возникает, если  $Z_{22} \Rightarrow 0$  в (1.1.16) и аналогично  $Z_{11} \Rightarrow 0$  в (1.1.17). При этом формулы (1.1.16), (1.1.17) естественным образом переходят в формулы Френеля (1.1.10) и (1.1.11). Из приведенных соотношений видно, в частности, относительная ошибка, даваемая приближенными граничными условиями Шукина—Леонтовича (1.1.14). По порядку величины эта относительная ошибка равна  $1/|n|^2$ , так как происходит из-за замены  $v = \sqrt{n^2 - \sin^2 \varphi}$  на  $n: v \simeq n [1 - (\sin^2 \varphi / 2 |n|^2)]$ .

Тем не менее приближенные граничные условия позволили получить ряд важных фундаментальных результатов в математической теории дифракции [1—18] и прочно вошли в арсенал математической и вычислительной физики.

## § 1.2

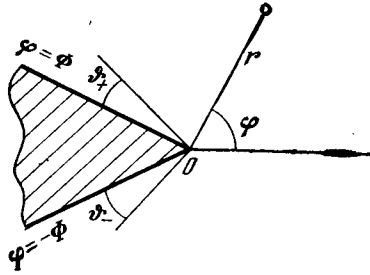
### Метод интеграла Зоммерфельда и его обобщение Г. Д. Малюжинцем

1.2.1. *Клиновидные или угловые области* (рис. 6) представляют удобную модель для широчайшего класса ключевых структур в электродинамике, акустике, гидродинамике, оптике, сейсмологии и ряде других областей науки и техники. Простейшей (по геометрии) структурой этого класса является идеально проводящая полуплоскость, рассеивающая падающую на нее волну. Это классическая задача Зоммерфельда [1]. При ее решении и решении задачи дифракции на клине с идеальными гранями особенно удобным является представление поля в виде контурного интеграла Зоммерфельда. Аналогично и в более сложных случаях дифракции или возбуждения клиновидных областей с разными значениями показателя преломления, разными импедансами граней и т. п. поле оказалось удобным представлять в виде того же интеграла Зоммерфельда. Наиболее сильные результаты принадлежат здесь Г. Д. Малюжинцу. Ниже мы коротко остановимся на них, следуя его работе [6]. Для получения численных результатов при исследовании поведения полей в угловых областях Г. Д. Малюжинец ввел и детально исследовал некоторую специальную функцию  $\psi_\Phi(z)$  комплексного аргумента  $z$ . Позднее она была табулирована; графики функции  $\psi_\Phi(z)$  имеются в монографии [10]. Там же приведены основные свойства этой функции.

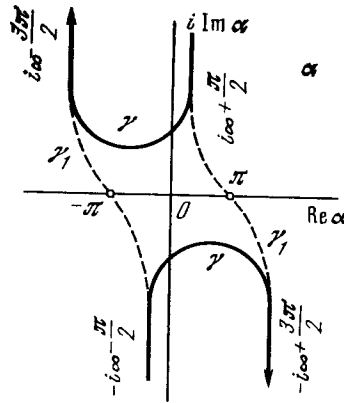
1.2.2. *Клин с заданными импедансами на гранях и находящийся в свободном пространстве* (рис. 2б) представляет удобную модель для выяснения основных моментов метода интеграла Зоммерфельда. Пусть плоская волна  $u^i(r, \varphi) = \exp\{-ikr \cos(\varphi - \varphi_0)\}$  падает на клин, грани которого описываются однородными импедансными граничными условиями

$$\frac{\partial u}{\partial \varphi} \pm ik \sin \vartheta_{\pm} u = 0 \quad \text{при } \varphi = \pm \Phi. \quad (1.2.4)$$

Здесь  $\sin \vartheta_{\pm} = Z_0/Z_{\pm}$ ,  $Z_0$  — волновое сопротивление среды;



Р и с. 26. К задаче возбуждения клина с импедансными граничными условиями на гранях цилиндрическим источником



Р и с. 27. Контур γ (сплошная кривая) в плоскости комплексной переменной α. Здесь же показаны перевальные пути γ<sub>1</sub> интегрирования в формуле (1.2.12)

$Z_{\pm}$  — импедансы граней клина  $\varphi = \pm\Phi$ . Постоянные величины  $\vartheta_{\pm}$  суть углы Брюстера, для которых коэффициент отражения плоской волны равен нулю, если волна под таким углом падает на плоскость с импедансами  $Z_{\pm}$ . Для поглощающих границ  $\text{Re } \vartheta_{\pm} \in (0, \pi/2)$ .

В общем случае решение задачи дифракции волны  $u^i(r, \varphi)$  на клине с импедансами (1.2.1) на гранях, удовлетворяющее принципу предельного поглощения (принципу погашаемости), может быть представлено интегралом Зоммерфельда

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha} s(\alpha + \varphi) d\alpha, \quad (1.2.2)$$

где контур  $\gamma$  в комплексной плоскости  $\alpha$  показан на рис. 27. Неизвестная функция  $s(\alpha)$  — так называемая трансформанта интеграла Зоммерфельда удовлетворяет условию регулярности в полосе  $|\text{Re } \alpha| < \Phi + \varepsilon$ , точнее, регулярно выражение

$$s(\alpha) - \frac{1}{\alpha - \varphi_0}. \quad (1.2.3)$$

Трансформанта  $s(\alpha)$  удовлетворяет системе функциональных уравнений, которая получается следующим образом. Запишем граничные условия (1.2.1) с помощью представления интеграла Зоммерфельда (1.2.2) так:

$$-\frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha} (\sin \alpha \pm \sin \vartheta_{\pm}) s(\alpha \pm \Phi) d\alpha \equiv 0, \quad r > 0. \quad (1.2.4)$$

Для выполнения тождества (1.2.4) необходимо и достаточно, чтобы коэффициент при экспоненте в подынтегральном выражении (1.2.4) был четной функцией  $\alpha$ . Это непосредственно приводит к следующим двум функциональным уравнениям Малюжинца [54]:

$$(\sin \alpha \pm \sin \vartheta_{\pm}) s(\alpha \pm \Phi) - (-\sin \alpha \pm \sin \vartheta_{\pm}) s(-\alpha \pm \Phi). \quad (1.2.5)$$

Подстановка вида

$$s(\alpha) = \sigma(\alpha) \Psi(\alpha) / \Psi(\varphi_0) \quad (1.2.6)$$

дает возможность вместо системы (1.2.5) получить более простую систему уравнений

$$\sigma(\alpha \pm \Phi) - \sigma(-\alpha \pm \Phi) = 0, \quad (1.2.7)$$

решения которых, удовлетворяющие условию регулярности (1.2.3), имеют вид

$$\sigma(\alpha) = \left[ \frac{\pi}{2\Phi} \cos \frac{\pi\varphi_0}{2\Phi} \right]^{\pm} \left[ \sin \frac{\pi\alpha}{2\Phi} - \sin \frac{\pi\varphi_0}{2\Phi} \right]. \quad (1.2.8)$$

Вспомогательная функция  $\Psi(\alpha)$  представляет решения функциональных уравнений Малюжинца (1.2.5), не имеющие полюсов и нулей в полосе  $|\text{Re } \alpha| < \Phi + \varepsilon$ . Логарифмическая производная этой функции легко находится с помощью (1.2.5) и интегралов Фурье. Функция  $\Psi(\alpha)$  может быть представлена в виде произведения специальных функций Малюжинца следующим образом:

$$\Psi(\alpha) = \Psi_{\Phi} \left( \alpha + \Phi + \frac{\pi}{2} - \vartheta_{+} \right) \Psi_{\Phi} \left( \alpha - \Phi - \frac{\pi}{2} + \vartheta_{-} \right) \times \\ \times \Psi_{\Phi} \left( \alpha + \Phi - \frac{\pi}{2} + \vartheta_{+} \right) \Psi_{\Phi} \left( \alpha - \Phi + \frac{\pi}{2} - \vartheta_{-} \right) \quad (1.2.9)$$

или, что то же самое, так:

$$\Psi(\alpha) = \left[ \Psi_{\Phi} \left( \frac{\pi}{2} \right) \right]^4 \left[ \cos \frac{\pi}{4\Phi} (\alpha + \Phi - \vartheta_{+}) \cos \frac{\pi}{4\Phi} \times \right. \\ \left. \times (\alpha - \Phi + \vartheta_{-}) \right] \frac{\Psi_{\Phi} \left( \alpha + \Phi - \frac{\pi}{2} + \vartheta_{+} \right) \Psi_{\Phi} \left( \alpha - \Phi - \frac{\pi}{2} - \vartheta_{-} \right)}{\Psi_{\Phi} \left( \alpha + \Phi - \frac{\pi}{2} - \vartheta_{-} \right) \Psi_{\Phi} \left( \alpha - \Phi + \frac{\pi}{2} + \vartheta_{+} \right)}. \quad (1.2.10)$$

В итоге точное решение задачи дифракции волны  $u^i(r, \varphi)$  на клине с импедансными гранями (1.2.1), получаемое подстановкой выражений (1.2.6) и (1.2.8) в интеграл Зоммерфельда (1.2.2), имеет вид

$$u(r, \varphi) = \frac{1}{4\Phi i} \int_{\gamma} e^{-ikr \cos \alpha} \frac{\Psi(\alpha + \varphi)}{\Psi(\varphi_0)} \frac{\cos(\pi\varphi_0/2\Phi)}{\sin(\pi(\alpha + \varphi)/2\Phi) - \sin(\pi\varphi_0/2\Phi)} d\alpha. \quad (1.2.11)$$

При  $kr > 0$  можно деформировать путь интегрирования  $\gamma$  в (1.2.11) в два перевальных пути  $\gamma_1$  (рис. 27), проходящих через

точки перевала  $\alpha = \pm\pi$ . Тогда решение (1.2.11) можно переписать в следующем виде:

$$u(r, \varphi) = \frac{i}{4\pi i} \int_{\gamma_1} e^{-ikr \cos \alpha} \frac{\Psi(\alpha + \varphi) [\cos(\pi\varphi_0/2\Phi)] d\alpha}{\Psi(\varphi_0) [\sin(\pi(\alpha + \varphi)/2\Phi) - \sin(\pi\varphi_0/2\Phi)]} + r_+ + r_- + \Sigma r_n. \quad (1.2.12)$$

Слагаемые  $r_+$ ,  $r_-$ ,  $r_n$  справа в решении (1.2.12) суть вычеты в полюсах подынтегрального выражения, расположенных между линиями контура  $\gamma_1$ , т. е. в полосе  $-\pi - \text{gd}(\text{Im } \alpha) < \text{Re } \alpha < \pi - \text{gd}(\text{Im } \alpha)$ ; гудерманиан  $\text{gd } x = \arccos(1/\text{ch } x)$ . При этом предполагается, что ни один из полюсов не лежит на контуре  $\gamma_1$ . Это предположение не является сколько-нибудь сильным ограничением, и от него нетрудно избавиться [10, 15]. Поскольку возможные значения величин  $\varphi$  и  $\text{Re } \varphi_0$  лежат в пределах  $(-\Phi, \Phi)$ , то в указанную полосу могут попасть только полюса  $\alpha_n = -\varphi + (-1)^n \varphi_0 + 2n\Phi$ , обусловленные разностью синусов в знаменателе подынтегрального выражения в (1.2.12), и два полюса  $\alpha_+ = -\varphi \pm (\pi + \Phi + \vartheta_{\pm})$ , принадлежащие первому и второму множителям функции  $\Psi(\alpha)$  в (1.2.9), которую, выделяя тот или другой множитель, можно переписать в одном из видов

$$\Psi(\alpha) = \Psi_{\Phi}(\alpha \pm \Phi \pm \frac{\pi}{2} \mp \vartheta_{\pm}) \Psi^{(\pm)}(\alpha), \quad (1.2.13)$$

где через  $\Psi^{(\pm)}(\alpha)$  обозначено произведение трех остальных множителей  $\Psi(\alpha)$  (1.2.9). Вычеты  $r_{\pm}$  в полюсах  $\alpha = \alpha_{\pm}$  определяются с помощью следующего соотношения:

$$\Psi_{\Phi} \left[ z \pm \left( 2\Phi + \frac{3\pi}{2} \right) \right] = \pm \sin \frac{\pi(\pi \pm z)}{4\Phi} \text{cosec} \frac{\pi z}{4\Phi} \times \Psi_{\Phi} \left( 2\Phi - \frac{\pi}{2} \pm z \right). \quad (1.2.14)$$

выделяющего полюс в тригонометрический множитель. При написании окончательного выражения для трех последних членов в (1.2.12) следует учесть, попадают или не попадают указанные полюса в данную полосу. С учетом этого обстоятельства получим

$$r_n = (-1)^n \frac{\Psi[(-1)^n \varphi_0 + 2n\varphi]}{\Psi(\varphi_0)} \exp\{-ikr \times \cos[\varphi - (-1)^n \varphi_0 - 2n\Phi]\}$$

при  $|\varphi - 2n\Phi - (-1)^n [\text{gd}(\text{Im } \varphi_0) + \text{Re } \varphi_0]| < \pi$ ,  $|\varphi| \leq \Phi$ ;

$$r_n = 0 \text{ при } |\varphi - 2n\Phi - (-1)^n [\text{gd}(\text{Im } \varphi_0) + \text{Re } \varphi_0]| > \pi,$$

$$n = \dots, -2, -1, 0, 1, 2, \dots;$$

$$r_{\pm} = C_{\pm} \exp\{ikr \cos(\Phi + \vartheta_{\pm} \mp \varphi)\} \text{ при } 0 \leq \Phi \mp \varphi < < -\text{gd}(\text{Im } \vartheta_{\pm}) - \text{Re } \vartheta_{\pm};$$

$$r_{\pm} = 0 \text{ при } \Phi \mp \varphi > -\text{gd}(\text{Im } \vartheta_{\pm}) - \text{Re } \vartheta_{\pm}. \quad (1.2.15)$$

В формулы (1.2.15) входят некоторые константы  $C_{\pm}$ , которые характеризуют свойства граней клина. Они равны

$$C_{\pm} = 2 \sin \frac{\pi^2}{4\Phi} \cos \frac{\pi\varphi_0}{2\Phi} \frac{\Psi_{\Phi} \left( 2\Phi - \frac{\pi}{2} \right) \Psi^{(\pm)} [\pm(\Phi + \pi + \vartheta_{\pm})]}{\Psi(\varphi_0) [\cos(\pi(\pi + \vartheta_{\pm})/2\Phi) \mp \sin(\pi\varphi_0/2\Phi)]}. \quad (1.2.16)$$

1.2.3. Дадим краткий анализ физической стороны полученного результата. Для этого сначала вычислим в формуле (1.2.12) интеграл, воспользовавшись методом перевала, что можно сделать при условии  $kr \gg 1$ . Результат (с учетом только первого члена асимптотического разложения) таков:

$$u(r, \varphi) \sim \frac{\pi \cos(\pi\varphi_0/2\Phi)}{2\Phi \Psi(\varphi_0)} \left[ \frac{\Psi(\varphi - \pi)}{\sin(\pi(\varphi - \pi)/2\Phi) - \sin(\pi\varphi_0/2\Phi)} - \frac{\Psi(\varphi + \pi)}{\sin(\pi(\varphi + \pi)/2\Phi) - \sin(\pi\varphi_0/2\Phi)} \right] \frac{e^{i(kr + \frac{\pi}{4})}}{\sqrt{2\pi kr}} + r_+ + r_- + \Sigma r_n. \quad (1.2.17)$$

Последний результат уже допускает четкую физическую интерпретацию. Так, первый член справа в (1.2.17) представляет цилиндрическую волну, рассеянную ребром клина ( $r = 0$ ). Величины  $r_{\pm}$  представляют пространственные поверхностные волны, возбуждаемые падающей волной  $u^i$  на гранях клина, распространяющиеся вдоль граней клина. Вообще говоря, они представляют собою затухающие волны. Аналогичную ситуацию мы будем наблюдать и на прозрачном диэлектрическом клине с поглощением (см. § 2.4, 2.5). Величины  $r_n$  представляют падающую ( $n = 0$ ) волну и отраженные гранями волны.

Если вдоль грани клина по направлению к вершине распространяется поверхностная волна (это соответствует случаю  $\varphi_0 = \Phi - \vartheta_{\pm}$  или  $\varphi_0 = -\Phi + \vartheta_{\pm}$  ( $\text{Im } \vartheta_{\pm} < 0$ )), то коэффициенты  $C_{\pm}$  из (1.2.16) представляют собою амплитудные коэффициенты соответственно отраженной от вершины клина ( $r = 0$ ) волны и прошедшей на другую грань волны того же поверхностного типа. Интересно отметить, что при целых значениях параметра  $m = \pi/4\Phi$  уходящие поверхностные волны не образуются, за исключением тех случаев, когда такая волна является в то же время точным отражением от другой грани падающей волны. Воспользовавшись приведенной в следующем пункте формулой для функции  $\Psi_{\pi/4\Phi}(\alpha)$  и решением (1.2.12), можно показать, что для таких углов интеграл в (1.2.12) из-за периодичности подынтегрального выражения равен нулю и решение  $u(r, \varphi) = \Sigma r_n$ , соответствующее геометрическому приближению, является точным (ср. § 2.1).

1.2.4. Функция Малюжинца  $\psi_{\Phi}(z)$ . Сводка формул. Свойства функции Малюжинца  $\psi_{\Phi}(z)$  подробно исследованы в работах [6];

графические результаты и расчетные формулы и сведения о ее табулировании — в монографии [10]. Здесь мы приведем только основные определения. Прежде всего, функция  $\psi_{\Phi}(z)$  имеет следующее интегральное представление:

$$\psi_{\Phi}(z) = \exp \left\{ -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{ch}(z\xi) - 1}{\xi \operatorname{ch}(\pi\xi/2) \operatorname{sh}(2\Phi\xi)} d\xi \right\}, \quad (1.2.18)$$

вытекающее из соотношений

$$\psi_{\Phi}(z) = \exp \left\{ \int_0^z \eta_{\Phi}(z) dz \right\}, \quad \eta_{\Phi}(z) = -\frac{1}{2} \int_0^{\infty} \frac{\operatorname{sh}(z\xi) d\xi}{\operatorname{ch}(\pi\xi/2) \operatorname{sh}(2\Phi\xi)}. \quad (1.2.19)$$

Интеграл в (1.2.19) сходится в полосе  $|\operatorname{Re} z| < \frac{\pi}{2} + 2\Phi$ . Вне этой полосы значения функции Малюжинца нужно определять при помощи следующих функциональных соотношений:

$$\psi_{\Phi}(z) = \operatorname{ctg} \left( \frac{z}{2} - \Phi + \frac{\pi}{4} \right) \psi_{\Phi}(z - 4\Phi), \quad (1.2.20)$$

$$\psi_{\Phi}(z) \psi_{\Phi}(z - \pi) = \psi_{\Phi}^2 \left( \frac{\pi}{2} \right) \cos \left[ \frac{\pi}{4\Phi} \left( z - \frac{\pi}{2} \right) \right]. \quad (1.2.21)$$

Представление функции Малюжинца в виде бесконечных произведений имеет такой вид:

$$\psi_{\Phi}(z) = \prod_{n=1}^{\infty} \prod_{m=1}^{\infty} \{ 1 - [z/2\Phi(2n-1) + (\pi/2)(2m-1)]^2 \}^{(-1)^{m+1}}. \quad (1.2.22)$$

При  $|\operatorname{Im} z| \Rightarrow \infty$   $\psi_{\Phi}(z) = 0$   $\left( \exp \left| \frac{\pi \operatorname{Im} z}{8\Phi} \right| \right)$ . При положительных значениях  $\Phi$  ближайшими к точке  $z = 0$  нулями и соответственно полюсами функции  $\psi_{\Phi}(z)$  являются точки  $z = \pm (\pi/2 + 2\Phi)$  и  $z = \pm (3\pi/2 + 2\Phi)$ . При рациональном отношении  $4\Phi/\pi = n/m$  и  $a(k, l) = \frac{\pi}{2} \left( \frac{2l-1}{n} - \frac{i2k-1}{m} \right)$  функции  $\psi_{\Phi}(z)$  для нечетных и четных  $n$  имеют вид соответственно

$$\psi_{\pi n/4m}(z) = \prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n \left( \frac{\cos \frac{1}{2} a(k, l)}{\cos \frac{1}{2} [z/\pi + a(k, l)]} \right)^{(-1)^l}, \quad (1.2.23)$$

$$\psi_{\pi n/4m}(z) = \prod_{k=1}^m \prod_{l=1}^n \exp \left\{ \frac{(-1)^l}{\pi} \int_{a(k, l)}^{a(k, l) + z/\pi} \xi \operatorname{ctg} \xi d\xi \right\}. \quad (1.2.24)$$

Частные случаи:

$$\psi_{\pi/4}(z) = \cos \frac{z}{2}, \quad \psi_{\pi/2}(z) = \exp \left\{ \frac{1}{4\pi} \int_0^z \frac{2\xi - \pi \sin \xi}{\cos \xi} d\xi \right\}, \quad (1.2.25)$$

$$\psi_{3\pi/4}(z) = \frac{\cos [(z - \pi)/6] \cos [(z + \pi)/6]}{\cos^2(\pi/6) \cos(z/6)},$$

$$\psi_{\pi}(z) = \exp \left\{ \frac{1}{8\pi} \int_0^z \frac{\pi \sin \xi - 4\pi \cos(\pi/4) \sin(\xi/2) - 2\xi^2}{\cos \xi} d\xi \right\}.$$

Представление в виде ряда:

$$\begin{aligned} \psi_{\Phi}(z) = \exp \left\{ -2 \left[ \frac{C_0(x_2)}{4} + \frac{C_2(x_2)}{4} \left( \frac{\pi}{2} + 2\Phi \right)^2 \frac{x_1^2}{2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{n=2}^{\infty} \frac{y_1^{2n}}{2n} \operatorname{Re} \beta_{2n} \right] - i2 \left[ \frac{S_1(x_2)}{4} \left( \frac{\pi}{2} + 2\Phi \right) y_1 + \right. \right. \\ \left. \left. + \frac{1}{3} \frac{S_3(x_2)}{4} \left( \frac{\pi}{2} + 2\Phi \right)^3 y_1^3 + \sum_{n=3}^{\infty} \frac{y_1^{2n+1}}{2n+1} \operatorname{Im} \beta_{2n+1} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (1.2.26)$$

Здесь

$$y_1 = x_1/(\pi/2 + 2\Phi); \quad y_1 < 1 \text{ при } x_1 < (\pi/2) + 2\Phi;$$

$$C_0(x_2) = \int_0^{\infty} \frac{\cos(x_2\xi) - 1}{\xi \operatorname{ch}(\pi\xi/2) \operatorname{sh}(2\Phi\xi)} d\xi;$$

$$C_2(x_2) = \frac{1}{2!} \int_0^{\infty} \frac{\xi \cos(x_2\xi)}{\operatorname{ch}(\pi\xi/2) \operatorname{sh}(2\Phi\xi)} d\xi;$$

$$S_1(x_2) = \int_0^{\infty} \frac{\sin(x_2\xi)}{\operatorname{ch}(\pi\xi/2) \operatorname{sh}(2\Phi\xi)} d\xi;$$

$$S_3(x_2) = \frac{1}{3!} \int_0^{\infty} \frac{\xi^3 \sin(x_2\xi)}{\operatorname{ch}(\pi\xi/2) \operatorname{sh}(2\Phi\xi)} d\xi;$$

$$\beta_{n+1}(x_2) = \frac{(\pi/2 + 2\Phi)^{n+1}}{4(n!)} \int_0^{\infty} \frac{\xi^n \exp\{ix_2\xi\}}{\operatorname{ch}(\pi\xi/2) \operatorname{sh}(2\Phi\xi)} d\xi =$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} \sum_{l=0}^{\infty} (-1)^l \left[ 1 - \frac{i2x_2}{\pi + 4\Phi} + \frac{2\pi l}{\pi + 4\Phi} + \frac{8\Phi k}{\pi + 4\Phi} \right]^{-n-1}.$$

*Интегральные уравнения* в задачах дифракции волн на диэлектрических телах представляют для ряда случаев удобный и эффективный аппарат. Следует отметить, что, кроме основы для построения численных алгоритмов, интегральные уравнения в электродинамике и математической теории дифракции широко используются при доказательстве теорем существования решений граничных задач и получения в редких, правда, случаях точных решений [483, с. 693—697; 220; 242; 274].

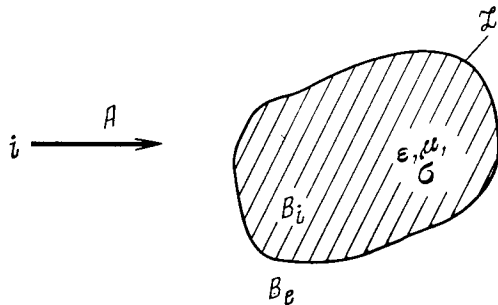
Интегральные уравнения оказываются особенно эффективным аппаратом для построения приближенных решений в том случае, когда размеры тела невелики по сравнению с длиной волны. Поэтому для квазиоптической области в «чистом» виде интегральные уравнения не применяются, а используются в сочетании с другими методами (вариационным, методом Винера — Хопфа — Фока и др.).

Здесь мы приведем, следуя [483], интегральное уравнение для задачи дифракции падающей волны  $A(x, y)$  на диэлектрическом двумерном ( $\partial/\partial z = 0$ ) цилиндре, ограниченном контуром  $\mathcal{L}$ . Обозначим через  $B_i$  и  $B_e$  части плоскости, лежащие соответственно внутри и вне  $\mathcal{L}$  (рис. 28). Необходимо определить напряженность электрического поля  $E_z(x, y)$ , удовлетворяющую уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k_i^2)E = 0 \text{ в } B_i \text{ и } (\Delta + k_e^2)E \text{ в } B_e. \quad (1.3.4)$$

Не нарушая общности, будем считать, что во внешней области  $B_e$  среда есть вакуум, а в области  $B_i$   $k_i = k'_i + ik''_i$ , так что  $k_i^2 c^2 = \omega^2 \epsilon^2 - i\omega\sigma$ , где  $c$  — скорость света,  $\sigma$  — проводимость.

В области  $B_e$  искомая функция  $E$ , т. е. полное поле, равно  $A + E$ , есть, таким образом, сумма поля падающей волны  $A$  и дифрагированного от  $\mathcal{L}$  поля  $E$ . При этом разность  $E - A$  должна



Р и с. 28. К выводу интегрального уравнения для дифракции волны на двумерном диэлектрическом цилиндре

удовлетворять *принципу излучения*. Падающее поле  $A$  должно всюду удовлетворять уравнению

$$(\Delta + k_e^2) A = 0. \quad (1.3.2)$$

Искомое поле должно удовлетворять предельным условиям непрерывности  $E$  и  $\partial E/\partial n$  при переходе через контур  $\mathcal{L}$ .

Для поля  $E$  можно написать интегральное уравнение

$$E(P) = \frac{k_i^2 - k_e^2}{2\pi} \iint_{B_i} G(P; Q) E(Q) dS + A(P), \quad (1.3.3)$$

где функция Грина  $G(P; Q)$  для двумерной области есть

$$G(P; Q) = (\pi/2i) H_0^{(1)}(k_e r), \quad r = |PQ|.$$

Если считать, что точка  $P \in B_i$ , то написанное уравнение (1.3.3) представляет собою обычное интегральное уравнение. Определяя из него  $E(P)$ , причем  $P \in B_i$ , и подставляя полученное решение в правую часть (1.3.3), получим явное выражение  $E(P)$  для случая, когда  $P \in B_e$ , т. е. фактически продолжаем решение для  $E$  во внешнюю область  $B_e$ . Для дальнейшего будет существенно, что в написанном интегральном уравнении (1.3.3) интегрирование производится не по контуру  $\mathcal{L}$ , но по всей области  $B_i$ .

Вектор напряженности магнитного поля  $H(x, y)$  удовлетворяет тем же самым уравнениям (1.3.1), и при переходе через  $\mathcal{L}$  необходимо удовлетворить условию непрерывности  $(1/k) \partial H/\partial n$ , где  $k = k_i$  в  $B_i$  и  $k = k_e$  в  $B_e$ . Падающее поле  $B(x, y)$  удовлетворяет уравнению (1.3.2), а разность  $H - B$  — *принципу излучения*.

Интегральное уравнение для поля  $H$  имеет вид

$$\frac{1}{k^2} H(P) = \frac{k_i^2 - k_e^2}{2\pi k_i^2} \iint_{B_i} G(P; Q) H(Q) dS + \frac{1}{2\tau} \left( \frac{1}{k_i^2} - \frac{1}{k_e^2} \right) \int_{\mathcal{L}} H(Q) \frac{\partial G(P; Q)}{\partial n} dl + \frac{B(P)}{k_e^2}. \quad (1.3.4)$$

Здесь  $k^2 = k_i^2$ , если  $P \in B_i$ ,  $k^2 = k_e^2$ , если  $P \in B_e$  и  $\frac{1}{k^2} = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{k_i^2} + \frac{1}{k_e^2} \right)$ , если  $P \in \mathcal{L}$ .

Если точка  $P$  находится внутри замкнутой области  $B_i$ , то (1.3.4) есть нагруженное интегральное уравнение и к нему применима обычная теория Фредгольма. Интегральное уравнение (1.3.4) имеет одно определенное решение, которое и есть решение поставленной дифракционной задачи. Если решение  $H(x, y)$  в  $B_i$  найдено из (1.3.4), то снова, как и ранее написанное интегральное уравнение (1.3.3), соотношение (1.3.4) позволяет по най-

денному решению  $H(x, y)$  в  $B_i$  определить  $H(x, y)$  всюду в неограниченной области  $B_e$ .

Интегральные уравнения (1.3.3) и (1.3.4) особенно удобны для построения *приближенных решений* в случае, когда свойства сред в областях  $B_i$  и  $B_e$  несильно отличаются друг от друга:  $|k_i - k_e| \ll k_{i,e}$ , т. е.  $\varepsilon - 1 \ll 1$ ,  $\mu - 1 \ll 1$  (см. § 3.7, а также [469]). В этом случае вместо искомого точных значений  $E$  и  $H$  в подынтегральные выражения в (1.3.3) и (1.3.4) можно подставить, например, поле падающей волны (*борновское приближение*) или упрощенное геометрикооптическое решение, скажем, только с учетом фазового множителя (*приближение фазовой коррекции*) и т. п. Полученные таким образом результаты являются, разумеется, приближенными, однако иногда позволяют провести качественное исследование поведения дифрагированного поля, выяснить характерные физические особенности задачи и т. п. Зачастую именно эти сведения и представляют основной познавательный интерес. Здесь мы еще раз хотим подчеркнуть, что в ряде случаев определяющим обстоятельством оказывается понимание сущности задачи. После того как такая физическая ясность достигнута, получение количественных результатов хотя и может встретить значительные трудности, например, чисто вычислительного плана, но не приводит, как правило, к принципиальным осложнениям. В дальнейшем (§ 3.7) мы установим, в частности на основании качественного исследования, весьма важный общий принцип *взаимной компенсации паразитных колебаний (волн)*.

Настоящая книга посвящена преимущественно *квазиоптическим устройствам*. Поэтому мы не задерживаем внимание читателя на широком классе явлений дифракции волн на прозрачных телах *малых размеров*. А именно здесь аппарат интегральных уравнений непосредственно является весьма эффективным средством анализа. В квазиоптической области метод интегрального уравнения может быть с успехом использован для расчетов в сочетании с другими подходами. Например, с методом параболического уравнения, методом фазовой коррекции и т. п., т. е. когда «главное» в решении «угадано» и выделено из общего результата тем или иным способом.

## § 1.4

### Метод разделения переменных. Диэлектрический стержень

1.4.1. *Однородный диэлектрический стержень* радиуса  $a$  является удобной моделью для приложения к анализу поля в нем и в окружающем стержень пространстве метода разделения переменных. Здесь мы подробно рассмотрим направляющие свойства диэлектрического стержня. Задача дифракции поля заданных источников может быть решена как задача возбуждения такой направляющей структуры. В равной мере метод разделения переменных приме-

ним и к однородному диэлектрическому шару, но получающиеся при этом выражения являются весьма громоздкими, а их анализ мало что добавляет в познавательном плане по сравнению с существенно более простым, но чаще используемым на практике случаем диэлектрического стержневого волновода. Различные случаи применения однородного конечного по длине стержня были даны во введении и представлены на рис. 9 и др.

1.4.2. *Метод разделения переменных* для уравнения в частных производных

$$(\mathcal{L} + k^2 \varepsilon \mu) u(r) = 0, \quad (1.4.1)$$

где  $\mathcal{L}$  — оператор Лапласа, состоит в предположении о возможности представления искомого решения  $u(r)$  в виде произведения трех функций, каждая из которых зависит только от одной переменной. Для интересующего нас случая однородного стержня целесообразно воспользоваться цилиндрической системой координат  $(r) \equiv r, \varphi, z$  и тогда искомое решение  $u(r)$  следует представить так:

$$u(r) = R(r) \Phi(\varphi) Z(z). \quad (1.4.2)$$

При этом ось цилиндра из магнитодиэлектрика с постоянными  $\varepsilon$  и  $\mu$  совмещена с осью  $z$  цилиндрической системы координат, в которой оператор Лапласа  $\mathcal{L}$  имеет вид

$$\mathcal{L} \equiv \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left( r \frac{\partial}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2}. \quad (1.4.3)$$

Подставив  $u(r)$  в виде (1.4.2) в уравнение (1.4.1), в котором оператор  $\mathcal{L}$  имеет вид (1.4.3), и разделив результат почленно на произведение  $R(r) \Phi(\varphi) Z(z)$ , получим

$$\frac{1}{rR} \frac{d}{dr} \left( r \frac{dR}{dr} \right) + \frac{1}{r^2 \Phi} \frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + \frac{1}{Z} \frac{d^2 Z}{dz^2} + k^2 \varepsilon \mu = 0. \quad (1.4.4)$$

Разделяя в последнем уравнении переменные, получим три обыкновенных дифференциальных уравнения

$$\frac{d^2 R}{dr^2} + \frac{1}{r} \frac{dR}{dr} + \left( \kappa^2 - \frac{n^2}{r^2} \right) R(r) = 0, \quad (1.4.5)$$

$$\frac{d^2 \Phi}{d\varphi^2} + n^2 \Phi(\varphi) = 0, \quad (1.4.6)$$

$$\frac{d^2 Z}{dz^2} + h^2 Z = 0. \quad (1.4.7)$$

Первое из полученных обыкновенных уравнений есть уравнение Бесселя. Решения уравнений (1.4.5) — (1.4.7) можно записать в виде

$$R(r) = AJ_n(\kappa r) + BN_n(\kappa r) = \hat{A}H_n^{(1)}(\kappa r) + \hat{B}H_n^{(2)}(\kappa r), \quad (1.4.8)$$

$$\Phi(\varphi) = C \cos n\varphi + D \sin n\varphi = \hat{C}e^{-in\varphi} + \hat{D}e^{in\varphi}, \quad (1.4.9)$$

$$Z(z) = E \cos hz + F \sin hz = \hat{E}e^{-ihz} + \hat{F}e^{ihz}. \quad (1.4.10)$$



Решения (1.4.8) — (1.4.10) записаны так, что сначала они выражены в виде стоячих волн, а потом — бегущих волн с неопределенными коэффициентами, которые должны быть установлены из граничных условий на границе  $r = a$  раздела диэлектрик ( $r \leq a$ ) — воздух ( $r > a$ ).

1.4.3. *Дисперсионное уравнение.* Будем предполагать, что искомое электромагнитное поле имеет и электрическую, и магнитную продольные (по оси  $z$ ) составляющие. Выберем их в следующем виде:

$$\begin{aligned} &\text{для области внутри стержня } (r \leq a) \\ E_z(r, \varphi) &= AJ_n(\kappa_1 r) \cos n\varphi, \quad H_z(r, \varphi) = BJ_n(\kappa_1 r) \times \\ &\times \cos(n\varphi - \varphi_0); \end{aligned} \quad (1.4.11)$$

$$\begin{aligned} &\text{для области вне стержня } (r \geq a) \\ E_z(r, \varphi) &= \hat{A}H_n^{(1)}(\kappa_2 r) \cos n\varphi, \quad H_z(r, \varphi) = \hat{B}H_n^{(1)}(\kappa_2 r) \times \\ &\times \cos(n\varphi - \varphi_0). \end{aligned} \quad (1.4.12)$$

В формулах (1.4.11), (1.4.12) записана зависимость полей только от поперечных координат  $r, \varphi$ ; в силу (1.4.7) и (1.4.10) зависимость волны номера  $n$  от продольной координаты  $z$  дается множителем  $\exp\{ihz\}$ , который в (1.4.11), (1.4.12) опущен. Из формул (1.4.11) для области  $r \leq a$  зависимость от радиальной координаты выбрана в виде бесселевой функции  $J_n(\kappa_1 r)$ ; при этом в (1.4.8) положено  $B = 0$ , что обеспечивает выполнение требования ограниченности поля при  $r = 0$ , ибо  $N_n(0) \Rightarrow \infty$ . Для области вне стержня  $r \geq a$  взята функция Ханкеля  $H_n^{(1)}(\kappa_2 r)$ , имеющая асимптотику (при  $x = \kappa_2 r \gg 1, x \gg n$ ) в виде расходящейся цилиндрической волны  $H_n^{(1)}(x) \sim \sqrt{2/\pi x} \exp\{i[x - (2n + 1)\pi/4]\}$ . При этом справа в (1.4.8) положено  $B = 0$ ; в противном случае ( $\hat{B} \neq 0$ ) в случае поглощающей среды член с  $B$  дал бы неограниченно возрастающее на бесконечности значение поля (см. § 2 введения).

В представлениях полей (1.4.11) и (1.4.12) выбрана идентичная зависимость составляющих полей внутри и вне стержня от азимутальной координаты  $\varphi$ , ибо в противном случае выбор полей в виде (1.4.11) и (1.4.12) для удовлетворения непрерывности тангенциальных границе  $r = a$  составляющих потребовал бы более сложной записи полей (т. е. переразложения зависимостей внутри или вне цилиндра по полной системе функций другого сорта \*).

Непрерывность компонент  $E_z$  и  $H_z$  при  $r = a$  позволяют исключить две произвольные постоянные из (1.4.11) и (1.4.12):

$$\hat{A} = A \frac{J_n(\kappa_1 a)}{H_n^{(1)}(\kappa_2 a)}, \quad \hat{B} = B \frac{J_n(\kappa_1 a)}{H_n^{(1)}(\kappa_2 a)}. \quad (1.4.13)$$

Кроме того, из процедуры разделения переменных в уравнении (1.4.1) имеем  $\kappa^2 = k^2 - h^2$ , что для двух сред дает

$$\kappa_1^2 = k_1^2 - h^2, \quad \kappa_2^2 = k_2^2 - h^2. \quad (1.4.14)$$

После исключения из (1.4.14) продольного волнового числа  $h$ , имеем

$$\kappa_1^2 - \kappa_2^2 = k_1^2 - k_2^2, \quad (1.4.15)$$

где  $k_j$  — волновое число пространства, заполненного магнито-диэлектриком с постоянными  $\epsilon_j$  и  $\mu_j$ .

Далее, воспользовавшись уравнениями Максвелла (2.1) и продольными компонентами полей  $E_z$  и  $H_z$  из (1.4.11) и (1.4.12), найдем азимутальные компоненты полей  $E_\varphi(r, \varphi)$  и  $H_\varphi(r, \varphi)$  для областей  $r \leq a$  и  $r \geq a$ . Требуя непрерывности тангенциальных границе  $r = a$  компонент  $E_\varphi$  и  $H_z$  получим после некоторых несложных преобразований следующие два соотношения:

$$A \frac{nh}{\omega\mu_2} \frac{k_1^2 - k_2^2}{\kappa_1 \kappa_2} = B \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \kappa_2 a \frac{J'_n(\kappa_1 a)}{J_n(\kappa_1 a)} - \kappa_1 a \frac{H_n^{(1)'}(\kappa_2 a)}{H_n^{(1)}(\kappa_2 a)} \right], \quad (1.4.16)$$

$$B \frac{nh}{\omega\epsilon_2} \frac{k_1^2 - k_2^2}{\kappa_1 \kappa_2} = -A \left[ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \kappa_2 a \frac{J'_n(\kappa_1 a)}{J_n(\kappa_1 a)} - \kappa_1 a \frac{H_n^{(1)'}(\kappa_2 a)}{H_n^{(1)}(\kappa_2 a)} \right].$$

В формулах (1.4.16) учтено, что  $\varphi_0 = \pi/2$ , ибо только в этом случае могут быть выполнены требования непрерывности компонент поля  $E_\varphi$  и  $H_\varphi$  на границе  $r = a$  (см. с. 44). Исключая из (1.4.16) амплитудные коэффициенты, мы приходим к следующему общему трансцендентному уравнению:

$$\begin{aligned} -n^2 \frac{h^2 k_2^2}{\kappa_1^2 \kappa_2^2} \left( \frac{k_1^2}{k_2^2} - 1 \right)^2 &= \left[ \frac{\mu_1}{\mu_2} \kappa_2 a \frac{J'_n(\kappa_1 a)}{J_n(\kappa_1 a)} - \kappa_1 a \frac{H_n^{(1)'}(\kappa_2 a)}{H_n^{(1)}(\kappa_2 a)} \right] \times \\ &\times \left[ \frac{\epsilon_1}{\epsilon_2} \kappa_2 a \frac{J'_n(\kappa_1 a)}{J_n(\kappa_1 a)} - \kappa_1 a \frac{H_n^{(1)'}(\kappa_2 a)}{H_n^{(1)}(\kappa_2 a)} \right], \end{aligned} \quad (1.4.17)$$

которое совместно с (1.4.15) составляет систему для определения поперечных волновых чисел  $\kappa_{1,2}$ .

1.4.4. *Цилиндрический диэлектрический волновод.* Наше предположение, сделанное в начале предыдущего пункта о том, что в общем случае для диэлектрического стержня в однородной среде необходимы обе продольные компоненты поля  $E_z$  и  $H_z$ , оказалось действительно непротиворечивым. Из этого следует, что собственная волна диэлектрического волновода является гибридной и не может быть отнесена ни к  $E$ , ни к  $H$  типам волн. Последнее справедливо всегда при  $n > 0$ . Особым является случай  $n = 0$ , т. е. случай отсутствия азимутальной зависимости полей ( $\partial/\partial\varphi \equiv 0$ ). Азимутальный индекс  $n$  входит в уравнение (1.4.17) слева как

\* Такое переразложение требуется, к сожалению, при решении задачи о прозрачном клине методом разделения переменных.

множитель и, стало быть, при  $n = 0$  (1.4.17) превращается в два независимых уравнения

$$\frac{\kappa_1 a}{\kappa_2 a} \frac{J_0(\kappa_1 a)}{J_1(\kappa_1 a)} = \frac{\mu_1}{\mu_2} \frac{H_0^{(1)}(\kappa_2 a)}{H_1^{(1)}(\kappa_2 a)}, \quad \frac{\kappa_1 a}{\kappa_2 a} \frac{J_0(\kappa_1 a)}{J_1(\kappa_1 a)} = \frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2} \frac{H_0^{(1)}(\kappa_2 a)}{H_1^{(1)}(\kappa_2 a)} \quad (1.4.18)$$

для магнитных ( $H$ ) и электрических ( $E$ ) волн соответственно.

Дисперсионные уравнения (1.4.17) и (1.4.18) написаны для общего случая, когда входящие в них параметры сред  $\varepsilon_j$ ,  $\mu_j$  могут быть комплексными. При этом, естественно, и корни этих уравнений  $\kappa_j$  также будут комплексными величинами. Анализ поведения корней полученных дисперсионных уравнений в общем случае приводит к необходимости использования ЭВМ. В принципиально-вычислительном плане такой анализ не представляет каких-либо сложностей, но громоздок, если данная конкретная ЭВМ в своем багаже математического обеспечения не имеет программы для цилиндрических функций комплексного аргумента.

Отметим здесь только некоторые важные особенности собственных волн диэлектрического волновода, носящие в какой-то мере общий характер и присущие открытым волноведущим структурам. Мы рассчитываем на внимательного читателя, который не даст увлечь себя общими рассуждениями. Итак, пусть поглощение в обеих средах отсутствует и поперечное волновое число  $\kappa_1$  вещественно. Тогда, как легко видеть из второго уравнения (1.4.18), для  $E$ -волн необходимо, чтобы  $\kappa_2$  было чисто мнимым. Стало быть, при  $\kappa_1^2 > 0$  и  $\kappa_2^2 < 0$  из (1.4.14) следует, что  $k_1^2 > k^2 > k_2^2$ . Это означает, что  $E$ -волны являются быстрыми для области  $r \leq a$  и медленными для внешней области  $r > a$ . Таким образом, эти волны носят поверхностный характер и поверхность стержня при этом имеет индуктивный импеданс. Поле сосредоточено вблизи стержня, и степень его концентрации зависит от  $\kappa_2$ .

Все поверхностные волны диэлектрического волновода (за исключением волны  $EH_{11}$ ) обладают частотной отсечкой  $\kappa_2 = 0$ , когда  $h = k_2$ .

Критическая частота для собственной волны диэлектрического волновода имеет наглядное физическое объяснение. Дело в том, что каждую волновую структуру на частотах  $\omega > \omega_{кр}$  можно представить в соответствии с известной концепцией Бриллюэна как совокупность конечного (например, для плоскопараллельного слоя) или бесконечного числа плоских волн, последовательно отражающихся от границы раздела диэлектриков. Полное отражение происходит при угле, соответствующем полному внутреннему отражению. При этом поперечное волновое число  $\kappa_1 = k_1 \cos \varphi$  и тогда для слоя толщиной  $d$  условием существования собственных волн является следующее соотношение:

$$\kappa_1 d + \frac{\psi}{2} = n \frac{\pi}{2}, \quad n = 1, 2, \dots, \quad (1.4.19)$$

в котором  $\psi$  есть фаза коэффициента отражения (его модуль при полном внутреннем отражении равен 1), зависящая от ориентации вектора  $E$  по отношению к границе раздела (см. § 1.1). При частотах  $\omega \leq \omega_{кр}$  на границе перестает выполняться условие полного отражения и соответствующая волна разрушается.

К более подробному анализу системы волн диэлектрической пластины и двух параллельных пластин мы обратимся в § 4.5.

1.4.5. *Однородная диэлектрическая сфера* радиуса  $a$  является примером открытого резонатора, собственные колебания которого можно рассмотреть методом разделения переменных. Процедура решения в целом не отличается от рассмотренной выше схемы для цилиндрического однородного стержня, и поэтому мы приведем здесь только основные результаты. Подробности можно найти, например, в книгах [14, 331]. Предположим, что однородная сфера заполнена средой с проницаемостями  $\varepsilon$  и  $\mu$  и находится в вакууме. Тогда поле электрических колебаний  $E_{mq}$  будет определяться функцией  $U$ , удовлетворяющей уравнению (в сферических координатах  $r, \varphi, \vartheta$ )

$$\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + \frac{1}{r^2} \left[ \frac{1}{\sin \vartheta} \frac{\partial}{\partial \vartheta} \left( \sin \vartheta \frac{\partial U}{\partial \vartheta} \right) + \frac{1}{\sin^2 \vartheta} \frac{\partial^2 U}{\partial \varphi^2} \right] + k^2 \varepsilon \mu U = 0, \quad (1.4.20)$$

которое не является волновым, но заменой  $U = ru$  (где  $u$  — потенциал Дебая) сводится к обычному уравнению Гельмгольца  $(\Delta^2 + k^2 \varepsilon \mu) u = 0$ . Выберем для поля во внутренней области ( $r \leq a$ ) решение (1.4.20), удовлетворяющее условию конечности при  $r = 0$ , в виде

$$U = A j_n(k \sqrt{\varepsilon \mu} r) P_n^{(m)}(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (m\varphi), \quad r \leq a. \quad (1.4.21)$$

Для внешности сферы ( $r \geq a$ ) поле должно представлять собою расходящиеся волны (сферические — при  $r \Rightarrow \infty$ ). При этом функцию  $U$  можно взять в следующем виде:

$$U = B h_n^{(1)}(kr) P_n^{(m)}(\cos \vartheta) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (m\varphi), \quad r \geq a. \quad (1.4.22)$$

В формулах (1.4.21) и (1.4.22) через  $P_n^{(m)}(\xi)$  обозначены *присоединенные функции Лежандра*, а функции  $j_n(\xi)$  и  $h_n^{(1,2)}(\xi)$  связаны с функциями Бесселя  $J_n(\xi)$  и Ханкеля  $H_n^{(1,2)}(\xi)$  так:

$$j_n(\xi) = \sqrt{\frac{\pi \xi}{2}} J_{n+1/2}(\xi), \quad h_n^{(1,2)}(\xi) = \sqrt{\frac{\pi \xi}{2}} H_{n+1/2}^{(1,2)}(\xi). \quad (1.4.23)$$

Составляющие полей электрических колебаний  $E_{mq}$  через функцию  $U(r, \vartheta, \varphi)$  выражаются следующим образом:

$$E_r = -\frac{\partial^2 U}{\partial r^2} + k^2 \varepsilon \mu U, \quad H_r = 0,$$

$$E_{\Phi} = \frac{1}{r} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \Phi}, \quad H_{\Phi} = -\frac{ik\epsilon}{r \sin \Phi} \frac{\partial U}{\partial \Phi}, \quad (1.4.24)$$

$$E_{\varphi} = \frac{1}{r \sin \Phi} \frac{\partial^2 U}{\partial r \partial \Phi}, \quad H_{\varphi} = \frac{ik\epsilon}{r} \frac{\partial U}{\partial \Phi}.$$

Теперь в соответствии со стандартной процедурой необходимо для тангенциальных границе  $r = a$  составляющих полей удовлетворить граничным условиям. В результате мы получим некоторое характеристическое уравнение, из которого должно определить собственные частоты электрических колебаний сферы. Выпишем характеристическое уравнение для симметричных (по  $\Phi$ ) колебаний  $E_{onq}$ . Оно имеет вид

$$\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \frac{j'_n(ka \sqrt{\epsilon\mu})}{j_n(ka \sqrt{\epsilon\mu})} = \frac{h_n^{(1)'}(ka)}{h_n^{(1)}(ka)}. \quad (1.4.25)$$

При этом определяется также отношение произвольных постоянных  $A$  и  $B$ :

$$\frac{B}{A} = \epsilon \frac{j_n(ka \sqrt{\epsilon\mu})}{h_n^{(1)}(ka)}. \quad (1.4.26)$$

Штрих в (1.4.25) обозначает производную по всему аргументу. Для симметричных колебаний присоединенные функции Лежандра  $P_n^{(m)}(\xi)$  в (1.4.21) и (1.4.22) должны быть заменены на полиномы Лежандра  $P_n(\xi)$ .

1.4.6. *Резонансные частоты и радиационную добротность* электрических колебаний  $E_{onq}$  сферы естественно должно находить при условиях  $ka \gg 1$  и  $n = \sqrt{\epsilon\mu} \gg 1$ . В этом случае лучи внутри сферы могут испытывать полное внутреннее отражение от границы  $r = a$  и соответствующие им колебания имеют характер волн шепчущей галереи, обладающих малыми радиационными потерями. Для таких колебаний функции  $j_n$  и  $j'_n$  имеют асимптотические представления через функцию Эйри  $v(t)$ :

$$j_n(ka \sqrt{\epsilon\mu}) \sim \sqrt{v} v(t), \quad j'_n(ka \sqrt{\epsilon\mu}) \sim (1/\sqrt{v}) v'(t); \quad (1.4.27)$$

$$tv = n + \frac{1}{2} - ka \sqrt{\epsilon\mu}, \quad v = \left[ \left( n + \frac{1}{2} \right) / 2 \right]^{1/3}.$$

Представления (1.4.27) пригодны для  $ka \sqrt{\epsilon\mu} \approx n + 1/2$ . Функции  $h_n^{(1)}(\xi)$  и  $h_n^{(1)'}(\xi)$  необходимо заменить асимптотическими выражениями Дебая, справедливыми при  $ka < n + 1/2$ . После этого вместо уравнения (1.4.25) получим соотношение

$$\frac{v'(t)}{v(t)} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} v \operatorname{sh} \eta (1 - ie^{-2T}), \quad (1.4.28)$$

где

$$k a \operatorname{ch} \eta = n + \frac{1}{2}, \quad T = \left( n + \frac{1}{2} \right) (\eta - \operatorname{th} \eta). \quad (1.4.29)$$

Поскольку  $v \gg 1$ , то  $t \approx t_q^0 + \Delta t_{nq}$ , где  $t_q^0$  есть  $q$ -й корень уравнения  $v(t) = 0$ ,  $q = 1, 2, \dots$ ;  $t_q^0 < 0$ , а

$$\Delta t_{nq} = [1 + i \exp\{-2T_{nq}\}] / v \sqrt{(\epsilon/\mu)(\epsilon\mu - 1)},$$

$$T_{nq} = \left( n + \frac{1}{2} \right) (\operatorname{Ar} \operatorname{ch} \sqrt{\epsilon\mu} - \sqrt{1 - (\epsilon\mu)^{-1}}) + vt_q^0 \sqrt{1 - (\epsilon\mu)^{-1}} + \epsilon^{-1}.$$

Выписанные выше асимптотические соотношения позволяют написать приближенные выражения для резонансной частоты симметричных электрических колебаний  $E_{onq}$  и радиационной добротности  $Q_{nq} = \omega' / 2\omega''$  в виде

$$k_{nq} a \sqrt{\epsilon\mu} = n + \frac{1}{2} - v(t_q^0 + \Delta t_{nq}), \quad (1.4.30)$$

$$Q_{nq} = \frac{1}{2} \left( n + \frac{1}{2} \right) \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu} (\epsilon\mu - 1)} e^{2T_{nq}}. \quad (1.4.31)$$

Полученные соотношения для электрических колебаний  $E_{mnq}$  позволяют с помощью замены  $\epsilon \rightleftharpoons \mu$  перейти к магнитным колебаниям  $H_{mnq}$ .

1.4.7\*. *Многослойный сферический резонатор* находит широкое применение в различных радиофизических приложениях, например, в прецизионной измерительной аппаратуре сантиметрового диапазона. Рассмотрим падение плоской волны, распространяющейся вдоль оси  $z$  декартовой системы координат, начало которой совпадает с центром симметрии сферического резонатора. Запишем поле в  $k$ -м слое в виде (ср. с. 67)

$$\mathbf{E}^{(k)} = E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{i2n+1}{n(n+1)} i^n (a_n^k \mathbf{m}_{01n}^{(1)} + c_n^k \mathbf{m}_{01n}^{(2)} - ib_n^k \mathbf{n}_{e1n}^{(1)} - id_n^k \mathbf{n}_{e1n}^{(2)}), \quad (1.4.32)$$

$$\mathbf{H}^{(k)} = -\frac{k_k F_0}{\omega \mu_k} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n (b_n^k \mathbf{m}_{e1n}^{(1)} + d_n^k \mathbf{m}_{e1n}^{(2)} + id_n^{(1)} \mathbf{n}_{01n}^{(1)} + ic_n^k \mathbf{n}_{01n}^{(2)}). \quad (1.4.33)$$

В последних формулах индекс  $k = 0$  соответствует внутренней полости резонатора (включающей начало координат);  $k = 1$  — диэлектрическая сферическая оболочка, на которую нанесена тонкая металлическая оболочка ( $k = 2$ ). Внешнее по отношению к резонатору пространство описывается величинами, помеченными индексом  $k = 3$  (разумеется, число слоев может быть произвольным);  $\mu_k$  и  $k_k$  — магнитная проницаемость и волновое число пространства со свойствами  $k$ -слоя соответственно.

\* Настоящий пункт содержит результаты работы В. Ф. Кравченко, Н. И. Кравченко, Б. Д. Костырева и автора книги.

Поле в сферической области, включающей начало координат, получается из формул (1.4.32), (1.4.33), если в них положить  $c_n^0 = d_n^0 \equiv 0$  (ср. п. 1.4.6). При записи рассеянного резонатором поля ( $k=3$ ) необходимо заменить векторные функции  $m_{01n}^{(1)}$ ,  $n_{01n}^{(1)}$  на  $m_{01n}^{(3)}$ ,  $n_{01n}^{(3)}$  соответственно. Удовлетворяя условию непрерывности тангенциальных компонент поля на сферических границах  $r = a_k$ , получим две независимые системы алгебраических уравнений относительно коэффициентов  $a_n^k$ ,  $b_n^k$ ,  $c_n^k$ ,  $d_n^k$ . Для примера приведем одну из них:

$$\begin{aligned} b_n^k j_n(k_n a_k) + d_n^k n_n(k_n a_k) &= \frac{k_{k+1}}{k_k} [j_n(k_{k+1} a_k) + d_n^{k+1} n_n(k_{k+1} a_k)], \\ b_n^k [k_k a_k j_n(k_k a_k)]' + d_n^k [k_k a_k n_n(k_k a_k)]' &= \\ &= \frac{k_k}{k_{k+1}} \{b_n^{k+1} [k_{k+1} a_k j_n(k_{k+1} a_k)]' + d_n^{k+1} [k_{k+1} a_k n_n(k_{k+1} a_k)]'\}. \end{aligned} \quad (1.4.34)$$

При  $k=2$  в правой части (1.4.34) необходимо провести замену

$$b_n^{k+1} j_n(k_{k+1} a_k) \Leftrightarrow j_n(k_{k+1} a_k), \quad d_n^{k+1} n_n(k_{k+1} a_k) \Leftrightarrow b_n^{k+1} h_n(k_{k+1} a_k). \quad (1.4.35)$$

Представим решение системы (1.4.34) так:

$$b_n^k = \frac{\tilde{\Gamma}_k b_n^0}{\prod_{k=0} \Delta_k}, \quad d_n^k = \frac{\tilde{\Gamma}'_k b_n^0}{\prod_{k=0} \Delta_k}, \quad b_n^0 = \frac{\prod_{k=0}^3 \Delta_k}{\tilde{\Gamma}}, \quad (1.4.36)$$

где  $\tilde{\Gamma}_k$  определяются рекуррентными соотношениями

$$\tilde{\Gamma}_{k+1} = \alpha_k \tilde{\Gamma}_k + \beta_k \tilde{\Gamma}'_k, \quad \tilde{\Gamma}'_{k+1} = \tilde{\alpha}_k \tilde{\Gamma}'_k + \tilde{\gamma}_k \tilde{\Gamma}_k, \quad \tilde{\Gamma}'_0 = 0, \quad \tilde{\Gamma}_0 = 1; \quad (1.4.37)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\alpha}_k &= \frac{1}{k_k} \left\{ \left( \frac{k_k}{k_{k+1}} \right)^2 j_n(k_k a_k) [k_{k+1} a_k n_n(k_{k+1} a_k)]' - \right. \\ &\quad \left. - n_n(k_{k+1} a_k) [k_k a_k j_n(k_k a_k)]' \right\}, \\ \tilde{\beta}_k &= \frac{1}{k_{k+1}} n_n(k_k a_k) [k_{k+1} a_k n_n(k_{k+1} a_k)]' - \\ &\quad - n_n(k_{k+1} a_k) [k_k a_k n_n(k_k a_k)]', \end{aligned} \quad (1.4.38)$$

$$\begin{aligned} \tilde{\gamma}_k &= \frac{1}{k_k} \{ j_n(k_{k+1} a_k) [k_k a_k j_n(k_k a_k)]' - \left( \frac{k_k}{k_{k+1}} \right)^2 \times \\ &\quad \times j_n(k_k a_k) [k_{k+1} a_k j_n(k_{k+1} a_k)]' \}, \\ \tilde{\alpha}_k &= \frac{1}{k_k} \left\{ j_n(k_{k+1} a_k) [k_k a_k n_n(k_k a_k)]' - \left( \frac{k_k}{k_{k+1}} \right)^2 \times \right. \\ &\quad \left. \times n_n(k_k a_k) [k_{k+1} a_k j_n(k_{k+1} a_k)]' \right\}, \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Delta_k &= k_{k+1} \{ j_n(k_{k+1} a_k) [k_{k+1} a_k n_n(k_{k+1} a_k)] - n_n(k_{k+1} a_k) \times \\ &\quad \times [k_{k+1} a_k j_n(k_{k+1} a_k)] \}. \end{aligned} \quad (1.4.39)$$

При  $k=2$  в (1.4.38) необходимо провести замену  $n_n(k_3 a_2)$  на  $h_n(k_3 a_2)$ . Решение второй системы типа (1.4.34) (которую мы здесь не выписывали) можно получить, если в решении (1.4.36) — (1.4.39) заменить величины  $b_n^k$ ,  $d_n^k$ ,  $\tilde{\Gamma}_k$ ,  $\tilde{\Gamma}'_k$ ,  $\tilde{\alpha}_k$ ,  $\tilde{\beta}_k$ ,  $\tilde{\gamma}_k$ ,  $\tilde{\alpha}_k'$  соответственно на величины  $a_n^k$ ,  $c_n^k$ ,  $\Gamma_k$ ,  $\Gamma'_k$ ,  $\alpha_k$ ,  $\beta_n$ ,  $\gamma_k$ ,  $\alpha_k'$ , получающиеся из (1.4.39) заменой  $k_k$  на  $k_{k+1}$ .

Запишем для примера поле в пленке, нанесенной на диэлектрическую подложку сферической формы большого диаметра, так что можно воспользоваться соответствующими асимптотическими представлениями сферических функций Бесселя. Результат таков:

$$\begin{aligned} E &= E_0 \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n(n+1)} i^n \left\{ \left[ \sigma_n P_n(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} - i F_n P'_n(\cos \theta) \right] \times \right. \\ &\quad \left. \times \cos \varphi \right] \cdot \mathbf{e}_\theta - \left[ \sigma_n P'_n(\cos \theta) - i F_n P_n(\cos \theta) \frac{1}{\sin \theta} \right] \sin \varphi \cdot \mathbf{e}_\varphi. \end{aligned} \quad (1.4.40)$$

Здесь обозначено

$$\sigma_n = \frac{\Delta_2}{\Gamma_3} \left\{ M_n \cos [k_2 (r - a_1)] \frac{1}{k_2 r} + N_n \frac{\sin [k_2 (r - a_1)]}{k_2^2 r a_1} \right\}, \quad (1.4.41)$$

$$F_n = \frac{\Delta_2}{\tilde{\Gamma}_3} \left\{ - \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \tilde{M}_n \frac{\sin [k_2 (r - a_1)]}{k_2 r} + \tilde{N}_n \frac{\cos [k_2 (r - a_1)]}{k_2^2 r a_1} \right\}, \quad (1.4.42)$$

$$\begin{aligned} \tilde{F}_3 &= \left\{ [k_3 a_2 h(k_3 a_2)]' \frac{\tilde{M}_n}{k_2 a_2} \left( \frac{k_1}{k_3} \right)^2 - h_n(k_3 a_2) \frac{\tilde{N}_n}{k_2 a_1} \right\} \times \\ &\quad \times \cos [k_2 (a_2 - a_1)] + \left\{ [k_3 a_2 h(k_3 a_2)]' \frac{N_n}{k_2^2 a_1 a_2} \left( \frac{k_2}{k_3} \right)^2 + \right. \\ &\quad \left. + h_n(k_3 a_2) \tilde{M}_n \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^2 \right\} \sin [k_2 (a_2 - a_1)], \end{aligned} \quad (1.4.43)$$

$$\begin{aligned} \tilde{M}_n &= \tilde{\alpha}_0 j_n(k_1 a_1) + \tilde{\gamma}_0 n_n(k_1 a_1); \quad \tilde{N}_n = \tilde{\alpha}_0 [k_1 a_1 j_n(k_1 a_1)]' + \\ &\quad + \tilde{\gamma}_0 [k_1 a_1 n_n(k_1 a_1)]'. \end{aligned} \quad (1.4.44)$$

Коэффициенты  $M_n$ ,  $N_n$  для (1.4.41) получаются из соотношений (1.4.44) заменой  $\tilde{\alpha}_0$ ,  $\tilde{\gamma}_0$  на  $\alpha_0$ ,  $\gamma_0$ . Функция  $\Gamma_3$  — заменой в (1.4.43) коэффициентов  $\tilde{M}_n$ ,  $\tilde{N}_n$  на  $M_n$ ,  $N_n$  при  $k_1 = k_2 = k_3$ .

В задачах квантовой радиофизики, технической физике и других областях широко пользуются понятием *поперечного сечения поглощения S*. Для рассмотренного нами двухслойного сферического

резонатора  $S$  будет таким:

$$S = -(2\pi/k)^2 \sum_{n=1}^{\infty} (2n-1) \{ |A_n^3| + |B_n^3| + \operatorname{Re}(A_n^3 + B_n^3) \}, \quad (1.4.45)$$

где использованы следующие обозначения:

$$\begin{aligned} A_n^3 &= \Gamma_3' / \Gamma_3, & B_n^3 &= \tilde{\Gamma}_3' / \tilde{\Gamma}_3, \\ \tilde{\Gamma}_3' &= \left\{ \tilde{N}_n \frac{j_n(k_3 a_2)}{k_2 a_1} - \tilde{M}_n \frac{[k_3 a_2 j_n(k_3 a_2)]'}{k_2 a_2} \left( \frac{k_1}{k_3} \right)^2 \right\} \cos[k_2(a_2 - a_1)] - \\ &- \left\{ \tilde{M}_n \left( \frac{k_1}{k_2} \right)^2 j_n(k_3 a_2) + \tilde{N}_n \frac{[k_3 a_2 j_n(k_3 a_2)]'}{k_2^2 a_1 a_2} \left( \frac{k_2}{k_3} \right)^2 \right\} \times \\ &\times \sin[k_2(a_2 - a_1)]. \end{aligned} \quad (1.4.46)$$

Функция  $\Gamma_3^1$  получается в (1.4.46) заменой  $\tilde{M}_n, \tilde{N}_n$  на  $M_n, N_n$  при  $k_1 = k_2 = k_3$ .

Полученный результат (1.4.46) переходит в известные: об экранировании поля металлической оболочкой, классический случай рассеяния на идеальной сфере, а также в формулы для однородного диэлектрического шара (ср. п. 1.4.6). На рис. 29 представлены результаты численных расчетов на ЦЭВМ для кварцевой сферы с внутренним радиусом  $a_0 = 2,99$  см и внешним  $a_1 = 3$  см, покрытой пленкой металла с характеристическим параметром  $\rho$  ( $a_2 - a_1$ ) = 100 (погрешность счета  $< 0,01\%$ ) и разных значений сопротивления пленки (значения указаны в подписочной подписи). Здесь же приведено значение поперечного сечения поглощения для «черной» сферы (кривая 7).

1.4.8. Приближенное разделение переменных в волновом уравнении (метод Хартри — Фока) получил широкое применение для нахождения приближенного решения задач на собственные значения. Здесь мы рассмотрим двумерные колебания в прямоугольной призме размером  $a \times b$  из однородного материала [14]. Пусть призма неограниченно протяжена по оси  $z$ . Тогда можно поле внутри призмы искать в виде двух продольных компонент  $E_z$  и  $H_z$ , которые удовлетворяют двумерному волновому уравнению

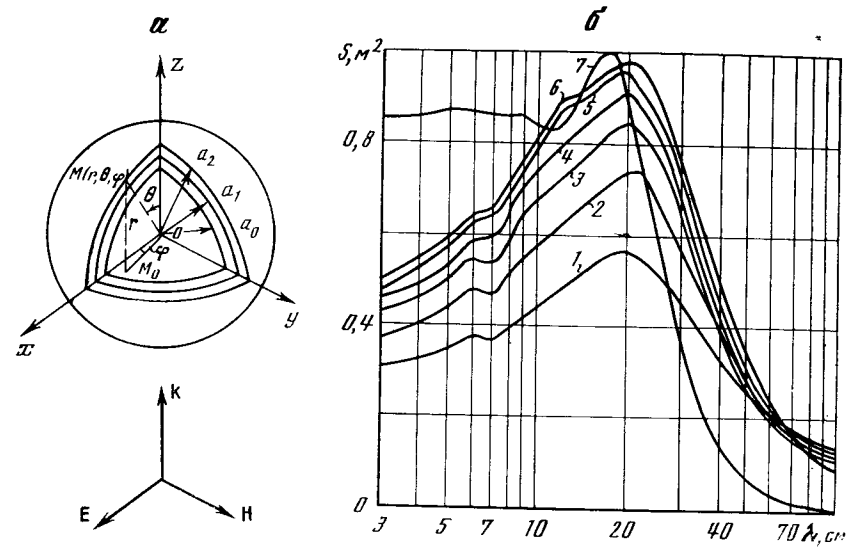
$$\frac{\partial^2}{\partial x^2} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} + k^2 \epsilon_{\mu} \begin{Bmatrix} E_z \\ H_z \end{Bmatrix} = 0. \quad (1.4.47)$$

Остальные компоненты поля определяются следующим образом:

$$E_x = \frac{1}{ik\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}, \quad H_x = -\frac{1}{ik\mu} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad (1.4.48)$$

$$E_y = -\frac{1}{ik\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}, \quad H_y = \frac{1}{ik\mu} \frac{\partial E_z}{\partial x}.$$

Приближенность постановки задачи о призме заключается в пренебрежении явлением дифракции на ее ребрах и заве-



Р и с. 29. Частотная зависимость поперечного сечения поглощения сферическим резонатором  $S_{\max} = 0,5 \cdot 10^2 \text{ м}^2$ ,  $a_2 = 3 \text{ см}$ ; 1 — 50 Ом, 2 — 75 Ом, 3 — 100 Ом, 4 — 125 Ом, 5 — 150 Ом, 6 — 175 Ом, 7 — «черная» сфера

домом неудовлетворении условию на ребре; (см. § 2 введения). При этих условиях, означающих в сущности геометрическое рассмотрение задачи, колебания в призме разделяются на два класса: они имеют либо составляющие  $E_x, E_y, H_z$ , либо  $E_z, H_x, H_y$ .

Положим для колебаний первого типа внутри призмы

$$H_z(x, y) = A f_x(k_x x) f_y(k_y y), \quad (1.4.49)$$

где  $A$  — произвольная константа, функции  $f_{x,y}(\xi)$  — тригонометрические функции  $\cos \xi$  или  $\sin \xi$  (произвольная их комбинация), а поперечные числа  $k_x$  и  $k_y$  в силу (1.4.47) удовлетворяют соотношению

$$k_x^2 + k_y^2 = k^2 \epsilon_{\mu}. \quad (1.4.50)$$

Собственные частоты определяются из соотношения  $\omega = ck$ . Для получения характеристического уравнения мы, пренебрегая дифракцией в угловых точках, представим поле вне призмы и вблизи от каждой грани в виде уходящей плоской волны. Например, при  $x \gg a, y \in (-b, b)$

$$H_z(x, y) = A_0 e^{ik_x x} f_y(k_y y), \quad (1.4.51)$$

где

$$k_x^0 = \sqrt{k^2 - k_y^2} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_{\mu}}} \sqrt{k_x^2 - k_y^2 (\epsilon_{\mu} - 1)}. \quad (1.4.52)$$

Из условия непрерывности тангенциальных грани  $x = a$  составляющих полей  $E_y$  и  $H_z$  приходим к двум соотношениям, содержащим произвольные постоянные  $A_0$  и  $A$ . Исключив их, получаем искомое характеристическое уравнение

$$\frac{f'_x(k_x a)}{f_x(k_x a)} = i\varepsilon \frac{k_x^0}{k_x}. \quad (1.4.53)$$

Удовлетворив граничным условиям на грани  $y = b$ ,  $x \in (-a, a)$ , приходим к аналогичному характеристическому уравнению относительно  $k_y$ :

$$\frac{f'_y(k_y b)}{f_y(k_y b)} = i\varepsilon \frac{k_y^0}{k_y}, \quad (1.4.54)$$

в котором

$$k_y^0 = \sqrt{k^2 - k_x^2} = \frac{1}{\sqrt{\varepsilon\mu}} \sqrt{k_y^2 - k_x^2(\varepsilon\mu - 1)}. \quad (1.4.55)$$

Если потери в диэлектрике нет и  $\varepsilon\mu > 2$ , то в призме возможны колебания, для которых  $k_x^0 = i|k_x^0|$  и  $k_y^0 = i|k_y^0|$  и величины волновых чисел  $k_{x,y}$  и  $k$  оказываются вещественными. Это обстоятельство является результатом использованного геометрического подхода: плоские брэгговские волны, на которые можно разложить поле в призме, отражаются от граней под углами полного внутреннего отражения, а стало быть, колебания обладают сколь угодно большой добротностью.

Система уравнений (1.4.53), (1.4.54) в общем случае должна быть разрешена численными способами. Однако в ряде случаев можно получить простые аналитические формулы.

Начнем с колебаний, для которых  $k_x \ll k_y \approx k\sqrt{\varepsilon\mu}$ . Тогда с точностью до членов порядка  $(k_x/k_y)^2$  можно написать вместо (1.4.53) и (1.4.54) следующие уравнения:

$$\frac{f'_x(k_x a)}{f_x(k_x a)} = -\frac{k_y}{k_x} \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}(\varepsilon\mu - 1)}, \quad \frac{f'_y(k_y b)}{f_y(k_y b)} = i \sqrt{\frac{\varepsilon}{\mu}}. \quad (1.4.56)$$

Предполагая, что

$$k_y b = \frac{\pi q}{2} + \delta, \quad \delta \ll 1, \quad (1.4.57)$$

где нечетные  $q$  соответствуют функции  $f_y(\xi) = \cos \xi$ , а четные  $q$  — функции  $f_y(\xi) = \sin \xi$ , приходим к соотношению  $\text{ctg} \delta = i\sqrt{\varepsilon/\mu}$ , откуда

$$\delta = -i \text{Ar th} \sqrt{\varepsilon/\mu} = -i \text{Ar th} \sqrt{\mu/\varepsilon}. \quad (1.4.58)$$

Поскольку правая часть первого уравнения из (1.4.56) велика, ищем  $k_x a$  в виде

$$k_x a = \frac{\pi m}{2} + \delta_m, \quad \delta_m \ll 1. \quad (1.4.59)$$

Малый параметр  $\delta_m$  равен

$$\delta_m = (mb/qa) \sqrt{\mu/\varepsilon(\varepsilon\mu - 1)}. \quad (1.4.60)$$

Собственные частоты колебаний определяются соотношением

$$kb \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\pi q}{2} + \delta + \left(\frac{\pi m}{2M_x}\right)^2, \quad (1.4.61)$$

в котором

$$M_x = \sqrt{2ka \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{a}{b}} = \frac{a}{b} \sqrt{\pi q}. \quad (1.4.62)$$

Совершенно аналогично для колебаний, у которых  $k_y \ll k_x \approx k\sqrt{\varepsilon\mu}$ , получаем основное соотношение для определения резонансной частоты

$$ka \sqrt{\varepsilon\mu} = \frac{\pi m}{2} + \delta + \left(\frac{\pi q}{2M_y}\right)^2, \quad (1.4.63)$$

в котором

$$M_y = \sqrt{2kb \sqrt{\varepsilon\mu} \frac{b}{a}} = \frac{b}{a} \sqrt{\pi m}. \quad (1.4.64)$$

В формулы (1.4.61) и (1.4.63) входит величина  $\delta$ , определяющая радиационное затухание колебаний, обусловленное тем, что при падении волны на одну грань под углом полного внутреннего отражения на другую она при принятых условиях попадает почти под нормальным углом и коэффициент отражения  $R_1$  в соответствии с (1.1.10) есть  $R_1 = (\sqrt{\varepsilon/\mu} - 1)/(\sqrt{\varepsilon/\mu} + 1)$ .

Колебания второй поляризации исследуются совершенно аналогично. Полагая

$$E_z(x, y) = A f_x(k_x x) f_y(k_y y), \quad (1.4.65)$$

приходим к уравнениям (1.4.56), в которых необходимо произвести двойную замену  $\varepsilon \rightleftharpoons \mu$ . Результаты (1.4.61) и (1.4.63) остаются в силе, если  $\delta$  определить так:  $\text{ctg} \delta = i\sqrt{\mu/\varepsilon}$ ,  $\delta = (\pi/2) - i \text{Ar th} \sqrt{\mu/\varepsilon}$ , что связано в силу определения коэффициента отражения  $R_2$  от «светящей» грани призмы по формуле (1.1.14), отличающегося от  $R_1$  (при нормальном падении волны) знаком.

Метод Хартри — Фока приближенного разделения переменных находит широкое применение в теории дифракции. Сильные результаты получены с его помощью в теории открытых резонаторов на основе слабонерегулярных волноводов [14], в частности, цилиндрических и коаксиальных [29]. Здесь мы рассмотрим собственные колебания однородной диэлектрической призмы. В дальнейшем (§ 4.4) мы обратимся к более сложному случаю — призма в открытом металлическом резонаторе — и исследуем связанные колебания в такой электродинамической структуре.

1.5.1. *Импедансный подход к задачам математической теории дифракции* оказывается в ряде случаев весьма эффективным средством решения. Выше (см. § 1.2, 1.3, а также [1, 6, 7, 11—18]) было показано, насколько упрощается рассмотрение задачи, если реальную структуру удастся заменить ее моделью. Обычно эта замена не касается геометрии и размеров объекта дифракции, а заключается в требовании удовлетворить для поля на поверхности некоторым импедансным граничным условиям вида, например, (1.2) или (1.3). Отвлекаясь от исследования поведения поля внутри тела, мы существенно упрощаем задачу.

Импедансная трактовка краевых задач теории дифракции допускает и несколько иной подход, на котором мы очень коротко задержим внимание читателя в данном пункте и чуть более подробно опишем его в последующих разделах. Этот подход, интенсивно развиваемый в последнее время, получил название *обобщенного метода собственных колебаний* (ОМСК) [480]. В соответствии с процедурой ОМСК дифрагированное поле ищется в виде ряда по системе функций, связанных с объектом дифракции и являющихся собственными функциями некоторых однородных вспомогательных задач. В этом отношении ОМСК аналогичен известному методу собственных частот (ср. § 1.4), но в нем во вспомогательных задачах частота — фиксированный параметр, а роль собственного значения возлагается на какую-нибудь другую величину. Идеи такого подхода содержатся в работах Д. Гильберта и В. А. Стеклова [485—487].

В нескольких словах суть дела состоит в следующем. Пусть имеется некоторая область  $V_i$ , ограниченная произвольной (замкнутой или незамкнутой, например, перфорированной произвольным образом) поверхностью  $S$ . В качестве поверхности  $S$  можно выбрать, к примеру, сферу, внутри которой расположены объекты дифракции, источники колебаний и т. п. Пусть  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$  — тангенциальные компоненты полного поля на поверхности  $S$ . Введем понятие импеданса поверхности  $S$  как отношения тангенциальных компонент поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$ :

$$\mathbf{E}_\tau = \check{W} \mathbf{H}_\tau. \quad (1.5.1)$$

Если решение полной проблемы дифракции для  $V_i$  известно, то отношение известных компонент  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$  на  $S$  однозначно определяет импеданс  $\check{W}$  в формуле (1.5.1). Однако обычно ситуация иная, а именно — необходимо найти  $\mathbf{E}_\tau$  и  $\mathbf{H}_\tau$  на поверхности  $S$  каким-либо образом, а затем уже «продолжить», зная  $\{\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau\}$ , на всю область  $V_i$  или внешнюю к  $V_i$  безграничную область  $V_e$ . Это продолжение может быть сделано разными способами, но оно является единственным [488].

В общем случае импеданс  $\check{W}$  в (1.5.1) представляет собою некоторый интегродифференциальный оператор. Если полная система собственных функций  $\{\mathbf{E}_k, \mathbf{H}_k\}$  оператора Лапласа для поверхности  $S$  (по «угловым координатам») известна, то поля  $\{\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau\}$  на  $S$  можно разложить по этой системе функций:

$$\mathbf{E}_\tau = \sum_n g_n \mathbf{E}_n, \quad \mathbf{H}_\tau = \sum_n g_n \mathbf{H}_n. \quad (1.5.2)$$

При этом оператор  $\check{W}$  может иметь, например, такой вид:

$$\check{W} = \sum_{k=1}^{\infty} \mathbf{E}_k \frac{\rho_n}{|\rho_n|} \int \mathbf{E}_k dS, \quad (1.5.3)$$

где  $\rho_n$  — некоторое волновое число расходящихся от  $V_i$  волн.

Смысл изложенного состоит в возможности написания для оператора импеданса  $\check{W}$  различных форм *вариационных принципов*, доказательства их стационарности и т. д. Таким образом, вместо отыскания полей  $\mathbf{E}_\tau, \mathbf{H}_\tau$  можно решать задачу нахождения импеданса  $\check{W}$ . Разумеется, собственно замена нахождения поля  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  поисками импеданса  $\check{W}$  есть очевидное перенесение трудностей из одного места в другое, однако, если при такой транспортировке не потеряны детали, переформулировка задачи позволяет воспользоваться априорной информацией о характере искомого решения, пытаться строить решение, «близкое» в каком-то смысле (по какой-либо норме, например) к искомому, и использовать его в качестве «пробного», «нулевого» решения. Определенными возможностями в этом отношении и обладает ОМСК. По существу ОМСК есть синтез ряда различных подходов, пригодных для разных задач дифракции. Рассмотрим некоторые из них.

1.5.2. *Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_n$  в качестве собственного значения.* Пусть тело с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon$  занимает объем  $V_i$ , ограниченный поверхностью  $S$ . Искомое поле  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  удовлетворяет в  $V_i$  уравнениям Максвелла

$$\operatorname{rot} \mathbf{E} - ik\mu \mathbf{H} = -\frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^m, \quad \operatorname{rot} \mathbf{H} + ik\epsilon \mathbf{E} = \frac{4\pi}{c} \mathbf{j}^e, \quad (1.5.4)$$

а во внешней к  $V_i$  области  $V_e$  таким же уравнениям (1.5.4), но при  $\epsilon = 1$ . На границе  $S$  раздела областей поле  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  удовлетворяет условиям непрерывности тангенциальных компонент полного поля (1.4). Если внешняя область  $V_e$  — бесконечна, то  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  должно удовлетворять еще *условиям излучения*. Если, кроме того, в поле есть еще тела (например, стенки резонатора, зеркала антенн и т. п.), то на их поверхности для  $\{\mathbf{E}, \mathbf{H}\}$  должны быть выполнены соответствующие граничные условия (например, (1.1) — (1.3) введения). Эти два требования относятся и к вводимым ниже вспомогательным полям  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  и  $\{\mathbf{e}_n, \mathbf{h}_n\}$ .

Обозначим через  $\{\mathbf{E}^0, \mathbf{H}^0\}$  невозмущенное поле, т. е. поле, создаваемое теми же источниками  $\mathbf{j}^{m,e}$ , т. е. в (1.5.4), но в отсутствии

диэлектрика, и будем искать поле  $\{E, H\}$  в виде

$$\begin{Bmatrix} E \\ H \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} E^0 \\ H^0 \end{Bmatrix} + \sum_n A_n \begin{Bmatrix} e_n \\ h_n \end{Bmatrix}. \quad (1.5.5)$$

Здесь  $\{e_n, h_n\}$  — собственные функции однородной задачи, состоящей в том, что в  $V_i$

$$\text{rot } h_n + ik\varepsilon_n e_n = 0, \quad \text{rot } e_n - ikh_n = 0; \quad (1.5.6)$$

в  $V_e$  удовлетворяются такие же уравнения с заменой  $\varepsilon_n$  на единицу и на  $S$ , тангенциальные компоненты  $\{e_n, h_n\}$  непрерывны. Эта задача имеет самостоятельный физический смысл. Она описывает незатухающее колебание, существующее без источников, с частотой задачи дифракции при замене данного тела другим телом той же формы, но с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_n$ . Таких собственных значений  $\varepsilon_n$  имеется счетное множество. Если  $V_e$  бесконечно, так что есть потери на излучение, или если стенки резонатора поглощают, то все  $\varepsilon_n$  — комплексны и знак  $\text{Im } \varepsilon_n$  противоположен знаку, который имеет  $\text{Im } \varepsilon$  в телах с диэлектрическими потерями. Непрерывный спектр отсутствует не только для тела в закрытом резонаторе, но и в открытых задачах ( $V_e$  — бесконечно); это связано с тем, что в  $V_e$   $\{e_n, h_n\}$  удовлетворяют тому же уравнению, что и дифрагированное поле  $\{E - E^0, H - H^0\}$ .

Собственные функции ортогональны и при интеграции по  $V_i$ :

$$\int_{V_i} e_n e_m dV = 0 \quad (n \neq m) \quad (1.5.7)$$

и для коэффициентов Фурье  $A_n$  (1.5.5) получаются явные выражения через токи или через  $E^0$ :

$$A_n = \frac{1 - \varepsilon}{\varepsilon - \varepsilon_n} \left[ \int_{V_i} E^0 e_n dV \right] / \left[ \int_{V_i} (e_n)^2 dV \right]. \quad (1.5.8)$$

Зависимость  $A_n$  от  $\varepsilon$  определяется в основном множителем  $1/(\varepsilon - \varepsilon_n)$ . Если  $\text{Im } \varepsilon_n$  для некоторых  $n$  мало, то система обладает резонансными свойствами и резонанс в (1.5.8) наступает при близости  $\text{Re } \varepsilon$  к  $\text{Re } \varepsilon_n$ . Вблизи резонанса в суммах (1.5.5) надо сохранять только одно слагаемое.

Частота входит в резонансный множитель через  $\varepsilon_n$ . Однако во многих практических задачах интерес представляет зависимость поля (т. е. множителя  $A_n$ ) непосредственно от  $\varepsilon$ , а не от частоты.

Наиболее существенную при анализе добротных систем величину — собственное значение  $\varepsilon_n$  можно определять либо из некоторого интегрального уравнения в объеме  $V_i$ , либо из функционала

$$E(\varepsilon) = \left[ \int_{V_e + V_i} (\text{rot } e)^2 dV - k^2 \int_{V_e} (e)^2 dV \right] / k^2 \int_{V_i} (e)^2 dV, \quad (1.5.9)$$

который стационарен на решении задачи (1.5.6) и принимает в стационарных точках значение  $\varepsilon_n$ .

В некоторых случаях целесообразно выбирать в качестве  $\{E^0, H^0\}$  поле, созданное теми же токами  $j^{m,e}$ , соответствующим образом выбранной простой задаче дифракции.

1.5.3. *Собственное значение в граничных условиях.* Описанный в п. 1.5.2 аппарат легко обобщается для неоднородных тел, в которых  $\varepsilon = \varepsilon(r)$ . В этом пункте на скалярной задаче будет описан вариант ОМСК, применимый только для однородных тел. В нем собственное значение вводится в граничное условие на  $S$ .

Пусть все источники расположены вне тела. Искомое поле  $u$  удовлетворяет уравнениям

$$(\Delta + k^2\varepsilon) u = 0 \text{ в } V_i; \quad (\Delta + k^2) u = f \text{ в } V_e, \quad (1.5.10)$$

условиям излучения (если  $V_e$  бесконечно), условиям на стенках резонатора (если тело помещено в резонатор), и на  $S$  — условиям

$$u_e - u_i = 0, \quad \frac{\partial u_i}{\partial N} - \frac{\partial u_e}{\partial N} = 0, \quad (1.5.11)$$

где знаки  $e, i$  символизируют предельные значения полей на  $S$ . Решение ищем в виде

$$u = u^0 + \sum_n A_n u_n, \quad (1.5.12)$$

где  $u^0$  — поле тех же источников при «металлизации»  $S$  (т. е.  $u^0 \equiv 0$  в  $V_i$ ,  $u^0|_S = 0$ , а  $u_n$  удовлетворяют в  $V_i$  и  $V_e$  уравнениям (1.5.10) (при  $f \equiv 0$ ), а на  $S$  — следующим условиям:

$$u_n^i - u_n^e = 0, \quad \frac{\partial u_n^i}{\partial N} - \frac{\partial u_n^e}{\partial N} = \frac{1}{\varepsilon_n} u_n \quad (1.5.13)$$

и тем же дополнительным условием, что и  $u$  и  $u^0$ .

Эта вспомогательная задача опять имеет самостоятельный физический смысл (диэлектрик покрыт активной пленкой). Существует счетное множество собственных значений  $\rho_n$ , и если есть излучение или другие потери, то  $\text{Im } \rho_n \neq 0$ . Собственные функции ортогональны при интеграции по  $S$  и для коэффициентов в (1.5.12) получается

$$A_n = \rho_n \left( \int u_n \partial u^0 / \partial N dS \right) / \int u_n^2 dS. \quad (1.5.14)$$

Зависимость  $A_n$  от частоты дается в основном множителем  $\rho_n$ . Для высокодобротной системы вблизи резонансных частот для некоторых  $n$   $|\rho_n|$  велико.

Этим методом, определив в аналитическом виде зависимость  $\rho_n$  от частоты, удастся, например, исследовать резонатор произвольной формы, представляющей собой тело с  $|\varepsilon| \gg 1$ . Размерность рядов (1.5.12) на единицу меньше размерности рядов (1.5.5) или рядов в методе собственных частот (см. § 1.4). В задаче о диф-



рации на сфере или цилиндре, т. е. когда возможно разделение переменных, решение обычно записывается именно в виде таких рядов.

1.5.4. Фаза элемента матрицы рассеяния в качестве собственного значения. Если диэлектрик помещен в закрытый резонатор без потерь в стенках, то  $\epsilon_n$  (1.5.2) будет вещественным независимо от того, вещественно или нет  $\epsilon$ . Параметр  $\epsilon_n$ , определяющий резонансную кривую, находится без перехода к комплексным величинам, даже если в системе есть потери (!), т. е. если  $\text{Im } \epsilon \neq 0$ . Существует вариант ОМСК, в котором все расчеты тоже происходят в вещественной области, если в системе есть потери только на излучение. В этом варианте собственными значениями являются фазы элементов матрицы рассеяния. Удобным математическим аппаратом для вычисления этих собственных значений оказывается вещественное интегральное уравнение в  $V_i$ . Для скалярной задачи оно имеет вид

$$4\pi u_n(\mathbf{r}_2) = k^2 \int [\epsilon(\mathbf{r}_1) - 1] u_n(\mathbf{r}_1) \frac{\cos kR + \lambda_n \sin kR}{R} dV_1. \quad (1.5.15)$$

Здесь  $R$  — расстояние между  $\mathbf{r}_1$  и  $\mathbf{r}_2$ ,  $u_n$  — собственная функция,  $\lambda_n$  — искомое собственное значение. Вычислив  $\lambda_n(k)$ , можно исследовать резонансные свойства системы.

## § 1.6

### Метод квазиполного обращения оператора

1.6.1. К настоящему времени еще не установилось окончательного названия для эффективного вычислительного алгоритма, который будет здесь коротко описан. Мы его называем методом *квазиполного обращения оператора*. Бытуют названия «метод полуобращения», «частичного обращения» и т. п. Метод квазиполного обращения оператора может быть реализован в различных формах, например [492], в форме итерационного метода последовательных уточнений.

В целом речь идет о широком классе задач дифракции, которые тем или иным способом могут быть сведены к решению линейного уравнения с фредгольмовым оператором

$$u = \mathcal{L}u + G. \quad (1.6.1)$$

Оператор  $\mathcal{L}$  выступает в двух ипостасях:

а)  $\mathcal{L}$  — бесконечномерный матричный оператор; тогда операторное уравнение (1.6.1) эквивалентно бесконечной системе линейных алгебраических уравнений;

б)  $\mathcal{L}$  — интегральный оператор, определенный на бесконечном интервале; при этом уравнение (1.6.1) является интегральным уравнением Фредгольма II рода.

Известно сравнительно небольшое число примеров, когда удается получить точное решение уравнения (1.6.1). Обычно это

уже неоднократно упоминавшиеся полубесконечные (ключевые) структуры, в применении к моделям которых методов типа Винера — Хопфа — Фока или сведение к задаче Римана — Гильберта является эффективным. Однако, как это часто бывает в жизни, требуется найти решение для *конечных структур*, и здесь необходимо пользоваться каким-либо приближенным приемом. Наиболее часто используются методы последовательных приближений (последовательных дифракций), резонансного знаменателя Фредгольма и редукции. В принципе эти методы позволяют построить решение с заданной точностью. Если  $\mathcal{L}$  — интегральный оператор, то под редукцией понимается выделение основного промежутка в бесконечном интервале, на котором определен оператор, т. е. промежутка, где наиболее существенны величина и градиент ядра интегрального уравнения, и вне которого ядро считается равным нулю.

Метод последовательных приближений является итерационным и достаточно просто реализуется при численном решении, однако область его применимости существенно ограничена требованием малости нормы оператора  $\mathcal{L}$  — итерационный процесс сходится, если норма оператора  $\mathcal{L}$  меньше единицы.

При использовании метода редукции (усечения) встречаются серьезные трудности тогда, когда требуется достичь высокой точности решения. В самом деле, для повышения точности решения необходимо либо увеличить порядок системы линейных алгебраических уравнений, которая получается из исходной бесконечномерной системы ее усечением, либо с увеличением интервала интегрирования в интегральном уравнении. Обе эти процедуры уточнения решения не могут считаться в полной мере удовлетворительными, поскольку вопрос о точности полученного таким образом численного решения остается открытым. Существует даже термин «внутренняя сходимость метода», смысл которого состоит в том, что закон изменения величины погрешности приближенного решения от порядка редукции, как правило, не известен. По существу варьирование степенью редукции есть численный эксперимент, относительно которого всегда полезно помнить слова А. А. Самарского: «Без предварительной проверки качества алгоритмов (а такая проверка возможна лишь при наличии точных решений) пользоваться ими крайне опасно, ибо мы не сможем понять, отражают ли результаты численного эксперимента реальность или же они отражают какие-то побочные эффекты разностной схемы [493] (курсив мой. — Е. П.)».

Отмеченные трудности удается тем не менее эффективно обойти при помощи квазиполного обращения (полуобращения) оператора  $\mathcal{L}$ . В результате можно, объединив в некотором смысле методы последовательных приближений и редукции, построить всегда сходящийся итерационный алгоритм [492]. Опишем очень коротко эту процедуру (к сходному процессу мы также обратимся в § 3.5).

1.6.2. Метод последовательных уточнений. Пусть оператор  $\mathcal{L}$  уравнения (1.6.1) представим в виде суммы

$$\mathcal{L} = \mathcal{L}_1 + \mathcal{L}_2, \quad (1.6.2)$$

причем  $\mathcal{L}_1$  представляет собою «главную» часть оператора  $\mathcal{L}$ , а оператор  $\mathcal{L}_2$  мал по норме. Тогда можно вместо (1.6.1) записать эквивалентное ему уравнение

$$u = (I - \mathcal{L}_1)^{-1} \mathcal{L}_2 u + (I - \mathcal{L}_1)^{-1} G, \quad (1.6.3)$$

где  $I$  — единичный оператор. Если при этом справедливо неравенство

$$\| (I - \mathcal{L}_1)^{-1} \mathcal{L}_2 \| < 1, \quad (1.6.4)$$

то для решения уравнения (1.6.3) можно использовать метод последовательных приближений. При этом существенно, что если уравнение (1.6.1) имеет единственное решение, то выполнение условия (1.6.4) всегда возможно обеспечить в силу фредгольмовости оператора  $\mathcal{L}^*$ .

Итерационный процесс по схеме

$$u^{(0)} = (I - \mathcal{L}_1)^{-1} G, \quad u^{(i)} = (I - \mathcal{L}_1)^{-1} \mathcal{L}_2 u^{(i-1)} + (I - \mathcal{L}_1)^{-1} G, \\ i = 1, 2, \dots, \quad (1.6.5)$$

позволяет как угодно точно найти решение уравнения (1.6.1).

После этого общего замечания перейдем к изложению собственно метода. Идея получения численного решения с помощью итерационного процесса с предварительным обращением редуцированного оператора наиболее просто, по-видимому, реализуется в форме процедуры *последовательных уточнений*, развитой Л. Н. Литвиненко [494].

Пусть  $\tilde{\mathcal{L}}$  — первоначально редуцированный оператор из (1.6.1). Тогда вместо (1.6.1) будем иметь следующее операторное уравнение, возникшее в результате редукции оператора  $\mathcal{L}$ :

$$\tilde{u} = \tilde{\mathcal{L}}\tilde{u} + G. \quad (1.6.6)$$

Решение  $\tilde{u}$  уравнения (1.6.6) одновременно является приближенным решением исходного уравнения (1.6.1). Погрешность  $\Delta^{(1)} = u - \tilde{u}$ , возникшая вследствие проведенной редукции  $\mathcal{L} \Rightarrow \tilde{\mathcal{L}}$ , может быть определена из уравнения \*\*

$$\Delta^{(1)} = \mathcal{L}\Delta^{(1)} + (\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})\tilde{u}. \quad (1.6.7)$$

Перейдем теперь к рассмотрению двух форм оператора  $\mathcal{L}$ .

\* Действительно,  $\| \mathcal{L}_2 \| = \| \mathcal{L} - \mathcal{L}_1 \|$  и при надлежащем выборе «редуцированного» оператора  $\mathcal{L}_1$  норма  $\| \mathcal{L}_2 \|$  может быть сколь угодно мала.

\*\* Отметим, что редукция оператора не изменяет области, на которой определено решение  $u$  уравнения (1.6.1). Поэтому свободный член в уравнении (1.6.7) можно считать известным, так как он находится либо перемножением матриц, либо численным интегрированием.

1.6.3. Случай, когда  $\mathcal{L}$  — бесконечномерный матричный оператор с матричными элементами  $\alpha_m^n$ . В соответствии с общей процедурой редукции вместо решения бесконечной системы линейных алгебраических уравнений

$$u_m = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n u_n + \beta_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.6.8)$$

ищется решение  $\tilde{u}$  редуцированной системы

$$\tilde{u}_m = \sum_{|n| \leq N} \alpha_m^n \tilde{u}_n + \beta_m, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots, \quad (1.6.9)$$

в которой, очевидно, используется конечное число столбцов матрицы  $\mathcal{L}$  (ср. (1.6.8)). Из системы (1.6.9) следует конечная система линейных алгебраических уравнений

$$\tilde{u}_m = \sum_{|n| \leq N} \alpha_m^n \tilde{u}_n + \beta_m, \quad -N \leq m \leq N, \quad (1.6.10)$$

и прямые формулы

$$\tilde{u}_m = \sum_{|n| \leq N} \alpha_m^n \tilde{u}_n + \beta_m, \quad |m| > N, \quad (1.6.11)$$

где  $\tilde{u}_m$  с индексами  $|m| \leq N$  определены из системы (1.6.10). Уравнение (1.6.7) в этом случае имеет вид

$$\Delta_m^{(1)} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \alpha_m^n \Delta_n^{(1)} + \sum_{|n| > N} \alpha_m^n \tilde{u}_n, \quad m = 0, \pm 1, \pm 2, \dots \quad (1.6.12)$$

Здесь  $\Delta_m^{(1)} = u_m - \tilde{u}_m$ , и свободный член в (1.6.12) является известным.

1.6.4. Случай, когда  $\mathcal{L}$  — интегральный оператор:

$$(\mathcal{L}u)(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, \beta) u(\beta) d\beta, \quad \alpha \in (-\infty, \infty). \quad (1.6.13)$$

Редуцированный оператор имеет вид

$$(\tilde{\mathcal{L}}\tilde{u})(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} K(\alpha, \beta) \varphi(\beta) \tilde{u}(\beta) d\beta, \quad \alpha \in (-\infty, \infty). \quad (1.6.14)$$

Здесь функция  $\varphi(\beta)$  выделяет «главную» часть оператора:

$$\varphi(\beta) = \begin{cases} 1, & \beta \in [a, b]; \\ 0, & \beta \notin [a, b]. \end{cases} \quad (1.6.15)$$

Таким образом, обращению подлежит оператор

$$((I - \tilde{\mathcal{L}})\tilde{u})(\alpha) = \int_{-\infty}^{\infty} [\delta(\alpha - \beta) - K(\alpha, \beta) \varphi(\beta)] \tilde{u}(\beta) d\beta, \\ \alpha \in (-\infty, \infty), \quad (1.6.16)$$

причем, как и в п. 1.6.3, это обращение выполняется в два этапа: сначала тем или иным численным методом отыскивается решение  $\tilde{u}(\alpha)$  при  $\alpha \in [a, b]$  уравнения

$$\tilde{u}(\alpha) = \int_a^b K(\alpha, \beta) \tilde{u}(\beta) d\beta + G(\alpha), \quad \alpha \in [a, b], \quad (1.6.17)$$

а затем по формуле

$$\tilde{u}(\alpha) = \int_a^b K(\alpha, \beta) \tilde{u}(\beta) d\beta + G(\alpha), \quad \alpha \notin [a, b], \quad (1.6.18)$$

находится решение в области, дополняющей сегмент  $[a, b]$  до бесконечного интервала. Свободный член уравнения (1.6.7) в этом случае с любой наперед заданной точностью может быть найден численным интегрированием:

$$((\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})\tilde{u})(\alpha) = \int_{(-\infty, \infty) \setminus [a, b]} K(\alpha, \beta) \tilde{u}(\beta) d\beta, \quad \alpha \in (-\infty, \infty). \quad (1.6.19)$$

В заключение обратимся снова к уравнению (1.6.7). Найдя его решение методом редукции, мы допускаем ошибку  $\Delta^{(2)} = \Delta^{(1)} - \tilde{\Delta}^{(1)}$ , которую можно найти из уравнения

$$\Delta^{(2)} = \mathcal{L}\Delta^{(2)} + (\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})\tilde{\Delta}^{(1)}. \quad (1.6.20)$$

Продолжая аналогичным образом строить последовательность поправок, получим итерационный процесс, который можно формализовать в виде

$$\Delta^{(0)} = \tilde{u}, \quad \Delta^{(i)} = \mathcal{L}\Delta^{(i)} + (\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})[(I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}(\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})]^{i-1}(I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}G, \quad i = 1, 2, \dots \quad (1.6.21)$$

Если уравнение (1.6.1) имеет единственное решение, то в силу альтернативы Фредгольма последовательность (1.6.21) поправок  $\Delta^{(i)}$  стремится по норме к нулю при  $i \Rightarrow \infty$ , если оператор  $[(I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1} \cdot (\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})]$  по норме меньше единицы. Действительно, в пределе при  $i \Rightarrow 0$  свободный член уравнения (1.6.21) обращается в нуль, а однородное уравнение  $\Delta^{(i)} = \mathcal{L}\Delta^{(i)}$  имеет только тривиальное решение.

Таким образом, в применении к линейному операторному уравнению (1.6.1) метод последовательных уточнений заключается в построении решения в виде ряда

$$u = \tilde{u} + \tilde{\Delta}^{(1)} + \tilde{\Delta}^{(2)} + \dots \quad (1.6.22)$$

Из (1.6.21) следует, что

$$\tilde{\Delta}^{(i)} = [(I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}(\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})]^i (I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}G,$$

и поэтому

$$u = (I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}G + [(I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}(\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})](I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}G + \dots \\ \dots + [(I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}(\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})]^i (I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}G + \dots \quad (1.6.23)$$

Операторный ряд Неймана сходится, если норма  $[(\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}}) \cdot (I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}]$  меньше единицы. В этом случае из (1.6.23) следует

$$u = [I - (I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}(\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})]^{-1}(I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}G = (I - \mathcal{L})^{-1}G,$$

т. е. ряд (1.6.23) сходится к точному решению исходного уравнения (1.6.1).

Сравнивая оператор  $[(I - \tilde{\mathcal{L}})^{-1}(\mathcal{L} - \tilde{\mathcal{L}})]$  с оператором уравнения (1.6.3), видим, что алгоритм метода последовательных уточнений действительно реализует сходящийся итерационный процесс с предварительным обращением редуцированного оператора, представляя собою, таким образом, сочетание методов редукции и последовательных приближений.

В дальнейшем (в § 3.5) мы вновь обратимся к методу квазиполного обращения оператора (правда, в несколько иной интерпретации) и с его помощью рассмотрим интересную (ключевую) задачу о преобразовании волноводной волны прямоугольного волновода на плоской границе раздела (двух однородных сред), наклоненной к оси волновода. Нужно отметить, что хотя метод квазиполного обращения и очень непрост при его численной реализации (требует от специалиста очень высокой профессиональной квалификации), тем не менее его дальнейшее развитие (в том числе и в плане создания пакета прикладных программ) для широкого класса задач математической теории дифракции представляется крайне желательным.

## ОДНОРОДНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИЗМА (КЛИН) В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

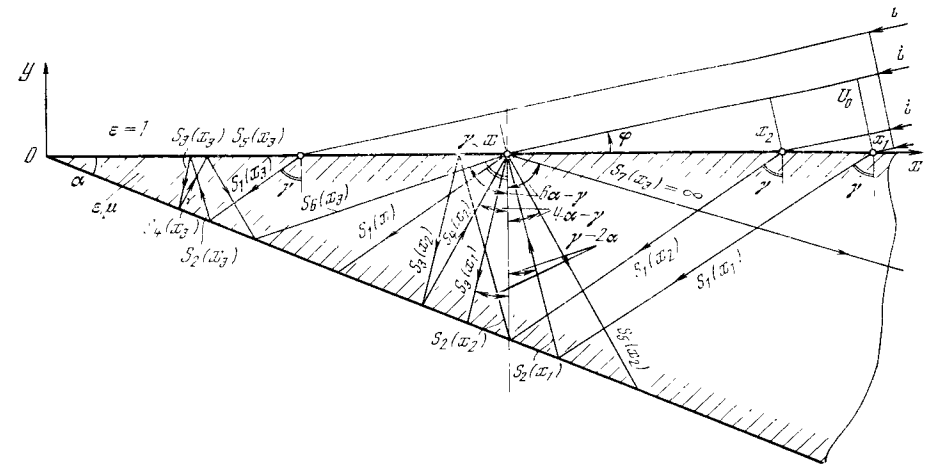
Диэлектрическая призма является ключевой структурой для широкого класса устройств в различных разделах классической физики. К сожалению, до сих пор неизвестно строгое решение задачи дифракции плоской волны на диэлектрическом клине. Более того, только недавно получено полное геометрическое решение для неограниченного клина. В данной главе мы рассмотрим ряд приближенных подходов к решению этой задачи, а также ряд моделей (типа полубесконечного слоя), описывающих с некоторым приближением реальные ситуации.

### § 2.1

#### Полное геометрическое решение задачи о неограниченном однородном диэлектрическом клине

2.1.1. Специфика проблемы дифракции плоской волны на диэлектрическом клине состоит в ее *автомоделности*, т. е. независимости решения от длины волны падающего поля. Искомое решение является функцией трех параметров: диэлектрической проницаемости материала клина  $\epsilon$ , угла раствора клина  $\alpha$  и угла прихода плоской волны  $\varphi$  (рис. 30). Таким образом, в своей постановке задача не содержит малого параметра, что в итоге и обуславливает ее сложность. Нам представляется, что первым этапом в рассмотрении задачи о прозрачном клине должно быть построение полного геометрического решения. Насколько нам известно, пока такое решение не выписано. Кроме самостоятельного значения, полное геометрическое решение может быть использовано как нулевое приближение при построении на его основе алгоритмов «последовательных приближений» при отыскании дифракционных поправок. Настоящий параграф посвящен выводу формул полного геометрического решения о падении плоской волны на прозрачную неограниченную призму с плоскими гранями [58].

2.1.2. Пусть плоская волна  $\exp\{ik(x \cos \varphi + y \sin \varphi)\}$  падает под углом  $\varphi \in [0, \pi]$  на верхнюю грань безграничного однородного диэлектрического клина (рис. 30);  $\gamma = (\arcsin \cos \varphi) / \sqrt{\epsilon}$  — угол преломления,  $U_0$  — падающее поле. Сначала подсчитаем полное геометрическое поле на нижней грани в некоторой



Р и с. 30. К определению геометрического поля на верхней грани однородной изотропной диэлектрической призмы

произвольной точке с координатами  $(x, -x \operatorname{tg} \alpha)$ . Обозначим через  $(x_m, 0)$  координаты точек верхней грани, через которые проходят лучи, попадающие (непосредственно или после ряда отражений) в точку  $(x, -x \operatorname{tg} \alpha)$ . Таких точек конечное число  $m \in [1, [n/2]]$ ; знак  $[ \ ]$  показывает, что от числа, заключенного в квадратные скобки, следует взять целую часть. Геометрический путь из точки  $(x_m, 0)$  в точку  $(x, -x \operatorname{tg} \alpha)$  состоит из лучей  $S_n(x_m)$ , число которых  $n \in [0, [\pi/2 + \gamma/\alpha]]$ . Длина луча  $S_n(x_m) = x_m S_n$ , где

$$S_n = (\sin \alpha \cos \gamma) / \cos \{(n-1)\alpha - \gamma\} \cos(\gamma - 2n\alpha). \quad (2.1.1)$$

Из чисто геометрического рассмотрения следует, что  $x_m = x/\kappa'_m$ , где

$$\kappa'_m = 1 - \sum_{n=0}^{m-1} (S_{2n} + S_{2n+1}) \sin(\gamma - 2n\alpha). \quad (2.1.2)$$

А стало быть,

$$S_n(x_m) = x S_n / \kappa'_m. \quad (2.1.3)$$

При помощи этих формул легко подсчитываются полное геометрическое поле  $U_1(x)$  и его нормальная производная  $V_1(x)$  на нижней грани. Результат таков:

$$U_1(x) = T \sum_{m=1}^N (1 + R_{2m-1}^*) \prod_{j=1}^{2m-2} R_j^* U_0 \left( \frac{x}{\kappa'_m} \right) \times \exp \left\{ -ik \sqrt{\epsilon} \frac{x}{\kappa'_m} \sum_{n=1}^{2m-1} S_n \right\}; \quad (2.1.4)$$

$$V_1(x) = ik \sqrt{\varepsilon} T \sum_m^{N'} (1 - R_{2m-1}^*) \cos[\gamma - (2m-1)\alpha] \times$$

$$\times \prod_{j=1}^{2m-2} R_j^* U_0\left(\frac{x}{x_m}\right) \exp\left\{-ik \sqrt{\varepsilon} \frac{x}{x_m} \sum_{n=1}^{2m-1} S_n\right\}. \quad (2.1.5)$$

Здесь

$$N' = \left[ \frac{1}{2} \left[ \frac{1}{\alpha} \left( \frac{\pi}{2} + \gamma \right) + \frac{1}{2} \right] \right];$$

$T$  — коэффициент прохождения плоской волны при падении на плоскую бесконечную границу полупространства, заполненного однородным диэлектриком  $\varepsilon$  (см. § 1.1);  $R_j^* = R^*(j\alpha - \gamma)$  — коэффициент отражения плоской волны, падающей под углом (с нормалью к границе)  $j\alpha - \gamma$  изнутри полубесконечного диэлектрика.

Аналогичные выражения для поля  $U_2(x)$  и его нормальной производной  $V_2(x)$  на верхней грани имеют следующий вид (рис. 2.2):

$$U_2(x) = T \left\{ U_0(x) + \sum_{m=1}^N (1 + R_{2m}^*) \prod_{j=1}^{2m} R_j^* U_0\left(\frac{x}{x_m}\right) \times \right.$$

$$\left. \times \exp\left\{-ik \sqrt{\varepsilon} \frac{x}{x_m} \sum_{n=1}^{2m} S_n\right\} \right\}; \quad (2.1.6)$$

$$V_2(x) = ik \sqrt{\varepsilon} T \left\{ -U_0(x) \cos \gamma + \sum_{m=1}^N (1 - R_{2m}^*) \cos(2m\alpha - \gamma) \times \right.$$

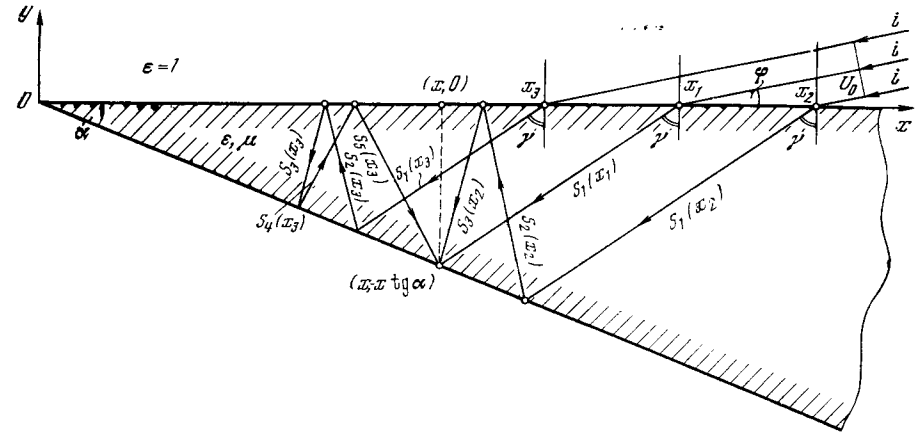
$$\left. \times \prod_{j=1}^{2m-1} R_j^* U_0\left(\frac{x}{x_m}\right) \exp\left\{-ik \sqrt{\varepsilon} \frac{x}{x_m} \sum_{n=1}^{2m} S_n\right\} \right\}. \quad (2.1.7)$$

Здесь обозначено

$$N = \left[ \frac{1}{2\alpha} \left( \frac{\pi}{2} + \gamma \right) \right], \quad z_m = x'_m - S_{2m} \sin(\gamma - 2m\alpha). \quad (2.1.8)$$

2.1.3. Полученное полное геометрикооптическое решение (2.1.3)–(2.1.8) может быть использовано как нулевое приближение в задаче об отыскании дифракционной поправки к решению. При этом в качестве исходных естественно использовать строгие интегральные уравнения Фредгольма II рода [479]. Такой алгоритм был предложен в [58]. Полученный результат позволяет обычным способом распространить его на случай произвольного падения плоской волны на клин (когда плоскость падения волны не совпадает с плоскостью чертежа), а также на случай цилиндрической или сферической падающей волны.

Выписанное геометрикооптическое решение формально справедливо всюду в теле клина. Однако надо иметь в виду, что всегда у самой кромки клина имеется некоторая область, являющаяся



Р и с. 31. К определению геометрикооптического поля на нижней грани диэлектрического клина

«запредельной» с точки зрения волновой теории. Размер этой зоны  $\mathcal{L}$  ( $\mathcal{L}$  — расстояние от кромки клина) определяется соотношением  $k\mathcal{L} = (\pi/2)/\sqrt{\varepsilon - 1} \operatorname{tg} \alpha$ . Область меньших значений  $k\mathcal{L}$  является запредельным волноводом, в котором геометрикооптическое решение несправедливо.

## § 2.2

### Дифракция плоской волны на прозрачной полуплоскости

2.2.1. Токи поляризации. Задачи, рассматриваемые здесь с учетом малой толщины пластин ( $kd \ll 1$ ), когда поле внутри них квазистационарно, могут быть решены единым образом с использованием довольно наглядного с физической точки зрения приема. Остановимся на нем подробнее.

Электромагнитное поле в неоднородной среде с диэлектрической  $\varepsilon$  и магнитной  $\mu$  проницаемостями можно найти из уравнений Максвелла, в которых выделены токи поляризации:

$$\mathbf{J}^e(\mathbf{r}) = i\omega(\varepsilon - \varepsilon_0) \mathbf{E}(\mathbf{r}) \quad (2.2.1)$$

— электрический ток поляризации и

$$\mathbf{J}^m(\mathbf{r}) = -i\omega(\mu - \mu_0) \mathbf{H}(\mathbf{r}) \quad (2.2.2)$$

— магнитный ток поляризации.

В этом случае уравнения Максвелла запишутся так:

$$\operatorname{rot} \mathbf{H} = -i\omega\varepsilon_0 \mathbf{E} + \mathbf{J}^e, \quad \operatorname{rot} \mathbf{E} = i\omega\mu_0 \mathbf{H} - \mathbf{J}^m.$$

Для решения этой системы уравнений обратимся к векторным потенциалам  $A^e$  и  $A^m$ , представляющим поле следующим образом:

$$\begin{aligned} E &= i\omega\mu_0 A^e - \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \text{grad div } A^e - \text{rot } A^m, \\ H &= i\omega\epsilon_0 A^m - \frac{1}{i\omega\mu_0} \text{grad div } A^e + \text{rot } A^m. \end{aligned} \quad (2.2.3)$$

При этом сами потенциалы  $A^e$  и  $A^m$  имеют вид

$$A^e = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dV', \quad A^m = \int_V \mathbf{J}(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dV'. \quad (2.2.4)$$

Здесь  $G(\mathbf{r}; \mathbf{r}')$  — функция Грина задачи и интегрирование производится по всему объему, занятому токами поляризации. Конечно, введение токов поляризации не облегчает решение граничной задачи, так как величины самих токов зависят от искомых полей  $E$  и  $H$ . Однако уравнения (2.2.4) позволяют быстро свести задачу к интегральному или интегро-дифференциальному уравнению (или системе таких уравнений) для искомых полей  $E$  и  $H$ . В случае тонкой пластины получаемые уравнения разрешимы *методом Винера — Хопфа — Фока*.

2.2.2. Вектор  $E$  падающей волны перпендикулярен плоскости падения. Пусть на диэлектрическую полуплоскость толщиной  $d$  падает наклонно под углом  $\vartheta_0$  плоская электромагнитная волна  $p$ -поляризации (рис. 32); середина пластины совпадает с плоскостью  $yoz$ . Падающая волна в объеме пластины возбуждает только электрический ток поляризации  $\mathbf{J}^e(\mathbf{r})$  ( $\mu = \mu_0$  всюду).

Из симметрии задачи  $A_x^e = iA_x^e$ ,  $A_y^e = A_z^e = 0$ ; поэтому

$$A_x^e = \int_V J_x^e(\mathbf{r}') G(\mathbf{r}; \mathbf{r}') dV'. \quad (2.2.5)$$

В нашем двумерном случае  $G = (i/4)H_0^{(1)}(kr)$  и вместо (2.2.5) с учетом (2.2.1) можно записать

$$A_x^e = -i\omega\epsilon_0(\epsilon' - 1) \int_V E_x^i(\mathbf{r}') \frac{1}{4} H_0^{(1)}(kr') dV', \quad (2.2.6)$$

где  $E_x^i(\mathbf{r}')$  — полное электрическое поле, складывающееся из поля падающей волны и дифрагированной (рассеянной), которую определяет вектор-потенциал (2.2.6);  $\epsilon'$  — относительная диэлектрическая проницаемость пластины. Определим с помощью (2.2.3) дифрагированное поле (оно и возбуждается токами поляризации) следующим образом:

$$E_x = \frac{ik}{4} Y \int_V (E_x^i + E_x) H_0^{(1)}(kr') dV', \quad (2.2.7)$$

$$\text{где } Y = kd(\epsilon' - 1). \quad (2.2.7')$$

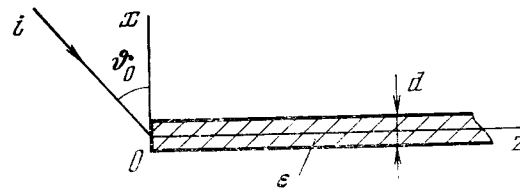


Рис. 32. Диэлектрическая полуплоскость в поле плоской электромагнитной волны

Учитывая малую толщину пластины и квазистационарный характер поля внутри нее, будем считать  $E_x^i(y, z)$  совпадающим всюду внутри пластины с его значением при  $y = 0$ , т. е. при  $z > 0$  и  $y \in (-d/2, d/2)$ :  $E_x^i(y, z) = E_x^i(0, z)$ . В этом случае уравнение (2.2.7) можно переписать в виде

$$E_x = (ikY/i) \int_0^\infty [E_x^i(0) + E_x(0, \zeta)] H_0^{(1)}(k|z - \zeta|) d\zeta, \quad (2.2.8)$$

причем  $E_x^i(0) = \exp\{ikz \sin \vartheta_0\}$ .

Интегральное уравнение (2.2.8) разрешимо методом Винера — Хопфа — Фока. Применим к нему преобразование Фурье и, как обычно, введем обозначения

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x^+(y, \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty E_x(y, z) e^{i\alpha z} dz, \\ \mathcal{E}_x^-(y, \alpha) &= \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 E_x(y, z) e^{i\alpha z} dz. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

Используя равенство

$$\frac{1}{2} \int_{-\infty}^\infty e^{i\alpha z} H_0^{(1)}(k\sqrt{\zeta^2 + z^2}) dz = \frac{1}{r} e^{i\gamma\zeta}; \quad \gamma = \sqrt{k^2 - \alpha^2}, \quad (2.2.10)$$

теореме о свертке функций и обозначения (2.2.9), получим функциональное уравнение (для  $y = 0$ )

$$\mathcal{E}_x^+(\alpha, 0) + \mathcal{E}_x^-(\alpha, 0) = \left[ ikY \mathcal{E}_x^+(\alpha, 0) - \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \frac{kY}{k \sin \vartheta_0 + \alpha} \right] \frac{1}{2\gamma},$$

справедливое в полосе регулярности  $-k_2 \sin \vartheta_0 < \tau < k_2$ , где  $\tau = \text{Im } \alpha$ ,  $k = k_1 + ik_2$ .

Функциональное уравнение такого вида рассматривалось в [11]. Перепишем его в следующем, удобном для нас, виде:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x^+ \frac{(i2\gamma Z/k) + 1}{\sqrt{k + \alpha} \sqrt{k - \alpha}} + i/\sqrt{2\pi} \sqrt{k + \alpha} \sqrt{k - \alpha} (k \sin \vartheta_0 + \alpha) = \\ = \frac{2i}{k} Z \mathcal{E}_x^-; \quad Z = Y^{-1}. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Представим коэффициент при  $\mathcal{E}_x^+$  в виде произведения двух сомножителей, регулярных соответственно в полуплоскостях  $\text{Im } \alpha < k_2 \sin \vartheta_0$  и  $\text{Im } \alpha > -k_2 \sin \vartheta_0$  и не имеющих в них нулей, а второе слагаемое в левой части (2.2.11) — в виде суммы двух слагаемых, регулярных в тех же полуплоскостях. После несложных преобразований получим

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x^+ \frac{K_+(\alpha)}{\sqrt{k+\alpha}} + \frac{i}{\sqrt{2\pi}(k \sin \vartheta_0 + \alpha)} [1/K_-(\alpha) \sqrt{k+\alpha} - \\ - 1/K_-(k \sin \vartheta_0) \sqrt{k+k \sin \vartheta_0}] = -\frac{i2}{k} Z \frac{\sqrt{k-\alpha}}{K_-(\alpha)} \mathcal{E}_x^+ + \\ + i/\sqrt{2\pi}(k \sin \vartheta_0 + \alpha) K_-(k \sin \vartheta_0) \sqrt{k+k \sin \vartheta_0}, \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

где левая часть равенства регулярна в полуплоскости  $\text{Im } \alpha > -k_2 \sin \vartheta_0$ , а правая — в полуплоскости  $\text{Im } \alpha < k_2$ . В формуле (2.2.12)  $K_+(\alpha)$  и  $K_-(\alpha)$  — сомножители, факторизующие функцию  $i2\gamma Z k^{-1} + 1 = K_+(\alpha)K_-(\alpha)$ .

Из (2.2.12) следует

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_x^+(0) = -\frac{i\sqrt{k-\alpha}}{\sqrt{2\pi}(k \sin \vartheta_0 + \alpha) K_+(\alpha)} [1/K_-(\alpha) \sqrt{k+\alpha} - \\ - 1/K_-(k \sin \vartheta_0) \sqrt{k+k \sin \vartheta_0}], \\ \mathcal{E}_x^-(0) = \frac{ik\gamma}{\sqrt{8\pi}} \frac{K_-(\alpha)}{\sqrt{k-\alpha}} 1/K_-(k \sin \vartheta_0) (k \sin \vartheta_0 + \alpha) \sqrt{k+k \sin \vartheta_0}. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

В принципе задачу можно считать решенной, так как обратным преобразованием Фурье можно найти электрическое поле при  $y=0$ , а далее, как обычно, распространить результат на любые значения  $|y| > 0$ . Причем для вычисления интегралов, как правило, используется метод перевала.

2.2.3. Вычисление вспомогательных функций  $K_{\pm}(\alpha)$ . Обозначим  $2Z/k = \delta$ ; тогда  $K_+(\alpha)K_-(\alpha) = 1 + \delta\sqrt{k^2 - \alpha^2}$ . Для выполнения указанной факторизации положим

$$\ln K_+(\alpha) + \ln K_-(\alpha) = \ln [1 + i\delta \sqrt{k^2 - \alpha^2}].$$

Дифференцируя по  $\alpha$ , найдем, что

$$\begin{aligned} \frac{d}{d\alpha} \ln K_+(\alpha) + \frac{d}{d\alpha} \ln K_-(\alpha) = -i\delta\alpha(k^2 - \alpha^2)^{-1/2} \times \\ \times [1 + i\delta(k^2 - \alpha^2)^{1/2}]^{-1} = \frac{1}{2(\alpha-p)} + \frac{1}{2(\alpha+p)} + \\ + \frac{i}{2\delta\sqrt{k^2 - \alpha^2}} \left( \frac{1}{\alpha+p} + \frac{1}{\alpha-p} \right), \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

где  $p^2 = k^2 + \delta^{-2}$ , и используем далее известный результат: если  $f_{\pm}(\alpha) = i\pi^{-1}(k^2 - \alpha^2)^{-1/2} \arccos(\pm \alpha/k)$ , то  $f_{\pm}(\alpha)$  регулярны при  $\tau > -k_2$  и  $\tau < k_2$  соответственно и  $f_+(\alpha)f_-(\alpha) = \sqrt{k^2 - \alpha^2}$ .

Пусть  $q$  некоторое комплексное число и пусть

$$F_+(\alpha) = \frac{1}{\alpha-q} [f_+(\alpha) \mp f_{\pm}(q)], \quad F_-(\alpha) = \frac{1}{\alpha-q} [f_-(\alpha) \pm f_{\pm}(q)],$$

где берется верхний знак, если точка  $q$  находится в верхней полуплоскости, и нижний знак, если  $q$  лежит в нижней полуплоскости. Тогда функции  $F_+(\alpha)$  и  $F_-(\alpha)$  регулярны в верхней и нижней полуплоскостях соответственно и

$$F_+(\alpha) + F_-(\alpha) = \frac{1}{(\alpha-q)\sqrt{k^2 - \alpha^2}}.$$

Так как при  $\alpha = p$   $\sqrt{k^2 - \alpha^2} = i\delta$ , то из (2.2.14) получим

$$\frac{d}{d\alpha} \ln K_+(\alpha) = \frac{i}{\delta} \left[ \frac{f_+(\alpha) - f_+(p)}{\alpha-p} + \frac{f_+(\alpha) - f_+(-p)}{\alpha+p} \right]. \quad (2.2.15)$$

Для определения  $K_+(\alpha)$  надо проинтегрировать выражение (2.2.15). В конечном виде интегралы не выражаются, но формулы для расчетов можно получить при помощи подстановки  $\vartheta = \arccos(\alpha/k)$ .

Указанный путь факторизации не является единственным. Аналогичные функции факторизованы в [4, 11, 21] в задаче о береговой рефракции электромагнитных волн. Наконец, мы можем просто воспользоваться формулами (4.31) из [11], введя соответствующие обозначения. Действительно, одна из факторизуемых функций имеет вид  $K_2(\alpha) = 1 + (i\pi\gamma/ka_{21})$ .

2.2.4. Об использовании двусторонних граничных условий. Для решения задачи о дифракции электромагнитной волны на прозрачной и полупрозрачной полуплоскости можно было бы, не получая интегрального уравнения, сразу воспользоваться процедурой Винера — Хопфа — Фока, применяя преобразование Фурье к двусторонним граничным условиям, связывающим тангенциальные составляющие полей на противоположных сторонах пластины; например, для рассмотренной  $p$ -поляризации плоской волны

$$H_z^l(+0) - H_z^l(-0) = ikd(\epsilon' - 1)[E_x^l(+0) + E_x^l(-0)]. \quad (2.2.16)$$

Здесь «+0» означает, что соответствующая величина относится к верхней стороне пластины, а «-0» — к нижней.

Общая формулировка двусторонних граничных условий имеет вид [17]

$$\frac{\partial}{\partial y} U(+0) + ik\bar{a}U(+0) - ik\bar{b}U(-0) = 0, \quad (2.2.17)$$

$$\frac{\partial}{\partial y} U(-0) - ik\bar{a}U(-0) + ik\bar{b}U(+0) = 0.$$

Если пластина имеет толщину  $d$  и выполнена из материала с показателем преломления  $n$ , то при  $|n| \gg 1$  коэффициенты  $\bar{a}$  и  $\bar{b}$  выражаются через параметры материала пластины

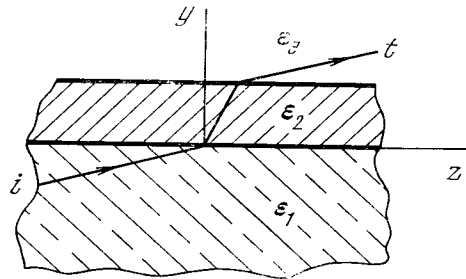
в случае двух поляризаций электромагнитного поля (ребро пластины совпадает с осью  $x$ ) согласно таблице.

Таблица

$U$	$\bar{a}$	$\bar{b}$
$H_x$ (s-поляризация)	$i \sqrt{\frac{\mu \varepsilon_0}{\varepsilon_0 \mu_0}} \operatorname{ctg} \bar{k} d$	$i \sqrt{\frac{\mu \varepsilon_0}{\varepsilon_0 \mu_0}} \frac{1}{\sin \bar{k} d}$
$E_x$ (p-поляризация)	$i \sqrt{\frac{\mu_0 \varepsilon}{\varepsilon_0 \mu}} \operatorname{ctg} \bar{k} d$	$i \sqrt{\frac{\varepsilon \mu_0}{\varepsilon_0 \mu}} \frac{1}{\sin \bar{k} d}$

Здесь  $\bar{k} = kn$ ,  $\varepsilon, \mu$  — параметры пластины;  $\varepsilon_0, \mu_0$  — параметры окружающей среды. При  $\operatorname{Im} kd \Rightarrow 0$ ,  $\bar{b} \Rightarrow 0$ ,  $\bar{a} = g$  условия (2.2.17) переходят в условия Шюкина — Леонтовича  $\partial U / \partial y \pm ikgU = 0$  при  $y = 0$ , где знак  $\pm$  выбирается в зависимости от того, рассматривается поле в области  $y > 0 (+0)$  или  $y < 0 (-0)$ . В противоположном случае, когда достигается полная прозрачность, условия (2.2.17) переходят в условия непрерывности  $U(+0) = U(-0)$  и гладкости  $(\partial U / \partial y)_{+0} = (\partial U / \partial y)_{-0}$ .

В последнее время были установлены в некотором смысле более общие, чем (2.2.17), граничные условия двустороннего типа применительно к ситуации, характерной для газовой-диэлектрических волноводов (рис. 33; [481]):  $\varepsilon_1 > 1$ ,  $\varepsilon_1 - 1 \ll 1$ ,  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_3 = 1$ . Из области  $y < 0$  на стенку  $y \in [0, d]$  падает плоская волна под некоторым, вообще говоря, малым углом скольжения  $\gamma$ . Падающая волна испытывает полное внутреннее отражение, если  $\gamma < \gamma_0 < \sqrt{\varepsilon_1 - 1}$ . Расписывая уравнения Максвелла во всех трех областях и пользуясь обычными граничными условиями (2.2) введения для тангенциальных границ  $y = 0$  и  $y = d$  составляющих полей, нетрудно найти связь между компонентами поля на верхней и нижней границах слоя. Учитывая затем, что



Р и с. 33. Стенка газовой-диэлектрического волновода:  $\varepsilon_1 > 1$ ,  $\varepsilon_1 - 1 \ll 1$ ,  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$ ,  $\varepsilon_3 = 1$

$\gamma^2 \ll \varepsilon_2 - \varepsilon_1$  и  $kd\gamma^2 \ll \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}$ , приходим к следующим двусторонним граничным условиям:

$$\begin{aligned} H_z^- - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} E_x^- &= (H_z^+ - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} E_x^+) e^{-ikd\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}, \\ H_z^- + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} E_x^- &= (H_z^+ + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} E_x^+) e^{ikd\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} \end{aligned} \quad (2.2.17p)$$

для p-поляризованного поля ( $\mathbf{E} \parallel \mathbf{ox}$ ) и

$$\begin{aligned} \varepsilon_2 E_z^- - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} H_x^- &= (\varepsilon_2 E_z^+ - \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} H_x^+) e^{ikd\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}}, \\ \varepsilon_2 E_z^- + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} H_x^- &= (\varepsilon_2 E_z^+ + \sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1} H_x^+) e^{-ikd\sqrt{\varepsilon_2 - \varepsilon_1}} \end{aligned} \quad (2.2.17s)$$

для s-поляризованного поля ( $\mathbf{H} \parallel \mathbf{ox}$ ).

При  $kd\sqrt{\varepsilon_2} \ll 1$  и  $\varepsilon_1 = 1$  из уравнений (2.2.17p) и (2.2.17s) непосредственно следуют известные двусторонние условия, приведенные, например, в [21]. При  $kd \ll \sqrt{\varepsilon_2}$ ,  $\varepsilon_1 \ll \varepsilon_2$  формулы (2.2.17p) и (2.2.17s) переходят в (2.2.17).

Существенным обстоятельством в приведенных двусторонних условиях (2.2.17p,s) является малость угла  $\gamma$ . В силу этого условия (2.2.17p,s) оказываются имеют более обширную область применения (по  $kd$ ), нежели упомянутые условия [17, 21].

2.2.5. Воспользуемся условиями (2.2.17) для решения задачи о дифракции p-поляризованной волны на полупрозрачной полуплоскости.

В случае p-поляризации  $U \equiv E_x^t$  (табл. на с. 94) и условия (2.2.17) можно переписать в виде

$$\frac{\partial E_x^t(+0)}{\partial y} - \frac{\partial E_x^t(-0)}{\partial y} = ik(\bar{b} - \bar{a})[E_x^t(+0) + E_x^t(-0)], \quad (2.2.18)$$

где  $E_x^t = E_x + \exp\{ik(z \sin \vartheta_0 - y \cos \vartheta_0)\}$  — полное электрическое поле при  $z > 0$ ;  $y = \pm 0$ .

Дифрагированное поле  $E_x \equiv \varphi(y, z)$  должно всюду удовлетворять волновому уравнению

$$\left(\frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2\right) \varphi(y, z) = 0 \quad (2.2.19)$$

и условию излучения на бесконечности. Применим к (2.2.18) и (2.2.19) преобразование Фурье по переменной  $z$ ; обозначив

$$\Phi(y, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi(y, z) e^{i\alpha z} dz,$$

получим из (2.2.19)

$$\left[\frac{\partial^2}{\partial y^2} + (k^2 - \alpha^2)\right] \Phi(y, \alpha) = 0. \quad (2.2.20)$$

С учетом условия на бесконечности получим из (2.2.20)

$$\Phi(y, \alpha) = A \exp\{\gamma y\} \quad (\operatorname{Im} \gamma > 0) \quad \text{при } y > 0,$$

$$\Phi(y, \alpha) = B \exp\{-i\gamma y\} \quad \text{при } y < 0. \quad \text{Или, вводя обычные}$$



обозначения, можно записать для  $y = \pm 0$

$$\begin{aligned} \Phi_{-} (+0) + \Phi_{+} (+0) &= A(\alpha), & \Phi_{-} (-0) + \Phi_{+} (-0) &= B(\alpha), \\ \Phi'_{-} (+0) + \Phi'_{+} (+0) &= i\gamma A(\alpha), & \Phi'_{-} (-0) + \Phi'_{+} (-0) &= -i\gamma B(\alpha). \end{aligned} \quad (2.2.21)$$

Преобразование Фурье уравнения (2.2.18) дает

$$\begin{aligned} \Phi'_{+} (+0) - \Phi'_{+} (-0) &= ik(\tilde{b} - \tilde{a})[\Phi_{+} (+0) - \Phi_{+} (-0)] - \\ &- \frac{2k(\tilde{b} - \tilde{a})}{\sqrt{2\pi}(\alpha + k \sin \vartheta_0)}. \end{aligned} \quad (2.2.22)$$

Обозначим далее  $i2(\tilde{b} - \tilde{a}) = Y_0$ . Функциональные уравнения (2.2.21) и (2.2.22) можно свести к одному уравнению типа уравнения Винера — Хопфа — Фока, имеющего такой же вид, как и (2.2.10). Действительно, из (2.2.21) можно получить

$$\begin{aligned} \Phi'_{+} (+0) + \Phi'_{-} (+0) &= i\gamma[\Phi_{+}(0) + \Phi_{-}(0)], & \Phi'_{+} (-0) + \\ + \Phi'_{-} (-0) &= -i\gamma[\Phi_{+}(-0) + \Phi_{-}(-0)]. \end{aligned} \quad (2.2.23)$$

Вычитая одно из другого и учитывая, что  $\Phi_{-} (+0) = \Phi_{-} (-0)$  и  $\Phi'_{-} (-0) = \Phi'_{-} (+0)$  (это следует из непрерывности  $E_x$  и  $H_z$  при  $y = 0, z < 0$ ), получим

$$\Phi'_{+} (+0) - \Phi'_{+} (-0) = i\gamma[\Phi_{+} (+0) + \Phi_{+} (-0)] + i2\gamma\Phi_{-}. \quad (2.2.24)$$

Обозначим теперь  $D_{+}(0) = \Phi_{+} (+0) + \Phi_{+} (-0)$ ,  $S_{+}(0) = \Phi'_{+} (+0) - \Phi'_{+} (-0)$ . Уравнения (2.2.22) и (2.2.23) теперь можно переписать в виде

$$S_{+}(0) = \frac{k}{2} Y_0 D_{+}(0) - \frac{ik}{\sqrt{2\pi}} \frac{Y_0}{\alpha + k \sin \vartheta_0}, \quad (2.2.25)$$

$$S_{+}(0) = i\gamma D_{+}(0) + i2\gamma\Phi_{-}(-0).$$

Исключив из системы (2.2.25)  $S_{+}(0)$ , получим искомое функциональное уравнение

$$D_{+}(\alpha) \left( \gamma - \frac{ik}{2} Y_0 \right) = - \frac{k}{\sqrt{2\pi}} \cdot \frac{Y_0}{\alpha + k \sin \vartheta_0} - 2\gamma\Phi_{-}(0). \quad (2.2.26)$$

Если в этом уравнении заменить  $D_{+}(\alpha)/2$  на  $\mathcal{E}_x^+$ ,  $\Phi_{-}(\alpha)$  на  $\mathcal{E}_x^-$  и  $Y_0$  на  $Y$ , то оно полностью совпадает с уравнением (2.2.10). Этого и следовало ожидать. Однако надо иметь в виду, что в (2.2.26) входит более точное выражение для  $Y_0$ . Из сравнения (2.2.10) и (2.2.26) видно, что  $\mathcal{E}_x^+$  в (2.2.10) по существу равно полусумме значений этой величины на верхней и нижней стороне диэлектрической пластины, и при выводе (2.2.10) мы приняли  $E_x$  всюду постоянным внутри пластины. Очевидно, это справедливо для тонких пластин ( $kd \ll 1$ ). Из (2.2.26) и (2.2.23) же, напротив,

могут быть найдены значения полей на нижней и верхней сторонах пластины. Не останавливаясь подробно на решении уравнения (2.2.26) (оно может быть получено из (2.2.13) с помощью упомянутой замены), установим связь между  $Y$ ,  $Y_0$  и компонентами тензора входного импеданса диэлектрической пластины толщины  $a'$ .

Из соотношений гл. 2. [11] следует, что в нашем случае

$$E_x(+0) = \rho_0 a_{12} H_z(+0), \quad (2.2.27)$$

где

$$a_{12} = \left( 1 + \frac{i}{\sqrt{\epsilon}} \operatorname{tg} kd \right) / \left( 1 + i \sqrt{\epsilon} \operatorname{tg} kd \right); \quad (2.2.28)$$

причем мы считаем, что  $\vartheta_1 = \vartheta_2 = \vartheta_3 = 0$ , т. е. плоская волна распространяется в пластине вдоль оси  $y$ , и

$$E_x(-0) = \rho_0 \frac{i}{k} H_z(-0). \quad (2.2.29)$$

При малых  $kd$  формула (2.2.28) принимает вид

$$a_{12} = \frac{1 + ikd}{1 + ikd\epsilon}. \quad (2.2.30)$$

Отсюда  $Y_0 = a_{12}^{-1} = 1 + ikd(\epsilon - 1) + O((kd)^2)$ , т. е. нормированная входная проводимость пространства  $y \leq 0, z > 0$  складывается из проводимости, обуславливающей токи поляризации и проводимости свободного пространства  $y < 0$ , равной единице. Из формул (2.2.27) — (2.2.29) непосредственно следуют соотношения (2.2.17) при  $\sqrt{\epsilon} \gg 1$ .

2.2.6. Вектор  $E$  падающей волны параллелен плоскости падения. В этом частном случае возникающие токи поляризации в пластине направлены вдоль оси  $z$  и задача решается с помощью вектора  $A_z^c = kA_z^c$ . Из формул (2.2.3) следует при этом, что

$$E_z = i\omega\mu_0 A_z^c - \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \cdot \frac{\partial^2}{\partial z^2} A_z^c = - \frac{1}{i\omega\epsilon_0} \left( k^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) A_z^c.$$

Поступая далее аналогично случаю  $p$ -поляризации, найдем, что

$$\begin{aligned} \varphi_1(y, z) &= \cos \vartheta_0 e^{ik(z \sin \vartheta_0 - y \cos \vartheta_0)} + \\ &+ i(\epsilon - 1) \frac{d}{4} \left( k^2 - \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) \int_0^\infty \varphi_1(0, \zeta) H_0^{(1)}(k|z - \zeta|) d\zeta, \end{aligned} \quad (2.2.31)$$

где  $\varphi_1(y, z) \equiv E_z(y, z)$  —  $z$ -компонента поля рассеянной волны.

Применив к интегро-дифференциальному уравнению (2.2.31) преобразование Фурье, получим при  $y = 0$

$$\begin{aligned} \Phi_{1-}(0, \alpha) + \Phi_{1+}(0, \alpha) &= - \frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{\cos \vartheta_0}{\alpha + k \sin \vartheta_0} + \\ &+ \frac{i}{2} (\epsilon - 1) \gamma d \Phi_{1+}(0, \alpha), \end{aligned} \quad (2.2.32)$$

где

$$\Phi_{1-}(0, \alpha) + \Phi_{1+}(0, \alpha) = \Phi_I(0, \alpha) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{\infty} \varphi_I(0, z) e^{iaz} dz.$$

Проводя перегруппировку слагаемых в (2.2.32) после факторизации функции  $L(\alpha) = (i\gamma Y/2k) - 1 = L_-(\alpha)L_+(\alpha)$ , получим ( $\alpha = \sigma + i\tau$ ,  $\tau \in (-k_2 \sin \vartheta_0, k_2)$ ,  $k = k_1 + ik_2$ ,  $k_j > 0$ ,  $j = 1, 2$ )

$$\begin{aligned} \frac{\Phi_{1-}(\alpha)}{L_-(\alpha)} + \frac{i(2\pi)^{-1/2} \cos \vartheta_0}{\alpha + k \sin \vartheta_0} \left[ \frac{1}{L_-(\alpha)} - \frac{1}{L_-(-k \sin \vartheta_0)} \right] = \\ = \Phi_{I+}(\alpha) L_+(\alpha) - \frac{i(2\pi)^{-1/2} \cos \vartheta_0}{L_-(-k \sin \vartheta_0)(\alpha + k \sin \vartheta_0)}. \end{aligned} \quad (2.2.33)$$

В уравнении (2.2.33) левая часть регулярна в нижней полуплоскости  $r < k_2$ , правая — в верхней полуплоскости  $\tau > -k_2 \sin \vartheta_0$ .

Если ввести обозначение  $\delta = -Y/2k$ , то факторизуемая функция  $L(\alpha)$  имеет такой же вид, как и в случае  $p$ -поляризации (см. (2.2.4)). Из (2.2.33) легко могут быть найдены  $\Phi_{1+}$  и  $\Phi_{1-}$ . Действительно, учитывая условия на ребре полуплоскости, и применяя теорему Лиувилля, найдем

$$\begin{aligned} \Phi_{1+}(\alpha) &= (i \cos \vartheta_0) / L_+(\alpha) L_-(k \sin \vartheta_0) (\alpha + k \sin \vartheta_0), \\ \Phi_{1-}(\alpha) &= -\frac{i}{\sqrt{2\pi}} \frac{L_-(\alpha) \cos \vartheta_0}{\alpha + k \sin \vartheta_0} \left[ \frac{1}{L_-(\alpha)} - \frac{1}{L_-(-k \sin \vartheta_0)} \right]. \end{aligned} \quad (2.2.34)$$

Применяя обратное преобразование Фурье к (2.2.34), найдем искомое поле

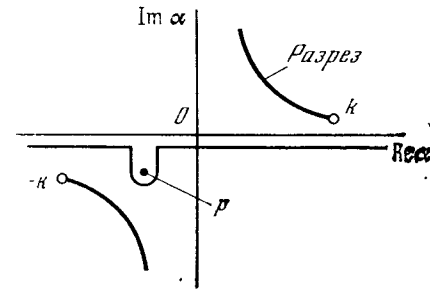
$$\begin{aligned} E(y, z) = \frac{i}{2\pi} \left[ \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{\cos \vartheta_0 \exp\{-i(\alpha z + \gamma y)\} d\alpha}{(\alpha + k \sin \vartheta_0) L_+(-k \sin \vartheta_0) L_+(\alpha)} - \right. \\ \left. - \int_{ic-\infty}^{ic+\infty} \frac{L_-(\alpha) \cos \vartheta_0 \exp\{-i(\alpha z + \gamma y)\} d\alpha}{(\alpha - k \sin \vartheta_0) L_-(\alpha) L_-(-k \sin \vartheta_0)} \right], \end{aligned} \quad (2.2.35)$$

$$k_2 \sin \vartheta_0 < c < \tau < k_2.$$

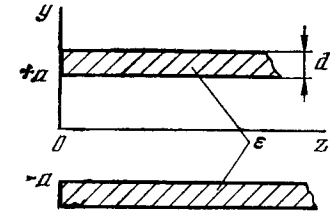
При  $z > 0$  контур интегрирования в (2.2.35) можно деформировать в нижнюю полуплоскость комплексной плоскости  $\alpha$ , так что

$$\begin{aligned} E_z(y, z) = \frac{\cos \vartheta_0}{2\pi i} \left\{ \int_{c_1} E \frac{1}{L_+(\alpha) L_-(-k \sin \vartheta_0)} + 1 - \frac{L_-(\alpha)}{L_-(-k \sin \vartheta_0)} \right\} \times \\ \times \frac{e^{-i(\alpha z + \gamma y)}}{\alpha + k \sin \vartheta_0} d\alpha; \end{aligned} \quad (2.2.36)$$

контур интегрирования  $c_1$  охватывает разрез в нижней полуплоскости (рис. 2.5).



Р и с. 34. Контур интегрирования в комплексной плоскости  $\alpha$  в формуле (2.2.36)



Р и с. 35. Открытый конец плоского волновода со слегка прозрачными стенками

## § 2.3

### Излучение электромагнитных волн из открытого конца плоского волновода с прозрачными стенками

2.3.1. *Постановка задачи. Метод решения. Функциональные уравнения.* Задачу об излучении из плоского волновода с двумя полупрозрачными стенками будем решать в предположении, что стенки волновода весьма тонкие (их толщина  $d$ ;  $kd \ll 1$ ) и образованы из диэлектрика с комплексной диэлектрической проницаемостью  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ ; волновод имеет большую ширину  $b$ ,  $kb \gg 1$  (рис. 35); в этом случае возможна приближенная факторизация при помощи дифракционной  $U(s, p)$  функции Вайнштейна при комплексных значениях  $s$  и  $p$  [11, 133, 134]. По аналогии с задачей дифракции на прозрачной полуплоскости (§ 2.2) будем вычислять излучаемое волноводом электромагнитное поле и отраженную в волновод волну при помощи векторного потенциала (2.2.4), где  $\mathbf{j}^e(\mathbf{r}) = i\omega(\epsilon - 1)\mathbf{E}(\mathbf{r})$  — плотность тока поляризации диэлектрика. Учитывая малую толщину пластин, перейдем снова к поверхностной плотности тока  $\mathbf{j}_s(s) = i\omega d(\epsilon - 1)\mathbf{E}(s)$ , выбрав значение  $\mathbf{E}$ , соответствующее средней линии диэлектрика. Еще раз подчеркнем, что от требования малой толщины ( $kd \ll 1$ ;  $\kappa$  — поперечное волновое число) можно избавиться применением двусторонних граничных условий (2.2.17).

Выражая  $\mathbf{E}$  при помощи известных соотношений через  $A^e$ , получим интегральные уравнения задачи. Будем рассматривать те же поля, не зависящие от координаты  $x$ , что и в [21] (они обозначены в [21] волнами типов 1—4). Непосредственно из (2.2.3) следуют интегральные уравнения:

а) для волн 1-го и 2-го типов

$$E_x(a, z) = -\frac{ik}{4} Y \int_0^{\infty} l_j(|z - \zeta|) E_x(a, \zeta) d\zeta; \quad j = 1, 2, \quad (2.3.1)$$

где

$$l_j = H_0^{(1)}(k|z - \zeta|) \pm H_0^{(1)}(k\sqrt{(z - \zeta)^2 + b^2})$$

— ядро, являющееся четной функцией разности  $z - \zeta$ ; знак «+» берется для волны 1-го типа, «-» — для волны 2-го типа;  $Y = i\omega(\epsilon - 1)d$  — величина, тождественная некоторой эквивалентной комплексной проводимости стенок волновода;

б) для волн 3-го и 4-го типов

$$E_z(a, z) = -\frac{iY}{4k} \left( \frac{\partial^2}{\partial z^2} + k^2 \right) \int_0^\infty l_q(|z - \zeta|) E_z(a, \zeta) d\zeta, \quad q = 3, 4;$$

$$l_{3,4} \equiv l_{1,2}. \quad (2.3.2)$$

Интегральное уравнение (2.3.1) и интегродифференциальное (2.3.2) разрешимы по методу Винера — Хопфа — Фока (ср. (2.2.8) и 2.2.31)). Рассмотрим подробно решение уравнения (2.3.1); для уравнения (2.3.2) выпишем лишь окончательный результат.

Применим к (2.3.1) преобразование Фурье

$$\Phi_+(a) + \Phi_-(a) = -\frac{ik}{2} YL(a) \Phi_+(a); \quad (2.3.3)$$

здесь

$$L(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty l_j(z) e^{iaz} dz, \quad j = 1, 2,$$

а  $\Phi_\pm(a)$  — обычные обозначения:

$$\Phi_+(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_0^\infty E_x(z) e^{iaz} dz, \quad \Phi_-(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^0 E_x(z) e^{iaz} dz.$$

Перепишем уравнение (2.3.3) в виде

$$\Phi_+(a) \left[ 1 + \frac{ik}{2} YL(a) \right] + \Phi_-(a) = 0. \quad (2.3.4)$$

Это функциональное уравнение может быть решено, если представить функцию  $K(a) = 1 + (ik/2)YL(a)$  в виде произведения двух сомножителей  $K(a) = K_+(a)K_-(a)$ , регулярных соответственно в верхней и нижней полуплоскости комплексной плоскости  $\alpha = \sigma + i\tau$  и не имеющих в них нулей:  $\tau > -\text{Im } k = -k_2$ ,  $\tau < \text{Im } k = k_2$ . Для волн 1-го и 2-го типов

$$\kappa L_1(a) = 1 + e^{i2\tau\kappa}, \quad \kappa^2 = k^2 - a^2,$$

так что

$$K(a) = \left( 1 + \frac{ikY}{2\kappa} \right) \left( 1 \pm \frac{(ik/2\kappa)Y}{1 + (ik/2\kappa)Y} e^{i2a\kappa} \right). \quad (2.3.5)$$

Окончательно получим

$$E_x(z) = \frac{A}{\sqrt{2\pi}} \int_C \left[ \frac{1}{\kappa_+(a)} + K_-(a) \right] e^{-iaz} da. \quad (2.3.6)$$

Контур интегрирования  $C$  охватывает сверху полюс  $K_+(a) = 0$ , соответствующий падающей на открытый конец волновода волне с амплитудой  $A$  (рис. 34). Следует иметь в виду, что собственные волны рассматриваемого волновода — волны вытекающие; постоянные распространения их комплексные [48] (см. § 4.4.)

Для волн 3-го и 4-го типов вместо уравнения (2.3.4) получим

$$\Phi_{1+}(a) \left[ 1 + \frac{i\kappa}{2k} YL(a) \right] + \Phi_{1-}(a) = 0, \quad (2.3.7)$$

где

$$K(a) = 1 + \frac{i\kappa}{2k} YL(a), \quad \Phi_1(a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^\infty E_x(z) e^{iaz} dz,$$

так что отличие состоит в несколько другом представлении величин  $K(a)$  и  $\Phi_1(a)$ .

2.3.2. Вычисление вспомогательных функций. Дифракционная  $U(s, p)$  — функция Вайнштейна комплексного аргумента. Уравнение (2.3.6) позволяет решить задачу, поставленную в п. 2.3.1, для волны любого типа. Однако факторизация функций  $K(a)$ :  $1 + (ik/2)YL(a)$  и  $1 + (i\kappa Y/2k)L(a)$  в общем случае для волновода произвольной ширины довольно сложна. Имея в виду в качестве конечной цели уточнение теории открытых резонаторов на случай неидеальных стенок, можно сразу заменить функции  $K(a)$  более простыми, используя обычные ограничения  $|\alpha| \ll k$ ,  $(2a/k^3)|\alpha^4| \ll 1$ , смысл которых заключается в том, что в волноводе распространяются волны, являющиеся суперпозицией плоских волн, падающих почти нормально на боковые стенки. При этом  $\kappa = k - (\alpha^2/2k)$  и в выражении  $ikY\kappa$  можно положить  $\kappa \simeq k$ . В этом случае для волн 1-го и 2-го типов

$$K(a) = \left( 1 - \frac{i}{2} Y \right) \left( 1 - \frac{iY}{2 + iY} e^{i2ab} \right), \quad b = 2a, \quad (2.3.8)$$

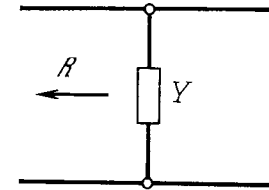
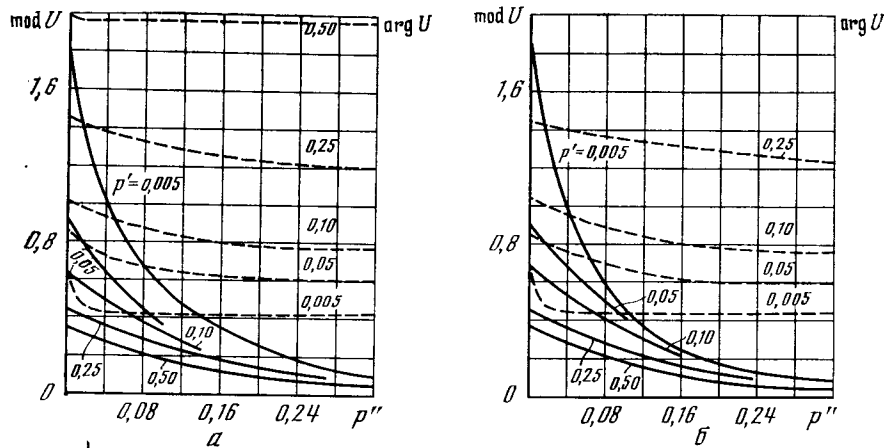


Рис. 36. Эквивалентная линия передачи для однородной регулярной диэлектрической пластины в поле плоской электромагнитной волны



Р и с. 37. Дифракционная функция Вайнштейна от комплексного аргумента. Сплошными линиями показан модуль функции, пунктирными — аргумент;  $a - s' = 0,01$ ,  $s'' = 0,0$ ;  $b - s' = 0,01$ ,  $s'' = 0,01$

и для волн 3-го и 4-го типов

$$K(\alpha) = (1 - i2Z) \frac{i}{2} Y \left( 1 \pm \frac{1}{1 - i2Z} e^{i\nu h} \right). \quad (2.3.9)$$

Множители перед экспонентами в (2.3.8) и (2.3.9) представляют собой не что иное, как коэффициенты отражения  $R$  от стенок волновода, которые в общем случае комплексны и имеют вид

$$R = e^{-i2\pi\rho}, \quad \rho = \rho' - i\rho''. \quad (2.3.10)$$

Следует отметить, что коэффициенту отражения  $R = (1 - 2iZ)^{-1}$  соответствует эквивалентная схема в виде линии передачи, шунтированной сопротивлением  $-iZ$  (или проводимостью  $iY$  (рис. 36)). Связь  $Y$  с компонентами тензора входного импеданса определялась раньше (см. формулы (2.2.27) — (2.2.30)).

С учетом (2.3.10) факторизация функций (2.3.8) и (2.3.9) сводится к факторизации выражения

$$1 \pm R e^{i\nu h} = 1 \pm e^{i2(\kappa a - \pi\rho)}. \quad (2.3.11)$$

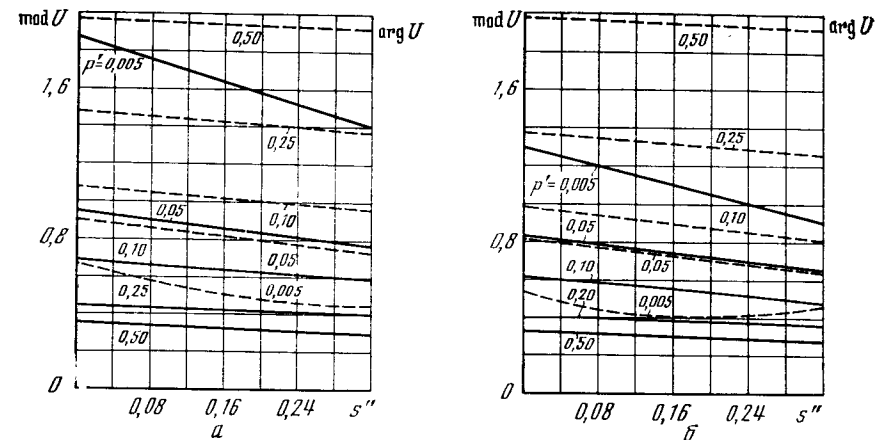
Для широких волноводов ( $kb \gg 1$ ) обычно используется дифракционная функция Вайнштейна  $U(s, p)$ , с помощью которой целая функция

$$L(\alpha) = 1 - \exp\{i2\pi\rho - (\alpha^2 b/k)\} \quad (2.3.12)$$

разбивалась на сомножители, регулярные соответственно в верхней и нижней полуплоскости:  $L(\alpha) = L_+(\alpha)L_-(\alpha)$ , где

$$L_+(\alpha) = \exp\{U(s, p)\}, \quad s = \alpha\sqrt{2b/k}; \quad (2.3.13)$$

$$U(s, p) = \frac{1}{2\pi i} \int_{-\infty}^{\infty} \ln \left[ 1 - \exp\left\{i2\pi\rho - \frac{t^2}{2}\right\} \right] \frac{dt}{t - s i\pi^{-1/4}}. \quad (2.3.14)$$



Р и с. 38. Дифракционная функция Вайнштейна от комплексного аргумента. Сплошными линиями показан модуль функции, пунктирными — аргумент;  $a - s' = 0,01$ ,  $p' = 0,0$ ;  $b - s' = 0,01$ ,  $p'' = 0,01$

Сравнивая (2.3.11) с (2.3.12) и учитывая, что при сделанных предположениях  $\kappa \simeq k - (\alpha^2/2k)$ , легко заметить, что  $K(\alpha)$  можно разбить на сомножители так же, как и (2.3.12), если только выбрать  $s$  и  $p$  комплексными, обеспечив тождественность (2.3.11) и (2.3.12). Таким образом, задача об излучении из плоского волновода с тонкими прозрачными стенками сводится к уже решенной задаче, если аргументы в дифракционной функции  $U(s, p)$  считать комплексными.

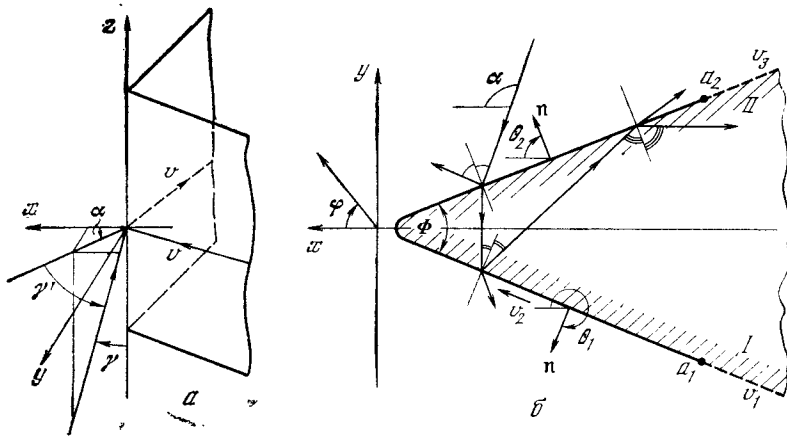
Для удобства употребления  $U(s, p)$  — функции Вайнштейна при проведении вычислений были составлены таблицы ее значений в следующих интервалах изменения переменных  $s = s' + is''$  и  $p = p' + ip''$ :  $s' \in [0,01; 2,0]$ ,  $s'' \in [0,0; 0,3]$ ,  $p' \in [0,0; 0,25]$ ,  $p'' \in [0,0; 0,2]$ . Таблицы имеются в работе [134], графики — в [11, 133], а кроме того, они помещены в добавлении 1 к книге [11].

Следует отметить, что полученные результаты естественным образом переходят в [20] при  $Z \Rightarrow 0$ ,  $Y \Rightarrow \infty$ , а функция  $U(s, p)$  — в функцию, табулированную в [470]. На рис. 37, 38 показан ход зависимости обобщенной дифракционной функции Вайнштейна от комплексных аргументов.

## § 2.4

### Дифракция электромагнитных волн на диэлектрическом клине с малым поглощением. Метод интегрального уравнения

2.4.1. Как мы уже отмечали во введении, многочисленные попытки решить задачу дифракции на диэлектрическом клине аналитическими методами не привели к получению строгого решения, ана-



Р и с. 39. Дифракция электромагнитной волны на прозрачном диэлектрическом клине с небольшим поглощением: а — система координат; б — поперечное сечение диэлектрического клина со сглаженной кромкой (модель)

логичного тому, которое было сделано А. Зоммерфельдом и Г. Д. Малюжиным [1, 6] для идеального и импедансного клина (см. § 1 введения и [468, 469]). Для численного решения этой задачи может быть использован аппарат *интегральных уравнений* (§ 1.3) [59] *относительно эквивалентных поверхностных токов* (§ 2.2). Неизвестные токи мы представим в виде суммы «равномерной» и «неравномерной» составляющих, что позволит провести выделение неубывающей с расстоянием от ребра клина части решения непосредственно в интегральных уравнениях.

Задача дифракции электромагнитных волн на диэлектрическом теле с цилиндрическими границами может быть сведена к решению системы четырех *интегральных уравнений Фредгольма II рода* относительно трансформант Фурье по координате  $z$  (рис. 39) плотностей эквивалентных электрических и магнитных токов. Эта система имеет вид [242, 473]

$$J(v) = J^s(v) - \frac{1}{2} \int_{v_1}^{v_2} P(v, v') J(v') dv', \quad (2.4.1)$$

где векторы-столбцы искомых  $J(v)$  и первичных  $J^s(v)$  токов имеют по четыре компоненты

$$J(v) = \{J_v^e, J_z^e, \hat{J}_v^m, \hat{J}_z^m\}, \quad J^s(v) = \{J_v^{es}, J_z^{es}, \tau \hat{J}_v^{ms}, \tau \hat{J}_z^{ms}\}; \quad (2.4.2)$$

$\tau = 2/(1 + n^2)$ ;  $n$  — показатель преломления диэлектрика (действительный или комплексный);  $\hat{J}^m = (1/w)J^m$ ,  $w = 120\pi$ .

Матричное ядро  $P(v, v')$  состоит из шестнадцати элементов  $P_{ij}(v, v')$ , которые зависят от положения точек наблюдения  $v$  и интегрирования  $v'$  и выражаются через функции Ханкеля. Ин-

тегрирование в (2.4.1) производится по контуру поперечного сечения тела.

Применить систему интегральных уравнений (2.3.1) для численного решения задачи о клине, длина контура поперечного сечения которого бесконечна, можно, если учесть, что плотность поверхностных токов на его гранях определяется следующими факторами (рис. 39. а):

- 1) полями падающей и отраженной плоских волн;
- 2) плоскими волнами, прошедшими через тело клина и претерпевшими одно или более переотражений;
- 3) полями, связанными с наличием острой кромки (ребра клина).

Токи, обусловленные первыми двумя причинами, могут быть рассчитаны по законам геометрической оптики (§ 2.1) и в этом смысле считаются известными. В соответствии с принятой терминологией назовем их «равномерной» составляющей поверхностных токов, обозначая  $J^{e0}$ ,  $J^{m0}$ . Неизвестные дополнительные токи («неравномерная» составляющая)  $J^{e1}$ ,  $J^{m1}$ , связанные с наличием острой кромки, быстро убывают с расстоянием и вдали от ребра клина становятся пренебрежимо малыми по сравнению с  $J^{e0}$  и  $J^{m0}$  [33, 34]. Проведенные ниже расчеты подтверждают справедливость этого предположения.

Разобьем контур поперечного сечения клина точками  $a_1$  и  $a_2$  на три части  $v_1$ ,  $v_2$ ,  $v_3$ , выбрав эти точки достаточно далеко от ребра клина (рис. 39. б). Тогда для полных токов (как электрических, так и магнитных) можно записать

$$J(v) = \begin{cases} J^0(v) + J^1(v), & \text{если } v \in v_2, \\ J^0(v), & \text{если } v \in v_1, v \in v_3. \end{cases} \quad (2.4.3)$$

Система (2.4.1) с помощью представления (2.4.3) дает возможность получить систему интегральных уравнений как относительно полных токов на поверхности клина, так и относительно дополнительных токов  $J^1$ . Первый подход имеет ряд преимуществ при практической реализации алгоритма решения и обладает достаточной общностью. Например, позволяет рассматривать клиновидные тела с произвольной формой вблизи вершины, например, клин с закруглением, и легко обобщается на случай многослойных тел (§ 2.5).

Подставляя (2.4.3) в (2.4.1), получим следующую систему интегральных уравнений:

$$J(v) + \frac{1}{2} \int_{v_2} P(v, v') J(v') dv' = J^s(v) - \frac{1}{2} \Delta J(v), \quad (2.4.4)$$

где

$$\Delta J(v) = \int_{v_1, v_3} P(v, v') J^0(v') dv', \quad (2.4.5)$$

которая отличается от исходной (2.4.1) более сложной правой частью. Контур интегрирования в левой части имеет конечную длину, и эта система интегральных уравнений может быть решена численно.

Таким образом, представление токов в виде суммы равномерной и неравномерной составляющих позволило разбить решение задачи дифракции на бесконечном диэлектрическом клине на два этапа.

1. Решение системы интегральных уравнений на контуре конечной длины.

2. Вычисление дополнительных членов в правой части (2.4.4).

Первый этап решения подробно изложен в § 1.3, поэтому остановимся здесь только на втором этапе.

Отметим, что метод, основанный на выделении неубывающей части решения, оказывается весьма эффективным при численном решении широкого класса задач электродинамики, связанных с бесконечно протяженными телами. Такой подход широко используется при рассмотрении идеально проводящих тел.

2.4.2. Вычисление дополнительных членов в правых частях интегральных уравнений. Дополнительные члены  $\Delta J(v)$  представляют собой интегралы по полубесконечным интервалам  $-\infty \div a_1$  и  $a_2 \div \infty$  (рис. 39, б) от произведений ядер интегральных уравнений на равномерную составляющую соответствующих токов  $J^0(v)$ . Вычисление равномерных токов с учетом всех возможных переотражений в теле клина оказывается весьма сложным, хотя соответствующие формулы и были получены нами в § 2.1. Однако во многих случаях (при больших углах раскрытия клина и малых углах падения или при наличии заметных потерь в диэлектрике) преломленные и многократно переотраженные волны могут быть исключены из рассмотрения. Тогда равномерная составляющая токов запишется в виде

$$\begin{pmatrix} J_v^{e0} \\ J_z^{e0} \\ \hat{J}_v^{m0} \\ \hat{J}_z^{m0} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} A(\alpha, \gamma) \\ \mathcal{E}(\alpha, \gamma) \\ F(\alpha, \gamma) \\ B(\alpha, \gamma) \end{pmatrix} e^{i \sin \gamma (x \cos \alpha + y \sin \alpha)}. \quad (2.4.6)$$

Здесь коэффициенты  $A$ ,  $\mathcal{E}$ ,  $F$ ,  $B$  определяются следующими выражениями:

для  $TE$ -поляризации падающего поля

$$\begin{pmatrix} A^{TE}(\alpha, \gamma) \\ \mathcal{E}^{TE}(\alpha, \gamma) \\ F^{TE}(\alpha, \gamma) \\ B^{TE}(\alpha, \gamma) \end{pmatrix} =$$

$$= -D(\alpha, \gamma) \begin{pmatrix} n^2 \sin \gamma K(\alpha, \gamma) + \cos(\theta - \alpha)(n^2 - \cos^2 \gamma) \\ \cos \gamma \sin(\theta - \alpha)[n^2 K(\alpha, \gamma) + \sin \gamma \cos(\theta - \alpha)] \\ \cos \gamma \sin(\theta - \alpha)(n^2 - 1) \\ -[\cos(\theta - \alpha)K(\alpha, \gamma) + \sin \gamma(n^2 - \sin^2(\theta - \alpha))] \end{pmatrix}, \quad (2.4.7)$$

для  $TM$ -поляризации

$$\begin{pmatrix} A^{TM}(\alpha, \gamma) \\ \mathcal{E}^{TM}(\alpha, \gamma) \\ F^{TM}(\alpha, \gamma) \\ B^{TM}(\alpha, \gamma) \end{pmatrix} = D(\alpha, \gamma) \begin{pmatrix} -\cos \gamma \sin(\theta - \alpha)(n^2 - 1) \equiv F^{TE}(\alpha, \gamma) \\ n^2 \cos(\theta - \alpha)K(\alpha, \gamma) + \sin \gamma[n^2 - \sin^2(\theta - \alpha)] \\ \sin \gamma K(\alpha, \gamma) + (n^2 - \cos^2 \gamma) \cos(\theta - \alpha) \\ \cos \gamma \sin(\theta - \alpha)[\sin \gamma \cos(\theta - \alpha) + K(\alpha, \gamma)] \end{pmatrix}, \quad (2.4.8)$$

где

$$D = \frac{2 \sin \gamma \cos(\theta - \alpha)}{[\sin \gamma \cos(\theta - \alpha) + K(\alpha, \gamma)][n^2 \sin \gamma \cos(\theta - \alpha) + K(\alpha, \gamma)]}, \quad (2.4.9)$$

$$K(\alpha, \gamma) = \sqrt{n^2 - 1 + \sin^2 \gamma \cos^2(\theta - \alpha)}.$$

Принимая во внимание формулы для ядер  $P_{ij}(v, v')$ , нетрудно убедиться, что все интегралы в (2.4.5) выражаются через функции

$$N_\nu(\lambda, n, \xi_0, \eta_0) = \int_0^\infty e^{-i\lambda \xi_0 - \nu H_\nu^{(2)}(n\rho)} d\xi, \quad (2.4.10)$$

$$M_\nu(\lambda, n, \xi_0, \eta_0) = \int_0^\infty e^{-i\lambda \xi_0 - \nu H_\nu^{(2)}(n\rho)} d\xi. \quad (2.4.11)$$

где  $\rho = \sqrt{(\xi + \xi_0)^2 + \eta_0^2}$ ;  $\lambda$ ,  $\xi_0$ ,  $\eta_0$  — действительные числа;  $n$  — комплексный параметр;  $|\lambda| < 1$ ,  $\text{Re } n \geq 1$ . Эти интегралы могут быть взяты апалитически, однако получающиеся при этом ряды при некоторых значениях параметров сходятся крайне медленно. Поэтому вычисление функций (2.4.10) и (2.4.11) производилось непосредственно с помощью интегральных представлений.

При  $\xi_0 > 0$  подынтегральные функции в (2.4.10), (2.4.11) не имеют особенностей в четвертом квадранте комплексной плоскости. Это позволяет перейти от интегралов по действительной оси к интегралам по отрицательной части мнимой оси  $\xi$ , где подынтег-

ральные функции экспоненциально убывают. После такого преобразования становится возможным применение численных методов интегрирования. При практических расчетах в [59] использовались два различных метода — формула Симпсона и квадратурные формулы наивысшей алгебраической степени точности [474]. Последний метод более экономичен, однако формула Симпсона позволяет при необходимости весьма просто увеличить точность вычислений, что и обусловило выбор этого метода как основного.

При  $\xi_0 < 0$  используются следующие соотношения:

$$N_0(\lambda, n, \xi_0, \eta_0) = \frac{2}{\sqrt{n^2 - \lambda^2}} e^{i(\lambda\xi_0 - \eta_0 \sqrt{n^2 - \lambda^2})} - N_0(-\lambda, n, -\xi_0, \eta_0), \quad (2.4.12)$$

$$N_1(\lambda, n, \xi_0, \eta_0) = \frac{2i}{n\eta_0} e^{i(\lambda\xi_0 - \eta_0 \sqrt{n^2 - \lambda^2})} - N_1(-\lambda, n, -\xi_0, \eta_0) \quad (2.4.13)$$

и связь, которая устанавливается с помощью рекуррентных формул для цилиндрических функций:

$$M_1(\lambda, n, \xi_0, \eta_0) = \frac{\lambda}{in} N_0(\lambda, n, \xi_0, \eta_0) + \frac{1}{n} H_0^{(2)}(n\sqrt{\xi_0^2 + \eta_0^2}) - \xi_0 N_1(\lambda, n, \xi_0, \eta_0). \quad (2.4.14)$$

2.4.3. *Вычисление диаграмм рассеяния по найденному распределению поверхностных токов.* Для вычисления диаграмм рассеяния электромагнитных волн диэлектрическим клином представим рассеянное поле в виде суммы двух составляющих

$$\mathbf{E} = \mathbf{E}^1 + \mathbf{E}^2, \quad \mathbf{H} = \mathbf{H}^1 + \mathbf{H}^2, \quad (2.4.15)$$

первая из которых ( $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$ ) обусловлена токами на конечном участке  $v_2$ , а вторая ( $\mathbf{E}^2, \mathbf{H}^2$ ) — токами на полубесконечных интервалах  $v_1, v_3$  (рис. 39, б). В дальней зоне для полей  $\mathbf{E}^1, \mathbf{H}^1$  в сферической системе координат  $r, \gamma, \varphi$  найдем

$$\hat{E}_\varphi^1 = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{v_2} [J_v^e \cos(\theta' - \varphi) + \hat{J}_v^m \lambda \sin(\theta' - \varphi) + \beta \hat{J}_z^m] e^{i\beta(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} dv', \quad (2.4.16)$$

$$H_\varphi^1 = -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \int_{v_2} [\hat{J}_v^m \cos(\theta' - \varphi) - J_v^e \lambda \sin(\theta' - \varphi) - \beta J_z^e] e^{i\beta(x' \cos \varphi + y' \sin \varphi)} dv', \quad (2.4.17)$$

где  $\lambda = \cos \gamma$ ,  $\beta = \sin \gamma$  (множитель  $e^{-i\beta r/\sqrt{\beta\gamma}}$  здесь и везде далее опущен).

Интегралы по полубесконечным интервалам  $v_1, v_3$  вычисляются методом перевала. Для главного члена асимптотического раз-

ложения цилиндрической волны имеем

$$\hat{E}_\varphi^2 = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{i=1,2} \frac{\exp\{\pm i\beta\xi_i [\sin(\theta_i - \varphi) + \sin(\theta_i - \alpha)]\}}{\pm \beta [\sin(\theta_i - \varphi) + \sin(\theta_i - \alpha)]} \times \\ \times [\cos(\theta_i - \varphi) A_i(\alpha, \gamma) + \lambda \sin(\theta_i - \varphi) F_i(\alpha, \gamma) + \beta B_i(\alpha, \gamma)]; \quad (2.4.18)$$

$$H_\varphi^2 = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{i=1,2} \frac{\exp\{\pm i\beta\xi_i [\sin(\theta_i - \varphi) + \sin(\theta_i - \alpha)]\}}{\pm \beta [\sin(\theta_i - \varphi) + \sin(\theta_i - \alpha)]} \times \\ \times [-\lambda \sin(\theta_i - \varphi) A_i(\alpha, \gamma) + \cos(\theta_i - \varphi) F_i(\alpha, \gamma) - \beta \mathcal{E}_i(\alpha, \gamma)], \quad (2.4.19)$$

где  $\xi_1, \xi_2$  — расстояние от начала координат до точек  $a_1, a_2$  на контуре (рис. 39, б); верхний знак соответствует значению индекса суммирования  $i = 1$ , нижний —  $i = 2$ .

Формулы (2.4.18), (2.4.19) справедливы по всей внешней области, кроме направлений, близких к направлению распространения падающей волны ( $\varphi = \pi + \alpha$ ) и направлений волн, отраженных от граней клина по законам геометрической оптики ( $\varphi = 2\theta_i - \alpha$ ).

Из формул (2.4.16)–(2.4.19) и представления для поверхностных токов (2.4.3) следует, что в формировании цилиндрической волны рассеянного диэлектрическим клином поля принимают участие как неравномерная составляющая токов (которая излучает только цилиндрическую волну), так и (частично) равномерная составляющая. Последняя создает, кроме того, плоские волны, распространяющиеся в направлениях, определяемых законами геометрической оптики.

2.4.4. *Приближение физической оптики.* Пренебрегая вкладом от неравномерной составляющей токов в диаграмму рассеяния, можно получить простое приближенное решение (приближение физической оптики), аналогичное приближению Кирхгофа для металлических тел. Формулы для вычисления полей в приближении физической оптики следуют из (2.4.18) и (2.4.19) при  $\xi_1 = \xi_2 = 0$ :

$$\left\{ \begin{array}{l} \hat{E}_\varphi^{j0} \\ H_\varphi^{j0} \end{array} \right\} = -\frac{i}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \times \\ \times \sum_{i=1,2} \frac{\left\{ \begin{array}{l} A_i(\alpha, \gamma) \\ F_i(\alpha, \gamma) \end{array} \right\} \cos(\theta_i - \varphi) \pm \left\{ \begin{array}{l} F_i(\alpha, \gamma) \\ A_i(\alpha, \gamma) \end{array} \right\} \lambda \sin(\theta_i - \varphi) \pm \beta \left\{ \begin{array}{l} B_i(\alpha, \gamma) \\ \mathcal{E}_i(\alpha, \gamma) \end{array} \right\}}{\pm \beta [\sin(\theta_i - \varphi) + \sin(\theta_i - \alpha)]}. \quad (2.4.21)$$

Такое приближение является, конечно, довольно грубым. Применение метода физической оптики как самостоятельного метода может привести к значительным ошибкам. Однако это приближенное решение качественно правильно описывает основные особенности поведения дифракционных полей. Сравнение с решением по методу интегрального уравнения позволяет выяснить границы областей изменения параметров, в которых приближение физиче-

ской оптики оказывается удовлетворительным и с количественной точки зрения.

2.4.5. *Результаты некоторых расчетов* показаны на рис. 40—43. В соответствии с изложенной методикой был проведен большой цикл расчетов с целью выяснения зависимости уровня рассеянного клином поля от следующих параметров: угла при вершине клина  $\Phi$ , коэффициента преломления диэлектрика  $n$ , угла падения волны в плоскости, перпендикулярной ребру клина  $\alpha$ , и угла наклона волнового вектора к ребру  $\gamma$  (рис. 39, а). Расчеты производились для *TE* (вектор  $\mathbf{E}$  перпендикулярен ребру клина) и *TM* (вектор  $\mathbf{H}$  перпендикулярен ребру) поляризацій первичного поля. Амплитуда падающей волны принималась равной единице [59].

На больших расстояниях от ребра клина поверхностные токи мало отличаются от токов, вычисленных в приближении физической оптики (равномерных составляющих токов), изображенных на рис. 40 штриховыми линиями. С увеличением угла  $\gamma'$  ( $\gamma' = 90^\circ - \gamma$  (рис. 39, а)) область, занятая краевой волной, несколько расширяется. Однако уже на расстоянии порядка длины волны от ребра клина неравномерная составляющая токов не превосходит 3—4% от соответствующих равномерных токов, а на расстояниях в полторы-две длины волны становится пренебрежимо малой.

При нормальном падении плоской волны ( $\gamma' = 0$ ) *TE*- и *TM*-волны независимы. При этом токи, соответствующие противоположной относительно первичного поля поляризации ( $J_z^e, \hat{J}_v^m$  для *TE*- и  $J_v^e, J_z^m$  для *TM*-поляризации), отсутствуют. Однако при  $\gamma' \neq 0$  токи появляются и с ростом  $\gamma'$  амплитуда их увеличивается, что приводит к увеличению амплитуды волн с противоположной поляризацией в отраженном поле (*явление деполяризации*; ср. [11], а также § 1.4).

При симметричном возбуждении ( $\alpha = 0$ ) диаграммы рассеяния для волн основной поляризации в широком диапазоне углов наблюдения  $\phi$  изменяются мало (рис. 41) и для оценки уровня отраженного поля достаточно вычисления его значения при  $\phi = 0$  (в плоскости симметрии). При  $\alpha \neq 0$  диаграммы несколько искажаются. Для деполяризованной волны при небольших значениях  $\alpha$  имеется минимум поля, рассеянного в направлении  $\phi \simeq \alpha$ . При симметричном возбуждении в плоскости симметрии ( $\phi = 0$ ) деполяризация отсутствует. С увеличением угла  $\gamma'$  уровень деполяризованной волны возрастает.

Переходя к рассмотрению зависимости уровня рассеянного клином поля от угла при вершине  $\Phi$  (рис. 42), отметим прежде всего различие в характере его поведения при различных поляризациях. Если уровень отраженного поля для *TM*-поляризации при углах падения, близких к нормальному ( $\gamma' \simeq 0$ ), с увеличением угла раскрытия клина  $\Phi$  монотонно увеличивается, то при *TE*-поляризации имеется минимум при некотором критическом значении  $\Phi = \Phi_k$  ( $\Phi_k$  зависит от параметров диэлектрика). Наличие этого минимума становится понятным, если обратиться к

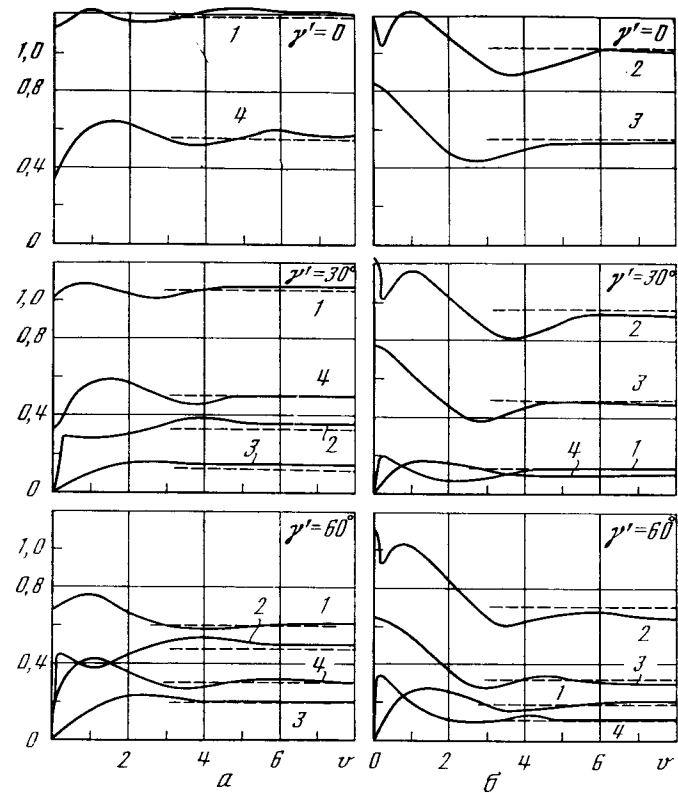


Рис. 40. Картина распределения поверхностных токов на боковой поверхности клина:  $\Phi = 90^\circ$ ,  $n = 2 - i \cdot 0,2$ ,  $\alpha = 0$ ; 1 —  $J_v^e$ , 2 —  $J_z^e$ , 3 —  $\hat{J}_v^m$ , 4 —  $J_z^m$ ; а — *TE*-поляризация, б — *TM*-поляризация

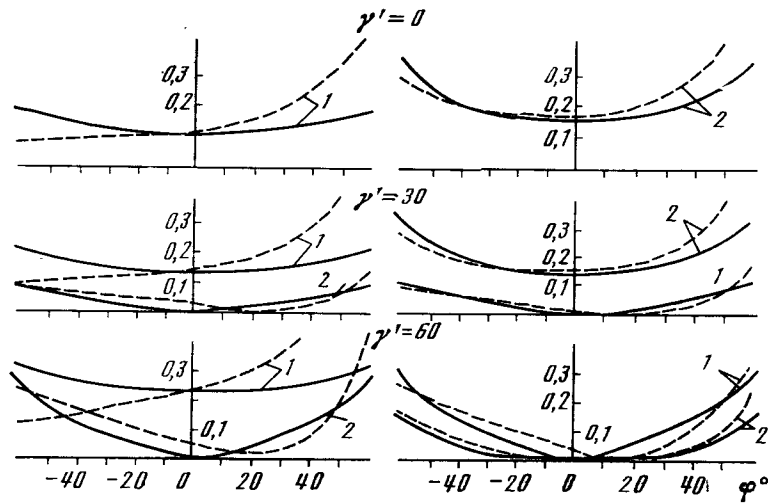
формулам (2.4.18), (2.4.20). Можно показать, что амплитуда цилиндрической волны, обусловленной равномерной составляющей токов,  $\hat{E}_\phi^2$ , так же как и поле  $\hat{E}_\phi^{i0}$  в приближении физической оптики, обращается в нуль (при  $\gamma' = 0$ ), если

$$\sin \theta_k = \cos \frac{\Phi_k}{2} = \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}, \text{ т. е.}$$

$$\Phi_k = 2 \arccos \frac{n}{\sqrt{1+n^2}}. \quad (2.4.22)$$

Легко видеть, что значение  $\Phi_k$  соответствует такому углу падения плоской волны на грань клина, при котором происходит явление полного преломления (угол Брюстера). При комплексных значениях  $n$  поля  $\hat{E}_\phi^2$  и  $\hat{E}_\phi^{i0}$  точно в нуль не обращаются, но имеют резкий минимум. Уровень отраженного поля в этом случае прак-





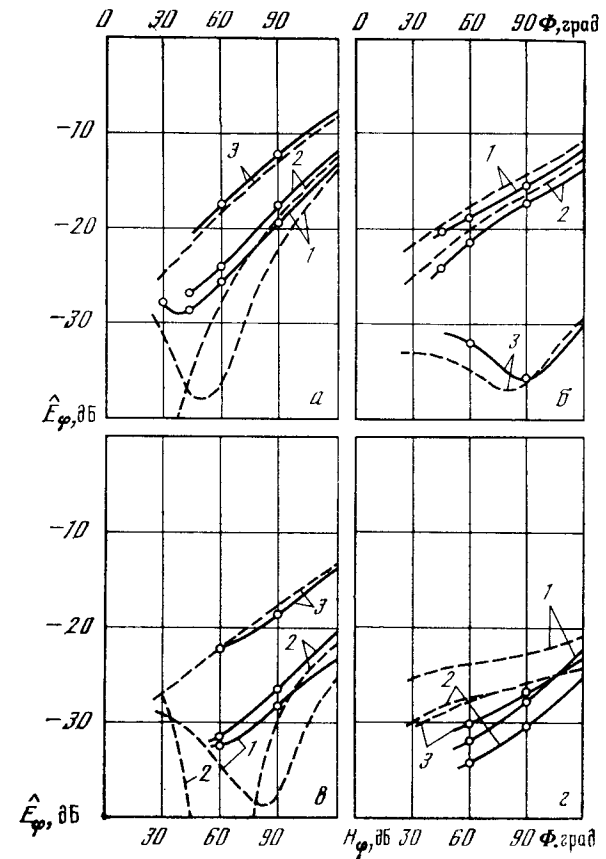
Р и с. 41. Диаграммы рассеяния (клин;  $\Phi = 90^\circ$ ,  $\kappa = 2 - i 0,2$ ); 1 —  $|\hat{E}_\Phi|$ , 2 —  $|\hat{H}_\Phi|$ ; а —  $TE$ -поляризация, б —  $TM$ -поляризация. —  $\alpha = 0$ , - - -  $\alpha = 20^\circ$

тически определяется вкладом от неравномерных токов. При этом отклонение решения в приближении физической оптики от точного оказывается максимальным.

С увеличением угла  $\gamma'$  характер зависимости отраженного поля от угла раскрытия клина претерпевает существенные изменения. При достижении некоторого критического угла  $\gamma' = \gamma'_k$  зависимость поля при  $TE$ -поляризации становится монотонной, а для  $TM$ -поляризации появляется минимум ( $\gamma' = 60^\circ$  на рис. 43). Причины этого явления такие же, как и в рассмотренном случае, с той лишь разницей, что угол, аналогичный углу полного преломления, теперь уже имеет место в плоскости, проходящей через ребро клина.

На рис. 43 представлена зависимость уровня рассеянного клином поля ( $\alpha = 0$ ,  $\varphi = 0$ ) от угла падения плоской волны  $\gamma'$  для различных углов при вершине клина  $\Phi$ . Для наглядности штрихпунктиром нанесена зависимость коэффициента отражения для бесконечной плоской границы раздела диэлектриков ( $\Phi = 180^\circ$ ).

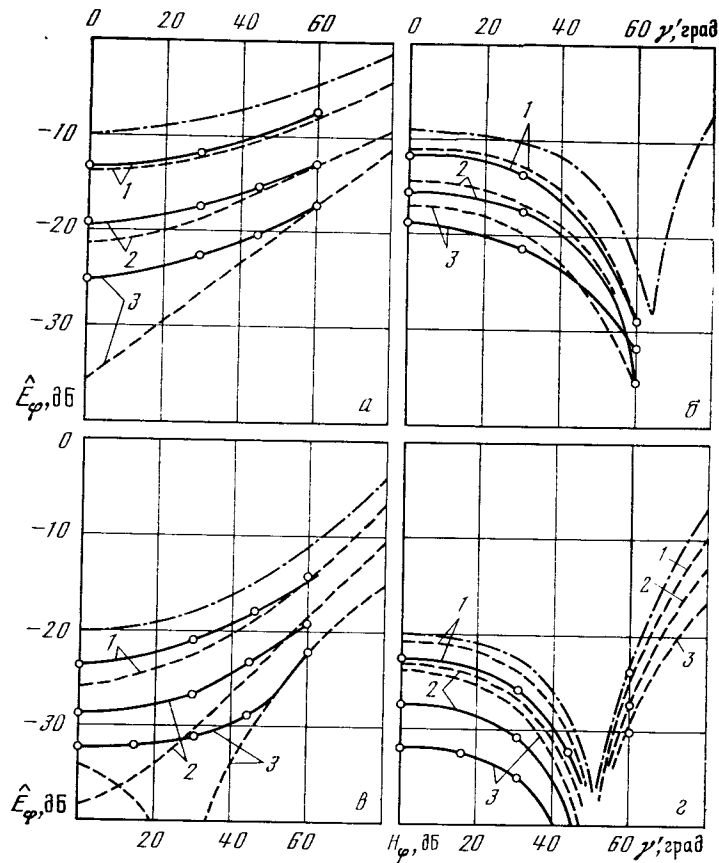
Сравнение результатов расчетов методом интегральных уравнений (сплошные кривые на рис. 42, 43) и приближенным методом (приближение физической оптики) показывает, что приближенное решение (пунктир) правильно отражает основные особенности в поведении рассеянного поля. Иногда это приближение оказывается удовлетворительным и с количественной точки зрения. Характерно, что приближенное решение дает заниженное по сравнению с точным значение отраженного поля в случае  $TM$ -поляри-



Р и с. 42. Зависимость уровня рассеянного поля от угла раскрытия клина  $\Phi$  ( $\alpha = 0$ ,  $\varphi = 0$ ): 1 —  $\gamma' = 0$ , 2 —  $\gamma' = 30^\circ$ , 3 —  $\gamma' = 60^\circ$ . — — — точное решение, - - - — приближение физической оптики: а, б —  $\kappa = 2 - i 0,2$ ; в, г —  $\kappa = 1,2 - i 0,1$ ; а, в —  $TE$ -поляризация, б, г —  $TM$ -поляризация

зации и завышенное при  $TE$ -поляризации. С увеличением угла  $\gamma'$  различие между точным и приближенным решениями уменьшается. Наибольшая ошибка в приближенном решении наблюдается в тех случаях, когда оно дает нулевое или близкое к нулю значение отраженного поля (например, при углах, близких к углу Брюстера, и при коэффициенте преломления, близком к единице).

2.4.6. *Приближение параболического уравнения.* В ряде случаев для практики интерес представляет дифракция на прозрачном клине, когда зона эффективной диффузии находится достаточно далеко от граней клина. В этом случае эффективным является метод параболического уравнения. Воспользуемся им [55]. Пусть плоская электромагнитная волна с полем  $2e^{ikx}$  падает на дву-



Р и с. 43. Зависимость уровня рассеянного поля от угла падения  $\gamma'$  ( $\alpha = 0$ ,  $\varphi = 0$ ); 1 —  $\Phi = 120^\circ$ , 2 —  $\Phi = 90^\circ$ , 3 —  $\Phi = 60^\circ$ . — точное решение, - - - приближение физической оптики; а, б —  $\chi = 2 - i \cdot 0,2$ , в, г —  $\chi = 1,2 - i \cdot 0,1$ . а, в — TE-поляризация, б, г — ТМ-поляризация

мерную ( $\partial/\partial z \equiv 0$ ) клиновидную область  $D(r, \varphi)$ ,  $r \in [0, \infty)$ ,  $\varphi \in [-\theta, \theta]$ ,  $2\theta/\pi \ll 1$  из идеального ( $\text{Im } \epsilon = 0$ ) диэлектрика с проницаемостью  $\epsilon$ . Обозначим через  $v_i$  геометрикооптическое решение задачи о падении волны  $2\text{exp}\{ikx\}$  на область  $D(r, \varphi)$ . Точнее, положим в области I  $\varphi > \varphi_i$   $v_i = 2\text{exp}\{ikx\} = 2\text{exp}\{ikr \cos \varphi_i\}$ ; в области геометрической тени II при  $\varphi \in (\bar{\varphi}_i, \varphi_i)$   $v_i = 0$  и, наконец, в области III  $\varphi < \bar{\varphi}_i$  геометрикооптическое решение будет определяться преломленной волной, т. е.  $v_i = 2T_1 T_2 \text{exp}\{ikx'\} = 2T_1 T_2 \text{exp}\{ikr \cos \varphi_i\}$ . Коэффициенты  $T_1$  и  $T_2$  суть коэффициенты прохождения плоской волны через грани  $\varphi = -\theta$  и  $\varphi = \theta$  соответственно. В первом приближении можно ограничиться  $T_1 \sim T_2 \sim 1$  (см. примечание в конце параграфа).

Угол преломления волны призмой  $\vartheta = \bar{\varphi}_i - \varphi_i$  определяется основным соотношением геометрикооптической теории призмы (§ 1.1)  $\vartheta = i'_2 - i_1 - 2\theta$ , где  $i_1$  — угол падения волны на грань  $\varphi = -\theta$ , т. е. угол между нормалью к грани  $\varphi = -\theta$  и направлением распространения падающей волны. Угол  $i'_2$  — угол преломления на второй грани  $\varphi = \theta$ . Для узкого ( $2\theta/\pi \ll 1$ ) клина угол отклонения определяется более простым соотношением

$$\vartheta = 2\theta \left( \sqrt{\epsilon \frac{\cos i'_1}{\cos i_1}} - 1 \right), \quad (2.4.23)$$

где  $i'_1$  — угол преломления на грани  $\varphi = -\theta$ , связанный с законом преломления:  $\sin i_1 = \sqrt{\epsilon} \sin i'_1$  (1.1.10). Из приведенных соотношений непосредственно следует формула (3.7.1) для минимального угла отклонения луча призмой и формула (3.7.5) для условий  $2\theta/\pi \ll 1$  и  $\epsilon - 1 \ll 1$ .

В дальнейшем мы будем рассматривать поле вне области  $D$ . Полное поле  $v_i(r, \varphi) = v_i(r, \varphi) + v(r, \varphi)$  должно удовлетворять двумерному (в переменных  $r, \varphi$ ) уравнению Гельмгольца  $(\Delta + k^2)v_i(r, \varphi) = 0$ ,  $|\varphi| > \theta$ . Дифракционная поправка  $v(r, \varphi)$  к полному полю также должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2)v(r, \varphi) = 0, \quad r > 0, \quad \varphi > \theta \quad (2.4.24)$$

и условию погашаемости Фока — Малюжинца

$$v(r, \varphi; k) < \infty \quad \text{при} \quad \text{Im } k > 0; \quad (2.4.25)$$

$v(r, \varphi; k)$  — аналитическая функция по  $k$ .

Мы с самого начала воспользуемся асимптотическим ( $kr \Rightarrow \infty$ ) характером поставленной задачи (решение справедливо на достаточном удалении от вершины клина) и поправку к  $v_i(r, \varphi)$  будем искать в виде

$$v(r, \varphi_{i,l}) = u(r, \varphi_{i,l}) e^{ikr}, \quad (2.4.26)$$

Такое представление решения задачи о дифракции на клине (или в общем случае на крае экрана) позволяет описать поперечную диффузию лучевой амплитуды по цилиндрическому фронту волны, дифрагированной краем экрана. При этом, как известно, точность решения превышает точность френелевых формул (диффузия лучевой амплитуды по плоскому фронту).

В дальнейшем мы будем предполагать также, что область эффективной диффузии находится достаточно далеко от граней клиновидной области  $\varphi = \pm \theta$ , т. е. мы пренебрегаем отражением дифрагированной волны от границ  $\varphi = \pm \theta$ . С одной стороны, это накладывает некоторое ограничение на диапазон углов падения волны на клин ( $\bar{\varphi}_i \sim \pi/2$ ), а с другой — приводит к тому, что полученное решение будет справедливо лишь на достаточно большом удалении от вершины клина  $r = 0$ .

Рассмотрим решение  $v(r, \varphi)$  в области  $\varphi \in (-\infty, \infty)$ , воспользовавшись симметрией относительно  $\varphi$ :  $v(r, -\varphi_{i,t}) = -v(r, \varphi_{i,t})$ . В области  $\varphi \in (-\infty, \infty)$  поправка  $v(r, \varphi)$  должна удовлетворять уравнению (2.4.24), условию (2.4.25), а также условиям

$$v(r, 0) = e^{ikr}, \quad r > 0, \quad (2.4.27)$$

$$v(0, \varphi) = 0. \quad (2.4.28)$$

Теперь для медленно меняющейся функции  $u(r, \varphi)$  из (2.4.26) в соответствии с (2.4.24), (2.4.27) и (2.4.28) получим

$$\frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial r^2} + i2k \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{r} \left[ \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} + iku(r, \varphi) \right] + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} = 0, \quad (2.4.29)$$

$$u(r, 0) = 1, \quad r > 0, \quad (2.4.30)$$

$$u(i, \varphi) = 0. \quad (2.4.31)$$

Поскольку мы рассматриваем  $r$  как главную лучевую координату, то очевидно, что при  $kr \Rightarrow \infty$  будут выполняться следующие неравенства:

$$\left| \frac{\partial^2 u}{\partial r^2} \right| \ll \left| k \frac{\partial u}{\partial r} \right|, \quad \left| \frac{\partial u}{\partial r} \right| \ll |ku|. \quad (2.4.32)$$

С учетом (2.4.32) уравнение (2.4.29) теперь запишется в виде

$$\frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u(r, \varphi)}{\partial \varphi^2} + i2k \left[ \frac{\partial u(r, \varphi)}{\partial r} + \frac{1}{2r} u(r, \varphi) \right] = 0, \quad |kr| \gg 1. \quad (2.4.33)$$

Преобразуем последнее уравнение, вводя новые переменные  $\xi = r$ ,  $\eta = r\varphi_{i,t}$  и новую функцию  $\psi(\xi, \eta) = u(r, \varphi)$ , к виду

$$\frac{\partial^2 \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + i2k \left[ \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \xi} + \frac{\eta}{\xi} \frac{\partial \psi(\xi, \eta)}{\partial \eta} + \frac{1}{2\xi} \psi(\xi, \eta) \right] = 0; \quad (2.4.34)$$

$$\psi(\xi, 0) = 1, \quad \xi > 0; \quad \psi(0, \eta) = 0,$$

где  $\varphi_{i,t} = \varphi - \bar{\varphi}_{i,t}$ .

И, наконец, если ввести функцию  $W(\xi, \eta)$  соотношением

$$\psi(\xi, \eta) = W(\xi, \eta) \exp \left\{ -\frac{ik}{2} \frac{\eta^2}{\xi} \right\} \quad (2.4.35)$$

и подставить (2.4.35) в (2.4.34), то для  $W(\xi, \eta)$  получим следующую задачу (с параболическим уравнением):

$$\frac{\partial^2 W(\xi, \eta)}{\partial \eta^2} + i2k \frac{\partial W(\xi, \eta)}{\partial \xi} = 0, \quad (2.4.36)$$

$$W(\xi, 0) = 1, \quad \xi > 0; \quad W(0, \eta) = 0.$$

Задача (2.4.36) легко решается с помощью преобразования Лапласа. Действительно,

$$W(p, \eta) = \int_0^\infty W(\xi, \eta) e^{-p\xi} d\xi,$$

откуда интегрированием по частям получаем

$$\frac{\partial W(p, \eta)}{\partial \xi} = pW(p, \eta)$$

и уравнение из (2.4.36) теперь можно переписать как

$$\frac{d^2 W(p, \eta)}{d\eta^2} + i2kpW(p, \eta) = 0. \quad (2.4.37)$$

Уравнение (2.4.37) для преобразованной по Лапласу функции  $W(p, \eta)$  есть уравнение уже в обыкновенных производных и его решение есть

$$W(p, \eta) = Ae^{V\sqrt{i2k}p\eta} + Be^{-iV\sqrt{i2k}p\eta}. \quad (2.4.38)$$

Определяя постоянные  $A$  и  $B$  из граничных условий задачи (2.4.36) ( $A = 0, B = 1$ ) и обращая (2.4.38), получим

$$W(\xi, \eta) = \frac{1}{2\pi i} \int_{c-i\infty}^{c+i\infty} e^{p\xi - V\sqrt{i2k}p\eta} \frac{dp}{p}. \quad (2.4.39)$$

Откуда, воспользовавшись преобразованием Эфроса—Данилевского, в итоге получим

$$\begin{aligned} W(\xi, \eta) &= \operatorname{erfc} \left[ \sqrt{\frac{i2k}{\xi}} \frac{\eta}{2} \right] = 1 - \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^{\frac{1}{2}\eta\sqrt{\frac{i2k}{\xi}}} e^{-t^2} dt = \\ &= \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\eta\sqrt{\frac{i2k}{\xi}}} e^{-t^2} dt = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_{-\infty}^{\frac{1}{2}\eta_{i,t}\sqrt{i2kr}} e^{-t^2} dt. \end{aligned} \quad (2.4.40)$$

Таким образом, поставленная задача о дифракции плоской волны  $v_i$  на узком диэлектрическом клине решается формулой (2.4.40). Решение выражается через подробно табулированный интеграл вероятности.

Решение содержит три характерные области: I и III — области света (прямого и преломленного призмой) и II — область тени. Мы не отмечаем здесь области отраженной волны, так как в рассматриваемом круге задач квазиоптики, во-первых, обычно используют материалы с  $\varepsilon$ , мало отличающимся от 1, а во-вторых, отражения можно существенно уменьшить, либо применив про-светляющие покрытия, либо использовав в линии линзы эллипти-

ческой формы с наклоном под углом Брюстера по направлению к падающему лучу\*.

Наибольший интерес представляет область эффективной диффузии у границы областей II и III, так как именно она определяет потери на преобразование в линзовую линию при прохождении основной волны через призму и обязательные дифракции у края.

## § 2.5

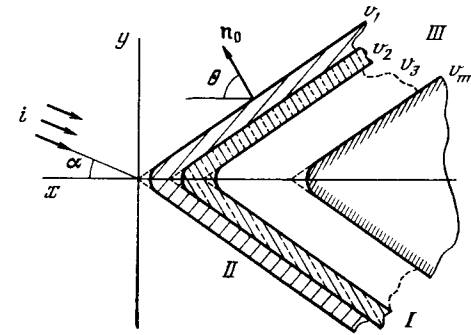
### Дифракция электромагнитных волн на клине с многослойными поглощающими покрытиями

**2.5.1. Формулировка задачи.** Задача дифракции электромагнитных волн на многослойном диэлектрическом теле может быть сведена к системе интегральных уравнений, составленных относительно плотностей поверхностных электрических и магнитных токов, текущих по внешней поверхности тела и по всем границам раздела диэлектриков, подобно тому, как это было сделано в предыдущем параграфе. В двумерном случае, когда тело представляет собой многослойный диэлектрический цилиндр, а падающая волна распространяется перпендикулярно его оси, соответствующая система интегральных уравнений впервые, по-видимому, была получена в [475]. В этой работе первоначально выводятся уравнения для задачи дифракции на нескольких телах. Однако распространение на случай многослойного тела проведено не вполне корректно [76, 77].

Пусть падающая плоская электромагнитная волна имеет единственную составляющую магнитного поля, параллельную ребру клина (ось  $z$  цилиндрической системы координат на рис. 44). Тогда систему интегральных уравнений можно записать в следующем виде (все линейные размеры умножены на волновое число свободного пространства):

$$\begin{aligned}
 2J_{c_k}^z(v) - 2\delta_k(1) J_c^{zs}(v) = & -\frac{1}{2} \int_{v_{k-1}} \left\{ -J_{v_{k-1}}^e(v') f(\theta') \times \right. \\
 & \times \frac{i\kappa_{k-1}}{\rho} H_1^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho) + \hat{J}_{z_{k-1}}^m(v') \kappa_{k-1}^2 H_0^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho) \left. \right\} dv'_{k-1} - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{v_k} \left\{ J_{v_k}^e(v') f(\theta') \frac{i}{\rho} [\kappa_{k-1} H_1^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho) - \kappa_k H_1^{(2)}(\kappa_k\rho)] - \right. \\
 & - \hat{J}_{z_k}^m(v') [\kappa_{k-1}^2 H_0^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho) - \kappa_k^2 H_0^{(2)}(\kappa_k\rho)] \left. \right\} dv'_k - \frac{1}{2} \int_{v_{k+1}} \times \\
 & \times \left\{ J_{v_{k+1}}^e(v') f(\theta') \frac{i\kappa_k}{\rho} H_1^{(2)}(\kappa_k\rho) - \hat{J}_{z_{k+1}}^m(v') \kappa_k^2 H_0^{(2)}(\kappa_k\rho) \right\} dv'_{k+1};
 \end{aligned} \tag{2.5.1}$$

\* Кроме того, следует иметь в виду, что метод параболического уравнения вообще плохо описывает процесс отражения и при необходимости учета отраженной волны его необходимо соответствующим образом видоизменить.



Р и с. 44. Клиновидная структура с многослойным покрытием, система координат и поперечное сечение

$$\begin{aligned}
 (\kappa_{k-1}^2 + \kappa_k^2) \hat{J}_{z_k}^m(v) - 2\delta_k(1) \hat{J}_{z_k}^{ms}(v) = & -\frac{1}{2} \int_{v_{k-1}} \left\{ J_{v_{k-1}}^e(v) \times \right. \\
 & \times \left[ H_0^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho) \kappa_{k-1}^2 \cos(\theta - \theta') - \frac{\partial^2 H_0^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho)}{\partial v_{k-1} \partial v'_{k-1}} \right] - \\
 & - \hat{J}_{z_{k-1}}^m(v') f(\theta) \frac{i\kappa_{k-1}^3}{\rho} H_1^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho) \left. \right\} dv'_{k-1} - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{v_k} \left\{ -J_{v_k}^e(v') \left[ \cos(\theta - \theta') (\kappa_{k-1}^2 H_0^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho) - \right. \right. \\
 & - \kappa_k^2 H_0^{(2)}(\kappa_k\rho) - \left. \frac{\partial^2 (H_0^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho) - H_0^{(2)}(\kappa_k\rho))}{\partial v_k \partial v'_k} \right] + \\
 & + \hat{J}_{z_k}^m(v') f(\theta) \frac{i}{\rho} [\kappa_{k-1}^3 H_1^{(2)}(\kappa_{k-1}\rho) - \kappa_k^3 H_1^{(2)}(\kappa_k\rho)] \left. \right\} dv'_k - \\
 & - \frac{1}{2} \int_{v_{k+1}} \left\{ -J_{v_{k+1}}^e(v) \left[ \cos(\theta - \theta') \kappa_k^2 H_0^{(2)}(\kappa_k\rho) - \frac{\partial^2 H_0^{(2)}(\kappa_k\rho)}{\partial v_{k+1} \partial v'_{k+1}} \right] + \right. \\
 & + \left. \hat{J}_{z_{k+1}}^m(v') f(\theta) \frac{i\kappa_k^3}{\rho} H_1^{(2)}(\kappa_k\rho) \right\} dv'_{k+1},
 \end{aligned} \tag{2.5.2}$$

где

$$\begin{aligned}
 \left. \begin{aligned}
 \left\{ \begin{aligned}
 f(\theta) \\
 f(\theta')
 \end{aligned} \right\} &= (y - y') \sin \left\{ \begin{aligned}
 \theta \\
 \theta'
 \end{aligned} \right\} + (x - x') \cos \left\{ \begin{aligned}
 \theta \\
 \theta'
 \end{aligned} \right\}, \\
 k &= 1, 2, \dots, m, \\
 \delta_k(1) &= \begin{cases} 1 & \text{при } k = 1, \\ 0 & \text{при } k \neq 1. \end{cases}
 \end{aligned} \right.
 \end{aligned}$$

В формулах (2.5.1), (2.5.2) использованы следующие обозначения:  $v(x, y)$ ,  $v'(x', y')$  — координаты точек наблюдения и интегрирования;  $\rho$  — расстояние между точками  $v$  и  $v'$ ;  $\kappa_k$  — ком-

плексный коэффициент преломления слоя диэлектрика с номером  $k$ ; первичные  $J_v^{es}$ ,  $\hat{J}_z^{ms}$  и искомые полные поверхностные токи  $J_v^e$ ,  $\hat{J}_z^m$  связаны со значениями соответствующих электрических и магнитных полей на границах раздела соотношениями  $\mathbf{J}^e = [\mathbf{n} \times \mathbf{H}]$ ,  $\mathbf{J}^m = -[\mathbf{n} \times \mathbf{E}]$ , где  $\mathbf{n}$  — единичный вектор нормали к поверхности в рассматриваемой точке;  $\hat{\mathbf{J}}^m = w \cdot \mathbf{J}^m$ ,  $w = 120\pi$ . Остальные обозначения и контуры интегрирования ясны из рис. 44. Интегралы по несуществующим границам  $v_0$  и  $v_{m+1}$  полагаются равными нулю.

Система уравнений (2.5.1), (2.5.2) представляет собой систему  $2m$  интегральных уравнений Фредгольма II рода, где  $m$  — число границ раздела (количество слоев покрытия равно  $m - 1$ ).

В том случае, когда внутренняя граница  $v_m$  металлизирована, как это обычно имеет место на практике, необходимо в интегралах по этой поверхности в (2.5.1), (2.5.2) перейти к пределу при  $|\kappa_m| \Rightarrow \infty$ . Тогда при  $k = m$  вместо двух будем иметь одно уравнение

$$J_{v_m}^e(v) = -\frac{1}{2} \int_{v_{m-1}} \left\{ -J_{v_{m-1}}^e(v') f(\theta') \frac{i\kappa_{m-1}}{\rho} H_1^{(2)}(\kappa_{m-1}\rho) + \hat{J}_{z_{m-1}}^m(v') \kappa_{m-1}^2 H_0^{(2)}(\kappa_{m-1}\rho) \right\} dv'_{m-1} - \frac{1}{2} \int_{v_m} J_{v_m}^e(v') f(\theta') \frac{i\kappa_{m-1}}{\rho} H_1^{(2)}(\kappa_{m-1}\rho) dv'_m. \quad (2.5.5)$$

Порядок системы интегральных уравнений при этом уменьшается на единицу.

Нетрудно видеть, что в частном случае  $m = 1$  система интегральных уравнений (2.5.1), (2.5.2) переходит в систему уравнений для однородного диэлектрического тела [242].

2.5.2. Численное решение системы интегральных уравнений. Для удобства изложения метода решения рассматриваемой задачи перепишем систему интегральных уравнений (2.5.1), (2.5.2) более кратко в матричной форме:

$$J_k(v) = \frac{1}{2} \int_{v_{k-1}} P_{k-1}(v, v') J_{k-1}(v') dv'_{k-1} + \frac{1}{2} \int_{v_k} P_k(v, v') J_k(v') \times \\ \times dv'_k + \frac{1}{2} \int_{v_{k+1}} P_{k+1}(v, v') J_{k+1}(v') dv'_{k+1} = \delta_k(1) J_k^s(v), \\ k = 1, 2, \dots, m. \quad (2.5.6)$$

Здесь векторы-столбцы токов имеют по две составляющих

$$J_k(v) = \{J_{v_k}^e; \hat{J}_{z_k}^m\}, \quad J_1^s(v) = \left\{ J_{v_1}^{es}, \frac{2}{1 + \kappa_1^2} \hat{J}_{z_1}^{ms} \right\}. \quad (2.5.7)$$

Матричное ядро  $P_j(v, v')$  представляет собой матрицу второго

порядка с элементами

$$P_{11}^j(v, v'), \quad P_{13}^j(v, v'), \quad P_{31}^j(v, v'), \quad P_{33}^j(v, v'), \quad (2.5.8)$$

где  $j = k - 1, k, k + 1$ .

Поскольку явные выражения для элементов ядра  $P_j(v, v')$  очевидны из сравнения (2.5.6) с (2.5.1), (2.5.2), то выписывать здесь соответствующие формулы нет необходимости.

Для того чтобы применить систему интегральных уравнений (2.5.6) для численного решения задачи о бесконечном клине с многослойным поглощающим покрытием, воспользуемся тем же приемом, который был использован для случая однородного диэлектрического клина (§ 2.4). С этой целью представим поверхностные электрические и магнитные токи на каждой из границ раздела в виде суммы равномерной (неубывающей с расстоянием от ребра клина)  $J_k^0(v)$  и неравномерной  $J_k^1(v)$  составляющих:

$$J_k(v) = J_k^0(v) + J_k^1(v). \quad (2.5.9)$$

При наличии потерь в материале покрытия и при больших углах раскрытия клина равномерная составляющая токов вдали от вершины будет, очевидно, такой же, как и при падении плоской волны на соответствующую бесконечную плоскую среду (невозможность существования незатухающих поверхностных волн обеспечивается наличием потерь). Если рассматривается дифракция на идеально проводящем клине с покрытием, это утверждение справедливо для любых углов при вершине клина, поскольку в этом случае прямое прохождение волны, падающей на одну грань клина, на другую его грань, а также переотражения в теле клина отсутствуют.

Разобьем контур поперечного сечения рассматриваемого многослойного тела на три области I, II, III, выбрав границы разбиения достаточно далеко от вершины клина (рис. 44). Каждый из контуров  $v_k$  также окажется разбитым на три части  $v_k^I, v_k^{II}, v_k^{III}$ . Тогда полные электрические и магнитные токи можно записать в соответствии с (2.5.9) в виде

$$J_k(v_k) = \begin{cases} J_k^0(v_k) + J_k^1(v_k), & v_k \in v_k^{II}; \\ J_k^0(v_k), & v_k \in v_k^I; v_k \in v_k^{III}. \end{cases} \quad (2.5.10)$$

Подставляя это представление для токов в (2.5.6), получим систему интегральных уравнений, в которой контуры интегрирования имеют уже конечную длину  $v_k^{II}$  и которая, следовательно, может быть решена численно:

$$J_k(v) + \frac{1}{2} \int_{v_{k-1}^{II}} P_{k-1}(v, v') J_{k-1}(v') dv'_{k-1} + \\ + \frac{1}{2} \int_{v_{k-1}^{II}} P_k(v, v') J_k(v') dv'_k +$$

$$+ \frac{1}{2} \int_{v_{k+1}^{\text{II}}} P_{k+1}(v, v') J_{k+1}(v') dv'_{k+1} = \delta_k(1) J_k^s(v) - \frac{1}{2} \Delta J_k(v), \quad (2.5.11)$$

где

$$\begin{aligned} \Delta J_k(v) = & \int_{v_{k-1}^{\text{I, III}}} P_{k-1}(v, v') J_{k-1}^0(v') dv'_{k-1} + \\ & + \int_{v_k^{\text{I, III}}} P_k(v, v') J_k^0(v') dv'_k + \int_{v_{k+1}^{\text{I, III}}} P_{k+1}(v, v') J_{k+1}^0(v') dv'_{k+1}. \end{aligned} \quad (2.5.12)$$

В рассматриваемом случае дифракции  $TE$ -поляризованной волны с единичной амплитудой первичные токи  $J_k^s(v)$  вычисляются по следующим формулам (см. рис. 44):

$$\begin{aligned} J_{z_1}^{es} &= -\exp[i(x \cos \alpha + y \sin \alpha)], \\ \hat{J}_{z_1}^{ms} &= \cos(\theta - \alpha) \exp[i(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]. \end{aligned} \quad (2.5.13)$$

Можно показать, что равномерные составляющие токов  $J_k^0(v)$ , входящие в выражения (2.5.12) для дополнительных членов  $\Delta J_k(v)$  правых частей интегральных уравнений (2.5.11), могут быть записаны в соответствии с (2.5.13) в виде

$$\begin{Bmatrix} J_{v_k}^{e0} \\ J_{z_k}^{m0} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} A_k(\alpha, \theta) \\ B_k(\alpha, \theta) \end{Bmatrix} \exp[i(x \cos \alpha + y \sin \alpha)]. \quad (2.5.14)$$

Коэффициенты  $A_k(\alpha, \theta)$ ,  $B_k(\alpha, \theta)$  определяются из решения задачи о падении плоской волны на бесконечный плоский многослойный диэлектрик. Для их вычисления удобно воспользоваться методом последовательного пересчета нормальных импедансов [42].

Способ вычисления интегралов от равномерных составляющих токов в (2.5.12) обсуждался в предыдущем параграфе.

При численном решении системы интегральных уравнений (2.5.11) каждый из контуров  $v_k^{\text{II}}$  разбивается на  $N_k$  малых интервалов  $\Delta v_k^{\text{II}}$ . Применяя тот же метод что и для случая однородных тел (§ 2.4), систему интегральных уравнений можно записать эквивалентной системой линейных алгебраических уравнений относительно значений неизвестных токов в средних точках интервалов  $\Delta v_k^{\text{II}}$ . Вычисление элементов этой матрицы, которые представляют собой интегралы от  $P_{ik}^i(v, v')$  по интервалам  $\Delta v_k^{\text{II}}$ , производится так же, как и при рассмотрении однородных тел [242].

Порядок эквивалентной системы линейных алгебраических уравнений (с использованием свойства симметрии тела) равен

$$N = \sum_{k=1}^m N_k \quad (2.5.15)$$

и при рассмотрении покрытий с большим числом слоев оказывается весьма высоким. Анализ структуры эквивалентной матрицы показал, что она является *ленточной*. Это связано со спецификой системы интегральных уравнений (2.5.11), заключающейся в том, что она имеет вид рекуррентных соотношений (токи на какой-либо границе с номером  $k$  непосредственно связаны с токами не на всех остальных границах раздела, а только с токами, текущими по самой этой границе  $k$  и по близлежащим границам  $k-1$ ,  $k+1$ ). Для решения такой системы уравнений, по-видимому, наиболее эффективен *метод блочных итераций* [476].

Вычисление диаграмм рассеяния по найденному распределению поверхностных токов ничем не отличается от случая дифракции на однородном клине (§ 2.4). Для главного члена асимптотического разложения цилиндрической волны в полярной системе координат  $r, \varphi$ , опуская множитель  $\exp\{-ikr\}/\sqrt{r}$ , будем иметь

$$\begin{aligned} H_z = & -\frac{1}{4} \sqrt{\frac{2}{\pi}} e^{i\frac{\pi}{4}} \left\{ \int_{v_1^{\text{II}}} [J_{v_1}^e \cos(\theta - \varphi) + \hat{J}_{z_1}^m] \times \right. \\ & \times \exp\{x' \cos \varphi + y' \sin \varphi\} dv'_1 + \\ & + \sum_{k=1,2} \frac{i \exp\{\pm i \xi_k |\sin(\theta_k - \varphi) + \sin(\theta_k - \alpha)|\}}{\pm [\sin(\theta_k - \varphi) + \sin(\theta_k - \alpha)]} \times \\ & \times [A_1(\alpha, \theta_k) \cos(\theta_k - \varphi) + B_1(\alpha, \theta_k)] \left. \right\}, \end{aligned} \quad (2.5.16)$$

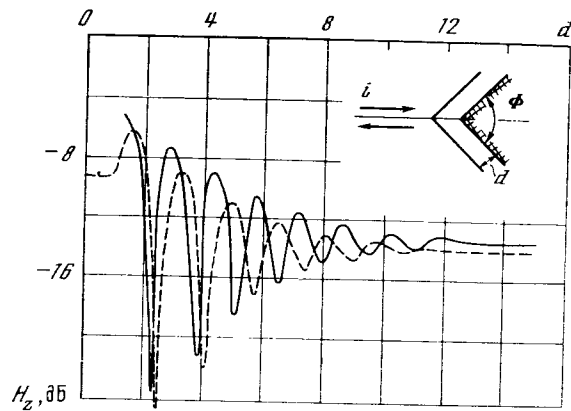
где коэффициенты  $A_1(\alpha, \theta_k)$ ,  $B_1(\alpha, \theta_k)$  определяются из представления (2.5.14) для равномерных составляющих токов на внешней поверхности клина. Верхний знак в (2.5.16) соответствует индексу суммирования  $k=1$ , нижний —  $k=2$ ;  $\xi_k$  — расстояние от начала координат до концов интервала  $v_1^{\text{II}}$ .

Для приближенной оценки уровня рассеянного многослойным клином поля может быть использован *метод физической оптики*. Пренебрегая вкладом неравномерной составляющей токов, найдем в этом приближении

$$H_z^{(0)} = -\frac{i}{\pi} e^{i\frac{\pi}{4}} \sum_{k=1,2} \frac{A_1(\alpha, \theta_k) \cos(\theta_k - \varphi) - B_1(\alpha, \theta_k)}{\pm [\sin(\theta_k - \varphi) - \sin(\theta_k - \alpha)]}. \quad (2.5.17)$$

Формулы (2.5.16) и (2.5.17) справедливы всюду, кроме направлений, близких к направлению падающей волны ( $\varphi = \pi + \alpha$ ) и направлений волн, отраженных от граней клина по законам геометрической оптики ( $\varphi = 2\theta_k - \alpha$ ).

**2.5.3. Результаты некоторых расчетов.** Физические процессы, происходящие при дифракции электромагнитных волн на клине с многослойным покрытием, оказываются значительно более сложными, чем в случае однородного диэлектрического клина.



Р и с. 45. Зависимость уровня поля, рассеянного металлическим клином с однослойным поглощающим покрытием, от толщины слоя ( $\alpha = 0$ ,  $\varphi = 0$ ;  $\kappa = 2 - i0,2$ ;  $\Phi = 120^\circ$ )  
 — точное решение, — — приближение физической оптики

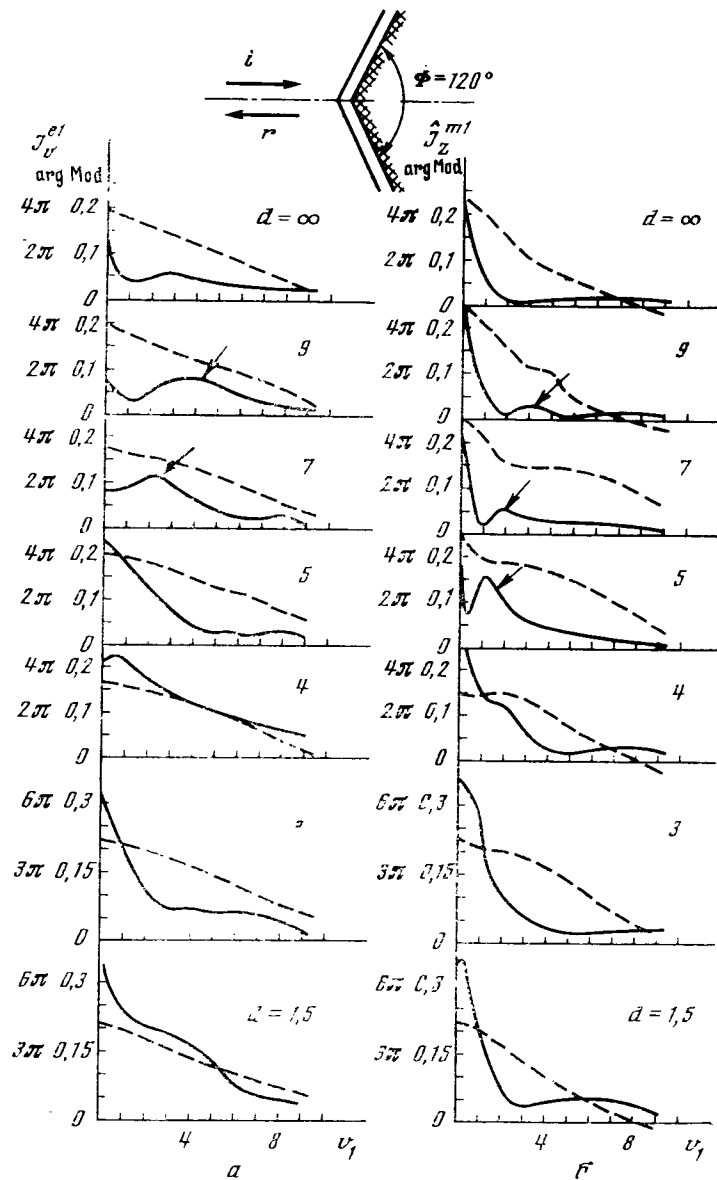
Наличие многослойного диэлектрика приводит к возникновению явлений, существенно новых по сравнению с однородным клином. Прежде всего это частотная зависимость уровня рассеянного поля, связанная с изменением электрической толщины покрытия при изменении длины падающей электромагнитной волны. Анализ осложняется еще рядом причин, которые будут рассмотрены ниже. Как и в случае однородного клина, весьма полезным при анализе оказывается принятое представление поверхностных токов в виде суммы равномерной и неравномерной составляющих.

Исследование дифракции на многослойном клине удобно начать с простейшего случая — идеально проводящего клина с однослойным поглощающим покрытием. На рис. 45 представлена зависимость уровня, рассеянного металлическим клином (угол раскрытия  $\Phi = 120^\circ$ ), покрытым слоем однородного поглотителя ( $\kappa = 2 - i0,2$ ), от толщины слоя  $d$  (радиолокационный случай:  $\alpha = 0$ ,  $\varphi = 0$ ). Расчеты проводились точно с помощью метода интегральных уравнений (сплошная кривая) и приближенно (приближение физической оптики; штриховая кривая). Уровень рассеянного поля существенно зависит от толщины покрытия, и зависимость эта носит, как и следовало ожидать, колебательный характер. Колебания амплитуды связаны с наличием двух границ раздела, и возникновение их упрощенно можно объяснить так же, как и в случае падения волны на бесконечный плоский металлический экран со слоем поглощающего диэлектрика. Амплитуда колебаний уменьшается с увеличением толщины покрытия, что связано с уменьшением амплитуды возбуждения границы диэлектрик — металл, обусловленным затуханием волны в диэлектрике. При дальнейшем увеличении толщины слоя влияние внутренней границы раздела ослабевает и, как видно из рисунка, уровень

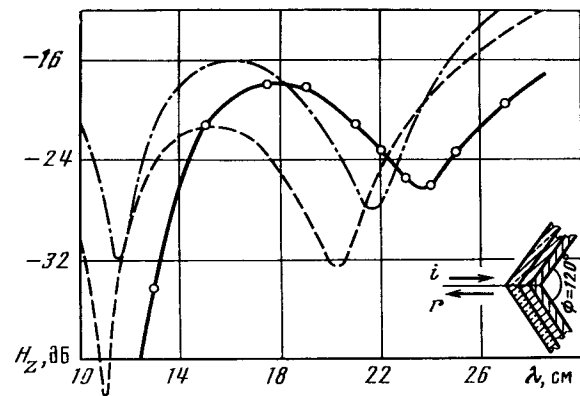
рассеянного поля становится таким же, как и для соответствующего однородного клина с малым поглощением.

Сравнение точного решения с решением в приближении физической оптики показывает, что последнее качественно правильно описывает характер зависимости амплитуды отраженного поля от толщины слоя диэлектрика. Более того, при больших значениях  $d$ , т. е. в той области, где влияние внутренней границы раздела невелико, это приближение оказывается удовлетворительным и с количественной точки зрения. Однако в области малых электрических толщин различие между точным решением и приближением физической оптики достигает больших значений. Это явление характерно не только для однослойных, но и, как будет показано ниже, для многослойных поглотителей. Поскольку именно эта область является существенной для всех реальных многослойных радиопоглощающих материалов (РПМ), необходимо выяснить, с чем связано и какими факторами обуславливается такое расхождение. С этой целью проанализируем распределение неравномерной составляющей токов на внешней поверхности (рис. 46), поскольку именно неравномерными токами определяется различие между точным решением и решением в приближении физической оптики.

На рис. 47 представлены распределения модуля (сплошная кривая) и аргумента (пунктирная) неравномерной составляющей электрического (а) и магнитного (б) поверхностных токов для нескольких значений толщины слоя  $d$ . В верхней части рисунка приведены результаты расчетов для однородного клина с коэффициентом преломления  $\kappa = 2 - i0,2$ , что соответствует значению  $d = \infty$ . При большой толщине слоя диэлектрика наличие внутренней границы диэлектрик — металл практически не искажает картину распределения неравномерной составляющей токов на внешней границе (вакуум — диэлектрик) вблизи вершины клина ( $v_1 \approx 0$ ). Наличие металлической подложки проявляется в том, что в распределении модуля токов появляется дополнительный максимум (на рисунке отмечен стрелкой). С уменьшением толщины слоя амплитуда этого всплеска токов увеличивается и он смещается в направлении уменьшения  $v_1$  (к ребру клина). При толщине слоя  $d \approx 4$  (для тока  $J_v^{el}$  несколько раньше) этот всплеск начинает искажать характер поведения неравномерной составляющей вблизи излома внешней поверхности диэлектрика ( $v_1 \approx 0$ ) и при дальнейшем уменьшении  $d$  максимумы токов, обусловленные наличием внешней поверхности раздела (вакуум — диэлектрик), и максимумы, связанные с влиянием ребра металлического клина (внутренняя поверхность раздела диэлектрик — металл), сливаются. Таким образом, в достаточно широкой области изменения толщины слоя влияние изломов внешней и внутренней границ раздела на распределение поверхностных токов на внешней границе (а следовательно, и на диаграмму рассеяния) практически полностью развязано. При этом рассеянное поле есть



Р и с. 46. Распределение неравномерной составляющей поверхностных токов на поверхности металлического клина с однослойным поглощающим покрытием для различных значений толщины слоя  $\alpha = 0, \varphi = 0, \kappa = 2 - i0,2; \Phi = 120^\circ$ ; сплошная линия — точное решение, пунктирная — приближение физической оптики



Р и с. 47. Зависимость уровня поля, рассеянного металлическим клином с трехслойным поглощающим покрытием, от длины волны падающего электромагнитного поля

результат интерференции полей, обусловленных тремя факторами: равномерной составляющей поверхностных токов; всплеском токов, связанным с изломом внешней поверхности диэлектрического слоя, таким же, как и вблизи ребра соответствующего однородного диэлектрического клина; всплеском токов на внешней поверхности, вызываемым наличием ребра внутреннего металлического клина.

Это позволяет оценить вклад каждого из перечисленных факторов в формирование диаграммы рассеяния по отдельности. Несложный анализ, основанный на прямом вычислении амплитуды и фазы поля в дальней зоне, показывает, что основное значение имеют первая и последняя из указанных причин, т. е. поведение амплитуды рассеянного поля определяется в основном интерференцией поля, порождаемого равномерной составляющей поверхностных токов (приближение физической оптики) и поля всплеска токов, связанного с изломом металлической подложки. Местоположение этого всплеска токов и его фаза зависят от электрической толщины слоя диэлектрика, т. е. от частоты первичного поля.

Вклад второй из перечисленных причин (всплеск токов вблизи излома диэлектрика) оказывается менее значительным и проявляется только в минимумах рассеянного поля. Этим, в частности, объясняется то, что приближение физической оптики, которое применительно к однородному клину дает в ряде случаев удовлетворительные с количественной точки зрения результаты, приводит к значительным ошибкам в случае многослойного клина.

Приведенный анализ позволяет понять характер поведения рассеянного поля и в более сложном случае — при рассмотрении дифракции на клине с многослойным поглощающим покрытием. На рис. 47 представлена зависимость уровня поля, рассеянного в обратном направлении ( $\alpha = 0, \varphi = 0$ ) клином ( $\Phi = 120^\circ$ ) с трех-



слоиным радиопоглощающим материалом от длины волны возбуждающего поля. Параметры слоев покрытия:  $\kappa_1 = 1,29 - i 0,11$ ;  $\kappa_2 = 1,65 - i 0,40$ ;  $\kappa_3 = 2,50 - i 1,10$ . Толщина каждого слоя  $d_1 = d_2 = d_3 = 1,6$  см (параметры покрытия приблизительно соответствуют параметрам реальных многослойных структур, широко применяемых, например, для облицовки внутренней поверхности безэховых камер [477] в сантиметровом диапазоне). На этом рисунке сплошная кривая — результат расчетов методом интегральных уравнений (расчетные точки отмечены крестиками), пунктир — приближение физической оптики. Там же для наглядности штрихпунктиром нанесена зависимость коэффициента отражения от бесконечной плоской поглощающей поверхности. Поведение этих кривых дает возможность составить общее представление о соотношении между уровнем поля, рассеянного клином, выполненным из многослойного радиопоглощающего материала, и полем, отраженным от плоской поверхности такого РПМ, а также о применимости метода физической оптики для расчета подобных структур.

Анализ угловой зависимости рассеянного многослойным клином поля  $H_z$  показывает, что амплитуда поля мало меняется в тех пределах углов наблюдения, которые обычно представляют интерес, как это имеет место и для однородного клина.

## ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИЗМА В ЗАКРЫТЫХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУРАХ

Электродинамические устройства, рассматриваемые в данной главе, находят самое широкое и различное применение. Уже из обзора, проведенного во введении (п. 1.6, 1.7), видно, с каким большим разнообразием конструкций приходится иметь дело (рис. 12—14). Естественно поэтому при анализе приходится пользоваться всем набором расчетных методов. В двух крайних случаях — малый угол наклона границы раздела двух диэлектриков к оси волновода (рис. 12, а —  $e$ ;  $\vartheta/\pi \ll 1$ ) и малое отклонение ее от поперечного сечения регулярной линии (рис. 80, б, г;  $\vartheta/\pi \ll 1$ ) — можно пользоваться соответственно *методами поперечных и продольных сечений* (§ 3.3, 3.7). В некоторых случаях они позволяют либо получить аналитическое решение, либо свести задачу к квадратурам. Во всех случаях нужно знать собственные функции регулярного волновода с кусочно-однородным заполнением поперечного сечения волновода диэлектриков. Но уже эта задача приводит к необходимости решения сложных дисперсионных уравнений относительно поперечного волнового числа. В редких случаях удается записать приближенные аналитические выражения для него. Эти вопросы коротко рассматриваются в § 3.1. Коэффициент отражения волны от скачка диэлектрического заполнения получен в § 3.2. *Метод поперечных сечений* для анализа пологой диэлектрической вставки в волноводе используется в § 3.3. Анализ малого отклонения границы раздела двух диэлектриков дан в § 3.4.

В § 3.5 и 3.6 численными методами исследованы более общие случаи, когда угол наклона границы диэлектрика произволен или на границе расположен согласующий диэлектрический слой (так называемое диэлектрическое окно) и т. п.

§ 3.7 посвящен рассмотрению преодоления излома плоского широкого волновода с помощью преломляющей диэлектрической призмы. Здесь устанавливается весьма важный общий результат — *принцип взаимной компенсации паразитных волн*.

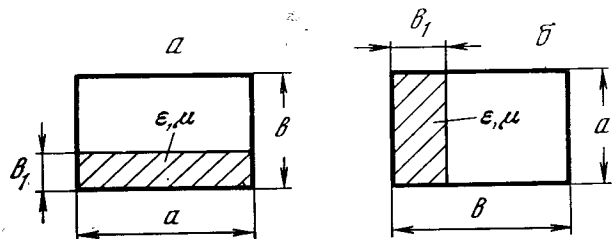
**§ 3.1**  
**Регулярные волноводы**  
**с кусочно-однородным в поперечном направлении**  
**диэлектрическим заполнением**

Во введении (п. 1.7) мы отмечали широкую область применения различных закрытых волноведущих структур с кусочно-однородным заполнением диэлектриком. Некоторые примеры линий такого рода представлены на рис. 15. Здесь мы очень коротко рассмотрим свойства собственных волн простейших волноводов этого класса. В отличие от волноводов с однородным заполнением, в которых полное поле обычно представляется в виде разложения по полной системе собственных функций, состоящей из набора электрических  $E_{mn}$  (поперечно-магнитных —  $TM$ ) и магнитных  $H_{mn}$  (поперечно-электрических —  $TE$ ) волн, полное поле волноводов с кусочно-однородным заполнением поперечного сечения удобнее представлять в виде полной системы собственных функций, состоящей из продольно-электрических ( $LE$ ) и продольно-магнитных ( $LM$ ) волн. Введение продольных волн  $LE$  и  $LM$  для волноводных структур с кусочно-однородным заполнением сечения магнитоэлектриком оказалось весьма удачным и удобным, так как при этом любая собственная волна такого волновода является простой волной, а не гибридной, как это было бы при использовании системы волн  $E$ - и  $H$ -типа. Таким образом, представление поля волновода с кусочно-однородным заполнением в виде разложения по  $LE$ - и  $LM$ -волнам является более адекватным физической стороне дела, что и определяет, как это обычно бывает, внешнюю простоту и стройность описания (см. также с. 145, 146).

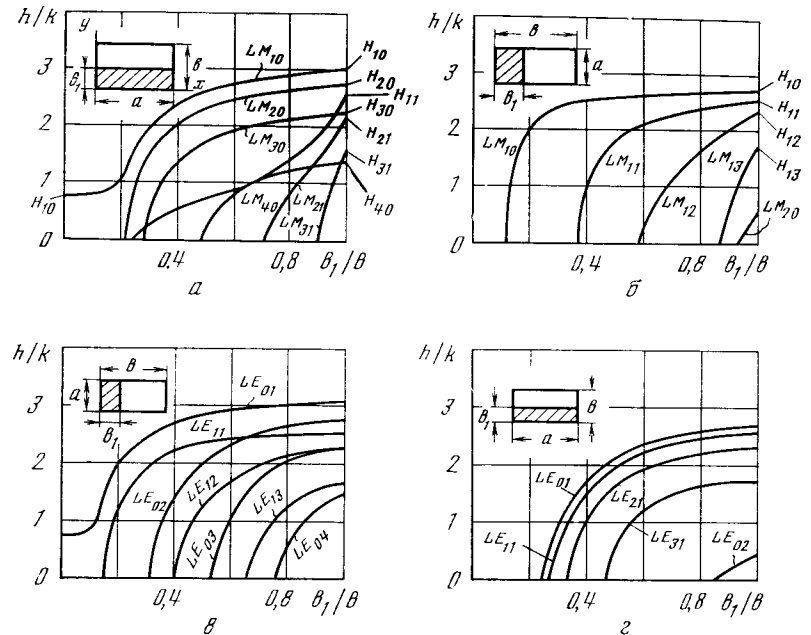
Приведем (без вывода) дисперсионные уравнения для продольного волнового числа  $h$   $LM$ - и  $LE$ -волн. Они имеют вид

$$\frac{k_{y1}}{k_{y2}} \frac{\epsilon_2}{\epsilon_1} \operatorname{tg} k_{y1} b_1 + \operatorname{tg} k_{y2} b_2 = 0 \text{ для } LM\text{-волн,} \quad (3.1.1)$$

$$\frac{k_{y2}}{k_{y1}} \frac{\mu_1}{\mu_2} \operatorname{tg} k_{y1} b_1 + \operatorname{tg} k_{y2} b_2 = 0 \text{ для } LE\text{-волн.} \quad (3.1.2)$$



Р и с. 48. Поперечные сечения (координаты, расположение и размеры) регулярных волноводов с кусочно-однородным заполнением магнитоэлектриком



Р и с. 49. Решение дисперсионного уравнения для поперечных собственных чисел регулярного волновода с кусочно-однородным заполнением поперечного сечения магнитоэлектриком

Здесь  $k_{y_j} = k \sqrt{\epsilon_j \mu_j - \left(\frac{m\pi}{ka}\right)^2 - \left(\frac{h}{k}\right)^2}$ ,  $m = 0, 1, 2, \dots$ . Для волн  $LM$   $m = 1, 2, \dots$ , для  $LE$   $m = 0, 1, 2, \dots$ ; второй индекс  $n = 0, 1, 2, \dots$ .

На рис. 49 представлены результаты расчета корней дисперсионных уравнений (3.1.1) и (3.1.2). Они получены перестроением соответствующих кривых из [360] и соответствуют прямоугольному волноводу с размерами  $ka \times kb = 4,52 \times 1,96$  и  $\epsilon = 10$ . Как видно из приведенных данных, волны  $LM_{mn}$  переходят при полном заполнении сечения диэлектриком в соответствующие волны  $H_{mn}$  волновода с однородным диэлектриком (рис. 49, а, б). Все волны, за исключением волны  $LM_{10}$  для случая диэлектрической пластины у широкой стенки, обладают частотной отсечкой.

Если диэлектрик расположен у узкой стенки, то волны  $LE_{0n}$  ( $m = 0$ ) обращаются в волны  $H_{0n}$ . Это свойство волн  $LE_{0n}$  сохраняется и в случае нескольких плоскопараллельных слоев, расположенных у узкой стенки. При переходе к однородно заполненному волноводу волны  $LE_{0n}$  переходят в магнитные волны  $H_{0n}$  (рис. 49, в, г).

Приведенные на рис. 49 результаты наглядно демонстрируют известный эффект втягивания поля в диэлектрик (диэлектрический эффект). При этом в незаполненной части поле убывает от поверх-

ности диэлектрика по экспоненциальному закону, т. е. поле имеет характер *поверхностной волны*. Этот эффект имеет многочисленные технические приложения, в особенности для волноводов с анизотропным заполнением [11—13, 360—374]. На некоторых из них мы уже останавливались во введении.

### § 3.2

#### Отражение волноводных волн

##### от поперечных границ раздела диэлектрических сред

3.2.1. Скачкообразное изменение свойств среды, заполняющей волновод, широко используется в практических конструкциях ([30, 371, 347, 499]; рис. 14). Простейшим примером этого класса структур является модель волновода, наполовину заполненного однородным изотропным магнитодиэлектриком (рис. 14, а). Симметрия задачи делает электродинамический расчет структуры рис. 14, а элементарным. Если слева на границу раздела  $z = 0$  падает  $i$ -я собственная волна волновода, то при  $z > 0$  будет существовать одна прошедшая волна, а при  $z < 0$  — одна отраженная волна того же типа, что и падающая волна. Симметрия задачи приводит, таким образом, к отсутствию преобразования падающей волны в волны других типов. Стало быть, коэффициенты отражения можно, учитывая концепцию Бриллюэна о разложении волноводных волн на плоские, выписать сразу, воспользовавшись формулами Френеля (§ 1.4). При этом коэффициенты отражения и прохождения для электрических волн  $E_i$  имеют вид

$$R_i^{(E)} = \frac{\varepsilon \cos \vartheta_i - \nu}{\varepsilon \cos \vartheta_i + \nu}, \quad T_i^{(E)} = \frac{2\varepsilon \cos \vartheta_i}{\varepsilon \cos \vartheta_i + \nu}, \quad (3.2.1)$$

а для магнитных волн

$$R_i^{(H)} = \frac{\mu \cos \vartheta_i - \nu}{\mu \cos \vartheta_i + \nu}, \quad T_i^{(H)} = \frac{2\mu \cos \vartheta_i}{\mu \cos \vartheta_i + \nu}. \quad (3.2.2)$$

В приведенных формулах угол  $\vartheta_i$  — есть угол Бриллюэна. Он связан с продольным волновым числом  $h_i$  и поперечным волновым числом  $g_i$  обычными соотношениями:

$$h_i = k \cos \vartheta_i, \quad g_i = k \sin \vartheta_i; \quad \nu = \sqrt{n^2 - \sin^2 \vartheta_i},$$

$n$  — показатель преломления среды, заполняющей волновод при  $z > 0$ .

3.2.2. Скачкообразное изменение свойств среды с диэлектрическим окном является моделью калориметрической нагрузки [499]. В расчетном плане исследование этой модели не вызывает затруднений, ибо здесь, как и в только что рассмотренном примере (п. 3.2.1), отсутствует преобразование падающей волны в волны других номеров и типов. Пусть волна  $H_{10}$  прямоугольного вол-

новода с составляющими

$$E_y = \mathcal{E} \sin \frac{\pi}{a} x e^{ih_i z}, \quad H_x = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad H_z = \frac{1}{ik\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x} \quad (3.2.3)$$

падает слева на границу раздела сред 1 и 2, на которой расположен также слой 2 с диэлектрической проницаемостью  $\varepsilon_2$ .

Здесь

$$h_i = \sqrt{k^2 - \left(\frac{i\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{a} \omega_i = \frac{2\pi}{a} \sqrt{\kappa^2 - \left(\frac{i}{2}\right)^2}; \quad (3.2.4)$$

$$\kappa = \frac{a}{\lambda} = \frac{ka}{2\pi}.$$

Полное поле всюду в волноводе имеет те же составляющие, что и падающее поле, и не зависит от координаты  $y$ . Составляющая  $E_y$  должна удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\Delta_{xz} + k^2 \varepsilon(z)) E_y = 0, \quad (3.2.5)$$

где

$$\Delta_{xz} \equiv \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2},$$

$\varepsilon(z)$  — кусочно-постоянная функция, характеризующая относительную диэлектрическую проницаемость.  $E_y$  должно удовлетворять граничным условиям на боковой поверхности волновода  $E_y|_{x=0,a} = 0$  и условиям излучения, состоящим в требовании отсутствия волн, приходящих из бесконечности (за исключением падающей волны). На границах раздела сред должны выполняться условия непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного поля, которые можно записать в виде следующих условий на  $E_y$ :

$$[E_y]|_{z=0,d} = 0 \quad \text{и} \quad \left[ \frac{\partial E_y}{\partial z} \right] \Big|_{z=0,d} = 0. \quad (3.2.6)$$

Квадратные скобки означают скачок функции или ее производной на границе раздела сред:  $[f] = f(x+0) - f(x-0)$ . В каждой области, в которой диэлектрическая проницаемость — величина постоянная, электрическое поле будем искать в следующем виде:

$$E_y^I = \mathcal{E} (e^{ih(1)z} + R e^{-ih(1)z}) \sin \frac{\pi}{a} x, \quad z \leq 0; \quad (3.2.7)$$

$$E_y^{II} = \mathcal{E} (A e^{ih(2)z} + B e^{-ih(2)z}) \sin \frac{\pi}{a} x, \quad z \in [0, d]; \quad (3.2.8)$$

$$E_y^{III} = \mathcal{E} T e^{ih(3)(z-d)} \sin \frac{\pi}{a} x, \quad z \geq d, \quad (3.2.9)$$

где

$$h_{(j)} = \sqrt{k^2 \varepsilon_j - \left(\frac{\pi}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{a} \omega_j = \frac{2\pi}{a} \sqrt{\kappa^2 \varepsilon_j - \frac{1}{4}}; \quad (3.2.10)$$

Как следует из соотношения (3.2.17), величина минимума коэффициента отражения и положение его на частотной оси зависят от соотношения диэлектрических проницаемостей сред и частоты. Абсолютный минимум коэффициента отражения, т. е.  $R^{\lambda/4} = 0$ , достигается при  $\omega_1\omega_3 = \omega_2^2$ , и значение корня  $\kappa_0$  уравнения (3.2.17) определяется выражением

$$\kappa_0 = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_2}{\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2^2}}. \quad (3.2.18)$$

При  $\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} \leq \varepsilon_2 < (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/2$  уравнение (3.2.17) корней не имеет, т. е. коэффициент отражения  $R^{\lambda/4}$  в нуль не обращается. При любых  $\varepsilon_2 > (\varepsilon_1 + \varepsilon_3)/2$  корень уравнения (3.2.17) удовлетворяет условию  $\kappa_0^2 < 1/4$ . Из этого следует, что коэффициент отражения обращается в нуль лишь на интервале  $\varepsilon_2 \in [1, \sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3}]$ , на котором корень уравнения (3.2.17) монотонно возрастает от  $\kappa_0 = 1/2$  до  $+\infty$ . Зависимость  $\kappa_0$  от  $\varepsilon_2$  для рассматриваемой конкретной модели нагрузки, для которой зафиксированы  $\varepsilon_1 = 1$  и  $\varepsilon_3 = 74$ , приведена на рис. 51. Исследуемая функция  $R^{\lambda/4}$  имеет точку максимума, которая определяется следующим выражением:

$$\kappa_{\max} = \frac{1}{2} \sqrt{\frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_3 - 2\varepsilon_2}{2\varepsilon_1\varepsilon_3 - \varepsilon_2(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)}}. \quad (3.2.19)$$

Из него следует, что функция  $R^{\lambda/4}(\kappa)$  имеет точку максимума только для  $\varepsilon_2 \in [1, 2\varepsilon_1\varepsilon_3/(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)]$ . Для значений  $\varepsilon_2 > 2\varepsilon_1\varepsilon_3/(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$

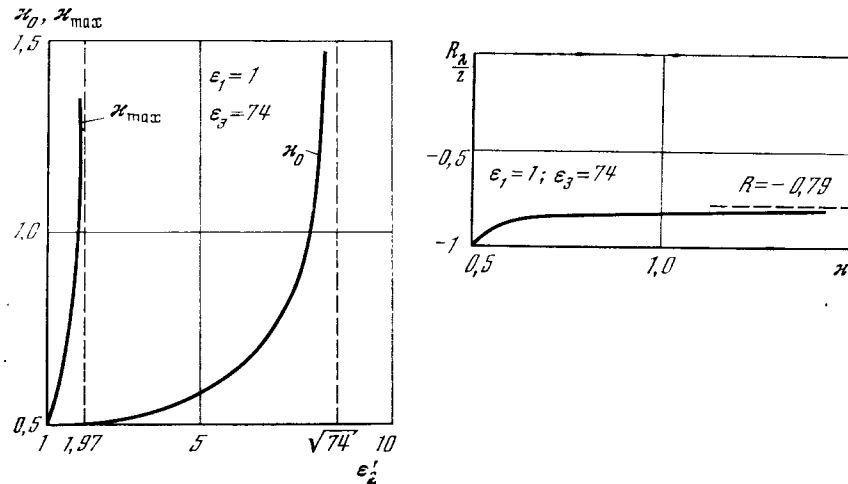


Рис. 51. Зависимость параметра  $\kappa_0$  (определяет минимум коэффициента отражения) и параметра  $\kappa_{\max}$  (максимум коэффициента отражения)

Рис. 52. Коэффициенты отражения при толщинах пластин, обеспечивающих минимальное и максимальное значения коэффициентов отражения

функция  $R^{\lambda/4}$  монотонно возрастает. Зависимость  $\kappa_{\max}$  от  $\varepsilon_2$  представлена на рис. 51. Для представления поведения функции  $R^{\lambda/4}(\kappa)$  отметим, что при  $\kappa \Rightarrow 1/2 \sqrt{\varepsilon_1} R^{\lambda/4} \Rightarrow -1$ , а при  $\kappa \Rightarrow \infty$

$$R^{\lambda/4} = R_{\infty}^{\lambda/4} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3} - \varepsilon_2}{\sqrt{\varepsilon_1\varepsilon_3 + \varepsilon_2}}. \quad (3.2.20)$$

Следует отметить, что функция  $R^{\lambda/4}(\kappa)$  быстро стремится к своему асимптотическому значению. Поэтому для согласования при достаточно больших частотах  $\kappa$ , т. е. в многомодовой области, следует выбирать такие  $\varepsilon_2$ , что значение  $|R_{\infty}^{\lambda/4}| < 0,1$ . В одноволновой области  $0,5 < \kappa < 1,0$  оптимальный выбор  $\varepsilon_2$  связан с требованием  $\kappa = \kappa_0$ , где  $\kappa$  — средняя частота диапазона согласования нагрузки.

Зависимость  $R^{\lambda/4}(\kappa)$  при больших частотах аналогична зависимости коэффициента отражения плоской волны от трехслойной среды. Однако при частотах, близких к частоте отсечки, т. е. при  $\kappa \Rightarrow 1/2 \sqrt{\varepsilon_1}$ , поведение функции  $R^{\lambda/4}(\kappa)$  связано с волноводными особенностями распространения колебаний. Наличие максимума функции  $R^{\lambda/4}(\kappa)$  при определенных  $\varepsilon_2$  связано с тем, что, с одной стороны, при  $\varepsilon_2 = \varepsilon_1$   $R^{\lambda/4} = (\omega_3 - \omega_1)/(\omega_3 + \omega_1)$ , которая равна 1 при  $\kappa = 1/2 \sqrt{\varepsilon_1}$ , а с другой стороны, при любом  $\varepsilon_2 > \varepsilon_1$  предел функции  $R^{\lambda/4}(\kappa)$  при  $\kappa \Rightarrow 1/2 \sqrt{\varepsilon_1}$  равен  $-1$ . Таким образом, при малой разности  $(\varepsilon_2 - \varepsilon_1)$  коэффициент отражения  $R^{\lambda/4}(\kappa)$  вблизи точки отсечки резко меняется от  $-1$  до  $+1$ , а затем выходит на асимптотическое значение. Область значений  $\varepsilon_2$ , где проявляется волноводный эффект, определяется неравенством  $\varepsilon_1 < \varepsilon_2 < 2\varepsilon_1\varepsilon_3/(\varepsilon_1 + \varepsilon_3)$ .

Для исследования поведения максимумов коэффициента отражения, которые соответствуют толщине пластины  $d = \lambda_{g2}(2n - 1)/2$ , преобразуем выражение для коэффициента отражения (3.2.13) с учетом этой толщины пластины

$$R^{\lambda/2} = \frac{\omega_1 - \omega_3}{\omega_1 + \omega_3}. \quad (3.2.21)$$

Из последней формулы следует, что максимальное значение коэффициента отражения не зависит от постоянной распространения во второй среде, следовательно, и от диэлектрика пластины. Величина  $R^{\lambda/2}$  изменяется при  $\kappa \Rightarrow 1/2 \sqrt{\varepsilon_1}$  от  $-1$ , а при  $\kappa \Rightarrow \infty$

$$R_{\infty}^{\lambda/2} = \frac{\sqrt{\varepsilon_1} - \sqrt{\varepsilon_3}}{\sqrt{\varepsilon_1} + \sqrt{\varepsilon_3}}. \quad (3.2.22)$$

Зависимость  $R^{\lambda/2}(\kappa)$  приведена на рис. 52 для зафиксированных значений  $\varepsilon_1 = 1$  и  $\varepsilon_3 = 74$ , для которых  $R_{\infty}^{\lambda/2} = -0,7917$ .

Зависимости  $R^{\lambda/4}(\kappa)$  и  $R^{\lambda/2}(\kappa)$  при толщинах пластины, обеспечивающих минимальное и максимальное значения коэффициента отражения соответственно, являются огибающими кривыми, про-

веденными через точки минимумов и максимумов частотных зависимостей коэффициента отражения при фиксированных значениях толщины пластины, которые были представлены на рис. 50. Следует отметить, что последние зависимости были рассчитаны по выражению (3.2.13) с учетом поглощения во второй и третьей средах, благодаря чему коэффициент отражения в нуль не обращается, однако частота  $\kappa$ , при которой при отсутствии потерь полное прохождение энергии является той частотой, при которой достигается наименьшее значение модуля коэффициента отражения.

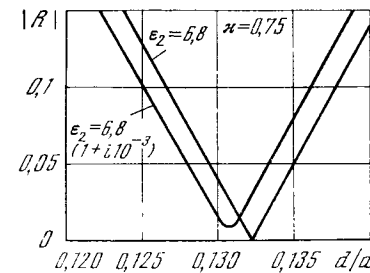
В таблице показано, как влияет учет поглощения во второй и третьих средах на величину модуля коэффициента отражения. Для фиксированных значений частоты  $\kappa$  был рассчитан модуль коэффициента отражения по формуле (3.2.13) для толщины пластины  $d/a = 0,132$ , соответствующей точке наилучшего согласования для диэлектрика с  $\epsilon_2 = 6,8$ , причем

$$|\bar{R}| \text{ соответствует } \epsilon_1 = 1; \epsilon_2 = 6,8; \epsilon_3 = 74;$$

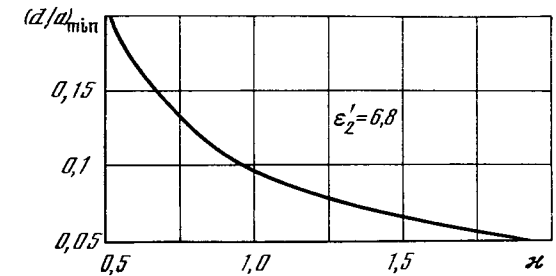
$$|R| \text{ соответствует } \epsilon_1 = 1; \epsilon_2 = 6,8(1 + i10^{-3}); \epsilon_3 = 74(1 + i0,11).$$

Как и ожидалось, влияние потерь на величину модуля коэффициента отражения весьма мало, что соответствует интерференционной картине полей, которая мало меняется при наличии поглощения.

Отметим, что при наличии потерь во второй и третьих средах условия наилучшего согласования имеют более сложный вид. Достаточным условием согласования является требование обращения в нуль мнимой части коэффициента отражения. При этом толщина диэлектрической пластины, при которой достигается наилучшее согласование, близка к  $\lambda_{g2}/4$ . Проведенные расчеты для диэлектрика с  $\epsilon_2 = 6,8$  с учетом потерь во второй и третьей средах показали, что минимальное значение модуля коэффициента отражения  $|R_{\min}| = 0,008$  достигается при  $\kappa = 0,75$  для толщины пластины, равной  $d/a = 0,1308$ , что составляет  $\sim 1\%$  уменьшения значения толщины пластины при расчетах без потерь, когда имеется полное прохождение энергии  $|R| = 0$  при той же частоте  $\kappa = 0,75$  при толщине пластины  $d/a = 0,1322$ , что показывает рис. 53. Это незначительное уменьшение толщины пластины, при которой достигается минимум коэффициента отражения, наблюдается не только в точке наилучшего согласования, но и для других значений толщины, когда имеем минимум модуля коэффициента отражения. В таблице для диэлектрика  $\epsilon_2 = 6,8$  представлены результаты расчетов значений толщины  $d/a$ , при которой при фиксированных значениях частоты  $\kappa$  достигается минимум модуля коэффициента отражения без учета потерь и с учетом потерь во второй и третьей средах. В последней графе таблицы приведены значения модуля коэффициента отражения в случае расчетов с учетом потерь (коэффициент отражения



Р и с. 53. Модуль коэффициента отражения в зависимости от  $d/a$



Р и с. 54. Значения толщины диэлектрической пластины, обеспечивающей минимум модуля коэффициента отражения

в среде без потерь равен 0). Сопоставление второй и третьей графы таблицы показывает, как уменьшается толщина пластины при расчетах с учетом потерь во второй и третьей средах.

Таким образом, расчетная зависимость значения толщины диэлектрической пластины, при которой имеет место минимум модуля коэффициента отражения  $(d/a)_{\min} = f(\kappa)$ , представленная на рис. 54 для диэлектрика  $\epsilon_2 = 6,8$ , с графической точностью рис. 54 совпадает при расчетах с учетом потерь и без учета потерь во второй и третьей средах.

Заметим, что результаты расчета фазы коэффициента отражения носят однолинейный характер и представлены на рис. 55 для рассматриваемой модели нагрузки, когда  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 6,8(1 + i10^{-3})$  и  $\epsilon_3 = 74(1 + i0,11)$  для толщины  $d/a = 0,1$  и  $0,125$ . При частоте  $\kappa$ , при которой имеет место минимум модуля коэффициента отражения, фаза резко меняется.

3.2.3. Распределение поля в диэлектрической пластине и в поглощающей жидкости имеет важное значение. Рассмотрим случай, когда нагрузка является согласованной и поток отраженной энергии мал. Через  $W_0$  обозначим поток энергии, переносимой падающей волной через любое поперечное сечение волновода. Для заданной падающей волны  $H_{10}$  (3.2.3)

$$W_0 = \operatorname{Re} \int_0^a \int_0^b \frac{1}{2} [\mathbf{E} \mathbf{H}^*] \cdot \mathbf{n} \, dx \, dy = |\mathcal{E}|^2 \frac{ab}{4} \frac{h_{(1)}}{\omega \mu_0}. \quad (3.2.23)$$

Получим интегральную форму закона сохранения энергии. Применим вторую формулу Грина к решению задачи  $E_y$  в области  $V$ , ограниченной боковой поверхностью волновода и его поперечными сечениями  $S_1$  и  $S_2$ , включающими диэлектрическую пластину:

$$\int_V (E_y^* \Delta E_y - E_y \Delta E_y^*) \, dV = \int_{S_1 + S_2} \left( \frac{\partial E_y}{\partial n} E_y^* - \frac{\partial E_y^*}{\partial n} E_y \right) \, dS. \quad (3.2.24)$$

Учитывая (3.2.5) для преобразования левой части выражения (3.2.24) и вычисляя интегралы в правой части (3.2.24), после подстановки соответствующих значений поля в сечении (3.2.7) и в сечении  $z < 0$  (3.2.9) получим

$$W_0 = |\mathcal{E}|^2 \frac{ab}{4} \frac{h(1)}{\omega \mu_0} |R_1|^2 + |\mathcal{E}|^2 \frac{ab}{4} \frac{\operatorname{Re} h(3)}{\omega \mu_0} |T_z^-|^2 + \frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^d \operatorname{Im} \epsilon_2 |E_y|^2 dx dy dz + \frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^{\bar{z}} \operatorname{Im} \epsilon_3 |E_y|^2 dx dy dz, \quad (3.2.25)$$

где  $T_z^- = T e^{-\gamma \bar{z}(\bar{z}-d)}$ .

Поскольку рассматриваем нагрузку в режиме согласования, а потерями в диэлектрической пластине можно пренебречь ( $\epsilon_2 < 0,01$ ), следовательно, весь поток энергии, переносимый падающей волной, поступает через сечение  $z = d$ , где при  $z > d$  благодаря большим потерям в калориметрической жидкости ( $\epsilon_3 > 8$ ) и происходит поглощение энергии, т. е. превращение ее в тепловую:

$$0,99W_0 = \frac{\omega \epsilon_0}{2} \int_0^a \int_0^b \int_0^{\bar{z}} \operatorname{Im} \epsilon_3 |E_y|^2 dx dy dz. \quad (3.2.26)$$

Определим значение  $\bar{z}$ , при котором происходит практически полное поглощение энергии, т. е. выберем  $\bar{z}$  таким образом, чтобы 99% энергии превращалось в тепловую. Значение поля в тре-

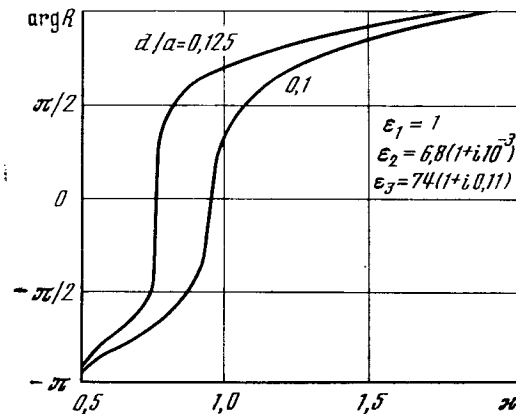


Рис. 55. Фазочастотная характеристика перехода при  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 6,8(1 + i 10^{-3})$ ,  $\epsilon_3 = 74(1 + i 0,11)$  для разных значений параметра  $d/a$

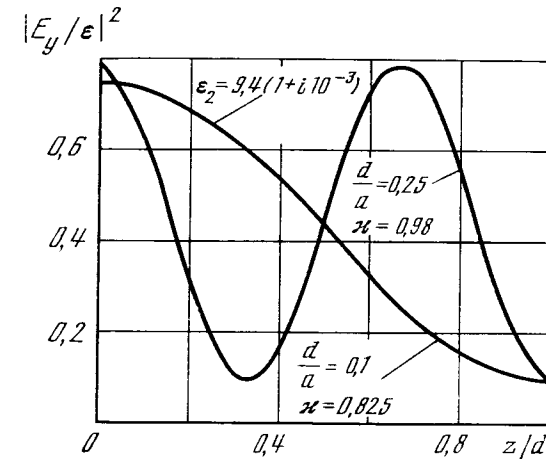


Рис. 56. Распределение модуля напряженности электрического поля в диэлектрической пластине (окне)

твой среде  $E_y^{\text{III}}$  определено выражением (3.2.9), а значение коэффициента прохождения  $T$  — (3.2.14); после подстановки их в (3.2.26) получим

$$\frac{\bar{z}}{a} = \frac{1}{2 \operatorname{Re} p_3''} \ln \left( \frac{\sqrt{x^2 - 1/4} \operatorname{Re} p_3'' 0,99}{\pi x^2 \operatorname{Im} \epsilon_3 |T|^2} - 1 \right). \quad (3.2.27)$$

Для определения  $|T|^2$  представляет интерес проследить за изменением распределения квадрата модуля напряженности электрического поля внутри диэлектрической пластины, ибо именно эта величина определяет плотность диэлектрических потерь в диэлектрической пластине. Перепишем формулу (3.2.8) так:

$$\left| \frac{E}{\mathcal{E}} \right|^2 = |A e^{-\gamma z} + B e^{\gamma z}| \sin^2 \frac{\pi}{a} x. \quad (3.2.28)$$

Так как величина  $|E/\mathcal{E}|^2$  пропорциональна  $\sin^2(\pi x/a)$ , то удобно иметь зависимость этой величины по толщине пластины в точке  $x = a/2$ . Последние зависимости представлены на рис. 56.

Значение  $|E/\mathcal{E}|^2$  в точке  $z = d$  дает величину  $|T|^2$ , которая входит в выражение (3.2.27). Эта формула определяет эффективную толщину поглотителя  $\bar{z}$ , на которой выделяется почти вся энергия. Значения  $\bar{z}/\lambda$  для используемой технической воды, для которой  $\epsilon_3 = 74(1 + i 0,11)$ , приведены в таблице ( $\epsilon_2 = 6,8(1 + i 0,001)$ ). Отсюда следует, что для рассматриваемой модели нагрузки с поперечной диэлектрической пластиной практически полное поглощение энергии происходит на толщине столба воды, равной половине длины волны падающего поля.

### § 3.3

#### Пологая диэлектрическая вставка в прямоугольном волноводе

3.3.1. Метод поперечных сечений применительно к регулярному по координате  $z$  прямолинейному волноводу с идеально проводящими стенками и с неоднородными  $\epsilon = \epsilon(\mathbf{r})$  и  $\mu = \mu(\mathbf{r})$ , являющимися непрерывными функциями всех трех координат  $\mathbf{r} \equiv (x, y, z)$ , приводит к следующей системе линейных обыкновенных дифференциальных уравнений первого порядка относительно амплитуды  $j$ -й собственной волны  $P_j(z)$  в данном сечении  $z$ :

$$\frac{dP_j}{dz} + ih_j P_j = \sum_{\nu=-\infty}^{\infty} S_{j\nu} P_\nu. \quad (3.3.1)$$

Здесь  $h_j(z)$  — продольное волновое число регулярного волновода уравнения. Коэффициенты связи  $S_{j\nu}$  суть

$$\begin{aligned} S_{j\nu} &= \frac{1}{2n_j(h_j - h_\nu)} \int \left( \frac{\partial \epsilon}{\partial z} \mathbf{E}^{-j} \mathbf{E}^\nu - \frac{\partial \mu}{\partial z} \mathbf{H}^{-j} \mathbf{H}^\nu \right) ds = \\ &= \frac{1}{2h_j(h_j - h_\nu)} \int \left[ \frac{\partial \epsilon}{\partial z} (E_x^j E_x^\nu + E_y^j E_y^\nu - E_z^j E_z^\nu) + \right. \\ &\quad \left. + \frac{\partial \mu}{\partial z} (H_x^j H_x^\nu + H_y^j H_y^\nu - H_z^j H_z^\nu) \right] ds. \end{aligned} \quad (3.3.2)$$

Если волновод сравнения кусочно-однороден, т. е. речь идет о пологих переходах, типа показанных на рис. 12, для коэффициентов связи следует использовать другую форму. Вот она:

$$\begin{aligned} S_{j\nu} &= \frac{1}{2n_j(h_j - h_\nu)} \oint \sigma(s) \left[ (\epsilon - 1) (E_s^j E_s^\nu - E_z^j E_z^\nu) - \right. \\ &\quad - \left( \frac{1}{\epsilon} - 1 \right) E_n^j E_n^\nu + (\mu - 1) (H_s^j H_s^\nu - H_z^j H_z^\nu) - \\ &\quad \left. - \left( \frac{1}{\mu} - 1 \right) H_n^j H_n^\nu \right] ds. \end{aligned} \quad (3.3.3)$$

Здесь функция  $\sigma(s)$  есть тангенс угла наклона касательной к границе раздела, перпендикулярной к контуру поперечного сечения  $s$  по отношению к продольной оси  $z$ .

Таким образом, для определения коэффициента связи по формуле (3.3.3) необходимо знать поля собственных волн на границе раздела в регулярном волноводе сравнения (§ 3.1) и функцию  $\sigma(s)$ , характеризующую отклонение реального волновода в данном поперечном сечении от регулярного волновода. Естественно, что для регулярного волновода  $\sigma \equiv 0$  и, стало быть, коэффициенты связи  $S_{j\nu}$  также равны нулю.

Отметим здесь одно важное обстоятельство, на которое мы уже обращали внимание в § 1.3—1.5, когда речь шла о борновских

или им подобных приближениях. А именно, формулой (3.3.3) особенно удобно пользоваться, когда  $\epsilon - 1 \ll 1$  и  $\mu - 1 \ll 1$ . В этом случае подстановка в (3.3.3) полей в незаполненном волноводе сразу позволяет получить первые члены разложения коэффициентов связи  $S_{j\nu}$  по степеням малых параметров  $\epsilon - 1$  и  $\mu - 1$ .

3.3.2. Рассмотрим согласование заполненного и пустого волновода с помощью пологого прозрачного клина. Регулярный прямоугольный волновод  $z \in (-\infty, \infty)$  при  $z \geq L$  полностью заполнен однородным диэлектриком ( $\epsilon > 1, \mu = 1$ ). Для согласования пустой ( $z < 0$ ) и заполненной ( $z \geq L$ ) частей волновода между ними включается полая диэлектрическая вставка ( $z \in [0, L]$ ), у которой тангенс угла наклона профиля к оси волновода есть малая величина  $\vartheta(z)$ . Слева на переход падает волна  $H_{10}$ . Размеры волновода подобраны таким образом, что в обеих его частях имеет место основной вид колебаний.

Общее выражение для коэффициента отражения в виде

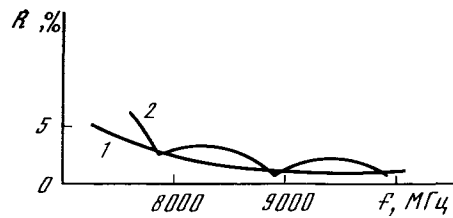
$$R = \int_0^L S_{i,-i} \exp \left\{ -i2 \int_0^z h^i(z) dz \right\} dz \quad (3.3.4)$$

следует из метода поперечных сечений [157]. Здесь  $S_{i,-i}(z)$  — коэффициент связи между прямой ( $i$ ) и обратной ( $-i$ ) волнами (3.3.3);  $h^i(z)$  — постоянная распространения волны номера  $i$ . Формула (3.3.4) позволяет в ряде случаев достаточно просто определить  $R$ . Подобного рода расчеты применительно к различным согласующим вставкам для волны  $H_{01}$  в круглом волноводе содержатся в [157]. Ниже мы коротко коснемся этих результатов.

Нахождение коэффициента отражения по (3.3.4) сводится, таким образом, к определению  $S_{i,-i}$  и  $h^i$  в различных конкретных случаях. При этом вычисление  $R$  для известной формы перехода  $\vartheta(z)$  или заданного закона изменения  $h^i(z)$  составляет задачу анализа согласующих диэлектрических вставок. Нахождение оптимальной формы перехода с целью получения минимального отражения в возможно более широком диапазоне частот — есть задача синтеза. Ниже решается первая задача.

По отношению к электрическому вектору  $\mathbf{E}$  падающей волны диэлектрическая вставка в волноводе может быть ориентирована двояким способом: 1) в каждом поперечном сечении перехода  $z \in [0, L]$  граница раздела диэлектрик—воздух нормальна вектору  $\mathbf{E}$  (рис. 12, а); 2) граница раздела параллельна  $\mathbf{E}$  (рис. 12, б).

3.3.3. Диэлектрик расположен у широкой стенки (рис. 15, а). В этом случае коэффициент связи на концах перехода (при  $z = 0$  и  $z = L$ ) скачком принимает нулевые значения и вычисление коэффициента отражения может быть произведено интегрированием (3.3.4) по частям. Для  $R$  получается аналитическое двучлен-



Р и с. 57. Частотные характеристики переходов с поперечными сечениями по схемам рис. 15, а (кривая 1) и рис. 15, б (кривая 2)

ное соотношение вида [157]

$$R = \mp i \left( \frac{S_{i,-i}}{2h^i} \right)_{z=0} \pm i \left( \frac{S_{i,-i}}{2h^i} \right)_{z=L} \exp \left\{ -i2 \int_0^L h^i dz \right\}. \quad (3.3.5)$$

В формулу (3.3.5) следует подставлять поля регулярного волновода: пустого (при  $z = 0$ ) и полностью заполненного диэлектриком (при  $z = L$ ) с проницаемостью  $\epsilon$ .

Коэффициент связи определяется формулой (3.3.3)

$$S_{i,-i} = \frac{1}{4(h^i)^2} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon} \oint \vartheta E_y^2 ds.$$

Постоянная распространения  $h^i$  при  $z = 0$  определяется соотношением  $h_0^2 = k^2 - g^2$ , а при  $z = L$ :  $h_e^2 = k^2 \epsilon - g^2$ ,  $g = \pi/a$ . Здесь  $y$  — составляющая электрического поля, равная  $E_y^i = A \sin gx$ , где амплитуда  $A$  определяется из условия нормировки  $\int E_x^i H_x^i dS = kh^i$ .

Однако, как показывает расчет, коэффициент при экспоненте в (3.3.5), пропорциональный  $h_e^{-2}$ , оказывается при выбранных ниже значениях параметров ( $a$ ,  $b$ ,  $\epsilon$ ) значительно меньше первого члена, и при написании конечного результата его можно опустить. Учитывая сказанное, после несложных выкладок получим для модуля коэффициента отражения следующее простое выражение:

$$|R| = \frac{\vartheta}{8b} \frac{h^2}{h_0^3} \frac{\epsilon - 1}{\epsilon}. \quad (3.3.6)$$

Частотная характеристика клинообразного ( $L = 100$  мм) полистиролового ( $\epsilon = 2,55$ ) перехода, рассчитанная по (3.3.6), представлена кривой 1 на рис. 57. Интерференционной картины «биений», какая обычно имеет место в металлических переходах, не получилось. Это объясняется тем обстоятельством, что основным источником отражения является излом образующей в начале перехода, а вклад в отражение от остальной части перехода незначителен.

3.3.4. Диэлектрик расположен у узкой стенки (рис. 15, б). На практике применяются также переходы типа рис. 12, б—г.

Поле регулярного волновода с частичным заполнением его диэлектриком в виде плоскопараллельного слоя, прилегающего к узкой стенке (либо находящимся где-то между узкими стенками), содержит только волны типа  $H_{n0}$  (см., например, [375, 385]). Однако несмотря на то, что в этом случае электромагнитное поле проще, чем в случае рис. 15, а (присутствуют только волны типа  $H_{n0}$ ), переход рис. 15, б в электрическом отношении оказывается *сглаженным*. Поэтому в рассмотрении участвует интеграл по всей длине перехода. Используя известные выражения для составляющих поля (при этом электрическое поле имеет, очевидно, только одну-единственную составляющую  $E_y$ ) и проводя соответствующую их нормировку, запишем, учитывая (3.3.7), коэффициент отражения в виде

$$R = \frac{1 - \epsilon}{2} \times \int_0^L \frac{a'_1(z) \sin^2 g a_1 \exp \left\{ -i \int_0^z h^i(z) dz \right\} dz}{h^2 \left\{ a_1 - \frac{\sin g a_1}{2g} + \frac{\sin^2 g a_1}{\sin^2 g_e (a - a_1)} \left[ a - a_1 - \frac{\sin 2g_e (a - a_1)}{2g_e} \right] \right\}}, \quad (3.3.7)$$

где  $\tilde{h} = h/k$ ,  $a'_1(z) = \vartheta'(z)$ ; штрих у  $a_1(z)$  означает производную по  $z$ .

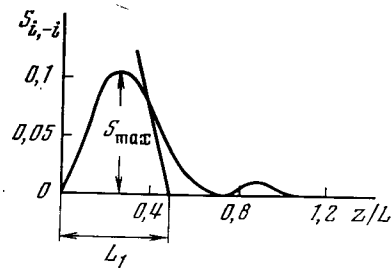
Выражение (3.3.7) решает поставленную задачу анализа согласующей вставки при заданной ее форме  $a'_1(z)$  или известном законе  $h(z)$  для волны  $H_{10}$  и сравнительно просто может быть решено для любого конкретного случая на электронной вычислительной машине.

Постоянная распространения  $h(z)$  в каждом поперечном сечении волновода со вставкой будет такой же, как и в регулярном волноводе, частично заполненном диэлектриком, если степень заполнения регулярного волновода и рассматриваемого поперечного сечения одинакова.

Известно несколько способов определения постоянной распространения в волноводах с частичным заполнением (см. § 3.1). Наиболее простым и широко распространенным является *метод шивания полей*, который сводит задачу определения  $h$  к решению трансцендентного уравнения. Известны *вариационные методы* [386] (в частности, метод Релея — Ритца), позволяющие получить аналитическое выражение для  $h = h(a_1)$ , причем, как показывает расчет, уже второе приближение дает практически полное совпадение с результатами строгого решения. В [387, 282] для некоторых случаев построена аналитическая форма  $h$ . Наконец, известны простые формулы, полученные методом эквивалентных схем в [375] (ср. § 3.1).

Не останавливаясь подробно на сравнительном анализе упомянутых выше способов определения  $h$ , отметим, что нет особой





Р и с. 58. Коэффициент связи  $S_{i,-i}$  для перехода с поперечным сечением по схеме рис. 15, б

необходимости решать сложные трансцендентные уравнения, получающиеся из строгого метода спливания полей, потому что результаты этого решения (обычно графического) по существу являются приближенными и, что самое неприятное, годными только для данного конкретного случая. В то же время, например, вариационный метод позволяет получить аналитическое выражение для  $h$ , а это всегда предпочтительнее, тем более, что при этом имеется возможность для оценки степени приближения\*.

Мы воспользуемся введенным в [375] понятием «эквивалентной» диэлектрической проницаемости. Для рассматриваемого нами случая (рис. 15, б)  $\epsilon_{\text{эkv}} = \epsilon + a_1(1 - \epsilon)/a$ , при этом необходимые для расчета величины  $h$ ,  $g$ ,  $g_\epsilon$  запишутся в виде

$$\begin{aligned} h &= k \left[ \epsilon + \frac{a_1}{a} (1 - \epsilon) - \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ g &= k \left[ (1 - \epsilon) \left( 1 - \frac{a_1}{a} \right) + \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 \right]^{1/2}, \\ g_\epsilon &= k \left[ \left( \frac{\lambda}{2a} \right)^2 - \frac{a_1}{a} (1 - \epsilon) \right]^{1/2}. \end{aligned} \quad (3.3.8)$$

Интеграл (3.3.7) при подстановке (3.3.8) в элементарных функциях не выражается, а непосредственное численное интегрирование затруднительно ввиду того, что подынтегральное выражение суть быстро осциллирующая знакопеременная на  $[0, L]$  функция. Поэтому при расчете необходимо предварительно подходящим образом аппроксимировать подынтегральное выражение, а затем уже производить интегрирование. При этом его естественно представить в виде двух сомножителей:

$$S_{i,-i}(z) \text{ и } \exp \{-i\varphi(z)\}.$$

\* Здесь следует отметить, что метод интегральных уравнений относительно поля на наклонной границе раздела диэлектрических сред § 1.2, равно как и метод квазилольного обращения оператора (§ 1.3), не требует, как мы увидим в дальнейшем (§ 3.5, 3.6), предварительного знания системы собственных функций частично заполненного волновода.

Согласно расчету, функция  $S_{i,-i}$  — положительная и имеет вид, показанный на рис. 58. Кривая имеет два разных по величине максимума: первый приблизительно при  $z = 0,3L$  и второй при  $z = 0,9L$ . На концах перехода ( $z = 0$ ,  $z = L$ ) коэффициент связи обращается в нуль, т. е. переход оказывается сглаженным, несмотря на геометрический излом образующей при  $z = 0$  и  $z = L$ , и формулу (3.3.6) нельзя упростить интегрированием по частям. Как видно из рис. 58, основной вклад в отражение вносит первый максимум, и, следовательно, при расчете вторым максимумом можно пренебречь.

Зависимость  $S_{i,-i} = S_{i,-i}(z)$  аппроксимировалась функцией  $S_{\text{max}} \sin(\pi z/L_1)$ , где  $L_1$  — расстояние от начала координат до точки пересечения касательной к  $S_{i,-i}$  в точке перегиба, т. е. по существу участок перехода, где происходит основное формирование отраженной волны. Функция  $\varphi(z)$  аппроксимировалась квадратным двучленом  $\alpha z^2 + \beta z$ , который дает высокую точность аппроксимации по отношению к точному значению  $\varphi(z)$ . Применение таких аппроксимаций  $S_{i,-i}$  и  $\varphi(z)$  свело задачу вычисления  $R$  к интегралам Френеля, которые, как известно, табулированы [388]. Опуская несложный, но громоздкий вывод, выпишем его результат

$$R = \frac{S_{\text{max}}}{2i\sqrt{a}} \{ \exp\{i\theta_1\} [C(u_1) - iS(u_1) - C(\xi_1) + iS(\xi_1)] - \exp\{i\theta_2\} [C(u_2) - iS(u_2) - C(\xi_2) + iS(\xi_2)] \}, \quad (3.3.9)$$

где

$$\begin{aligned} u_j &= \sqrt{a}L_1 + (\kappa_j/2\sqrt{a}), \quad \kappa_j = (2/\pi)[\beta \mp (\pi/L_1)]; \\ \xi_j &= \kappa_j/2\sqrt{a}; \quad \theta_j = \pi\kappa_j^2/8a, \quad j = 1, 2; \end{aligned}$$

$C(u_j; \xi_j)$ ,  $S(u_j; \xi_j)$  — интегралы Френеля. Результат расчета по (3.3.8) для клинообразной полистироловой вставки длины  $L = 100$  мм приведен на рис. 57 (кривая 2). Из рис. 57 виден интерференционный характер отраженной волны, что очевидно из простых физических рассуждений, так как в рассматриваемом случае волна формируется не в одной точке, как это имело место в первом случае, а в основном на первой половине перехода  $z \in (0, L_1)$ .

Поставленная задача решается формулами (3.3.7), (3.3.9). Как показывает расчет, коэффициент отражения в диапазоне частот в обоих рассмотренных случаях имеет один и тот же порядок величины (кривые 1 и 2 на рис. 57), и если не требуется высокая точность, то на практике следует пользоваться более простой формулой (3.3.6). Однако следует иметь в виду, что параметры малости  $\Phi$  в обоих случаях различны, т. е. хотя угол  $\Phi$  для сглаженного перехода больше, тем не менее коэффициент отражения того же порядка.

При практическом выполнении перехода рис. 15, б его длину можно уменьшить за счет того, что в отражении малую роль играет часть вставки при  $z > L_1$  и в этой части переход можно сделать более

крутым. Эти результаты были подтверждены также в работе [389].

Результаты, изложенные в настоящем параграфе, составили основу для анализа калориметрических нагрузок с диэлектрическими окнами [290, 291]. В случае малых углов наклона образующей эти результаты удовлетворительно согласуются с экспериментальными данными.

### § 3.4

#### Перекося границы раздела двух диэлектриков в волноводе

3.4.1. Диэлектрический слой в волноводе широко используется как модель в различных практических схемах (рис. 14, а—г). В частности, он находит применение при измерениях спектральных характеристик поглощения в диэлектриках волноводными методами. В предыдущем параграфе мы рассмотрели отражение волноводной волны от поперечной границы раздела двух диэлектрических однородных сред, полностью заполняющих поперечное сечение волновода. При этом был отмечен существенный момент в решении — при строго поперечной границе раздела в обеих частях волновода не возникает других типов волн, кроме типа падающей. Если граница раздела не строго поперечна оси волновода, то в принципе возможно преобразование волны падающей в волны других типов. Подробно мы этот вопрос разберем в следующем параграфе с использованием метода квазиполного обращения оператора.

Здесь мы отметим следующее обстоятельство. Даже если угол наклона границы раздела близок к вертикали (рис. 59), возникает опасность появления нежелательных резонансных явлений, когда малость упомянутого угла не является в целом малым параметром задачи. Пусть падающая волна  $i$  распространяется в одноволновом участке незаполненного диэлектриком волновода. Критическая длина волны в заполненном волноводе увеличивается в  $\sqrt{\epsilon}$  раз. Поэтому участок одноволнового волно-

вода при заполнении его диэлектриком может стать многоволновым, и таким образом падающая волна, преобразуясь на слабой нерегулярности типа наклонной границы, порождает на заполненном участке некоторое число распространяющихся высших типов волн. Это приводит к потерям на преобразование, но в силу малости угла наклона эти потери не могут быть большими (ср. § 3.5). Более существенным является другое обстоятельство — высшие типы волн могут резонировать между критическими сечениями (так как образец имеет конечную толщину вдоль оси  $z$  волновода), от которых они полностью отражаются\*.

Резонанс наступает, когда длина участка волновода с диэлектриком кратна  $n\Lambda_j/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ ;  $\Lambda_j$  — длина волны в волноводе волны высшего  $j$ -го типа. При этом коэффициент прохождения  $D$  волны рабочего типа (падающей волны) через слой равен

$$D = D_0 \left( \frac{\eta_j}{\eta_j + \zeta_j} \right)^2. \quad (3.4.1)$$

Здесь  $D_0$  — коэффициент прохождения в отсутствие резонанса;  $\eta_j$  — затухание  $j$ -й волны на резонирующем участке;  $\zeta_j$  — коэффициент возбуждения  $j$ -й волны. При написании формулы (3.4.1) учитывались условия

$$\eta_j \ll 1, \quad \zeta_j \ll 1. \quad (3.4.2)$$

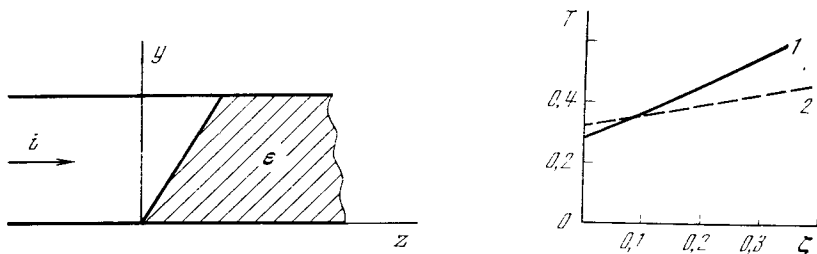
Если условия (3.4.2) не выполняются, то для определения  $D$  следует пользоваться графиками (см. указания, содержащиеся в работе [305]). В резонансной ситуации коэффициент  $D$  может значительно отличаться от  $D_0$ . Так, при  $\zeta_j = 0,04$  (−14 дБ) и  $\eta_j = 1$  дБ потери при резонансе увеличиваются на 1 дБ, т. е. удваиваются.

3.4.2. Определение коэффициента  $\zeta_j$  в общем случае представляет собой сложную электродинамическую задачу. Однако в случае перекося границы можно получить приближенное решение, воспользовавшись комбинацией формулы Грина и метода фазовой коррекции. Коэффициент преобразования падающей  $i$ -волны в  $j$ -волну другого типа в этом случае может быть представлен в виде следующего интеграла по всему объему диэлектрической клиновидной вставки в волноводе (см. также формулу (3.7.3)):

$$\zeta_{ij} = \frac{i(\epsilon - 1)}{2h_j} \int E^i E^j dV. \quad (3.4.3)$$

В принципе формула (3.4.3) является совершенно строгой, если в подынтегральном выражении точно известно поле в диэлект-

\* Недавно было обнаружено свойство отражения волноводных волн не только от сужающегося участка волновода, но и от расширяющегося участка его. Этот эффект реализуется на магнитных волнах типа  $H_{m1}$  и некоторых других магнитных же волнах коаксиального волновода, а также на магнитных волнах в крестообразном, П-, Ш-, Н- и других волноводах [496].



Р и с. 59. Перекося границы раздела двух однородных диэлектрических сред в прямоугольном волноводе

Р и с. 60. Коэффициент преобразования падающей волны  
1 — теория, 2 — эксперимент

рике  $E^j$ . Такого рода задачу мы будем рассматривать, например, в следующем параграфе для простой наклонной границы. Можно упростить задачу и попытаться построить решение  $\zeta_{ij}$ , воспользовавшись какими-либо физическими соображениями. Наиболее простой способ — борновское приближение (замена неизвестного поля во вставке полем падающей волны  $E^i$  в пустом волноводе) — здесь неприменим, так как на величину  $\epsilon$  не наложено никаких ограничений (например,  $\epsilon - 1 \ll 1$ ; ср. § 3.7). Мы воспользуемся следующим приемом: подставим в подынтегральное выражение поле падающей волны с учетом фазового набега волны вдоль прямых, параллельных продольной оси волновода, в призме, образованной скошенной границей диэлектрика и плоскостью идеально установленной границы диэлектрика. В квазиоптике такой подход широко используется и получил название метода фазовой коррекции. Полученная указанным способом формула для коэффициента возбуждения  $\zeta_{n0}$  волны  $H_{n0}$  на перекосе границы раздела на угол  $\psi$  имеет вид

$$\zeta_{20} = \vartheta^2 \frac{h_{n0}}{h_{10}} \frac{64 (ka)^2 (\epsilon - 1)^2}{\pi^4 (\epsilon^2 - 1)^4 [e - (n\pi/ka)^2]} \quad (3.4.4)$$

Здесь  $h_{n0}$  — постоянные распространения волн  $H_{n0}$ ,  $a$  — размер широкой стенки прямоугольного волновода. В работе [305] экспериментально исследовалось влияние резонанса на волне  $H_{20}$  на спектральные характеристики коэффициента прохождения через диэлектрик в волноводе сечением  $5,2 \times 2,6$  мм<sup>2</sup> на волнах 6—8 мм. В волновод помещались вставки из оргстекла ( $\epsilon \approx 2,6$ ) длиной 30 мм и углами перекоса 10 и 15°. Средние потери составляют около 4,5 дБ. Формула (3.4.4) дает величину того же порядка, т. е. потери при резонансе в обеих вставках могут отличаться на 0,5 дБ [305].

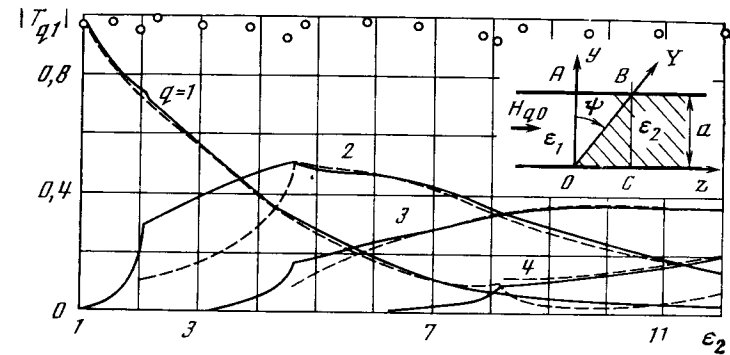
Разумеется, реализованный здесь подход и формула (3.4.4) являются приближенными и необходим более тщательный анализ, который бы дал возможность определить, в частности, степень точности полученной приближенной формулы.

### § 3.5

#### Дифракция

на наклонной границе раздела диэлектрических сред в прямоугольном волноводе

3.5.1. Метод квазиполного обращения (полуобращения) оператора, предложенный и развитый для металлических уголкового неоднородностей в работе [324], оказался весьма эффективным численным методом для исследования дифракции волноводных волн на наклонной границе раздела двух диэлектрических сред. В отличие от случаев, рассмотренных нами в § 3.3 и 3.4, когда в задаче можно было выделить малый параметр, метод квазиполного обращения имеет существенно более широкую область применения



Р и с. 61. Наклонная граница раздела двух однородных диэлектрических сред в прямоугольном волноводе;  $T_{q1}(\epsilon_2)$

и позволяет проводить численный расчет и анализ весьма сложных задач. Здесь, следуя за авторами работы [283], рассмотрим применение метода квазиполного обращения оператора к задаче дифракции на наклонной границе раздела двух диэлектрических сред в прямоугольном волноводе. В следующем параграфе (§ 3.6) мы обратимся к рассмотрению более сложной структуры — калориметрической нагрузки с диэлектрическим окном (ср. рис. 12, ж).

3.5.2. Бесконечные системы линейных алгебраических уравнений первого рода. Рассматриваемая структура изображена на рис. 61. Плоскость раздела двух сред с диэлектрическими проницаемостями  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  перпендикулярна широким стенкам и наклонена под углом  $(90^\circ - \psi)$  к оси волновода. Диэлектрики предполагаются однородными, стенки волновода — идеально проводящими, ширина волновода —  $a$ .

Пусть со стороны  $z = -\infty$  на неоднородность набегают  $H_{\rho 0}$ -волна единичной (по составляющей  $E_x$ ) амплитуды. Требуется определить амплитуды волн рассеянного поля. Функцию  $E_x(y, z)$  в регулярных участках волноводов запишем в виде

$$E_x^{(1)} = \sin \frac{n\pi}{a} y e^{i \frac{2\pi}{a} \zeta_{11} z} + \sum_{m=1}^{\infty} R_{mp} \sin \frac{m\pi}{a} y e^{-i \frac{2\pi}{a} \zeta_{m1} z}, \quad z \leq 0; \quad (3.5.1a)$$

$$E_x^{(2)} = \sum_{m=1}^{\infty} T_{mp} \sin \frac{m\pi}{a} y \exp \left\{ i \frac{2\pi}{a} \zeta_{m2} (z - a \operatorname{tg} \psi) \right\}, \quad z \geq a \operatorname{tg} \psi. \quad (3.5.1b)$$

Здесь  $\zeta_{mj} = \sqrt{\kappa^2 \epsilon_j - (m/2)^2}$ ,  $\kappa = a/\lambda$ ,  $j = 1, 2$ . Коэффициенты  $R_{mp}$ ,  $T_{mp}$  в разложениях полей представляют собой элементы  $p$ -го столбца матриц отражения и прохождения и подлежат определению.

Для сопряжения полей (3.5.1а) и (3.5.1б) воспользуемся второй формулой Грина (ср. [324]). В результате приходим к двум подсистемам линейных алгебраических уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\alpha_n}{\Gamma_{n1}^+ - \omega_{q1}} - \frac{\beta_n}{\Gamma_{n1}^- + \omega_{q1}} \right) = V_{p1}^- \delta_q^p, \quad q, p = 1, 2, \dots, \quad (3.5.2a)$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{v_{-n}}{\Gamma_{n2}^- + \omega_{q2}} - \frac{\eta_{-n}}{\Gamma_{n2}^+ - \omega_{q2}} \right) = 0, \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.5.2б)$$

Неизвестные этих подсистем выражаются через коэффициенты Фурье-разложений  $E_x$  — составляющей поля и ее нормальной производной в плоскости раздела двух сред

$$E_x|_{OB} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} b_n e^{i \frac{2\pi n}{l} Y}; \quad \frac{\partial E_x}{\partial n}|_{OB} = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{i \frac{2\pi n}{l} Y}, \quad Y \in [0, l]$$

следующим образом:

$$\begin{cases} \alpha_n \\ \beta_n \end{cases} = \frac{1}{2} \left( b_n \mp \frac{ilc_n}{2\pi\varphi_{n1}} \right); \quad \begin{cases} v_n \\ \eta_n \end{cases} = \frac{1}{2} \left( b_n \mp \frac{ilc_n}{2\pi\varphi_{n2}} \right). \quad (3.5.3)$$

Из (3.5.3) получаются два набора соотношений

$$\beta_n = t_n^{12} \eta_n + r_n^{12} \alpha_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (3.5.4)$$

$$v_n = t_n^{21} \alpha_n + r_n^{21} \eta_n, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (3.5.5)$$

которые совместно с (3.5.2) образуют бесконечную систему линейных алгебраических уравнений первого рода для определения неизвестных  $\alpha_n, \beta_n, v_n, \eta_n$ . Искомые элементы матрицы рассеяния можно найти, зная решение совместной системы, с помощью выражений, также получающихся после применения второй формулы Грина:

$$R_{qp} = - \frac{1}{V_{q1}^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{\alpha_n}{\Gamma_{n1}^+ + \omega_{q1}} - \frac{\beta_n}{\Gamma_{n1}^- - \omega_{q1}} \right), \quad q, p = 1, 2, \dots; \quad (3.5.6)$$

$$T_{qp} = - \frac{1}{V_{q2}^+} \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left( \frac{v_{-n}}{\Gamma_{n2}^- - \omega_{q2}} - \frac{\eta_{-n}}{\Gamma_{n2}^+ + \omega_{q2}} \right), \quad q, p = 1, 2, \dots \quad (3.5.7)$$

Выше введены обозначения  $l = a/\cos \psi$ ,  $\omega_{qi} = \zeta_{qi}/\cos \psi$ ,

$$\varphi_{nj} = \sqrt{(l/\lambda)^2 \varepsilon_j - n^2}, \quad \delta_q^p = \begin{cases} 1, & q = p; \\ 0, & q \neq p; \end{cases}$$

$$\Gamma_{nj}^{\pm} = \varphi_{nj} \cos \psi \pm n \sin \psi, \quad V_{qj}^{\pm} = \frac{4\pi\omega_{qj} \cos^2 \psi}{q [\exp \{i2\pi(q/2 \pm \omega_{qj} \sin \psi)\} - 1]},$$

$$r_n^{ij} = \frac{\varphi_{ni} - \varphi_{nj}}{\varphi_{ni} + \varphi_{nj}}, \quad t_n^{ij} = \frac{2\varphi_{nj}}{\varphi_{ni} + \varphi_{nj}}, \quad i, j = 1, 2.$$

Таким образом, метод квазиполного обращения привел нас к системам алгебраических уравнений (3.5.2). Однако прежде необходимо провести тщательный численный анализ бесконечной системы алгебраических уравнений первого рода. Дело в том, что полученная система уравнений (3.5.2) является некорректной и ее обращение поэтому невозможно. Некорректность проявляется в слабой обусловленности системы (3.5.2), а стало быть, метод редукции к ней непосредственно неприменим.

Системы подобного типа возникают и в других задачах об угловых неоднородностях [324]. Как показали специальные исследования [390], в применении к таким системам метод редукции дает последовательность результатов, не сходящихся к решению бесконечной системы. В силу этого найденное решение (3.5.2), (3.5.4) — (3.5.7) требует дополнительных преобразований, которые свели бы его к корректному и эффективному аппарату для анализа поставленной краевой задачи. Заслуга авторов работы [283] состоит в том, что такое исследование они провели с большой тщательностью. Последуем за ними.

3.5.3. *Получение корректного решения задачи.* Для регуляризации полученного решения воспользуемся одним из вариантов метода квазиполного обращения для анализа угловых неоднородностей в прямоугольных волноводах. Суть этого метода состоит в выделении и аналитическом обращении главной части матричного оператора первоначально получаемой системы уравнений первого рода.

Элементами главной части матричного оператора (3.5.2), медленно убывающими с ростом индекса, являются дроби с разностью в знаменателе  $\{A_j\}_{qn} = (\Gamma_{nj}^+ - \omega_{qj})^{-1}$ ,  $j = 1, 2$ . Если мы подействуем обратным оператором  $A^{-1}$  на  $j$ -е уравнение из (3.5.2), то придем к новой записи этих уравнений

$$\alpha_n = \alpha_n^{(1)} + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_{ns} \beta_s, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (3.5.8a)$$

$$\eta_n = \sum_{s=-\infty}^{\infty} \mu_{-n, -s} v_s, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (3.5.8б)$$

где  $\alpha_n^{(1)} = \{A_1^{(-1)}\}_{nq} V_{q1}^- \delta_q^p$  удовлетворяет системе уравнений

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\alpha_n^{(1)}}{\Gamma_{n1}^+ - \omega_{q1}} = V_{q1}^- \delta_q^p, \quad q = 1, 2, \dots \quad (3.5.9)$$

Величины  $\gamma_{ns}$  и  $\mu_{ns}$  определяются из решения систем, возникающих в результате воздействия  $A_j^{-1}$  на часть матричного оператора (3.5.2) с элементами  $(\Gamma_{nj}^- + \omega_{qj})^{-1}$ . В частности, для  $\gamma_{ns}$  имеем

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \frac{\gamma_{ns}}{\Gamma_{n1}^+ - \omega_{q1}} = \frac{1}{\Gamma_{s1}^- + \omega_{q1}}, \quad q = 1, 2, \dots, s = 0, \pm 1, \dots \quad (3.5.10)$$

Решения систем (3.5.9), (3.5.10) можно найти в аналитической форме с помощью функционально-теоретического метода подсчета вычетов [176, 391]. Для этого необходимо построить мероморфные функции, распределение нулей и полюсов у которых определяется исходя из вида матричных элементов систем (3.5.9) (3.5.10) и их правых частей. Например, если для некоторой функции  $f_p^{(1)}(w)$  задать нули в точках  $w = \omega_{q1}$ ,  $q = 1, 2, \dots$ ,  $q \neq p$ , полюса при  $w = \Gamma_{n1}^+$ ,  $n = 0, \pm 1, \dots$ , и такое убывание на бесконечности, что

$$\oint_{C_R} \frac{f_p^{(1)}(w)}{w - \omega_{q1}} dw \underset{R \rightarrow \infty}{\Rightarrow} 0, \quad (3.5.11)$$

то, используя теорему Коши о вычетах, можно установить  $\alpha_n^{(1)} = \text{Res } f_p^{(1)}(w) |_{w=\Gamma_{n1}^+}$  при условии  $f_p^{(1)}(\omega_{p1}) = -V_{p1}^-$ . В формуле (3.5.11) контур интегрирования представляет собой окружность  $C_R$  радиуса  $R$ , проходящей между двумя соседними полюсами.

Через вычеты других функций определяются явные решения системы (3.5.10) и аналогично для величины  $\mu_{ns}$ :

$$\gamma_{ns} = \text{Res } f_s^{(2)}(w) |_{w=\Gamma_{n1}^+}, \quad \mu_{ns} = \text{Res } f_s^{(3)}(w) |_{w=\Gamma_{n2}^+}.$$

Введенные здесь функции комплексного переменного имеют вид бесконечных произведений, выражения для которых подобны приведенным в [324].

Рассматривая интегралы типа (3.5.11), но с суммой в знаменателе подынтегрального выражения, можно установить соотношения, позволяющие перейти от (3.5.6), (3.5.7) к новым представлениям для элементов матрицы рассеяния:

$$R_{qp} = \frac{1}{V_{q1}^+} \left[ f_p^{(1)}(-\omega_{q1}) + \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^{(2)}(-\omega_{q1}) \beta_s \right], \quad (3.5.12)$$

$$T_{qp} = \frac{1}{V_{q2}^+} \sum_{s=-\infty}^{\infty} f_s^{(3)}(-\omega_{q2}) v_s. \quad (3.5.13)$$

В принципе искомые коэффициенты  $R_{qp}$  и  $T_{qp}$  уже можно определить, зная решение системы второго рода, состоящей из урав-

нений (3.5.8), (3.5.4) и (3.5.5). Однако ввиду громоздкости совместной системы нерационально использовать непосредственно ее для численных расчетов. Простое исключение неизвестных привело бы к понижению порядка решаемой системы, но матричные элементы оказались бы весьма сложными. Поэтому результат частичного обращения оператора исходной системы уравнений первого рода следует рассматривать лишь как промежуточный этап; для получения оптимального алгоритма необходимо произвести еще ряд эквивалентных преобразований.

Вначале рассмотрим пару уравнений (3.5.8а) и (3.5.4). Полагая в одном случае  $\eta_n = 0$ , а в другом  $\alpha_n^{(1)} = 0$ , перепишем эти уравнения в виде

$$\alpha_n = x_n + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_{ns} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \Phi_{st} \eta_t, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (3.5.14)$$

$$\beta_n = r_n^{12} x_n + \sum_{s=-\infty}^{\infty} \Phi_{ns} \eta_s, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (3.5.15)$$

где  $x_n$  и  $\Phi_{ns}$  определяются соответственно из систем уравнения второго рода

$$x_n - \sum_{s=-\infty}^{\infty} \gamma_{ns} r_s^{12} x_s = \alpha_n^{(1)}, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (3.5.16)$$

$$\Phi_{ns} - r_n^{12} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma_{nt} \Phi_{ts} = t_n^{12} \delta_n^s, \quad n, s = 0, \pm 1, \dots \quad (3.5.17)$$

Подстановка (3.5.14) и (3.5.8б) в (3.5.5) приводит еще к одной системе уравнений второго рода

$$v_n - \sum_{t=-\infty}^{\infty} \left( \sum_{s=-\infty}^{\infty} D_{ns} \mu_{-s, -t} \right) = t_n^{21} x_t, \quad n = 0, \pm 1, \dots, \quad (3.5.18)$$

где

$$D_{ns} = r_n^{21} \delta_n^s + t_n^{21} \sum_{t=-\infty}^{\infty} \gamma_{nt} \Phi_{ts}, \quad n, s = 0, \pm 1, \dots$$

Матричные операторы систем уравнений (3.5.16) — (3.5.18) являются ограниченными в пространстве числовых последовательностей  $l_1$ , а сами системы разрешимы в нем единственным образом. Отсюда в достаточно общей форме можно обосновать применение метода редукции. Соответствующие асимптотические оценки показывают принадлежность элементов матрицы рассеяния классу числовых последовательностей, удовлетворяющих условию конечности энергии в любом ограниченном объеме. Таким образом, полученное решение задачи удовлетворяет всем условиям исходной краевой задачи и пригодно для анализа свойств рассеянных полей при произвольных параметрах исследуемой неоднородности.

3.5.4. *Характеристики численного алгоритма. Сравнение с данными, полученными другими методами.* Основой для построе-

ния численного алгоритма послужило строгое решение задачи в виде (3.5.16)—(3.5.18), (3.5.12), (3.5.13). Последовательное решение трех систем уравнений вместо одной совместной (3.5.18), (3.5.4), (3.5.3) является более выгодным, так как при больших порядках усечения значительно сокращаются затраты машинного времени и, кроме того, появляется возможность рационально использовать оперативную память ЭВМ. С другой стороны, такая организация алгоритма удобна с точки зрения включения его в комплекс алгоритмов машинного проектирования неоднородностей в прямоугольных волноводах и интегральных схемах СВЧ [174].

На каждом шаге изменения какого-либо параметра производится расчет всей матрицы рассеяния, включающей по две матрицы отражения и прохождения, которые соответствуют падению волн со стороны областей с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$ . Численное исследование скорости сходимости метода усечения в применении к системам (3.5.16) — (3.5.18) показывает, что она довольно высока. Установлено, что при выборе порядка усечения, равным  $N = \text{entier} (2\kappa \sqrt{\epsilon_{\max}} / \cos \psi) + m$ ,  $\epsilon_{\max} = \max(\epsilon_1, \epsilon_2)$ , погрешность в получении результатов будет не выше 1%, если положить  $m = 3 \div 5$ . При этом закон сохранения энергии и соотношения взаимности выполняются с точностью до  $10^{-5} - 10^{-6}$  при  $\psi \in (0, 80^\circ)$ ,  $\kappa \in (\kappa \sqrt{\epsilon_{1,2}}, 5 \div 6)$ . Время счета одного варианта в одноволновом диапазоне и  $\psi \leq 60^\circ$  не превышает 15–20 с\*, а для расчета полной матрицы рассеяния, соответствующей 10 распространяющимся и 2–3 нераспространяющимся волнам, требуется до 90 с машинного времени. Описанные здесь характеристики численного алгоритма свидетельствуют о его значительных преимуществах в сравнении с известными [279, 392].

Несомненный интерес представляет сопоставление результатов строгих расчетов с данными, полученными другими методами. Это позволяет получить дополнительную информацию о возможностях построенного алгоритма, а также установить границы применимости приближенных методов.

Аналогичная задача исследовалась численно с использованием различных вариантов метода моментов в работах [279, 392]. В [392] представлены зависимости амплитуд волн рассеянных полей от величины диэлектрической проницаемости  $\epsilon_2$  при  $\epsilon_1 = 1$  для различных значений  $\kappa$  и  $\psi$ . Сопоставление данных [292] и расчетов [392] показывает удовлетворительное совпадение результатов для коэффициентов отражения  $|R_{11}|$  и для коэффициента преобразования  $|T_{q1}|$  падающей  $H_{10}$ -волны в  $H_{q0}$ -волны прошедшего поля, если угол  $\psi$  невелик. На рис. 62 приведены зависимости  $|T_{q1}|$  от величины  $\epsilon_2$ . Там же нанесены данные, заимствованные из [392]: пунктиром — кривые для  $|T_{q1}|$ . Ощутимое

\* На ЭВМ «М-222».

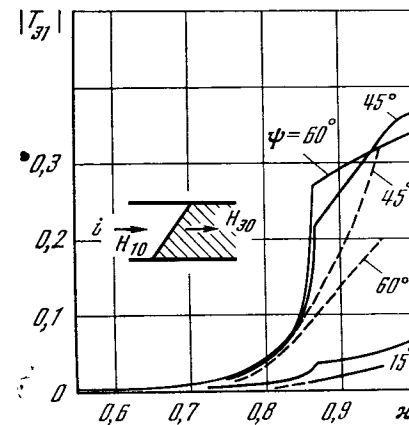


Рис. 62. Частотная зависимость коэффициента преобразования волн  $H_{10} \rightarrow H_{30}$

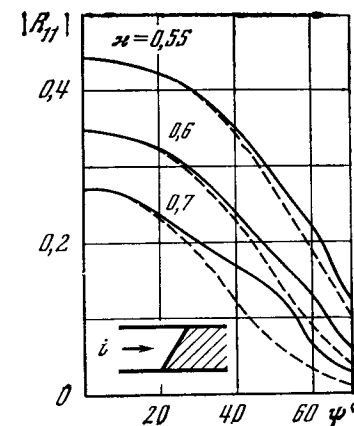


Рис. 63. Зависимость коэффициента отражения основной волны  $H_{10}$  в прямоугольном волноводе от угла наклона границы раздела двух сред

отличие в поведении кривых наблюдается вблизи точек появления новых распространяющихся волн; здесь же по [392] заметно ухудшается баланс активных мощностей. Столь значительному различию для  $|T_{21}|$  в диапазоне  $\epsilon_2 \in (2; 4, 6)$  трудно дать какое-либо объяснение, поскольку сами результаты [392] находятся в явном противоречии: с одной стороны, при таких значениях из [392] дефицит энергии должен достигать здесь 20–30%, а с другой, — как следует из [392], он в указанном диапазоне не превосходит 8%.

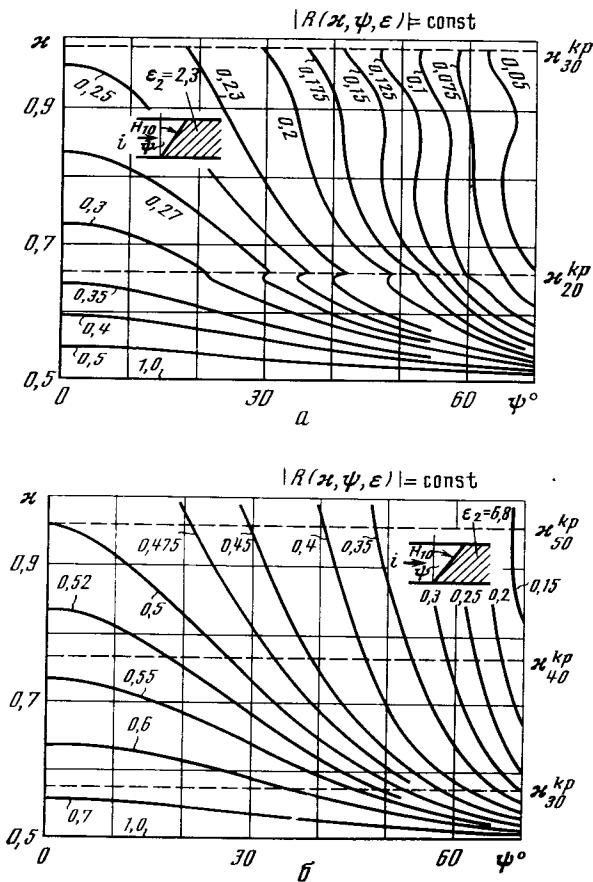
В работе [279] рассчитаны зависимости  $|R_{11}(\kappa)|$  и  $|T_{q1}(\kappa)|$  для ряда значений  $\psi$  и  $\epsilon_2$ , когда  $0,5 < \kappa < 0,95$ . При сравнении со строгими расчетами установлено, что точность результатов [279] быстро уменьшается с ростом  $\psi$  и  $\epsilon_2$ , что особенно заметно для величин  $|T_{q1}|$  с  $q > 1$ , соответствующих высшим типам волн. Для примера представлен рис. 62, где пунктиром проведены кривые, взятые из [279]. Показательно, что при переходе через точку  $\kappa \approx 0,866$ , критическую для  $H_{30}$ -волны, пунктирные кривые не испытывают скачков, а изменяются очень плавно.

В работе [282] предложен некоторый способ расчета коэффициента отражения от диэлектрического клина, основанный на численном решении дифференциальных уравнений, пригодных в частном случае, когда в областях с  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  может распространяться лишь одна  $H_{10}$ -волна. Из анализа зависимостей  $|R_{11}(\psi)|$ , изображенных на рис. 63 (пунктирные кривые из [282]), можно сделать более конкретный вывод: метод [282] удовлетворительно «работает» только при  $\psi \in (0, 20^\circ)$ , т. е. там, где имеет место квадратичный закон убывания коэффициента отражения с ростом

угла  $\psi$  (см. (3.5.19)) при указанных ограничениях на длину волны. Таким образом, подход, развитый в [282], не дает ничего нового по сравнению с процедурой поперечных сечений (см. § 3.3).

3.5.5. Анализ результатов численных расчетов. При согласовании двух сред в волноводе с помощью скоса границы их раздела желательно знать полную информацию о степени влияния различных параметров на величину коэффициента отражения.

На рис. 64, а, б в координатах  $\kappa, \psi$  представлены линии равных значений коэффициента отражения при падении на границу раздела  $H_{10}$ -волны со стороны  $\epsilon_1 = 1$ ; в первом случае  $\epsilon_2 = 2,3$  (полиэтилен), во втором —  $\epsilon_2 = 6,8$  (керамика). Пунктиром отмечены те  $\kappa_{q0}^{kp}$ , при которых в заполненном волноводе появляются новые распространяющиеся  $H_{q0}$ -волны. Сопоставляя эти рисунки,



Р и с. 64. Линии равных значений коэффициента отражения для  $\epsilon_1 = 2,3$  (а) и для  $\epsilon_2 = 6,8$  (б)

а также анализируя другие численные данные, можно констатировать следующее:

а) уменьшение  $|R(\kappa, \psi)|$  происходит как при увеличении  $\kappa$ , так и  $\psi$ ;

б) чем меньше  $\epsilon_2/\epsilon_1 > 1$ , тем при меньших  $\kappa$  и  $\psi$  достигается хорошее согласование двух сред;

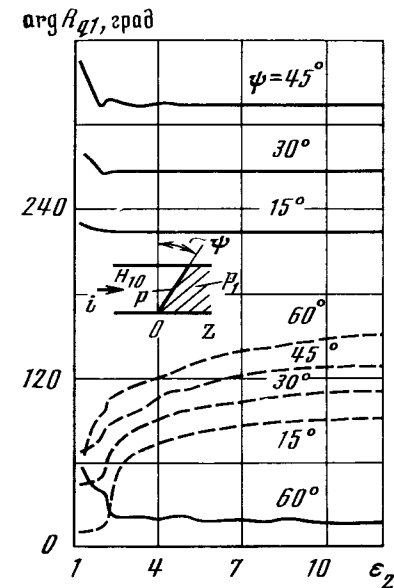
в) с увеличением  $\epsilon_2/\epsilon_1$  влияние появления распространяющихся волн в более плотной среде на ход линий  $|R(\kappa, \psi)| = \text{const}$  становится менее заметным;

г) чем больше  $\kappa$  и  $\psi$ , тем значительней доля энергии, переносимая высшими типами волн в среде с  $\epsilon_2$ ; здесь согласование достигается именно за счет этих волн (см., например, диапазон  $0,5 \leq \kappa \leq 1$  на рис. 65).

При исследовании задачи о симметричном изломе было установлено, что коэффициент отражения от такой неоднородности в одноволновом диапазоне пропорционален квадрату угла излома [324]. Аналогичная закономерность, очевидно, должна иметь место и в нашем случае. Из физических соображений можно предположить, что в области малых  $\psi$ , когда в незаполненном волноводе распространяется лишь основная волна,

$$|R(\psi)| = |R_0| - K\psi^2, \quad (3.5.19)$$

где  $R_0 = R(0)$  определяется по формулам Френеля для плоско-



Р и с. 65. Зависимость  $\arg R_{q1}$  от  $\epsilon_2$

параллельного волновода, а коэффициент пропорциональности  $K$  есть функция параметров  $\kappa$  и  $\epsilon_2$ .

Коэффициент  $K$  определен численно с помощью (3.5.19) и строгого решения. Результаты расчета  $K = K(\kappa, \epsilon_2)$  для некоторых значений  $\kappa$  и  $\epsilon$  сведены в табл. 3.1. Первое значение соответствует  $K$ ,

Таблица 3.1

$\epsilon_2$	$\kappa$		
	0,66	0,7	0,76
2,3	0,936 — 0,866	0,681 — 0,659	0,584 — 0,583
3,8	0,573 — 0,588	0,563 — 0,578	0,556 — 0,561
6,8	0,468 — 0,490	0,483 — 0,502	0,500 — 0,527

$\epsilon_2$	$\kappa$		
	0,8	0,86	0,9
2,3	0,550 — 0,554	0,519 — 0,524	0,508 — 0,510
3,8	0,556 — 0,569	0,552 — 0,567	0,551 — 0,564
6,8	0,511 — 0,523	0,512 — 0,526	0,512 — 0,527

вычисленному при  $\psi = 4^\circ$ , второе — при  $\psi = 20^\circ$ . Как видно, с ростом  $\psi$  величина  $K$  все же слегка изменяется; при  $\psi > 20^\circ$  погрешность в определении  $|R(\psi)|$  по (3.5.19) быстро возрастает. Чем больше  $\epsilon_2$ , тем меньше зависимость  $K$  от  $\kappa$ , по крайней мере в средней части диапазона изменения  $\kappa$ . Заметим, что приближенная формула (3.5.19) удовлетворительно описывает поведение  $|R(\psi)|$  и при наличии в среде с  $\epsilon_2$  распространяющихся высших типов волн.

Имея данные для  $K(\kappa, \epsilon_2)$ , нетрудно рассчитать  $|R(\psi)|$  для конкретного вида диэлектрика с помощью (3.5.19). Но эта информация не всегда достаточна, поскольку во многих случаях требуются сведения о поведении фазы коэффициента отражения.

Рис. 65 демонстрирует влияние величины  $\epsilon_2$  на фазу коэффициентов отражения  $H_{10}$ - и нераспространяющейся  $H_{20}$ -волн для различных  $\psi$ . С ростом  $\epsilon_2 \arg R_{11}$  устанавливается на определенном уровне, причем тем быстрее, чем меньше  $\psi$ . Видно, что и для нераспространяющихся волн их фаза стремится к некоторому постоянному значению, достигаемому при  $\epsilon_2 \gg 1$ . Установлено, что такая же закономерность в поведении  $\arg R_{qp}(\epsilon_2)$  имеет место и в многоволновой области  $\kappa$ , в том числе когда на неоднородность набегают волна высшего типа.

Физическое объяснение отмеченного явления может состоять в следующем. Как следует из формул Френеля, при падении волноводной волны на перекошенную границу раздела воздух—диэлектрик фаза отраженного сигнала не зависит от величины диэлектрической проницаемости  $\epsilon_2$  и  $\arg R_0 = \pi$ , если  $\epsilon_2 > \epsilon_1$ . Появление перекоса приводит к тому, что отраженная волна приобретает дополнительный набег за счет прохождения расстояния от плоскости  $z = 0$  до плоскости раздела двух сред, зависящего только от угла  $\psi$ .

При  $\epsilon_2 \Rightarrow \infty \arg R_{qp}$  должен иметь такое же значение, как у элементов матрицы отражения  $H_{p0}$ -волн от идеально проводящей наклонной заглушки, помещенной в волновод. Это можно показать и аналитически, устремляя, например, в (3.5.2)—(3.5.7) или в (3.5.12)—(3.5.18)  $\epsilon_2 \Rightarrow \infty$ , в пределе полученные выражения совпадают с решением задачи о наклонной заглушке [390]. Численное сравнение подтверждает совпадение  $\arg R_{qp}$  при  $\epsilon_2 \gg 1$  с соответствующими значениями для идеально отражающей наклонной заглушки. Появление высших типов волн в заполненном волноводе сказывается при небольших  $\epsilon_2$ , чем объясняются колебания кривых на рис. 65.

Исходя из изложенных выше предпосылок можно предположить, что фазовый набег отраженная волна приобретает на расстоянии  $a \operatorname{tg} \psi$ , равном удвоенной длине линии  $PP_1$  от плоскости  $z = 0$  до середины плоскости раздела (см. рис. 65). Отсюда  $\delta(\arg R) = 2\pi \zeta \operatorname{tg} \psi$ , где  $\zeta = \sqrt{\kappa^2 - 0,25}$ . Тогда с учетом того, что  $\arg R_0 = \pi$ , приближенная зависимость фазы коэффициента отражения от угла будет иметь вид

$$\arg R(\psi) = 2\pi \left( \zeta \operatorname{tg} \psi + \frac{1}{2} \right). \quad (3.5.20)$$

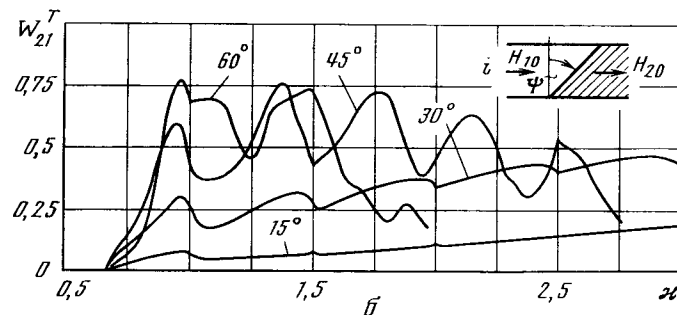
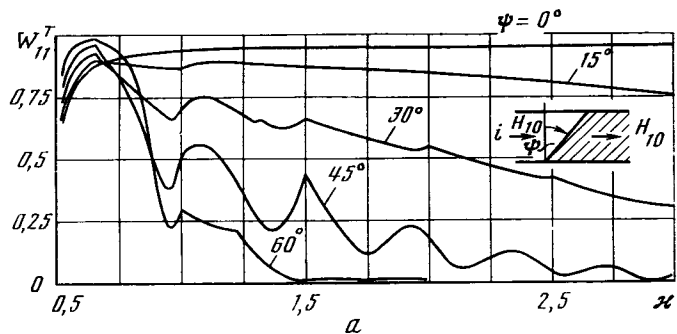
Для неоднородностей, величины  $K(\kappa, \epsilon_2)$  которых приведены в табл. 3.1, формулы (3.5.19) и (3.5.20) дают значения  $|R|$  и  $\arg R$  с погрешностью не хуже 2—5% в диапазоне  $0,6 \lesssim \kappa \lesssim 0,96$ ,  $0 < \psi < 25^\circ$  \*.

Самостоятельный интерес представляет изучение свойств исследуемой неоднородности в случае, когда и в незаполненном волноводе ( $\epsilon_1 = 1$ ) могут распространяться высшие типы волн.

Рассмотрим рис. 65 и рис. 66, а, б, где приведены соответствующие кривые  $W_{11}^T(\kappa)$  и  $W_{21}^T(\kappa)$ , иллюстрирующие частотные зависимости энергетических коэффициентов преобразования падающей со стороны  $\epsilon_1$   $H_{10}$ -волны в прошедшие  $H_{10}$ - и  $H_{20}$ -волны. Характерно, что с ростом частоты наблюдается постепенное уменьшение (в отличие от случая для  $\psi = 0$ ) энергии основной волны при небольших углах наклона  $\psi = 15, 30^\circ$  и быстрое спадание величины

\* Заметим, что установленные физические результаты об  $\arg R_{qp}$  несправедливы, естественно, в случае падения на границу раздела волн со стороны заполненного волновода.





Р и с. 66. Частотная характеристика энергетического коэффициента преобразования  $W_{11}^T(x)$  (а) и  $W_{21}^T(x)$  (б)

$W_{11}^T(x)$  для неоднородностей с  $\psi \geq 45^\circ$ . При этом возрастает доля энергии, переносимая волной  $H_{20}$ , а затем и другими высшими волнами, что особенно заметно при больших  $\psi$  (рис. 66, а, б). Чем больше  $\psi$ , тем уже диапазон по  $x$ , где преобразование  $H_{10}$ -волны в  $H_{q0}$  ( $q > 1$ ) прошедшие волны наиболее эффективно. Изломы кривых на рис. 66, а, б обусловлены появлением распространяющихся волн как в незаполненном, так и в заполненном волноводах. Энергия отраженных волн ощутима лишь вблизи критических значений  $x = 0,5q$ ,  $q = 2, 3, \dots$

### § 3.6

#### Калориметрические нагрузки с наклонными диэлектрическими окнами

3.6.1. Калориметрическая нагрузка с наклонными диэлектрическими окнами представляет собой более сложную структуру по сравнению с нагрузкой, у которой диэлектрическое окно перпендикулярно продольной оси волновода (§ 3.2). Общие методы решения задач теории нерегулярных волноводов, разумеется, применимы для исследования калориметрических нагрузок, но их прак-

тическая реализация вызывает определенные трудности, связанные с учетом большого затухания в поглощающей среде и с относительно большой протяженностью границы раздела сред при малых углах наклона диэлектрического окна к продольной оси волновода. Такому классу задач посвящены работы [276, 289—301], где рассмотрено (см. также § 3.3) применение метода поперечных сечений для расчета коэффициентов отражения пологих диэлектрических вставок, угол наклона которых к продольной оси волновода не превышает  $10^\circ$ . Отражение от диэлектрического клина, диэлектрическая проницаемость которого мало отличается от диэлектрической проницаемости незаполненного регулярного волновода ( $\epsilon < 2$ ), рассматривалось в [276, 282]. Исследование проведено в одноволновом приближении, что не обеспечивает достаточной точности расчета рассматриваемых калориметрических нагрузок, так как участок волновода с заполнением диэлектриком с большим  $\epsilon$  не является одноволновым. Задача о падении волны  $H_{p0}$  прямоугольного волновода на наклонную границу двух сред приближенным методом с использованием концепции плоских волн рассмотрена в работах [301, 342]. Отметим здесь еще анализ отражения от плоской границы раздела двух сред с действительными значениями диэлектрической проницаемости методом моментов [343, 279]. Этот подход наиболее близок к развитому далее подходу. В настоящем параграфе дается строгий анализ решения задачи дифракции на наклонной диэлектрической пластине с учетом поглощения в калориметрической жидкости и диэлектрике пластины, который позволяет построить количественную характеристику рассматриваемых нагрузок. Мы остановимся также на реализации относительно простого приближенного метода расчета на основе концепции плоских волн [295].

В первых пунктах мы будем рассматривать задачу о падении волн  $H_{p0}$  прямоугольного волновода на наклонную плоскопараллельную диэлектрическую пластину толщиной  $d$ , расположенную перпендикулярно широким стенкам волновода, в  $H$ -плоскости (рис. 67). Поле падающей волны  $H_{p0}$  представляется следующим образом:

$$E_y = \mathcal{E} e^{ih_p z} \sin \frac{\pi p}{a} x, \quad (3.6.1)$$

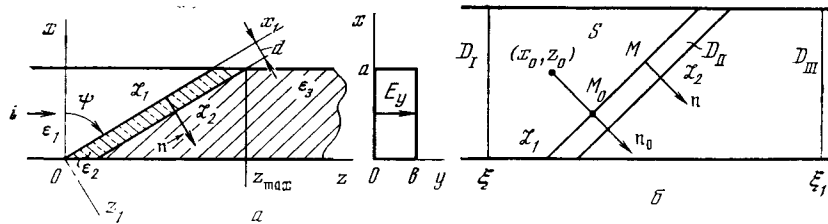
$$H_x = -\frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial z}, \quad (3.6.2)$$

$$H_z = \frac{1}{i\omega\mu_0} \frac{\partial E_y}{\partial x}, \quad (3.6.3)$$

где

$$h_p = \sqrt{k^2 - \left(\frac{\pi p}{a}\right)^2} = \frac{2\pi}{a} \omega_p = \frac{2\pi}{a} \sqrt{k^2 - \left(\frac{p}{2}\right)^2}, \quad (3.6.4)$$

$$p = 1, 2, \dots; \quad \kappa = a/\lambda = ka/2\pi.$$



Р и с. 67. Калориметрическая нагрузка с наклонным диэлектрическим окном

Так как в падающей волне  $H_{p0}$  отсутствуют вариации поля вдоль координаты  $y$  и в силу геометрии рассматриваемой системы, в которой граничные поверхности сред с разными диэлектрическими проницаемостями параллельны оси  $y$ , полное поле в рассматриваемом нерегулярном волноводе имеет те же составляющие, что и падающее поле. В этом случае все составляющие поля удобно выразить через  $u = E_y$  и задача сводится к скалярной краевой задаче для уравнения Гельмгольца

$$(\Delta + k^2 \varepsilon(x, z))u = 0, \quad (3.6.5)$$

где  $\Delta = \partial^2/\partial x^2 + \partial^2/\partial z^2$  — двумерный оператор Лапласа;  $\varepsilon(x, z)$  — кусочно-постоянная функция, характеризующая относительную диэлектрическую проницаемость сред.

Граничные условия на боковых стенках волновода записываются следующим образом:

$$u|_{x=0, a} = 0. \quad (3.6.6)$$

На границе раздела сред  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  должны выполняться условия непрерывности касательных составляющих электрического и магнитного полей, из которых следует

$$[u]|_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} = 0, \quad \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \right]_{\mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2} = 0. \quad (3.6.7)$$

Функция  $u$  должна удовлетворять также условиям излучения на бесконечных регулярных участках волновода (за исключением падающей волны)

$$u = \mathcal{E} e^{ih_p^{(1)} z} \sin \frac{\pi p}{a} x + \mathcal{G} \sum_{n=1}^{\infty} R_n^p e^{-ih_p^{(1)} z} \sin \frac{\pi n}{a} x, \quad x \in [0, a], \quad z < 0; \quad (3.6.8)$$

$$u = \mathcal{G} \sum_{n=1}^{\infty} T_n^p e^{ih_n^{(3)} z} \sin \frac{\pi n}{a} x, \quad x \in [0, a], \quad z > z_{\max}, \quad (3.6.9)$$

где

$$h_n^{(3)} = \sqrt{k^2 \varepsilon_3 - \left( \frac{\pi n}{a} \right)^2}, \quad (3.6.10)$$

$\text{Im } h_n^{(3)} > 0$ . Если  $\text{Im } h_n^{(3)} = 0$ , то  $\text{Re } h_n^{(3)} = 0$ ,  $R_n^p$  и  $T_n^p$  — неизвестные амплитудные коэффициенты отраженных и прошедших нормальных волн типа  $H_{n0}$ .

3.6.2. Метод плоских волн. Концепция Бриллюэна о разложении волноводных волн на плоские позволяет иногда существенно облегчить решение сложной электродинамической задачи. Для введения читателя в круг достаточно сложных рассуждений, связанных с расчетом калориметрических нагрузок, рассмотрим сначала эту задачу приближенно, используя концепцию Бриллюэна. Разобьем рассматриваемый нерегулярный волновод, характеризующийся различными диэлектрическими проницаемостями, на три области  $D_I, D_{II}, D_{III}$ , в каждой из которых диэлектрическая проницаемость есть величина постоянная. Границы областей  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  совпадают с физическими границами раздела сред в волноводе. Для эффективного применения концепции плоских волн получим интегральное представление поля в области  $D_I$ . Для этого определим функцию Грина регулярного волновода с постоянным заполнением. Функция Грина должна удовлетворять уравнению Гельмгольца с постоянным значением диэлектрической проницаемости, условиям на идеально проводящих стенках волновода (3.6.6) и условию излучения (3.6.8):

$$\mathcal{G}^1(x, z; x_0, z_0) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\varphi_n(x) \varphi_n(x_0)}{-i2h_n^{(1)}} e^{ih_n^{(1)} |z-z_0|}, \quad (3.6.11)$$

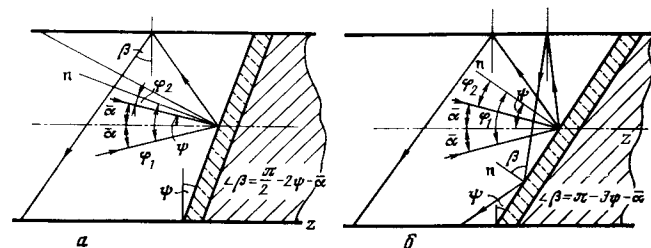
где

$$\varphi_n(x) = \sqrt{\frac{2}{a}} \sin \frac{\pi n}{a} x.$$

Применим в области  $D_I$  вторую формулу Грина к функциям  $u$  и  $\mathcal{G}^1$  ( $\varepsilon = \varepsilon_1$ ), считая, что точка наблюдения  $(x_0, z_0)$  принадлежит области  $S$ , ограниченной контуром  $\Gamma$ , состоящим из боковых стенок волновода, границы раздела  $\mathcal{L}_1$  и сечения  $\xi$  (рис. 68):

$$\int_S (\mathcal{G}^1 \Delta u - u \Delta \mathcal{G}^1) dS = \int_{\Gamma} \left( \mathcal{G}^1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^1}{\partial n} \right) dl, \quad (3.6.12)$$

где  $n$  — внешняя нормаль к контуру  $\Gamma$ .



Р и с. 68. К применению концепции плоских волн для расчета калориметрической нагрузки с наклонным диэлектрическим окном

Так как функции  $u$  и  $\mathcal{G}^1$  удовлетворяют уравнению Гельмгольца, слева в выражении (3.6.12) получаем значение функции в точке наблюдения

$$\begin{aligned} u(x_0, z_0) &= \int_{\Gamma} \left( \mathcal{G}^1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^1}{\partial n} \right) dl = \\ &= \int_{\mathcal{L}_1} \left( \mathcal{G}^1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^1}{\partial n} \right) dl + \int_0^a \left( -\mathcal{G}^1 \frac{\partial u}{\partial z} \Big|_{z=\xi} + \right. \\ &\quad \left. + u \frac{\partial \mathcal{G}^1}{\partial z} \Big|_{z=\xi} \right) dx, \quad \xi < z_0 < 0. \end{aligned} \quad (3.6.13)$$

Вычисляя интеграл по поперечному сечению волновода  $z = \xi$ , получим

$$\begin{aligned} u(x_0, z_0) &= \int_{\mathcal{L}_1} \left( \mathcal{G}^1 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^1}{\partial n} \right) dl + \mathcal{E} \sqrt{\frac{2}{a}} \varphi_p(x_0) e^{ih_p^{(1)}z_0}, \\ (x_0, z_0) &\in D_I. \end{aligned} \quad (3.6.14)$$

Таким образом, получено интегральное представление функции  $u(x_0, z_0)$  в области  $D_I$  через значение этой функции и ее нормальной производной на границе раздела сред  $\mathcal{L}_1$ . Область  $D_I$  включает в себя и регулярный волновод  $z < 0$ , для которого справедливы условия излучения (3.6.8). Используя представление  $u$  в области  $D_I$  (3.6.8) и (3.6.14), можно определить коэффициент отражения  $R_n^p$ . Для этого умножим на  $\varphi_k(x_0)$  и проинтегрируем по поперечному сечению регулярного волновода по переменной  $x_0$ . В результате получим

$$R_n^p = \frac{1}{-i2h_n^{(1)}} \int_{\mathcal{L}_1} \left\{ \frac{\partial u}{\partial n} \varphi_n(x) e^{ih_n^{(1)}z} - u \frac{\partial}{\partial n} \left[ \varphi_n(x) e^{ih_n^{(1)}z} \right] \right\} dl. \quad (3.6.15)$$

В выражении (3.6.15) коэффициенты отражения выражены через значение функции  $u$  и ее нормальной производной  $du/\partial n$  на границе раздела сред  $\mathcal{L}_1$ .

Будем искать приближенное значение функций  $u$  и  $du/\partial n$  на границе  $\mathcal{L}_1$ , основываясь на концепции плоских волн. Представим поле падающей волны  $H_{p0}$  прямоугольного волновода в виде суммы двух плоских волн:

$$\begin{aligned} u &\equiv E_y = \mathcal{E} e^{ih_p^{(1)}z} \sin \frac{\pi p}{a} x = \\ &= \mathcal{E} \frac{1}{2i} \left[ \exp \left\{ i \left( h_p^{(1)}z + \frac{\pi p x}{a} \right) \right\} - \exp \left\{ i \left( h_p^{(1)}z - \frac{\pi p x}{a} \right) \right\} \right]. \end{aligned} \quad (3.6.16)$$

Теперь, рассматривая эталонную задачу о падении двух плоских волн на плоскостойкую среду, характеризующуюся комплексными значениями диэлектрической проницаемости  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$ ,

получим значение функций  $u$  и  $du/\partial n$  на границе раздела сред  $\mathcal{L}_1$ . Это даст приближенное представление поля на границе раздела сред, которое не учитывает влияние (идеально проводящих) стенок волновода. Для удобства дальнейших вычислений введем новые декартовы координаты  $x', z'$ , связанные с естественной границей раздела сред  $\mathcal{L}_1$  и нормалью к ней (рис. 67):

$$x = x' \cos \psi - z' \sin \psi, \quad z = x' \sin \psi + z' \cos \psi. \quad (3.6.17)$$

Полное поле в области  $D_I$  запишется как сумма падающего поля, представленного суперпозицией двух плоских волн (3.6.16) и отраженного поля:

$$\begin{aligned} u^I(x', z') &= \mathcal{E} \frac{1}{2i} \left[ \exp \{ ik(z' \cos \varphi_1 + x' \sin \varphi_1) \} - \right. \\ &\quad \left. - \exp \{ ik(z' \cos \varphi_2 + x' \sin \varphi_2) \} + \right. \\ &\quad \left. + v(\varphi_1) \exp \{ ik(-z' \cos \varphi_1 + x' \sin \varphi_1) \} - \right. \\ &\quad \left. - v(\varphi_2) \exp \{ ik(-z' \cos \varphi_2 + x' \sin \varphi_2) \} \right], \end{aligned} \quad (3.6.18)$$

где  $v$  — коэффициенты Френеля (§ 1.1), которые должны быть определены из граничных условий

$$k \cos \varphi_1 = h_p^{(1)} \cos \psi - \frac{\pi p}{a} \sin \psi, \quad k \sin \varphi_1 = h_p^{(1)} \sin \psi + \frac{\pi p}{a} \cos \psi, \quad (3.6.19)$$

$$k \cos \varphi_2 = h_p^{(1)} \cos \psi + \frac{\pi p}{a} \sin \psi, \quad k \sin \varphi_2 = h_p^{(1)} \sin \psi - \frac{\pi p}{a} \cos \psi.$$

Из выражений (3.6.19) находим углы падения плоских волн

$$\varphi_1 = \psi + \arcsin \frac{\pi p}{ka} = \psi + \bar{\alpha}, \quad \varphi_2 = \psi - \arcsin \frac{\pi p}{ka} = \psi - \bar{\alpha}, \quad (3.6.20)$$

где  $\bar{\alpha} = \arcsin(\pi p/ka)$ .

Поля в областях  $D_{II}$  и  $D_{III}$  запишутся следующим образом:

$$\begin{aligned} u^{II}(x', z') &= \mathcal{E} \frac{1}{2i} \left[ A \varphi_1 \exp \{ ik(\nu_1 z' + x' \sin \varphi_1) \} + \right. \\ &\quad \left. + B(\varphi_1) \exp \{ ik(-\nu_1 z' + x' \sin \varphi_1) \} - \right. \\ &\quad \left. - A(\varphi_2) \exp \{ ik(\nu_2 z' + x' \sin \varphi_2) \} - \right. \\ &\quad \left. - B(\varphi_2) \exp \{ ik(-\nu_2 z' + x' \sin \varphi_2) \} \right], \end{aligned} \quad (3.6.21)$$

где  $\nu_{1,2}^2 = \varepsilon_2 - \sin^2 \varphi_{1,2}$ ;

$$\begin{aligned} u^{III}(x', z') &= \mathcal{E} \frac{1}{2i} \left\{ T(\varphi_1) \exp \{ ik[\mu_1(z-d) + x' \sin \varphi_1] \} - \right. \\ &\quad \left. - T(\varphi_2) \exp \{ ik[\mu_2(z-d) + x' \sin \varphi_2] \} \right\}, \end{aligned} \quad (3.6.22)$$

где  $\mu_{1,2}^2 = \varepsilon_3 - \sin^2 \varphi_{1,2}$ .

Для нахождения неизвестных коэффициентов  $v, A, B$  и  $T$ , входящих в (3.6.18), (3.6.21) и (3.6.22), воспользуемся условиями

непрерывности касательных составляющих полей на границах раздела сред  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  (3.6.7). В результате получим систему линейных алгебраических уравнений относительно этих неизвестных коэффициентов, которая разрешается так же, как было сделано в § 3.2. В результате получим

$$p_1(\varphi_{1,2}) = -ik \cos \varphi_{1,2}, \quad (3.6.23)$$

$$p_j(\varphi_{1,2}) = -i \sqrt{k^2 \varepsilon_j - k^2 \sin^2 \varphi_{1,2}}, \quad j = 1, 2;$$

Re  $p_j > 0$ . Если Re  $p_j = 0$ , то Im  $p_j < 0$ .

$$v(\varphi_{1,2}) = \frac{(p_2 + p_3)(p_1 - p_2) + (p_2 - p_3)(p_1 + p_2) \exp\{-2p_2 d\}}{(p_2 + p_3)(p_1 + p_2) + (p_2 - p_3)(p_1 - p_2) \exp\{-2p_2 d\}}, \quad (3.6.24)$$

$$T(\varphi_{1,2}) = \frac{4p_1 p_2 \exp\{-p_2 d\}}{(p_2 + p_3)(p_1 + p_2) + (p_2 - p_3)(p_1 - p_2) \exp\{-2p_2 d\}}, \quad (3.6.25)$$

$$\left\{ \begin{array}{l} A(\varphi_{1,2}) \\ B(\varphi_{1,2}) \end{array} \right\} = \frac{1+r}{2} \pm \frac{p_1}{2p_2} (1-v). \quad (3.6.26)$$

$$(3.6.27)$$

Таким образом, поле полностью определено всюду, в том числе и на границах раздела сред ( $z' = 0$ ):

$$u(x', 0) = \mathcal{E} \frac{1}{2i} [(1+v_1) e^{ikx' \sin \varphi_1} - (1+v_2) e^{ikx' \sin \varphi_2}], \quad (3.6.28)$$

$$\frac{\partial u(x', 0)}{\partial z'} = \mathcal{E} \frac{k}{4i} [(1+v_1) \cos \varphi_1 e^{ikx' \sin \varphi_1} - (1-v_2) \cos \varphi_2 e^{ikx' \sin \varphi_2}]. \quad (3.6.29)$$

В выражение для коэффициентов отражения  $R_n^p$  (3.6.15), которое следует записать в системе координат  $x', z'$ , подставляем найденное значение поля и его нормальной производной на границе раздела сред (3.6.28)–(3.6.29). Интегралы, входящие в выражение для коэффициентов отражения, вычисляются аналитически:

$$J_n^1(\alpha) = \int_0^{\mathcal{L}} \sin \frac{\pi n x}{\mathcal{L}} e^{i\alpha \frac{x}{\mathcal{L}}} dx = \frac{\pi n}{(\pi n)^2 - \alpha^2} [1 - (-1)^n e^{i\alpha}], \quad (3.6.30)$$

$$J_n^2(\alpha) = \int_0^{\mathcal{L}} \cos \frac{\pi n x}{\mathcal{L}} e^{i\alpha \frac{x}{\mathcal{L}}} dx = \frac{-i\alpha}{(\pi n)^2 - \alpha^2} [1 - (-1)^n e^{i\alpha}], \quad (3.6.31)$$

где

$$\alpha(\varphi_{1,2}) = k\mathcal{L} \sin \varphi_{1,2} + h_n^{(1)} \mathcal{L} \sin \psi, \quad \mathcal{L} = a/\cos \psi. \quad (3.6.32)$$

В результате проведенных преобразований получаем выражение для коэффициентов отражения для падающей волны типа  $H_{p0}$  в явной форме

$$R_n^p = A_n(v_1, \varphi_1) J_n^1[\alpha(\varphi_1)] - A_n(v_2, \varphi_2) J_n^1[\alpha(\varphi_2)] + B_n(v_1) J_n^2[\alpha(\varphi_1)] - B_n(v_2) J_n^2[\alpha(\varphi_2)], \quad (3.6.33)$$

где

$$A_n = \frac{1}{2i} \left[ 1 + v - \frac{k\mathcal{L} \cos \varphi}{h_n^{(1)} a} (1 - v) \right], \quad (3.6.34)$$

$$B_n = \frac{\pi n \mathcal{L} \sin \psi}{2h_n^{(1)} a^2} (1 + v). \quad (3.6.35)$$

Результат (3.6.33) весьма удобен для расчета коэффициента отражения основной волны прямоугольного волновода  $H_{10}$ . Исходными данными для расчета являются длина волны падающего поля  $\lambda$ , выраженная как  $ka = 2\pi a/\lambda = 2\pi k$ , относительная толщина диэлектрической пластины  $d/a$ , угол наклона  $\psi$  и значения диэлектрических проницаемостей  $\varepsilon_1, \varepsilon_2, \varepsilon_3$ ;  $\varepsilon_2$  и  $\varepsilon_3$  являются комплексными величинами. Сначала по формулам (3.6.19) и (3.6.23) находят значения  $k \cos \varphi$  и  $k \sin \varphi$  и  $p_1, p_2$  и  $p_3$  для  $\varphi_1$  и  $\varphi_2$ , затем вычисляются величины  $v_1(\varphi_1)$  и  $v_2(\varphi_2)$  по формуле (3.6.24), после этого считаются интегралы и коэффициенты, входящие в (3.6.33), по формулам (3.6.30), (3.6.31), (3.6.34) и (3.6.35) и затем коэффициент отражения  $R_n^p$  по формуле (3.6.33), его модуль и фаза, действительная и мнимая часть. Мы обсудим результаты данного приближенного подхода совместно с результатами по другим подходам.

3.6.3. При выводе формулы (3.6.33) предполагалось, что плоские волны, отразившиеся от границы раздела сред, формируют в волноводе только отраженное поле, т. е. предполагалось, что, отразившись от боковой стенки волновода, плоские волны вновь не попадут на границу раздела сред  $\mathcal{L}_1$ . Отраженное поле образуется за счет однократного отражения падающего поля на данной частоте  $\kappa$  при углах наклона пластины  $\psi$ , удовлетворяющих неравенству

$$\psi < \frac{\pi}{6} - \frac{\bar{\alpha}}{3} = \frac{\pi}{6} - \frac{1}{3} \arcsin \frac{1}{2\kappa}. \quad (3.6.36)$$

Это неравенство легко получается из геометрических соотношений (рис. 68) при рассмотрении лучей, падающих под углом  $\varphi_1$ ; при этом лучи, падающие под углом  $\varphi_2$ , формируют отраженное поле при однократном отражении от границы  $\mathcal{L}_1$ .

Однако метод плоских волн можно распространить и на более широкий диапазон изменения углов  $\psi$ , если учесть последовательное переотражение между границей раздела сред и боковыми стенками волновода. Отметим, что при каждом отражении волны от границы раздела сред коэффициент отражения вычисляется по формуле (3.6.24), а угол падения легко определяется из геометрических соотношений. Например, как видно из рис. 68, б, угол падения вторичной волны равен:  $\pi - 3\psi - \bar{\alpha} = \pi - 3\psi - \arcsin(1/2\kappa)$ . Однако вычисление вклада последовательности переотраженных волн от границы раздела  $\mathcal{L}_1$  целесообразно проводить лишь в том случае, когда коэффициент Френеля для отра-

женной волны достаточно большой и учет переотражений может дать заметный вклад в общий коэффициент отражения. Если же коэффициенты Френеля малы, учет переотражений становится несущественным и область применимости формулы (3.6.33) расширяется вплоть до углов падения плоских волн, близких к скользящим вдоль границы раздела:  $\psi < (\pi/2) - \bar{\alpha} = (\pi/2) - \arcsin(1/2\kappa)$ . Таким образом, задача определения оптимальных соотношений между углом наклона  $\psi$  и длиной волны сводится к определению тех значений параметров, при которых коэффициенты Френеля малы. Коэффициенты Френеля  $v(\varphi_{1,2})$  определяются толщиной диэлектрической пластины  $d$  и углом падения плоских волн  $\varphi_{1,2}$ . Минимальное значение коэффициентов Френеля связано с выбором толщины, обеспечивающей четвертьволновость соответствующего слоя (ср. § 1.1 и 3.2):

$$\frac{d^{1,2}}{a} = \frac{1}{4a} \lambda_{\varepsilon_2}^{1,2} = \frac{1}{4} (\kappa^2 \varepsilon_2' - \kappa^2 \sin^2 \varphi_{1,2})^{-1/2}. \quad (3.6.37)$$

Подставляя  $k \sin \varphi_{1,2}$  (3.6.18), преобразуем  $\lambda_{\varepsilon_2}^{1,2}/a$  к виду

$$\frac{\lambda_{\varepsilon_2}^{1,2}}{a} = \left[ \left( \kappa^2 \varepsilon_2 - \frac{1}{4} \right) + f_{1,2}(\kappa, \psi) \right]^{-1/2}, \quad (3.6.38)$$

где

$$f_{1,2} = \left( \frac{1}{2} - \kappa^2 \right) \sin^2 \psi \mp \frac{1}{2} \omega_1 \sin 2\psi, \quad \omega_1 = \sqrt{\kappa^2 - (1/4)}.$$

Величина  $f$  в выражении (3.6.38), которая дает отличие  $\lambda_{\varepsilon_2}^{1,2}$  от длины волны в волноводе с заполнением  $\varepsilon_2$ , мала по абсолютной величине при  $\kappa \leq 1,5$  для любых  $\psi$ , а при больших  $\kappa$  величина  $f$  приводит к изменению  $\varepsilon_2$  на  $\sin^2 \psi$ . Подсчет  $d^{1,2}/a$  по формуле (3.6.37) дает изменение величины  $d/a = \lambda_{g_2}/4a$  в третьем знаке. Таким образом, для выполнения условий согласования в широком диапазоне изменения угла наклона пластины  $\psi$  справедлив выбор  $d/a \simeq \lambda_{g_2}/4a$  и при таком выборе толщины пластины область применимости формулы (3.6.33) расширяется.

В заключение данного пункта рассмотрим предельный переход формулы (3.6.33) при  $\psi \Rightarrow 0$ , считая, что падает основная волна прямоугольного волновода  $H_{10}$ . В этом случае коэффициенты  $R_n^1$  при  $n > 1$  стремятся к нулю, что следует из выражения (3.6.33). Преобразуем (3.6.33) для  $R_1^1$ :

$$R_1^1 = \frac{\exp\{i4\pi\omega \operatorname{tg} \psi\} - 1}{i4\pi\omega \operatorname{tg} \psi} \left[ v(\varphi_1) \frac{1 - \operatorname{tg}^2 \psi}{2(1 + 2\omega \operatorname{tg} \psi)} + v(\varphi_2) \frac{1 + \operatorname{tg}^2 \psi}{2(1 - 2\omega \operatorname{tg} \psi)} \right]. \quad (3.6.39)$$

Для вычисления  $R_1^1$  при  $\psi \Rightarrow 0$  раскрываем неопределенность первого сомножителя (3.6.39), используя правило Лопиталья

$$\lim_{\psi \Rightarrow 0} \frac{(\exp\{i4\pi\omega \operatorname{tg} \psi\} - 1)'}{(i4\pi\omega \operatorname{tg} \psi)'} = \lim_{\psi \Rightarrow 0} e^{i4\pi\omega \operatorname{tg} \psi} = 1.$$

Таким образом, при  $\psi \Rightarrow 0$   $2R_1^1 = v(\varphi_1) + v(\varphi_2)$ . Так как при  $\psi = 0$  (см. 3.6.19)

$$k \sin \varphi_1 = -k \sin \varphi_2 = \pi/a,$$

то значения  $p_j(\varphi_{1,2})$  в (3.6.23) равны значениям  $p_j$  в формуле  $p_j = -ih^{(j)}$ , следовательно,  $v(\varphi_1) = v(\varphi_2) = R_1^1$ .

3.6.4. Метод интегральных уравнений позволяет свести решение задачи дифракции волны  $H_{p0}$  прямоугольного волновода с кусочно-постоянным заполнением диэлектриком к решению системы интегральных уравнений относительно касательных составляющих электрического и магнитного полей на границе раздела сред с различной диэлектрической проницаемостью. Для получения системы интегральных уравнений определим для каждой области  $D_I, D_{II}, D_{III}$ , где диэлектрическая проницаемость постоянна, функцию Грина  $\mathcal{G}^1, \mathcal{G}^2, \mathcal{G}^3$  так же, как было сделано для  $D_I$  (3.6.11). Для области  $D_I$  было получено с помощью второй формулы Грина интегральное представление функции  $u(x_0, z_0)$  через ее значение на границе раздела сред  $\mathcal{L}_1$  (3.6.14). Для получения интегрального представления функции  $u(x, z)$  в области  $D_{II}$  аналогично, как для области  $D_I$ , применяем в области  $D_{II}$  вторую формулу Грина к функции  $u(x, z)$  и функции Грина  $\mathcal{G}^2$ , определенную для прямоугольного волновода с постоянным заполнением  $\varepsilon_2$ , считая, что точка наблюдения  $(x_0, z_0)$  принадлежит области  $D_I$ :

$$0 = \int_{\mathcal{L}_2} \left( \mathcal{G}^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n} \right) dl - \int_{\mathcal{L}_1} \left( \mathcal{G}^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n} \right) dl, \quad (x_0, z_0) \in D_I, \quad (3.6.40)$$

где  $n$  — нормаль, определенная, как показано на рис. 68. Складывается соотношение (3.6.14) и (3.6.40) для функции  $u(x, z)$ , определенной для одной и той же точки наблюдения  $(x_0, z_0)$ , и, используя условия непрерывности функции  $u$  и ее нормальной производной на границе раздела сред  $\mathcal{L}_1$ , которые заданы условием (3.6.7), получим

$$u(x_0, z_0) = \int_{\mathcal{L}_1} \left[ (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2) \frac{\partial u}{\partial n} - u \left( \frac{\partial \mathcal{G}^1}{\partial n} - \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n} \right) \right] dl + \int_{\mathcal{L}_2} \left( \mathcal{G}^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n} \right) dl + \mathcal{F}_0(x_0, z_0), \quad (x_0, z_0) \in D_I, \quad (3.6.41)$$

где

$$\mathcal{F}_0(x_0, z_0) = \mathcal{E} \sqrt{\frac{a}{2}} \varphi_p(x_0) e^{ih_p^{(1)} z_0}.$$

Данное интегральное представление функции  $u$  в области  $D_I$  определяет функцию  $u$  через ее значение на границе раздела сред  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , непрерывную в области  $D_I + \mathcal{L}_1$  и удовлетворяющую всем поставленным условиям рассматриваемой задачи (3.6.6) —

(3.6.9).<sup>\*</sup> Опуская точку наблюдения  $(x_0, z_0)$  на границу  $\mathcal{L}_1$ , получим первое интегральное уравнение

$$u(M_0)|_{\mathcal{L}_1} = \int_{\mathcal{L}_1} \left[ (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2) \right] dl + \int_{\mathcal{L}_2} \left( \mathcal{G}^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n} \right) dl + \mathcal{F}(M_0), \quad M_0 \in \mathcal{L}_1. \quad (3.6.42)$$

Дифференцируя соотношение (3.6.41) по нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\mathcal{L}_1$  и также опуская точку наблюдения на границу  $\mathcal{L}_1$ , получим второе интегральное уравнение (3.6.43)

$$\frac{\partial u}{\partial n_{M_0}} \Big|_{\mathcal{L}_1} = \int_{\mathcal{L}_1} \left[ \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \frac{\partial}{\partial n} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2) \right] dl + \int_{\mathcal{L}_2} \left[ \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \left( \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \cdot \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{G}^2 \right) \right] dl + \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \mathcal{F}(M_0), \quad M_0 \in \mathcal{L}_1. \quad (3.6.43)$$

Так как в данные два интегральных уравнения входят неизвестные значения  $u$  и  $\partial u / \partial n$  на обеих границах  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$ , то необходимо получить еще два интегральных уравнения. Для этого получим соотношение, аналогичное (3.6.41). Считая, что точка наблюдения  $(x_0, z_0)$  принадлежит области  $D_{II}$ , выражение (3.6.40) приведем к

$$u(x_0, z_0) = \int_{\mathcal{L}_2} \left( \mathcal{G}^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n} \right) dl - \int_{\mathcal{L}_1} \left( \mathcal{G}^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n} \right) dl, \quad (x_0, z_0) \in D_{II}. \quad (3.6.44)$$

Применим в области  $D_{III}$  вторую формулу Грина к функциям  $u$  и  $\mathcal{G}^3$ , считая, что точка наблюдения принадлежит области  $D_{II}$ :

$$0 = - \int_{\mathcal{L}_2} \left( \mathcal{G}^3 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^3}{\partial n} \right) dl, \quad (x_0, z_0) \in D_{II}. \quad (3.6.45)$$

Складывая (3.6.44) и (3.6.45) для функции  $u$  в одной и той же точке наблюдения  $(x_0, z_0)$ , принадлежащей области  $D_{II}$ , и используя условие непрерывности функции  $u$  и ее нормальной производной на границе раздела сред  $\mathcal{L}_2$ , получим

$$u(x_0, z_0) = \int_{\mathcal{L}_2} \left[ (\mathcal{G}^2 - \mathcal{G}^3) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} (\mathcal{G}^2 - \mathcal{G}^3) \right] dl - \int_{\mathcal{L}_1} \left( \mathcal{G}^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n} \right) dl, \quad (x_0, z_0) \in D_{II}. \quad (3.6.46)$$

Дифференцируя соотношение (3.6.46) по нормали  $\mathbf{n}$  к границе  $\mathcal{L}_2$  и опуская точку наблюдения на границу  $\mathcal{L}_2$ , получим еще два

интегральных уравнения

$$u(M_0)|_{\mathcal{L}_2} = \int_{\mathcal{L}_2} \left[ (\mathcal{G}^2 - \mathcal{G}^1) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n} (\mathcal{G}^2 - \mathcal{G}^1) \right] dl - \int_{\mathcal{L}_1} \left( \mathcal{G}^2 \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n} \right) dl, \quad M_0 \in \mathcal{L}_2; \quad (3.6.47)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_{M_0}} \Big|_{\mathcal{L}_2} = \int_{\mathcal{L}_2} \left[ \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} (\mathcal{G}^2 - \mathcal{G}^1) \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \frac{\partial}{\partial n} (\mathcal{G}^2 - \mathcal{G}^1) \right] dl - \int_{\mathcal{L}_1} \left( \frac{\partial \mathcal{G}^2}{\partial n_{M_0}} \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} \frac{\partial}{\partial n} \mathcal{G}^2 \right) dl, \quad M_0 \in \mathcal{L}_2. \quad (3.6.48)$$

Итак, исходная краевая задача (3.6.5)–(3.6.9) сведена к системе четырех интегральных уравнений Фредгольма II рода (3.6.42), (3.6.43), (3.6.47) и (3.6.48). Следует отметить, что из разрешимости исходной краевой задачи вытекает, что система интегральных уравнений имеет единственное непрерывное решение. Доказательство этого проведено в [273]. Решение полученной системы интегральных уравнений относительно значения функции  $u$  и ее нормальной производной на границах раздела сред  $\mathcal{L}_1$  и  $\mathcal{L}_2$  проводится, как обычно, путем сведения ее к системе линейных алгебраических уравнений с использованием квадратурных формул. Мы подробно остановимся на рассмотрении численного алгоритма для случая одной границы раздела сред\*. Для случая двух границ алгоритм совершенно аналогичен, лишь удваивается порядок уравнений.

В случае одной границы раздела сред с различной диэлектрической проницаемостью получаем систему двух интегральных уравнений относительно значений функции  $u$  и ее нормальной производной на границе раздела сред  $\mathcal{L}$ :

$$u(M_0)|_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2) - u \frac{\partial}{\partial n} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2) \right] dl + u_0(M_0), \quad (3.6.49)$$

$$\frac{\partial u}{\partial n_{M_0}} \Big|_{\mathcal{L}} = \int_{\mathcal{L}} \left[ \frac{\partial u}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2) - u \frac{\partial}{\partial n} \frac{\partial}{\partial n_{M_0}} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2) \right] dl + \frac{\partial u_0(M_0)}{\partial n_{M_0}}. \quad (3.6.50)$$

3.6.5. Численный алгоритм решения системы интегральных уравнений ввиду его важности опишем подробно. Так как интегрирование в системе интегральных уравнений ведется по отрезку

\* Рассмотрение задачи с одной границей раздела сред представляет самостоятельный научный интерес. Работы [279, 282, 290] посвящены различными методами исследования задачи дифракции на границе раздела двух сред при различных ограничениях на угол наклона и величину диэлектрической проницаемости. Ниже будет проведено сопоставление с результатами этих работ.

прямой  $\mathcal{L}$  с неким углом наклона  $\psi$ , то удобнее перейти к новой декартовой системе координат  $x', z'$ , связанной с естественной границей раздела сред, которая была введена ранее (3.6.17). В новых координатах  $x', z'$  функции, входящие в интегральные уравнения, будут зависеть только от  $x'$  и  $x'_0$ , так как по линии интегрирования  $z' = z'_0 = 0$ . Любая функция в новых координатах получается подстановкой вместо  $x \Rightarrow x' \sin \psi$  и вместо  $z \Rightarrow z' \cos \psi$ . Введем обозначения:

$$f_1(x'_0) = u_0(x_0) = A \sin\left(\frac{\pi x'_0}{a} \sin \psi\right) e^{ih^{(1)}x_0 \cos \psi}, \quad \text{где } A = \mathcal{E};$$

$$f_2(x'_0) = \frac{\partial u_0(x'_0)}{\partial n_{M_0}} = A \frac{\pi}{a} \sin \psi \cos\left(\frac{\pi x'_0}{a} \sin \psi\right) +$$

$$+ iAh^{(1)} \cos \psi \sin\left(\frac{\pi x'_0}{a} \sin \psi\right) e^{ih^{(1)}x'_0 \cos \psi}; \quad w(x') = \frac{\partial u(x')}{\partial n_M};$$

$$k_{11}(x', x'_0) = \frac{\partial}{\partial n} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2), \quad k_{12}(x', x'_0) = -(\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2),$$

$$k_{21}(x', x'_0) = \frac{\partial^2}{\partial n \partial n_{M_0}} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2), \quad k_{22}(x', x'_0) = -\frac{\partial}{\partial n_{M_0}} (\mathcal{G}^1 - \mathcal{G}^2).$$

Тогда система (3.6.49), (3.6.50) переписется в виде

$$u(x'_0) + \int_0^{\mathcal{L}} \{k_{11}(x', x'_0) u(x') + k_{12}(x', x'_0) w(x')\} dx' = f_1(x'_0),$$

$$w(x'_0) + \int_0^{\mathcal{L}} \{k_{21}(x', x'_0) u(x') + k_{22}(x', x'_0) w(x')\} dx' =$$

$$= f_2(x'_0), \quad x'_0 \in [0, \mathcal{L}].$$

Введем разбиение отрезка интегрирования  $[0, \mathcal{L}]$  точками  $0 = x'_1 < x'_2 < \dots < x'_{N+1} = L$  на  $N$  отрезков с шагами  $h_j = x'_j - x'_{j-1}$ . Заменяя интегралы в интегральных уравнениях (3.6.49), (3.6.50) на сумму интегралов по каждому отрезку  $h_j$  и считая, что на отрезке  $[x'_{j-1}, x'_j]$  функции  $u(x')$  и  $w(x')$  принимают постоянное значение  $u_j$  и  $w_j$ , получим следующее представление функций  $u$  и  $w$  через значение этих функций в заданной системе узлов  $x'_j$ :

$$u(x'_0) + \sum_{j=1}^N \left\{ u(x'_j) \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} k_{11}(x', x'_0) dx' + w(x'_j) \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} k_{12}(x', x'_0) dx' \right\} =$$

$$= f_1(x'_0),$$

$$w(x'_0) + \sum_{j=1}^N \left\{ u(x'_j) \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} k_{21}(x', x'_0) dx' + w(x'_j) \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} k_{22}(x', x'_0) dx' \right\} =$$

$$= f_2(x'_0). \quad (3.6.52)$$

Требую, чтобы на каждом отрезке  $[x'_{j-1}, x'_j]$  значения функций  $u$  и  $w$  принимали те же значения  $u_j$  и  $w_j$ , получаем систему линейных алгебраических уравнений относительно опорных значений  $u_j$  и  $w_j$ , которую можно кратко записать в матричном виде:

$$\mathbf{Z} + \mathbf{BZ} = \mathbf{F}, \quad (3.6.53)$$

где

$$\mathbf{Z} = \{u_1, u_2, \dots, u_N; w_1, w_2, \dots, w_N\},$$

$$\mathbf{F} = \{f_1(x'_{1+1/2}), f_1(x'_{2+1/2}), \dots, f_1(x'_{N+1/2}), f_2(x'_{1+1/2}), \dots, f_2(x'_{N+1/2})\};$$

$$\mathbf{B} = \begin{bmatrix} a_{11}^{11} & a_{1j}^{12} \\ a_{ij}^{21} & a_{ij}^{22} \end{bmatrix};$$

$$a_{ij}^{\nu\mu} = \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} k_{\nu\mu}(x'_{i+1/2}, x') dx', \quad \nu, \mu = 1, 2.$$

Последние интегралы вычисляются по формуле трапеций с заданным числом узлов. При этом логарифмическая особенность ядра интегрируется аналитически. Система (3.6.53) может быть решена методом Жордана с выбором главного элемента. В результате получают значения  $u$  и  $w = \partial u / \partial n$  на границе раздела сред, по которым далее можно определить поле внутри волновода и его интегральные характеристики: коэффициенты отражения и прохождения.

Коэффициенты отражения в случае одной границы раздела сред имеют тот же вид, что и коэффициенты отражения для трехслойной среды (3.6.15). Для вычисления коэффициентов отражения по формуле (3.6.15) стоящий в ней интеграл разбивается на сумму  $(N+1)$  интегралов, в каждом из которых значения  $u$  и  $\partial u / \partial n$  в середине отрезков разбиения найдены в результате решения системы интегральных уравнений, и эти значения выносятся за знак интеграла:

$$R_n = \frac{i}{a \sqrt{2} h_n^{(1)}} \left\{ \sum_{j=1}^N \frac{\partial u(x'_{j+1/2})}{\partial n} \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} \sin\left(\frac{\pi n x'}{a} \cos \psi\right) e^{ih_n^{(1)} x' \sin \psi} dx' + \right.$$

$$+ \sum_{j=1}^N u(x'_{j+1/2}) \int_{x'_j}^{x'_{j+1}} \left[ ih_n^{(1)} \cos \psi \sin\left(\frac{\pi n x'}{a} \cos \psi\right) e^{ih_n^{(1)} x' \sin \psi} + \right.$$

$$\left. \left. + \sin \psi \frac{\pi n}{a} \cos\left(\frac{\pi n x'}{a} \cos \psi\right) e^{ih_n^{(1)} x' \sin \psi} \right] dx' \right\}. \quad (3.6.54)$$

Интегралы, входящие в (3.6.54), вычисляются аналитически и в результате находится искомое значение  $R_n$ .

Таким образом, рассмотренный метод решения поставленной задачи дифракции, основанный на получении системы интегральных уравнений, состоит в определении решения этой системы с последующим расчетом поля всюду внутри волновода и интегральных характеристик поля. Точность метода определяется числом точек аппроксимации неизвестных функций  $u$ ,  $w = \partial u / \partial n$ . Для конкретной задачи она зависит от угла наклона  $\psi$  и диапазона частот падающего поля  $\kappa = a/\lambda$ . При проведении практических расчетов для выбранных значений угла  $\psi$  и частоты  $\kappa$  достаточное число точек аппроксимации, как обычно, выбирается с помощью методических расчетов. Например, при  $\psi = 50^\circ$  и  $\kappa = 0,7$  коэффициент отражения основной волны равен

$$\begin{cases} |R_1| = 0,40658 \text{ при } 20 \text{ точках аппроксимации,} \\ |R_1| = 0,40407 \text{ при } 40 \text{ точках аппроксимации,} \end{cases}$$

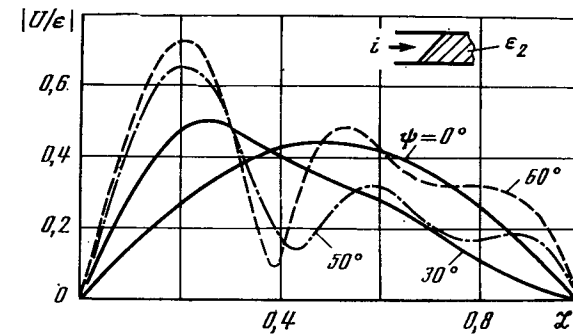
т. е. для расчетов с погрешностью не более 1% достаточно ограничиться 20 точками аппроксимации.

Для вычисления полей с точностью 0,5% обычно достаточно выбрать 20 точек разбиений на границе, равной длине волны в свободном пространстве (см., например, [77]). Стало быть, порядок системы линейных алгебраических уравнений, позволяющей найти поля, определяется величинами  $\psi$  и  $\kappa$ .\*

Для решения систем линейных алгебраических уравнений высокого порядка целесообразно применять итерационные методы, поскольку общее число вычислительных операций определяется числом итераций. При этом очень важно иметь хорошее нулевое приближение, в качестве которого для данного класса задач естественно выбрать распределение поля по методу плоских волн. Следует заметить, что область применимости метода плоских волн расширяется с ростом частоты (3.6.36).

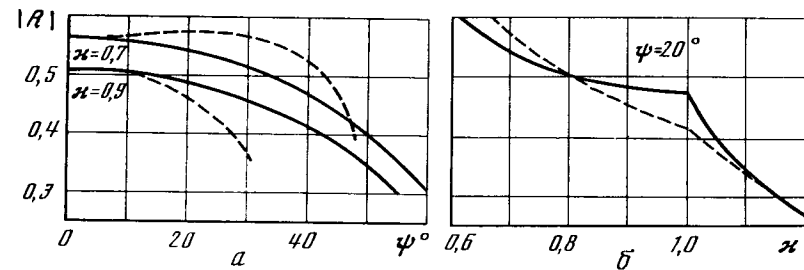
3.6.6. *Сопоставление прямого метода и приближенного метода плоских волн* позволяет сделать заключение о границах применимости метода плоских волн (п.3.6.2). Вначале рассмотрим случай одной границы раздела сред. На рис. 69 приведены зависимости  $|u/\epsilon|$  вдоль границы раздела  $\mathcal{L}$  для разных углов наклона  $\psi$  при  $\kappa = 0,7$  для  $\epsilon_1 = 1$ ,  $\epsilon_2 = 6,8$ . Для вертикальной границы раздела ( $\psi = 0^\circ$ ) электрическое поле распределено по синусоидальному закону. При соблюдении условия (3.6.36) распределение поля незначительно отличается от синусоидального распределения. Это имеет место для  $\psi \leq 30^\circ$ , и чем больше  $\kappa$ , тем меньшие изменения поля наблюдаются. При падении на границу раздела переот-

\* Считая, что длина волны падающего поля меняется в полосе одноволнового режима работы входного волновода, т. е.  $0,5 < \kappa < 1$ , получим, что при 80-м порядке системы линейных алгебраических уравнений в случае одной границы раздела, что угол  $\psi$  может изменяться от 0 до  $60^\circ$ . Для больших углов наклона, а также при увеличении  $\kappa$  надо увеличивать порядок системы линейных алгебраических уравнений. Отметим, что наибольший порядок решения систем на ЭВМ БЭСМ-6 равен 200. Отсюда следует, что при больших частотах  $\kappa \gg 1$  и углах наклона  $\psi$ , близких к  $90^\circ$ , реализация метода интегральных уравнений затруднительна.



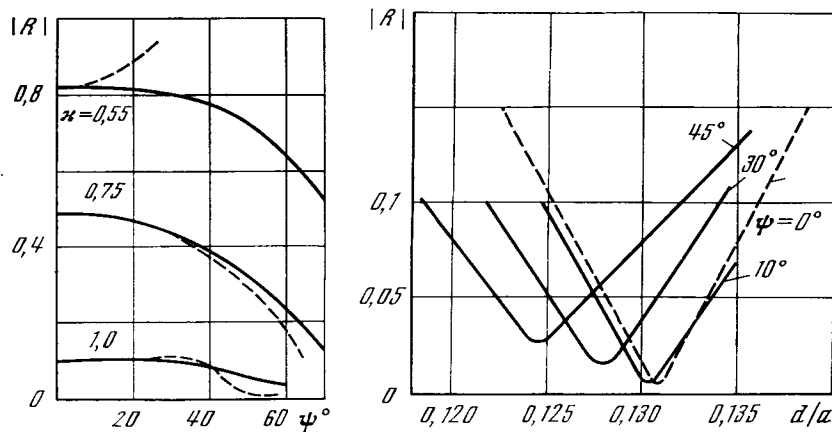
Р и с. 69. Сопоставление результатов [расчетов по прямому методу и приближенного метода плоских волн (§ 3.6; п. 3.6.6)]

раженных волн поле вдоль границы носит интерференционный характер и число осцилляций растет с увеличением угла наклона  $\psi$ . Появление осцилляций свидетельствует о том, что концепция плоских волн становится неприменимой. Следует отметить, что максимум модуля электрического поля на границе в результате интерференции может существенно превосходить значение поля при отсутствии наклона, что необходимо учитывать при рассмотрении электрической прочности подобных систем. Сравнивая зависимости коэффициента отражения при наличии одной границы раздела сред, полученные прямым методом и методом плоских волн, следует отметить, что в частотном диапазоне  $0,5 < \kappa \leq 1,5$  не удается получить хорошего согласования ( $|R| \leq 0,1$ ), и потому нельзя говорить о расширении границ применимости соотношения (3.6.36) [304]. На рис. 70, а приведены зависимости модуля коэффициента отражения от угла наклона  $\psi$  для  $\kappa = 0,7$  и  $\kappa = 0,9$ . Пунктиром нанесены те же результаты, полученные методом плоских волн. На рис. 70, б приведены частотные зависимости модуля коэффициента отражения от  $\kappa$  для угла наклона  $\psi = 20^\circ$ , полученные прямым методом (сплошная линия) и методом плоских волн (штриховая линия).



Р и с. 70. Зависимость модуля коэффициента отражения от угла наклона  $\psi$  для двух значений  $\kappa$  (а) и от  $\kappa$  для  $\psi = 20^\circ$  (б)





Р и с. 71. К определению пределов применимости метода плоских волн:  $\epsilon_2 = 6,8 (1 + i10^{-3})$ ,  $d/a = 0,1$

Р и с. 72. Зависимость модуля коэффициента отражения от толщины пластины для разных углов наклона  $\psi$

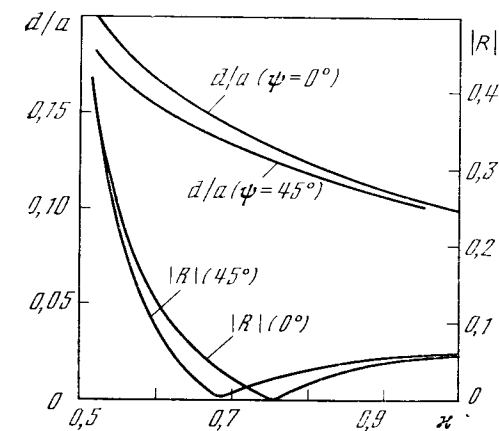
Пределы применимости метода плоских волн для двух границ раздела сред иллюстрирует рис. 71, на котором представлена зависимость модуля коэффициента отражения от угла наклона  $\psi$  при  $\kappa = 0,55; 0,75$  и  $1,0$ . Как и ожидалось, метод плоских волн при малых уровнях отражения применим вплоть до углов наклона  $\psi \leq 60^\circ$  и область применимости метода растет с увеличением частоты  $\kappa = a/\lambda$ .

3.6.7. *Результаты расчетов calorиметрических нагрузок с наклонными диэлектрическими окнами в плоскости Н.* Основной особенностью нагрузок с вертикальными диэлектрическими окнами является резонансный характер зависимости коэффициента отражения от частоты. Исследование этой же зависимости представляет интерес и для нагрузок с наклонными окнами. Среди прочих зависимостей выделим две, как нам представляется, основных. Во-первых, изменение характера согласования при наклонном расположении пластины и, во-вторых, влияние наклона пластины на выбор ее толщины с точки зрения получения наилучшего согласования.

Физические представления, основанные на концепции плоских волн, дают основания предположить, что наклон пластины мало влияет на выбор толщины. Действительно, расчеты, проведенные как строгим методом, так и методом плоских волн, показывают, что условия наилучшего согласования по толщине пластины связаны с длиной волны в диэлектрике пластины и выбор толщины приближенно может быть сделан так же, как и в § 3.2:  $(d/a)_{\text{opt}} = \lambda_{g2}/4a$ . Это соотношение выполняется тем лучше, чем меньше длина волны падающего поля, и при малых  $\lambda = a/\kappa$  справедливо соотношение

$(d/a)_{\text{opt}} = \lambda_0/4a\sqrt{\epsilon_2} = 1/4\kappa\sqrt{\epsilon_2}$ . На рис. 72 представлены зависимости модуля коэффициента отражения от толщины пластины ( $\epsilon_2 = 6,8 (1 + i0,001)$ ) при углах наклона  $\psi = 45; 30; 10$  и  $0^\circ$  на средней частоте одноволнового режима работы волновода  $\kappa = 0,75$ . Расчеты проведены методом интегрального уравнения. Из этих данных следует, что в резонансной частотной области  $0,5 < \kappa < 1,0$  для нагрузки с наклонной диэлектрической пластиной есть небольшое уменьшение значения толщины пластины  $d/a$ , при которой существует минимум коэффициента отражения, по сравнению со значением  $d/a$  при отсутствии наклона ( $\psi = 0$ ). При фиксированной частоте это уменьшение значения  $d/a$  зависит от угла наклона  $\psi$  и стремится к нулю при  $\psi \Rightarrow 0$ . Однако, как было отмечено ранее при рассмотрении метода плоских волн (формула (3.6.37)), это изменение толщины весьма незначительное и значение модуля коэффициента отражения тоже изменяется мало. На рис. 73 приведена расчетная зависимость минимального значения модуля коэффициента отражения  $|R|_{\text{min}}$  при оптимальном выборе толщины пластины на каждой частоте  $\kappa$ , которая приведена на этом же рис. 73:  $(d/a)_{\text{min}} = f(\kappa)$ . Эти зависимости получены строгим методом для  $\epsilon_2 = 6,8 (1 + i10^{-3})$ . Для сравнения приведены аналогичные зависимости при  $\psi = 0$ . Эти результаты показывают, что небольшой сдвиг оптимального значения толщины пластины в сторону уменьшения наблюдается во всем одноволновом режиме работы волновода и тем меньше, чем больше частота  $\kappa$ .

Следует отметить, что так же, как и ранее (§ 3.2), зависимость  $|R|_{\text{min}} = f(\kappa)$  является огибающей частотных зависимостей модуля коэффициента отражения при фиксированной толщине пластины  $d/a$ .



Р и с. 73. Зависимость минимального значения модуля коэффициента отражения при оптимальной толщине окна

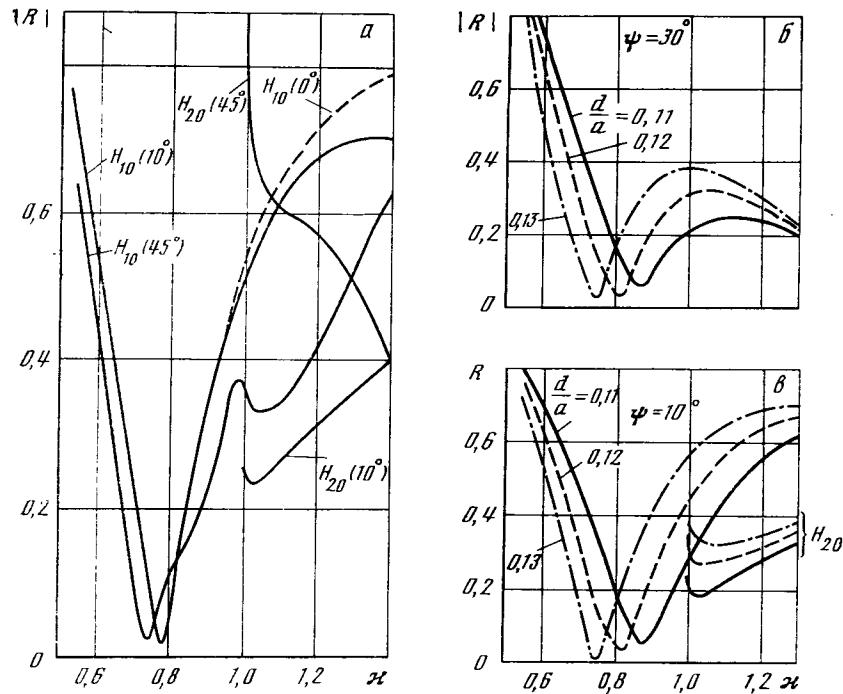


Рис. 74. Частотная характеристика нагрузки с диэлектрическим окном (строгий метод) (а) и с диэлектрическими окнами (метод плоских волн) (б)

Таким образом, расчеты по методу интегрального уравнения показывают, что при практическом проектировании нагрузок с наклонным окном в  $H$  плоскости толщина пластины определяется диэлектриком пластины и должна быть равна или немного меньше четверти длины волны в волноводе с заполнением  $\epsilon_2$ .

Основной характеристикой нагрузки является частотная, т. е. зависимость модуля коэффициента отражения при изменении частоты падающего поля. При этом исследование частотной характеристики нагрузки проводится при толщине диэлектрической пластины, близкой к оптимальной. На рис. 74, а, б представлены частотные характеристики нагрузки, для которой, как и ранее, зафиксированы  $\epsilon_1 = 1$  для входного волновода,  $\epsilon_3 = 74 (1 + i0,11)$  для поглощающего волновода,  $\epsilon_2 = 6,8 (1 + i10^{-3})$ . Рис. 74, а иллюстрирует результаты расчетов для фиксированной толщины  $d/a = 0,125$  для разных углов наклона  $\psi = 10$  и  $45^\circ$ , а рис. 74, б — для различных значений толщины пластины  $d/a = 0,11; 0,12; 0,13$  для фиксированного угла наклона  $\psi = 30^\circ$  (рис. 74, а) и  $\psi = 10^\circ$  (рис. 74, б). Результаты рис. 74, а получены строгим методом, а рис. 74, б методом плоских волн, но при этом обеспечена графическая точность результатов обоими методами. Из этих

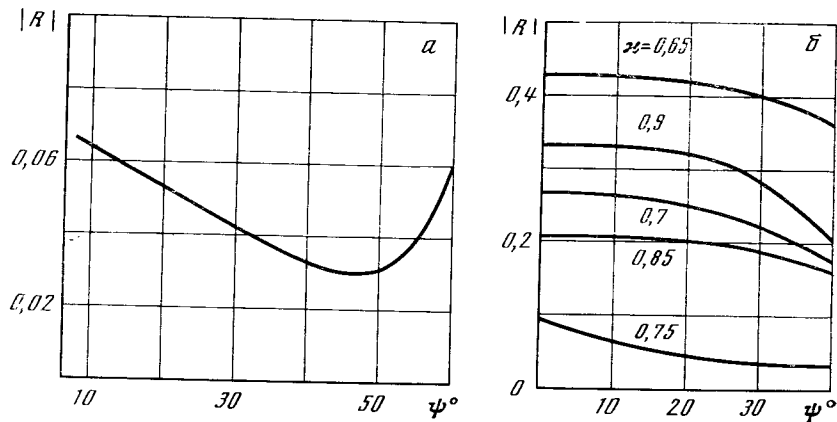
рисунков следует, что общий ход частотных характеристик нагрузок с наклонными окнами аналогичен одномодовому режиму, т. е. при  $\psi = 0^\circ$ , для которого зависимость приведена на рис. 74, а штриховой линией. При  $\psi > 0^\circ$  влияние высших типов волн в одноволновом режиме работы волновода приводит к расширению полосы согласования. При частотах  $k > 1$  высшие типы существенно изменяют общую картину отражения даже при малых углах наклона. Рис. 74, а иллюстрирует, что при  $k > 1$  даже при  $\psi = 10^\circ$  появление волны  $H_{20}$  приводит к заметному уменьшению модуля коэффициента отражения по сравнению с модулем коэффициента отражения при  $\psi = 0^\circ$ , хотя при  $k < 1$  эти зависимости практически совпадают. При  $\psi = 45^\circ$  изменение модуля коэффициента отражения волны  $H_{10}$  при  $k > 1$  еще более заметно по сравнению с  $\psi = 0^\circ$  и характерны резонансные явления, связанные с появлением высших типов волн. Результаты, приведенные на рис. 74, б, показывают, что влияние высших типов волн при  $\psi = 10^\circ$  приводят к уменьшению модуля коэффициента отражения волны  $H_{10}$  тем заметнее, чем меньше модуль коэффициента отражения волны  $H_{20}$ .

Анализ частотных характеристик нагрузок при различных углах наклона  $\psi$  показывает, что с увеличением угла наклона увеличивается полоса согласования нагрузки, хотя абсолютный минимум модуля коэффициента отражения имеет место при  $\psi = 0^\circ$ . Величина полосы согласования в процентах  $|\Delta f/f| \cdot 100$  для нагрузок с  $\psi = 60, 45$  и  $0^\circ$  при фиксированной толщине  $d/a = 0,125$  на уровне согласования  $|R| \leq 0,1$ , к. с. в.  $\sim 1,2$  и  $|R| \leq 0,07$ , к. с. в.  $\leq 1,15$  приведена в табл. 3.5.

При уменьшении толщины пластины полоса согласования нагрузки сдвигается в сторону более высоких частот. Это соответствует сдвигу минимума частотной характеристики нагрузки с вертикально расположенной диэлектрической пластиной при таком же изменении толщины пластины.

Таким образом, угол наклона пластины  $\psi$  является основным параметром при проектировании широкополосных нагрузок при оптимальном выборе толщины диэлектрической пластины. На последующих рис. 75, а, б представлены зависимости модуля коэффициента отражения при изменении угла наклона  $\psi$  для фиксированной толщины пластины  $d/a$  и диэлектрической проницаемости  $\epsilon_2$  при различных значениях частоты падающего поля  $k$ . С увеличением угла наклона пластины модуль коэффициента отражения монотонно уменьшается. Следует отметить, что зависимость  $|R| = f(\psi)$  может иметь минимум при определенном угле наклона  $\psi = \psi_0$ , если для данного угла наклона диэлектрической пластины  $\psi$  и частоты падающего поля  $k$  толщина пластины выбрана вблизи  $\lambda_{g2}/4$ .

Этот результат расчета показан на рис. 75, а, он получен точным методом, где при  $d/a = 0,125$  и  $k = 0,75$  в точке  $\psi = 45^\circ$  достигается минимум модуля коэффициента отражения. Этот резуль-



Р и с. 75. Зависимость модуля коэффициента отражения от угла наклона  $\psi$  для  $d/a = 0,125$ ,  $\kappa = 0,75$ ,  $\epsilon_2 = 6,8 (1 + i 10^{-3})$  (а) и для различных значений  $\kappa$  при  $\epsilon_2 = 6,8 (1 + i 10^{-3})$  (б)

тат соответствует минимуму огибающей кривой, проведенной через точки минимумов частотных характеристик нагрузки, что было выше показано на рис. 73. Результаты, приведенные на рис. 75, б, получены методом плоских волн. Отметим, что при углах наклона  $\psi \Rightarrow 90^\circ$  могут возникнуть осцилляции модуля коэффициента отражения, связанные с резонансной длиной волны границы раздела сред  $L = a/\cos \psi$ . При углах  $\psi \Rightarrow 90^\circ$  следует воспользоваться результатами расчета, полученными методом поперечных сечений (§ 3.3).

Т а б л и ц а 3.2

$\kappa$	0,60	0,70	0,75	0,90	1,00
$ \bar{R} $	0,5317	0,1658	0,0000	0,4475	0,5970
$ R $	0,5141	0,1563	0,0231	0,4457	0,6078
$\Delta =  \bar{R}  -  R $	0,0176	0,0095	0,0231	0,0018	0,0108

Т а б л и ц а 3.3

$\kappa$	0,625	0,665	0,705	0,755	0,815	0,885	0,965	1,070	1,200
$d/a$ без потерь	0,1612	0,1505	0,1413	0,1313	0,1210	0,1109	0,1014	0,0911	0,0809
$d/a$	0,1600	0,1500	0,1400	0,1300	0,1200	0,1100	0,1000	0,0900	0,0800
$ R(\kappa, d/a) $	0,085	0,050	0,028	0,015	0,035	0,045	0,062	0,075	0,083

Т а б л и ц а 3.4

$\kappa$	0,6	0,75	1,0
$\bar{z}/\lambda$	0,413	0,468	0,495

Т а б л и ц а 3.5

$\psi$	60°	45°	0°
$ R  \leq 0,1$	27%	12%	8%
$ R  \leq 0,07$	18%	8%	5,5%

### § 3.7

#### Диэлектрическая призма в изломе плоского широкого волновода

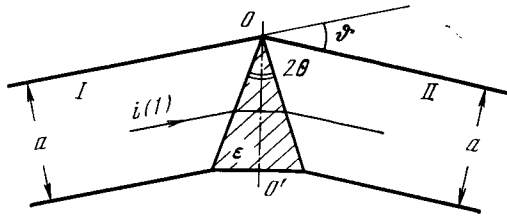
3.7.1. Диэлектрическая призма, при помощи которой преодолеваются изломы линии на относительно небольшие углы  $\vartheta$  ( $\vartheta/\pi \ll 1$ ), является одним из элементов квазиоптической линии связи. Впервые этот элемент был предложен в работе [306]. Имеются также экспериментальные данные об успешном применении диэлектрической призмы для преодоления излома однопроводной линии поверхностной волны [393], а также угловой поворот плоской линии поверхностной волны [394].

Элементарный расчет призмы методами геометрической оптики не дает возможности оценить эффективность ее использования в качестве поворотного элемента линии, так как при этом нельзя определить амплитуды паразитных волн, возникающих при падении на призму одной из собственных волн волновода. Поэтому детальное исследование свойств призмы в изломе представляется целесообразным; этому вопросу и посвящается настоящий параграф [307].

3.7.2. Постановка задачи. Принцип действия призмы в изломе волновода. Принцип взаимной компенсации паразитных волн. Будем рассматривать плоский ( $\partial/\partial z \equiv 0$ ) широкий ( $ka \Rightarrow \infty$ ) волновод, имеющий излом в точке  $O$  на некоторый угол  $\vartheta$  ( $\vartheta/\pi \ll 1$ ); в изломе помещается диэлектрическая призма (рис. 76, 77). Слева, со стороны волновода I, на призму падает одна из волноводных волн плоского волновода:

$$E_{xi} \equiv u_i = \sin \alpha y \exp \{ihz\}, \quad \alpha = n\pi/a, \quad n = 1, 2, \dots, \\ h^2 = k^2 - \alpha^2.$$

Стенки волновода идеально проводящие, и на них выполняется граничное условие Дирихле  $E_x = u = 0$ . Предполагается, что призма изготовлена из идеального ( $\text{Im } \epsilon = 0$ ) диэлектрика. Вол-



Р и с. 76, 77. Излом плоского широкого волновода с преломляющей диэлектрической призмой

новое число  $k$  имеет малую положительную мнимую часть  $\text{Im } k > 0$ .

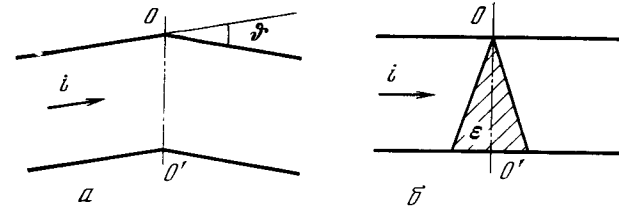
Итогом нашего рассмотрения должно явиться определение амплитуд паразитных волн, уходящих в правый волновод II (прямые волны) и возвращающихся в левый волновод I (обратные волны). При этом наиболее интересны данные об изменении энергии падающей волны по прохождении ею призмы; детальное же распределение энергии между паразитными типами волн в круге задач геометрической оптики широких волноводов интереса не представляет.

С точки зрения геометрической оптики принцип действия призмы в изломе волновода состоит в следующем. Плоская волна (луч I) падает на левую грань призмы, преломляется в ней, проходит через призму нормально плоскости ее симметрии  $OO'$  и, наконец, преломляясь на правой грани, попадает в волновод II. Основное соотношение геометрической оптики призмы, связывающее угол отклонения луча призмой  $\vartheta$  и угол при ее вершине  $2\theta$  с величиной диэлектрической проницаемости призмы  $\epsilon$ , имеет вид (ср. § 1.1)

$$\vartheta = 2\arcsin(\sqrt{\epsilon} \sin \theta) - 2\theta. \quad (3.7.1)$$

Очевидно, что условия работы призмы в реальном изломе широкого волновода отличаются от условий геометрикооптического приближения. Мы попытаемся выяснить принцип действия призмы в изломе на примере излома прямоугольного волновода в плоскости  $H$  при падении на призму волны типа  $H_{10}$ .

Поставленная задача имеет характерный параметр малости  $\vartheta/\pi \ll 1$ , и в соответствии с (3.7.1) мы, кроме того, примем  $\epsilon - 1 \ll 1$ . Таким образом, мы имеем наложение двух малых неоднородностей: излома волновода на угол  $\vartheta$  (рис. 78, а) и призмы с  $\epsilon \sim 1$  в прямолинейном волноводе (рис. 78, б). Нетрудно показать, например, используя конформные отображения, что в первом порядке по  $\vartheta$  и  $\epsilon - 1$  амплитуды паразитных волн, порождаемые изломом и призмой в прямолинейном волноводе, независимы. Излом волновода на малый угол детально рассмотрен в [157], где показано, что выражение для амплитуд паразитных волн имеет



Р и с. 78. К установлению принципа взаимной компенсации паразитных волн, порожденных изломом (без призмы) волновода на угол  $\vartheta$  (а) и призмой в прямолинейном волноводе (без излома) (б)

вид ( $h \sim k$ )

$$F_{ij}^{(c)} = -\frac{i8}{\pi^2} \frac{n}{(n^2-1)^2} ka\vartheta + O(\vartheta^2) \quad (3.7.2)$$

и  $n = 2m$  ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), т. е. в этом случае возникают волны типа  $H_{n0}$  с четным первым индексом.

С другой стороны, амплитуды паразитных волн, порождаемых призмой в прямолинейном волноводе (рис. 78, б), выражаются, как легко видеть, через интеграл по объему призмы (ср. § 1.3)

$$F_{ij}^{(e)} = \frac{i(\epsilon-1)}{2h_j} \int_V E^i E^j dV. \quad (3.7.3)$$

Интеграл (3.7.3) без труда вычисляется в борновском приближении (см. § 1.3), так как условие  $\epsilon - 1 \ll 1$  позволяет в первом приближении заменить в подынтегральном выражении (неизвестное) поле  $E^i$  полем падающей волны  $E^i$ . Результат интегрирования имеет вид

$$F_{ij}^{(e)} = +\frac{i8}{\pi^2} \frac{n}{(n^2-1)^2} ka(\epsilon-1)\theta + O((\epsilon-1)^2)^*. \quad (3.7.4)$$

При этом, как и в случае излома без призмы, возникают только волны типа  $H_{n0}$  ( $n = 2m$ ,  $m = 1, 2, \dots$ ). Таким образом, излом волновода и призма в прямолинейном волноводе возбуждают паразитные волны одного и того же типа с одними и теми же индексами, и их амплитуды имеют разные знаки и одинаковую зависимость от номера волны:  $F_{ij}^{(c)} = -F_{ij}^{(e)}$ . Следовательно, для компенсации паразитных волн в старшем порядке по  $\vartheta$  и  $\epsilon - 1$ , как видно из сравнения (3.7.2) и (3.7.4), необходимо выполнение условия

$$\vartheta = (\epsilon - 1)\theta. \quad (3.7.5)$$

\* Результат (3.7.4) по существу представляет собой первый член ряда Неймана по малому параметру  $\epsilon - 1$ . Например, в [469] показано, что первый член ряда Неймана соответствует приближению Релея — Борна (см. также § 1.3).

Обратимся теперь к формуле (3.7.1) геометрической теории призмы. Записав ее для случая  $\theta/\pi \ll 1$  и  $\varepsilon - 1 \ll 1$ , мы придем снова к соотношению (3.7.5).

Итак, условие компенсации паразитных волн (3.7.5), создаваемых изломом (3.7.2) и призмой в прямолинейном волноводе (3.7.4), совпадает с требованием геометрической оптики (при симметричном прохождении луча через призму). Стало быть, принцип действия призмы в изломе состоит во взаимной компенсации паразитных волн, порождаемых изломом и призмой.

Полученный здесь общий принцип взаимной компенсации паразитных волн носит интегральный характер в отличие, например, от случая, когда коэффициенты связи каждого поперечного сечения обязаны изменению свойств диэлектрической вставки гасятся подбором коэффициента связи за счет изменений поперечного размера волновода [157].

Проведенное рассмотрение отличается физической наглядностью и описывает принцип действия призмы в изломе широкого волновода. К сожалению, при этом основной вопрос об изменении амплитуды падающей волны остается открытым, и требуется дополнительное рассмотрение. Кроме того, полученные формулы неверно описывают переход к геометрической оптике ( $ka \Rightarrow \infty$ ), что довольно естественно, так как выражения (3.7.2), (3.7.4) для такого перехода теряют смысл. Действительно, если, например, на изломе (без призмы) падает плоская волна  $\lambda \Rightarrow 0$ , то в правом волноводе уже не будет этой плоской волны, а ее энергия перейдет в волноводную (паразитную) волну, соответствующую углу Бриллюэна, равному  $\theta$ , и возникает, кроме того, еще целый спектр других паразитных волн, обязанных своим появлением дифракции падающей волны на изломе. Аналогичное положение имеет место и при  $ka \Rightarrow \infty$  для призмы в прямолинейном волноводе.

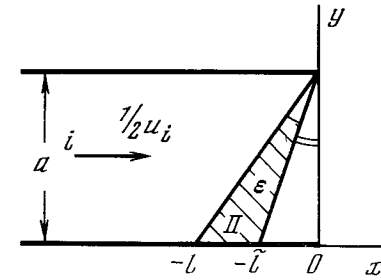
3.7.3. Метод продольных сечений. 1. Вернемся к плоской задаче. Задача о призме в изломе волновода (рис. 79), очевидно, эквивалентна наложению следующих двух задач: а) когда слева и справа на призму падают две волны с одинаковой амплитудой (равной половине амплитуды падающей волны) и противоположными фазами, б) когда справа и слева на призму падают две волны с одинаковыми амплитудами и фазами. Тогда случай а) соответствует граничному условию Дирихле на «металлизированной» плоскости симметрии призмы  $00'$ ; в случае б) на  $00'$  должно выполняться граничное условие Неймана (рис. 79)\*.

Итак, пусть решение общей задачи есть

$$u = \varphi_i + \psi_i, \quad (3.7.6)$$

где  $\varphi_i$  и  $\psi_i$  — суть решения задач а) и б) соответственно. Полное

\* Некоторое изменение геометрии задачи (рис. 79) по сравнению с рис. 78, а несущественно для задачи в целом, но облегчает рассмотрение.



Р и с. 79. К расчету излома волновода с призмой методом продольных сечений

поле  $u$  должно удовлетворять уравнению Гельмгольца

$$(\Delta + k^2(y, z))u(y, z) = 0, \quad (3.7.7)$$

граничному условию Дирихле  $u = 0$  на стенках волновода  $S$  и отсутствию приходящих слева волн (кроме падающей).

Функции  $\varphi$  и  $\psi$  должны удовлетворять уравнению (3.7.7), граничному условию  $\varphi = \psi = 0$  на стенках волновода и установленным выше граничным условиям на металлизированной плоскости  $00'$  (разным для задач а) и б)). Задачи а) и б) для удобства ниже будут рассмотрены отдельно.

2. Первая поляризация ( $u(y, z) = 0$  для  $(y, z) \in S$ ).

Задача а. Полное поле задачи а)  $\varphi_t$  в области I (рис. 79) имеет вид

$$\varphi_t = \varphi_i + \varphi, \quad (3.7.8)$$

а в области II

$$\varphi_t = \varphi, \quad (3.7.9)$$

где  $\varphi_i$  — падающее поле;  $\varphi$  — дифрагированное поле. Полное поле удовлетворяет уравнениям

$$\begin{aligned} (\Delta + k_j^2)\varphi_t &= 0, & j &= 1, 2, \\ k_1 &= k, & k_2 &= k\sqrt{\varepsilon}. \end{aligned} \quad (3.7.10)$$

Введем новые переменные  $\xi$  и  $\eta$  условиями  $z = l\xi$  и  $y = a\eta$ . Тогда уравнение (3.7.10) перепишется в виде

$$\varphi^{(\xi\xi)} + \hat{k}^2\varphi = -\mu\varphi^{(nn)}, \quad (3.7.11)$$

где  $\mu = (l/a)^2 \ll 1$  и  $\hat{k} = kl$ . Величина  $\hat{k}^2 = (kl)^2 = \mu(ka)^2$  представляет собою произведение двух независимых параметров  $\mu \ll 1$  и  $ka \gg 1$ , и в дальнейшем предполагается, что  $\hat{k} \sim 1$ .

Решение уравнения (3.7.11) будем искать в виде следующего разложения по малому параметру  $\mu$ :

$$\varphi(\xi, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varphi_k(\xi, \eta). \quad (3.7.12)$$

Подставляя (3.7.12) в (3.7.10), получим следующее рекуррентное соотношение для определения  $\varphi_k(\xi, \eta)$ :

$$\varphi_{j,k}^{(\xi\xi)}(\xi, \eta) + \hat{k}_j^2 \varphi_{j,k}(\xi, \eta) = F_{j,k-1}(\xi, \eta), \quad (3.7.13)$$

где

$$F_{j,k-1}(\xi, \eta) = -\varphi_{j,k-1}^{(nn)}(\xi, \eta); \quad F_{j,-1}(\xi, \eta) = 0; \quad j = 1, 2.$$

Граничными условиями для (3.7.13) будут непрерывность  $\varphi$  и ее нормальной производной на линии  $\xi = \xi_1 = \eta - 1$  и  $\varphi = 0$  при  $\xi = \xi_2 = (l/l)(\eta - 1)$ . Условие «сшивания» функции  $\varphi$  на границе  $\xi = \eta - 1$  дает

$$u_i(\xi_1, \eta) + \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varphi_{1,k}(\xi_1, \eta) = \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varphi_{2,k}(\xi_1, \eta). \quad (3.7.14)$$

Учитывая выражения для нормальных производных на линиях  $\xi = \xi_1$  и  $\xi = \xi_2$  соответственно

$$l(1 + \mu)^{1/2} (\partial/\partial \eta) = -(\partial/\partial \xi) + \mu (\partial/\partial \eta), \\ l(1 + \tilde{\mu})^{1/2} (\partial/\partial \eta) = -(\partial/\partial \xi) + (l/l)\tilde{\mu} (\partial/\partial \eta); \quad \tilde{\mu} = (l/l)\mu, \quad (3.7.15)$$

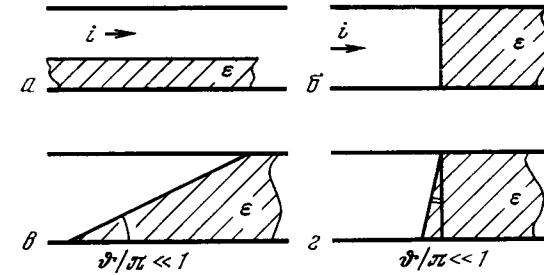
из условия сшивания нормальных производных функций  $\varphi$  при  $\xi = \xi_1$  будем иметь следующее выражение:

$$-u_i^{(\xi)}(\xi_1, \eta) + \mu u_i^{(n)}(\xi_1, \eta) - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varphi_{1,k}^{(\xi)}(\xi_1, \eta) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \varphi_{1,k-1}^{(n)}(\xi_1, \eta) = - \sum_{k=0}^{\infty} \mu^k \varphi_{2,k}^{(\xi)}(\xi_1, \eta) + \\ + \sum_{k=1}^{\infty} \mu^k \varphi_{2,k-1}^{(n)}(\xi_1, \eta). \quad (3.7.16)$$

Здесь учтено первое выражение из (3.7.15).

Представление решения формулами (3.7.12) и (3.7.13) соответствует отысканию решения в некотором *продольном сечении* ( $\eta = \text{const}$ ), где оно суть известное решение вспомогательной задачи (задачи сравнения; [157]) о падении электромагнитной волны на слой диэлектрика, лежащего на идеальном экране. Полученное таким образом решение зависит от координаты  $\eta$  как от параметра. В соответствии с этим метод расчета, использованный здесь, может быть назван *методом продольных сечений* (ср. § 3.2; [327]).

В идее метода много общего с *методом поперечных сечений* [157]. Действительно, рассмотрим схемы рис. 80. Здесь на всех четырех схемах изображен плоский волновод, регулярный в направлении, нормальном плоскости чертежа. Очевидно, что собственные волны систем *a, б* распространяются в плоскости чертежа без преобразования в другие типы волн (в правой верхней схеме *б* будет иметь место отраженная волна того же самого типа, что и падаю-



Р и с. 80. Сопоставление двух структур: с плавной (а) и резкой нерегулярностями (в) и соответствующие им регулярные структуры (а и б)

щая). Структура на рис. 80, *в* представляет систему, характеризующую медленным изменением свойств в направлении распространения. Потери на преобразование здесь малы (§ 3.3; 3.5). На рис. 80, *г* представлена система, свойства которой в направлении распространения волны меняются быстро, однако очевидно, что при малом отклонении плоскости границы диэлектрик — воздух от вертикали эффект преобразования будет малым (ср. § 3.5). Изложенные качественные соображения являются, по-видимому, необходимым и достаточным основанием для разработки метода, позволяющего рассчитывать такого рода системы, имеющие большой практический интерес (например, диэлектрическая линза в широком волноводе, линза в свободном пространстве и т. п.).

Вернемся к уравнению (3.7.13) и найдем его решение для  $k$ -го приближения, считая  $(k-1)$ -е приближение известным. Граничными условиями для (3.7.13) в соответствии с (3.7.14) и (3.7.16) теперь будут условия

$$\delta_{0k} u_i(\xi_1, \eta) + \varphi_{1,k}(\xi_1, \eta) = \varphi_{2,k}(\xi_1, \eta), \\ -\delta_{0k} u_i^{(\xi)}(\xi_1, \eta) + \delta_{1k} u_i^{(n)}(\xi_1, \eta) - \varphi_{1,k}^{(\xi)}(\xi_1, \eta) + \\ + (1 - \delta_{0k}) \varphi_{1,k-1}^{(n)}(\xi_1, \eta) = -\varphi_{2,k}^{(\xi)}(\xi_1, \eta) + (1 - \delta_{0k}) \varphi_{2,k-1}^{(n)}(\xi_1, \eta), \quad (3.7.17)$$

$$\varphi_{2,k}(\xi_2, \eta) = 0,$$

где  $\delta_{nn} = 1$ ;  $\delta_{nk} = 0$  ( $n \neq k$ ).

Общим решением для (3.7.13), как легко видеть, будут следующие выражения:

$$\varphi_{1,k}(\xi) = \frac{1}{k_1} \int_{-\infty}^{\xi} \sin \hat{k}_1(\xi - \tau) F_{1,k-1}(\tau) d\tau + C e^{-i\hat{k}_1 \xi}, \quad (3.7.18) \\ \varphi_{2,k}(\xi) = \frac{1}{k_2} \int_{-\infty}^{\xi} \sin \hat{k}_2(\xi - \tau) F_{2,k-1}(\tau) d\tau + D_1 e^{i\hat{k}_2 \xi} + D_2 e^{-i\hat{k}_2 \xi}. \quad (3.7.19)$$

Нижний предел интеграла в (3.7.18) (частное решение неоднородного уравнения (3.7.17)) выбран так, чтобы удовлетворялось условие  $\varphi_1(-\infty) = 0$  в (3.7.17). Для определения постоянных  $C, D_{1,2}$  из (3.7.17)–(3.7.19) имеем систему уравнений

$$\begin{aligned} C e^{-i\hat{k}_1 \xi_1} - D_1 e^{i\hat{k}_2 \xi_1} - D_2 e^{-i\hat{k}_2 \xi_1} &= b_1(\xi_1), \\ i\hat{k}_1 C e^{-i\hat{k}_1 \xi_1} + i\hat{k}_2 D_1 e^{i\hat{k}_2 \xi_1} - i\hat{k}_2 D_2 e^{-i\hat{k}_2 \xi_1} &= b_2(\xi_1), \\ D_1 e^{i\hat{k}_2 \xi_2} + D_2 e^{-i\hat{k}_2 \xi_2} &= 0. \end{aligned} \quad (3.7.20)$$

Здесь обозначено

$$\begin{aligned} b_1(\xi_1) &= -\delta_{0k} u_i(\xi_1) + (1 - \delta_{0k}) [F_{1, k-1}(\xi_1) + F_{2, k-1}(\xi_2)]; \\ b_2(\xi_1) &= \delta_{0k} u_i^{(\xi)}(\xi_1) - (1 - \delta_{0k}) [F_{1, k-1}^{(\xi)}(\xi_1) + F_{2, k-1}^{(\xi)}(\xi_1) - \\ &\quad - \varphi_{1, k-1}^{(n)}(\xi_1) + \varphi_{2, k-1}^{(n)}(\xi_1)] - \delta_{1k} u_i^{(n)}(\xi_1); \\ F_{j, k-1}(\xi_1) &= \mp \frac{1}{k_j} \int_{-\infty, \xi_2}^{\xi_1} \sin \hat{k}_j(\xi_1 - \tau) F_{j, k-1}(\tau) d\tau; \quad j = 1, 2 \end{aligned}$$

(верхний знак и первое значение нижнего предела в интеграле относятся к  $j = 1$ );

$$F_{j, k-1}^{(\xi)}(\xi_1) = - \int_{-\infty, \xi_2}^{\xi_1} \cos k_j(\xi_1 - \tau) F_{j, k-1}(\tau) d\tau, \quad j = 1, 2.$$

Правая часть неоднородной системы уравнений (3.7.20) представляет собой сумму падающей волны или ее нормальной производной и  $(k - 1)$ -го приближения и является, таким образом, известной функцией при проведении итерационного процесса в (3.7.20) и построении полного решения (3.7.12). Разрешая систему (3.7.20), получим для амплитуды  $C$  выражение

$$C = \frac{b_1 + (b_2/\hat{k}_2) \operatorname{tg} k_2(\xi_1 - \xi_2)}{1 - ip \operatorname{tg} \hat{k}_2(\xi_1 - \xi_2)} e^{i\hat{k}_1 \xi_1}, \quad p = \frac{k_1}{k_2}. \quad (3.7.24)$$

Задача а) решается формулами (3.7.18), (3.7.19) и (3.7.24).

*Задача б.* Полное поле задачи б)  $\psi_i$  должно удовлетворять уравнению (3.7.13), соотношениям (3.7.8) и (3.7.9) и граничным условиям, первые два из которых совпадают с соответствующими граничными условиями из (3.7.17), выражающими непрерывность функции и ее нормальной производной при  $\xi = \xi_1$ , а условие отсутствия нормальной производной при  $\xi = \xi_2$  имеет вид

$$-\psi_{2, k}^{(\xi)}(\xi_2, \eta) + (1 - \delta_{0k}) \psi_{2, k-1}^{(n)}(\xi_2, \eta) = 0. \quad (3.7.22)$$

Общее решение задачи б) (выражения (3.7.13) и (3.7.22)), как и ранее, можно представить формулами (3.7.18), (3.7.19) (с очевидной заменой в обозначении искомой функции). При этом для определения неизвестных коэффициентов  $\tilde{C}, \tilde{D}_{1,2}$  из (3.7.18), (3.7.19) и (3.7.22) получается система уравнений, в которой первые два

совпадают с первыми двумя уравнениями из (3.7.20), а третье имеет вид

$$\tilde{D}_1 e^{i\hat{k}_2 \xi_2} - \tilde{D}_2 e^{-i\hat{k}_2 \xi_2} = 0. \quad (3.7.23)$$

Решая систему уравнений из первых двух в (3.7.20) и уравнения (3.7.23) получим

$$\tilde{C} = \frac{b_1 - (b_2/\hat{k}_2) \operatorname{ctg} \hat{k}_2(\xi_1 - \xi_2)}{1 - ip \operatorname{ctg} k_2(\xi_1 - \xi_2)} e^{i\hat{k}_1 \xi_1}. \quad (3.7.24)$$

Перейдем теперь к определению амплитуд паразитных волн, проникающих в правый волновод. Прямые паразитные волны представляют наибольший практический интерес, ибо именно они формируют *попутный поток* в линии. При этом основное внимание уделим нахождению амплитуды прошедшей падающей волны.

**3.7.4. Амплитуда основной волны.** Прежде всего составим выражения для коэффициентов прохождения и отражения через полученные выше значения  $C$  и  $\tilde{C}$ . Пусть  $\{u_n\}$  и  $\{v_n\}$  — полные ортонормированные системы собственных функций левого (I) и правого (II) волноводов (рис. 80) соответственно. Тогда полное поле в волноводе I для задачи а) можно представить в виде

$$\varphi_i^{(1)} = \frac{1}{2} u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n - \sum_{n=0}^{\infty} B_n u_n. \quad (3.7.25)$$

Аналогично для задачи б)

$$\psi_i^{(1)} = \frac{1}{2} u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n u_n. \quad (3.7.26)$$

Складывая (3.7.25) и (3.7.26), получим в соответствии с формулой (3.7.6) выражение для полного поля в левом волноводе

$$u^{(1)} = \varphi_i^{(1)} + \psi_i^{(1)} = u_0 + 2 \sum_{n=0}^{\infty} A_n u_n. \quad (3.7.27)$$

Соответствующие выражения имеют место и для волновода II:

$$\varphi_i^{(2)} = -\frac{1}{2} v_0 - \sum_{n=0}^{\infty} A_n v_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n v_n, \quad (3.7.28)$$

$$\psi_i^{(2)} = \frac{1}{2} v_0 + \sum_{n=0}^{\infty} A_n v_n + \sum_{n=0}^{\infty} B_n v_n, \quad (3.7.29)$$

$$v^{(2)} = \varphi_i^{(2)} + \psi_i^{(2)} = 2 \sum_{n=0}^{\infty} B_n v_n. \quad (3.7.30)$$

В формулах (3.7.25) — (3.7.30) коэффициенты  $A_n$  и  $B_n$  суть амплитуды проходящих и отраженных волн номера  $n$ , обязанные

падающим на призму слева и справа волнам половинной амплитуды; причем знаки у  $A_n$  и  $B_n$  соответствуют знакам порождающих их волн.

С другой стороны, полное поле в волноводе I для задачи а) (рис. 76) может быть записано в виде

$$\varphi_i^{(1)} = \frac{1}{2} u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} C_n u_n$$

и для задачи б)

$$\psi_i^{(1)} = \frac{1}{2} u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} \bar{C}_n u_n.$$

Тогда

$$u^{(1)} = \varphi_i^{(1)} + \psi_i^{(1)} = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (C_n + \bar{C}_n) u_n. \quad (3.7.31)$$

Аналогично для волновода II

$$v^{(2)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-C_n + \bar{C}_n) v_n. \quad (3.7.32)$$

Сравнивая формулы (3.7.27) и (3.7.31), а также (3.7.30) и (3.7.32), придем к искомым соотношениям

$$2A_n = C_n + \bar{C}_n, \quad 2B_n = -C_n + \bar{C}_n. \quad (3.7.33)$$

Таким образом, полное поле первой поляризации в левом волноводе есть

$$u^{(1)} = u_0 + \sum_{n=0}^{\infty} (C_n + \bar{C}_n) u_n, \quad (3.7.34)$$

а в правом

$$v^{(2)} = - \sum_{n=0}^{\infty} (C_n - \bar{C}_n) v_n. \quad (3.7.35)$$

Выше мы отмечали, что наибольший интерес представляет значение амплитуды основной прошедшей волны (коэффициента прохождения падающей волны). Как легко видеть из формулы (3.7.35), она равна  $2B_0 = -(C_0 - \bar{C}_0)$ , и стало быть для определения  $B_0$  необходимо поля  $C(\eta)$  и  $\bar{C}(\eta)$  (формулы (3.7.21) и (3.7.24)) в задачах сравнения разложить по полной системе функций  $v_n$  правого волновода и взять первый член этого разложения. Для этого, полагая в формулах (3.7.21) и (3.7.24)

$$b_1 = -\frac{1}{2} \sin \pi \eta \exp \{i \hat{h} \xi_1\}, \quad b_2 = \frac{i \hat{h}}{2} \sin \pi \eta \exp \{i \hat{h} \xi_1\},$$

для определения  $B_0$  получим следующий интеграл:

$$B_0 = \frac{(k+h)^2}{2kah} e^{-i2hl} \int_0^a \frac{\cos \bar{a} - im \sin \bar{a}}{1 - (1-m^2) \sin^2 \bar{a}} \sin^2 \frac{\pi}{a} y e^{i \frac{k+h}{a} ly} dy, \quad (3.7.36)$$

где

$$\bar{a} = 4k_2 \frac{l}{a} \left(1 - \frac{\bar{l}}{l}\right) (y-a), \quad m = \frac{1+p^2}{2p}.$$

В формуле (3.7.36) мы вернулись к переменным  $z, y$  и использовали формулу Грина  $\int (ug' - gu') d\mathcal{L} = 0$ , где пробная функция  $g = \sin(\pi y/a) \exp\{ihz\}$  и путь интегрирования  $\mathcal{L}$  есть  $y=0, z \in (-\infty, -l]; z = -l, y \in [0, a]; y = a, z \in [-l, -\infty)$ , причем поле вдоль  $z = -l, y \in [0, a]$  известно из формул (3.7.21) и (3.7.24).

Из выражения (3.7.36) непосредственно следует, что в нулевом порядке по  $\mu$  (для которого она и выписана) при  $l \Rightarrow \bar{l} \Rightarrow 0, k_2 \Rightarrow k_1, h \Rightarrow k$  и  $B_0 \Rightarrow 1$ , т. е. вся энергия падающей волны проходит в правый волновод. Это соответствует случаю прямолинейного регулярного волновода, когда в нем распространяется только одна падающая волна.

Таким образом, поставленная задача о падении одной из волноводных волн плоского волновода \* на излом с призмой сведена к квадратурам типа (3.7.36). Общие потери энергии падающей волны на преобразование в паразитные волны легко определяются, если известно изменение амплитуды основной волны:

$$P = 1 - |B_0|^2 = -2\text{Re}(1 - B_0). \quad (3.7.37)$$

К сожалению, в общем случае не удается найти явного представления для  $B_0$ . Однако если выполняется условие  $\epsilon - 1 \ll 1$ , то тогда  $1 - m^2 \ll 1$  и, разлагая величину, обратную знаменателю в (3.7.36), в ряд Маклорена, можно получить в явном виде несколько членов этого ряда. Мы не приводим здесь этот громоздкий результат; отметим только, что потери на преобразование для всех падающих волн рассматриваемой поляризации в нулевом порядке по  $\mu$  пропорциональны  $(kl)^{-3}$ , и при  $kl \Rightarrow \infty$  амплитуда падающей волны не изменяется. Таким образом, проделанный расчет позволяет, по крайней мере в нулевом порядке, исправить принципиальную недостаточность формул (3.7.2) и (3.7.4) для случая геометрической оптики  $\lambda \Rightarrow 0$ . Интересно отметить также, что в данном случае возникают только волны типа  $H_{n,0}$  с четным первым индексом (см. текст после формул (3.7.2) и (3.7.4)).

При больших углах излома волновода для преодоления излома используется плоское зеркало. Потери на преобразование для

\* Очевидно, что приведенные рассуждения и формулы останутся в силе и для прямоугольного волновода с падающей волной типа  $H_{mn}$ .



плоского зеркала в изломе рассчитаны в [197] \*. Для волн рассматриваемой поляризации они пропорциональны  $(ka \sin \theta)^{-1/2}$ . Очевидно, что для малых углов излома это соотношение перестает быть справедливым.

Итак, поставленная задача решается формулами (3.7.12), (3.7.36), (3.7.37). Продолжая обычным образом итерационный процесс, можно получить следующие члены в разложении (3.7.12). Для дальнейших расчетов, по-видимому, целесообразно применение электронной вычислительной машины.

3.7.5. *Вторая поляризация*  $(u^{(2)}(y, z) = 0, (y, z) \in S)$ . Рассмотрение случая второй поляризации, когда на стенках волновода выполняется граничное условие Неймана и падающая волна имеет вид  $u_i = \cos \alpha y \exp \{ihz\}$ ,  $\alpha = n\pi$ ,  $n = 0, 1, 2, \dots$ , проводится аналогично предыдущему, за исключением лишь того, что теперь в граничном условии для равенства нормальных производных при  $\xi = \xi_1$  (формулы (3.7.17), (3.7.22)) имеет место скачок, определяемый величиной диэлектрической проницаемости призмы. Не приводя формул для второй поляризации, отметим только, что потери на преобразование при падении на призму основной (плоской) волны в нулевом порядке по  $\mu$  пропорциональны  $(kl)^{-1}$ , а для падающих волн высших типов —  $(kl)^{-3}$ . Для сравнения напомним, что потери в зеркале в этом случае пропорциональны  $(ka \sin \theta)^{-1/2}$  [197].

Для волн второй поляризации угол падения основной волны на призму можно выбрать равным *углу Брюстера*. При этом отражения от граней призмы будут отсутствовать. Однако для очень малых отражений угол при вершине призмы  $2\theta$  будет порядка  $\lambda/2$ , и метод расчета, основанный на разложении (3.7.12), будет малоэффективным. Для падающих волн первой поляризации и всех волн второй поляризации, кроме первой, угла Брюстера не существует. В этом случае для устранения отражений можно использовать методы «просветляющих» покрытий, например, в виде одного или нескольких слоев диэлектрика с определенным образом подобранными величинами диэлектрических проницаемостей каждого слоя [45].

Это замечание, может быть, имеет смысл и в том отношении, что такая просветленная призма (или любое диэлектрическое тело) с математической точки зрения может считаться «размазанной» в область волноводов I и II за грани призмы (это справедливо, разумеется, для той полосы частот, в которой эффективно согласующее покрытие), причем в размазанной области  $\epsilon(\mu)$  изменяется непрерывно от единицы до значений  $\epsilon(\mu)$  призмы. А это в свою очередь дает возможность, используя конформные преобразования, заменить призму вместе с областью непрерывного распределения  $\epsilon(\mu)$  некоторой неоднородностью, уже не содержа-

щей диэлектрика (магнетика), и применять для расчета этой эквивалентной системы один из известных методов расчета нерегулярных волноводов.

Развитый здесь метод продольных сечений позволил построить достаточно полное решение поставленной задачи о падении на призму в изломе плоского широкого волновода одной из собственных волн такого волновода. Решение задачи представляется рядом по степеням малого параметра (3.7.12). Метод обладает простотой и наглядностью и, вероятно, без особых затруднений может быть применен к решению задач типа «линза в широком волноводе» и т. п. [327].

Следует отметить, однако, что метод теряет смысл для высоких номеров падающих волн, так как, хотя при этом свойства системы по-прежнему изменяются в поперечном направлении значительно более медленно, чем в направлении распространения волны, сама падающая волна теперь будет вносить большие изменения в поперечном направлении, и метод, естественно, отказывается. Мы не приводим здесь соответствующих оценок по той причине, что этот случай с практической точки зрения, вообще говоря, интереса не представляет.

3.7.6. *«Оптимальная» призма в изломе широкого волновода*. В предыдущих пунктах настоящего параграфа мы рассмотрели задачу анализа призмы, геометрические параметры которой выбраны из геометрикооптических соображений и удовлетворяют условию (3.7.1). Попробуем, вслед за авторами [308], найти оптимальный угол  $2\theta$  при вершине призмы, обеспечивающий минимальные потери на преобразование в паразитные типы колебаний. Имеются также и другие возможности оптимизации электродинамических параметров призмы. Это прежде всего «просветление» ее граней за счет одно- или многослойного покрытия, искривление граней с целью придания им фокусирующих свойств и т. д.

Пусть угол при вершине призмы есть

$$2\theta = 2\theta_0 + A\alpha^2, \quad (3.7.38)$$

где геометрикооптическая часть  $2\theta_0$  определяется формулой (3.7.1),  $\alpha = \arcsin(\pi/ka)$  — угол Бриллюэна падающей волны  $H_{10}$ . Неизвестный коэффициент  $A$  подлежит определению из условия минимальных потерь. В итоге он определит угол при вершине призмы  $2\theta$  (3.7.38).

Потери основной волны  $P = |1 - B_0|^2$  (см. (3.7.33)) после прохождения ею излома, где коэффициент прохождения  $B_0$  будем определять по обычной формуле возбуждения волновода

$$B_0 = \frac{2}{a} \int_0^a u(y) u_i(y) dy; \quad (3.7.39)$$

здесь  $u(y)$  — поле в сечении  $z = 0$ . Таким образом, задача сводится к нахождению поля в этом сечении. Для этого представим

\* Оценки и пределы применимости метода [197, 316] впервые были сделаны в работах [15, 317, 318] на примере отверстия в широком волноводе. Далее последовал целый цикл работ [319, 324] и др.

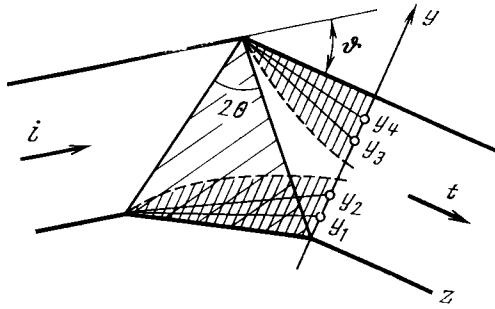


Рис. 81. К определению оптимальной призмы в изломе плоского широкого волновода

падающую волну  $u_i(y)$  в виде двух плоских волн и рассмотрим прохождение этих волн через излом с призмой. Выпишем сначала геометрикооптическое поле. Плоские волны падают на левую грань призмы под углами (ср. (3.6.20))

$$\varphi_{1,2} = \vartheta \mp \alpha, \quad \vartheta = \vartheta_0 + \alpha a^2/2, \quad \vartheta_0 = \theta_0 + \frac{\vartheta}{2}. \quad (3.7.40)$$

Ввиду различных амплитуд и углов выхода плоских волн после преломления на гранях призмы геометрикооптическое поле будет иметь линии разрыва, проходящие через вершины призмы и пересекающие ось  $y$  в точках  $y_j$ ,  $j = 1, 2, 3, 4$  (рис. 81). Используя формулы Френеля для прохождения плоской волны через границу раздела двух сред, выпишем поле в сечении  $z = 0$ ,  $y \in (y_2, y_3)$

$$u_{r0} = \frac{i}{2} (D_2 e^{-iky \sin \nu_2} - D_1 e^{iky \sin \nu_1}), \quad (3.7.41)$$

где углы скольжения  $\nu_{1,2}$  и коэффициенты прохождения  $D_{1,2}$  имеют вид

$$\nu_{1,2} = \alpha \pm \alpha^2 B \frac{n-t}{n} + \alpha^3 \left( \frac{n-t}{n} \right)^2 \frac{n+t}{n} B,$$

$$D_0 = 4nt/(n+t)^2, \quad D_{1,2} = D_0 (1 \pm \alpha I + \alpha^2 E/2),$$

$$t = \cos \vartheta_0 / \cos \theta_0, \quad I = [1 - (t/n)^2] \operatorname{tg} \vartheta_0,$$

$$B = \frac{n}{t} A + \frac{n+t}{n} \operatorname{tg} \vartheta_0,$$

$$E = \left( \frac{n-t}{n} \right)^2 \left( \frac{t}{n} \operatorname{tg}^2 \vartheta + \frac{t}{n} B \operatorname{tg} \vartheta - 1 \right).$$

В аналогичном виде можно выписать поля для остальных областей.

Отметим, что поля, прошедшие в правый волновод после двух и более переотражений от граней призмы, в (3.7.41) не учитываются (ср. § 3.6).

Поле геометрической оптики удовлетворяет граничным условиям на металле, а также на гранях призмы (в приближении однократного отражения), но не удовлетворяет волновому уравнению (имеет разрывы). Эти разрывы «зашиваются» краевыми волнами, при этом полное поле в параболическом приближении описывается интегралом Френеля

$$F \left( \sqrt{\frac{ky^2}{2L}} \right) = \sqrt{\frac{i}{\pi}} \int_{-\sqrt{ky^2/2L}}^{\infty} e^{-i\zeta^2} d\zeta, \quad (3.7.42)$$

где  $L$  — длина, на которой происходит поперечная диффузия поля. В свободном пространстве, например, в зоне диффузии от верхней вершины призмы (рис. 81) она равна геометрической длине, измеряемой вдоль разрыва от вершины до плоскости  $z = 0$ ,

$$L_1 = a \operatorname{tg} \vartheta_0. \quad (3.7.43)$$

Более сложно найти диффузионную длину в нижней зоне; приходится разлагать поле в призме в спектр плоских волн, каждая из которых преломляется на правой грани призмы. С учетом преломления длина нижней диффузионной зоны равна

$$L_2 = 2a \left( \frac{t}{n} \right)^2 \operatorname{tg} \vartheta_0. \quad (3.7.44)$$

Перепады амплитуд в нижней и верхней зонах диффузии равны соответственно

$$\Delta D_1 = \alpha 2D_0 I, \quad \Delta D_2 = \alpha D_0 G, \quad (3.7.45)$$

где  $G = [(n-t)/n] \operatorname{tg} \vartheta$ . При этом полное поле в сечении  $z = 0$  (с учетом краевых волн) имеет вид

$$u(y) = \frac{i}{2} \left\{ \left[ D_2 + \Delta D_1 F \left[ -\sqrt{\frac{k}{2L_1}} (a-y) \right] + \Delta D_2 F \left( -\sqrt{\frac{k}{2L_2}} y \right) \right] e^{-iky \sin \nu_2} - \left[ D_1 - \Delta D_1 F \left[ -\sqrt{\frac{k}{2L_1}} (a-y) \right] - \Delta D_2 F \left( -\sqrt{\frac{k}{2L_2}} y \right) \right] e^{iky \sin \nu_1} \right\}. \quad (3.7.46)$$

Подставляя (3.7.46) в (3.7.39) и интегрируя, находим коэффициент прохождения по мощности

$$|B_0|^2 = D_0^2 \{ 1 - \alpha^2 Q \} + O(ka)^{-3/2}, \quad (3.7.47)$$

где

$$Q = \left( \frac{n-t}{n} \right)^2 \left( \frac{(\pi^2/6) - 1}{2} B^2 + 2 \operatorname{tg} \vartheta_0 \frac{n+t}{n} B \right) - E + [2I - 4(t/n)^2 G] \operatorname{tg} \vartheta_0.$$

Отметим, что, выписывая полное поле в сечении  $z = 0$  (3.7.46), мы пренебрегли отличием  $y_{1,2}$  от 0, а  $y_{3,4}$  от  $a$ . Можно показать,

что это не меняет порядка удержанных нами членов асимптотики (3.7.47).

Минимизируя потери по параметру  $A$ , входящему в  $B$  и  $E$  (3.7.41) и определяющему, согласно (3.7.38), угол в вершине  $2\theta$  призмы, находим параметры призмы ( $2\theta, n$ ):

$$\theta_{\text{opt}} = \theta_0 - \alpha^2 t \frac{6n + \pi(n+t)}{2n^2(\pi^2 - 6)} \operatorname{tg} \theta_0, \quad (3.7.48)$$

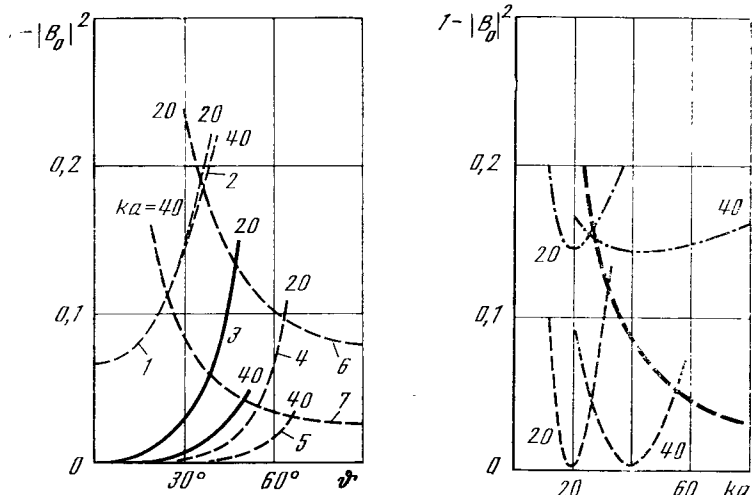
обеспечивающие минимальные потери в изломе

$$P_{\min} = 2 \left( \frac{n-t}{n+t} \right)^2 + \alpha^2 \left( \frac{n-t}{n} \right)^2 \left[ 1 + \operatorname{tg}^2 \theta_0 \left( \frac{2n+3t}{n} - \frac{(2n+t)^2}{2n^2(\pi^2/6-1)} \right) \right]. \quad (3.7.49)$$

Потери в призме с  $\theta = \theta_0$  нетрудно получить непосредственно из (3.7.47), положив  $A = 0$ . Эти потери лишь коэффициентом при  $\alpha^2$  отличаются от (3.7.49).

Рассмотрим излом с просветленной призмой. Наложим на плоскость раздела диэлектрик — воздух слой диэлектрика с показателем преломления  $n_2$ :

$$n_2^2 = \sin^2 \theta_0 + \cos \theta_0 \sqrt{n^2 - \sin^2 \theta_0} \quad (3.7.50)$$



Р и с. 82. Зависимость дифракционных потерь для структуры из призмы в изломе широкого волновода от угла поворота  $\theta$ : 1, 2 — призма без просветления (угол при вершине выбран оптимальным); 3 — призма с просветленными гранями (угол при вершине выбран из геометрикооптических представлений); 4, 5 — призма с просветленными гранями (угол при вершине оптимальный); 6, 7 — излом волновода с плоским зеркалом

Р и с. 83. Частотная характеристика дифракционных потерь в изломе волновода с оптимальной призмой

и толщиной  $d$ , определяемой из соотношения

$$kd [(n^2 - \sin^2 \theta)^{1/2} \cos \theta_0]^{1/2} = \frac{\pi(2m+1)}{2}, \quad (3.7.51)$$

что обеспечит отсутствие отражения от поверхности призмы с углом при вершине  $2\theta_0$  плоской волны, направление которой совпадает с осью волновода. В действительности же волноводная волна представляет собой сумму двух плоских волн, поэтому отражение при таком просветлении не исчезает полностью, а уменьшается до величин порядка  $\alpha^2$ .

Опуская громоздкие выкладки, получаем, что в этом случае справедлива формула (3.7.41), где

$$D_0 = -1, \quad I = [(n^2 - t^2)/n^2] \operatorname{tg} \theta_0, \quad (3.7.52)$$

$$E = \left( \frac{n-t}{n} \right)^2 \left[ \frac{n^2 + 6nt + t^2}{n^2} \operatorname{tg}^2 \theta_0 + \frac{n+t}{n} B \operatorname{tg} \theta_0 \right].$$

Подставляя (3.7.52) в (3.7.47) и вновь минимизируя потери по  $A$ , находим параметры просветленной призмы

$$\theta_{\text{opt}} = \theta_0 - \alpha^2 t \frac{\pi^2(n+t)}{(\pi^2 - 6)n^2} \operatorname{tg} \theta_0, \quad (3.7.53)$$

обеспечивающие минимальные потери

$$P_{\min} = \alpha^2 \left( \frac{n-t}{n} \right)^2 \operatorname{tg}^2 \theta_0 \left[ \frac{(\pi^2/2) - 4}{2(\pi/6 - 1)} \left( \frac{n+t}{n} \right)^2 - \frac{2t}{n} \right]. \quad (3.7.54)$$

На рис. 82 приведены зависимости потерь от угла излома  $\theta$  при двух значениях  $ka$  (20, 40) для оптимальной призмы без просветления (штрихпунктирная линия), оптимальной призмы с просветлением (пунктирная линия) и призмы с просветлением, синтезированной по геометрической оптике ( $A = 0$ ) (сплошная линия). Показатель преломления материала призмы  $n = 1,44$ . Кроме того, на рис. 82 показана зависимость потерь от угла излома в изломе с плоским зеркалом (длинные черточки) [316]. Видно, что для углов излома, не превышающих  $20-30^\circ$ , призма, даже без просветления, обеспечивает меньшие потери, чем зеркало.

На рис. 83 приведены зависимости потерь в изломе с призмой от частоты. Призмы выбраны оптимальными — без просветления и с просветлением, чтобы добиться наименьших потерь на данной частоте. Конкретно на рис. 83 даны два варианта: призмы оптимальной для  $(ka)_0 = 20$ ,  $(ka)_0 = 40$ ; обе призмы в изломе на  $30^\circ$ ,  $n = 1,44$ . При уходе частоты от расчетной потери особенно заметно растут для призм с просветлением, тем не менее в широкой полосе частот потери остаются меньше потерь в изломе с плоским зеркалом.

## ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИЗМА В ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРАХ И ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВОДАХ

Здесь мы рассмотрим применение диэлектрического клина для поворота квазиоптической линии на некоторый, вообще говоря, небольшой угол. Для этого сначала решается ключевая задача — рассматривается поведение гауссова пучка при наклонном его падении на плоскую границу раздела двух однородных диэлектрических сред (§ 4.1). Предварительно пучок раскладывается по плоским волнам, решение для каждой из которых (формулы Френеля) известно (гл. 1), и далее проводится «сворачивание» известного решения в соответствии с обратным преобразованием Фурье. С учетом малой расходимости пучка, а именно такие пучки и представляют теперь наибольший интерес, метод разложения по Фурье оказывается весьма удобным и эффективным аппаратом. Аналогично строится решение для случая, когда пучок задевает вершину призмы.

### § 4.1

#### Падение квазиоптического гауссова пучка на плоскую границу раздела двух однородных изотропных сред

4.1.1. *Квазиоптика* — возникшее в начале 60-х годов научное направление — оперирует с *волновыми пучками*, которые формируются в квазиоптических линиях — лучеводах и открытых резонаторах. Областью применения лучеводов и открытых резонаторов являются преимущественно диапазоны миллиметровых и субмиллиметровых волн. Характерная особенность квазиоптических волновых пучков заключается в том, что каждый волновой пучок состоит из набора плоских волн, распространяющихся в узком диапазоне телесных углов — конусе углов. Направление распространения каждой из этих плоских волн мало отличается от направления распространения геометрического центра пучка, например, оси  $z$ .

По-видимому, наиболее адекватным физической стороне дела является аппарат преобразования Фурье. Необходимые здесь процедуры являются хорошо известными, и на них мы подробно останавливаться не будем. Линейность исходной задачи является основой для применения преобразования Фурье. Прежде всего

необходимо разложить волновой пучок по плоским волнам, т. е. определить его «спектральную плотность». В качестве спектрального параметра в задачах рассматриваемого класса целесообразно выбрать угол между основным направлением распространения пучка (центра тяжести волнового пучка [408]) и направлением распространения каждой из парциальных плоских волн, составляющих волновой пучок.

Квазиоптический волновой пучок можно записать в следующем виде:

$$\Psi_{mn}(x, y, z) = \frac{w_0}{w(z)} H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{w(z)}\right) H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{w(z)}\right) \times \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2\Delta(z)}\right\} \exp\{-i(kz - \Phi_{mn}(z))\}. \quad (4.1.1)$$

Здесь  $H_p(\xi)$  — полиномы Эрмита,  $w(z)$  — текущий радиус пятна пучка ( $w(0) \equiv w_0$ );  $m, n$  — индексы поперечных типов волн

$$\begin{aligned} \Phi_{mn}(z) &= (m + n + 1) \operatorname{arc} \operatorname{tg}(\lambda z / \pi w_0^2), \\ \frac{1}{\Delta(z)} &= \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} + \frac{i}{R(z)}; \quad R(z) = z \left[ 1 + \left( \frac{\pi w_0^2}{\lambda z} \right)^2 \right]; \\ w_0^2(z) &= w_0^2 \left[ 1 + \left( \frac{\lambda z}{\pi w_0^2} \right)^2 \right]. \end{aligned} \quad (4.1.2)$$

Функция  $R(z)$  определяет радиус кривизны фазового фронта в точке  $z$ .

Представление волнового пучка в форме (4.1.1), (4.1.2) позволяет выделить  $E$ - и  $H$ -поляризацию поля и рассматривать их отдельно. Существенным обстоятельством является возможность представить продольное волновое число  $k_z$  в квазиоптическом приближении таким образом:

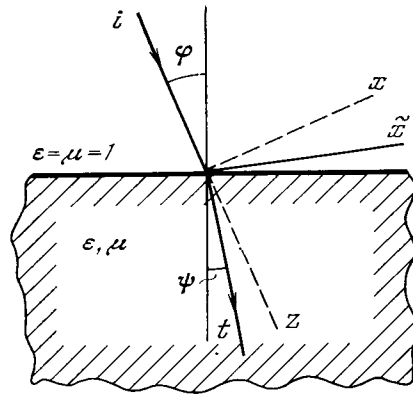
$$k_z = \sqrt{k^2 - (\xi^2 + \eta^2)} \simeq k - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2k}. \quad (4.1.3)$$

Теперь для  $x$ -компонент можно написать следующие выражения:

$$\begin{cases} H_x^0 \\ E_x^0 \end{cases} \simeq \frac{\exp\{-ikz\}}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \begin{cases} F_H(\xi, \eta) \\ F_E(\xi, \eta) \end{cases} \exp\left\{i \frac{\xi^2 + \eta^2}{2k} z\right\} e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (4.1.4)$$

в которых трансформанты Фурье первичного поля  $F_{E,H}(\xi, \eta)$  являются функциями Гаусса — Эрмита. Это непосредственно следует из приведенных выше формул (4.1.1), (4.1.4).

Наклонное падение волнового пучка на границу раздела двух однородных диэлектрических сред приводит к ряду эффектов. Если речь идет о волновом пучке, представляющем собою одну из собственных волн квазиоптической линии, например, линзовой, то в прошедшем поле появляются волны других номеров. Это свя-



Р и с. 84. К падению волнового пучка на плоскую границу раздела двух однородных диэлектрических сред

зано, во-первых, с изменением поперечного размера пучка \*, которое, естественно, различно по двум взаимно перпендикулярным осям. Во-вторых, это различная угловая расходимость плоских волн, из которых состоит пучок. Не менее интересные преобразования претерпевает и отраженный пучок. Конечно, если данная диэлектрическая структура (в частности, граница) предназначена служить отражательным зеркалом для пучка \*\*. При этом пучок испытывает смещение  $\Delta$  вдоль границы и величина этого смещения определяется как

$$\Delta = - \left. \frac{d\varphi}{d\xi} \right|_{\xi=\xi_0},$$

где  $\varphi$  — фаза коэффициента отражения  $R(\theta) = \rho(\xi) \exp\{\varphi(\xi)\}$ ,  $\xi = k \sin \theta$  плоской волны от плоской границы раздела [42].

Рассмотрим эти явления более подробно. Пусть волновой пучок падает на плоскую границу раздела (рис. 84). В декартовых координатах переменные  $x$  и  $y$  разделяются, и задача сводится к двум. В первой рассматривается пучок, не ограниченный на оси  $y$ , все нормали к плоским волнам лежат в плоскости падения  $xOz$ . Во второй задаче пучок не ограничен по оси  $x$ , нормали к плоским волнам лежат в плоскости  $yOz$ . Падающий пучок линейно поляризован. Под скалярной функцией  $U$  будем для определенности понимать поперечную составляющую электрического поля [309].

\* В оптике такие изменения размеров пучка называются трансформированием изображения.

\*\* В структурах, работающих на преломленных волнах, предпринимаются различные меры для уменьшения отражений. О некоторых из них (просветляющие покрытия, падение под углом Брюстера и др.) мы говорили во введении (п. 1.2; [42—45]).

Рассмотрим первую задачу. Предположим, что плоскость максимальной концентрации поля в падающем пучке совпадает с плоскостью  $z = 0$ . Тогда в системе координат  $xOz$  поле падающей волны запишется в виде

$$\Psi_m^i = a_m \int_{-\infty}^{\infty} f_m(\xi) \exp \left\{ i\xi x - i \frac{\xi^2}{2} \frac{z}{kx_s^2} \right\} d\xi. \quad (4.1.5)$$

Преломленная волна отличается от падающей амплитудным множителем  $D(\varphi + \alpha)$  под интегралом, а также заменой  $k$  на  $\tilde{k} = nk$  и угла  $\alpha$  на угол  $\beta$ . Величина  $x_s$  определяет поперечный масштаб пучка

$$x_s = \sqrt{L/k} [L/f - (L/2f)^2]^{-1/4},$$

$L$  — расстояние между линзами в лучевом,  $f$  — фокусное расстояние линзы. Прошедшее поле в диэлектрике запишем в системе координат  $xOz$ , естественно связанной с преломленной волной:

$$\Psi_m^t = a_m \int_{-\infty}^{\infty} f_m(\xi) D(\varphi + \alpha) e^{i\tilde{k}\tilde{x}\beta - i\tilde{k}z\beta^2/2} d\xi. \quad (4.1.6)$$

Здесь и ниже тильдой ( $\sim$ ) отмечены величины, относящиеся к полупространству, заполненному диэлектриком. Таким же образом можно записать и выражение для отраженного поля.

Зависимость между  $\alpha$  и  $\beta$  извлекается из очевидных геометрико-оптических соотношений (см. § 1.1)

$$\sin \varphi = n \sin \beta, \quad \sin(\varphi + \alpha) = n \sin(\psi + \beta).$$

Отсюда

$$\beta = \alpha \frac{t}{n} \left[ 1 - \frac{\alpha}{2} \frac{n^2 - t^2}{n^2} \operatorname{tg} \varphi + O(\alpha^2) \right], \quad (4.1.7)$$

где  $t = \cos \varphi / \cos \psi$ .

Коэффициент Френеля  $D(\varphi + \alpha)$  также представим в виде ряда по возрастающим степеням  $\alpha$ :

$$D(\varphi + \alpha) = D(\varphi) + \alpha D'(\varphi) + O(\alpha^2). \quad (4.1.8)$$

Выпишем коэффициенты разложения для  $s$ -поляризации, когда вектор  $\mathbf{E}$  лежит в плоскости падения:

$$D(\varphi) = \frac{2t}{1 + nt}, \quad D'(\varphi) = -2 \operatorname{tg} \varphi \frac{t(n^2 - t^2)}{n^2(1 + nt)^2}$$

и для  $p$ -поляризации, когда вектор  $\mathbf{E}$  лежит в перпендикулярной плоскости:

$$D(\varphi) = \frac{2t}{n + t}, \quad D'(\varphi) = -2 \operatorname{tg} \varphi \frac{t(n - t)}{n(n + t)}.$$

Подставим (4.1.7) и (4.1.8) в (4.1.6) и введем обозначения  $\tilde{x}_s = x_s/t$ ,  $\tilde{X} = \tilde{x}/\tilde{x}_s$ . В разложении прошедшего в диэлектрик поля

по параметру малости  $1/kx_s$  ограничимся членами нулевого и первого порядков. Тогда  $\psi_m^t$  имеет вид

$$\begin{aligned} \psi_m^t = & D(\varphi) a_m \left[ \int_{-\infty}^{\infty} f_m(\xi) \exp \left\{ i\xi \bar{X} - i \frac{\xi^2}{2} \frac{\bar{z}}{k\bar{x}_s^2} \right\} d\xi + \right. \\ & + \frac{1}{kx_s} \frac{D'(\varphi)}{D(\varphi)} \int_{-\infty}^{\infty} \xi f_m(\xi) \exp \left\{ i\xi \bar{X} - i \frac{\xi^2}{2} \frac{\bar{z}}{k\bar{x}_s^2} \right\} d\xi - \\ & \left. - i \frac{1}{kx_s} \lg \varphi \frac{n^2 - t^2}{2n^2} \int_{-\infty}^{\infty} \xi^2 f_m(\xi) \bar{X} \exp \left\{ i\xi \bar{X} - i \frac{\xi^2}{2} \frac{\bar{z}}{k\bar{x}_s^2} \right\} d\xi \right]. \end{aligned}$$

Воспользуемся теперь известным соотношением из теории полиномов Эрмита

$$x H_m(x) = \frac{1}{2} H_{m+1}(x) + m H_{m-1}(x).$$

Тогда

$$\begin{aligned} \xi f_m(\xi) &= i \left[ \frac{1}{2} f_{m+1}(\xi) - m f_{m-1}(\xi) \right], \\ \xi^2 f_m(\xi) &= -\frac{1}{4} f_{m+2}(\xi) + \left( m + \frac{1}{2} \right) f_m(\xi) - m(m-1) f_{m-2}(\xi). \end{aligned}$$

Для прошедшего в диэлектрик поля получим окончательное выражение ( $p$ ,  $s$ -поляризации)

$$\begin{aligned} \psi_{m(0, z)}^t = & \frac{D(\varphi)}{V^t} \left\{ \tilde{\psi}_m + \frac{i}{kx_s} \lg \varphi \frac{n^2 - t^2}{4 \sqrt{2} n^2} \times \right. \\ & \left. \left[ \sqrt{(m+3)(m+2)(m+1)} \tilde{\psi}_{m+3} - \right. \right. \\ & - \sqrt{m+1}(m-1+T_{j,s}) \tilde{\psi}_{m+1} - \sqrt{m}(m+2-T_{j,s}) \tilde{\psi}_{m-1} + \\ & \left. \left. + \sqrt{m(m-1)(m-2)} \tilde{\psi}_{m-3} \right] \right\}. \end{aligned} \quad (4.1.9)$$

Здесь

$$T_s = \frac{4}{1+nt}, \quad T_p = \frac{4n}{n+t}.$$

Через  $\tilde{\psi}_m$  обозначены волновые пучки в среде с  $\epsilon$ . Трансформированный пучок имеет иной масштаб изменения по  $\bar{x}$ , чем по  $x$ :

$$\bar{x}_s = \frac{x_s}{t}. \quad (4.1.10)$$

Масштаб изменения по  $\bar{z}$  также меняется; он равен  $kn(x_s^2/t^2)$ . Обозначим величину  $kx_s$  через  $A$ ; таким образом, после пересечения границы раздела

$$\bar{A} = A n/t^2. \quad (4.1.11)$$

Кроме того, из (4.1.7) сразу следует, что радиусы кривизны фазового фронта падающего и прошедшего трансформированного пучков в первом приближении связаны соотношением

$$\bar{R} = R n/t. \quad (4.1.12)$$

Каждая из волн  $\tilde{\psi}_m$  удовлетворяет условию нормировки (как и  $\psi_m$ ):

$$\int_{-\infty}^{\infty} |\tilde{\psi}_m(x, 0)|^2 dx = 1.$$

При распространении пучка в однородном пространстве комплексный параметр  $V = [(1/A) + (i/R)]^{-1}$  меняется простым способом, не зависящим от номера пучка:

$$V(z) = V(0) - iz. \quad (4.1.13)$$

Соотношения (4.1.11), (4.1.12) и (4.1.13) позволяют определить конфигурацию пучка в любом поперечном сечении рассматриваемой системы.

Итак, решена задача о преломлении двумерной собственной волны лучевода, не ограниченной по оси  $y$ . В результате преломления: 1) меняется масштаб пучков по осям  $x$  и  $z$ ; 2) возникают дополнительные волны с индексами  $m+3$ ,  $m+1$ ,  $m-1$ ,  $m-3$ , причем амплитуды этих волн имеют порядок  $1/kx_s$ ,  $kx_s \gg 1$ .

*Несколько слов о второй задаче.* Она решается принципиально так же, как и первая, однако не сводится к скалярной. Учет векторного характера задачи несколько усложняет выкладки, поэтому приводить их здесь мы не будем. Ограничимся основными выводами: 1) ширина пучка остается неизменной, масштаб изменения поля по  $z$  увеличивается в  $\sqrt{\epsilon}$  раз; 2) в прошедшем пучке появляются плоские волны, направление магнитного и электрического поля которых перпендикулярно направлению поля плоских волн падающего пучка. Амплитуды этих плоских волн пропорциональны углу  $\alpha$ . Возникают дополнительные волновые пучки с индексами  $q+1$ ,  $q-1$ , их амплитуды порядка  $1/kx_s$ .

Применительно к трехмерному случаю это означает: 1) структура пучков перестает быть симметричной по  $x$  и  $y$ . Именно эффективное световое пятно, имевшее до преломления форму окружности радиуса  $r_s = x_s$ , трансформируется в эллипс с полуосями  $\bar{x}_s$ ,  $x_s$ . Соответственно в поперечном сечении пучка с индексами  $m = q$  поле обращается в нуль не на семействе квадратов, а на семействе прямоугольников, получающихся из квадратов растяжением по оси  $x$  в  $\cos \psi / \cos \varphi$  раз; 2) волна с индексами  $m$ ,  $q$  частично преобразуется в волны с индексами  $m+3$ ,  $q$ ;  $m+1$ ,  $q$ ;  $m-1$ ,  $q$ ;  $m-3$ ,  $q$  той же поляризации и в волны с индексами  $m$ ,  $q-1$ ;  $m$ ,  $q+1$  перпендикулярной поляризации; потери энергии на преобразование в эти волны оказываются порядка  $1/kL$  по отношению к энергии падающей волны [308].

§ 4.2  
Прохождение квазиоптического пучка  
через плоский слой

4.2.1. Плоские слои разной физической структуры широко используются в квазиоптике. Во введении мы отмечали антенные обтекатели, направляющие слои-волноводы (световоды) и многое другое. Одним из интересных свойств металлических периодических структур является их способность при определенных условиях полностью пропускать энергию падающей на них плоской монохроматической волны. Это явление известно давно (1937—1940), и свойство полного прохождения получило название *эффекта Малюжинца* (см., например, § 1.2 в [12]). В квазиоптической области, например, при использовании периодических структур в качестве фазовых корректоров или иных элементов лучеводного тракта, а также ряде других приложений в антенно-фидерной и измерительной технике, электронике СВЧ, в частности дифракционной электронике [462], и т. п. особый интерес представляет случай полного прохождения волнового пучка через периодическую структуру [12, 482, 484]. Этот эффект полного прохождения волнового пучка (4.1.1), (4.1.2) через слой получил название *обобщенного эффекта Малюжинца*. В этом случае преобразование поля первичного пучка в другие типы волновых пучков оказывается весьма незначительным, отражение минимально и действие структуры оказывается лишь на основных характеристиках волнового пучка: радиусе пятна  $w(z)$  и радиусе  $R(z)$  сферы (в двумерной задаче — цилиндра), касательной к поверхности фазового фронта в окрестности оси  $z$ , т. е. радиусе кривизны фазового фронта.

Таким образом, случай полного прохождения (полной прозрачности) волнового пучка через плоскопараллельную периодическую (в частности, диэлектрическую) структуру представляет пример применения периодической структуры в качестве линейного преобразователя пучка подобно тому, как это происходит в обычном фазовом корректоре (призме, линзе, зеркале и т. п.). При изучении прохождения (отражения) квазиоптического пучка через периодическую структуру естественно воспользоваться свойствами линейности краевой задачи. Это дает возможность, как и в предыдущем случае одной границы (§ 4.1), зная коэффициент прохождения (отражения) плоской волны, разложить волновой пучок в угловой спектр (4.1.4) по плоским волнам и затем произвести обратное преобразование Фурье [482].

Рассеянное поле будет иметь вид, аналогичный представлению (4.1.4), и  $x$ -компоненты рассеянного поля следует искать в виде

$$\begin{pmatrix} H_x^{(\sigma)} \\ E_x^{(\sigma)} \end{pmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F_j(\xi, \eta) U_j^{(\sigma)}(\xi, \eta; y, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (4.2.1)$$

Здесь индекс  $j$  соответствует  $H$ - или  $E$ -поляризованному полю,  $\sigma = 1, 2, \dots, N$  — индекс области пространства, где ищется рассеянное поле. Через  $U_j^{(\sigma)}(\xi, \eta; y, z)$  обозначены искомые функции, которые должны обеспечить подчинение полного поля однородному уравнению Гельмгольца, условиям излучения и необходимым граничным условиям на препятствии (слое). В силу периодического характера дифракционной структуры функции  $U_j^{(\sigma)}(\xi, \eta; y, z)$  естественно искать в виде рядов Фурье с неизвестными коэффициентами  $\alpha_{sj}^{(\sigma)}$  и  $\beta_{sj}^{(\sigma)}$  следующего вида:

$$U_j^{(\sigma)}(\xi, \eta; y, z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} [\alpha_{sj}^{(\sigma)} e^{-iq_s(z-\delta)} + \beta_{sj}^{(\sigma)} e^{iq_s z}] e^{i \frac{2\pi s y}{l}}, \quad (4.2.2)$$

где  $\delta$  — «толщина» неоднородности (высота брусьев, пластины, слоя и т. п.),

$$q_s = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \left(-\eta + \frac{2\pi s}{l}\right)^2}, \quad \operatorname{Re} q_s \geq 0, \operatorname{Im} q_s \geq 0. \quad (4.2.3)$$

Нетрудно показать, что при использовании разложений типа (4.2.1) и (4.2.2) для падающего и дифрагированного полей, проблема рассеяния волнового пучка на неоднородности сводится к рассмотрению задачи дифракции отдельной парциальной плоской волны, произвольно падающей на это препятствие и имеющей амплитуду  $F_j(\xi, \eta)$ . После отыскания значений  $\alpha_{sj}^{(\sigma)}$  и  $\beta_{sj}^{(\sigma)}$  для всех  $\xi, \eta$  в результате решения граничной задачи осуществляется обратный переход от интегрального представления дифрагированного поля к аналитическим выражениям типа (4.4.1).

4.2.2. Наиболее простой вид эти выражения имеют в случае резонансных условий, когда коэффициент прохождения плоской волны через данную структуру принимает максимальное значение. Его, оказывается, можно представить в следующем виде:

$$\alpha_0^N(\xi, \eta) = a(g) \exp\left\{i \frac{\xi^2 + \eta^2}{2k} \psi(g)\right\}, \quad (4.2.4)$$

где  $g$  — совокупность геометрических параметров конкретной периодической структуры;  $a(g), \psi(g)$  — функции, зависящие только от  $g$  и не зависящие от  $\xi, \eta$ .

Так, например, в случае  $H$ -поляризованной части поля для:

а) ленточной решетки при  $|(2l/\lambda) \ln \sin(\pi d/2l)| < 1$

$$a(g) = \exp\left\{i \frac{2l}{\lambda} \ln \sin \frac{\pi d}{2l}\right\}, \quad \psi(g) = -\frac{i}{2\pi} \ln \sin \frac{\pi d}{2l}; \quad (4.2.5)$$

б) двойной равнопериодной равнощелевой ленточной решетки при  $|(2l/\lambda) \ln \sin(\pi d/2l)| < 1$  и  $2\delta = (2M + 1)\lambda/2 +$

$$+ (\lambda/\pi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} \left(\frac{4l}{\lambda} \ln \sin \frac{\pi d}{2l}\right),$$

$$a(g) = i, \quad \psi(g) = \delta + \frac{2l}{\pi} \ln \sin \frac{\pi d}{2l}, \quad M = 0, 1, 2, \dots; \quad (4.2.6)$$

в) решетки из металлических брусьев прямоугольного поперечного сечения при  $|(2l/\lambda) \ln \sin(\pi d/2l)| < 1$

$$a(g) = -\exp\left\{-ik\left(\frac{\delta}{2} + \frac{l}{\pi} \ln \sin \frac{\pi d}{2l}\right)\right\},$$

$$\psi(g) = \frac{\delta}{2} + \frac{l}{\pi} \ln \sin \frac{\pi d}{2l},$$

$$\frac{d}{l} \ll 1, \quad \delta = \lambda M, \quad M = 1, 2, \dots \quad (4.2.7)$$

г) «ножевой» решетки при  $l/\lambda < 1/2$ ,  $\delta = \lambda M/2 + 2l \ln 2/\pi$ ,  $\delta/2l \gg 1$ :

$$a(g) = e^{ik\delta/2\pi}; \quad \psi(g) = \frac{\delta}{2} - \frac{l}{\pi} 2 \ln 2. \quad (4.2.8)$$

Аналогичные соотношения можно получить для:

д) диэлектрического слоя при  $\delta = \lambda_g/2M$ ,  $M = 1, 2, \dots$

$$a(g) = 1, \quad \psi(g) = \delta \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1}}; \quad (4.2.9)$$

е) диэлектрической пленки ( $\delta \Rightarrow 0$ )

$$a(g) \simeq \exp\left\{ik\delta \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\sqrt{\varepsilon_1}}\right\}, \quad \psi(g) \simeq \delta \frac{\varepsilon_1 + \varepsilon_2}{2\varepsilon_2 \sqrt{\varepsilon_1}}, \quad (4.2.10)$$

где  $d$  — ширина щелей решетки,  $l$  — период решетки,  $\lambda_g$  — длина волны в диэлектрике  $\varepsilon_2$ .

Для получения аналитических выражений дифрагированного поля следует использовать представление его в виде произведения сверток двух функций [482]. Тогда в случае максимального прохождения волнового пучка дифрагированное поле будет иметь, например, для основного типа колебаний следующий вид:

$$f_j(x, y, z) = \frac{a(g)}{\lambda \sqrt{\Delta_x \Delta_y}} \exp\{-ik(z - \delta)\} \exp\left\{-\frac{k}{2}\left(\frac{x^2}{\Delta_x} + \frac{y^2}{\Delta_y}\right)\right\}, \quad (4.2.11)$$

где

$$\left\{\begin{array}{l} \Delta_x(z) \\ \Delta_y(z) \end{array}\right\} = \left\{\begin{array}{l} A_0 \\ B_0 \end{array}\right\} - i[z - \delta + \psi(g)]; \quad (4.2.12)$$

$A_0, B_0$  — характеристические параметры пучка, пропорциональные ширине пятна пучка при  $z = 0$ .

Аналогичные формулы получаются для пучков высших порядков, когда амплитудное распределение описывается функциями Гаусса — Эрмита.

Анализ полученных выражений для дифрагированного поля позволяет сделать ряд интересных физических выводов.

1) Если падающий на дифракционную решетку пучок имеет гауссово распределение на ее поверхности, то при определенных

(для каждого типа решетки) условиях он сохраняет свою структуру и после прохождения решетки, т. е. остается гауссовым. Происходит лишь изменение характеристик волнового пучка.

2) Поскольку структура пучка сохраняется при строго определенных соотношениях между длиной падающей волны и параметрами решетки, то дифракционная решетка может играть роль фильтра как типов колебаний, так и поляризаций волновых пучков.

3) Выбирая геометрию решетки надлежащим образом, можно управлять параметрами волнового пучка, изменяя их в нужном направлении. В частности, можно указать на одно из применений дифракционных решеток в квазиоптических линиях передач — в качестве фазового корректора [12].

### § 4.3

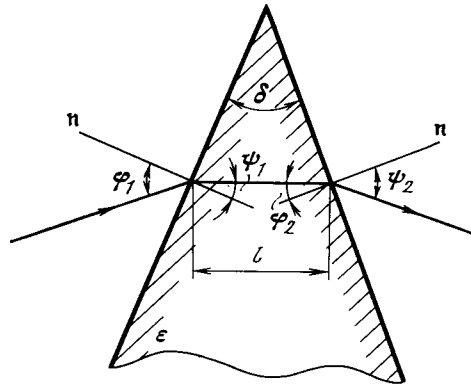
#### Диэлектрическая призма в изломе квазиоптической линии

Выше мы рассмотрели трансформацию волнового пучка на одной (§ 4.1) и двух (§ 4.2) плоских границах. Причем во втором случае был исследован только случай параллельных границ раздела сред. Для изменения направления распространения пучка в квазиоптических линиях используются либо плоские зеркала — для поворота на большой угол (рабочая площадь зеркала при этом невелика), либо призмы — для поворота на малый угол (толщина призмы и потери в диэлектрике при этом малы). Таким образом, необходимо произвести обобщение результатов предыдущего параграфа на случай двух непараллельных границ. Для начала мы не будем учитывать влияния острого края призмы (см. рис. 17. б). Это предположение не является жестким, так как поле волнового пучка (4.1.1) экспоненциально убывает по мере удаления от оси, а размеры квазиоптических элементов (в данном случае призмы) обычно много больше поперечного размера пучка  $w_{\max}(z)$ .

Обратимся теперь к вопросу о прохождении пучка через диэлектрическую призму (рис. 85). При больших  $kx_0$  основной вклад в потери вносит геометрооптическое трансформирование. Однако в ряде случаев оно отсутствует, и единственным источником потерь на преобразование остается дифракция пучка при преломлении [404].

Прежде чем строить поле пучка, испытавшего два преломления на границах воздух—диэлектрик и диэлектрик—воздух, придется принять одно существенное ограничение: угол падения пучка на заднюю грань призмы должен быть меньше угла полного внутреннего отражения. В противном случае возникают неоднородные плоские волны, экспоненциально затухающие в направлении, перпендикулярном направлению своего распространения, и наше рассмотрение, основанное на свойствах обычных плоских волн, оказывается неприемлемым. Указанное ограничение фор-





Р и с. 85. Прохождение волнового пучка через диэлектрическую призму

мулируется следующим образом:

$$\sin \varphi_2 = \sin (\psi_1 - \delta) < \frac{1}{n}. \quad (4.3.1)$$

Первая несимметричная волна  $\psi_1(l)$  после прохождения призмы может быть представлена в виде суперпозиции волн нечетных индексов с амплитудами

$$c_{1, 2q+1} = \left[ \frac{(2q+1)!}{(q!)^2 2^{2q}} \left( \frac{A}{A(l)} \right)^{3/2} \right]^{1/2} \tau^3 (\tau^2 - 1)^q. \quad (4.3.2)$$

Вообще, если на призму падает волна произвольного индекса, то после выхода из призмы она распадается на волны с индексами той же четности.

Трансформирования размеров пучка не происходит, если пучок выходит из призмы под углом, равным углу падения на переднюю поверхность; при этом выполняется соотношение

$$t_1 t_2 = 1. \quad (4.3.3)$$

Однако даже при условии симметричного хода пучка через призму (4.3.3) фазовый фронт собственной волны не совпадает с фазовым фронтом трансформированной.

Оценим отличие мощности основной собственной волны на выходе призмы от единичной мощности на входе, т. е. общие потери. Они складываются из потерь вследствие отражения от поверхностей призмы, потерь из-за трансформирования и дифракционных потерь на преобразование в несимметричные волны первого и третьего порядков. Для больших  $kr_s$  основной вклад вносят потери из-за трансформирования и отражения, равные

$$1 - \left| c_{00} \frac{D(\varphi_1) D(\varphi_2)}{\sqrt{t_1 t_2}} \right|^2. \quad (4.3.4)$$

Величину потерь третьего типа легко получить из формулы (4.1.9), просуммировав мощности паразитных волн, возникающих при преломлении на двух поверхностях призмы.

При данном угле при вершине призмы  $\delta$  общие потери зависят от угла падения пучка  $\varphi_1$ . Анализ показал, что в случае s-поляризации и малых  $\delta$  минимальные потери достигаются при угле падения  $\varphi_1 = \arctg n$  и равны

$$1 - \left| c_{00} \frac{D(\varphi_1) D(\varphi_2)}{\sqrt{t_1 t_2}} \right|^2 = \frac{3}{4} \left( \frac{n^2 - 1}{n} \delta \right)^2 + \frac{1}{8} \left( \frac{n^2 - 1}{n^4} \frac{l}{A(0)} \right)^2, \quad (4.3.5)$$

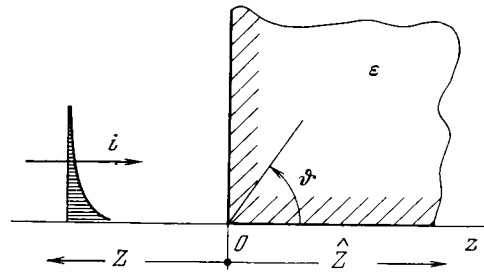
$$\delta \ll 1, \quad \frac{l}{A(0)} \ll 1.$$

Первое слагаемое обязано трансформированию размера пучка и отлнчию угла  $\varphi_2$  от угла Брюстера, второе — рассогласованию фазовых фронтов. Для p-поляризации локальный минимум потерь достигается при симметричном ходе пучка. Рассогласование фазовых фронтов дает вклад в потери, равный

$$\frac{1}{8} \left( \frac{n-1}{n} \frac{l}{A(0)} \right)^2; \quad (4.3.6)$$

потери определяются в основном отражением от граней. При симметричном ходе поле на выходе наиболее близко к полю основной волны. В пользу симметричной ситуации говорит и следующее соображение. Случайный наклон призмы отклоняет пучок; в слабофильтрующем лучевом его траектория превратится в зигзагообразную, в сильнофильтрующем — появятся дополнительные потери на преобразование в волны высших порядков. Такой случайный уход пучка в симметричном случае пропорционален квадрату наклона призмы, и, следовательно, потери пропорциональны четвертой степени этого угла и пренебрежимо малы. При брюстеровском падении уход пучка уже пропорционален первой степени угла наклона призмы, т. е. требования на установку призмы существенно повышаются [404].

4.3.2. Диэлектрическая призма в изломе линии поверхностной волны. Ключевая задача. Во введении (с. 34) мы отмечали, что прозрачная призма с успехом используется как поворотный элемент линии поверхностной волны (рис. 17, а). Ключевой задачей для таких структур является диэлектрическая ступенька на импедансной плоскости (рис. 6, и). Обычно высота ступеньки такова, что поле поверхностной волны «не замечает» ее верхнего края и, стало быть, можно в модельной задаче ступеньку считать бесконечно высокой. Рассмотрим, кроме того, случай, когда диэлектрическое препятствие установлено на стыке двух импедансов  $Z$  и  $\hat{Z}$ . Ключевой задачей для расчета подобных структур может служить система, представленная на рис. 6, н [92]. Для простоты будем рассматривать двумерную ( $\partial/\partial x \equiv 0$ ) задачу, когда полуплоскости с различными импедансами  $Z$  (при  $z < 0$ ) и  $\hat{Z}$  ( $z > 0$ ) лежат в одной плоскости  $xOz$ ; четверть полупространства  $y, z > 0$  занята одно-



Р и с. 86. Диэлектрическая призма на скачке импеданса  $\Delta Z = Z - \hat{Z}$  в линии поверхностной волны

родным диэлектриком с проницаемостью  $\epsilon$ . При  $\epsilon = 1$  мы приходим к известной задаче Гринберга — Фока о береговой рефракции, допускающей строгое решение методом Винера — Хопфа — Фока [4].

Электромагнитное поле на плоскости  $xoz$  удовлетворяет однородным импедансным граничным условиям Щукина — Леонтовича (1.1.14)

$$\frac{\partial \psi}{\partial y} + \alpha \psi(y, z) = 0. \quad (4.3.7)$$

Здесь функция  $\psi(y, z)$  выступает в двух ипостасях и обозначает составляющую  $H_x$  (случай  $E$ -волн;  $H_z \equiv 0$ ) или  $E_x$  ( $H$ -волны;  $E_z = 0$ ), удовлетворяет двумерному уравнению Гельмгольца  $(\Delta_{yz} + k^2\epsilon)\psi(y, z) = 0$  и условию излучения Зоммерфельда (2.3). Для  $E$ -волн параметр  $\alpha$  из (4.3.7) равен

$$\alpha = -ik\sqrt{\epsilon} \frac{Z_0}{Z}, \quad (4.3.8)$$

а для  $H$ -волн он принимает значение

$$\alpha = -ik\sqrt{\epsilon} \frac{Z_0}{\hat{Z}}. \quad (4.3.9)$$

В формулах (4.3.8) и (4.3.9) импеданс свободного пространства  $Z_0 = \sqrt{\mu_0/\epsilon_0}$ ;  $\epsilon_0, \mu_0$  — проницаемость свободного пространства;  $Z$  (или  $\hat{Z}$ ) — поверхностный импеданс, который в настоящем пункте предполагается однородным. Обобщение на случай анизотропного импеданса [11] не представляет труда.

Итак, пусть слева на препятствие  $z = 0$  набегают поверхностная волна  $H$ -типа,  $x$ -я компонента электрического поля которой есть  $E_x = \exp\{-\alpha y - ih_0z\}$ ,  $h_0^2 = k^2 + \alpha^2$  (рис. 86). Представим полные поля слева и справа от препятствия в виде разложений по полной ортонормированной системе собственных функций открытого волновода [14, 46]:

при  $z < 0$

$$\psi(y, z) = \Psi_0(y) e^{-ih_0z} + R_0 \Psi_0(y) e^{ih_0z} + \int_0^\infty R(\kappa) \Psi_-(\kappa, y) e^{ihz} d\kappa \quad (4.3.10)$$

и справа при  $z > 0$

$$\hat{\psi}(y, z) = T_0 \hat{\Psi}_0(y) e^{-ih_0z} + \int_0^\infty T(\kappa) \hat{\Psi}_+(\kappa, y) e^{-ihz} d\kappa. \quad (4.3.11)$$

Соотношениями (4.3.10) и (4.3.11) зафиксирован случай, когда импедансы  $Z$  и  $\hat{Z}$  поддерживают только одну поверхностную волну, так что справа в (4.3.10) поле представлено падающей и отраженной волнами дискретного спектра  $\Psi_0(y)$  и интегралом по непрерывному спектру  $\Psi_-(\kappa, y)$ ; поле при  $z > 0$  в формуле (4.3.11) содержит прошедшую волну того же типа, что и падающая, и интеграл по непрерывному спектру  $\hat{\Psi}_+(\kappa, y)$ ;  $\kappa$  — поперечное волновое число; продольное волновое число  $h^2 = k^2 - \kappa^2$  для  $z < 0$  и  $\hat{h}^2 = k^2\epsilon - \kappa^2$  для  $z > 0$  \*. Функции поперечного сечения определяются так:

$$\Psi_0(y) = \exp\{-\alpha y\}, \quad \hat{\Psi}_0(y) = \exp\{-\hat{\alpha} y\}, \quad (4.3.12)$$

$$2\Psi_-(\kappa, y) = \kappa \cos \kappa y - \alpha \sin \kappa y,$$

$$2\hat{\Psi}_+(\kappa, y) = \kappa \cos \kappa y - \hat{\alpha} \sin \kappa y.$$

Потребуем теперь выполнения равенства тангенциальных составляющих электрического и магнитного полей (2.2) на границе раздела воздух — диэлектрик при  $z = 0, y > 0$ :

$$\psi(y, -0) = \psi(y, +0), \quad \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=-0} = \frac{\partial \psi}{\partial z} \Big|_{z=+0}. \quad (4.3.13)$$

Умножая получившиеся при этом соотношения последовательно на функции  $\Psi_0(y)$  и  $\hat{\Psi}_0(y)$  и интегрируя результат по  $y$  от 0 до  $\infty$ , получим (учитывая свойство ортогональности собственных функций дискретного и непрерывного спектров) систему интегральных уравнений рассматриваемой задачи (ср. [93], где  $Z = \hat{Z}$ )

$$(1 + R_0) \begin{Bmatrix} 1 \\ S(\alpha, \hat{\alpha}) \end{Bmatrix} - T_0 \begin{Bmatrix} S(\alpha, \hat{\alpha}) \\ 1 \end{Bmatrix} \mp \int_0^\infty \begin{Bmatrix} T(\kappa) \hat{S}(\kappa; \alpha, \hat{\alpha}) \\ R(\kappa) S(\kappa; \alpha, \hat{\alpha}) \end{Bmatrix} d\kappa = 0, \quad (4.3.14)$$

\* Если импедансы  $Z$  и  $\hat{Z}$  таковы, что могут поддерживать несколько поверхностных волн, то второй член справа в (4.3.10) и первый — в (4.3.11) должны быть заменены конечными суммами, в которых был бы учтен весь спектр поверхностных волн.

$$h_0(1 - R_0) \left\{ S(\alpha, \hat{\alpha}) \right\} - \hat{h}_0 T_0 \left\{ S(\alpha, \hat{\alpha}) \right\} - \int_0^\infty \left\{ T(\kappa) \hat{h} \hat{S}(\kappa; \alpha, \hat{\alpha}) \right\} - \left\{ R(\kappa) \hat{h} S(\kappa; \alpha, \hat{\alpha}) \right\} d\kappa = 0.$$

Коэффициенты связи суть

$$\hat{S}(\alpha, \hat{\alpha}) = \int_0^\infty \Psi_0(y) \hat{\Psi}_0(y) dy = \frac{2\sqrt{\alpha\hat{\alpha}}}{\alpha + \hat{\alpha}},$$

$$S(\kappa; \alpha, \hat{\alpha}) = \int_0^\infty \Psi(\kappa, y) \hat{\Psi}_0(y) dy = - \frac{\kappa\sqrt{\hat{\alpha}}}{[\pi(\alpha^2 + \kappa^2)]^{1/2}} \frac{\hat{\alpha} - \alpha}{\kappa^2 + \hat{\alpha}^2}, \quad (4.3.15)$$

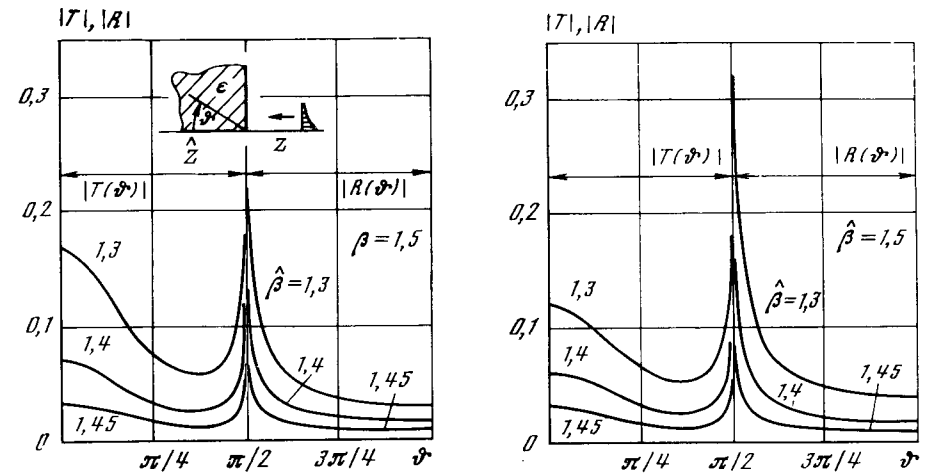
$$\hat{S}(\kappa; \alpha, \hat{\alpha}) = \int_0^\infty \hat{\Psi}(\kappa, y) \Psi_0(y) dy = - \frac{\kappa\sqrt{\alpha}}{[\pi(\hat{\alpha}^2 + \kappa^2)]^{1/2}} \frac{\alpha - \hat{\alpha}}{\kappa^2 + \alpha^2}.$$

Система интегральных уравнений (4.3.14) допускает строгое решение только в пределе при  $\epsilon \Rightarrow 1$  (см., например, [4, 11, 15, 21]; ср. § 2.3; [133, 137]) скачка двух импедансов. В общем случае необходимо численное решение системы (4.3.14), однако ряд интересных следствий можно получить непосредственно из анализа частных ситуаций для (4.3.14), (4.3.15).

Рассмотрим прежде всего случай одинакового замедления при  $z \leq 0$ , когда  $\alpha = \hat{\alpha}$ , или, что то же, равных эффективных протяженностей полей  $d = 1/\alpha$ . Тогда из (4.3.15) следует, что  $S(\alpha, \hat{\alpha}) = 1$ ,  $S(\kappa) = \hat{S}(\kappa) = 0$  и из первого и третьего уравнений системы (4.3.14) получаем

$$R = \frac{h_0 - \hat{h}_0}{h_0 + \hat{h}_0}, \quad T = \frac{2h_0}{h_0 + \hat{h}_0}, \quad R(\kappa) = T(\kappa) = 0. \quad (4.3.16)$$

В формулах (4.3.16) содержится интересный результат: при  $\alpha = \hat{\alpha}$  излучение отсутствует,  $T(\kappa) = R(\kappa) = 0$ , т. е. отсутствует преобразование падающей поверхностной волны в волны непрерывного спектра. При этом для коэффициента отражения  $R$  и прохождения  $T$  поверхностной волны (первые два соотношения в (4.3.16)) мы получили формулы, аналогичные известным соотношениям из теории соединения одноволновых волноводов (ср. п. 1.1.2, § 3.2, а также формулу (45.15) из [331] и многое другое). Таким образом, подобрав импедансы  $Z$  и  $\hat{Z}$  так, чтобы  $\alpha = \hat{\alpha}$ , можно обеспечить отсутствие преобразования энергии падающей волны в поле излучения (непрерывный спектр). Полученное свойство рассматриваемой ключевой задачи имеет простое физическое истолкование: при  $\alpha = \hat{\alpha}$  поперечные структуры полей падающей



Р и с. 87. Коэффициенты отражения и прохождения в задаче рис. 86:  $\beta = 1,5$ ;  $\beta = \text{const}$   
Р и с. 88. То же, что на рис. 87:  $\beta = 1,5$ ;  $\beta = \text{const}$

( $z = -0$ ) и прошедшей ( $z = +0$ ) волн одинаковы, а стало быть, преобразования не будет. Отражение падающей волны от стенки  $z = 0$  может быть скомпенсировано посредством одно- или многослойного просветляющего покрытия (см., например, [12—45]).

Установленный здесь эффект компенсации поля излучения, порождаемого (при  $\epsilon \Rightarrow 1$  или, вообще, для  $\alpha \neq \hat{\alpha}$ ) скачком импеданса  $Z - \hat{Z}$ , подбором диэлектрической проницаемости препятствия может найти разнообразные технические приложения на практике, например, при решении задачи о преодолении излома ЛПВ в месте ее подвеса, поворота линии на некоторый угол, возбуждения резонансной диэлектрической (ферритовой) призмы и многих других.

Достаточно просто получить решение для *малого скачка импеданса*. При этом можно поступать двояким образом: либо решать систему (4.3.14) методом последовательных приближений, либо ввести на границе  $z = 0$  некоторый фиктивный переходный диэлектрический слой с толщиной  $L$  и  $\epsilon = \epsilon(z)$ , меняющейся от 1 до  $\epsilon$  (при  $z = L$ ). После этого можно воспользоваться процедурой метода поперечных сечений для открытых волноводов [46] и в конечных формулах перейти к пределу  $L \Rightarrow 0$ . Результаты в обоих случаях в первом порядке по малому параметру  $\Delta\alpha = \alpha - \hat{\alpha}$  получаются одинаковыми. Так, квадрат коэффициента отражения

$$R_0^2 = \left| \frac{h_0 - \hat{h}_0}{2h_0} \right|^2, \quad (4.3.17)$$

а коэффициенты прохождения (диаграммы направленности волн

непрерывного спектра) суть

$$T(\vartheta) = \left(\frac{\hat{\alpha}}{\pi\hat{h}}\right)^{1/2} \frac{\hat{\alpha} - a}{(\hat{\alpha}^2 + k^2 \varepsilon \sin^2 \vartheta)^{1/2}} \frac{1}{\hat{h}_0 - k\sqrt{\varepsilon} \cos \vartheta}, \quad z > 0; \quad (4.3.18)$$

$$R(\vartheta) = \left(\frac{a}{\pi\hat{h}}\right)^{1/2} \frac{\hat{\alpha} - a}{(a^2 + k^2 \sin^2 \vartheta)^{1/2}} \frac{1}{\hat{h}_0 - k \cos \vartheta}, \quad z < 0,$$

где  $\vartheta$  — угол, отсчитываемый от положительного направления оси против часовой стрелки; угол  $\vartheta$  связан с поперечным и продольным волновыми числами следующим образом:

$$\begin{aligned} \hat{\kappa}_a &= k\sqrt{\varepsilon} \sin \vartheta, & \kappa &= k \sin \vartheta, & \hat{h} &= k\sqrt{\varepsilon} \cos \vartheta, \\ h &= -k \cos \vartheta. \end{aligned} \quad (4.3.19)$$

Подбирая угол  $\vartheta$  так, чтобы направление максимума диаграммы излучения совпадало с углом полного внутреннего отражения диэлектрической призмы, можно осуществить эффективное возбуждение призмы, находящей широкое применение в интегральных схемах СВЧ и линиях поверхностных волн (см. § 4.5 и рис. 87, 88).

#### § 4.4

##### Диэлектрическая призма в открытом резонаторе. Связанные колебания

4.4.1. *Двумерная диэлектрическая призма между параллельными идеально проводящими плоскостями.* Пусть металлические экраны на рис. 21, а, в неограниченно велики. Тогда модели открытых резонаторов рис. 21, а, в будут существенно отличаться друг от друга. Дело в том, что в модели рис. 21, а имеется три объема: собственно призма (ее колебания мы приближенно — без учета дифракции на ребре — рассмотрели в п. 1.4.8) и два объема, образованные зазорами между призмой и соответствующей верхней или нижней плоскостями. Если зазоры одинаковой высоты, то по существу мы будем иметь дело с двумя связанными резонаторами: задачу можно разбить на две — симметричные и асимметричные колебания относительно плоскости  $xoz$ . В зазоре между призмой и металлической плоскостью в принципе возможны колебания за счет отражений «волны зазора» от открытого края:  $x = \pm a$ . В п. 1.4.8 мы видели, что в призме существуют колебания, запертые в призме за счет полного внутреннего отражения от всех граней. Очевидно, для схемы рис. 21, а они представляют малый интерес, так как, во всяком случае, в пределах точности полученных в п. 1.4.8 результатов не участвуют в передаче энергии в зазор. Также не представляют интереса для связанных колебаний и те колебания призмы, для которых светящими гранями будут грани  $x = \pm a$ . Волны, излученные этими гранями, ух-

дят в правый и левый волноводы и изымаются тем самым из системы. Наличие зеркал  $y = \pm b$  существенно влияет на колебания призмы, для которых  $k_y \gg k_x$ . Они, во-первых, излучаются из призмы и после отражения от металла вновь попадают в призму, и, во-вторых, угол, под которым они излучаются из призмы, близок к прямому, что делает возможным получить для волны в зазоре коэффициент отражения от открытого конца  $x = \pm a$ , близкий к 1. Таким образом, необходимо рассмотреть связанные через грани  $y = \pm b$  колебания в системе призма — зазор. В пределах боковых граней призмы  $x = \pm a - 0$ ,  $y \in (-b, b)$  поле удовлетворяет граничным условиям

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = ik_x^0 \varepsilon H_z, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = ik_x^0 E_z, \quad (4.4.1)$$

непосредственно следующим из общих формул (1.4.48). Вместо (4.4.1) можно, воспользовавшись условием  $k_x \ll k_y$ , при котором  $k_x^0 \simeq ik\sqrt{\varepsilon\mu - 1}$ , записать граничные условия в виде

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -k\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu - 1} H_z, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -k\mu\sqrt{\varepsilon\mu - 1} E_z. \quad (4.4.2)$$

На открытых концах зазора  $x = |a|$ ,  $y \in (|b|, |b|)$  поле при поставленных условиях удовлетворяет импедансным граничным условиям резонансного типа

$$\frac{\partial H_z}{\partial x} = -\sqrt{\frac{k}{b-b}} \frac{H_z}{\beta' + i\beta''_{H}}, \quad \frac{\partial E_z}{\partial x} = -\sqrt{\frac{k}{b-b}} \frac{E_z}{\beta' + i\beta''_{E}}. \quad (4.4.3)$$

Здесь учтен резонансный характер отражения:  $k(b-b) = \pi q + \zeta_m^0$ ,  $|\zeta_m^0| \ll 1$ ,  $q = 1, 2, \dots$  — в зазоре укладывается почти целое число полуволн. Записанное условие резонанса справедливо, вообще говоря, для идеально отражающих зеркал. В нашем случае необходимо еще учесть связь между призмой и зазором на участке  $y = b$ ,  $x \in (-a, a)$ . Другими словами, нужно знать коэффициент отражения  $R$  собственной волны плоского волновода с полубесконечным диэлектрическим слоем толщиной  $2a$ , набегающей, например, из  $x = -\infty$  на открытый конец  $x = a$ . Подобное выражение для  $R$  в случае  $k(b-b) \gg 1$ , когда  $\beta' = \beta''_{E,H} = \beta_0$ , получено в [14]. В этом отношении здесь рассмотрен более общий случай. Не приводя подробных выкладок, выпишем лишь окончательный результат:

$$R_{E,H} = -\exp\left\{i2\frac{k_x}{k}\left[\frac{g}{1+g}(\beta' + i\beta''_{E,H})\sqrt{\frac{k(b-b)}{2}} + \frac{1}{1+g}\frac{1}{\varepsilon\sqrt{\varepsilon\mu - 1}}\right]\right\}, \quad (4.4.4)$$

где  $g = \varepsilon A^2(b-b)/b$ ,  $A$  — амплитуда набегающей волны.

Теперь, записывая поля для резонатора рис. 21, а в виде

$$H_z = f_x(k_x x) f_y(k_y y) \text{ для } x \in (-a, a), z \in (-b, b),$$

$$H_z = f_x(k_x x) A \cos[k_y(\hat{b} - y)] \text{ для } x \in (-a, a), z \in (\hat{b}, b) \quad (4.4.5)$$

и представляя коэффициент отражения  $R = -(-1)^m \exp\{-i2k_x a\}$ ,  $m = 1, 2, \dots$ , получим

$$k_x = \pi m / 2a \left[ 1 + \frac{g}{1+g} \frac{\beta' + i\beta''}{M} + \frac{1}{1+g} \frac{1}{ka\epsilon \sqrt{\epsilon\mu - 1}} \right],$$

$$M = \sqrt{\frac{2ka}{\hat{b} - b}}. \quad (4.4.6)$$

И, наконец, учитывая, что  $k_y = k\sqrt{\epsilon\mu} - (k_x^2/2k\sqrt{\epsilon\mu})$ , можно написать искомое уравнение для собственных частот резонатора

$$\frac{f'_y(kb\sqrt{\epsilon\mu} - \zeta_m)}{f_y(kb\sqrt{\epsilon\mu} - \zeta_m)} = \sqrt{\frac{\epsilon}{\mu}} \operatorname{tg}[k(\hat{b} - b) - \zeta_m^0], \quad (4.4.7)$$

в котором

$$\zeta_m = \frac{k_x^2 b}{2k\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \zeta_m^0 = \frac{k_x^2(\hat{b} - b)}{2k} = \sqrt{\epsilon\mu} \frac{\hat{b} - b}{b} \zeta_m. \quad (4.4.8)$$

Величины  $\zeta_m$  и  $\zeta_m^0$  — комплексные, так как часть энергии из зазора излучается в волновод.

Совершенно аналогично рассматриваются колебания другой поляризации. Представляя поле в виде

$$E_z = f_x(k_x x) f_y(k_y y) \text{ для } x \in (-a, a), y \in (-b, b),$$

$$E_z = f_x(k_x x) B \sin[k_y(\hat{b} - y)] \text{ для } x \in (-a, a), y \in (b, \hat{b}), \quad (4.4.9)$$

получим

$$k_x = \pi m / 2a \left[ 1 + \frac{g}{1+g} \frac{\beta' + i\beta''}{M} + \frac{1}{1+g} \frac{1}{ka\mu \sqrt{\epsilon\mu - 1}} \right] \quad (4.4.10)$$

и вместо (4.4.7) следующее уравнение:

$$\frac{f'_y(kb\sqrt{\epsilon\mu} - \zeta_m)}{f_y(kb\sqrt{\epsilon\mu} - \zeta_m)} = -\sqrt{\frac{\mu}{\epsilon}} \operatorname{ctg}[k(\hat{b} - b) - \zeta_m^0]. \quad (4.4.11)$$

Соотношения (4.4.7) и (4.4.11) представляют собою уравнения связанных колебаний. Степень связи определяется коэффициентом отражения  $R_j$ ,  $j = 1, 2$  от границы раздела  $y = |b|$  (формулы (1.1.10) или (1.1.11) при угле падения, близком к нормальному). Очевидны два предельных случая:  $R_j = 0$  и  $R_j = \pm 1$ , когда уравнения (4.4.7) и (4.4.11) допускают явные решения. Рассмотрим первое из этих уравнений (4.4.7). При  $f_y(\eta) = \cos \eta$  оно может быть пре-

образовано к виду

$$\sin(\kappa - \zeta_m - \zeta_m^0) = -R_1 \sin(\kappa\theta + \zeta_m - \zeta_m^0), \quad (4.4.12)$$

а при  $f_y(\eta) = \sin \eta$  — к виду

$$\cos(\kappa - \zeta_m - \zeta_m^0) = R_1 \cos(\kappa\theta + \zeta_m - \zeta_m^0). \quad (4.4.13)$$

В последних формулах

$$\kappa = k(\hat{b} - b + b\sqrt{\epsilon\mu}), \quad \theta = \frac{\hat{b} - b - b\sqrt{\epsilon\mu}}{\hat{b} - b + b\sqrt{\epsilon\mu}}, \quad \theta \in (-1, 1). \quad (4.4.14)$$

Теперь для  $R_1 = 0$  получим выражение

$$\kappa = (\pi q / 2) + \zeta_m + \zeta_m^0, \quad (4.4.15)$$

в котором четные  $q$  соответствуют уравнению (4.4.12), а нечетные — (4.4.14). При  $|R| \ll 1$   $\kappa$  можно представить в виде

$$\kappa = (\pi q / 2) + \zeta_m + \zeta_m^0 + \Delta\kappa, \quad |\Delta\kappa| \ll 1, \quad (4.4.16)$$

и для добавки  $\Delta\kappa$  получим

$$\Delta\kappa = R_1 \sin \left[ \frac{1}{2} \pi q (1 + \theta) + \zeta_m (1 + \theta) - \zeta_m^0 (1 - \theta) \right]. \quad (4.4.17)$$

Важным физическим следствием полученного результата является величина  $A$  — отношение амплитуды поля в зазоре и призме. Она равна

$$A = \frac{f_y(kb\sqrt{\epsilon\mu} - \zeta_m)}{\cos[k(\hat{b} - b) - \zeta_m^0]}. \quad (4.4.18)$$

При  $|R| \ll 1$  величина  $A$  оказывается такой:

$$A \sim \pm [1 + R_1 - R_1 \cos(\pi q (1 + \theta) / 2)]. \quad (4.4.19)$$

Таким образом,  $A$  является как бы промодулированной по индексу  $q$ . Отсюда следует, что при разных значениях продольного индекса  $q$  энергия связанных колебаний оказывается по-разному распределенной между зазором и призмой.

При условии  $R_1 = 1$  решения уравнений (4.4.12) и (4.4.13) можно представить в виде двух последовательностей

$$\kappa_1 = \frac{\pi q_1 + 2\zeta_m}{1 - \theta}, \quad (4.4.20)$$

$$\kappa_2 = \frac{2\pi q_2 + 2\zeta_m^0}{1 + \theta}, \quad (4.4.21)$$

где  $q_{1,2}$  — целые числа. Формулой (4.4.20) определены собственные частоты призмы  $kb\sqrt{\epsilon\mu} = (\pi q_1 / 2) + \zeta_m$ ,  $g = 0$ ; формулой (4.4.21) — собственные частоты зазора  $k(\hat{b} - b) = \pi q_2 +$

+  $\zeta_m^0$ ,  $g = \infty$ . При  $R_1 = 1$  колебания в призме и зазоре никак друг с другом не связаны.

Если между резонансными объемами существует слабая связь, определяемая так:  $R_1 = 1 - \Delta R$ , где  $\Delta R \ll 1$ , то уравнения (4.4.12) и (4.4.13) можно переписать в виде

$$2 \sin \left[ \frac{\kappa(1 \pm \theta)}{2} - \zeta_m^0 \right] \cos \left[ \frac{\kappa}{2}(1 - \theta) - \zeta_m \right] = \\ = \Delta R \sin(\kappa\theta + \zeta_m - \zeta_m^0), \quad (4.4.22)$$

$$2 \sin \left[ \frac{\kappa}{2}(1 + \theta) - \zeta_m^0 \right] \sin \left[ \frac{\kappa}{2}(1 - \theta) - \zeta_m \right] = \\ = \Delta R \cos(\kappa\theta + \zeta_m - \zeta_m^0). \quad (4.4.23)$$

Корни этих уравнений близки к значениям  $\kappa_{1,2}$ , даваемым формулами (4.4.20), (4.4.21). В случае, когда какие-то два значения  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  близки друг к другу, уравнения (4.4.22) и (4.4.23) приводятся к квадратному уравнению

$$(\kappa - \kappa_1)(\kappa - \kappa_2) = 2\Delta R/(1 - \theta^2), \quad (4.4.24)$$

широко известному в теории колебаний и определяющему связанные колебания двух маятников или двух резонансных контуров с близкими собственными частотами. Решения уравнения (4.4.24) имеют вид

$$\kappa = \frac{\kappa_1 + \kappa_2}{2} \pm \sqrt{\frac{(\kappa_1 - \kappa_2)^2}{4} + \frac{2\Delta R}{1 - \theta^2}}. \quad (4.4.25)$$

При  $\kappa_1 = \kappa_2$  расщепление частот, вызванное связью между колебаниями, определяется так:

$$\Delta\kappa = 2\sqrt{2\Delta R/(1 - \theta^2)}. \quad (4.4.26)$$

Формулы (4.4.25), (4.4.26) дают правильную оценку ситуации при  $|\kappa_1 - \kappa_2| \lesssim \Delta\kappa$ . Если  $|\kappa_1 - \kappa_2| \gg \Delta\kappa$ , то колебания призмы и зазора практически независимы и влияние слабой связи между резонаторами следует учитывать, представляя решения уравнений (4.4.22) и (4.4.23) в виде

$$\kappa = \kappa_j + \Delta\kappa_j, \quad j = 1, 2; \quad \Delta\kappa_j \ll 1. \quad (4.4.27)$$

Если представить  $\kappa_j$  как  $\kappa_j = \kappa_j' - i\kappa_j''$ , то при близости  $\kappa_1$  и  $\kappa_2$  мнимая часть  $\kappa$  оказывается по порядку величины, равной  $\kappa_2''/2$ . В то же время при слабой связи между резонаторами  $\kappa'' \sim (\kappa''/2)\Delta R$ , т. е. оказывается во много раз меньше. Таким образом, при  $R_1 \simeq 1$  происходит существенное разрежение спектра по продольному индексу  $q$ . Это разрежение обусловлено тем, что колебания в диэлектрике, попадающие в резонанс с колебаниями в зазоре, приобретают затухание того же порядка, что и колебания в зазоре.

Мы здесь привели формулы для колебаний в зазоре, которые справедливы при величине зазора, кратной целому числу полуволн. В этом отношении наши результаты обобщают полученные в

[14]. Вместе с тем необходим более тонкий анализ, в частности, поляризационных эффектов, которые учитываются граничными условиями (4.4.3). К сожалению, из-за недостатка места мы этот вопрос вынуждены опустить.

4.4.2. Диэлектрическая призма с двумя металлизированными гранями позволяет исключить из соответствующих граний за счет полного отражения волны от металла. От других двух граний отражение обуславливается явлением полного внутреннего отражения. Пусть в призме рис. 21, в металлизированы верхняя и нижняя грани:  $x = |a|$ ,  $y \in (-b, b)$ . Ключевая задача для такой структуры точно не рассмотрена, и поэтому нужно воспользоваться каким-нибудь приближенным подходом. В работе [463] к анализу такого резонатора применен метод параболического уравнения [5, 6] (см. также п. 2.4.6). Поскольку колебания в призме существуют за счет полного внутреннего отражения от граний  $y = |b|$ ,  $x \in (-a, a)$ , имеет смысл рассматривать плоские волны, падающие на эти грани под малыми (скользящими) углами, а стало быть, можно вдоль этих направлений выделить быстроменяющиеся множители. Представив поля в призме

$$E_z(x, y) = e^{ik\sqrt{\epsilon\mu}} u(x, y) \pm e^{-ik\sqrt{\epsilon\mu}} u(-x, y) \quad (4.4.28)$$

и снаружи в непосредственной близости от грани

$$E_z(x, y) = e^{ik\sqrt{\epsilon\mu}} u_0(x, y) \pm e^{-ik\sqrt{\epsilon\mu}} u_0(x, y) \quad (4.4.29)$$

для медленно меняющихся функций  $u(x, y)$  и  $u_0(x, y)$ , получим обычное параболическое уравнение для  $u(x, y)$

$$(\partial^2 u / \partial y^2) + i2k\sqrt{\epsilon\mu}(\partial u / \partial x) = 0, \quad y < b, \quad (4.4.30)$$

и следующее уравнение для функции  $u_0(x, y)$ :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + i2k\sqrt{\epsilon\mu} \frac{\partial u}{\partial x} - k^2(\epsilon\mu - 1) = 0, \quad |y| \gtrsim b. \quad (4.4.31)$$

Граничными условиями для (4.4.30) и (4.4.31) будут следующие соотношения:

$$u(x, \pm b) = u_0(x, \pm b); \quad \frac{1}{\mu} \frac{\partial u(x, \pm b)}{\partial y} = \frac{\partial u_0(x, \pm b)}{\partial y}. \quad (4.4.32)$$

Из условий на металле  $x = |a|$  следует

$$u(a, y) = \mp u(-a, y) e^{-i2ka\sqrt{\epsilon\mu}}. \quad (4.4.33)$$

Задача (4.4.30)–(4.4.33) приводит к следующему результату. Если представить, как и ранее в п. 1.4.8, для колебаний призмы с металлизацией собственные частоты соотношением

$$ka\sqrt{\epsilon\mu} = (\pi q/2) + \kappa, \quad (4.4.34)$$

то для добавки  $\kappa$  можно получить следующие приближенные вы-

ражения. Для полей (4.4.28), (4.4.29)

$$\kappa = \frac{\pi m^2}{4 \sqrt{\varepsilon \mu}} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(1 - 2 \frac{B(\tau)}{\mu M}\right), \quad (4.4.35)$$

где

$$B(\tau) = (1+i) \sqrt{\pi} \left/ \left[ e^{-i\tau^2} + \frac{1+i2\tau^2}{\tau} \int_0^\tau e^{-i\zeta^2} d\zeta \right] \right.,$$

$$\tau = \sqrt{\frac{\pi q}{2} \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right)}, \quad M = \sqrt{\pi q} \frac{b}{a} \gg 1. \quad (4.4.36)$$

Для колебаний другой поляризации (с полем  $H_z = \exp\{ik\sqrt{\varepsilon\mu}x\} v(x, y) \mp \exp\{-ik\sqrt{\varepsilon\mu}x\} v(-x, y)$  для функций  $v(x, y)$ ) будут иметь место те же самые соотношения, что и для функций  $u(x, y)$ , но с заменой  $\mu \rightleftharpoons \varepsilon$ .

При  $\tau \ll 1$  функция  $B(\tau) \simeq (1+i) \sqrt{\pi}/2$ , и вместо (4.4.35) можно написать

$$\kappa = \frac{2\pi m^2}{q \sqrt{\varepsilon \mu}} \left(\frac{a}{b}\right)^2 \left(1 - e^{i\pi/4} \frac{a}{b} \sqrt{\frac{\sqrt{\varepsilon \mu}}{q}}\right). \quad (4.4.37)$$

При  $\tau \gg 1$  в функции  $B(\tau)$  из (4.4.36) интеграл Френеля можно заменить его асимптотическим значением и тогда

$$\kappa \simeq \left(\frac{a}{b}\right)^2 \frac{m^2}{4q \sqrt{\varepsilon \mu}} \left[1 - \frac{4}{\pi q \mu} \left(\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon \mu - 1}\right)^{1/2} - i \frac{1}{\mu} \frac{a}{b} \left(\frac{2}{\pi q}\right)^2 \left(\frac{\varepsilon \mu}{\varepsilon \mu - 1}\right)^{3/2}\right]. \quad (4.4.38)$$

Добротность колебаний при  $\tau \gg 1$  такова:

$$Q = -\frac{|k|}{\text{Im } k} = \left(\frac{\pi q^2}{2m}\right)^2 \left(\frac{b}{a}\right)^3 \left(1 - \frac{1}{\varepsilon \mu}\right)^{3/2} = \sqrt{\frac{\pi}{2}} \tau^3 Q_0, \quad (4.4.39)$$

где  $Q_0$  — добротность эквивалентного пустого резонатора с размерами  $2a\sqrt{\varepsilon\mu} \times 2b\sqrt{\varepsilon\mu}$ .

4.4.3. Диэлектрическая призма в ленточном открытом резонаторе по схеме рис. 21, *в* может быть рассмотрена аналогично, если на краях резонатора  $x = |a|$  поставить импедансные граничные условия резонансного типа (4.4.3), либо более общие условия, учитывающие еще и наличие границы раздела диэлектрик — воздух,  $x = |a|$ . Такой подход был в свое время развит в работе [497] (см. текст [12; § 6.4]) применительно к дисковому открытому резонатору с круглой металлической решеткой. На рис. 11, *в* показан соответствующий дисковый резонатор, в котором роль круговой решетки играет отрезок полого диэлектрического волновода с однослойной стенкой; стенка может быть также и многослойной [498]. Для анализа свойств такого резонатора нужно прежде всего установить коэффициент отражения плоской волны от плоской  $N$ -слойной среды из слоев с проницаемостью  $\varepsilon = \varepsilon' + i\varepsilon''$ ,  $\varepsilon'' \ll \varepsilon'$ , каждый из которых имеет толщину  $\delta =$

$= (2p+1)\lambda/4\sqrt{\varepsilon-1+\sin^2\vartheta}$ ,  $p = 0, 1, 2, \dots$ , и отделен от соседнего слоя плоским зазором, толщина которого  $\Delta = (2s+1)\lambda/4 \sin \vartheta$ ,  $s = 0, 1, 2, \dots$ . Здесь  $\vartheta$  обозначает угол скольжения волны вдоль слоя. Интерес представляют малые углы скольжения, при которых коэффициенты отражения волн первой и второй поляризаций (ср. 1.1.10), (1.1.11)) равны соответственно

$$R_1 = -1 + \frac{2(\varepsilon'\vartheta)^{2N}}{(\varepsilon'-1)^N} + k\delta\varepsilon'' \frac{\varepsilon'\vartheta}{\varepsilon'-1}, \quad (4.4.40)$$

$$R_2 = -1 + \frac{2\vartheta^{2N}}{(\varepsilon'-1)^N} + k\delta\varepsilon'' \frac{\vartheta}{\varepsilon'-1}. \quad (4.4.41)$$

Переход к формулам Френеля (1.1.10), (1.1.11) для полубесконечной среды можно осуществить, положив в последних формулах  $N = 1/2$ . Для установления формул (4.4.40), (4.4.41) в равной мере можно было бы воспользоваться двухсторонними граничными условиями (см. п. 2.2.4).

Выражения (4.4.40) и (4.4.41) дают возможность получить постоянные затухания  $h'' (h = h' + ih'')$  основных типов волн полого диэлектрического волновода с внутренним радиусом  $a$  и многослойной стенкой. Так, для волн  $EH_{1n}$

$$h'' = \frac{\vartheta_{1n}^2}{4a(\varepsilon'-1)} \left[ \frac{2\vartheta_{1n}^{2N-1}(1+\varepsilon'^{2N})}{(\varepsilon'-1)^{N-1}} + k\delta\varepsilon''(1+\varepsilon') \right]; \quad (4.4.42)$$

для волн  $H_{0n}$

$$h'' = \text{Re}(1+R_2) \frac{\vartheta_{0n}}{2a} = \left[ \frac{2\vartheta_{0n}^{2N-1}}{(\varepsilon'-1)^{N-1}} + k\delta\varepsilon'' \right]; \quad (4.4.43)$$

для волн  $E_{0n}$

$$h'' = \text{Re}(1+R_1) \frac{\vartheta_{0n}}{2a} = \frac{\varepsilon'\vartheta_{0n}^2}{2a(\varepsilon'-1)} \left[ \frac{2(\varepsilon'\vartheta_{0n})^{2N}}{(\varepsilon'-1)^{N-1}} + k\delta\varepsilon'' \right]. \quad (4.4.44)$$

Интересно отметить, что при увеличении размера волновода по отношению к длине волны потери на излучение (первый член в формулах (4.4.42) — (4.4.44)) быстро уменьшаются:

$$h'' \sim k\vartheta^{2N+2} \sim \lambda^{2N+1}/a^{2N+2}. \quad (4.4.45)$$

Напомним, что для волн  $H_{0n}$  металлического волновода потери есть величина

$$h'' \sim k^{3/2}\vartheta^3 \sim \lambda^{3/2}/a^3. \quad (4.4.46)$$

Ограничив отрезок длиной  $l$  диэлектрического волновода, например, дисковыми зеркалами радиуса  $\hat{a} > a$ , установленными нормально продольной оси волновода  $z$ , получим открытый резонатор. Собственные частоты его определяются так:

$$kl \simeq \pi q \left(1 + \frac{\vartheta^2}{2}\right), \quad \vartheta = \frac{gl}{\pi q} \ll 1. \quad (4.4.47)$$

Здесь  $q$  — число полуволн между зеркалами, а  $g$  — корень уравнения  $J_{m\pm 1}(ga) = 0$ . Для важнейших случаев поперечное волновое число  $g$  имеет следующий вид. Для волн  $EH_{1n}$

$$g_{1n}a = v_{1n} \left( 1 - \frac{i}{ka\sqrt{\varepsilon-1}} \frac{1+\varepsilon}{2} \right); \quad (4.4.48)$$

для волн  $H_{0n}$

$$g_{0n}a = v_{0n} \left( 1 - \frac{i}{ka\sqrt{\varepsilon-1}} \right); \quad (4.4.49)$$

для волн  $E_{0n}$

$$g_{0n}a = v_{0n} \left( 1 - \frac{i}{ka\sqrt{\varepsilon-1}} \varepsilon \right). \quad (4.4.50)$$

Разрежение спектра собственных частот  $\omega = \omega' - i\omega''$  характеризуется их размещением на комплексной плоскости  $\omega$ ; они лежат на параболах

$$(\omega' - \omega_q)^{N+1/2}/\omega'' = \text{const}, \quad (4.4.51)$$

проходящих через точки  $\omega_q = \pi qc/l$ . Известно, что в открытом резонаторе с плоскими зеркалами собственные частоты лежат на прямых, проходящих через точки  $\omega_q$ . Это означает, что добротность колебаний резонатора с диэлектрической многослойной трубкой значительно выше, чем добротность плоского резонатора. Правда, плоский резонатор со скачком импеданса у краев дает и большие добротности, и иную, чем у плоского резонатора без скачка импеданса у края, зависимость расположения собственных частот на плоскости  $\omega$  [11, 12, 15].

Наличие зеркала с радиусом  $\hat{a} > a$  повышает добротность резонатора за счет возвращения части энергии, прошедшей через стенку, назад в рабочий объем резонатора [497, 498].

## § 4.5

Волны в разделенных слоях. Переключатель света.

Призма в качестве возбудителя линии  
поверхностной волны

4.5.1. Ввод (вывод) излучения в диэлектрические пленки и световоды представляет важную задачу интегральной оптики (см. также пп. 1.8, 1.9 введения). На рис. 19 показан ряд примеров по применению диэлектрической призмы в качестве возбудителя линий интегральной оптики. В этом параграфе мы рассмотрим простейший вариант ввода излучения с зазором постоянной величины (рис. 19, е). Для этого нам придется предварительно исследовать систему волн трехслойного диэлектрического волновода [48]. Знание системы волн в структуре из двух разделенных слоев имеет, кроме того, большое самостоятельное значение, ибо является основой для рассмотрения большого числа различных электродинамиче-

ских структур для миллиметрового, субмиллиметрового и оптического диапазонов. В качестве примера мы, кроме основной задачи, вынесенной в заголовок настоящего параграфа, рассмотрим также использование явления биений поверхностных волн в связанных пленочных волноводах, используемых, например, для расчета направленного ответвителя (переключателя) по схеме рис. 19, б [345].

4.5.2. Вытекающие волны в волноводе из двух разделенных диэлектрических слоев представляют собою один из основных классов волн открытых направляющих систем. Волны в трехслойном волноводе разделяются на собственные и несобственные. Если волновод и окружающая среда не обладают потерями, то собственными волнами будут *поверхностные волны*. Если потери есть, то возможны *собственные комплексные волны*. Вытекающие волны относятся к классу несобственных волн; к нему же относятся и медленные несобственные волны.

Вытекающие волны иногда называют еще квазиволноводными волнами. Это связано с тем, что они не полностью направляются волноведущей структурой (слоями, трубкой большого диаметра и т. п.) — часть энергии просачивается через стенки и излучается в окружающую среду, определяя тем самым затухание волны по мере ее распространения вдоль оси  $z$ . В ряде случаев это затухание оказывается достаточно слабым. Простейший пример — диэлектрическая трубка большого диаметра. В этом случае для нескольких низших типов затухание невелико, так как плоские бриллюэновские волны, составляющие данную волноводную волну, падают на стенку структуры под очень малыми скользкими углами. Из общих соображений (см. § 1.1) ясно, что коэффициенты отражения при этом близки к единице, а стало быть и погонное затухание для низших типов волн может быть незначительным. Волны высших номеров обладают гораздо большим затуханием и спесобствуют, таким образом, улучшению селективных свойств такого волновода (делают его самофильтрующим).

4.5.3. Дисперсионное уравнение для  $E$ -волн ( $H$ -волны рассматриваются совершенно аналогично) получается по стандартной процедуре. Метод разделения переменных для структуры рис. 89 приводит нас к одномерному волновому уравнению для функции поперечного сечения  $\Psi(y)$ :

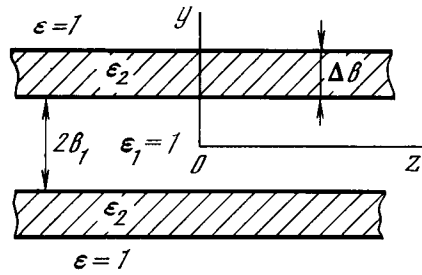
$$\Psi''(y) + (k^2\varepsilon - h^2)\Psi(y) = 0; \quad (4.5.1)$$

компоненты  $E$ -волны через функцию  $\Psi(y)$  выражаются так:

$$\begin{aligned} H_z &= \Psi(y) e^{-ihz}, & E_y &= -\frac{h}{k\varepsilon} Z_0 \Psi(y) e^{-ihz}, \\ E_z &= \frac{i}{k\varepsilon} Z_0 \frac{d\Psi}{dy} e^{-ihz}. \end{aligned} \quad (4.5.2)$$

Записывая решения уравнения (4.5.1) для различных областей волноводной структуры рис. 89 и удовлетворяя условиям





Р и с. 89. Двумерный вариант ( $\partial/\partial x = 0$ ) трехслойной диэлектрической направляющей структуры

непрерывности (1.4) тангенциальных к границам раздела составляющих полей (4.5.2), а также условию стремления  $\Psi(y)$  к нулю при  $|y| \Rightarrow \infty$ , получим искомое дисперсионное уравнение. Учитывая симметрию структуры относительно средней плоскости ( $y = 0$ ), где следует для функции  $\Psi(y)$  удовлетворить одному из условий (1.1):

$$\left. \frac{d\Psi}{dy} \right|_{y=0} = 0, \quad (4.5.3)$$

$$\Psi(0) = 0, \quad (4.5.4)$$

запишем дисперсионное уравнение отдельно для четных (условие (4.5.3))

$$\begin{aligned} & (\cos qb_1 + i \frac{q}{\kappa \varepsilon_1} \sin qb_1) \cos g\Delta b + \\ & + (i \frac{q}{\kappa \varepsilon_2} \cos qb_1 - \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \sin qb_1) \sin g\Delta b = 0 \end{aligned} \quad (4.5.5)$$

и нечетных (условие (4.5.4)) типов волн трехслойного волновода

$$\begin{aligned} & (\sin qb_1 - i \frac{q}{\kappa \varepsilon_1} \cos qb_1) \cos g\Delta b + \\ & + (i \frac{q}{\kappa \varepsilon_2} \sin qb_1 + \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \cos qb_1) \sin g\Delta b = 0. \end{aligned} \quad (4.5.6)$$

К дисперсионным уравнениям (4.5.5) и (4.5.6) следует присоединить уравнения связи между поперечными волновыми числами  $g$ ,  $q$  и  $\kappa$

$$g^2 = \kappa^2 - k^2(\varepsilon_2 - 1), \quad q^2 = \kappa^2 + k^2(\varepsilon_1 - 1). \quad (4.5.7)$$

Здесь были использованы следующие обозначения:  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2$  — относительные диэлектрические проницаемости центрального и боковых слоев;  $\kappa = \kappa' + i\kappa''$  — поперечное волновое число вне волновода.

Функции поперечного сечения  $\Psi(y)$  имеют вид:

для четных волн —

$$\Psi(y) = \begin{cases} A \left( \cos qb_1 \cos g\Delta b - \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \sin qb_1 \sin g\Delta b \right) e^{-i\kappa(y-b_2)} & \text{при } y > b_2; \\ A \left[ \cos qb_1 \cos g(y-b_1) - \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \sin qb_1 \sin g(y-b_1) \right] & \text{для } y \in (b_1, b_2); \\ A \cos qy & \text{при } |y| < b_1; \\ A \left[ \cos qb_1 \cos g(y+b_1) + \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \sin qb_1 \sin g(y+b_1) \right] & \text{для } y \in (-b_1, -b_2); \\ A \left( \cos qb_1 \cos g\Delta b - \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \sin qb_1 \sin g\Delta b \right) e^{i\kappa(y+b_2)} & \text{при } y < -b_2 \end{cases} \quad (4.5.8)$$

и для нечетных волн

$$\Psi(y) = \begin{cases} B \left( \sin qb_1 \cos g\Delta b + \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \cos qb_1 \sin g\Delta b \right) e^{-i\kappa(y-b_2)} & \text{при } y > b_2; \\ B \left[ \sin qb_1 \cos g(y-b_1) + \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \cos qb_1 \sin g(y-b_1) \right] & \text{для } y \in (b_1, b_2); \\ B \sin qb_1 & \text{при } |y| < b_1; \\ -B \left[ \sin qb_1 \cos g(y+b_1) - \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \cos qb_1 \sin g(y+b_1) \right] & \text{для } y \in (-b_1, -b_2); \\ -B \left( \sin qb_1 \cos g\Delta b + \frac{q\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \cos qb_1 \sin g\Delta b \right) e^{i\kappa(y+b_2)} & \text{при } y < -b_2. \end{cases} \quad (4.5.9)$$

Постоянные коэффициенты  $A$  и  $B$  определяются, как обычно, условиями возбуждения.

Полученные дисперсионные уравнения (4.5.5) и (4.5.6) достаточно сложны и в общем их нужно исследовать численными методами. В ряде случаев их можно несколько упростить. Ниже мы приведем некоторые, часто встречающиеся на практике, частные случаи общих дисперсионных уравнений (4.5.5) и (4.5.6).

1. Прежде всего это два слоя с воздушным промежутком ( $\varepsilon_1 = 1$ ). При этом  $q = \kappa$  и уравнения (4.5.5) и (4.5.6) принимают соответственно вид:

для четных волн

$$\left( i \frac{g}{\kappa} \cos qb_1 - \frac{\kappa^2}{g} \sin qb_1 \right) \sin g\Delta b - \cos g\Delta b e^{b_1} = 0 \quad (4.5.10)$$

и для нечетных волн

$$\left( i \frac{\kappa \epsilon}{g} \cos \kappa b_1 - \frac{g}{\kappa \epsilon} \sin \kappa b_1 \right) \sin g \Delta b + \cos g \Delta b e^{i \kappa b_1} = 0. \quad (4.5.11)$$

2. Диэлектрический (одиночный) слой толщины  $2\Delta b$  ( $b_1 = 0$ ); для четных волн

$$\cos g \Delta b + i \frac{g}{\kappa \epsilon} \sin g \Delta b = 0; \quad (4.5.12)$$

для нечетных волн

$$\cos g \Delta b + i \frac{\kappa \epsilon}{g} \sin g \Delta b = 0. \quad (4.5.13)$$

3. Поверхностные волны. Общий случай. Пусть  $\epsilon_2 > \epsilon_1 > 1$ . Волновые числа  $h$  и  $g$  поверхностных волн — действительные числа,  $\kappa$  — чисто мнимое ( $\kappa = -i\alpha$ ). Волновое число  $q$  в зависимости от параметров волновода может быть либо действительным, либо мнимым числом. Граница проходит по тем значениям параметров структуры, для которых  $q = 0$ . Для их определения имеют место условия:

для четных волн ( $m = 0, 2, 4, \dots$ )

$$k \Delta b_{h_m} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1}} \left[ \arctg \frac{\epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1 - 1}}{\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1}} + m \frac{\pi}{2} \right] \quad (4.5.14)$$

и для нечетных волн ( $m = 1, 3, 5, \dots$ )

$$k \Delta b_{h_m} = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1}} \left[ \arctg \frac{k b_1 (\epsilon_1 / \epsilon_2) \sqrt{\epsilon_2 - \epsilon_1} + (1 / \epsilon_2) \sqrt{(\epsilon_2 - \epsilon_1) / (\epsilon_1 - 1)}}{k b_1 (\epsilon_1 / \epsilon_2^2) (\epsilon_2 - \epsilon_1) / \sqrt{\epsilon_1 - 1} - 1} + (m - 1) \frac{\pi}{2} \right]. \quad (4.5.15)$$

Таким образом, для поверхностных волн следует различать два случая:

волновое число  $q$  — действительное число ( $\Delta b < \Delta b_m$ ) и дисперсионные уравнения имеют вид:

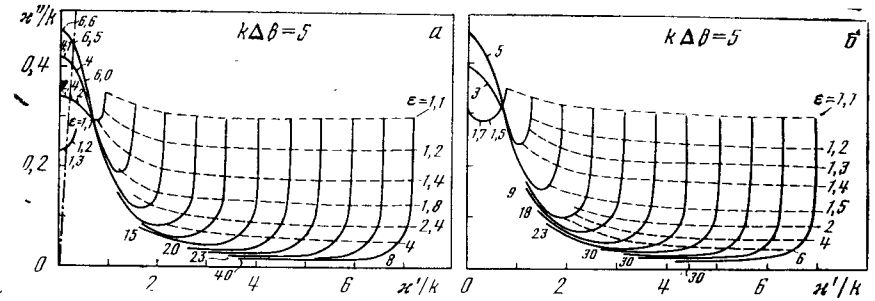
для четных волн

$$\left( \cos q b_1 - \frac{q}{\alpha \epsilon_1} \sin q b_1 \right) \cos g \Delta b - \left( \frac{q \epsilon_2}{g \epsilon_1} \sin q b_1 + \frac{g}{\alpha \epsilon_2} \cos q b_1 \right) \sin g \Delta b = 0 \quad (4.5.16)$$

и для нечетных волн

$$\left( \sin q b_1 + \frac{q}{\alpha \epsilon_1} \cos q b_1 \right) \cos g \Delta b + \left( \frac{q \epsilon_2}{g \epsilon_1} \cos q b_1 - \frac{g}{\alpha \epsilon_2} \sin q b_1 \right) \sin g \Delta b = 0; \quad (4.5.17)$$

волновое число  $q$  — мнимое ( $\Delta b > \Delta b_m$ ) и дисперсионные уравнения принимают вид



Р и с. 90. Дисперсионные кривые четных (а) и нечетных (б) волн в комплексной плоскости  $x$  для одиночного диэлектрического слоя при  $k \Delta b = 5$ ,  $\epsilon_2 = \epsilon > 1$ . Штрихпунктирная кривая обозначает границу быстрых и медленных волн  $h' = k$

для четных волн

$$\cos g \Delta b - \frac{g}{\alpha \epsilon_2} \sin g \Delta b + \left( \frac{|q| \epsilon_2}{g \epsilon_1} \sin g \Delta b + \frac{|q|}{\alpha \epsilon_1} \cos g \Delta b \right) \operatorname{th} |q| b_1 = 0 \quad (4.5.18)$$

и для нечетных волн

$$\frac{|q| \epsilon_2}{g \epsilon_1} \sin g \Delta b + \frac{|q|}{\alpha \epsilon_1} \cos g \Delta b + \left( \cos g \Delta b - \frac{g}{\alpha \epsilon_2} \sin g \Delta b \right) \operatorname{th} |q| b_1 = 0. \quad (4.5.19)$$

4.5.4 Анализ направляемых  $E$ -волн мы проведем на комплексной плоскости поперечного волнового числа  $\kappa$ . Возможны и другие представления решений дисперсионных уравнений (4.5.5), (4.5.6) или других, например, исследовать характер поведения волн в нашей структуре на комплексной плоскости  $h$  и т. д. Дисперсионные уравнения (4.5.5) и (4.5.6) исследовались методом Ньютона. В вычислительном отношении при использовании метода Ньютона для уточнения значения корней и дисперсионных уравнений (4.5.5) и (4.5.6) оказалось удобным, во-первых, в качестве исходных данных (нулевого приближения) пользоваться значениями корней плоского волновода с идеально проводящими стенками и, во-вторых, вычислять производную в ньютоновской процедуре по безразностным формулам численного дифференцирования. При этом использовались трех- и (или) пятиточечные варианты этих формул.

Диэлектрический слой представляет собою наиболее простую для анализа волноведущую структуру. На рис. 90, а представлены дисперсионные кривые четных волн\* для  $k \Delta b = 5$ , что соответ-

\* Дисперсионные кривые нечетных волн (рис. 90, б) качественно ведут себя примерно так же, как и кривые для четных волн на рис. 90, а; они, кроме того, оказываются «сдвинутыми» вдоль действительной оси.

ствуется толщине слоя порядка длины волны ( $\Delta b \sim \lambda$ ). Пунктирными линиями и цифрами на графиках даны значения  $\varepsilon$ . При уменьшении  $\varepsilon$  от больших положительных значений каждая дисперсионная кривая проходит от  $-i\infty$  по мнимой оси в нижней полуплоскости  $\kappa$ . Этот участок кривой соответствует поверхностной волне. Далее, перейдя на положительную мнимую полуось, кривая покидает ось и сползает на плоскость  $\kappa$ . В месте выхода на плоскость данная кривая встречается со второй ветвью дисперсионной кривой, которая ведет себя «зеркально» — опускается сверху по мнимой оси. В точке встречи ветви дисперсионной кривой расходятся в разные квадранты комплексной плоскости  $\kappa$ . Если среды не обладают потерями ( $\varepsilon$  действительны), картина встречи и расхождения ветвей носит неопределенный характер: обе ветви с одинаковым правом могут выйти как в первой, так и во второй квадранты. Эта неопределенность снимается для среды с потерями [489]. Для наиболее типичного случая, когда  $\operatorname{tg} \delta_2 > \operatorname{tg} \delta_3$  (потери в слое больше, чем в окружающей среде), картина расхождения ветвей схематически показана на рис. 91. Верхняя ветвь дисперсионной кривой выходит во второй квадрант плоскости  $\kappa$ . Нижняя ветвь дисперсионной кривой выходит во второй квадрант и уходит под разрез  $h'' = 0$  на нижний (не дающий физически приемлемого решения (ср. § 1.2) для пассивных сред) лист плоскости  $\kappa$ , где  $h'' = 0$ . Поэтому мы рассматриваем дисперсионные кривые в первом квадранте плоскости  $\kappa$ , где им соответствуют прямые волны. Кривая рис. 91, поднимающаяся снизу, соответствует, таким образом, прямой волне ( $h' > 0$ ), а опускающаяся сверху — обратной ( $h' < 0$ ),  $h = h' + ih''$  — продольное волновое число.

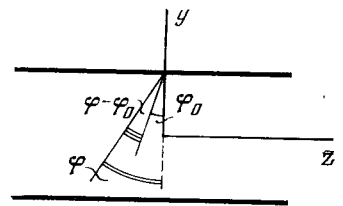
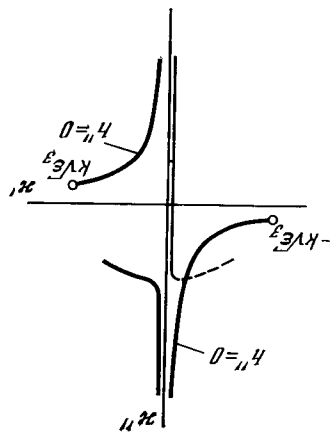


Рис. 91. Картина поведения корней при «встрече» на комплексной плоскости  $\kappa$   
Рис. 92. К интерпретации направленной волны в регулярном диэлектрическом слое в свете концепции Бриллюэна

Выйдя в комплексную плоскость  $\kappa$  и перейдя границу медленных ( $h' > k$ ) и быстрых ( $h' < k$ ) несобственных волн (на рис. 89 граница показана штрихпунктирной линией), дисперсионные кривые располагаются периодически вдоль положительной действительной полуоси.

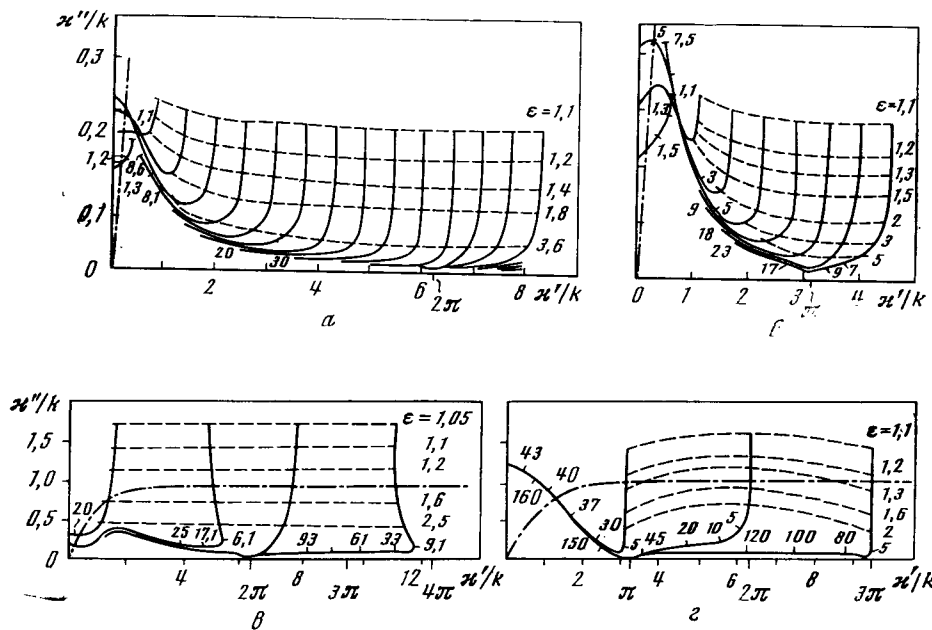
Следует отметить, что, по-видимому, реально существуют (имеют области существования внутри волновода и в некоторой области вне его) только быстрые несобственные волны, которые собственно и называются вытекающими. Медленные несобственные волны не имеют области существования, т. е. они не имеют области в пространстве (по крайней мере, вне волновода), где бы их можно было рассматривать как самостоятельные волновые образования. Напомним, что при условии  $\operatorname{tg} \delta_2 > \operatorname{tg} \delta_3$  волновые числа поверхностной и вытекающей волн соответствуют разным ветвям дисперсионной кривой (рис. 90).

Концепция Бриллюэна позволяет дать четкую физическую картину направляемых однородным диэлектрическим слоем волн. Вытекающую волну в таком волноводе можно рассматривать, как образованную внутри слоя двумя плоскими волнами. В отличие от поверхностной волны, эти плоские волны отражаются от границы слоя не полностью (нет полного внутреннего отражения; см. § 1.1). Часть энергии просачивается через границу, поскольку угол падения выходит за пределы угла полного внутреннего отражения. В связи с бриллюэновским представлением направляемых волн интересно посмотреть за поведением угла падения волны Бриллюэна на границу свободного пространства при изменении диэлектрической проницаемости на основании полученных численных результатов. Рассмотрим схему, представленную на рис. 92. Угол падения можно найти из соотношения  $g = k \sqrt{\varepsilon} \cos \varphi$  или, что то же,  $\varepsilon \sin^2 \varphi = 1 - (\kappa/k)^2$ .

Поскольку граничный с областью полного внутреннего отражения угол  $\varphi_0$  удовлетворяет условию  $\varepsilon \sin^2 \varphi_0 = 1$ , то для  $\varphi$  можно получить соотношение

$$\sin^2 \varphi = \sin^2 \varphi_0 + \sin(\varphi - \varphi_0) \sin(\varphi + \varphi_0) = \frac{1}{\varepsilon} \left( \frac{i\kappa}{k} \right)^2. \quad (4.5.2)$$

Из последнего соотношения видно, что при прохождении  $\kappa_m$  по мнимой оси через начало координат по мере перехода с нижней полуоси на верхнюю значение угла  $\varphi$  сначала приближается к  $\varphi_0$  ( $\varphi - \varphi_0 \Rightarrow 0$ ), а затем удаляется от этого значения. При этом  $\varphi$  как будто бы снова попадает в область полного внутреннего отражения. Однако вместо экспоненциального спада для поля волны вне волновода после перехода  $\kappa_m$  на верхнюю полуось имеет место экспоненциальное нарастание поля. Далее, как мы уже отмечали выше,  $\kappa_m$  сходится к мнимой оси и попадает на плоскость  $\kappa$ . Угол  $\varphi$  при этом становится комплексным. Но только после перехода  $\kappa$  через границу быстрых и медленных несобственных волн  $\operatorname{Re} \varphi$  становится меньше  $\varphi_0$  и появляется волна, которую можно



Р и с. 93. Дисперсионные кривые четных (а, в) и нечетных (б, г) волн в комплексной плоскости  $\kappa$  для системы из двух параллельных диэлектрических слоев при  $k\Delta b = 5$ ,  $kb_1 = 0,5$  и при  $k\Delta b = kb_1 = 0,5$

интерпретировать как плоскую (неоднородную — с комплексным волновым числом) волну. Она высвечивается из слоя под некоторым углом.

Таким образом, для каждой направляемой волны существует некоторый интервал изменений параметров волновода (свой, естественно, для каждого типа волны номера  $m$ ), в пределах которого структуру поля с физической точки зрения интерпретировать не удается.

Интересно отметить, что поверхностная волна низшего типа при  $\epsilon > 1$  в несобственную не превращается. Соответствующая ей дисперсионная кривая при  $\epsilon \Rightarrow 1$  приходит в начало координат ( $\kappa_0 \Rightarrow \kappa = 0$ ), что соответствует переходу поверхностной волны в плоскую волну свободного пространства.

Волноведущая структура из двух параллельных разделенных слоев (рис. 89). Пусть между слоями размещена воздушная подушка. На рис. 93, а представлены кривые, относящиеся к четным волнам, для случая узкого промежутка между слоями:  $k\Delta b = 5$  ( $\Delta b \sim \lambda$ ),  $kb_1 = 0,5$  ( $b_1 = 0,1 \lambda$ ). Наличие промежутка несколько изменяет картину дисперсионных кривых. Они отличаются от кривых предыдущего случая вблизи значений  $\kappa = \kappa_n = n\pi/b_1$  ( $n = 1, 2, 3, \dots$ ), которые соответствуют спектру чет-

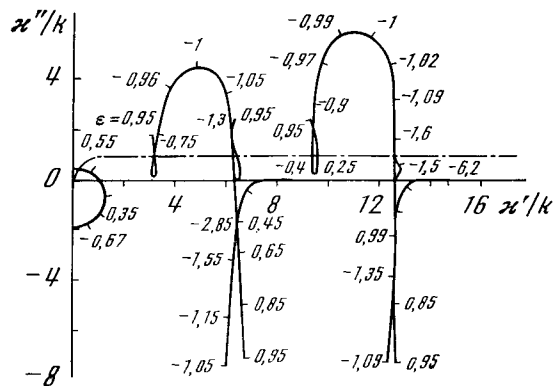
ных волн закрытого экранированного волновода. Вблизи этих точек кривые приближаются к действительной оси и «скорость движения» корня дисперсионного уравнения  $\kappa_m$  при изменении  $\epsilon$  около этих точек существенно уменьшается. Это соответствует резонансу в центральном слое. Дальнейшее увеличение диэлектрической проницаемости — кривые уходят от этих точек и идут на мнимую ось, т. е. в пределе (при достаточно больших значениях  $\epsilon$ ) волны становятся поверхностными. Их электромагнитное поле сосредоточивается в боковых слоях.

Дисперсионные кривые нечетных волн (рис. 93, б, г) приближаются к действительной оси около точек  $\kappa = \kappa_n = (2n - 1)\pi/2b_1$ . Эти точки соответствуют спектру нечетных волн плоского закрытого волновода.

В случае, когда толщина боковых слоев такого же порядка, что и ширина промежутка:  $k\Delta b = kb_1 = 0,5$  ( $\Delta b_1 \sim 0,1\lambda$ ) (см. рис. 93, а, б), дисперсионные кривые по внешнему виду распадаются на два класса. Кроме того, поскольку боковые слои в этом случае более тонкие (а стало быть, обладают худшими отражательными и направляющими свойствами), мнимая часть поперечных волновых чисел при тех же значениях  $\epsilon$  оказывается большей по величине.

Интересно отметить закономерность расположения поперечных волновых чисел  $\kappa_m$  при  $\epsilon \Rightarrow 1$ . Мнимая часть  $\kappa_m'' \Rightarrow \infty$  из-за уменьшения отражения от границ слоев. Для четных волн действительная часть  $\kappa_m' \Rightarrow (m - 1)\pi/2b_2$  ( $m = 2, 4, 6, \dots$ ), или, что то же,  $\kappa_m' \Rightarrow (m + 1)\pi/2b_2$  ( $m = 1, 3, 5, \dots$ ), или  $\sin \kappa_m b_2 \Rightarrow 0$  при  $\epsilon \Rightarrow 1$ . Эти обстоятельства значительно облегчают выбор начального приближения при численном исследовании дисперсионных уравнений. Начальными точками счета при этом были точки вблизи  $\kappa_m$  (поперечные волновые числа металлического волновода), а  $\epsilon$  выбиралось равной нескольким десяткам. В последующем целесообразно проводить расчет случая более толстых боковых слоев и одиночного слоя ( $kb_1 = 0$ ); при этом начальные точки суть точки  $\kappa_m$  при  $\epsilon \Rightarrow 1$  (мнимую часть стоит выбирать несколько меньшей, чем в случае  $kb_1 = k\Delta b = 0,5$ ).

Волноведущие свойства слоев с  $\epsilon < 1$ . Прежде всего это, конечно, плазменные слои. Однако, для  $\epsilon \in (0; 1)$  это также направляющая структура из двух диэлектрических слоев, проницаемость которых меньше проницаемости промежуточного слоя и внешнего пространства. Важно, что при  $\epsilon \in (0; 1)$  в такой системе могут распространяться только вытекающие волны, а при  $\epsilon < 0$  возможно также существование поверхностных и собственных комплексных волн. На рис. 94 представлены дисперсионные кривые четных волн при  $kb_1 = k\Delta b = 0,5$  ( $b_1 = \Delta b \sim 0,1 \lambda$ ). При  $\epsilon = 0$  некоторые дисперсионные кривые проходят через точки  $\kappa_m = (2m - 1)\pi/2b_1$  ( $m = 1, 2, \dots$ ) в плоскости  $\kappa$ , соответствующие спектру волноводных волн между слоями. Другие кривые проходят через точки  $g_m = m\pi/\Delta b$  в плоскости поперечного волнового числа в сло-



Р и с. 94. Дисперсионные кривые четных волн для направляющей структуры из двух параллельных плазменных слоев при  $k\Delta b = kb, = 0,5$

ях  $g$ . Эти волны соответствуют спектру волноводных волн, распространяющихся в слоях. Таким образом, имеются два класса волн: во-первых, волны, энергия которых при  $\epsilon$ , близких к нулю, концентрируется в основном между слоями (волны  $A$ ), и, во-вторых, волны, энергия которых при  $\epsilon$ , близких к нулю, концентрируется в основном в слоях (волны  $B$ ). Строго говоря, при  $\epsilon = 0$  внутри слоя реализуется только «безмагнитное» решение:  $H_x = 0, E_y, E_z \neq 0$  (см., например, [490]). Однако при  $\epsilon$ , близких к нулю, можно, по-видимому, пользоваться продемонстрированной выше интерпретацией.

Для волн  $A$  типа  $\kappa'' > 0$ , как при  $\epsilon > 0$ , так и при  $\epsilon < 0$ , т. е. волны  $A$  являются всегда несобственными. Волны  $B$ -типа при  $\epsilon < 0$  являются собственными комплексными. Следует заметить, что собственные комплексные волны в слоистых волноводах могут существовать только при наличии плазменных слоев с  $\epsilon < 0$ .

Особняком стоит первая дисперсионная кривая. При некотором отрицательном значении диэлектрической проницаемости  $\epsilon$  она выходит на нижнюю мнимую полуось и соответствующая ей волна становится поверхностной. Для положительных  $\epsilon$  при  $\epsilon \Rightarrow 1$  соответствующая этой дисперсионной кривой волна переходит в плоскую волну свободного пространства, а затем (при  $\epsilon > 1$ ) в поверхностную волну низшего типа волноведущей структуры из диэлектрических слоев.

Естественным, казалось бы, ожидать, что и в случае диэлектрических слоев также должны существовать два класса волн. Поле одних при  $\epsilon \Rightarrow \infty$  должно концентрироваться в слоях (соответствующие им дисперсионные кривые в плоскости  $\kappa$  стремятся к бесконечности по отрицательной мнимой оси). Второго класса — с полями, концентрирующимися при  $\epsilon \Rightarrow \infty$  между слоями. Соответствующие кривые должны при  $\epsilon \rightarrow \infty$  приходиться в точки

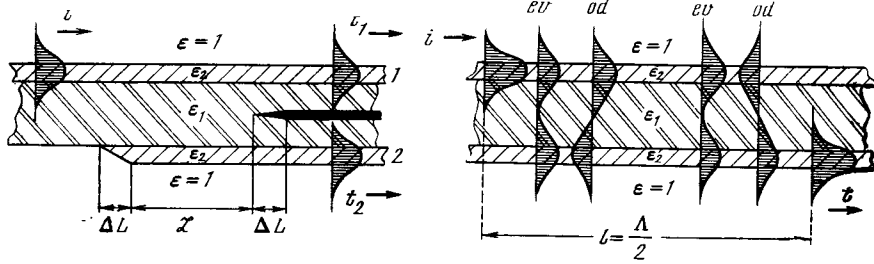
$\kappa_m = m\pi/b_1$  в плоскости  $\kappa$  для четных волн и  $\kappa_m = (2m - 1)\pi/b_1$  для нечетных волн ( $m = 1, 2, 3, \dots$ ), что позволило бы отнести их к спектру волн между идеально отражающими слоями.

Однако при исследовании дисперсионных уравнений второго класса решений не был обнаружен. Возможно, если бы рассматривалась среда с поглощением  $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ , то при  $\epsilon'' \Rightarrow \infty$  дисперсионные кривые в плоскости  $\kappa$  заканчивались бы в точках, соответствующих спектру волн закрытого волновода. Следует иметь в виду, что хотя при  $\epsilon = \epsilon' \Rightarrow \infty$  кривые второго типа не были обнаружены, это не свидетельствует безусловно о том, что при больших значениях  $\epsilon$  не существует волн, поля которых концентрируются между слоями (если там расположен источник). Дело в том, что при любом как угодно большом значении  $\epsilon$  вблизи точек  $\kappa_m$  всегда имеется достаточное число корней дисперсионного уравнения. При дальнейшем увеличении  $\epsilon$  корни уходят от этих точек, но на их место приходят новые корни. При этом каждый последующий корень проходит все ближе к  $\kappa_m$ . Можно сказать, что предельный переход к точкам  $\kappa_m$  имеет место не вдоль одной дисперсионной кривой, а скачкообразно с одной кривой на другую. Такое различие в предельных переходах связано, вероятно, с неодинаковыми способами концентрации поля в слоях и между слоями при  $\epsilon \Rightarrow \infty$ . В первом случае поле вне слоя локализуется вблизи границы (экспоненциальное спадание), а во-втором — увеличивается коэффициент отражения от границы, но локализация внешнего поля отсутствует.

Проведенные выше исследования позволили достаточно подробно изучить поведение направляемых волн в плоскопараллельных слоях. Полученные результаты для поперечных волновых чисел  $\kappa_m$  и, следовательно, для продольных волновых чисел  $h_m = \sqrt{k^2 - \kappa_m^2}$  дают возможность вычислить основные характеристики направляющих структур из диэлектрических слоев.

Представленные результаты, кроме самостоятельного значения, имеют двойной интерес. Во-первых, они позволяют непосредственно рассмотреть ряд линейных пассивных электродинамических структур (к ним мы ниже обратимся), а также могут составить основу конструирования и построения теории генераторов и усилителей, использующих излучение Черенкова на вытекающих волнах. Во-вторых, мы подробно остановились на чисто вычислительном аспекте проблемы и проведение аналогичных исследований для других параметров не представляет собою труда.

4.5.5. Биения поверхностных волн в связанных пленочных световодах (см. рис. 19, б) позволяют простейшим, по-видимому, образом реализовать управляемый ответвитель (переключатель) света. Процесс периодического взаимного обмена энергиями между двумя связанными направляющими линиями называется биениями. Он достаточно подробно исследован в общих чертах, однако его реализация должна быть основана непременно на детальном знании свойств направляющей структуры.



Р и с. 95. Схема управляемого пленочного ответвителя-переключателя света

Р и с. 96. К физической интерпретации явления биений волн в двух связанных линиях

Рассмотрим простейшую схему, показанную на рис. 95 [345, 491]. Пусть на вход участка связи  $\mathcal{L}$  падает поверхностная волна  $i$ . По мере ее распространения вдоль участка  $\mathcal{L}$  часть энергии из нее будет перекачиваться в поверхностную волну во второй пленке ( $i \Rightarrow t_2$ ); при этом пленки 1 и 2 не обязательно должны быть идентичными. Амплитуда волны  $t_2$  нарастает до тех пор, пока амплитуда волны  $t_1$  в первом волноводе не исчезнет. Вслед за этим начнется обратная перекачка энергии  $t_2 \Rightarrow t_1$ , далее процесс в регулярной линии повторяется. Если полная перекачка энергии происходит на расстоянии  $l$ , то, выбирая длину участка связи  $\mathcal{L} = nl$ , при  $n$  четном получим возвращение волн в первый волновод ( $i \Rightarrow t_1$ ), а при  $n$  нечетном — во второй ( $i \Rightarrow t_2$ ). В принципе можно управлять длиной участка связи  $\mathcal{L}$ , однако это в практическом отношении достаточно сложно. Гораздо проще изменять расстояние  $l$ , которое определяется параметрами участка связи. В частности, можно в определенных пределах менять диэлектрическую проницаемость пленок.

Пусть участок связи представляет собою отрезок регулярной трехслойной симметричной плоской направляющей структуры (рис. 96). В таком волноводе волны делятся, как мы видели выше, на четные и нечетные. Для рассматриваемого устройства представляет интерес режим, при котором в системе существует одна четная и одна нечетная поверхностные волны. Условие этого имеет вид

$$k\Delta b \sqrt{\varepsilon_2 - 1} < \pi. \quad (4.5.21)$$

Допустим, что на левом конце участка  $l$  (рис. 96) имеется падающая поверхностная волна  $i$ . Она возбуждает обе волны — четную ( $ev$ ) и нечетную ( $od$ ) (рис. 96). Фазовые скорости этих волн, как и продольные волновые числа, различны:  $h_{ev} > h_{od}$ . Таким образом, на некотором расстоянии  $l$  нечетная волна, возникшая, по нашему предположению, одновременно с четной, «обгонит» четную по фазе на  $\pi$ . В этот момент произойдет суммирование поля в нижней пленке, т. е. волна  $i$  перейдет в волну  $t_2$ . Это и есть в на-

глядных деталях процесс биений. Величина  $l$  представляет собою половину длины волны биений  $\Lambda$ :

$$l = \frac{\Lambda}{2} = \frac{\pi}{h_{ev} - h_{od}}. \quad (4.5.22)$$

Волновые числа  $h_{ev,od}$  должны быть найдены из общих дисперсионных уравнений (4.5.18) и (4.5.19), которые теперь можно переписать следующим образом:

для четных волн

$$\begin{aligned} \cos g\Delta b - \frac{g}{\alpha\varepsilon_2} \sin g\Delta b + \\ + \left( \frac{|q|\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \sin g\Delta b + \frac{|q|}{\alpha\varepsilon_1} \cos g\Delta b \right) \text{th} |q|b_1 = 0; \end{aligned} \quad (4.5.23)$$

для нечетных волн

$$\begin{aligned} \frac{|q|\varepsilon_2}{g\varepsilon_1} \sin g\Delta b + \frac{|q|}{\alpha\varepsilon_1} \cos g\Delta b + \\ + \left( \cos g\Delta b - \frac{g}{\alpha\varepsilon_2} \sin g\Delta b \right) \text{th} |q|b_1 = 0. \end{aligned} \quad (4.5.24)$$

В последних формулах  $\alpha = ik$  и волновое число  $q$  — чисто мнимое, а соотношения связи между волновыми числами имеют вид

$$\begin{aligned} g^2 = k^2(\varepsilon_2 - 1) - \alpha^2, \\ |q|^2 = \alpha^2 - k^2(\varepsilon_1 - 1), \quad h^2 = k^2 + \alpha^2. \end{aligned} \quad (4.5.25)$$

*Приближенное аналитическое решение.* В общем случае дисперсионные уравнения (4.5.23) и (4.5.24) трудно исследовать численно и в конце этого пункта мы такие результаты приведем. Интерес, однако, представляет ситуация, когда  $\varepsilon_1 = 1$  ( $|q| = \alpha$ ) и структура представляет собою две тонких пленки, помещенные на достаточно большом расстоянии друг от друга:

$$g\Delta b \ll 1, \quad \alpha b_1 \gg 1. \quad (4.5.26)$$

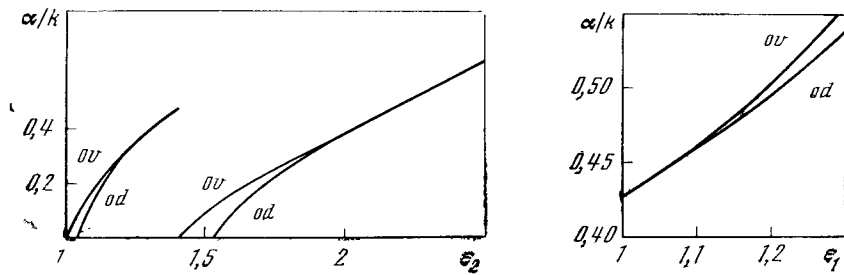
Тогда  $\text{th} \alpha b_1 = 1 - 2e^{-2\alpha b_1} + 2e^{-4\alpha b_1} - \dots$  и, отбрасывая члены, меньшие, чем  $\exp\{-2\alpha b_1\}$ , вместо уравнений (4.5.23) и (4.5.24) получим существенно более простые уравнения

$$1 - \frac{g}{\alpha\varepsilon_2} \text{tg} \frac{g\Delta b}{2} = \pm e^{-2\alpha b_1}; \quad (4.5.27)$$

верхний знак соответствует четным волнам, нижний — нечетным. В случае тонких пленок из (4.5.27) с учетом условия одноволновости (4.5.21) и  $g\Delta b \ll 1$  получим

$$1 - \frac{g^2\Delta b}{2\varepsilon\alpha} = \pm e^{-2\alpha b_1}. \quad (4.5.28)$$

Поскольку в (4.5.28) справа стоит экспоненциально малая величина:  $\exp\{-2\alpha b_1\} \ll 1/2\alpha b_1$ , то по методу возмущений



Р и с. 97. Дисперсионные кривые поверхностных волн трехслойного волновода. Изменяется проницаемость боковых слоев  $\epsilon_2$ :  $kb_1 = 5$ ,  $k\Delta b = 5$ ,  $\epsilon_1 = 1$

Р и с. 98. Дисперсионные кривые поверхностных волн трехслойного волновода. Изменяется проницаемость центрального слоя  $\epsilon_1$ :  $kb_1 = 7$ ;  $k\Delta b = 3$ ,  $\epsilon_2 = 1,5$

получаем

$$\alpha = \alpha_0 (1 \pm e^{-2\alpha_0 b_1}), \quad (4.5.29)$$

где через  $\alpha_0$  обозначено решение для одиночной пленки. Для нашего случая

$$\alpha_0 \Delta b = -\epsilon_2 + \sqrt{\epsilon_2^2 + (k\Delta b)^2 (\epsilon_2 - 1)} \quad (4.5.30)$$

или при  $(k\Delta b)^2 (\epsilon_2 - 1) / \epsilon_2 \ll 1$

$$\alpha_0 = \frac{1}{2\epsilon_2} k^2 \Delta b (\epsilon_2 - 1). \quad (4.5.34)$$

Волновые числа  $h_{ov,od}$  теперь можно записать так:

$$h_{ov,od} \simeq k + \frac{\alpha_0^2}{2k} (1 \pm 2e^{-2\alpha_0 b_1}). \quad (4.5.32)$$

Окончательно для половины длины волны биений можно теперь написать формулу

$$\frac{\Lambda}{2} = \frac{\pi}{h_{ov} - h_{od}} \simeq \frac{\pi k}{2\alpha_0^2} e^{2\alpha_0 b_1}. \quad (4.5.33)$$

Более точные результаты получаются из дисперсионных уравнений (4.5.23) и (4.5.24). Основной интерес представляют, как мы только что установили, зависимости  $h_{ev,od}$  от диэлектрических проницаемостей пленок 1 и 2 ( $\epsilon_2$ ) и диэлектрической проницаемости центрального слоя ( $\epsilon_1$ ). На рис. 97 и 98 представлены соответствующие результаты численного исследования поведения корней дисперсионных уравнений (4.5.23) и (4.5.24). Процедура расчета была подробно описана в п. 4.5.4.

Основной интерес для нашей задачи представляет знание поведения половины длины волны биений  $\Lambda$  от параметров структуры, при которых существует только одна четная и одна нечетная

волна. Эти результаты приведены на рис. 99 и 100 в качестве иллюстрации общих закономерностей поведения  $\Lambda$  от  $\epsilon_2$  и  $\epsilon_1$  (для проведения расчетов конкретных устройств точность графических данных оказывается недостаточной).

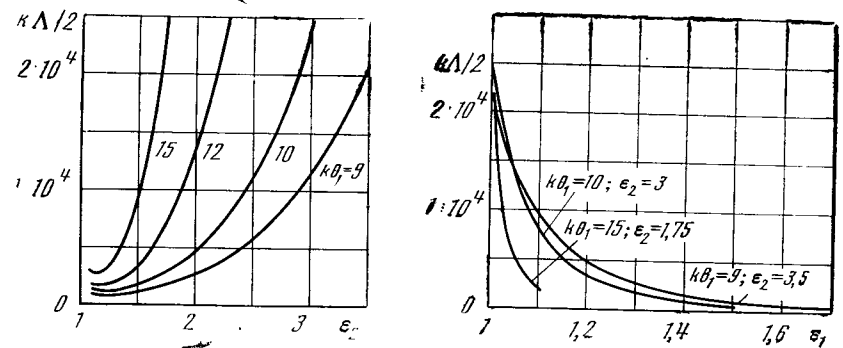
Увеличение  $\epsilon_2$  (рис. 99) приводит к возрастанию  $\Lambda$ . При этом поле оказывается сильнее поджатым к боковым пленкам, а стало быть, связь между пленками уменьшается и волновые числа четной и нечетной волны сближаются (ср. рис. 97) и их пределом являются волновые числа одиночной пленки. На начальных участках кривых это утверждение несправедливо, и величина  $\Lambda$  несколько увеличивается при уменьшении  $\epsilon_2$ . Вообще в этой области параметров необходимо тщательное дополнительное исследование. Причина здесь кроется в близости к критическим условиям: эффективная протяженность поля (в поперечном направлении) для нечетной волны стремится к бесконечности; поле четной волны остается прижатым к пленке. Мы здесь этот случай рассматривать не будем.

Длина участка связи  $\mathcal{L}$  и длина волны биений  $\Lambda$  связаны, как мы видели, соотношением  $\mathcal{L} = n\Lambda/2$ ,  $n = 1, 2, \dots$ . Если  $n$  — четное число, волна остается в той же пленке ( $i \Rightarrow t_1$ ), если  $n$  — нечетное — переходит во вторую пленку ( $i \Rightarrow t_2$ ). Для реализации переключения, т. е. перехода  $i \Rightarrow t_2$  достаточно изменить  $\Lambda/2$  так, чтобы  $n$  изменилось на  $\pm 1$ . Это изменение  $\Lambda/2$  равно

$$\Delta\left(\frac{\Lambda}{2}\right) = \mp \frac{\mathcal{L}}{n(n \pm 1)} = \mp \frac{\Lambda}{2(n \pm 1)}. \quad (4.5.34)$$

Необходимые относительные изменения  $\epsilon_1$  и  $\epsilon_2$  (при условии малости этих изменений) приближенно можно выразить так:

$$\delta\epsilon_j = \frac{\Delta\epsilon_j}{\epsilon_j} = \mp \frac{\Lambda}{\epsilon_j(n \pm 1) \partial\Lambda/\partial\epsilon_j}, \quad j = 1, 2. \quad (4.5.35)$$



Р и с. 99. Зависимость половины длины волны биений от диэлектрической проницаемости боковых слоев  $\epsilon_2$  при  $k\Delta b = 1$ ,  $\epsilon_1 = 1$

Р и с. 100. Зависимость половины длины волны биений от проницаемости центрального слоя  $\epsilon_1$  при  $k\Delta b = 1$

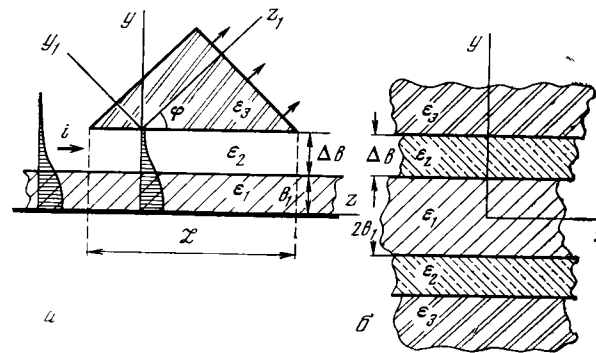
Следовательно, зная зависимость  $\Lambda = \Lambda(\epsilon_j)$ , можно по (4.5.35) найти необходимое для реализации переключения изменение диэлектрической проницаемости. Из формулы (4.5.35) видно, что необходимое  $\delta\epsilon_j$  тем меньше, чем больше число «пустых» переходов  $n$ .

*Пример реализации переключателя на красном свете  $\lambda = 0,63$  мкм, который мы сейчас рассмотрим, иллюстрирует проведенные рассуждения и расчеты. Пусть размеры будут такими:  $\Delta b = 0,3$  мкм ( $k\Delta b = 3$ );  $b_1 = 0,9$  мкм ( $kb_1 = 9$ ). Рассмотрим сначала случай изменения диэлектрической проницаемости  $\epsilon_2$  боковых слоев при  $\epsilon_1 = 1$ . Предположим, что до момента переключения  $\epsilon_2 = 1, 2$ . Длина участка связи  $L = 2$  мм ( $kL = 2 \cdot 10^4$ ). При этом  $k\Lambda/2 = 2,9 \cdot 10^3$  и  $n = 2L/\Lambda = 2 \cdot 10^4 / 2,9 \cdot 10^3 = 7$ . Разумеется, выбором  $L$  всегда можно сделать  $n$  целым. Для изменения  $n$  на единицу необходимо  $k\Lambda/2$  изменить на величину  $\Delta(k\Lambda/2) = \pm kL/2$  ( $n \pm 1$ ). В нашем случае  $\Delta(k\Lambda/2) = -2,9 \cdot 10^3 / 8 = -3,6 \cdot 10^2$ . Необходимо для такого изменения  $\Delta(k\Lambda/2)$  изменение  $\Delta\epsilon = 1,187 - 1,2 = -0,013$ ;  $\delta\epsilon = \Delta\epsilon/\epsilon_2 = -0,011 = -1,1\%$ .*

Аналогично рассчитываются параметры переключателя при изменении диэлектрической проницаемости  $\epsilon_1$  центрального слоя. При  $\epsilon_1 = 1,1$ ,  $\epsilon_2 = 1,35$ ,  $L = 186$  мкм получим  $k\Lambda/2 = 3,1 \cdot 10^3$ ,  $n = 6$ ,  $\Delta(k\Lambda/2) = -4,5 \cdot 10^2$ ;  $\Delta\epsilon_1 = 1,1075 - 1,1 = 0,0075$ ,  $\delta\epsilon_1 = 0,0068 = 0,68\%$ .

Проведенные методологические расчеты показали, в частности, что реализация переключателя на красном свете требует изменения диэлектрической проницаемости направляющих слоев или промежутка между ними на величину порядка 1%. Практическое осуществление такого изменения  $\epsilon$  с помощью внешнего воздействия принципиальных затруднений не вызывает.

4.5.6. *Диэлектрическая призма как возбудитель линии поверхностной волны* (см. рис. 19, в—з) находит самое широкое применение. С помощью призмы наиболее просто осуществить ввод (вывод) энергии в одноволновый световод через его боковую поверхность (см. п. 1.9 введения). Здесь мы рассмотрим простейший вариант — призма с постоянным зазором (рис. 19, в) [491]. Все данные для такого расчета у нас уже подготовлены в предыдущих пунктах. Вместо задачи о вводе излучения в световод удобнее проводить, основываясь на *теореме взаимности*, рассуждения относительно ввода излучения из световода в призму. Рассмотрим схему, показанную на рис. 101, а. Световод образован пленкой толщины  $b_1$  с диэлектрической проницаемостью  $\epsilon_1$ , расположенной на идеально проводящей поверхности. На некотором участке  $L$  поле поверхностной волны «задевает» призму. Если фазовая скорость волны в световоде больше скорости света в материале призмы  $\epsilon_3$  (неограниченном пространстве, заполненном материалом призмы), то энергия волны будет постепенно излучаться в призму под некоторым углом  $\varphi$ . На основании теоремы взаимности



Р и с. 101. К задаче возбуждении пленочного волновода с помощью диэлектрической призмы

сти волна с таким же распределением поля, как и у изученной волны, направленная в обратную сторону под тем же углом полностью войдет в пленку. Направляющая пленка может быть нанесена и на диэлектрическое полупространство. В этом случае диэлектрической проницаемости подложки должна быть равна диэлектрической проницаемости материала в зазоре между пленкой и призмой, а толщина пленки удвоена.

Таким образом, моделью для рассмотрения схемы ввода поверхностной волны в призму может служить трехслойный волновод (рис. 101), в котором диэлектрическая проницаемость внешней среды больше диэлектрической проницаемости центрального слоя. Последняя в свою очередь больше диэлектрической проницаемости боковых слоев, т. е.  $\epsilon_3 \geq \epsilon_1 > \epsilon_2$ . В конструкции возбудителя  $\epsilon_3$  соответствует проницаемости призмы,  $\epsilon_1$  — проницаемости пленочного волновода,  $\epsilon_2$  — проницаемости зазора между ними. Волны, существующие в таком трехслойном волноводе, являются вытекающими, поскольку из-за просачивания во внешнюю среду (призму) они частично излучаются. Поверхностная волна, направляемая пленкой, подойдя к призме, превращается в вытекающую волну трехслойного волновода. Физически ясно, что если призма находится от пленки на расстоянии, большем эффективной протяженности поля поверхностной волны, то она будет вносить слабое возмущение. Поэтому структура поля вытекающей волны должна быть близка к структуре поля поверхностной волны пленки. Такой вытекающей волной является волна низшего типа трехслойного волновода. Таким образом, излучение поверхностной волны через призму будет определяться характеристиками этой вытекающей волны трехслойного диэлектрического волновода. Дисперсионное уравнение для четных волн в таком волноводе с учетом того, что  $\epsilon_3 \neq 1$ , имеет следующий вид:

$$(\cos qb_1 + i \frac{qe_3}{\kappa\epsilon_1} \sin qb_1) \cos g\Delta b +$$



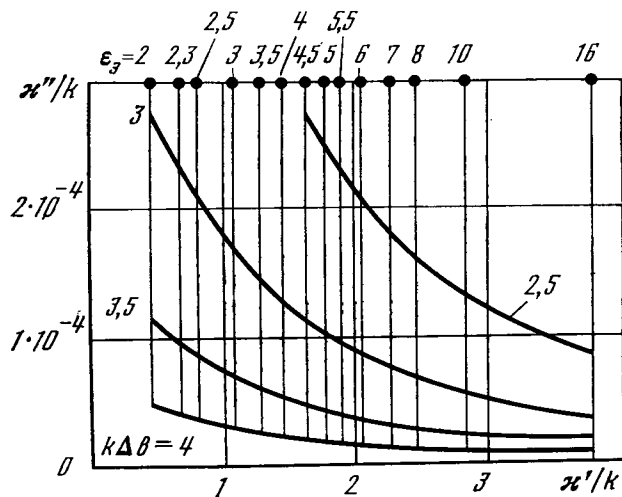
$$+ \left( i \frac{g \epsilon_3}{\kappa \epsilon_2} \cos q b_1 - \frac{g \epsilon_3}{g \epsilon_1} \sin q b_1 \right) \sin g \Delta b = 0. \quad (4.5.36)$$

Здесь обозначения те же, что и в уравнении (4.5.5). Волновые числа  $q$ ,  $g$  и  $\kappa$  связаны между собой соотношениями

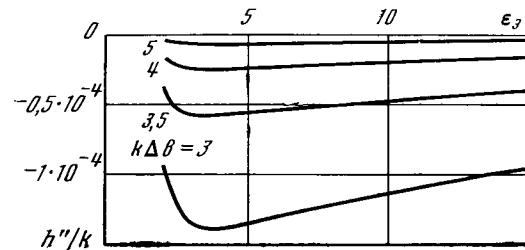
$$g^2 = \kappa^2 - k^2(\epsilon_3 - \epsilon_2), \quad q^2 = \kappa^2 - k^2(\epsilon_3 - \epsilon_1).$$

Приведем некоторые результаты по исследованию дисперсионного уравнения (4.5.36) для поперечного волнового числа  $\kappa$  и продольного волнового числа  $h$  вытекающей волны низшего типа при различных значениях параметров волновода. Толщина центральной пленки  $k b_1 = 3$  ( $b_1 \sim 0,5\lambda$ ), ее диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_1$  выбиралась равной 1,3; 1,5 и 2; соответственно этим значениям величина  $k \Delta b$  изменялась в пределах от 6 до 11; от 4,5 до 8 и от 2,5 до 5 (в конструкции возбуждателя величина  $\Delta b$  соответствует толщине зазора между призмой и пленкой). Диэлектрическая проницаемость внешней среды (среды призмы) изменялась от значения проницаемости  $\epsilon_1$  пленки до 16. Диэлектрическая проницаемость  $\epsilon_2$  промежуточного слоя (зазора) во всех случаях была взята равной единице. Общий случай  $\epsilon_2 \neq 1$  легко получить, считая  $\epsilon_3$  и  $\epsilon_1$  относительными (по отношению к  $\epsilon_2$ ) величинами.

На рис. 102 представлены дисперсионные кривые изменения волнового числа  $\kappa$  в комплексной плоскости  $\kappa$  при постоянных значениях  $\epsilon_3$  и изменении  $\Delta b$  (вертикальные прямые) и при постоянных значениях  $\Delta b$  и изменении  $\epsilon_3$ . Следует отметить, что, поскольку нас интересует случай небольшого затухания волны (система возбуждения должна иметь протяженные размеры), расчеты



Р и с. 102. Дисперсионные кривые для поперечного волнового числа  $\kappa$  вытекающей волны низшего типа при  $k b_1 = 3$ ,  $\epsilon_1 = 3$ ,  $\epsilon_2 = 1$



Р и с. 103. Дисперсионные кривые для продольного волнового числа низшей вытекающей волны при  $k b_1 = 3$ ,  $\epsilon_1 = 2$ ,  $\epsilon_2 = 1$ ,  $h'/h = 1,34$

производились при значительной толщине  $\Delta b$  промежуточного слоя (зазора). Поэтому изменение  $\Delta b$  слабо сказывалось на величине волнового числа  $\kappa$ : практически мало изменялась только его мнимая часть  $\kappa''$ . При изменении  $\epsilon_3$  мнимая часть  $\kappa''$  также изменялась мало, однако реальная часть  $\kappa'$  изменялась существенно, так как при  $\epsilon_3 \Rightarrow 1$  кривые должны выйти на мнимую ось (см. п. 4.5.4).

Действительная часть продольного волнового числа  $h$  в рассматриваемом случае практически не изменяется при изменении  $\Delta b$  и  $\epsilon_3$ . Поэтому на графиках рис. 103 приведены лишь кривые зависимости мнимой части продольного волнового числа  $h''$  от диэлектрической проницаемости  $\epsilon_3$  для различных значений  $k \Delta b$ . Поскольку изменение  $h''$  при изменении  $\epsilon_3$  оказалось небольшим, то при оценочных расчетах этим изменением можно пренебречь и в этом случае можно пользоваться кривыми рис. 104, где приведена зависимость максимального и минимального значений  $h''$  от  $k \Delta b$  при  $\epsilon_1 < \epsilon_3 < 16$  для  $\epsilon_1 = 1,3; 1,5$  и 2. Все волновые числа и линейные размеры на графиках нормированы на  $k$ . Значения действительной части продольного волнового числа  $h'$  таковы:  $h' = 1,09k$  при  $\epsilon_1 = 1,3$ ;  $h' = 1,16k$  при  $\epsilon_1 = 1,5$  и  $h' = 1,34k$  при  $\epsilon_1 = 2$ . Заметим, что рассматриваемая волна является быстрой, так как  $h' < k \sqrt{\epsilon_3}$ .

Зная волновые числа  $\kappa$  и  $h$ , можно найти угол  $\varphi$ , под которым происходит излучение вытекающей волны во внешнюю среду (снаружи призмы) или, что то же самое, угол наклона волнового вектора во внешней среде  $k_{\epsilon_3}$  (см. рис. 101). Этот угол определяется действительными частями  $\kappa'$  и  $h'$ :

$$\operatorname{tg} \varphi = \frac{\kappa'}{h'} \quad (4.5.37)$$

и, следовательно, практически не зависит от  $\Delta b$ . Возбуждающий пучок нужно направить так, чтобы в призме он шел под тем же углом  $\varphi$ , под которым происходит излучение.

## ЗАКЛЮЧЕНИЕ

Выше был рассмотрен широкий класс задач рассеяния волн прозрачными диэлектрическими телами. Диэлектрический клин падал по воле автора в разные, более или менее сложные, дифракционные ситуации: клин в свободном пространстве в поле плоской волны или гауссова пучка, в изломе широкого металлического или квазиоптического линзового (диафрагменного) волновода и т. п. Читателю естественно теперь обратиться к автору и ко всем, кого автор имел честь и удовольствие представить на страницах книги, с несколько риторическим вопросом: „Можно ли считать «проблему» диэлектрического клина «закрытой»? При этом подразумевается проблема дифракции на прозрачном клине как ключевая, фундаментальная задача математической теории дифракции.

Ключевая задача рассеяния волн прозрачным клином, такая несложная по геометрии и очевидная, на первый взгляд, по постановке, оказалась, как мы убедились, весьма сложной, и, более того, неразрешимой в строгой постановке обычными средствами. Пройдет, по-видимому, немало времени, прежде чем эстафету Зоммерфельда — Малюжинца в плане строгих решений ключевых задач можно будет считать продолженной.

Вместе с тем мы обсудили здесь различные формы приближенных решений как о безграничном однородном клине, так и о клине, как элементе различных электродинамических структур. При этом преимущество было отдано применениям диэлектрических тел различной формы в коротковолновых диапазонах электромагнитных волн, включая и «традиционный» для однородной призмы диапазон видимого света. Было построено полное геометрикооптическое решение о падении плоской волны на однородную диэлектрическую призму. При этом удалось показать, что число геометрикооптических лучей, попадающих в каждую точку грани, а равно и в любую другую, не принадлежащую граням клина точку пространства, является конечным.

Построенное полное геометрикооптическое решение и его главный результат — конечное число лучей в каждой точке грани (или пространства) — имеют, как убежден автор, более общее значение, чем просто геометрикооптическое решение. Возможно, что привлечение идей Зоммерфельда — Малюжинца о многомерном римановом пространстве (пространствах), связанном с конечностью геометрикооптических лучей, окажется существенным на пути к строгому решению этой интереснейшей проблемы математической теории дифракции.

Но уже сейчас, устраняя разрывы геометрикооптического решения, например, «замазывая (зашивая)» их интегралами Френеля, можно получить приемлемое для практики решение задачи (особенно, если речь идет о дальней зоне). К этому кругу идей примы-

кает метод параболического уравнения и геометрическая теория дифракции, позволяющие при определенных условиях построить различные приближенные решения; в дальнейшем возможно применение какой-либо итерационной процедуры для уточнения полученного приближенного решения.

Ключевой задачей для многих приложений является задача о дифракции волны на прозрачной полуплоскости или двух параллельных полуплоскостях, образующих полуограниченную волноведущую структуру. При определенных условиях (например, малая толщина пластины), допускающих введение усредненных некоторым образом токов поляризации, можно свести задачу к системе функциональных уравнений, разрешимой строго методом Винера — Хопфа — Фока. Однако вопрос о точности полученного на этом пути решения не может считаться до конца выясненным. В этом же разделе мы обсудили возможности применения двусторонних граничных условий. В последнее время этот тип граничных условий, введенный впервые, по-видимому, Г. Д. Малюжинцем, начал достаточно широко применяться при расчетах капиллярных волоконных световодов и газодиэлектрических волноводов. Для ряда практических случаев первоначальный вид двусторонних граничных условий был дополнен и несколько видоизменен применительно к конкретным структурам.

Эффективным, хотя и весьма непростым в реализации, является метод интегрального уравнения, который здесь неоднократно применялся к разным задачам\*. В частности, с помощью метода интегральных уравнений рассмотрена дифракция на клине с поглощением, на клине с многослойным покрытием, согласующем клине в волноводе и т. п. Метод интегрального уравнения позволяет также строить различные приближенные решения. Примерами служат, например, рассмотренные здесь борновское приближение, метод фазовой коррекции и др. Общий подход метода интегрального уравнения позволил нам установить важный для понимания физической стороны дела в квазиоптических устройствах принцип взаимной компенсации паразитных волн, порожденных элементарными составными частями функционального элемента. Подробно был рассмотрен пример с преломляющей призмой в изломе широкого металлического волновода.

Для плавных неоднородностей в широких волноведущих структурах применялись уже завоевавший широкую популярность метод поперечных сечений и менее известный в электродинамике метод продольных сечений. Оба эти метода удобны для использования в различных физических ситуациях и имеют свои области применения. К сожалению, примеров численной реализации метода продольных сечений еще явно недостаточно, чтобы можно было составить достаточно полное представление о его эффективности. Работа в этом направлении продолжается.

\* См. замечание, сделанное в заключении § 1.3 и касающееся применения метода интегрального уравнения к задачам дифракции на малых телах.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Зоммерфельд А.* Теория дифракции.— В кн.: *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.; М.: ОНТИ, 1937, гл. 20, с. 849—902.
2. *Фок В. А.* Дифракция Френеля от выпуклых тел.— УФН, 1950, 43, № 4, с. 587.
3. *Фок В. А.* Дифракция радиоволн вокруг земной поверхности. М.: Изд-во АН СССР, 1946, 80 с.
4. *Фок В. А.* Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М.: Сов. радио, 1970. 517 с.
5. *Малюжинец Г. Д.* Развитие представлений о явлениях дифракции.— УФН, 1959, 69, № 2, с. 321.
6. *Малюжинец Г. Д.* Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн: Автореф. докт. дис. М., 1951. В над-заг.: ФИАН СССР; Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней.— ДАН СССР, 1958, 121, № 3, с. 436—439.
7. *Миллер М. А., Таланов В. И.* Использование понятия поверхностного импеданса в теории поверхностных волн.— Изв. вузов. Радиофизика, 1961, 4, № 5, с. 795—830.
8. *Миллер М. А.* Поверхностные электромагнитные волны в прямоуголь-ных канавках.— ЖТФ, 1955, 25.
9. *Миллер М. А., Таланов В. И.* Поверхностные электромагнитные волны, направляемые границей с малой кривизной.— ЖТФ, 1956, 26, № 12.
10. *Завадский В. Ю.* Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М.: Наука, 1972. 558 с.
11. *Курушин Е. П., Нефёдов Е. И., Фиалковский А. Т.* Дифракция элект-ромагнитных волн на анизотропных структурах. М.: Наука, 1975. 196 с.
12. *Нефёдов Е. И., Сивов А. Н.* Электродинамика периодических структур. М.: Наука, 1977. 208 с.
13. *Курушин Е. П., Нефёдов Е. И.* Применение тонких монокристалличе-ских пленок ферритов в СВЧ-микрорелектронике.— Микрорелектроника, 1977, 6, № 6, с. 547—559.
14. *Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М.: Сов. радио, 1966. 475 с.
15. *Нефёдов Е. И., Фиалковский А. Т.* Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах. М.: Наука, 1972. 204 с.
16. *Никольский В. В.* Общая импедансная трактовка в электродинамике.— Труды Моск. ин-та радиотехники, электроники и автоматики, 1972, вып. 55; Замечание к импедансной трактовке электродинамических систем.— РИЭ, 1972, 17, № 3, 6.
17. *Малюжинец Г. Д., Винель Г. В.* Примеры симметричных задач дифрак-ции на полупрозрачных пластинах.— В кн.: Аннотация докладов II Всесоюзного симпозиума по дифракции волн. М.: Изд-е АН СССР, 1962, с. 86—90.
18. *Марченко В. А., Хруслов Е. Я.* Краевые задачи в областях с мелкозер-нистой границей. Киев: Наук. думка, 1974. 279 с.
19. *Нефёдов Е. И., Фиалковский А. Т.* Дифракция плоской электромагнит-ной волны на анизотропной полуплоскости в свободном пространстве и плоском волноводе.— РИЭ, 1972, 17, № 6, с. 1141—1152.
20. *Вайнштейн Л. А.* Дифракция электромагнитных и звуковых волн на открытом конце волновода. М.: Сов. радио, 1953. 204 с.; Теория дифрак-ции и метод факторизации. М.: Сов. радио, 1966, 431 с.
21. *Марченко В. А.* Операторы Штурма — Лиувилля и их приложения. Киев: Наук. думка, 1977. 331 с.; Спектральная теория операторов Штурма — Лиувилля. Киев: Наук. думка, 1972. 320 с.
22. *Хёйл Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции: Пер. с нем./ Под ред. Г. Д. Малюжинца. М.: Мир, 1964.
23. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифрак-ции и распространения электромагнитных волн. Харьков: изд-во ХГУ, 1971. 400 с.
24. *Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Масалов С. А., Сологуб В. Г.* Дифракция волн на решетках. Харьков: изд-во ХГУ, 1973. 287 с.
25. *Nefyodov Ye. I., Fialkovsky A. T.* Asymptotic theory of diffracting by finite structures.— Electromagnetic wave theory. Intern. Symp., Tbilisi, USSR, 1971, p. 131—134.
26. *Вайнштейн Л. А., Уфимцев П. Я.* Метод факторизации и его примене-ние в теории дифракции.— В кн.: Аналитические методы в теории диф-ракции и распространение волн. М.: 1970, с. 3—58.
27. *Воскресенский Г. В., Плис А. И.* Об одном конструктивном методе ре-шения задач дифракции на телах конечных размеров, основанном на факторизации.— ЖВММФ, 1975, 15, № 3, с. 672—681.
28. *Иванов Е. А.* Дифракция электромагнитных волн на двух телах. Минск: Наука и техника, 1968. 583 с.
29. *Нефёдов Е. И.* Открытые коаксиальные резонансные структуры: Об-зор.— РИЭ, 1977, 22, № 9, с. 1769—1802.
30. *Нефёдов Е. И., Фиалковский А. Т.* Полосковые линии передачи: Теория и расчет типичных неоднородностей. М.: Наука, 1974. 127 с.
31. *Keller J. V.* Geometrical theory of diffraction.— J. Opt. Soc. Amer., 1956, 52, N 116.
32. *Боровиков В. А., Кинбер Б. Е.* Геометрическая теория дифракции. М.: Связь, 1978. 247с.
33. *Пименов Ю. В.* Излучение теневых токов, наведенных цилиндрической электромагнитной волной на идеально проводящей полуплоскости.— Радиотехника, 1975, 30, № 11, с. 50—55.
34. *Уфимцев П. Я.* Метод краевых волн в физической теории дифракции. М.: Сов. радио, 1962. 243 с.
35. *Гюйгенс Х.* Трактат о свете. М.; Л.: ОНТИ, 1935. 172 с.
36. *Ньютон И.* Оптика. М.: Гостехиздат, 1954. 366 с.
37. *Френель О.* Избранные труды по оптике. М.: Гостехиздат, 1955. 603 с.
38. *Дуков В. М.* Электродинамика. История и методология макроскопиче-ской электродинамики. М.: Высшая школа, 1975. 248 с.
39. *Вуд Р.* Физическая оптика. Л.; М.: ОНТИ, 1936. 895 с.
40. *Зоммерфельд А.* Оптика. М.: ИЛ, 1953.
41. *Борн М., Вольф Э.* Основы оптики. М.: Наука, 1970. 855 с.
42. *Бреговских Л. М.* Волны в слоистых средах. М.: Изд-во АН СССР, 1957. 502 с.; 2 изд. М.: Наука, 1973. 343 с.
43. *Гребенщиков И. В., Власов А. Г.* и др. Просветление оптики. М.: Гостехиздат, 1946.
44. *Розенберг Г. В.* Оптика тонкослойных покрытий. М.: Физматгиз, 1958. 570 с.
45. *Веселков Г. П., Нефёдов Е. И.* Расчет согласующих покрытий диэлект-рических линзовых антенн.— Изв. вузов. Радиотехника, 1961, № 3, с. 337—340; Экспериментальное исследование двухслойного согласующего покрытия диэлектрической линзовой антенны.— В кн.: Вопросы элект-роники и электродинамики СВЧ. Таганрог, 1962, с. 115—118.

46. *Шевченко В. В.* Плавные переходы в открытых волноводах. М.: Наука, 1969.
47. *Вязьмитшев В. Ф.* Диэлектрические волноводы. М.: Сов. радио, 1970. 213 с.
48. *Мальцев В. П., Нефёдов Е. И., Шевченко В. В.* Вытекающие волны в волноводе из разделённых слоев.— Изв. вузов. Радиофизика, 1969, 12, № 12, с. 1855—1861.
49. *Капани Н. С.* Волоконная оптика. М.: Мир, 1969. 463 с.
50. *Тидекен Р.* Волоконная оптика и ее применение. М.: Мир, 1975. 240 с.
51. *Казанцев Ю. Н., Маненков А. Б., Харлашкин О. А.* Полые диэлектрические и металлодиэлектрические волноводы для передачи быстрых Н-волн.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 10, с. 1529—1538.
52. *Саттаров Д. К.* Волоконная оптика. Л.: Машиностроение, 1973.
53. *Гудмен Дж.* Введение в фурье-оптику. М.: Мир, 1970. 364 с.
54. *Тужилин А. А.* Теория функциональных уравнений Малюжинца.— Диф. уравнения, 1970, 6, №№ 4, 6, с. 1048—1063; 1971, 7, № 6, с. 1077—1088.
55. *Нефёдов Е. И.* Некоторые вопросы распространения электромагнитных колебаний в широких нерегулярных волноводах и открытых линиях: Автореф. канд. дис. М., 1965. В надзаг.: ИРЭ АН СССР. 13 с.
56. *Уфимцев П. Я.* Дифракция электромагнитных волн на черных и на полупрозрачных пластинах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, 11, № 6, с. 912—931.
57. *Latz N.* Untersuchungen über Ebene Beugungsprobleme elektromagnetischer Wellen für rechtwinklig-keilförmige Gebiete.— Forschungsber. Landes Nordrhein-Westfalen, 1966, N 1710, S. 3—37; J. Math. Anal. and Appl., 1973, 43, N 2, p. 373—387.
58. *Нефёдов Е. И., Сивов А. Н.* Геометрооптическое решение задачи с диэлектрическом клине.— РиЭ, 1974, 19, № 4, с. 824—827; К задаче дифракции на бесконечном однородном диэлектрическом клине: Препринт № 80. ИРЭ АН СССР. М.: 1971. 13 с.
59. *Васильев Е. Н., Солодухов В. В.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрическом клине.— Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 10, с. 1518—1528.
60. *Kane J.* Diffraction by refracting wedges.— Summaries papers. Internat. Conf. Microwaves, Circuit Theory and Inform. Theory. Tokyo, IEESE Jap., 1964, Pt. 1, p. 307—308.
61. *Александрова А. А., Хижняк Н. А.* Дифракция электромагнитных волн на диэлектрическом клине.— ЖТФ, 1974, 44, № 11, с. 2241—2249; Исследование ближнего поля, дифрагированного на диэлектрическом клине.— ПМТФ, 1976, № 4 (98), с. 174—181.
62. *Веселов Г. И., Платонов Н. И.* Исследование поведения электромагнитного поля вблизи ребра клиновидной границы раздела магнитно-диэлектрических сред.— В кн.: Сборник научных трудов по проблемам микроэлектроники. СВЧ-измерительная техника в микроэлектронике. М., 1978, вып. 37, с. 25—38.
63. *Kuo N.-H.* Diffraction by dielectric bodies.— Diss. Abstrs, 1967, B28, N 6, p. 24—28.
64. *Radlow J.* Diffraction by a right-angled dielectric wedge.— Intern. Eng. Sci., 1964, 2, N 3, p. 275—290.
65. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений.— М.; Л.: Изд-во АН СССР, 1948. 727 с.
66. *Meixner J.* The behaviour of electromagnetic fields at edges.— IEEE Trans. AP, 1972, 20, N 4, p. 442—446.
67. *Бобровников М. С., Замараева В. П.* Характер сингулярности поля на ребре диэлектрического клина.— Изв. вузов. Физика, 1973, № 9, с. 50—53.
68. *Christiansen P. L.* Comparison between edge diffraction processes.— Proc. IEEE, 1974, 62, N 11, p. 1462—1468.
69. *Hurd R. A.* The edge condition in electromagnetics.— IEEE Trans. AP, 1976, 24, N 1, p. 70—73; On Meixner's edge condition for dielectric wedges.— Can. J. Phys., 1977, 55, N 22, p. 1970—1971.
70. *Andersen J. B., Solodukhov V. V.* Field behaviour near a dielectric wedge.— IEEE Trans. AP, 1978, 26, N 3, p. 598—602.
71. *Kraut E. A., Lehman G. W.* Diffraction of electromagnetic waves by a right-angled dielectric wedge.— J. Math. Phys., 1969, 10, N 8, p. 1340—1348.
72. *Свекло В. А., Сюкияйнен В. А.* Дифракция плоской упругой волны относительно угла.— ДАН СССР, 1958, 119, № 6, с. 1122—1123.
73. *Костров Б. В.* Дифракция плоской волны на жестком клине, вставленном без трения в безграничную упругую среду.— ПММ, 1966, 30, № 1.
74. *Radlow J.* Diffraction by a quarterplane.— Arch. Ration. Mech. and Anal., 1961, 8, N 2.
75. *Троицкий В. Н.* Влияние снежного покрова на дифракционное поле УВК в тени горных хребтов.— РиЭ, 1976, 21, № 6, с. 1222—1226.
76. *Солодухов В. В.* Дифракция на клине с многослойным диэлектрическим покрытием.— Труды Моск. энергет. ин-та, 1972, вып. 108, 3—6.
77. *Васильев Е. Н., Солодухов В. В.* Дифракция электромагнитных волн на клине с многослойным поглощающим покрытием.— Изв. вузов. Радиофизика, 1977, 20, № 2, с. 280—289.
78. *Hamid M. A. K.* Diffraction coefficient of a conducting wedge loaded with a dielectric slab on the alluminated surface.— IEEE Trans. AP, 1973, 21, N 5, p. 728—729.
79. *Mohsen A., Hamid M. A. K.* Diffraction by a dielectric-loaded wedge.— Radio Sci., 1973, 8, N 1, p. 71—80.
80. *Петров Э. С., Миказан П. С.* Дифракция электромагнитной волны на клине с диэлектрической и металлической границей.— В кн.: Радиоэлектроника и электросвязь. Рига, 1974, вып. 2, с. 20—26.
81. *Paradopoulos V. M.* Diffraction and refraction by a transparent wedge.— Appl. Sci. Res., 1963, B9, N 6, p. 431—443.
82. *Курилко В. И.* Рассеяние электромагнитных волн прямоугольным диэлектрическим клином.— Изв. вузов. Радиофизика, 1966, 9, № 5, с. 980—986; К теории радиационной добротности диэлектрического резонатора.— ДАН СССР, 1968, 180, № 1; Потери на излучение в диэлектрическом резонаторе.— Изв. вузов. Радиофизика, 1968, 11, № 8; Укр. физ. журн., 1966, 11, № 8, с. 9.
83. *Wu T.-K., Tsai L. L.* Scattering by a dielectric wedge: a numerical solution.— IEEE Trans. AP, 1977, 25, N 4, p. 570—571.
84. *Karp A., Shaw H. J., Winslow D. K.* Circuit properties of microwave dielectric resonators.— IEEE Trans. MTT, 1968, 16, N 10, p. 818—828.
85. *Tong T. C.* Scattering by a dielectric rectangular cylinder.— In: G-AP Intern. Symp. IEEE, Boulder, Colo, 1973, N. Y., 1973, p. 79—82.
86. *Будаган И. Ф.* и др. К теории диэлектрического резонатора.— РиЭ, 1976, 21, № 6, с. 1170—1178.
87. *Day W. R.* Dielectric resonators as microstrip-circuit elements.— IEEE Trans. MTT, 1970, 18, N 12, p. 1175—1176.
88. *Weissman I., Turnear J. P.* A N6  $TM_{010}$  mode cavity with high electric field and  $Q_0$ .— Appl. Phys. Lett., 1968, 13, N 11, p. 390—391.
89. *Куш С. Н.* Собственные частоты диэлектрических резонаторов. Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1975, 18, № 9, с. 79—86.
90. *Ineland T. D.* Dielectric resonator filters for application in microwave integrated circuits.— IEEE Trans. MTT, 1971, 19, N 7, p. 643—652.
91. *Hockham G. A., Sharpe A. B.* Dielectric-waveguide discontinuities.— Electron. Lett., 1972, 8, N 9, p. 230—231.
92. *Нефёдов Е. И.* Диэлектрическое препятствие на скачке импеданса в линии поверхностной волны.— ДАН СССР, 1977, 233, № 5, с. 850—853.
93. *Mahmoud S. F., Beal J. C.* Scattering of surface waves at a dielectric discontinuity on a planar waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1975, 23, N 2, p. 193—198.

94. Бобровников М. С., Фисанов В. В. Дифракция плоских волн на импедансном клине в анизотропной плазме.— Изв. вузов. Физика, 1972, № 3.
95. Веселков Г. П., Лыбынцев В. А., Мериакри В. В. Квазиоптическое устройство поворота пучка волн.— ПТЭ, 1974, № 3, с. 134—135.
96. Каменов В. Г. Возбуждение неоднородного диэлектрического конуса.— В кн.: Прикладная электродинамика. М.: изд-во МЭИ, 1975, с. 3—6. Труды МЭИ; Вып. 237.
97. Холт Д. Методы отклонения лазерного луча.— Зарубежная радиоэлектроника, 1971, № 8, с. 117—128.
98. Lee W. C. Y., Peters L. J., Walter C. H. Geometrical optics for gyrotropic bodies.— J. Res. Nat. Bur. Stand., 1965, D69, N 3, p. 349—359.
99. Mueller R. S. Ferrite prism and lenses.— J. Appl. Phys., 1974, 45, N 8, p. 3587—3592.
100. Катус Г. П., Кравцов Н. В. и др. Модуляция и отклонение оптического излучения.— М.: Наука, 1967.
101. Мустель Е. Р., Парыгин В. Н. Методы модуляции и сканирования света. М.: Наука, 1970. 295 с.
102. Hamid M. A. K., Mohsen A. Diffraction by dielectric-loaded horns and corner reflectors.— IEEE Trans. AP, 1969, 17, N 5, p. 660—662.
103. Chatterjee R. Radiation from a semi-infinite dielectric-loaded spherically tipped perfectly conducting cone.— J. Indian Inst. Sci., 1970, 52, N 1, p. 48—60.
104. Towaij S. J., Hamid M. A. K., Mohsen A. Diffraction by an infinite corner reflector transversely loaded by concentric dielectric slabs.— Intern. J. Electron., 1972, 33, N 3, p. 241—253.
105. Hamid M. A. K. Diffraction coefficient of a conducting wedge loaded with a cylindrical dielectric slab at the apex.— IEEE Trans. AP, 1973, 21, N 3, p. 398—399.
106. Hamid M. A. K., Towaij S. J. Diffraction by a half-plane with a cylindrical dielectric cap.— IEEE Trans. AP, 1972, 20, N 5, p. 663—665.
107. Kouyoumjian R. G., Burnside W. D. The diffraction by a cylinder-tipped half-plane.— IEEE Trans. AP, 1970, 18, N 3, p. 424—446.
108. Hamid M. A. K., Iskander K. A. Radiation by a corner reflector with dielectric loaded edges.— Intern. J. Electron., 1975, 38, N 5, p. 675—687.
109. Lang K. C. Edge condition of a perfectly conducting wedge with its exterior region divided by a resistive sheet.— IEEE Trans. AP, 1973, 21, N 2, p. 237—238.
110. Samadder S. N. Mathematical analysis of the radiation from a magnetic line source on a cylindrically capped wedge covered by a plasma sheath.— Appl. Sci. Res., 1966, A16, N 2, p. 89—101.
111. Гудзенко А. И., Дерюгин Л. А. и др. Экспериментальное исследование планарного акустооптического дефлектора.— РиЭ, 1977, 22, № 6, с. 1305—1306.
112. Алексеев Б. Н., Дианов Д. Б., Карузо С. П. Стержневой пьезоэлектрической преобразователь клиновидной формы с поперечной поляризацией пьезокерамики.— Акуст. журн., 1977, 23, № 1, с. 1—3.
113. Басов А. А., Воробьев А. А., Катаев И. Г. Сканирование светового луча.— РиЭ, 1977, 22, № 6, с. 1214—1217.
114. Angulo C. M. Diffraction of surface waves by a semi-infinite dielectric slab.— IRE Trans. AP, 1957, 5, N 1, p. 100—109, 169.
115. Пистолькорс А. А., Капалун В. А., Князева Л. В. О дифракции электромагнитных волн у диэлектрического или полупроводящего листа.— РиЭ, 1959, 4, № 6, с. 911—919.
116. Tricoles G., Rope E. L. Moiré pattern in the diffracted field near an edge of a dielectric slab.— J. Opt. Soc. Amer., 1966, 56, N 2, p. 257—259.
117. Хребет Н. Г. Дифракция плоской электромагнитной волны на крае диэлектрической полуплоскости.— РиЭ, 1968, 13, № 3, с. 387—395.
118. Fujioka H., Nihei F., Kumagai N. Interaction of a plane electromagnetic wave with a moving conducting dielectric half-space.— J. Appl. Phys., 1968, 39, N 4, p. 2161—2162.
119. Turner J. N., Parsons D. F., Andrews C. L. Diffraction of electromagnetic waves transparent edges.— J. Opt. Soc. Amer., 1974, 64, N 6, p. 784—793.
120. Коршунов Н. Е., Сивов А. Н. Возбуждение тонкого полубесконечного диэлектрического слоя.— РиЭ, 1973, 18, № 11, с. 2253—2257.
121. Виноградов М. Б. Дифракция радиоволн на регулярном фазовом экране.— Геомagnetизм и аэрономия, 1965, 5, № 1, с. 90—96.
122. Кравцов В. В. Задача дифракции на прозрачном неоднородном экране.— Вестн. МГУ. Астрономия, 1968, № 3, с. 116—118.
123. Хаскинд М. Д. Отражение радиоволн от наклонных метеорных следов.— РиЭ, 1962, 7, № 4, с. 590—600.
124. Stickler D. C. Electromagnetical diffraction an dielectrical strip.— IRE Trans. AP, 1958, 6, N 1, p. 148—151.
125. Черчес Л. А. Дифракция на тонкой диэлектрической ленте.— В кн.: Теория дифракции и распространения волн. IV Всесоюзный симпозиум по дифракции волн. Харьков, 1967, Д-228.
126. Brown D. R., Newman R. J., Crispin J. W. RCS enhancement devices.— In: Methods of Radar cross-sectional analysis. New York: Acad. Press, 1968, p. 237—280.
127. Newman R. J. Radar cross-section of dielectric bodies.— In: Methods of radar cross-sectional Analysis, New York; London: Acad. Press, 1968, p. 185—209.
128. Малаев В. В. Влияние дифракции на краях фокусирующей линзы на угловое распределение интенсивности лазерного излучения.— Опт. и спектр., 1970, 28, № 3, с. 588—590.
129. Boerner W. M., Antar Y. M. Aspects of electromagnetic pulse scattering from a grounded dielectric slab.— AEU, 1972, 26, N 1, p. 14—21.
130. Morita N., Ito M.— Trans. Inst. Electron. Commun. Eng. Jap., 1976, B59, N 3, p. 205—207.
131. Gloge D., Chinnock E. L., Earl H. E. Scattering from dielectric mirrors.— BSTJ, 1968, 48, N 3, p. 511—526.
132. Checcacci P. F., Falciai R., Scheggi A. Phase step beam waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1972, 20, N 9, p. 608—613.
133. Курушин Е. П., Нефёдов Е. И. Излучение электромагнитных волн из открытого конца плоского волновода со слегка прозрачными стенками.— ДАН СССР, 1974, 217, № 5, с. 1049—1052.
134. Курушин Е. П., Нефёдов Е. И. Излучение из открытого конца плоского волновода с прозрачными стенками. Дифракционная функция  $U(s, p)$  Вайнштейна от комплексного аргумента: Препринт, № 31 (146) ИРЭ АН СССР. М., 1973, 28 с.
135. Хлопов Г. И., Чурилов В. П., Горошко А. И. Излучение из открытого конца полого диэлектрического лучевода.— В кн.: Радиотехника: Респ. межвед. темат. науч.-техн. сб., Харьков: изд-во ХГУ, 1971, вып. 18, с. 3—9.
136. Войтович Н. Н., Шatrov A. Д. Возбуждение открытого волновода с диэлектрическими стенками.— РиЭ, 1973, 18, № 4, с. 687—697.
137. Маненков А. Б. Возбуждение быстрых волн в открытом волноводе с диэлектрической стенкой.— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, 18, № 7, с. 1025—1031.
138. Обтекатели антенн: Пер. с англ./ Под ред. А. И. Шпунтова. М.: Сов. радио, 1950, 263 с.
139. Spence J. E., Kane J. The scattering matrix for discontinuities in dielectric lines.— Summaries papers. Intern. Conf. Microwaves, Circuit Theory and Inform. Theory, Tokyo, IECF Jap., 1964, Pt 1, p. 33—34.
140. Tricoles G., Rope E. L. Guided waves in a dielectric slab, hollow wedge and hollow cone.— J. Opt. Soc. Amer., 1965, 55, N 3; N 11, p. 328—330.
141. Хребет Н. Г. Дифракция плоской электромагнитной волны на полом диэлектрическом клине.— В кн.: Антенны. М.: Связь, 1968, вып. 3, 71—82; О возбуждении поверхностных волн у ребра полого диэлектрического клина.— В кн.: Антенны. М., 1968, вып. 4, 83—85.
142. Данилов Ю. Н. Расчет электрической толщины остроконечного моно-

- литного антенного обтекателя на минимум угловых ошибок.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1973, 16, № 9, с. 100—102.
143. *Clarricoats P. J. B., Salema C. E. R. C.* Antennas employing conical dielectric cones.— Proc. IEE, 1973, 120, N 7, p. 741—756.
  144. *Thal H. L., Finger J. F.* Scattering by dielectric containers.— IEEE Trans. AP, 1970, 18, N 5, p. 709—711.
  145. *Марков Г. Т.* Антенны. М.; Л.: Госэнергоиздат, 1960. 535 с.
  146. *Марков Г. Т., Чаплин А. Ф.* Возбуждение электромагнитных волн. М.; Л.: Энергия, 1967. 376 с.
  147. *Жук М. С., Молочков Ю. Б.* Проектирование линзовых, сканирующих широкодиапазонных антенн и фидерных устройств. М.: Энергия, 1973, 439 с.
  148. *Уолтер К.* Антенны бегущей волны. М.: Энергия, 1970. 448 с.
  149. *Амтей Н., Галиндо В., Ву Ч.* Теория и анализ фазированных антенных решеток. М.: Мир, 1974.
  150. *Snyder A. W.* Surface mode coupling along a tapered dielectric rod.— IEEE Trans. AP, 1965, 13, N 5, p. 821—822; IEEE Trans. MTT, 1970, 18, N 7, p. 382—392.
  151. *Pogorzelski R. J.* Electromagnetic scattering from an expanding dielectric slab.— J. Math. Phys., 1970, 11, N 5, p. 1685—1689.
  152. *Clarricoats P. J. B., Salema C. E. R. C.* Propagation and radiation characteristics of low-permittivity dielectric cones.— Electron. Lett., 1971, 7, N 17, p. 483—489; 1972, 8, N 8, p. 200—202.
  153. *Northover F. H.* Applied diffraction theory. N. Y.: Elsevier, 1971.
  154. *Bhartia P., Monson B.* Electromagnetic scattering by a finite wedge with linearly varying surface impedance.— Wave Electron., 1977, 3, N 1.
  155. *James J. R.* Engineering approach to the design of tapered dielectric-rod and horn antennas.— Radio and Electron. Eng., 1972, 42, N 6, p. 251—259.
  156. *Shankara K. N., Chatterji S. K.* Surface wave characteristics of circular cylindrical corrugated and uniform dielectric rod excited in  $E_0$ -mode.— J. Indian Inst. Sci., 1972, 54, N 3, p. 118—138, 146—181.
  157. *Каценеленбаум Б. З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М.: Изд-во АН СССР, 1961. 216 с.
  158. *Маркузе Д.* Оптические волноводы. М.: Мир, 1974. 576 с.
  159. *Засарьев Л. Н., Леманский А. А., Щеглов К. С.* Теория излучения поверхностных антенн. М.: Сов. радио, 1969. 231 с.
  160. *Фельд Я. Н.* Основы теории щелевых антенн. М.: Сов. радио, 1948.
  162. *Ириков В. А., Нефёдов Е. И., Шевченко В. В.* Численное решение задачи об излучении поверхностной волны неоднородным участком импедансной поверхности.— РИЭ, 1968, 13, № 5, с. 923—926.
  163. *Маршин Н. П.* Рассеяние лучей электромагнитных волн конусообразным понижированным следом.— Геомагнетизм и аэрономия, 1965, 5, № 2, с. 260—268.
  164. *Нефёдов Е. И., Попиченко В. А.* О расширении диаграммы излучения из конца широкого волновода.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1969, 12, № 12, с. 1430—1435.
  165. *Angulo C. M., Chang W. S. C.* The excitation of a dielectric rod by a cylindrical waveguide.— IRE Trans. MTT, 1958, 6, p. 389—393\*.
  166. *Jones W. H.* A new approach to the diffraction of a surface wave by a semi-infinite grounded dielectric slab.— IEEE Trans. AP, 1964, 12, N 6, p. 767—777.
  167. *Крутицкий Э. И., Куликов Л. Н.* Возбуждение симметричных волн в круглом диэлектрическом волноводе.— Труды учебных институтов связи, 1969, вып. 46, с. 44—53.
  168. *Fong T. T.* Radiation from an open-ended waveguide with extended dielectric loading.— Radio Sci., 1972, 7, N 10, p. 965—972.
  169. *Dias G. J.* Cálculo del campo electromagnético en la zona próxima de una apertura radiante.— Electrón. y fis. apl., 1972, 15, N 4, p. 225—230.
  170. *Журав С. М.* Возбуждение диэлектрической пластины открытым концом волновода.— РИЭ, 1973, 20, № 9, с. 1945—1948.
  171. *Фиалковский А. Т.* Теория высших типов в несимметричной полосковой линии.— РИЭ, 1976, 21, № 4.
  172. *Нефёдов Е. И., Фиалковский А. Т.* Дисперсионные характеристики микрополоскового волновода.— ДАН СССР, 1977, 235, № 6, 1303—1306; Излучаемые типы волн микрополоскового волновода.— ДАН СССР, 1978, 239, № 2, 315—317.
  173. *Нефёдов Е. И., Санталов Н. П., Фиалковский А. Т.* Дисперсионные характеристики неизлучающих волн микрополоскового волновода.— РИЭ, 1979, 24, № 1, с. 17—24.
  174. *Арманд Н. А., Нефёдов Е. И., Фиалковский А. Т.* Электродинамические основы машинного проектирования интегральных СВЧ-структур.— Вестн. АН СССР, 1978, № 3, с. 55—58.
  175. *Yip G. L., Auyeung T.* Launching efficiency of the  $HE_{11}$  surface-wave mode on a dielectric tube.— IEEE Trans. MTT, 1974, 22, N 1, p. 6—14.
  176. *Мумтра Р., Лу С.* Аналитические методы теории волноводов. М.: Мир, 1974. 323 с.
  177. Вычислительные методы в электродинамике./ Под ред. Р. Миттры. М.: Мир, 1977. 485 с.
  178. *Nussenzweig H. M.* Solution of a diffraction problem.— Phil. Trans. Roy. Soc. London A, 1959, 252, N 1003, 1.
  179. *Neumann E. G.* Über das elektromagnetische Feld am freien Ende einer dielektrischen Leitung. I. Abstrahlung. II. Empfang.— Z. angew. Phys., 1967, 24, N 1, p. 1—18.
  180. *Bates C. P., Mittra R.* Waveguide excitation of dielectric and plasma slabs.— Radio Sci., 1968, 3, N 3, p. 251—266.
  181. *Jones J. E., Tsai L. L. et al.* The admittance of a parallel-plate waveguide aperture illuminating a metal sheet.— IEEE Trans. AP, 1968, 16, N 5, p. 528—535.
  182. *Nair K. G., Koshy V. K., Srirastva G. P.* A theoretical study of the asymmetric excitation of conducting flanges by a primary aperture antenna and the consequent radiation pattern.— Intern. J. Electron., 1968, 24, N 5, p. 497—500.
  183. *Черный В. В.* Диэлектрический волновод  $s$ -типа.— Письма в ЖТФ, 1977, № 3, № 19, с. 1007—1011.
  184. *Itoh T., Mittra R.* A new method of solution for radiation from a flanged waveguide.— Proc. IEEE, 1971, 59, N 7, p. 1131—1133.
  185. *Басилая И. Ш.* Расчет влияния диэлектрического клина на диаграмму направленности рупорного облучателя.— Труды НИИ радио, 1972, № 3, с. 94—99.
  186. *Hongo K.* Diffraction by a flanged parallel-plate waveguide.— Radio Sci., 1972, 7, N 10, p. 955—963.
  187. *Howard A. Q.* On the mathematical theory of electromagnetic radiation from flanged waveguides.— J. Math. Phys., 1972, 13, N 4, p. 482—490.
  188. *Balling P.* On the role of lateral waves in the radiation from the dielectric wedge.— IEEE Trans. AP, 1973, 21, N 2, p. 247—248.
  189. *Reisdorf F., Schminke W.* Application of a «Zwischenmedium» to the radiation from a flanged waveguide.— Proc. IEEE, 1973, 120, N 7, p. 739—740.
  190. *Cockrell C. R., Pathak H.* Diffraction theory techniques applied to aperture antennas on finite circular and square ground planes.— IEEE Trans. AP, 1974, 22, N 3, p. 443—448.
  191. *Рикенглад Л. Э., Колоколова О. В.* Излучение  $E$ -волн из плоского волновода с фланцем в диэлектрик с потерями, отделенный зазором.— РИЭ, 1975, 20, № 5, с. 1080—1084; ЖТФ, 1975, 45, № 9, 1793—1797.

\* Вторая работа этих же авторов, посвященная излучению из плоского волновода с диэлектрическим слоем, опубликованная в IRE Trans. AP, 1959, 7, p. 359—368, к сожалению, содержит ошибки.

192. Филиппов А. Ф. Дифракция на многогранном угле сферической волны скользкой вдоль ребра.— ЖВММФ, 1974, 14, № 1, с. 157—165.
193. Боровиков В. А. Дифракция на многоугольниках и многогранниках. М.: Наука, 1966. 455 с.
194. Tiersten H. F., Rubin D. On the fundamental antisymmetric mode of the wedge guide.— Ultrasonics Symp. Proc., Milwaukee, Wisc., 1974, N. Y., 1974, p. 117—120.
195. Барзатов А. Н. Моделирование звукового поля в клине с помощью муаровых карт.— Акуст. журн., 1970, 16, № 1, с. 10—14.
196. Хестанов Р. Х. Метод последовательных дифракций в задаче об излучении из открытого конца волновода.— ДАН СССР, 1974, 219, № 3, с. 574—577.
197. Каценеленбаум Б. З. Квазиоптические методы формирования и передачи миллиметровых волн.— УФН, 1964, 83, № 1, с. 81—105.
198. Квазиоптика. Избр. докл. на междунар. симпозиуме: Пер. с англ./ Под ред. Б. З. Каценеленбаума и В. В. Шевченко. М.: Мир, 1966. 504 с.
199. Бондаренко Н. Г., Таланов В. И. Некоторые вопросы теории квазиоптических систем.— Изв. вузов. Радиофизика, 1964, 7, № 2, с. 313—327.
200. Бобровников М. С. Дифракция поверхностной волны, набегающей под произвольным углом на излом импедансной плоскости.— Изв. вузов. Физика, 1965, № 1, с. 162—169.
201. Lewis L. R., Hessel A. Propagation characteristics of periodic arrays of dielectric slab.— IEEE Trans. MTT, 1971, 19, N 3, p. 276—286.
202. Бакланов Е. В., Новикова Л. М., Померанский А. А. Электромагнитные волны в системе диэлектрических пластин.— Труды Сибирского НИИ метрологии, 1971, вып. 10, с. 64—74.
203. Захаров Е. В., Пименов Ю. В. О влиянии уголкового рефлектора на диаграмму направленности линейного излучателя.— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, 18, № 3, с. 418—424.
204. Горгошидзе А. Н. Эталонные расчеты и оценка некоторых приближенных решений для задачи о дифракции на ленте.— РИЭ, 1975, 20, № 7, с. 1354—1361.
205. Уфлянд Я. С., Юшкова Е. А. О расчете гармонических полей в усеченном составном клине.— ЖТФ, 1976, 46, № 3, с. 933—938.
206. Литвиценко Л. Н., Просвирнин С. Л., Шестопалов В. П. Дифракция плоской Н-поляризованной электромагнитной волны на щели в металлическом экране конечной толщины.— РИЭ, 1977, 22, № 3, с. 474—484.
207. Виниченко Ю. П., Захарьев Л. Н. и др. Дифракция плоской волны на решетке плоских волноводов с выступающими диэлектрическими пластинами.— РИЭ, 1972, 17, № 7, с. 1382—1386.
208. Алимин Б. Ф., Торгованов В. А. Методы расчета поглотителей электромагнитных волн: (Обзор).— Зарубежная радиоэлектроника, 1976, № 3, № 8, с. 60—80.
209. Захарьев Л. Н., Леманский А. А. Рассеяние волн «черными» телами.— М.: Сов. радио, 1972. 288 с.
210. Штагер Е. А., Чаевский Е. В. Рассеяние волн на телах сложной формы. М.: Сов. радио, 1974. 240 с.
211. Vucci O. M., Franceschetti G. Scattering from wedge-tapered absorbers.— IEEE Trans. AP, 1971, 19, N 1, p. 96—104.
212. Маргелан О. С. Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрической гофрированной поверхности.— Изв. вузов. Радиофизика, 1972, 15, № 8, с. 1233—1238.
213. Кириленко А. О. Дифракция на зломах хвилеводу зі стрибком діелектричної проникності на границі поділу.— Доповіді АН УРСР, 1978, сер. А, № 7, с. 634—638.
214. Булгаков В. М., Абрамов В. В., Капун В. А. Дифракция электромагнитной волны на решетке диэлектрических нитей.— В кн.: Антенны. М., 1972, вып. 14.
215. Басс И. М., Фукс Ф. Г. Рассеяние волн на статистически шероховатой поверхности. М.: Наука, 1972. 424 с.
216. Schau Y. Dielectric rod antennas for millimeter-wave integrated circuits.— IEEE Trans. MTT, 1976, 24, N 11, p. 869—872.
217. Васильев Е. Н., Колосова Т. А. Излучение из скошенного открытого конца волновода с бесконечным фланцем.— РИЭ, 1977, 22, № 1, с. 29—37.
218. Попиченко В. А. Дифракция на щели и ленте: точность различных асимптотических методов.— РИЭ, 1977, 22, № 7, с. 1391—1399.
219. Воскресенский Г. В., Журав С. М. Излучение из открытого конца плоского волновода с диэлектрическим заполнением.— РИЭ, 1976, 21, № 12, с. 2608—2614.
220. Морс Ф. М., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М.: Изд-во иностр. лит., 1958, т. 1. 930 с.; 1960, т. 2. 886 с.
221. Введение в интегральную оптику: Пер. с англ./ Под ред. Т. А. Шмаонова. М.: Мир, 1977. 367 с.  
Интегральная оптика: Пер. с англ./ Под ред. Т. Тамира. М.: Мир, 1978, 344 с.
222. Миллиметровые и субмиллиметровые волны. М.: ИЛ, 1959.
223. Техника субмиллиметровых волн. М.: Сов. радио, 1969. 477 с.
224. Comp. Harvey A. F. Bibliography of microwave optical technology (Solid State Phys. Lit. Guides, vol. 8). N. Y.:IFI Plenum, 1976, 32, 717 p.
225. Волоконная оптика: Библиогр. указатель по материалам отечественной и зарубежной литературы за 1975—1976 гг. М.: ИРЭ АН СССР, 1977; Волоконная оптика: Аннот. библиогр. указатель литературы за 1975—1976 гг. М.: Всесоюз. НИИ межотраслевой информации, 1977, вып. 1 (3).
226. Ramachandratiah M. S., Chatterjee S. K. Diffraction and back-scattering of electromagnetic waves by circular dielectric discs at X-band.— J. Indian Inst. Sci., 1971, 53, N 3, p. 177—205.
227. Kim J. R. Computer-aided analysis of a finite arbitrarily shaped dielectric antenna.— IEEE Trans. AP, 1971, 19, N 3, p. 444—445.
228. Van Doeren R. E. An integral equation approach to scattering by dielectric rings.— IEEE Trans. AP, 1969, 17, N 3, p. 373—374.
229. Harrington R. F., Mautz J. R., Chang V. Characteristic modes for dielectric and magnetic bodies.— IEEE Trans. AP, 1972, 20, N 2, p. 194—198.
230. Vincent P., Petit R. Sur la diffraction d'une onde plane par un cylindre diélectrique.— Opt. Commun., 1972, 5, N 4, p. 261—266.
231. Ильченко М. Е., Кудинов Е. В. Ферритовые и диэлектрические резонаторы СВЧ. Киев: Изд-во КГУ, 1973.
232. Ильченко М. Е., Мелков Г. А., Мирский Г. А. Твердотельные СВЧ фильтры. Киев: Техника, 1977. 120 с.
233. Bladel J. Resonant scattering by dielectric cylinders.— IEE J. Microwaves, Opt. and Acoustics, 1977, 1, N 2; On the resonances of a dielectric resonator of very high permittivity.— IEEE Trans. MTT, 1975, 23, N 2, p. 199—209; The excitation on dielectric resonators of very high permittivity.— IEEE Trans. MTT, 1975, 23, N 2, p. 208—217.
234. Бабич В. М., Булдырев В. С. Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М.: Наука, 1972, 456 с.
235. Власов С. Н. О колебаниях «шепчущей галереи» в открытых резонаторах с диэлектрическим стержнем.— РИЭ, 1967, 12, № 3, 572—573.
236. Snyder A. M., Mitchell D. H. Whispering-gallery rays within dielectric circles and spheres.— Electron. Lett., 1974, 10, N 2.
237. Beckmann P., Franz W. Über die Greensche Funktion transparenten Zylinder.— Z. Naturforsch., 1957, 12a, N 3.
238. Булдырев В. С. Исследование функции Грина в задаче дифракции на прозрачном круговом цилиндре.— В кн.: Численные методы решения дифференциальных и интегральных уравнений и квадратурные формулы. М.: Наука 1964, с. 275—286; Дифракция волн на прозрачном шаре.— Там же, с. 287—290.
239. Нефёдов Е. И. Колебания типа «шепчущей галереи» в открытых дисковых резонансных структурах.— РИЭ, 1975, 20, № 7, с. 1498—1501.

240. *Rheinstejn J.* Scattering of electromagnetic waves from dielectric coated conducting spheres.— IEEE Trans. AP, 1964, 12, N 3, p. 334—340.
241. *Васильев Е. Н., Материкова Л. Б.* Возбуждение диэлектрического тела вращения.— ЖТФ, 1965, 35, № 10, с. 1817—1824; Возбуждение идеально проводящего тела вращения, покрытого слоем диэлектрика.— Изв. вузов. Радиофизика, 1971, 14, № 8, с. 1250—1259; Возбуждение многослойного диэлектрического тела вращения произвольной формы.— Там же, 1973, 16, № 1, с. 97—109.
242. *Малушков Г. Д.* Методы решения задач электромагнитного возбуждения тел вращения: Обзор.— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, 8, № 11, с. 1563—1589.
243. *Альвен Г., Фельтхаммар К.-Г.* Космическая электродинамика. М.: Мир, 1967. 260 с.
244. *Колосов М. А., Арманд Н. А.* Распространение радиоволн при космической связи. М.: Связь, 1969. 155 с.
245. *Galejs J.* Antennas in inhomogeneous media. N. Y.: Pergamon Press, 1969.
246. *Капица П. Л.* Эксперимент, теория, практика. М.: Наука, 1977.
247. *Кравцов Ю. А., Орлов Ю. И.* Геометрическая оптика неоднородных сред. М.: Наука, 1979.
248. *Колесников П. М.* Электродинамическое ускорение плазмы. М.: Атомиздат, 1971. 389 с.
249. *Кондратенко А. Н.* Плазменные волноводы. М.: Атомиздат, 1976. 232 с.
250. Вопросы теории плазмы. М.: Атомиздат, 1963, вып. 1; 1964, вып. 4; 1967, вып. 5.
251. *Башаринов А. Е., Тучков Л. Т.* Измерение радиотепловых и плазменных излучений. М.: Сов. радио, 1968. 390 с.
252. *Арманд Н. А., Башаринов А. Б.* Исследование Земли с летательных аппаратов. Результаты, полученные с помощью радиофизических методов.— Вестн. АН СССР, 1977, № 8, с. 28—38.
253. *Streifer W., Kodis R. D.* On the scattering of electromagnetic waves by a dielectric cylinder.— Quart. Appl. Math., 1964, 22, N 3, p. 193—206.
254. *Yen C.* Perturbation approach to the diffraction of electromagnetic waves by arbitrarily shaped dielectric obstacles.— Phys. Rev., 1964, 135, N 5A, p. 1193—1201.
255. *Peters L. Yr., Kawano T., Swarner W. G.* Approximations for dielectric of plasma scatterers.— Proc. IEEE, 1965, 53, N 8, p. 882—892.
256. *Poincelot P.* Sur une équation intégrodifférentielle pour la diffraction électromagnétique des substances diélectriques.— C. r. Acad. sci., 1966, 262, N 25, p. B1601—B1603.
257. *Grzesik J.* Note on homogeneous and inhomogeneous integral equation in the theory of electromagnetic scattering by dielectric obstacles.— Proc. IEEE, 1966, 54, N 12, p. 2028—2029.
258. *Becker K.-D.* Das Strahlungsfeld eines symmetrisch angeregten dielektrischen halbinendlichen Stabes, der auf eine ideal leitende Ebene aufgesetzt ist.— AEU, 1967, 21, N 9, p. 483—486.
259. *Plonus M. A.* Scattering from lowdensity dielectric bodies.— IEEE Trans. AP, 1967, 15, N 3, p. 437—441.
260. *Измайлов Ф. Ф.* Применение метода Кирхгофа для асимптотического решения задачи дифракции плоской волны на диэлектрических телах вращения.— В кн.: Антенны. М.: Связь, 1971, вып. 12, с. 13—24.
261. *Аветисян А. А.* К расчету дифракции электромагнитных волн на однородных телах вращения с произвольными комплексными проницаемостями.— РиЭ, 1972, 17, № 4, с. 701—706.
262. *Green H. E.* The physical principles of geometric diffraction.— Proc. IREE, 1974, 35, N 3, p. 45—49.
263. *Заборонкова Т. М., Кондратьев И. Г.* К вопросу о дифракции высокочастотных электромагнитных волн на неоднородных диэлектрических объектах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 4, с. 622—624.
264. *Waterman P. C.* Scattering by dielectric obstacles.— Alta freq., 1949, 38, Num. spec., p. 348—352.
265. *Schulten G.* Über die Fortpflanzung elektromagnetischer Wellen in dielectricischen Mischkörpern.— Philips Res. Repts, Suppl., 1970, N 9, 114 p.
266. *Blakey J. B.* Radiation properties of a composite-dielectric-rod aerial.— Electron. Lett., 1973, 9, N 6, p. 146—147.
267. *Самарский А. А.* Введение в теорию разностных схем. М.: Наука, 1971; Теория разностных схем. М.: Наука, 1977. 590 с.
268. *Самарский А. А., Попов Ю. П.* Разностные схемы газовой динамики. М.: Наука, 1975. 351 с.
269. *Рвачев В. Л.* Методы алгебры логики в математической физике. Киев: Наук. думка, 1974. 257 с.
270. *Рвачев В. Л., Слесаренко А. П.* Алгебра логики и интегральные преобразования в краевых задачах. Киев: Наук. думка, 1976. 287 с.
271. *Советов Н. М.* Преобразование Фурье как общий метод рассмотрения согласующих переходов в передающих линиях.— Изв. вузов. Радиотехника, 1959, 2, № 3, с. 340.
272. *Ильинский А. С., Свешиников А. Г.* Численные методы в задачах дифракции на неоднородных периодических структурах.— В кн.: Прикладная электродинамика. М.: Высшая школа, 1977, вып. 1, с. 51—93.
273. *Васильев Е. Н., Ильинский А. С., Свешиников А. Г.* Численные методы решения задач дифракции на локальных неоднородностях.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. М.: изд-во МГУ, 1975, вып. 24, с. 3—23.
274. *Васильев Е. Н.* Алгоритмизация задач дифракции на основе интегральных уравнений.— В кн.: Прикладная электродинамика, М.: Высшая школа, 1977, вып. 1, с. 94—129.
275. *Марчук Г. И.* Методы вычислительной математики. М.: Наука, 1977. 455 с.
276. *Нефёдов Е. И.* Расчет пологих диэлектрических вставок в прямоугольном волноводе.— РиЭ, 1962, 7, № 5, с. 801—805.
277. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М.: Наука, 1974.
278. *Lehman G. W.* Diffraction of electromagnetic waves by planar dielectric structures.— J. Math. Phys., 1970, 11, N 5, p. 1522—1535.
279. *De Jong G., Offringa W.* Reflection and transmission by a slant interface between two media in a rectangular waveguide.— Intern. J. Electron., 1973, 34, N 4, p. 453—563.
280. *Ляшенко И. Н., Мередов Х. М.* Численное решение некоторых спектральных задач теории колебаний. Киев: Вища школа, 1978. 203 с.
281. *Jones P. B.* The solution of inhomogeneous waveguide problems using a transmission-line matrix.— IEEE Trans. MTT, 1974, 22, N 3, p. 209—215.
282. *Капулевич Б. Ю., Симиин Н. С.* Отражение от диэлектрического клина в прямоугольном волноводе.— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 1, с. 135—140.
283. *Кириленко А. А., Рудь Л. А.* Дифракция волн на наклонной границе раздела диэлектрических сред в прямоугольном волноводе.— РиЭ, 1977, 22, № 10, с. 2057—2067.
284. *William E.* Continuously tapered dielectric matching transmissions for waveguides.— Diss. Abstr., 1967, B27, N 12, p. 4395.
285. *Козлов И. А.* К синтезу согласующих плавных диэлектрических переходов.— РиЭ, 1968, 13, № 4, с. 730—731.
286. *Као Т. W.* Reflection and transmission of electromagnetic waves in inhomogeneous dielectric filled rectangular waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1969, 17, N 8, p. 639—641.
287. *McRitchie W. K., Kharadly M. M. Z.* Properties of interface between



- homogeneous and inhomogeneous waveguides.— PИЕЕ, 1974, 121, N 11, p. 1367—1374.
288. О повышении мощности электровакуумных приборов СВЧ.— Электронная техника, 1975. (Электроника СВЧ; Вып. 3).
289. Schunk E. Keil-Ferrit-Absorberkombinationen für elektromagnetische Wellen.— Z. angew. Phys., 1965, 19, N 5, S. 420—427.
290. Ким А. Ч., Нефёдов Е. И., Попов Е. И. Расчет нагрузки с наклонным диэлектрическим окном.— В кн.: Радиотехника: Респ. межвед. темат. науч.-техн. сб. Харьков: изд-во ХГУ, 1972, вып. 21, с. 170—173.
291. Ким А. Ч., Макаров В. В., Попов Е. И. Теоретическое и экспериментальное исследование калориметрических нагрузок с диэлектрическими окнами.— В кн.: Радиотехника: Респ. межвед. темат. науч.-техн. сб. Харьков: изд-во ХГУ, 1972, вып. 23, с. 37—40.
292. Плетнева А. Г., Трошин Ю. Ф. Вопросы расчета волноводных калориметрических нагрузок.— Науч. труды Сарат. политехн. ин-та, 1973, вып. 62, с. 132—140.
293. Фелсен Л., Маркувиц Н. Излучение и рассеяние волн. М.: Мир, 1978, т. 1. 547 с.; т. 2. 555 с.
294. Веселов Г. И., Ильинская О. К. Решение задачи дифракции на наклонной диэлектрической пластине.— Изв. вузов. Радиофизика, 1975, 18, № 8, с. 1157—1163.
295. Веселов Г. И., Ильинская О. К. Теоретическое исследование модели калориметрической нагрузки.— РИЭ, 1975, 20, № 11, с. 2272—2279.
296. Ильинская О. К., Моргаловский В. П. Исследование калориметрической нагрузки с наклонной диэлектрической пластиной.— В кн.: Электронная техника. 1976 (Электроника СВЧ; Вып. 10).
297. Ильинская О. К., Кириленко А. А., Рудь А. А. Исследование модели нагрузки с диэлектрическим окном.— РИЭ, 1978, 23, № 1.
298. Meyer E., Helberg H.-W., Macrander Ch. Keilabsorber mit magnetischen Verlusten.— Z. angew. Phys., 1965, 20, N 1, S. 51—56.
299. Котоносов Н. В., Иванов В. И. и др. Оптически управляемая полупроводниковая волноводная нагрузка.— Труды Воронежского у-та, 1971, 77, 11—18.
300. Hojasi R.— Rev. Radio Res. Labs, 1964, 10, N 48, p. 95—101.
301. Ильинская О. К. Исследование электродинамических характеристик и машинное моделирование волноводных нагрузок: Автореф. канд. дис. М., 1977. В надзаг.: Ин-т электронной техники.
302. Андрусенко А. М., Кравченко В. Ф., Солодухо В. А. Тепловое электромагнитное поле диэлектрического клина, помещенного в волновод.— ДАН УССР, 1975, А, № 10, с. 919—923.
303. Hanckel W., Stockhausen M. Wellentypumwandlung an der schrägen Begrenzungsfläche eines Dielektrikums im Rechteckhohlleiter.— Z. angew. Phys., 1965, 19, N 2, S. 138—141.
304. Rücker F., Stockhausen M. Wellentypumwandlung im überdimensionierten Rechteckhohlleiter.— Z. angew. Phys., 1967, 23, N 2, S. 95—99.
305. Мериакри В. В., Нефёдов Е. И. Преобразование волны  $H_{10}$  на перекосе границы диэлектрика.— РИЭ, 1969, 14, № 7, с. 1317—1318.
306. Comte G. Perfectionnement des aux dispositifs de franchissement des coudes par les onde électromagnétiques du tupe  $TE_{01}$  circulare.— Franc. patent, kl. 12, 4 N 1142, 076, 13.09. 1957.
307. Нефёдов Е. И. Диэлектрическая призма в изломе плоского широкого волновода.— РИЭ, 1965, 10, № 5, с. 879—882; A dielectric prism in the corner of overmoded waveguide.— Electromagnetic wave theory. Proc. Symp. Delft, Netherlands, 1965, Sept.; Oxford, New York: Pergamon Press, 1967, p. 409—418.
308. Ваганов Р. Б., Каложин В. А., Фойгель А. В. Призма в изломе широкого волновода.— РИЭ, 1975, 20, № 8, с. 1726—1730.
309. Ваганов Р. Б. Фазовый корректор в изломе широкого волновода.— РИЭ, 1973, 18, № 2, с. 235—241.
310. Wardrop B. A quasi-optical directional coupler.— Marconi Rev., 1972, 35, N 185, p. 159—168.
311. Taub J., Hindin H. Design of quasioptical components.— Microwaves, 1964, 3, N 1, p. 20—29.
312. Takao I., Watanab K. An oversize waveguide directional coupled using two prism interface-matched by means of the Brewster's-angle effect.— IEEE Trans. MTT, 1969, 17, N 2, p. 124—125.
313. Каценеленбаум Б. З. К теории квазиоптических элементов в широких волноводах.— РИЭ, 1971, 16, № 10, с. 1797—1804.
314. Луньков А. Е., Ляховецкий Б. А. К анализу работы призмного делителя мощности в многомодовых волноводах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1971, 14, № 12, с. 1902—1905.
315. Дрягин Ю. А., Кукин А. М., Мальцев В. А. Призмные ответвители и аттенюаторы миллиметрового диапазона волн.— ПТЭ, 1975, № 6, с. 143—144.
316. Каценеленбаум Б. З. Дифракция на плоском зеркале в изломе широкого волновода.— РИЭ, 1963, 8, № 7, с. 1111—1119.
317. Костров Б. В., Нефёдов Е. И. Дифракция на широкой щели в широком волноводе.— РИЭ, 1964, 9, № 4, с. 649—659; № 8, с. 1496—1500.
318. Курушин Е. П., Нефёдов Е. И. Дифракция  $H$ -волн на широкой щели в плоском многоволновом волноводе.— РИЭ, 1969, 14, № 2, с. 206—212; To the theory coupled open resonators.— Proc. 3rd Colloq. Microwave Commun., Budapest, 1968, p. 513—518.
319. Котик И. П., Сивов А. Н. К дифракции электромагнитных волн на зеркале в изломе плоского волновода.— РИЭ, 1965, 10, № 1, с. 175—178.
320. Campbell J. J., Jones W. R. Symmetrically truncated right-angle corners in parallelplate and rectangular waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1968, 16, N 8, p. 517—529.
321. Francena H. J. Scattering of electromagnetic waves by angled bends in rectangular waveguides.— Alta freq., 1969, 38, Num. spec., p. 336—338.
322. Wardrop B. Analysis of quasioptical waveguide corners.— Electron. Lett., 1970, 6, N 6, p. 154—155.
323. Cullen A. L., Byars M. Mirror corner for use with overmoded circular waveguide.— Electron. Lett., 1972, 8, N 25, p. 621—623.
324. Кириленко А. А., Рудь Л. А., Шестопалов В. П. Рассеяние волн на изломе волновода.— РИЭ, 1974, 19, № 4, с. 687—696.
325. Черенков В. А., Потанин В. М. Вопросы проектирования оптикоинтегральных микросхем.— Зарубежная радиоэлектроника, 1978, № 6, с. 78—90.
326. Hamid M. A. K. Reflection coefficient of dielectric-loaded waveguide bends.— Electron. Lett., 1973, 9, N 2, p. 37—38.
327. Нефёдов Е. И. Тонкая неоднородная диэлектрическая пластина в широком волноводе.— РИЭ, 1965, 10, № 4, с. 764—766.
328. Conte M.-J., Baudrand H., Lefevre S. Etude expérimentale de l'influence d'une lentille diélectrique placée dans un guide d'onde rectangulaire sudi-mensionné.— C. r. Acad. sci., 1965, 260, N 10.
329. Lozes R., Matheau J.-C., Lefevre S. Effect d'un dioptré cylindrique en guide d'onde surdimensionné.— C. r. Acad. sci., 1969, 268, N 26, p. B1692—B1695.
330. Dion A. R. An investigation of a 110-wavelength EHF waveguide lens.— IEEE Trans. AP, 1972, 20, N 4, p. 493—496.
331. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М.: Сов. радио, 1957. 581 с.
332. Doswell A., Harris D. J. Modified  $H$ -guide for millimeter and submillimeter wavelengths.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 9, p. 587—589.
333. Данилин А. А. Расчет эквивалентной проводимости диэлектрических резонансных окон в прямоугольном волноводе.— Изв. Ленингр. электротехн. ин-та, 1974, вып. 155, с. 42—46.
334. James C. R., Walker G. B. Waves in media with longitudinal and transverse discontinuities.— Proc. IEEE, 1970, 117, N 4, p. 693—698.

335. *Huffman D. L.* Prefabricated multilayer section design program.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 1, p. 62—63.
336. *Minakovič B., Gokgor S.* Attenuation and phase-shift coefficients in dielectric-loaded periodic waveguides.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 8, p. 578.
337. *Franceschetti G.* Thin resistive layers in waveguides theory of operation and experiments.— Arch. elektrotechn. (PRL), 1969, 18, N 4, p. 655—674.
338. *Козарь А. В., Пирогов Ю. А.* Отражение СВЧ-сигнала от полупроводниковой пластины конечной толщины.— Вестн. МГУ. Физ. астрон., 1972, 13, № 5, с. 573—576.
339. *Bonek E., Magerl G.* Propagation characteristics of dielectrically loaded rectangular waveguides for laser beam modulators.— AEU, 1974, 28, N 12, p. 499—506.
340. *Кальмык В. А., Раевский С. Б.* Прямоугольный волновод, перегороденный резистивной пленкой.— РИЭ, 1975, 20, № 10, с. 2185—2187.
341. *Hatmer G.* Cut-off frequencies and mode types in waveguide filled with inhomogeneous dielectric material.— Ann. Res. Inst. Telecommun., 1975, Vol. 1. Budapest, 1975, p. 91—100.
342. *Kashyap S. C.* Slant dielectric interface discontinuity in a waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1975, 23, N 2, p. 257—260.
343. *Chow Y. L., Wu S. C.* A moment method with mixed basis functions for scatterings by waveguide junctions.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 5, p. 333—340.
344. *Eliasson B.* Theoretische Betrachtung zur Kopplung von Hohlleiterwellen durch dünne Widerstandsschichten. Zürich: Juris Verl., 1966.
345. *Мальцев В. А., Нефёдов Е. И., Шевченко В. В.* Бисния поверхностных волн в связанных пленочных световодах и их применение.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1970, 13, № 11.
346. *Беляев В. Б., Жилков В. С.* Расчет избирательности по типам волн бесщелевых ответвителей на прямоугольном волноводе.— В кн.: Радиотехника: Респ. межвед. темат. науч.-техн. сб. Харьков: изд-во ХГУ, 1976, вып. 39, с. 96—101.
347. *Саусорт Дж. К.* Принципы и применения волноводной передачи. М.: Сов. радио, 1955. 700 с.
348. *Champlin K. S., Glover G. H.* «Gap effect» — in measurement of large permittivities.— IEEE Trans. MTT, 1966, 14, N 8, p. 397—398.
349. *Clarricoats P. J. B., Slinn K. R.* Numerical solution of waveguide-discontinuity problems.— Proc. IEE, 1967, 114, N 7, p. 878—886.
350. *Прохода И. Г., Даневич К. С.* Согласование волноводов, заполненных различными диэлектриками.— В кн.: Электродинамика и физика СВЧ: Днепропетровск, 1973, вып. 3, с. 22—30.
351. *Chang C. T. M.* Computation of the equivalent circuit parameters for a junction between empty and side-slab-filled rectangular waveguides.— IEEE Trans. MTT, 1974, 22, N 5, 585; Partially dielectric-slab-filled waveguide phase shifter.— IEEE Trans. MTT, 1974, 22, N 5, p. 481—485.
352. *Vava G. P., Naldi C.* Discussion of some design methods for dielectric steps in rectangular waveguides.— IEEE Trans. MTT, 1970, 18, N 3, p. 167—168.
353. *Мергелян О. С.* Рассеяние плоской электромагнитной волны на диэлектрической ступеньке.— Изв. АН АрмССР. Физика, 1972, 7, № 4, с. 243—247.
354. *Royer E. G., Mittra R.* The diffraction of electromagnetic waves by dielectric steps in waveguides.— IEEE Trans. MTT, 1972, 20, N 4, p. 273—279.
355. *Arnold R. M., Rosenbaum F. J.* An approximate analysis of dielectric-ridge loaded waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1972, 20, N 10, p. 699—701.
356. *Chang C. T. M.* Equivalent circuit for partially dielectric-filled rectangular-waveguide junctions.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 6, p. 403—411.
357. *Пономарев Г. А.* Дифракция на торце полубесконечной диэлектрической пластины, утопленной в нижнюю стенку плоского волновода.— Труды Сибирск. физ.-техн. ин-та при Томском у-те, 1974, вып. 54, с. 207—216.
358. *Montgomery J., Lewin L.* Note on an E-plane waveguide step with simultaneous change of media.— IEEE Trans. MTT, 1972, 20, N 11, p. 763—764.
359. *Гавалян Э. Д.* и др. Переходное излучение в волноводе при скачкообразном изменении во времени диэлектрической проницаемости.— РИЭ, 1976, 21, № 5, с. 1072—1074.
360. *Егоров Ю. В.* Частично заполненные прямоугольные волноводы. М.: Сов. радио, 1967. 246 с.
361. *Бергер М. Н., Капилашвич Б. Ю.* Прямоугольные волноводы с диэлектриками. М.: Сов. радио, 1973. 254 с.
362. *De Loach B. C.* Coaxial versus rectangular waveguides for solid-state microwave circuits.— Proc. IEEE, 1970, 58, N 3, p. 505—506.
363. *Chang C. T. M., Dawson J. W.* Propagation of electromagnetic waves in a partially dielectric filled circular waveguide.— J. Appl. Phys., 1970, 41, N 11, p. 4493—4500.
364. *Харлашкин О. А.* Прямоугольные волноводы с малыми потерями.— Труды Моск. физ.-техн. ин-та. М., 1971 (1972), с. 123—126.
365. *Hidaka T.* Computer-aided renormalized perturbation method for the inhomogeneously loaded waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1972, 20, N 2, p. 180—181.
366. *Левин М. Л., Рытов С. М.* Теория равновесных тепловых флуктуаций в электродинамике. М.: Наука, 1967.
367. *Макеева Г. С.* Взаимодействие волн в волноводе, частично заполненном нелинейным диэлектриком.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1973, 16, № 7; Исследование параэлектрического волновода.— РИЭ, 1973, 18, № 5, с. 1060—1062.
368. *Casey K. F.* On inhomogeneously filled rectangular waveguides.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 8, p. 566—567.
369. *Войтович Н. Н., Санталов Н. П.* О некоторых применениях обобщенного метода собственных колебаний.— РИЭ, 1974, 19, № 12, с. 2625—2629.
370. *Tsandoulas G. N.* Bandwidth enhancement in dielectric-lined circular waveguides.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 10, p. 651—654.
371. *Tsankov M. A.* Single-mode propagation in dielectrically loaded rectangular waveguides.— Болг. физ., 1975, 2, N 4, p. 389—398.
372. *Tsandoulas G. N.* Propagation in dielectric-lined square waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1975, 23, N 5, p. 406—410.
373. *Findakly T. K., Haskal H. M.* On the design of dielectric loaded waveguides.— IEEE Trans. MTT, 1976, 24, N 1, p. 39—43.
374. *Petersson L.* On the theory of coupling between finite dielectric resonators.— IEEE Trans. MTT, 1976, 24, N 9, p. 615—619.
375. *Haddenhorst H.* Durchgang von elektromagnetischen Wellen durch inhomogene Schichten.— Z. angew. Phys., 1955, 7, N 10.
376. *Семенов Г. Ф.* До питання про розрахунок резонаторів з діелектриком довільної форми та довільних розмірів.— Вісн. Київськ. політехн. ин-ту. Сер. Радиоелектрон., 1968, № 4, с. 17—18.
377. *Бойко Л. М.* Применение диэлектрических резонаторов для измерения высоких значений  $\epsilon$  на СВЧ.— Вестн. Киев. политехн. ин-та. Сер. радиотехн., электроакуст., 1970, № 7, с. 5—7.
378. *Алексейчик Л. В., Геворкян В. М., Казанцев Ю. А.* Диэлектрический резонатор в волноводе.— Труды Моск. энергет. ин-та, 1973, вып. 102, с. 70—76; Влияние металллических стенок на резонансную частоту диэлектрического резонатора.— Там же, 1975, вып. 251, с. 81—84.
379. *Каликинский И. И.* Возбуждение равномерно движущимся точечным зарядом полукруглого цилиндрического резонатора с диэлектрическим телом.— РИЭ, 1972, 17, № 2, с. 256—263.
380. *Мелков Г. А.* Вынужденные колебания открытых диэлектрических резонаторов на СВЧ.— РИЭ, 1972, 17, № 10, с. 2027—2034.
381. *Сафарян В. А.* Расчет собственных частот и полей прямоугольного

- резонатора с диэлектрическим шаром.— Изв. вузов. Радиофизика, 16, № 4, с. 640—643.
382. Eugene E. Metrological application of a stationary property in rectangular cavities containing a dielectric slab.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 12, p. 847—850.
383. Пятак Н. И., Коробкин В. А. Резонатор-фильтр на прямоугольном волноводе с диэлектрическими диафрагмами.— Вестн. Харьк. ун-та, 1974, № 110; Радиофизика и электроника, вып. 3, 73—78.
384. Unrau U. Spurious mode generation at quasi-optical H-plane directional couplers and dielectric coated mirror heads in rectangular waveguide.— AEU, 1976, 30, N 9, p. 349—357.
385. Collin R. E., Brawn J. The calculation of the equivalent circuit of an axially unsymmetrical waveguide junction.— Proc. IEE, 1956, C-103, N 3.
386. Berk A. D. Variational principles for electromagnetic resonators and waveguides.— IEEE Trans. AP, 1956, 4, N 2.
387. Bahiana L. C., Smullin L. D. Coupling of modes in uniform, composite waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1960, 8, N 4.
388. Таблицы интегралов Френеля. М.: Изд-во АН СССР, 1953.
389. Канулеич В. Ю. Квазиоптимальный диэлектрический трансформатор в прямоугольном волноводе.— РИЭ, 1975, 20, № 4, с. 689—695.
390. Рудь Л. Об особенностях численного решения некоторых систем уравнений первого рода.— В кн.: Радиотехника: Респ. межвед. темат. науч. техн. сб. Харьков: изд-во ХГУ, 1975, вып. 34, с. 17—20.
391. Whitehead E. A. N.— Proc. IEE, 1951, 98, N 3.
392. Chow Y. L., Wu S.-C. A moment method with mixed basis function for scatterings by waveguide junctions.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 5.
393. Стрелкова Л. П. Уменьшение потерь на изломах линии поверхностной волны с помощью преломляющей призмы.— Вестн. МГУ. Сер. 3. Физика, астрономия, 1960, № 6, с. 31—37.
394. Stutzman W. L. Plane dielectric-coated conductor surface waveguide corners.— IEEE Trans. MTT, 1968, 16, N 1, p. 52—53.
395. Fellers R. G., Taylor J. Internal reflections in dielectric prism.— IEEE Trans. MTT, 1964, 12, N 6, p. 584—587.
396. Суэма Т., Кумаган Н., Куродзоо С. Широкополосные устройства на основе квазиоптических призм.— J. Inst. Electron. Commun. Eng. Jap., 1966, 49, N 3, p. 457—462.
397. Fellers R. G. Measurement of the characteristics of optical and quasi-optical waveguides.— Progr. Radio Sci., 1963—1966, Pt 1, 1967, p. 290—311.
398. Marcatili E. A. J. Dielectric rectangular waveguide and directional coupler for integrated optics.— BSTJ, 1969, 48, N 7, p. 2071—2102.
399. Андошина А. П., Андрусенко А. М. и др. Призмный волномер поглощающего типа.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1970, 13, № 8.
400. Мировицкий Д. И., Дубровин В. Ф., Баскаков В. В. Синфазные направленные разветвители поверхностной волны на диэлектрических волноводах.— В кн.: Антенны. М.: Связь, 1971, вып. 12, с. 65—76.
401. Voges E. Directional couplers with rectangular dielectric waveguides.— AEU, 1974, 28, N 11, p. 478—479.
402. Земсков К. И., Исаев А. А. и др. Струнный лазер на прасителе с накачкой лазером на парах меди.— Квантовая электроника, 1976, 3, № 6, с. 1340—1341.
403. Красюк И. К., Лукишов С. Г. и др. Формирование поперечного распределения интенсивности лазерного луча с помощью «мягких» диафрагм.— Квантовая электроника, 1976, 3, № 6, с. 1337—1339.
404. Ваганов Р. Б. Диэлектрическая призма в лучевом волноводе.— РИЭ, 1969, 14, № 3, с. 393—400.
405. Chu P. L., Karbowiak A. E. Electrical characteristics of corners in surface-wave lines.— Proc. IEE, 1967, 114, N 10, p. 1409—1417.
406. Ерохин Г. А., Кочержевский В. Г. Внешний поворот открытого волновода с малыми радиационными потерями.— РИЭ, 1973, 18, № 4, с. 695—702; Изгиб линии поверхностной волны.— Радиотехника, 1974, 29, № 1.
407. Tuan H.-S. The radiation and reflection of surface waves at a discontinuity.— IEEE Trans. AP, 1973, 21, N 3, p. 351—356.
408. Серебряный Р. В. Движение центра тяжести и изменение ширины волновых пакетов.— ЖЭТФ, 1950, 20, № 12, с. 1130—1140.
409. Ваганов Р. Б. Траектория энергетического центра волнового пучка.— РИЭ, 1970, 15, № 10, с. 2016—2023.
410. Nemoto S., Makimoto T. Reflection and transmission of two-dimensional Gaussian beam at the plane interface of dielectrics.— Trans. Inst. Electron. and Commun. Eng. Jap., 1974, B54, N 11, p. 714—721; A study of the reflection and beam waves at the plane interface of dielectrics.— Ibidem, N 11, p. 722—729.
411. Antar Y. M., Boerner W. M. Gaussian beam interaction with planar dielectric interface.— Can. J. Phys., 1974, 52, N 11, p. 962—972; Generation of complex Gaussian beam interaction with a planar dielectric interface.— IEEE Trans. AP, 1974, 22, N 6, p. 837—839.
412. Ooya T., Tateiba M., Fukumitsu O. Transmission and reflection of a gaussian beam at normal incidence on a dielectric slab.— J. Opt. Soc. Amer., 1975, 65, N 5, p. 537—541.
413. Faq P., Tabbara W. Etude comparative de deux approches de la diffraction d'une onde cylindrique quasi limitée par une lentille diélectrique à symétrique cylindrique.— C. r. Acad. sci., 1970, 274, N 16, p. B828—B830; Rev. Phys. Appl., 1971, 6, N 2, p. 191—194.
414. Felsen L. B. Propagation and diffraction of Gaussian beams.— Proc. 5th Colloq. Microwave Commun., Budapest. 1974, 3, p. 131—134.
415. Choudhary S., Felsen L. B. Analysis of Gaussian beam propagation and diffraction by inhomogeneous wave tracking.— Proc. IEEE, 1974, 62, N 11, p. 1530—1541.
416. Boulay R., Lit J. W. Y. Field of a truncated Gaussian beam as given by the boundary-diffraction-wave theory.— Can. J. Phys., 1972, 50, N 3, p. 259—263.
417. Tanaka K., Shibukawa M., Fukumitsu O. Diffraction of wave beam by an aperture.— IEEE Trans. MTT, 1972, 20, N 11, p. 749—755.
418. Tanaka K., Fukumitsu O. Transmission of an optical wave beam through a system of two aperture stops.— IEEE Trans. MTT, 1974, 22, N 2, p. 81—86.
419. Tanaka K., Tanaka M., Fukumitsu O. Application of the beam mode expansion to the analysis of noise reduction structure.— IEEE Trans. MTT, 1975, 23, N 7, p. 595—598.
420. Neumann E.-G., Stumper V. Durchgang einer dielectricischen Leitung durch eine Irisblende.— Z. angew. Phys., 1965, 20, N 1, p. 56—64.
421. Mahmoud S. F., Beal J. C. Scattering of surface waves by metallic obstacles on the dielectric-image line.— IEEE Trans. MTT, 1975, 23, N 2, p. 185—192.
422. Ermert H. Gaussian beams in anisotropic media.— Electron. Lett., 1970, 6, N 22, p. 720—721.
423. Гончаренко А. М. Гауссовы пучки света в кристаллах.— Препринт Ин-та физики АН БССР. Минск, 1972.
424. Естихивев Н. П., Чернышов В. Ф. Метод исследования оптимальных условий согласования отдельных элементов в линиях с поверхностными волнами.— Труды Моск. ин-та радиотехники, электроники и автоматики, 1974, вып. 71, с. 13—27.
425. Taub J. J. The status of quasi-optical waveguide components for millimeter and submillimeter wavelengths.— Microwave J., 1970, 13, N 11, p. 57—62.
426. Взятыйшев В. Ф., Рожков Г. Д., Меркурьев А. П. Интегральная оптика.— Зарубежная радиоэлектроника, 1970, № 12, с. 60—93.
427. Аникин В. И. Современное состояние техники функциональных оптических микроволноводов.— Зарубежная радиоэлектроника, 1971, № 7, с. 111—138; Исследование пленочных функциональных микроволноводов среднего ИК-диапазона.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1973, 16, № 8, с. 5—11.

428. Miller S. E., Marcatili E. A. J., Li T. Research toward optical-fiber transmission system.— Proc. IEEE, 1973, 61, N 12, p. 1703—1751.
429. Золотов Е. М., Киселев В. А., Сычугов В. А. Оптические явления в тонкопленочных волноводах.— УФН, 1974, 112, № 2, с. 231—273.
430. Гинзбург С. А., Мурадян А. Г. Передача света по двуслойным диэлектрическим волокнам.— Зарубежная радиоэлектроника, 1974, № 10, с. 48—73.
431. Suematsu Y. The properties of integrated optics in Japan.— IEEE Trans. MTT, 1975, 23, N 1, p. 16—20.
432. Lewin L. Radiation from curved dielectric slab and fibers.— IEEE Trans. MTT, 1974, 22, N 7, p. 718—727.
433. Okoshi T., Okamoto K. Analysis of wave propagation in inhomogeneous optical fibers using a variational method.— IEEE Trans. MTT, 1974, 22, N 11, p. 938—945.
434. Агаян Ю. М., Осипов В. Н. Характеристики резких нерегулярностей типа «стык» разных диэлектрических волноводов.— Труды Моск. энергет. ин-та, 1974, вып. 194, с. 66—67.
435. Gardner W. B. Microbending loss in optical fibers.— BSTJ, 1975, 54, N 2, p. 457—465.
436. Neumann E.-G., Rudolf H.-D. Radiation from bends in dielectric rod transmission lines.— IEEE Trans. MTT, 1975, 23, N 1; Losses from corners in dielectric-rod or optical waveguides.— Appl. Phys., 1975, 8, N 2, p. 107—116.
437. Marcuse D. Loss analysis of single-mode fiber splices.— BSTJ, 1977, 56, N 5, p. 703—718.
438. Шевченко В. В. О возбуждении волны в диэлектрической трубке гауссовым пучком.— РиЭ, 1974, 19, № 5, с. 1096—1099.
439. Завьялов А. С., Миронов В. Л. Возбуждение поверхностных волн направлением ответвителем.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1967, 10, № 4, с. 378—383.
440. Tien P. K., Ulrich R. Theory of prism-film coupler and thin-film light guides.— J. Opt. Soc. Amer., 1970, 60, N 10, p. 1325—1337.
441. Ulrich R. Theory of the prism-film coupled by plane wave analysis.— J. Opt. Soc. Amer., 1970, 60, N 10, p. 1337—1350; Optimum excitation of optical surface waves.— J. Opt. Soc. Amer., 1971, 61, N 11.
442. Harris J. H., Shubert R., Polky J. N. Beam coupling to films.— J. Opt. Soc. Amer., 1970, 60, N 8, p. 1007—1016.
443. Кузали А. С., Чекал А. В. Экспериментальное исследование спектроанализатора на тонкопленочном волноводе с призмным выводом излучения.— Квантовая электроника, 1976, 3, № 11, с. 2457—2459.
444. Золотов Е. М., Плехатый В. М. Исследование призмного ввода излучения в тонкопленочный волновод.— Квантовая электроника, 1974, 1, № 4, с. 979—982.
445. Cedeon A. Spectral properties of the  $TE_0$  and  $TM_0$  modes in dielectric thin film waveguides, excited with a prism light coupler.— Opt. acta, 1972, 19, N 9, p. 765—779.
446. Колеров А. Н., Петров Г. Д., Самарский П. А., Чернышов В. Ф. Некоторые результаты исследований волноводных трактов в субмиллиметровом диапазоне волн.— Труды Моск. ин-та радиотехники, электроники и автоматики, 1974, вып. 71, с. 178—186.
447. Голубков В. С., Евстигеев Н. Н. и др. К вопросу о вводе излучения в тонкопленочный волновод.— Труды Моск. ин-та радиотехники, электроники и автоматики, 1975, вып. 82, с. 144—148.
448. Midwinter J. E. Theory of an ultra-broadband optical dielectric waveguide coupler system.— IEEE J. Quant. Electron., 1974, 7, N 7, p. 345—350.
449. Иогансен Л. В., Глебов Ю. В. Теория резонансных слоистых неоднородных электромагнитных систем с полным внутренним отражением.— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 2, с. 256—262.
450. Ulrich R., Martin R. J. Geometrical optics in thin film light guides.— Appl. Opt., 1971, 10, N 9.
451. Лемов Д. А., Половинкин А. Н. Планарный призмный разделитель  $TE$ - и  $TM$ -мод в оптических волноводах.— Письма в ЖТФ, 1977, 3, № 7, с. 295—298.
452. Akylas V., Kaur J., Knasel T. M. Measurement of the longitudinal shift of radiation at total internal reflection by microwave techniques.— Amer. J. Phys., 1976, 44, N 1, p. 77—80.
453. Yajima H. Dielectric thin film branching waveguide.— Trans. Inst. Electron. and Commun. Eng. Jap., 1974, C57, N 9, p. 297—303.
454. Knox R. M. Dielectric waveguide microwave integrated circuits an overview.— IEEE Trans. MTT, 1976, 24, N 11, p. 806—814.
455. Гудзенко А. И., Дерюгин Л. Н. Предельное разрешение призматических дефлекторов с диспергирующими средами.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1975, 18, № 2.
456. Chang D. C., Kuester E. F. Radiation and propagation of a surface-wave mode on a curved open waveguide of arbitrary cross section.— Radio Sci., 1976, 11, N 5.
457. Davarpanah M., Goban C. A., Bell R. J. Excitation efficiency of surface electromagnetic waves using prism and grating coupling techniques.— Wave Electron., 1977, 3, N 1, p. 19—34.
458. Taylor H. F. Losses at corner bends in dielectric waveguides.— Appl. Opt., 1977, 16, N 3, p. 711—716.
459. Пилипенко В. В., Половинков Г. Г., Сологуб В. Г., Шестопалов В. П. Новый метод измерения диэлектрической проницаемости вещества в мм и субмм диапазонах.— ЖТФ, 1969, 39, № 12.
460. Cook R. J., Jones R. G., Rosenberg C. B. Comparison of cavity and open-resonator measurements of permittivity and loss angle at 35 GHz.— IEEE Trans. IM, 1974, N 12.
461. Verplanken M., Van Bladel J. The electric-dipole resonances of ring resonators of very high permittivity.— IEEE Trans. MTT, 1976, 24, N 2.
462. Шестопалов В. П. Дифракционная электроника. Харьков: Изд-во ХГУ, 1976.
463. Попов А. В., Попова М. Н. Дифракционные потери диэлектрического открытого резонатора.— РиЭ, 1971, 16, № 12, с. 2175—2181.
464. Дунаевский Г. Е., Епишин В. А. Анализ потерь в открытом СВЧ-резонаторе с диэлектрической пластиной ограниченных размеров.— В кн.: Материалы 1-й конференции молодых ученых. Секция мат., физ. и радиофиз. Томск: Томский ун-т, 1975, вып. 3, с. 211—214.
465. Петрушин А. А., Третьякова С. С. Диэлектрическая пластина в открытом резонаторе.— Радиотехника: Респ. межвед. темат. науч.-техн. сб. Харьков, изд-во ХГУ, 1975, вып. 34, с. 118—124.
466. Костометов Г. П., Розанов Н. Н. Усиленное спонтанное излучение в дисковых лазерных усилителях.— Квантовая электроника, 1976, 3, № 6, с. 1285—1289.
467. Добромислов В. С., Взятыхшев В. Ф. Диэлектрические резонаторы с волнами пепчущей галереи.— Труды Моск. энергет. ин-та, 1973, вып. 161, с. 78—84.
468. Kraut E. A., Lehman J. W. J. Math. Phys., 1969, 10, N 8.
469. Rawlings A. D. Diffraction by a dielectric wedge.— J. Inst. Math. and Appl., 1977, 19, N 3, p. 261—279.
470. Нефёдов Е. И. Пятизначные таблицы дифракционной  $U(s, p)$  функции Вайнштейна. М.: Наука, 1969. 160 с.
471. Войтович Н. Н., Нефёдов Е. И., Филалковский А. Т. Пятизначные таблицы обобщенной дзета-функции Римана от комплексного аргумента. М.: Наука, 1970. 192 с.
472. Войтович Н. Н., Нефёдов Е. И., Филалковский А. Т. Пятизначные таблицы произвольной обобщенной дзета-функции Римана от комплексного аргумента. М.: ИРЭ АН СССР, 1970. 188 с.
473. Солодухов В. В., Васильев Е. Н. Дифракция плоской электромагнитной волны на диэлектрическом цилиндре с произвольной формой поперечного сечения.— ЖТФ, 1970, 40, № 1, с. 47—53.

474. Крылов В. И. Приближенное вычисление интервалов. М.: Физматгиз, 1959.
475. Захаров Е. В. и др. Вычислительные методы и программирование. М.: Изд-во МГУ, 1969, вып. 13, с. 177.
476. Коллатц Л. Функциональный анализ и вычислительная математика. М.: Мир, 1969. 447 с.
477. Майзельс Е. Н., Торгованов В. А. Измерение характеристик рассеяния радиолокационных целей. М.: Сов. радио, 1972. 232 с.
478. Кравоц Ю. А. Комплексные лучи и комплексные каустики.— Изв. вузов. Радиофизика, 1967, 10, № 9-10; Приближение геометрической оптики для неоднородных сред и примыкающие к нему асимптотические методы.— В кн.: Аналитические методы в теории дифракции и распространения волн. М., 1970, с. 258.
479. Müller C. Über die Beugung elektromagnetischer Schwingungen an endlichen homogenen Körpern.— Math. Ann., 1951, 123, N 4; Grundprobleme der mathematischen Theorie elektromagnetischer Schwingungen. Berlin, 1957.
480. Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Обобщенный метод собственных колебаний. М.: Наука, 1977. 416 с.
481. Попов А. В., Уфимцев П. Я., Харлашкин О. А. Двухсторонние условия на стенках газовой-диэлектрических волноводов.— РИЭ, 1977, 22, № 7, с. 1493—1496.
482. Третьякова С. С., Третьяков О. А., Шестопалов В. П. Дифракция волновых пучков на плоских периодических структурах.— РИЭ, 1972, 17, № 7, с. 1366—1373.
483. Смирнов В. И. Курс высшей математики. М.: Гостехиздат, 1957, т. 4.
484. Chu R. S., Kong J. A., Tamir T. Diffraction of Gaussian beams by a periodically modulated layer.— J. Opt. Soc. Amer., 1977, 67, N 11.
485. Hilbert D. Theorie linearen Integralgleichungen. Leipzig, 1902; Grundzüge einer allgemeinen Theorie der linearen Integralgleichungen. Göttingen Nachrichten, 1910.
486. Курант Р., Гильберт Д. Методы математической физики. М.; Л.: Гостехиздат, 1951, т. 1. 476 с.
487. Гюнтер Н. М. Теория потенциала и ее применение к основным задачам математической физики. М.: Гостехиздат, 1953.
488. Фельд Я. Н. Основные уравнения. Теорема существования и граничные задачи электродинамики. В кн.: I Всесоюзная школа-семинар по дифракции и распространению волн: Тексты лекций. М.; Харьков, 1968.
489. Шевченко В. В. Наглядная классификация волн, направляемых регулярными открытыми волноводами.— РИЭ, 1969, 14, № 10, с. 1768; О поведении волновых чисел волн диэлектрических волноводов за критическим значением (среды с потерями).— Изв. вузов. Радиофизика, 1972, 15, № 2, с. 257—265.
490. Кондратьев И. Г., Миллер М. А. О структуре поля внутри плазменного слоя с нулевой проницаемостью.— Изв. вузов. Радиофизика, 1964, 7, № 1, с. 176—179.
491. Мальцев В. П. Некоторые задачи электродинамики пленочных волноводов: Автореф. канд. дис. М.: 1974. В надзаг.: ИРЭ АН СССР.
492. Литвиненко Л. Н., Просвириин С. Л., Шестопалов В. П. Численный метод для решения линейных уравнений с фредгольмовым оператором: Препринт № 21 ИРЭ АН УССР. Харьков, 1972. 27 с.
493. Численные методы в физике плазмы / Под ред. А. А. Самарского. М.: Наука, 1977. 264 с.
494. Литвиненко Л. Н. Метод последовательных уточнений для решения бесконечных систем линейных алгебраических уравнений.— ДАН СССР, 1972, 203, № 1, с. 64—68.
495. Маненков А. Б. Возбуждение открытых периодических волноводов.— Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 2, с. 263—269.
496. Нефёдов Е. И., Российский И. М. О дополнительном разрежении спектра собственных частот открытого коаксиального цилиндрического резонатора.— Письма в ЖТФ, 1978, 4, № 2, с. 102—104; Открытый коаксиальный резонатор нового типа.— ДАН СССР, 1978, 241, № 4, с. 812—814; Об одной возможности использования дисперсионной аномалии волн  $H_{m1}$  в коаксиальных и биконических волноводах.— РИЭ, 1979, 24, № 2, с. 236—241; Новый класс открытых резонансных структур.— Письма в ЖТФ, 1979, 5, № 5.
497. Нефёдов Е. И. К аналитической теории открытых дисковых резонансных структур с металлическими решетками.— ДАН СССР, 1977, 237, № 3, с. 567—569.
498. Меллин В. Н., Маненков Б. А. Диэлектрические трубы — открытые волноводы с малыми потерями и редким спектром.— В кн.: Электроника больших мощностей. М.: Наука, 1969, вып. 6, с. 161—178.
499. Ильинская О. К. Результаты машинного моделирования calorиметрических нагрузок с диэлектрическими окнами.— В кн.: Машинное проектирование СВЧ-устройств. (Межвузовский сб.) М.: Изд-е МИРЭА, 1977, с. 171—185.
500. Mur G. A differential-equation method for the computation of the electromagnetic scattering by an inhomogeneity in a cylindrical waveguide.— J. Eng. Math., 1978, 12, N 2, p. 157—175.

# ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ

- Автомодельности принцип 86  
 Анизотропия 7, 19  
 Антенна диэлектрическая 21  
 Атенюатор 30, 35  
 Бабине компенсатор 34  
 Бесселя функции цилиндрические 63, 67  
 — — сферические 71  
 Блочных итераций метод 123  
 Борна метод 62, 142, 150, 246  
 Бриллюэна концепция 66, 132, 165—180, 225—244  
 Брюстера угол 27, 29, 52, 54, 111, 118, 194, 202, 211  
 Вайнштейна функция дифракционная 99  
 — — комплексного аргумента 99, 101—103  
 Вайнштейна — Сивова условия граничные 53  
 Вариационный принцип 77, 145  
 Ввод излучения с помощью призмы 36, 39, 224, 240—244  
 — — туннельный 39  
 — — через боковую поверхность 37  
 — — — подложку 39  
 Вероятности интеграл 117, 222  
 Взаимной компенсации паразитных волн принцип 62, 129, 183—186, 246  
 Взаимности теорема 156, 240, 241  
 Винера — Хопфа — Фока метод 18, 22, 44, 60, 81, 90, 91, 95, 96, 100, 212—246  
 Возмущений метод 237  
 Волластона призма 33  
 Волна вытекающая 11, 12, 16, 101, 224—244  
 — — поверхностная 10, 132, 224—244  
 — — волноводная магнитная 130—132, 135—137, 143—146, 149—157, 161, 163, 186  
 — — электрическая 130—132, 136, 183  
 — — — продольномагнитная 130—132  
 — — продольноэлектрическая 130—132  
 — — несобственная 225—244  
 — — собственная 225—244  
 — — комплексная 227—244  
 Волны биений длина 37, 144, 225, 235  
 Волновод диэлектрический 9—16, 62—67, 224—244  
 — — из разделенных слоев 9, 224—244  
 — — квадратного поперечного сечения 10—13  
 — — однослойный 9  
 — — пленочный 37, 38, 71, 240  
 — — трехслойный 224—244  
 — — цилиндрический 62, 67  
 Волновод композиционный 16  
 — — металлический 10, 11, 130—132  
 — — слабошероховатый 24, 129, 142, 215, 227  
 — — сравнения 142  
 Волновода возбуждение в торец 37  
 — — призмой диэлектрической 38, 39, 240—244  
 — — через боковую поверхность 38  
 — — — цель 38  
 Волновода излом (поворот) 28, 35, 41, 183—199  
 Волновой пучок 34, 200—209  
 Волномер поглощающего типа 35  
 Вычет 154  
 Гармоники пространственные  
 Гельмгольца уравнение 49, 133, 187, 207, 212  
 Глана — Томпсона призма 33, 34  
 Гаусса — Эрмита функции 201, 208  
 Граничные условия анизотропные 7, 24, 52  
 — — двухсторонние 7, 93—95, 99, 223, 246  
 — — идеальные 5  
 — — импедансные 7, 52, 53  
 — — резонансного типа 7, 42, 52, 217  
 — — эквивалентные 9  
 Грани идеально отражающие 5  
 — — поглощающие 7  
 — — импедансные 7  
 Граница раздела условия 8  
 Грина формула 139, 149, 152, 165, 171, 172, 193  
 — — функция 90, 149, 171  
 Гринберга — Фока задача 212  
 Дебая потенциалы 49, 67, 68  
 Дефлектор акустооптический 29  
 — — электрооптический 19  
 Диафрагма диэлектрическая 20  
 — — металлическая 20  
 дисперсия призмы 41, 42  
 — — уравнение 42  
 — — угловая 32  
 Диффузия поперечная 113, 115, 118, 197  
 — — зона  
 Добе призма 33  
 Добротность омическая 68  
 — — радиационная 68  
 Жордана метод 175  
 Зеркало диэлектрическое 29  
 — — многослойное 29  
 Зоммерфельда задача 5  
 — — обобщенная 7  
 — — излучения принцип (условия) 44, 61, 95, 207, 212  
 — — интеграла метод 16, 48\*  
 53—59  
 — — трансформанта 54  
 Излучения условия 77  
 Излучение собственное 26  
 — — плазмы 26  
 — — из открытого конца волновода 99—103  
 Импеданс индуктивный 212  
 Импеданса скачок 211—216  
 Индекс азимутальный 64  
 — — радиальный 64  
 Интегральное уравнение 60—62, 99, 120, 171, 179, 180, 213, 246  
 Интегральная схема 14, 216  
 — — диэлектрическая 14—16  
 — — твердотельная 15  
 Интерференция 144  
 Квазиоптика 62, 150, 183, 200, 206  
 Клин (см. призма)  
 Клиновидная область 5, 16—47, 53  
 Ключевые задачи 5, 8  
 — — структуры 5, 18  
 Колебания магнитные 69  
 — — связанные 75, 216—224  
 — — шепчущей галереи 24, 43, 63  
 — — электрические 68  
 Корню призма 33  
 Корректор комбинированный 29  
 — — фазовый 29, 62, 150, 206, 246  
 Коши теорема 154  
 Лежандра полиномы 68  
 — — функции присоединенные 67, 68  
 Линза волноводная ускоряющая 29  
 Линза диэлектрическая в изломе волновода 28  
 — — — лучевода 33, 35  
 Линия диафрагменная 20, 21, 34  
 — — — поверхностной волны 18, 183, 216  
 — — — со скачком импеданса 211—216  
 — — — полосковая несимметричная (микрорешетчатый волновод) 9, 10, 14, 18, 31  
 Лиувилля теорема 98  
 Лучевод 11, 203, 211  
 Максвелла уравнения 3, 6, 23, 24, 65, 77, 78, 89  
 Малюк инца метод 53—59  
 — — функция 17, 53, 57, 58  
 — — функциональные уравнения 53—55  
 — — эффект 206  
 — — обобщенный 206—208  
 Матрица системы уравнений ленточная 123  
 Модулятор интерференционный многолучевой (Фабри — Перо) 34  
 Модуляция (сканирование) излучения 34  
 Моментов метод 156, 163  
 Мощности делитель 29  
 Нагрузка волноводная 26, 132, 148, 164  
 — — калориметрическая 26, 132, 148  
 — — — пленочная 27, 31  
 — — с диэлектрическим окном 27, 162—183  
 Неймана ряд 48, 85, 185  
 Неоднородность скачкообразная 18, 132—141  
 Никола призмы 34  
 Ньютона метод 229  
 Остекатель антенный 21  
 Оператор редуцированный 81  
 — — матричный бесконечномерный 83  
 Оператора квазиполого обращения метод 80—85, 150—162  
 Отражение гауссовых и эрмитовых пучков 200—211  
 — — от участка волновода расширяющегося полное 149  
 — — — сужающегося полное 149  
 Отражатель уголкового 18, 19  
 Оптика геометрическая 41, 48, 74, 197, 198, 203, 245  
 — — интегральная 9, 14, 41, 224  
 — — — планарная 14, 41  
 — — — физическая 124  
 Оптики геометрической метод 57, 105, 183, 184, 186  
 — — физической метод 8, 109—112, 123  
 Ответитель направленный 30, 225  
 — — безщелевой 38  
 — — части местности 35  
 Параболическое уравнение метод 62, 113—118, 197, 221  
 Пента-призма 33  
 Перевала метод 57, 92, 108  
 Переключатель света 36—39, 224  
 Переноса уравнение 49, 50  
 Переход электрически сглаженный 145, 147  
 Пленка реактивная 40, 41  
 Покрытие диэлектрическое 24  
 — — — многослойное 25  
 Поперечное сечение скачок 20  
 Поперечного сечения метод 24, 129, 142—148, 158, 163, 182, 188, 215, 227  
 Порро призма 33  
 Последовательных дифракций метод 48  
 — — приближенный метод 215  
 — — уточнений метод 82  
 Потери магнитные 27  
 Преломления закон 51, 115  
 Призма диэлектрическая 16, 26, 28, 86—89  
 — — — в дисковом открытом резонаторе 42, 216—219  
 — — — возбудитель линии поверхностной волны 36, 211—216  
 — — — в закрытом волноводе 26—31  
 — — — в изломе плоского волновода 26—31, 183—199  
 — — — — «оптимальная» 195—199  
 — — — — «просветленная» 198, 199  
 — — — в изломе квазиоптической линии 32—36, 209—211  
 — — — в ленточном открытом резонаторе 42  
 — — — в свободном пространстве 32  
 — — — с магнитным поглощением 27  
 — — — с металлизированными гранями 42, 221, 222  
 — — — с многослойным диэлектрическим покрытием 118—128  
 Призма ромбовидная 33  
 — — пленочная 40, 41  
 Полулюбоность диэлектрическая 20, 37, 89  
 Поток обратный 28  
 — — попутный 28, 191  
 Пробой электрический 27  
 Продольных сечений метод 129, 186—195  
 Проницаемость диэлектрическая  
 — — эквивалентная 146  
 Разделения переменных метод 62—75, 225  
 — — — приближенный (Хартри — Фока) 72—75  
 Разделитель призмный 42

Распределение поля в ди- электрической пластине 139 —141	76—89, 224—244 — — в граничных условиях 79, 80	-- знаменатель 48 — уравнения интегральные 61, 80, 88, 104, 120, 173
Рассеяния диаграмма 212 — матрица 37	— — диэлектрическая про- ницаемость 77—79	Френеля формулы 35, 48—53, 115, 132, 159, 167, 170, 196, 200, 203, 213
Редукции метод 153	— — фаза элемента матрицы рассеяния 80	— — обобщенные 52, 53
Резонатор — бегущей волны 42	Спектра разрежение 220	Функции собственные вол- новода закрытого 24, 30
— диэлектрический 18, 31	Среда скачкообразное изме- нение свойств 132—141	— — — открытого 213
— — открытый 18, 31	Сфера диэлектрическая 67	Фурье интеграла обращение 98
— — открытый 42, 43	— — многослойная 69—73	Фурье преобразование 35, 91, 95, 97, 100, 200, 201, 206
— — сферический многослой- ный 69—73	— — черная 72, 73	— — обратное 95, 152, 207
— ферритовый намагничен- ный 24	Тейлора ряд 35	Фуко призма 34
Релея — Борна прибли- жение 185	Токи поверхностные 104, 118	
Решетка дифракционная 36, 209	— поляризации 89	Ханкеля функция 64, 67 104
— диэлектрическая 36, 208	Трансформатор волн 30	Хартри — Фока метод 72
— металлическая 24, 29, 207, 222	Уравнение волновое 62	Центра тяжести волнового пучка движение 201
Римана — Гильберта [зада- ча 81	— дисперсионное (характе- ристическое) 69—75, 130	Частота критическая 11, 12
Римана дзета-функция обоб- щенная комплексного аргу- мента 99—102	— интегральное 60—62, 99, 120, 171, 172, 179, 180, 213, 246	— — собственная 224—230
Рошона призма 33	— операторное метод 103	Частот расщепление 220
Световод 9, 18, 21, 41, 240—244	Усилитель дисковый 43	Щукина — Леонтовича гра- ничное условие 7, 52, 53, 94, 212
Свертка функций теорема 91, 208	Условие на ребре 3, 43—47	Эйконала уравнение 40, 49, 50
Сечение поглощения попе- речное 71—73	Фабри — Перо интерферо- метр 34	Эйри функция 68
Синхронизм фазовый 39	Факторизация функции 18, 44, 60, 81, 90, 95, 100, 212	Энергии ввод (вывод) 224
Слой диэлектрический 14—16, 224—244	Фазовой коррекции метод 62, 149, 150, 206, 209, 246	Эфроса — Данилевского преобразование 117
Собственное значение	Фазовращатель 30	Эффект диэлектрический 131
	Фильтр 29, 209	Эрмита полиномы 201—204
	Фредгольма альтернатива 84	

## ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие . . . . .	3
<b>ВВЕДЕНИЕ</b>	
§ 1. Обзор физических задач, рассматриваемых в книге. Применение диэлектрических структур в радиофизических устройствах . . .	5
§ 2. Постановка задачи дифракции волны на однородном диэлектриче- ском клине. Условие на ребре . . . . .	43

### Глава первая

#### МЕТОДЫ МАТЕМАТИЧЕСКОЙ ФИЗИКИ В ЗАДАЧАХ ДИФРАКЦИИ НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ

§ 1.1 Геометрическая оптика. Формулы Френеля . . . . .	48
§ 1.2. Метод интеграла Зоммерфельда и его обобщение Г. Д. Малю- жинцем . . . . .	53
§ 1.3. Метод интегрального уравнения . . . . .	60
§ 1.4. Метод разделения переменных. Диэлектрический стержень . .	62
§ 1.5. Обобщенный метод собственных колебаний . . . . .	76
§ 1.6. Метод квазиполного обращения оператора . . . . .	80

### Глава вторая

#### ОДНОРОДНАЯ ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИЗМА (КЛИН) В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

§ 2.1. Полное геометрикооптическое решение задачи о неограниченном однородном диэлектрическом клине . . . . .	86
§ 2.2. Дифракция плоской волны на прозрачной полуплоскости . . .	89
§ 2.3. Излучение электромагнитных волн из открытого конца плоско- го волновода с прозрачными стенками . . . . .	99
§ 2.4. Дифракция электромагнитных волн на диэлектрическом клине с малым поглощением . . . . .	103
§ 2.5. Дифракция электромагнитных волн на клине с многослойным поглощающим покрытием . . . . .	118

### Глава третья

#### ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИЗМА В ЗАКРЫТЫХ ВОЛНОВЕДУЩИХ СТРУКТУРАХ

§ 3.1. Регулярные волноводы с кусочно-однородным в поперечном на- правлении диэлектрическим заполнением . . . . .	130
§ 3.2. Отражение волноводных волн от поперечных границ раздела диэлектрических сред . . . . .	132
§ 3.3. Пологая диэлектрическая вставка в прямоугольном волноводе	142
§ 3.4. Перекос границы раздела двух диэлектриков в волноводе . . .	148
§ 3.5. Дифракция на наклонной границе раздела двух диэлектриче- ских сред в прямоугольном волноводе . . . . .	150
§ 3.6. Калориметрические нагрузки с наклонными диэлектрическими окнами . . . . .	162
§ 3.7. Диэлектрическая призма в изломе плоского широкого волново- да . . . . .	183

*Глава четвертая*  
**ДИЭЛЕКТРИЧЕСКАЯ ПРИЗМА**  
**В ОТКРЫТЫХ РЕЗОНАТОРАХ И ОТКРЫТЫХ ВОЛНОВОДАХ**

§ 4.1. Падение квазиоптического гауссова пучка на плоскую границу раздела двух однородных изотропных сред . . . . .	200
§ 4.2. Прохождение квазиоптического пучка через плоский край . . . . .	206
§ 4.3. Диэлектрическая призма в изломе квазиоптической линии . . . . .	209
§ 4.4. Диэлектрическая призма в открытом резонаторе. Связанные колебания . . . . .	126
§ 4.5. Волны в разделенных слоях. Переключатель света. Призма в качестве возбудителя линии поверхностной волны . . . . .	224
ЛИТЕРАТУРА . . . . .	246
ПРЕДМЕТНЫЙ УКАЗАТЕЛЬ . . . . .	268

ЕВГЕНИЙ ИВАНОВИЧ  
НЕФЕДОВ

**ДИФРАКЦИЯ**  
**ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН**  
**НА ДИЭЛЕКТРИЧЕСКИХ СТРУКТУРАХ**

Утверждено к печати ордена Трудового Красного Знамени  
Институтом радиотехники и электроники Академии наук СССР

Редактор издательства С. С. Матвеев  
Художник В. Г. Виноградъв. Художественный редактор Т. П. Поленова  
Технические редакторы Т. А. Прусакова, Ю. В. Серебрякова  
Корректоры Н. И. Казарина, И. А. Талалай

ИБ № 16111

Сдано в набор 11.01.1979 г. Подписано к печати 22.06.1979 г. Т-11709. Формат 60x90<sup>1/16</sup>  
Бумага типографская № 1 Гарнитура обыкновенная. Печать высокая. Усл. печ. л. 17  
Уч.-изд. л. 18,9 Тираж 1800 экз. Тил. зак. 1476 Цена 2 р. 90 к.

Издательство «Наука» 117864 ГСП-7, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 90  
2-я типография издательства «Наука» 121099, Москва, Г-99, Шубинский пер., 10