

АКАДЕМИЯ НАУК СССР
ОРДЕНА ТРУДОВОГО КРАСНОГО ЗНАМЕНИ
ИНСТИТУТ РАДИОТЕХНИКИ И ЭЛЕКТРОНИКИ

Е. И. НЕФЕДОВ, А. Н. СИВОВ

ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР



ИЗДАТЕЛЬСТВО «НАУКА»
МОСКВА 1977

Нефедов Е. И., Сивов А. Н. *Электродинамика периодических структур*. М., «Наука», 1977, 209 с.

Монография посвящена изложению методов получения и применения двух классов приближенных граничных условий, позволяющих облегчить решение задач дифракции электромагнитных волн на периодических структурах.

Книга рассчитана на научных сотрудников, инженеров и студентов соответствующих специальностей.

Табл. 2. Илл. 105. Библиогр. 218 назв.

Ответственный редактор
доктор физ.-матем. наук,
профессор Б. З. КАЦЕНЕЛЕНБАУМ

Евгений Иванович Нефедов, Алексей Николаевич Сивов
ЭЛЕКТРОДИНАМИКА ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Утверждено к печати ордена Трудового Красного Знамени
Институтом радиотехники и электроники Академии наук СССР

Редактор С. С. Матвеев. Художник В. В. Горячев
Художественный редактор Т. П. Поленова
Технический редактор П. С. Нашина
Корректоры Н. И. Кодыкова, Е. И. Корневская, Г. Н. Лац

Сдано в набор 18/IV-1977 г. Подписано к печати 18/VIII-1977 г.
Формат 60×90^{1/16}. Бумага типографская № 1
Усл. печ. л. 13. Уч.-изд. л. 15. Тираж 2450. Т-08696. Тип. зак. 2392
Цена 1 р. 50 к.

Издательство «Наука», 117485, Москва, В-485, Профсоюзная ул., 94а
2-я типография издательства «Наука», 121099, Москва, Г-99 Шубинский пер. 10

Грандиозное и в то же время изящное здание современной электродинамики совершенством своих форм, методов и практических результатов обязано не только крепкому фундаменту, которым является *система уравнений Максвелла*, но и ряду *вспомогательных конструкций*, позволивших, опираясь на *физический смысл и интуицию*, получить фундаментальные результаты с помощью разумных упрощений исходных постановок реальных задач. Многие задачи математической теории дифракции, распространения электромагнитных и звуковых волн и волн другой природы (упругие, пластичные и пр.) получили свое решение благодаря введению *эквивалентных граничных условий*, приближенно описывающих действие реального препятствия на распространение волны. Ярким примером таких граничных условий явились широко известные *импедансные однородные граничные условия Шукина — Леонтовича*. Их введение и использование позволило построить эффективные методы и алгоритмы решения большого числа задач теории дифракции.

В предлагаемой вниманию читателя книге, носящей в своей основе характер монографии*, рассмотрен ряд дифракционных задач, эффективные решения которых удалось построить на основе двух классов граничных условий: граничных условий сопряжения, которые получили в литературе название *граничных условий Вайнштейна — Сивова*, и *импедансных анизотропных граничных условий резонансного типа*. Разумеется, содержащиеся в книге примеры никоим образом не исчерпывают ни всех возможностей, ни всех задач, которые связаны с рассматриваемым кругом вопросов. Тем не менее, мы надеемся, что нам удалось осветить основные результаты развиваемого подхода и специалисты различных профилей найдут здесь полезные сведения, касающиеся постановки задач, методов их решения и полученных результатов.

Приступая к написанию этой книги, мы довольно долго обсуждали сакраментальный вопрос: «А зачем она нужна?». Потом выкристаллизовалась основная мысль: показать на ряде примеров современной электродинамики коротких волн эффективность применения двух классов эквивалентных граничных условий: условий Вайнштейна — Сивова и импедансных условий резонансного типа. И хотя нужды в такой «агитации», на первый взгляд, нет, ибо гранич-

* Здесь отражены результаты, полученные авторами в течение ряда лет в вычислительном отделе и отделе электродинамики ИРЭ АН СССР.

ные условия типа условий Щукина — Леонтовича, анизотропные импедансные граничные условия и ряд других широко применяются на практике, тем не менее содалась до некоторой степени парадоксальная ситуация. Суть ее коротко в следующем. По мере развития средств и возможностей вычислительной техники иногда складывается мнение, что, заложив в ЭВМ правильные уравнения, мы получим верный ответ. Но, во-первых, возможности ЭВМ, и даже современных, далеко не беспредельны, а во-вторых, вся ли информация о явлении нам нужна? Не утонем ли мы в море сведений, которые способна обрушить на нас современная техника ЭВМ?

Однозначного ответа, по-видимому, нет. На некотором этапе познания можно пожертвовать деталями, уделив внимание главному — физическому смыслу задачи. Если принять такую точку зрения, то применение эквивалентных импедансных граничных условий приобретает твердый фундамент.

Замена исследуемой структуры ее моделью с заменой реальных условий на сложной границе раздела на «эквивалентные» условия на более простой границе существенно упрощают задачу. При этом, оказывается, можно использовать, если принять шахматную терминологию, «домашнюю заготовку», будь то коэффициенты l_j (для частопериодических структур), либо коэффициенты β (для структур резонансных). Применение импедансного подхода позволяет «избавиться от частностей» (например, точное знание поля вблизи частой решетки), но следить за общим «интегральным» эффектом, заключающим в себе преобладающую часть информации о физической стороне задачи.

Нам представляется, что очень точно и полно общую ситуацию в математической физике оценил В. А. Фок: «Всякая физическая теория имеет своей целью получение такой картины явления, которая воспроизводила бы количественным и качественным образом все существенные его черты. Эта цель может считаться достигнутой только в том случае, когда полученное решение имеет достаточно простой вид. Если же аналитическая форма строгого решения отличается сложностью, то его можно рассматривать только как первый шаг в действительном решении задачи (курсив наш — Е. Н., А. С.); следующий шаг должен состоять в выводе формул, пригодных для численных расчетов» [1].

Удалось ли нам последовать этому совету — судить читателю.

Авторы считают своим приятным долгом выразить благодарность Л. А. Вайнштейну, А. Г. Свешникову, Я. Н. Фельду и В. П. Шестопалову, с которыми в разное время обсуждались рассматриваемые здесь вопросы. Мы также признательны нашему учителю Б. З. Каценеленбауму, взявшему на себя тяжкий труд по редактированию книги и написанию послесловия.

Авторы

ВВЕДЕНИЕ

1. *Периодические структуры* находят многообразные применения в науке и технике [1—6]. Было бы просто невозможно перечислить все те многообразные области человеческого знания, где основу явлений и процессов составляют периодические структуры. В данной книге будут рассмотрены свойства периодических структур, нашедших применение в основном в *радиофизике и акустике*. Прежде всего, это задачи распространения радиоволн сверхвысокочастотного (СВЧ) диапазона в волноведущих системах с периодической структурой стенок, например, широких волноводах круглого поперечного сечения для *магистральных широкополосных линий связи* [7—9]. Применяются периодические структуры в *электронике СВЧ*, где они выполняют роль *замедляющих систем* в приборах с длительным взаимодействием электронного потока со структурой (лампы бегущей и обратной волны и многое другое; [10—15]). Процессы прохождения электронного потока у дифракционных структур стали основой для *дифракционной электроники*, приборы которой находят многообразное использование в исследовании и освоении диапазона *миллиметровых и субмиллиметровых волн* [16—24]. Одним из интересных научных направлений является проблема *коллективного линейного ускорения* электронов и ионов, решаемая с помощью линейных ускорителей. Основу конструкции и принципа действия линейного ускорителя составляют диафрагмированные волноводы [25—27], по существу, волноведущие системы с периодической структурой стенок.

Периодические структуры широко используются в *антенно-волноводной технике*, где они выполняют функции периодических излучающих антенн, в частности рупорных антенн с гофрированными стенками, антенн бегущей волны, линий передачи на поверхностных волнах, направленных ответвителей, отражателей, преобразователей поляризации и многих др. [28—44]. Дифракционные решетки являются основными элементами *оптических и квазиоптических интерферометров и волномеров*, применяющихся в оптике, измерительной технике, голографии, ядерной физике и проч. [45—48].

Бурное развитие техники и теории, а также разнообразные применения *квантовых генераторов* привели к целому классу задач по использованию периодических структур как элементов самого квантового генератора (например, одно из его зеркал выполняется из металлической решетки), так и разнообразных *элементов оптических и квазиоптических трактов* (фазовые корректоры из частот-

периодических решеток, диафрагменная линия, искусственные диэлектрики, системы дифракционно связанных открытых резонаторов и др.) [44, 49—87]. Дифракционные решетки выполняют также роль возбудителей *волоконно-оптических линий связи*.

В последние годы большой интерес у ученых и инженеров вызывает *микроэлектроника*. В целом ряде узлов микроэлектронных приборов используются периодические структуры (полосовые и решетчатые фильтры, направленные ответвители, сосредоточенные элементы и т. п.) в качестве основных элементов [88—93].

Даже краткое перечисление говорит о большом многообразии областей науки и техники, где находят свое применение периодические структуры. Ясно также, что *необходим по возможности общий математический аппарат*, который бы позволил рассмотреть существенные черты дифракции волн разной природы на периодических препятствиях. Таким *общим аппаратом является*, как известно, *разложение полей вблизи периодических структур в ряды Фурье и удовлетворение граничным условиям*.

2. Свойства периодической структуры существенно зависят от соотношения между периодом структуры p и длиной волны λ . Обычно выделяют *длинноволновую область*, когда на длине волны укладывается несколько или много периодов структуры, т. е. $p/\lambda \ll 1$, *коротковолновую область*, когда на периоде структуры укладывается много волн, т. е. $p/\lambda \gg 1$, и, наконец, *резонансную область*, когда период структуры сравним с длиной волны, т. е. $p/\lambda \sim 1$. Разумеется, было бы *желательно иметь такую общую теорию*, которая *единым образом описывала бы явления во всех трех перечисленных ситуациях* и давала бы в руки исследователя *единый и достаточно простой математический аппарат исследования, пригодный при любом соотношении периода структуры и длины волны*. К настоящему времени известны два *подхода к строгому решению задач* подобного рода. Это *метод Винера — Хопфа — Фока* [1, 94—96] и *метод задачи Римана — Гильберта* [97—99]. Обладая достаточной общностью, эти подходы для своего применения требуют весьма высокой математической квалификации исследователя и довольно сложных вычислений, которые обычно невозможны без использования современных ЭВМ.

Вместе с тем для *практики* часто вполне *достаточно исследования предельных случаев*, если при этом получается *обозримый и реализуемый аппарат* в виде *простых аналитических выражений, удобных аппроксимаций* и т. п. Одним из таких подходов является использование *приближенных граничных условий*, обладающих в общем случае анизотропными свойствами [44]. Если E_τ и H_τ суть тангенциальные компоненты полного поля на некоторой (реальной или воображаемой) поверхности S раздела двух сред (или областей), то можно ввести понятие *импеданса поверхности S* как отношения E_τ и H_τ

$$E_\tau = \check{W} H_\tau. \quad (1)$$

Здесь величина \check{W} в общем случае представляет собою некоторый интегро-дифференциальный оператор (см., например, [44, с. 163]). Для анизотропной границы \check{W} есть тензор, а для границы из хорошо проводящего материала $\check{W} \equiv W = \text{const}$, и граничные условия (1) переходят в хорошо известные *граничные условия Шукина — Леонтовича*. Если поверхность тела описывается координатами x и y , то условия (1) записываются в привычном виде

$$E_x = w H_y, \quad E_y = -w H_x, \quad (2)$$

где $w = \text{const}$.

Использование граничных условий (2) позволило получить ряд важнейших фундаментальных результатов математической теории дифракции. Начиная с работ Г. А. Гринберга и В. А. Фока (строгое решение задачи о береговой рефракции радиоволн, 1948 г; [1]) и Г. Д. Малюжинца (о дифракции волны на клине с импедансными гранями, 1948; [100—102]), граничные условия Шукина — Леонтовича прочно вошли в арсенал теории дифракции и распространения волн различной природы. Обзор большого числа задач, эффективное решение которых стало возможным благодаря введению импедансных граничных условий (2), содержится в прекрасной работе М. А. Миллера и В. И. Таланова (1964, [103]).

Введение импедансных граничных условий (2) на границе раздела двух сред 1 и 2 (рис. 1) позволяет ограничиться рассмотрением поля в области 1, где расположен источник. При этом поле на S должно удовлетворять условиям (2) и процессами, происходящими в среде 1, можно не интересоваться. Тем самым достигается существенное упрощение исходной задачи дифракции.

Для «непрозрачной» периодической поверхности S (рис. 2) также можно ввести эквивалентные *импедансные граничные условия*, но они уже будут носить *анизотропный характер* и описываться соотношениями (2) (см., [44, с. 31, а также § 3]). Такие поверхности иногда называют *гофрированными*. Среда 2 может обладать конечной (но большой) проводимостью σ , либо ее проводимость равна бесконечности. Радиусы кривизны R поверхности S на рис. 1 и средний радиус $R_{\text{ср}}$ кривизны поверхности S на рис. 2 должны быть велики по сравнению с длиной волны: $R/\lambda \sim R_{\text{ср}}/\lambda \gg 1$.

Иная ситуация возникает, когда поверхность S представляет собою «прозрачную» периодическую структуру, составленную, например, из параллельных цилиндрических проводников (рис. 3). В этом случае поле от источника *, расположенного в области 1, проникает в область 2, которая может иметь электромагнитные параметры $\epsilon_2, \mu_2, \sigma_2$, отличающиеся от параметров области 1. В общем случае задача нахождения полей в областях 1 и 2 представляет собой сложную краевую задачу математической теории дифракции, и достижение результата во многом определяется формой границы S и отношением длины волны к периоду структуры. На рис. 4 приведены примеры профилей некоторых периодических структур,

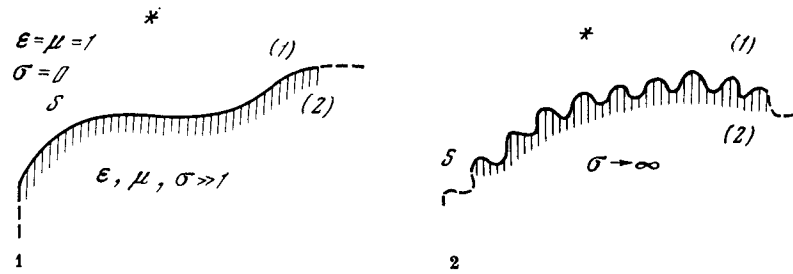


Рис. 1. Схематическое изображение границы S раздела сред 1 и 2; среда 2 обладает высокой проводимостью. Значком * обозначено расположение источника электромагнитных колебаний.

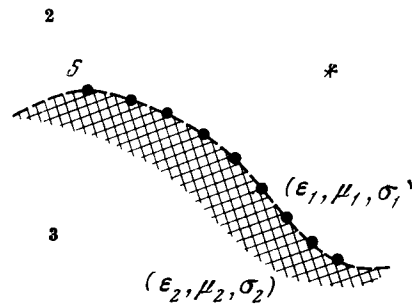


Рис. 2. Непрозрачная периодическая поверхность.

Рис. 3. Прозрачная периодическая структура из параллельных круговых (металлических или диэлектрических) цилиндров расположена на границе S раздела сред 1 и 2 с разными электродинамическими параметрами.

находящих практическое применение. Из приведенных примеров видно, что большое разнообразие геометрических форм ячеек структур требует разработки некоего универсального подхода к исследованию свойств периодических структур.

Сложность задач с прозрачными решетками состоит в том, что поля по обе стороны от структуры связаны. Если бы удалось построить простую модель такой связи, учитывающую форму профиля структуры, то задача была бы существенно упрощена.

3. Такие попытки неоднократно предпринимались и не только в электродинамике [104—106]. Наиболее полно исследована *длинноволновая ситуация*, когда $p/\lambda \ll 1$. Одной из первых моделей была *анизотропно проводящая поверхность* (см., например, [107]), обладающая идеальной проводимостью в одном из направлений и нулевой — в перпендикулярном к этому направлению. Даже такая весьма грубая модель позволила определить основные черты электромагнитного процесса (например, в теории лампы бегущей волны найти сопротивление связи и другие характеристики взаимодействия электронного потока с замедляющей структурой [108, 10, 14]); при анализе свойств различных волн в цилиндрическом волноводе с гофрированными стенками [109—111]).

Радикальным средством для снижения потерь и устранения попутного потока в магистральных линиях связи является применение волноводов, обладающих фильтрующими и расфазировочными свойствами. Поэтому в проблеме дальней связи на волне H_{01} в волноводе круглого поперечного сечения важен вопрос о

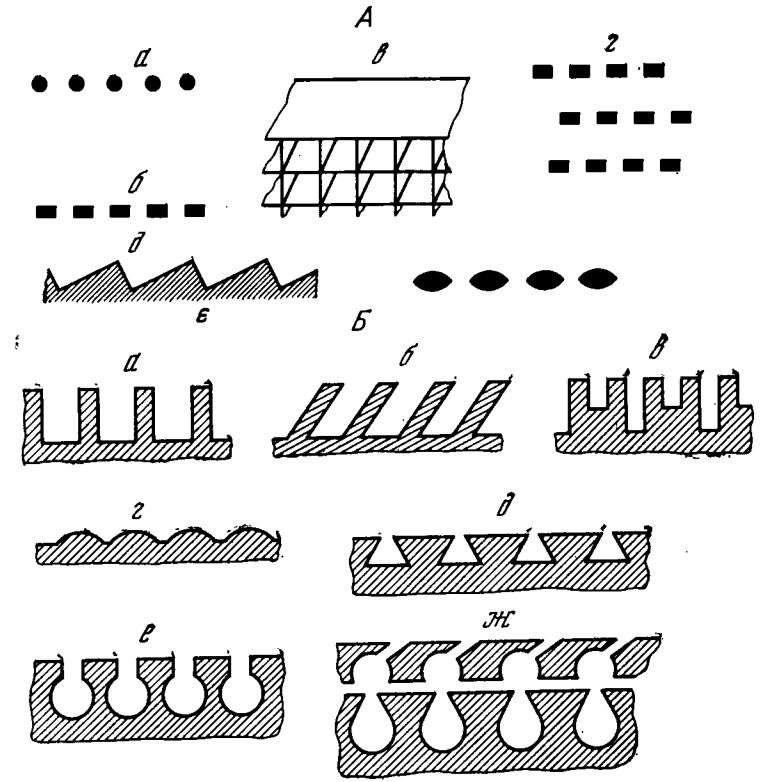


Рис. 4. Простейшие профили периодических структур.

применении волноводов со специальной периодической структурой стенок, так называемых *спиральных* или *кольцевых волноводов*. Спиральным волноводом называется волновод круглого сечения, образованный металлическим проводом, намотанным по винтовой линии с малым углом подъема. Следует заметить, что, строго говоря, спиралью называется плоская кривая (например: логарифмическая спираль, спираль Архимеда и т. д.). Тем не менее в электродинамике термин «спиральный волновод» является установившимся и общепризнанным. Кольцевой волновод образуется из ряда одинаковых металлических колец, имеющих общую ось и отделенных друг от друга узкими щелями. Очевидно, что подобная структура токонесущей поверхности стенок обладает анизотропией: ток может распространяться только по направлению витков. Поскольку это направление почти точно (в спиральном волноводе) и точно (в кольцевом волноводе) совпадает с направлением токов волны H_{01} в обычном цельнометаллическом волноводе, то естественно, что условия распространения этой волны в подобных периодических волноводах будут почти такими же, как и в гладком волново-

де. Все остальные волны, точнее все волны, не принадлежащие к семейству H_{0n} ($n = 1, 2, 3 \dots$), обладают в цельнометаллическом волноводе продольными токами. В спиральном и кольцевом волноводах такие токи протекать не могут, поэтому эти волны сильно возмущены по сравнению с волнами в цельнометаллическом. Помещая за спиралью поглощающий диэлектрик и заключая всю систему в металлический кожух, можно обеспечить необходимые фильтрующие и расфазированные свойства волновода.

Задачей теории спиральных волноводов является установление связи между электродинамическими характеристиками различных типов волн и геометрическими и электрическими параметрами волновода и прежде всего определение зависимости постоянных распространения различных волн спирального волновода от периода структуры, угла подъема витков, формы и относительных размеров проводников, толщины и электрических параметров оболочки.

При анализе условий распространения электромагнитных волн в часто периодических волноводах (период мал по сравнению с длиной волны) весьма эффективным оказался *метод эквивалентных граничных условий*, при котором точные граничные условия (равенство нулю тангенциального электрического поля на металле) на сложной периодической поверхности заменяются некими эквивалентными условиями (вообще говоря, достаточно сложными), выполняющимися на простой поверхности.

Эквивалентность заключается в том, что, начиная с некоторого небольшого расстояния от реальной структуры, истинные поля и поля, полученные с помощью эквивалентных граничных условий, совпадают с определенной степенью точности, соответствующей применяемому виду эквивалентных условий.

Приближенный анализ (на основе эквивалентных граничных условий) спирального волновода с диэлектрической оболочкой дан в работе [112]. Авторы используют для анализа эквивалентные условия анизотропной проводимости (*граничные условия Владимирского*; см., например, [10—13]). Заменяя реальный спиральный волновод анизотропной цилиндрической поверхностью, окружающей поглощающим диэлектриком, и решая соответствующую краевую задачу, они находят (численным способом) постоянные распространения для волн в такой системе. Подробное исследование спирального волновода с диэлектрической оболочкой, заключенного в металлический экран, также основанное на применении условий анизотропной поверхности, проведено в работе [113].

Условия анизотропнопроводящей поверхности являются наиболее простыми граничными условиями, моделирующими спиральную или же кольцевую структуру стенок волновода. Они не учитывают периода структуры, густоты намотки и формы проводников. Поэтому замена реальной решетки однородной поверхностью с анизотропной проводимостью является лишь нулевым приближением и справедлива, как оказывается, для решеток с весьма малым периодом при определенном соотношении между периодом и попереч-

ными размерами проводника (подробнее о границах применимости условий анизотропной проводимости см. на с. 38).

Во многих практически важных случаях это приближение оказывается недостаточным. Действительно, рассматривая с помощью граничных условий Владимирского падение E -поляризованной плоской волны (вектор \mathbf{E} параллелен проводникам) на плоскую решетку, мы получаем коэффициент отражения $R = 1$ и коэффициент прохождения $T = 0$. В действительности определенная часть энергии, а при неограниченном уменьшении поперечных размеров проводников даже вся энергия проходит сквозь решетку. В связи с этим подход к расчету распространения волн H_{0n} в кольцевом волноводе с помощью модели анизотропного цилиндра не дает возможности, например, учесть эффект просачивания поля сквозь щели, поскольку условия распространения H_{0n} -волн в такой модели ничем не отличаются от условий распространения в сплошной гладкой металлической трубе. С другой стороны, для H -поляризованной волны (вектор магнитного поля параллелен проводникам) имеем $R = 0$, $T = 1$, хотя на самом деле часть энергии, а при неограниченном сближении проводников вся энергия отражается от решетки. В применении к волноводам это означает, что в практически важном случае спирального или кольцевого волновода с близко расположенными проводниками условия анизотропной поверхности приведут к заведомо неправильному результату при анализе паразитных волн. В частности, если кольцевой волновод уподобен анизотропному цилиндру, то легко видеть, что он совершенно утрачивает способность поддерживать волны типа E_{0n} . В подобных случаях необходимы более точные условия.

Уточненные условия могут быть получены *методом усреднения полей* по периоду структуры. Впервые метод усреднения полей для этой цели был дан в работах М. И. Конторовича [114] применительно к двоякопериодическим сеткам. Для дифракции гидродинамических и звуковых волн на жесткой решетке *метод* получения *средних краевых условий* был в 1936 г. развит Г. Д. Малюжиным (см., например, [115]). В коэффициенты полученных им краевых условий входят выражения для присоединенных объемов, вычисляемых путем решения задач об обтекании решетки заданного профиля потоком идеальной несжимаемой жидкости. Существенные уточнения граничных условий для решеток из параллельных проводников с помощью метода усреднения были получены Б. Я. Мойжесом и Н. Н. Смирновым [7—10]. Б. Я. Мойжесом обычно применяется условие равенства нулю электрического поля в направлении проводников. Уточнение условия непрерывности магнитного поля вдоль проводников дано Н. Н. Смирновым с помощью принципа двойственности в формулировке Я. Н. Фельда. В результате этого стало возможным оценивать влияние таких параметров, как период и ширина щелей.

Однако в указанных работах реальная периодическая структура моделировалась либо решеткой из бесконечно тонких лент в сво-

бодном пространстве, либо решеткой из очень тонких по сравнению с периодом круглых проводников. Вполне понятно, что подобная идеализация также не позволяет с достаточной строгостью подойти к расчету реального волновода. Физически ясно, что форма и относительные размеры реальных проводников, образующих волновод, могут существенно влиять на его электродинамические характеристики. Влияние этих факторов на затухание волн H_{0n} в спиральном и кольцевом волноводах с бесконечной диэлектрической оболочкой учтено в работе Б. З. Каценеленбаума [118]. (Эта задача соответствует задаче о падении на решетку E -поляризованной волны.) Полученные в [118] из решения электростатической задачи поля вблизи периодической поверхности позволили проанализировать экранирующее действие проводников различной формы поперечного сечения и найти потери в них, обусловленные неидеальности металла. Соответствующие численные расчеты приведены в работе [119].

В 1957 г. Л. А. Вайнштейном были получены граничные условия для решетки в свободном пространстве. Предполагалось, что решетка имеет малый период и образована из параллельных проводников круглого профиля с конечными размерами. Эти граничные условия не допускали существенного для нашей задачи предельного перехода при неограниченном сближении проводников. Указанные результаты были опубликованы значительно позднее [120]. Необходимость обобщения математического аппарата на случай решеток, помещенных в диэлектрическое пространство с границей раздела, совпадающей с плоскостью решетки, и перечисленные выше обстоятельства не позволили нам воспользоваться граничными условиями Л. А. Вайнштейна для наших целей и обусловили необходимость разработки излагаемого ниже метода исследования частопериодических решеток.

Расчет фильтрующих свойств спирального волновода с многослойной диэлектрической оболочкой дан в работе [121]. В этой работе периодическая структура полагалась образованной из проводников круглого сечения и заменялась импедансной поверхностью, имеющей, как и в случае анизотропного цилиндра, идеальную проводимость в направлении витков и, кроме того, некую реактивную проводимость в направлении оси волновода. Реактивная проводимость обязана наличием емкости между соседними витками и обуславливает токи смещения в стенках вдоль оси волновода. Междупроводная емкость вычисляется с помощью конформного преобразования, в результате чего находится выражение для импеданса, связывающего на стенке продольную компоненту электрического поля с азимутальной компонентой магнитного поля. Это выражение подставляется в дисперсионное уравнение для многослойной цилиндрической структуры, которое решается численным методом. Подобный подход не является строгим по крайней мере для близких проводников, так как граничные условия для решетки при условии близости проводников утрачивают импеданс-

ный характер: появляется зависимость от угла падения, как и в случае мелкогофрированной поверхности, в которую переходит решетка при неограниченном сближении проводников. Полученные в работе [121] результаты не дают правильного предельного перехода при таком сближении. Вычисление междувитковой емкости для круглых проводников с помощью использованного в работе конформного преобразования [122] недопустимо для близкорасположенных проводов, поскольку в этом случае фигуры, изображающие контур проводника, значительно отличаются от окружности и в пределе при неограниченном сближении проводников переходят в квадраты. Это, очевидно, приводит к существенному отличию в величине емкости, а значит и к ошибке в оценке фильтрующих свойств волновода. Вполне понятно также, что использование в работе условия однородной идеальной проводимости в направлении витков приводит к недостаткам, присущим модели анизотропного цилиндра при анализе волн, имеющих кольцевые токи.

В I части работы развивается строгий электродинамический метод расчета частопериодических решеток.

Теория учитывает влияние периода (при условии его малости по сравнению с длиной волны), влияние формы и относительных размеров проводников, а также наличие границы раздела диэлектрического заполнения. Причем то обстоятельство, что спиральные волноводы целесообразнее наматывать вплотную, виток к витку, сделало важным вопрос о получении правильного предельного перехода при неограниченном сближении телесных проводов (переход к гофрированной поверхности). Первая часть работы посвящена установлению граничных условий, учитывающих перечисленные факторы. Для этого рассмотрена решетка из телесных (имеющих конечную площадь поперечного сечения) проводников. Из решения статических задач найдены поля вблизи проводников, через которые с помощью формулы Грина выражаются прошедшие и отраженные поля. Полученные коэффициенты отражения и прохождения использованы для установления эквивалентных граничных условий. Во II части работы эти граничные условия применяются к расчету широкого класса закрытых и открытых электродинамических структур.

4. Наиболее трудным для анализа является *резонансный случай*, когда период структуры соизмерим с длиной волны, т. е. $p/\lambda \sim 1$. Однако, именно эта ситуация и представляет наибольший практический интерес. Причин этому несколько. Прежде всего, резонансные условия являются интересным объектом научного изучения по тем возможностям, которые они представляют в расщеплении исследователя и инженера. Зачастую изучение именно критических, в частности резонансных, ситуаций приводит к интереснейшим физическим следствиям и аналогиям. Например, интересная физическая интерпретация поведения амплитуд и фаз на пороге возникновения новых собственных волн дана в работе [148]. Кстати, с помощью метода, аналогичного квантовой теории

многоканальных ядерных реакций авторами [148] предложено объяснение аномалий Вуда на дифракционных решетках — одному из замечательнейших свойств периодических структур (ср. [95, с. 286]). Можно привести и много других примеров. На некоторых мы остановимся в дальнейшем (см., например, § 1.2).

Наиболее эффективным аппаратом изучения резонансного случая $p/\lambda \sim 1$ является, по-видимому, метод задачи Римана — Гильберта [97—99] и методы типа метода Галеркина (см., например, [153—155]). В принципе оба эти подхода позволяют с требуемой точностью произвести расчет картины дифракционного явления на периодической структуре. Однако каждый раз задача сводится к решению бесконечной системы линейных алгебраических уравнений и требует, как правило, привлечения современных ЭВМ. Вместе с тем в достаточно широкой резонансной области можно выделить узкую область «точного» резонанса, когда между лентами, образующими «ножевую» ленточную структуру на расстоянии $2a$, укладывается почти целое число полуволин:

$$2ka = pq + 2\pi r, \quad q = 1, 2, \dots, \quad |p| \ll 1. \quad (3)$$

В этом случае в ячейках структуры могут существовать добротные колебания. В дальнейшем мы опишем это явление подробно, а сейчас отметим только, что когда выполнено условие (3) и некоторые другие условия, о чем будет идти речь ниже, действие реальной периодической структуры может быть описано в терминах импедансных граничных условий резонансного типа.

Между эквивалентными граничными условиями Вайнштейна — Сивова и импедансными граничными условиями резонансного типа существует глубокая логическая связь. Оба типа граничных условий связывают электромагнитные процессы по обе стороны от некоторой границы. Причем в условиях Вайнштейна — Сивова эта связь осуществляется непосредственно — через оператор отношения полей по обе стороны от периодической структуры, а в резонансных условиях — опосредствованно — через комплексный характер импеданса, связанный с «высвечиванием» энергии добротных колебаний из ячеек структуры.

Высказанные обстоятельства послужили логическим основанием для объединения двух, казалось бы не очень близких аппаратов в рамках одной книги. Кроме того, в практике широко используются периодические электродинамические структуры, в которых в одном устройстве применяются одновременно, например, частопериодические решетки и открытые резонаторы. В этом случае при расчете приходится пользоваться сразу и граничными условиями Вайнштейна — Сивова и импедансными граничными условиями резонансного типа.

И, наконец, последнее замечание. Мы обращаем внимание читателя на то, что импедансные граничные условия резонансного типа описывают только «точный» резонанс, когда выполняется условие (3). В других случаях ими пользоваться нельзя.

Часть первая

ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР

Глава 1

ЧАСТАЯ РЕШЕТКА В СВОБОДНОМ ПРОСТРАНСТВЕ

Постановка задачи. На плоскую бесконечную решетку, помещенную в свободном пространстве ($\epsilon = \mu = 1$) наклонно падает плоская электромагнитная волна. Решетка образована параллельными цилиндрическими проводниками произвольной формы поперечного сечения. Предполагая период малым по сравнению с длиной волны, нужно найти прошедшее и отраженное поля, поля в непосредственной близости от проводников, а также получить граничные условия, эквивалентные действию реальной периодической структуры.

Введем прямоугольную систему координат x, ξ, y , связанную с решеткой следующим образом (рис. 5): ось x перпендикулярна проводникам и лежит в плоскости решетки, ξ направлена вдоль проводников и проходит через центр сечения одного из них, y совпадает с нормалью к плоскости решетки. Решетка образована идеально проводящими проводниками с произвольной формой поперечного сечения, имеющего, однако, две оси симметрии Ox и Oy . Так как период решетки p полагается малым по сравнению с длиной волны λ , то безразмерный параметр kp ($k = 2\pi/\lambda$) есть малая величина. Зависимость полей от времени принимается в форме $e^{i\omega t}$.

Пусть со стороны отрицательных значений оси y' (рис. 5), направление которой в системе x, ξ, y задается направляющими косинусами α, β, γ ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$), на решетку набегают плоская электромагнитная волна единичной амплитуды. Так как решетка однородна в направлении ξ , то зависимость полей от ξ будет такой же, как и в падающем поле, т. е. будет определяться множителем

$$e^{-ik\gamma\xi}, \quad \partial \dots / \partial \xi = -ik\gamma \dots \quad (1.1.1)$$

Отраженная от решетки волна уходит в отрицательном направлении оси y'' , направляющие косинусы которой суть $-\alpha, -\gamma, \beta$;

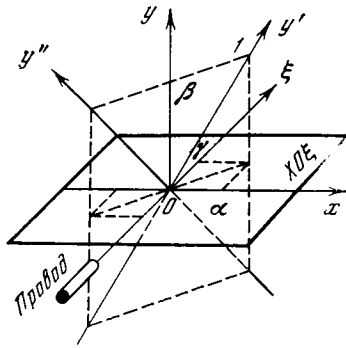


Рис. 5. Плоскость решетки и система координат

прошедшая волна распространяется в положительном направлении оси y' .

Уравнения Максвелла в данном случае допускают два вида независимых решений: 1) $E_{\xi} = 0$, все компоненты поля выражаются через H_{ξ} ; 2) $H_{\xi} = 0$, все компоненты выражаются через E_{ξ} . Общий случай получается как суперпозиция решений 1 и 2. Иными словами, в задаче различаются две поляризации падающей волны в зависимости от ориентации ее электрического и магнитного полей по отношению к направлению проводников решетки (направление ξ). В случае H -поляризации электрическое поле расположено в плоскости, перпендикулярной проводникам, а магнитное поле имеет составляющую вдоль проводников. В случае E -поляризации магнитное поле перпендикулярно проводам, а электрическое поле имеет составляющую, направленную вдоль проводов. Рассмотрим в отдельности каждый случай.

§ 1.1. Случай H -поляризации ($E_{\xi} = 0$)

В этом случае все составляющие поля согласно уравнениям Максвелла выражаются через H_{ξ} следующим образом:

$$E_x = \frac{-1}{ik(1-\gamma^2)} \frac{\partial H_{\xi}}{\partial y}, \quad H_x = \gamma E_y, \quad (1.1.2)$$

$$E_y = \frac{1}{ik(1-\gamma^2)} \frac{\partial H_{\xi}}{\partial x}, \quad H_y = -\gamma E_x.$$

Составляющая H_{ξ} удовлетворяет уравнению Гельмгольца

$$\Delta H_{\xi} + k^2(1-\gamma^2)H_{\xi} = 0 \quad (1.1.3)$$

с граничным условием на контуре поперечного сечения проводника $\partial H_{\xi} / \partial n = 0|_c$ (n — направление нормали к контуру поперечного сечения проводника), следующим из (1.1.2) и условия равенства нулю тангенциального электрического поля на металле.

Найдем связь коэффициентов отражения и прохождения с токами на поверхности проводников решетки. Для этого выразим поля в удаленных зонах, где плоские поля можно считать сформированными, через поля на контуре проводника и на плоскости $y =$

$= 0$. На рис. 6 выделен типичный участок поля, ограниченный объемами V_1 и V_2 , лежащими по разные стороны от решетки. Участки $5'-5$ и $\bar{5}'-\bar{5}$ находятся от плоскости $y = 0$ на расстояниях, на которых поля можно считать плоскими. Хорошо известно, что при $p \ll \lambda$ уже на расстоянии порядка периода (от решетки) диффракционное поле описывается в основном прошедшей и отраженной волнами, так как поля местных волн быстро затухают при удалении от решетки (не медленнее чем $e^{-2\pi|y|/p}$). Для отыскания связи между полями в удаленных зонах и полями вблизи проводников применим лемму Лоренца (см., например, [10])

$$\oint_S \{[EH^i]_n - [E^iH]_n\} dS = 0 \quad (1.1.4)$$

(n — направление внешней нормали) к поверхностям, заключающим объемы V_1 и V_2 . Применим лемму дважды, принимая для E^iH^i в обоих случаях разные поля. В качестве вспомогательных полей E^iH^i ($i = 1; 2$) возьмем поля плоских волн в свободном пространстве (без решетки), причем направления распространения их выберем так, чтобы вспомогательные волны оказались «встречными» по отношению к истинным полям. Иными словами, поле E^1H^1 (встречное по отношению к отраженной волне) есть поле волны, распространяющейся в положительном направлении оси y'' ; поле E^2H^2 (встречное по отношению к прошедшей волне) есть поле волны, распространяющейся в отрицательном направлении оси y' . Из этого следует, что величины $[EH^i]_n$ и $[E^iH]_n$ не зависят от ξ , поэтому интегралы по областям, лежащим в плоскостях $\xi = 0$ и $\xi = \xi_0$, в сумме дадут нуль. В результате получаем равенство нулю интегралов по контурам Γ_i , лежащим в плоскости $\xi = 0$ *.

Так как набег фазы в прошедшем и отраженном полях в направлении x между вертикалями $x = -p/2$ и $x = p/2$ должен равняться набегу фазы в падающей волне в этом направлении на расстоянии, равном периоду, то на вертикальных участках $\bar{5}'-5'$ и $\bar{5}-5$ должны выполняться соотношения

$$H(p/2, y) = H(-p/2, y)e^{-ikap}, \quad E(p/2, y) = E(-p/2, y)e^{-ikap}. \quad (1.1.5)$$

Аналогичные соотношения для вспомогательных полей отличаются знаком в экспоненте:

$$H^i(p/2, y) = H^i(-p/2, y)e^{ikap}, \quad E^i(p/2, y) = E^i(-p/2, y)e^{ikap}.$$

* Лемма Лоренца является электродинамическим аналогом теоремы Грина [123]. В нашем случае вместо леммы можно использовать непосредственно формулу Грина и оперировать с потенциалами H_{ξ} и H_{ξ}^i , однако оба способа по существу мало отличаются друг от друга.

В результате интегралы $\int (E_y H_{\xi}^i - E_y^i H_{\xi}) ds$ по участкам $5'-4'$ и $4-5$ для контура Γ_2 и по участкам $4'-\bar{5}'$ и $\bar{5}-4$ для контура Γ_1 исчезнут. Наконец, учитывая, что на контуре проводника тангенциальная составляющая электрического поля E_s равна нулю, приходим к искомым соотношениям, связывающим поля вдали с полями на контуре проводника и на линии $y = 0$ между проводниками:

$$\int_{5'-5} (E_x^i H_{\xi} - E_x H_{\xi}^i) dx = \int_{3'-2-3} E_s^i H_{\xi} ds + \int_{4'-3', 3-4} (E_x^i H_{\xi} - E_x H_{\xi}^i) dx, \quad (1.1.6)$$

$$\int_{\bar{5}-\bar{5}'} (E_x H_{\xi}^i - E_x^i H_{\xi}) dx = \int_{3-2-3'} E_s^i H_{\xi} ds - \int_{4'-3', 3-4} (E_x^i H_{\xi} - E_x H_{\xi}^i) dx.$$

Легко подсчитать, что направляющий косинус вектора магнитного поля с осью ξ равен $\sqrt{1 - \gamma^2}$ (эти вычисления и запись истинных и вспомогательных полей приводятся в Приложении 1). Поэтому компоненты H_{ξ} и H_{ξ}^i , через которые выражаются все остальные составляющие электромагнитного поля, могут быть записаны в следующем виде (в удаленных зонах):

$$\begin{aligned} H_{\xi 1} &= \sqrt{1 - \gamma^2} (\exp(-iky') + R \exp(iky'')) \quad \text{для } y < 0, \\ H_{\xi 2} &= \sqrt{1 - \gamma^2} T \exp(-iky') \quad \text{для } y > 0, \\ H_{\xi}^1 &= \sqrt{1 - \gamma^2} \exp(-iky'), \quad H_{\xi}^2 = \sqrt{1 - \gamma^2} \exp(iky'); \end{aligned} \quad (1.1.7)$$

R и T — искомые коэффициенты отражения и прохождения; через них выражаются интегралы по участкам $\bar{5}'-\bar{5}$ и $5'-5$. Подставляя в левые части (1.1.6) выражения для компонент полей и используя оба вспомогательных поля, получаем

$$\begin{aligned} 0 &= \int_{3'-2-3} E_s^1 H_{\xi} ds + \int_{4'-3', 3-4} (E_x^1 H_{\xi} - E_x H_{\xi}^1) dx, \\ -2\beta p R &= \int_{3-2-3'} E_s^2 H_{\xi} ds - \int_{4'-3', 3-4} (E_x^1 H_{\xi} - E_x H_{\xi}^1) dx, \end{aligned} \quad (1.1.8)$$

$$-2\beta p T = \int_{3'-2-3} E_s^2 H_{\xi} ds + \int_{4'-3', 3-4} (E_x^2 H_{\xi} - E_x H_{\xi}^2) dx,$$

$$2\beta p = \int_{3-2-3'} E_s^2 H_{\xi} ds - \int_{4'-3', 3-4} (E_x^2 H_{\xi} - E_x H_{\xi}^2) dx.$$

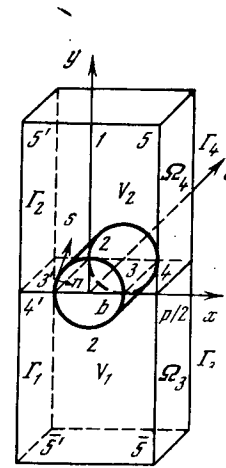
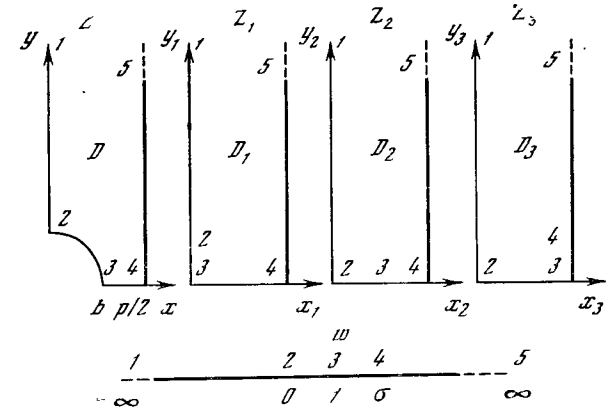


Рис. 6. Период структуры

Рис. 7. Основан и вспомогательные комплексные плоскости



Складывая первое соотношение со вторым, а третье с четвертым, находим выражения для коэффициентов отражения и прохождения (т. е. поля в дальней зоне) через поля на контуре проводника:

$$-2\beta p R = \oint_c E_s^1 H_{\xi} ds, \quad (1.1.9)$$

$$2\beta p (1 - T) = \oint_c E_s^2 H_{\xi} ds.$$

Соотношения (1.1.9) строгие, они связывают точные величины и будут использованы нами для дальнейшего расчета R и T .

Поля вблизи проводников, образующих решетку. В силу предположения о малости периода по сравнению с длиной волны эти поля можно искать из решения статической задачи. Действительно, замена волнового уравнения (1.1.3) уравнением Лапласа для области с размерами порядка периода приводит к ошибке порядка

(kp)². Поэтому, если найдено решение уравнения $\Delta H_{\xi} = 0$ с точностью до членов порядка kp (включительно), то можно считать, что оно представляет собой с той же степенью точности истинное поле. Как видно из (1.1.8), это решение будет использоваться лишь на контуре провода и на линии $y = 0$ между проводниками. Итак, будем искать квазистатическое решение, удовлетворяющее очевидным требованиям:

- 1) величины H_{ξ} и $\partial H_{\xi}/\partial y$ непрерывны на участках $4'-3'$ и на $3-4$;
- 2) $\partial H_{\xi}/\partial n = 0$ на контуре поперечного сечения проводника;
- 3) на вертикалях $x = p/2$ и $x = -p/2$ должны выполняться условия (1.1.5).

Условий на бесконечности требовать не будем, их заменят впоследствии первое и четвертое соотношения (1.1.8).

Для построения решения уравнения Лапласа осуществим конформные преобразования $z_1(z)$ и $z_2(z)$, переводящие области D_1 и D_2 плоскостей комплексных переменных $z_1 = x_1 + iy_1$ и $z_2 = x_2 + iy_2$ в область D комплексной переменной $z = x + iy$. Соответствие точек указано на рис. 7. Заметим, что x_i, y_i ($i = 1, 2$) как функции x и y удовлетворяют уравнению Лапласа. Начнем (для примера) с отыскания решения при вертикальном падении ($\alpha = \gamma = 0, \beta = 1$). Решение в области, ограниченной контурами Γ_1 и Γ_2 , ищем в виде $H_{\xi} = A + By_1(x, y)$ (A и B — постоянные). Функция $y_1(x, y)$ продлевается за границами области D следующим образом:

$$y_1(-x, y) = y_1(x, y), \quad y_1(x, -y) = -y_1(x, y).$$

Очевидно, что $\Delta H_{\xi} = 0$. Граничное условие на контуре проводника также выполнено (так как согласно конформному преобразованию $z_1(z)$ $\partial H_{\xi}/\partial n = \partial y_1/\partial n = \partial y_1/\partial x_1 = 0|_c$). Кроме того, обеспечена непрерывность H_{ξ} и $\partial H_{\xi}/\partial y$ на участках $3'-4'$, $3-4$ и удовлетворены условия (1.1.5). Так находим решение, содержащее две произвольные постоянные, которые определяются из первого и четвертого уравнений (1.1.8), после чего статическое решение будет полным.

Вернемся к общему случаю наклонного падения и построим решение, умножая решение для вертикального падения на множитель $(1 + Cx_2(x, y))$.

Решение задачи во всей рассматриваемой области, ограниченной контурами Γ_1 и Γ_2 , будем искать в виде

$$\begin{aligned} H_{\xi 2} &= (A_2 + B_2 y_1(x, y))(1 + C_2 x_2(x, y)) \quad \text{для } y \geq 0, \\ H_{\xi 1} &= (A_1 + B_1 y_1(x, y))(1 + C_1 x_2(x, y)) \quad \text{для } y \leq 0. \end{aligned} \quad (1.1.10)$$

Здесь $y_1(x, y)$ — мнимая часть преобразования $z_1(z)$; $x_2(x, y)$ — реальная часть преобразования $z_2(z)$; A_i, B_i, C_i — постоянные величины.

Определим функции $y_1(x, y)$ и $x_2(x, y)$ за границами области D из условий

$$\begin{aligned} y_1(-x, y) &= y_1(x, y), & y_1(x, -y) &= -y_1(x, y), \\ x_2(-x, y) &= -x_2(x, y), & x_2(-x, y) &= x_2(x, y). \end{aligned} \quad (1.1.11)$$

Подчиним решение поставленным условиям.

1. На участке $3-4$ $H_{\xi 2} = H_{\xi 1}$, и $y_1 = 0$. Это дает $A_1 - A_2 = (C_2 A_2 - C_1 A_1)x_2$, и так как $x_2 \neq \text{const}$, то это равенство возможно лишь при $A_1 = A_2, C_1 = C_2$ (обозначим $A_1 = A; C_1 = C$); из непрерывности $\partial H_{\xi}/\partial n$ (следует из непрерывности E_x) находим, используя то обстоятельство, что на $3-4$ $\partial x_2/\partial y = \partial x_2/\partial y_2 = 0, B_1 = B_2$ (обозначим $B_1 = B$).

2. Граничное условие на контуре проводника $\partial H_{\xi}/\partial n = 0|_c$, очевидно, выполняется, поскольку на участке $2-3$, соответствующем контуру, $\partial y_1/\partial n = \partial x_2/\partial n = 0$.

3. Наконец, условия (1.1.5) позволяют легко получить $C = -ik\alpha$. Таким образом, поле вблизи проводников можно представить через две постоянные A и B в виде

$$H_{\xi} = (A + By_1(x, y))(1 - ik\alpha x_2). \quad (1.1.12)$$

Величины A и B определяются из первого и четвертого уравнений (1.1.8). Заметим, что теперь ΔH_{ξ} не есть точно нуль (так как $y_1 x_2$ не удовлетворяет уравнению Лапласа), однако как далее выяснится, величина B — порядка kp , поэтому ΔH_{ξ} — порядка $(kp)^2$, т. е. найденное решение с принятой точностью представляет истинное поле.

Вычисление искомых величин R, T, A, B . Теперь не представляет труда, используя соотношения (1.1.8) и (1.1.9) и найденные выражения из полей вблизи проводников, вычислить искомые величины. Пусть контур проводника задан уравнением $y = y(x)$. При вычислении интегралов по контуру провода экспоненты, вошедшие от вспомогательных полей, заменяем двумя первыми членами разложения по ky (вертикальные размеры проводов полагаются малыми по сравнению с длиной волны). В результате вычислений, которые приводятся в Приложении 2, находятся как величины A и B , так и дальние поля, т. е. R и T , так как уравнений — четыре. Получаем

$$\begin{aligned} A &= \beta \sqrt{1 - \gamma^2} / \{\beta - ik[(1 - \gamma^2)l + \alpha^2 l_2]\}, \\ B &= -ik\beta \sqrt{1 - \gamma^2} / (1 + ikp\Delta), \\ \frac{R}{T} &= \frac{1}{2} \left\{ \frac{\beta + ik[(1 - \gamma^2)l + \alpha^2 l_2]}{\beta - ik[(1 - \gamma^2)l + \alpha^2 l_2]} + \frac{1 - ikp\Delta^*}{1 + ikp\Delta} \right\}. \end{aligned} \quad (1.1.13)$$

Здесь $l = S/2p$ (S — площадь поперечного сечения провода);

$$\Delta = \beta l_1/p - ikp(\beta^2 \Delta_2 - \alpha^2 \Delta_3),$$

$$l_2 = \frac{2}{p} \int_0^b x_2 y' dx, \quad l_1 = \frac{2}{p} \int_0^b y_1 dx,$$

$$\Delta_2 = \frac{2}{p^3} \int_0^b y y_1 dx, \quad \Delta_3 = \frac{2}{p^3} \int_0^b (x - x_2) y_1 y' dx.$$

Подынтегральные функции берутся в точках контура; y' — производная функции $y(x)$; $2b$ — размер проводников по оси ox .

Из дальнейшего (с. 24; формулы (1.1.16)) следует, что при неограниченном сближении проводников параметры l_i/p , Δ_i стремятся к бесконечности. Это приводит к необходимости учета слагаемых, пропорциональных $(kp)^2 \Delta_i$, в формулах для B , R , T при достаточно близко расположенных проводниках. Покажем, что учет этих величин необходим и обеспечивает правильный предельный переход к гофрированной поверхности (хотя формально мы не имеем права удерживать порядок $(p/\lambda)^2$). Рассмотрим, для простоты, вертикальное падение. Запишем интеграл по контуру проводника в следующем виде:

$$\int_c E_z^i H_{\xi} ds = \int_0^b \left(1 \pm iky - \frac{(ky)^2}{2} + \dots \right) (A + By_1 + O(k^2) + \dots) dx.$$

Первая скобка в интеграле справа есть разложение экспоненты (по ky) от вспомогательного поля. Во второй скобке стоит статическое решение и обозначенные через $O(k^2)$ члены, пропорциональные k^2 , существующие в разложении точного решения; эти члены не могут быть получены из решения задачи в статическом приближении. Указанные выше слагаемые, которые мы сохраним в формулах для B , R , T , возникают при перемножении ky и By_1 . Таким образом, вопрос сводится к законности для тесно расположенных проводников сохранения этого произведения при отбрасывании величин $O(k^2)$ и $(ky)^2 A$. Второе слагаемое в статическом решении (By_1) (имеющее порядок k при малых щелях) становится при $2b \rightarrow p$ величиной нулевого порядка (точнее: $By_1 \rightarrow 1 + O(k)$), и, значит, сохранение упомянутого произведения законно. Таким образом, статическое решение дает нам правильно, по крайней мере, старший член магнитного поля на металле ($H_{\xi} = 2 + O(k)$). При $2b \rightarrow p$ $(ky)^2 A$ сохраняет порядок k^2 (т. к. $A = 1 + O(k)$ и не изменяет своего порядка по k при $2b \rightarrow p$). Существенно, что $O(k^2)$ также не может стать величиной порядка k при $2b \rightarrow p$. Это следует из совпадения двух решений для гофры: получаемого предельным переходом из решетки и непосредственно. Действительно, решение, которое легко получается непосредственно для гофрированной поверхности (без предельного перехода), обеспечивает точность порядка k включительно, поэтому, если бы $O(k^2)$ стало порядка k , то, очевидно, различие в решениях имело бы тот же порядок. Это доказывает законность отбра-

сывания $O(k^2)$, а также и то, что решение для решетки правильно дает члены порядка k , в частности, при $2b \rightarrow p$.

Проверка предельных случаев. Легко видеть, что найденные коэффициенты отражения и прохождения удовлетворяют закону сохранения энергии. Действительно, как это следует из (1.1.13), R и T могут быть записаны в виде

$$\left. \begin{aligned} R \} &= \frac{1}{2} (e^{i\varphi} \mp e^{i\psi}), & \text{поэтому} & & R^* \} &= \frac{1}{2} (e^{-i\varphi} \mp e^{-i\psi}), \\ T \} & & & & T^* \} & \end{aligned} \right.$$

откуда получаем $|R|^2 + |T|^2 = 1$.

Назовем коэффициентом заполнения величину $q = 2b/p$. Если при $q \rightarrow 0$ ($b \rightarrow 0$) проводники исчезают, то, как и должно быть, $T \rightarrow 1$, $R \rightarrow 0$ *.

Этот предельный переход имеет место при $kp \rightarrow 0$. Иными словами, как уменьшение периода, так и уменьшение коэффициента заполнения ведет, к возрастанию просачивания поля H -поляризованной волны сквозь решетку, т. е. к ослаблению ее экранирующей способности.

Выясним поведение коэффициентов отражения и прохождения при $q \rightarrow 1$ (переход к сплошному заполнению, т. е. к гофре). Для этого воспользуемся еще одним преобразованием, а именно, осуществим конформное преобразование верхней полуплоскости вспомогательной комплексной плоскости w (рис. 7) в область D_1 плоскости z_1 так, чтобы точки $-\infty$, 0 , 1 , $+\infty$ действительной оси w переходили соответственно в точки 1 , 2 , 3 , 5 плоскости z_1 . При этом точка 4 плоскости z_1 переходит в некую точку σ действительной оси w . Преобразование записывается в виде

$$z_1 = (p/\pi) \arcsin \sqrt{(w-1)/(\sigma-1)}. \quad (1.1.14)$$

Величина σ зависит от формы и относительных размеров проводников. Для вычисления Δ нужно знать значения y_1 на участке $2-3$. На этом участке $0 \leq w \leq 1$, поэтому

$$y_1 = \text{Im } z_1 = (p/\pi) \ln [\sqrt{1-w} + \sqrt{\sigma-w} / \sqrt{\sigma-1}]. \quad (1.1.15)$$

При $q \rightarrow 1$ (проводники неограниченно сближаются, $b \rightarrow p/2$) $\sigma \rightarrow 1$, и $y_1 \rightarrow \infty$. Подчеркнем, что на величину ky_1 не налагалось условие малости или ограниченности (было лишь требование $ky|_c \ll 1$), поэтому в нашем аппарате возможен предельный переход при $q \rightarrow 1$, для которого $y_1 \rightarrow \infty$. При этом из интегралов, определяющих l_i/p , Δ_i , выделяются главные члены, стремящиеся к бесконечности (особенность выражения $\ln(\sqrt{1-w} + \sqrt{\sigma-w})$ в точке $w=1$ интегрируема и при $\sigma=1$). Легко видеть, что параметры l_i/p , Δ_i будут определяться следующими главными

* Решетка из вертикальных лент (рис. 12, б) может отражать, хотя для нее $q=0$, если нормаль к фронту падающей волны не лежит в плоскости yOz (см. с. 34).

членами:

$$l_1/p \simeq -(1/2\pi) \ln(\sigma - 1), \Delta_2 \simeq -(1/2\pi p)l \ln(\sigma - 1), \Delta_3 \simeq \simeq (1/2\pi p)(l + l_2) \ln(\sigma - 1);$$

так, что

$$\beta^2 \Delta_2 - \alpha^2 \Delta_3 \simeq -(1/2\pi p) [(1 - \gamma^2)l + \alpha^2 l_2] \ln(\sigma - 1). \quad (1.1.16)$$

Подставляя это в формулы для R и T , находим, что для $q = 1$, второе слагаемое в (1.1.13) становится равным первому, и поэтому

$$R = \frac{\beta + ik [(1 - \gamma^2)l + \alpha^2 l_2]}{\beta - ik [(1 - \gamma^2)l + \alpha^2 l_2]}. \quad (1.1.17)$$

При этом $T = 0$, а $|R| = 1$, что и следовало ожидать. При нормальном падении ($\alpha = \gamma = 0$, $\beta = 1$) формулу (1.1.17) для R в нашем приближении можно переписать в виде

$$R = e^{ikS|p}. \quad (1.1.18)$$

Для прямоугольного провода эта формула, как и должно быть, дает набег фазы такой же, как и при простом сдвиге идеально проводящей плоскости в отрицательном направлении y на величину, равную половине толщины проводника. Согласно (1.1.18) обобщение этого тривиального результата на гофрированную поверхность с произвольной направляющей состоит в том, что набег фазы в коэффициенте отражения пропорционален площади сечения фигуры, образующей гофру.

§ 1.2. Эффект Г. Д. Малюжинца

Полученные в предыдущем параграфе формулы (1.1.13) для коэффициентов прохождения и отражения H -поляризованной плоской волны через решетку из телесных проводников отражают уникальное свойство частых решеток — при определенном угле падения падающая волна полностью (без отражения, $R \equiv 0$) проходит через решетку. Этот эффект был обнаружен Г. Д. Малюжинцем в 1937—1940 гг. при проектировании декоративно-поглощающих покрытий (в акустическом диапазоне) для Дворца Советов. Обоснование эффекта полного прохождения было проведено им с использованием гидродинамических аналогий, позволивших Г. Д. Малюжинцу установить, что для решетки из брусьев с ненулевой толщиной в диапазоне $k = p/\lambda < 1/2$ полное прохождение будет наблюдаться в случае $\varphi = \arcsin \cos q$ (угол падения φ отсчитывается от нормали, q — относительная ширина щелей в решетке). Например, в работе [136] на с. 96—97 читаем: «Рассмотрим плоский идеально проводящий слой, профили граничных поверхностей которого есть периодические функции y с периодом, равным d . Если в таком слое под углом φ к оси oz периодически расположены щели ширины d_1 , то получается решетка ... Г. Д. Малюжинец обнару-

жил, что при $d/\lambda < 1/(1 \pm \sin \varphi)$ и таком угле падения, что выполняется соотношение $d_1 = d \cos \varphi$ (φ — угол падения), указанная решетка *полностью* (курсив наш — Е. Н., А. С.) пропускает энергию падающего поля.

Явление полного прохождения энергии через решетку типа «жалюзи» при $\varphi = \psi$ и $k < 1/(1 \pm \sin \varphi)$ как раз и есть эффект Г. Д. Малюжинца для данной структуры».

Подробное математическое исследование эффекта Малюжинца проведено харьковской школой радиофизиков и математиков. Результаты этих исследований изложены в монографиях [20, 98, 99], а также ряде оригинальных работ, включенных нами в список литературы. Результаты, касающиеся, в особенности, резонансных режимов в периодических структурах типа систем дифракционно связанных открытых резонаторов, изложены в работах [44, 49]. На некоторых из них мы задержим внимание читателя в главах 4, 7 и 8 настоящей книги.

Здесь мы отметим основные черты эффекта Г. Д. Малюжинца, отдавая вместе с тем должное тому большому вкладу, который внесли работы Г. Д. Малюжинца в отечественную и мировую математическую теорию дифракции волн различной природы. Известный американский ученый Е. Скучик в предисловии к русскому изданию своей книги «Основы акустики» (М., «Мир», 1976) пишет: «Ряд весьма ценных работ по дифракции волн опубликовал Г. Д. Малюжинец, который предложил совершенно новые методы решения задач дифракции. По-видимому, пройдет еще много лет, пока ученые полностью оценят большую значимость этих исследований».

Эффект Г. Д. Малюжинца наблюдается в целом ряде электродинамических структур, например, для решетки типа «жалюзи» (см. [99, с. 103, формула (2.52)]). Здесь полное прохождение волны имеет место в двух случаях.

1. Решетка полностью пропускает энергию не только при $\varphi = -\psi$ (φ — угол наклона лент решетки жалюзи), но и при $\varphi = \psi$. Особенность случая $\varphi = \psi$ заключается в том, что прошедшая через решетку волна приобретает некоторый фазовый сдвиг, определяющийся при фиксированных значениях углов φ и ψ длиной волны и шириной лент решетки.

2. Коэффициент прохождения $|T| = 1$ в случае, когда выполняется условие $8\lambda \delta + \beta = 2\pi n$ ($n = 1, 2, \dots$), где δ — отношение половины ширины ленты решетки к периоду (ср. гл. 4).

Эффект Малюжинца проявляется и для полупрозрачных периодических структур при наклонном падении. При этом он не будет зависеть от k (см., например, рис. 94 в [99]). Естественно, что при произвольном угле падения будут наблюдаться резонансные точки полного прохождения по высоте решетки или по k .

Аналогичным свойством обладают и решетки из круглых брусьев. Словом, свойства решеток разных профилей в диапазоне $k < 1/2$ качественно одинаково зависят от угла падения. При этом

для решетки конечной толщины из брусьев прямоугольного сечения точка полной прозрачности практически не зависит от высоты брусьев и величины κ . Для решетки типа «жалюзи» точка полной прозрачности строго не зависит от κ и высоты лент решетки.

В решетке из брусьев круглого поперечного сечения точки полного прохождения с ростом κ смещаются в сторону меньших углов падения.

Эффект Малюжинца проявляется в периодических решетках из диэлектрических брусьев, решетках из цилиндров со щелями и ряде других полупрозрачных периодических структур.

§ 1.3. Случай E -поляризации ($H_z=0$)

В этом случае согласно уравнениям Максвелла все компоненты поля можно выразить через составляющую электрического поля вдоль проводников следующим образом:

$$H_x = \frac{1}{ik(1-\gamma^2)} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad E_x = -\gamma H_y, \quad (1.3.4)$$

$$H_y = \frac{-1}{ik(1-\gamma^2)} \frac{\partial E_z}{\partial x}, \quad E_y = \gamma H_x.$$

Сама же компонента E_z удовлетворяет уравнению

$$\Delta E_z + k^2(1-\gamma^2)E_z = 0 \quad (1.3.2)$$

с граничным условием на контуре проводника $E_z = 0$ | $_c$.

Выражение полей в удаленных зонах через поля на контуре проводника и на плоскости $y=0$. Применение леммы Лоренца к объемам V_1 и V_2 приводит здесь к соотношениям

$$\begin{aligned} \int_{s'-5} (E_z^i H_x - E_z H_x^i) dx &= \int_{s'-2-3} E_z^i H_s ds + \\ &+ \int_{s'-3', 3-4} (E_z^i H_x - E_z H_x^i) dx, \\ \int_{\bar{s}'-\bar{5}} (E_z H_x^i - E_z^i H_x) dx &= \int_{s-2-3'} E_z^i H_s ds - \\ &- \int_{s'-3', 3-4} (E_z^i H_x - E_z H_x^i) dx. \end{aligned} \quad (1.3.3)$$

Истинные поля в удаленных зонах и вспомогательные поля равны

$$\begin{aligned} E_{z2} &= \sqrt{1-\gamma^2} T \exp(-iky'), \quad y > 0, \\ E_{z1} &= \sqrt{1-\gamma^2} [\exp(-iky') + R \exp(iky')], \quad y < 0, \\ E_z^1 &= \sqrt{1-\gamma^2} \exp(-iky''), \quad E_z^2 = \sqrt{1-\gamma^2} \exp(iky'). \end{aligned} \quad (1.3.4)$$

Запись выражений для всех компонент истинных и вспомогательных полей приводится в Приложении 3.

Подставляя выражения для компонент полей в левые части (1.3.3), находим связь искомых коэффициентов R и T с полями на контуре проводника:

$$\begin{aligned} \int_{s'-2-3} E_z^1 H_s ds + \int_{s'-3', 3-4} (E_z^1 H_x - E_z H_x^1) dx &= 0, \\ \int_{s-2-3'} E_z^2 H_s ds - \int_{s'-3', 3-4} (E_z^2 H_x - E_z H_x^2) dx &= -R\beta 2p, \end{aligned} \quad (1.3.5)$$

$$\begin{aligned} \int_{s'-2-3} E_z^2 H_s ds + \int_{s'-3', 3-4} (E_z^2 H_x - E_z H_x^2) dx &= -2\beta p T, \\ \int_{s-2-3'} E_z^2 H_s ds - \int_{s'-3', 3-4} (E_z^2 H_x - E_z H_x^2) dx &= 2\beta p, \\ -2\beta p R &= \oint_c E_z^1 H_s ds, \quad 2\beta p(1-T) = \oint_c E_z^2 H_s ds. \end{aligned} \quad (1.3.6)$$

Поля вблизи проводников. Поля вблизи проводов будем искать из решения электростатической задачи, которую можно сформулировать следующим образом. Нужно найти решение E_z уравнения Лапласа (с точностью до членов порядка $(kp)^2$), удовлетворяющее требованиям:

- 1) величины E_z и $\partial E_z / \partial y$ непрерывны на участках $4'-3'$ и $3-4$;
- 2) $E_z = 0$ на контуре поперечного сечения проводника;
- 3) на вертикалях $\bar{5}'-\bar{5}$ и $5'-5$ должны выполняться условия (1.1.5).

Подобная электростатическая задача решена в работе [118] для случая отсутствия зависимости от координаты ξ .

Для определения вида решения осуществим конформное преобразование $z_3(z)$, переводящее область D плоскости $z = x + iy$ в область D_3 плоскости $z_3 = x_3 + iy_3$ (рис. 7). Решение задачи имеет вид

$$\begin{aligned} E_{z2} &= (A_2 y_2 + B_2 y_3)(1 + C_2 x_2) \quad \text{для } y \geq 0, \\ E_{z1} &= (A_1 y_1 + B_1 y_3)(1 + C_1 x_2) \quad \text{для } y \leq 0. \end{aligned} \quad (1.3.7)$$

Здесь $y_2(x, y)$ и $y_3(x, y)$ — мнимые части преобразований $z_2(z)$ и $z_3(z)$; $x_2(x, y)$ — реальная часть преобразования $z_2(z)$; A_i, B_i, C_i — постоянные.

Напомним, что функции $x_i(x, y)$ и $y_i(x, y)$ удовлетворяют уравнению Лапласа. Определим функции y_2 и y_3 за границами области D из условий

$$\begin{aligned} y_2(-x, y) &= y_2(x, y), \quad y_2(x, -y) = -y_2(x, y), \\ y_3(-x, y) &= y_3(x, y), \quad y_3(x, -y) = y_3(x, y). \end{aligned} \quad (1.3.8)$$

Как и в случае H -поляризации одна из функций продлевается за $y = 0$ симметрично, другая — асимметрично.

1. На участке $3-4$ $E_{z2} = E_{z1}$, и так как здесь $y_2 = 0$, то это дает $B_1 - B_2 = (B_1 C_1 - B_2 C_2) x_2$, откуда $B_1 = B_2$, $C_1 = C_2$ (обозначим $B_1 = B$, $C_1 = C$). Из непрерывности H_x на $3-4$ ($H_x = [1/ik(1 - \gamma^2)] \cdot \partial E_z / \partial y$), учитывая, что на этом участке $\partial y_3 / \partial y = \partial x_2 / \partial y = 0$, получаем $A_1 = A_2$ (обозначим $A_1 = A$).

2. Граничное условие на контуре проводника, очевидно, выполнено, поскольку на участке $2-3$ $y_2 = y_3 = 0$.

3. Условия (1.1.5) по-прежнему дают $C = -ik\alpha$.

Постоянные A и B определяются из первого и четвертого уравнений (1.3.5). Таким образом, искомое поле вблизи проводников можно записать в виде

$$E_z = (Ay_2 + By_3)(1 - ik\alpha x_2). \quad (1.3.9)$$

Вычисление величин A, B, R, T . Для вычисления A и B сложим и вычтем первое и четвертое уравнения (1.3.5). Получаем, учитывая, что на $4'-3'$, $3-4$ $H_x^2 = -H_x^1$, $E_z^2 = E_z^1$,

$$\int_{3'-2-3} E_z^1 H_s ds + \int_{3-2-3'} E_z^2 H_s ds - 2 \int_{4'-3', 3-4} H_x^1 E_z dx = 2\beta p, \quad (1.3.10)$$

$$- \int_{3'-2-3} E_z^1 H_s ds + \int_{3-2-3'} E_z^2 H_s ds - 2 \int_{4'-3', 3-4} E_z^1 H_x dx = 2\beta p.$$

На участках $4'-3'$, $3-4$ $y_2 = 0$, и E_z можно представить в виде

$$E_z = By_3(1 - ik\alpha x_2), \quad H_x^1 = (-\beta/\sqrt{1 - \gamma^2}) e^{ikx_2}.$$

Поэтому

$$\int_{4'-3', 3-4} H_x^1 E_z dx = \frac{-\beta B}{\sqrt{1 - \gamma^2}} \int_{4'-3', 3-4} y_3 dx.$$

На этом же участке $\partial x_2 / \partial y = \partial y_3 / \partial y = 0$, в связи с чем

$$H_x = \frac{A(1 - ik\alpha x_2)}{ik(1 - \gamma^2)} \frac{\partial y_2}{\partial y} \quad \text{и} \quad \int_{4'-3', 3-4} E_z^1 H_x dx = \\ = \frac{A}{ik\sqrt{1 - \gamma^2}} \int_{4'-3', 3-4} \frac{\partial y_2}{\partial y} dx.$$

Нам потребуется вычислить интегралы по контуру поперечного сечения проводника вида $\int E_z^i H_s ds$. Имеем $H_s = \frac{-1}{ik(1 - \gamma^2)} \frac{\partial E_z}{\partial n}$, а так как на контуре провода $y_2 = y_3 = 0$, то $[\partial E_z / \partial n = (A \partial y_2 / \partial n + B \partial y_3 / \partial n)(1 - ik\alpha x_2)]$. Подставляя в интеграл, получаем

$$\int E_z^i H_s ds = [-1/ik(1 - \gamma^2)] \int E_z^i (A \partial y_2 / \partial n + B \partial y_3 / \partial n) \times \\ \times (1 - ik\alpha x_2) ds.$$

Теперь уравнения (1.3.10) переписываются в виде

$$A(I_1 + I_2) + B(I_3 + I_4 - 2ik\beta \int_{4'-3', 3-4} y_3 dx) = -2ik\beta p \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad (1.3.11)$$

$$A(I_1 - I_2 - 2 \int_{4'-3', 3-4} \frac{\partial y_2}{\partial y} dx) + B(I_3 - I_4) = 2ik\beta p \sqrt{1 - \gamma^2},$$

где

$$I_1 = \int_{3'-2-3} \frac{\partial y_2}{\partial n} f_1 ds, \quad I_2 = \int_{3-2-3'} \frac{\partial y_2}{\partial n} f_2 ds,$$

$$I_3 = \int_{3'-2-3} \frac{\partial y_3}{\partial n} f_1 ds, \quad I_4 = \int_{3-2-3'} \frac{\partial y_3}{\partial n} f_2 ds,$$

$$f_1 = 1 - ik(y'' + \alpha x_2), \quad f_2 = 1 + ik(y' - \alpha x_2),$$

$$y'' = -\alpha x + \beta y(x), \quad y' = \alpha x + \beta y(x).$$

Подынтегральные функции берутся в точках контура. Контур проводника задан уравнением $y = y(x)$.

Легко видеть, что интегралы I_i могут быть с учетом (1.3.8) преобразованы к виду

$$I_1 = -I_2 = \int_{3'-2-3} \frac{\partial y_2}{\partial n} ds - ik\beta \int_{3'-2-3} y \frac{\partial y_2}{\partial n} ds, \quad (1.3.12)$$

$$I_3 = I_4 = \int_{3'-2-3} \frac{\partial y_3}{\partial n} ds - ik\beta \int_{3'-2-3} y \frac{\partial y_3}{\partial n} ds.$$

Как видно, уравнения для A и B разделены:

$$B \left[\int_{3'-2-3} \frac{\partial y_3}{\partial n} ds - ik\beta \left(\int_{3'-2-3} y \frac{\partial y_3}{\partial n} ds - \int_{3'-2-3} y_3 dx \right) \right] = \\ = -ik\beta p \sqrt{1 - \gamma^2}, \quad (1.3.13)$$

$$A \left[\int_{3'-2-3} \frac{\partial y_2}{\partial n} ds - \int_{4'-3', 3-4} \frac{\partial y_2}{\partial n} ds - ik\beta \int_{3'-2-3} y \frac{\partial y_2}{\partial n} ds \right] = \\ = ik\beta p \sqrt{1 - \gamma^2}.$$

Вычислим интегралы в левых частях (1.3.13) с помощью формулы Грина. Запишем условие равенства нулю интегралов по замкнутому контуру Γ_2 (рис. 6) от функций $\partial y_2 / \partial n$, $\partial y_3 / \partial n$,

$$y \frac{\partial y_2}{\partial n} - y_2 \frac{\partial y}{\partial n}, \quad y \frac{\partial y_3}{\partial n} - y_3 \frac{\partial y}{\partial n}.$$

Используя предельное свойство конформных преобразований $z_2(z)$ и $z_3(z)$, согласно которому $y_i \rightarrow y + l_i (y \rightarrow \infty)$ (см. Приложение

ние 2), находим

$$\int_{z'-2-3} \frac{\partial y_3}{\partial n} ds = -p, \quad \int_{z'-2-3} \frac{\partial y_2}{\partial n} ds - \int_{z'-3', z-4} \frac{\partial y_2}{\partial y} dx = -p,$$

$$\int_{z'-2-3} y \frac{\partial y_2}{\partial n} ds = pl_2, \quad \int_{z'-2-3} y \frac{\partial y_3}{\partial n} ds - \int_{z'-3', z-4} y_3 dx = pl_3.$$

(1.3.14)

Подставляя это в (1.1.13), (1.3.6), получаем выражения для коэффициентов отражения и прохождения:

$$\left. \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} = \mp \frac{1}{2} \left(\frac{1 - ik\beta l_2}{1 + ik\beta l_2} \pm \frac{1 - ik\beta l_3}{1 + ik\beta l_3} \right), \quad (1.3.15)$$

$$A = -ik\beta \sqrt{1 - \gamma^2} / (1 + ik\beta l_2), \quad B = ik\beta \sqrt{1 - \gamma^2} / (1 + ik\beta l_3).$$

Параметры l_i зависят от формы и относительных размеров проводников. Формулы (1.3.15) допускают, в частности, оба предельных перехода (при $q \rightarrow 0$ и при $q \rightarrow 1$). Далее будет показано, что при $q \rightarrow 0$ $l_2 \rightarrow 0$, $l_3 \rightarrow \infty$, поэтому $T \rightarrow 1$, $R \rightarrow 0$; при $q \rightarrow 1$ $l_2 \rightarrow l_3$, поэтому $T \rightarrow 0$, $R \rightarrow -\exp(-2ik\beta l_2)$.

(1.3.16)

Неограниченное уменьшение периода при постоянном коэффициенте заполнения q также ведет к полной экранировке поля, поскольку параметры l_2/p , l_3/p не зависят от периода, а являются функциями только q для данной формы поперечного сечения проводника.

§ 1.4. Вычисление параметров l_i .

Провода круглого и прямоугольного поперечного сечения

Для получения наиболее удобных формул, определяющих параметры l_i , осуществим конформные преобразования $z_i(w)$ ($i = 1, 2, 3$), переводящие области D_i плоскостей комплексных переменных z_i в верхнюю полуплоскость плоскости комплексного переменного w (рис. 7). Эти преобразования можно представить в виде

$$\begin{aligned} z_1(w) &= (p/\pi) \arcsin \sqrt{(w-1)/(\sigma-1)}, \\ z_2(w) &= (p/\pi) \arcsin \sqrt{w/\sigma}, \\ z_3(w) &= (p/\pi) \arcsin \sqrt{w}. \end{aligned} \quad (1.4.1)$$

Соответствие точек указано на рис. 7. Формулы для вычисления l_2 и l_3 можно записать в виде

$$l_i = l_1 + \lim_{y \rightarrow \infty} (y_i - y_1), \quad (1.4.2)$$

согласно предельному свойству конформных преобразований:

$$dz_i/dz \rightarrow 1 \quad (y \rightarrow \infty). \quad (1.4.3)$$

Выделяя мнимые части преобразований (1.4.1) и вычислив предел (1.4.2) при $w \rightarrow \infty$ (что, очевидно, соответствует предельному переходу при $y \rightarrow \infty$), находим

$$l_2 = l_1 - (p/2\pi) \ln((\sigma-1)/\sigma), \quad (1.4.4)$$

$$l_3 = l_1 + (p/2\pi) \ln(\sigma-1).$$

Формулы (1.4.4) справедливы для проводов с любой формой поперечного сечения, имеющего две оси симметрии. Можно показать, воспользовавшись условиями Эйлера—Даламбера (см., например, [126]), что параметр l_2 , введенный в формулах для H -поляризации, равен параметру l_2 , определенному в (1.3.14). Действительно, согласно (1.1.13)

$$l_2 = \frac{2}{p} \int_0^b x_2(x, y(x)) y'(x) dx.$$

Применяя интегрирование по частям, получаем

$$l_2 = \frac{2}{p} \left(x_2(b, y(b)) y(b) - x_2(0, y(0)) y(0) - \int_0^b y \frac{dx_2}{dx} dx \right),$$

но

$$\frac{dx_2}{dx} = \frac{\partial x_2}{\partial x} + \frac{\partial x_2}{\partial y} y'(x).$$

Подставляя сюда условия Эйлера—Даламбера

$$\partial x_2/\partial x = \partial y_2/\partial y, \quad \partial x_2/\partial y = -\partial y_2/\partial x,$$

находим

$$l_2 = \frac{1}{p} \int_{-b}^b y(x) \left(\frac{\partial y_2}{\partial x} y'(x) - \frac{\partial y_2}{\partial y} \right) dx = \frac{1}{p} \int_{(z'-2-3)} y \frac{\partial y_2}{\partial n} ds,$$

что совпадает с определением (1.3.14).

Решетка из проводов круглого поперечного сечения. Для решетки из круглых цилиндрических проводников лучше всего использовать весьма точное преобразование Блоха [127]:

$$z_1 = z - (mb/2\pi) \ln \frac{\sin(\pi/p)(z+\lambda b)}{\sin(\pi/p)(z-\lambda b)}. \quad (1.4.5)$$

Здесь b — радиус проводника; m и λ — параметры, зависящие только от коэффициента заполнения $q = 2b/p$. Для параметра l_1 в этом случае имеет место формула $l_1 = m\lambda pq^2/4$. Используя преобразование $z_1(w)$, находим $\sigma = \text{cth}^2 r$, где

$$r = (\pi q/2) [1 + (m/\pi) \arctg(\text{tg}(\pi q\lambda/2) \text{ctg}(\pi q/2))]$$

(r/p — ордината точки 2 на плоскости z_1), откуда

$$l_2 = l_1 - (p/\pi) \ln \text{ch } r, \quad l_3 = l_1 - (p/\pi) \ln \text{sh } r. \quad (1.4.6)$$

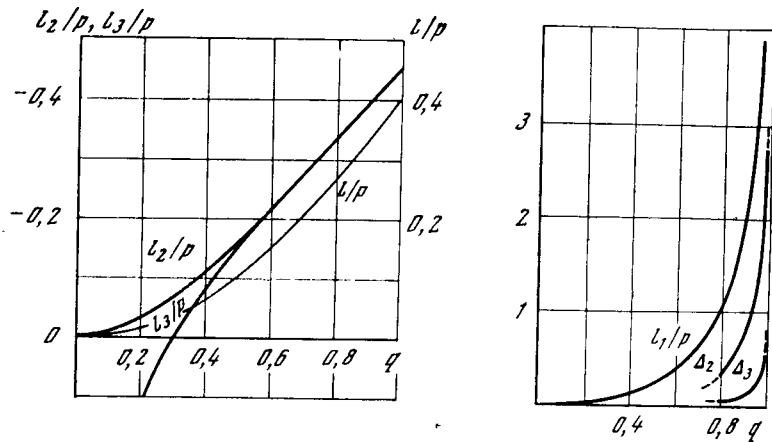


Рис. 8. Зависимость параметров l/p , l_2/p , l_3/p (а) и l_1/p , Δ_2 , Δ_3 (б) для решетки из круглых проводников от коэффициента заполнения

Параметр λ находится из трансцендентного уравнения

$$\frac{\operatorname{sh}^2(\pi q/2) + \sin^2(\pi q\lambda/2)}{\sin \pi q\lambda} \ln \frac{\sin(\pi q/2)(1+\lambda)}{\sin(\pi q/2)(1-\lambda)} = \frac{\pi q}{2}, \quad (1.4.7)$$

которое получается при подстановке в преобразование (1.4.5) точки 2; после чего параметр m находится по формуле

$$m = 2\pi/\ln \frac{\sin(\pi q/2)(1+\lambda)}{\sin(\pi q/2)(1-\lambda)}.$$

В предельных случаях получаем. При $q \rightarrow 0$, $\lambda \rightarrow 0$, $r \rightarrow 0$, $\sigma \rightarrow \infty$, $l_1 \rightarrow 0$, $l_2 \rightarrow 0$, $l_3 \rightarrow \infty$. При $q \rightarrow 1$, $\lambda \rightarrow 1$, $r \rightarrow \infty$, $\sigma \rightarrow 1$, $l_1 \rightarrow \infty$, $l_2 \rightarrow l_3 \rightarrow 0,45 p$.

Результаты расчета параметров для проводов круглого поперечного сечения в виде графиков параметров l/p , l_1/p , l_2/p ; l_3/p , Δ_2 , Δ_3 приведены на рис. 8, а, б.

При расчете решетки из круглых и не близко расположенных проводников (до $q < 0,7$) можно пользоваться преобразованием Ричмонда [122] (ср. [121]), однако для тесных проводников применение этого преобразования недопустимо, так как при $q \rightarrow 1$ фигуры, изображающие контур проводника, начинают значительно отличаться от окружности и в пределе переходят в квадраты, а это приводит к существенному различию в величине ряда параметров.

Решетка из проводников прямоугольного поперечного сечения. Горизонтальная и вертикальная лента. Для проводников прямоугольного поперечного сечения (рис. 9) можно записать преобразование $z(w)$ с помощью формулы Кристоффеля — Шварца (см., например, [128]) в виде

$$z(w) = \frac{p}{2\pi} \int_0^w \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \sqrt{\frac{u-t}{u-\sigma}} du + ic. \quad (1.4.8)$$

Здесь $2c$ — размер проводника в направлении оси y . Параметры σ и t , зависящие от относительных размеров проводника, находятся из уравнений

$$\pi q = \int_0^t \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \sqrt{\frac{t-u}{\sigma-u}} du, \quad (1.4.9)$$

$$\frac{2\pi c}{p} = \int_t^1 \frac{1}{\sqrt{u(1-u)}} \sqrt{\frac{u-t}{\sigma-u}} du.$$

В работе [119] проделаны вычисления σ и t для некоторых значений относительных размеров провода. Из преобразований $z_1(w)$ и $z(w)$ по формуле $l_1 = \lim_{w \rightarrow \infty} (y_1 - y)$ находим

$$\frac{l_1}{p} = \frac{t}{2\pi} \int_0^{1/\sigma} \frac{du}{\sqrt{(1-u)(1-\sigma u)(\sqrt{1-tu}+1)}}. \quad (1.4.10)$$

Результаты расчета промежуточных величин σ и t , необходимых

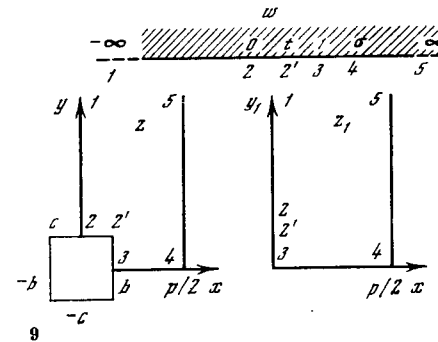
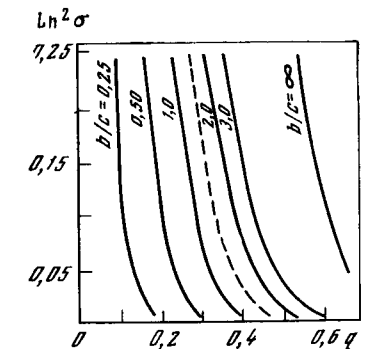
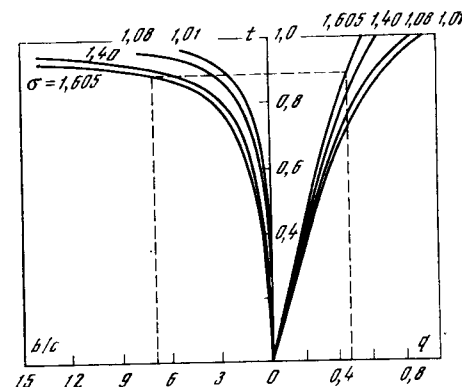


Рис. 9. Комплексные плоскости для проводника прямоугольного сечения

Рис. 10. Зависимость вспомогательных параметров σ и t от относительных размеров прямоугольного проводника

Рис. 11. Зависимость параметра σ от коэффициента заполнения при фиксированных значениях b/c



при вычислении параметров l_1/p , l_2/p , l_3/p , Δ_2 , Δ_3 для проводников прямоугольного сечения даны на рис. 10, 11.

Для горизонтально расположенных ленточных проводников (рис. 12, а) $c = 0$, плоскости комплексных переменных z и z_2 совпадают, $l = l_2 = 0$, $\sigma = 1/\sin^2(\pi q/2)$,

$$l_1 = (p/\pi) \ln [1/\cos(\pi q/2)], \quad l_3 = (p/\pi) \ln [1/\sin(\pi q/2)].$$

В случае решетки из вертикальных лент $q = 0$ ($b = 0$) (рис. 12, б) совпадают плоскости z и z_1 ; при этом $l = l_1 = 0$, $\sigma = \text{cth}^2 \pi c/p$, $l_2 = -(p/\pi) \ln \text{ch} \pi c/p$, $l_3 = -(p/\pi) \ln \text{sh} \pi c/p$,

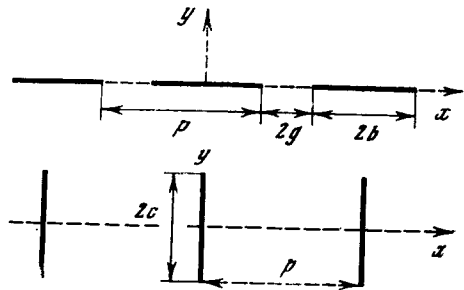


Рис. 12. Решетка из горизонтальных (а) и вертикальных (б) лент

и формулы (1.4.13) для H -поляризованной волны переписываются в виде

$$\left. \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta + ik\alpha^2 l_2}{\beta - ik\alpha^2 l_2} \mp 1 \right). \quad (1.4.11)$$

Если величина c остается постоянной, а период стремится к нулю, то

$$l_2 \simeq -(p/\pi) (\ln e^{\pi c/p} - \ln 2) \rightarrow -c, \text{ и}$$

$$\left. \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(\frac{\beta - ikc\alpha^2}{\beta + ikc\alpha^2} \mp 1 \right). \quad (1.4.12)$$

Таким образом, несмотря на неограниченное уменьшение периода, имеется отражение H -поляризованной волны от решетки, если направление падения не лежит в плоскости $yO\xi$. Если же нормаль к фронту падающей волны лежит в этой плоскости, то электрическое поле перпендикулярно поверхности ленточных проводников и волна свободно проходит сквозь решетку.

В случае E -поляризации при $p \rightarrow 0$ получаем

$$R = -e^{2ik\beta c}, \quad T = 0. \quad (1.4.13)$$

Уменьшение периода ведет здесь к полной экранировке поля.

§ 1.5. Эквивалентные граничные условия

Полученные коэффициенты отражения и прохождения позволяют записать граничные условия, связывающие компоненты полей на простой поверхности $y = 0$ (плоскость решетки), эквивалентные действию реальной периодической структуры. Схема получения этих условий очень проста. Действительно, после вычисления коэффициентов отражения и прохождения для обеих поляризации согласно формулам (1.1.7), (1.1.13), (1.3.4), (1.3.15) мы знаем истинные поля для областей, лежащих выше прямой $\bar{5}' - \bar{5}$ и ниже прямой $\bar{5} - \bar{5}'$ (напомним, что эти участки находятся от плоскости $y = 0$ на расстояниях, обеспечивающих формирование полей плоских волн). Эти расстояния порядка периода, так как поля местных волн быстро (экспоненциально) затухают при удалении от решетки. Если теперь мы продолжим поля с обеих сторон решетки до $y = 0$, как поля плоских волн (это продолжение, разумеется, не представляет истинного поля в этой области), то тем самым введем при $y = 0$ некую полупрозрачную бесконечнотонкую пленку, на которой определяются скачки компонент поля. Очевидно, что полученные этим способом скачки электромагнитного поля однозначно определяют коэффициенты отражения и прохождения или поля в удаленных зонах. Иными словами, действие воображаемой пленки эквивалентно действию реальной периодической структуры в том смысле, что начиная с некоторого небольшого расстояния от решетки, истинные поля и поля, описываемые с помощью полупрозрачной пленки, совпадают. Таким образом, скачки компонент поля при $y = 0$ могут рассматриваться как эквивалентные граничные условия. Заметим, что при получении граничных условий, носящих локальный характер, существенным является исключение углов падения. Опуская промежуточные выкладки, которые приводятся в Приложении 4, запишем эквивалентные граничные условия в виде

$$H_{\xi_2} - H_{\xi_1} = \frac{-ikl_1}{1 + (kp)^2 (\beta^2 \Delta_2 - \alpha^2 \Delta_3)} \times \\ \times \left[E_{x_2} + E_{x_1} + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial \xi} (H_{y_2} + H_{y_1}) \right], \quad (1.5.1)$$

$$E_{x_2} - E_{x_1} = ik [(H_{\xi_2} + H_{\xi_1}) l - (il_2/k) \partial (E_{y_2} + E_{y_1}) / \partial x], \\ E_{\xi_2} - E_{\xi_1} = ikl_2 [(H_{x_2} + H_{x_1}) - (i/k) \partial (E_{y_2} + E_{y_1}) / \partial \xi], \quad (1.5.2)$$

$$E_{\xi_2} + E_{\xi_1} = ikl_3 [(H_{x_2} - H_{x_1}) - (i/k) \partial (E_{y_2} - E_{y_1}) / \partial \xi].$$

Л. А. Вайнштейном были получены граничные условия аналогичного вида [120]. Для частного случая решетки из ленточных проводников условия (1.5.1), (1.5.2) совпадают с граничными условиями, приводимыми в работах [117].

Отметим физический смысл, содержащийся в условиях (1.5.1), (1.5.2). Первое граничное условие, определяющее скачок состав-

ляющей магнитного поля H_{ξ} , определяет некий средний ток смещения между проводниками, текущий поперек проводов в направлении оси x . Этот ток обязан в основном дипольной поляризации проводов и пропорционален дальнему полю $E_{x_2} + E_{x_1}$. Второе граничное условие выражает тот факт, что на проводниках под влиянием магнитного поля возникают замкнутые кольцевые токи, пропорциональные площади поперечного сечения проводника и эквивалентные, как известно, магнитным токам по оси ξ .

Этот тип токов не учтен в работе Лэмба [105], относящейся к акустической задаче о нормальном падении волны на решетку из тонких круглых стержней с тождественной математической постановкой, а также в работе [129]. Если рассматривать нормальное падение H -поляризованной волны на такую решетку и использовать условие малости диаметра стержней по сравнению с периодом, то формулы (1.1.13) для R и T принимают вид

$$R = \frac{3}{2} ikS/p, \quad T = 1 - \frac{1}{2} ikS/p, \quad (1.5.3)$$

где S — площадь поперечного сечения проводника.

Это совпадает с формулами, полученными в работе [130] для стержня в волноводе, и отличается от выражений, приводимых Лэмбом (для коэффициента отражения, например, получается отличие в полтора раза), которые в пересчете на граничные условия не дают скачка составляющей E_x [131].

По методу Лэмба шивание статического решения ($H_{\xi}^{ст} = A + By_1$) с динамическим ($H_{\xi_2}^{\pi} = Te^{-iky}$ ($y > 0$), $H_{\xi_1}^{\pi} = e^{-iky} + Re^{iky}$ ($y < 0$)) осуществляется на расстояниях y от решетки, больших в масштабе периода и в то же время малых в сравнении с длиной волны ($p \ll |y| \ll \lambda$). В этих областях статическое решение представляется в виде

$$H_{\xi_2}^{ст} = A + B(y + l_1), \quad y > 0,$$

$$H_{\xi_1}^{ст} = A + B(y - l_1), \quad y < 0,$$

$l_1 = \lim_{y \rightarrow \infty} (y_1 - y)$ (для тонких круглых проводников $l_1 = S/p$).

Если выписать члены порядка k^2 , существующие в разложении точного решения по степеням ky и kp (эти члены, очевидно, не могут быть получены из рассмотрения статической задачи), то с точностью до членов порядка k^2 , включительно, решение представимо в виде

$$H_{\xi_2} = H_{\xi_2}^{ст} + kykpC^+ + (kp)^2 D^+ + (ky)^2 \mathcal{E}^+ \quad (y > 0),$$

$$H_{\xi_1} = H_{\xi_1}^{ст} + kykpC^- + (kp)^2 D^- + (ky)^2 \mathcal{E}^- \quad (y < 0). \quad (1.5.4)$$

С другой стороны, H_{ξ}^{π} , разложенное по степеням ky , имеет вид

$$H_{\xi_2} = T - icyT + \dots, \quad H_{\xi_1} = 1 + R + icy(R - 1) + \dots \quad (1.5.5)$$

Отбрасывая члены порядка k^2 и приравнявая свободные члены и коэффициенты при первых степенях y в (1.5.4) и (1.5.5) (именно так сделано у Лэмба), получаем систему уравнений:

$$\begin{aligned} A &= -Bl_1 + T, & A &= Bl_1 + 1 + R, & -B &= ikT, \\ B &= ik(R - 1), \end{aligned} \quad (1.5.6)$$

откуда $A = 1$, $B = -ik$, $R = ikS/p$, $T = 1 - ikS/p$.

Однако легко проверить, что слагаемые, пропорциональные k^2 при первой степени y (в (1.5.4)), влияют на окончательные результаты уже в первом порядке по kp . В частности, оказывается, что

$$\begin{aligned} R &= ikS/p + (ikp/2)(C^+ - C^-), \\ T &= 1 - ikS/p + (ikp/2)(C^+ - C^-), \end{aligned} \quad (1.5.7)$$

т. е. первый порядок по k в формулах Лэмба получен неправильно.

Величина $C^+ - C^-$ пропорциональна площади, вытесненной решеткой, и представляет собой тот скачок электрического поля $E_{x_2} - E_{x_1}$ при переходе через решетку, который не мог быть учтен при решении задачи методом Лэмба. Действительно,

$$E_{x_2} - E_{x_1} = (-1/ik)(\partial H_{\xi_2}/\partial y - \partial H_{\xi_1}/\partial y) = ikp(C^+ - C^-). \quad (1.5.8)$$

Сравнивая (1.5.8) с формулой (1.5.1), видим, что $C^+ - C^- = S/p^2$. Подставляя это значение в (1.5.7), получаем правильный результат (1.5.3).

Нетрудно убедиться в том, что при способе вычислений Лэмба производные по y оказываются считыми с недостаточной относительной точностью, а именно, в нулевом порядке:

$$\frac{\partial H_{\xi}^g}{\partial y} / \frac{\partial H_{\xi}^{ст}}{\partial y} = 1 - icy, \quad p \ll |y| \ll \lambda. \quad (1.5.9)$$

Заметим, что в случае E -поляризации производные сшиваются с требуемой точностью: второе слагаемое в правой части соотношения, аналогичного (1.5.9), пропорционально $kykp$. По этой причине подобный метод вычислений приводит для этой поляризации к правильному результату.

Физически, ошибка Лэмба означает, как указывалось выше, пренебрежение токами, текущими по периметру сечения проводника в одном направлении (кольцевые токи в случае круглых проводников). Эти токи пропорциональны площади поперечного сечения проводников, поэтому при площади поперечного сечения, равной нулю, этот тип токов исчезает. Результаты Лэмба для решеток из бесконечно-тонких лент остаются в силе. Итак, в случае

* Это соотношение справедливо для стержней с любой формой профиля. Для решетки из бесконечно тонких лент $C^+ - C^- = 0$, $l_1 = -\frac{p}{\pi} \ln \cos \frac{\pi q}{2}$, и формулы Лэмба остаются справедливыми.

H -поляризации на контуре поперечного сечения проводов наблюдается два типа токов: \mathcal{Z} — кольцевой (обязан постоянной A) и I — дипольный (обязан члену Vy_1). На верхней половине контура ($y > 0$) эти токи вычитаются, на нижней — складываются (см. рис. 13). Дипольный ток всегда мал, пока не малы щели. Этим объясняется очень хорошее прохождение H -поляризованной волны сквозь решетку. На рис. 14 изображены модули и фазы R

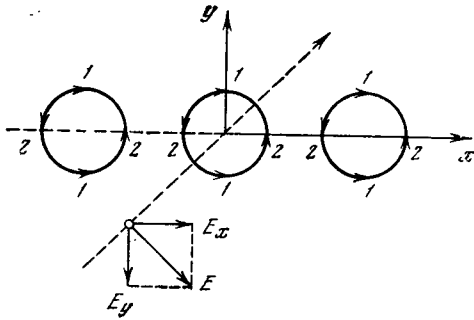


Рис. 13. Типы токов на контуре проводника

и T , вычисленные для решетки из круглых проводников по формулам (1.1.13).

Наконец, первое и второе граничные условия (1.5.2) означают соответственно наличие магнитного тока по оси x и электрического тока в направлении ξ .

Условия (1.5.1), (1.5.2) позволяют оценить границы применимости известных граничных условий анизотропно проводящей поверхности. Если поверхность обладает проводимостью только в направлении ξ , то эти условия записываются в следующем виде:

$$H_{\xi 2} - H_{\xi 1} = 0, \quad E_{x 2} - E_{x 1} = 0, \quad E_{\xi 2} = E_{\xi 1} = 0. \quad (1.5.10)$$

Первое и второе условие означают соответственно пренебрежение дипольными и кольцевыми токами на контуре поперечного сечения проводников. Третье и четвертое условия предполагают идеальную проводимость в любой точке поверхности в направлении проводников решетки.

Из сравнения (см. при этом рис. 8, а, б) (1.5.1), (1.5.2) с условиями (1.5.10), очевидно, следует, что последние могут быть применены, если

$$kl_1/[1 + (kp)^2 (\beta^2 \Delta_2 - \alpha^2 \Delta_3)] \ll 1, \quad |kl_3| \ll 1. \quad (1.5.11)$$

Это значит, что требование весьма малого периода по сравнению с длиной волны, вообще говоря, недостаточно для справедливости условий (1.5.10). Первое требование (1.5.11) запрещает использовать модель анизотропно проводящей поверхности при малых щелях, когда не малы дипольные токи; второе условие (1.5.11), наоборот, свидетельствует о недопустимости применения (1.5.10) при доста-

точно тонких по сравнению с периодом проводниках (т. е. при больших щелях). Анализ рис. 8, а, б показывает, что при $kp \ll 1$ замена условий (1.5.1), (1.5.2) условиями (1.5.10) может быть допущена только в интервале $0,2 < q < 0,5$. Заметим, наконец, что граничные условия (1.5.1), (1.5.2) выведены в предположении плоской решетки, тем не менее их можно считать приближенно выполненными и для не плоской периодической поверхности, при условии, что радиус искривления поверхности ρ много больше

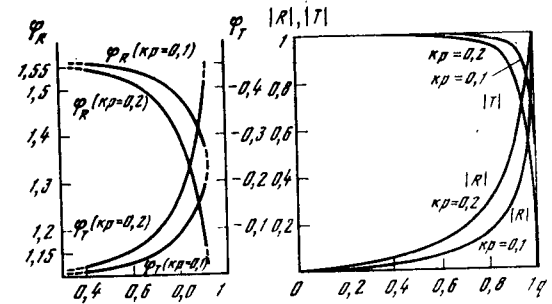


Рис. 14. Зависимость коэффициентов отражения и прохождения от коэффициента заполнения при нормальном падении

периода структуры, так как, очевидно, что поле вблизи поверхности при этом условии можно считать плоским на участке с протяженностью, обеспечивающей затухание местных волн. Локальный характер граничных условий дает возможность использовать их для анализа волн в спиральном или кольцевом волноводах, поскольку для них всегда выполнено условие $p \ll a$ (a — радиус волновода).

Отметим, наконец, как это следует из сравнения с точными (без ограничения на величину p/λ) решениями (см. [124, 125]), полученными для решеток из ленточных проводников, что принятое в настоящей работе приближение приводит к вполне удовлетворительным результатам при $p \approx 0,3 \lambda$. Это связано с тем, что фактическим параметром малости задачи является отношение p/λ (а не kp).

Вычисление коэффициентов отражения и прохождения при помощи интегральных форм уравнений Максвелла. Получим решение задачи в случае нормального падения волны на решетку еще одним, более простым, способом, не прибегая к лемме Лоренца, но используя те же статические решения. Для этого воспользуемся записью уравнений Максвелла в интегральной форме.

1) H -поляризация. Здесь используем уравнения

$$\oint_{\Gamma_1 + \Gamma_2} E_s ds = -ik \iint H_{\xi} dS, \quad (1.5.12)$$

$$\oint_{\Gamma_1 + \Gamma_4} H_s ds = ik \iint E_x dS. \quad (1.5.13)$$

Глава 2

РЕШЕТКИ В ПРОСТРАНСТВЕ, ЗАПОЛНЕННОМ ДИЭЛЕКТРИКАМИ

Для вычисления интегралов по площадям применим найденное ранее статическое решение $H_z = A + By_1$, $E_x = \frac{-B}{ik} \frac{\partial y_1}{\partial y}$. На вертикалях из соображений симметрии $\partial \dots / \partial n = 0$. Из уравнения (1.5.12) сразу получаем

$$E_{x2} - E_{x1} = ik(S/p)A - 2ikyA. \quad (1.5.14)$$

Слагаемое $-2iky$ представляет собой набег фазы между участками $\bar{5}' - \bar{5}$ и $5' - 5$. Первое слагаемое пропорционально площади, вытесненной решеткой. Уравнение (1.5.13) дает

$$H_{z2} - H_{z1} = -B2y + B2l_1. \quad (1.5.15)$$

Разлагая решение в удаленных зонах по ky и приравнявая коэффициенты, находим

$$\left. \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} = \frac{1}{2} \left(1 + 2ikl \mp \frac{1 - ikl_1}{1 + ikl_1} \right), \quad (1.5.16)$$

$$A = 1 + ikl, \quad B = -ik/(1 + ikl_1), \quad l = S/2p.$$

Граничные условия, соответствующие этим коэффициентам, будут иметь вид

$$\left. \begin{matrix} H_{z2} - H_{z1} = -ikl_1(E_{x2} + E_{x1}), \\ E_{x2} - E_{x1} = ikl(H_{z2} + H_{z1}). \end{matrix} \right\} \quad (1.5.17)$$

Формулы (1.5.16) и (1.5.17) справедливы для q , не слишком близких к единице (т. е. при не слишком малых щелях). Это обстоятельство, по-видимому, является здесь следствием использования статического решения на расстояниях от плоскости решетки, которые становятся большими при $q \rightarrow 1$.

2) *E-поляризация*. Здесь используем уравнение

$$\oint_{\Gamma_j} E_s ds = -ik \iint_{\Omega_j} H_x dS \quad (j = 3, 4). \quad (1.5.18)$$

Контуры Γ_j и площади Ω_j лежат в плоскости $x = p/2$ (см. рис. 6). Для вычисления интегралов по площади воспользуемся статическим решением

$$E_z = Ay_2 + By_3, \quad H_x = (1/ik)(A\partial y_2/\partial y + B\partial y_3/\partial y).$$

Получаем

$$E_{z2} - E_{z1} = 2Al_2 + 2Ay, \quad E_{z3} + E_{z1} = 2Bl_3 + 2By. \quad (1.5.19)$$

Приравнявая коэффициенты при степенях y в (1.5.19) и в выражениях для поля «вдали», получаем формулы

$$\left. \begin{matrix} R \\ T \end{matrix} \right\} = \mp \frac{1}{2} \left(1 - 2ikl_2 \pm \frac{1 - ikl_3}{1 + ikl_3} \right), \quad (1.5.20)$$

являющиеся частным случаем формул (1.3.15) при $\beta = 1$.

Материал настоящей главы частично изложен в [132].

Пусть диэлектрическое заполнение пространства различно по разные стороны от решетки. Примем, например, что над решеткой ($y > 0$) пространство имеет диэлектрическую проницаемость ϵ_2 , а под решеткой ($y < 0$) диэлектрическую проницаемость ϵ_1 (см. рис. 15). Магнитная проницаемость всюду равна единице.

Если нормаль к фронту падающей на решетку волны лежит в плоскости, перпендикулярной проводникам (т. е. если $\gamma = 0$), то уравнения Максвелла по-прежнему допускают раздельное рассмотрение двух поляризаций: а) случая, когда магнитное поле параллельно проводникам (*H-поляризация*) и б) случая, когда параллельно проводникам электрическое поле (*E-поляризация*). В общем случае ($\gamma \neq 0$) при падении на решетку плоской электромагнитной волны определенной поляризации в прошедшем и отраженном полях возникают волны обеих поляризаций. Разработанный аппарат тут также пригоден. Несколько усложняющая вычисления особенность этого случая состоит лишь в том, что поля при этом должны выражаться через два потенциала (H_z и E_z), а электростатическая и магнитостатическая задачи решаться совместно. Однако здесь ограничимся рассмотрением случая $\gamma = 0$.

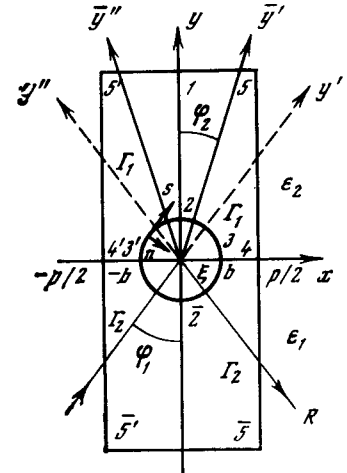


Рис. 15. Период решетки, расположенной на границе раздела двух диэлектриков

§ 2.1. Случай *H-поляризации*

(вектор магнитного поля параллелен проводникам, $E_z = 0$)

Поскольку направление распространения падающей волны перпендикулярно проводникам и решетка однородна в направлении ξ , то поля не зависят от этой координаты ($\partial \dots / \partial \xi = 0$). На рис. 15 выделен типичный участок поля, ограниченный контурами Γ_1 ($5' - 4' - 3' - 2 - 3 - 4 - 5$) и Γ_2 ($4 - 3 - 2' - 3' - 4' - 5'$). Со стороны $y' < 0$ под углом ϕ_1 на решетку падает плоская волна с составляющими электромагнитного поля

$H_z, E_x = \frac{-1}{ik\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial y}, E_y = \frac{1}{ik\epsilon} \frac{\partial H_z}{\partial x}$; отраженная волна уходит в отрицательном направлении оси y'' , прошедшая волна распространяется под углом преломления φ_2 ($\sin \varphi_2 = \sqrt{\epsilon_1/\epsilon_2} \sin \varphi_1$) в положительном направлении оси y' . Компонента H_z удовлетворяет уравнению $\Delta H_z + k^2 \epsilon H_z = 0$ с граничным условием на контуре проводника $\partial H_z / \partial n = 0$ |_c. Для отыскания связи между полями в удаленных зонах и полями вблизи проводников снова применяем лемму Лоренца к контурам Γ_1 и Γ_2 . В качестве вспомогательных полей $E^i H^i$ удобно выбрать поля «встречных» волн в пространстве без решетки с плоской границей раздела диэлектриков при $y = 0$ (это упрощает запись окончательных формул). Обозначим $\alpha_i = \sin \varphi_i, \beta_i = \cos \varphi_i$. Выражения для истинных полей в удаленных зонах и для вспомогательных полей имеют вид

$$\begin{aligned} H_z &= T \exp(-ik\sqrt{\epsilon_2}y'), & y > 0, \\ H_z^1 &= T_1 \exp(-ik\sqrt{\epsilon_2}y''), & y > 0, \\ H_z^2 &= \exp(ik\sqrt{\epsilon_2}y') + R_2 \exp(-ik\sqrt{\epsilon_2}y''), & y > 0, \\ H_z &= \exp(-ik\sqrt{\epsilon_1}y') + R \exp(ik\sqrt{\epsilon_1}y''), & y < 0, \\ H_z^1 &= \exp(-ik\sqrt{\epsilon_1}y'') + R_1 \exp(ik\sqrt{\epsilon_1}y'), & y < 0, \\ H_z^2 &= T_2 \exp(ik\sqrt{\epsilon_1}y'), & y < 0. \end{aligned} \quad (2.1.1)$$

Здесь R и T — искомые коэффициенты отражения и прохождения; R_i, T_i ($i = 1, 2$) — коэффициенты отражения и прохождения для вспомогательных полей, которые находятся из простой задачи о падении плоских волн на плоскую границу раздела двух однородных диэлектриков (в отсутствие решетки):

$$\begin{aligned} R_1 &= (\beta_1 \sqrt{\epsilon_2} - \beta_2 \sqrt{\epsilon_1}) / (\beta_1 \sqrt{\epsilon_2} + \beta_2 \sqrt{\epsilon_1}), \\ T_1 &= 2\beta_1 \sqrt{\epsilon_2} / (\beta_1 \sqrt{\epsilon_2} + \beta_2 \sqrt{\epsilon_1}), \\ R_2 &= -R_1, \quad T_2 = T_1 \beta_2 \sqrt{\epsilon_1} / \beta_1 \sqrt{\epsilon_2}. \end{aligned} \quad (2.1.2)$$

На вертикалях $\bar{5}' - 5', 5 - \bar{5}$ выполняются соотношения

$$H_z(p/2, y) = H_z(-p/2, y) \exp(-ik\sqrt{\epsilon_1} \alpha_1 p), \quad (2.1.3)$$

$$H_z^i(p/2, y) = H_z^i(-p/2, y) \exp(ik\sqrt{\epsilon_1} \alpha_1 p).$$

В результате искомая связь полей представляется в виде

$$\begin{aligned} \int_{3'-2-3} E_s^1 H_z ds + \int_{4'-3', 3-4} (E_x^1 H_z - E_x H_z^1) dx = 0, \\ \int_{3-2-3'} E_s^1 H_z ds - \int_{4'-3', 3-4} (E_x^1 H_z - E_x H_z^1) dx = \frac{2\beta_1 p}{\sqrt{\epsilon_1}} (R_1 - R), \end{aligned} \quad (2.1.4)$$

$$\begin{aligned} \int_{3'-2-3} E_s^2 H_z ds + \int_{4'-3', 3-4} (E_x^2 H_z - E_x H_z^2) dx = -\frac{2\beta_2 p}{\sqrt{\epsilon_2}} T, \\ \int_{3-2-3'} E_s^2 H_z ds - \int_{4'-3', 3-4} (E_x^2 H_z - E_x H_z^2) dx = \frac{2\beta_1 p}{\sqrt{\epsilon_1}} T_1; \end{aligned}$$

а после сложения попарно

$$\begin{aligned} \frac{2\beta_1 p}{\sqrt{\epsilon_1}} (R_1 - R) &= \oint_c E_s^1 H_z ds, \\ \frac{2\beta_2 p}{\sqrt{\epsilon_2}} (T_1 - T) &= \oint_c E_s^2 H_z ds. \end{aligned} \quad (2.1.5)$$

Задача отыскания решения H_z вблизи проводников в статическом приближении ставится аналогично задаче для свободного пространства с той лишь разницей, что на границе диэлектриков должна быть обеспечена непрерывность величин $\left[\frac{1}{\epsilon_i} \frac{\partial H_z}{\partial y} \right]$ (вместо непрерывности $\partial H_z / \partial y$).

В результате поле вблизи проводников представляется в виде

$$\begin{aligned} H_{z2} &= (A + (\epsilon_1/\epsilon_2) B y_1) (1 - ik\sqrt{\epsilon_1} \alpha_1 x_2), & y > 0, \\ H_{z1} &= (A + B y_1) (1 - ik\sqrt{\epsilon_1} \alpha_1 x_2), & y > 0. \end{aligned} \quad (2.1.6)$$

Постоянные A и B подлежат определению из уравнений (2.1.4).

Перейдем теперь к вычислению искомых величин R, T, A, B . Для этого вычислим вначале по аналогии с задачей в свободном пространстве интегралы по участкам $4'-3', 3-4$. При $y = 0$ имеем следующие выражения для вспомогательных и истинных полей

$$E_x^1 = (\beta_2/\sqrt{\epsilon_2}) T_1, \quad H_z^1 = T_1, \quad E_x^2 = -(\beta_1/\sqrt{\epsilon_1}) T_2, \quad H_z^2 = T_2, \quad (2.1.7)$$

(здесь опущен множитель $\exp(ik\sqrt{\epsilon_1} \alpha_1 x)$)

$$H_z = A (1 - ik\sqrt{\epsilon_1} \alpha_1 x_2), \quad E_x = \frac{-B}{ik\epsilon_1} \frac{\partial y_1}{\partial y} (1 - ik\sqrt{\epsilon_1} \alpha_1 x_2). \quad (2.1.8)$$

Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{4'-3', 3-4} (E_x^1 H_z - E_x H_z^1) dx &= T_1 \left(\frac{\beta_2}{\sqrt{\epsilon_2}} 2gA + \frac{p}{ik\epsilon_1} B \right), \\ \int_{4'-3', 3-4} (E_x^2 H_z - E_x H_z^2) dx &= T_2 \left(\frac{\beta_1}{\sqrt{\epsilon_1}} 2gA - \frac{p}{ik\epsilon_1} B \right). \end{aligned}$$

Вычисление интегралов по контуру поперечного сечения проводника дает

$$\begin{aligned}
\int_{3'-2-3} E_s^1 ds &= \frac{T_1}{\sqrt{\varepsilon_2}} a_2, & \int_{3'-2-3} x_2 E_s^1 ds &= \frac{T_1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \alpha_2 l_2 p, \\
\int_{3-2-3'} E_s^1 ds &= -\frac{T_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} a_2^*, & \int_{3-2-3'} x_2 E_s^1 ds &= \frac{T_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \alpha_1 l_2 p, \\
\int_{3'-2-3} E_s^2 ds &= -\frac{T_2}{\sqrt{\varepsilon_1}} a_1^*, & \int_{3'-2-3} x_2 E_s^2 ds &= \frac{T_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} \alpha_2 l_2 p, \\
\int_{3-2-3'} E_s^2 ds &= \frac{T_2}{\sqrt{\varepsilon_1}} a_1, & \int_{3-2-3'} x_2 E_s^2 ds &= \frac{T_2}{\sqrt{\varepsilon_1}} \alpha_1 l_2 p, \\
\int_{3'-2-3} E_s^1 y_1 ds &= \frac{T_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} s_2, & \int_{3'-2-3} x_2 y_1 E_s^1 ds &= \frac{T_1}{\sqrt{\varepsilon_2}} \alpha_2 L_1 p, \\
\int_{3-2-3'} E_s^1 y_1 ds &= \frac{1}{\sqrt{\varepsilon_1}} (s_1^* - R_1 s_1), & \int_{3-2-3'} x_2 y_1 E_s^1 ds &= -\frac{T_1}{\sqrt{\varepsilon_1}} \alpha_1 L_1 p, \\
\int_{3'-2-3} E_s^2 y_1 ds &= \frac{-1}{\sqrt{\varepsilon_2}} (s_2^* + R_1 s_2), & \int_{3'-2-3} x_2 y_1 E_s^2 ds &= \frac{T_2}{\sqrt{\varepsilon_2}} \alpha_2 L_1 p, \\
\int_{3-2-3'} E_s^2 y_1 ds &= -\frac{T_2}{\sqrt{\varepsilon_1}} s_1, & \int_{3-2-3'} x_2 y_1 E_s^2 ds &= -\frac{T_2}{\sqrt{\varepsilon_1}} \alpha_1 L_1 p.
\end{aligned} \tag{2.1.9}$$

Здесь введены следующие обозначения:

$$\begin{aligned}
a_j &= p(\beta_j q - ik\sqrt{\varepsilon_j} l), \\
\frac{s_j}{p^2} &= \beta_j \frac{l_1}{p} - ikp\sqrt{\varepsilon_j}(\beta_j^2 \Delta_2 - \alpha_j^2 \Delta_4), \\
L_1 &= \frac{2}{p} \int_0^b x_2 y_1 y' dx, \quad \Delta_4 = \frac{2}{p^2} \int_0^b x y_1 y' dx; \quad \Delta_4 - L_1/p^2 = \Delta_3.
\end{aligned}$$

Теперь, используя первое и четвертое соотношения (2.1.4) и формулы (2.1.8) и (2.1.9), получаем уравнения для A и B :

$$\begin{aligned}
Ap[\beta_2 - ik\sqrt{\varepsilon_2}(l + \alpha_2^2 l_2)] + B \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \times \\
\times \left(s_2 - ik\sqrt{\varepsilon_2} \alpha_2^2 L_1 p + \frac{p}{ik\sqrt{\varepsilon_2}} \right) = 0, \\
Ap[\beta_1 - ik\sqrt{\varepsilon_1}(l + \alpha_2^2 l_2)] + \\
+ B(-s_1 + ik\sqrt{\varepsilon_1} \alpha_1^2 L_1 p - \frac{p}{ik\sqrt{\varepsilon_1}}) = 2\beta_1 p,
\end{aligned}$$

откуда находим

$$\begin{aligned}
A &= 2\beta_1/G_{22} \left(\frac{G_{11}}{G_{22}} + \sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \frac{D_{11}}{D_{22}} \right), \\
B &= \frac{-2\beta_1}{D_{22}} ik\sqrt{\varepsilon_1} / \left(\sqrt{\frac{\varepsilon_1}{\varepsilon_2}} \frac{G_{11}}{G_{22}} + \frac{D_{11}}{D_{22}} \right).
\end{aligned} \tag{2.1.10}$$

Второе и третье соотношения (2.1.4) используем для получения уравнений, определяющих R и T . Имеем

$$\begin{aligned}
(2\beta_2 p/T_2)(R_1 - R) &= ik\sqrt{\varepsilon_2} \eta A + \\
&+ p^2 \left[\beta_2 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) (l_1/p) + ikp\sqrt{\varepsilon_2} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \Delta_2 \right] B, \\
(2\beta_1 p/T_1)(T_1 - T) &= -ik\sqrt{\varepsilon_1} \eta A - \\
&- p^2 \left[\beta_1 \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) (l_1/p) - ikp\sqrt{\varepsilon_1} \left(1 - \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \Delta_2 \right] B, \\
\eta &= p \left[2l + \left(1 + \frac{\varepsilon_2}{\varepsilon_1} \right) \alpha_2^2 l_2 \right].
\end{aligned} \tag{2.1.11}$$

Откуда, используя выражения (2.1.10), получаем формулы для R и T :

$$\begin{aligned}
R &= [(G_{12}/G_{22} - D_{12}/D_{22}) / (G_{11}/G_{22} + \sqrt{\varepsilon_1} D_{11} / \sqrt{\varepsilon_2} D_{22})] T_1 \sqrt{\varepsilon_1/\varepsilon_2} + R_1, \\
T &= [(G_{21}/G_{22} + \sqrt{\varepsilon_1} D_{21} / \sqrt{\varepsilon_2} D_{22}) / (G_{11}/G_{22} + \sqrt{\varepsilon_1} D_{11} / \sqrt{\varepsilon_2} D_{22})] T_1,
\end{aligned} \tag{2.1.12}$$

где

$$\begin{aligned}
G_{jn} &= \beta_n - (-1)^{j+n} ikp\sqrt{\varepsilon_n} (l + \alpha_j^2 l_2), \\
D_{jn} &= 1 + (-1)^{j+n} ikp(\varepsilon_j/\sqrt{\varepsilon_n}) \beta_n \frac{l_1}{p} + \\
&+ (kp)^2 \varepsilon_j (\beta_j^2 \Delta_2 - \alpha_j^2 \Delta_3), \quad j, n = 1, 2.
\end{aligned}$$

Очевидно, что для получения коэффициентов R' и T' , определяющих поля при падении волны на решетку с противоположной стороны под углом преломления, достаточно в формулах для R и T сделать замену индексов 1 на 2, а 2 на 1.

Проверим предельные случаи в формулах (2.1.12). При $q \rightarrow 0$ R и T переходят в коэффициенты R_1 и T_1 для вспомогательной задачи. Этот же предельный переход имеет место при $kp \rightarrow 0$, т. е. уменьшение периода приводит к усилению просачивания поля сквозь решетку для этой поляризации. При неограниченном сближении проводников ($q \rightarrow 1$, $\sigma \rightarrow 1$) имеем $l_1/p \simeq -(1/2\pi) \ln(\sigma - 1)$, $\Delta_2 \simeq -(1/2\pi p) \ln(\sigma - 1)$, $\Delta_3 \simeq (1/2\pi p) (l + l_2) \ln(\sigma - 1)$, в результате чего

$$T \rightarrow 0, \quad R \rightarrow [\beta_1 + ik\sqrt{\varepsilon_1}(l + \alpha_1^2 l_2)] / [\beta_1 - ik\sqrt{\varepsilon_1}(l + \alpha_1^2 l_2)]. \tag{2.1.13}$$

§ 2.2. Случай E -поляризации

(вектор электрического поля параллелен проводникам, $H_z = 0$)

В этом случае, согласно уравнениям Максвелла, отличные от нуля составляющие электромагнитного поля выражаются через E_z следующим образом:

$$H_x = \frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial y}, \quad H_y = -\frac{1}{ik} \frac{\partial E_z}{\partial x}. \quad (2.2.1)$$

Компонента E_z удовлетворяет уравнению Гельмгольца $\Delta E_z + k^2 \epsilon E_z = 0$ с граничным условием на контуре проводника $E_z|_c = 0$. Система координат и направления распространения волн показаны на рис. 15. Применим лемму Лоренца к контурам Γ_1 и Γ_2 . В качестве вспомогательных полей $E^i H^i$ выбираем поля «встречных» волн, в пространстве без решетки E -поляризованных относительно границы раздела диэлектриков. Запишем выражения для истинных полей в удаленных зонах и для вспомогательных полей:

$$E_z^1 = T_1 \exp(-ik \sqrt{\epsilon_2} \bar{y}''), \quad E_z^2 = \exp(ik \sqrt{\epsilon_2} \bar{y}') + \\ + R_2 \exp(-ik \sqrt{\epsilon_2} \bar{y}''),$$

$$E_z = T \exp(-ik \sqrt{\epsilon_2} \bar{y}'), \quad y > 0; \quad (2.2.2)$$

$$E_z^1 = \exp(-ik \sqrt{\epsilon_1} y'') + R_1 \exp(ik \sqrt{\epsilon_1} y'),$$

$$E_z^2 = T_2 \exp(ik \sqrt{\epsilon_1} y'),$$

$$E_z = \exp(-ik \sqrt{\epsilon_1} y') + R \exp(ik \sqrt{\epsilon_1} y''), \quad y < 0.$$

Здесь R и T — искомые коэффициенты отражения и прохождения, R_j и T_j — коэффициенты отражения и прохождения для вспомогательных полей, которые находятся из простой задачи о падении плоской E -поляризованной волны на плоскую границу раздела двух однородных диэлектриков:

$$R_1 = (\sqrt{\epsilon_1} \beta_1 - \sqrt{\epsilon_2} \beta_2) / (\sqrt{\epsilon_1} \beta_1 + \sqrt{\epsilon_2} \beta_2),$$

$$T_1 = 2 \sqrt{\epsilon_1} \beta_1 / (\sqrt{\epsilon_1} \beta_1 + \sqrt{\epsilon_2} \beta_2), \quad (2.2.3)$$

$$R_2 = -R_1, \quad T_2 = T_1 \frac{\sqrt{\epsilon_2} \beta_2}{\sqrt{\epsilon_1} \beta_1}.$$

Используя соотношения типа (2.1.3), связывающие поля на вертикальных участках $\bar{5}'-5'$ и $\bar{5}-5$, и граничное условие на контуре

проводника, получаем

$$\int_{5'-5} (E_z^1 H_x - E_z H_x^1) dx = \int_{3'-2-3} E_z^1 H_s ds + \\ + \int_{4'-3', 3-4} (E_z^1 H_x - E_z H_x^1) dx, \quad (2.2.4) \\ \int_{\bar{5}-\bar{5}} (E_z H_x^1 - E_z^1 H_x) dx = \int_{3-2-3'} E_z^1 H_s ds - \\ - \int_{4'-3', 3-4} (E_z^1 H_x - E_z H_x^1) dx.$$

Подставляя в левые части выражения для компонент полей из (2.2.2) получаем уравнения

$$\int_{3'-2-3} E_z^1 H_s ds + \int_{4'-3', 3-4} (E_z^1 H_x - E_z H_x^1) dx = 0, \\ \int_{3-2-3'} E_z^1 H_s ds - \int_{4'-3', 3-4} (E_z^1 H_x - E_z H_x^1) dx = \\ = 2\beta_1 \sqrt{\epsilon_1} p (R_1 - R), \quad (2.2.5) \\ \int_{3'-2-3} E_z^2 H_s ds + \int_{4'-3', 3-4} (E_z^2 H_x - E_z H_x^2) dx = \\ = -2\beta_2 \sqrt{\epsilon_2} p T, \\ \int_{3-2-3'} E_z^2 H_s ds - \int_{4'-3', 3-4} (E_z^2 H_x - E_z H_x^2) dx = 2\beta_1 \sqrt{\epsilon_1} p T_2.$$

Сложив попарно (2.2.5), получим

$$-2\beta_1 \sqrt{\epsilon_1} p (R - R_1) \oint_c E_z^1 H_s ds, \quad (2.2.6) \\ 2\beta_2 \sqrt{\epsilon_2} p (T_1 - T) = \oint_c E_z^2 H_s ds.$$

Задача отыскания полей вблизи проводников ставится и решается аналогично задаче для свободного пространства (см. с. 27). В результате, поле в рассматриваемой области вблизи проводников записывается в виде

$$E_z = (Ay_2 + By_3) (1 - ik \sqrt{\epsilon_1} a_1 x_2). \quad (2.2.7)$$

Теперь можно перейти к вычислению искомых величин. При $y = 0$ (участки $4' - 3'$, $3-4$) вспомогательные и истинные поля

равны

$$\begin{aligned} E_{\xi}^1 &= T_1 \exp(ik \sqrt{\varepsilon_1} \alpha_1 x), & M_{\xi}^1 &= -\sqrt{\varepsilon_2} \beta_2 T_1 \exp(ik \sqrt{\varepsilon_2} \alpha_2 x), \\ E_{\xi}^2 &= E_{\xi}^1 T_2 / T_1, & H_x^2 &= -H_x^1; \end{aligned} \quad (2.2.8)$$

$$E_{\xi} = B y_3 (1 - ik \sqrt{\varepsilon_1} \alpha_1 x_2),$$

$$H_x = \frac{A}{ik} \frac{\partial y_2}{\partial y} (1 - ik \sqrt{\varepsilon_1} \alpha_1 x_2),$$

поскольку на этих участках $y_2 = \partial y_3 / \partial y = 0$. Поэтому

$$\begin{aligned} \int_{z'-z'}^{z'-z} E_{\xi} H_x^1 dx &= -\sqrt{\varepsilon_2} \beta_2 T_1 B \int_{z'-z'}^{z'-z} y_3 dx, \\ \int_{z'-z'}^{z'-z} E_{\xi}^2 H_x dx &= \frac{T_1 A}{ik} \int_{z'-z'}^{z'-z} \frac{\partial y_2}{\partial y} dx. \end{aligned} \quad (2.2.9)$$

На контуре проводника имеем [$y_2 = y_3 = 0$, $H_s = (A \frac{\partial y_2}{\partial n} + B \frac{\partial y_3}{\partial n}) \times (1 - ik \sqrt{\varepsilon_1} \alpha_1 x_2)$] (n — направление внешней нормали к контуру). Используя первое и четвертое соотношения (2.2.5), получаем уравнения для A и B :

$$\begin{aligned} A \left[\int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_2}{\partial n} f_2 ds - \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_2}{\partial y} dx \right] + \\ + B \left[\int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_3}{\partial n} f_2 ds - ik \sqrt{\varepsilon_2} \beta_2 \int_{z'-z}^{z'-z} y_3 dx \right] = 0, \\ A \left[\int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_2}{\partial n} f_1 ds + \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_2}{\partial y} dx \right] + \\ + B \left[\int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_3}{\partial n} f_1 ds - ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 \int_{z'-z}^{z'-z} y_3 dx \right] = -2ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 p, \end{aligned} \quad (2.2.10)$$

$$\begin{aligned} f_1 &= [1 - ik \sqrt{\varepsilon_1} (y' - \alpha_1 x_2)], & f_2 &= [1 - ik \sqrt{\varepsilon_2} (\bar{y}'' + \alpha_2 x_2)], \\ \bar{y}'' &= -\alpha_2 x + \beta_2 y(x), & y' &= \alpha_1 x + \beta_1 y(x). \end{aligned}$$

Берем в разложении экспонент под знаком интеграла первые два члена. Находим, используя свойства функций $y_2(x, y)$, $y_3(x, y)$,

$$\begin{aligned} \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_2}{\partial n} f_2 ds &= \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_2}{\partial n} ds - ik \sqrt{\varepsilon_2} \beta_2 \int_{z'-z}^{z'-z} y \frac{\partial y_2}{\partial n} ds, \\ \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_2}{\partial n} f_1 ds &= \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_2}{\partial n} ds + ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 \int_{z'-z}^{z'-z} y \frac{\partial y_2}{\partial n} ds, \\ \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_3}{\partial n} f_2 ds &= \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_3}{\partial n} ds - ik \sqrt{\varepsilon_2} \beta_2 \int_{z'-z}^{z'-z} y \frac{\partial y_3}{\partial n} ds, \\ \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_3}{\partial n} f_1 ds &= \int_{z'-z}^{z'-z} \frac{\partial y_3}{\partial n} ds - ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 \int_{z'-z}^{z'-z} y \frac{\partial y_3}{\partial n} ds. \end{aligned} \quad (2.2.11)$$

Наконец, используя формулы (1.3.14), получаем из (2.2.10)

$$\begin{aligned} A(1 + ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_2 l_2) + B(1 + ik \sqrt{\varepsilon_2} \beta_2 l_3) &= 0, \\ A(1 + ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 l_2) + B(1 + ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 l_3) &= -2ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 p. \end{aligned} \quad (2.2.12)$$

Откуда

$$\begin{aligned} A &= -\left(\frac{2ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1}{G_2} \right) \left(\frac{G_1}{G_2} + \frac{D_1}{D_2} \right)^{-1}, \\ B &= \left(\frac{2ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1}{D_2} \right) \left(\frac{G_1}{G_2} + \frac{D_1}{D_2} \right)^{-1}; \\ G_j &= 1 + ik \sqrt{\varepsilon_j} \beta_j l_2, & D_j &= 1 + ik \sqrt{\varepsilon_j} \beta_j l_3, & j &= 1, 2. \end{aligned} \quad (2.2.13)$$

Для вычисления R и T используем формулы (2.2.6). Имеем

$$\begin{aligned} 2 \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 p (R_1 - R) &= \frac{-A}{ik} \oint_c E_{\xi}^1 \frac{\partial y_2}{\partial n} \kappa ds - \frac{B}{ik} \oint_c E_{\xi}^1 \frac{\partial y_3}{\partial n} \kappa ds, \\ 2 \sqrt{\varepsilon_2} \beta_2 p (T_1 - T) &= -\frac{A}{ik} \oint_c E_{\xi}^2 \frac{\partial y_2}{\partial n} \kappa ds - \frac{B}{ik} \oint_c E_{\xi}^2 \frac{\partial y_3}{\partial n} \kappa ds, \end{aligned} \quad (2.2.14)$$

$$\kappa = 1 - ik \sqrt{\varepsilon_1} \alpha_1 x_2(x, y(x)).$$

Легко видеть, что интегралы по замкнутому контуру равны

$$\begin{aligned} \oint_c E_{\xi}^2 \frac{\partial y_2}{\partial n} \kappa ds &= -2ik \sqrt{\varepsilon_2} \beta_2 p l_2 T_1, \\ \oint_c E_{\xi}^1 \frac{\partial y_3}{\partial n} \kappa ds &= -2p T_1, \\ \oint_c E_{\xi}^2 \frac{\partial y_2}{\partial n} \kappa ds &= 2ik p \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 l_2 T_2, \\ \oint_c E_{\xi}^2 \frac{\partial y_3}{\partial n} \kappa ds &= -2p T_2. \end{aligned} \quad (2.2.15)$$

Подставляя это в (2.2.14), находим формулы для R и T :

$$\begin{aligned} R &= -[(G_2^*/G_2 + D_2^*/D_2)/(G_1/G_2 + D_1/D_2)] T_1 + R_1, \\ T &= [(G_1^*/G_2 + D_1^*/D_2)/(G_1/G_2 + D_1/D_2)] T_1. \end{aligned} \quad (2.2.16)$$

Рассмотрим предельные случаи в формулах (2.2.16).

1. При $\varepsilon_1 = \varepsilon_2 = 1$ выражения (2.2.13) и (2.2.16) переходят в формулы (1.3.15) для случая отсутствия зависимости полей от координаты ξ .

2. При $q = 1$ (решетка превращается в гофрированную поверхность, $l_2 = l_3$) получаем

$$R = -\exp(-2ik \sqrt{\varepsilon_1} \beta_1 l_2). \quad (2.2.17)$$

При этом $T = 0$, $|R| = 1$, что и следовало ожидать.

3. При $q = 0$, $l_2/p = 0$, $l_3/p = \infty$, поэтому $R = R_1$, $T = T_1$. Отметим, что (как видно из формул (2.1.10), (2.1.12), (2.2.13), (2.2.16)) при введении границы раздела диэлектрического заполнения не возникает новых параметров решетки типа l_i, Δ_i .

Если исключить область малых q , где параметр l_3/p велик, то формулы (2.2.16) в нашем приближении можно переписать в простом виде:

$$R \simeq -1 + ik\sqrt{\epsilon_1}\beta_1(l_2 + l_3); \quad T = ik\sqrt{\epsilon_1}\beta_1(l_3 - l_2). \quad (2.2.18)$$

Как видно, коэффициенты R и T , определяемые этими формулами, не зависят от параметров внешнего диэлектрика, что является следствием ничтожного (порядка $k(l_3 - l_2)$, см. рис. 8) просачивания поля во внешнюю область. Коэффициенты отражения и прохождения (2.2.18) позволяют записать эквивалентные граничные условия в виде

$$E_{z2} - E_{z1} = ikl_2(H_{x2} + H_{x1}), \quad E_{z3} + E_{z1} = ikl_3(H_{x2} - H_{x1}). \quad (2.2.19)$$

Как следует из сравнения с формулами (1.5.2), граничные условия E -поляризации для решеток из не слишком тонких проводников не изменяют своего вида при различном (по разные стороны от решетки) диэлектрическом заполнении.

§ 2.3. Учет влияния экрана, расположенного за решеткой.

Граничные условия для периодического волновода с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом

Рассмотрим плоскую систему (см. рис. 16), образованную решеткой и идеальнопроводящей металлической плоскостью, расположенной на расстоянии d от решетки (d предполагается достаточным для формирования плоских полей). Пространство

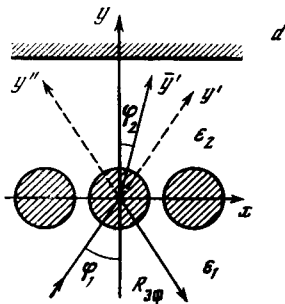


Рис. 16. Система, состоящая из решетки, слоя диэлектрика и экрана

между решеткой и сплошным экраном заполнено диэлектриком с проницаемостью ϵ_2 ; под решеткой ($y < 0$) диэлектрическое заполнение имеет проницаемость ϵ_1 . Пусть со стороны отрицательных значений оси y' под углом φ_1 , на систему падает плоская электромагнитная волна. Вычислим получающийся при этом эффективный

коэффициент отражения. Введение $R_{\text{эф}}$ позволит в дальнейшем избежать рассмотрения полей между решеткой и экраном. Вычисление проводится совершенно аналогично для обеих поляризаций, с той только разницей, что в случае E -поляризации при отражении от экрана электрическое поле меняет свою фазу на π .

Рассмотрим, например, падение H -поляризованной волны. Заменим решетку эквивалентной пленкой, тогда поле в области $y \leq 0$ можно представить в виде

$$H_{z1} = e^{-ik\sqrt{\epsilon_1}y'} + R e^{ik\sqrt{\epsilon_1}y'} + \sum_{n=1}^{\infty} H_{z1}^{(n)}, \quad (2.3.1)$$

где сумма в правой части есть поле, обязанное многократным отражениям в области между пленкой и экраном*. Вычислим эту сумму, например, в точке $x = 0$, $y = -0$. Легко подсчитать, что n -е слагаемое равно

$$H_{z1}^{(n)} = TT'R^{n-1} \exp(-ik\sqrt{\epsilon_2}\beta_2 2nd). \quad (2.3.2)$$

Здесь R' и T' — взаимные коэффициенты (см. с. 45).

В случае E -поляризации соответствующее слагаемое будет отличаться по виду только множителем $e^{i\pi n}$. Если определить $R_{\text{эф}}$ следующим образом:

$$H_{z1} = \exp(-ik\sqrt{\epsilon_1}y') + R_{\text{эф}}^m \exp(ik\sqrt{\epsilon_1}y'), \quad (2.3.3)$$

$$E_{z1} = \exp(-ik\sqrt{\epsilon_1}y') + R_{\text{эф}}^e \exp(ik\sqrt{\epsilon_1}y'),$$

то, просуммировав прогрессию, получаем выражения для $R_{\text{эф}}^m$ и $R_{\text{эф}}^e$ в виде

$$R_{\text{эф}}^m = R + TT' / [\exp(ik\sqrt{\epsilon_2}\beta_2 2d) - R'], \quad (2.3.4)$$

где R, T, R', T' определяются формулами для H -поляризации, и

$$R_{\text{эф}}^e = R - TT' / [\exp(ik\sqrt{\epsilon_2}\beta_2 2d) + R'], \quad (2.3.5)$$

где R, T, R', T' определяются формулами для E -поляризации. Взяв отношения E_{z1}/H_{x1} и E_{x1}/H_{z1} при $y = 0$, получаем два эквивалентных граничных условия для системы решетка — слой диэлектрика — экран:

$$E_{x1} = -\eta^m H_{z1}, \quad E_{z1} = \eta^e H_{x1}, \quad (2.3.6)$$

$$\eta^m = (-\beta_1/\sqrt{\epsilon_1}) [(1 - R_{\text{эф}}^m)/(1 + R_{\text{эф}}^m)],$$

$$\eta^e = (-1/\sqrt{\epsilon_1}\beta_1) [(1 + R_{\text{эф}}^e)/(1 - R_{\text{эф}}^e)].$$

* Можно, разумеется, вычислять H_{z1} , сшивая общие выражения для полей в смежных областях.

Граничные условия (2.3.6) получены в предположении $\gamma = 0$, т. е. при отсутствии зависимости полей от координаты ξ (направление проводников). Поэтому в применении к кольцевому волноводу с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом, строго говоря, эти граничные условия соответствуют только симметричным типам волн. Однако при больших значениях параметра ka (a — радиус волновода) зависимость полей вдоль стенки волновода в азимутальном направлении выражена слабо: соответствующий косинус угла Бриллюэна в разложении волноводных волн на плоские есть малая величина $\gamma \sim n/ka$ (n — азимутальный индекс волны). Поэтому граничные условия (2.3.6) вполне могут быть использованы для анализа распространения несимметричных типов волн, если выполнено условие $n/ka \ll 1$.

Материал второй главы частично изложен в [133, 134].

Глава 3

ОТРАЖЕНИЕ ЭЛЕКТРОМАГНИТНЫХ ВОЛН ОТ ГОФРИРОВАННОЙ ПОВЕРХНОСТИ

§ 3.1. Мелкая гофра

Пусть на гофрированную поверхность, изображенную на рис. 17, наклонно падает произвольным образом поляризованная плоская электромагнитная волна. Направляющие косинусы падающей волны по осям x, ξ, y соответственно равны α, γ, β ($\alpha^2 + \beta^2 + \gamma^2 = 1$). Наряду с малостью периода p будем считать, что глубина канавок гофры c мала по сравнению с длиной волны λ ($p \ll \lambda, c \ll \lambda$). Решение задачи для этого случая получается как частное следствие из результатов, полученных для решеток, если неограниченно сблизить проводники, образующие решетку. При таком предельном переходе, как это показано выше (см. формулы (1.1.17), (1.3.16)) коэффициенты прохождения обращаются в нуль, а коэффициенты отражения при падении H -поляризованной волны равны

$$R = e^{2i\varphi}, \quad \varphi = \arctg [(k(1 - \gamma^2)l + \alpha^2 kl_2)/\beta], \quad (3.1.1)$$

а при падении E -поляризованной волны равны

$$R = e^{-2i\psi}, \quad \psi = kl_2\beta. \quad (3.1.2)$$

При этом поле вблизи гофрированной поверхности определяется в первом случае выражением

$$H_z = 2\beta [1 - ik\alpha x_2(x, y)] / \{\beta - ik[(1 - \gamma^2)l + \alpha^2 l_2]\}, \quad (3.1.3)$$

а во втором

$$E_z = -2ik\beta \sqrt{1 - \gamma^2} y_2(x, y). \quad (3.1.4)$$

Параметры l и l_2 зависят от относительных размеров и формы направляющей гофры. Заметим, что значения параметров l и l_2 для гофры равны значениям этих параметров для решетки с тем же коэффициентом заполнения $q = 2b/p$, т. е. металлизация участков 3 — 4 по оси x не влияет на величину этих параметров. Это становится совершенно ясным, если рассматривать гофру (рис. 18, а) как предельный случай решетки из проводников, имеющих по оси x бесконечно тонкие плоские металлические отрезки (рис. 18, б). Действительно, по определению $l = S/2p$ (S — площадь сечения проводника), но отрезки имеют площадь сечения, равную нулю; преобразование $z_2(z)$, с помощью которого вычисляется параметр l_2 , очевидно остается неизменным при любых отрезках вплоть до их полного смыкания (рис. 7).

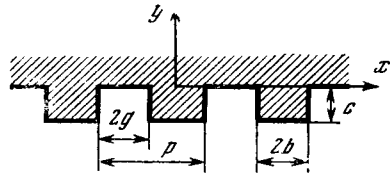


Рис. 17. Сечение гофрированной поверхности

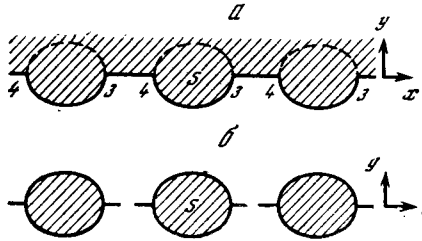


Рис. 18. Гофра произвольной формы и соответствующая ей решетка

С помощью коэффициентов (3.1.1) и (3.1.2) запишем эквивалентные граничные условия, связывающие компоненты тангенциальных полей на линии, соединяющей гребни гофры ($y = -c$). Поля при $y = -c$ в случае H -поляризации равны

$$\begin{aligned} E_x &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2})(e^{ik\beta c} - Re^{-ik\beta c}), \\ H_x &= \sqrt{1-\gamma^2}(e^{ik\beta c} + Re^{-ik\beta c}), \end{aligned} \quad (3.1.5)$$

а в случае E -поляризации равны

$$\begin{aligned} E_x &= \sqrt{1-\gamma^2}(e^{ik\beta c} + Re^{-ik\beta c}), \\ H_x &= (-\beta/\sqrt{1-\gamma^2})(e^{ik\beta c} - Re^{-ik\beta c}). \end{aligned} \quad (3.1.6)$$

Здесь опущен множитель $\exp[-ik(\alpha x + \gamma \xi)]$. Положим

$$E_x = \eta^m H_x, \quad E_x = \eta^e H_x. \quad (3.1.7)$$

Тогда

$$\begin{aligned} \eta^m &= [\beta/(1-\gamma^2)](1 - e^{2i(\varphi-k\beta c)})/(1 + e^{2i(\varphi-k\beta c)}), \\ \eta^e &= -[(1-\gamma^2)/\beta^2](1 - e^{-2i(\psi-k\beta c)})/(1 - e^{-2i(\psi-k\beta c)}). \end{aligned} \quad (3.1.8)$$

Подставляя сюда φ и ψ по (3.1.1) и (3.1.2), получаем

$$\eta^m = ik(c-l) - ik(\alpha^2/(1-\gamma^2))\delta, \quad (3.1.9)$$

$$\eta^e = -ik(1-\gamma^2)\delta, \quad \delta = l_2 + c. \quad (3.1.10)$$

При анализе отражения электромагнитных волн от гофрированной поверхности с малым периодом и прямоугольной образующей обычно полагают

$$\eta^m = i(2g/p) \operatorname{tg} kc, \quad (3.1.11)$$

$$\eta^e = 0. \quad (3.1.12)$$

Условие (3.1.11) получается при замене поля в канавке на поле одной кабельной волны, причем множитель $2g/p$ возникает вследствие усреднения поля по периоду на линии $y = -c$. В нашем случае ($kc \ll 1$) формулы (3.1.9) и (3.1.10) дают для прямоугольной гофры ($l = qc$)

$$\eta^m = ikc(2g/p - \delta\alpha^2/c(1-\gamma^2)), \quad (3.1.13)$$

$$\eta^e = -ikc(1-\gamma^2)\delta/c. \quad (3.1.14)$$

Формула (3.1.13) отличается от того, что (3.1.11) дает для $kc \ll 1$ слагаемым $[-ik\delta\alpha^2/(1-\gamma^2)]$. Таким образом, учет местных волн в статическом приближении дает поправочные члены одного порядка для обеих поляризацій. Иными словами, поправка по сравнению с одноволновым приближением в случае H -поляризации пропорциональна проникновению в канавку E -поляризованного поля. Для бесконечно тонких диафрагм ($q = 0$, $2g/p = 1$, $l_2 = -(p/\pi) \ln \operatorname{ch}(\pi c/p)$) зависимость δ/c от c/p изображена на рис. 19.

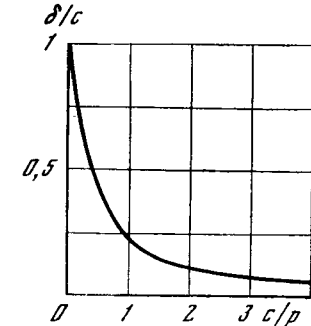


Рис. 19. Зависимость параметра δ/c от c/p

Заметим, что для глубокой по сравнению с периодом канавки ($c/p \gg 1$, но $c \ll \lambda$) δ/c всегда мал. Например, в случае бесконечно тонких диафрагм

$$\delta/c = (p/\pi c) \ln 2. \quad (3.1.15)$$

Однако при c , сравнимых с p , второе слагаемое в (3.1.13) может быть сравнимым с первым, и импедансное условие (3.1.11) становится в этом случае непригодным. Заметим также, что при уменьшении ширины канавок ($2g/p \rightarrow 0$) $\delta/c \rightarrow 0$.

§ 3.2. Глубокая гофра

Рассмотрим случай нормального падения H -поляризованной волны на гофрированную поверхность с прямоугольной направляющей (рис. 20), и пусть глубина канавок гофры c сравнима с длиной волны. Отличные от нуля компоненты электромагнитного

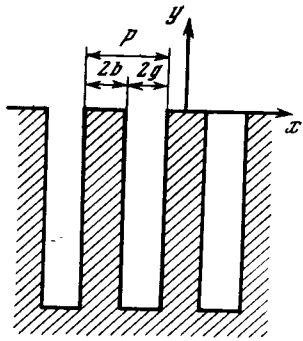


Рис. 20. Глубокая гофра с прямоугольной направляющей

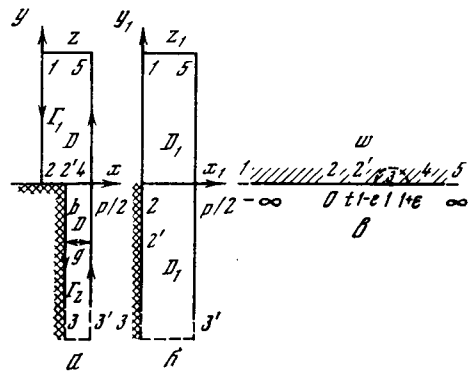


Рис. 21. Основная и вспомогательные комплексные плоскости для глубокой гофры

поля суть H_ξ , $E_x = \frac{-1}{ik} \frac{\partial H_\xi}{\partial y}$, $E_y = \frac{1}{ik} \frac{\partial H_\xi}{\partial x}$, причем E_y отлична от нуля лишь вблизи гребней гофры. В зоне ($y \gg p$), где сформировано плоское поле, можно записать

$$H_\xi = e^{iky} + Re^{-iky}, \quad E_x = -e^{iky} + Re^{-iky}. \quad (3.2.1)$$

На рис. 21 выделен повторяющийся участок поля, ограниченный контуром Γ_1 (1 — 2 — 2' — 4 — 5) шириной $p/2$ ($b + g = p/2$) и контуром Γ_2 (2' — 3 — 3' — 4), охватывающим левую половину канавки. Заметим, что $\partial H_\xi / \partial n = 0$ на всех вертикальных участках контуров и на участке 2 — 2': на участках 1 — 2 и 3' — 5 это следует из соображений симметрии, а на 2 — 2' — 3 — 3' в силу равенства нулю тангенциального электрического поля на металле. Применим лемму Лоренца к контуру Γ_1 дважды: один раз с вспомогательным полем $H_\xi^1 = -E_x^1 = e^{iky}$ и второй раз с вспомогательным полем $H_\xi^2 = E_x^2 = e^{-iky}$. В результате получаем два соотношения:

$$Rp = \int_{2-2'-4} H_\xi dx + \int_{2'-4} E_x dx, \quad p = \int_{2-2'-4} H_\xi dx - \int_{2'-4} E_x dx, \quad (3.2.2)$$

используя которые, находим следующее выражение для импеданса η^m на линии гребней ($y = 0$):

$$\eta^m = (R - 1)/(R + 1) = \left(\int_{2'-4} E_x dx \right) / \int_{2-2'-4} H_\xi dx. \quad (3.2.3)$$

Таким образом, задача свелась к нахождению поля вблизи гребней гофры. Это поле может быть найдено из решения статической задачи. В настоящем случае глубина канавки s сравнима с длиной

волны λ , значит $s \gg p$, и при решении статической задачи ($\lambda = \infty$) в области с размерами порядка периода можно, очевидно, считать канавку бесконечно глубокой. Итак, ищем решение уравнения $\Delta H_\xi = 0$ с условием $\partial H_\xi / \partial n = 0$ на вертикальных участках контуров Γ_1 и Γ_2 и на участке 2 — 2'. Для определения вида решения осуществим конформные преобразования $z(w)$ и $z_1(w)$, переводящие области D и D_1 в верхнюю полуплоскость вспомогательной плоскости w (вид областей и соответствие точек на рис. 21, а, б, в). Легко проверить, что по формулам Кристоффеля — Шварца преобразования $z(w)$ и $z_1(w)$ могут быть записаны в виде

$$z(w) = iC \int_0^w \sqrt{\frac{w-t}{w} \frac{dw}{w-1}}, \quad z_1(w) = C [i \ln(w-1) + \pi]. \quad (3.2.4)$$

Выразим C и t через геометрические размеры гофры. Для этого вначале вычислим скачок $\text{Re}(z(w))$ при переходе с вертикали $x = b$ на $x = p/2$ при $w \rightarrow 1$. Обозначим $w = \epsilon e^{i\varphi} + 1$ и будем двигаться по пунктирной полуокружности в плоскости w ; получаем тогда

$$\begin{aligned} z(1+\epsilon) - z(1-\epsilon) &= iC \int_{1-\epsilon}^{1+\epsilon} \sqrt{\frac{w-t}{w} \frac{dw}{w-1}} = \\ &= -C \int_0^\pi \sqrt{\frac{\epsilon e^{i\varphi} + 1 - t}{1 + \epsilon e^{i\varphi}}} d\varphi \xrightarrow{(\epsilon \rightarrow 0)} \pi C \sqrt{1-t}. \end{aligned}$$

Значит $\pi C \sqrt{1-t} = g$. С другой стороны, подставляя в $z(w)$ точку 2', имеем

$$b = C \int_0^t \sqrt{\frac{t-w}{w} \frac{dw}{w-1}}. \quad (3.2.5)$$

Вычисление этого интеграла дает второе соотношение: $C\pi(1 - \sqrt{1-t}) = b$. Поэтому

$$C = p/2\pi, \quad t = 1 - (1-g)^2; \quad q = 2b/p. \quad (3.2.6)$$

Если в качестве решения вблизи гребней гофры возьмем функцию $H_\xi = A + By_1(x, y)$, где A и B — постоянные, а $y_1(x, y)$ — мнимая часть преобразования $z_1(z)$, то поставленные выше условия, очевидно, будут выполнены. При этом $E_x = \frac{-B}{ik} \frac{\partial y_1}{\partial y}$. Таким образом, выражение для η^m приводится к виду

$$\eta^m = - \left(\int_{2'-4} \frac{\partial y_1}{\partial y} dx \right) / ik \left(\frac{p}{2} \frac{A}{B} + \int_{2-2'-4} y_1 dx \right). \quad (3.2.7)$$

Преобразование $z_1(z)$ обладает свойством: $dz_1/dz \rightarrow 1$ ($y \rightarrow \infty$). Учитывая это обстоятельство и записав условие равенства нулю

интеграла по замкнутому контуру Γ_1 от функций $\partial y_1/\partial n$ и $(y_1 \partial y_1/\partial n - y \partial y_1/\partial n)$, получаем

$$\int_{2'-4} \frac{\partial y_1}{\partial y} dx = \frac{p}{2}, \quad \int_{2-2'-4} y_1 dx = \frac{p}{2} l_1, \quad (3.2.8)$$

где $l_1 = \lim_{y \rightarrow \infty} (y_1 - y)$, поэтому

$$\eta^m = -\frac{1}{ik(A/B + l_1)}. \quad (3.2.9)$$

Вычислим величину A/B . Для этого применим лемму Лоренца к контуру Γ_2 . При этом, чтобы не записывать истинное поле на дне канавки, возьмем в качестве вспомогательного поле с исчезающей при $y = -c$ компонентой E_x :

$$H_z^3 = e^{-iky} + e^{2ikc} e^{iky}, \quad (3.2.10)$$

$$E_x^3 = e^{-iky} - e^{2ikc} e^{iky}.$$

Легко видеть, что интегралы по дну канавки и по вертикальным участкам равны нулю и лемма Лоренца сводится к равенству

$$\int_{2'-4} E_x^3 H_z^3 dx = \int_{2'-4} E_x H_z^3 dx. \quad (3.2.11)$$

Подставляя сюда выражения для истинного и вспомогательного полей при $y = 0$, получим

$$\frac{A}{B} = -\left(\frac{2}{p} \operatorname{tg} kc \int_{2'-4} y_1 dx + \frac{1}{k}\right) / \frac{2g}{p} \operatorname{tg} kc. \quad (3.2.12)$$

Наконец, подставляя это выражение в (3.2.9) находим

$$\eta^m = -(i2g/p) (\operatorname{tg} kc) / (1 + k\tilde{l} \operatorname{tg} kc), \quad (3.2.13)$$

где введено обозначение $\tilde{l} = l_1 q - \frac{2}{p} \int_{2-2'} y_1 dx$.

Этому значению η^m соответствует коэффициент отражения

$$R = [1 + k\tilde{l} \operatorname{tg} kc - i(2g/p) \operatorname{tg} kc] / [1 + k\tilde{l} \operatorname{tg} kc + i(2g/p) \operatorname{tg} kc]. \quad (3.2.14)$$

Кроме того,

$$A = \frac{2[1 + k(\tilde{l} + (2g/p) l_1) \operatorname{tg} kc]}{(1 + k\tilde{l} \operatorname{tg} kc) + i(2g/p) \operatorname{tg} kc},$$

$$B = \frac{-2k(2g/p) \operatorname{tg} kc}{(1 + k\tilde{l} \operatorname{tg} kc) + i(2g/p) \operatorname{tg} kc}.$$

Вычислив интегралы, входящие в \tilde{l} (эти вычисления приводятся в Приложении 5), получим формулу

$$\tilde{l} = (1/2\pi) [q^2 \ln q + 2(1 - q) \ln 4(1 - q) - (2 - q)^2 \ln \cdot (2 - q)]. \quad (3.2.15)$$

Результат расчета параметра \tilde{l}/p в функции от q приводится на рис. 22. Как следует из расчета, параметр \tilde{l}/p есть малая величина. Таким образом, если исключить область больших значений $\operatorname{tg} kc$ ($c \simeq (\lambda/4)(2\nu + 1)$), то можно сказать, что поправка к формуле (3.1.11), обязанная учету местных волн, будет малой, т. е. в этом случае замена поля в канавке полем одной кабельной волны является достаточно хорошей аппроксимацией. Однако в области

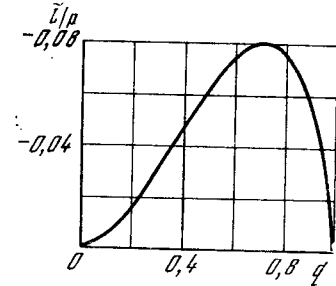


Рис. 22. Зависимость параметра \tilde{l}/p от коэффициента заполнения

больших значений $\operatorname{tg} kc$ отношение импедансов, определяемых формулами (3.1.11) и (3.2.13), может быть нулем, а также обращаться в бесконечность. Здесь поправка существенна.

Формулы для мелкой гофры не могут быть согласованы с формулами для глубокой гофры из-за использованного для последней конформного преобразования, дающего бесконечный провал при $w \rightarrow 1$:

Заметим также, что при падении E -поляризованной волны сохраняется результат (3.1.10), ибо физически ясно, что при $c \gg \gg p$ E -поляризованное поле лишь слегка провисает в канавку, не «чувствуя» ее дна. Этот результат независимости δ от c , кстати говоря, содержится в формуле (3.1.15).

§ 3.3. Резонаторы, связанные через узкую и глубокую щель

Настоящий параграф в методическом отношении тесно связан с предыдущим, поскольку имеет с ним много общего в способе построения решения исследуемых задач.

Здесь мы рассмотрим плоскую задачу возбуждения двух произвольных объемов V_1 и V_2 (рис. 23). Объемы связаны между собой щелью глубины d , сравнимой с длиной волны λ ; ширина щели $2l$ мала по сравнению с λ ($2l \ll \lambda$). Обозначим устья щели через \bar{s}_i , полные контуры объемов через S_i , а их длины через $2L_i$ ($i = 1, 2$). Будем считать, что щель, представляющая собой отрезок плоского волновода, перпендикулярна к контурам S_i , и что система имеет ось симметрии. Для сокращения записи будем рассматривать только четные относительно этой оси решения. Источники поля могут присутствовать в обоих объемах.

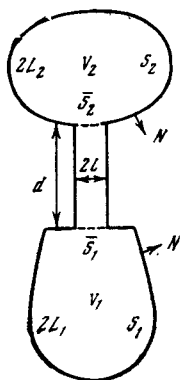


Рис. 23. Резонаторы, связанные через глубокую щель

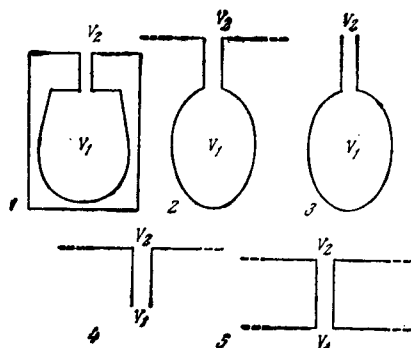


Рис. 24. Частные случаи связанных областей

Математическая задача состоит в решении уравнения

$$\Delta u + k^2 u = f \quad (3.3.1)$$

с граничным условием на полной металлической поверхности S

$$\frac{\partial u}{\partial n} = 0 \Big|_S, \quad (3.3.2)$$

что соответствует H -поляризации* ($u = H_z$). Объем V_i может быть, в частности, бесконечным, и тогда решение в нем должно удовлетворять условию излучения. Вблизи острых кромок должно быть выполнено условие конечности энергии. На рис. 24 изображены возможные частные случаи вида областей, соответствующие данной формулировке задачи.

Метод решения задачи состоит в следующем. Поскольку ширина щели, т. е. плоского волновода, связывающего объемы, мала в сравнении с длиной волны, то поля вблизи его концов ищутся в статическом приближении методом конформных преобразований. Эти поля вблизи каждого устья щели определяются из конформных преобразований с точностью до постоянных коэффициентов, и с помощью формулы Грина связываются между собой и с выражениями для внешних (по отношению к щели) полей. В результате получается линейная алгебраическая система уравнений для неизвестных коэффициентов, и решение задачи выписывается в явном виде.

Приступим к решению задачи. Введем функции Грина G_i областей V_i :

$$\Delta G_i + k^2 G_i = \delta \quad (a), \quad \frac{\partial G_i}{\partial n} = 0 \Big|_{S_i} \quad (b) \quad (3.3.3)$$

* В случае E -поляризации ($u = 0 \Big|_S$, $u = E_z$) узкая щель является запрещенным волноводом, поэтому объемы развязаны, и задача не представляет интереса.

и функции u_i^0 , являющиеся решением задачи дифракции источников данного объема V_i при отсутствии в нем щели (\bar{S}_i заматаллизированы):

$$\Delta u_i^0 + k^2 u_i^0 = f \quad (a), \quad \frac{\partial u_i^0}{\partial n} \Big|_{S_i} = 0 \quad (b). \quad (3.3.4)$$

Применим теорему Грина, записанную для двух функций G_i и $u - u_i^0$ к каждой области V_i . В результате получим выражение для полного поля u всюду в V_i через его нормальную производную на щели:

$$u = u_i^0 - \int_{\bar{S}_i} \frac{\partial u}{\partial n} G_i ds. \quad (3.3.5)$$

Свяжем теперь поля на противоположных устьях щели \bar{S}_1 и \bar{S}_2 . Для этого введем два вспомогательных поля

$$v_1 = \cos ky \quad (a), \quad v_2 = \cos k(y + d) \quad (b) \quad (3.3.6)$$

и применим теорему Грина, записанную для полного поля и одного из вспомогательных (3.3.6), к области щели ($-d \leq y \leq 0$, рис. 25); тогда

$$\oint (v_j \frac{\partial u}{\partial n} - u \frac{\partial v_j}{\partial n}) ds = 0 \quad (j = 1, 2). \quad (3.3.7)$$

Используя в (3.3.7) граничное условие (3.3.2), а также то, что согласно определению (3.3.6) $\frac{\partial v_1}{\partial n} \Big|_{S_2} = \frac{\partial v_2}{\partial n} \Big|_{S_1} = 0$, получим искомую связь:

$$\int_{\bar{S}_i} \frac{\partial u}{\partial n} ds + \cos kd \int_{\bar{S}_j} \frac{\partial u}{\partial n} ds = k \sin kd \int_{\bar{S}_j} u ds \quad (i \neq j). \quad (3.3.8)$$

Подставляя (3.3.5) в правую часть (3.3.8), получим соотношение, из которого позже определим неизвестные коэффициенты в статических решениях:

$$\int_i \frac{\partial u}{\partial n} ds + \cos kd \int_{\bar{S}_j} \frac{\partial u}{\partial n} ds + k \sin kd \int_{\bar{S}_j} ds \int_{\bar{S}_j} \frac{\partial u}{\partial n} G_j ds' = k \sin kd \int_{\bar{S}_j} u_j ds. \quad (3.3.9)$$

Чтобы определить структуру статических решений вблизи устьев щели применим, как и в § 3.2, метод конформных преобразований, полагая щель бесконечно глубокой. Для этого осуществим конформное преобразование $z_1(z)$, переводящее интересующую нас область (вблизи устьев щели) D в плоскости комплексного переменного z в вертикальную полосу D_1 плоскости z_1 (см. рис. 26). Преобразование удобно осуществить (как и в случае глубокой гофры) в два этапа: сначала перевести D в верхнюю

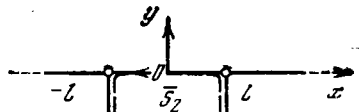


Рис. 25. Область щели

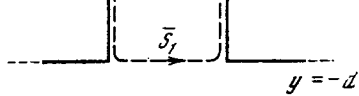
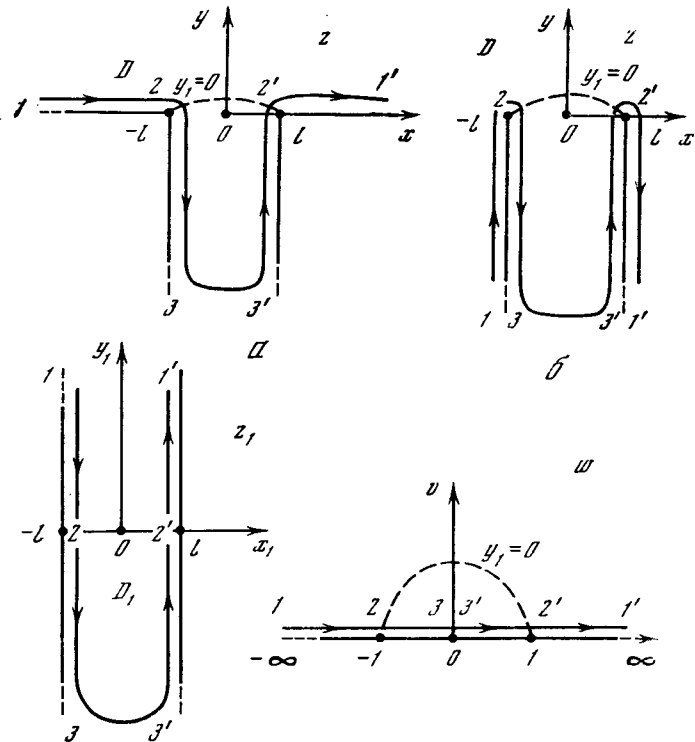


Рис. 26. Основные и вспомогательные комплексные плоскости



полуплоскость вспомогательной плоскости w , а затем эту полуплоскость связать преобразованием $z_1(w)$ с упомянутой полосой D_1 в плоскости z_1 . Согласно формуле Кристоффеля — Шварца, эти преобразования имеют следующий вид.

Для случая (а), когда конец плоского волновода нагружен на фланцы,

$$z(w) = (2l/\pi) (\sqrt{w^2 - 1} - i \ln [(i + \sqrt{w^2 - 1})/w]); \quad (3.3.10a)$$

для случая (б), когда конец плоского волновода открывается в свободное пространство,

$$z(w) = (il/\pi)(1 - w^2 + 2 \ln w) + l. \quad (3.3.10б)$$

Преобразование $z_1(w)$ дается выражением

$$z_1(w) = (2il/\pi) \ln w + l. \quad (3.3.11)$$

Виды областей, контуры их обхода и соответствие точек даны на рис. 26.

Интересующие нас статические решения вблизи устьев щели имеют структуру

$$u(x, y) = A + By_1(x, y), \quad y_1 = \text{Im } z_1(z). \quad (3.3.12)$$

Действительно, определенное таким образом решение удовлетворяет уравнению Лапласа (так как согласно свойству конформных преобразований ему удовлетворяет $\text{Im } z_1(z)$), а также граничным условиям на поверхности металла $\partial u/\partial n = 0$, так как на соответствующем контуре $1-2-3-3'-2'-1$ в плоскости z_1 $\partial y_1/\partial n \sim \partial y_1/\partial x_1 = 0$. Кроме того, легко проверить, что статическое решение (3.3.12) имеет нужную для конечности энергии особенность поля вблизи острых кромок. Условия на статических бесконечностях заменяют собой соотношения (3.3.9), из которых мы найдем коэффициенты B ; константы A могут быть затем вычислены по равенству (3.3.5), взятому на \bar{s}_i .

Ниже нам потребуются два асимптотических свойства конформных преобразований (3.3.10), (3.3.11). Во-первых, введя обозначение $z = re^{i\varphi}$, можно показать, что вне плоского волновода при $r \rightarrow \infty$ (что соответствует $w \rightarrow \infty$) $\text{Im } z_1(z)$ имеет следующую асимптотику.

Для преобразования с фланцами (3.3.10а)

$$y_1 \simeq (2l/\pi) \ln (\pi r/2l) \quad (r \rightarrow \infty), \quad (3.3.13a)$$

для преобразования, соответствующего концу волновода без фланцев (3.3.10б).

$$y_1 \simeq (l/\pi) \ln (\pi r/l) \quad (r \rightarrow \infty). \quad (3.3.13б)$$

И, во-вторых, внутри плоского волновода при $y \rightarrow -\infty$ (что соответствует $w \rightarrow 0$) имеет место предельное соотношение $dy_1/dy \rightarrow 1$. Это дает для преобразования (3.3.10а)

$$y_1 \simeq y - (2l/\pi) \ln (e/2) \quad (y \rightarrow \infty), \quad (3.3.14a)$$

а для преобразования (3.3.10б)

$$y_1 \simeq y - l/\pi \quad (y \rightarrow -\infty). \quad (3.3.14б)$$

Используя (3.3.13) и условие равенства нулю интеграла по замкнутому контуру $\oint \frac{\partial y_1}{\partial n} ds = 0$, следующее из формулы Грина, легко

показать, что

$$\int_{s_i} \frac{\partial y_1}{\partial n} ds = -2L. \quad (3.3.15)$$

Если же теорему Грина для двух функций y_1 и y применить к области, лежащей внутри плоского волновода, и использовать при этом асимптотику (3.3.14), то для y_1 из (3.3.10а) будем иметь

$$\int_{s_i} y_1 ds = -\frac{4l^2}{\pi} \ln \frac{e}{2}, \quad (3.3.16a)$$

а для y_1 из (3.3.10б)

$$\int_{s_i} y_1 ds = -\frac{2l^2}{\pi}. \quad (3.3.16б)$$

Подставляя теперь вид статического решения (3.3.12) в (3.3.9), используя при этом (3.3.15) и считая u_i^0 не меняющимся на щели, получим систему уравнений для определения B_i :

$$B_i + B_j (\cos kd + kl D_j \sin kd) = -k \sin kdu_j^0(0) \quad (3.3.17)$$

$(i, j = 1, 2; i \neq j),$

где через D_j обозначен интеграл

$$D_j = -\frac{1}{2l^2} \int_{s_j} ds \int_{s_j} \frac{\partial y_1}{\partial n} G_j ds', \quad (3.3.18)$$

а точка 0 соответствует середине щели. Из (3.3.17) получаем искомые коэффициенты

$$B_j = k \frac{u_i^0(0) - (\cos kd + kl D_i \sin kd) u_j^0(0)}{kl(D_1 + D_2) \cos kd - [1 - (kl)^2 D_1 D_2] \sin kd}. \quad (3.3.19)$$

Величина D_j характеризует резонансные свойства области V_j , поскольку в нее входит функция Грина G_j этой области; кроме того она зависит от формы устья щели (так как от формы устья зависит функция y_1).

Для области с конечной границей S_j величина D_j может быть определена, если воспользоваться разложением G_j в ряд по собственным функциям задачи В. А. Стеклова ($\Delta \psi_n + k^2 \psi_n = 0$, $\psi_n = w_n \partial \psi_n / \partial n |_{S_j}$). Это разложение приводит к следующему представлению функции Грина на щели (см. формулы (18), (19) работы [192, 193]):

$$G_j(s, s') \simeq C_j + (1/2\pi) \ln(\pi^2/L^2) |s^2 - s'^2|, \quad (3.3.20)$$

где

$$C_j = -\frac{w_0 \psi_0^2(0)}{2L_j} - \sum_{n=1} \left(\frac{w_n}{L_j} - \frac{1}{\pi n} \right) \psi_n^2(0). \quad (3.3.21)$$

Подставляя (3.3.20) в (3.3.18) и используя еще (3.3.16), получим

$$D_j = 2C_j + (2/\pi) \ln(4l/eL_j). \quad (3.3.22)$$

Отметим, что для открытой области V_j величина D_j комплексна.

Если же плоский волновод нагружен на бесконечные плоские фланцы, и тем самым G_j есть функция Грина полупространства, то

$$D_j = i + (2/\pi) \ln(2\gamma kl/\pi e),$$

где $\ln \gamma = 0,577\dots$ — постоянная Эйлера. (3.3.23)

Для случая когда конец волновода не имеет фланцев и открывается в свободное пространство (см. рис. 24, случаи 3, 4), G_j можно приближенно (пренебрегая резонансами во внешней области) считать функцией Грина свободного пространства, и тогда

$$D_j = i/2 + (1/\pi) \ln(\gamma kl/2\pi e). \quad (3.3.24)$$

Решение исходной задачи возбуждения (3.3.1), (3.3.2) получим, подставив (3.3.19) в (3.3.5) и используя при этом (3.3.12) и (3.3.15). Взятое, например, в точке s , удаленной от щели, это решение в каждой из областей V_j имеет следующий вид:

$$u(s) = u_j^0(s) + 2kl \frac{u_i^0(0) - (\cos kd + kl D_i \sin kd) u_j^0(0)}{kl(D_1 + D_2) \cos kd - [1 - (kl)^2 D_1 D_2] \sin kd} \times G_j(s, 0). \quad (3.3.25)$$

Из этой формулы видно, что связь объемов в зависимости от kd имеет ярко выраженный резонансный характер. Действительно, на резонансной для щели частоте ($kd = \pi\nu$) связь объемов значительна, дополнительно к u_j^0 поле имеет порядок $1/\ln(l/L)$, такой же, как и в случае бесконечно мелкой щели [192]*. В условиях антирезонанса в щели ($kd = (\pi/2)(2\nu + 1)$) связь резко падает и определяется параметром kl .

В общем случае резонансные частоты рассматриваемой системы находятся из уравнения

$$kl D_j = (\operatorname{tg} kd - kl D_i)/(1 + kl D_i \operatorname{tg} kd). \quad (3.3.26)$$

Так как щель узкая, то, очевидно, что эти частоты близки либо к собственным частотам запертой щели ($k = \pi\nu/d$), либо к собственным частотам k_{nm} областей V_j . В первом случае для резонансной частоты (при условии, что $\pi\nu/d$ не близко к k_{nm}) легко получить формулу

$$k_* \simeq (\pi\nu/d)[1 + (l/d) \operatorname{Re}(D_1 + D_2)]. \quad (3.3.27)$$

* Отметим, что формулы настоящего параграфа получены с помощью конформных преобразований для глубокой щели (дающих бесконечно глубокий для статических расстояний провал), и мы, вообще говоря, не можем переходить к пределу при $d \rightarrow 0$. Однако если в (3.3.25) мы формально положим $d = 0$, то получим формулы (26) работы [192] для бесконечно тонкой стенки с несущественным отличием, состоящим в том, что в них вместо $\ln(\pi l/2L)$ стоит $\ln(4l/eL)$.

Для определения резонансной частоты, близкой к собственной частоте k_{nm} закрытой области V_j , величину D_j при $k \sim k_{nm}$ можно записать в виде

$$D_j \simeq 1/(k - k_{nm}) A + (2/\pi) \ln(4l/eL_j), \quad (3.3.28)$$

где

$$A = \left(k_{nm} \int_{V_j} \chi_{nm}^2 dV \right) / \chi_{nm}^2(0), \quad (3.3.29)$$

χ_{nm} — собственная функция закрытой задачи для области V_j ($\Delta \chi_{nm} + k_{nm}^2 \chi_{nm} = 0$, $\partial \chi_{nm} / \partial n = 0 |_{S_j}$). При условии, что k_{nm} не близка к $\pi \nu / d$ и к собственной частоте другого объема V_i , использование (3.3.28) в (3.3.26) приводит к следующей формуле для резонансной частоты:

$$k_* \simeq k_{nm} + \frac{k_{nm} l}{A} \left[\operatorname{ctg} k_{nm} d + \frac{k_{nm} l}{\sin^2 k_{nm} d} \times \left(\operatorname{Re} D_i + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4l}{eL_j} \cos k_{nm} d \right) \right]. \quad (3.3.30)$$

В условиях щелевого антирезонанса ($k_{nm} d \simeq (\pi/2)(2\nu + 1)$) вследствие резкого уменьшения связи смещение резонансной частоты согласно (3.3.26) становится очень малой величиной, пропорциональной $(k_{nm} l)^2$. Можно показать, что приближение к условиям резонанса в щели ($k_{nm} \simeq \pi \nu / d$), сопровождающееся ростом связи объемов, приводит к увеличению смещения резонансной частоты до величины порядка $\sqrt{k_{nm} l}$.

Принципиальных осложнений не возникает при близости или совпадении собственных частот объемов V_1 и V_2 . В частности, если области V_1 и V_2 одинаковы ($D_1 = D_2$), то из (3.3.26) следует, что вблизи каждой собственной частоты k_{nm} расположены две резонансные частоты, определяемые выражениями

$$k_* \simeq k_{nm} + \frac{k_{nm} l}{A} \operatorname{ctg} \frac{k_{nm} d}{2} \left(1 + \mu k_{nm} l \operatorname{ctg} \frac{k_{nm} d}{2} \right), \quad (3.3.31)$$

где $k_{nm} d$ не близко к $2\pi \nu$, и

$$k_* \simeq k_{nm} - \frac{k_{nm} l}{A} \operatorname{tg} \frac{k_{nm} d}{2} \left(1 - \mu k_{nm} l \operatorname{tg} \frac{k_{nm} d}{2} \right), \quad (3.3.32)$$

где $k_{nm} d$ не близко к $(2\nu + 1)\pi$, $\mu = 2/\pi \ln(4l/eL)$.

§ 3.4. Вытекающие волны в волноводе с глубокой продольной щелью

Изложенная в предыдущем параграфе теория позволяет дать расчет собственных H -волн в волноводах с глубокой продольной щелью, сечение которых представляет собой исследованные выше двумерные резонаторы. Действительно, поперечные волновые числа таких волноводов являются нулями резонансного знаме-

нателя в (3.3.25) или корнями уравнения (3.3.26). Если связи с бесконечным пространством нет (система закрыта), то эти корни вещественны и совпадают с найденными в § 3.3 резонансными частотами k_* . При наличии связи с бесконечным пространством через щель корни уравнения (3.3.26) становятся комплексными (т. к. соответствующий концу плоского волновода коэффициент D_j приобретает мнимую часть) и представляют собой комплексные собственные частоты $\hat{k}_{nm} = \hat{k}'_{nm} + i\hat{k}''_{nm}$; собственные волны становятся вытекающими. При этом, например, для сечений 1, 2, 3 рис. 26 уравнение (3.3.26) дает (в предположении, что k_{nm} не близко к $\pi \nu / d$)

$$\hat{k}'_{nm} = k_*, \quad \hat{k}''_{nm} = \frac{(k_{nm} l)^2 \operatorname{Im} D_2}{A \sin^2 k_{nm} d}, \quad (3.4.1)$$

где k_* определяется формулой (3.3.30), A — формулой (3.3.29) а D_2 для сечений 1, 2, 3 дается формулами (3.3.22), (3.3.23), (3.3.24) соответственно. Комплексные постоянные распространения вытекающих волн $\hat{h}_{nm} = \hat{h}'_{nm} + i\hat{h}''_{nm}$ связаны с \hat{k}_{nm} формулой $\hat{h}''_{nm} = k^2 - \hat{k}_{nm}^2$. Они равны

$$\hat{h}'_{nm} = h_{nm} - \frac{k_{nm}^2 l}{A h_{nm}} \left[\operatorname{ctg} k_{nm} d + \frac{k_{nm} l}{\sin^2 k_{nm} d} \times \left(\operatorname{Re} D_2 + \frac{2}{\pi} \ln \frac{4l}{eL_1} \cos^2 k_{nm} d \right) \right], \quad (3.4.2)$$

$$\hat{h}''_{nm} = -\frac{k_{nm}^2 l^2 \operatorname{Im} D_2}{A \sin^2 k_{nm} d}; \quad (3.4.3)$$

$\hat{h}_{nm} = \sqrt{k^2 - k_{nm}^2}$ — постоянная распространения в закрытом волноводе.

Формулы (3.4.2), (3.4.3) справедливы так же, как и (3.4.1), в областях, не слишком близких к резонансу в щелях ($k_{nm} = \pi \nu / d$).

Задача о вытекающих волнах в волноводе с глубокой продольной щелью стала актуальной в связи с развитием исследований по газонаполненным волноводам. Волноводы этого типа являются новым техническим решением проблем производства, обеспечения гибкости, транспортировки и прокладки длинных бесстыковых отрезков канала связи миллиметрового диапазона. Они существенно превосходят по технико-экономическим показателям известные конструкции волноводов и имеют при этом хорошие электродинамические характеристики.

В нерабочем состоянии волновод представляет собой плоскую конструкцию, образованную двумя лентами, соединенными по краям продольными швами. В рабочем состоянии (после заполнения полости между лентами газом) он приобретает форму цилиндра (см. рис. 27), имеющего две диаметрально расположенные щели глубины d . Щели заполнены диэлектриком и открыты на

концах. Очевидно, что E -волны, имеющие только продольные токи в стенках (в пренебрежении деполяризацией из-за наличия диэлектрика в щелях), распространяются, как в закрытом волноводе. Зато ясно, что продольные щели могут влиять на распространение H -волн и вносить значительное затухание, обусловленное

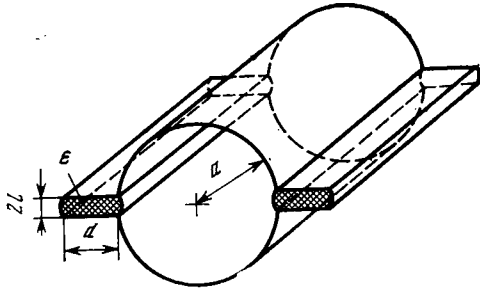


Рис. 27. Конструкция газонаполненного волновода

излучением через щели. Степень этого влияния зависит от размеров волновода и щелей, а также от типа волны и частоты. Излучение через щель может быть существенно уменьшено за счет выбора определенной глубины щели d .

Согласно полученным формулам излучение и, соответственно, затухание минимальны в областях щелевого антирезонанса и сильно возрастают при резонансе в щелях. Однако ширина этих резонансных областей (в масштабе частоты или длины волны) мала по сравнению с областями, в которых затухание мало. Оценочные расчеты, проведенные по формуле (3.4.3), не учитывающей диэлектрического заполнения щелей, показывают, что величина затухания за счет излучения может быть снижена при выборе антирезонансного значения d до десятых долей $\delta\beta/\text{км}$. Это более, чем на два порядка, меньше затухания в областях щелевого резонанса или же в волноводе с бесконечно тонкой стенкой [192]. Результаты расчета по формуле (3.4.3) затухания волны H_{01} в волноводе круглого сечения радиуса a представлены на рис. 28.

Ясно, что диэлектрическое заполнение щелей должно существенно уменьшить радиационные потери, но добавить потери в материале. Можно показать, что если границы диэлектрика на устьях щелей совпадают с эквипотенциальными линиями $y_1 = 0$ (см. рис. 26), то деполяризации не происходит. В этом предположении учет диэлектрического заполнения приводит к следующим формулам для комплексных постоянных распространения вытекающих H -волн:

$$\hat{h}'_{nm} \approx h_{nm} - \frac{k_{nm}^2 l}{Ah_{nm}} \left[\frac{k_{nm}}{\alpha_{nm}} \text{ctg } \alpha_{nm} d + \frac{k_{nm} l}{\sin^2 \alpha_{nm} d} (\text{Re} D_2 + \mu_1 \cos^2 \alpha_{nm} d) \right], \quad (3.4.4)$$

$$\hat{h}''_{nm} \approx - \frac{k_{nm}^3 l^2}{Ah_{nm} \sin^2 \alpha_{nm} d} \left[\text{Im} D_2 - \frac{\epsilon'' k^2 d}{2\alpha_{nm}^2 l} \left(1 + \frac{\sin 2\alpha_{nm} d}{2\alpha_{nm} d} \right) \right]. \quad (3.4.5)$$

Здесь $\alpha_{nm} = \sqrt{k^2 (\epsilon' - 1) + k_{nm}^2}$, k — частота генератора, $\epsilon = \epsilon' + i\epsilon''$ — диэлектрическая проницаемость заполнения щелей, мнимая часть которой предполагается малой и удовлетворяет условию

$$k d \epsilon'' \ll 1; \quad \mu_1 = \frac{2}{\pi} \left(\ln \frac{2}{e} + \delta^2 \ln \frac{2l}{L_1} \right), \quad \delta = \frac{k_{nm}}{\alpha_{nm}}.$$

Величины D_2 для сечений волноводов 1, 2, 3 рис. 24 теперь определяются соответственно выражениями (ср. с (3.3.22) — (3.3.24))

$$D_2 = \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{e} + \delta^2 \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{2l}{L_2} + 2C_2 \right), \quad (3.4.6)$$

$$D_2 = \frac{2}{\pi} \ln \frac{2}{e} + \delta^2 \left(\frac{2}{\pi} \ln \frac{\gamma k_{nm} l}{\pi} + i \right), \quad (3.4.7)$$

$$D_2 = -\frac{1}{\pi} + \delta^2 \left(\frac{1}{\pi} \ln \frac{\gamma k_{nm} l}{2\pi} + \frac{i}{2} \right). \quad (3.4.8)$$

Первое слагаемое в (3.4.5) соответствует радиационным, а второе диэлектрическим потерям. При $\epsilon \rightarrow 1$ формулы (3.4.4), (3.4.5) переходят, очевидно, в (3.4.2), (3.4.3).

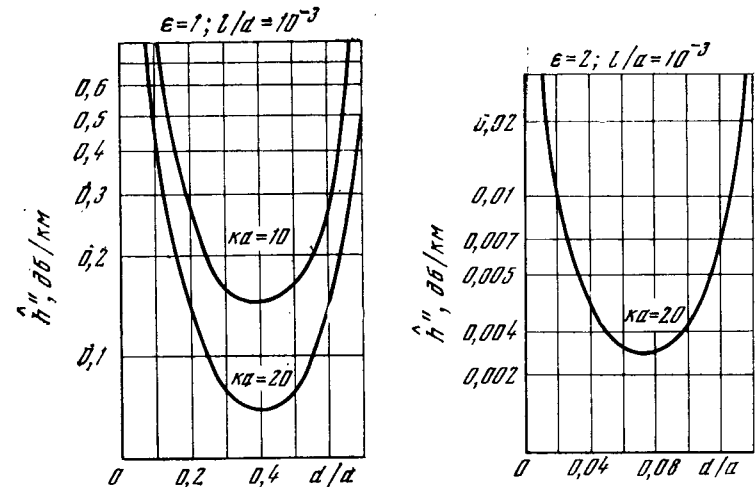


Рис. 28. Потери волны H_{01} при отсутствии диэлектрика в щелях

Рис. 29. Затухание волны H_{01} при идеальном диэлектрике в щелях

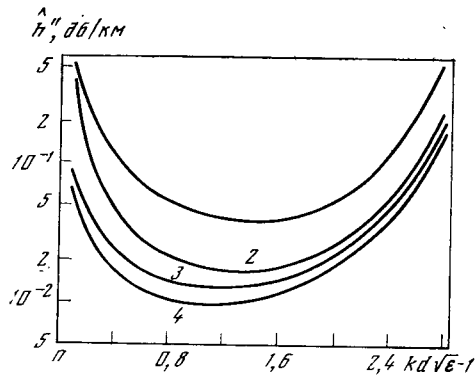


Рис. 30. Затухание волны H_{01} с учетом диэлектрических потерь и поглощения в стенках щелей при $a = 3$ см; $\epsilon' = 2,3$; $\sigma = 2,95 \cdot 10^{17}$; $\lambda = 0,8$ см

- 1 - $l = 10^{-2}$ см, $\epsilon''/\epsilon' = 5 \cdot 10^{-3}$;
 2 - $l = 10^{-2}$ см, $\epsilon''/\epsilon' = 5 \cdot 10^{-4}$;
 3 - $l = 10^{-3}$ см, $\epsilon''/\epsilon' = 5 \cdot 10^{-3}$;
 4 - $l = 10^{-3}$ см, $\epsilon''/\epsilon' = 5 \cdot 10^{-4}$

Антирезонансное значение d определяется теперь условием

$$d \sqrt{k^2(\epsilon' - 1) + k_{nm}^2} = \frac{\pi}{2}(2\nu + 1). \quad (3.4.9)$$

Формулы (3.4.4), (3.4.5) получены в предположении, что d не находится в области щелевого резонанса (т. е. d не близко к $\pi\nu/\alpha_{nm}$), в которой они дают завышенные значения потерь и смещения фазовых скоростей. Как и при отсутствии диэлектрика, ширина щелевых резонансов много меньше областей с весьма малым затуханием. Это обеспечивает описанной конструкции газонаполненного волновода достаточную широкополосность по частоте и снижает допуск на размер d .

Результаты расчета по формулам (3.4.5), (3.4.8) затухания волны H_{01} в круглом волноводе даны на рис. 29, 30. Кривые рис. 30 учитывают, кроме излучения и диэлектрических потерь, еще и поглощение в стенках щелей.

Полученные в этом параграфе результаты теоретически обосновывают возможность реализации малых потерь в газонаполненных волноводах, имеющих продольную щель, а также позволяют найти допуск на глубину щели d .

ПРИЛОЖЕНИЯ

Приложение 1

Запись выражений для компонент истинных и вспомогательных полей

Пусть электрический и магнитный векторы в падающем и прошедшем полях направлены соответственно вдоль неких осей x' и ξ' , а в отраженном поле вдоль осей x'' и ξ'' . Запишем направляющие косинусы осей систем координат x', ξ', y' и x'', ξ'', y'' в координатной системе x, ξ, y . Единичные векторы осей y' и y'' известны $e_{y'} = \{\alpha, \gamma, \beta\}$, $e_{y''} = \{-\alpha, -\gamma, \beta\}$. Так как электрическое поле в случае H -поляризации не проектируется на направление ξ

и должны быть выполнены условия $e_{y'} \perp e_{x'}$, $e_{y''} \perp e_{x''}$, то, очевидно, что

$$e_{x'} = \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}, 0, \frac{-\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} \right\}, \quad e_{x''} = \left\{ \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}}, 0, \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} \right\}.$$

Единичные векторы осей ξ' и ξ'' находятся, как векторные произведения:

$$e_{\xi'} = [e_{y'}, e_{x'}], \quad e_{\xi''} = [e_{y''}, e_{x''}],$$

$$e_{\xi'} = \left\{ \frac{-\alpha\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \sqrt{1-\gamma^2}, \frac{-\beta\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \right\},$$

$$e_{\xi''} = \left\{ \frac{-\alpha\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \sqrt{1-\gamma^2}, \frac{\beta\gamma}{\sqrt{1-\gamma^2}} \right\}.$$

Таким образом, направляющий косинус магнитного поля с осью ξ равен $\sqrt{1-\gamma^2}$. Поэтому компоненты истинных полей в удаленных зонах могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} H_{\xi 1} &= \sqrt{1-\gamma^2} [\exp(-iky') + R \exp(iky')], & y < 0; \\ E_{x 1} &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) [\exp(-iky') - R \exp(iky')], & y < 0; \\ H_{\xi 2} &= \sqrt{1-\gamma^2} T \exp(-iky'), & y > 0. \\ E_{x 2} &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) T \exp(-iky'), & y > 0. \end{aligned} \quad (П.1.1)$$

Вспомогательные поля записываются в виде

$$\begin{aligned} H_{\xi}^1 &= \sqrt{1-\gamma^2} \exp(-iky''), & E_x^1 &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) \exp(-iky''), \\ H_{\xi}^2 &= \sqrt{1-\gamma^2} \exp(iky'), & E_x^2 &= (-\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) \exp(iky'). \end{aligned} \quad (П.1.2)$$

Формулы перехода от системы координат x, ξ, y к системам x', ξ', y' и x'', ξ'', y'' имеют вид:

$$\begin{aligned} x' &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2})x - (\alpha/\sqrt{1-\gamma^2})y, \\ \xi' &= (-\alpha\gamma/\sqrt{1-\gamma^2})x + \sqrt{1-\gamma^2}\xi - (\beta\gamma/\sqrt{1-\gamma^2})y, \\ y' &= \alpha x + \gamma\xi + \beta y; \\ x'' &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2})x + (\alpha/\sqrt{1-\gamma^2})y, \\ \xi'' &= (-\alpha\gamma/\sqrt{1-\gamma^2})x + \sqrt{1-\gamma^2}\xi + (\beta\gamma/\sqrt{1-\gamma^2})y, \\ y'' &= -\alpha x - \gamma\xi + \beta y. \end{aligned}$$

Приложение 2

Вычисление величин R, T, A, B

Вычислим сначала интегралы по контуру проводника, необходимые при отыскании выражений для A, B, R, T :

$$\begin{aligned} \int_{z'-2-3} E_z^1 ds &= \int_{z'-2-3} (E_x^1 dx + E_y^1 dy) = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{-b}^b e^{ik(ax-\beta y)} (\beta + \alpha y'(x)) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left(2\beta b - ik(1-\gamma^2) \frac{S}{2} \right) = \frac{a}{\sqrt{1-\gamma^2}}. \end{aligned}$$

Здесь $y = y(x)$ — уравнение контура; $y'(x)$ — производная функции $y(x)$; S — площадь поперечного сечения проводника.

$$\begin{aligned} \int_{3'-2-3} E_s^1 y_1 ds &= \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \int_{-b}^b e^{ik(ax-\beta y)} y_1 (\beta + \alpha y'(x)) dx = \\ &= \frac{1}{\sqrt{1-\gamma^2}} \left[2\beta \int_0^b y_1 dx - 2ik \left(\beta^2 \int_0^b y(x) y_1 dx - \alpha^2 \int_0^b x y'(x) y_1 dx \right) \right] = \\ &= \frac{S}{\sqrt{1-\gamma^2}}. \end{aligned}$$

При вычислении этих и последующих интегралов используются условия (1.1.11), связанные с предположением о наличии у контура поперечного сечения проводника осей симметрии Ox и Oy .

Проводя аналогичным образом вычисление остальных интегралов по контуру, получаем

$$\begin{aligned} \int_{3'-2-3} E_s^1 ds &= \int_{3-2-3'} E_s^2 ds = \frac{a}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \\ \int_{3'-2-3} E_s^1 y_1 ds &= - \int_{3-2-3'} E_s^2 y_1 ds = \frac{s}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \\ \int_{3-2-3'} E_s^1 ds &= \int_{3'-2-3} E_s^2 ds = \frac{-a^*}{\sqrt{1-\gamma^2}}, \\ \int_{3-2-3'} E_s^1 y_1 ds &= - \int_{3'-2-3} E_s^2 y_1 ds = -s^* / \sqrt{1-\gamma^2}. \end{aligned} \quad (\text{П.2.1})$$

Звезда означает комплексно сопряженную величину.

В следующих интегралах экспоненту можно заменять единицей, поскольку перед ней стоит множитель порядка $k\rho$; поэтому

$$\begin{aligned} \int_{3'-2-3} x_2 E_s^1 y_1 ds &= \int_{3'-2-3} x_2 E_s^2 y_1 ds = \frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} L_1 p, \\ \int_{3-2-3'} x_2 E_s^1 y_1 ds &= \int_{3-2-3'} x_2 E_s^2 y_1 ds = -\frac{\alpha}{\sqrt{1-\gamma^2}} L_1 p, \\ \int_{3'-2-3} x_2 E_s^1 ds &= \int_{3-2-3'} x_2 E_s^1 ds = \alpha l_2 p / \sqrt{1-\gamma^2}, \\ l_2 p &= 2 \int_0^b x_2 y' dx, \quad L_1 p = 2 \int_0^b x_2 y' y_1 dx. \end{aligned} \quad (\text{П.2.2})$$

Вычислим постоянные A и B , определяющие поля вблизи проводников. Для этого сложим и вычтем первое и четвертое уравнения (1.1.8). Получаем,

учитывая, что на участках $4'-3'$ и $3-4$ $H_\xi^1 = H_\xi^2$, $E_x^1 = -E_x^2$,

$$\begin{aligned} \int_{3'-2-3} E_s^1 H_\xi ds + \int_{3-2-3'} E_s^2 H_\xi ds &= 2\beta p - 2 \int_{4'-3', 3-4} E_x^1 H_\xi dx, \\ - \int_{3'-2-3} E_s^1 H_\xi ds + \int_{3-2-3'} E_s^2 H_\xi ds &= 2\beta p - 2 \int_{4'-3', 3-4} E_x H_\xi^1 dx. \end{aligned} \quad (\text{П.2.3})$$

Так как на участках $4'-3'$, $3-4$ $y_1 = 0$, то H_ξ можно записать в виде $H_\xi = A(1 - ik\alpha x_2)$, поэтому

$$\int_{4'-3', 3-4} E_x^1 H_\xi dx = \frac{\beta g}{\sqrt{1-\gamma^2}} A, \quad 2g + 2b = p. \quad (\text{П.2.4})$$

Далее, поскольку $E_x = \frac{-1}{ik(1-\gamma^2)} \frac{\partial H_\xi}{\partial y}$, и по определению преобразования

$z_2(z)$ $\partial x_2 / \partial y = 0$ на $4'-3'$, $3-4$, то $\frac{\partial H_\xi}{\partial y} = B \frac{\partial y_1}{\partial y} (1 - ik\alpha x_2)$, в связи с чем вычисление интеграла $\int_{4'-3', 3-4} E_x H_\xi^1 dx$ сводится к вычислению $\int_{4'-3', 3-4} \frac{\partial y_1}{\partial y} dx$.

Для введенных нами конформных преобразований $z_i(z)$ выполняются предельные соотношения: $dz_i/dz \rightarrow 1$ при $y \rightarrow \infty$. Это свойство, вообще говоря, достаточно очевидно, поскольку возмущение, вносимое контуром проводника, и различие в областях D_i локализуется вблизи начала координат и при удалении от него ($y \rightarrow \infty$) исчезает. Однако в выполнении этих соотношений можно убедиться с помощью непосредственной проверки: дифференцированием функции, дающей преобразование для выбранной формы проводника, и последующим предельным переходом при $y \rightarrow \infty$. Из этого следует, что

$$\partial y_1 / \partial y \rightarrow 1 \quad (y \rightarrow \infty) \quad \text{или} \quad \lim_{y \rightarrow \infty} (y_i - y) = l_i.$$

Теперь, для того чтобы установить величину искомого интеграла, достаточно записать условие равенства нулю интеграла по замкнутому контуру G_2 (рис. 6) от функции $\partial y_1 / \partial n$ (это условие получается из применения формулы Грина к функциям y_1 и 1). В результате находим

$$\int_{4'-3', 3-4} \frac{\partial y_1}{\partial y} dx = p, \quad \int_{4'-3', 3-4} E_x H_\xi^1 dx = \frac{-p}{ik\sqrt{1-\gamma^2}} B. \quad (\text{П.2.5})$$

Разворачивая первое уравнение (П.2.3), получаем

$$\begin{aligned} A \left[\int_{3'-2-3} E_s^1 ds + \int_{3-2-3'} E_s^2 ds - ik\alpha \left(\int_{3'-2-3} x_2 E_s^1 ds + \int_{3-2-3'} x_2 E_s^2 ds \right) + \right. \\ \left. + \frac{4\beta g}{\sqrt{1-\gamma^2}} \right] + B \left[\int_{3'-2-3} E_s^1 y_1 ds + \int_{3-2-3'} E_s^2 y_1 ds - ik\alpha \times \right. \\ \left. \times \left(\int_{3'-2-3} x_2 E_s^1 y_1 ds + \int_{3-2-3'} x_2 E_s^2 y_1 ds \right) \right] = 2\beta p, \end{aligned} \quad (\text{П.2.6})$$

отсюда

$$A = \frac{\beta \sqrt{1-\gamma^2}}{\beta + ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 l_2]}, \quad l = S/2p.$$

Разворачивая второе уравнение (II.2.3), находим

$$B = \frac{-ik\beta \sqrt{1-\gamma^2}}{1 + ikp\Delta}. \quad (\text{II.2.7})$$

Здесь введены обозначения $\Delta = \beta l/p - ikp(\beta^2 \Delta_2 - \alpha^2 \Delta_3)$,

$$\frac{l_1}{p} = \frac{2}{p^2} \int_0^b y_1 dx, \quad \Delta_2 = \frac{2}{p^3} \int_0^b y y_1 dx, \quad \Delta_3 = \frac{2}{p^3} \int_0^b (x-x_2) y_1 y' dx.$$

Подынтегральные функции берутся в точках контура поперечного сечения проводника. Записывая условие равенства нулю согласно формуле Грина интеграла по замкнутому контуру Γ_2 от функции $(y_1 \partial y / \partial n - y_1' \partial y_1 / \partial n)$, получаем, что l определяется из конформного преобразования $z_1(z)$ как предел $l = \lim_{y \rightarrow \infty} (y_1 - y)$. Вычисление коэффициентов отражения и прохождения проводится по формулам (1.1.9). Разворачивая, например, формулу для R , имеем

$$\begin{aligned} -2\beta p R = & A \left(\oint_C E_s^1 ds - ika \oint_C E_s^1 x_2 ds \right) + \\ & + B \left(\oint_C E_s^1 y_1 ds - ika \oint_C E_s^1 x_2 y_1 ds \right). \end{aligned} \quad (\text{II.2.8})$$

Подставляя сюда значения A и B , находим, используя формулы (II.2.4) и (II.2.2),

$$R = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\beta + ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 l_2]}{\beta - ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 l_2]} - \frac{1 - ikp\Delta^*}{1 + ikp\Delta} \right\}. \quad (\text{II.2.9})$$

Для коэффициента прохождения получаем выражение

$$T = \frac{1}{2} \left\{ \frac{\beta + ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 l_2]}{\beta - ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 l_2]} + \frac{1 - ikp\Delta^*}{1 + ikp\Delta} \right\}. \quad (\text{II.2.10})$$

Приложение 3

Запись выражений для компонент истинных и вспомогательных полей

В случае E -поляризации магнитные поля в падающей и прошедшей волнах направлены по оси x' , а в отраженной волне по оси x'' (в плоскости xOy). Электрические поля в падающей и прошедшей волнах направлены по оси ξ' , а в отраженной волне по оси ξ'' . Поэтому истинные поля в удаленных зонах могут быть записаны в виде

$$\begin{aligned} E_{\xi 1} &= \sqrt{1-\gamma^2} [\exp(-iky') + R \exp(iky'')], & y < 0; \\ H_{x 1} &= (-\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) [\exp(-iky') - R \exp(iky'')], & y < 0; \\ E_{\xi 2} &= \sqrt{1-\gamma^2} T \exp(-iky'), & y > 0; \\ H_{x 2} &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) T \exp(-iky'), & y > 0. \end{aligned} \quad (\text{II.3.1})$$

Компоненты вспомогательных полей даются следующими выражениями:

$$\begin{aligned} E_{\xi}^1 &= \sqrt{1-\gamma^2} \exp(-iky''), \quad H_x^1 = (-\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) \exp(-iky''), \\ E_{\xi}^2 &= \sqrt{1-\gamma^2} \exp(iky'), \quad H_x^2 = (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) \exp(iky'). \end{aligned} \quad (\text{II.3.2})$$

Приложение 4

Вывод эквивалентных граничных условий по известным коэффициентам отражения и прохождения

В случае H -поляризации поля, продленные до $y = 0$, равны

$$\begin{aligned} H_{\xi 2} &= \sqrt{1-\gamma^2} T, & H_{\xi 1} &= \sqrt{1-\gamma^2} (1+R), & E_{\xi 2} &= 0, & E_{\xi 1} &= 0, \\ H_{x 2} &= (-\alpha\gamma/\sqrt{1-\gamma^2}) T, & H_{x 1} &= (-\alpha\gamma/\sqrt{1-\gamma^2}) (1+R), \\ E_{x 2} &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) T, & E_{x 1} &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) (1-R), \\ H_{y 2} &= (-\beta\gamma/\sqrt{1-\gamma^2}) T, & H_{y 1} &= (-\beta\gamma/\sqrt{1-\gamma^2}) (1-R), \\ E_{y 2} &= (-\alpha/\sqrt{1-\gamma^2}) T, & E_{y 1} &= (-\alpha/\sqrt{1-\gamma^2}) (1+R). \end{aligned} \quad (\text{II.4.1})$$

Фактор $\exp(-ik(\alpha x + \gamma \xi))$ опущен.

Используя формулы для коэффициентов отражения и прохождения, образуем следующие выражения:

$$\begin{aligned} H_{\xi 2} - H_{\xi 1} &= \sqrt{1-\gamma^2} (T - R - 1) = \sqrt{1-\gamma^2} \frac{(-2ikp\beta l_1/p)}{(1 + ikp\Delta)}, \\ H_{\xi 2} + H_{\xi 1} &= \sqrt{1-\gamma^2} (T + R + 1) = \sqrt{1-\gamma^2} \frac{2\beta}{\beta - ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 l_2]}, \\ E_{x 2} - E_{x 1} &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) (T + R - 1) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \frac{2k[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 l_2]}{\beta - ik[(1-\gamma^2)l + \alpha^2 l_2]}, \\ E_{x 2} + E_{x 1} &= (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) (T - R + 1) = \frac{\beta}{\sqrt{1-\gamma^2}} \times \\ & \times \frac{2[1 + (kp)^2(\beta^2 \Delta_2 - \alpha^2 \Delta_3)]}{1 + ikp\Delta}, \end{aligned} \quad (\text{II.4.2})$$

отсюда

$$\begin{aligned} (H_{\xi 2} - H_{\xi 1})/(E_{x 2} + E_{x 1}) &= -ikl_1(1-\gamma^2)/[1 + (kp)^2(\beta^2 \Delta_2 - \alpha^2 \Delta_3)], \\ (E_{x 2} - E_{x 1})/(H_{\xi 2} + H_{\xi 1}) &= ikl + (ik\alpha^2/(1-\gamma^2)) l_2. \end{aligned} \quad (\text{II.4.3})$$

Если из выражения (II.4.3) исключим углы, то граничные условия, очевидно, будут носить локальный характер. Легко проверить, что

$$\frac{ik\alpha^2}{1-\gamma^2} = \frac{\frac{\partial}{\partial x} (E_{y 2} + E_{y 1})}{H_{\xi 2} + H_{\xi 1}}, \quad ik\gamma^2 = \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} (H_{y 2} + H_{y 1})}{E_{x 2} + E_{x 1}}. \quad (\text{II.4.4})$$

Подставляя это в соотношения (II.4.3), получаем

$$\begin{aligned} H_{\xi 2} - H_{\xi 1} &= \frac{-ikl_1}{1 + (kp)^2(\beta^2 \Delta_2 - \alpha^2 \Delta_3)} \left[E_{x 2} + E_{x 1} + \frac{i}{k} \frac{\partial}{\partial \xi} (H_{y 2} + H_{y 1}) \right], \\ E_{x 2} - E_{x 1} &= ik[l(H_{\xi 2} + H_{\xi 1}) - (i/k) l_2 \partial (E_{y 2} + E_{y 1}) / \partial x]. \end{aligned} \quad (\text{II.4.5})$$

В случае E -поляризации поля, продолженные до плоскости $y = 0$ (с опущенным фактором $\exp\{-ik(\alpha x + \gamma \xi)\}$), имеют вид

$$\begin{aligned}
E_{\xi_2} &= \sqrt{1-\gamma^2} T, & E_{\xi_1} &= \sqrt{1-\gamma^2} (1+R), \\
E_{\eta_2} &= (-\alpha\gamma/\sqrt{1-\gamma^2}) T, & E_{\eta_1} &= (-\alpha\gamma/\sqrt{1-\gamma^2})(1+R), \\
E_{y_2} &= (-\beta\gamma/\sqrt{1-\gamma^2}) T, & E_{y_1} &= (-\beta\gamma/\sqrt{1-\gamma^2})(1-R), \\
H_{\xi_2} &= 0, & H_{\xi_1} &= 0, \\
H_{\eta_2} &= (-\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) T, & H_{\eta_1} &= (-\beta/\sqrt{1-\gamma^2})(1-R), \\
H_{y_2} &= (\alpha/\sqrt{1-\gamma^2}) T, & H_{y_1} &= (-\alpha/\sqrt{1-\gamma^2})(1+R).
\end{aligned}
\tag{П.4.6}$$

Здесь образуем выражения

$$\begin{aligned}
E_{\xi_2} - E_{\xi_1} &= \sqrt{1-\gamma^2} (T - R - 1) = \sqrt{1-\gamma^2} (-2ik\beta l_2)/(1 + ik\beta l_2), \\
E_{\xi_2} + E_{\xi_1} &= \sqrt{1-\gamma^2} (T + R + 1) = \sqrt{1-\gamma^2} 2ik\beta l_3/(1 + ik\beta l_3), \\
H_{\eta_2} - H_{\eta_1} &= (-\beta/\sqrt{1-\gamma^2})(T + R - 1) = (\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) 2/(1 + ik\beta l_3), \\
H_{\eta_2} + H_{\eta_1} &= (-\beta/\sqrt{1-\gamma^2})(T - R + 1) = (-\beta/\sqrt{1-\gamma^2}) 2/(1 + ik\beta l_2),
\end{aligned}
\tag{П.4.7}$$

отсюда

$$\begin{aligned}
(E_{\xi_2} - E_{\xi_1})/(H_{\eta_2} + H_{\eta_1}) &= (1 - \gamma^2) ik l_2, \\
(E_{\xi_2} + E_{\xi_1})/(H_{\eta_2} - H_{\eta_1}) &= (1 - \gamma^2) ik l_3.
\end{aligned}
\tag{П.4.8}$$

Легко видеть, что

$$-ik\gamma^2 = \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} (E_{y_2} - E_{y_1})}{H_{\eta_2} - H_{\eta_1}} = \frac{\frac{\partial}{\partial \xi} (E_{y_2} + E_{y_1})}{H_{\eta_2} + H_{\eta_1}},$$

поэтому граничные условия для E -поляризации могут быть записаны в следующем виде:

$$\begin{aligned}
E_{\xi_2} - E_{\xi_1} &= ik l_2 [H_{\eta_2} + H_{\eta_1} - (i/k) \partial (E_{y_2} + E_{y_1})/\partial \xi], \\
E_{\xi_2} + E_{\xi_1} &= ik l_3 [H_{\eta_2} - H_{\eta_1} - (i/k) \partial (E_{y_2} - E_{y_1})/\partial \xi].
\end{aligned}
\tag{П.4.9}$$

Приложение 5

Вычисление параметра \tilde{l}

$$\frac{\tilde{l}}{p} = q \frac{l_1}{p} - \frac{2}{p^2} \int_{2-2'} y_1 dx$$

Вычислим сначала параметр l_1 :

$$\begin{aligned}
l_1 &= \lim_{y \rightarrow \infty} (y_1 - y) = \lim_{w \rightarrow \infty} \text{Im} (z_1 - z) = \frac{p}{2\pi} \lim_{w \rightarrow \infty} \text{Re} \left(\int_0^w \frac{dw}{w-1} - \int_0^w \sqrt{\frac{w-t}{w}} \frac{dw}{w-1} \right) = \frac{p}{2\pi} \left(\int_0^\infty \frac{du}{u+1} - \int_0^\infty \sqrt{\frac{u+t}{u}} \frac{du}{u+1} \right);
\end{aligned}$$

$$a) \int_0^{u_0} \frac{du}{u+1} = \ln(u_0 + 1),
\tag{П.5.1}$$

$$\begin{aligned}
b) \int_0^{u_0} \sqrt{\frac{u+t}{u}} \frac{du}{u+1} &= \int_{\frac{u_0+t}{u_0}}^\infty \left[\frac{2}{u^2-1} - \frac{2(1-t)}{u^2-(1-t)} \right] du = \\
&= \left(\ln \frac{u-1}{u+1} - \sqrt{1-t} \ln \frac{u-\sqrt{1-t}}{u+\sqrt{1-t}} \right) \Big|_{\frac{u_0+t}{u_0}}^\infty.
\end{aligned}$$

Подставляя a и b в выражение для l_1 , имеем

$$\begin{aligned}
l_1 &= \frac{p}{2\pi} \lim_{u_0 \rightarrow \infty} \left\{ \ln \frac{(u_0+1)(\sqrt{(u_0+t)/u_0}) - 1}{\sqrt{(u_0+t)/u_0} + 1} - \right. \\
&\quad \left. - \ln \frac{\sqrt{(u_0+t)/u_0} - \sqrt{1-t}}{\sqrt{(u_0+t)/u_0} + \sqrt{1-t}} \right\} = (p/2\pi) (\ln(t/4) - \sqrt{1-t} \times \\
&\quad \times \ln[(1 - \sqrt{1-t})/(1 + \sqrt{1-t})]) = (p/2\pi) (\ln q^2 (2-q)^{(2-q)} - \ln 4).
\end{aligned}
\tag{П.5.2}$$

Вычислим теперь интеграл $\frac{1}{p} \int_{2-2'} y_1(x, y(x)) dx$. Перейдем к интегрированию по действительной оси плоскости w (участок $0 \leq w \leq t$).

Выразим через w y_1 и dx ; на этом участке

$$\begin{aligned}
z_1 &= (ip/2\pi) \ln(1-w), \quad x_1 = 0, \quad y_1 = (p/2\pi) \ln(1-w); \\
z &= \frac{ip}{2\pi} \int_0^w \sqrt{\frac{w-t}{w}} \frac{dw}{w-1}, \quad dz = dx = \frac{p}{2\pi} \sqrt{\frac{(t-w)}{w}} \frac{dw}{1-w}.
\end{aligned}
\tag{П.5.3}$$

Поэтому

$$\frac{1}{p} \int_{(2-2')} y_1 dx = \frac{p}{4\pi^2} \int_0^t \ln(1-w) \sqrt{\frac{t-w}{w}} \frac{dw}{1-w}.$$

Заменой переменной $u = \sqrt{(t-w)/w}$ интеграл в (П.5.3) сводится к

$$\begin{aligned}
\int_0^\infty \ln \left(\frac{1-t+u^2}{1+u^2} \right) \frac{2tu^2 du}{(1+u^2)(1-t+u^2)} &= 2\pi (\ln[(1 + \sqrt{1-t})/2] + \\
&\quad + \sqrt{1-t} \ln[(1 + \sqrt{1-t})/2\sqrt{1-t}]).
\end{aligned}
\tag{П.5.4}$$

Здесь использована формула

$$\int_0^\infty \ln(\mu^2 + u^2) \frac{du}{\nu^2 + u^2} = \frac{\pi}{\nu} \ln(\mu + \nu)
\tag{П.5.5}$$

(см., например, [143]).

Подставляя в (П.5.4) выражение для t , получаем

$$\frac{1}{p} \int_{2-2'} y_1 dx = \frac{p}{2\pi} [\ln((2-q)/2)^{(2-q)} - \ln(1-q)^{(1-q)}].
\tag{П.5.6}$$

Наконец, подставляя это и (П.5.2) в выражение для \tilde{l}/p , находим

$$\frac{\tilde{l}}{p} = \frac{1}{2\pi} [q^2 \ln q - 2(1-q) \ln 4(1-q) - (2-q)^2 \ln(2-q)].
\tag{П.5.7}$$

ИМПЕДАНСНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ
РЕЗОНАНСНОГО ТИПА

Периодические резонансные структуры, к исследованию которых мы сейчас приступаем, характеризуются наличием в них *высокочастотных колебаний*. Полный анализ свойств таких *открытых систем* в строгой постановке требует знания теории (и алгоритмов) *несамосопряженных операторов*, которая в настоящее время далека от завершения и представляет определенные (и иногда весьма серьезные) трудности при ее использовании в качестве аппарата решения практических задач радиофизики. Удобным выходом из этого положения оказывается возможное, разумеется *приближенное*, сведение задачи *открытого типа* к «эквивалентной» *закрытой задаче*. Такой переход можно сделать с помощью *импедансных граничных условий резонансного типа*. Они были введены для ленточного резонатора А. Т. Фиалковским в [156], а затем успешно использовались при анализе целого ряда сложных открытых структур [44, 49, 95, 157], в том числе и периодических.

§ 4.1. Волноводная трактовка принципа действия
открытого резонатора
или открытой периодической резонансной структуры

1. Принцип действия открытого резонатора, как и *открытой периодической резонансной структуры*, с волноводной точки зрения может быть объяснен следующим физически наглядным образом. Рассмотрим для простоты ленточный открытый резонатор, показанный на рис. 31, б. Теория такого резонатора строится на основе «последовательных приближений» по следующей схеме: переместим левый край резонатора влево на бесконечность. Полученная так структура (рис. 31, а) называется *ключевой*, а соответствующая электродинамическая задача об излучении волноводной волны из открытого ($x = a$) конца и преобразовании падающей волны в волны других номеров и типов полубесконечной структуры $x \in (-\infty, a)$ называется *ключевой задачей*. Известно, что если частота набегающей на открытый конец волновода (рис. 31, б) волны номера m близка к критической для данного типа волны, то коэффициент отражения R_{mm} может быть представлен в виде

$$R_{mm}^{(E, H)} = -\exp\{i(\beta' + i\beta_{E, H}''s)\} + O(R_{mp}), \quad (4.1.1)$$

где параметры β зависят от типа волны и расстояния между пластинами резонатора $2kl$; $s = w\sqrt{2l/k}$ — параметр, пропорциональный продольному волновому числу w падающей волны. При частоте, близкой к критической, $|s| \rightarrow 0$, а, стало быть, $|R_{mm}| \rightarrow 1$, так как β' , $\beta_{E, H}'' \sim 1$. Теперь можно процесс отражения повторить, учитывая левый конец структуры ($x = -a$): на него падает волна того же номера m , что и раньше, но с амплитудой

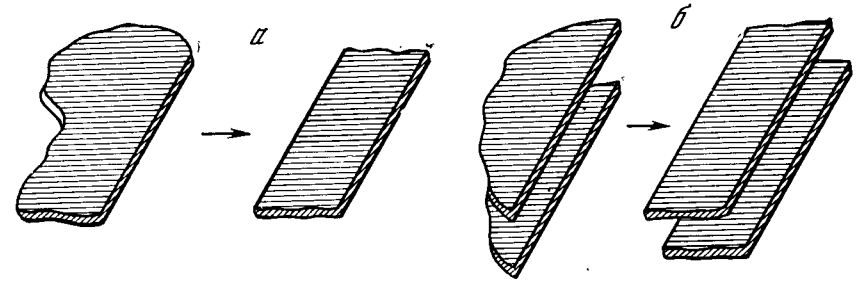


Рис. 31. Примеры полубесконечных и соответствующих конечных структур
а — полуплоскость \rightarrow полоса (лента);
б — открытый конец плоского волновода \rightarrow открытый ленточный резонатор

R_{mm} . Повторяя этот процесс много раз, можно получить установившийся режим колебаний в системе: найти собственные функции и собственные числа резонатора, что полностью решает задачу.

Вместо коэффициента отражения R_{mm} (4.1.1) на открытом конце структуры можно поставить некоторые граничные условия, эквивалентные по конечному эффекту *действию открытого конца волновода при критической частоте*.

Рассмотрим очень коротко известный пример с плоским полубесконечным волноводом (рис. 31, б), являющийся *ключевой задачей* при исследовании многих структур. Если к открытому концу волновода ($x = a$) подходит магнитная волна H_{0m} , то в соответствии с результатами строгой теории (ключевой задачи) поле в волноводе ($x < a$) может быть записано так:

$$E_y(x, z) = f_E(x) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \frac{\pi q}{2l} z + O(R_{mn}), \quad \begin{cases} q = 1, 3, \dots, \\ q = 2, 4, \dots, \end{cases} \quad (4.1.2)$$

где

$$f_E(x) = \exp(-ih_m x) + R^{(E)} \exp(ih_m x), \quad h_m = k \sqrt{1 - \left(\frac{\pi q}{2kl}\right)^2}. \quad (4.1.3)$$

Коэффициент отражения $R^{(E)} \equiv R_{mm}^{(E)}$ из (4.1.1) при β_E'' , а малый параметр s есть

$$s = h_m \sqrt{\frac{2l}{k}}, \quad |s| \ll 1. \quad (4.1.4)$$

Коэффициент преобразования R_{mn} падающей волны номера m в волну номера n при $|s| \ll 1$ есть малая величина [49, 95].

Аналогично для падающей электрической волны

$$H_y(x, z) = f_H(x) \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \left\{ \frac{\pi q}{2l} z + O(R_{mn}), \right. \quad \left. \begin{cases} q = 1, 3, \dots, \\ q = 2, 4, \dots, \end{cases} \right. \quad (4.1.5)$$

где

$$f_H(x) = \exp(-ih_m x) + R^{(H)} \exp(ih_m x). \quad (4.1.6)$$

Теперь можно ввести на границе $x = a, z \in (-l, l)$ «резонансные» импедансные граничные условия, связав функции $f_{E, H}(x)$ и их нормальные производные следующим образом:

$$f_{E, H}(a) = (\beta' + i\beta''_{E, H}) \sqrt{l/2k} df_{E, H}/dx|_{x=a}. \quad (4.1.7)$$

Импедансные граничные условия резонансного типа, записанные в форме (4.1.7), представляют интерес из-за их «локальности», т. е. возможности применять их не только (и не столько) к ключевым структурам, для которых они были получены, но и в других, более сложных ситуациях. Хорошо известно, что число задач дифракции, допускающих точное решение, весьма ограничено, и поэтому важно иметь надежный аппарат для расчета сложных структур. Примером этому служит развитая далее (см. гл. 6, 7) теория дисковых резонансных структур. Смысл приближенных граничных условий (4.1.7) состоит еще и в том, что с их помощью задача об изучении свойств открытой структуры сводится к более «привычной» классической постановке о свойствах закрытой структуры. Таким образом, возможна некая универсализация в постановке и решении задач для резонансных открытых структур.

В дальнейшем мы применим условия (4.1.7) к решению ряда задач и покажем эффективность их использования.

2. О коэффициентах β . Построение достаточно строгой и в меру простой теории открытых структур, достигнутое к настоящему времени, обязано полученным ранее строгим результатам теории полубесконечных или ключевых задач. Итогом является знание коэффициентов отражения R_{mn} или, что то же, коэффициентов β .

Впервые коэффициент β_0 был введен в работах Л. А. Вайнштейна по открытым резонаторам для квантовых генераторов света. Для оптического случая, когда $2kl \gg 1$, коэффициент отражения представляется в виде

$$R = -\exp\{i\beta_0(1+i)s\}, \quad (4.1.8)$$

где постоянный коэффициент β_0 в соответствии со строгой теорией дифракции на открытом конце полубесконечного плоского волновода, равен

$$\beta_0 = -\zeta(1/2)/\sqrt{\pi} \simeq 0,824; \quad (4.1.9)$$

и $\zeta(1/2)$ — дзета-функция Римана, а для определения комплексной частоты открытого ленточного резонатора $\omega = \omega' - i\omega''$ получается следующее дисперсионное уравнение:

$$kl = \pi(q/2 + p). \quad (4.1.10)$$

Введенный в уравнение (4.1.10) малый комплексный параметр p связан с s соотношением

$$s = \sqrt{4\pi p}. \quad (4.1.11)$$

При изучении периодической системы параллельных связанных ленточных открытых резонаторов [49] при $2kl \gg 1$ для коэффициента β было получено примерно вдвое меньшее значение $\beta = 0,483$, чем в (4.1.9).

Наличие в выражении для коэффициента отражения (4.1.8) одного коэффициента β (ср. с формулой (4.1.1)) является следствием «поляризационного вырождения» (безразличия) колебаний вида H и E в оптическом случае $2kl \gg 1$. Другая ситуация имеет место, когда между пластинами резонатора укладывается счетное число полуволн: $kl = \pi q, q = 1, 2, \dots$. В этом случае коэффициенты β приобретают более сложный вид. Во-первых, снимается поляризационное безразличие колебаний электрического и магнитного типов — появляется три коэффициента β', β_E'' и β_H'' (см. след. параграф).

Во-вторых, коэффициенты β начинают зависеть от q . Естественно, при $q \rightarrow \infty$ $\beta' = \beta_E'' = \beta_H''$ и стремятся к своим предельным значениям 0,824 (для одиночного резонатора) или 0,483 (для периодической решетки резонаторов) в соответствии с формулами типа (4.1.9). К получению конкретных выражений для $\beta' = \beta'(q)$ и $\beta_E'', \beta_H'' = \beta_E'', \beta_H''(q)$ и их исследованию мы сейчас переходим.

§ 4.2. Резонансные колебания в периодической системе параллельных металлических исчезающе тонких полос

1. Коэффициенты отражения в ключевой задаче. В настоящем параграфе рассматривается класс аналитических решений для «произвольных» расстояний между зеркалами резонаторов, когда между пластинами на расстоянии $2l$ укладывается целое число полуволн поля возбуждения: $2l \simeq q\lambda/2, q = 1, 2, 3, \dots$ или $2kl \simeq \pi q, q = 1, 2, \dots$. Это соответствует режиму высокодобротных колебаний в каждой ячейке структуры.

В нашем выводе будем отправляться от известных выражений [95, с. 243, формула (47.07) и с. 270] для коэффициентов отражения волноводных волн H - и E -типа номера q , имеющих место в полубесконечной структуре (например, $x \in [a, -\infty)$; $y \in (-a, \infty)$; рис. 32, б), когда во всех волноводах существуют распространяющиеся из $x = -\infty$ к $x = a$ волны. Волна в m -м волноводе отличается от волны в 0-м волноводе фазовым множи-

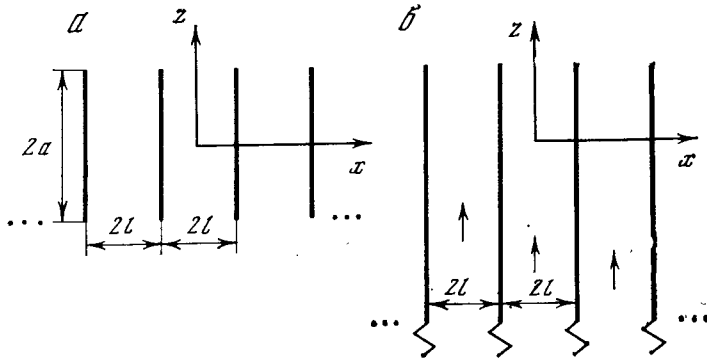


Рис. 32. Периодическая система плоских ($\partial/\partial y = 0$) ленточных открытых резонаторов (а) и система полубесконечных плоскостей (б) — ключевая задача

телом $\exp\{imhd\}$; $d = 2l$; h — имеет размерность волнового числа. За «нулевой» волновод примем ячейку, у которой $x = 0$, $z = 0$. Нужные нам коэффициенты отражения имеют вид

$$R_{qq}^{(E)} = -(i/4\pi\gamma_q^2)(\tilde{q} + \gamma_q) \frac{1 - (-1)^q \cos hd}{\Omega_+^2(wq)}, \quad (4.2.1)$$

$$R_{qq}^{(H)} = -(i/4\pi\gamma_q^2)(\tilde{q} + \gamma_q)^{-1}(q/2)^2 \frac{1 - (-1)^q \cos hd}{\Omega_+^2(wq)}. \quad (4.2.2)$$

Здесь $q = 1, 2, \dots$, т. е. случай плоской волны $R_0^{(E)}$ из рассмотрения исключен;

$$\begin{aligned} w_q d = 2\pi\gamma_q, \quad w_0 \equiv k, \quad \gamma_k = \sqrt{\tilde{q}^2 - (q/2)^2}, \quad \tilde{q} = kd/2\pi; \\ \Omega_+^2(w_q) = -2i \frac{\sin((k+h)d/2) \sin((k-h)d/2)}{\sin kd} \times \\ \times (1 + \gamma_q/\beta_0)^2 e^{i\gamma_q 4 \ln 2} \frac{\tilde{q}}{\tilde{q} + \gamma_q} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1 + \gamma_q/\beta_j)^2 (1 + \gamma_q/\beta_{-j})^2}{(1 + \gamma_q/\gamma_j)^2}; \quad (4.2.3) \end{aligned}$$

$$\beta_j = \sqrt{\tilde{q}^2 - (\eta - j)^2}, \quad j = 0, \pm 1, \pm 2;$$

$$2\pi\eta = hd.$$

Нашей задачей является преобразование формул (4.2.1) и (4.2.2) к виду

$$R_{qq}^{(E, H)} = \exp\{i(\beta' + i\beta_{E, H}'')s\} \quad (4.2.4)$$

и нахождение выражений для величин β' , β_E'' , β_H'' . После этого собственные функции и собственные числа будут (по форме) совпадать с соответствующими выражениями для открытых резонаторов, но уже для произвольных значений $q \neq \infty$.

При приближении частоты к критической $\gamma_q = \sqrt{\tilde{q}^2 - (q/2)^2} \rightarrow 0$ и из (4.2.1) — (4.2.3) непосредственно следует, что

$$R_{qq}^{(E)} \rightarrow A \exp\{2\gamma_q \tilde{q}\}, \quad R_{qq}^{(H)} \rightarrow A, \quad (4.2.5)$$

где общий для волн H и E коэффициент A есть

$$\begin{aligned} A = -i(\tilde{q}/4\pi\gamma_q^2) \frac{1 - (-1)^q \cos hd}{\Omega_+^2(wq)} e^{-\gamma_q \tilde{q}} = \\ = -1/4(1 + \gamma_q/\sqrt{\tilde{q}^2 - \eta^2})^2 e^{-i\gamma_q 4 \ln 2} \prod_{j=1}^{\infty} \frac{(1 + \gamma_q/\gamma_j)^2}{(1 + \gamma_q/\beta_j)^2 (1 + \gamma_q/\beta_{-j})^2}. \end{aligned}$$

Учитывая в последней формуле, что при $kd \rightarrow \pi q$ величина $2\gamma_q = s_q \sqrt{q/\pi}$, где $s_q = w_q \sqrt{2l/k}$, получим для коэффициента A следующее выражение:

$$\begin{aligned} A = -\exp\left\{-2\left[i2 \ln 2 + 1/\sqrt{\tilde{q}^2 - \eta^2}\right] - \right. \\ \left. - \sum_{j=1}^{\infty} (1/\gamma_j - 1/\beta_j - 1/\beta_{-j}) \gamma_q\right\}, \quad (4.2.6) \end{aligned}$$

в котором штрих у знака Σ означает, что в одном из слагаемых суммы опущено γ_j^{-1} при $j = q$. Из рассмотрения исключен также случай синфазных волн в соседних волноводах $\eta = \tilde{q}$, так как при этом $R \rightarrow 0$ и в «резонансном» смысле такая ситуация интереса не представляет. Некоторых пояснений требуют предельные случаи $\eta = 0$ и $\eta = 1/2$.

А. Пусть $\eta = 0$, $q = 2r$, $r = 1, 2, \dots$. При этом коэффициент отражения $R = 0$. Если $q = 2r + 1$, $r = 1, 2, \dots$, то формула (4.2.6) справедлива, но для $q = 1$ требуется учет следующих приближений (γ_q^2), т. к. $\gamma_q^2 \ll \tilde{q}^2 - \eta^2$, $\gamma_q \ll \tilde{\beta}_{\pm j}$. Можно однако показать, что при $q = 1$ коэффициент $\beta_E'' \sim O(p^{1/2})$.

Б. Пусть $\eta = 1/2$. При $q = 2r + 1$, $r = 1, 2, \dots$ $R = 0$, т. е. формула (4.2.6) несправедлива.

Таким образом, коэффициенты отражения $R_{qq}^{(E, H)}$ действительно представимы в виде (4.1.1). Для величин β' , β_E'' , β_H'' из (4.2.5), (4.2.6) имеем

$$\begin{aligned} \beta' = \sqrt{q/\pi} \left\{ -2 \ln 2 + \text{Im} \left[-1/\sqrt{(q/2)^2 - \eta^2} + \right. \right. \\ \left. \left. + \sum_{j=1}^{\infty} (1/\gamma_j - 1/\beta_j + 1/\beta_{-j}) \right] \right\}, \\ \beta_E'' = -\sqrt{q/\pi} \text{Re} \left[-1/\sqrt{(q/2)^2 - \eta^2} + \right. \\ \left. + \sum_{j=1}^{\infty} (1/\gamma_j - 1/\beta_j - 1/\beta_{-j}) \right], \quad (4.2.7) \\ \beta_H'' = \beta_E'' - 2l \sqrt{\pi q}, \quad \tilde{\beta}_j = \sqrt{(q/2)^2 - (\eta - j)^2}. \end{aligned}$$

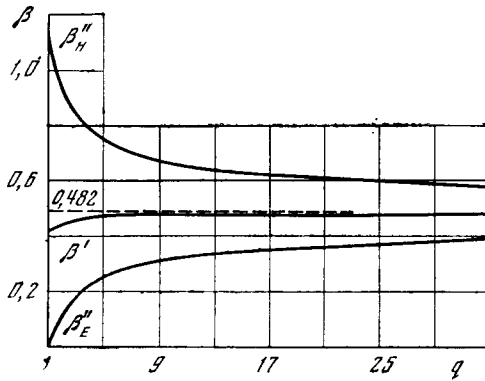


Рис 33. Зависимость коэффициентов β от q

Интересно отметить, что зависимость величин β' , $\beta''_{E,H}$ от q (числа полувольт, укладываемых между зеркалами) для рассмотренной системы несколько иная, чем для одиночного резонатора [44, 49], хотя формула для поляризационного расщепления собственных частот (последнее соотношение в (4.2.7)) остается такой же, как и для открытого дискового резонатора. Величины β' , $\beta''_{E,H}$ зависят от сдвига фаз собственных волн в соседних волноводах (ср. [49], где имеется аналогичная зависимость от «параметра возбуждения» σ — величины, являющейся функцией угла прихода волн и бриллюэновского угла собственной волноводной волны).

2. Результаты численного расчета величин β' , $\beta''_{E,H}$ представлены в таблице на с. 153 в [49] и иллюстрируются рис. 33 и 34. Из рис. 33 видно *, что величина β' при увеличении q быстро достигает своего предельного значения 0,483 (пунктир). Вместе с тем «поляризационное» вырождение («безразличие») колебаний E - и H -типов наступает только при очень высоких значениях q . В ряде случаев, например, в теории трубчато-диафрагменного волновода [62] последнее обстоятельство может оказаться существенным.

Добротные собственные колебания будут происходить при частоте $\omega = ck$, которая определяется соотношением (3), а малый комплексный параметр p будет иметь вид

$$p_{E,H} = \frac{\pi m^2}{4(M + \beta' + i\beta''_{E,H})^2}; \quad M = l\sqrt{2k/a}, \quad m = 1, 2, \dots \quad (4.2.8)$$

При этом собственные функции имеют вид, обычный для одиночного открытого резонатора. При $q \rightarrow \infty$ величины β' , $\beta''_{E,H}$ переходят в соответствующие выражения из [49], т. е. стремятся к предельному значению $\beta' = \beta''_E = \beta''_H = 0,483$.

* Графики зависимостей $\beta = \beta(q)$ приведены для наглядности. На самом деле величины β имеют смысл только в целочисленных точках оси абсцисс.

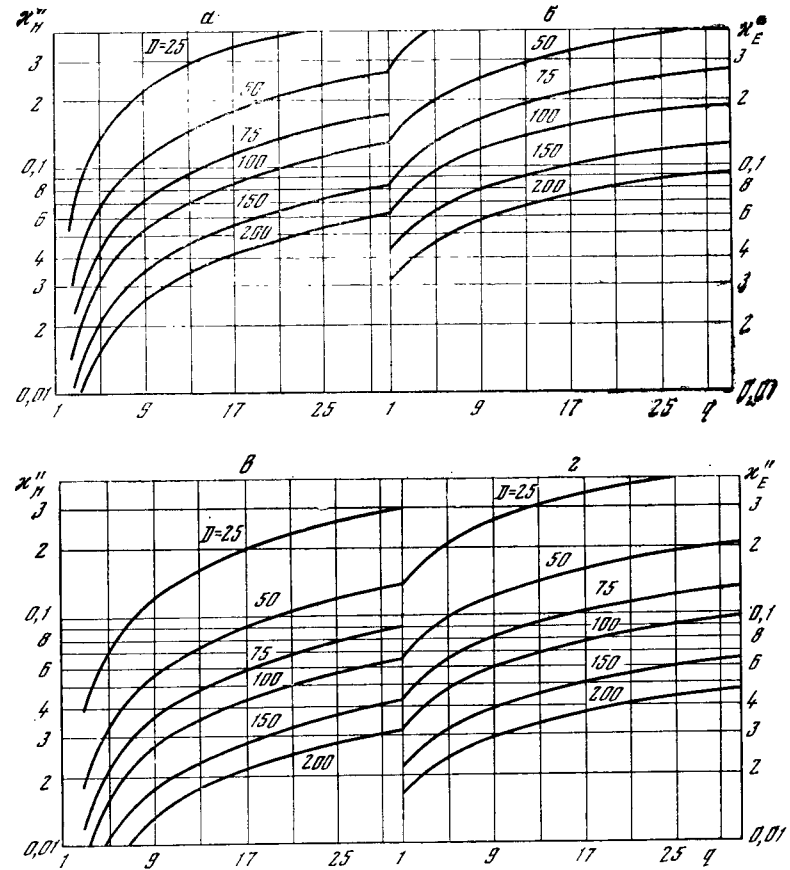


Рис. 34. Зависимость мнимой части поперечного волнового числа периодической решетки из полубесконечных плоскостей над плоскостью для нечетных (а, б) и четных (в, г) колебаний относительно этой плоскости

§ 4.3. Резонансные колебания в периодической системе параллельных металлических полос конечной толщины

1. Ключевая задача. Метод решения. Система уравнений [80]. Рассмотрение начнем с ключевой структуры, представленной на рис. 32, б; здесь же показаны размеры и используемая система декартовых координат ($\partial/\partial y \equiv 0$). Пусть слева из бесконечности на открытый конец ($z = 0$) структуры в каждом из волноводов падает магнитная волна (E_y, H_x, H_z), y -я компонента электрического поля которой есть $E_y^i \equiv u^i(x, z) = \varphi_i(x) \exp\{ih_i z\}$. Необходимо определить рассеянное поле $E_y(x, z) \equiv u(x, z)$, удовлетворяющее двумерному уравнению Гельмгольца

$$(\Delta_{xz} + k^2)u(x, z) = 0, \quad (4.3.1)$$

условию периодичности решения по координате x

$$u(x+d, z) = u(x, z), \quad (4.3.2)$$

граничному условию Дирихле на металлических поверхностях

$$u(0, z) = u(a, z) = 0, \quad z < 0 \text{ и } u(x, 0) = 0, \quad x \in (d, a), \quad (4.3.3)$$

а также условиям излучения и условиям на кромках. Поскольку рассматриваемая структура периодична по x (4.3.2), то в соответствии с теоремой Флокé будем искать решение в полосе $x \in (0, d)$ для $z \in (-\infty, 0)$ и $x \in (0, a)$ для $z \in (0, \infty)$.

Представим решение в указанной полосе в виде

$$u(x, z) = \varphi_i(x) e^{ih_i z} + \sum_{n=1}^{\infty} R_n \varphi_n(x) e^{-ih_n z}, \quad x \in [0, d], \quad z < 0; \quad (4.3.4)$$

$$u(x, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} T_j \psi_j(x) e^{i\gamma_j z}, \quad x \in [0, a], \quad z > 0. \quad (4.3.5)$$

Здесь $h_n = k \sqrt{1 - (n\pi/kd)^2}$, $\gamma_j = k \sqrt{1 - (2\pi j/ka)^2}$; $n = 1, 2, \dots$; $j = -\infty, \dots, -1, 0, 1, 2, \dots, \infty$. Поперечные функции $\varphi_n(x)$ и $\psi_j(x)$ определяются так:

$$\varphi_n(x) = \sqrt{2/d} \sin(\pi n x/d), \quad x \in [0, d]; \quad (4.3.6)$$

$$\psi_j(x) = (1/\sqrt{a}) e^{i(2\pi j/a)x}, \quad x \in [0, a].$$

Коэффициенты преобразования R_n , T_j падающего поля (i) в волны номеров n и j ($R_n \equiv R_{in}$, $T_j = T_{ij}$) представляют собою искомые величины.

Определим приближенное решение как предел ($N \rightarrow \infty$) последовательности

$$u_1^N(z, x) = \sum_{n=1}^N C_n^N(z) \varphi_n(x), \quad z < 0; \\ u_2^N(x, z) = \sum_{j=-\infty}^{\infty} T_j^N e^{i\gamma_j z} \psi_j(x), \quad z > 0; \\ C_n^N(z) = \delta_{ni} \exp(ih_i z) + R_n^N \exp(-ih_n z); \quad \delta_{ni} = 0, \\ n \neq i; \quad \delta_{ii} = 1. \quad (4.3.7)$$

Условиями сопряжения решений в областях (1) $z < 0$ и (2) $z > 0$ при $z = 0$ будут выражения

$$\int_0^d u_1^N(x) \psi_j^*(x) dx = \int_0^a u_2^N(x) \psi_j^*(x) dx; \quad j = \pm 1, \pm 2, \dots, \pm \infty, \quad (4.3.8)$$

$$\int_0^d \frac{\partial u_1^N}{\partial z} \varphi_k(x) dx = \int_0^a \frac{\partial u_2^N}{\partial z} \varphi_k(x) dx, \quad k = 1, 2, \dots, N. \quad (4.3.9)$$

В написанные условия сопряжения (4.3.8) и (4.3.9) решений в областях слева и справа от $z = 0$ естественным образом заложены условия (4.3.3) на торцах экранов.

Применение метода Галеркина к краевой задаче (4.3.1) — (4.3.3) и представление приближенного решения в виде (4.3.7) с условиями сопряжения (4.3.8), (4.3.9) приводит к системе линейных алгебраических уравнений относительно коэффициента преобразования R_n^N , записанной следующим образом (ср. [158]):

$$ih_n R_n^N - \sum_{k=1}^N R_k^N \left\{ \sum_{j=-\infty}^{\infty} i\gamma_j a_{nj} a_{kj}^* \right\} = 2i\delta_{ni} h_i, \quad n = 1, 2, \dots, N, \quad (4.3.10)$$

где

$$a_{nq} = \int_0^d \varphi_n(x) \psi_q^*(x) dx.$$

Таким образом, исходная краевая задача (4.3.1) — (4.3.3) приведена к системе линейных алгебраических уравнений (4.3.10). Можно показать [158], что при $N \rightarrow \infty$ приближенное решение R_n^N стремится к точному, т. е. при $N \rightarrow \infty$

$$\|u_1^N - u\|_{w_1} \rightarrow 0 \quad \text{и} \quad \|u_2^N - u\|_{w_2} \rightarrow 0. \quad (4.3.11)$$

Норма w_2^1 означает, что мы оперируем в пространстве функций, которые вместе со своими первыми производными суммируемы с квадратом [167].

2. Результаты некоторых численных расчетов. Основное внимание в настоящей работе мы уделим исследованию коэффициента отражения падающей волны $R_{ii} \equiv R_i$ при частоте, близкой к критической для данного типа колебаний ($h_i \rightarrow 0$). При этом, как известно, модуль коэффициента отражения близок к 1 и поле в области (1) внутри волновода, по существу, содержит только падающую и отраженную волны одного и того же типа, так что

$$u(x, z) = \varphi(x) \{e^{ih_i z} + R_i e^{-ih_i z}\} + O(R_{iq}), \quad i \neq q. \quad (4.3.12)$$

Близость волнового числа h_i к нулю (при которой для коэффициента отражения R_{ii} справедливо представление (4.2.4)) определялась в ходе численного эксперимента: находились такие значения добавки к условию $kd = \pi q + \tau$ ($q = 1, 2, \dots$ и определяет число полуволн, укладывающихся между пластинами структуры), при которых коэффициент отражения R_i в пределах заданной точности его определения ($10^{-4} \div 10^{-6}$) не зависел от τ . При этом величина τ оказывалась порядка $2\pi \cdot 10^{-4}$. Заданная точность определения $R_i \equiv R_i^N$ достигалась для $q \in [1, 5]$ при учете всех распространяющихся и нескольких нераспространяющихся волн в волноводах ($z < 0$). Максимальное значение $N_{\max} = 15$.

Результаты некоторых численных расчетов, проведенных в ВЦ МГУ на БЭСМ-4М и БЭСМ-6, показаны на рис. 35 и 36. На

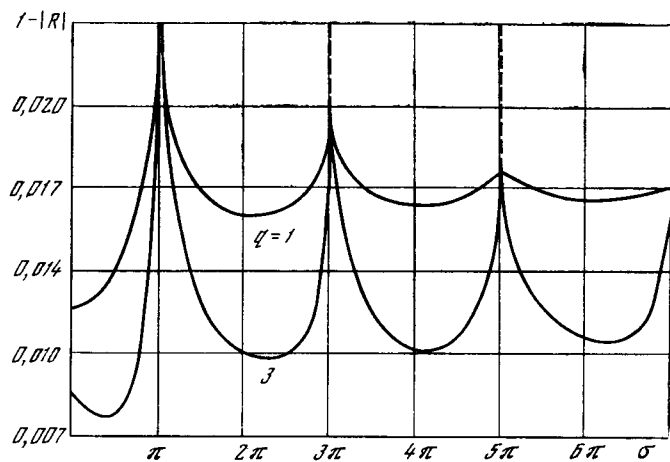


Рис. 35. Зависимость величины $1 - |R_i|$ от толщины пластины σ

рис. 35 представлена зависимость величины $1 - |R_i|$ от относительной толщины $\sigma = k(a - d)$ экрана для полубесконечной структуры рис. 32, б для двух значений параметра q . Кривые имеют осциллирующий характер. Минимальные значения коэффициента отражения получаются в точках, где σ чуть больше нечетного числа π ($\sigma = (2\nu - 1)\pi$, $\nu = 1, 2, \dots$; они показаны на рис. 35 вертикальными пунктирными линиями). Более подробный анализ этих зависимостей дан в следующем разделе.

3. Структура конечной длины (периодическая система связанных открытых резонаторов). Ограничивая структуру рис. 32, б по z , мы приходим к периодической системе параллельных связанных ленточных открытых резонаторов (рис. 32, а; ср. [51, 52]), рассмотренную при $\sigma = 0$ в работе [58]. При $h_i \rightarrow 0$ коэффициент отражения R_i может быть представлен в виде (4.1.1). Теперь коэффициенты β будут зависеть не только от q , но и от толщины зеркал $\sigma = k(a - d)$. Значения коэффициентов $\beta = \beta(q, \sigma)$ показаны на рис. 36. Они получены перестроением кривых рис. 35 по формулам $s\beta' = \arg(R - \pi)$ и $s\beta'' = \ln|R|$. Вблизи критической частоты параметр $s \approx \sqrt{2\tau}$ и при расчетах составлял величину порядка 0,01.

Кривые $\beta' = \beta'(q, \sigma)$ (рис. 36, а) обладают явно выраженной несимметрией относительно максимальных значений β_{\max} . С ростом q степень несимметрии уменьшается. Максимумы β_{\max} ($q = \text{const}$, σ) находятся слева от точек $\sigma = \pi(2\nu - 1)$, $\nu = 1, 2, \dots$, соответствующих толщине пластин, кратной нечетному числу полуволи. Как видно из рис. 36, а, $\beta' \rightarrow 0,824$ при $\sigma \rightarrow \infty$, т. е. фазовые соотношения при неограниченном увеличении толщины зеркал стремятся к значению β_{∞} для одиночного

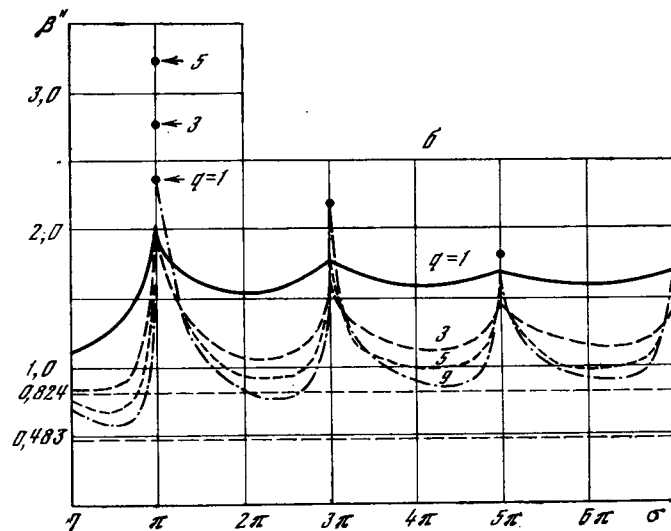
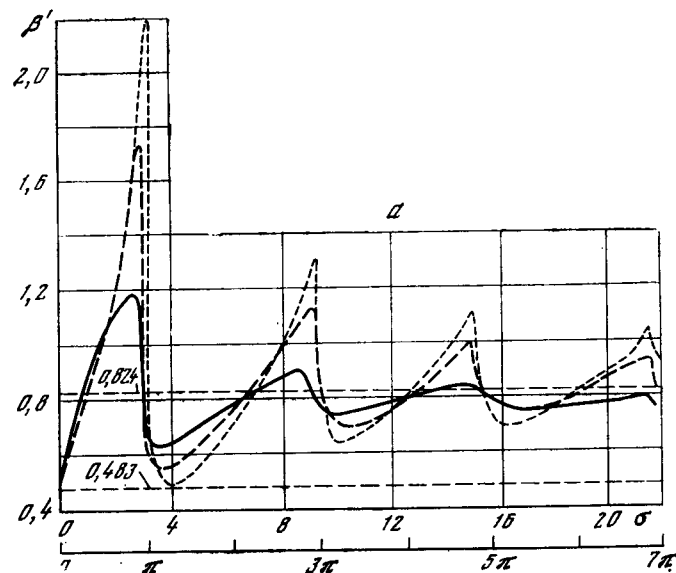


Рис. 36. Зависимость коэффициентов $\beta'(a)$ и $\beta''(b)$ от толщины зеркал σ в системе связанных открытых ленточных резонаторов (рис. 32, а) для $q = 1$ (сплошная кривая), $q = 3$ (пунктирная), $q = 5$ (светлый пунктир)

Горизонтальные пунктирные линии показывают предельные ($q \rightarrow \infty$) значения коэффициентов β для одиночного открытого резонатора ($\beta_{\infty} = 0,824$) и системы ленточных открытых резонаторов ($\beta_{\infty} = 0,483$) при $\sigma = 0$

открытого резонатора (при $q \gg 1$). Несколько неожиданным является то обстоятельство, что быстрее к своему предельному значению стремятся кривые для меньших значений q (при $\sigma \rightarrow \infty$). Это связано с тем, что с ростом q увеличивается добротность колебаний в каждой ячейке структуры, а, стало быть, и взаимное влияние соседних ячеек при этом возрастает.

Кривые $\beta_E'' = \beta_E''(q, \sigma)$, представленные на рис. 36, б, более симметричны относительно своих максимумов (точно совпадающих с точками $\sigma = (2\nu - 1)\pi$, $\nu = 1, 2, \dots$), чем $\beta' = \beta'(q, \sigma)$. Кривые $\beta_E'' = \beta_E''(q = \text{const}, \sigma \rightarrow \infty)$ имеют своими асимптотами значения β_E'' , соответствующие открытому концу плоского волновода с бесконечными фланцами. Так, для $q = 1 \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \beta'' = 1,52$, а для $q = 3 \lim_{\sigma \rightarrow \infty} \beta'' = 1,24$ и т. д. С ростом q влияние σ уменьшается; ширина «резонансного поглощения» также уменьшается. Минимальные потери имеют место при толщине зеркал немного большей $\sigma = 2\pi\nu$, $\nu = 1, 2, \dots$.

Интересной особенностью полученных результатов является существенно разная зависимость $\beta' = \beta'(q = \text{const}, \sigma)$ и $\beta'' = \beta''(q = \text{const}, \sigma)$ при $\sigma \ll \pi$. Наиболее резко она проявляется при $q = 1$. Величина $\beta'(q, \sigma)$ оказывается весьма чувствительной к изменению σ при $\sigma \ll \pi$. Отмеченный факт является важным для теории диафрагменной линии, трубчато-диафрагменного волновода и тому подобных структур). Гораздо в меньшей степени это влияние сказывается на поведении $\beta'' = \beta''(q = \text{const}, \sigma)$. По мере увеличения q в этих кривых (при $\sigma < \pi$) появляются «провалы», минимум которых стремится к значению $\beta_\infty'' = 0,483$. Это, в общем, соответствует поведению кривых при $\sigma = 0$ и росте q (см. рис. 2 в [58]).

Представление коэффициента отражения R_i формулой (4.1.1) позволяет воспользоваться готовыми результатами теории открытых резонаторов, заменив в них коэффициенты β на полученные в настоящем разделе. Так, добротные колебания будут происходить на частоте $\omega = ck$, которая удовлетворяет дисперсионному уравнению $kd = \pi q + 2\pi p$; малый по модулю комплексный параметр p есть

$$p = p' - ip'' = (m/2M)^2 \pi / (1 + (\beta' + i\beta'')/M)^{-2}, \quad m = 1, 2, \dots; \quad (4.3.13)$$

$$M = 2l \sqrt{k|d} \gg 1.$$

Распределение токов на зеркалах определяется функцией $f_m(z)$, равной

$$f_m(z) = \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} \frac{\pi m z}{2l(1 + (\beta' + i\beta'')/M)}, \quad \begin{cases} m = 1, 3, \dots \\ m = 2, 4, \dots \end{cases} \quad (4.3.14)$$

Аналогично выписываются и другие соотношения для добротности, фазового набега и т. д.

4. Проведенный анализ позволил оценить степень влияния конечной толщины экрана на добротные колебания в периодической системе дифракционно связанных параллельных открытых резонаторов. Представление коэффициента отражения соотношением (4.1.1) дает возможность провести обобщение полученных результатов (вводя на открытом краю электродинамической — и не обязательно двумерной — структуры резонансные импедансные граничные условия) на целый ряд устройств миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн.

При не очень малых значениях q представленные результаты могут быть обобщены и на открытые резонаторы с прямоугольными зеркалами.

Полученные результаты позволяют также ответить на ряд вопросов теории фазированных антенных решеток (см., например, [42, с. 276]). В частности, можно утверждать, что апертурные резонансы можно объяснить на основе единой теории и связаны они с хорошим отражением падающей на открытый конец полубесконечной структуры волны при частоте, близкой к критической.

Часть вторая

ПРИМЕНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА КОНКРЕТНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ

Глава 5

КОЛЬЦЕВОЙ И СПИРАЛЬНЫЙ ВОЛНОВОДЫ

§ 5.1. Волны H_{0n} в кольцевом волноводе с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом

Для анализа распространения волн H_{0n} в кольцевом волноводе с диэлектрической оболочкой и экраном (рис. 37) удобно воспользоваться граничными условиями (2.2.19), записанными в цилиндрической системе координат r, φ, z :

$$E_{\varphi 1} - E_{\varphi 2} = ikl_2 (H_{z1} + H_{z2}), \quad (5.1.1)$$

$$E_{\varphi 1} + E_{\varphi 2} = ikl_3 (H_{z1} - H_{z2}),$$

которые должны выполняться на периодической структуре, т. е. при $r = a$ и условием на экране: $E_{\varphi 2} = 0$ при $r = b$ ($b - a = d$). В области $a < r < b$ диэлектрическая проницаемость имеет значение $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$; для полости волновода ($0 < r < a$) $\epsilon = 1$. Подставим выражения для компонент поля волн типа H_{0n}

$$\begin{aligned} H_{z1} &= \alpha^2 J_0(\alpha r) A_1, \\ E_{\varphi 1} &= -ik\alpha J_1(\alpha r) A_1, \quad 0 < r < a, \\ H_{z2} &= \beta^2 (J_0(\beta r) A_2 + N_0(\beta r) B_2), \\ E_{\varphi 2} &= -ik\beta (J_1(\beta r) A_2 + N_1(\beta r) B_2), \quad a < r < b; \end{aligned} \quad (5.1.2)$$

(здесь $\alpha = \sqrt{k^2 - k^2}$; $\beta = \sqrt{k^2 \epsilon - k^2}$; $h = h' - ih''$ — постоянная распространения) в граничные условия и исключим обычным образом постоянные A_1, A_2, B_2 . Получаем дисперсионное уравнение

$$\begin{aligned} (J_1(\alpha a)/J_0(\alpha a) + \alpha(l_3 + l_2)/2)(Q + \beta(l_3 + l_2)/2) = \\ = (l_3 - l_2)/4 \alpha \beta, \end{aligned} \quad (5.1.3)$$

$$\begin{aligned} Q = [J_1(\beta a) N_1(\beta b) - J_1(\beta b) N_1(\beta a)] / [J_1(\beta b) N_0(\beta a) - \\ - J_0(\beta a) N_1(\beta b)]. \end{aligned}$$

Для больших значений ka и $|\epsilon - 1| > 1$ можно воспользоваться асимптотическим представлением специальных функций от аргументов βa и βb . В этом случае $Q \approx \text{tg } \beta d$. При $q = 1$ ($l_3 = l_2$) проводники, образующие периодическую структуру, сомкнуты, поле в кольцевом волноводе ($0 < r < a$) полностью экранировано, и (5.1.3) переходит в уравнение для гофрированного волновода с неглубокой гофрой:

$$J_1(\alpha a)/J_0(\alpha a) = -\alpha l_2, \quad (5.1.4)$$

откуда методом возмущения можно получить собственное значение и фазовую постоянную:

$$\alpha a = \mu(1 - l_2/a), \quad h = h_0 + \mu^2 l_2 / ah_0 a^3. \quad (5.1.5)$$

Здесь μ — собственное значение для гладкой трубы ($J_1(\mu) = 0$); $h_0 = \sqrt{k^2 - (\mu/a)^2}$. Просачивание поля волн H_{0n} в область $a < r < b$ при малых q обычно ничтожно, поскольку оно эквивалентно проникновению E -поляризованной плоской волны сквозь решетку, т. е. пропорционально малой величине $k(l_3 - l_2)$ (см. формулу (2.2.18) и рис. 8, а).

Поэтому, естественно, что это малое просачивание внесет весьма малую добавку в изменение фазовой постоянной, в связи с чем при расчете вещественной части h формулой (5.1.5) можно пользоваться и для $q \neq 1$. Для затухания, обязанного потерям в диэлектрическом слое ($a < r < b$), из уравнения (5.1.3) получаем формулу

$$\begin{aligned} h'' = (\mu^2 (l_3 - l_2)^2 / 4h_0 a^4) \text{Im} (\beta_0 a / (\text{tg } \beta_0 d + \beta_0 l_2)), \\ \beta_0 = \sqrt{k^2 \epsilon - h_0^2}. \end{aligned} \quad (5.1.6)$$

При $d \rightarrow \infty$, $\epsilon'' \neq 0$, $\text{tg } \beta_0 d \rightarrow -i$, и формула (5.1.6) переходит в формулу (1) работы [118], определяющую потери в кольцевом волноводе с бесконечной диэлектрической оболочкой.

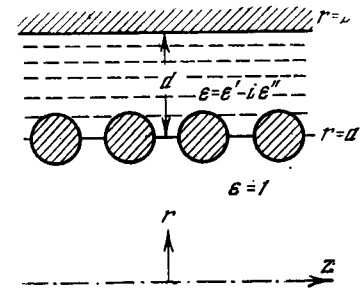


Рис. 37. Продольное сечение кольцевого волновода с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом

В спиральном волноводе кольцевые токи образуют со щелями малый угол $\psi = \text{arctg}(p/2la)$ (угол подъема витков спирали). Поэтому поле волн H_{0n} в таком волноводе не может быть «чистым»: наряду с компонентами E_φ и H_z появляются также компоненты E_z и H_φ . Соответственно в коэффициенте затухания будет

присутствовать не одно, а два слагаемых. Одно по-прежнему связано с компонентами E_ϕ и H_z и дает потери в диэлектрике типа (5.1.6), которые при $\psi \ll 1$ будут такими же, как в кольцевом волноводе (так называемое кольцевое слагаемое), а второе (спиральное) слагаемое связано с компонентами E_z и H_ϕ , дает потери в диэлектрическом слое вследствие «нечистоты» поля волн H_{0n} за счет угла подъема витков ψ . Заметим, что моделирование периодической структуры с помощью анизотропнопроводящего цилиндра не позволяет учесть потери первого типа (формула (5.1.6)), но дает возможность оценить спиральное слагаемое (см. формулу (12) работы [113] и формулу (8) работы [118]). Однако ясно, что подобная оценка будет давать завышенные потери, ибо для возникшей паразитной поляризации (H_ϕ , E_z) анизотропнопроводящая поверхность не представляет препятствия, поскольку в такой модели не учитывается влияние периода и экранирующих свойств реальных телесных проводников. Поэтому данная близкорасположенных проводников такая оценка окажется неудовлетворительной. Учесть влияние указанных факторов (например, в спиральном волноводе с кожухом) можно, домножив затухание, определяемое формулой (12) работы [113], на отношение $\text{Re}\eta^m/\text{Re}\tilde{\eta}^m$, где η^m и $\tilde{\eta}^m$ даются формулами (2.3.6); причем η^m соответствует модели решетка — слой диэлектрика — экран, а $\tilde{\eta}^m$ — модели слой диэлектрика — экран (легко показать, что потери волны E_{01} , возникающей при $\psi \neq 0$, пропорциональны $\text{Re}\eta^m$).

Если предположить, что $\epsilon'' \ll \epsilon' - 1$, и пренебречь величинами μ^2 ; $\mu^2 (l_2/a)^2$; $\mu^2 (d/a)^2$ по сравнению с величинами $(ka)^2 (\epsilon' - 1)$; $(kl_2)^2 (\epsilon' - 1)$, $(kd)^2 (\epsilon' - 1)$ соответственно, то можно записать формулу для относительного (по отношению к потерям в кольцевом волноводе с бесконечной диэлектрической оболочкой) затухания в виде

$$\Delta = \frac{h''(d)}{h''(d=\infty)} = \frac{2}{x} \frac{P(x \text{ sh } 2yd - y \sin 2xd)}{(\sin 2xd + 2xl_2P)^2 + (\text{sh } 2yd + 2yl_2P)^2}, \quad (5.1.7)$$

$$x = k\sqrt{\epsilon' - 1}, \quad y = \frac{ke''}{2\sqrt{\epsilon' - 1}}, \quad P = \text{sh}^2 yd + \cos^2 xd.$$

Результаты расчета относительного затухания по этой формуле для значений параметров $a = 30 \text{ мм}$, $\lambda = 8 \text{ мм}$, $\epsilon' = 3$, $\epsilon'' = 0,1$, $q = 0,5$, $p = 0,3 \text{ мм}$ в функции от d представлены на рис. 38. При толщинах диэлектрика $d = \frac{\lambda}{4\sqrt{\epsilon' - 1}}(2\nu + 1)$ ($\nu = 0, 1, 2, \dots$) имеем минимумы $\Delta = \text{th } yd$. При $d = \frac{\lambda}{2\sqrt{\epsilon' - 1}} \nu$

$$\Delta = \frac{\text{th}(yd)}{(l_2x)^2 + (\text{th } yd + l_2y)^2}.$$

В этих точках наблюдается резкое увеличение относительного затухания. Это явление можно объяснить следующим образом. Тангенциальное электрическое поле всегда равно нулю при

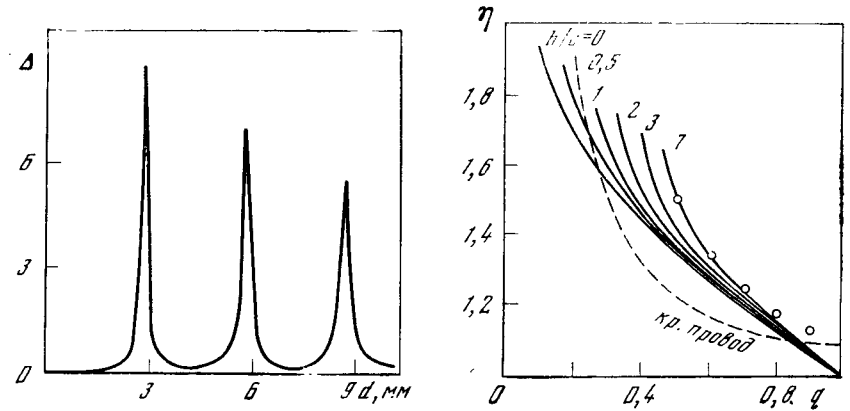


Рис. 38. Зависимость относительного затухания в диэлектрической оболочке от ее толщины

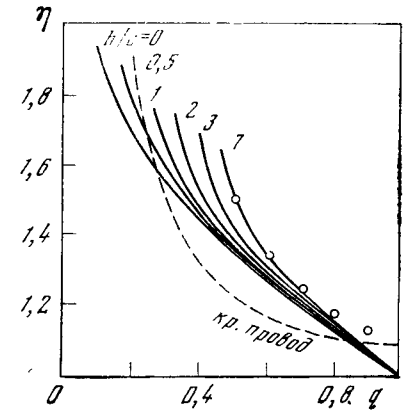


Рис. 39. Относительные омические потери в проводниках

$r = b$ (стенка кожуха) и весьма мало при $r = a$, т. е. на поверхности кольцевого волновода. Когда толщина диэлектрика такова, что в ней укладывается целое число половин длин волн, возникает резонанс в области между периодической структурой и экраном, сопровождающийся накоплением энергии в этой области, что и приводит к возрастанию затухания. Значительное уменьшение относительного затухания при толщинах диэлектрика, отличающихся от «резонансных», можно объяснить дополнительным поступлением энергии во внутреннюю область ($0 < r < a$) за счет многократных отражений в диэлектрическом слое [134].

При оценке омических потерь (потери, обязанные неидеальности проводников) ввиду обычно ничтожного проникновения поля в область $0 < r < a$, очевидно, можно считать, что наличие металлического экрана при не слишком малых q не может вызвать заметного их изменения (по крайней мере не на резонансных участках) по сравнению с потерями этого типа в спиральном или кольцевом волноводе с бесконечной диэлектрической оболочкой. Поэтому ограничимся здесь изложением результатов расчета омических потерь, приведенных в работе [119] для периодического волновода с бесконечной оболочкой. В работе [118] показано, что при замене гладкой поверхности сплошного волновода кольцевой или спиральной происходит перераспределение токов, приводящее к увеличению омических потерь. Это увеличение удобно характеризовать множителем η , представляющим собой отношение омических потерь в периодическом волноводе к потерям в сплошном:

$$\eta = \left(\oint_C \left| \frac{\partial F}{\partial n} \right|^2 ds \right) / k^2 p |H_z^0|^2. \quad (5.1.8)$$

Здесь H_z^0 — магнитное поле на стенке гладкого волновода; интеграл берется по контуру поперечного сечения провода. Если выразить нормальную производную поля E через функцию преобразования $z(u)$, то (5.1.8) представляется в виде (см. формулу (7) работы [118])

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{\sigma-u} \right) \frac{du}{u|z'(u)|^2}. \quad (5.1.9)$$

Для проводников прямоугольного поперечного сечения получаем

$$\eta = \frac{1}{2\pi} \int_0^1 \left(\frac{1}{1-u} + \frac{1}{\sigma-u} \right) \sqrt{\frac{(1-u)(\sigma-u)}{u|t-u|}} du. \quad (5.1.10)$$

Результаты расчета η для проводников прямоугольного поперечного сечения при различных отношениях b/c и для проводников круглого поперечного сечения представлены на рис. 39 в функции от коэффициента заполнения q . В работе [137] был проведен расчет омического затухания волны H_{01} в спиральном волноводе из круглого провода для четырех значений $q = 0,5; 0,67; 0,75; 1,0$. Для $q = 1$, что соответствует волноводу из круглого провода, намотанного вплотную, без щелей, $\eta = 1,085$. Результаты этой работы хорошо согласуются с приведенными на рис. 39. В работе [138] для любых b/c и q предлагается формула для полного увеличения затухания, которая дает удовлетворительные результаты только при больших c и при q , близких к единице; потери на излучение не учитываются. Неудовлетворительной следует считать также формулу (3) работы [139] для омического затухания в спиральном волноводе из прямоугольного проводника. Ошибочна формула для относительных омических потерь в кольцевом волноводе, полученная в работе [140]. Согласно этой формуле потери линейно убывают с увеличением ширины щелей и всегда остаются меньше потерь в сплошном волноводе. По утверждению автора эти потери могут быть снижены в 12,9 раза по сравнению с потерями в сплошном волноводе. Результаты [140] противоречат помимо [118] и [119] работе [141], а также известным положениям о токе вблизи края металлической полуплоскости (см., например, [142]), согласно которым неограниченное уменьшение толщины колец в аксиальном направлении должно привести к бесконечному возрастанию омических потерь. Ошибка автора, по-видимому, связана с использованием в канавках одноволнового приближения, не учитывающего особенностей тока вблизи кромок.

Сопоставление с потерями в диэлектрике свидетельствует о том, что основную часть затухания как правило составляют омические потери. Как видно из рис. 39, эти потери при немалых q обычно не на много превосходят потери в стенках сплошного волновода. Например, для волновода из круглого провода при $q = 0,5$ омические потери увеличиваются всего на 23% (и составляют 1,32 дБ/км

для трубы диаметром 60 мм) и становятся тем меньше, чем теснее намотка. Однако ясно, что стремление уменьшить потери за счет сокращения ширины щелей ($q \rightarrow 1$) может, вообще говоря, привести к недопустимому снижению фильтрующих свойств спирального волновода. Поэтому следует выбирать коэффициент заполнения настолько близким к единице, чтобы прирост потерь волны H_{01} по сравнению с гладкой трубой был еще незначителен, и вместе с тем настолько отличающимся от единицы, чтобы уже обеспечена была эффективная фильтрация паразитного поля.

Перейдем к расчету условий распространения паразитных типов волн в периодических волноводах.

§ 5.2. Расчет фильтрующих свойств спирального волновода и фазовых характеристик несимметричных типов волн

Известно, что в спиральном и кольцевом волноводах условия распространения всех волн, обладающих продольными токами (сюда относятся симметричные электрические волны и все несимметричные типы волн), сильно возмущены по сравнению с гладкой трубой. Очевидно, что спиральная и кольцевая структура электродинамически тождественны с точки зрения распространения указанных типов волн при условии малости угла подъема спирали ($\psi \ll 1$), так как получающаяся при этом поправка для спирали по сравнению с кольцевой структурой будет пренебрежимо малой по сравнению с возмущением, вносимым периодичностью.

Для анализа условий распространения паразитного поля в периодическом волноводе с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом воспользуемся граничными условиями (2.3.6), которые должны выполняться на периодической структуре, т. е. при $r = a$ (рис. 37). Напомним, что наряду с периодом, формой и относительными размерами проводников эти условия учитывают наличие экрана и поглощение в диэлектрическом слое и тем самым позволяют не рассматривать поля в области $a < r < b$. Повторим запись условий (2.3.6) в цилиндрической системе координат r, φ, z :

$$E_z = (\alpha/k) \eta_0^m H_\varphi, \quad E_\varphi = -(k/\alpha) \eta_0^e H_z, \quad (5.2.1)$$

$$\eta_0^m = (R_{\alpha\phi}^m - 1)/(R_{\alpha\phi}^m + 1), \quad \eta_0^e = (R_{\alpha\phi}^e + 1)/(R_{\alpha\phi}^e - 1).$$

Здесь $\alpha = \sqrt{k^2 - h^2}$; $h = h' - ih''$ — постоянная распространения; $R_{\alpha\phi}^m$ и $R_{\alpha\phi}^e$ определяются формулами (2.3.4) и (2.3.5).

Подчиняя выражение для компонент внутренних полей смешанного типа в круглом волноводе

$$E_\varphi = ikaJ_n'(ar)B + (hn/r)J_n(ar)A, \quad E_z = \alpha^2J_n(ar)A, \quad (5.2.2)$$

$$H_\varphi = (hn/r)J_n(ar)B - ikaJ_n'(ar)A, \quad H_z = \alpha^2J_n(ar)B$$

(здесь опущен множитель $\exp i(\omega t + n\varphi - kz)$) условиям (5.2.1) и исключив постоянные A и B , получаем дисперсионное уравнение

$$(J_n(x) + i\eta_0^m J_n'(x))(\eta_0^e J_n(x) + iJ_n'(x)) + (nh/kx)^2 \eta_0^m J_n^2(x) \equiv 0$$

$$x = aa. \quad (5.2.3)$$

При $n = 0$ уравнение распадается на уравнения для симметричных электрических и магнитных волн:

$$J_0(x) = i\eta_0^m J_1(x), \quad J_1(x) = -i\eta_0^e J_0(x). \quad (5.2.4)$$

Если рассматривать ленточные проводники и устремить $q \rightarrow 1$, то $\eta_0^m \rightarrow \eta_0^e \rightarrow 0$. В результате приходим к обычным уравнениям для гладкой трубы: $J_n(x) = 0$, $J_n'(x) = 0$. Уравнение (5.2.3) может быть использовано также для расчета гофрированного волновода с мелкой гофрой; при этом $q = 1$, $|R_{зф}^m| = |R_{зф}^e| = 1$, поле в область $a < r < b$ не проникает, величины η_0^m и η_0^e — чисто мнимые. Если $q \neq 1$ и диэлектрик идеальный ($\epsilon'' = 0$, потери отсутствуют), то $|R_{зф}|$ также равен единице, η_0^m , η_0^e по-прежнему чисто мнимые, и собственное значение x вещественно. В общем случае $\epsilon = \epsilon' - i\epsilon''$, $\eta_0^m = \eta_0^{m'} + i\eta_0^{m''}$, $\eta_0^e = \eta_0^{e'} + i\eta_0^{e''}$, $x = x' + ix''$. Если же диэлектрическая проницаемость оболочки такова, что $\epsilon'' \ll \epsilon'$, то мнимая добавка в собственном значении, обязанная диэлектрическим потерям, будет также малой ($x'' \ll x'$) и для решения уравнения (5.2.3) может быть использован метод возмущения. При исследовании паразитных типов волн вполне допустимо пренебречь малым просачиванием поля в область $a < r < b$, соответствующим E -поляризации и считать η_0^e чисто мнимой величиной ($\eta_0^e = i\eta_0^{e''}$), а $R_{зф}^e = R$. Это накладывает запрет лишь на рассмотрение практически малоинтересного случая волноводов с очень малыми коэффициентами заполнения (при немалых q ($q > 0, 2$); потери волн, обязанные кольцевым токам, по крайней мере на два порядка меньше потерь, обусловленных наличием продольных токов.

Так как при $\epsilon'' \rightarrow 0$ $x'' \rightarrow 0$, $\eta_0^{m''} \rightarrow 0$ то, используя метод возмущения, мы должны отбрасывать наряду с членами порядка x''^2 члены порядка $\eta_0^{m'} x''$. В результате для вещественной части собственного значения волн с азимутальным индексом n , равным единице, получаем уравнение

$$(J_1(x') - \eta_0^{m'} J_1'(x'))(J_1'(x') + \eta_0^e J_1(x')) + \eta_0^{m''} \left(\frac{1}{x'^2} - \frac{1}{(ka)^2} \right) J_1^2(x') = 0. \quad (5.2.5)$$

Мнимая часть собственного значения оказывается пропорциональной отношению $\eta_0^{m''} / \eta_0^{m'}$.

По уравнению (5.2.5) и формуле для x'' был произведен расчет затухания и фазовых характеристик первых пяти волн с азимутальным индексом, равным единице, для большого набора пара-

метров волновода. Предполагалось, что периодический волновод имеет радиус $a = 30$ мм и образован из проводников круглого поперечного сечения. В процессе счета менялись электрические параметры оболочки ϵ' и ϵ'' , ее толщина d , период p и коэффициент заполнения q . Рассчитывалось также изменение свойств волновода в полосе частот. Результаты расчета представлены на рис. 40—44.

На рис. 40 изображены собственные значения x_{1m} первых пяти несимметричных волн в спиральном волноводе с идеальной диэлектрической оболочкой ($\epsilon' = 3$, $\epsilon'' = 0$) в функции от ее толщины d мм для $\lambda = 8$ мм, $a = 30$ мм. Период волновода равен 0,2 и 1 мм (на рис. 40, в он меняется от 0 до 0,8 мм через 0,4 мм). Кривые рис. 40 соответствуют коэффициентам заполнения 0,7 (а); 0,9 (б); 0,96 (в). Из рисунков отчетливо видна характерная для подобных систем периодичность (с периодом по d , равным $\lambda/2\sqrt{\epsilon' - 1}$) изменения собственных значений при плавном изменении d (см. [113, рис. 2]). В областях перерождения собственные значения убывают с ростом d тем значительнее и круче, чем больше коэффициент заполнения и период. При этом первое собственное значение, спадая до нуля, становится затем чисто мнимым, что соответствует области медленных волн. Вне области перерождения относительная независимость хода кривых от толщины оболочки выражена тем ярче, чем больше p и q . Зависимость собственных значений от шага спирали сильнее у четных номеров и становится весьма значительной при более тесной намотке. С увеличением периода собственные значения убывают.

Рис. 40, в ($q = 0,96$) дает достаточно хорошее представление о поведении кривых при неограниченном сближении проводников ($q \rightarrow 1$, переход к мелкогофрированному волноводу). Результаты этого расчета показывают, что в спиральном (кольцевом) волноводе с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом для большого диапазона параметров волновода может быть обеспечено эффективное расфазирование волны H_{01} с паразитными типами волн, в том числе устранено имеющее место в гладком волноводе вредное явление вырождения (совпадение собственных значений) между волнами E_{11} и H_{01} , приводящее к большим потерям на преобразование. Как видно из рисунков, для обеспечения расфазированных свойств волновода необходимо, чтобы толщина диэлектрической оболочки выбиралась в области пологих участков собственных значений. В частности, при параметрах рис. 40, в необходимо $0,75 \text{ мм} < d - m \cdot 2,83 \text{ мм} < 2,5 \text{ мм}$ ($m = 1, 2, \dots$). (5.2.6)

Расчет также показывает, что увеличение шага спирали может привести к недопустимому ухудшению расфазирования, а именно: к сближению фазовых скоростей волн H_{01} и следующей за ней (по величине собственного значения) паразитной волны (см. рис. 40, в). Это накладывает ограничение на величину периода при тесной намотке. Так, для волновода, намотанного вплотную, виток к витку, его шаг не следует, по-видимому, делать больше, чем 0,4 мм.

Рис. 41—42 содержат результаты расчета волновода с диэлектрической оболочкой, обладающей поглощающими свойствами ($\epsilon'' \neq 0$).

На рисунках изображены реальные части собственных значений и затухание (в дб/км), обязанное диэлектрическим потерям в функции от толщины оболочки при $p = 0,4 \text{ мм}$; $\epsilon' = 3$; $\epsilon'' = 0,1; -0,5$. Коэффициент заполнения принимает значения $q = 0,92; 0,94; 0,96$. Из расчета видно следующее.

1. Затухание волн носит резонансный характер. Выбросы затухания соответствуют областям наиболее резкого изменения реальных частей собственных значений.

2. На участках (5.2.6) зависимость $x_{1,2v+1}$ (нечетные номера собственных значений соответствуют H_1 -волнам в гладком волноводе) от d выражена значительно слабее (как и в случае идеальной оболочки), чем у $x_{1,2v}$ (соответствуют E_1 -волнам в гладкой трубе) и с ростом номера исчезает почти совсем.

3. Затухание волн с четными номерами растет с ростом номера и всегда значительно больше, чем затухание волн с нечетными номерами, которое с ростом номера падает.

4. Пункты 2 и 3, по-видимому, свидетельствуют о преоблада-

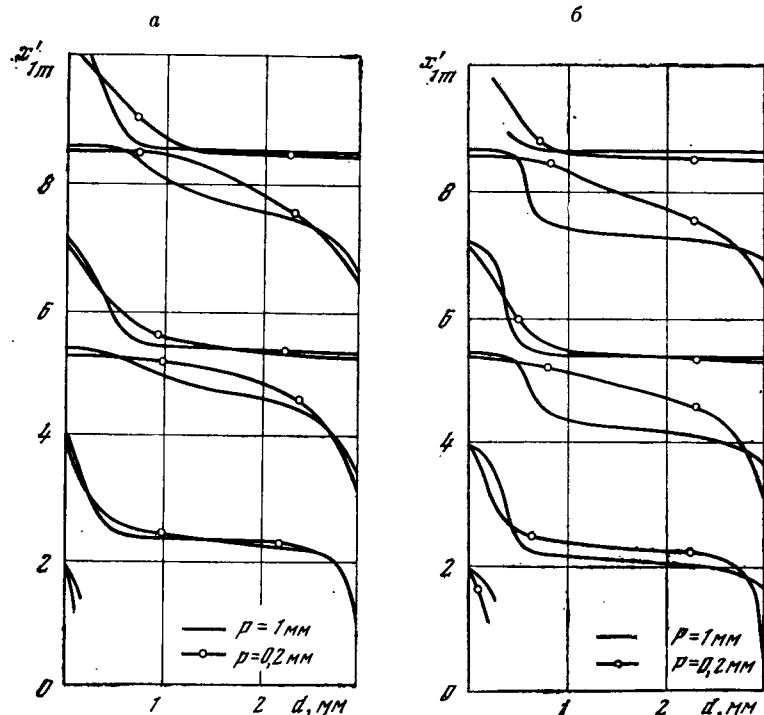


Рис. 40. Зависимость поперечных волновых чисел от толщины оболочки

нии у нечетных номеров волн азимутальных токов, хорошо экранируемых спиралью.

5. С ростом d резонансная картина сглаживается (тем быстрее, чем больше ϵ''): минимумы затухания поднимаются, максимумы расползаются и понижаются; колебания x_{1m} становятся все меньше, иными словами, наличие внешнего экрана сказывается все менее, волновод по своим свойствам приближается к волноводу с бесконечной диэлектрической оболочкой. Заметим, что явление перерождения волн в волноводе с поглощающей оболочкой исчезает (см. рис. 41, б) по крайней мере для достаточно больших ϵ'' .

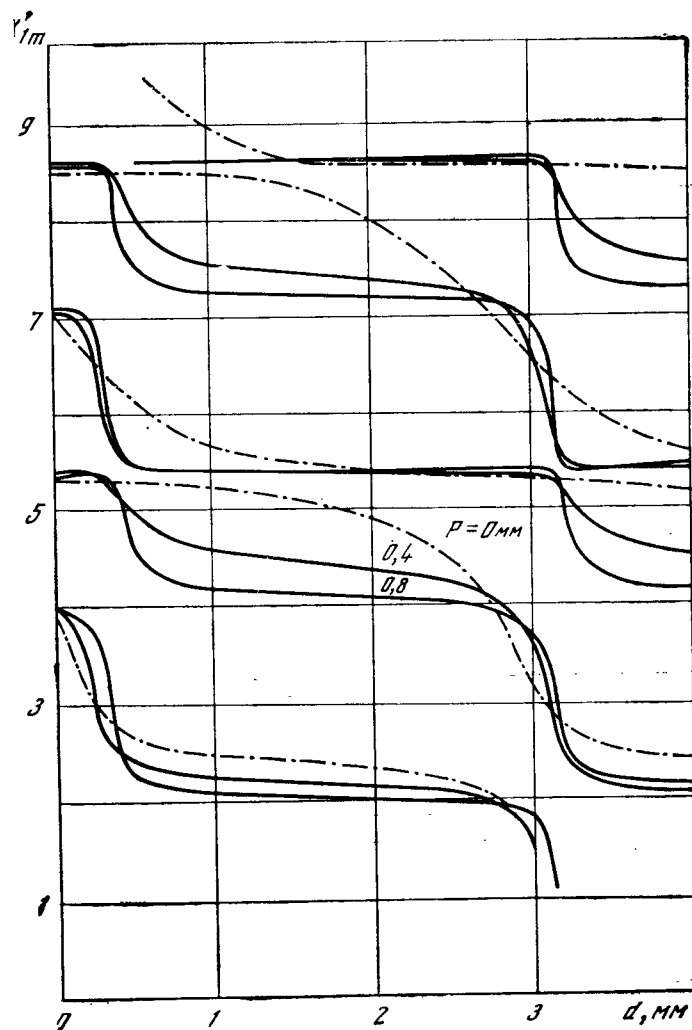


Рис. 40. (окончание)

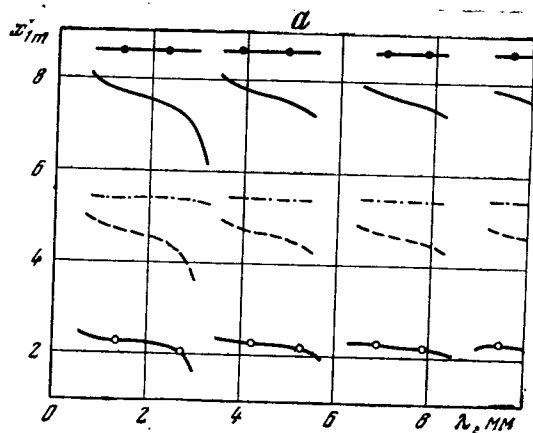


Рис. 41. Зависимость α'_{1m} от толщины оболочки с поглощением

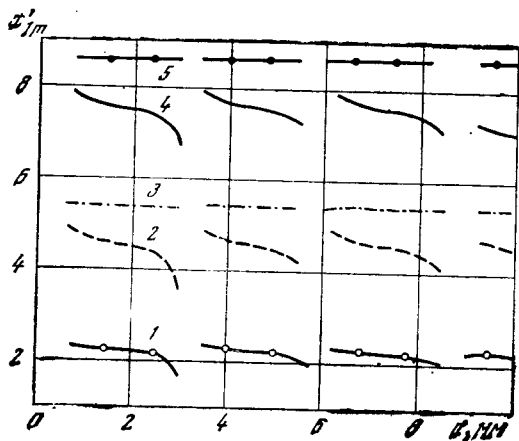
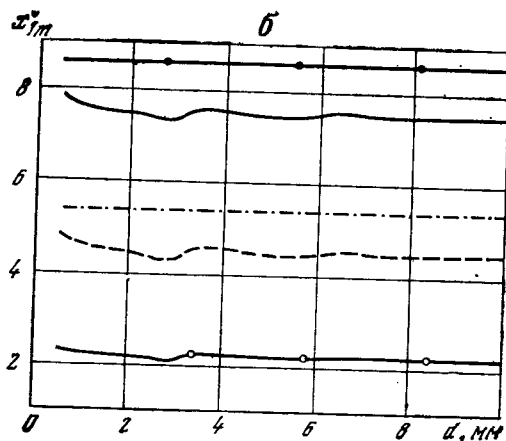
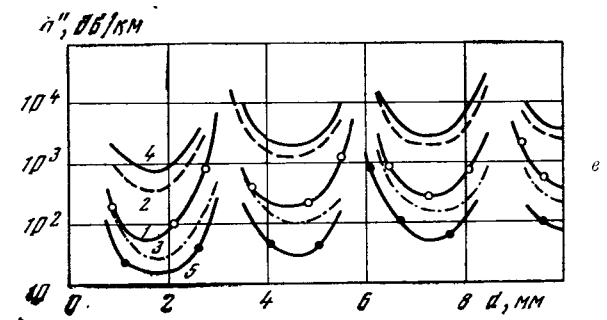
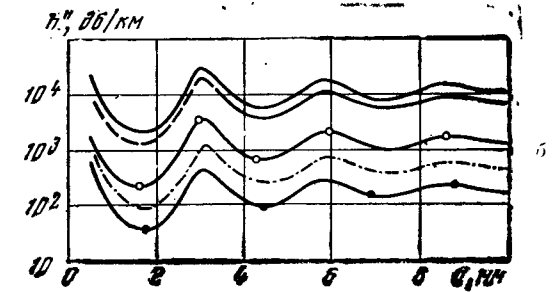
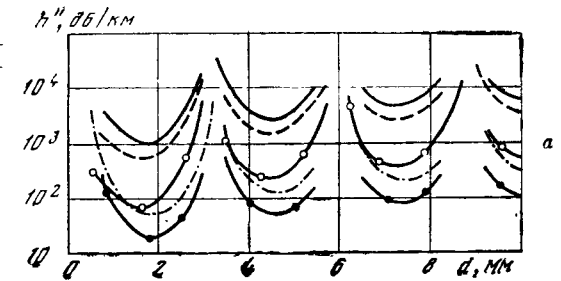


Рис. 42. Затухание в волноводе с поглощающей оболочкой



6. Расчет затухания показывает, что в спиральном волноводе (даже при $\epsilon'' \ll \epsilon'$) может быть обеспечена эффективная фильтрация паразитного поля при реально осуществимых параметрах волновода. Так, при параметрах рис. 42, а минимальное затухание (при $d = 4,5$ мм) наиболее опасной паразитной волны типа E_{11} (второй корень дисперсионного уравнения) более 1000 дБ/км, а волны типа H_{12} (третий корень) более 100 дБ/км.

На рис. 43 (справа) дана зависимость поглощения в диэлектрической оболочке от периода волновода при $q = 0,92$ для четырех значений $d = 1,75; 4,5; 7,25; 10$ мм, соответствующих минимумам затухания. Шаг спирали меняется от 0 до 1 мм. Влияние периода на величину фильтрации весьма существенно; так, затухание волны типа H_{12} возрастает с 40 дБ/км при $p = 1$ мм до 600 дБ/км

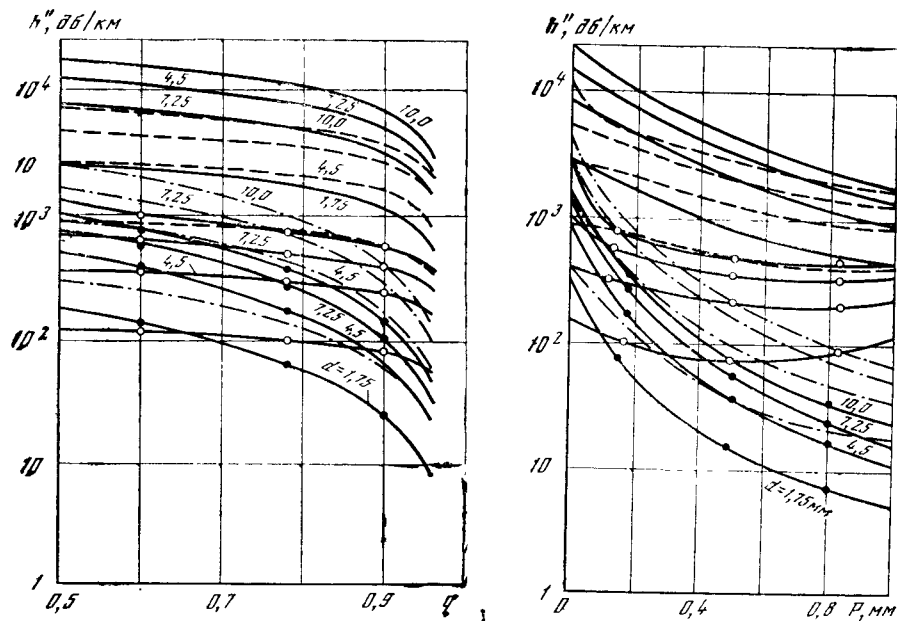


Рис. 43. Зависимость затухания (при различных толщинах оболочки) от коэффициента заполнения (слева) q от периода (справа)

при $p = 0,1$ мм. Для обеспечения более высоких фильтрующих свойств волновода его шаг следует уменьшать. Наименее чувствительно к изменению периода затухание первой волны, соответствующей H_{11} волне в гладкой трубе.

Рис. 43 (слева) иллюстрирует зависимость затухания от густоты намотки при шаге волновода $p = 0,4$ мм. Этот расчет показывает, что наиболее резкое ослабление фильтрующих свойств происходит в области $0,9 < q < 1$. При $q < 0,9$ наблюдается эффект насыщения, в этой области с уменьшением q фильтрация нарастает более или менее плавно.

Рис. 44, а, б, в, г представляют расчет фильтрующих свойств в полосе частот. Длина волны меняется от 4 до 10 мм. На рис. 44, а, б, в толщины диэлектрических оболочек равны соответственно: 1,75; 4,5; 7,25 мм. Рис. 44, г соответствует волноводу с бесконечной диэлектрической оболочкой. Из расчета следует, что в 8 мм диапазоне расфазировавшие и фильтрующие свойства спирального волновода меняются мало.

§ 5.3. Круглый волновод со спиральными канавками

Рассмотрим регулярный волновод круглого поперечного сечения, внутренняя гофрированная поверхность которого образована канавками, нарезанными по винтовой линии (рис. 45) [145]. Угол подъема ψ спирали произволен ($\psi \in [0, \pi/2]$), а период гофрированной поверхности p (расстояние по перпендикуляру между двумя соседними гребнями гофры) полагается малым по сравнению с длиной волны: $p/\lambda \ll 1$. В общем случае нарезка многозаходна. Будем считать гофру глубокой; это значит что глубина

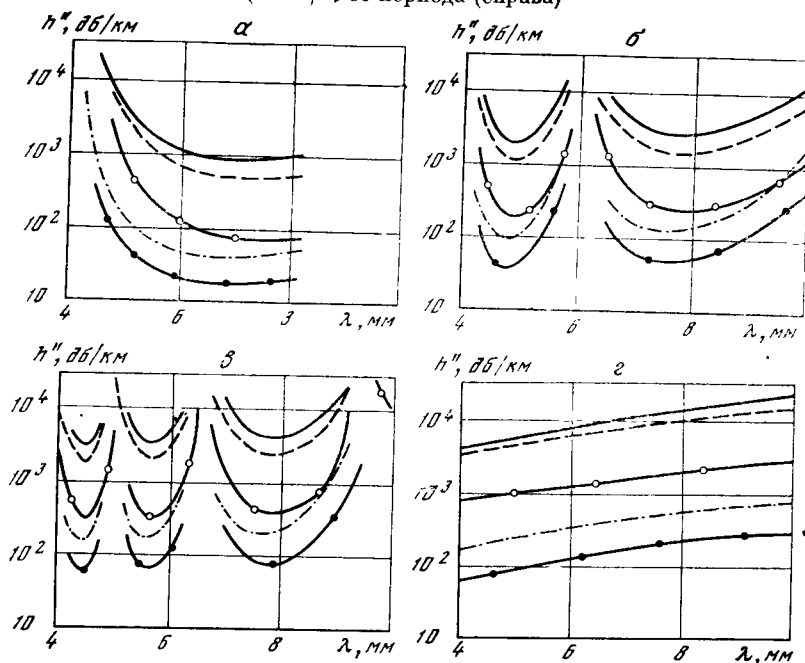


Рис. 44. Зависимость затухания от длины волны:
а — $d = 1,75$ мм; б — $d = 4,5$ мм; в — $d = 7,25$ мм; г — $d = 150$ мм

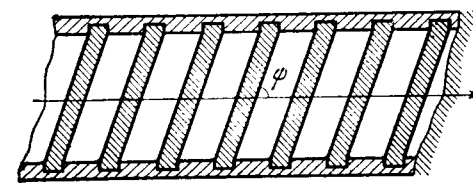


Рис. 45. Продольный разрез волноведущей периодической структуры круглый волновод со спиральной многозаходной канавкой

канавок сопоставима с длиной волны. Направляющая гофры имеет прямоугольную форму. Пусть внутренний радиус волновода равен b , а, стало быть, расстояние от оси волновода до дна канавки равно $b + d$.

Введем цилиндрическую систему координат (r, θ, z) . Малость периода ($p \ll \lambda$) позволяет воспользоваться на периодической поверхности ($r = b$) граничными условиями Вайнштейна — Сивова. В данной задаче их удобно записать в следующем виде:

$$E_{\perp} = i\eta^m H_{\parallel}, \quad E_{\parallel} = i\eta^e H_{\perp} \quad (5.3.1)$$

Здесь символы \parallel и \perp означают соответственно направления на поверхности $r = b$ (параллельное и перпендикулярное канавке), а, стало быть, выражения для полей можно выписать в виде

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= E_z \cos \psi - E_{\theta} \sin \psi, & H_{\parallel} &= H_z \sin \psi + H_{\theta} \cos \psi, \\ E_{\parallel} &= E_z \sin \psi + E_{\theta} \cos \psi, & H_{\perp} &= H_z \cos \psi - H_{\theta} \sin \psi. \end{aligned} \quad (5.3.2)$$

Величины η^m и η^e называются импедансами. Разумеется, можно воспользоваться и более общими импедансными тензорными граничными условиями анизотропного типа [44].

В общем случае ($\psi \neq 0, \pi/2$) собственная волна рассматриваемой структуры представляет собою суперпозицию электрической и магнитной волн с одинаковым азимутальным индексом n . При $\psi = 0; \pi/2$ электрические и магнитные волны существуют независимо.

Электромагнитное поле в волноводе ($r < b$) может быть записано в виде

$$\begin{aligned} H_z &= v^2 J_n B; & E_z &= v^2 J_n A, \\ H_{\theta} &= (n/r) h J_n B - ikv J_n' A; & E_{\theta} &= ikv J_n' B + (n/r) h J_n A. \end{aligned} \quad (5.3.3)$$

Здесь опущен общий множитель $\exp \{i(n\theta - hz)\}$. Удовлетворяя для полей (5.3.3) граничным условиям при $r = b$, получим дисперсионное уравнение

$$\det \| d(\kappa) \| = 0, \quad (5.3.4)$$

в котором

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{21} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \kappa_1 \\ \kappa_2 \end{Bmatrix} J_n(x) + \kappa b J_n'(x) \begin{Bmatrix} -\eta^m \cos \psi \\ \eta^e \sin \psi \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{22} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \eta^m \kappa_2 \\ \eta^e \kappa_1 \end{Bmatrix} J_n(x) + \kappa b J_n'(x) \begin{Bmatrix} \sin \psi \\ -\cos \psi \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Здесь $\kappa_1 = x^2 \cos \psi - nhb \sin \psi$, $\kappa_2 = x^2 \sin \psi + nhb \cos \psi$; $x = va$, $h^2 = k^2 - v^2$.

Данные численного нахождения корней уравнения (5.3.4) для симметричных и несимметричных волн представлены на рис. 46 в виде функций от глубины канавки kd . Параметры волновода и гофры указаны в подписочных надписях; $\lambda = 8,15$ мм. Кривые рис. 46, а-в относятся к симметричным волнам, кривые на рис. 46, г — к несимметричным. Характерный «волнообразный» ход кривых $\kappa = \kappa(kd)$ позволяет использовать точки, близкие к вырождению собственных значений. Некоторые технические реализации этого эффекта отмечены в § 5.8.

На основе плавного изменения свойств собственной волны волновода с периодической структурой стенок (или более сложной структуры — спираль в волноводе) можно построить ряд интерес-

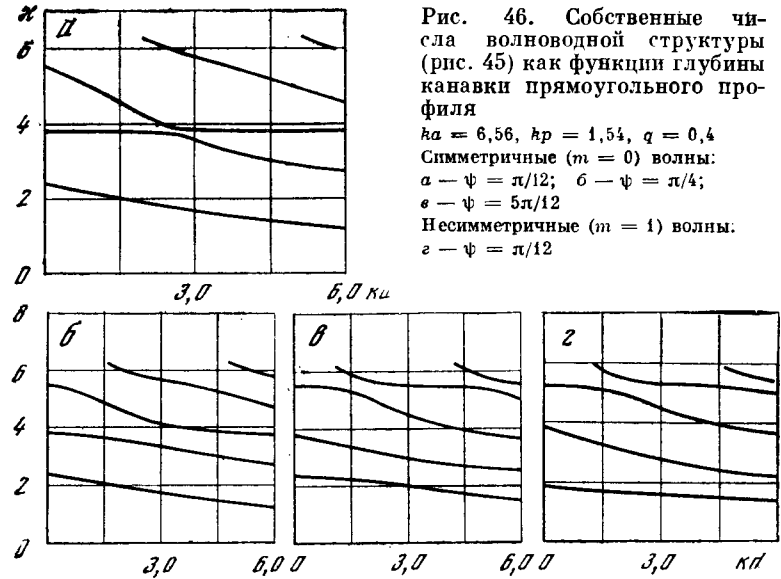


Рис. 46. Собственные числа волноводной структуры (рис. 45) как функции глубины канавки прямоугольного профиля
 $ka = 6,56$, $kr = 1,54$, $q = 0,4$
 Симметричные ($m = 0$) волны:
 а — $\psi = \pi/12$; б — $\psi = \pi/4$;
 в — $\psi = 5\pi/12$
 Несимметричные ($m = 1$) волны:
 г — $\psi = \pi/12$

ных приборов-преобразователей типов волн. Так например, система *спираль в экране* позволяет построить направленный ответвитель, изменяя плавно расстояние между экраном и спиралью на расстоянии, равном половине длины волны биений между основной и ответвляемой волнами. В принципе такое же ответвление энергии необходимого типа волны может быть получено и в коротких переходных областях, когда взаимодействие между волной в тракте и ответвляемой волной носит резонансный характер. Особенно интересным является возможность использовать открытые резонансные структуры, в частности, открытые коаксиальные резонансные структуры, удобно согласующиеся с цилиндрическими трактами [215].

§ 5.4. Спиральный волновод с металлическим экраном

Рассмотрим регулярный волновод круглого поперечного сечения, образованный спиралью и коаксиальным с ней внешним металлическим кожухом (рис. 47) [146]. Пусть a и b — радиусы спирали и экрана соответственно, а $\varphi \in [0, \pi/2]$ — угол подъема спирали. Период p мал по сравнению с длиной волны: $p/\lambda \ll 1$ (под периодом понимается расстояние по перпендикуляру между центрами соседних проводников), так что спираль в общем случае многозаходная. Коэффициент заполнения q (отношение диаметра проводника, образующего спираль, к периоду p) может быть произвольным ($q \in (0,1)$).

Для вывода дисперсионного уравнения воспользуемся системой граничных условий Вайнштейна — Сивова для частопериодической поверхности. Применительно к рассматриваемому случаю граничные условия в цилиндрической системе координат (r, θ, z) имеют вид

$$\begin{aligned} (H_{z2} - H_{z1}) \operatorname{tg} \varphi - (H_{\theta 2} - H_{\theta 1}) &= -ik\tilde{l}_1 [(E_{\theta 2} + E_{\theta 1}) \operatorname{tg} \varphi + \\ &+ (E_{z2} - E_{z1}) + ((h/k) \operatorname{tg} \varphi + n/ka)(H_{r2} + H_{r1})], \\ (E_{z2} - E_{z1}) + (E_{\theta 2} - E_{\theta 1}) \operatorname{tg} \varphi &= ik[l(H_{z2} + H_{z1}) \operatorname{tg} \varphi - \\ &- l(H_{\theta 2} + H_{\theta 1}) + l_2((n/ka) \operatorname{tg} \varphi - h/k)(E_{r2} + E_{r1})], \end{aligned} \quad (5.4.1)$$

$$(E_{z2} - E_{z1}) \operatorname{tg} \varphi - (E_{\theta 2} - E_{\theta 1}) = ikl_2 [(H_{z2} + H_{z1}) + (H_{\theta 2} + H_{\theta 1}) \operatorname{tg} \varphi - ((h/k) \operatorname{tg} \varphi + n/ka)(E_{r2} + E_{r1})],$$

$$(E_{z2} + E_{z1}) \operatorname{tg} \varphi - (E_{\theta 2} + E_{\theta 1}) = ikl_3 [(H_{z2} - H_{z1}) + (H_{\theta 2} - H_{\theta 1}) \operatorname{tg} \varphi - ((h/k) \operatorname{tg} \varphi + n/ka)(E_{r2} - E_{r1})].$$

Граничные условия (5.4.1) должны выполняться при $r = a$; индексы 1 и 2 соответствуют областям $r \in (0, a)$ и $r \in (a, b)$;

$$\tilde{l}_1 = l_1 [1 + (kp)^2 (\tilde{\beta}^2 \Delta_2 - \tilde{\alpha}^2 \Delta_3)]^{-1}; \quad l, l_j$$

($j = 1, 2, 3$), Δ_2, Δ_3 — параметры решетки, зависящие от формы и относительных размеров проводников;

$$\tilde{\beta} = \sqrt{(\alpha a)^2 - n^2/ka}, \quad \alpha = -(n/ka) \sin \varphi + (h/k) \cos \varphi -$$

— косинусы углов Бриллюэна с направлениями r и θ в разложении волноводных волн на плоские; n — азимутальный индекс волны; α и h — поперечное и продольное волновые числа.

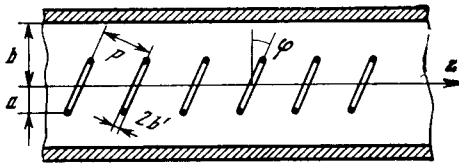


Рис. 47. Продольный разрез волноводной структуры многогозаходная спираль в цилиндрическом экране

При $r = b$ на стенке кожуха должны выполняться граничные условия первого рода

$$E_{z2} = E_{\theta 2} = 0. \quad (5.4.2)$$

Собственные волны рассматриваемого волновода для $\varphi \neq 0$; $\pi/2$ являются гибридными и представляют собою суперпозицию электрических и магнитных волн одного и того же азимутального индекса n .

При $\varphi = 0$ и $\varphi = \pi/2$ волны E и H существуют независимо.

Запишем выражения для полей в волноводе в следующем виде:

$$\begin{aligned} E_{r1} &= (kn/r) J_n B - iha J_n' A & E_{r2} &= (kn/r) (CJ_n + C_1 N_n) - \\ &- iha (DJ_n' + D_1 N_n'); \\ E_{\theta 1} &= ika J_n' B + (nh/r) J_n A, & E_{\theta 2} &= ika (CJ_n' + C_1 N_n') + \\ &+ (nh/r) (DJ_n + D_1 N_n); \\ E_{z1} &= \alpha^2 J_n A, & E_{z2} &= \alpha^2 (DJ_n + D_1 N_n); \\ H_{r1} &= -iha J_n' B - (nk/r) J_n A, & H_{r2} &= -iha (CJ_n' + \\ &+ C_1 N_n') - (kn/r) (DJ_n + D_1 N_n); \\ H_{\theta 1} &= (hn/r) J_n B - ika J_n' A, & H_{\theta 2} &= (hn/r) (CJ_n + C_1 N_n) - \\ &- ika (DJ_n' + D_1 N_n'); \\ H_{z1} &= \alpha^2 J_n B, & H_{z2} &= \alpha^2 (CJ_n + C_1 N_n). \end{aligned} \quad (5.4.3)$$

Здесь цилиндрические функции J_n и N_n имеют аргумент dr . Удовлетворяя для полей (5.4.3) граничным условиям (5.4.1) и (5.4.2), получим дисперсионное уравнение $\det \|d(x)\| = 0$, в котором элементы d_{ij} определителя четвертого порядка суть

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{14} \end{Bmatrix} &= \left(\frac{ka}{x}\right)^2 \left[\begin{Bmatrix} -J_n' \\ \kappa_2 \end{Bmatrix} + L_1 Q \begin{Bmatrix} J_n \\ \kappa_4 \end{Bmatrix} \right], \\ \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{13} \end{Bmatrix} &= \pm T_1 \left[\begin{Bmatrix} J_n \\ \kappa_1 \end{Bmatrix} + L_1 \begin{Bmatrix} J_n' \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} \right], \\ \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{24} \end{Bmatrix} &= T_2 \begin{Bmatrix} -J_n \\ \kappa_4 \end{Bmatrix} + T_4 \begin{Bmatrix} -J_n' \\ \kappa_2 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} d_{22} \\ d_{23} \end{Bmatrix} &= T \begin{Bmatrix} -J_n' \\ \kappa_3 \end{Bmatrix} + T_3 \begin{Bmatrix} J_n \\ \kappa_1 \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{41} \end{Bmatrix} &= \mp T_1 \left(J_n + J_n' \begin{Bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \right), \\ \begin{Bmatrix} d_{32} \\ d_{42} \end{Bmatrix} &= \pm \left(J_n' - Q J_n \begin{Bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \right), \\ \begin{Bmatrix} d_{33} \\ d_{43} \end{Bmatrix} &= - \left(\kappa_3 + \kappa_1 Q \begin{Bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \right), & \begin{Bmatrix} d_{34} \\ d_{44} \end{Bmatrix} &= T_1 \left(\kappa_4 - \kappa_2 \begin{Bmatrix} L_2 \\ L_3 \end{Bmatrix} \right). \end{aligned} \quad (5.4.4)$$

Здесь цилиндрические функции имеют аргумент $x = \alpha a$;

$$L = xl/a, \quad L_1 = x\tilde{l}_1/a, \quad L_{2,3} = xl_{2,3}/a, \quad T = \operatorname{tg} \varphi,$$

$$Q = 1 - (n/x)^2,$$

$$T_1 = T - nha/x^2, \quad T_2 = 1 + (nha/x^2) T,$$

$$T_3 = TQL_2 - T_1(L + L_2),$$

$$T_4 = \Gamma - L_2(nha/x^2) T, \quad \Gamma = (ka/x)^2 (L + L_2) - L_2,$$

$$y = x(1 + d/a), \quad d = b - a;$$

$$\kappa_1 = J_n'(y)N_n(x) - J_n(x)N_n'(y),$$

$$\kappa_2 = J_n'(x)N_n(y) - J_n(y)N_n'(x),$$

$$\kappa_3 = J_n'(y)N_n'(x) - J_n'(x)N_n'(y),$$

$$\kappa_4 = J_n(x)N_n(y) - J_n(y)N_n(x).$$

Дисперсионное уравнение $\det \|d(\kappa)\| = 0$ решалось численно на ЭЦВМ. Расчет проводился для симметричных ($n = 0$) и несим-

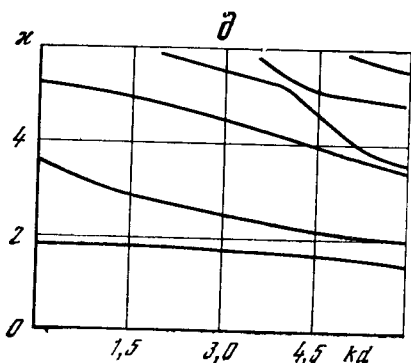
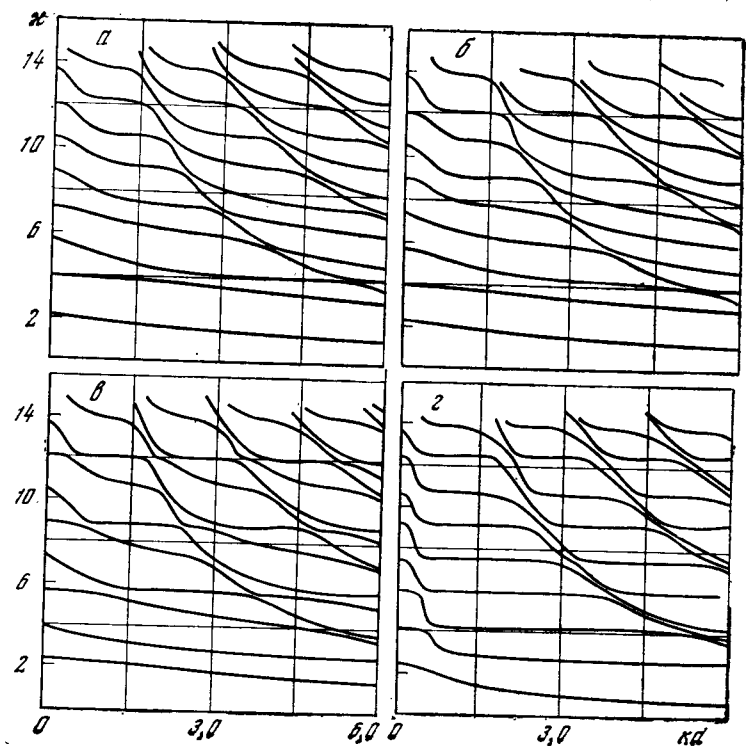


Рис. 48. Собственные числа волноведущей структуры (рис. 47) как функции величины зазора между спиралью и цилиндрическим экраном

$ka = 6,56$, $kr = 1,54$

Симметричные ($m = 0$) волны:

$a - \psi = \pi/6$, $q = 0,4$;

$б - \psi = \pi/4$, $q = 0,4$;

$в - \psi = 5\pi/12$, $q = 0,4$;

$г - \psi = \pi/4$, $q = 0,9$

Несимметричные ($m = 1$) волны:

$д - \psi = \pi/4$, $q = 0,4$

метричных волн с азимутальным индексом $n = 1$. Параметрами задачи являлись величины ka , kr , q , ψ .

Результаты некоторых расчетов представлены на рис. 48 в виде графиков собственных значений $\kappa = \alpha a$ в функции от размера зазора kd между спиралью и кожухом. На рис. 48, $a - г$ даны результаты для симметричных волн. Значения параметров содержатся в подрисуночных подписях. Из рисунков отчетливо видна характерная для подобных структур картина сближения собственных чисел волн разных номеров при плавном изменении параметра kd . В областях перерождения собственные значения убывают с ростом kd тем быстрее и круче, чем больше период p и коэффициент заполнения q . Вне областей «сближения» относительная независимость хода кривых от величины зазора между спиралью и экраном выражена тем ярче, чем больше p и q . Рис. 48, $г$, на котором приведены зависимости при $q = 0,9$ дает достаточно хорошее представление о поведении кривых при неограниченном сближении проводников ($q \rightarrow 1$ соответствует переходу к волноводу с мелкопериодической стенкой (ср. § 5.3)). Кривые рис. 48, $г$ соответствуют несимметричным волнам с азимутальным индексом, равным единице. Некоторые приложения проведенных расчетов содержатся в § 5.8.

§ 5.5. Коаксиальная волноводная структура с анизотропной внешней стенкой и внутренней частопериодической спиралью

Данная система обобщает рассмотренные в §§ 5.3 и 5.4 ситуации на случай, когда волноведущая структура содержит спираль радиуса $r = a$, а внутренняя поверхность (радиуса $r = b$) кожуха — анизотропная.

Такое уравнение приведено в [44, с. 170]. В вычислительном отделе ИРЭ АН СССР Л. П. Вилкова составила программу для нахождения корней для ЭВМ. Она использовалась при расчете коаксиального оротрона [24, 162].

§ 5.6. Широкий прямоугольный волновод с мелкопериодическими решетками

Одним из волноведущих трактов для волн миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов является широкий прямоугольный волновод (сечением $a \times b$; $ka \gg 1$, $kb \gg 1$), удобно согласующийся с выходом источника СВЧ-энергии с рабочей волной типа H_{10} . Геометрия задачи и система координат показаны на рис. 49, б. Для решения задачи воспользуемся локальными граничными условиями Вайнштейна — Сивова для поверхностей решеток (5.3.1); пусть на остальных металлических поверхностях стенок волновода выполняются граничные условия Неймана.

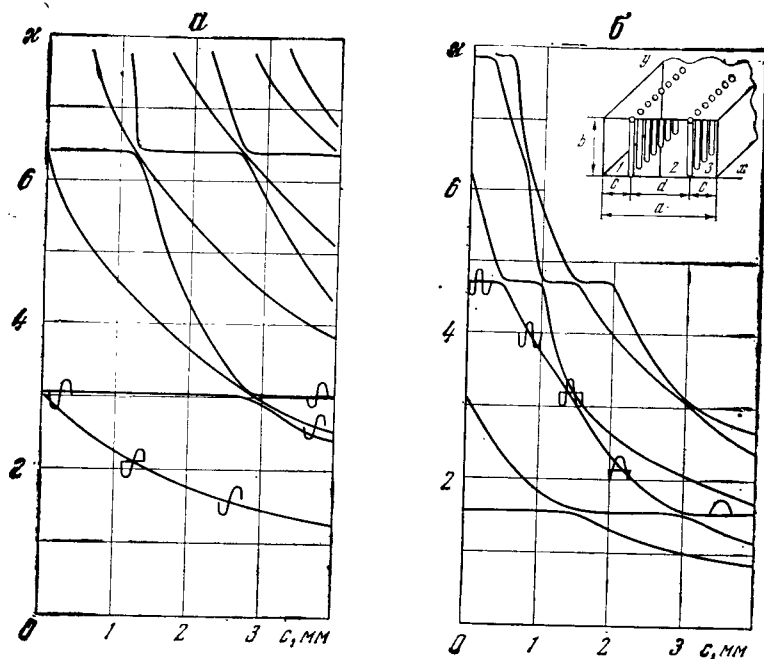


Рис. 49. Зависимость собственных значений поперечных волновых чисел четных (а) и нечетных (б) H_{m0} -волн прямоугольного волновода с двумя продольными решетками от c (расстояния решеток от узких стенок волновода)

Собственные волны волновода с решетками могут быть выражены через магнитный $\Pi^{(m)}$ и электрический $\Pi^{(e)}$ векторы Герца:

$$\begin{aligned} \Pi_z^{(m)}(x, y) &= \psi(x, y), & \Pi_x^{(m)} &= \Pi_y^{(m)} \equiv 0; \\ \Pi_z^{(e)}(x, y) &= \chi(x, y), & \Pi_x^{(e)} &= \Pi_y^{(e)} \equiv 0. \end{aligned} \quad (5.6.1)$$

Потенциальные функции ψ и χ , удовлетворяющие волновому уравнению, записываются для областей 1 ($x \in (-a/2, -d/2)$), 2 ($x \in (-d/2, d/2)$), 3 ($x \in (d/2, a/2)$) (волновод без заполнения $\epsilon = \mu = 1$) в виде

$$\begin{aligned} \psi_{1(3)}(x, y) &= (C_h \cos \alpha_x x \mp B_h \sin \alpha_x x) \cos \alpha_y y, \\ \psi_2(x, y) &= A_h \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \alpha_x x \cos \alpha_y y; \end{aligned} \quad (5.6.2)$$

$$\begin{aligned} \chi_{1(3)}(x, y) &= (C_e \cos \alpha_x x \mp B_e \sin \alpha_x x) \sin \alpha_y y, \\ \chi_2(x, y) &= A_e \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \alpha_x x \sin \alpha_y y. \end{aligned} \quad (5.6.3)$$

Здесь верхний знак относится к функциям (ψ, χ) в области 1, а нижний знак — к функциям в области 3.

Поля в волноводе должны удовлетворять следующим граничным условиям на стенке волновода ($x = \pm a/2$):

$$E_{y1} = E_{y3} = 0, \quad E_{z1} = E_{z3} = 0. \quad (5.6.4)$$

В качестве граничных условий на решетке ($x = \pm d/2$) воспользуемся системой эквивалентных двухсторонних граничных условий Вайнштейна — Сивова для бесконечно протяженной решетки. Конечность решетки по оси y приводит к приближенности расчетных выражений, однако практически свойства ограниченной и неограниченной структур мало различаются, когда отношение b/λ значительно по величине, так как дифракционная поправка пропорциональна $(b/\lambda)^{-2}$.

Для анализа распространения волн H_{mn} (случай $m \neq 0, n = 0$ (m (n) — число вариаций поля по x (y)) в описываемой структуре запишем эквивалентные граничные условия Вайнштейна — Сивова следующим образом:

$$E_{y2} - E_{y1} = ikl_2 |H_{z2} + H_{z1}|, \quad E_{y2} + E_{y1} = ikl_3 |H_{z2} - H_{z1}| \quad (5.6.5)$$

для границы областей 1—2, и

$$E_{y3} - E_{y2} = ikl_2 |H_{z3} + H_{z2}|, \quad E_{y3} + E_{y2} = ikl_3 |H_{z3} - H_{z2}| \quad (5.6.6)$$

для границы областей 2—3.

Электромагнитные поля в областях 1, 2, 3 будут иметь следующий вид:

$$\begin{aligned} E_{y1(3)}(x, z) &= -ikaB_h (\text{ctg}(aa/2) \sin \alpha x \pm \cos \alpha x) e^{-ihz}, \\ H_{x1(3)}(x, z) &= ihaB_h (\text{ctg}(aa/2) \sin \alpha x \pm \cos \alpha x) e^{-ihz}, \\ H_{z1(3)}(x, z) &= \alpha^2 B_h (\text{ctg}(aa/2) \cos \alpha x \mp \sin \alpha x) e^{-ihz}, \\ E_{y2}(x, z) &= ikaA_h \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \alpha x e^{-ihz}, \\ H_{x2}(x, z) &= -ihaA_h \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \alpha x e^{-ihz}, \\ H_{z2}(x, z) &= \alpha^2 A_h \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \alpha x e^{-ihz}. \end{aligned} \quad (5.6.7)$$

Здесь собственное значение $\alpha \equiv \alpha_x$; верхний знак в скобках относится к полям в области 1, а нижний — к полям в области 3. В рассматриваемом случае $n = 0$ поля электрических волн не существуют ($\chi \equiv 0$).

Подчиняя выражения полей (5.6.7) граничным условиям (5.6.4), (5.6.5) и (5.6.6) получаем дисперсионное уравнение

$\det \| d(\kappa) \| = 0$, где $\det \| d(\kappa) \|$ — определитель второго порядка, для четных ($\psi \equiv \sin \alpha x$) в (5.6.2) и нечетных ($\psi \equiv \cos \alpha x$ в 5.6.2)) волн (относительно оси oy); элементы d_{ij} суть

$$\begin{aligned} d_{11} &= (E \kappa \sin \kappa + \cos \kappa) [\kappa E G(\kappa) + L(\kappa)], \\ d_{21} &= (E \kappa \cos \kappa - \sin \kappa) [\kappa E G(\kappa) + L(\kappa)], \\ d_{12} &= -\kappa^2 F^2 G(\kappa) \sin \kappa, \quad d_{22} = -\kappa^2 F^2 G(\kappa) \cos \kappa, \end{aligned} \quad (5.6.8)$$

где $G(\kappa) = \text{ctg } \kappa \cos \tilde{\kappa} + \sin \kappa$; $L(\kappa) = \text{ctg } \kappa \sin \tilde{\kappa} - \cos \kappa$, $Fd = l_2 - l_3$, $Ed = l_2 + l_3$, $2\kappa = \alpha d$, $\tilde{\kappa} = \kappa a/d$, $a = d + 2c$, l_j , ($j = 2, 3$) — коэффициенты для проводников круглого сечения. Вследствие симметрии рассматриваемой структуры дисперсионные уравнения для областей 2—3 аналогичны уравнениям (5.6.8).

При $q = 1$ ($l_2 = l_3$) получаем из (5.6.2) уравнения для центрального волновода (область 2) с неглубокой гофрой:

$$\text{ctg } \kappa = -2 (l_2/d) \kappa, \quad (5.6.9)$$

$$\text{tg } \kappa = 2 (l_2/d) \kappa. \quad (5.6.10)$$

Методом возмущения можно найти постоянную распространения. Результат таков:

$$\text{для (5.6.9)} \quad h = h_0 - 2 (l_2/d) (\pi/d)^2 (1/h_0); \quad (5.6.11)$$

$$\text{для (5.6.10)} \quad h = h_0 - 8 (l_2/d) (\pi/d)^2 (1/h_0), \quad (5.6.12)$$

где $(h_0/k)^2 = 1 - (m\pi/kd)^2$; $m = 1, 2, 3, \dots$ Выражениями (5.6.11)

и (5.6.12) можно пользоваться для оценки h , так как из-за малого просачивания поля во внешнюю область (отношение B_n/A_n мало) формулы применимы и при $q \neq 1$.

Дисперсионное уравнение $\det \| d(\kappa) \| = 0$ исследовались численно на ЭВМ. Результаты расчета для набора параметров d , p , q представлены на рис. 49, а (четные волны) и на рис. 49, б (нечетные волны) в виде зависимостей собственных значений $\kappa = \alpha d/2$ от расстояния c между решеткой и боковой стенкой волновода. Характерная картина «перерождения» волн при изменении расстояния c на рис. 49 наглядно иллюстрируется изменениями компоненты поля E_y . Ход кривых зависимости собственных значений κ от расстояния c между решеткой и боковой стенкой волновода, в основном, определяется параметром kd — расстоянием между решетками — и, в меньшей степени, периодом p и коэффициентом заполнения q решеток. В области перерождения собственные значения κ с ростом c убывают менее резко. Зависимость от параметров p и q при этом слабая. На рис. 50 приведены отношения амплитудных коэффициентов $|B_n/A_n|$ в областях 1 и 2 в зависимости от расстояния c при фиксированном kd . При этом $kd = 23,6$; $k_p = 0,47$; $q = 0,5$. Подобный же характер имеет зависимость и для других значений параметров d , p , q . Видно, что наилучшее экранирование поля в области 2 наблю-

дается для нечетных собственных волн. С ростом q экранирование, как и должно быть, возрастает. Так, изменение q для κ_1 в 1,5 раза (от 0,5 до 0,75) при том же расстоянии $kc = 13,3$ и $kd = 23,6$ приводит к уменьшению отношения $|B_n/A_n|$ на два порядка.

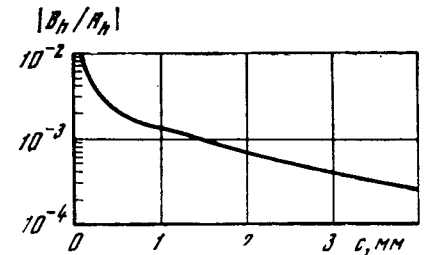


Рис. 50. Зависимость отношения амплитуд B_n/A_n для четных H_{m0} -волн прямоугольного волновода с двумя решетками от c (расстояния решеток от узких стенок волновода)

Частотная зависимость рассматриваемой структуры выражена слабо ($h/k = 0,99 \div 0,98$) для первых значений κ в диапазоне длин волн $1,2 \div 0,75$ мм, что и следовало ожидать при выбранных значениях размеров поперечного сечения волновода [71].

§ 5.7. Проволочная решетка малого периода в запердельном волноводе

Устройства на основе запердельных волноводов находят все более широкое применение в антенно-фидерной технике СВЧ. Интенсивное использование запердельных структур в виде отрезков волноводов с различной формой поперечных сечений, отверстий или щелей в диафрагмах, выводных окон электронных приборов СВЧ и т. п. вызвано интересными свойствами этих структур, позволившими создать миниатюрные регулируемые аттенюаторы, емкостные, индуктивные и резонансные элементы, многосвязные полосовые фильтры, антенны и фазированные антенные решетки и многое другое [151].

Мы рассмотрим электродинамические свойства частопериодичной идеально проводящей проволочной решетки, установленной поперек прямоугольного волновода, работающего в запердельном режиме [149].

Итак, пусть волноводная волна H_{10} прямоугольного волновода ($E_y = \sin(\pi/a)x \exp\{ihz\}$) падает на решетку ($z = 0$), проводники которой параллельны вектору электрического поля. Решетка имеет малый период p . В этом случае действие решетки можно достаточно точно описать с помощью двухсторонних граничных условий Вайнштейна — Сивова. Записывая поле слева от решетки ($z < 0$) в виде падающей и отраженной волн типа H_{10} и справа ($z > 0$) — в виде прошедшей волны того же типа * и удовлетворяя при $z = 0$ граничным условиям Вайнштейна — Сивова, най-

* a — размер диафрагмы.

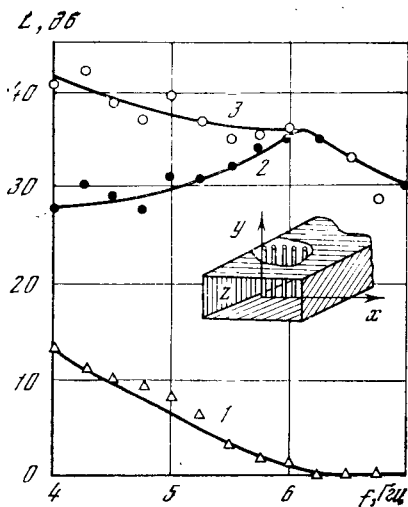


Рис. 51. Экспериментальные и расчетные зависимости затухания от частоты

дартном прямоугольном волноводе сечением $24 \times 48 \text{ мм}^2$. На рисунке кривая 1 относится к диафрагме без решетки, кривая 2 — затухание, которое вносится собственно решеткой, а кривая 3 представляет частотную зависимость суммарного затухания, вносимую совместно решеткой и запердельным отрезком волновода. Кривая 4 представляет результат расчета величины затухания, вносимого собственно решеткой в отверстии диафрагм по формулам (5.7.1), (5.7.2). Из представленных графиков видно согласие экспериментальных и теоретических результатов.

Приведенные результаты (качественно они подтверждаются и для других волноводных систем) позволяют сделать некоторые выводы, указать особенности и области применения обнаруженного эффекта. Наличие частой проводящей решетки существенно увеличивает затухание (развязку), вносимое системой *решетка — запердельная структура* (на два-три порядка) в диапазоне частот запердельной структуры ($4 \div 6,0 \text{ Гц}$) и поэтому в достаточно широком диапазоне частот результирующая зависимость затухания (развязки) имеет существенно более равномерный характер, чем у структуры без решетки.

В перестраиваемых СВЧ фильтрах с резонаторами, образованными диафрагмами, как в обычных, так и в запердельных волноводах, равномерная частотная характеристика затухания структур связи между резонаторами (*решетка-диафрагма*) способствует получению меньших искажений формы частотной характеристики фильтров в диапазоне их перестройки.

дем величину суммарного затухания при наличии решетки

$$L = 20 \lg |1/T|, \quad (5.7.1)$$

где коэффициент прохождения через решетку равен

$$T = |h| (l_2 - l_3) / (1 + |h| l_2) (1 + |h| l_3);$$

$$|h| = k \sqrt{(\pi/ka)^2 - 1}. \quad (5.7.2)$$

На рис. 51 приведены результаты эксперимента по измерению затухания, вносимого решеткой и его частотной зависимости в полосе от 4 до 7 *гц*. Решетка из проводников диаметром $b = 0,1 \text{ мм}$ и шагом $p = 0,9 \text{ мм}$ была вмонтирована в диафрагму с отверстием $23 \times 7 \text{ мм}^2$ и толщиной 5 мм . Диафрагма располагалась в стан-

Представляется возможным в перестраиваемых и неперестраиваемых фильтрах рациональным подбором параметров элемента связи подавлять паразитные полосы пропускания (например, полосу, соответствующую области вблизи удвоенной резонансной частоты, что обеспечивается максимальным затуханием, вносимым решеткой и выбором размеров отверстия диафрагмы), а также значительно повысить избирательность фильтров некоторых типов на диэлектрических резонаторах путем подбора ориентации решетки и способа возбуждения резонаторов. Весьма вероятно, что рациональным выбором параметров решетки и выводных окон приборов СВЧ, твердотельных источников мощности СВЧ (ГЛПД, например) и различных аттенюаторов, окажется возможным улучшить их электрические характеристики (подавить или снизить паразитные шумы, гармоники и проч.).

Повышение качественных характеристик различных СВЧ устройств при использовании решеток в запердельных структурах приборов одновременно позволяет существенно уменьшить их габариты и вес и в целом способствовать решению задачи миниатюризации аппаратуры СВЧ.

Обнаруженное интересное свойство частопериодической структуры в запердельном волноводе, возможно, окажется полезным для открытых резонансных структур, работающих, как известно, *вблизи критических частот волноведущих структур*.

Приведенные результаты и соображения показывают, что область применения эффекта может быть достаточно широкой.

§ 5.8. Некоторые применения полученных результатов

Представленные в настоящем разделе результаты численных расчетов свойств частопериодических структур в широких волноводах явились основой для проектирования и изготовления ряда практических устройств. В частности, выполнен изгиб тракта диаметром 20 мм на длине волны $8,15 \text{ мм}$. Расчеты § 5.4 для круглого спирального волновода с металлическим экраном стали основой для проектирования и изготовления спиральных фильтров в тракте диаметром 7 мм на среднюю длину волны 2 мм . Один из вариантов фильтра имел следующие данные: при длине 100 мм затухание основной волны H_{10} составило 2 дБ , а волны $H_{11} — 10 \text{ дБ}$.

Результаты расчетов по прямоугольному широкому волноводу с частопериодическими металлическими решетками (§ 5.6 и [71]) были использованы для построения направленных ответвителей, аттенюаторов, фильтров волн H_{0n} и E_{mn} на диапазоне волн $0,75 \div 1,2 \text{ мм}$. Кроме того был предложен и исследован [70] фильтрующий излом прямоугольного волновода и анализатор модового состава сложного сигнала на основе использования частопериодической металлической решетки в прямоугольном волноводе. Металлическая решетка может быть заменена, например, электрически управляемой прозрачной полосовой доменной структурой (см., например, [44]).

ЧАСТОПЕРИОДИЧЕСКИЕ РЕШЕТКИ В ОТКРЫТЫХ СТРУКТУРАХ

Частопериодические структуры находят широкое и весьма разнообразное применение в квазиоптических волноведущих и резонансных структурах. Некоторые общие вопросы на основе введения комплексного аргумента в *дифракционную функцию Вайнштейна* обсуждались в [144, 44]. Здесь в качестве граничных условий на металлических решетках и гофрированных поверхностях используются *локальные граничные условия Вайнштейна — Сивова* в сочетании с импедансными граничными условиями резонансного типа. Это позволяет с единой точки зрения рассмотреть широкий класс задач в квазиоптических волноводах и открытых резонаторах. Проведенные расчеты послужили основой для проектирования и построения ряда устройств миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн.

Как было показано в части I металлическая гофрированная поверхность может быть описана в терминах входного анизотропного импеданса, носящего тензорный характер. Для ряда практических задач, связанных с распространением и дифракцией электромагнитных волн у частопериодических структур удобнее использовать двухсторонние локальные граничные условия в той форме, в которой они были предложены Л. А. Вайнштейном и А. Н. Сивовым.

Ниже мы применим граничные условия Вайнштейна — Сивова к анализу поведения электромагнитных полей в различных практических задачах.

§ 6.1. Квазиоптические элементы из частых решеток

1. Хорошо известно, что квазиоптические методы описания электромагнитных явлений успешно применяются при разработке различных элементов, используемых в коротковолновой части СВЧ-диапазона. Эти методы позволили создать целый ряд аналогов оптических устройств, хорошо работающих в миллиметровом и субмиллиметровом диапазоне волн: линзы, корректирующие зеркала, призмы, перископы и т. д.

Определенный интерес представляет конструирование подобных элементов из частых (период мал по сравнению с длиной волны) решеток.

В настоящем параграфе мы рассмотрим два типа таких элементов: амплитудный транспарант, реализующий заданный закон изменения прозрачности в апертуре при малых фазовых искажениях и фазовый преобразователь, не имеющий потерь мощности [195].

Принцип работы этих устройств состоит в следующем. Согласно формулам главы 1 коэффициент прохождения $T = |T| e^{i\psi}$ плоской волны через плоскую решетку при данной форме проводников есть функция угла падения, коэффициента заполнения и отношения периода ее поверхности к длине волны. Изгибая решетку (при этом вдоль ее поверхности меняется угол падения) и плавно изменяя остальные параметры решетки, можно в известных пределах обеспечить требуемые для упомянутых элементов законы изменения $|T|$ и ψ .

Если источники поля расположены далеко от решетки, она изогнута достаточно плавно, и в масштабе длины волны мало изменяются остальные параметры, так что вблизи поверхности решетки поле можно считать локально плоским, то для расчета указанных элементов в квазиоптическом приближении могут быть использованы формулы (1.1.13), (1.3.15).

2. Амплитудный транспарант представляет собой частопериодическую решетку, изогнутую по цилиндрической поверхности, форма направляющей которой определяется требуемым законом изменения коэффициента пропускания в апертуре транспаранта (под апертурой мы понимаем здесь проекцию решетки на плоскость, перпендикулярную направлению распространения падающей волны). Отметим, что в отличие от оптического транспаранта, в котором неиспользованная падающая мощность поглощается, в описываемом устройстве эта мощность отражается.

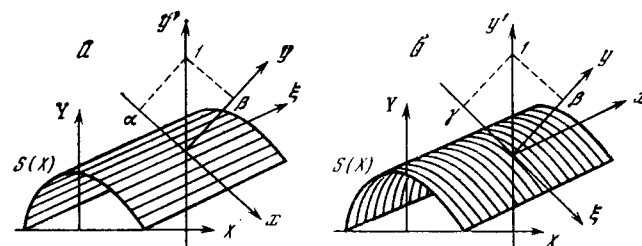


Рис. 52. Два случая ориентации проводников на изогнутой решетке

При расчете транспаранта из конструктивных соображений удобно ограничиться двумя случаями ориентаций проводников на цилиндрической поверхности (рис. 52). В случае *a* проводники совпадают с образующей и перпендикулярны к направлению распространения ($\gamma = 0$). При этом модуль коэффициента прохождения *H*-поляризованной волны (вектор *H* параллелен

проводникам), согласно (1.1.13), определяется формулой

$$|T| = \frac{\beta(A + Bl_1k)}{\sqrt{\beta^2 + B^2} \sqrt{\beta^2(kl_1)^2 + A^2}}, \quad (6.1.1)$$

где

$$A = 1 - (kp)^2 \Delta_3 + (kp)^2 \beta^2 (\Delta_2 + \Delta_3), \quad B = k[l + (1 - \beta^2)l_2],$$

$k = 2\pi/\lambda$, $\beta = \cos \varphi$, φ — угол между нормалью к решетке и направлением проходящей волны, l , l_i , Δ_i — параметры решетки (см. § 1.4). В случае *б* проводники совпадают с направляющей цилиндрической поверхности, а направление распространения лежит в плоскости, проходящей через нормаль к решетке и проводник ($\alpha = 0$).

В этом случае

$$|T| = \frac{1 + \beta^2 [(kp)^2 \Delta_2 - k^2 l_1]}{\sqrt{1 + \beta^2 (kl)^2} \sqrt{[1 + (kp)^2 \beta^2 \Delta_2]^2 + \beta^2 (kl_1)^2}}. \quad (6.1.2)$$

Для *E*-поляризации в обоих случаях верна одна и та же формула:

$$|T| = \beta \sqrt{\frac{(kl_3 - kl_2)^2 + \beta^2 (k^2 l_2 l_3)^2}{1 + \beta^2 (kl_3)^2}}. \quad (6.1.3)$$

Для решетки из бесконечно тонких лент ($l = l_2 = \Delta_2 = \Delta_3 = 0$), формулы (6.1.1) — (6.1.3) значительно проще и имеют вид в случае *H*-поляризации

$$|T| = \frac{1}{\sqrt{1 + \beta^2 (kl_1)^2}}, \quad (6.1.4)$$

в случае *E*-поляризации

$$|T| = \frac{\beta kl_3}{\sqrt{1 + \beta^2 (kl_3)^2}}, \quad (6.1.5)$$

где

$$l_1 = -p/\pi \ln \cos(\pi q/2), \quad l_3 = -p/\pi \ln \sin(\pi q/2).$$

Как видно из формул (6.1.4), (6.1.5), при возрастании угла падения φ от нуля (нормальное падение) до $\pi/2$ (скользящее падение) модули коэффициентов прохождения различных поляризаций ведут себя противоположным образом: в случае *H*-поляризации $|T|$ возрастает от некоторого наименьшего значения, определяемого параметрами решетки, до единицы;

$$\frac{1}{\sqrt{1 + (kl_1)^2}} < |T| < 1, \quad (6.1.6)$$

для *E*-поляризации, наоборот, $|T|$ убывает от некоторого наибольшего значения до нуля:

$$\frac{kl_3}{\sqrt{1 + (kl_3)^2}} > |T| > 0. \quad (6.1.7)$$

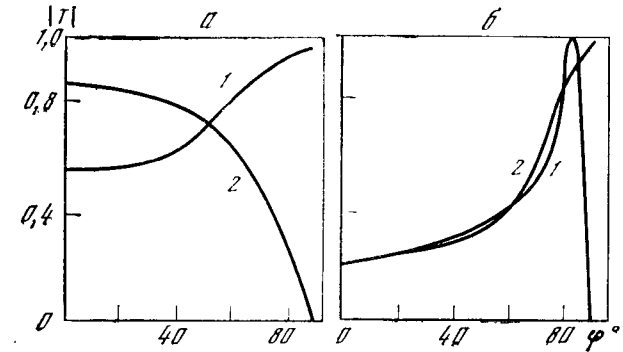


Рис. 53. Зависимость $|T|$ от угла падения φ

a — ленточная решетка; 1 — *H*-поляризация ($q = 0,95$; $p/\lambda = 0,3$), 2 — *E*-поляризация ($q = 0,03$; $p/\lambda = 0,3$), *б* — решетка из круглых проводников; *H*-поляризация, $q = 0,9$; $p/\lambda = 0,3$; 1 — $\gamma = 0$, 2 для $\alpha = 0$

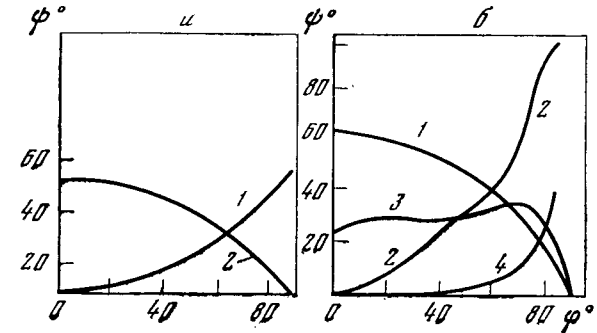


Рис. 54. Зависимость фазы φ коэффициента прохождения от угла падения φ

a — ленточная решетка: 1 — *E*-поляризация ($q = 0,05$; $p/\lambda = 0,3$); 2 — *H*-поляризации ($q = 0,95$; $p/\lambda = 0,3$); *б* — решетка из круглых проводников: 1 — *E*-поляризация ($q = 0,05$, $p/\lambda = 0,3$), 2 — *H*-поляризация ($\gamma = 0$; $q = 0,9$; $p/\lambda = 0,3$), 3 — *H*-поляризация ($\alpha = 0$; $q = 0,9$; $p/\lambda = 0,3$), 4 — для плоскопараллельной пластины ($d = 0,1\lambda$; $\epsilon = 1,3$)

Характерные зависимости $|T(\varphi)|$ при некоторых значениях параметров p/λ и q представлены на рис. 53. На рис. 53, *б* даны результаты расчета $|T|$ для решетки из круглых проводников в случае *H*-поляризации. Как уже обсуждалось (см. § 1.2), решетка из телесных проводников на этой поляризации может полностью пропускать падающую волну при некотором угле падения $\varphi = \varphi^*$ ($\varphi^* < \pi/2$), определяемом параметрами решетки. При углах, больших φ^* , наблюдается резкое падение $|T|$ до нуля при $\varphi = \pi/2$ (рис. 53, *б*). Этой особенности нет для *E*-поляризации, где поведение $|T|$ примерно то же, что и для ленточной решетки.

Из приведенных графиков видно, что модуль коэффициента прохождения при изменении угла падения от 0 до $\pi/2$ может из-

меняться в широких пределах. Именно это обстоятельство и лежит в основе конструкции амплитудного транспаранта. Очевидно, что изгибая решетку определенным образом (т. е. изменяя тем самым угол прихода падающей волны) можно получить заданный закон изменения модуля коэффициента пропускания в апертуре решетки как в E -, так и в H -плоскости. Допустимые пределы изменения $|T|$ определяются при этом параметрами решетки.

Фазы коэффициентов прохождения, соответствующие формулам (6.1.1) — (6.1.3), даются выражениями:

$$\psi = \arctg \frac{AB - kl_1 \beta^2}{\beta(A + Bkl_1)}, \quad (6.1.8)$$

$$\psi = \arctg \frac{kl[1 + (kp)^2 \beta^2 \Delta_2] - kl_1}{1 + \beta^2 [(kp)^2 \Delta_2 + k^2 ll_1]}, \quad (6.1.9)$$

$$\psi = \arctg \frac{k(l_3 - l_2) - \beta^2 k^3 l_2 l_3^2}{\beta^2 (kl_3)^2}. \quad (6.1.10)$$

На рис. 54, а изображена зависимость фазы коэффициента прохождения для ленточной решетки (кривая 1 соответствует E -поляризации, а кривая 2 — H -поляризации). Как видно из графиков, фаза T меняется в пределах от 0 до $\pi/4$ при изменении φ от 0 до $\pi/2$. Для решетки из круглых проводников расчет изменения фазы дан на рис. 54, б для обеих поляризаций и для двух случаев падения: $\gamma = 0$ и $\alpha = 0$. Отметим, что при использовании H -поляризованной волны случай $\alpha = 0$ предпочтительнее с точки зрения наименьшего искажения фазового фронта (перепад фазы здесь не превышает 10° при изменении угла падения от 0 до 80°). Этот случай удобен для конструирования транспаранта с диапазоном изменения $|T|$ от 1 до 0,2. Для обеспечения изменения прозрачности от нуля до величин, близких к единице, целесообразно использовать E -поляризацию. При этом для компенсации фазовых искажений, вносимых решеткой из круглых проводников, можно применить диэлектрическую подложку. Конструктивно решетка наносится на подложку и изгибается вместе с ней. Подложка делается из тонкого ($d \sim 0,1 \lambda$) и слабо отражающего материала ($\epsilon \sim 1,5$). При этих условиях можно пренебречь ее влиянием на модуль коэффициента пропускания, а при подсчете суммарной фазы на выходе транспаранта не учитывать взаимное влияние подложки и решетки. Кривая 4 на рис. 54, б дает набег фазы, вносимый подложкой. Как видно из графиков, суммарное искажение фазы может быть сделано малым.

Форма направляющей цилиндрической поверхности, по которой нужно изогнуть решетку, чтобы обеспечить заданный закон изменения $|T|$ в апертуре транспаранта, достаточно просто рассчитывается по формулам (6.1.1) — (6.1.3). Для решетки из лент форма направляющей дается следующими выражениями: для E -поляризации

$$S(X) = \int_0^X \left(\frac{(kl_1)^2 |T|^2}{1 - |T|^2} - [1 + (kl_3)^2] \right)^{1/4} dX, \quad (6.1.11)$$

для H -поляризации

$$S(X) = \int_0^X \left[\frac{(kl_1)^2 |T|^2}{1 - |T|^2} \right]^{1/4} dX. \quad (6.1.12)$$

Здесь X — безразмерная координата ($|X| \leq 1$) в апертуре транспаранта. Диапазон изменения $|T|$ в (6.1.11), (6.1.12) определяется соответственно неравенствами (6.1.7), (6.1.6).

В общем случае телесных проводников выражения, аналогичные (6.1.11), (6.1.12), имеют более громоздкий вид, и мы их здесь не приводим.

Приведем в качестве примера результаты расчета по формуле (6.1.11) транспаранта, имеющего линейный закон изменения прозрачности в апертуре ($|T| = |X|$). Такой транспарант может быть использован, например, для преобразования первой моды квазиоптического лучевода в его вторую моду. Согласно (6.1.11) форма направляющей этого устройства дается выражением

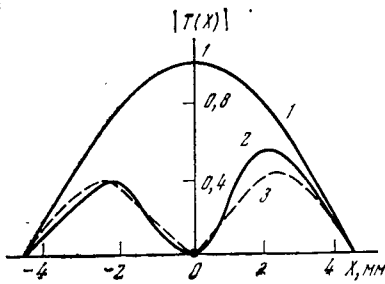
$$S(X) = f(X) + (kl_3/2) \ln [(kl_3 - f(X))/(kl_3 + f(X))], \quad (6.1.13)$$

$$f(X) = \sqrt{(kl_3)^2 - X^2 [1 + (kl_3)^2]}.$$

При малых коэффициентах заполнения q эта формула приближенно верна и для телесных проводников.

Для экспериментальной проверки транспаранта был изготовлен образец, выполненный из круглых проводников (при $p = 0,36$ мм, $q = 0,1$) и изогнутый по закону (6.1.13). Результаты измерения этого преобразователя на длине волны $\lambda = 0,9$ мм представлены на рис. 55. (Кривая 1 — амплитудное распределение падающего поля, кривая 2 — поле на выходе, кривая 3 — расчетное поле на выходе.) Отличие кривых 2 и 3, помимо экспериментальных погрешностей, объясняется и тем, что закон (6.1.13) для решетки из круглых проводников является приближенным.

3. Фазовый преобразователь представляет собой частую решетку с переменным коэффициентом заполнения, изогнутую определенным образом. Устройство работает на H -поляризованной волне, для которой фазовые изменения в прошедшем поле могут быть значительными, а коэффициент отражения при не слишком близких проводниках всегда мал. Требуемый закон преобразования фазы реализуется за счет плавного изменения коэффициента заполнения (или периода) на поверхности решетки. Для устранения потерь на отражение используется отмеченный выше эффект полного прохождения волны при определенном угле падения φ^* . Так как угол φ^* зависит от коэффициента заполнения q , то для получения полного прохождения решетку нужно изгибать в соответствии с изменением q . Описанный принцип может быть использован для создания различных неотражающих фазовых преобразователей, и в частности, фокусирующей линзы. Такая линза является аналогом диэлектрической, установленной под углом



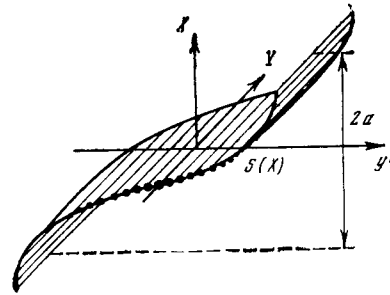
55

Рис. 55. Результаты расчета и измерения транспаранта с линейным законом изменения прозрачности

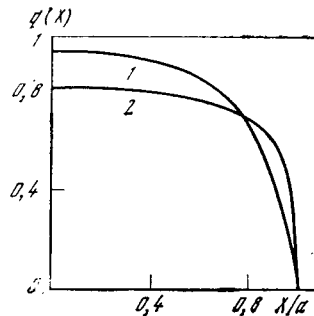
Рис. 56. Двумерная линза из частой решетки

Рис. 57. Изменение коэффициента заполнения в апертуре квадратичного корректора

1 — для $p/\lambda = 0,3$;
2 — для $p/\lambda = 0,4$



56



57

Брюстера к падающей волне, однако в отличие от нее линза из решетки не имеет потерь.

В случае квадратичной линзы, фокусирующей в плоскости XOy' (рис. 56), фаза и модуль коэффициента прохождения должны быть равны:

$$\psi(X) = \nu(1 - X^2/a^2), \quad |T| = 1, \quad (6.1.14)$$

X — координата в апертуре корректора, a — размер апертуры. Подставляя в (6.1.14) выражения для ψ и $|T|$ ((6.1.1), (6.1.8)), получим уравнения для закона изменения коэффициента заполнения в апертуре решетки $q(X)$ и формы изгиба $S(X)$. При достаточно малых p/λ эти уравнения имеют простой вид:

$$2 \arctg [k\beta^* l_1(q)] = \nu \left(1 - \frac{X^2}{a^2}\right), \quad \beta^{*2} = \cos^2 \varphi^* = -\frac{l_2 + l}{l_1 - l_2} \quad (6.1.15)$$

Из формул (6.1.15) следует, что рассматриваемая линза может быть лишь длиннофокусной ($\nu < \pi$) с минимальным фокусным расстоянием, равным $2a^2/\lambda$. Коэффициент заполнения плавным образом уменьшается от центра корректора к периферии. На рис. 57 представлена функция $q(X)$, рассчитанная по формулам (6.1.15),

при этом профиль изгиба корректора дается выражением

$$S(X) = \int_0^X \sqrt{-\frac{l_1(q) + l(q)}{l_2(q) - l(q)}} dX. \quad (6.1.16)$$

Отметим в заключение, что проведенные в субмиллиметровом диапазоне экспериментальные исследования макетов квадратичного фазового корректора с хорошей точностью подтверждают данные расчета.

§ 6.2. Кольцевая решетка между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями

Пусть на поверхности решетки $r = a$ (рис. 58) выполняются граничные условия Вайнштейна — Сивова (5.3.1). Для $\psi = 0$ они будут иметь вид

$$\begin{aligned} H_{\varphi 2} - H_{\varphi 1} &= ikl_1 [(E_{z2} - E_{z1}) + \left(\frac{m}{ka}\right)(H_{r2} + H_{r1})], \\ E_{z2} - E_{z1} &= ik \left[-l (H_{\varphi 2} - H_{\varphi 1}) - \left(\frac{hl_2}{k}\right)(E_{r2} + E_{r1}) \right], \\ E_{\varphi 2} - E_{\varphi 1} &= -l_2 ik [H_{z2} + H_{z1} - \left(\frac{m}{ka}\right)(E_{r2} + E_{r1})], \\ E_{\varphi 2} + E_{\varphi 1} &= -ikl_3 [H_{z2} - H_{z1} - \left(\frac{m}{ka}\right)(E_{r2} - E_{r1})]. \end{aligned} \quad (6.2.1)$$

Запишем выражения для составляющих электромагнитного

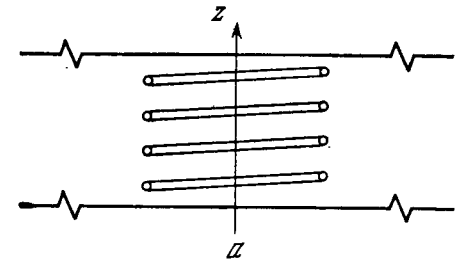


Рис. 58. Кольцевая частопериодическая решетка — резонатор между параллельными плоскостями

поля в областях 1 ($r < a$) и 2 ($r > a$); для области внутри круговой решетки 1

$$\begin{aligned} E_{r1} &= -f_H(r) \cos(m\varphi) \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \quad H_{r1} = if_E(r) \sin(m\varphi) \left\{ \frac{\cos}{-\sin} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \\ E_{\varphi 1} &= f_E(r) \sin(m\varphi) \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \quad H_{\varphi 1} = if_H(r) \cos(m\varphi) \left\{ \frac{\cos}{-\sin} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

$$\begin{aligned} E_{z1} &= \frac{2w}{k} CJ_m(wr) \cos(m\varphi) \left\{ \frac{\cos}{-\sin} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \quad H_{z1} = i \frac{2w}{k} DJ_m(wr) \sin \times \\ &\times (m\varphi) \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \frac{\pi qz}{2l}, \end{aligned} \quad (6.2.2)$$

и для внешней области 2 ($r > a$)

$$\begin{aligned} E_{r2} &= -\hat{f}_H(r) \cos(m\varphi) \begin{Bmatrix} \cos \\ \sin \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, \quad H_{r2} = i\hat{f}_E(r) \sin(m\varphi) \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, \\ E_{\varphi 2} &= \hat{f}_E(r) \sin(m\varphi) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, \quad H_{\varphi 2} = i\hat{f}_H(r) \cos(m\varphi) \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, \end{aligned} \quad (6.2.3)$$

$$\begin{aligned} E_{z2} &= \frac{2w}{k} \hat{C} H_m(wr) \cos(m\varphi) \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, \quad H_{z2} = i \frac{2w}{k} \hat{D} H_m(wr) \sin \times \\ &\times (m\varphi) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z. \end{aligned}$$

Здесь введены обозначения

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} f_E(r) \\ f_H(r) \end{Bmatrix} &= (C + D) J_{m-1}(wr) \pm (C - D) J_{m+1}(wr), \quad \begin{Bmatrix} \hat{f}_E(v) \\ \hat{f}_H(r) \end{Bmatrix} = \\ &= \hat{C} H_{m-1}(wr) \pm \hat{D} H_{m+1}(wr). \end{aligned} \quad (6.2.4)$$

Удовлетворяя для полей в областях 1 и 2 граничным условиям (6.2.1) при $r = a$, получим дисперсионное уравнение

$$\det \| d(\kappa) \| = 0 \quad (6.2.5)$$

с определителем четвертого порядка, элементы которого суть

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{13} \end{Bmatrix} &= 2\kappa \frac{kl_1}{ka} \begin{Bmatrix} J_m(\kappa) \\ -H_m(\kappa) \end{Bmatrix} + \left(1 \pm \frac{k\tilde{l}_1}{ka}\right) \begin{Bmatrix} -J_{m-1}(\kappa) \\ H_{m-1}(\kappa) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} d_{12} \\ d_{14} \end{Bmatrix} = \\ &= \left(1 \mp im \frac{k\tilde{l}_1}{ka}\right) \begin{Bmatrix} J_{m+1}(\kappa) \\ H_{m+1}(\kappa) \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{23} \end{Bmatrix} &= \frac{2\kappa}{ka} \begin{Bmatrix} -J_m(\kappa) \\ H_m(\kappa) \end{Bmatrix} - (k\tilde{l} + ikl_2) \begin{Bmatrix} J_{m-1}(\kappa) \\ H_{m-1}(\kappa) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} d_{22} \\ d_{24} \end{Bmatrix} = \\ &= (k\tilde{l} + ikl_2) \begin{Bmatrix} J_{m+1}(\kappa) \\ H_{m+1}(\kappa) \end{Bmatrix}, \quad (6.2.6) \\ \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{33} \end{Bmatrix} &= \left(1 \mp \frac{kl_2}{ka}\right) \begin{Bmatrix} -J_{m-1}(\kappa) \\ H_{m-1}(\kappa) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} d_{32} \\ d_{34} \end{Bmatrix} = -2\kappa \frac{kl_2}{ka} \begin{Bmatrix} J_m(\kappa) \\ H_m(\kappa) \end{Bmatrix} + \\ &+ \left(1 \mp im \frac{kl_2}{ka}\right) \begin{Bmatrix} -J_{m+1}(\kappa) \\ H_{m+1}(\kappa) \end{Bmatrix}, \\ \begin{Bmatrix} d_{41} \\ d_{43} \end{Bmatrix} &= \left(1 \mp im \frac{kl_3}{ka}\right) \begin{Bmatrix} J_{m-1}(\kappa) \\ H_{m-1}(\kappa) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} d_{42} \\ d_{44} \end{Bmatrix} = 2\kappa \frac{kl_3}{ka} \begin{Bmatrix} J_m(\kappa) \\ -H_m(\kappa) \end{Bmatrix} + \\ &+ \left(1 \pm im \frac{kl_3}{ka}\right) \begin{Bmatrix} J_{m+1}(\kappa) \\ H_{m+1}(\kappa) \end{Bmatrix}. \end{aligned}$$

Входящие в выражения для элементов d_{ij} параметры решетки определены выше; параметр решетки \tilde{l} , введенный в (6.2.6), имеет в теории решеток (часть I) обозначение l ($l \equiv \tilde{l}$).

Полученные дисперсионные уравнения (6.2.5) содержат полную информацию о собственных колебаниях в рассматриваемой структуре. В общем случае его корни следует находить численными методами. Однако, как мы покажем далее (см. § 6.4), в одном практически интересном случае можно получить приближенные значения для корней (6.2.5), а также и для других дисковых резонансных структур с частотными решетками.

§ 6.3. Дисковый открытый резонатор с круговой металлической решеткой

1. В отличие от рис. 58 § 6.2 на рис. 59 угол подъема спирали $\psi = \pi/2$. На границе $r = a$ для поля вновь необходимо удовлетворить граничным условиям Вайнштейна — Сивова, которые теперь будут иметь вид

$$\begin{aligned} H_{z2} - H_{z1} &= -ik\tilde{l}_1 \left[E_{\varphi 2} + E_{\varphi 1} + \left(\frac{h}{k}\right) (H_{r2} + H_{r1}) \right], \\ E_{\varphi 2} - E_{\varphi 1} &= ik \left[\tilde{l} (H_{z2} + H_{z1}) + l_2 \left(\frac{m}{ka}\right) (E_{r2} + E_{r1}) \right], \\ E_{z2} - E_{z1} &= ikl_2 \left[H_{\varphi 2} - H_{\varphi 1} - \left(\frac{h}{k}\right) (E_{r2} + E_{r1}) \right], \\ E_{z2} + E_{z1} &= ikl_3 \left[H_{\varphi 2} - H_{\varphi 1} - \left(\frac{h}{k}\right) (E_{r2} - E_{r1}) \right]. \end{aligned} \quad (6.3.1)$$

Здесь h — продольное волновое число радиальной волны.

На открытой границе $r = b$ поле должно удовлетворять импедансным граничным условиям резонансного типа (4.1.7), которые можно записать так:

$$\Phi_E = -\frac{y_E}{w} \frac{d\Phi_E}{dr}, \quad \Phi_H = -\frac{y_H}{w} \frac{d\Phi_H}{dr}. \quad (6.3.2)$$

Входящие в граничные условия (6.3.2) величины определяются формулами (4.1.7).

Составляющие электромагнитного поля для внутренней области 1 при $r < a$ определяются соотношениями (5.3.3), а для области 2 при $r \in (a, b)$ — формулами (5.4.3).

Удовлетворяя для указанных полей граничным условиям (6.3.1) и (6.3.2), получим следующее дисперсионное уравнение для радиального волнового числа κ ($\tilde{\kappa} = \kappa a/b$):

$$\det \| d(\kappa) \| = 0, \quad (6.3.3)$$

в котором элементы d_{ij} определителя 6-го порядка суть

$$\begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix} = F_1 \begin{Bmatrix} J_m(\tilde{\kappa}) \\ N_m(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta J(\tilde{\kappa}) \\ \Delta N(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix},$$

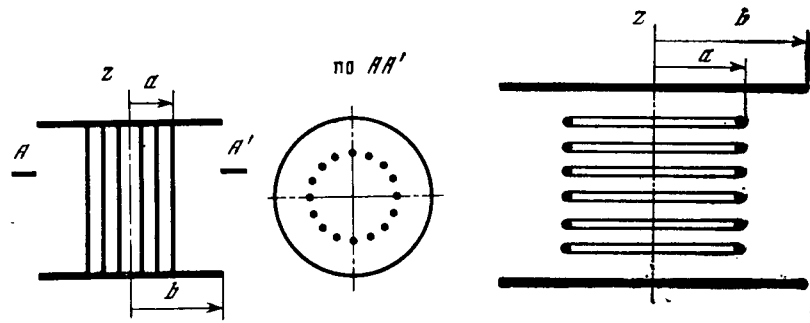


Рис. 59. Дискový открытый резонатор с круговой решеткой, проводники которой перпендикулярны поверхностям зеркал резонатора

Рис. 60. Дискový открытый резонатор с круговой решеткой, плоскости колец которой параллельны плоскостям зеркал резонатора

$$\begin{aligned}
 d_{13} &= d_{15} = d_{36} = d_{31} = d_{41} = -d_{46} = \Sigma J(\tilde{\kappa}), \\
 d_{14} &= d_{32} = d_{42} = \Sigma N(\tilde{\kappa}), \quad d_{16} = \Delta J(\tilde{\kappa}), \\
 \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Delta J(\tilde{\kappa}) \\ \Delta N(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix} + F_5 \begin{Bmatrix} J_m(\tilde{\kappa}) \\ N_n(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix} + F_4 \begin{Bmatrix} \Sigma J(\tilde{\kappa}) \\ \Sigma N(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} d_{23} \\ d_{24} \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} \Sigma J(\tilde{\kappa}) \\ \Sigma N(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix} + F_4 \begin{Bmatrix} \Delta J(\tilde{\kappa}) \\ \Delta N(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix}, \\
 \begin{Bmatrix} d_{25} \\ d_{26} \end{Bmatrix} &= - \begin{Bmatrix} \Sigma J(\tilde{\kappa}) \\ \Sigma N(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix} + F_4 \begin{Bmatrix} \Delta J(\tilde{\kappa}) \\ \Delta N(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix}, \quad d_{35} = -F_2 J_m(\tilde{\kappa}) + \Delta J(\tilde{\kappa}), \\
 & \quad d_{55} = d_{56} = d_{65} = d_{66} = 0, \\
 \begin{Bmatrix} d_{33} \\ d_{34} \end{Bmatrix} &= F_2 \begin{Bmatrix} J_m(\tilde{\kappa}) \\ N_n(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta J(\tilde{\kappa}) \\ \Delta N(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix}, \\
 d_{43} &= d_{45} = d_{44} = F_3 \begin{Bmatrix} J_m(\tilde{\kappa}) \\ N_n(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix} + \begin{Bmatrix} \Delta J(\tilde{\kappa}) \\ \Delta N(\tilde{\kappa}) \end{Bmatrix}, \quad (6.3.4) \\
 \begin{Bmatrix} d_{51} \\ d_{52} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Delta J(x) \\ \Delta N(x) \end{Bmatrix} + y_E \begin{Bmatrix} \Delta J'(x) \\ \Delta N'(x) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} d_{53} \\ d_{54} \end{Bmatrix} = \\
 &= \begin{Bmatrix} \Sigma J(x) \\ \Sigma N(x) \end{Bmatrix} + y_E \begin{Bmatrix} \Sigma J'(x) \\ \Sigma N'(x) \end{Bmatrix}, \\
 \begin{Bmatrix} d_{61} \\ d_{62} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Sigma J(x) \\ \Sigma N(x) \end{Bmatrix} + y_H \begin{Bmatrix} \Sigma J'(x) \\ \Sigma N'(x) \end{Bmatrix}, \quad \begin{Bmatrix} d_{63} \\ d_{64} \end{Bmatrix} = \begin{Bmatrix} \Delta J(x) \\ \Delta N(x) \end{Bmatrix} + \\
 & \quad + y_H \begin{Bmatrix} \Delta J'(x) \\ \Delta N'(x) \end{Bmatrix}.
 \end{aligned}$$

В выражениях для элементов d_{ij} определителя (6.3.4)

$$\begin{aligned}
 F_1 &= (1 - i)\tilde{\kappa}/ka\tilde{l}_1, \quad F_2 = (1 + i)\tilde{\kappa}/ka\tilde{l}_2, \quad F_3 = (1 + i)\tilde{\kappa}/ka\tilde{l}_3, \\
 F_4 &= m\tilde{\kappa}l_2/ka, \quad F_5 = 2\tilde{\kappa}\tilde{l}/ka. \quad (6.3.5)
 \end{aligned}$$

Выбирая надлежащим образом расстояние между решеткой ($r = a$) и открытым краем структуры ($r = b$), можно повысить добротность рабочего вида колебаний внутри решетки ($r < a$). Это означает, что часть энергии рабочего типа колебаний прошла через решетку и, отразившись от открытого края ($r = b$), вернулась в резонатор в соответствующей фазе. Это обстоятельство было отмечено также в работах [54, 147, 150]. Детальнее на этом мы остановимся в § 6.4.

2. Рассмотрим более подробно симметричный тип колебаний E_{0iq} . Пусть в резонаторе рис. 59 существуют колебания вида E_{0iq} . Тогда, полагая в элементах d_{ij} (6.3.4) определителя в дисперсионном уравнении (6.3.3) $m = 0$, получим дисперсионное уравнение для E_{0iq} колебаний. Пренебрегая в нем членами порядка $y_H(kb)^{-3}$, $kl_2kl_3y_H$ и разлагая цилиндрические функции в ряды по малому параметру κ'' , получим

$$\kappa' = \frac{\pi j}{1 - \Delta} [1 + \sqrt{2j\Delta}(y_H' - y_H'')]B, \quad (6.3.6)$$

$$\kappa'' = \frac{2}{1 - \Delta} [4A(\kappa')^2 + \sqrt{2\pi\kappa'\Delta}(y_H' + y_H'')]B,$$

где обозначено

$$A = \frac{\text{ctg } \pi \left(\frac{j\Delta}{(1-\Delta)} - \frac{1}{4} \right)}{4kl_2kl_3(kb)^2}, \quad (6.3.7)$$

$$B = \frac{1}{4\pi kb\Delta} \frac{kl_2 + kl_3}{kl_2kl_3} \text{ctg } \pi \left(\frac{j\Delta}{(1-\Delta)} - \frac{1}{4} \right).$$

3. Дискový открытый резонатор с круговой решеткой; H -волны. Аналогично можно получить дисперсионное уравнение для резонатора, представленного на рис. 60. При этом составляющие электромагнитного поля снова, как и в предыдущем пункте, определяются для $r < a$ формулами (5.3.3), а для $r \in (a, b)$ — формулами (5.4.3). Поле при $r = a$ должно удовлетворять граничным условиям (6.2.1), а на открытом конце структуры — условиям (6.3.2). Ограничиваясь симметричными колебаниями типа H_{0jq} , получим дисперсионное уравнение третьего порядка, элементы определителя которого суть

$$d_{j1} = -(1 + \kappa\eta_j) J_1(\tilde{\kappa}), \quad (6.3.8)$$

$$d_{31} = -J_1(\tilde{\kappa}) - (y_E/2) \Delta J_1(\tilde{\kappa}).$$

Поступая аналогично тому, как это делалось в предыдущем пунк-

те, и пренебрегая членами порядка $\eta_2\eta_3$ и $y_E\eta_j$ ($j = 1, 2$), получим

$$\begin{aligned} \kappa' &= \frac{\pi j}{1-\Delta} (1 - (\beta' + \hat{\rho}^e)/M) + O(M^{-2}), \\ \kappa'' &= \frac{\pi j}{1-\Delta} \frac{\beta_E''}{M} + O(M^{-2}). \end{aligned} \quad (6.3.9)$$

Здесь

$$\hat{\rho}^e = (\eta_2 + \eta_3) \operatorname{ctg} \left[\pi j \frac{\Delta}{1-\Delta} \left(1 - \frac{\beta'}{M} \right) - \frac{\pi}{4} \right].$$

Интересно сравнить структуру полученных формул с соотношениями для диафрагменной линии и, в особенности, открытого радиального резонатора и полуоткрытого резонатора (см. §§ 8.2, 8.3). Как будет показано далее, структура этих формул одинакова. Фактически это очевидный результат — колебания в этих устройствах «удерживаются» резонансными свойствами открытых концов структур.

§ 6.4. К аналитической теории открытых резонаторов с частопериодическими решетками

В предыдущих пунктах мы рассмотрели ряд открытых осесимметричных резонаторов с частопериодическими решетками. Итогом рассмотрения явились дисперсионные уравнения (например, (6.2.6), 6.3.3)), содержащие полную информацию о добротных колебаниях в таких структурах. В общем случае полученные дисперсионные уравнения допускают либо численный анализ, либо в отдельных частных случаях можно воспользоваться методом малых возмущений (ср. § 5.6, формулы (5.6.11) и (5.6.12)). Здесь мы покажем, что иногда система *частопериодическая структура — открытый конец волновода*, описываемая одновременно граничными условиями Вайнштейна — Сивова и импедансными граничными условиями резонансного типа, может быть описана некоторым эквивалентным образом. Другими словами, при выполнении определенного условия коэффициент отражения от открытого конца волновода с частой решеткой, помещенный в волноводе на некотором расстоянии d от его открытого конца, может быть представлен в виде (4.1.1). Стало быть, в этом частном случае нет необходимости в численном решении дисперсионных уравнений (6.2.6), (6.3.3).

Для доказательства рассмотрим полубесконечный плоский волновод с металлической решеткой, установленной перпендикулярно стенкам на расстоянии d от открытого конца ($z = 0$) волновода. Коэффициент отражения падающей волны от открытого конца волновода представим в виде (4.1.1); обозначим его через R_2 в отличие от коэффициента отражения R_1 волноводной волны от решетки (при $z = -d$), который в соответствии с формулой (2.2.18) есть

$$R_1 = -1 - ih(l_3 + l_2) = -1 - ih\sigma \simeq -\exp\{ih\sigma\}. \quad (6.4.1)$$

Коэффициент прохождения волны через решетку есть

$$T_1 = -ih(l_3 - l_2) = -ih\delta. \quad (6.4.2)$$

Общий коэффициент отражения волноводной волны от системы *решетка — открытый конец* можно представить так (см., например, [4]):

$$R = R_1 + \frac{R_2 T_1^2 \exp\{i2dh\}}{1 - R_1 R_2 \exp\{i2dh\}}. \quad (6.4.3)$$

В соответствии с обстоятельствами, отмеченными в § 6.3 (см. текст после формулы (6.3.5)), расстояние d между открытым концом волновода и решеткой должно подбираться так, чтобы отрезок волновода был антирезонансным. При этом $2dh = N\pi$, $N = 1, 2, \dots$, и (6.4.3) можно переписать так:

$$R = R_1 + [R_2 T_1^2 / (1 - R_1 R_2)]. \quad (6.4.4)$$

Воспользуемся близостью волнового числа h набегающей волны к нулю и представим R_1 в виде

$$R_1 = -\exp\{i\tau_\sigma s\}, \quad \tau_\sigma = \frac{k\sigma}{\sqrt{\pi q}} (1 - p/q) = \tau_\sigma' + i\tau_\sigma''. \quad (6.4.5)$$

Соответственно и для коэффициента прохождения можно записать следующее выражение

$$T_1 = -i\tau_\delta s, \quad \tau_\delta = \frac{k\delta}{\sqrt{\pi q}} (1 - p/q) = \tau_\delta' + i\tau_\delta''. \quad (6.4.6)$$

Теперь с учетом (6.4.5) и (6.4.6) формулу (6.4.4) можно переписать так:

$$R = -\exp\{i\tau_\sigma s\} + i \frac{\tau_\delta s^2 \exp\{iBs\}}{B + \tau_\sigma}, \quad B = \beta' + i\beta_{E,H}'' \quad (6.4.7)$$

или, вводя обозначение для второго члена в виде iAs , где $A = \tau_\delta s^2 \exp\{iBs\} / (B + \tau_\sigma)$, представим (6.4.7) в искомом виде (4.1.1)

$$R = -\exp\{i(\tau_\sigma - A)s\}. \quad (6.4.8)$$

Запись коэффициента отражения в виде соотношения (6.4.8) позволяет (в антирезонансном случае $2dh = (2N + 1)\pi$, $N = 0, 1, 2, \dots$), во-первых, рассмотреть открытые ленточные резонаторы (волноводы), образованные зеркалами и металлическими решетками (ср. § 5.6, где открытый конец волновода заменен идеально проводящей стенкой) и, во-вторых, произведя с помощью (6.4.8) очевидную замену в эквивалентном граничном условии резонансного типа (4.1.7), рассмотреть дисковые открытые резонансные структуры с металлическими частопериодическими решетками. То есть, по существу, воспользоваться готовыми результатами для характеристик добротных колебаний дисковых структур с учетом формулы (6.4.8). Ряд результатов для дисковых структур будет приведен в гл. 8.

Диафрагменная линия представляет собой интересный пример резонансной периодической структуры. Диафрагменная линия (рис. 61) и линии, прообразами которых она является, находят применение в технике миллиметровых и субмиллиметровых волн (см., например, [74] и библиографию там же). В последние годы были предложены и исследованы (в основном экспериментально) различные модификации диафрагменной линии: трубчато-диафрагменный лучевод [62], рамочно-диэлектрический (или металлический) волновод [50, 65], линия из разновеликих диафрагм (нерегулярная диафрагменная линия) и т. п.

Диафрагменная линия для передачи электромагнитных сигналов в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах волн впервые, по-видимому, была предложена в [50]. Вместе с тем давно известно [2], что «точечная» диафрагма в диапазоне видимого света дает достаточно четкое изображение, причем максимальная четкость имеет место, когда рэлеевский параметр $S = ka^2/l$ равен $0,9 \cdot 2\pi$, т. е. когда размер диафрагмы составляет 0,9 от первой френелевой зоны. Диафрагменная линия при таком значении параметра S будет обладать значительными потерями энергии основного колебания. Потери достигают допустимых значений (около 1%) при увеличении S до величин порядка $5 \cdot 2\pi$. Отсюда следует, что механизм работы диафрагменной линии отнюдь не заключается в последовательной фокусировке пучка волн диафрагмой, а должен описываться в терминах «собственных» колебаний. Однако, насколько нам известно, построить сколько-нибудь удовлетворительную аналитическую теорию регулярной диафрагменной линии до сих пор не удавалось. В ряде работ [160, 161] представлены результаты численного решения интегрального уравнения Мандельштама диафрагменной линии. В [160] использовался принцип Гюйгенса, а в [161] в качестве ядра интегрального уравнения использовалась асимптотика функции Грина из задачи о широкой щели в безграничном плоском экране. Результаты численных расчетов в [160] и [161] совпадают с графической точностью. В монографии [49] аналитическая теория диафрагменной линии строится на основе решения задачи о дифракции плоской волны на системе широких эквидистантно расположенных металлических лент. Полученные результаты допускают обобщение на ряд квазиоптических систем [74, 77]. Отметим одно интересное применение модели диафрагменной линии, а именно, использование ее как эквивалента кольцевого открытого резонатора [162].

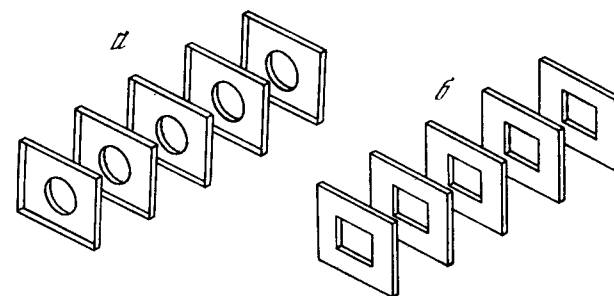


Рис. 61. Примеры диафрагменных линий
а — с круговой апертурой; б — с прямоугольной апертурой

Это же в полной мере относится и к трубчато-диафрагменному волноводу [62]. К сожалению, построенные решения (для малых расстояний между экранами) не могут быть перенесены на трехмерные структуры типа диафрагменной линии из прямоугольных отверстий в зеркалах (рис. 61 б.). Здесь мы вновь встречаемся с нерешенной проблемой дифракции на четверти плоскости [163] *.

Упомянем еще об одном возможном использовании структуры. Имеются в виду фазированные антенные решетки [42]. Одна из задач в них — борьба с «ослеплением» антенной структуры при углах сканирования, близких к скользящим. Этот режим, по существу, связан с сильным отражением электромагнитной волны от края структуры и для антенной системы конечной длины определяется добротными колебаниями в ячейках, представляющих собою открытые резонаторы (см. [42], с. 276).

§ 7.1. Двумерная диафрагменная линия

1. На простейшей двумерной модели диафрагменной линии проще всего выяснить основные ее характеристики. Рассмотрим двумерную ($\partial/\partial y \equiv 0$) диафрагменную линию, состоящую из щелей в бесконечных идеально проводящих экранах (рис. 62). Это нетрудно сделать, воспользовавшись «резонансными» импедансными граничными условиями (4.1.7) и результатами § 4.2 и § 4.3. Простоты ради рассмотрим структуру, удовлетворяя на плоскости $x = 0$ граничным условиям либо Дирихле либо Неймана. Искомое решение на поверхности $|x| = a$ должно удовлетворять граничным условиям (4.1.7). Записывая искомое поле в виде формул (4.1.2) — (4.1.6) и удовлетворяя указанным граничным условиям при $x = 0$ и условиям (4.1.7) при $|x| = a$, получим

* Решение задачи о дифракции на четверти плоскости, приведенное в [163], к сожалению, ошибочно.

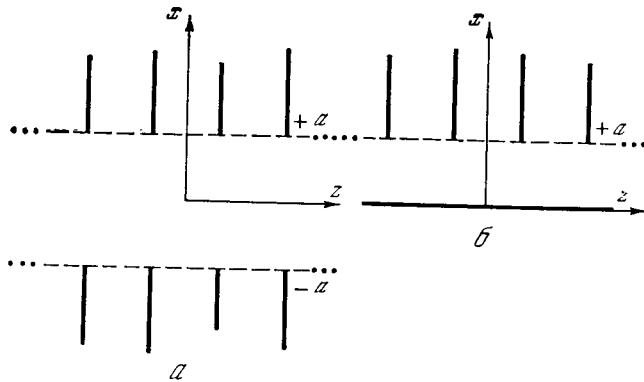


Рис. 62. Двумерный вариант диафрагменной линии — щели в безграничных экранах

дисперсионные уравнения

$$\begin{cases} \text{tg} \\ \text{ctg} \end{cases} \kappa = \kappa (\beta' + i\beta''_{E,H}) \frac{\sqrt{\pi q}}{2ka}, \quad (7.1.1)$$

где κ есть поперечное (комплексное) волновое число; первая строка в (7.1.1) относится к нечетным (по x) колебаниям, вторая — к четным. Продольное волновое число h определяется обычным образом $(ha)^2 = (ka)^2 - \kappa^2$, $ka \gg 1$.

Корни κ_m дисперсионных уравнений (7.1.1) в общем случае должны находиться численными способами. В нашем случае можно получить приближенные значения для κ_{mn} . При этом следует воспользоваться следующими обстоятельствами. Во-первых, нас интересуют те значения $\kappa_{mn} = \kappa_{mn}' + i\kappa_{mn}''$, у которых κ_{mn}'' есть малая величина. Во-вторых, в качестве нулевого приближения для κ' можно взять собственные числа плоского волновода $\kappa' = \pi n$, $n = 0, 1, \dots$, с идеально проводящими стенками. Действительно, поскольку мы интересуемся слабо затухающими по z волнами, верхняя импедансная стенка ($x = a$) должна хорошо отражать падающую на нее электромагнитную волну, а стало быть, в нулевом приближении ее можно считать идеально отражающей.

Итак, $\kappa_{(0)mn} = \pi n$, $n = 1, 2, \dots$ и $\kappa_{(0)mn}'' = 0$. Искомое первое приближение для корней $\kappa_{(1)mn}$ представим в виде $\kappa_{(1)mn} = \pi n + \delta$, $\delta \ll 1$ и $\kappa_{(1)mn}'' = \delta'' \ll 1$. Теперь можно, разложив функции $\text{tg} \kappa$ и $\text{ctg} \kappa$ в (7.1.1) в ряд по малому параметру κ'' , разделить мнимую и вещественную части дисперсионных соотношений (7.1.1). Полученная таким образом система двух уравнений допускает явное решение. Результат таков: для нечетных волн

$$\kappa'_{E,H} = \kappa' \simeq \pi n (1 + \beta'/M), \quad \kappa''_{E,H} \simeq \pi n \beta''_{E,H}/M; \quad (7.1.2)$$

для четных волн (для них $\kappa_0' = \pi(n - 1/2)$)

$$\kappa'_{E,H} = \kappa' \simeq \pi (n - 1/2) (1 + \beta'/M), \quad \kappa''_{E,H} \simeq (\pi (n - 1/2)/M) \beta''_{E,H} \quad (7.1.3)$$

В формулах (7.1.2) и (7.1.3) $n = 1, 2, \dots$, а M — большой параметр: $M = 2ka/\sqrt{\pi q} \gg 1$. Из полученных соотношений видно,

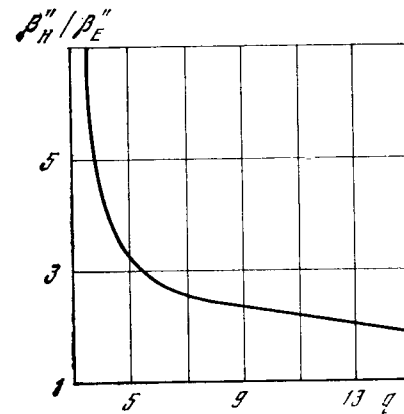
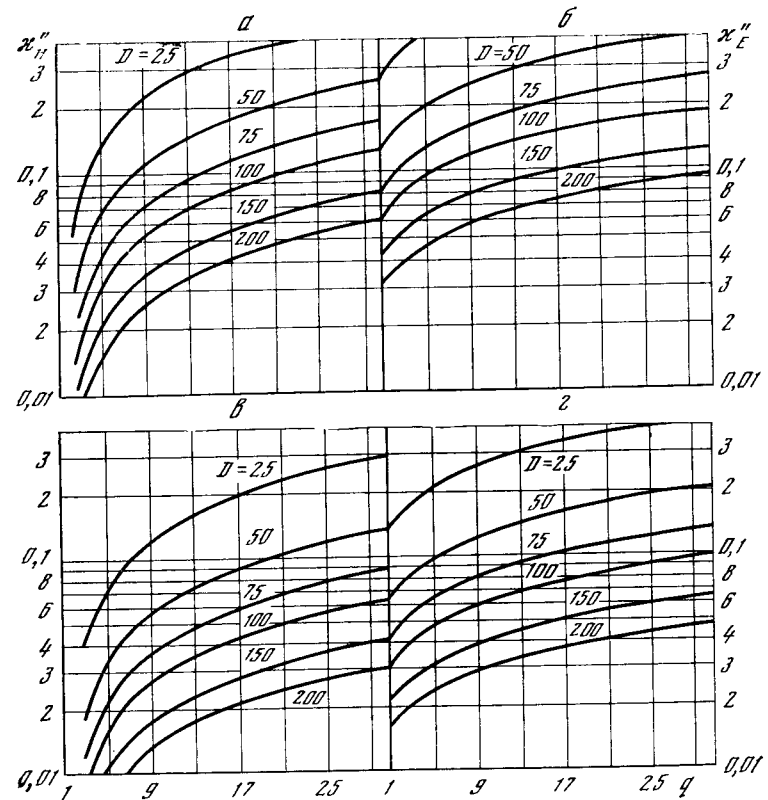


Рис. 63. Отношение мнимых частей поперечных волновых чисел волн различной поляризации в двумерной диафрагменной линии

Рис. 64. Результаты численных расчетов поперечного волнового числа двумерной диафрагменной линии

a — нечетные волны;
б — четные волны



что действительные части поперечного волнового числа в диафрагменной линии являются функциями параметра β' и одинаковы для обеих поляризаций. Мнимые части $\kappa_{E, H}$ пропорциональны $\beta_{E, H}$ и определяют поляризационное различие колебаний при умеренных значениях n . Потери минимальны для низшего (по n) типа колебаний $n = 1$. Отношение κ_H''/κ_E'' представлено на рис. 63. Результаты некоторых численных расчетов (на ЭВМ «Мир-2») по дисперсионным уравнениям (7.1.1) показаны на рис. 64.

В проведенных расчетах параметр M считался постоянным и действительным числом. При более точном анализе следует учитывать комплексность M .

§ 7.2. Эквидистантная система прямоугольных диафрагм и другие квазиоптические системы

1. Здесь мы изложим обобщение известного принципа Бабинне (принципа дополнительности) на систему экранов, расположенных не в одной плоскости. И хотя развитый в предыдущем параграфе подход к теории диафрагменной линии обладает достаточной общностью, целесообразно рассмотреть и другую возможность. Отметим сразу же, что последующие рассуждения в существенном опираются на предположение об исчезающе тонких экранах. Учет влияния конечной толщины экрана приводит к интересным физическим следствиям, которые будут обсуждаться нами в следующем параграфе.

Непосредственное нахождение собственных функций диафрагменной линии, а также целого ряда других квазиоптических систем представляется весьма сложной задачей, и мы заменим ее другой, а именно «дополнительной» (по геометрии) задачей о дифракции плоской электромагнитной волны на бесконечной системе параллельных металлических полос, рассмотренной в [49] (см. также гл. 4). Легко показать эквивалентность этих задач в «резонансном» смысле (в отсутствие источников). Действительно, пусть речь идет о решении двумерного уравнения Гельмгольца с граничным условием Неймана на пластинах

$$(\Delta + k^2) u(x, z) = 0, \quad (7.2.1)$$

$$\partial u / \partial z = 0, \quad |x| \in (a, \infty), \quad z = \pm 2l(r + 1/2) \quad (r = 0, 1, 2, \dots),$$

соответствующими условиями излучения при $x \rightarrow \pm \infty$ и условиями на краях пластин при $|x| \rightarrow a, z = \pm 2l(r + 1/2)$.

Рассматривать будем такие решения, которые являются волнами, бегущими вдоль направления z : $u(x, z) = U(x, z) \exp\{-ihz\}$.

Связь волнового числа k с расстоянием $2l$ между пластинами дается выражением

$$2kl = 2\pi p + 2hl, \quad (7.2.2)$$

где $2hl$ — комплексный параметр, определяющий полный набег фазы и затухание волны на одну итерацию (одной итерацией считаем проход волны от одного сечения с пластиной до соседнего на расстояние $2l$); $|p| < 0,5$.

Поскольку любая функция, определенная для всех значений своего аргумента, является суммой некоторой четной и некоторой нечетной функций, то задача (7.2.1) эквивалентна двум частным задачам подобного же типа с решениями $u_{\text{чет}}$ и $u_{\text{неч}}$, в результате чего (имеется в виду четность относительно $z = l$)

$$u(\xi, \zeta) = u_{\text{чет}}(\xi, \zeta) + u_{\text{неч}}(\xi, \zeta),$$

где введены безразмерные координаты $\xi = xM/2a$ и $\zeta = z/2l$.

Из физических соображений очевидно, что $u_{\text{чет}}(\xi, \zeta)$ не представляет интереса с точки зрения рассматриваемой проблемы (если на пластинах поле должно удовлетворять граничным условиям Неймана), так как эта частная задача соответствует системе не связанных друг с другом волноводов, где распространение волн в направлении оси ζ невозможно (ср. п. 1 § 7.3). Так что

$$u(\xi, \zeta) \equiv u_{\text{неч}}(\xi, \zeta) = \sum_m U_m(\xi, \zeta) e^{-i2k_l \zeta}. \quad (7.2.3)$$

Сравним исходную задачу (7.2.1) с задачей о падении волн на систему полос (рис. 32, а) при тех же граничных условиях:

$$(\Delta + k^2) v(\xi, \zeta) = 0, \quad z = \pm 2l(r + 1/2), \quad x > a. \quad (7.2.4)$$

Она также эквивалентна двум частным задачам для четной $v_{\text{чет}}(\xi, \zeta)$ и нечетной $v_{\text{неч}}(\xi, \zeta)$ «собственных» функций. И здесь задача для $v_{\text{чет}}$ с физической точки зрения не представляет интереса. Поэтому

$$v(\xi, \zeta) = v_{\text{неч}}(\xi, \zeta).$$

Собственные (комплексные) частоты системы параллельных металлических полос определяются как корни знаменателя выражения для тока, возникающего на пластинах при падении плоской волны. Эти собственные частоты (соответствующие колебаниям) зависят от угла падения плоской волны возбуждения. Определим теперь собственные частоты диафрагменной линии как собственные частоты дополнительной к этой линии системе полос, соответствующие углу падения, равному углу Бриллюэна собственных волн диафрагменной линии.

2. Эквидистантная система прямоугольных диафрагм. Сравнение задач для $u_{\text{неч}}(\xi, \zeta)$ и $v_{\text{неч}}(\xi, \zeta)$ показывает, что их решения являются «дополнительными», как того требует принцип двойственности, и поэтому искомого решения (для задачи (7.2.1)) можно сконструировать из известного решения (для задачи (7.2.4)) обычным способом:

$$u(\xi, \zeta) = v(\xi, \zeta) = \sum V_m(\xi, \zeta) e^{i2k_l \zeta}.$$

Таким образом, система полос в математическом смысле эквивалентна системе щелей в непрозрачных экранах *. Представим функцию $V_m(\xi, \zeta)$ в виде

$$V_m(\xi, \zeta) = f_m(\xi) e^{i2\pi(\zeta + 1/2)}. \quad (7.2.5)$$

Для функции $f_m(\xi)$ имеем

$$f_m(\xi) = \begin{cases} \cos \left\{ \frac{\pi m \xi}{M + \tilde{\beta}(1-i)} \right\}, & m = 1, 3, 5, \dots; \\ \sin \left\{ \frac{\pi m \xi}{M + \tilde{\beta}(1-i)} \right\}, & m = 2, 4, 6, \dots \end{cases} \quad (7.2.6)$$

Можно утверждать, что в пределах справедливости параболического уравнения собственные функции диафрагменной линии, составленной из прямоугольных отверстий, суть

$$u_{mn}(\xi, \eta, \zeta) = \begin{cases} \cos \left\{ \frac{\pi m \xi}{\tilde{M}_a} \right\} \left\{ \frac{\cos \left\{ \frac{\pi n \eta}{\tilde{M}_b} \right\} e^{-i2\pi p(\zeta + 1/2)}}{\sin \left\{ \frac{\pi n \eta}{\tilde{M}_b} \right\}} \right\}, & \\ \sin \left\{ \frac{\pi m \xi}{\tilde{M}_a} \right\} \left\{ \frac{\cos \left\{ \frac{\pi n \eta}{\tilde{M}_b} \right\} e^{-i2\pi p(\zeta + 1/2)}}{\sin \left\{ \frac{\pi n \eta}{\tilde{M}_b} \right\}} \right\}, & \end{cases} \quad (7.2.7)$$

где $\tilde{M}_j = M_j + \tilde{\beta}_j(1-i)$, $j = a, b$, $M_j = j\sqrt{2kl} \gg 1$, $\eta = M_b y / 2b$ ($2b$ — размер отверстия вдоль координаты y). Входящая сюда величина $\tilde{\beta} = \beta_{a,b}$ в отличие от $\beta_0 = 0,824$ для одиночного открытого резонатора с плоскими ленточными зеркалами, определяется из трансцендентного уравнения, исследованного в [49] при произвольных значениях параметров M и $\tilde{\sigma}$. Для $\tilde{\beta} = \tilde{\beta}(\tilde{\sigma})$ были получены приближенные формулы [49]. Параметр $\tilde{\sigma}$ связан с углом падения φ_{nj} плоской волны на систему диафрагм и углом наблюдения $\tilde{\varphi}_{ij}$:

$$\tilde{\sigma} = \{(kl/\pi)(\sin \varphi_{nj} + \sin \tilde{\varphi}_{ij})\} \quad (7.2.8)$$

(фигурные скобки означают, что от числа, в них заключенного, берется дробная часть). В общем случае $\tilde{\beta}_a \neq \tilde{\beta}_b$, поскольку угол φ_{na} , отсчитываемый в плоскости (x, z) , и угол φ_{nb} , лежащий в плоскости (y, z) , могут не совпадать по величине. То же относится и к углам $\tilde{\varphi}_{ia}$ и $\tilde{\varphi}_{ib}$.

Параметр p , связанный с частотой и продольным размером l формулой (3), зависит и от $\tilde{\beta}$:

$$p = p_a + p_b = \pi m^2 / 4 \tilde{M}_a^2 + \pi n^2 / 4 \tilde{M}_b^2 = (p_a' + p_b') - i(p_a'' + p_b'') = p' - ip'' \quad (7.2.9)$$

Для p_j' и p_j'' выше приведены зависимости от параметров σ и M при $m, n = 1, 2, 3$, полученные из точного трансцендентного урав-

* Если с самого начала рассматривать граничную задачу с условием Дирихле на пластинах, то аналогичные рассуждения приведут к решению

$$u(\xi, \zeta) = w(\xi, \zeta) = \sum_m W_m(\xi, \zeta) e^{-i2k\ell\zeta},$$

где $w(\xi, \zeta)$ — собственная функция задачи о падении плоской волны на систему идеально проводящих металлических полос, обладающая свойством $W_m(\xi, -\zeta) = W_m(\xi, \zeta)$.

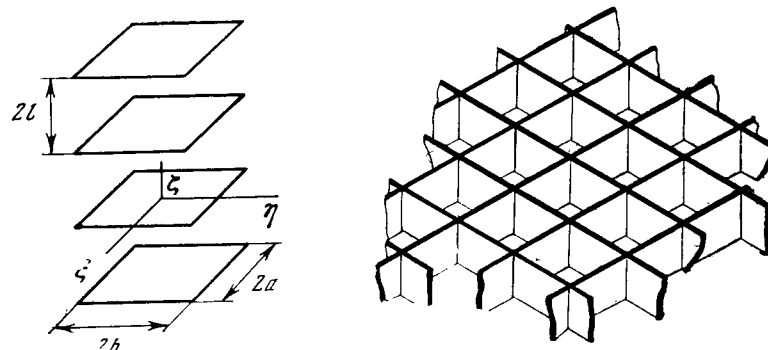


Рис. 65. Система связанных открытых резонаторов с плоскими прямоугольными зеркалами

Рис. 66. Двумерная «сотовая» структура из открытых резонаторов с плоскими зеркалами

нения. Сравнение этих данных с расчетом по приближенным формулам (7.1.2) показало, что для $m, n = 1$ результаты совпадают с графической точностью. Для $m, n \neq 1$ различие заметно лишь при умеренных значениях $M \in (5 \div 10)$; при больших M различие постепенно исчезает.

Таким образом, в рамках дифракционной теории диафрагменная линия является недисперсной для собственных волн. Дифракционные потери на одну итерацию определяются величиной p'' по известной формуле

$$\Lambda = 1 - \exp(-4\pi p'') \simeq 4\pi(p_a'' + p_b''), \quad (7.2.10)$$

причем

$$p_j'' = \frac{\pi \tau^2}{2} \frac{\tilde{\beta}_j(M_j + \tilde{\beta}_j)}{[(M_j + \tilde{\beta}_j)^2 + \tilde{\beta}_j^2]^2}; \quad \tau = \begin{cases} m & j = a; \\ n & j = b. \end{cases} \quad (7.2.11)$$

Λ — относительное уменьшение интенсивности волны. Набег фазы волны на время пробега между соседними диафрагмами равен

$$\Delta = 2\pi(p_a' + p_b'), \quad (7.2.12)$$

где

$$p_j' = \frac{\pi \tau^2}{4} \frac{M_j(M_j + 2\tilde{\beta}_j)}{[(M_j + \tilde{\beta}_j)^2 + \tilde{\beta}_j^2]^2}. \quad (7.2.13)$$

3. Распространение полученных результатов на другие квазиоптические системы. Полученные для диафрагменной линии результаты допускают тривиальные обобщения на ряд систем, которые находят применение в технике миллиметровых и субмиллиметровых волн. Так, например, собственные функции стопы плос-

копараллельных открытых резонаторов с прямоугольными зеркалами (рис. 65), расположенными при $x \in (-a, a)$, $y \in (-b, b)$, $z = \pm 2lr$, $r = 0, 1, 2, \dots$ имеют вид

$$u(\xi, \eta, \zeta) = 2 \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \frac{\pi m \xi}{\tilde{M}_a} \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \frac{\pi n \eta}{\tilde{M}_b} \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \pi q \zeta, \quad \begin{array}{l} m, n, q = 1, 3, 5, \dots \\ m, n, q = 2, 4, 6, \dots \end{array} \quad (7.2.14)$$

При этом собственные частоты полученных колебаний находятся по формуле $kl = \pi(q/2 + p)$, где $p = p_a + p_b$.

Аналогичным образом выписывается выражение для тока на зеркалах двумерной ячеистой структуры, составленной из открытых резонаторов (рис. 66):

$$f(\xi, \eta, \zeta) = \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \frac{\pi m \xi}{a'} \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \frac{\pi n \eta}{b'} \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \frac{M_a \pi q}{\tilde{M}_a} \zeta \cdot \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \frac{M_b \pi r \zeta}{\tilde{M}_b}, \quad \begin{array}{l} m, n, q, r = 1, 3, 5, \dots \\ m, n, q, r = 2, 4, 6, \dots \end{array} \quad (7.2.15)$$

§ 7.3. Теория диафрагменной линии, образованной отверстиями в экранах конечной толщины

1. Прежде всего отметим одно важное обстоятельство, к которому приводит учет конечной толщины экрана. В диафрагменной линии с экранами конечной толщины [81] появляется новый (по сравнению со случаем $\sigma = 0$) класс решений. Он исчезает при $\sigma \rightarrow 0$. В § 7.1 и работе [74], где рассматривалась диафрагменная линия с экранами нулевой толщины, было показано, что эквивалентность системы лент (связанных открытых резонаторов) и диафрагменной линии имеет место для нечетного (по z) типа колебаний; класс четных функций выпадает из решения (при $\sigma = 0$), поскольку коэффициент отражения волноводной волны от открытого края структуры в этом случае равен нулю (см. [74, с. 489]). В случае экрана конечной толщины полное решение будет состоять из суммы четной и нечетной (по z) функций.

Действительно, пусть для определенности на металле экранов линии выполняются граничные условия Дирихле $E_y \equiv u = 0$ (рис. 67, а). Представим полное решение в виде суммы четной и нечетной (по z) функций: $u = u_{\text{чет}} + u_{\text{нечет}}$. Это эквивалентно выделению одного периода из периодической структуры рис. 67, а и требованию выполнения на плоскости, проходящей через середины экранов, либо условия Неймана ($u' = du/dz = 0$; рис. 67, б), либо условия Дирихле ($u = 0$; рис. 67, в). На рис. 67, б, в эти плоскости показаны пунктирной линией.

С точки зрения возбуждения резонансной структуры случай рис. 67, б соответствует приходу к открытому краю волноводных волн с одинаковой (нулевой) фазой в соседних ячейках структуры

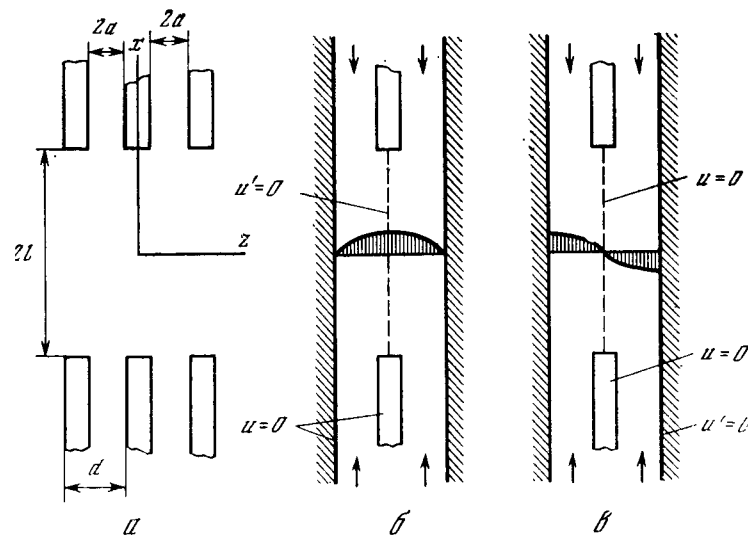


Рис. 67. Диафрагменная линия из щелей в экранах конечной толщины (а) и схемы для представления полного решения в виде суммы четной (б) и нечетной (в) функций

(будем обозначать величины, относящиеся к этому случаю, значком «о»), а случай рис. 67, в — когда волноводные волны в соседних ячейках структуры сдвинуты друг относительно друга на π (соответственно будем употреблять для этого случая индекс «л»). Из приведенных на рис. 67, б, в схем видно, что при $\sigma = 0$ в структуре б колебания будут существовать за счет скачка импеданса [164]; в структуре в (при $\sigma \rightarrow 0$) отражения не происходит, и в пределе (при $\sigma = 0$) нечетных колебаний нет. При конечной толщине экранов отражение в схеме б происходит за счет одновременного действия скачка импеданса и скачка размера сечения, а в схеме в — только за счет скачка размера сечения. Естественно ожидать, и в этом мы убедимся в дальнейшем, что отражение больше в схеме б. Подобная ситуация имела место при учете конечной толщины стенки в теории связанных открытых резонаторов с плоскими зеркалами [165]. Таким образом, учет конечной толщины экрана диафрагменной линии приводит не только к необходимости учета зависимости коэффициентов β от числа q , но и к появлению *нового класса решений*.

2. Искомое поле должно удовлетворять двумерному уравнению Гельмгольца $(\Delta + k^2) E_y(x, z) = 0$, граничному условию (4.1.7) при $x = l$ и условию Дирихле (нечетные волны) или Неймана (четные волны) на плоскости симметрии структуры $x = 0$, $y, z \in (-\infty, \infty)$. Представляя поле в линии в виде $E_y \sim$

$$\sim \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ \sin \end{array} \right\} \kappa_{qn} x \exp\{ih_q z\} \text{ и удовлетворяя граничному условию (4.1.7),}$$

придем к дисперсионным уравнениям относительно поперечного волнового числа $\kappa \equiv \kappa_{qn}$ диафрагменной линии

$$\left\{ \begin{array}{l} \text{tg} \\ \text{ctg} \end{array} \right\} \kappa = (\beta' + i\beta_E'') \frac{\kappa}{M}; \quad (7.3.1)$$

$$M = 2kl/\sqrt{\pi q} \gg 1, \quad 2ka = \pi q + 2\pi p,$$

$$|p| \ll 1, \quad s = \sqrt{4\pi p}.$$

Первая строка в уравнениях (7.2.1) относится к нечетным (по x) волнам, вторая — к четным.

Комплексные корни $\kappa = \kappa' + i\kappa''$ дисперсионных уравнений (7.2.1) в общем случае должны находиться численными способами. Комплексный характер поперечного волнового числа κ связан с тем, что часть энергии искомой волны проходит через «импедансную» границу $|x| = l$ и попадает в ячейки структуры. В данном случае можно получить приближенные аналитические выражения для корней κ . Действительно, поскольку мы интересуемся только волнами с относительно малыми потерями, то $\kappa''/\kappa' \ll 1$, а стало быть в качестве нулевого приближения для κ' можно взять собственные числа плоского волновода с идеальными границами (импедансные стенки $|x| = l$ должны хорошо отражать падающие на них плоские бриллюэновские волны).

Итак, пусть $\kappa_{(0)'} = n\pi$, $n = 1, 2, \dots$ и $\kappa_{(0)''} = 0$. Искомое первое приближение $\kappa_{(1)'}$ для корней представим в виде $\kappa_{(1)'} = n\pi + \delta$ ($\delta \ll 1$) и $\kappa_{(1)''} \equiv \kappa'' \ll 1$. Теперь можно, разложив в дисперсионных уравнениях (7.2.1) функции $\text{tg} \kappa$ и $\text{ctg} \kappa$ в ряды по малым параметрам κ'' и δ , разделить вещественную и мнимую части трансцендентных уравнений (7.3.1). Полученная таким образом система двух уравнений допускает явное решение (ср. § 7.1)

$$\begin{aligned} \kappa' &= n\pi [1 + (\beta'/M)(1 + \beta_E''^2/(M\beta' - \beta_E''^2))], \\ \kappa'' &= n\pi\beta_E''\beta'/[\beta'(M - \beta') - \beta_E''^2], \end{aligned} \quad (7.3.2)$$

(для нечетных волн — ср. замечание перед (7.1.3.)) и

$$\begin{aligned} \kappa' &= \pi(n - 1/2) [1 + (\beta'/M)(1 + \beta_E''^2/(M\beta' - \beta_E''^2))], \\ \kappa'' &= \pi(n - 1/2)\beta_E''\beta'/(\beta'(M - \beta') - \beta_E''^2) \end{aligned} \quad (7.3.3)$$

(для четных волн).

Полученные формулы (7.3.2) и (7.3.3) при $M \gg 1$ упрощаются:

$$\kappa' = n\pi(1 + \beta'/M), \quad \kappa'' = n\pi\beta_E''/M \quad (7.3.4)$$

(для нечетных волн);

$$\kappa' = \pi(n - 1/2)(1 + \beta'/M), \quad \kappa'' = \pi(n - 1/2)(\beta_E''/M) \quad (7.3.5)$$

(для четных волн).

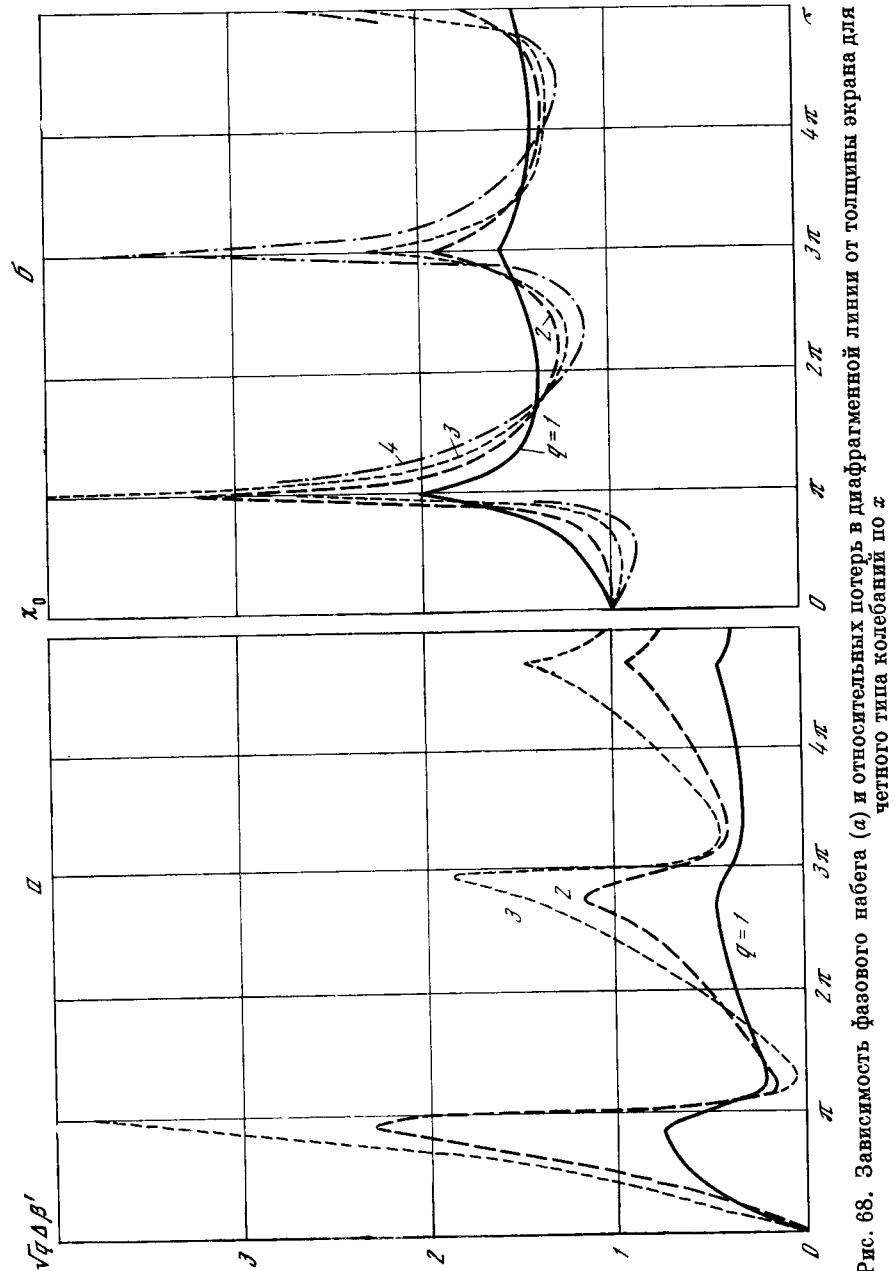


Рис. 68. Зависимость фазового набега (а) и относительных потерь в диафрагменной линии от толщины экрана для четного типа колебаний по x

Таким образом, применяя импедансные граничные условия (4.1.7) и условия малости мнимой части поперечного волнового числа $\kappa''/\kappa' \ll 1$, получаем простые формулы для κ' и κ'' . Теперь нетрудно написать выражения для продольной (естественно, тоже комплексной) постоянной распространения волн в диафрагменной линии $h = h' + ih''$. Представляя h так: $h = \sqrt{k^2 - (\kappa/2l)^2} = k\sqrt{1 - (\kappa/2kl)^2}$ и учитывая, что $|\kappa|/2kl \ll 1$, после разделения действительной и мнимой частей в формуле для h и сохраняя только члены первого порядка малости, получим

$$h'/k = 1 - 1/2(n\pi/2kl)^2(1 + 2\beta'/M), \quad h''/k = (n\pi/2kl)^2\beta_E''/M \quad (7.3.6)$$

(для нечетных волн);

$$h'/k = 1 - 1/2[(n - 1/2)\pi/2kl]^2(1 + 2\beta'/M), \quad h''/k = [\pi(n - 1/2)/2kl]^2\beta_E''/M \quad (7.3.7)$$

(для четных волн).

Таким образом, добавка к действительной части h' продольного волнового числа связана с коэффициентом β' (по существу, с действительной частью резонансного импеданса). Как видно из формул (7.3.6) и (7.3.7), зависимость $h' = h'(\beta')$ слабая (составляет величину $O(M^{-1})$, а обычно $M \gg 1$). Мнимая часть h'' продольного волнового числа прямо пропорциональна коэффициенту β'' . Более подробный анализ можно провести, если воспользоваться данными рис. 68 и 69, где представлены результаты некоторых численных расчетов.

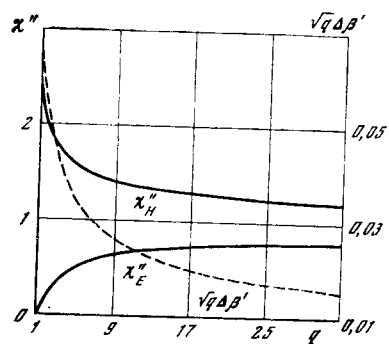


Рис. 69. Зависимость потерь и фазового набега для четного типа колебаний для диафрагменной линии с экранами нулевой толщины от расстояния между экранами

3. Влияние толщины экранов $\sigma = k(d - 2a)$ на фазовые характеристики двумерной диафрагменной линии можно оценить по данным рис. 68, а, где приведены значения добавки $\sqrt{q}\Delta\beta' = \sqrt{q}[\beta'(q, 0) - \beta'(q, \sigma)]$ к отношению действительных частей h' линии с «толстыми» экранами ($h'(\sigma, q)$) и бесконечно тонкими эк-

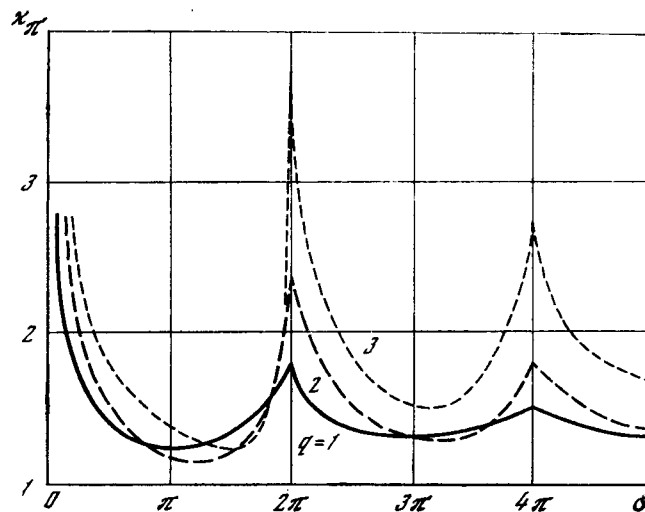


Рис. 70. Зависимость потерь для нечетного (по x) типа колебаний

ранами ($h'(\sigma, q)$): $h'(\sigma, q)/h'(0, q) = 1 + \pi^{3/2}(2kl)^{-3}[\sqrt{q}\Delta\beta']$. Характер кривых $\sqrt{q}\Delta\beta'$, естественно, напоминает ход соответствующих зависимостей $\beta = \beta(\sigma; q = \text{const})$ в [80] (см. § 4.2). На рис. 68 показана зависимость отношения мнимых частей продольного волнового числа: $\chi \equiv h''(q, \sigma)/h''(q, 0) = \beta_E''(q, \sigma)/\beta_E''(q, 0)$ как функция толщины экрана σ для $q = 1, 3, 5, 9$ *. Представленные кривые определяют поведение линии в широком диапазоне толщины стенок экранов. Это важно для анализа работы линии в коротковолновой части миллиметрового и, особенно, в субмиллиметровом диапазонах; при использовании линии в измерительных прецизионных установках и пр.

Зависимости дифракционных потерь и фазового набега в двумерной диафрагменной линии от числа q полуволн между апертурами (т. е. фактически от расстояния между экранами) показаны на рис. 70. Здесь $\chi_{E, H} \equiv h_{E, H}''(q)/h_{E, H}''(q \rightarrow \infty) = \beta_{E, H}''(q)/\beta_{E, H}''(q \rightarrow \infty)$ и толщина экранов $\sigma = 0$. Предельное значение (при $q \rightarrow \infty$) коэффициентов $\beta_{E, H}''(q \rightarrow \infty) = 0,483$, таким образом, $\lim_{q \rightarrow \infty} \chi_{E, H} = 1$. Здесь же пунктиром нанесена зависимость фазо-

вого множителя $\sqrt{q}\Delta\beta'(q)$ (так же при $\sigma = 0$). Существенной особенностью полученного результата является разная зависимость дифракционных потерь χ'' для волн разной поляризации при малых значениях q (экраны расположены близко друг от друга). Этим обстоятельством, по-видимому, можно объяснить заметное расхождение расчетных и экспериментальных результатов в труб-

* Нормировка отношений χ_0 и χ_π проведена к значениям $\beta''(q, 0)$.

чатой диафрагменной линии, отмеченные в работе [62], в которой не учитывались поляризационные эффекты и зависимость параметров линии от q и σ .

Построенная в этом параграфе приближенная аналитическая теория двумерной диафрагменной линии является поляризационной. Формально это проявляется в различии коэффициентов β'' для электрических и магнитных волн и, главное, в различной зависимости коэффициентов β'' от q .

4. Полученные результаты допускают обобщение (в пределах справедливости приближения параболического уравнения; см. [157]) на диафрагменную линию из прямоугольных апертур в безграничных экранах. При этом дифракционные потери аддитивны; так, если для двумерной линии с размером апертуры $2l$ они определяются малым параметром p (см. формулу (7.3.1), а для другой двумерной линии с апертурой $2L$ — через \hat{p} , то общие потери в диафрагменной линии из прямоугольных апертур размером $2l \times 2L$ определяются суммой $p + \hat{p}$. Собственные функции будут перемножаться (см. (7.2.14) и (7.2.15)).

§ 7.4. Нерегулярная (разноапертурная) диафрагменная линия

Рассмотрим плавно нерегулярную (в продольном направлении z) двумерную диафрагменную линию, т. е. линию с разными величинами апертур $l = l(z)$. Будем считать, что свойства линии вдоль z меняются слабо; по крайней мере так, что края N -й диафрагмы остаются в зоне эффективной диффузии поля при дифракции его на $(N - 1)$ -й диафрагме. Пусть на поверхности, проходящей через края диафрагм, выполняются граничные условия (4.1.7). Тогда для решения задачи можно воспользоваться методом поперечных сечений [118, 166].

Итак, пусть имеется нерегулярный участок $z \in (0, L)$ диафрагменной линии, включенной между двумя регулярными линиями (различных или, чаще, одинаковых поперечных размеров). Возможно, что вместо входной и (или) выходной линий имеется соответствующий рупор, линзовая линия и т. п. Для определенности зададим поле на входе ($z = 0$) нерегулярного участка в виде «собственной» волны (с единичной амплитудой) регулярной диафрагменной линии. Необходимо найти амплитуду волны того же номера на выходе ($z = L$) нерегулярного участка.

Система дифференциальных уравнений относительно амплитуд $P_i(z)$ волн на нерегулярном участке линии в соответствии с процедурой метода поперечных сечений имеет вид

$$\frac{dP_i}{dz} \sum_j = \sqrt{\frac{h_j(0)}{h_i(0)}} S_{ij} \sqrt{\frac{h_i(z)}{h_j(z)}} (1 - \delta_{ij}) P_j e^{i(\gamma_j - \gamma_i)}, \quad (7.4.1)$$

где $\gamma_j = \int_0^z h_j(z) dz$, а коэффициенты связи S_{ij} определяются

следующим образом:

$$S_{ij} = [(tg \alpha)/h_i (h_i - h_j)] [(1 - 1/\tilde{w}^2) E_z^i E_z^j + E_x^i E_x^j], \quad (7.4.2)$$

когда поле в линии имеет составляющие E_x, E_z, H_y , и

$$S_{ij} = [(tg \alpha)/h_i (h_i - h_j)] [(1 - \tilde{w}^2) H_z^i H_z^j + H_x^i H_x^j] \quad (7.4.3)$$

для поля с составляющими E_y, H_x, H_z ; α — угол наклона касательной к оси z ; $\alpha \ll 1$. Поля на границе связаны импедансными условиями (4.1.7), которые записаны в форме граничных условий Щукина — Леонтовича: $E_y = \tilde{w} H_z$, $E_z = -\tilde{w} H_y$, и \tilde{w} означает нормированное (к свободному пространству) значение импеданса границы.

Обычно используемое в теории плавно нерегулярных многоволновых волноводов первое приближение не позволяет определить изменение амплитуды основной волны при прохождении через нерегулярный участок. Поэтому необходимо получить формулу второго приближения, которая может быть найдена методом последовательных приближений.

Результат первого приближения метода поперечных сечений для прямых ($i > 0$) волн имеет следующий вид:

$$P_i(z) = \int_0^z \sqrt{\frac{h_j(0)}{h_i(0)}} S_{ij} \sqrt{\frac{h_i(z)}{h_j(z)}} \cdot 1 \cdot e^{i(\gamma_i - \gamma_j)} dz, \quad i > 0; \quad (7.4.4)$$

а для обратных волн

$$P_i(z) = \int_L^z \sqrt{\frac{h_j(L)}{h_i(L)}} S_{ij} \sqrt{\frac{h_i(z)}{h_j(z)}} \cdot 1 \cdot e^{i(\gamma_i - \gamma_j)} dz, \quad i < 0. \quad (7.4.5)$$

В формулах (7.4.4) и (7.4.5) множитель 1 в подынтегральных выражениях обозначает неизменную (в первом приближении) амплитуду основной волны в линии. Следующий шаг — нахождение второго приближения — в соответствии с методом последовательных приближений состоит в замене 1 в формулах (7.4.4) и (7.4.5) значениями $P_i(z)$ и последующем интегрировании полученных таким образом выражений по всей длине нерегулярного участка. Формула второго приближения имеет вид

$$P_j(L) = 1 + \int_0^L \sum_{i=1}^{\infty} \sqrt{\frac{h_i(0)}{h_j(0)}} S_{ji} \sqrt{\frac{h_j(z)}{h_i(z)}} P_i(z; i > 0) e^{-i(\gamma_i - \gamma_j)} dz + \int_L^0 \sum_{i=1}^{-\infty} \sqrt{\frac{h_i(L)}{h_j(L)}} S_{ji} \sqrt{\frac{h_j(z)}{h_i(z)}} P_i(z; i < 0) e^{-i(\gamma_i - \gamma_j)} dz. \quad (7.4.6)$$

Штрихи у знаков Σ означают, что $i \neq j$, т. е. члены с $i = j$ опущены. Полученные формулы позволяют найти амплитуду основной волны для заданного закона изменения $l = l(z)$.

Построенная теория и полученные формулы представляют непосредственный интерес для диафрагменной линии (и ряда других открытых периодических резонансных структур аналогичного типа), а также для задач по исследованию собственного излучения плазменных потоков, направляемых кольцевыми секционированными магнитными системами, и в ускорителях заряженных частиц. При изучении собственного излучения потока важно знать оценку степени влияния магнитной (периодической) системы в широком частотном диапазоне, во-первых, на регистрируемую величину и, во-вторых, собственно на сам поток, поскольку в резонансных режимах ($2ka = \pi q + 2\pi p$) такое воздействие на поток может оказаться существенным. Аналогичные задачи возникают и в электронике СВЧ, где они имеют двойное толкование: как паразитное внеполосное излучение и как полезное явление, создавая, например, возможность строить умножители частоты, работающие на гармониках. Однако, обсуждение этих вопросов выходит за рамки настоящей книги.

Глава 8

ОТКРЫТЫЕ КОАКСИАЛЬНЫЕ РЕЗОНАНСНЫЕ СТРУКТУРЫ

В начале главы обсуждаются свойства волн высших типов коаксиального волновода. В дальнейшем, при проведении численных расчетов, полученные результаты используются в качестве нулевого приближения к построению теории открытых дисковых осесимметричных структур. Исследованы в основном добротные колебания в кольцевом открытом резонаторе, диафрагменной линии и т. п. Проведено рассмотрение волн в винтообразных структурах, а также режима колебаний шепчущей галереи в резонансных дисковых системах.

§ 8.1. Волноводные волны коаксиальной линии

1. Коаксиальный волновод является одной из наиболее широко и давно применяемых линий передачи. Поперечное сечение коаксиальной линии — двухсвязная область, и вдоль линии возможно распространение неоднородной плоской (поперечной) электромагнитной волны, так называемой *ТЕМ*-волны. В режиме *ТЕМ*-волны по линии с двухсвязным поперечным сечением, и в частности коаксиальному волноводу, электромагнитная волна распространяется независимо от соотношения между поперечными размерами линии и длиной волны λ . Принято говорить, что режим *ТЕМ*-волны не обладает дисперсией (если не учитывать зависимости диэлектрической проницаемости среды, заполняющей коаксиал, от частоты). Свойства основной *ТЕМ*-волны в коаксиале изучены достаточно подробно [10, 168]. Значительно меньшее внимание уделено высшим типам волн, в особенности быстрым волнам, фазовая скорость которых превосходит скорость света. Традиционное рассмотрение заканчивается обычно выписыванием характеристических уравнений для собственных чисел электрических и магнитных волн и приведением картины распределения полей волн низших типов.

В последнее время в связи с задачами освоения диапазона миллиметровых и субмиллиметровых волн вновь возник интерес к коаксиальным волноводам. Это связано с различными техническими применениями коаксиальных линий или конечных структур на их основе: в антенно-волноводной технике [49, 169], электронике СВЧ [14], измерительной технике (например, при измерениях очень высоких значений диэлектрической проницаемости [170, 171]) и ряде смежных задач [215].

Знание собственных функций и собственных чисел коаксиального волновода необходимо при использовании, например, метода поперечных сечений [118, 166], или метода градиентного спуска [172, 173] для анализа коаксиальных структур с медленно меняющимися вдоль продольной оси параметрами.

Спектр критических частот коаксиального волновода, по существу, совпадает со спектром собственных частот открытого коаксиального цилиндрического резонатора. Следует, впрочем, иметь в виду, что свойства такого резонатора существенно зависят от величины $k(b - a) = kd$ (b и a — радиусы внешнего и внутреннего проводников коаксиала соответственно). Для $kd \gg 1$ имеет место поляризационное вырождение электрических и магнитных волн. При $kd/\pi = 1, 2, \dots$ (когда между обкладками коаксиала укладывается целое, но малое число полуволн) поляризационное вырождение снимается. Это проявляется, в частности, и в заметном различии между собственными добротностями колебаний E - и H -типа.

Определенный теоретический и практический интерес представляют коаксиальные структуры типа волн шепчущей галереи в круглых волноводах или цилиндрических открытых резонаторах. Большое количество примеров применения коаксиальных структур в физике и технике содержится в книге [174].

В настоящем параграфе обсуждаются некоторые свойства быстрых волноводных волн коаксиального волновода с идеальными граничными условиями * [176].

2. Краевая задача. Электрические и магнитные волны. Характеристические уравнения. Пусть коаксиальный волновод образован двумя идеально проводящими круговыми цилиндрами с радиусами b и a , такими, что $\Delta = a/b < 1$. Электромагнитное поле $u(r, \varphi)$ при $r \in (a, b)$, $\varphi \in [0, 2\pi]$, $z \in (-\infty, \infty)$ удовлетворяет однородному уравнению Гельмгольца ($\Delta + k^2$) $u(r, \varphi) = 0$ и идеальным граничным условиям первого ($u|_s = 0$) и второго ($\partial u / \partial r|_s = 0$) рода на цилиндрических поверхностях $r = a$ и $r = b$. При анализе естественно использовать цилиндрическую систему координат r, φ, z , в которой уравнение Гельмгольца записывается так:

$$\frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial r} \left(r \frac{\partial u}{\partial r} \right) + \frac{1}{r^2} \frac{\partial^2 u}{\partial \varphi^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2} + k^2 u(r, \varphi, z) = 0. \quad (8.1.1)$$

Разделение переменных в уравнении (8.1.1) приводит нас к уравнению Бесселя, решение которого можно представить в виде ряда $u(r, \varphi, z) = \sum_{m,s} u_{ms}(r, \varphi) e^{ih_m z}$, в котором собственные (поперечные) функции $u_{ms}(r, \varphi)$, удовлетворяющие условию

* В последнее время значительно возрос интерес к коаксиальным волноводам с импедансными граничными условиями на проводниках (см., например, [210—214]).

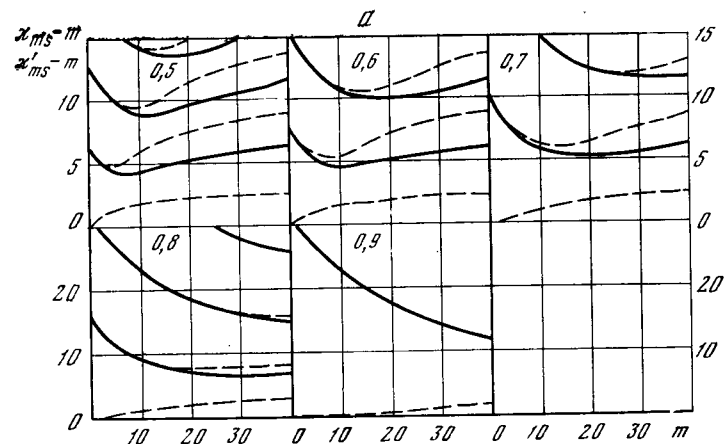


Рис. 71. Зависимость поперечных собственных чисел электрических (сплошные линии) и магнитных (пунктирные) волн коаксиального волновода от азимутального индекса m

Числа на рисунках означают отношение радиусов внутреннего и внешнего проводников коаксиала $\Delta = a/b < 1$

периодичности $u_{ms}(r, \varphi) = u_{ms}(r, \varphi + 2\pi q)$, $q = 1, 2, \dots$ суть

$$u_{ms}(r, \varphi) = \left[J_m(gr) - \frac{J_m(ga)}{N_m(ga)} N_m(gr) \right] \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (m\varphi) \quad (8.1.2)$$

для граничного условия первого рода и

$$u_{ms}(r, \varphi) = \left[J_m(gr) - \frac{J_m'(ga)}{N_m'(ga)} N_m(gr) \right] \begin{cases} \cos \\ \sin \end{cases} (m\varphi) \quad (8.1.3)$$

для граничного условия второго рода.

Подчиняя (8.1.2) граничному условию первого рода $u(r, \varphi) = 0$ при $r = a$ и $r = b$, приходим к характеристическому уравнению

$$J_m(\kappa) N_m(\kappa\Delta) - J_m(\kappa\Delta) N_m(\kappa) = 0, \quad (8.1.4)$$

корни κ_{ms} ($m = 0, 1, 2, \dots$, $s = 1, 2, \dots$) которого являются собственными числами системы электрических волн ($u \equiv E_z$, $H_z \equiv 0$) коаксиального волновода.

Аналогично, удовлетворив в (8.1.3) граничному условию второго рода $\partial u / \partial r = 0$ при $r = a$ и $r = b$, получим характеристическое уравнение

$$J_m'(\kappa) N_m'(\kappa\Delta) - J_m'(\kappa\Delta) N_m'(\kappa) = 0, \quad (8.1.5)$$

корни $\kappa_{ms'}$ ($m = 0, 1, 2, \dots$, $s = 1, 2, 3, \dots$) которого являются собственными числами системы магнитных волн ($u \equiv H_z$, $E_z \equiv 0$).

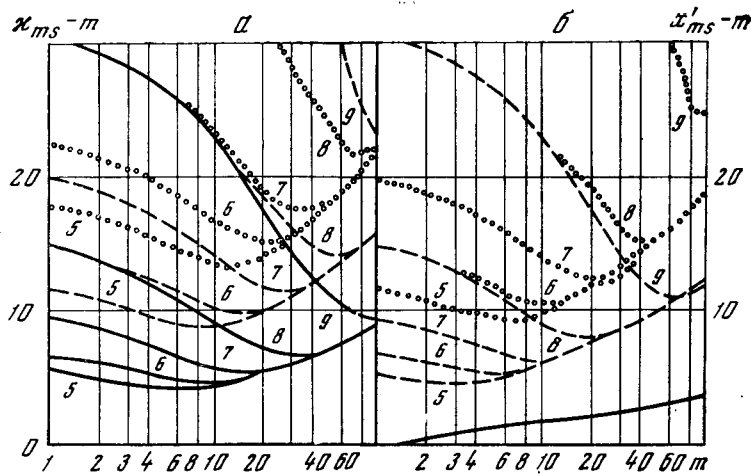


Рис. 72. Зависимость поперечных собственных чисел электрических и магнитных волн от азимутального индекса m при различных значениях s ($s = 1$ (сплошные кривые); $s = 2$ (пунктирные); $s = 3$ (пунктирные светлые)). Цифры у кривых обозначают дробную часть отношения Δ

Продольное волновое число $(h_{ms}b)^2 = (kb)^2 - \kappa_{ms}^2$ или $(h_{ms}')^2 = (kb)^2 - \kappa_{ms}'^2$.

Система собственных функций (8.1.2) и (8.1.3) электрических и магнитных волн является полной. При $\Delta = 0$ системы электрических и магнитных волн переходят в соответствующие системы собственных волн круглого волновода.

Составляющие полей электрических волн ($E_r, E_\varphi, H_r, H_\varphi$) могут быть найдены с помощью операций дифференцирования продольной компоненты E_z из (8.1.2) по известным правилам. Таким же образом по H_z из (8.1.3) находятся остальные компоненты ($E_r, E_\varphi, H_r, H_\varphi$) магнитных волн.

3. Численное исследование характеристических уравнений (8.1.4) и (8.1.5). В настоящем пункте проводится численное изучение поведения корней характеристических уравнений (8.1.4) и (8.1.5) для электрических и магнитных волн коаксиального волновода. Получение аналитических формул для собственных значений в общем случае невозможно. Укажем некоторые формулы для приближенного определения корней в частных случаях. По-видимому, наиболее полными являются формулы Макмагона [175]:

$$\kappa_{ms} \approx s\pi/(1-\Delta) + (1/8\pi)(4m^2-1)(1-\Delta)/s\Delta + O((1/s\pi) \times (1-\Delta)/\Delta^2)^3, \quad (8.1.6)$$

$$\kappa'_{ms} \approx s\pi/(1-\Delta) + (1/8\pi)(4m^2+3)(1-\Delta)/s\Delta + O((1/s\pi) \times (1-\Delta)/\Delta^2)^3 \quad (8.1.7)$$

для высоких корней $s \gg m^2$. Они тем более точны, чем больше s .

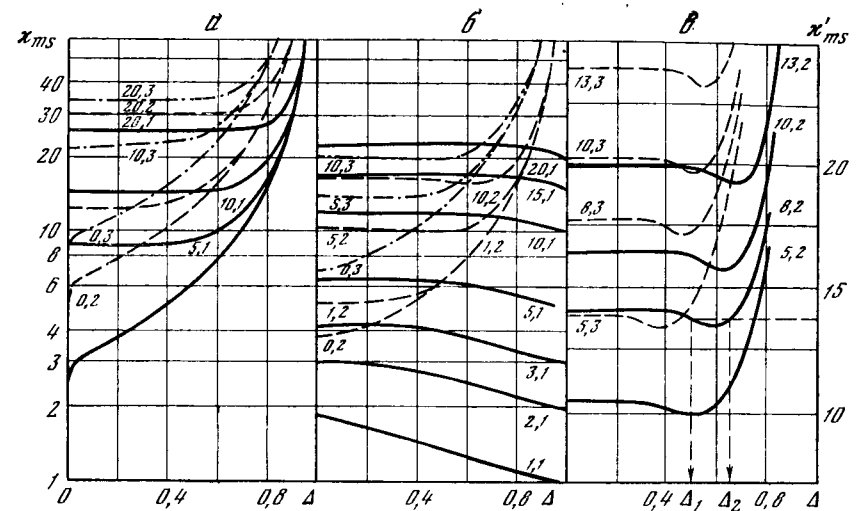


Рис. 73. Зависимость поперечных собственных чисел электрических (а) и магнитных (б, в) волн коаксиального волновода от отношения Δ . Цифры у кривых обозначают индексы колебаний m и s

Первый член справа в (8.1.6) и (8.1.7) определяет значение корней при $ka\Delta \gg 1$ и $kb \gg 1$.

Результаты численных расчетов на ЭВМ корней характеристических уравнений (8.1.4) и (8.1.5) показаны на рис. 71—74. Данные рис. 71 иллюстрируют свойство разряжения спектра собственных частот коаксиального волновода при увеличении диаметра внутреннего проводника ($\Delta \rightarrow 1$). (Обращаем внимание, что масштабы для верхней и нижней части рисунка разные.)

Зависимость значений корней κ_{ms} и κ'_{ms} от азимутального индекса наиболее ярко проявляется при малых m и Δ . При увеличении m до некоторых больших значений кривые идут примерно параллельно, причем параллельность кривых наступает тем раньше, чем меньше Δ . На рис. 71 ясно видна картина вырождения волны типа H_{ms} и $E_{m,s-1}$ при малых Δ . По мере увеличения m вырождение $H_{ms} \Rightarrow E_{m,s-1}$ снимается. На рис. 72 показаны зависимости корней κ_{ms} и κ'_{ms} для различных радиальных индексов s .

При больших значениях индекса m наступает вырождение другого вида: собственные числа зависят только от s и m и не зависят от Δ . Отмеченный эффект для малых s наступает при меньших значениях m . На рис. 73 показаны зависимости поперечных чисел κ_{ms} и κ'_{ms} от отношения Δ при постоянных m и s .

Характерной особенностью несимметричных ($m \neq 0$) магнитных волн H_{ms} , $s \geq 2$ являются «провалы» в зависимостях $\kappa'_{ms} = \kappa'_{ms}(\Delta)$. Для наглядности кривые представлены на рис. 73, в в линейном масштабе по оси ординат. При этом одному и тому же поперечному числу κ'_{ms} соответствуют различные отношения ра-

диусов Δ . Так, например, на рис. 73, *в* для волны H_{52} поперечному числу $\kappa_{52}' = 13,75$ соответствуют $\Delta_1 = 0,5$ и $\Delta_2 = 0,65$. Ранее аналогичный эффект был отмечен в [177, 178] для симметричных магнитных волн, когда импеданс внутреннего проводника коаксиала носит индуктивный характер*. Наличие такого своеобразного вырождения означает, что, если, к примеру, линия состоит из цилиндра с отношением радиусов равным Δ_1 , то можно в любом месте тракта ввести дополнительную коаксиальную трубу так, что $\Delta = \Delta_2$ и это не вызовет нарушения граничного условия для падающей волны. Стало быть, введение дополнительного кольцевого экрана с $\Delta = \Delta_2$ не вызовет возмущения падающей волны, а все остальные волны (имеющие φ и z -е компоненты электрического поля) будут испытывать отражение**. Это обстоятельство может оказаться полезным при конструировании фильтров типов волн, резонаторов и других устройств СВЧ-тракта***.

Введение внутреннего проводника по-разному влияет на электрические и магнитные волны. Например, внутренний проводник мало влияет на зависимость $\kappa_{m1}' = \kappa_{m1}'(\Delta)$. При $\Delta = 0$ числа κ_{m1}' принимают значения, соответствующие собственным числам круглого волновода. С ростом Δ величины κ_{m1}' слабо убывают.

Из рис. 73 хорошо видно, что внутренний стержень коаксиала более всего «возмущает» симметричные электрические волны E_{0s} (при малых Δ). На несимметричных волнах E_{ms} ($m \gg 1, s \sim 1$) его влияние сказывается в меньшей степени. Причем, чем больше m , тем больше область $\Delta \in (0, \Delta)$, в которой это влияние оказывается несущественным. Последнее обстоятельство связано с характером распределения поля E -волны при $m \gg 1, m \gg s$. В этом случае поле оказывается «прижатым» к поверхности внешнего проводника и описывается в терминах волн шепчущей галереи.

* Проведенные в последнее время Л. П. Вилковой, Е. И. Нефедовым и И. М. Российским расчеты коаксиального биконического рупора (в связи с построением теории открытого коаксиального перестраиваемого резонатора [78]) показали, что в этой системе имеет место вырождение собственных волн.

** Если дополнительно введенная структура полубесконечна, то электродинамическая задача допускает строгое решение.

*** Проведенные расчеты (по методу Винера — Хопфа — Фока) для волн H_{0s} в коаксиале с импедансным внутренним проводником при $Z_{TE} = 0,5, kb = 12, \Delta_1 = 0,1$ и $\Delta_2 = 0,25$ показали, что коэффициент отражения падающей волны H_{01} , как и следовало ожидать, равен нулю, а коэффициент отражения при падении волны H_{02} — примерно 0,01. Таким образом, однократное отражение мал. Однако, сделав несколько границ, можно обеспечить по волнам H_{02}, H_{03} и т. д. необходимое отражение. Сформированная таким способом обратная волна с распределенным отражением может оказаться полезной при разработке генераторов СВЧ на обратной волне.

В более многоволновых (чем рассмотренная при $kb = 12$ коаксиальная) структурах можно обеспечить режим полного отражения от одиночной неоднородности, если обеспечить условие «открытого резонатора», т. е. близость частоты падающей волны к критической.

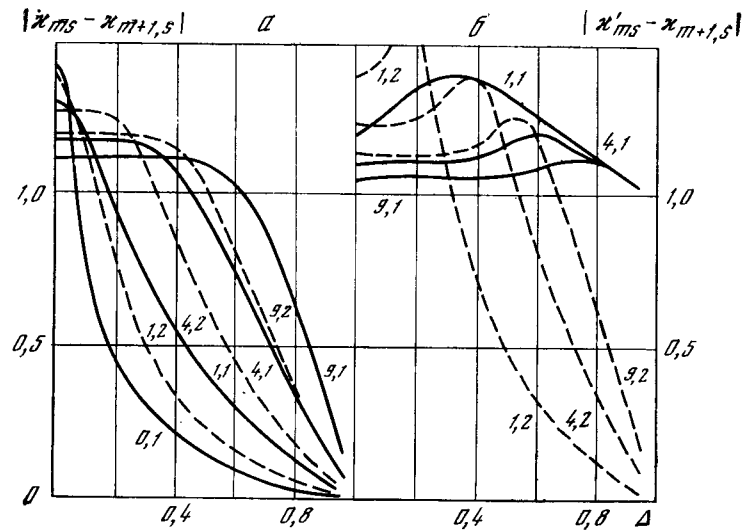


Рис. 74. Зависимость разностей поперечных собственных чисел электрических (а) и магнитных (б) волн коаксиального волновода от отношения радиусов Δ при одинаковых радиальных s и разных азимутальных ($m, m + 1$) индексах. Цифры у кривых обозначают величины m, s .

До тех пор пока радиус внутреннего проводника a меньше радиуса a_m границы зоны волны шепчущей галереи (каустики), внутренний стержень на поле фактически не влияет.

Аналогичная картина бегущих вдоль границы $r = b$ волн имеет место и для магнитных волн $H_{ms}, m \gg 1, s \geq 2$. При $r \in (a_m, b)$ электромагнитное поле имеет колебательный характер. Радиус внутренней каустики $a_m = mb/\kappa_{ms}$ и $a_m' = mb/\kappa_{ms}'$ определяется индексами m, s . Поле тем более прижато к границе $r = b$, чем больше азимутальный индекс m и чем меньше радиальный индекс s .

Поле волны шепчущей галереи удобно выражать через функции Эйри [1], для вычисления которых имеются подробные таблицы [179]. Численный счет для $m \gg 1$ и $m \sim s$ тоже удобнее производить, заменив в уравнениях (8.1.4), (8.1.5) цилиндрические функции и их производные соответствующими выражениями через функции Эйри. При вычислениях удерживались два члена в разложении цилиндрических функций по функциям Эйри.

С увеличением Δ уменьшается разность между собственными числами с одинаковым радиальным индексом s и различными азимутальными индексами m . Так, что $\lim_{\Delta \rightarrow 1} |\kappa_{ms} - \kappa_{ps}| = 0, m, p = 0, 1, 2, \dots, s = 1, 2, \dots$ и $\lim_{\Delta \rightarrow 1} |\kappa_{ms}' - \kappa_{ps}'| = 0, m, p = 1, 2, 3, \dots, s = 2, 3, \dots$. Исключение составляют магнитные волны H_{m1} , у которых предельное значение не зависит от m примерно от $\Delta \sim 0,85$ и составляет величину порядка 1 (рис. 74).

Проведенный численный анализ высших типов коаксиального волновода с идеальными граничными условиями выявил поведение электрических и магнитных волн в зависимости от геометрии волновода, азимутального и радиального индексов волны.

Рассмотренные типы волн обладают поляризационным безразличием в силу симметрии системы по азимутальному направлению. В ряде случаев это обстоятельство неудобно при технической реализации устройства на основе коаксиального волновода с круговыми цилиндрами. Выходом может стать использование коаксиальной структуры, образованной эллиптическими цилиндрами.

§ 8.2. Кольцевой открытый резонатор

1. Электромагнитное поле. Граничные условия. Характеристическое уравнение. Пусть кольцевой открытый резонатор (рис. 75, *в*) образован двумя одинаковыми идеально проводящими кольцами, расположенными друг против друга на расстоянии $2l$. Кольца имеют нулевую толщину, внутренний радиус a и внешний b . Для анализа добротных колебаний воспользуемся цилиндрической системой координат r, φ, z , ось z которой совместим с осью симметрии кольцевого резонатора.

Основу настоящего и последующих в данной главе выводов составляет следующее предположение. Допустим, что электромагнитное поле в дисковом резонаторе (рис. 75, *а*) создается некоторым осевым линейным током. Тогда от оси к краю структуры будет распространяться цилиндрическая волна. Предположим, что отражение этой цилиндрической волны от края в каждой его точке происходит с тем же коэффициентом отражения, что и в случае, когда на прямолинейный конец плоского волновода набегают изнутри плоская волна. Строго говоря, мы будем пользоваться первым членом разложения поля в ряд по отношению длины волны к радиусу экрана (см., например, [180—182]).

Составляющие электромагнитного поля в резонаторе запишем так:

$$\begin{aligned}
 E_r(r, \varphi, z) &= - \left[\frac{2m}{wr} Z_D(wr) + \frac{2h}{k} Z_C'(wr) \right] \cos(m\varphi) \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} \frac{\pi q}{2l} z, \\
 E_\varphi(r, \varphi, z) &= \left[2Z_D'(wr) + \frac{h}{k} \frac{2m}{rw} Z_C(wr) \right] \sin(m\varphi) \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} \frac{\pi q}{2l} z, \\
 E_z(r, \varphi, z) &= \frac{2w}{k} Z_C(wr) \cos(m\varphi) \begin{cases} \cos \\ -\sin \end{cases} \frac{\pi q}{2l} z, \\
 H_\varphi(r, \varphi, z) &= i \left[\frac{h}{k} \frac{2m}{wr} Z_D(wr) + 2Z_C'(wr) \right] \cos(m\varphi) \begin{cases} \cos \\ -\sin \end{cases} \frac{\pi q}{2l} z, \\
 H_r(r, \varphi, z) &= i \left[\frac{2h}{k} Z_D'(wr) + \frac{2m}{wr} Z_C(wr) \right] \sin(m\varphi) \begin{cases} \cos \\ -\sin \end{cases} \frac{\pi q}{2l} z, \\
 H_z(r, \varphi, z) &= i \frac{2w}{k} Z_D(wr) \sin(m\varphi) \begin{cases} \sin \\ \cos \end{cases} \frac{\pi q}{2l} z.
 \end{aligned}
 \tag{8.2.1}$$

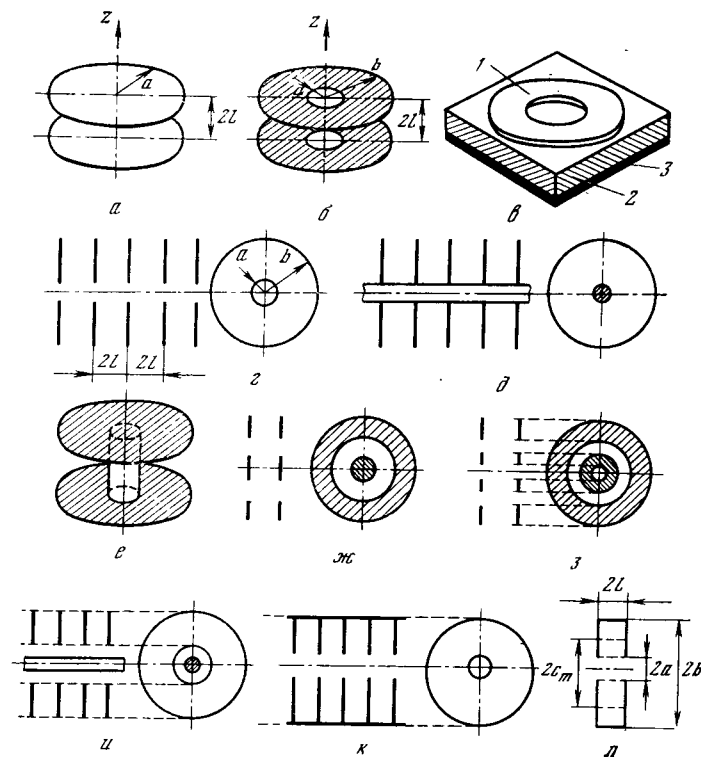


Рис. 75. Осесимметричные открытые резонансные системы:

а — дисковый резонатор; *б* — кольцевой резонатор; *в* — кольцевой резонатор на несимметричной полосковой линии (*1* — металлическое кольцо, *2* — диэлектрическая подложка, *3* — металлический проводящий экран); *г* — система кольцевых дифракционно связанных открытых резонаторов; *д* — металлический стержень с ребрами; *е* — радиальный открытый резонатор; *ж* — дифракционно связанные дисковый и кольцевой открытые резонаторы; *з* — два дифракционно связанных кольцевых открытых резонатора; *и* — модификация структуры *а*; *а* — открытый кольцевой резонатор — одна ячейка из структуры *ж*

Первая строка в написанных выражениях относится к $q = 2, 4, \dots$, вторая — к $q = 1, 3, \dots$. В формулах (8.2.1) использованы следующие обозначения:

$$Z_R(wr) = RJ_m(wr) + R_1 N_m(wr), \quad Z_R'(wr) = RJ_m'(wr) + R_1 N_m'(wr),$$

а R означает C или D ; R_1 — соответственно C_1 или D_1 ; $w = k \sqrt{1 - (\pi q / 2kl)^2}$ — радиальное волновое число; h — поперечная постоянная распространения волны в двумерном (без осевой симметрии) аналоге рассматриваемой структуры. Выражения (8.2.1) удовлетворяют идеальным граничным условиям при $|z| =$

$= l, r \in (a, b)$ и условию периодичности решения по азимутальной координате φ .

Перепишем формулы (8.2.1), полагая $h/k \sim 1$, что равносильно отбрасыванию составляющих поля, пропорциональных $(w/k)^2$ (по сравнению с w/k) и воспользуемся следующими функциональными соотношениями из теории бesselевых функций: $2Z_m'(\kappa) = Z_{m-1}(\kappa) - Z_{m+1}(\kappa)$ и $(2m/\kappa) Z_m(\kappa) = Z_{m-1}(\kappa) + Z_{m+1}(\kappa)$. Результат таков:

$$\begin{aligned} E_r &= -\Phi_H(wr) \cos(m\varphi) \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \\ H_r &= i\Phi_E(wr) \sin(m\varphi) \left\{ \frac{\cos}{-\sin} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \\ E_\varphi &= \Phi_E(wr) \sin(m\varphi) \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \\ H_\varphi &= i\Phi_H(wr) \cos(m\varphi) \left\{ \frac{\cos}{-\sin} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \\ E_z &= \frac{2w}{k} Z_C(wr) \cos(m\varphi) \left\{ \frac{\cos}{-\sin} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \\ H_z &= i \frac{2w}{k} Z_D(wr) \sin(m\varphi) \left\{ \frac{\sin}{\cos} \right\} \frac{\pi q}{2l} z. \end{aligned} \quad (8.2.2)$$

Здесь

$$\begin{aligned} \left\{ \begin{array}{l} \Phi_H(\kappa) \\ \Phi_E(\kappa) \end{array} \right\} &= [(C + D) J_{m-1}(\kappa) \mp (C - D) J_{m+1}(\kappa)] + \\ &+ [(C_1 + D_1) N_{m-1}(\kappa) \mp (C_1 - D_1) N_{m+1}(\kappa)]. \end{aligned} \quad (8.2.3)$$

Пусть введенные таким образом радиальные функции $\Phi_{E,H}(wr)$ удовлетворяют импедансным граничным условиям вида

$$\begin{aligned} \Phi_E &= \frac{y_E}{w} \frac{d\Phi_E}{dr} & \Phi_E &= -\frac{y_E}{w} \frac{d\Phi_E}{dr} \\ &\text{при } r = a & &\text{при } r = b \\ \Phi_H &= \frac{y_H}{w} \frac{d\Phi_H}{dr} & \Phi_H &= -\frac{y_H}{w} \frac{d\Phi_H}{dr}, \end{aligned} \quad (8.2.4)$$

в которых

$$2y_{E,H} = (\beta' + i\beta''_{E,H})s, \quad s = w\sqrt{2l/k} = \sqrt{4\pi r}. \quad (8.2.5)$$

Собственные (комплексные) частоты колебаний кольцевого резонатора определяются следующим образом:

$$2kl = \pi q + 2\pi r. \quad (8.2.6)$$

Удовлетворяя для функций $\Phi_{E,H}(wr)$ из (8.2.3) граничным условиям (4.1.7), приходим к дисперсионному (характеристическому) уравнению

$$\det \| d(\kappa) \| = 0, \quad (8.2.7)$$

где $\det \| d(\kappa) \|$ — определитель четвертого порядка относительно волнового числа κ ($\kappa = wb$, $\tilde{\kappa} = \kappa\delta$, $\delta = a/b$), элементы которого d_{ij} ($i, j = 1, 2, 3, 4$) суть

$$\begin{aligned} \begin{Bmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} J(\tilde{\kappa}) - y_E \begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} J'(\tilde{\kappa}), \\ \begin{Bmatrix} d_{13} \\ d_{14} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} N(\tilde{\kappa}) - y_E \begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} N'(\tilde{\kappa}), \\ \begin{Bmatrix} d_{21} \\ d_{22} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{Bmatrix} J(\tilde{\kappa}) - y_H \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{Bmatrix} J'(\tilde{\kappa}), \\ \begin{Bmatrix} d_{23} \\ d_{24} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{Bmatrix} N(\tilde{\kappa}) - y_H \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{Bmatrix} N'(\tilde{\kappa}), \\ \begin{Bmatrix} d_{31} \\ d_{32} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} J(\kappa) + y_E \begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} J'(\tilde{\kappa}), \\ \begin{Bmatrix} d_{33} \\ d_{34} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} N(\kappa) + y_E \begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} N'(\kappa), \\ \begin{Bmatrix} d_{41} \\ d_{42} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{Bmatrix} J(\kappa) + y_H \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{Bmatrix} J'(\kappa), \\ \begin{Bmatrix} d_{43} \\ d_{44} \end{Bmatrix} &= \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{Bmatrix} N(\kappa) + y_H \begin{Bmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{Bmatrix} N'(\kappa). \end{aligned} \quad (8.2.8)$$

Коэффициенты d_{ij} в каждой строке $\det \| d(\kappa) \|$ соответствуют такому порядку амплитуд: C, D, C_1, D_1 . В (8.2.8) использованы следующие обозначения:

$$\begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} g(\zeta) = g_{m-1}(\zeta) \pm g_{m+1}(\zeta), \quad \begin{Bmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{Bmatrix} g'(\zeta) = g'_{m-1}(\zeta) \pm g'_{m+1}(\zeta), \quad (8.2.9)$$

где $g_m(\zeta)$ обозначает $J_m(\zeta)$ или $N_m(\zeta)$, а $g_m'(\zeta)$ — соответственно $J_m'(\zeta)$ или $N_m'(\zeta)$.

Таким образом, задача о собственных колебаниях кольцевого открытого резонатора сведена к отысканию комплексных корней κ_{mn} трансцендентного уравнения (8.2.7).

2. Приближенное исследование характеристического уравнения (8.2.7) позволяет определить комплексные собственные числа $\kappa_{mn} = \kappa_{mn}' + i\kappa_{mn}''$ как функции параметров резонатора и длины волны. В качестве нулевого приближения к решению уравнения (8.2.7) удобно взять следующее выражение:

$$\kappa_{mn} = 2\kappa_{mn}^{\circ} (1 - (\beta' + i\beta'')/M); \quad 2\beta'' = \beta''_E + \beta''_H, \quad (8.2.10)$$

подобное приближенной формуле для дискового открытого резонатора. Здесь $M = d\sqrt{2k/l} = 2kd/\sqrt{\pi q}$, $q = 1, 2, \dots$, $d =$

$= b - a$, а κ_{mn}^{\odot} суть корни характеристических уравнений коаксиального волновода с идеальными граничными условиями

$$J_m(\kappa) N_m(\kappa\delta) - J_m(\kappa\delta) N_m(\kappa) = 0, \quad (8.2.11)$$

$$J_m'(\kappa) N_m'(\kappa\delta) - J_m'(\kappa\delta) N_m'(\kappa) = 0. \quad (8.2.12)$$

Поведение корней уравнений (8.2.11) и (8.2.12) подробно рассмотрено в работах [176—178]. Некоторые данные из [176—178] приведены на рис. 71—74 и содержатся в предыдущем параграфе.

Соотношения (8.2.10) могут быть использованы и непосредственно, когда $|s| \ll 1$ и априори ясно, что $\kappa''/\kappa' \ll 1$. Учитывая малость мнимой части κ , можно избавиться в соотношениях (8.2.7) и (8.2.8) от комплексного аргумента у цилиндрических функций, разложив их в ряд по малому параметру κ'' . После этого в системе (8.2.7) разделяются мнимая и вещественные части, что упрощает проведение вычислений.

Соотношения (8.2.10) и приведенные выше результаты позволяют оценить влияние внутреннего отверстия радиуса a на зеркале резонатора для различных типов колебаний $m \pm 1, n$. В рамках приближения (8.2.10) отношение добротностей колебаний дискового и кольцевого открытого резонаторов, «прообразами» собственных функций которых являются собственные волны соответственно круглого и коаксиального волноводов, могут быть представлены следующим образом:

$$\eta = Q_{\odot}/Q_0 \simeq (1 - \delta)^3 (\kappa^{\odot}/\kappa^{\odot})^2, \quad (8.2.13)$$

$$\eta' = Q'_{\odot}/Q'_0 \simeq (1 - \delta)^3 (\kappa^{\odot'}/\kappa^{\odot'})^2.$$

Здесь индексами \odot и \odot' помечены величины, относящиеся к дисковому и кольцеобразному открытым резонаторам соответственно; штрихом помечены магнитные колебания ($\kappa^{\odot'}$ — корни уравнения (8.2.12)). Приведенные отношения добротностей не зависят, как видно из (8.2.13), от продольного индекса колебаний q , так как они суть отношения добротностей при одинаковом q . Результаты расчетов по формулам (8.2.13) иллюстрируются рис. 76. Сплошными кривыми на рис. 76 показаны величины η и η' для различных колебаний $m \pm 1, n$; штрихпунктирной линией — предельные значения η и η' (одинаковые, разумеется, для η и η'), к которым они стремятся при увеличении m . По существу, в формулах (8.2.13) определяющим (при не очень малых δ) является множитель $(1 - \delta)^3$, который дает предельные значения отношений η и η' . Следует иметь в виду, что формулы (8.2.2) справедливы при $M \gg 1$. Главный в (8.2.13) множитель $(1 - \delta)^3$ соответствует различным значениям большого параметра M для обоих резонаторов. Если параметр M сохранять одинаковым для обоих резонаторов, то отношения их добротностей $\bar{\eta}$ и $\bar{\eta}'$ будут определяться квадратом отношения соответствующих собственных чисел κ_{mn} и κ_{mn}' .

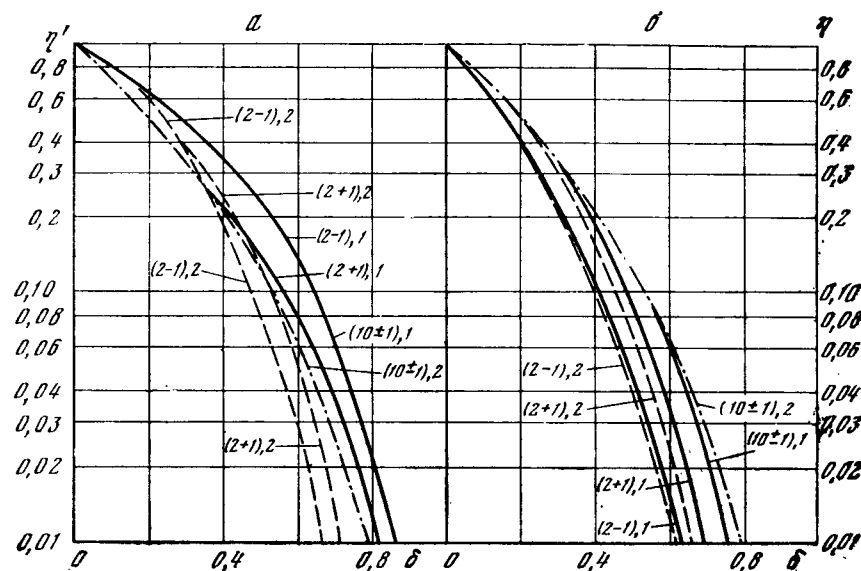


Рис. 76. Зависимости отношений добротностей электрических (а) и магнитных (б) волн (M — различно; формула (8.2.13))

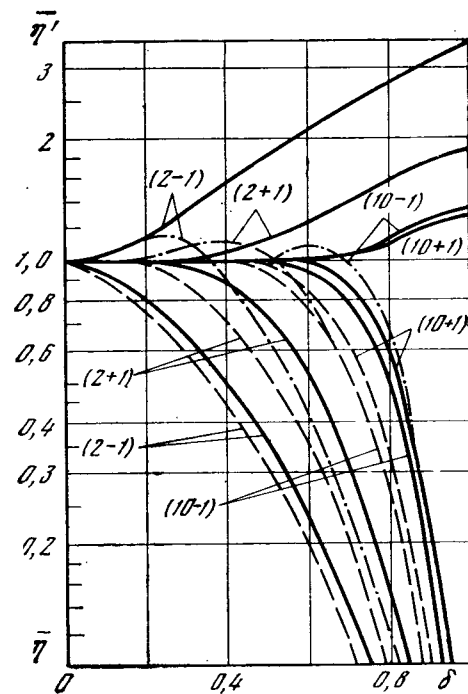


Рис. 77. Те же зависимости, что и на рис. 76, но M одинаковы

Результаты расчета отношений $\bar{\eta}$ и $\bar{\eta}'$ для $n = 1, 2$ представлены на рис. 77. Цифры у кривых означают $m \pm 1, n$. Сплошные кривые относятся к радиальному индексу $n = 1$, пунктирные — к $n = 2$. Точками нанесены зависимости $\bar{\eta}' = \bar{\eta}'(\delta)$ для $n = 2$. Эти кривые начинаются при $\bar{\eta} = 1$, имеют максимумы ($\bar{\eta} > 1$) и стремятся к нулю в нижней части рисунка, фактически повторяя ход зависимостей $\bar{\eta} = \bar{\eta}(\delta)$ при $\bar{\eta} < 1$. С увеличением азимутального индекса m различие между колебаниями $m + 1$ и $m - 1$ (при одинаковых n) уменьшается, как для колебаний магнитного, так и для колебаний электрического типа. Колебания магнитного типа оказываются более добротными, нежели электрические колебания. Особое поведение кривых для магнитных волн ($\bar{\eta}'_{m1}$) определяется свойством волн H_{m1} коаксиального волновода, которые слабо зависят от радиуса внутреннего проводника коаксиала (см. рис. 73).

Следует иметь в виду, что, строго говоря, развитая выше теория кольцевого открытого резонатора непригодна для $ka \sim 1$ и тем более для $ka \ll 1$. В этом случае цилиндрическая волна при отражении от внутреннего края $r = a$ «проникает» через импедансную «стенку» (хотя и убывает за ней по экспоненциальному закону) и может при $ka \sim 1$ попасть на противоположную сторону границы $r = a$. Такой переход в изложенной теории запрещен. Учет влияния малых отверстий на систему колебаний дискового резонатора не представляет особых затруднений [183] и может быть произведен, например, методами теории возмущений (см., например, [75]).

§ 8.3. Диафрагменная линия из круговых отверстий и некоторые другие коаксиальные резонансные структуры

1. Диафрагменная линия. В главе 7 была построена теория двумерной диафрагменной линии из щелей в безграничных эквидистантно расположенных параллельных идеально проводящих экранах (рис. 67), а также проведено обобщение на случай прямоугольных диафрагм (рис. 61, б). Пользуясь результатами предыдущего параграфа, нетрудно построить теорию диафрагменной линии из круговых отверстий (рис. 61, а).

Для этого необходимо в формулах для кольцевого открытого резонатора осуществить переход $b \rightarrow \infty$, устремляя радиус b внешнего кольца резонатора к бесконечности. Теперь мы будем интересоваться электромагнитным полем при $r \in (0, a)$. С этой целью из формул (8.2.2) и (8.2.3) для полей в линии необходимо исключить функцию Неймана $N_m(wr)$, которая при $r = 0$ дает особенность. Для этого нужно положить $C_1 = D_1 = 0$. Удовлетворяя затем при $r = a$ первому граничному условию из (8.2.4), получим определитель второго порядка

$$\det \| d(\kappa) \| = 0, \quad (8.3.1)$$

элементы которого суть

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{12} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{pmatrix} J(\tilde{\kappa}) - y_E \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{pmatrix} J'(\tilde{\kappa}), \\ \begin{pmatrix} d_{21} \\ d_{22} \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{pmatrix} J(\tilde{\kappa}) - y_H \begin{pmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{pmatrix} J'(\tilde{\kappa}). \end{aligned} \quad (8.3.2)$$

Пренебрегая в (8.3.1) членами порядка произведения малых величин $y_E y_H$, приходим к результату, полученному ранее. Следовательно, и для осесимметричных задач асимптотической теории в «резонансной ситуации» удовлетворяется принцип двойственности.

2. Металлический стержень с ребрами и радиальный открытый резонатор (рис. 75, д, е). Дисперсионное уравнение для κ получается, если удовлетворить при $r = a$ граничным условиям $E_z = E_\phi = 0$, а при $r = b$ — второму условию из (8.2.4). При этом изменяются коэффициенты определителя $\det \| d(\kappa) \|$ из (8.2.7) и (8.2.8) только в первых двух строках. А именно:

$$d_{21} = \sum J(\tilde{\kappa}), \quad d_{23} = \sum N(\tilde{\kappa}), \quad d_{13} = d_{14} = 0. \quad (8.3.3)$$

Случай структур на рис. 75, д, е отличается только значениями коэффициентов β' , $\beta'_{E,H}$: значения β для ребристого стержня (рис. 75, д) должны быть взяты из табл. 2 (с. 191), а для радиального резонатора (рис. 75, е) — из табл. 1 (с. 192).

3. Волны шепчущей галереи. В рамках развитого здесь подхода с использованием понятия импеданса для резонансных высокочастотных колебаний радиальный открытый резонатор (рис. 75, е) или ребристый стержень (рис. 75, д) и «зеркальные» для них системы: резонатор (рис. 75, л), или система связанных резонаторов, показанная на рис. 75, к, эквивалентны. Следует иметь в виду, что в структурах рис. 75, к, л кроме рассмотренных типов колебаний существуют еще так называемые волны типа шепчущей галереи. Они существуют при больших значениях радиального индекса m и занимают объем $c_m \geq a$. Очевидно, что в резонаторе рис. 75, л (и линии рис. 75, к) волны типа шепчущей галереи будут при $r > a$. При этом возможно взаимодействие между колебаниями, рассмотренными здесь, и волнами шепчущей галереи, что приведет, возможно, к интересным физическим результатам. Вопрос о связанных колебаниях типа волн шепчущей галереи в структуре рис. 75, к при $a \sim c_m$ представляет интерес для различных приложений в электронике СВЧ. Несомненно, во всяком случае, что системы рис. 75, к, л заслуживают более подробного изучения.

В рассмотренной выше системе рис. 75, б существует особый класс решений — волны шепчущей галереи. При заданных $m \gg \gg 1$, λ -волны шепчущей галереи существуют в слое $r \in (c_m, b)$, и поле их экспоненциально убывает при уменьшении r от значения c_m . В слое $r \in (c_m, b)$ поле волн шепчущей галереи носит колебательный характер. Нижняя граница слоя с волнами шеп-

чущей галереи $r = c_m$ определяется для электрических волн как $c_m = mb/\kappa_{mn}^{(E)}$ и для магнитных — $c_m = mb/\kappa_{mn}^{(H)}$, где $\kappa_{mn}^{(E, H)}$ суть корни уравнений $I_m(\kappa_m^{(E)}) = 0$ и $I_m(\kappa_m^{(H)}) = 0$.

При $c_m > a$ волны шепчущей галереи в системе рис. 75, б ничем, по крайней мере в принципиальном отношении, не будут отличаться от случая, рассмотренного в [173]. Это связано с тем, что поле каждой ячейки структуры индивидуально — связь между двумя соседними ячейками отсутствует. (Поле на открытом краю структуры $r = a$ равно нулю). При $c_m \sim a$ положение меняется — поле на краю $r = a$ конечно, и это определяет связь соседних ячеек структуры. Количественно эта связь учитывается коэффициентами β' , $\beta''_{E, H}$.

§ 8.4. Открытые винтообразные ленточные резонансные структуры

1. Постановка задачи. Электромагнитное поле. Граничные условия. Геометрия задачи, размеры и используемая система цилиндрических (r, φ, z) координат показаны на рис. 76. Мы подробно рассмотрим ленточную винтообразную структуру рис. 76, а, а затем выпишем результат и для структур рис. 78, б, в. Угол подъема спирали равен ψ . Период структуры (расстояние между лентами $2l$) отсчитывается по направлению, перпендикулярному к поверхностям лент. Величины, относящиеся к этому направлению, помечены значком \perp . Направление вдоль лент структуры помечено значком \parallel .

В ячейках структуры могут существовать высокочастотные колебания, когда на расстоянии $2l$ между лентами укладывается целое число полуволн $q = 1, 2, \dots$. Причем, в отличие от «оптического» случая $q \gg 1$, мы будем рассматривать, как и ранее, возможность $q = 1, 2, \dots$, т. е. произвольного числа полуволн между лентами. Поскольку при ограниченных значениях q (в отличие от $q \rightarrow \infty$) система не безразлична к поляризации электромагнитного поля, развитая ниже теория является поляризационной.

Основное предположение, которое является основой последующих выводов, как и в предыдущем параграфе, состоит в том, что квазицилиндрическая волна, существующая в ячейках структуры, отражается от ее открытого конца ($r = a$, и $r = b$), так же, как волноводная волна типа H_{0q} или E_{0q} плоского волновода от его прямолинейного края. Высказанная гипотеза априори определяет асимптотический характер задачи ($ka \gg 1$, $kb \gg 1$), и, кроме того, полученные соотношения справедливы при умеренных значениях угла подъема спирали ψ .

2. Характеристическое уравнение. Пусть составляющие электромагнитного поля в ячейках структуры $r \in (a, b)$ имеют вид

$$\begin{aligned} E_{\perp} &= E_z \cos \psi - E_{\phi} \sin \psi, & E_{\parallel} &= E_z \sin \psi + E_{\phi} \cos \psi, \\ H_{\perp} &= H_z \cos \psi - H_{\phi} \sin \psi, & H_{\parallel} &= H_z \sin \psi + H_{\phi} \cos \psi, \end{aligned} \quad (8.4.1)$$

где (ср. (8.3.3))

$$E_{\phi} = \Phi_E(wr) \sin(m\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \quad (8.4.2)$$

$$H_{\phi} = i\Phi_H(wr) \cos(m\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ -\sin \end{array} \right\} \frac{\pi q}{2l} z,$$

$$E_z = \frac{2w}{k} Z_C(wr) \cos(m\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \cos \\ -\sin \end{array} \right\} \frac{\pi q}{2l} z, \quad (8.4.3)$$

$$H_z = i \frac{2w}{k} Z_D(wr) \sin(m\varphi) \left\{ \begin{array}{l} \sin \\ \cos \end{array} \right\} \frac{\pi q}{2l} z.$$

Функции $\Phi_{E, H}(wr)$ определены формулами (8.2.3). Искомое радиальное волновое число w есть комплексная величина: $w = w' + iw''$. При выписывании формул (8.4.2) и (8.4.3) учтено, что мы интересуемся только волнами, частоты которых близки к критическим ($h/k \sim 1$).

Электромагнитное поле, составляющие которого представлены соотношением (8.4.1), должно удовлетворять идеальным граничным условиям на поверхностях бесконечно тонких лент $r \in (a, b)$, $\varphi \in (-\infty, \infty)$, а кроме того, — импедансным граничным условиям резонансного типа на цилиндрах $r = a$ и $r = b$ для $z (-\infty, \infty)$:

$$\left. \begin{array}{l} E_{\perp} = \rho H_{\parallel} \\ H_{\perp} = -\rho E_{\parallel} \end{array} \right\} \text{ при } r = a; \quad \left. \begin{array}{l} E_{\perp} = -\rho H_{\parallel} \\ H_{\perp} = \rho E_{\parallel} \end{array} \right\} \text{ при } r = b. \quad (8.4.4)$$

Здесь ρ — импеданс открытой структуры (открытого конца системы вблизи критической частоты): $2\rho = \sqrt{2kl} (\beta' + i\beta''_{E, H})$. Параметры $\beta' = \beta'(q)$ и $\beta'' = \beta''_{E, H}(q)$ приведены в табл. 1 и 2 (с. 191).

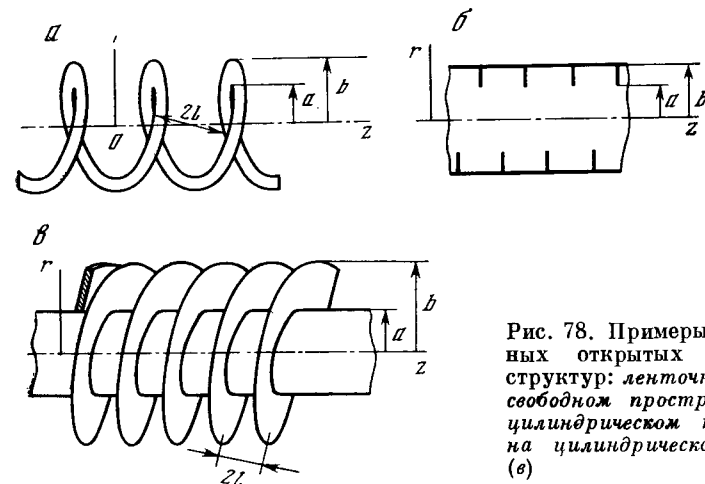


Рис. 78. Примеры винтообразных открытых резонансных структур: ленточная спираль в свободном пространстве (а), в цилиндрическом кожухе (б) и на цилиндрическом основании (в)

Существенной является зависимость величин β' и $\beta_{E,H}$ от q , а различие β_E'' и β_H'' при умеренных значениях q определяет поляризационный характер полученного ниже решения.

Подчиняя поле (8.4.1) граничным условиям (8.4.4) и опуская громоздкие выкладки, выпишем сразу результат — элементы d_{ij} , ($i, j = 1, 2, 3, 4$) дисперсионного (характеристического) уравнения четвертого порядка $\det \|d(\kappa)\| = 0$, корни которого дают искомое значение радиального волнового числа w :

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} d_{11} \\ d_{13} \end{pmatrix} &= \frac{2\kappa}{kb} \begin{pmatrix} J_m(\tilde{\kappa}) \\ N_m(\tilde{\kappa}) \end{pmatrix} - \Sigma \begin{pmatrix} J(\tilde{\kappa}) \\ N(\tilde{\kappa}) \end{pmatrix} \operatorname{tg} \psi - i\rho \Delta \begin{pmatrix} J(\tilde{\kappa}) \\ N(\tilde{\kappa}) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} d_{12} \\ d_{14} \end{pmatrix} &= -\Delta \begin{pmatrix} J(\tilde{\kappa}) \\ N(\tilde{\kappa}) \end{pmatrix} \operatorname{tg} \psi - i\rho \left[\frac{2\kappa}{kb} \begin{pmatrix} J_m(\tilde{\kappa}) \\ N_m(\tilde{\kappa}) \end{pmatrix} \operatorname{tg} \psi + \Sigma \begin{pmatrix} J(\tilde{\kappa}) \\ N(\tilde{\kappa}) \end{pmatrix} \right], \\ d_{21} &= id_{12}, \quad d_{22} = id_{11}, \quad d_{23} = id_{14}, \quad d_{24} = id_{13}, \quad (8.4.5) \\ d_{32} &= id_{41}, \quad d_{34} = id_{43}, \quad d_{42} = id_{31}, \quad d_{44} = id_{33}, \\ \begin{pmatrix} d_{31} \\ d_{33} \end{pmatrix} &= \frac{2\kappa}{kb} \begin{pmatrix} J_m(\kappa) \\ N_m(\kappa) \end{pmatrix} - \Sigma \begin{pmatrix} J(\kappa) \\ N(\kappa) \end{pmatrix} \operatorname{tg} \psi + i\rho \Delta \begin{pmatrix} J(\kappa) \\ N(\kappa) \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} d_{41} \\ d_{43} \end{pmatrix} &= -i\Delta \begin{pmatrix} J(\kappa) \\ N(\kappa) \end{pmatrix} \operatorname{tg} \psi - \rho \left[\frac{2\kappa}{kb} \begin{pmatrix} J_m(\kappa) \\ N_m(\kappa) \end{pmatrix} \operatorname{tg} \psi + \Sigma \begin{pmatrix} J(\kappa) \\ N(\kappa) \end{pmatrix} \right]. \end{aligned}$$

Здесь ради сокращения записи использованы следующие обозначения: $\kappa = wb$, $\tilde{\kappa} = \kappa a/b$, $\begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{pmatrix} G(\zeta) = G_{m-1}(\zeta) \pm G_{m+1}(\zeta)$, где $G_m(\zeta)$,

как и ранее, означает цилиндрические функции $J_m(\zeta)$ или $N_m(\zeta)$.

Полагая в (8.4.5) $\psi = 0$ и заменяя импеданс ρ в (8.4.4) на импеданс идеально магнитной стенки, приходим к дисперсионному уравнению коаксиального волновода (8.2.12), корни κ_{ms} которого могут быть использованы в качестве нулевого приближения при уточнении корней исходного дисперсионного уравнения $\det \|d(\kappa)\| = 0$.

При рассмотрении винтообразной структуры в кожухе (рис. 76, б) наряду с первым граничным условием из (8.4.4) при $r = b$ необходимо, чтобы поле (8.4.1) удовлетворяло граничным условиям $E_{\parallel} = 0$, $E_{\perp} = 0$ при $r = b$. Для спиральной структуры на стержне (рис. 76) идеальным граничным условиям ($E_{\parallel} = 0$, $E_{\perp} = 0$) поле должно удовлетворять по поверхности стержня ($r = a$), а на открытом конце ($r = b$) — второму условию из (8.4.4). Элементы d_{ij} определителей уравнения для структур рис. 76, б, в выписаны в [44]. Для нулевого приближения к значениям корней этих уравнений нетрудно получить уравнения для собственных чисел коаксиального волновода, аналогичные (8.2.12). Данные численных расчетов корней уравнений (8.2.12) приведены в § 8.1. Там же анализируется поведение корней H - и E -волн коаксиального волновода. ■■

2. Приближенное решение характеристического уравнения. Полный анализ полученного дисперсионного уравнения представляет непростую задачу. Вычислительная сложность состоит в необходимости действий с цилиндрическими функциями комплексного аргумента. Некоторые упрощения, впрочем, возможны, поскольку обычно интерес представляют только те колебания, для которых $\kappa''/\kappa' \ll 1$, а, стало быть, можно разложить функции $J_m(\zeta)$, $N_m(\zeta)$, $G_m(\zeta)$ и т. п. в ряды по малому параметру κ'' и ограничиться, например, первыми двумя членами. Результат при этом таков:

$$\begin{aligned} J_m(\kappa) &\simeq J_m(\kappa') + (i\kappa''/2) \Delta J(\kappa'), \\ N_m(\kappa) &\simeq N_m(\kappa') + (i\kappa''/2) \Delta N(\kappa'), \\ \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{pmatrix} J(\kappa) &\simeq \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{pmatrix} J(\kappa') + \frac{i\kappa''}{2} \begin{pmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{pmatrix} I(\kappa'), \\ \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{pmatrix} N(\kappa) &\simeq \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{pmatrix} N(\kappa') + \frac{i\kappa''}{2} \begin{pmatrix} \Delta \\ \Sigma \end{pmatrix} N(\kappa'), \end{aligned} \quad (8.4.6)$$

где

$$\begin{aligned} \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{pmatrix} I(\zeta) &= J_{m-2}(\zeta) \pm J_{m+2}(\zeta) - \begin{pmatrix} 0 \\ 2J_m(\kappa') \end{pmatrix}, \\ \begin{pmatrix} \Sigma \\ \Delta \end{pmatrix} N(\zeta) &= N_{m-2}(\zeta) \pm N_{m+2}(\zeta) - \begin{pmatrix} 0 \\ 2N_m(\kappa') \end{pmatrix}. \end{aligned} \quad (8.4.7)$$

После этого коэффициенты d_{ij} из (8.4.5) представимы в виде $d_{ij} = \operatorname{Re} d_{ij} + i \operatorname{Im} d_{ij}$ и в уравнении $\det \|d(\kappa)\| = 0$ можно разделить вещественные и мнимые части. Дальнейший численный (в предположении $\kappa'' \ll 1$), анализ уже не представляет особых затруднений.

Комплексная частота колебаний определяется, как обычно, соотношением

$$2kl = \pi q + 2\pi r, \quad (8.4.8)$$

в котором $q = 1, 2, \dots$, $|p| \ll 1$, и параметр p связан с радиальным волновым числом w так: $s = w \sqrt{2l/k} = \sqrt{4\pi r}$. Коэффициент отражения $R_{qq}^{(E,H)}$ квазицилиндрической волны от свободного края системы ($r = a$) представляются как $R_{qq}^{(E,H)} \simeq -\exp\{i(\beta' + i\beta_{E,H}'')s\}$. Поскольку $s \ll 1$, а $\beta' \sim \beta_{E,H}'' \sim 1$, то $|R_{qq}^{(E,H)}| \rightarrow 1$.

В качестве нулевого приближения к решению удобно взять соотношение

$$\kappa_{mn} = 2\kappa_{mn}^{\circ} (1 - (\beta' + i\beta'')/M), \quad (8.4.9)$$

где κ_{mn}° суть корни уравнения коаксиального волновода (8.1.4) (или ему подобных уравнений), а $2\beta'' = \beta_E'' + \beta_H''$. Входящий в

(8.4.9) большой параметр M есть

$$M = kb/\sqrt{2kl} \simeq kb/\sqrt{\pi q} \gg 1. \quad (8.4.10)$$

В формуле (8.4.9) большой параметр M считается постоянной величиной. Однако при более тонком анализе необходимо учитывать его комплексность в соответствии с комплексной частотой ω ; как это следует из соотношения (8.4.8).

§ 8.5. Колебания типа шепчущей галереи в открытых дисковых резонансных структурах

1. Общие соображения. Выше отмечалось, что в некоторых структурах, показанных на рис. 75, возможны колебания (или волны) типа шепчущей галереи. Оказывается, однако, что такого рода колебания могут существовать и на открытом краю резонансной структуры, например, в дисковом открытом резонаторе (рис. 75, а), в системе дисковых (рис. 75, г при $a = 0$) или кольцевых (рис. 75, г при $a \neq 0$) открытых резонаторов [184], а также в стержне с ребрами (рис. 75, в), в радиальном резонаторе (рис. 75, е) и т. п. В настоящем параграфе мы рассмотрим колебания типа шепчущей галереи для дискового открытого резонатора (рис. 75, а) и системы дисковых открытых резонаторов (рис. 75, г при $a = 0$). Разумеется, что полученные результаты будут иметь отношение и к другим симметричным структурам, если выполнены определенные условия. Действительно, если радиус внутренней каустики колебания типа шепчущей галереи больше радиуса металлического стержня в структурах рис. 75, а, е или больше диаметра внутреннего канала в кольцевом резонаторе (рис. 75, б) или системе таких резонаторов (рис. 75, г), то наличие стержня или отверстия на зеркале никак не скажется на режиме колебаний шепчущей галереи.

Изучение колебаний (или волн) типа шепчущей галереи представляет интерес с нескольких точек зрения. Выше мы уже отмечали, что они используются в электронике СВЧ [173], способствуя разрежению спектра собственных частот открытого цилиндрического резонатора по поперечному индексу. Большое внимание уделено изучению режима волн шепчущей галереи открытой цилиндрической трубы и коаксиального волновода.

«Традиционные» волны шепчущей галереи существуют на вогнутой поверхности, как бы «прилипают» к ней, в некотором слое. Толщина его определяется радиусом кривизны поверхности $\sigma = \sigma(r) = a(r)$ и длиной волны λ , а если поверхность является замкнутой, например, представляет собою внутреннюю поверхность цилиндрической трубки, то и радиальным индексом [185, 190, 191].

В отличие от «традиционной» трактовки колебаний шепчущей галереи, требующих для своего существования вогнутой направляющей поверхности, мы ниже увидим, что такого рода режимы возможны и в открытых структурах. Изучение колебаний, энер-

гия которых сосредоточена на открытом краю структуры, представляет кроме самостоятельного интереса, как некоторого нового класса решений, также интерес и с точки зрения актуальной ныне проблемы электромагнитной совместимости радиотехнических и радиофизических систем. Дело в том, что такие колебания могут достаточно эффективно возбуждаться в открытых осесимметричных структурах, а, стало быть, и создавать, в свою очередь, заметное паразитное излучение. Если осесимметрическая периодическая структура возбуждается электронным потоком, то перекатка энергии потока в энергию колебаний шепчущей галереи может нарушить энергетический баланс прибора, что приведет к снижению коэффициента полезного действия, нарушению процесса и режима группировки и т. п.

2. Характеристическое уравнение. Здесь рассмотрены колебания типа шепчущей галереи на открытом конце осесимметричных структур типа дискового резонатора. В принципе, аналогичное решение возможно и в более общем случае, когда открытый конец структуры описывается более сложным образом (например, как открытый резонатор с плоскими зеркалами эллиптической формы и т. п.).

Дисперсионное уравнение для интересующего нас случая дисковых структур можно формально получить из формул (8.2.2) и (8.2.3), исключив из рассмотрения функции Неймана. Оно имеет вид

$$J_{m-1}(x)J_{m+1}(x) + [(y_E + y_H)/2] [J_{m-1}(x)J'_{m+1}(x) + J_{m+1}(x)J'_{m-1}(x) + y_E y_H J'_{m-1}(x)J'_{m+1}(x)] = 0. \quad (8.5.1)$$

Здесь

$$2y_{E, H} = (\beta' + i\beta''_{E, H})s, \quad s = x\sqrt{kl/ka^2} \simeq x\sqrt{\pi q/ka} \ll 1. \quad (8.5.2)$$

Для колебаний шепчущей галереи характерно, что они имеют место при $m \gg 1$ и $x \gg 1$, когда $m \simeq x$, т. е. в дисперсионном уравнении (8.5.1) функции Бесселя можно заменить их дебаевскими асимптотиками через функции Эйри [1]. Предварительно воспользуемся малостью мнимой части радиального волнового числа $x'' (x''/x' \ll 1)$ и разложим функции Бесселя, входящие в дисперсионное уравнение (8.5.1), в ряды по малому параметру x'' . После этого в уравнении (8.5.1) разделяются вещественные и мнимые части и мы придем к следующему результату:

$$J_{m-1}(x')J_{m+1}(x') + (\sqrt{\pi q/4ka})A(x')(\beta'x' - \beta''x'') = 0, \quad (8.5.3)$$

$$x'' = -(\sqrt{\pi q/4ka})x'\beta''^{(1/2)} - \beta'\sqrt{\pi q/4ka}.$$

Здесь

$$A(x) = J_{m-1}(x)[J_m(x) - J_{m+2}(x)] + J_{m+1}(x)[J_{m-2}(x) - J_m(x)];$$

параметр $\sqrt{\pi q/4ka} \ll 1$; $q = 1, 2, \dots$

Таким образом, фактически нужно решать одно трансцендентное уравнение (первое соотношение в (8.5.3)), поскольку κ'' явным образом выражается через κ' (второе соотношение в (8.5.3)). Учитывая, что $m \sim \kappa' \gg 1$, можно воспользоваться заменой

$$J_m(\kappa) \sim \frac{1}{\sqrt{\pi} \sqrt[3]{m/2}} v(t_m); \quad t_m = (m - \kappa) / \sqrt[3]{m/2}, \quad (8.5.4)$$

в которой $v(t_m)$ — функции Эйри.

3. Результаты некоторых численных расчетов корней уравнения (8.5.3) показаны на рис. 79 и 80. Из сравнения левой и правой частей рис. 79 видно, что дифракционные потери в системе дисковых резонаторов (б) меньше, чем в одиночном дисковом резонаторе (а). С физической точки зрения это очевидно, поскольку энергия «рабочего» вида колебания (например, колебания с минимальными потерями), рассеянная на открытом конце в одиночном резонаторе, излучается во внешнее пространство и полностью теряется. Напротив, в системе большого числа резонаторов (теоретически — бесконечно большого количества) часть энергии, излученной из отдельной ячейки структуры, попадает в соседние

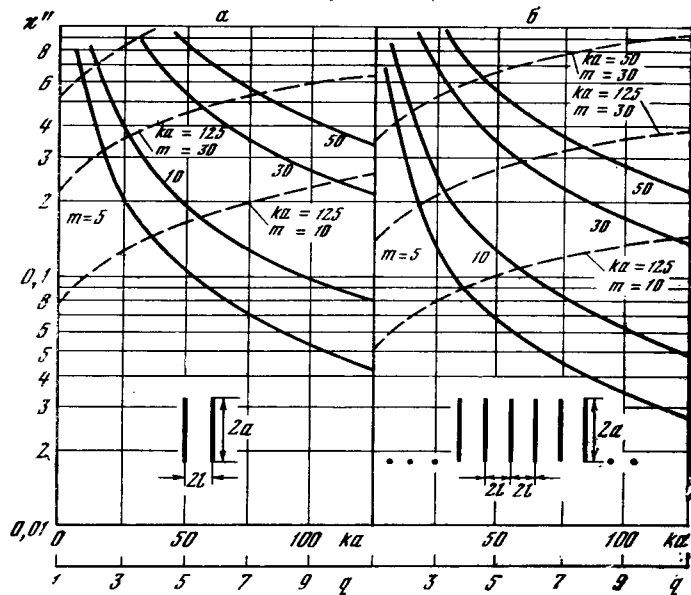


Рис. 79. Потери колебаний шепчущей галереи в открытом дисковом резонаторе (а) и системе открытых дисковых резонаторов (б) в зависимости от ka (сплошные кривые) и q (пунктирные).

Цифры у сплошных кривых означают величину азимутального индекса колебания m ; цифры у пунктирных кривых — m (первая) и ka (вторая, в скобках)

резонаторы и компенсирует в какой-то степени потери на излучение. Формально это различие в дифракционных потерях в одиночном резонаторе и системе резонаторов определяется разными значениями коэффициентов β для этих структур (см. с. 80 и далее).

Следует, впрочем, иметь ввиду, что отмеченное выше обстоятельство — различие в дифракционных потерях в отдельном резонаторе и системе резонаторов, строго говоря, имеет место при

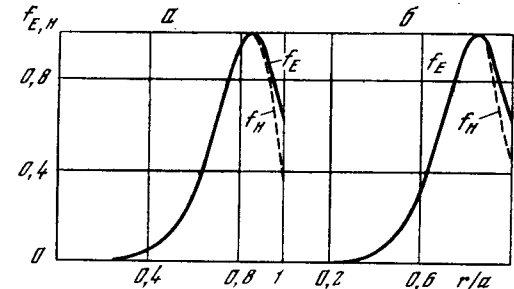


Рис. 80. Распределение токов на зеркалах для колебаний шепчущей галереи. Функции $f_{E, H}$ определены формулами (8.2.3), в которых следует положить $C_1 = D_1 = 0$

синфазном ($\eta = 0$) возбуждении системы резонаторов. Положение меняется, если возбуждение соседних ячеек в системе резонаторов сдвинуто по фазе. Коэффициенты β являются функциями η (§ 4.2).

Построенная здесь поляризационная теория колебаний типа шепчущей галереи содержит два параметра: размер зеркала ka и выраженное в числе полуволи q расстояние между зеркалами. Минимальными потерями обладают колебания с $q = 1$. Причем, чем больше размер зеркала ka , тем меньше дифракционные потери.

Добротность колебаний шепчущей галереи уменьшается с ростом азимутального индекса колебаний m . При уменьшении m мы приходим к обычным колебаниям дисковых открытых структур. Разумеется, что при малых значениях m формулы (8.5.4) перестают быть справедливыми.

На рис. 80 показано распределение токов на зеркалах в дисковых структурах. Как видно из полученных результатов распределение токов для колебаний шепчущей галереи подобно распределению электромагнитного поля волн шепчущей галереи в регулярной цилиндрической трубе. При $r \in (c_m, a)$ поле имеет (по r) колебательный характер, а для $r < c_m$ (внутри области, ограниченной каустической поверхностью $r = c_m$) поле экспоненциально спадает по мере приближения к оси $r = 0$. Естественное отличие распределения поля в дисковых структурах от полей шепчущей галереи, имеющих место на идеальных вогнутых поверхностях, состоит в том, что на открытом краю дисковой структуры поле имеет конечную величину.

§ 8.6. Открытые дисковые одиночные и периодические структуры с импедансным стержнем. Симметричные колебания

Здесь мы рассмотрим открытые резонансные структуры [196] типа открытого радиального (рис. 75, *e*) и открытого цилиндрического «клистронного» (рис. 75, *л*) резонаторов, а также их бесконечных дифракционно связанных систем, продольные сечения которых показаны на рис. 75, *д* и *к*. Для открытых радиальных структур (рис. 75, *г*, *д*) учтем влияние реактивного импеданса на внутреннем стержне. Исследование всех структур проводится единым методом и поэтому мы подробно рассмотрим одиночный радиальный резонатор (рис. 75, *e*), а затем произведем обобщение полученных результатов на остальные структуры.

1. Радиальный открытый резонатор. Граничные условия. Дисперсионное уравнение. Пусть диаметр плоских зеркал радиального открытого резонатора (рис. 75, *e*) равен $2b$, а диаметр внутреннего стержня — $2a$. Зеркала резонатора имеют нулевую толщину* и расположены на расстоянии $2l$ друг от друга. Воспользуемся цилиндрической системой координат r, φ, z , ось z которой совмещена с осью симметрии структуры. Ограничимся рассмотрением азимутально симметричных ($\partial/\partial\varphi \equiv 0$) колебаний и запишем электромагнитное поле в области $r \in (a, b)$, $z \in (-l, l)$ следующим образом (ср. (8.2.1); [44, 54, 77, 197]):

$$\begin{aligned} E_z(r, z) &= \frac{2w}{k} Z_C(wr) \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, \\ H_\varphi(r, z) &= i\Phi_H(wr) \begin{Bmatrix} \cos \\ -\sin \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, \\ H_z(r, z) &= i \frac{2w}{k} Z_D(wr) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z, \\ E_\varphi(r, z) &= \Phi_E(wr) \begin{Bmatrix} \sin \\ \cos \end{Bmatrix} \frac{\pi q}{2l} z. \end{aligned} \quad (8.6.1)$$

Первая строка в формулах (8.6.1) относится к значениям $q = 2, 4, \dots$, вторая — к $q = 1, 3, \dots$. Здесь обозначено: $Z_R(\zeta) = RJ_0(\zeta) + R_1 N_0(\zeta)$ и R означает либо C , либо D , а R_1 — соответственно C_1 или D_1 . При $m = 0$ из формул (8.2.1) имеем

$$\Phi_H(\zeta) = -2 [CJ_1(\zeta) + C_1 N_1(\zeta)], \quad \Phi_E(\zeta) = -2 [DJ_1(\zeta) + D_1 N_1(\zeta)].$$

Сравнение функций $\Phi_{E, H}(\zeta)$ радиального резонатора (при $m = 0$) с соответствующими радиальными функциями в § 8.2 (формулы (8.2.2) и (8.2.3)) показывает, что в рассматриваемом случае симметричных колебаний полное поле представимо в виде суммы независимых колебаний электрического E_{0jq} (составляющие E_z и

H_φ) и магнитного H_{0jq} (H_z, E_φ) типов (соответственно первая и вторая строчки в формуле (8.6.1)).

На свободной границе $r = b$ поле должно удовлетворять импедансным граничным условиям резонансного типа (ср. (8.2.4))

$$\Phi_H = -\frac{y_H}{w} \frac{d\Phi_H}{dr} \quad (\text{для } E_{0jq}), \quad \Phi_E = -\frac{y_E}{w} \frac{d\Phi_E}{dr} \quad (\text{для } H_{0jq}), \quad (8.6.2)$$

где

$$\begin{aligned} y_{E, H} &= y'_{E, H} + iy''_{E, H}, \quad \kappa = wb, \quad \Delta = a/b, \\ y'_{E, H} &= \frac{1-\Delta}{M} (\kappa\beta' - \kappa''\beta''_{E, H}), \quad y''_{E, H} = \frac{1-\Delta}{M} (\kappa''\beta' + \kappa'\beta''_{E, H}). \end{aligned}$$

Величина $M = (1-\Delta)kb/\sqrt{\pi q} \gg 1$ является большим параметром задачи. Значения коэффициентов β , являющихся функциями числа q полуволн, укладываемых между зеркалами на расстоянии $2l$, приведены в табл. 1 и 2. На центральном стержне ($r = a$) поле удовлетворяет импедансным граничным условиям Вайнштейна — Сивова

$$E_z = i\eta^m H_\varphi \quad \text{и} \quad E_\varphi = i\eta^e H_z. \quad (8.6.3)$$

Импедансы η^m и η^e зависят от соотношения периода гофрированной поверхности и длины волны, профиля поверхности, степени заполнения периода металлом и т. п. (см. §§ 3.1, 3.2).

Удовлетворяя для поля (8.6.1) граничным условиям (8.6.2) и (8.6.3), получим следующие дисперсионные уравнения для радиального открытого резонатора относительно радиального волнового числа $\kappa = \kappa' + i\kappa''$ ($\kappa = wb$, $\mu = \kappa\Delta$, $\Delta = a/b$) соответственно для колебаний H_{0jq}^I - и E_{0jq}^I -типов*

$$\begin{aligned} J_1(\mu) N_1(\kappa) - J_1(\kappa) N_1(\mu) + (y_E/2) \times \\ \times [J_1(\mu) \tilde{\Delta} N_1(\kappa) - N_1(\mu) \tilde{\Delta} J_1(\kappa)] + \\ + \eta^e (\kappa/kb) [J_1(\kappa) N_0(\mu) - J_0(\mu) N_1(\kappa)] = 0, \end{aligned} \quad (8.6.4)$$

$$\begin{aligned} N_0(\mu) J_1(\kappa) - J_0(\mu) N_1(\kappa) + (y_H/2) \times \\ \times [N_0(\mu) \tilde{\Delta} J_1(\kappa) - J_0(\mu) \tilde{\Delta} N_1(\kappa)] + \\ + (\eta^m kb/2\kappa) [J_1(\mu) N_1(\kappa) - J_1(\kappa) N_1(\mu)] = 0; \end{aligned} \quad (8.6.5)$$

$$\tilde{\Delta} Z_1(\zeta) = Z_0(\zeta) - Z_2(\zeta); \quad Z_j(\zeta) \text{ означает } J_1(\zeta) \text{ или } N_1(\zeta). \quad (8.6.5a)$$

2. Совершенно аналогично получаются дисперсионные уравнения для колебаний симметричного вида в открытом цилиндрическом резонаторе (рис. 75, *л*). Вновь удовлетворяя для полей

* Значки $[[$ и $]]$ у обозначений типов H и E показывают к какому резонатору они относятся: к радиальному (рис. 75, *e*; $[[$) или цилиндрическому (рис. 75, *л*; $]]$).

* Для структур из дифракционно связанных резонаторов (рис. 85, *e, з*) от этого ограничения можно избавиться (ср. [80], а также § 4.3 и § 7.3).

8.6.1) граничным условиям резонансного типа (8.6.2) при $r = a$ с очевидным изменением знака) и идеальным граничным условиям при $r = b$, приходим к следующим дисперсионным уравнениям для H_{0jq}^{I1} и E_{0jq}^{I1} -колебаний соответственно:

$$J_1(\mu) N_1(x) - N_1(\mu) J_1(x) + (y_E/2) [J_1(x) \tilde{\Delta} N_1(\mu) - N_1(x) \tilde{\Delta} J_1(\mu)] = 0, \quad (8.6.6)$$

$$N_0(\mu) J_1(x) - J_0(\mu) N_1(x) + (y_H/2) [N_0(x) \tilde{\Delta} J_1(\mu) - J_0(x) \tilde{\Delta} N_1(\mu)] = 0. \quad (8.6.7)$$

Сравнение уравнений (8.6.4) и (8.6.6), а также (8.6.5) и (8.6.7), показывает, что первые члены для колебаний H_{0jq}^{I1} и E_{0jq}^{I1} и, соответственно, E_{0jq}^{I1} и E_{0jq}^{I1} совпадают. При $y_{E,H} \rightarrow 0$ полученные уравнения переходят в обычные дисперсионные уравнения для симметричных H - и E -волн коаксиального волновода (8.1.4) и (8.1.5).

Дисперсионные уравнения для добротных колебаний в структурах из бесконечно большого числа дифракционно связанных резонаторов рассмотренных типов по форме совпадают с полученными выше соотношениями (8.6.4) — (8.6.7). При этом коэффициенты β' , $\beta_{E,H}'$ для бесконечных структур будут отличаться от коэффициентов β для одиночных резонаторов. Необходимые значения коэффициентов β рассчитаны на основе строгой теории о дифракции волноводных волн в бесконечной системе полуплоскостей и приведены в табл. 1 и 2. В случае дифракционно связанной решетки резонаторов коэффициенты β' , $\beta_{E,H}'$ являются функциями не только числа q полуволн, укладывающихся между соседними зеркалами, но и сдвига фаз η между колебаниями в соседних ячейках структуры. При малых q на характеристики добротных колебаний заметное влияние оказывает толщина зеркал. В настоящее время учет конечной толщины зеркал может быть проведен для колебаний H_{0jq} по данным § 4.3, в котором методом Галеркина численно рассчитаны зависимости коэффициентов β от толщины зеркал (см. §§ 4.3, 7.3).

2. Приближенные решения дисперсионных уравнений. Полученные дисперсионные уравнения (8.6.4) — (8.6.7) в общем случае нужно решать численно. Особого труда такое исследование не составляет, хотя и приходится оперировать с цилиндрическими функциями комплексной переменной. Практический интерес представляют, в основном, высокодобротные колебания, для которых $x/x' \ll 1$. Кроме того, следует учесть асимптотический характер задачи, определяемый большим параметром: $M \gg 1$. Отмеченные два обстоятельства позволяют, по-первых, произвести разложение цилиндрических функций в уравнениях (8.6.4) — (8.6.7) в ряды по малому параметру x' и, во-вторых, воспользоваться ханкелевой асимптотикой цилиндрических функций уже действительной пере-

менной. Ограничиваясь в разложениях бесселевых функций по x' линейным членом и удерживая в ханкелевых асимптотиках первый член, а также пренебрегая произведениями малых величин типа $x'y_{E,H}$ или $x'\eta^{m,e}$ и т. п., получим вместо (8.6.4) и (8.6.5), следующие приближенные системы дисперсионных уравнений (после разделения действительной и мнимой частей):

$$\left. \begin{aligned} \operatorname{tg} x' (1 - \Delta) - y_E' + x' \eta^e / kb' &= 0 \\ x' (1 - \Delta) - \eta^e / kb' + y_E' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ для } H_{0jq}^{I1} \text{ и} \quad (8.6.8)$$

$$\left. \begin{aligned} x' \operatorname{ctg} x' (1 - \Delta) - x' y_H' + kb \eta^m / 2 &= 0 \\ x' (1 - \Delta + kb \eta^m / 2x') + y_H' &= 0 \end{aligned} \right\} \text{ для } E_{0jq}^{I1}$$

Корни уравнений (8.6.8) определяются по методу малых возмущений разложением левых частей в первой строке (8.6.8) в ряды в точках πj и $\pi(j - 1/2)$, $j = 1, 2, 3, \dots$ соответственно. Результат таков:

для колебаний магнитного типа H_{0jq}^{I1}

$$\begin{aligned} x' &= (\pi j / (1 - \Delta)) (1 - (\beta' + \rho^e) / M), \\ x'' &= - \pi j \beta_{E,H}' / (1 - \Delta) M; \quad \rho^e = \eta^e / \sqrt{\pi q} \end{aligned} \quad (8.6.9)$$

и для колебаний электрического типа E_{0jq}^{I1}

$$\begin{aligned} x' &= [\pi (j - 1/2) / (1 - \Delta)] (1 - (\beta' - \rho^m) / M), \\ x'' &= - \pi (j - 1/2) \beta_{H}' / (1 - \Delta) M; \quad \rho^m = \eta^m [M / \pi (j - 1/2)]^2 \end{aligned} \quad (8.6.10)$$

Точность полученных таким образом значений корней составляет величину порядка M^{-2} , при условии малого импеданса $\eta^m \sim M^{-2}$.

В формулах (8.6.9) и (8.6.10) для приближенных решений уравнений (8.6.4) и (8.6.5) обобщенные импедансы ρ^e и ρ^m входят асимметрично: уменьшая действительную x' часть для магнитных колебаний и увеличивая x'' для электрических колебаний, что связано с известным смещением эффективной отражающей импедансной поверхности в зависимости от характера импеданса.

Полученные в рассматриваемом приближении (априори высокодобротные колебания) формулы для действительной и мнимой частей радиального волнового числа (8.6.9), (8.6.10) обладают интересной особенностью: дифракционные потери определяются коэффициентами $\beta_{E,H}'$ и колебания H - и E -типов имеют (особенно при малых q) различную радиационную добротность. С ростом q это различие постепенно исчезает и в «оптическом» случае ($q \rightarrow \infty$) наступает поляризационное вырождение (безразличие) электрических и магнитных типов колебаний. Влияние реактивного импеданса на стержне сказывается на величине действительной части волнового (радиального) числа, определяющего фазовую

поправку. При $\eta^e \rightarrow 0$ и $\eta^m \rightarrow 0$ из формул (8.6.9), (8.6.10) непосредственно следуют значения κ' и κ'' для $H_{0jq}^{[1]}$ и $E_{0jq}^{[1]}$ колебаний радиального резонатора с идеально проводящим стержнем.

Совершенно аналогично из дисперсионных уравнений (8.6.6) и (8.6.7) получаются приближенные уравнения для колебаний $H_{0jq}^{[1]}$ и $E_{0jq}^{[1]}$ цилиндрического открытого резонатора и системы таких резонаторов (рис. 75, ж, л):

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} \kappa' (1 - \Delta) + y_E'' &= 0 && \text{для } H_{0jq}^{[1]} \text{ и} \\ \kappa'' (1 - \Delta) + y_E'' &= 0 && \\ \operatorname{ctg} \kappa' (1 - \Delta) + y_H' &= 0 && \text{для } E_{0jq}^{[1]} \\ \kappa'' (1 - \Delta) + y_H' &= 0 && \end{aligned} \quad (8.6.11)$$

Отсюда для радиального волнового числа получим формулы

$$\begin{aligned} \kappa' &= \frac{j\pi}{1 - \Delta} \left(1 - \frac{\beta'}{M} \right) && \text{для } H_{0jq}^{[1]} \text{ и} \\ \kappa'' &= - \frac{j\pi}{1 - \Delta} \frac{\beta_E''}{M} && \\ \kappa' &= \frac{\pi(j - 1/2)}{1 - \Delta} \left(1 + \frac{\beta'}{M} \right) && \text{для } E_{0jq}^{[1]} \\ \kappa'' &= - \frac{\pi(j - 1/2)}{1 - \Delta} \frac{\beta_H''}{M} && \end{aligned} \quad (8.6.12)$$

Формулы (8.6.12) устроены так же, как и ранее полученные выражения (8.6.9) и (8.6.10).

Приближенные формулы (8.6.9) и (8.6.10) дают точность порядка 7% для κ' и 30% — для κ'' . Это было установлено с помощью точных решений уравнений (8.6.6) и (8.6.7), полученных на ЭЦВМ.

Резонансные (комплексные) частоты добротных колебаний исследованных осесимметричных структур определяются из условия резонанса

$$2kl = \pi q + 2\pi p, \quad (8.6.13)$$

в котором малый параметр p ($|p| \ll 1$) связан с радиальным волновым числом так:

$$p = p' - ip'' = q \frac{(\kappa')^2 + i\kappa'\kappa''}{(kb)^2}. \quad (8.6.14)$$

Добротность $Q = q/4p''$ колебаний определяется по формуле

$$Q_{H, E} \simeq \frac{(1 - \Delta)^2}{j4\pi \sqrt{\pi q} \beta_{E, H}''} (kb)^3 \quad (8.6.15)$$

В рассмотренном приближении легко учесть, кроме того, потери в зеркалах резонаторов (рис. 75, е, л), вызванные либо не-

идеальностью материала зеркал, либо малой их прозрачностью, например, для целей возбуждения или вывода энергии из резонатора. Если комплексный коэффициент отражения от зеркала есть P ($|P| \sim 1$), то комплексная частота добротных колебаний такого резонатора определяется из уравнения $2kl = \pi(q + 2p + 2\rho)$, в котором комплексная добавка $\rho = \rho' - i\rho''$ связана с коэффициентом отражения P соотношением $\rho = (i/2\pi) \ln P$ (ср. [144, 152, 157]).

Проведенное здесь исследование характеристик добротных симметричных колебаний осесимметричных открытых структур на основе импедансных граничных условий резонансного типа позволило построить простые и достаточно точные аналитические выражения для важнейших характеристик резонатора: добротности и фазовой поправки. Соответствующие этим колебаниям поля и токи на зеркалах имеют привычный вид (см., например, [157, 49]). Аналогичным образом можно рассмотреть широкий класс электродинамических систем типа открытых резонаторов с диэлектрическими трубками (ср. [150]), а также целый ряд других открытых структур, оставшихся не рассмотренными в настоящей книге. Получаемая при таком подходе точность результатов в сочетании с их простотой позволяют надеяться на эффективное применение развитого аппарата в теории различных резонансных структур, в частности, к открытым резонаторам с неоднородным импедансом на зеркалах, анизотропным импедансом и др.

§ 8.7. Возбуждение периодических структур — квазиоптических линий — через щель в открытом резонаторе

Задачи эффективного возбуждения линий передачи миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов волн весьма актуальны. Зачастую в качестве возбудителя линии используется непосредственно открытый резонатор квантового генератора, одно из зеркал которого полупрозрачно или в нем проделываются отверстия [198]. Ряд СВЧ-генераторов может иметь коаксиальные выходы, например, генераторы дифракционного излучения, мазеры на циклотронном резонансе [199] и т. п. Находят известное применение и открытые резонаторы со щелями [183] (в том числе и кольцевыми [200, 201]). С их помощью осуществляется связь с внешними цепями, достигается разрежение спектра собственных частот, селекция мод, дифракционная синхронизация квантовых генераторов и т. д. Таким образом, возникает проблема связи генератора с коаксиальным выводом энергии или открытого резонатора с кольцевой щелью непосредственно с линией передачи.

Здесь мы рассмотрим двумерную задачу возбуждения квазиоптической линии (линзовой и диафрагменной) через щели в зеркалах открытого цилиндрического резонатора. Проведенный анализ позволил получить данные для выбора параметров щели в резо-

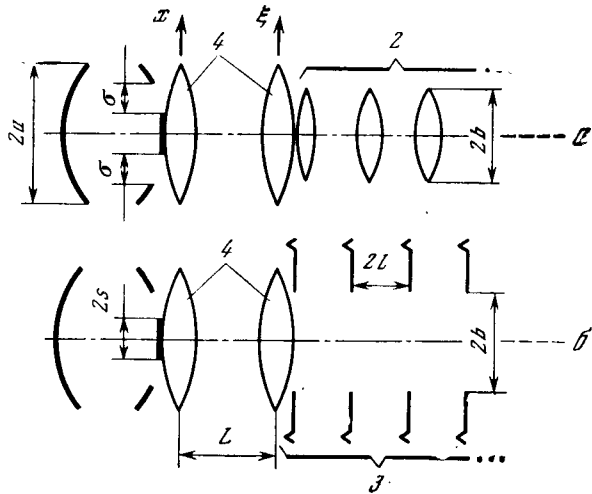


Рис. 81. Схема возбуждения квазиоптических линзовой (2) и диафрагменной (3) линий через щели в открытом резонаторе (1) с помощью фазовых корректоров (4); система координат и размеры

наторе, расстояния между резонатором и линией. Собственные функции и собственные числа линий и резонатора со щелями считаются известными, а расчет фазовых корректоров произведен по методу В. В. Семенова [202].

Во второй части параграфа будет рассмотрена задача оптимизации энергетической диаграммы направленности излучения из щели в плоском экране [203].

1. Коэффициент возбуждения. Рассматриваемая электродинамическая система схематически показана на рис. 81. Пусть $V_0(\xi)$ — поле, которое необходимо создать на входе линии 2 (или 3) с помощью выбора параметров щели (ширина которой σ и месторасположение на зеркале s) и пары полуконфокальных фазовых корректоров (линз), осуществляющих коррекцию фазы вида

$$\varphi(x) = kx^2/2L \quad \text{и} \quad \psi(\xi) = k\xi^2/2L. \quad (8.7.1)$$

Одна из линз находится в выходной апертуре излучателя, а вторая в плоскости первого элемента возбуждаемой линии. Эффективность возбуждения поля $V_0(\xi)$ характеризуется коэффициентом возбуждения

$$\chi = \left| \int_{-b}^b U(\xi) V_0(\xi) d\xi \right|^2 \left/ \int_{-a}^a |U_0(x)|^2 dx \int_{-b}^b |V_0(\xi)|^2 d\xi \right. \quad (8.7.2)$$

Здесь $U_0(x)$ — поле на выходе излучателя; $U(\xi)$ — поле, получаемое по принципу Гюйгенса — Кирхгофа в том же сечении, где задано необходимое поле $V_0(\xi)$. Для четного распределе-

ния поля и полуконфокальных корректоров поле возбуждения $U(\xi)$ в безразмерных координатах выражается следующим образом:

$$U(\xi) = \sqrt{i2ka^2/\pi L} e^{-ikL} \int_0^1 U_0(x) \cos x' C \xi' dx,$$

где

$$C = kab/L, \quad x' = x/a, \quad \xi' = \xi/b. \quad (8.7.3)$$

Излучающая апертура в рассматриваемом случае представляет собою две продольные щели в одном из зеркал цилиндрического открытого резонатора. Распределение поля по координате x в первом приближении можно взять в виде

$$U_0(x) = 1, \quad x \in (s, s + \sigma); \quad U_0(x) = 0, \quad x \in (0, s), \quad x \in (s + \sigma, a). \quad (8.7.4)$$

Линзовая линия. При возбуждении нижней моды линзовой линии функция $V_0(\xi')$ описывает гауссово распределение поля в поперечном направлении

$$V_0(\xi') = \exp\left(-\frac{\xi'^2}{2\xi_s'^2}\right), \quad (8.7.5)$$

где $\xi_s' = \xi_s/b$; ξ_s — полуширина области, в которой поле имеет тот же порядок, что и в центре. Коэффициент возбуждения для линзовой линии равен

$$\chi = \frac{4C}{\pi \sqrt{\pi} \xi_s' \Delta \Phi(1/\xi_s')} \left(\int_0^{1+s_1+\Delta} \int_{s_1} e^{-\xi'^2/2\xi_s'^2} \cos Cx'\xi' dx' d\xi' \right)^2. \quad (8.7.6)$$

Здесь $s_1 = s/a$, $\Delta = \sigma/a$, $\Phi(z) = \frac{2}{\sqrt{\pi}} \int_0^z e^{-\eta^2} d\eta$ — интеграл вероятности.

Диафрагменная линия. При возбуждении диафрагменной линии в качестве $V_0(\xi')$ следует брать собственную функцию данной структуры (§ 7.1)

$$V_0(\xi') = \cos \frac{\pi}{2} \left\{ \frac{\xi'}{1 + (1-i)\beta/M} \right\} = \sqrt{(\sin A\xi' \operatorname{sh} B\xi')^2 + (\cos A\xi' \operatorname{ch} B\xi')^2} \times \exp\{i \arctg(\operatorname{tg} A\xi' \operatorname{th} B\xi')\},$$

где

$$2A = \pi(1+g)G, \quad 2B = \pi gG, \quad g = \beta/M, \quad G^{-1} = (1+g)^2 + g^2.$$

Здесь большой параметр $M = b\sqrt{2kl} \gg 1$ характеризует диафрагменную линию; $2l$ — расстояние между соседними диафраг-

мами; для линии из идеально поглощающих экранов, расположенных на большом расстоянии друг от друга, параметр $\beta = 0,824$. Если экраны идеально отражающие и так же далеки друг от друга, то $\beta = 0,483$. При этом электрические и магнитные типы волн в линии оказываются вырожденными. При уменьшении расстояния между диафрагмами параметр β необходимо заменить на β' , $\beta'_{E,H}$, которые уже зависят от числа q полуволн, укладываемых между диафрагмами (см. гл. 4). Поляризационное вырождение колебаний при малых q снимается.

Коэффициент возбуждения двумерной диафрагменной линии имеет вид

$$\chi = \frac{4}{\pi \Delta C} \left(\frac{\sin 2A}{2A} + \frac{\text{sh } 2B}{2B} \right)^{-1} \times$$

$$\times \left\{ \int_0^1 \sqrt{(\sin A\xi' \text{sh } B\xi')^2 + (\cos A\xi' \text{ch } B\xi')^2} \times \right.$$

$$\times [\sin C(s_1 + \Delta)\xi' - \sin Cs_1\xi'] \cos \mathcal{L}(\xi') \frac{d\xi'}{\xi'} \Bigg\}^2 +$$

$$+ \left\{ \int_0^1 \sqrt{(\sin A\xi' \text{sh } B\xi')^2 + (\cos A\xi' \text{ch } B\xi')^2} \times \right.$$

$$\times [\sin C(s_1 + \Delta)\xi' - \sin Cs_1\xi'] \sin \mathcal{L}(\xi') \frac{d\xi'}{\xi'} \Bigg\}^2 ;$$

где

$$\mathcal{L}(\xi) = \arctg(\text{tg } A\xi \text{th } B\xi). \quad (8.7.7)$$

Результаты численных расчетов. По полученным формулам для коэффициентов возбуждения линзовой (8.7.6) и диафрагменной (8.7.7) линий были проведены численные расчеты на ЭВМ. Результаты счета представлены на графиках рис. 82—84.

На рис. 82 показана типичная зависимость коэффициента возбуждения χ от френелевского параметра C при различных значениях параметров линзовой (а) и диафрагменной (б) линий. Видно, что при каждом значении параметров s_1 и Δ коэффициент возбуждения достигает определенного максимума χ_{\max} . По семействам результатов, аналогичных представленным на рис. 82, были построены зависимости χ_{\max} для линзовой (рис. 83) и диафрагменной (рис. 84) линий. Наблюдаемая общая тенденция заключается в увеличении χ_{\max} с ростом Δ и с уменьшением s_1 , причем при $\xi'_s > 5$ значения χ_{\max} примерно одинаковы для линзовой и диафрагменной линий. Из рис. 83 следует, что чем меньше размер пятна ξ_s , тем ближе нужно располагать корректирующие линзы. Чем больше ξ'_s , тем сильнее зависимость χ_{\max} от величины экрана s_1 (при $\Delta = \text{const}$) и от размера щели Δ (при $s_1 = \text{const}$). Сравнение со случаем, когда гауссово распределение возбуждается полем плоской волны в отверстии ($s_1 = 0, \Delta = 1$) показывает, что наличие экрана в центре отверстия ($s_1 \neq 0$) уменьшает

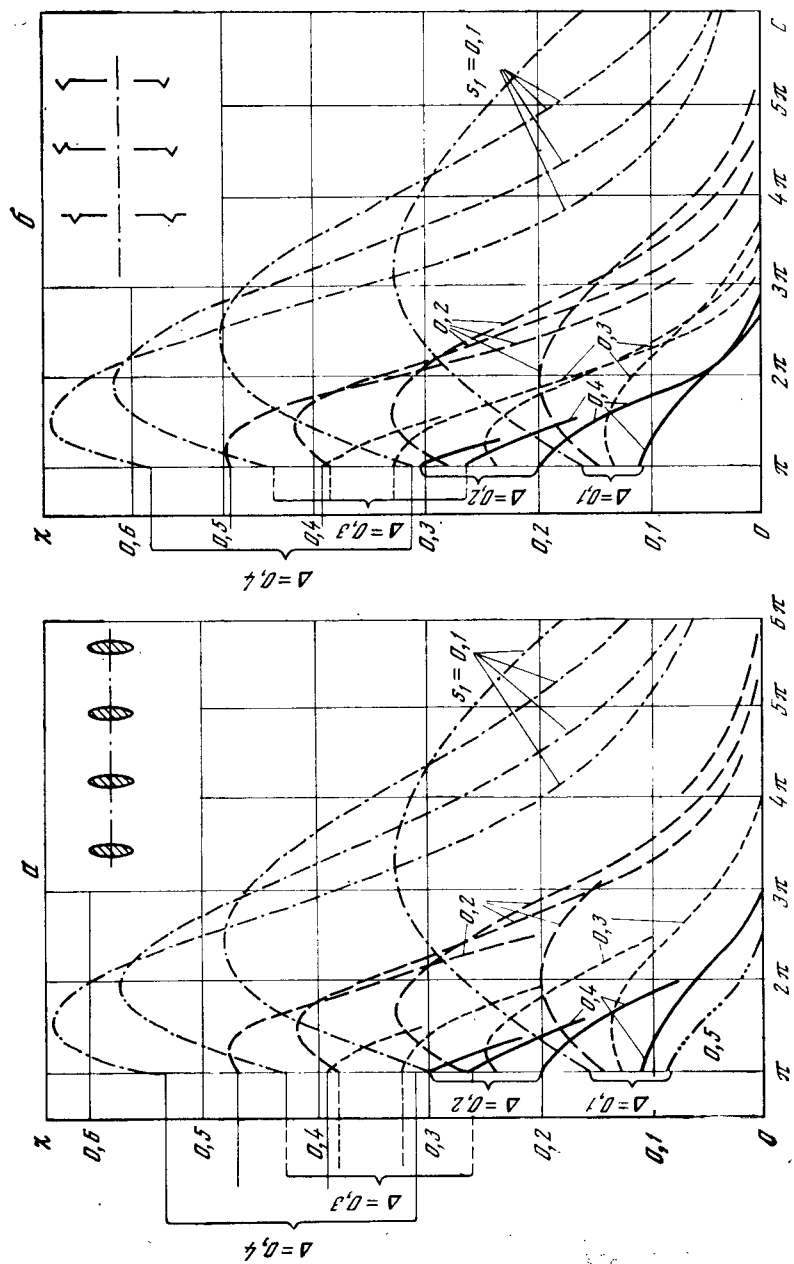


Рис. 82. Зависимость коэффициента передачи между открытыми резонатором и линзовой (а) или диафрагменной (б) линиями от параметра C для различных значений s_1 и Δ

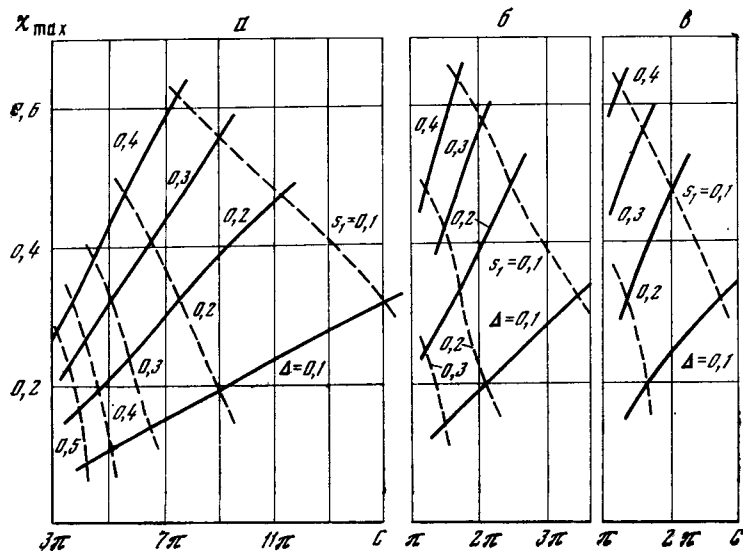


Рис. 83. Зависимость максимального значения коэффициента передачи (соответствует максимумам на кривых рис. 82 между открытым резонатором и линзовой линией C для различных размеров пятна: $\xi_s' = 0,3$ (а); $0,5$ (б); $0,7$ (в) от параметра C

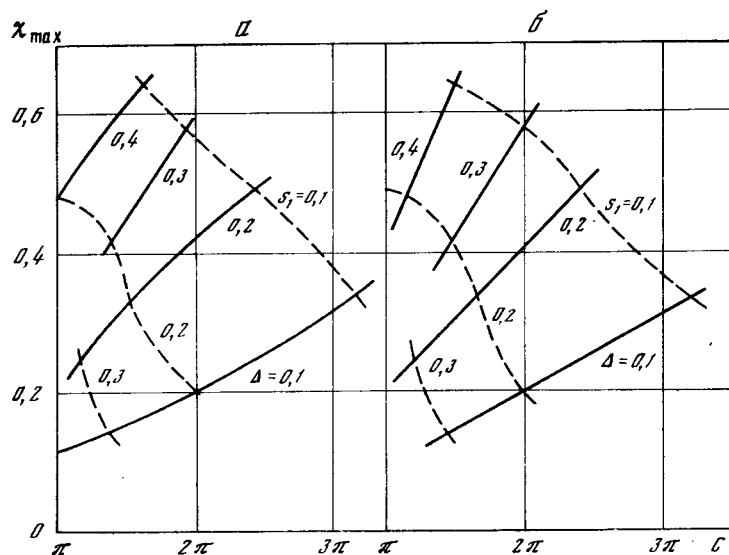


Рис. 84. Те же зависимости, что и на рис. 83, но для диафрагменной линии и следующих размеров пятна: $\xi_s' = 0,3$ (а) и $\xi_s' = 0,5$ (б)

значение $\chi_{\max} = 0,81$ [204]. Эффективность возбуждения диафрагменной линии мало зависит от материала диафрагм: (рис. 84, а) — для идеально поглощающих, а рис. 84, б — для идеально отражающих диафрагм). Расчет также показал слабую зависимость χ_{\max} от параметра линии M (результаты для $M = 5$ и $M = 25$ с графической точностью совпадают со случаем $M = 15$, представленным на рис. 84).

При каждом значении ξ_s' , с одной стороны (см. рис. 83), а также при каждом значении β и M , с другой стороны (рис. 84), выбор s_1 и Δ полностью определяет то расстояние L , на котором следует располагать друг от друга линзы возбуждителя для получения максимального коэффициента возбуждения. При выборе параметров s_1 и Δ необходимо, кроме того, обеспечить условия для высокодобротных колебаний внутри открытого резонатора. Желательно использовать для возбуждения линии передачи такую моду, поле которой вне открытого резонатора (за щелями) можно было бы описать функцией (8.7.4). В частности, ею может оказаться первая нечетная мода резонатора. При этом излучение ее через щели не должно сильно сказываться на добротности открытого резонатора, соответствующей основному колебанию. С этой точки зрения наиболее подходящими значениями будут $s_1 = 0,5$; $\Delta = 0,4$. Тогда дифракционные потери колебаний TEM_{00} и TEM_{01} будут соответственно равны 3,5% и 41,3%, т. е. при достаточно добротных колебаниях четной моды происходит довольно интенсивное излучение нечетной моды. Если возбуждается линзовая линия с $\xi_s' = 0,1$, то при таких s_1 и Δ имеем $\chi_{\max} = 27,6\%$. Диафрагменную линию в этом случае возбуждать не имеет смысла, поскольку эффективность будет менее 20%.

Фазовые корректоры. Обратимся теперь непосредственно к расчету фазовых корректоров возбуждителя. В соответствии с методикой В. В. Семенова будем их считать полуконфокальными. Тогда обеспечивается локальный максимум коэффициента возбуждения χ . Линзы возбуждителя имеют, таким образом, сферический профиль с радиусом кривизны $r = 2L(\sqrt{\epsilon} - 1)$. Пусть $\chi = \chi_{\max}$ при $C = C_0$. Тогда имеем $L = kab/C_0$. Следовательно, выражения (7.1) приобретают вид

$$\varphi(x) = C_0 x^2/2ab, \quad \psi(\xi) = C_0 \xi^2/2ab.$$

Для создания такой фазовой коррекции толщины линз должны изменяться в соответствии с формулами

$$\begin{aligned} d_1(x) &= C_0 a (1 - x^2)/2kb (\sqrt{\epsilon} - 1), \\ d_2(\xi) &= C_0 b (1 - \xi^2)/2ka (\sqrt{\epsilon} - 1). \end{aligned} \quad (8.7.8)$$

Ввиду того, что по технологическим причинам нецелесообразно сводить толщину линз до нуля (на периферии), на практике следует увеличить размер d путем добавления плоскопараллельного участка.

Проведенный анализ позволяет произвести выбор параметров системы для оптимального возбуждения линзовой и диафрагменной линией с помощью отверстия в одном из зеркал открытого резонатора таким образом, чтобы добротность основного колебания открытого резонатора оставалась практически неизменной (по отношению к резонатору со сплошными зеркалами). Полученные результаты не представляет труда обобщить на случай открытых резонаторов с кольцевым вырезом в одном из зеркал [200]. Ка-

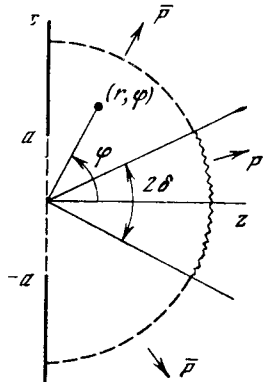


Рис. 85. К задаче излучения из щели в плоском экране
 P — мощность, излучаемая в заданный угол 2δ ; \bar{P} — мощность, излучаемая вне угла 2δ

чественно они ничем не будут отличаться от приведенных в настоящем параграфе.

Расчет возбуждения квазиоптических линий через слегка прозрачное зеркало открытого резонатора может быть проведен аналогично с использованием дифракционной функции Вайнштейна от комплексного аргумента [144, 152, ср. 216].

2. К оптимизации энергетической диаграммы направленности излучения из щели в плоском экране (зеркале). Постановка задачи. Метод. Рассмотрим плоскую ($\partial/\partial y \equiv 0$) задачу излучения из щели ($x \in (-a, a), z = 0$) в идеально проводящем экране ($|x| > a, z = 0$) (рис. 85). Поле $u(r, \varphi)$ в любой точке дальней зоны выражается через поле на щели $u(\xi)$ по известной формуле

$$u(r, \varphi) = A \cos \varphi \frac{e^{-ikr}}{\sqrt{r}} \int_{-a}^a u(\xi) e^{-ik\xi \sin \varphi} d\xi, \quad (8.7.9)$$

где A — константа.

Пусть P — поток энергии внутри заданного центрального угла 2δ , \bar{P} — поток энергии вне этого угла. Тогда отношение потока энергии P ко всей излученной из щели энергии $P + \bar{P}$ есть

$$\frac{P}{P + \bar{P}} = \left(\int_{-\delta}^{\delta} uu^* r d\varphi \right) / \left(\int_{-\pi/2}^{\pi/2} uu^* r d\varphi \right). \quad (8.7.10)$$

Предполагая симметрию поля относительно центра щели $u(-\xi) = u(\xi)$, считая его вещественным $u^*(\xi) = u(\xi)$ и вводя обозначения $\xi = a\eta$, получим для (8.7.10) следующее выражение ($\alpha = ka \sin \varphi$):

$$\frac{P}{P + \bar{P}} = \left\{ \int_0^{\delta} \left[\cos \varphi \int_0^1 u(\eta) \cos \alpha \eta d\eta \right]^2 d\varphi \right\} : \int_0^{\pi/2} \left[\cos \varphi \times \int_0^1 u(\eta) \cos \alpha \eta d\eta \right]^2 d\varphi. \quad (8.7.11)$$

Представляя поле на щели в виде ряда Фурье

$$u(\eta) = \sum_{n=1}^{\infty} X_n \cos \frac{\pi}{2} (2n-1) \eta \quad (8.7.12)$$

и подставляя (8.7.12) в (8.7.11), после несложных преобразований, получим

$$\frac{P}{P + \bar{P}} = \left(\sum_{n,m} X_n X_m F_{nm} \right) / \left(\sum_{n,m} X_n X_m \Phi_{nm} \right), \quad (8.7.13)$$

где

$$F_{mn} = \frac{(-1)^{n+m}}{(2n-1)(2m-1)} \int_0^{\delta} \frac{\cos^2 \alpha \cos^2 \varphi d\varphi}{\{1 - [2\alpha/\pi(2n-1)]^2\} \{1 - [2\alpha/\pi(2m-1)]^2\}},$$

а матрица значений Φ_{nm} получается из F_{nm} заменой верхнего предела δ в интеграле на $\pi/2$.

Таким образом, задача оптимизации потока энергии P в математическом плане сведена к задаче нахождения *максимум отношения двух квадратичных форм*. Эта задача, как известно, приводит к отысканию наибольшего корня λ -уравнения

$$|F_{nm} - \lambda \Phi_{nm}| = 0. \quad (8.7.14)$$

Найденное из (8.7.14) $\max \lambda$ при этом есть искомое экстремальное отношение $P/P + \bar{P}$, а проекции X_n соответствующего главного вектора суть искомые амплитуды разложения поля на щели в ряд Фурье, реализующего оптимальную в указанном смысле энергетическую диаграмму направленности.

Система уравнений (8.7.14) решалась на ЦЭВМ по методу Якоби с преградами [205—207] для набора значений $ka = 5, 10, 15, 20$ и $\delta = 0,10; 0,15; 0,20$. Некорректность задачи проявлялась в плохой обусловленности системы (8.7.14) и определялась близостью к нулю определителя матрицы $\| \Phi_{nm} \|$. В качестве устойчивого решения (*регуляризация*; ср. [208]) выбиралось такое решение (при заданных N, ka и δ ; N — порядок λ -уравнения

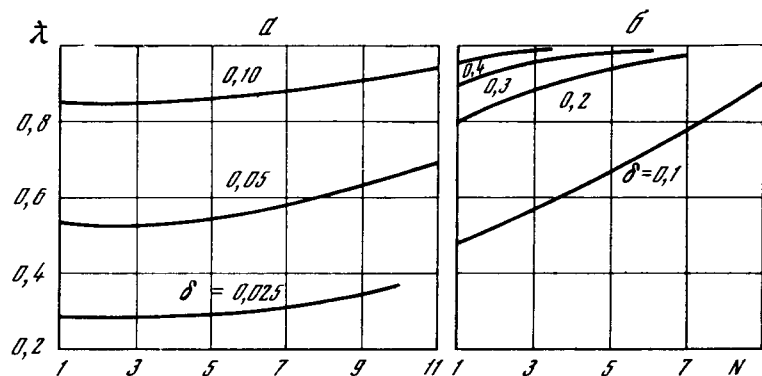


Рис. 86. Зависимость экстремального значения отношения $P/(P + \bar{P})$ от числа N Фурье-гармоник в поле на щели для различных значений угла δ

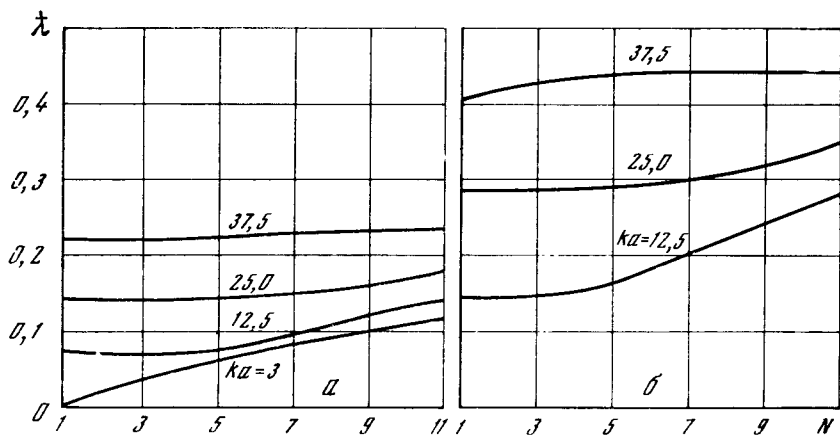


Рис. 87. Эффективность излучения из щели в малые углы $\delta = 0,01$ (а) и $\delta = 0,02$ (б) в зависимости от числа N Фурье-гармоник поля на щели для разных значений параметра ka

(8.7.14), т. е. по существу число гармоник, удерживаемых в разложении (8.7.12)) λ -уравнения, которое практически не зависело от числа преград и обеспечивало, вместе с тем, требуемую точность расчета.

Результаты некоторых численных расчетов представлены на рис. 86—88. На рис. 86 показана зависимость $\lambda = \lambda(N; ka = \text{const})$ для набора $\delta = 0,025; 0,05; 0,1; 0,2; 0,3; 0,4$. При расчетах $N_{\text{max}} = 12$, поскольку для $N > 12$ при выбранном наборе значений ka и δ процедура регуляризации не выполнялась и не было уверенности в правильности результатов.

На рис. 87 показана эффективность излучения из щели в очень малый угол: $\delta = 0,01$ и $\delta = 0,02$. Полученные результаты для ма-

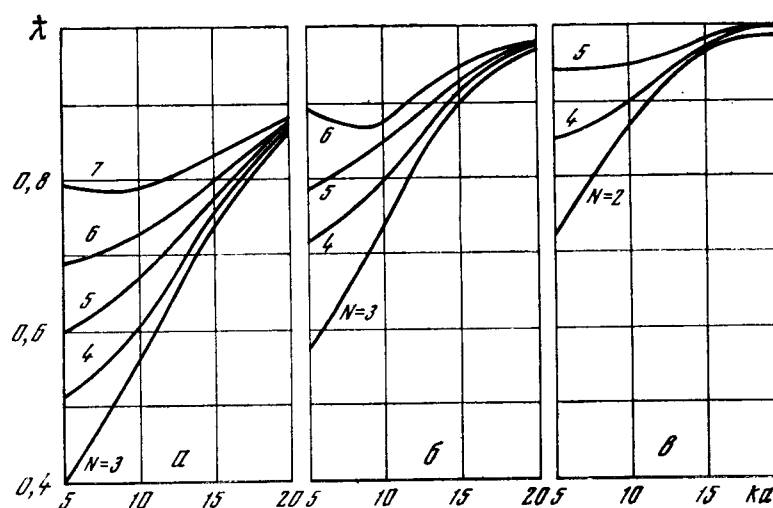


Рис. 88. Эффективность излучения из щели в зависимости от параметра ka при заданных углах $\delta = 0,1$ (а); $\delta = 0,15$ (б); $\delta = 0,2$ (в) и разным числе Фурье-гармоник поля на щели

лых углов показывают, что усложнение характера поля на щели (увеличение числа используемых Фурье-гармоник) в целом несущественно увеличивает мощность, излучаемую щелью в заданный угол 2δ . И, наконец, на рис. 88 представлены результаты расчета зависимости $\lambda = \lambda(ka; \delta = \text{const}, N = \text{const})$. Отсюда непосредственно видно, в каких областях изменения параметров задачи (ka, δ) следует добиваться повышения эффективности и излучения за счет усложнения поля на щели.

Сочетание результатов первой и второй частей настоящего параграфа позволяет оценить предельные возможности возбуждающей структуры как с точки зрения выбора оптимальных геометрических параметров щели (размещение, ее расположение на зеркале), так и выбора характера возбуждающего поля. Последнее возможно сделать, выбрав, например, в ОКГ соответствующее распределение диэлектрической проницаемости активного вещества.

§ 8.8. Дифракция квазиоптического пучка на плоской периодической структуре

Рассмотренные в предыдущих разделах книги задачи в основном касались дифракции плоских или волноводных волн на различных объектах, приближенно описываемых эквивалентными импедансными граничными условиями. Вместе с тем представляет интерес оценить влияние периодической структуры на отраженный (прошедший) от нее квазиоптический пучок. Наибольший интерес для квазиоптических приложений, например, при исполь-

зовании периодических структур в качестве фазовых корректоров (см. § 6.1) или иных элементов лучеводного тракта, а также ряде других приложений в антенно-фидерной и измерительной технике, электронике СВЧ, в частности, дифракционной электронике и т. п. представляет случай полного прохождения волнового пучка через периодическую структуру (ср. § 1.2)*. При этом преобразовании первичного поля в другие типы волновых пучков оказывается весьма незначительным, отражение минимально и действие структуры сказывается лишь на основных характеристиках волнового пучка: радиуса пятна $w(z)$ и радиуса $R(z)$ сферы (в двумерной задаче — цилиндра), касательной к поверхности фазового фронта в окрестности оси z , т. е. радиуса кривизны фазового фронта.

При рассмотрении задачи о прохождении (отражении) квазиоптического пучка через периодическую структуру необходимо воспользоваться свойствами линейности краевой задачи. Это дает возможность, зная коэффициенты прохождения и отражения плоской волны для данной плоской периодической структуры, разложить волновой пучок в угловой спектр по плоским волнам и затем произвести обратное преобразование Фурье [209].

Таким образом, дифракция волнового пучка

$$\Psi_{mn}(x, y, z) = \frac{w_0}{w(z)} H_m\left(\sqrt{2} \frac{x}{w(z)}\right) H_n\left(\sqrt{2} \frac{y}{w(z)}\right) \times \exp\left\{-\frac{x^2 + y^2}{2\Delta(z)}\right\} \exp\{-i(kz - \Phi_{mn}(z))\}. \quad (8.8.1)$$

Здесь

$$\frac{1}{\Delta(z)} = \frac{\lambda}{\pi w^2(z)} + \frac{i}{R(z)}, \quad R(z) = z \left[1 + \left(\frac{\pi w_0^2}{\lambda z}\right)^2\right],$$

$$\Phi_{mn}(z) = (m + n + 1) \arctg(\lambda z / \pi w_0^2),$$

$$w_0^2(z) = w_0^2 [1 + (\lambda z / \pi w_0^2)^2]; \quad (8.8.2)$$

$H_p(\xi)$ — полиномы Эрмита, $w(z)$ — радиус пятна пучка ($w(0) \equiv w_0$) ($R(z)$ — радиус кривизны фазового фронта в точке z ; m, n — индексы поперечных типов волн) на плоских периодических структурах можно рассматривать как дифракцию электромагнитной волны, представляющей собой суперпозицию континуума плоских волн, т. е. использовать представление волнового пучка в виде разложения в интеграл Фурье. Такое представление позволяет также выделить E - и H -поляризацию поля и в дальнейшем рассматривать их отдельно. Тогда для x -компонент этой волны в декартовой системе координат с учетом квазиоптического приближения для продольного волнового числа

$$k_z = \sqrt{k^2 - (\xi^2 + \eta^2)} \simeq k - \frac{\xi^2 + \eta^2}{2k} \quad (8.8.3)$$

* Эффект полного прохождения квазиоптического пучка через периодическую структуру (по аналогии с § 1.2) можно назвать *обобщенным эффектом Малюжинца*.

можно записать

$$\begin{pmatrix} H_x^0 \\ E_x^0 \end{pmatrix} \simeq \frac{\exp\{-ikz\}}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} \begin{pmatrix} F_H(\xi, \eta) \\ F_E(\xi, \eta) \end{pmatrix} \exp\left\{i \frac{\xi^2 + \eta^2}{2k} z\right\} e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta, \quad (8.8.4)$$

где трансформанты Фурье первичного поля $F_{E, H}(\xi, \eta)$ являются функциями Гаусса — Эрмита, как следует из (8.8.1) и (8.8.4).

В силу периодичности структуры рассеянное поле будет иметь аналогичный вид, и x -компоненты рассеянного поля можно искать в виде

$$\begin{pmatrix} H_x^{(j)} \\ E_x^{(j)} \end{pmatrix} = \frac{1}{(2\pi)^2} \iint_{-\infty}^{\infty} F_j(\xi, \eta) U_j^{(j)}(\xi, \eta; y, z) e^{-i(\xi x + \eta y)} d\xi d\eta. \quad (8.8.5)$$

Здесь индекс j соответствует H - или E -поляризованному полю, $i = 1, 2, \dots, N$ — индекс области пространства, где ищется рассеянное поле, $U_j^{(j)}(\xi, \eta; y, z)$ — искомые функции, которые должны обеспечивать подчинение полного поля волны однородному уравнению Гельмгольца, условиям излучения и необходимым граничным условиям на препятствии. Периодичность структур позволяет искать функции $U_j^{(j)}(\xi, \eta; y, z)$ в виде рядов Фурье типа

$$U_j^{(j)}(\xi, \eta; y, z) = \sum_{s=-\infty}^{\infty} [\alpha_{sj}^{(j)} e^{-iq_s(z-\delta)} + \beta_{sj}^{(j)} e^{iq_s z}] e^{i2\pi s y / l}, \quad (8.8.6)$$

где δ — «толщина» неоднородности (высота брусьев, пластин, слоя)

$$q_s = \sqrt{k^2 - \xi^2 - \left(-\eta + \frac{2\pi s}{l}\right)^2} \quad (\text{Re } q_s \geq 0, \text{Im } q_s \geq 0).$$

Можно показать, что при использовании разложения типа (8.8.5) и (8.8.6) для падающего и дифрагированного полей, проблема рассеяния волнового пучка на неоднородности сводится к рассмотрению задачи дифракции отдельной парциальной плоской волны, произвольно падающей на это препятствие и имеющей амплитуду $F_j(\xi, \eta)$. После отыскания значений $\alpha_{sj}^{(j)}$ и $\beta_{sj}^{(j)}$ для всех ξ, η в результате решения граничной задачи, осуществляется обратный переход от интегрального представления дифрагированного поля к аналитическим выражениям типа (8.8.1).

Наиболее простой вид эти выражения имеют в случае резонансных условий, когда коэффициент прохождения плоской волны через данную структуру принимает максимальное значение (ср. § 1.2). Его оказывается возможным представить в следующем виде:

$$\alpha_0^N(\xi, \eta) = a(g) \exp\left\{i \frac{\xi^2 + \eta^2}{2k} \psi(g)\right\},$$

где g — совокупность геометрических параметров конкретной периодической структуры; $a(g), \psi(g)$ — функции, зависящие только от g , и не зависящие от ξ, η .

Так, например, в случае H -поляризованной части поля для

- а) ленточной решетки при $|(2l/\lambda) \ln \sin(\pi d/2l)| < 1$
 $a(g) = \exp\{i(2l/\lambda) \ln \sin(\pi d/2l)\}$, $\psi(g) = -(l/2\pi) \ln \sin(\pi d/2l)$;
- б) двойной равнопериодной равнощелевой ленточной решетки при $|(2l/\lambda) \ln \sin(\pi d/2l)| < 1$ и $2\delta = (2M + 1) \lambda/2 + (\lambda/\pi) \operatorname{arc} \operatorname{tg} [(4l/\lambda) \ln \sin(\pi d/2l)]$
 $a(g) = i$, $\psi(g) = \delta + (2l/\pi) \ln \sin(\pi d/2l)$, $M = 0, 1, 2, \dots$;
- в) решетки из металлических бурсев прямоугольного поперечного сечения при $|(2l/\lambda) \ln \sin(\pi d/2l)| < 1$, $d/l \ll 1$, $\delta = \lambda M$, $M = 1, 2, \dots$
 $a(g) = -\exp\{-ik(\delta/2 + (l/\pi) \ln \sin(\pi d/2l))\}$, $\psi(g) = \delta/2 + (l/\pi) \ln \sin(\pi d/2l)$;
- г) «ножевой» решетки при $l/\lambda < 1/2$, $\delta = M\lambda/2 + 2l \ln 2/\pi$, $\delta/2l \gg 1$
 $a(g) = \exp\{ik\delta/2\pi\}$, $\psi(g) = \delta/2 - (l/\pi) 2 \ln 2$;
- д) диэлектрического слоя при $\delta = \lambda_g/2M$, $M = 1, 2, \dots$
 $a(g) = 1$, $\psi(g) = \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2\epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1}$;
- е) диэлектрической пленки ($\delta \rightarrow 0$)
 $a(g) \simeq \exp\{ik\delta(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2 \sqrt{\epsilon_1}\}$, $\psi(g) \simeq \delta(\epsilon_1 + \epsilon_2)/2\epsilon_2 \sqrt{\epsilon_1}$,

где d — ширина щелей решетки, l — период решетки, λ_g — длина волны в диэлектрике ϵ_2 .

Для получения аналитических выражений дифрагированного поля в [209] используется представление его в виде произведения сверток двух функций. Тогда в случае максимального прохождения волнового пучка дифрагированное поле будет иметь, например, для основного типа колебаний следующий вид:

$$f_j(x, y, z) = a(g) \exp\{-ik(z - \delta)\} \exp\left\{-\frac{(k/2)(x^2/\Delta_x + y^2/\Delta_y)}{\lambda \sqrt{\Delta_x \Delta_y}}\right\} \quad (8.8.7)$$

где $\Delta_x(z) = A_0 - i[z - \delta + \psi(g)]$, $\Delta_y(z) = B_0 - i(z - \delta + \psi(g))$,

A_0, B_0 — характеристические параметры пучка, пропорциональные ширине пятна пучка при $z = 0$.

Аналогичные формулы получаются для пучков высших порядков, когда амплитудное распределение описывается функциями Гаусса — Эрмита.

Анализ полученных выражений для дифрагированного поля позволяет сделать ряд интересных физических выводов.

1. Если падающий на дифракционную решетку пучок имеет гауссово распределение на ее поверхности, то при определенных (для каждого типа решетки) условиях он сохраняет свою структуру и после прохождения решетки, т. е. остается гауссовым. Происходит лишь изменение характеристик волнового пучка.

2. Поскольку структура пучка сохраняется при определенных соотношениях между длиной падающей волны и параметрами решетки, то дифракционная решетка может играть роль фильтра как типов колебаний, так и поляризаций волновых пучков.

3. Выбирая геометрию решетки надлежащим образом, можно управлять параметрами волнового пучка, изменяя их в нужном направлении. В частности, можно указать на одно из применений дифракционных решеток в квазиоптических линиях передач в качестве фазового корректора.

ТАБЛИЦЫ

Таблица 1

Коэффициенты β' , β''_H , β''_E (одиночный открытый резонатор)

q	β'	β''_H	β''_E	q	β'	β''_H	β''_E
1	0,77144	1,4504	0,3220	26	82187	0,9368	7155
2	79613	2533	4554	27	82195	9347	7175
3	80508	1697	5183	28	82203	9326	7194
4	80969	1210	5568	29	82211	9307	7212
5	0,81250	1,0882	0,5835	30	0,82218	0,9289	0,7229
6	81439	0642	6035	31	82225	9271	7245
7	81575	0456	6192	32	82231	9255	7260
8	81678	0308	6319	33	82237	9239	7275
9	81759	0186	6424	34	82242	9224	7289
10	0,81823	1,0082	0,6514	35	0,82247	0,9210	0,7302
11	81876	0,9994	6592	36	82252	9196	7315
12	81920	9917	6660	37	82257	9183	7328
13	81958	9849	6720	38	82262	9170	7339
14	81990	9789	6773	39	82266	9158	7351
15	0,82018	0,9735	0,6822	40	0,82270	0,9146	0,7362
16	82043	9687	6866	41	82274	9135	7372
17	82064	9642	6905	42	82277	9124	7383
18	82084	9602	6942	43	82281	9113	7392
19	82101	9565	6976	44	82284	9103	7404
20	0,82117	0,9530	0,7007	45	0,82288	0,9093	0,7411
21	82131	9498	7036	46	82291	9084	7420
22	82144	9469	7063	47	82294	9075	7429
23	82156	9441	7088	48	82297	9066	7437
24	82167	9415	7112	49	82299	9057	7445
25	0,82177	0,9391	0,7134	50	0,82302	0,9049	0,7453
				∞	0,82400	0,8240	0,8240

Таблица 2

Коэффициенты β' , β''_H , β''_E (система открытых дифракционно связанных резонаторов)

q	$\eta = 0,000$			$\eta = 0,025$		
	β'	β''_H	β''_E	β'	β''_H	β''_E
1	0,4170	1,1284	0,0000*	0,4188	1,1298	0,0014
3	4584	0,8345	1813	4602	0,8361	1846
5	4679	7504	2458	4695	7521	2474
7	4720	7069	2804	4737	7085	2820
9	4743	6792	3031	4760	6809	3047
11	0,4758	0,6597	0,3195	0,4775	0,6613	0,3211
13	4769	6450	3320	4785	6426	3337
15	4776	6334	3420	4793	6310	3437
17	4782	6240	3504	4789	6216	3519
19	4787	6161	3572	4803	6137	3589
21	0,4790	0,6094	0,3632	0,4807	0,6110	0,3608
23	4794	6034	3683	4800	6012	3700
25	4796	5985	3728	4803	6002	3705
27	4798	5940	3789	4805	5947	3785
29	4800	5900	3805	4807	5907	3821
31	0,4802	0,5864	0,3838	0,4809	0,5881	0,3844
33	4804	5832	3867	4820	5848	3884
35	4805	5802	3894	4821	5808	3901
37	4806	5774	3919	4823	5791	3926
39	4807	5749	3942	4824	5769	3969
41	0,4808	0,5726	0,3964	0,4825	0,5743	0,3980
43	4809	5704	3984	4825	5721	4000
45	4810	5684	4002	4826	5701	4019
47	4810	5666	4020	4827	5682	4036
49	4811	5648	4036	4828	5664	4052
51	0,4812	0,5631	0,4051	0,4828	0,5648	0,4068

q	$\eta = 0,050$			$\eta = 0,075$		
	β'	β''_H	β''_E	β'	β''_H	β''_E
1	0,4242	1,1341	0,0057	0,4333	1,1413	0,0121
3	4653	0,8409	1894	4741	0,8409	1975
5	4747	7569	2523	4833	7551	2695
7	4788	7134	2869	4874	7217	2952
9	4811	6858	3097	4896	6941	3180
11	0,4825	0,6663	0,3261	0,4911	0,6746	0,3344
13	4836	6516	3386	4921	6599	3470
15	4843	6400	3487	4928	6484	3575
17	4849	6306	3569	4934	6389	3653
19	4854	6227	3638	4939	6311	3722
21	0,4857	0,6160	0,3698	0,4942	0,6244	0,3782
23	4860	0,6102	3749	4945	6186	3833

q	$\eta = 0,050$			$\eta = 0,075$		
	β'	β''_H	β''_E	β'	β''_H	β''_E
25	4863	6051	3795	4948	6135	3879
27	4865	6007	3835	4950	6091	3919
29	4867	5967	3871	4952	6051	3955
31	0,4869	0,5931	0,3904	0,4954	0,6015	0,3988
33	4870	5898	3934	4955	5982	4018
35	4872	5868	3961	4956	5952	4045
37	4873	5841	3986	4957	5925	4070
39	4874	5816	4009	4958	5900	4093
41	0,4875	0,5792	0,4030	0,4959	0,5877	0,4114
43	4876	5771	4050	4960	5855	4134
45	4876	5751	4069	4961	5835	4153
47	4877	5732	4086	4962	5816	4170
49	4878	5714	4102	4962	5798	4186
51	0,4878	0,5698	0,4118	0,4963	0,5782	0,4202

q	$\eta = 0,1$			$\eta = 0,2$		
	β'	β''_H	β''_E	β'	β''_H	β''_E
1	0,4464	1,1516	0,0233	0,5453	1,1516	0,1028
3	4866	0,8605	2090	5813	0,9482	2968
5	4956	7769	2723	5892	8662	3616
7	4996	7335	3071	5926	8235	3971
9	5019	7060	3299	5945	7964	4202
11	0,5033	0,6866	0,3463	0,5958	0,7771	0,4369
13	5043	6719	3589	5966	7626	4497
15	5050	6604	3690	5972	7512	4588
17	5056	6509	3773	5977	7418	4682
19	5060	6431	3842	5981	7341	4752
21	0,5064	0,6364	0,3902	0,5984	0,7274	0,4812
23	5067	6306	3953	5987	7217	4864
25	5069	6255	3999	5989	7167	4910
27	5071	6211	4039	5991	7122	4951
29	5073	6171	4075	5992	7083	4987
31	0,5075	0,6153	0,4108	0,5994	0,7047	0,5020
33	5076	6102	4138	5995	7014	5050
35	5077	6072	4165	5996	6985	5078
37	5078	6045	4190	5997	6958	5103
39	5079	6020	4213	5998	6933	5125
41	0,5083	0,5997	0,4235	0,5998	0,6910	0,5148
43	5081	5975	4255	5999	6888	5168
45	5082	5955	4273	6000	6868	5186
47	5083	5936	4291	6000	6850	5204
49	5083	5919	4307	6001	6832	5220
51	0,5084	0,5902	0,4322	0,6001	0,6816	0,5236

* См. текст после формулы (4.2.6).

Эта книга посвящена установлению *локальных граничных условий* на поверхностях двух типов — на периодических поверхностях с периодом, малым по сравнению с длиной волны, и на поверхностях, ограничивающих высокодобротные открытые резонаторы. Найденные граничные условия использованы для решения ряда задач.

Локальность является проявлением каких-либо «сил близкого действия» — факторов, действие которых на поле не зависит от того, что происходит вдали. Простейшим примером локальности является существование диэлектрической проницаемости ϵ диэлектрика (в частности — искусственного), характеризующей данный объем тела в любом поле и вблизи любых других тел. Среда описывается величиной ϵ в тех телах и в таких полях, в которых связь между D и E полностью определяется дифракцией в малой области, в так называемом *физически бесконечно малом объеме*. Граничные условия Леонтовича на поверхности хорошего металла тоже выполняются вследствие существования *малого параметра* $1/|\epsilon|$. И здесь некоторые свойства поля не зависят от того, какой вид это поле имеет вдали. Эти свойства удается представить в виде линейной связи между полями — т. е. в виде локальных граничных условий. Та же ситуация имеет место вблизи решетки — существование так называемых *граничных условий анизотропной проводимости* (условия Владимирского) являются проявлением того факта, что при малом периоде структура поля вблизи решетки и, в частности, соотношение между полями по обе стороны решетки не зависят от полей вдали.

Иногда в полном виде такая локальность не имеет места. В первом примере, если ϵ зависит от частоты, то соотношение между D и E не зависит от внешних условий только для полей с вполне определенной — гармонической — зависимостью от времени. В средах с пространственной дисперсией локальность имеет место только для плоских волн, и ϵ зависит от направления волнового вектора. Это обычно означает, что параметр малости, определяющей локальность, недостаточно мал. Существуют, например, граничные условия на поверхности металла, уточняющие условия Леонтовича и справедливые при менее жестком требовании на малость величины $1/|\epsilon|$, но выполняющиеся также только для плоских волн.

Полученные и использованные в первой части книги *граничные условия зависят от частоты*. Они в этом смысле менее локальны, чем граничные условия модели анизотропной проводимости. Эта потеря общности есть неизбежная плата за уточнение граничных условий — *они содержат отношение периода к длине волны* и являются следствием решения задачи дифракции на «физически бесконечно малом объеме», имеющем размер порядка периода. В особом случае возникает и ситуация типа пространственной дисперсии — например, для решетки с коэффициентом заполнения q , близком к единице, граничные условия являются локальными только для плоских волн (и содержат направление волнового вектора). Наличие еще одного параметра малости ($1-q$) вызывает увеличение области действия «близкодействующих сил», делает размер этой области много большим размера периода, локальность ослабляется.

Основой локальных граничных условий (импедансного типа, как для гофры, или типа сопряжения, как для решетки) является *разделение задачи дифракции на две*. Тела, на которых происходит дифракция, группируются в блоки, задача решается сначала для изолированных блоков, затем — для их совокуности. Эта программа осуществима только для нескольких структур.

Несколько неожиданным является существование локальных — точнее, почти локальных — граничных условий, установленных и использованных в главах 4, 7, 8. Периоды здесь не малы. Независимость структуры поля на границе от поля вдали обязана высокой добротности открытых резонаторов, примыкающих к границе. Эта независимость основана на следующем факте, центральном в этом круге вопросов, — два плоских зеркала, расположенных друг против друга, образуют высокодобротный резонатор. Как и поле в закрытом высокодобротном резонаторе, поле на цилиндрической поверхности, соединяющей края зеркал (это — открытая, незаметаллизируемая поверхность), мало чувствительно к тому, как возбуждается резонатор. Этот факт и позволил авторам установить локальные граничные условия на поверхности, ограничивающей цепочку открытых резонаторов. «Силой близкого действия» здесь является *сильная связь двух краев открытого конца волновода*.

Математический аппарат первой части — уравнение Лапласа и оказавшаяся весьма нетривиальной процедура перехода вдали от решетки предельных значений решений этого уравнения в решении волновых уравнений. *Математический аппарат второй части — метод Винера — Хопфа и асимптотическая теория широких волноводов*. После того как эквивалентные граничные условия установлены, их применение позволяет при решении конкретных задач использовать значительно более простой стандартный аппарат волноводной электродинамики.

Первые результаты, уточняющие для частопериодических решеток граничные условия Владимирского, были получены лет 30

тому назад, и материал первой части книги можно считать, по-видимому, в основном установившимся. Вероятно, дальнейшие работы будут уже посвящены конкретным формам проводов, гофры, конкретным волноводным задачам. Первые результаты по открытым резонаторам имеют примерно вдвое меньшую давность. Вторая часть является введением в новую тему — периодические структуры из открытых резонаторов. По этой теме еще многое предстоит сделать.

Эта книга написана физиками. С этим безусловно согласится, например, специалист по функциональному анализу. Однако для физика-экспериментатора или конструктора электронных приборов и элементов сантиметрового тракта — это математическая монография. Для кого написана книга?

После того, как установлен объем и характер материала предполагаемой книги, самым важным для авторов становится вопрос о том, надо ли — и если надо, то в какой степени — писать ее таким образом, чтобы она была доступна научным работникам смежных областей, т. е. людям с другой терминологической базой и с другими критериями строгости и эффективности. Чем более специальным языком написана книга, тем уже круг лиц, которым она доступна, но зато она тем удобнее и экономнее для этого круга лиц. В пределе книга доступна только авторам и им как читателям она представляется написанной идеально, без какой-либо избыточной информации. Если пользоваться при написании книги языком более общим, то понятна и интересна она будет и специалистам смежных профессий. В пределе книга будет понятна всем и не будет содержать никакой информации. Практическое значение имеет только одно — с какой стороны от оптимума мы находимся в настоящее время. По моему мнению, «в среднем» имеет место сильное смещение к первому из упомянутых пределов. В ряде случаев он уже почти достигнут. Разумеется, мнение это субъективно и недоказуемо.

Многочисленные повторенные соображения о плодотворности взаимных контактов специалистов смежных — и не очень смежных — профессий ни в коей мере не потеряли своей актуальности. Для осуществления этих контактов нужно, в частности, чтобы авторы монографий добровольно снижали терминологические барьеры. Это требует немалого труда, терпения, умения и, главное, значительно большей эрудиции, чем свободное и широкое использование специальных терминов. Это понижает эффективность работы. Зато повышается ее интегральная эффективность. Под этим специальным термином я понимаю некоторую неформализуемую величину, равную интегралу от пользы, которую читатель извлекает из книги, взятому по всему множеству лиц, которые книгу откроют. Чем проще книга, тем тяжелее ее писать и легче читать.

Авторы этой книги продемонстрировали в этом отношении довольно много доброй воли. Поэтому я надеюсь, что она будет

полезной и математикам, и физикам. Разумеется, чтение ее представляет собой труд, и иногда нелегкий. Но зато читатель получит много новой информации — иногда строго доказанной, иногда весьма эффективной в конкретных задачах, а иногда даже соединяющей в себе эти два (вообще говоря, противоречивых) свойства.

Цель этой книги состоит, в частности, в том, чтобы облегчить более корректный, чем обычно, расчет приборов, элементами которых являются периодические структуры. В практическом плане книга адресована, в первую очередь, специалистам по электронике. В отличие от конструкторов, занимающихся периодическими линиями с быстрыми волнами, специалисты по электронике неохотно вводят в теорию мелкопериодических замедляющих структур что-либо более сложное, чем модель анизотропной проводимости. Для расчета же периодических поверхностей, ограничивающих цепочку открытых резонаторов, вообще, по-видимому, не существовало достаточно общего аппарата.

Б. Каценеленбаум

ЛИТЕРАТУРА

1. Фок В. А. Проблемы дифракции и распространения электромагнитных волн. М., «Сов. радио», 1970.
2. Вуд Р. Физическая оптика. Л.— М. ОНТИ, 1936.
3. Страттон Дж. Теория электромагнетизма. М.— Л., ГИТТЛ, 1948.
4. Бресовский Л. М. Волны в слоистых средах. М., Изд-во АН СССР, 1957.
5. Бриллюэн Л., Пароди М. Распространение волн в периодических структурах. М., ИЛ, 1959.
6. Морс Ф., Фешбах Г. Методы теоретической физики. М., ИЛ, т. 1, 1958; т. 2, 1960.
7. Казначеев Ю. И. Широкополосная дальняя связь по волноводам. М., Изд-во АН СССР, 1959.
8. Ваганов Р. Б., Матвеев Р. Ф., Мериакри В. В. Многоволновые волноводы со случайными нерегулярностями. М., «Сов. радио», 1972.
9. Гроднев И. И., Исаенко Ю. М., Малин В. В. Волноводы дальней связи. М., «Связь», 1972.
10. Вайнштейн Л. А. Электромагнитные волны. М., «Сов. радио», 1957.
11. Михалевский В. С. Элементы теории СВЧ замедляющих систем. Изд-во Ростовского ун-та, 1964.
12. Марченко В. А., Хруслев Е. Я. Краевые задачи в областях с мелкозернистой границей. Киев, «Наукова думка», 1974.
13. Силин Р. А., Сазонов В. П. Замедляющие системы. М., «Сов. радио», 1966.
14. Вайнштейн Л. А., Солнцев В. А. Лекции по СВЧ электронике. М., «Сов. радио», 1973.
15. Советов Н. М. Техника сверхвысоких частот. М., «Высшая школа», 1976.
16. Миллиметровые и субмиллиметровые волны. М., ИЛ, 1959.
17. Болотовский Б. М., Воскресенский Г. В. Дифракционное излучение.— УФН, 1966, 88, № 2. Излучение заряженных частиц в периодических структурах.— УФН, 1968, 94, № 3.
18. Русин Ф. С., Богомолов Г. Д. Оротрон как генератор миллиметрового диапазона.— В кн.: Электроника больших мощностей, вып. 5. М., «Наука», 1968.
19. Русин Ф. С. Линейная теория оротрона.— В кн.: Электроника больших мощностей, вып. 5. М., «Наука», 1968.
20. Шестопалов В. П. Дифракционная электроника. Изд-во ХГУ, 1976.
21. Авдеев Е. В., Воскресенский Г. В. Излучение заряженной нити, движущейся равномерно вблизи гребенчатой структуры; общее решение. РиЭ, 1967, 12, № 3.
22. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Возбуждение цепочки ленточных открытых резонаторов плоским электронным потоком. Тезисы докл. VI межвуз. конф. по электронике СВЧ, Минск, 1969.
23. Литвиненко Л. И. и др. Возбуждение электронным пучком плоского резонатора, содержащего дифракционную решетку.— Изв. вузов. Радиофизика, 1969, 12, № 5.
24. Нефедов Е. И. Коаксиальный оротрон.— Изв. вузов. Радиофизика, 1977, 20, № 12.
25. Векслер В. И., Саранцев В. П. Коллективное дипольное ускорение ионов.— Атомная энергия, 1968, 24, № 4.
26. Вальднер О. А., Собенин Н. П., Зверев Б. В., Щедрин И. С. Справочник по дифрагмированным волноводам. М., Атомиздат, 1969.
27. Бурштейн Э. Л., Воскресенский Г. В. Линейные ускорители электронов с интенсивными пучками. М., Атомиздат, 1970.
28. Фельд Я. Н. Основы теории щелевых антенн. М., «Сов. радио», 1948.
29. А. Ф. Иоффе. О физике и физиках. Л., «Наука», 1977.
30. Айзенберг Г. З. Антенны ультракоротких волн. М., Связьиздат, 1957.
31. Фрадин А. З. Антенны сверхвысоких частот. М. «Сов. радио», 1957.
32. Марков Г. Т. Антенны. М.— Л., Госэнергоиздат, 1960.
33. Вспомогательные элементы волноводных устройств. Обзор иностр. патентов. Под ред. А. И. Жулева. М., 1963.
34. Фельд Я. Н. Дифракция электромагнитной волны на двойных полубесконечных несимметричных решетках.— РиЭ, 1964, 9, № 6.
35. Антенные решетки. Обзор зарубеж. работ. Под ред. Л. С. Бененсона. М., «Сов. радио», 1966.
36. Марков Г. Т., Чалин А. Ф. Возбуждение электромагнитных волн. М.— Л., «Энергия», 1967.
37. Уолтер К. Антенны бегущей волны. М., «Энергия», 1970.
38. Завадский В. Ю. Вычисление волновых полей в открытых областях и волноводах. М., «Наука», 1972.
39. Lovis D. Wellenausbreitung auf offenen periodischen Scheibenleitungen.— AEU, 1972, 26, N 9.
40. Жук М. С., Молочков Ю. Б. Проектирование линзовых, сканирующих, широкодиапазонных антенн и фидерных устройств. М., «Энергия», 1973.
41. Тихонов А. Н., Дмитриев В. И., Чечкин А. В., Березина Н. И. Развитие вариационных методов решения задач синтеза антенн.— В кн.: Вычислительные методы и программирование. Изд-во МГУ, 1973.
42. Амтейн Н., Галиндо В., Ву Ч. Теория и анализ фазированных антенных решеток. М., «Мир», 1974.
43. Бахрах Л. Д., Кременецкий С. Д. Синтез излучающих систем. М., «Сов. радио», 1974.
44. Курушин Е. П., Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Дифракция электромагнитных волн на анизотропных структурах. М., «Наука», 1975.
45. Калица П. Л. Преобразователи волн H в волны E .— В кн.: Электроника больших мощностей, вып. 4. М., «Наука», 1965.
46. Борн М., Вольф Э. Основы оптики. М., «Наука», 1970.
47. Техника субмиллиметровых волн. М., «Сов. радио», 1969.
48. Кольер Р., Беркхарт К., Лин Л. Оптическая голография, ч. 2. М., «Мир», 1973.
49. Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т. Асимптотическая теория дифракции электромагнитных волн на конечных структурах. М., «Наука», 1972.
50. Christian I., Goubau G. Some measurements on an iris beam waveguide.— Proc. IRE, 1961, 49, N 11.
51. Басов Н. Г., Беленов Э. М., Летохов В. С. Дифракционная синхронизация оптических квантовых генераторов.— ДАН СССР, 1965, 161, № 3; ЖТФ, 1965, 35, № 6.
52. Летохов В. С. Дифракционные потери открытого резонатора из зеркал с поглощающей полосой.— ЖТФ, 1965, 35, № 5.
53. Виноградов Е. А., Дианов Е. М., Ирисова Н. А. Интерферометр Фабри — Перо короткого миллиметрового и субмиллиметрового диапазонов с металлическими сетками, имеющими период, меньший длины волны.— Письма в ЖЭТФ, 1965, 2, № 7.
54. Андреев В. Г. Открытый объемный резонатор для электромагнитных колебаний радиотехнического диапазона волн.— ЖТФ, 1966, 36, № 10.
55. Курушин Е. П., Нефедов Е. И. К теории связанных открытых резонаторов.— Укр. физ. журн., 1967, 12, № 6. To the theory coupled open resonators.— Proc. 3rd Conf. Microwave Communis., Budapest, 1968.
56. Веселков Г. П., Войтович Н. Н., Нефедов Е. И. Открытые резонаторы с

отверстиями на зеркалах и дифракционной связью.— Аннот. докл. V Всесоюз. симп. по дифр. и распротр. волн. Изд-во ЛГУ, 1970.

57. *Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т.* Дифракция плоской электромагнитной волны на бесконечной системе параллельных металлических полос. Общая теория.— РиЭ, 1970, 15, № 11. Дифракция плоской электромагнитной волны на системе связанных плоских открытых резонаторов. Численные результаты.— РиЭ, 1970, 15, № 12.
58. *Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т.* Система параллельных связанных идентичных плоских ленточных открытых резонаторов с произвольным расстоянием между зеркалами.— РиЭ, 1974, 19, № 2.
59. *Масалов С. А., Сологуб В. Г.* Строгое решение задачи о дифракции электромагнитных волн на одной ленточной структуре.— ЖВММФ, 1970, 10, № 3.
60. *Nefyodov Ye. I., Fialkovsky A. T.* Asymptotic theory of diffracting by finite structures.— «Electromagnetic wave theory», Intern. Sympos., USSR, Tbilisi, 1971.
61. *Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т.* Открытый резонатор.— Авт. свид. № 362380 от 5.VII 1971. Бюл. изобрет., 1973, № 2, 121.
62. *Казанцев Ю. П., Удалов В. В.* Трубочато-диафрагменный волновод.— Изв. вузов. Радиофизика, 1972, 15, № 10.
63. *Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т., Чайка В. Е.* Открытый коаксиальный резонатор.— Авт. свид. № 449405 от 25.IX 1972. Бюл. изобрет., 1974, № 41, с. 122.
- ✓ 64. *Силин Р. А.* Оптические свойства искусственных диэлектриков (обзор).— Изв. вузов. Радиофизика, 1972, 15, № 6.
65. *Chessacci P. F., Falciai R., Scheggi A.* Phase step beam waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1972, 20, N 9.
66. *Kent W. H., Lee S. W.* Diffraction by an infinite array of parallel strips.— J. Math. Phys., 1972, 13, N 12.
67. *Вершинина Л. Н., Сивов А. Н.* Периодическая решетка с переменной прозрачностью.— РиЭ, 1973, 18, № 10. Квазиоптические элементы из частопериодических решеток.— В кн.: Теория дифракции и распространения волн, т. 2. Москва — Ереван, «Наука», 1973.
68. *Веселков Г. П., Нефедов Е. И., Российский И. М., Храпко А. М.* Расчет и экспериментальное исследование открытого коаксиального цилиндрического резонатора.— Электроника СВЧ, 1973, № 8.
69. *Нефедов Е. И., Российский И. М., Храпко А. М.* Открытый коаксиальный резонатор.— Авт. свид. № 472408 от 30.VII 1973. Бюл. изобрет., 1975, № 20, с. 118.
70. *Нефедов Е. И., Удалов В. В., Ваганов Р. Б.* Прямоугольный волновод, изогнутый в плоскости H.— Авт. свид. № 488273 от 16.IV 1973. Бюл. изобрет., 1975, № 38.
71. *Удалов В. В., Нефедов Е. И.* Анализ распространения быстрых электромагнитных волн типа H_{m0} в широком прямоугольном волноводе с решетками.— РиЭ, 1973, 18, № 12.
72. *Chessacci P. F., Scheggi A. M.* Metallic frame beam waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 10.
73. *Ulrich R., Tacke M.* Submillimeter waveguiding on periodic metal structure.— Appl. Phys. Lett., 1973, 22, N 5.
74. *Веселков Г. П., Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т.* К теории регулярной диафрагменной линии.— РиЭ, 1974, 19, № 3.
75. *Нефедов Е. И., Российский И. М., Фиалковский А. Т.* Возбуждение открытого коаксиального резонатора через продольные щели в поверхности внутреннего цилиндра.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1974, 17, № 1.
76. *Нефедов Е. И., Российский И. М., Фиалковский А. Т., Храпко А. М.* Открытый коаксиальный резонатор с цилиндрическим внешним зеркалом и внутренним зеркалом в виде гиперболоида вращения.— РиЭ, 1974, 19, № 12.
77. *Нефедов Е. И.* Открытые коаксиальные резонансные структуры.— Квантовая электроника, 1974, 1, № 12.
78. *Нефедов Е. И., Храпко А. М.* Открытый коаксиальный перестраиваемый резонатор. Экспериментальное исследование.— Электроника СВЧ, 1974, № 12.
79. *Chessacci P. F., Falciai R., Scheggi A. M.* Modes and losses of a four-mirror ring resonator.— IEEE Trans. MTT, 1974, 22, N 7.
80. *Ильинский А. С., Лебедева О. А., Нефедов Е. И.* Учет толщины зеркал в системе параллельных ленточных открытых резонаторов.— РиЭ, 1976, 21, № 5.
81. *Ильинский А. С., Нефедов Е. И.* Теория диафрагменной линии, образованной отверстиями в экранах конечной толщины.— РиЭ, 1977, 22, № 4.
82. *Маложинец Г. Д., Винель Г. В.* Примеры симметричных задач дифракции на полупрозрачных пластинах — Аннот. докл. II Всесоюз. симп. по дифракции волн. М., Изд-во АН СССР, 1962.
83. *Сологуб В. Г.* Дифракция плоской волны на ленточной решетке в случае коротких волн.— ЖВММФ, 1972, 12, № 4.
84. *Ильинский А. С.* Метод исследования задач дифракции волн на периодической структуре.— ЖВММФ, 1974, 14, № 4.
85. *Конторович М. И.* Усредненные граничные условия для сетки, состоящей из непараллельных и непрямолинейных проводников, расположенных на неплоской поверхности.— РиЭ, 1972, 17, № 6.
86. *Конторович М. И., Жуков А. Д.* Об усредненных граничных условиях для плоской ортогональной сетки из тонких проводников.— РиЭ, 1973, 18, № 12.
87. *Гринберг Г. А.* Избранные вопросы математической теории электрических и магнитных явлений. М.— Л., Изд-во АН СССР, 1948.
88. *Елинсон М. И.* Фундаментальные проблемы в микроэлектронике и научно-технический прогресс.— Микроэлектроника, 1972, 1, № 1.
89. *Маттей Д. Л., Янг Л., Джонс Е. М. Т.* Фильтры СВЧ, согласующие цепи и цепи связи. М., «Связь», т. 1, 1971; т. 2, 1972.
90. *Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т.* Полосковые линии передачи. Теория и расчет типичных неоднородностей. М., «Наука», 1974 *.
91. *Малорацкий Л. Г., Явич Л. Р.* Проектирование и расчет СВЧ элементов на полосковых линиях. М. «Сов. радио», 1972.
92. *Wu Y. S., Rosenbaum F. J.* Mode chart for microstrip ring resonators.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 7.
93. *Фельд Я. Н., Свистунов Г. А., Кюркчан А. Ш., Леонтьев А. С.* Дифракция электромагнитной волны на системе плоскопараллельных волноводов конечной длины.— РиЭ, 1973, 18, № 5.
94. *Нобл Б.* Метод Винера — Хопфа. М., ИЛ, 1962.
95. *Вайнштейн Л. А.* Теория дифракции и метод факторизации. М., «Сов. радио», 1966.
96. *Хёль Х., Мауэ А., Вестпфаль К.* Теория дифракции. Пер. с нем. под ред. Г. Д. Маложинца. М., «Мир», 1964.
97. *Агронович Э. С., Марченко В. А., Шестопалов В. П.* Дифракция магнитных волн на плоских металлических решетках.— ЖТФ, 1962, 32, № 4.
98. *Шестопалов В. П.* Метод задачи Римана — Гильберта в теории дифракции и распространения электромагнитных волн. Изд-во ХГУ, 1971.

* В настоящее время готовится к выпуску 2-е издание (М., «Наука», 1978) «Полосковых линий передачи». От первого издания второе отличается весьма существенно. Полученные за последние годы авторами результаты, в особенности касающиеся теории несимметричного полоскового волновода, позволяют говорить о создании серьезной электродинамической основы для систем машинного проектирования интегральных схем СВЧ [217, 218]. Ряд результатов найдет свое применение при расчетах пассивных и активных опто- и акустоэлектронных структур.

99. Шестопалов В. П., Литвиненко Л. Н., Маслов С. А., Сологуб В. Г. Дифракция волн на решетках. Изд-во ХГУ, 1973.
100. Малюжинец Г. Д. Некоторые обобщения метода отражений в теории дифракции синусоидальных волн. Автореф. докт. дис., М., 1951.
101. Малюжинец Г. Д. Возбуждение, отражение и излучение поверхностных волн на клине с заданными импедансами граней.— ДАН СССР, 1958, 121, № 3.
102. Малюжинец Г. Д. Развитие представления о явлениях дифракции.— УФН, 1959, 69, № 2.
103. Миллер М. А., Таланов В. И. Использование понятия поверхностного импеданса в теории поверхностных волн.— Изв. вузов. Радиофизика, 1961, 4, № 5.
104. Стретт Дж. В. (лорд Рэлей). Теория звука, т. 2. М., ГИТТЛ, 1955.
105. Лэмб Г. Гидродинамика. М., ОГИЗ, 1947.
106. Седов Л. И. Плоские задачи гидродинамики и аэродинамики. М.— Л., ГИТТЛ, 1950.
107. Роу Дж. Теория нелинейных колебаний в приборах СВЧ, М., «Сов. радио», 1969.
108. Зоммерфельд А. Электродинамика. М., ИЛ, 1958.
109. Бондаренко Н. Г., Таланов В. И. Некоторые вопросы теории квазиоптических систем.— Изв. вузов. Радиофизика, 1964, 7, № 2.
110. П. Л. Капица. Эксперимент, теория, практика. М., «Наука», 1977.
111. Каценеленбаум Б. З. Высокочастотная электродинамика. М., «Наука», 1966.
112. Morgan S. P., Yäong I. A. Helix waveguide.— BSTJ, 1956, 35, N 6.
113. Керженцева Н. П., Волкова Т. П. О распространении быстрых волн в спиральном волноводе с диэлектрической оболочкой и металлическим экраном.— РиЭ, 1960, 5, № 11.
114. Конторович М. И. Применение метода усреднения полей к исследованию некоторых электрических систем. Автореф. докт. дис. Л., Ленингр. политехн. ин-т, 1940.
115. Малюжинец Г. Д. Средние краевые условия на плоскости, определяющие дальнейшее поле при дифракции длинных волн на частой акустически жесткой решетке.— Труды I симп. по дифракции волн. Одесса, 1960.
116. Майжес Б. Я. Электродинамические усредненные граничные условия для металлических сеток.— ЖТФ, 1955, 25, № 1. К теории распространения электромагнитных волн в спирали.— ЖТФ, 1958, 28, № 6.
117. Смирнов Н. Н. Распространение волн вдоль бесконечно длинной спирали.— ДАН СССР, 1956, 108, № 2. Распространение электромагнитных волн в круглых волноводах с периодическими щелями.— ЖТФ, 1958, 28, № 7.
118. Каценеленбаум Б. З. Затухание волн H_{0n} в спиральном волноводе. РиЭ, 1959, 4, № 3.
119. Малин В. В., Сивов А. Н. К теории распространения волны H_{01} в спиральном волноводе.— РиЭ, 1959, 4, № 3.
120. Вайнштейн Л. А. К электродинамической теории решеток.— В кн.: Электроника больших мощностей, вып. 2, ч. 1, с. 26—56; ч. 2, с. 57—74. М., «Наука», 1963.
121. Unger H. G. Helix waveguide. Theory and application.— BSTJ, 1958, 37, N 6.
122. Richmond H. W. On the electrostatic field of a plane or circular grating formed of rounded bars.— Proc. Lond. Math. Soc., Ser. 2. 1923, 22, 369.
123. Тихонов А. Н., Самарский А. А. Уравнения математической физики. М., ГИТТЛ, 1953.
124. Вайнштейн Л. А. Дифракция электромагнитных волн на решетке из параллельных полос.— ЖТФ, 1955, 25, № 5.
125. Малин В. В. К теории ленточных решеток конечного периода.— РиЭ, 1963, 8, № 3.
126. Маркушевич А. И. Элементы теории аналитических функций. М., Учпедгиз, 1944.
127. Блох Э. Исследование плоской решетки, составленной из теоретических профилей конечной толщины.— Труды ЦАГИ, 1947, № 611.
128. Привалов И. И. Введение в теорию функций комплексного переменного. М.— Л., НТИ, 1935.
129. Gans R. Das Verhalten Hertzscher gitter.— Ann. Phys., 1920, 61, N 5.
130. Каценеленбаум Б. З. Определение коэффициента отражения электромагнитной волны в прямоугольном волноводе от тонкого металлического стержня, перпендикулярного электрическому полю. Изв. вузов. Радиотехника, 1960, № 5.
131. Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н. Об ошибке Лэмба.— РиЭ, 1964, 9, № 2.
132. Сивов А. Н. Электродинамическая теория частот плоской решетки из параллельных проводов.— РиЭ, 1961, 6, № 4.
133. Сивов А. Н. Падение плоской электромагнитной волны на решетку (случай, когда вектор \mathbf{H} параллелен проводам).— РиЭ, 1961, 6, № 1.
134. Котик И. П., Сивов А. Н. Распространение волн типа H_{0n} в кольцевом волноводе с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом.— РиЭ, 1961, 6, № 12.
135. Сивов А. Н. Отражение электромагнитных волн от гофрированной поверхности с малым периодом.— РиЭ, 1964, 9, № 10.
136. Кирилленко А. А. Дифракция плоских волн на несимметричных ленточных структурах типа «жалюзи».— Автореф. канд. дис. Изд-во ХГУ, 1970.
137. Morrison I. A. Heat losse of circular electric waves in helix waveguides.— Trans. IRE MTT, 1958, 6, N 2.
138. Piefke G. Die Übertragung eigenschaften einer Leitung aus axial angeordnete, voneinander isolieren Metallrögen.— AEU, 1957, 11, N 10.
139. Compté G., Garfort F., Pouthus A. Utilisation de guide d'ondes ciruclaires pour la transmission a grand distance d'ondes centimetrique et millimetriques.— Câbles et Transm., 1957, 11, N 4.
140. Gent A. W. The attenuation and propagation factor of spaced-disc circular waveguide.— Proc. IEE, 1959, 106, N 13.
141. Ильинский А. С., Альковский Э. А., Данилова А. Г. Метод расчета постоянных распространения в гофрированных волноводах.— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, 16, № 10. Численные исследования постоянных распространения несимметричных электромагнитных волн в круглом гофрированном волноводе. РиЭ, 1975, 20, № 4.
142. Зоммерфельд А. Оптика, М., ИЛ, 1953.
143. Градштейн И. С., Рыжик И. М. Таблица интегралов, сумм, рядов и произведений. М., Физматгиз, 1962.
144. Курушин Е. П., Нефедов Е. И. Излучение электромагнитных волн из открытого конца плоского волновода со слегка прозрачными стеклами.— ДАН СССР, 1974, 217, № 5.
145. Нефедов Е. И., Персиков М. В., Сивов А. Н. Анализ распространения быстрых электромагнитных волн в круглой трубе со спиральными канавками.— РиЭ, 1969, 14, № 1.
146. Нефедов Е. И., Пангонис Л. И., Персиков М. В., Сивов А. Н. Анализ распространения быстрых электромагнитных волн в спиральном волноводе с металлическим экраном.— РиЭ, 1969, 14, № 1.
147. Мелехин В. Н., Маненков А. Б. Диэлектрические трубы — открытые волноводы с малыми потерями и редким спектром.— В кн.: Электроника больших мощностей, вып. 6. М., «Наука», 1969.
148. Болотовский Б. М., Лебедев А. Н. О пороговых явлениях в классической электродинамике.— ЖЭТФ, 1967, 53, № 4 (10).
149. Зимогляд О. П., Нефедов Е. И. Проволочная решетка малого периода в запердельном волноводе.— РиЭ, 1977, 22, № 6.
150. Маненков А. Б. Открытые резонаторы с диэлектрическими стенками.— Изв. вузов. Радиофизика, 1971, 14, № 4.
151. Кириллова Л. Г., Двоскина Ю. И. СВЧ-устройства на запердельных волноводах (обзор).— Зарубежная радиоэлектроника, 1974, № 3.

152. *Курушин Е. П., Нефедов Е. И.* Излучение из открытого конца плоского волновода с прозрачными стенками. Дифракционная функция $U(s, p)$ Вайнштейна от комплексного аргумента.— Препринт № 31 (146) ИРЭ АН СССР, М., 1973.
153. *Никольский В. В.* Вариационные методы для внутренних задач электродинамики. М., «Наука», 1967.
154. *Свешников А. Г.* К обоснованию метода расчета электромагнитных колебаний в нерегулярных волноводах. ЖВММФ, 1963, 3, № 2.
155. *Ильинский А. С., Свешников А. Г.* Прямые методы исследования волноводных систем. В кн.: Вычислительные методы и программирование, вып. 13. ВЦ МГУ, 1969.
156. *Фиалковский А. Т.* К теории открытых резонаторов, образованных параллельными дисками.— ДАН СССР, 1966, 168, № 6.
157. *Вайнштейн Л. А.* Открытые резонаторы и открытые волноводы. М., «Сов. радио», 1966.
158. *Ильинский А. С., Лебедева О. А.* Проекционный метод решения задач дифракции на периодической решетке.— В кн.: Численные методы электродинамики. Изд-во МГУ, 1975.
159. *Вербицкий И. Л.* Дифракция плоской волны на частой гребенке.— РиЭ, 1976, 24, № 3; Письма в ЖТФ, 1976, 2, № 2*.
160. *Fox A. I., Li T.* Modes in maser interferometer with curved and tilted mirrors.— Proc. IEEE, 1963, 51, N 1.
161. *Нефедов Е. И.* Некоторые вопросы теории распространения электромагнитных колебаний в широких нерегулярных волноводах и открытых линиях. Автореф. канд. дис., М., ИРЭ АН СССР, 1965.
162. *Вилкова Л. П., Нефедов Е. И.* Теория и расчет коаксиальных открытых резонаторов.— В кн.: Численные методы решения внутренних краевых задач электродинамики. Минск, 1975.
163. *Radlow J.* Diffraction by a quarterplane.— Arch. Ration. Mech. and Analysis, 1961, 8, N 2.
164. *Фиалковский А. Т.* Дифракция плоских волн на открытом резонаторе, образованном параллельными лентами.— ЖТФ, 1968, 3, № 5.
165. *Фиалковский А. Т.* Связанные колебания в открытых резонаторах с плоскими зеркалами и дифракционной связью.— ЖТФ, 1966, 36, № 6.
166. *Шевченко В. В.* Плавные переходы в открытых волноводах. М., «Наука», 1969. *Каценеленбаум Б. З.* Теория нерегулярных волноводов с медленно меняющимися параметрами. М., Изд-во АН СССР, 1961.
167. *Функциональный анализ.* Сер. СМБ, М., «Наука», 1964.
168. *Федоров Н. Н.* Основы электродинамики. М., «Высшая школа», 1965.
169. *Курилин Б. И.* Колебательные системы из отрезков фидерных линий. Киев, «Техника», 1969.
170. *Пилипенко В. В., Половников Г. Г., Сологуб В. Г., Шестопалов В. П.* Новый метод измерения диэлектрической проницаемости вещества в миллиметровом и субмиллиметровом диапазонах.— ЖТФ, 1969, 39, № 12.
171. *Pointon A. J., Woodman K. F.* A coaxial cavity for measuring the dielectric properties of high permittivity materials.— J. Phys. E. Sci. Instrum., 1971, 4, N 3.
172. *Власов С. Н., Жислин Г. М., Петелин М. И., Рогачева Г. Г.* Открытые резонаторы в виде волноводов переменного сечения.— Изв. вузов. Радиофизика, 1969, 12, № 8.
173. *Власов С. Н., Загрядская Л. И., Петелин М. И.* Открытые резонаторы и волноводы с модами шепчущей галереи для мазеров на циклотронном резонансе.— Изв. вузов. Радиофизика, 1973, 16, № 11.
174. *Советов Н. М., Авербух М. Э.* Разностные бесселевы функции и их применение в технике. Изд-во Саратовского ун-та, 1968.
175. *Грей Э., Мэтьюз Г. Б.* Функции Бесселя, их приложения к физике и механике. М., ИЛ, 1953.
176. *Вилкова Л. П., Нефедов Е. И., Яковлева Г. Д.* Волноводные волны коаксиальной линии.— РиЭ, 1975, 20, № 1.
177. *Арманд Н. А., Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т.* К теории открытого коаксиального цилиндрического резонатора.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1973, 16, № 11.
178. *Арманд Н. А., Нефедов Е. И., Фиалковский А. Т.* Таблицы собственных чисел симметричных ТМ- и ТЕ-волн коаксиального волновода с импедансным внутренним проводником. М., Изд-во ИРЭ АН СССР, 1973.
179. *Яковлева Г. Д.* Таблицы функций Эйри и их производных. М., «Наука», 1969.
180. *Wolfe P.* Diffraction of a scalar by a plane screen.— STAM J. Appl. Math., 1968, 14, N 3. A new approach to edge diffraction.— SIAM J. Appl. Math., 1967, 15, N 6.
181. *Ahluvalia D. S., Lewis R. M., Boersma I.* Uniform asymptotic theory of diffraction by a plane screen.— SIAM J. Appl. Math., 1968, 16, N 4.
182. *Салтыков Е. Г.* К обоснованию коротковолновых приближений в задаче о дифракции на плоском экране.— ЖВММФ, 1974, 14, № 1.
183. *Веселков Г. П., Войтович Н. Н., Нефедов Е. И., Храпко А. М.* Открытый резонатор цилиндрического типа с двумя продольными щелями.— Электроника СВЧ, 1972, № 4.
184. *Нефедов Е. И.* Колебания типа «шепчущей галереи» в открытых дисковых резонансных структурах.— РиЭ, 1975, 20, № 7.
185. *Бабич В. М., Булдырев В. С.* Асимптотические методы в задачах дифракции коротких волн. М., «Наука», 1972.
186. *Checcacci P. F.* Beam waveguide.— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 10.
187. *Knetsh H. D.* Anwendung der Methode der Orthogonalentwicklung bei unendlich dünnen Blendew in Hohlleitern.— AEU, 1969, 23, N 7.
188. *Гинзбург В. Л., Тамм И. Е.* Теория электромагнитных процессов в слоистом сердечнике.— Изв. АН СССР. Сер. физ., 1943, 7, 30; см. также: *Тамм И. Е.* Собр. науч. трудов, т. 1. М., «Наука», 1975, с. 328.
189. *Зоммерфельд А.* Теория дифракции.— В кн.: *Франк Ф., Мизес Р.* Дифференциальные и интегральные уравнения математической физики. Л.— М., ОНТИ, 1937.
190. *Миллер М. А.* Поверхностные электромагнитные волны в прямоугольных канавках.— ЖТФ, 1955, 25, № 5.
191. *Миллер М. А., Таланов В. И.* Поверхностные электромагнитные волны, направляемые границей с малой кривизной.— ЖТФ, 1956, 26, № 12.
192. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* Возбуждение двумерного металлического резонатора с малым отверстием (цилиндр со щелью).— РиЭ, 1974, 19, № 12.
193. *Войтович Н. Н., Каценеленбаум Б. З., Сивов А. Н.* Обобщенный метод собственных колебаний в теории дифракции. М., «Наука», 1977.
194. *Нефедов Е. И.* Волны и добротные колебания в открытых электродинамических структурах.— Автореф. докт. дис. М., ИРЭ АН СССР, 1975.
195. *Вершинина Л. Н., Сивов А. Н.* Фазовый корректор из частой решетки.— Изв. вузов. Радиоэлектроника, 1977, 20, № 2. *Вершинина Л. Н., Сивов А. Н.* Периодическая решетка с переменной прозрачностью. РиЭ, 1973, 18, № 10, 2034.
196. *Вилкова Л. П., Нефедов Е. И.* Открытые радиальные резонаторы. Симметричные колебания.— Изв. вузов. Радиофизика, 1978, 21, № 1.
197. *Prabhavathi A. S., Chatterjee S. L.* Theory of open microwave resonator with an axial corrugated metal rod.— J. Indian Inst. Sci., 1971, 53, N 4.
198. *Веселков Г. П., Нефедов Е. И.* Возбуждение квазиоптической линии через щель в открытом резонаторе.— Квантовая электроника, 1974, 1, № 11.
199. *Гапонов А. В., Петелин М. И., Юлатов В. К.* Индукционное возбуждение классических осцилляторов и его использование в высокочастотной электронике.— Изв. вузов. Радиофизика, 1967, 10, № 9—10.

* Эффект полного прохождения, отмеченный во второй статье, ранее обсуждался во многих работах; впервые на него указал Г. Д. Малюжинец, поэтому в § 1.2 этот эффект назван нами его именем.

200. *Войтович Н. Н., Нефедов Е. И.* Открытые резонаторы с кольцевым вырезом в одном из зеркал.— Изв. вузов. Радиофизика, 1969, 12, № 4. Осесимметричный открытый резонатор с произвольными квадратичными зеркалами и кольцевым вырезом в одном из них.— РиЭ, 1970, 15, № 2.
201. *Нефедов Е. И., Храпко А. М.* Дифракционные потери симметричного открытого резонатора с зеркалами круглой формы и концентричными отверстиями в них.— Электроника СВЧ, 1968, № 8.
202. *Кацеленбаум Б. З., Семенов В. В.* Синтез фазовых корректоров, формирующих заданное поле.— РиЭ, 1967, 12, № 2.
203. *Нефедов Е. И., Сивов А. Н.* К оптимизации энергетической диаграммы направленности излучения из щели в плоском экране.— РиЭ, 1971, 16, № 2.
204. *Баскаков С. Ф.* Возбуждение лучевого волновода.— РиЭ, 1964, 9, № 4.
205. *Фаддеев А. К., Фаддеева В. Н.* Вычислительные методы линейной алгебры. М., Физматгиз, 1960.
206. *Воеводин В. В.* Численные методы алгебры. М., «Наука», 1966.
207. *Уилкинсон Дж.* Алгебраическая проблема собственных значений. М., «Наука», 1970.
208. *Тихонов А. Н., Арсенин В. Я.* Методы решения некорректных задач. М., «Наука», 1974.
209. *Третьякова С. С., Третьяков О. А., Шестопалов В. П.* Дифракция волновых пучков на плоских периодических структурах.— РиЭ, 1972, 17, № 7.
210. *Vanblaricum C. F., Mitra R.* A modified residue-calculus technique for solving a class of boundary value problems.— IEEE Trans. MTT, 1969, 17, N 6.
211. *Vijayaghavan S., Arora R. K.* Scattering of a shielded surface wave in a coaxial waveguide by a wall impedance discontinuity.— IEEE Trans. MTT, 1971, 19, N 8.
212. *Arora R. K., Vijayaghavan S., Madha R.* Modes of propagations in a coaxial waveguide with lossless reactive guiding surface.— IEEE Trans. MTT, 1972, 20, N 3.
213. *Waldron R. A.* Comments of «Modes of propagations in a coaxial waveguide with lossless reactive guiding surfaces».— IEEE Trans. MTT, 1973, 21, N 1.
214. *Affolter P., Käch A.* Die Eigenfrequenzen der konzentrisch von einer Metallhülle in beliebigem Abstand umschlossen Dielektrischen Kugel.— AEU, 1973, 27, N 10.
215. *Нефедов Е. И.* Открытые коаксиальные резонансные структуры.— РиЭ, 1977, 22, № 9.
216. *Нефедов Е. И.* Диэлектрическое препятствие на скачке импеданса в линии поверхностной волны.— ДАН СССР, 1977, 233, № 5.
217. *Арманд Н. А., Нефедов Е. И., Фиолковский А. Т.* Электродинамические основы машинного проектирования схем СВЧ.— Вестн. АН СССР, 1977, № 12.
218. *Нефедов Е. И., Фиолковский А. Т.* Дисперсионные характеристики микрополоскового волновода.— ДАН СССР, 1977, 235, № 6.

ОГЛАВЛЕНИЕ

Предисловие	3
Введение	5
Часть первая	
ЭКВИВАЛЕНТНЫЕ ГРАНИЧНЫЕ УСЛОВИЯ ДЛЯ ПЕРИОДИЧЕСКИХ СТРУКТУР	
Глава 1. Частая решетка в свободном пространстве	15
§ 1.1. Случай H -поляризации ($E_z = 0$)	16
§ 1.2. Эффект Г. Д. Малюжинца	24
§ 1.3. Случай E -поляризации ($H_z = 0$)	26
§ 1.4. Вычисление параметров l_i . Провода круглого и прямоугольного поперечного сечения	30
§ 1.5. Эквивалентные граничные условия	35
Глава 2. Решетки в пространстве, заполненном диэлектриками	41
§ 2.1. Случай H -поляризации (вектор магнитного поля параллелен проводникам, $E_z = 0$)	41
§ 2.2. Случай E -поляризации (вектор электрического поля параллелен проводникам, $H_z = 0$)	46
§ 2.3. Учет влияния экрана, расположенного за решеткой. Граничные условия для периодического волновода с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом	50
Глава 3. Отражение электромагнитных волн от гофрированной поверхности	53
§ 3.1. Мелкая гофра	53
§ 3.2. Глубокая гофра	55
§ 3.3. Резонаторы, связанные через узкую и глубокую щель	59
§ 3.4. Вытекающие волны в волноводе с глубокой продольной щелью	66
Приложения	70
Глава 4. Импедансные граничные условия резонансного типа	78
§ 4.1. Волноводная трактовка принципа действия открытого резонатора или открытой периодической резонансной структуры	78
§ 4.2. Резонансные колебания в периодической системе параллельных металлических исчезающе тонких полос	81
§ 4.3. Резонансные колебания в периодической системе параллельных металлических полос конечной толщины	85
Часть вторая	
ПРИМЕНЕНИЕ ЭКВИВАЛЕНТНЫХ ГРАНИЧНЫХ УСЛОВИЙ ДЛЯ АНАЛИЗА КОНКРЕТНЫХ ЭЛЕКТРОДИНАМИЧЕСКИХ СИСТЕМ	
Глава 5. Кольцевой и спиральный волноводы	92
§ 5.1. Волны H_{0n} в кольцевом волноводе с диэлектрической оболочкой и металлическим кожухом	92

§ 5.2. Расчет фильтрующих свойств спирального волновода и фазовых характеристик несимметричных типов волн	97
§ 5.3. Круглый волновод со спиральными канавками	105
§ 5.4. Спиральный волновод с металлическим экраном	107
§ 5.5. Коаксиальная волноводная структура с анизотропной внешней стенкой и внутренней частотериодической спиралью	111
§ 5.6. Широкий прямоугольный волновод с мелкопериодическими решетками	111
§ 5.7. Проволочная решетка малого периода в запредельном волноводе	115
§ 5.8. Некоторые применения полученных результатов	117
Глава 6. Частотериодические решетки в открытых структурах	118
§ 6.1. Квазиоптические элементы из частых решеток	118
§ 6.2. Кольцевая решетка между двумя параллельными идеально проводящими плоскостями	125
§ 6.3. Дисковый открытый резонатор с круговой металлической решеткой	127
§ 6.4. К аналитической теории открытых резонаторов с частотериодическими решетками	130
Глава 7. Теория диафрагменной линии	132
§ 7.1. Двумерная диафрагменная линия	133
§ 7.2. Эквидистантная система прямоугольных диафрагм и другие квазиоптические системы	136
§ 7.3. Теория диафрагменной линии, образованной отверстиями в экранах конечной толщины	140
§ 7.4. Нерегулярная (разноапертурная) диафрагменная линия	146
Глава 8. Открытые коаксиальные резонансные структуры	149
§ 8.1. Волноводные волны коаксиальной линии	149
§ 8.2. Кольцевой открытый резонатор	156
§ 8.3. Диафрагменная линия из круговых отверстий и некоторые другие коаксиальные резонансные структуры	162
§ 8.4. Открытые винтообразные ленточные резонансные структуры	164
§ 8.5. Колебания типа шепчущей галереи в открытых дисковых резонансных структурах	168
§ 8.6. Открытые дисковые одиночные и периодические структуры с импедансным стержнем. Симметричные колебания	172
§ 8.7. Возбуждение периодических структур — квазиоптических линий — через щель в открытом резонаторе	177
§ 8.8. Дифракция квазиоптического пучка на плоской периодической структуре	187
Таблицы	191
Послесловие редактора	194
Литература	198