

Академия наук СССР  
ИНСТИТУТ ПРИКЛАДНОЙ ФИЗИКИ

# НЕЛИНЕЙНЫЕ ВОЛНЫ

СТОХАСТИЧНОСТЬ  
И ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

*МАТЕРИАЛЫ V ВСЕСОЮЗНОЙ ШКОЛЫ  
ПО НЕЛИНЕЙНЫМ ВОЛНАМ*

*Горький, март 1979 г.*

ГОРЬКИЙ 1980

Издано по решению Редакционно-издательского совета Института прикладной физики АН СССР.

УДК 534.2

В сборник включены обзорные и оригинальные статьи, написанные по материалам лекций и семинаров, проведенных на Всесоюзной школе по нелинейным волнам (Горький, 1979 г.). В работах обсуждаются разнообразные аспекты нелинейных процессов в распределенных неравновесных системах, приводятся результаты экспериментальных и численных исследований. Особое внимание уделено проблеме стохастического поведения нелинейных систем, турбулентности и способам ее описания.

Сборник предназначен для специалистов, занимающихся исследованием нелинейных волновых процессов и турбулентности, а также аспирантов и студентов соответствующих специальностей.

Ответственный редактор  
М. И. РАБИЮВИЧ

## ПРЕДИСЛОВИЕ

В этом сборнике помещены материалы 5-й Горьковской школы по нелинейным волнам, проходившей в марте 1979 года на берегу Ветлуги. По традиции на каждой из наших школ обсуждается очень широкий круг проблем, имеющих отношение к нелинейным колебаниям и волнам, однако всегда какое-либо направление привлекает наибольшее внимание. Так, на первой школе уклон был сделан в нелинейную оптику, на второй — в нелинейные явления в плазме. На прошедшей школе стержневыми оказались вопросы стохастических колебаний и турбулентности. Поскольку общий объем представленных для публикации материалов школы вырос (по сравнению с предыдущими) примерно на треть, эти материалы пришлось опубликовать в двух книгах. Данная часть содержит работы по стохастическим колебаниям и турбулентности. Во вторую книгу — «Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие», которая выходит в начале 1981 года в издательстве «Наука», вошли следующие статьи:

Предисловие редактора.

С. М. Рытов. Академик Л. И. Мандельштам.

Я. Б. Зельдович. Горение: нелинейная температурная волна в веществе, выделяющем тепло.

А. С. Давыдов. Нелинейные колебательные явления в биологии.

А. Г. Литвак, Г. М. Фрайман. Взаимодействие сильных электромагнитных волн с плотной плазмой.

В. Б. Гильденбург. Неравновесный высокочастотный разряд в полях электромагнитных волн.

В. С. Летохов, В. Г. Миногин. Нелинейные движения атомов в световом поле.

Е. И. Якубович. О взаимодействии встречных волн в нелинейных средах.

В. И. Беспалов, А. А. Бетин, А. И. Дятлов, С. Н. Кулагина, В. Г. Манишин, А. З. Матвеев, Г. А. Пасманик, А. А. Шиллов. Нелинейные взаимодействия световых волн сложной пространственно-временной структуры в кубичных средах.

Ю. А. Кравцов, Ю. И. Орлов. Геометрооптические способы оценки полей в фокусах и на каустиках.

А. Я. Басович, В. И. Таланов. Адиабатическое взаимодействие волн.

К. А. Наугольных, Л. А. Островский, А. М. Сутин. Нелинейная акустика.

Е. Н. Пелиновский. Волны цунами.

М. Н. Кошляков, Ю. М. Грачев, В. Х. Еникеев. Синоптические океанские вихри в свете результатов экспедиции ПОЛИМОДЕ.

В. И. Кляцкин. Линейные статистические задачи как нелинейные задачи физики.

Б. С. Абрамович, В. В. Тамойкин. Диффузионное приближение в теории нелинейного взаимодействия волн в хаотически-неоднородных средах.

А. М. Ильин. Структура ударной волны при наличии малой вязкости.

Поскольку большинство работ данного сборника связано с исследованием стохастичности динамических систем, здесь будет уместно заметить, что уже за время прошедшее с момента представления материалов, в этой области появилось довольно много нового. (В апреле 1980 года в Горьком состоялось I Всесоюзное совещание по «автостохастическим явлениям и системам»). В частности, для отдельных экспериментов (конвекция в ячейке) удалось теоретически описать эволюцию спектра течения при возникновении турбулентности (см.: М. J. Feigenbaum, Phys. Lett. 74 A, N6, p. 375). Универсальность бифуркаций удвоения по пути к хаосу, установленная М. Фейгенбаумом для диссипативных систем (см. статью Я. Г. Синая в данном сборнике), сейчас обнаружена и для консервативных систем (постоянная универсальности оказалась почти вдвое большей, чем постоянная Фейгенбаума—см.: G. Benettin, C. Cercignani, L. Galgani, A. Giorgilli.—Lett. Nuovo cimento, 28, N1, p. 1). Существенное продвижение произошло в исследованиях квантовых систем, стохастических в классическом пределе (см.: С. Casati, В. V. Chirikov, J. Ford, F. M. Izraelev.—Lect. Notes in Physics, Spr. 1979, 93; Г. М. Заславский.—УФН, 1979, 129, с. 211). По-видимому, соответствующие результаты будут обсуждаться на следующей Горьковской школе.

*М. Рабинович*



# СТОХАСТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В РАДИОФИЗИКЕ И ГИДРОДИНАМИКЕ. ЭКСПЕРИМЕНТЫ И МОДЕЛИ

М. И. РАБИНОВИЧ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Стохастические автоколебания и их математический образ — странный аттрактор — интенсивно обсуждались на нашей прошлой школе. Это было время, когда странный аттрактор только еще начал продвигаться в физику: Что изменилось за последние два года? Прежде всего, даже если судить только по лекциям и семинарам, представленным на нашей школе, стохастические автоколебания и странные аттракторы привлекли пристальное внимание экспериментаторов. Появились более сложные, многомодовые модели, стабилизировались методы исследования стохастичности и обнаружения странных (не обязательно в строгом математическом смысле) аттракторов. Однако и сегодня странный аттрактор еще не стал для физиков «вполне своим», как, например, солитон.

В чем же основная причина? Очень трудно связать реальный физический эксперимент с достаточно простой динамической моделью (а только такие модели мы пока и умеем исследовать более или менее хорошо). Суть этих трудностей заключается в правильном определении основных мод, необходимых для построения модели, правильно описывающей эксперимент. В сосредоточенных системах такой проблемы нет: когда мы исследуем стохастическую генерацию, например в радиотехнической схеме, то динамической моделью служат просто ее точные уравнения. Однако уже для одномерных структур (LC-цепочки, вихри Тейлора в течении Куэтта и др.) эта проблема есть — структура мод, нужных для построения модели, в принципе ясна, но необходимо еще выделить главные. Есть, конечно, тривиальный путь — построить вначале многомодовую модель, а потом постепенно упрощать ее, определив тем самым нужную нам модель минимальной размерности, но он связан с очевидными вычислительными трудностями.

Наконец, проблема чрезвычайно усложняется, когда нужно разобраться с механизмами стохастизации движения в системах и средах с пространственно неоднородным рас-

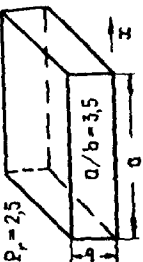
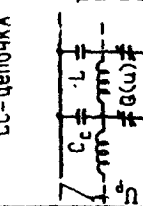
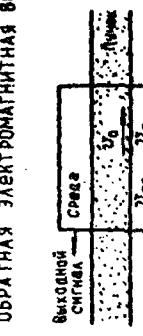
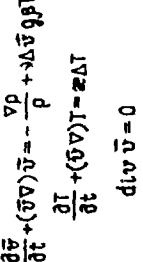
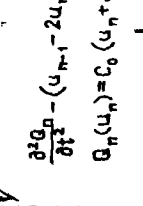
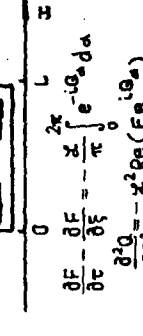


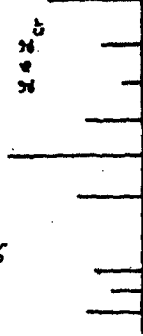
пределением полей — пограничный слой, плазма с электронным пучком, лампа обратной волны и т. д. Здесь сложность заключается в следующем. В экспериментах, как правило, измеряются лишь временные спектры и их эволюция при переходе к хаосу. Для построения же динамической модели (правильного выбора мод) необходимо знать еще и пространственные спектры и их эволюцию. Глядя лишь на временной спектр, нельзя сказать: связаны ли изменения в спектре с включением в процесс взаимодействия, приводящий к хаосу, новых мод, либо это результат более сложной динамики уже имеющихся. Например, во многих экспериментах при изменении параметра по пути к хаосу во временном спектре наблюдаются бифуркации удвоения\*. Однако природа этих удвоений может быть совершенно разной. Этот факт иллюстрируется примерами, представленными в таблице, где приведены результаты экспериментов: а — с релей-бенаровской конвекцией в лежащем «спичечном коробке» [1], б — с параметрически возбуждаемой LC-цепочкой [2] и в — с лампой обратной волны (ЛОВ — системой электронный пучок — обратная электромагнитная волна) [3]. Во всех экспериментах наблюдалась одна и та же цепочка бифуркаций по пути к хаосу: статический (или немодулированный) периодический режим → однопериодический (модулированный) режим → двухпериодический → четырехпериодический → стохастический режим. С помощью этой таблицы продемонстрируем три утверждения:

1) Совершенно различные системы не только по физической природе, но и по исходному математическому описанию (уравнение в частных производных, дифференциально-разностное уравнение, интегродифференциальное уравнение) характеризуются одними и теми же переходами в  $\omega$ -спектре по пути к хаосу. 2) Одни и те же бифуркации могут быть интерпретированы несколькими способами, т. е. нет однозначного соответствия между динамической моделью и последовательностью бифуркаций  $\omega$ -спектра. 3) Усложнение пространственной структуры полей по пути к хаосу происходит не совсем произвольным образом. Наиболее типичные пути — появление крупных масштабов — это модуляция исходного масштаба и возникновение комбинационных масштабов, в частности пространственных гармоник и субгармоник.

Для релей-бенаровской конвекции в слое принципиальная возможность возникновения стохастических автоколебаний демонстрируется хорошо известной моделью Лоренца

$$\dot{X} = -\sigma(X - Y), \quad \dot{Y} = -Y + rX - XZ, \quad \dot{Z} = -bZ + XY. \quad (1)$$

\* Для простых систем — одномерных отображений, как показано Фейгенбаумом [4], эти бифуркации носят универсальный характер.

<p>Конвективная ячейка</p>	<p>Параметрически возбуждаемая LC-цепочка</p>	<p>ЛВВ электронный пучок - обратная электромагнитная волна</p>
 <p><math>P_r = 2,5</math> <math>a/b = 3,5</math></p>	 <p><math>\frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + (\nabla \nabla) \vec{v} = -\frac{\nabla p}{\rho} + \nu \Delta \vec{v} + g \beta T</math> <math>\frac{\partial T}{\partial t} + (\nabla \nabla) T = \alpha \Delta T</math> <math>\text{div } \vec{v} = 0</math></p>	 <p><math>\frac{\partial F}{\partial t} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{\Sigma}{\pi} \int_0^{\Sigma} e^{-i\theta_a} d\alpha</math> <math>\frac{\partial^2 Q}{\partial \xi^2} = -\Sigma^2 \text{Re}(F e^{i\theta_a})</math></p>
 <p><math>\frac{R_a}{R_{ac}} = 27</math></p>	 <p><math>R \approx R_{cr}</math></p>	 <p><math>\Sigma \approx \Sigma_{cr}</math></p>
 <p><math>\frac{R_a}{R_{ac}} = 28</math></p>	 <p>1,675</p>	 <p><math>\Sigma \approx \Sigma_{cr}</math></p>

Она получается обрезанием исходных уравнений гидродинамики в предположении, что никакие другие конвективные движения, кроме валов определенного масштаба, не возникают. Стохастической конвекции отвечает случайное во времени изменение направления вращения валов. Эта модель правильно описывает переходы при увеличении надкритичности к хаотическому поведению, например в конвективной петле [5], но они совершенно не соответствуют наблюдаемым в лежащем «спичечном коробке». Объясняется это тем, что прежде чем валы начнут крутиться случайным образом, появятся возмущения с другими пространственными масштабами. Учет этих возмущений приводит к динамической модели более высокой размерности. Такая модель может уже правильно описать наблюдаемые бифуркации (как, например, модель Кэрри [6]). Однако не ясно, соответствует ли она реальному эксперименту, поскольку, наблюдая лишь за эволюцией временного спектра возмущений, невозможно однозначно идентифицировать бифуркации в реальном течении.

Переходы к хаосу, наблюдавшиеся в параметрически возбуждаемой LC-цепочке (см. табл.), анализировались параллельно с прямыми измерениями структуры поля в линии. Обнаружилось, что с ростом амплитуды накачки пространственно однородное поле—стоячая волна модулируется в пространстве, т. е. нарастают моды с близкими к основной волновыми числами. Однако даже в этом случае построить динамическую модель непросто, поскольку в картине временного спектра эти моды не всегда возможно идентифицировать из-за эффекта взаимной синхронизации мод. Тем не менее, судя по измерениям пространственной структуры поля в турбулентном и предтурбулентном режимах [2], можно сказать, что динамическая модель должна строиться на базе небольшого числа независимых пространственных мод. Неоднозначность интерпретации временного спектра подтверждается и последним примером из таблицы. Внешне переходы к хаосу в ЛОВ те же, что и в предыдущих случаях, однако построить динамическую модель, правильно их описывающую, пока не удалось — пространственная структура решения даже в предтурбулентном режиме оказывается достаточно сложной (возбуждено большое число пространственных гармоник). Тем не менее, простота наблюдаемых бифуркаций заставляет думать, что не все из этих гармоник независимы. И проблема сводится к удачному выбору мод, на базе которых строится модель. Пространственная структура этих мод уже не столь проста, как в предыдущем случае.

Приведенные примеры иллюстрируют основные пути искажения пространственно однородных режимов в предтурбу-

лентном состоянии — это: а) пространственная модуляция и б) возбуждение пространственных гармоник или субгармоник. Возникновение стохастичности при таких изменениях пространственной структуры и обсуждается ниже.

## 2. СТОХАСТИЧЕСКАЯ АВТОМОДУЛЯЦИЯ

Самопроизвольное развитие модуляции на фоне пространственно однородных периодических волн (модуляционная неустойчивость) — явление, часто встречающееся в современной физике. Именно модуляционная неустойчивость повинна в образовании цугов гравитационных волн на глубокой воде, т. е. служит физическим обоснованием поверья «девятого вала». С нею же связано самосжатие оптических пучков в нелинейной среде — самофокусировка света и т. д. Такая неустойчивость характерна и для дискретных структур. В неравновесных средах развитие модуляционной неустойчивости может привести к возникновению хаотической модуляции волн — стохастической автомодуляции.

Исходным для описания стохастической автомодуляции в одномерных системах (средах) может служить нелинейное параболическое уравнение с комплексными коэффициентами

$$a_t = \gamma_0 a + (\beta + i\kappa) a_{xx} + (i\alpha - \rho) |a|^2 a \quad (2)$$

для комплексной амплитуды волны  $\exp[i(\omega t - kx)]$  (нижние индексы означают соответствующие производные). Это уравнение получается как обобщение известной модели Ландау, если учесть уширение пространственного спектра с ростом надкритичности. Уравнение (2) описывает поведение пакетов волн в сдвиговых гидродинамических течениях (Хокинг, Стюартсон [7]), ветровых волн на воде (Андронов, Фабрикант [8]), волн концентрации в химических реакциях (Курамото, Ямада [9]), ленгмюровских волн в плазме (Перейра, Стенфло [10]) и т. д.

Обсудим математическую и физическую природу хаоса при стохастической автомодуляции на трехмодовой модели (2) ( $\rho = 0$ )

$$\dot{X} = Y(Z - 1 + X^2) + \gamma X, \quad \dot{Y} = X(3Z + 1 - X^2) + \gamma Y, \quad (3)$$

$$\dot{Z} = -2Z(\nu + xy),$$

(Рабинович, Фабрикант [11]), которая, как недавно было показано, может быть связана с конкретным физическим экспериментом.

Львов и Предтеченский [12], исследуя течение Куэтта между вращающимися цилиндрами при соотношении радиусов  $r_2/r_1 = 1,57$  (вращается внутренний цилиндр), наблюдали следующую последовательность переходов к турбулентности

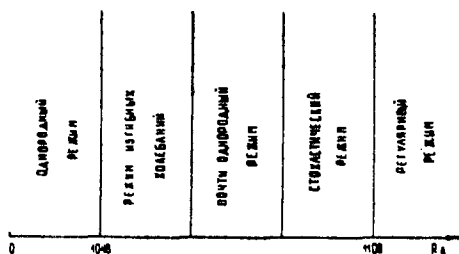


Рис. 1

на фоне вихрей Тейлора (рис. 1). При  $Re=1048$  стационарный режим однородных вихрей сменялся режимом их изгибных колебаний. Затем с ростом  $Re$  снова устанавливался почти-однородный режим, а при следующем переходе возникал режим стохастических пульсаций вихрей. При больших  $Re$  ( $Re \approx 1108$ ) вновь устанавливался регулярный режим. Получить динамическую модель, описывающую эти переходы, непосредственным укорочением уравнений Навье-Стокса очень трудно. Поэтому приходится ограничиться феноменологической моделью, используя экспериментальный факт, что неустойчивость пространственно однородного режима связана с ростом возмущений, для которых амплитуда и фаза изгибных колебаний соседних вихрей изменяется незначительно. Львов и Предтеченский сформулировали для дискретной последовательности вихрей дифференциально-разностный аналог уравнения (2) (см. стр. 57):

$$\frac{\partial A(n)}{\partial t} + \frac{1}{4} \{(\beta + i\alpha) [2A(n) - A(n+1) - A(n-1)]\} = \gamma A(n) + (\alpha i - \rho) |A(n)|^2 A(n). \quad (4)$$

Здесь для описания взаимодействия соседних пар вихрей выписаны явно только линейные члены. Из (4) следует, что пространственно однородное по  $n$  решение  $A(n) = \text{const}$  неустойчиво по отношению к возникновению пространственной модуляции  $A(n)$ , если  $\alpha\chi > 0$ ,  $|\alpha\chi| > \beta\rho$ . Первым нарастает возмущение

$$A(n) = A_1 \exp(i 4\pi n/N), \quad (5)$$

для которого фаза изгиба соседних пар вихрей сдвинута на угол  $4\pi/N$ . Для амплитуд основной и модулирующей мод из уравнения (4) следует система

$$\dot{B}_0 = 2B_0 B_1 \sin \Phi + 4\gamma B_0;$$

$$\dot{B}_1 = -B_0 B_1 \sin \Phi - 2\nu B_1; \quad \Phi = 1 + B_1 - B_0 + \cos \Phi (2B_1 - B_0), \quad (6)$$

$$[\Phi = (\Delta\omega t + 2 \arg a_0/a_1) \operatorname{sign} \alpha],$$

которая заменой  $X = (2B_0)^{1/2} \cos \Phi/2$ ;  $Y = (2B_0)^{1/2} \sin \Phi/2$ ;  $Z = B_1$ ;  $\tau = \frac{\Delta\omega t}{2}$  сводится к уравнению (3). Эта модель в

конечной области параметров имеет решение в виде случайных пульсаций, отвечающее стохастической автомодуляции (рис. 2).

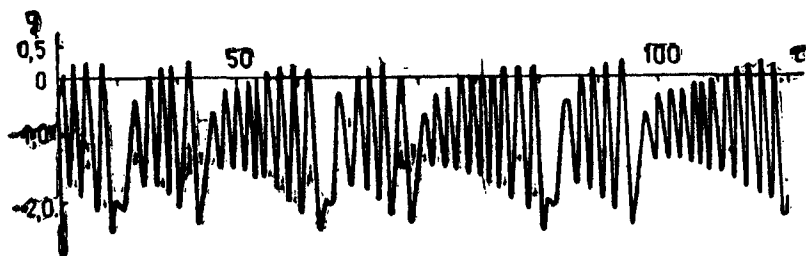


Рис. 2

Физический механизм обнаруженного хаоса заключается в следующем. При отсутствии линейного роста или затухания ( $\nu = \nu = 0$ ) система (6) вполне интегрируема и допускает лишь простые движения. В частности, периодический обмен энергией между основной модой и модулирующей парой. При малом инкременте основной волны и сильном затухании пары такой периодический процесс должен уступить место статическому — отбираемая у неравновесной среды основной модой энергия передается затухающим возмущениям и устанавливается постоянный поток энергии. Если же скорость производства энергии на основной моде столь велика, что возмущения не успевают ее диссипировать, они начинают возрастать по амплитуде, и режим распада основной моды на пару  $2k \rightarrow k_- + k_+$  (это и есть модуляционная неустойчивость) сменится обратным режимом — слияния  $k_- + k_+ \rightarrow 2k$ . Энергия от возмущений будет возвращаться основной моде. Затем все повторится. Конечно, такой процесс может оказаться и периодическим. Однако если учесть, что обмен энергией существенно зависит от фаз возмущений (см. систему (6)), а они инерционным образом зависят от энергий, естественно считать, что они запутаются и обмен энергией может стать нерегулярным. В соответствии с этими физическими представлениями хаотические пульсации должны устанавливаться, когда все характерные време-

на, а именно: время нелинейного взаимодействия, время подпитки энергией и время диссипации, — одного порядка, т. е. когда  $\gamma \sim \nu \sim 1$  (см. систему (6)). Прямой численный счет подтверждает эти соображения (рис. 3).

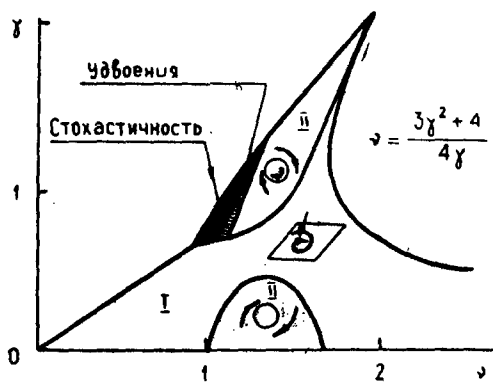


Рис. 3

Математическая природа модуляционного хаоса. В системе (3) при  $\gamma < \nu$  произвольный фазовый объем монотонно сжимается

$$\frac{\partial \dot{X}}{\partial X} + \frac{\partial \dot{Y}}{\partial Y} + \frac{\partial \dot{Z}}{\partial Z} = 2(\gamma - \nu),$$

т. е. все фазовые траектории стремятся к аттрактору с нулевым фазовым объемом. Когда  $\nu \gtrsim \gamma \sim 1$ , все состояния равновесия внутри притягивающей области неустойчивы и аттрактор—это либо устойчивый цикл, либо странный. На рис. 4 представлено предельное множество точек отображения Пуанкаре на сечущей  $Z = \text{const}$ , соответствующее такому аттрактору. Оно имеет вид подковы. Для анализа последовательности бифуркаций по пути к хаосу учтем сильное сжатие потока по  $X$  и растяжение по  $Y$  и построим модельное одномерное отображение  $Y_{n+1}(Y)$ . Построенное численно оно имеет вид, приведенный на рис. 5. Как известно, при изменении существенного параметра для отображений подобного вида характерны универсальные бифуркации типа удвоения [4] — последовательно появляются устойчивые циклы с периодом, кратным степени 2. Эти бифуркации приводят к поведению, при численном моделировании проявляющемуся как хаос. В действительности, внутри аттрактора, который является образом этого хаоса, могут существовать устойчивые циклы (они опираются на гладкую «макушку» отображения). Такие циклы обладают сложной формой и большим периодом, так



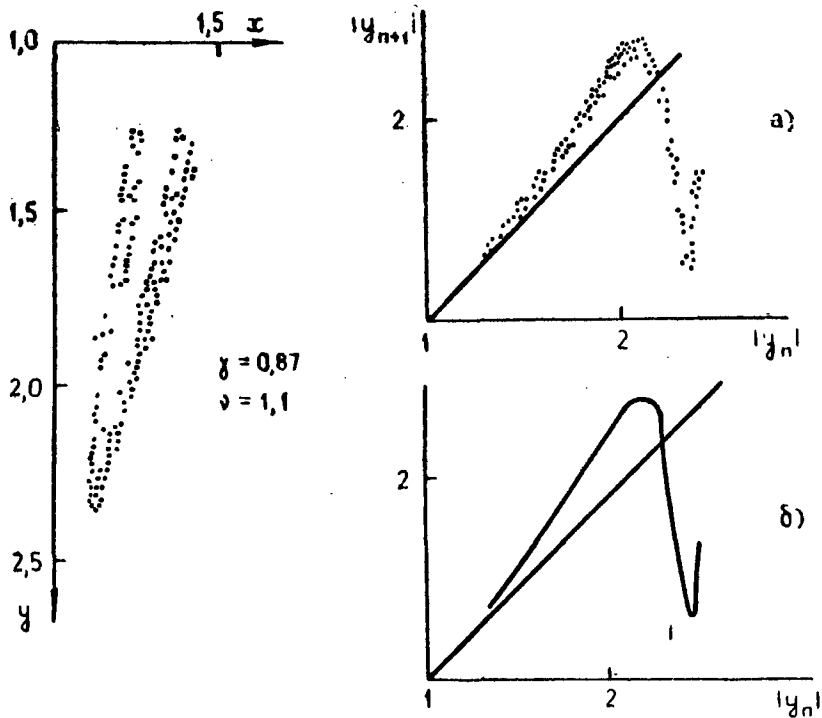


Рис. 4, 5

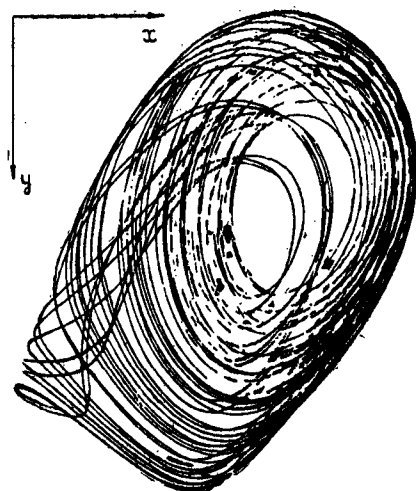


Рис. 6

что в силу конечной точности численного решения наблюдать их весьма трудно.

При численном исследовании системы (3) (точнее, соответствующего ей двумерного отображения) на пути к хаосу были обнаружены бифуркации удвоения. Кроме того, было показано, что: траектории на аттракторе неустойчивы, прямоугольник на секущей отображается в подкову, благодаря чему наблюдается перемешивание траекторий, структура аттрактора — канторова. На рис. 6 представлена XY — проекция фазового портрета стохастического аттрактора. Статистические характеристики движения на нем, полученные усреднением по статистически независимым реализациям, приведены на рис. 7. Видно, что корреляционная функция  $k(\tau)$  достаточно быстро спадает, а в спектре  $\langle Z_{\omega}^2 \rangle$  отсутствуют сколько-нибудь выраженные максимумы. На рис. 3 показана плоскость параметров  $\gamma, \nu$ , где отмечены области существования различных режимов.

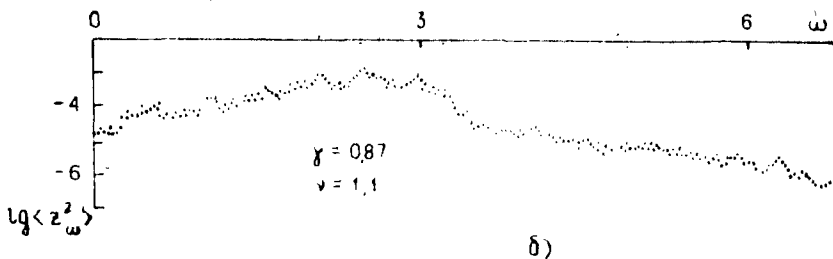
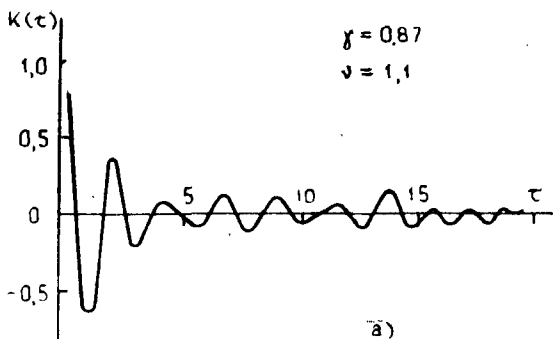


Рис. 7

Конечно, явление стохастической автомодуляции, обнаруженное при простейшей конечномерной аппроксимации уравнений (2) или (4), в реальной физической ситуации вовсе не обязательно связано с возбуждением лишь одной пары пространственных сателлитов (мод). Даже наоборот, такая спектрально бедная картина скорее исключение и

характерна лишь для малых надкритичностей. Однако уже на такой простейшей модели можно понять физический механизм возникновения модуляционного хаоса и математически доказать возможность его существования.

### 3. СТОХАСТИЧЕСКАЯ ГЕНЕРАЦИЯ СУБГАРМОНИК

Генерация пространственных гармоник и субгармоник — еще один путь усложнения динамики системы. Генерация субгармоники особенно часто наблюдается при развитии квазигармонических возмущений в сдвиговых гидродинамических течениях. Причем в зависимости от ситуации возможен как одновременный рост гармоник и субгармоники за счет энергии потока (Крайк [12]), так и передача энергии затухающей субгармонике от основной волны, для которой превышен порог линейной неустойчивости. Мы уже видели на примере конвекции в горизонтальной ячейке (Голлуб, Бенсон [1]), что появление субгармоники предшествует резкому уширению спектра — возникновению турбулентности. Без четкой диагностики структуры течения, конечно, трудно сказать, соответствует ли появление половинной частоты в спектре возникновению нового возмущения (которому соответствует собственная степень свободы) или это результат усложнения движения в системе уже имевшихся пространственных возмущений (удвоение периода цикла). Однако при анализе подобных экспериментов следует иметь в виду, что в простой динамической модели из двух нелинейно связанных мод, одна из которых обладает положительным, а другая отрицательным инкрементом, возможно возникновение стохастичности (Дубровин, Коган, Рабинович [14]). Подобный эффект распространен в физике. С ним, в частности, связано явление развала спектра — резкого уширения линии автоколебаний в генераторах радио и СВЧ диапазона (Новиков, Синицын, Тагер [15]).

Динамическая модель, описывающая взаимодействие в нелинейной неравновесной среде (системе) возмущений с частотами  $\omega$  и  $\omega/2$ , представляется в виде двух уравнений относительно комплексных амплитуд возмущений

$$\begin{aligned} \dot{a}_1 &= \gamma a_1 + e^{i\xi} a_2^2 e^{i\delta t}, \\ \dot{a}_2 &= -\nu a_2 + a_1 a_2^* e^{-i\delta t} + i\alpha |a_2|^2 a_2. \end{aligned} \quad (7)$$

Параметр  $\xi$  определяет характер нелинейного взаимодействия. При  $\xi=0$  имеет место взрывная неустойчивость (амплитуды возмущений одновременно нарастают). При  $\xi=\pi$  взаимодействие такое же, как в равновесной системе. Прямой численный счет показывает, что в системе (7) возможен

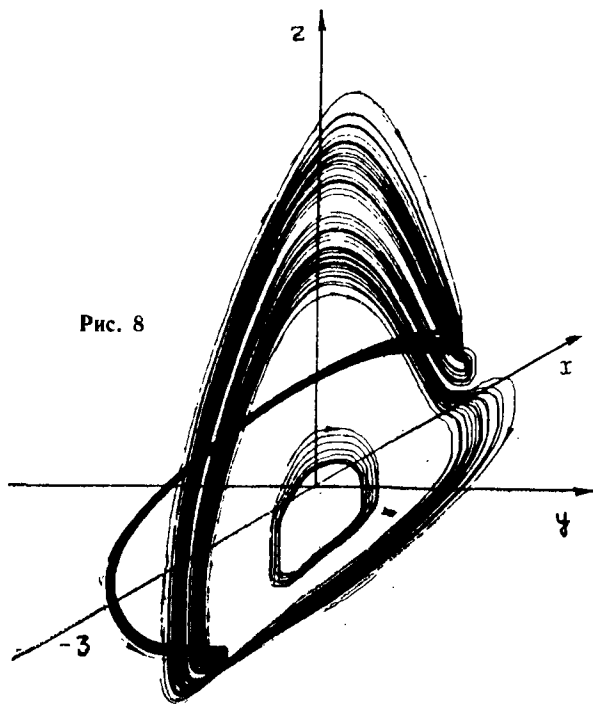
режим периодического обмена энергией между модами, который при изменении параметров усложняется, а затем переходит в стохастический, характеризуемый сплошным спектром и спадающей корреляционной функцией. Природу «распадного» хаоса рассмотрим на модели

$$\begin{aligned}\dot{X} &= -2Y^2 + \gamma X + (\delta - \alpha Z)Y, \\ \dot{Y} &= 2XY + \gamma Y - (\delta - \alpha Z)X, \\ \dot{Z} &= -2XZ - 2Z,\end{aligned}\tag{8}$$

следующей из уравнений (7) при  $\xi = \pi$ . Здесь  $X = -|a_1| \cos \Phi$ ,  $Y = |a_1| \sin \Phi$ ,  $Z = |a_2|^2$ ,  $\Phi = \arg a_1 - 2 \arg a_2 + \delta t$ .

Физический механизм распадного хаоса, как и стохастической автомодуляции, связан с десинхронизацией фаз взаимодействующих мод  $\omega$  и  $\omega/2$  из-за нелинейного сдвига частот  $\sim \alpha |a_2|^2$ .

Математическая природа хаоса и бифуркации, к нему приводящие, в данном случае могут быть различны в зависимости от соотношения параметров. Рассмотрим два случая — малых ( $\delta = 0,5$ ) и больших ( $\delta = 2$ ) — линейных



расстройке от точного линейного резонанса ( $\omega_1 = 2\omega_2 + \delta$ ). Полагая  $\gamma = 0,2$ , будем изменять параметр нелинейной расстройки  $\alpha$ . При  $\gamma = 0,2$ ,  $\delta = 0,5$  и  $x = 0$  в фазовом пространстве (8) имеется устойчивый цикл. С ростом  $\alpha$  один из его характеристических показателей пересекает единичную окружность на комплексной плоскости в точке  $-1$  ( $\alpha \approx 0,03$ ). Этому соответствует известная бифуркация, называемая «щелчок» или «вилы», при которой исходный цикл становится неустойчивым и рождается цикл удвоенного периода. Численное исследование отображения Пуанкаре показывает, что при  $\alpha = 0,0895$  происходит новое удвоение, затем цепочка удвоений сгущается и возникает стохастичность (рис. 8). Чем меньше  $\delta$ , тем при меньшем значении  $\alpha$  возникает стохастичность и тем большее число удвоений удастся проследить.

При больших расстройках ( $\delta = 3$ , как было показано Коганом и Бендицкой, сложное поведение связано с существованием внутри аттрактора счетного множества седловых циклов, возникающих в окрестности седлофокуса в начале координат и двоякоасимптотической к этому седлофокусу траектории. «Портрет» аттрактора, полученный при этих

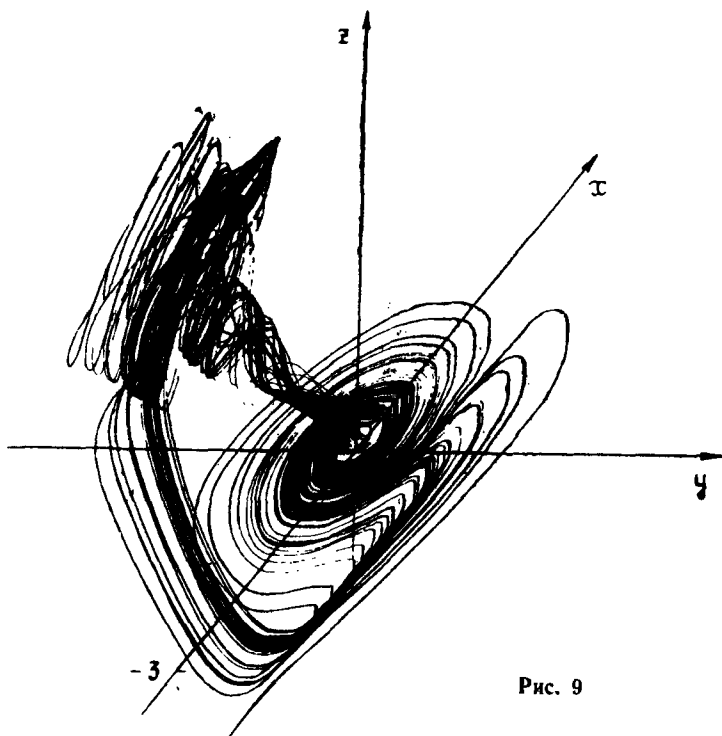


Рис. 9

значениях параметров на аналоговой моделирующей установке, приведен на рис. 9.

Стохастическая генерация субгармоники — это частный (вырожденный) случай общего распадного взаимодействия  $k_1 = k_2 + k_3$ ,  $\omega_1 = \omega_2 + \omega_3$ , где  $\omega_2$ ,  $\omega_3$  и  $k_2$ ,  $k_3$  — несоизмеримы. Факт существования хаоса при взаимодействии таких мод в неравновесной среде (Вышкинд, Рабинович, Тарантович [16]) представляет интерес для выяснения механизмов одномерной, например ионно-ленгмюровской в плазме, и двумерной турбулентности, для которых характерен поток энергии вниз по спектру.

#### 4. РАДИОТЕХНИЧЕСКИЙ ГЕНЕРАТОР СО СЛУЧАЙНЫМ ПОВЕДЕНИЕМ И ПРОСТРАНСТВЕННО ОДНОРОДНАЯ ХИМИЧЕСКАЯ РЕАКЦИЯ

До сих пор обсуждалось возникновение в неравновесных средах стохастического поведения лишь за счет разрушения пространственно однородных колебательных режимов. Однако при специальных экспериментальных условиях хаос может возникнуть и в результате усложнения поведения во времени чисто одномерного движения (вспомним конвективную петлю). Недавно Хадсон, Гразиани и Шмитц [17] наблюдали хаотический режим автокаталитической реакции Белоусова—Жаботинского\* в реакторе с принудительным перемешиванием раствора. Реакция, таким образом, была гомогенной, и ее эволюция определялась только исходной концентрацией реагентов — малоновой кислоты, бромата и катализатора (ионов железа). Динамические модели такой сосредоточенной кинетики химических реакций со стохастическим поведением строились недавно Ресслером [18]. Теперь обсудим эксперимент, динамическую модель и механизмы хаоса, который наблюдался в радиотехническом генераторе. Свойства этого хаоса, как и переходы на пути к его возникновению, были такие же, как и в химическом автогенераторе Хадсона и др.

Такой радиотехнический генератор, предложенный и построенный Кияшко, Пиковским и Рабиновичем [19], отличается от классического генератора Ван-дер Поля лишь одним дополнительным элементом — туннельным диодом, включенным в контур (рис. 10, а). В зависимости от величины потерь в контуре  $r$  наблюдалось несколько качественно различных

---

\* В 1958 году Белоусов впервые наблюдал периодические колебания окраски раствора в ходе окисления лимонной кислоты броматом с катализатором — ионами церия. Детальное изучение реакций подобного типа было предпринято Жаботинским, использовавшим вместо лимонной также малоновую или броммалоновую кислоту.

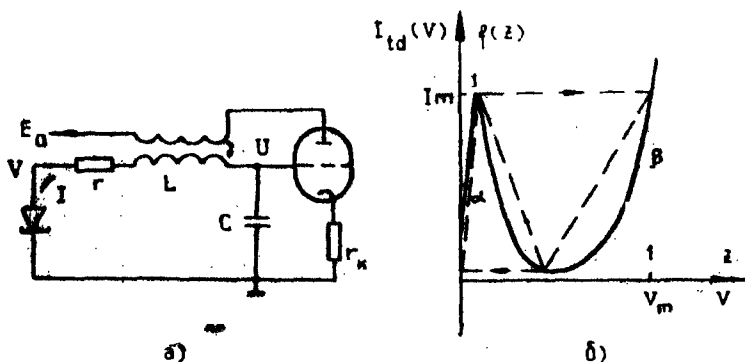


Рис. 10

режимов работы генератора — периодические колебания с малой амплитудой, когда диод не переключался ( $I < I_m$ ); при  $r = r^0$  максимум тока уже достигает значения  $I_m$  (см. рис. 10, б) и сигнал представляет собой длинные кластеры колебаний, прерываемые переключениями диода; при  $r < r_0$  нелинейность лампы уже не сказывается и внутри каждого кластера колебания экспоненциально растут, а возврат к малым амплитудам осуществляется за счет переключения диода. Все наблюдавшиеся при  $r < r_0$  автоколебания были стохастическими и имели сплошной спектр (рис. 11, где приведены также осциллограммы колебаний). При уменьшении  $r$  число колебаний в пачке уменьшалось, а спектр расширялся. Судя по результатам эксперимента, при построении динамической модели можно пренебречь нелинейностью лампы. Тогда модель будет иметь вид

$$\dot{X} = 2hX + Y - gZ, \quad \dot{Y} = -X, \quad \epsilon \dot{Z} = X - f(Z), \quad (9)$$

здесь введены безразмерные переменные  $X = I/I_m$ ,  $Z = v/v_m$ ,  $Y = uc^{1/2}/I_m L^{1/2}$ ,  $\tau = t(LC)^{1/2}$  и параметры  $h = 0,5(MS - rC) \times \times (LC)^{1/2}$ ,  $g = V_m C^{1/2}/(I_m L^{1/2})$ ,  $\epsilon = g \frac{c_1}{\dots} \ll 1$ ,  $f(Z)$  — нормированная характеристика диода.

Физический механизм возникновения хаоса в данной модели — переключательный. Его суть в том, что энергия экспоненциально нарастающих колебаний расходуется не постепенно (как в системах со спектрально разнесенными источником и стоком энергии), а скачком — система как бы сбрасывает излишки энергии, возвращаясь в состояние с меньшей энергией. Однако возвращается система уже не точно в исходное состояние и, благодаря экспоненциаль-

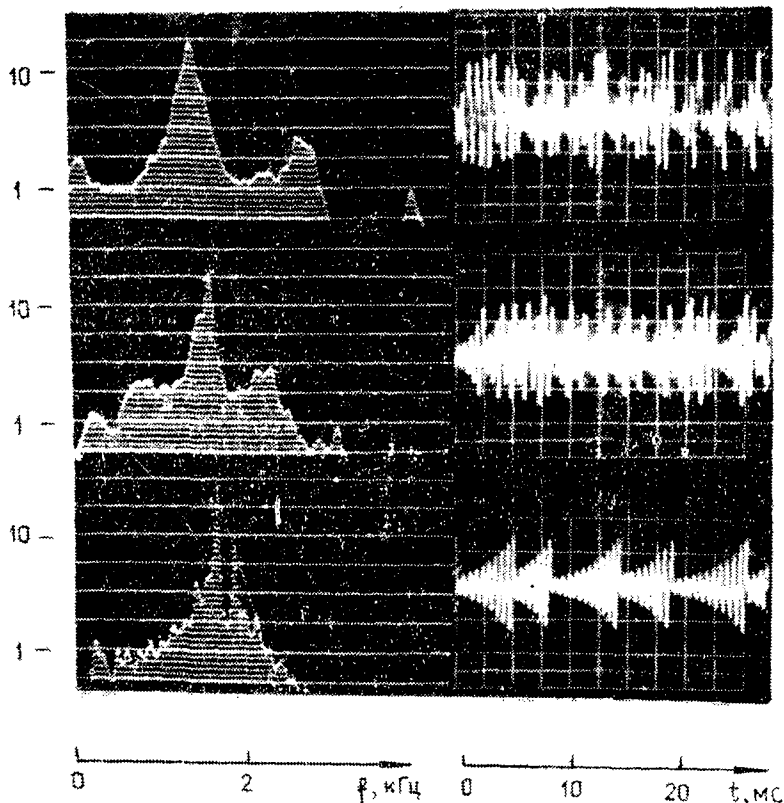


Рис. 11

пому росту колебаний, достигает границы переключения уже через другое число импульсов. Отсюда случайность числа импульсов в цуге.

Математическую природу переключательного хаоса удобно исследовать в разрывном приближении (имея в виду, что система (9) содержит малый параметр  $\varepsilon$  при производной). Все движения в фазовом пространстве (рис. 12) разбиваются на быстрые—прямые  $X = \text{const}$ ,  $Y = \text{const}$ , соответствующие переключениям диода, и медленные траектории на поверхностях  $A$  и  $B$  при  $X = f(Z)$ ,  $f'(Z) > 0$ . Имеющееся в системе единственное состояние равновесия лежит на поверхности  $A$ . Когда раскручивающиеся вокруг него траектории достигают края поверхности  $A$ , происходит срыв изображающей точки по траекториям быстрых движений на поверхность  $B$ . После недолгого пребывания на этой поверхности точка возвраца-



ется на поверхность  $A$  в окрестность состояния равновесия—начинается новый цикл колебаний. Анализ динамики, таким образом, можно свести к рассмотрению одномерного отображения полупрямой  $\Sigma (X=Z=0, Y)$  в себя (Пиковский, Рабинович [20]). При кусочно-линейной аппроксимации  $f(Z)$  функцию отображения  $\varphi(y)$  можно записать аналитически.

Ее вид в некоторой области значений  $b = \frac{g}{1-\alpha}$  и  $v = h - \frac{\alpha g}{2}$

( $\alpha$  характеризует наклон отрезков, аппроксимирующих  $f(Z)$ , см. рис. 10, б) представлен на рис. 13. Это ото-

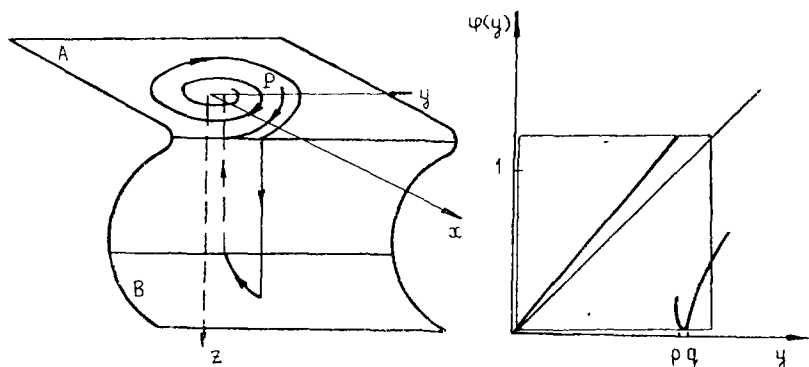


Рис. 12, 13

бражение имеет аттрактор, внутри которого вначале происходит несколько итераций с  $y_i < \rho$  (колебания в цикле нарастают), затем — итерация с  $y_i > \rho$  (один цикл сменяется другим). При малых  $v$  везде внутри аттрактора  $|\varphi'| > 1$ , т. е. отображение является растягивающим. В этом случае отображение имеет инвариантную эргодическую меру, относительно которой оно является перемешивающим (следствие результатов Бунимовича, Синая, [21]). Благодаря сделанным приближениям задача упрощается настолько, что можно построить статистическое описание работы генератора, качественно совпадающее с экспериментом [22].

## 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

1. Во многих экспериментах, демонстрирующих возникновение турбулентности, пространственная структура полей уже в предтурбулентном режиме столь сложна, что непосредственный переход от уравнений, описывающих экспериментальную ситуацию, к доступной для исследования динамической модели со странным аттрактором чрезвычайно затруднен. Один из путей продвижения, тем не менее, к пони-

манию механизмов возникновения стохастичности в диссипативных системах и средах, а следовательно и дальнейшего освоения странных аттракторов физиками, — это построение феноменологических моделей.

2. Общность колебательных механизмов возникновения хаоса в системах совершенно различной природы позволяет строить в некотором смысле «эталонные» модели со странными аттракторами. Например, модель «переключательного хаоса» описывает и гомогенную автокаталитическую реакцию и радиотехнический генератор шума.

3. То, что понимает физик под термином «странный аттрактор» (имея в виду образ стохастических автоколебаний), может не быть им в строгом математическом смысле. Действительно, с точки зрения потребителя, представляются равноправными следующие возможности: 1) существование истинного странного аттрактора в целой области пространства параметров, 2) существование странного аттрактора на множестве ненулевой меры значений параметра и, наконец, 3) существование сложной структуры, в которой содержится непритягивающее гиперболическое множество и бесконечное число циклов с очень узкими областями притяжения. Из-за ненулевых шумов эксперимента (и численного тоже) на эти циклы попасть невозможно. Но даже если бы на такой цикл попасть и удалось, на экспериментальной или численной реализации его не удалось бы отличить от шума. Дело в том, что спектр движения системы на такой сложной структуре, по-видимому, в конечных пределах не зависит от спектра флуктуаций или внешних шумов, т. е. это стохастические автоколебания. С физической точки зрения они ничем не хуже стохастических автоколебаний на настоящем странном аттракторе. Возможно, именно такой хаос появляется во многих моделях в результате бифуркаций удвоения.

Автор признателен В. Р. Когану, А. С. Пиковскому и А. Л. Фабриканту за плодотворные дискуссии.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Gollub J. P., Benson S. V., Steinman T. — Physics, Haverford College, PA, U. S. A. 1980.
2. Езерский А. Б., Рабинович М. И., Степаняц Ю. А., Шапиро М. Ф. — ЖЭТФ. 1979, 76, с. 991.
3. Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. — Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, с. 180.
4. Feigenbaum M. — J. Stat. Phys., 1978, 19, p. 25.
5. Creveling H. F., De Paz J. F., Baladi J. Y., Schoenhals R. J. — J. Fluid, Mech., 1975, 67, p. 65.
6. Carry J. H. — Commun. Math. Phys., 1978, 60, p. 193.

7. *Hocking L. M., Stewartson K.* — Proc. Roy. Soc. Lond., 1972, A326, p. 289.
8. *Андронов А. А., Фабрикант А. Л.* — В кн.: Нелинейные волны. М., Наука, 1979, с. 68.
9. *Kuramoto Y., Yamada T.* — Progr Theor. Phys., 1976, 56, p. 679.
10. *Pereira N. R., Stenflo L.* — Phys. Fluids, 1977, 20, p. 1733.
11. *Рабинович М. И., Фабрикант А. Л.* — ЖЭТФ, 1979, 77, с. 617.
12. *Львов В. С., Предтеченский А. А.* — Препринт № 111. Новосибирск, Ин-т автоматки и электрометрии СО АН СССР, 1979.
13. *Craik A. D. D.* — J. Fluid. Mech., 1971, 70, p. 437.
14. *Дубровин В. И., Коган В. Р., Рабинович М. И.* — Физика плазмы, 1978, 4, № 5, 1972.
15. *Новиков А. А., Синицын В. В., Тагер А. С.* — Изв. вузов. Радиофизика, 1979, 22, с. 380.
16. *Вышкинд С. Я., Рабинович М. И., Тарантович Т. М.* — В кн.: Тр. VI междунар. симп. по нелинейной акустике. М., Наука, 1975, с. 53.
17. *Schmitz R. A., Graziani K. L., Hudson J. L.* — J. Chem. Phys., 1977, 67, p. 3040.
18. *Rössler O. E.* — Bull. Math. Biology, 1977, 39, p. 275.
19. *Кияшко С. В., Пиковский А. С., Рабинович М. И.* — Радиотехника и электроника, 1980, 25, № 3, с. 336.
20. *Пиковский А. С., Рабинович М. И.* — ДАН СССР, 1978, 239, с. 314.
21. *Бунимович Л. А., Синай Я. Г.* — В кн.: Нелинейные волны. М., Наука, 1979, с. 212.
22. *Pikovskiy A. S., Rabinovich M. I.* — Phys. Reports, 1981, to be published.

## О ЗАКОНЕ УНИВЕРСАЛЬНОСТИ ФЕЙГЕНБАУМА

Я. Г. СИНАИ

В настоящее время известно много примеров динамических систем, где численно или с помощью моделирования наблюдаются стохастические аттракторы (см., например, [1]). Однако структура таких аттракторов исследована весьма мало. В частности, мы не знаем достаточно хороших параметров, с помощью которых можно было бы задавать аттракторы. Возможный подход к анализу структуры аттракторов основан на анализе механизмов возникновения аттракторов. В известной работе Афраймовича, Быкова, Шильникова [2] был предложен такой механизм для модели Лоренца. Проверка выполнения предпосылок действия этого механизма с помощью ЭВМ была проделана в [3], [4]. В работе [7] для этого механизма были исследованы стохастические свойства аттрактора Лоренца.

Но этот механизм не является, по-видимому, достаточно универсальным. В последнее время широко распространилась точка зрения, согласно которой стохастические аттракторы возникают в результате бесконечной последовательности бифуркаций периодических траекторий, так что стохастический аттрактор можно представлять себе как предел бесконечной последовательности все усложняющихся периодических траекторий. Аналогия с предложенной Ландау схемой возникновения турбулентности здесь несомненна. Ландау предполагал, что турбулентность появляется в результате бесконечной последовательности бифуркаций, приводящих к условно-периодическим движениям с растущим числом базисных частот. Если заменить бифуркации условно-периодических движений бифуркациями удвоения периода, то мы получим гипотезу возникновения стохастического аттрактора.

Напомним вкратце, как происходит такая бифуркация. Пусть  $\gamma$  — периодическая траектория динамической системы периода  $t_0$ ,  $x_0 \in \gamma$ . Проведем через  $x_0$  трансверсально к  $\gamma$  площадку  $\Pi$ , размерность которой на единицу меньше размерности фазового пространства, и рассмотрим отображение последования  $T$  (отображение Пуанкаре), определенное

вблизи  $x_0$ . Линеаризуя  $T$  в окрестности  $x_0$ , получим линейный оператор  $\partial T$ , спектр которого характеризует устойчивость периодической траектории. Бифуркация удвоения периода происходит в том случае, когда при изменении параметра спектр  $\partial T$  проходит через  $-1$ . Ясно, что такая бифуркация грубая, т. е. сохраняется при переходе к достаточно близкому семейству динамических систем. При выполнении достаточно общих условий типа неравенств периодическая траектория, которая прежде была устойчивой, распадается на неустойчивые и устойчивую периодическую траекторию удвоенного периода. При этом новая устойчивая периодическая траектория как бы два раза обвивается около исходной устойчивой периодической траектории. При дальнейшем росте параметров новая устойчивая периодическая траектория несколько смещается в пространстве, после чего с ней происходит такая же бифуркация и т.д.

В связи с такой картиной возникновения стохастического аттрактора были предприняты попытки увидеть с помощью ЭВМ бифуркации удвоения периода у разных моделей. В модели Лоренца при больших  $r$  имеется периодическая траектория, к которой притягиваются все остальные траектории (Юдович и др.). Лоренц в докладе на конференции по нелинейной динамике (Нью-Йорк, 1979 г.) отмечал, что в модели Лоренца ему удалось проследить за четырьмя бифуркациями типа удвоения периода. В недавних работах Уеда изучались бифуркации удвоения периода для системы Дуффинга. В недавнем препринте Франческини приводились результаты о бифуркациях типа удвоения периода для 5-модовой системы галеркинского типа для течения Колмогорова. В этом случае было обнаружено несколько последовательностей бифуркаций, отвечающих разным периодическим траекториям.

Исследуя численно разные примеры семейств преобразований и динамических систем, американский физик М. Фейгенбаум обнаружил замечательную закономерность [5]. А именно, если  $\{\mu_i\}$  — последовательность значений параметра, где происходят последовательные бифуркации удвоения периода и  $\mu_\infty = \lim \mu_i$ , то, согласно Фейгенбауму,  $|\mu_\infty - \mu_i| \sim \text{const} \lambda^i$ , где  $\text{const}$  зависит от конкретного семейства, а  $\lambda$  — универсальная постоянная. Согласно численным результатам Фейгенбаума  $\lambda^{-1} = 4,6692$ . В настоящее время есть веские основания полагать, что  $\lambda$  не зависит также и от размерности фазового пространства. Если применимость закона универсальности Фейгенбаума будет строго установлена при достаточно широких условиях, то это будет, несомненно, чрезвычайно важным, существенно новым утверждением. Например, пронаблюдав за несколькими первыми бифуркациями, мы могли бы предсказать значение параметра,

при котором возникает стохастический аттрактор, т. е. момент появления турбулентности.

Цель этой заметки — изложить содержание недавней работы Колле, Экмана и Лэйфорда [6], посвященной обоснованию закона универсальности Фейгенбаума. Их подход основан на идеях метода реинормгруппы, хорошо известного в теории фазовых переходов второго рода в статистической механике.

Рассматривается класс отображений  $\psi(x)$  отрезка  $[-1, 1]$  в себя, удовлетворяющих условиям:

- 1)  $\psi$  непрерывно дифференцируема;
- 2)  $\psi(0) = 1$ ,  $\psi$  строго возрастает на  $[-1, 0]$  и строго убывает на  $[0, 1]$ ;
- 3)  $\psi(-x) = \psi(x)$ .

Смысл этих условий состоит в том, что отрезок  $[-1, 1]$  как бы складывается вдвое так, что точка 0 оказывается его правым концом, а затем непрерывно преобразуется. Допустим, что

$$\psi(+1) < 0, \text{ а } b = \psi[\psi(1)] > |\psi(1)| = a \text{ и } \psi(b) < a.$$

Если рассмотрим график отображения  $\psi_2(x) = \psi[\psi(x)]$  на отрезке  $[-a, a]$ , то он будет симметричен относительно 0 и  $\psi_2(0) = -a$ . Тогда  $\psi_2(x)$  будет иметь тот же вид, что и исходное отображение  $\psi$ , за исключением того свойства, что это будет отображение отрезка  $[-a, a]$  в себя. Произведем теперь масштабное преобразование оси  $x$  и введем преобразование в пространстве отображений  $\psi$ , действующее по формуле  $I\psi(x) = -\frac{1}{a}\psi[\psi(ax)] = -\frac{1}{a}\psi_2(x)$ . Преобразование

$I$  называется преобразованием удвоения.

Допустим теперь, что  $I$  имеет неподвижную точку, т. е. существует такая функция  $\psi_0(x) = \psi_0$ , что  $I\psi_0 = \psi_0$ . Для такой функции, очевидно,  $\psi_0^{2^n}(x) = \underbrace{\psi_0\{\psi_0[\dots\psi_0(x)]\dots}}_{2^n} \underbrace{\dots}_{2^n}$  имеет

при любом  $n$  периодическую точку, что означает наличие периодической траектории периода  $2^n$ . Иными словами, отображение  $\psi_0$  имеет периодические траектории всех периодов  $2^n$ . Для получения дальнейших свойств надо линеаризовать  $I$  в окрестности  $\psi_0$ . Допустим, что линеаризованное преобразование  $dI$  имеет одно собственное значение, большее 1, а все остальные собственные значения по модулю меньше 1. Тогда через точку  $\psi_0$  можно провести устойчивое многообразие  $W^{(s)}$  коразмерности 1 и неустойчивое одномерное многообразие  $W^{(u)}$ . Если теперь взять однопараметрическое семейство отображений  $\psi_\mu$ , близкое к  $W^{(u)}$ , то для некоторого  $\mu_0$  отображение  $\psi_{\mu_0} \in W^{(s)}$ . Тогда  $I^n \psi_{\mu_0} \rightarrow \psi_0$  при  $n \rightarrow \infty$  и естествен-

но ожидать, что  $\psi_{\mu_0}$  имеет периодические траектории периодов  $2^n$  для всех достаточно больших  $n$ .

В упомянутой работе Колле, Экмана, Лэнфорда [6] было строго показано, что отображение  $I$  имеет неподвижную точку в классе функций вида  $f(|x|^{1+\varepsilon})$ , где  $f$  — аналитическая функция в некоторой окрестности отрезка  $[0, 1]$ , а  $\varepsilon$  достаточно мало. Для  $\varepsilon=1$  существование неподвижной точки установлено с помощью ЭВМ. Далее, эта неподвижная точка обладает нужными свойствами устойчивости. Дополнительный анализ, проведенный Колле и др. в [6], показывает следующее.

1. Всякое  $\psi \in W^{(g)}$  имеет инвариантное канторово множество, на котором любая траектория всюду плотна; кроме того, для каждого  $k \geq 1$  существует единственная неустойчивая траектория периода  $2^{k-1}$  и других периодических траекторий не существует; любая траектория либо периодична, либо притягивается к канторову множеству;

2. Существует открытое множество однопараметрических семейств преобразований, такое, что для каждого семейства  $\{\psi_{\mu}\}$  из этого множества

а) существует  $\mu_0$ , при котором  $\psi_{\mu_0} \in W^{(g)}$ ;

б) существует последовательность  $\{\mu_i\}$ ,  $i \geq 1$ ,  $\mu_i \rightarrow \mu_{\infty}$ , такая, что для  $\psi_{\mu_i}$  точка 0 — периодическая устойчивая точка периода  $2^i$ ; при этом  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \ln |\mu_i - \mu_{\infty}|$  не зависит от выбора семейства  $\{\mu_{\mu}\}$ ;

в) существует бесконечная последовательность  $\{\bar{\mu}_i\}$ ,  $\bar{\mu}_i \rightarrow \bar{\mu}_{\infty}$ , такая, что каждое  $\bar{\psi}_{\bar{\mu}_i}$  имеет абсолютно непрерывную инвариантную меру; предел  $\lim_{i \rightarrow \infty} \frac{1}{i} \ln |\bar{\mu}_i - \bar{\mu}_{\infty}|$  также не зависит от выбора семейства  $\{\bar{\psi}_{\bar{\mu}}\}$ .

Указанные пределы зависят, разумеется, от  $\varepsilon$ . Численный счет показывает, что при  $\varepsilon \rightarrow 1$  они сходятся к значениям, близким к тем, которые обнаружил Фейгенбаум.

Нет сомнения в том, что в работе Колле, Экмана, Лэнфорда представлена теория, адекватная результатам Фейгенбаума. В связи с этим хотелось бы, во-первых, получить прямое доказательство существования неподвижной точки для отображения  $I$ . Во-вторых, было бы интересно получить доказательства основных результатов в духе более привычных методов теории бифуркаций. Наконец, важно выяснить, в

каком смысле приведенные результаты допускают многомерное обобщение.

Можно выразить некоторое сомнение в том, что предел бесконечной последовательности бифуркаций удвоения периода действительно приводит к появлению стохастического аттрактора с сильными статистическими свойствами. Недавние исследования Мисюревича и Барковского, Левина показывают, что в пределе таких бифуркаций возникают преобразования с нулевой энтропией. Кроме того, должны быть периодические траектории периодов  $p2^k$ ,  $p$  — нечетно, с которыми связаны свои бесконечные последовательности бифуркаций. Настоящая стохастичность, скорее всего, возникает в пределе бесконечного числа таких последовательностей бифуркаций. Продолжение исследований в этом направлении чрезвычайно важно и перспективно.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, № 1, с. 123.
2. Афраймович В. С., Быков В. В., Шильников Л. П. — ДАН СССР, 1977, 234, № 2, с. 336.
3. Вул Е. Б., Синай Я. Г. Обнаружение периодических траекторий динамических систем с помощью ЭВМ. Препринт. Черноголовка, 1979.
4. Sinai Ya. G., Vul E. B. Verification of Hyperbolicity Conditions for the Lorentz Model. Physics Reports (in press).
5. Feigenbaum M. — Journal of Statistical Physics, 1978, 19, p. 25; 1979, 21, p. 6.
6. Collet P., Eckmann J.—P., Lanford O. E. III. Universal Properties of Maps on an Interval. Preprint. Berkeley, California, 1979.
7. Бунимович Л. А., Синай Я. Г. Стохастичность аттрактора в модели Лоренца. — В кн.: Нелинейные волны. М., Наука, 1979, с. 212—226.



# СТОХАСТИЧЕСКИЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ В СИСТЕМЕ ЭЛЕКТРОННЫЙ ПУЧОК — ОБРАТНАЯ ВОЛНА

Б. П. БЕЗРУЧКО, С. П. КУЗНЕЦОВ, Д. И. ТРУБЕЦКОВ

1. Рассмотрим систему (рис. 1), в которой электронный пучок движется в положительном направлении оси  $x$  через искусственную среду, в которой могут распространяться волны с продольным электрическим полем. Дисперсия среды такова, что фазовая скорость волны на некоторой частоте  $\Omega$  равна скорости пучка ( $v_{\phi}(\Omega) = v_0$ ), а групповая скорость  $v_{гр}(\Omega)$  отрицательна\*. Благодаря этому при взаимодействии

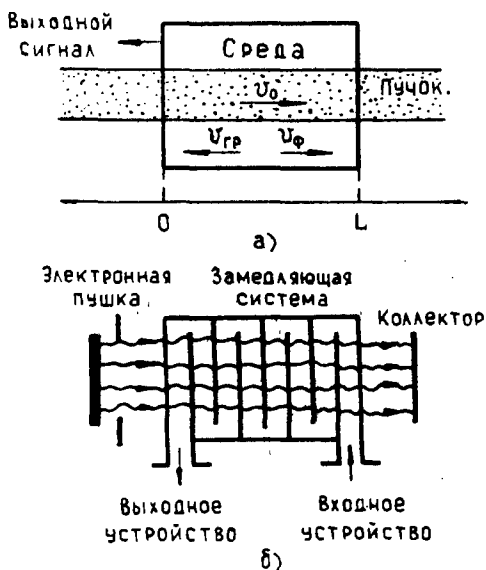


Рис. 1. Схематическое изображение системы электронный пучок — обратная волна: а — модель, используемая при теоретическом анализе; б — экспериментальный макет

\* Практически в качестве среды с требуемыми свойствами используется периодическая электродинамическая структура — замедляющая система.

пучка и волны в системе реализуется распределенная обратная связь и возможны автоколебания. Описанная система известна в электронике как лампа обратной волны (ЛОВ) и используется для генерации монохроматических колебаний СВЧ диапазона [1]. Выходной сигнал снимается с того же конца замедляющей системы, с которого поступает электронный пучок.

Будем пренебрегать диссипацией энергии в среде, отражениями волн на границах среды ( $x=0$  и  $x=l$ ) и силами кулоновского взаимодействия электронов. Введем безразмерные переменные и параметры

$$\xi = \frac{x}{l}, \quad \tau = \frac{t - x/v_0}{l/v_0 + l/|v_{rp}|}, \quad F = \frac{E_1}{2\beta_0 U C^2},$$

$$C = \sqrt[3]{\frac{IK}{4U}}, \quad L = \beta_0 C l,$$

где  $\beta_0 = \Omega/v_0$ ,  $E_1$  — комплексная амплитуда поля волны  $E = \text{Re}[E_1(x, t) e^{i(\Omega t - \beta_0 x)}]$ ;  $U = \frac{m v_0^2}{2e}$  — ускоряющее напряжение,

$e$  и  $m$  — заряд и масса электрона,  $I$  — постоянная составляющая тока пучка,  $K$  — параметр, связывающий амплитуду волны с переносимой мощностью  $P = |E_1|^2 / 2\beta_0^2 K$ .

При использовании стандартного допущения  $C \ll 1$  рассматриваемая система описывается уравнениями [1, 2] ( $\Theta_\alpha = \Omega(t - x/v_0)$ )

$$\frac{\partial F}{\partial \tau} - \frac{\partial F}{\partial \xi} = -\frac{L}{\pi} \int_0^{2\pi} e^{-i\Theta_\alpha} d\alpha, \quad (1)$$

$$\frac{\partial^2 \Theta_\alpha}{\partial \xi^2} = -L^2 \text{Re}(F e^{i\Theta_\alpha})$$

с граничными и начальными условиями

$$\Theta_\alpha|_{\xi=0} = \alpha, \quad \left. \frac{\partial \Theta_\alpha}{\partial \xi} \right|_{\xi=0} = 0; \quad F|_{\xi=1} = 0; \quad (2)$$

$$F|_{\tau=0} = F_0(\xi). \quad (3)$$

2. Характер установившихся движений системы, не зависящих от начальных условий, определяется единственным безразмерным параметром  $L = \beta_0 l \sqrt[3]{IK/4U}$  и, как оказывается, последовательно усложняется с ростом  $L$ . Таким образом, для данной системы число  $L$  играет такую же роль, как число Рейнольдса для потока Куэтта или число Релея для термоконвекции в подогреваемом слое [3, 4].

Как известно из линейного анализа, тривиальное решение краевой задачи (1), (2)  $F \equiv 0$  устойчиво при малых  $L$  и те-

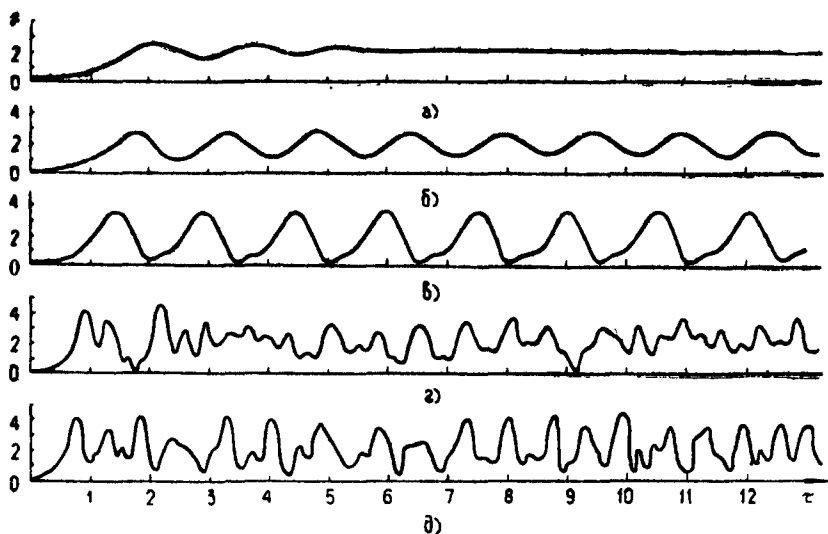


Рис. 2. Зависимости амплитуды выходного сигнала  $|F(0, \tau)|$  от времени, полученные при численном моделировании процесса установления колебаний: а —  $L=2,75$ ; б —  $L=3$ , в —  $L=3,5$ , г —  $L=6$ , д —  $L=7$

ряет устойчивость для  $L > 1,974$ . Численное решение системы (1) — (3)\* показывает, что при  $1,974 < L < 2,9$  устанавливается режим с постоянной амплитудой и частотой сигнала  $F(\xi, \tau) = f(\xi) e^{-ib\tau}$ ,  $b = b(L)$  (рис. 2, а). Если же  $L > 2,9$ , появляется модуляция сигнала по амплитуде и фазе с периодом  $\Delta \tau \approx 1,5$ :  $F(\xi, \tau) = f(\xi, \tau) e^{-ib\tau}$ , где  $f$  — периодическая функция  $\tau$  (рис. 2, б). При дальнейшем увеличении  $L$  модуляция становится более глубокой (рис. 2, в), а затем процесс теряет периодичность (рис. 2, г, д).

В последнем случае выходной сигнал содержит нерегулярную последовательность максимумов амплитуды различной высоты и формы. Как видно из рис. 3, иллюстрирующего динамику распределения поля по длине, после «ухода» из системы каждого максимума возникает распределение поля, характеризующееся сравнительно небольшой и быстро осциллирующей амплитудой. Мелкие детали этого распределения существенно влияют на высоту, форму и время образования следующего максимума. Не наблюдается никакой тенденции к установлению состояния с постоянной или периодически меняющейся амплитудой. Однако усредненные (за время  $\tau$

\* Методика численного решения аналогична описанной в [2]. Начальные условия задавались в виде  $F^0(\xi) = \text{const}$ ; значения константы 0,1—0,2.

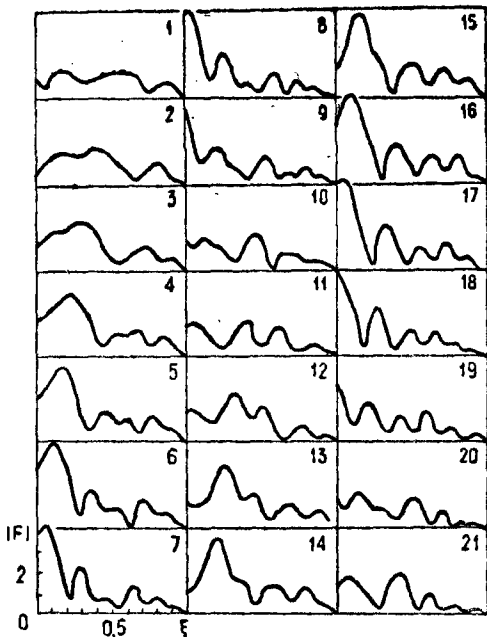


Рис. 3. Динамика распределения амплитуды поля волны  $F(\xi, \tau)$ . Первый «кадр» соответствует  $\tau = 6,714$ ; интервал безразмерного времени между соседними «кадрами»  $\Delta\tau = 0,071$ ;  $L = 7$

порядка нескольких единиц) квадрат амплитуды и скорость изменения фазы выходного сигнала примерно постоянны.

3. В эксперименте использовались специальные лабораторные макеты ЛОВ\*, позволяющие получать значения  $L$  от 0 до 10—12 при удовлетворительном выполнении допущений, сделанных при выводе уравнений (1).

При увеличении тока пучка  $I$  и постоянном напряжении  $U$  наблюдается несколько бифуркаций (при токах  $I_1, I_2, I_3$ , зависящих от  $U$ ), каждая из которых сопровождается усложнением спектра выходного сигнала (рис. 4 и 5).

Если  $I < I_1$ , то генерация отсутствует.

При  $I_1 < I < I_2$  генерируется монохроматический сигнал с частотой, близкой к  $\Omega$  (рис. 5, а).

Для  $I_2 < I < I_3$  имеют место многочастотные колебания с эквидистантным спектром (рис. 5, б—г). Расстояние по частоте между спектральными составляющими  $\Omega_m$  (частота мо-

\* От традиционных ЛОВ макеты отличались большой длиной ( $\beta_0 l \sim 150$ ) и большим поперечным сечением пучка.

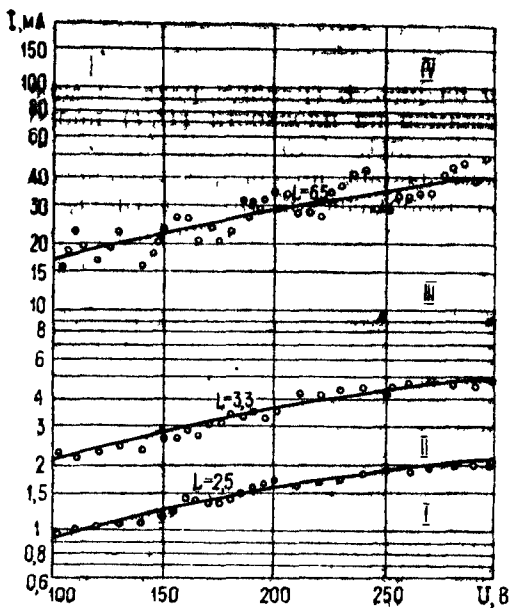


Рис. 4. Области отсутствия генерации (I), одночастотных колебаний (II), многочастотных колебаний с дискретным спектром (III) и колебаний со сплошным спектром (IV) на плоскости  $(U, I)$  для одного типичного экспериментального макета

дуляции) намного меньше  $\Omega$  и растет с увеличением тока (рис. 5, б, в). В интервале  $0,9 I_3 \leq I < I_3$  регистрируется одна или несколько бифуркаций с появлением в спектре дополнительных частот модуляции, которые, как правило, кратны  $\Omega_m/n$  ( $n$  — целое число, изменяющееся в зависимости от ускоряющего напряжения и условий встречи пучка). В случае, которому соответствует рис. 5, появлялись частоты, кратные  $\Omega_m/4$  и  $\Omega_m/8$ .

При  $I > I_3$  возникают колебания со сплошным спектром [6]: дискретные пики, существовавшие при  $I < I_3$ , начинают расплываться (рис. 5, д—ж). Интенсивность колебаний при этом не уменьшается, гистерезис отсутствует. Введение в систему внешнего гармонического сигнала на частоте, близкой к  $\Omega$ , приводит к сильной деформации спектра (если мощность внешнего сигнала на порядок меньше генерируемой) или к восстановлению колебаний с дискретным спектром (если мощности сравнимы). Возникновение сплошного спектра в результате четко выраженной бифуркации и специфическое влияние внешнего сигнала свидетельствуют в пользу того,

что данный режим представляет собой стохастические автоколебания, т. е. обусловлен сложной динамикой системы, а не усилением микрофлуктуаций [3, 4].

Как видно из рис. 4; границы раздела между областями различных режимов на плоскости  $(U, I)$  проходят примерно вдоль линий  $L = \text{const}$ . Это является экспериментальным подтверждением закона подобия, установленного в рамках рассмотренной теоретической модели (п. 1), и делает обоснованным сопоставление расчетов на ЭВМ с экспериментом\*. В частности, автоколебания с дискретным спектром соответствуют описанным в п. 2 режимам с постоянной и периодически меняющейся амплитудой. (Форма и частота модуляции, относительный уровень спектральных составляющих, а также характер переходного процесса согласуются с расчетами, приведенными в работе [2]; это можно видеть также из сравнения рис. 2 и обсуждаемого ниже рис. 6). Естественно предположить, что стохастические автоколебания, которые возникают в эксперименте при  $L > L_{\text{кр}} \sim 6,5$ , соответствуют найденным при расчетах на ЭВМ непериодическим режимам.

4. Связь наблюдаемых стохастических автоколебаний с неустойчивостью исследуемой динамической системы [4] можно проиллюстрировать, рассматривая процесс установления колебаний.

На рис. 6, 7 приведены осциллограммы, показывающие зависимость амплитуды выходного сигнала от времени, полученные в эксперименте в режиме периодического следования импульсов (подробности методики см. в [5]). Каждая осциллограмма есть результат наложения порядка  $10^4$  реализаций.

Если процесс развивается от микрофлуктуаций\*\*, то время нарастания колебаний является случайной величиной, и картина получается размазанной (рис. 7).

Подачей в систему внешнего монохроматического сигнала можно обеспечить одинаковый для всех реализаций начальный уровень амплитуды на несколько порядков выше уровня микрофлуктуаций и на несколько порядков ниже возникающих автоколебаний. Если поведение системы на нелинейной стадии процесса устойчиво, то действие флуктуаций приводит лишь к микроскопическому отличию реализаций друг от друга, на экране осциллографа наблюдается четкая картина (рис. 6, а—г). Когда же поведение неустойчиво, возмущения

\* Разброс экспериментальных точек на рис. 4 около линий  $L = \text{const}$  обусловлен отражениями волн от концов системы. Пороговые значения числа  $L$  завышены по сравнению с теоретическими из-за наличия диссипации в искусственной среде.

\*\* Флуктуации связаны главным образом с дробовым эффектом (с дискретной природой электронного пучка).

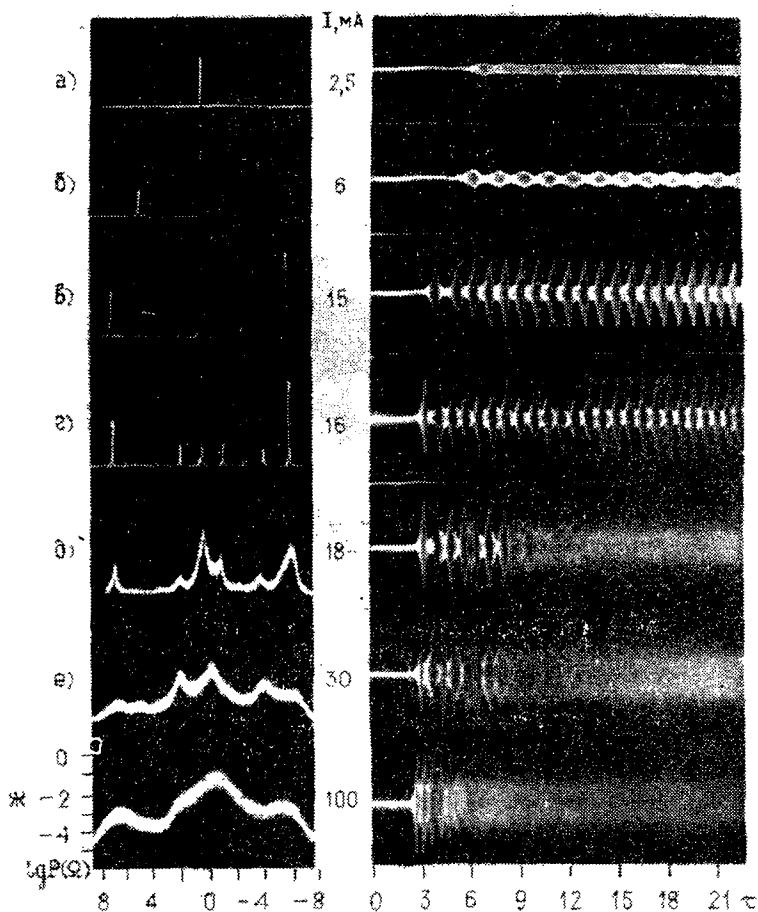


Рис. 5. Спектры мощности выходного сигнала экспериментального макета при  $U=122$  В и различных значениях тока. По оси абсцисс отложена нормированная отстройка частоты  $\Omega$

Рис. 6. Осциллограммы переходного процесса при значениях тока и напряжения, соответствующих рис. 5. Начальный уровень колебаний определяется вспомогательным внешним сигналом

успевают нарасти за некоторое время до макроскопического уровня, так что отличие реализаций друг от друга становится заметным на глаз (рис. 6,  $\delta$ — $\kappa$ ). Этот эффект наблюдается именно в тех случаях, когда в непрерывном режиме система генерирует сплошной спектр. Длительностью четко

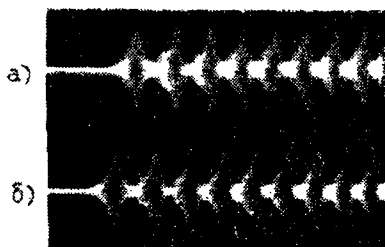


Рис. 7. Осциллограммы переходного процесса при отсутствии (а) и наличии (б) вспомогательного сигнала. В первом случае начальный уровень колебаний определяется микрофлуктуациями

видного начального участка осциллограммы ограничена возможность детерминированного предсказания динамики системы при существующем уровне флуктуаций.

В заключение отметим, что использование устройств сверхвысокочастотной электроники для экспериментального изучения принципиальных вопросов динамики многомерных и распределенных систем представляется весьма перспективным, в частности благодаря наличию простых и эффективных способов обработки высокочастотных сигналов. В прикладном плане изложенные результаты интересны с точки зрения моделирования процессов в мощных релятивистских карсинотронах [7].

## ЛИТЕРАТУРА

1. Электроника ламп с обратной волной. Под ред. В. Н. Шевчика и Д. И. Трубецкова. Саратов, изд-во Саратов. ун-та, 1975.
2. Гинзбург Н. С., Кузнецов С. П., Федосеева Т. П. — Изв. вузов. Радиофизика, 1978, 21, № 7, с. 1037.
3. Монин А. С. — УФН, 1978, 125, № 1, с. 97.
4. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, № 1, с. 123.
5. Безручко Б. П., Кузнецов С. П. — Изв. вузов. Радиофизика, 1978, 21, № 7, с. 1053.
6. Безручко Б. П., Кузнецов С. П., Трубецков Д. И. — Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, № 3, с. 180.
7. Релятивистская высокочастотная электроника. Материалы Всесоюзного семинара, Горький, ИПФ АН СССР, 1979.



# СТОХАСТИЧЕСКИЕ КОЛЕБАНИЯ В РЕЗОНАНСНЫХ АВТОГЕНЕРАТОРАХ С ЗАПАЗДЫВАНИЕМ

В. Б. ДИХТЯР, В. Я. КИСЛОВ

Все большее внимание исследователей привлекают нелинейные динамические системы, поведение которых близко к стохастическому даже в отсутствие воздействия на них каких-либо флуктуирующих сил [1—4]. Такие системы будем называть стохастическими. Особый интерес представляют стохастические автогенераторы [3, 5—7]. Стохастические колебания в автогенераторах без запаздывания возможны в том случае, если они описываются не менее чем тремя дифференциальными уравнениями первого порядка [3, 7].

В данной работе будет показана возможность стохастических колебаний в автогенераторах, описываемых одним уравнением первого порядка с запаздывающим аргументом.

Рассмотрим модель автогенератора, состоящую из последовательно соединенных и замкнутых цепью обратной связи нелинейного усилителя  $F$ , регулируемого линейного усилителя с коэффициентом передачи  $\delta$ , резонансного фильтра с импульсной характеристикой

$$g(t) = \frac{2}{\tau_k} e^{-t/\tau_k} \cos \omega_p t, \quad (1)$$

где  $1/\tau_k \ll \omega_p$ , и линии задержки с постоянным временем запаздывания  $\tau$ . Считаем, что от частоты зависят только параметры фильтра, а  $\tau$  учитывает запаздывание во всех элементах схемы. Тогда амплитудную огибающую автоколебаний можно описать следующим интегральным уравнением

$$A(t) = A(t)_0 + \int_0^{t-\tau} \delta F[A(t-\tau-\theta)] G(\theta) d\theta, \quad (2)$$

где  $G(t) = \frac{1}{\tau_k} e^{-t/\tau_k}$ ,  $F(A)$  — амплитудная характеристика нелинейного усилителя,  $A(t_0)$  — начальное возмущение длительности времени задержки  $\tau$ .

Амплитудную характеристику  $F(A)$  можно определить экспериментально. Для этого надо подать на вход нелиней-

ного усилителя моногармоническое колебание  $A_{\text{вх}} \cos \Omega_p t$  и найти зависимость его амплитуды на выходе  $A_{\text{вых}}$  от амплитуды на входе  $A_{\text{вых}} = F(A_{\text{вх}})$ . С другой стороны, в качестве  $F(A)$  можно использовать уравнения конкретного нелинейного усилителя, например уравнения лампы бегущей волны в режиме усиления моногармонического сигнала.

Коэффициент передачи по амплитудной огибающей резонансного фильтра (1) имеет вид:

$$G(\Omega) e^{-j\varphi(\Omega)} = \frac{1}{\sqrt{1 + (\Omega \tau_k)^2}} e^{-j \arctg \Omega \tau_k} \quad (3)$$

Полосу пропускания  $\Delta \Omega$  фильтра (3) часто можно считать конечной. Например, в теории линейных цепей полагают, что

$$\Delta \Omega = 0 - \Omega_k, \quad (4)$$

где  $\Omega_k = 1/\tau_k$ ,  $G(\Omega_k) = \sqrt{0,5}$ .

Аналитически уравнение (2) не решается. Путем дискретизации представим его в виде, удобном для расчетов на ЭВМ. Для этого заменим импульсную характеристику  $G(t) = (1/\tau_k) e^{-t/\tau_k}$  следующей функцией дискретного аргумента  $n$ :

$$G(n \Delta t) = \frac{B}{\tau_k} e^{-na}, \quad (5)$$

где  $a = \Delta t/\tau_k$ ,  $\Delta t = \pi/\Omega_{\text{max}}$ ,  $B = (1 - e^{-a})/a$ ,  $\Omega_{\text{max}}$  — наивысшая частота в спектре колебаний. Нормирующий множитель  $B$  введен для того, чтобы коэффициент дискретного фильтра (5)

$$\begin{aligned} aB \sum_{n=0}^{\infty} e^{-n(a - j\Omega \Delta t)} &= G(\Omega, a) e^{-j\varphi(\Omega, a)} = \\ &= \frac{e^a - 1}{\sqrt{1 - 2e^a \cos \Omega \Delta t + e^{2a}}} \exp \left( -j \arctg \frac{\sin \Omega \Delta t}{e^a - \cos \Omega \Delta t} \right) \end{aligned} \quad (6)$$

на частоте  $\Omega = 0$  равнялся единице и совпадал с коэффициентом передачи фильтра (3). В полосе (4) дискретный фильтр (6) моделирует  $G(\Omega)$  и  $\varphi(\Omega)$  непрерывного фильтра (3) при  $a \leq 0,4$ , и только  $G(\Omega)$  при  $a \leq 1$ . На рис. 1 построена система частотных характеристик дискретного фильтра (6) в функции от  $\Omega/\Omega_{\text{max}}$ . Фильтры с  $a \leq 1$  на частоте  $\Omega = \Omega_{\text{max}}$  имеют коэффициенты передачи  $G(j\Omega_{\text{max}}, a) \approx a/2$ .

Дискретное уравнение автогенератора (см. (3) в [8]) с импульсной характеристикой (5) сводится к следующему:

$$\begin{aligned} A(n \Delta t)_0 &\text{ при } n = 1, 2, 3, \dots, N; \\ A_{N+1} &= (1 - e^{-a}) \delta F(A_1), \\ A_n &= (1 - e^{-a}) \delta F(A_{n-N}) + e^{-a} A_{n-1} \text{ при } n = N+2, N+3, \dots \end{aligned} \quad (7)$$

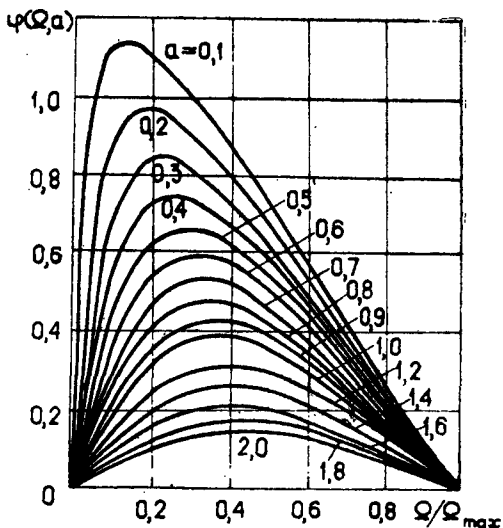
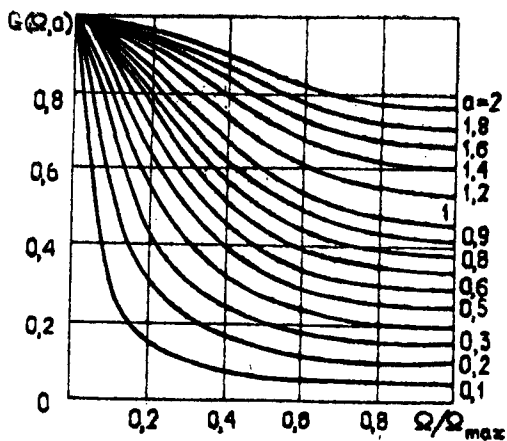


Рис. 1. Амплитудно-частотные  $G(\Omega, a)$  и фазочастотные  $\varphi(\Omega, a)$  характеристики фильтра с дискретным временем (5)

где  $A_n = A(n \Delta t)$  — мгновенное значение амплитудной огибающей в момент времени  $t = n \Delta t$ ,  $N \Delta t = \tau$ . Так как  $\Delta t = \pi / \Omega_{\max}$ , то  $\Omega_{\max} = \pi N / \tau$  и, следовательно,  $N$  равно числу частот

$$\Omega_m = \frac{\pi m - \varphi(\Omega_m, a)}{\tau} \quad (8)$$

где  $m=1, 2, 3, \dots$  в полосе  $0-\Omega_{\max}$ . В полосу же (4) попадает  $s$  частот (8). Число  $s$  при  $a < 1$  определяется приближенным соотношением:

$$\Omega_n \tau + 1 = \frac{\tau}{\tau_h} + 1 \approx s \pi.$$

Так как  $\tau/\tau_h = aN$ , то

$$s \approx \frac{aN+1}{\pi}. \quad (9)$$

Важным достоинством дискретного уравнения является то, что с его помощью можно моделировать автогенераторы с широким набором частотных характеристик (6).

Степень соответствия друг другу дискретной и непрерывной моделей возрастает с уменьшением параметра дискретизации  $a = \Delta t/\tau_h$ . Так как  $e^{-a} \approx 1 - a$  при  $a \rightarrow 0$ , то путем предельного перехода  $a \rightarrow 0$  последнее из уравнений (7) можно свести к дифференциальному с запаздывающим аргументом

$$\frac{dA}{dt} = \frac{1}{\tau_h} \{ \delta F[A(t-\tau)] - A(t) \}. \quad (10)$$

Таким образом, обнаруживается связь дифференциального (10) и интегрального (2) уравнений.

Уравнения типа (10), но с запаздыванием  $\tau = 0$ , описывают амплитудные огибающие колебаний широкого класса автогенераторов [9—11], в частности автогенераторов Ван-дер-Поля. В стационарном режиме амплитуда колебаний таких автогенераторов всегда постоянна. При наличии же запаздывания  $\tau \neq 0$  уравнение (10) имеет стационарное колебательное решение [12] — режим автомодуляционной неустойчивости

$$\delta G(\Omega_1) \frac{dF}{dA} \Big|_{\delta F=A} < -1, \quad (11)$$

где  $\Omega_1$  определяется уравнением (8).

Рассмотрим типы колебаний автогенераторов с запаздыванием в режиме (11).

Если параметр  $a \gg 1$ , то амплитудно-частотную характеристику дискретного фильтра можно считать прямоугольной, а фазочастотная  $\varphi(\Omega, a) \approx 0$ . В этом случае разностные уравнения (7) сводятся к каскаду

$$A_{n+1} = \delta F(A_n), \quad (12)$$

где  $n=1, 2, 3, \dots$ ;  $A_n, A_{n+1}$  — мгновенные значения огибающей, разделенные интервалом времени  $\tau$ . При циркуляции отсчеты, описываемые каскадами (12), самопроизвольно выходят на  $p$ -тактный предельный цикл

$A_{n+1} = \delta F(A_n)$ ,  $A_{n+2} = \delta F(A_{n+1})$ , ...,  $A_{n+p} = \delta F(A_{n+p-1}) = A_n$ , удовлетворяющий условию устойчивости (см. [11, 12]).

$$\delta^p \left| \prod_{i=0}^{p-1} \frac{dF(A_{n+i})}{dA_{n+i}} \right| < 1.$$

Диапазон значений параметра усиления  $\delta$ , при которых возможна генерация колебаний того или иного типа, будем называть соответствующей областью или зоной генерации. В области одитактных предельных циклов ( $p=1$ ) амплитуда колебаний постоянна, а в областях  $p$ -тактных циклов ( $p \neq 1$ ) промодулирована с периодом  $p\tau$ . Если при заданном усилии  $\delta$  устойчивых циклов с конечным числом тактов нет, то отсчеты будут вести себя стохастически [5, 6]. Области  $p$ -тактных предельных циклов можно выделить графически методом диаграмм Ламерея [11, 12].

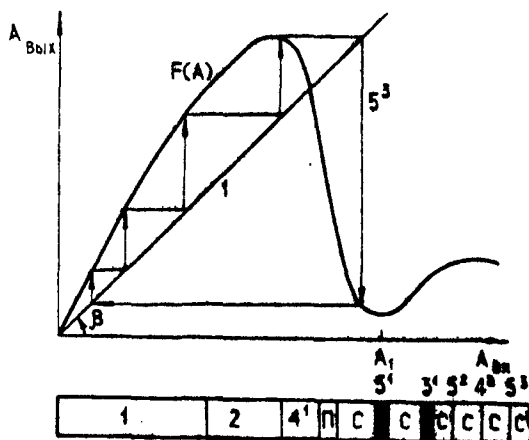


Рис. 2. Порядок следования областей генерации каскадов (12) в диапазоне  $0-A_1$  амплитудных характеристик  $F(A)$ :  $p^l$  — область  $p$ -тактного цикла типа  $l=1, 2, 3, \dots$ ; П — переходная зона; С — области стохастичности;  $\delta = \text{ctg } \beta$ ; стрелками показан предельный цикл  $5^3$

Если отсчеты не выходят за пределы первого нарастающего — первого падающего участков амплитудных характеристик, то каскады (12) при увеличении усиления  $\delta$  обеспечивают показанный на рис. 2 порядок смены областей предельных циклов с числом тактов  $p \leq 5$  [6] (рис. 2). Здесь верхний индекс характеризует тип цикла. Например,  $4^2$  означает четырехтактный предельный цикл типа 2. Послед-

ний цикл в последовательности определяется глубиной падающего участка. Так, амплитудные характеристики

$$A_{\text{вых}} = \delta A_{\text{вх}} (1 - \alpha A_{\text{вх}}^2 + A_{\text{вх}}^4) \quad (13)$$

с  $\alpha < 1,73$  обеспечивают только 1-тактные предельные циклы, а при  $\alpha = 1,98$  наибольший предельный цикл —  $5^2$ .

Моделирование на ЭВМ показывает [5, 6], что между областями предельных циклов  $4^1$  и  $5^1$ ,  $5^1$  и  $3^1$  и т. д. находятся зоны стохастичности. В них функции автокорреляции (см. далее (14)) отсчетов, вырабатываемых каскадами (12), убывают до уровня 0,1 примерно за  $(10-20)\tau$ , а огибающие функций распределения вероятностей имеют ряд резко выраженных экстремумов. Следует отметить, что на границе между областями стохастичности и предельных циклов (см. рис. 2) имеются переходные зоны, в которых формируются периодические колебания с большим числом тактов и почти-периодические колебания.

Используя каскады (12), фактически пренебрегаем действием фильтра. Для того чтобы оценить влияние переходных процессов в фильтре на вид автоколебаний и их основные статистические параметры, дискретное уравнение (7) решалось на ЭВМ при  $a = 1; 0,9; \dots; 0,1$ . В результате было выявлено, что при попадании в полосу (4) трех и более частот (8) порядок и расположение областей на рис. 2 до  $4^1$  сохраняется. В них устанавливается амплитудная огибающая, промодулированная с периодом  $T \approx p(\tau + \tau_h)$ , где  $p \neq 1$ . Предельные циклы других типов, по-видимому, разрушаются, так как во всех рассчитанных вариантах они не наблюдаются. После области  $4^1$  следовала узкая переходная зона и широкая область стохастичности.

Приведем результаты решения уравнений (7) при  $a = 0,2$  и амплитудных характеристиках (13) с  $\alpha = 2; 2,2 \leq \delta \leq 3,6$ . Амплитудная огибающая на времени задержки  $\tau$  задавалась  $N = 1, 5, 10, 20, 40, 100$  отсчетами. Полученные реализации обрабатывались с целью определения средней  $\left( \bar{A} = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L A_l \right)$  и средней квадратичной  $\left( \bar{A}^2 = \frac{1}{L} \sum_{l=1}^L A_l^2 \right)$  амплитуд; дисперсии  $-D_A = \bar{A}^2 - (\bar{A})^2$ , функции автокорреляции —

$$K_{AM} = \left[ \frac{1}{L-M} \left( \sum_{l=1}^{L-M} A_l A_{l+M} \right) - (\bar{A})^2 \right] D_A^{-1}, \quad (14)$$

где  $M = 1, 2, \dots \ll L$ ;  $A_l = A(l \Delta t)$ , и функции распределения вероятностей  $B_A$ .

Время установления периодических колебаний не превышало  $100\tau$ . Поэтому считалось, что периодические колебания не могут иметь места, если они не установились за время,

равное 1000τ. Статистические параметры вычислялись по последним 4000 или 10000 отсчетам реализаций, состоящим из  $5 \cdot 10^4 - 10^5$  отсчетов.

Согласно (9) при  $40 \leq N \leq 100$  в полосу (4) попадает от 3 до 7 частот (8); при  $20 \leq N \leq 40$  — от 3 до 1; при  $N < 10$  в полосе (4) нет ни одной частоты (8). Моделирование на ЭВМ показало, что при  $N > 40$  области предельных циклов 1, 2, 4<sup>1</sup> каскадов (12) и (7) совпадают. После области 4<sup>1</sup> ( $\delta > 2,8$ ) следует переходная зона, которая при  $\delta > 2,9$  сменяется областью стохастичности. При  $N < 40$  число возможных типов колебаний убывает с уменьшением  $N$ . Так, при  $N = 10$  наблюдаются только периодические и квазистохастические колебания, а при  $N < 5$  — только моногармонические. Чем меньше  $N$ , тем большее усиление  $\delta$  необходимо для многочастотной генерации.

На рис. 3 построены  $\bar{A}$ ,  $\bar{A}^2$ ,  $D_A$ . Видим, что дисперсия возрастает с увеличением усиления  $\delta$  и числа частот (8) в полосе  $0 - \Omega_{\max}$ . Чем больше дисперсия, тем большая доля мощности приходится на частоты, отличные от несущей частоты.

В области стохастичности функция автокорреляции убывает, осциллируя относительно значения  $K_{AM} = 0$ . При этом в начале области стохастичности  $3 < \delta < 3,2$  функция автокорреляции убывает медленно и в осцилляциях прослеживается квазипериод  $T \approx 2(\tau + \tau_h)$ . При больших усилениях квазипериод исчезает, а функция автокорреляции убывает до уровня 0,1 за  $10\tau$  (рис. 4). Во всех случаях первый основной максимум функции  $K_{AM}$  соответствует сдвигу  $M \Delta t \approx 2(\tau + \tau_h)$ .

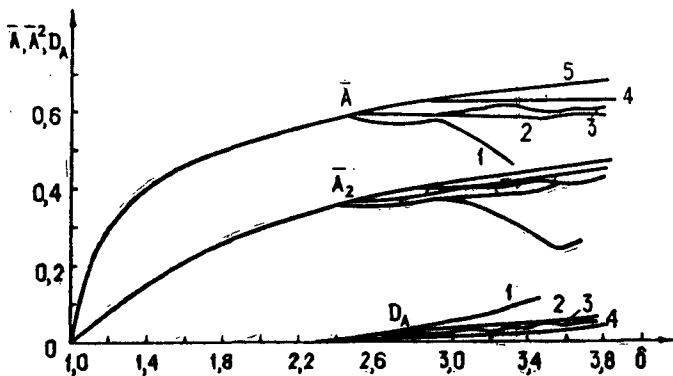


Рис. 3. Зависимость среднестатистических параметров колебаний, формируемых каскадами (7) при амплитудных характеристиках (13) с  $a = 2$ :  
 1 —  $N \rightarrow \infty$ ; 2 —  $N = 40$ ; 3 —  $N = 20$ ; 4 —  $N = 10$ ;  
 5 —  $N = 1$

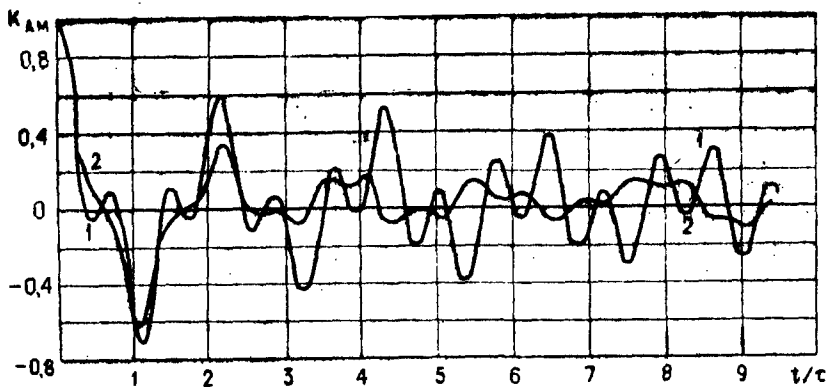
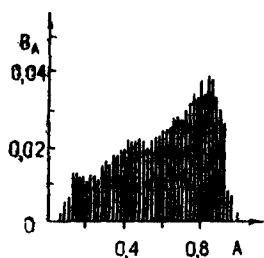
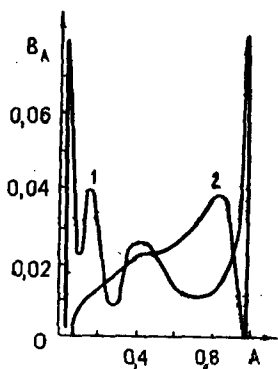


Рис. 4. Функции автокорреляции каскадов (7) при амплитудных характеристиках (14) с  $\alpha = 2$  и  $N = 40$ : 1 —  $\delta = 3,3$ ; 2 —  $\delta = 3,4$



а)



б)

Рис. 5. Функции распределения вероятностей (а) и их усредненные огибающие (б) в областях стохастичности при  $\delta = 3,4$ ;  $N = 40$  каскадов, (12) — кривая 1 и каскадов (7) — кривая 2



Это означает, что спектр амплитудной огибающей имеет максимум на частоте  $\Omega_1 \approx \pi / (\tau + \tau_R)$ .

В областях стохастичности закон распределения вероятностей каскадов (7) отличается от релеевского. В начале области стохастичности огибающая функции распределения вероятностей  $V_A$  сильно изрезана. С увеличением усиления изрезанность убывает и в области развитой стохастичности незначительна (рис. 5, а). Во всех случаях вероятность появления больших амплитуд выше, чем малых. Максимальные мгновенные значения амплитуд каскадов (7), (12) совпадают, а минимальные значения у каскадов (7) больше. Сами же функции  $V_A$  каскадов (7), (12) различаются существенно (рис. 5, б). Таким образом, переходные процессы в фильтре существенно влияют на закон распределения вероятностей  $V_A$ .

## ЛИТЕРАТУРА

1. Заславский Г. М. Статистическая необратимость в нелинейных системах. М., Наука, 1970.
2. Заславский Г. М., Чириков Б. В. — УФН, 1971, 105, вып. 1, с. 3.
3. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, вып. 1, с. 123.
4. Монин А. С. — УФН, 1978, 125, вып. 1, с. 97.
5. Кислов В. Я., Залогин Н. Н., Мясин Е. А. — Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 6, с. 1118.
6. Дихтяр В. Б., Кислов В. Я. — Радиотехника и электроника, 1979, 24, № 8, с. 1564.
7. Пиковский А. С., Рабинович М. И. — ДАН СССР, 1978, 239, № 2, с. 301.
8. Дихтяр В. Б., Кислов В. Я. — Радиотехника и электроника, 1977, 22, № 10, с. 2141.
9. Уткин Г. М. Автоколебательные системы и волновые усилители. М., Сов. радио, 1978.
10. Гоноровский И. С. Радиотехнические цепи и сигналы, М., Сов. радио, 1964.
11. Андронов А. А., Витт А. А., Хайкин С. Э. Теория колебаний. Изд. 2-е, перераб. М., ГИФМЛ, 1959.
12. Бовшверов В. М. — ЖТФ, 1936, 6, с. 1480.

## СТОХАСТИЧНОСТЬ В СИСТЕМЕ ДВУХ СВЯЗАННЫХ ВИБРАТОРОВ

В. И. СБИТНЕВ

Стохастическая активность нервных тканей является важной компонентой в организации функций мозга. На простой модели нервной ткани, представляющей собой систему двух пар нелинейных связанных дифференциальных уравнений, описан один из возможных механизмов стохастической активности. Каждая пара уравнений описывает колебания активности одной нейронной популяции, состоящей из двух типов нейронов — возбуждающих и тормозных. В системе двух взаимодействующих популяций при определенном согласовании параметров обнаружены стохастические колебания. Признак, указывающий на наличие стохастических колебаний в модели, — убывание автокорреляционной функции к нулю. Стохастические колебания исследованы с помощью анализа функций последования  $\psi_{k+1} = f(\psi_k)$ ,  $k = 1, 2, \dots, m$  на секущей ( $\psi = 0$ ,  $\psi < 0$ ), что позволило детально изучить специфические особенности этих колебаний. Показано существование стохастического аттрактора. Задача решалась численно. Наблюдаемые стохастические колебания могут объяснить природу так называемых патологических динамических паттернов, которые возникают на границе перехода нервной ткани от нормальной спонтанной активности к эпилептогенной фазе.

Кардинальная проблема нейрофизиологии — это выяснение структурных и функциональных основ сложных форм поведения человека и животных. Исследование электрической активности нервных тканей центральной нервной системы представляется одним из ведущих направлений в решении данной проблемы. Характерной особенностью электрической активности является случайная последовательность рядов нервных клеток (рис. 1), что затрудняет решение вопроса о том, как и каким образом нервные ткани выполняют свои регуляторные функции [1—4]. По этому поводу один из крупнейших нейрофизиологов нашего времени У. Р. Эйди отмечает: «В отличие от созданных человеком коммуника-

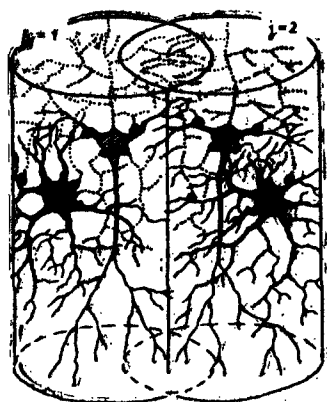
Рис. 1. Пример фоновой активности — вкле- точная регистрация импульсных разрядов нейрона в пресубикулюме (рисунок помещен с любезного согласия В. С. Стафехиной) (ИБФ АН СССР)

ционных систем, где шум вреден, мозг может использовать шум в качестве необходимой составной части своих функциональных взаимоотношений. Незначительные отклонения уровня независимости в популяции нейронов определенной области ткани мозга могут отражать главный сдвиг или степень способности системы удерживать информацию» [4]. Исследования коммуникационных свойств нервных тканей в условиях целостного мозга невозможны без четких представлений о внутренних функциональных особенностях нервных тканей. Поэтому нейрофизиологи уделяют все большее внимание таким моделям нервных тканей, как, например, культуры нервных клеток, выращиваемые в специально приготовленных питательных средах. Однако здесь еще существует масса нерешенных проблем, препятствующих надежной интерпретации получаемых результатов. Математические модели нервных тканей более искусственны, чем нейрофизиологические, но в их предельной простоте заключено и важное преимущество — полная независимость от неконтролируемых побочных влияний. Кроме того, математическая модель, как правило, включает в себя ровно столько исходных данных, сколько необходимо для понимания сути явлений [1, 5, 6].

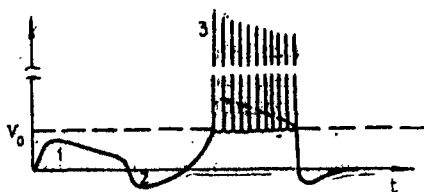
Предпосылкой к построению математической модели может служить следующее высказывание нейрофизиолога П. Милнера: «Теоретически можно вычислить, в какой степени деполяризуется каждый мотонейрон при возбуждении отдельного аксона, подсчитав количество его окончаний на каждой клетке, измерив расстояние от тела клетки до каждого синапса на дендрите, рассчитав уменьшение амплитуды потенциала в зависимости от удаленности синапса и т. д. Но это усилие принесло бы столько же пользы, как определение скорости движения отдельных молекул воздуха при урагане или отдельных электронов в электронно-лучевой трубке. Такие измерения практически невозможны, а если такая информация даже и будет получена, она окажется менее ценной, чем данные о среднем эффекте в точках, отстоящих на разном расстоянии от какого-либо центра возмущения. Такая карта среднего эффекта синаптической активности в

мотонейронном пуле или другой совокупности клеток называется полем по аналогии с магнитным, электрическим или гравитационным полями. Поле охватывает и возбуждающие и тормозные влияния; если в данный момент суммарный возбуждающий эффект превысит определенный порог, нейроны дадут разряд» [7]. Хотя приведенное высказывание и насыщено специальной терминологией, тем не менее обрисована довольно ясная картина: нервные клетки, составляющие основу нервной ткани, можно разделить на две основные группы — возбуждающие и тормозные нейроны. Все нейроны имеют множественные отростки, густой сетью перекрывающие соседние клетки. Эти отростки подразделяются на два типа качественно различных волокон — аксоколлатеральный и дендросоматический аппараты нейронов: физический признак проявляется в сильном различии электрических сопротивлений и емкостей их мембран [1, 5]. В данном случае важно подчеркнуть, что «экспериментальные данные заставляют фактически различать два типа нейроэлектрической активности: импульсные разряды нейрона, с одной стороны, и градуальные изменения медленного потенциала — с другой. Распространяются только нервные импульсы; градуальные изменения усиливаются и ослабевают в мозговой ткани локально, они чувствительны к различным влияниям, таким как локальная химическая среда, которая по своей природе не является строго нейронной» [8]. Нервные импульсы распространяются по аксоколлатеральным волокнам, которые дают свои окончания на дендросоматических отростках соседних нейронов (рис. 2, а). Эти окончания, известные в нейрофизиологической литературе как синапсы, покрывают всю доступную дендросоматическую поверхность нейронов плотными гроздьями и выполняют довольно важную функцию электрохимической связи нейронов между собой [1, 2, 8].

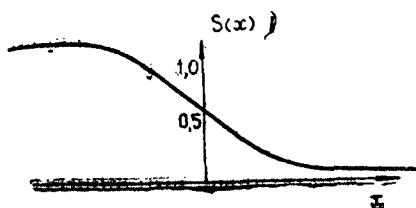
Для построения модели определим плотности потоков активации  $\psi$  и  $\phi$  на возбуждающих и тормозных нейронах. По определению, плотность потока — это среднее количество нервных импульсов, пересекающих единичную площадку за единицу времени. Так как импульсы распространяются по наперед заданным аксоколлатеральным волокнам, конечными адресатами которых являются синапсы, то под плотностью потока удобнее понимать среднее число активных синапсов, в данный момент времени выделяющих электрохимический агент в единице объема. В нейрофизиологической литературе эта функция нервной ткани известна как пресинаптическая активность. Возбуждающие потоки  $\psi$  проецируются как на тормозные, так и на возбуждающие нейроны, а тормозные потоки  $\phi$  проецируются только на возбуждающие нейроны [9]. При совместном действии этих потоков на дендросома-



а)



б)



в)

Рис. 2. Структура и функции нервной ткани: а — условное изображение нервной ткани. Черные клетки — тормозные нейроны, штрихованные клетки — возбуждающие (соответствующим цветом изображены и сигналы). Сплошными линиями прорисован дендросоматический аппарат нейронов, пунктирными — аксоколлатеральный; б — схема, показывающая отношения между медленными постсинаптическими потенциалами (1 и 2 — возбуждающий и тормозный потенциалы соответственно) и нервными импульсами (3).  $V_0$  — порог генерации; в — логистическая кривая, моделирующая нелинейные функции нейронов

тическом аппарате нейронов формируются линейные комбинации  $H\psi - B\psi$  и  $P\psi$  — постсинаптические (медленные) потенциалы на возбуждающем и тормозном нейронах соответственно. Здесь  $H$ ,  $B$  и  $P$  — интегральные веса синаптических окончаний. Важным параметром является порог возбудимости нейрона: если постсинаптический потенциал на нейроне превысит данный порог, то генерируется посылка импульсов, в противном случае нейрон «молчит» (рис. 2, б). В среднем по популяции [10] нейроны, как нелинейные источники импульсных потоков, моделируются логистической кривой (рис. 2, в):

$$S(x) = \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \operatorname{th} \frac{1}{2} x,$$

где  $x = V_0 - H\psi - B\psi$  для возбуждающих и  $x = U_0 - P\psi$  для тормозных нейронов, а  $V_0$  и  $U_0$  соответствующие пороги воз-

будимости. В режиме стационарной спонтанной активности эта функция представляет вероятность генерации импульсов по схеме независимых испытаний Бернулли [6]. Однако даже в отсутствие широко распространяющихся импульсов, при внутриклеточной регистрации наблюдаются ритмические изменения медленных постсинаптических потенциалов [8]. Поэтому, следуя Х. Вильсону и Дж. Коуэну [10, 11], необходимо учитывать динамику взаимодействия возбуждающих и тормозных нейронов:

$$\begin{aligned}\dot{\psi} &= -\psi + S(V_0 - H\psi + B\varphi), \\ \dot{\varphi} &= -\varepsilon\varphi + \varepsilon S(U_0 - P\psi).\end{aligned}\quad (1)$$

Данные уравнения записаны в безразмерных переменных и с точностью до нормировочного множителя описывают динамику медленных потенциалов [9], указывающих на вероятность, с которой разряжаются нейроны. В основе этого находит отражение концепция К. Прибрама, согласно которой «медленные потенциалы образуют динамические структуры, которые выполняют какую-то функцию помимо той роли, какую они играют в передаче импульсов» [8].

При исследовании возможных механизмов неупорядоченной активности нервных тканей уравнения (1) явно не полны [12, 13]. Поскольку нервная ткань является системой, состоящей из большого количества взаимодействующих модулей, постольку она имеет большое число степеней свободы [1, 2, 8]. Под модулями понимаются сообщества возбуждающих и тормозных нейронов, которые на гистологических препаратах различаются по их компактной группировке [14]. При моделировании стохастической активности нервных тканей имеет смысл ограничиться только двумя модулями [12, 15]. Для каждого из двух модулей  $j=1, 2$  (рис. 2, а) функциями их состояний также являются плотности потоков активации  $\psi_j$  и  $\varphi_j$  — возбуждающей и тормозной подсистем соответственно:

$$\begin{aligned}\dot{\psi}_j &= \psi_j + \gamma(\psi_k - \psi_j) + S\{V_0 - H_j\psi_j + B\varphi_j\}, \\ \dot{\varphi}_j &= -\varepsilon\varphi_j + \varepsilon S\{U_0 - P\psi_j\}, \quad j=1, 2; \quad k=3-j.\end{aligned}\quad (2)$$

Как видно из схемы, тормозные нейроны выполняют регуляторные функции только в пределах своего модуля, тогда как взаимодействие модулей осуществляется за счет обмена потоками возбуждения. При  $\gamma=0$  модули расцепляются — каждый из них является парциальным генератором (1) данной системы.

Аналитические исследования системы (2) затруднены. Но если принять, что тормозных нейронов значительно меньше,

чем возбуждающих [9] ( $\varepsilon \ll 1$ ), то фазовые траектории вдали от состояний равновесия можно разделить на быстрые и медленные. В рамках этого приближения можно установить, что областью притяжения фазовых траекторий является гиперкуб  $0 < \psi_j < 1$ ,  $0 < \varphi_j < 1$ , а бесконечность является отталкивающей. Внутри данного гиперкуба заключены возможные состояния равновесия системы (2). Исследование состояний равновесия на устойчивость сводится к анализу матрицы линейного преобразования:

$$L = \begin{bmatrix} -\varepsilon & \Omega_1^2 & 0 & 0 \\ -1 & R_1 - 1 - \gamma & \gamma q & 0 \\ 0 & \gamma q^{-1} & R_2 - 1 - \gamma & -1 \\ 0 & 0 & \Omega_2^2 & -\varepsilon \end{bmatrix}.$$

Здесь

$$q = \text{ch}^2[(V_0 - H_1 \psi_1^0 + B \varphi_1^0)/2] \text{sh}^2[(V_0 - H_2 \psi_2^0 + B \varphi_2^0)/2],$$

$$\Omega_j^2 = \varepsilon(BP/16) \text{sh}^2[(V_0 - H_j \psi_j^0 + B \varphi_j^0)/2] \text{sh}^2[(U_0 - P \psi_j^0)/2]$$

и  $R_j = (H_j/4) \text{sh}^2[(V_0 - H_j \psi_j^0 + B \varphi_j^0)/2]$ ,  $j = 1, 2$ .

Собственные значения  $\lambda = \Lambda - \varepsilon$  данной матрицы находятся из решения уравнения

$$(\Lambda^2 - \Gamma_1 \Lambda + \Omega_1^2)(\Lambda^2 - \Gamma_2 \Lambda + \Omega_2^2) - \Lambda^2 \gamma^2 = 0,$$

где  $\Gamma_j = R_j - 1 - \gamma + \varepsilon$ ,  $j = 1, 2$ . При  $\gamma = 0$  решения данного уравнения определяют собственные значения парциальных генераторов (1). В случае  $\gamma \neq 0$  слагаемое  $\Lambda^2 \gamma^2$  обеспечивает сближение собственных частот парциальных генераторов, благодаря чему облегчаются условия для возникновения синхронизации. Но, кроме того, и реальные части собственных значений сдвигаются так, что существует потенциальная возможность возникновения седло-фокусов — признак формирования гиперболических сечений, по крайней мере в локальной окрестности таких состояний равновесия [13]. Хотя это и не является достаточным признаком возникновения сложных движений, однако указывает на то, что такие движения при определенных условиях могут возникнуть. Механизмом возникновения таких движений может явиться разрушение синхронизации колебаний отдельных парциальных подсистем, вплоть до полной хаотизации движений [12, 13, 15]. Такого сорта решения системы (2) могут быть выявлены как сопутствующие нарушению однородности модулей [16] — неоднородная стратификация продуктов нейрохимических реакций является основной причиной, создающей неоднородность в нервных тканях [1, 8]. Параметрами, которыми можно регулировать неоднородность в системе (2), являются  $H$ ,  $B$ ,  $P$  и  $V_0$ ,  $U_0$ . Для простоты в данной работе неоднородность задается по  $H_1$  и  $H_2$ .

Система уравнений (2) решалась на ЭВМ БЭСМ-6 методом Рунге—Кутты с автоматизированным выбором шага интегрирования и относительной точностью  $10^{-4}$ . Численные значения безразмерных параметров  $V_0=1,6$ ;  $U_0=8$ ;  $B=2$ ;  $P=20$ ;  $\varepsilon=0,005$  с коэффициентом связи модулей  $\gamma=0,01$  выбраны на основе конкретных физиологических данных\*. Параметры  $H_1$  и  $H_2$  выбираются из интервала  $(4,4 \div 4,6)$  так, что каждый из парциальных генераторов системы (2) заведомо находится в режиме автоколебаний. При определенном согласовании параметров  $H_1$  и  $H_2$  в системе (2) обнаружены стохастические решения [17]. Критерием, указывающим на наличие стохастических решений, является убывание корреляционной функции  $g(\tau) = \langle \psi_1(t), \psi_1(t-\tau) \rangle$  к нулю с ростом  $\tau$  (рис. 3) [18]. Здесь  $\psi_1(t) = \langle \psi_1 \rangle - \psi_1(t)$ .



Рис. 3. Модуль коэффициента корреляции  $|\rho| = g(\tau)/g(0)$  ( $H_1=4,524$ ;  $H_2=4,564$ )

Исследование конкретной организации стохастического процесса основано на методах анализа функций последования [12, 13, 15]. В качестве секущей фазового потока можно взять любую из возможных изоклинических поверхностей системы (2), например  $\psi = (\psi_1 + \psi_2)/2 = 0$ . На этой секущей функция  $\psi = (\psi_1 + \psi_2)/2$  попеременно достигает своих максимальных  $\psi < 0$  и минимальных  $\psi > 0$  значений. Отслеживались максимальные отклонения функции  $\psi(t)$ , которые достигаются в последовательные моменты времени  $(t_1, t_2, \dots, t_{m+1})$ . Упорядоченная во времени таблица чисел  $(\psi_1, \psi_2, \dots, \psi_{m+1})$ , собственно, и представляет собой график функции последования (рис. 4):

$$\psi_{k+1} = f(\psi_k), \quad k = 1, 2, \dots, m.$$

Уместно отметить, что при малом шевелении параметров  $H_1$  и  $H_2$  диаграммы последования деформируются слабо [17].— это указывает на грубость данных процессов [19].

Интересные закономерности в организации стохастических процессов обнаруживаются при анализе особенностей

\* Исходные физиологические параметры приведены в работе [9], в приложении к модели поля  $CA_3$  гиппокампа.



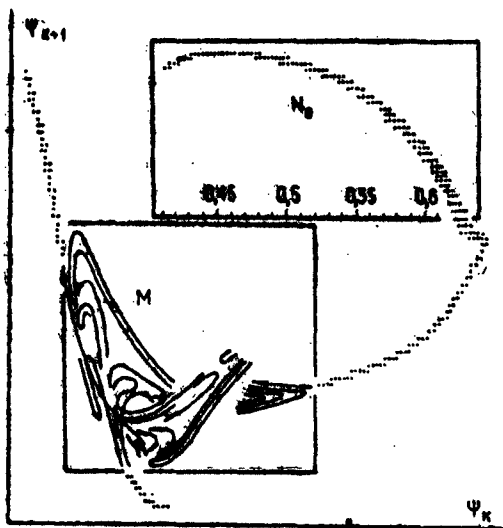


Рис. 4. Диаграмма последования  $\Psi_{k+1} = f(\Psi_k)$ ,  $k=1, 2, \dots, m=88000$  ( $H_1=4,520$ ;  $H_2=4,564$ ). В квадрате прорисованы несколько первых отображений ориентированного отрезка  $\Gamma_k$ .

последовательных отображений наперед выбранной компактной группы точек, как целостного объекта [15, 19]. За исходную группу точек возьмем те и только те точки из заданной последовательности  $\{\psi_k, k=1, 2, \dots, m+1\}$ , пары которых  $(\psi_{p_i}, \psi_{p_{i+1}}) = [\psi_{p_i}, f(\psi_{p_i})]$ ,  $i=1, 2, \dots, n < m$  составляют график  $N_0 = N_x \otimes N_y$  (рис. 4). Формально этому множеству можно приписать свойства ориентированного (например, слева направо, по рисунку) отрезка  $r_0$  и далее проследить цепочку отображений  $r_0 \xrightarrow{f} r_1 \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} r_k \xrightarrow{f} \dots$ , индуцированную последовательностью  $(\psi_{p_i}, \psi_{p_{i+1}}) \xrightarrow{f} (\psi_{p_{i+1}}, \psi_{p_{i+2}}) \xrightarrow{f} \dots \xrightarrow{f} (\psi_{p_{i+k}}, \psi_{p_{i+k+1}}) \xrightarrow{f} \dots$  для всех  $i=1, 2, \dots, n$ . Данный отрезок уже на втором применении оператора  $f$  попадет в квадрат (см. рис. 4). Проследить последовательную эволюцию отрезка внутри множества  $M$ , за исключением первых нескольких отображений, практически не представляется возможным: по ходу отображений отрезок  $r_k$  растягивается, складывается пополам с последующей склейкой, рвется и т. д. «Перемалывание» отрезка внутри этого квадрата длится сравнительно долго: примерно 90% точек исходной последовательности  $\{\psi_k, k=1, 2, \dots, m+1\}$  формиру-

ют структуру множества  $M$ . Тем не менее, время пребывания стрезка внутри данного квадрата ограничено. В данном случае важным моментом является возвращаемость точек исходного множества  $N_0$ , после того как они будут оснoвательно перетасованы на множестве  $M$ . Поэтому значительный интерес представляет структура отображения вида  $F: N_0 \rightarrow N_0$  [15]: данное отображение расслаивает исходное множество  $N_0$  на сравнительно регулярную жорданову и явно канторову формы (рис. 5). Из рисунка виден характерный признак стохастичности: исходное множество точек растягивается во сколь угодно большее число раз [15].

В заключение желательно дать возможную интерпретацию наблюдаемых решений в свете задач нейродинамики. При  $H_1$  и  $H_2 \leq 4,4$  автоколебания в системе (2) отсутствуют — имеется единственное устойчивое состояние равновесия, что отвечает случаю нормальной спонтанной активности нервных тканей. При  $H_1$  и  $H_2 > 4,6$  система входит в режим синхронных релаксационных колебаний. Такой режим соответствует эпилептогенной активности ткани — синхронные разряды нейронов сопровождаются тормозными паузами [16]. При  $H_1$  и  $H_2$ , лежащих между значениями 4,4 и 4,6, обнаружены стохастические автоколебания [17]. В нейрофизиологических экспериментах на границе раздела нормальной и эпилептогенной фаз довольно часто наблюдают разряды

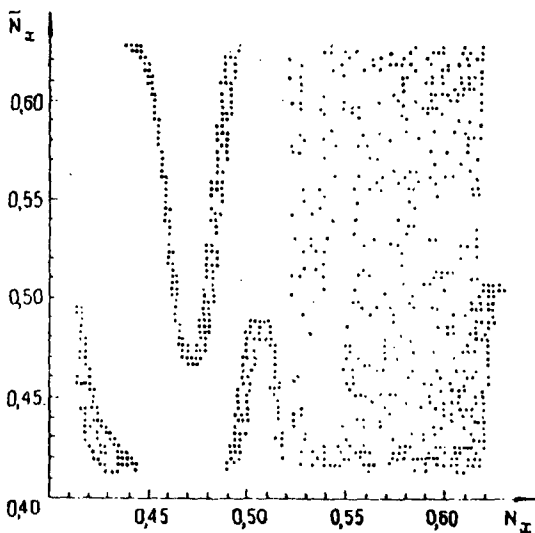


Рис. 5. Структура отображения  $F: N_x \rightarrow N_x$ , где  $N_x$  — проекция множества точек  $N_0$  на ось абсцисс (рис. 4). Статистика  $n \approx 2500$

нейронов с ярко выраженной нерегулярной пачечной активностью — так называемые патологические динамические паттерны [1]. Интересно, что в этой переходной области каким-то образом могут затрагиваться механизмы памяти: известны клинические факты, что перед наступлением эпилепсии иногда наблюдаются ауры (судорожным припадкам предшествуют галлюцинации) [7]. Есть основания полагать, что именно патологические динамические паттерны провоцируют неконтролируемое высвечивание следов памяти. Однако данная проблема может оказаться значительно шире в связи с так называемыми паттернами значимости Шеррингтона [1—5, 7, 8]. Затрагивая этот вопрос, А. В. Хольден в своей монографии [5] пишет, что нейрональная активность стохастическая, но не хаотическая, паттерновая (пакетированная нерегулярными посылками импульсов, как, например, на рис. 1), но не стереотипная: «По-видимому, стохастическая природа активности не является некоторой разновидностью шума, которым можно пренебречь, но представляет собой существенный элемент нейронального контроля поведения: нейронная система со стереотипным, детерминированным поведением не проявляла бы адаптивного поведения в изменяющейся среде» [5].

Работа проделана под руководством Г. М. Драбкина и М. И. Рабиновича. Автор особо признателен А. С. Пиковскому, беседы с которым по ходу работы носили исключительно продуктивный характер. Автор благодарит А. Г. Брагина, с которым довелось обсудить нейрофизиологическую интерпретацию модели и ее результатов.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Katchalsky A. K., Rowland V., Blumenthal R.* Dynamic Patterns of Brain Cell Assemblies. — In: *Neurosc. Res. Prog. Bull.*, 1974, 12, p. 1.
2. Бернс Б. Неопределенность в нервной системе. М., Мир, 1969.
3. Бехтерева Н. П., Бунзен П. В., Гоголицын Ю. Л. Мозговые коды психической деятельности. Л., Наука, 1977.
4. Эйди У. Р. — В кн.: Основные проблемы электрофизиологии головного мозга. М., Наука, 1974, с. 350.
5. *Holden A. V.* Models of the Stochastic Activity of Neurones. — In: *Lect. Notes Biomath.*, 1976, 12, p. 1.
6. *Scott A. C.* Neurophysics. Now-York-London-Sydney-Toronto, W. I. Publ, 1977.
7. Милнер П. Физиологическая психология. М., Мир, 1973.
8. Прибрам К. Языки мозга. М., Прогресс, 1975.
9. Сбитнев В. И. — Биофизика, 1978, 23, с. 508.
10. *Wilson H. R., Cowan J. D.* — *Biophys. J.*, 1972, 12, p. 1.
11. *Wilson H. R.* — In: *Synergetics (Cooperative Phenomena in Multi-Component Systems)*. Stuttgart, «B. G. Teubner», 1973, p. 207.
12. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, с. 123.

13. Бутенин Н. В., Неймарк Ю. И., Фуфаев Н. А. Введение в теорию нелинейных колебаний. М., Наука, 1976.

14. Сентаготаи Я., Арбиб М. Концептуальные модели нервной системы. М., Мир, 1976.

15. Рабинович М. И. — В кн.: Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 5.

16. Сбитнев В. И. — Биофизика, 1979, 24, с. 141.

17. Сбитнев В. И. Стохастичность в системе двух связанных вибраторов. Препринт 503, ЛИЯФ, Л., 1979.

18. Синай Я. Г. — В кн.: Нелинейные волны. М., Наука, 1979, с. 192.

19. Алексеев В. М. Символическая динамика. Лекции на одиннадцатой математической школе. Киев, 1976.

## ПОЭТАПНЫЙ ПЕРЕХОД К ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ТЕЧЕНИИ КУЭТТА

В. С. ЛЬВОВ, А. А. ПРЕДТЕЧЕНСКИЙ

Сейчас можно считать общепризнанным, что гидродинамическую турбулентность вязкой жидкости можно описывать конечным числом обыкновенных дифференциальных уравнений. Действительный вопрос заключается в том, сколько именно и каких уравнений необходимо учитывать для описания с разумной точностью конкретных течений при различных числах Рейнольдса. Для редукции исходных уравнений Навье—Стокса часто используют метод аппроксимирующих функций (типа метода Галеркина). Однако почти произвольно выбранный базис не будет, вообще говоря, собственным даже для простейших режимов, возникающих после потери устойчивости. Это ведет к неоправданно большому числу уравнений. Например, для описания тепловой конвекции в ячейке Хеле—Шоу первоначально использовалось 12 уравнений [1]. Впоследствии было обнаружено, что на начальном этапе возникновения турбулентности эффективно возбуждены только четыре степени свободы, так что для описания эксперимента достаточно решить 8 дифференциальных уравнений первого порядка по времени (см., например, в [2]). Для качественного описания перехода к стохастическому течению в подогреваемом снизу слое [3] потребовалось учитывать 39 уравнений в галеркинском подходе к уравнениям гидродинамики и теплопроводности. Для более сложных течений число таких уравнений окажется еще большим. Кроме того, обрезание формальных рядов аппроксимирующих функций может привести к изменению тонких характеристик топологии аттрактора исходной многомерной системы: стохастический аттрактор может превратиться в сложный предельный цикл. Дальнейшее усечение системы может снова превратить его в другой стохастический аттрактор. Известная система Лоренца [4], по-видимому, и является примером такой редукции. Поэтому остается неясным, имеют ли построенные таким образом аттракторы прямое отношение к проблеме возникновения турбулентности.

Между тем в целом ряде задач при числах  $Re$ , переход-

ных от ламинарного режима к развитому турбулентному, основная энергия движения жидкости сосредоточена в узких частотных участках спектра мощности и скорость  $V(r, t)$  можно представить в виде

$$V(r, t) = \frac{1}{2} \sum [A_j(r, t) e^{i\omega_j t} + \text{к. с.}] \quad (1)$$

В некоторой малой области  $Re$  можно пренебречь изменениями пространственной структуры мод  $\omega_j$  и считать\*  $A_j(r, t) = A_j(t) f_j(r)$ . Поскольку характерное время изменения  $A(t)$  много меньше, чем обратное расстояние между частотами  $\omega_j$ , для «временных огибающих»  $A_j(t)$  можно написать феноменологические уравнения, оставляя в них только резонансные слагаемые

$$\frac{\partial A_j}{\partial t} = \gamma_j A_j + \sum_k (\eta_{kj} + iT_{kj}) |A_k|^2 A_j + \dots \quad (2)$$

Такое представление эквивалентно приведению исходной системы дифференциальных уравнений к нормальной форме Пуанкаре в окрестности особой точки [5]. С помощью галеркинских разложений в принципе можно вычислить коэффициенты в (2) и пространственную структуру движений  $f_j(r)$ . Существенно, что число уравнений в (2) (при отсутствии вырождения) определяется числом наиболее интенсивных пиков в экспериментально наблюдаемом спектре мощности и оказывается, как правило, значительно меньшим, чем число уравнений в галеркинском подходе. Например, для понимания особенностей возникновения вторичного периодического течения достаточно исследовать только одно уравнение типа (2), из которого следует закон Ландау [6]:  $|A|^2 = \beta(Re - Re_c)$ , хорошо выполняющийся на эксперименте. При этом решение уравнений Навье—Стокса с конкретными граничными условиями необходимо лишь для определения двух констант  $Re_c$  и  $\beta$ .

Представляется разумным использовать феноменологический подход при исследовании и следующих бифуркаций в задачах с мягким, поэтапным переходом к турбулентности. При этом не только становится совершенно очевидным острый недостаток экспериментальной информации в этой области, но и возникает язык, на котором эта информация может быть изложена и на котором можно сформулировать ряд вопросов к эксперименту. А именно: как определить, исходя из результатов эксперимента, достаточное для его описания число уравнений, т. е. размерность эффективного фазового

\* В случаях высокой симметрии течения может возникнуть вырождение: несколько различных пространственных движений центрировано на одной и той же частоте.

пространства? Как определить характер движения изображающей течение точки в этом фазовом пространстве, другими словами, как экспериментально выглядит аттрактор? Как изменяется его структура с ростом числа Рейнольдса? И, наконец, в каком соотношении находится экспериментально наблюдаемая структура аттрактора с той, которая возникает при численном моделировании феноменологических уравнений?

В статье рассматриваются эти вопросы на примере перехода к турбулентности в течении Куэтта с вращающимся внутренним цилиндром. Гидродинамический блок обсуждаемой установки [7] состоит из двух коаксиальных металлических цилиндров ( $h=300$  мм,  $d_i=35$  мм,  $d_e=55$  мм) с радиальными биениями меньше чем 5 мкм. Температура воды поддерживалась с точностью  $\pm 0,02^\circ\text{C}$ , параметр стабильности периода вращения  $\Delta T/T$  в области  $T \approx 0,1 \div 10$  с был меньше чем  $10^{-4}$ . Для измерения азимутальной проекции скорости  $V_\varphi(t)$  использовался лазерный доплеровский измеритель (ЛДИС) [7], не возмущающий поток жидкости. Компьютерная система сбора и обработки данных [8] позволяла анализировать до 256 тысяч отсчетов  $V_\varphi(n\tau)$  с необходимым периодом квантования  $\tau$ .

Обсудим различные варианты эволюции спектров мощности при увеличении  $Re$ , отличающиеся числом вихрей Тейлора. Сравнивая их между собой, а также с результатами других авторов [9, 10], полученными на установках с другими геометрическими параметрами, убедимся, что, несмотря на различие в конкретных деталях, целый ряд качественных характеристик картины перехода к сплошному спектру является общим, и можно сказать, что течение Куэтта с вращающимся внутренним цилиндром является удобной моделью для изучения ряда общих, качественных особенностей мягкого, поэтапного режима перехода к турбулентности.

## 1. ЭВОЛЮЦИЯ СПЕКТРА МОЩНОСТИ

Путей к турбулентности столько,  
сколько дорог в Рим.

Проф. Марк Морковин,  
частное сообщение

В соответствии с изложенной во введении концепцией на первом этапе исследования нужно определить порядок возникновения и число «быстрых» движений. Такую информацию дает эволюция спектра мощности  $I(\omega)$ , которая и будет обсуждаться в этом разделе [8, 11, 12]. Здесь

$$I(\omega) = \langle |V_\omega|^2 \rangle = \frac{1}{M} \sum_{p=1}^M |V_p(\omega)|^2,$$

где  $V_p(\omega)$  — дискретный фурье-образ участка реализации,  $M$  — общее число таких участков.

Течение Куэтта в обсуждаемой геометрии теряет устойчивость при  $Re=74\pm 2$ . В зависимости от режима разгона образуется различное число вихрей Тейлора  $N$  (от 22 до 36). Ниже обсуждаются результаты, соответствующие течениям с  $N=30$  и 28, образующимся при медленном разгоне.

**а) Течение с  $N=30$ .** В области  $Re$  от 995 до 1015 возникают изгибные колебания вихрей — мода с шестью изгибами на длине окружности, а в спектре мощности — узкий пик на частоте  $\omega_6=1,93\omega_m$ ,  $\omega_m$  — частота вращения внутреннего цилиндра (рис. 1, а). Неточность в определении критического числа  $Re_1$  не превышала  $\pm 1$  в каждой серии экспериментов. Причина того, что  $Re_1$  изменяется от серии к серии в указанном выше интервале, обсуждается в разд. 2. Амплитуда пика в области малых надкритичностей  $\epsilon=\Delta Re/Re_1 < 0,02$  подчиняется закону Ландау:  $I_6=|A_6|^2 \sim Re-Re_1$  (рис. 2). Относительная ширина пика на уровне  $10^{-3}$  составляет  $1,2 \cdot 10^{-3}$ . С ростом  $Re$  в спектре становится существенной вторая гармоника. При  $\epsilon=0,025$  происходит бифуркация, приводящая к небольшому уширению линии. Детальному изучению явлений, возникающих в этой области  $Re$ , посвящен следующий раздел.

При дальнейшем увеличении  $Re$  в спектре мощности появляются пик на частоте  $\omega_2=0,55\omega_m$ , несоизмеримой с частотой  $\omega_6$ , и комбинационные гармоники (см. рис. 1, б). Затем при  $\epsilon=0,25$  возникает следующий пик с частотой  $\omega_3=0,95\omega_m$  (рис. 1, в). В дальнейшем ширины пиков постепенно становятся сравнимыми с расстояниями между ними. Это иллюстрирует рис. 3, где приведена зависимость  $\omega_2, \omega_6$  и ширины этих пиков от  $\omega_m$ . При  $Re=1901$  в спектре мощности уже отсутствуют хорошо выраженные максимумы (см. рис. 1, г).

При дальнейшем увеличении  $Re$  на фоне сплошного спектра вновь отчетливо проявляются относительно острые пики. Например, при  $Re=3354$  (рис. 1, д) присутствуют два узких пика на частотах  $\approx \omega_m$  и  $1,81\omega_m$  с относительными ширинами (на уровне 0,1) порядка  $10^{-2}$ . Эта система вторичных пиков разрушается с ростом  $Re$  качественно таким же образом, как и первичная.

**б) Течение с  $N=28$**  теряет устойчивость значительно раньше, чем течение с  $N=30$ . Так при  $Re=564$  (рис. 4, а) в спектре присутствует один узкий пик на частоте  $\omega_1=0,33\omega_m$ . Эта ситуация сохраняется вплоть до  $Re=900$ . Таким образом, в течении с  $N=28$  предельный цикл сохраняет устойчивость вплоть до надкритичностей порядка единицы, в то время как в течении с  $N=30$  первый предельный цикл с частотой  $\omega_6$  теряет устойчивость уже при  $\epsilon \approx 0,025$ . В области  $Re$



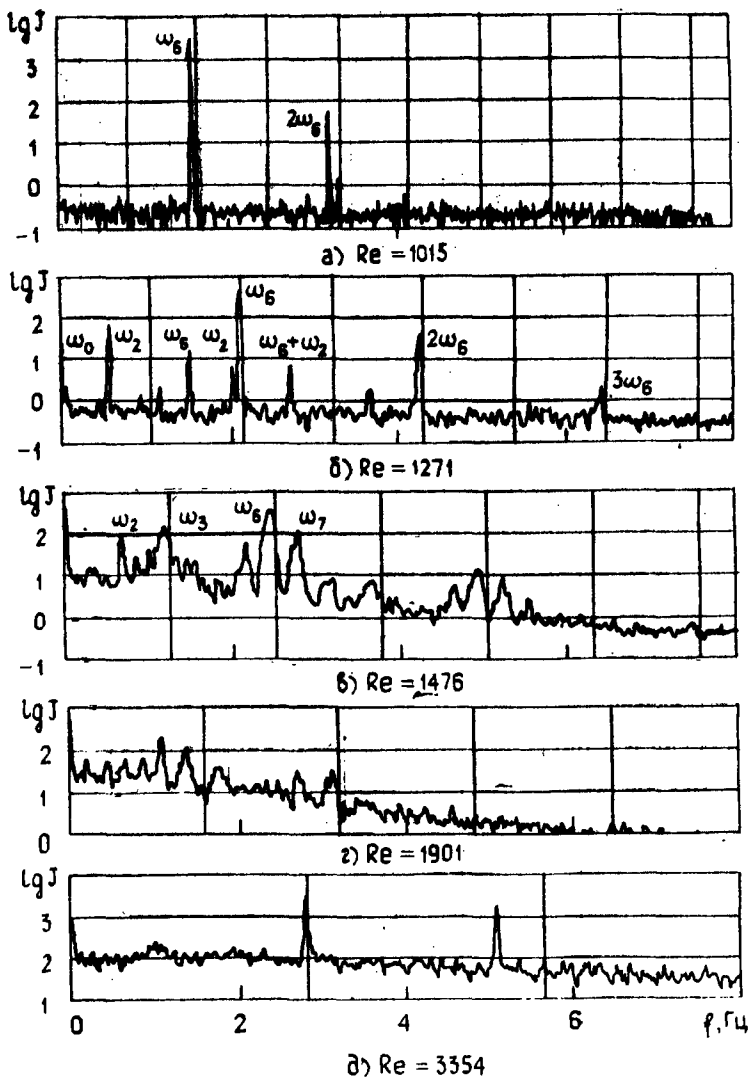


Рис. 1. Спектры мощности в десятичном логарифмическом масштабе для течения с  $N = 30$ . Вертикальные линии означают гармоники  $\omega_m$ .  $2\omega_m$  частоты вращения внутреннего цилиндра  $\omega_m$ . Аппаратурное разрешение по частоте  $\Delta\omega \approx 6 \cdot 10^{-3}$  от границы спектра  $\omega_N$

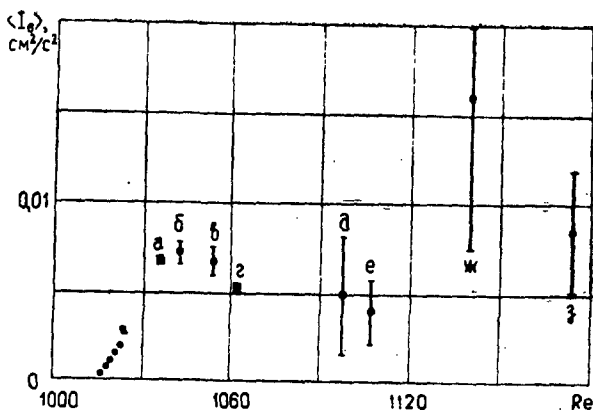


Рис. 2. Зависимость средней амплитуды  $\omega_0$ -движения и ее дисперсии от числа Рейнольдса

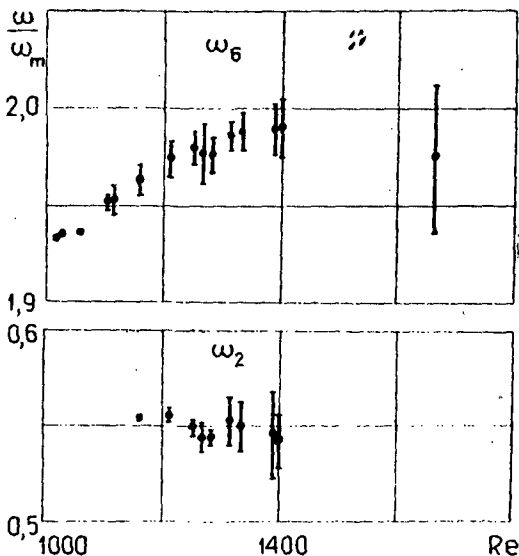
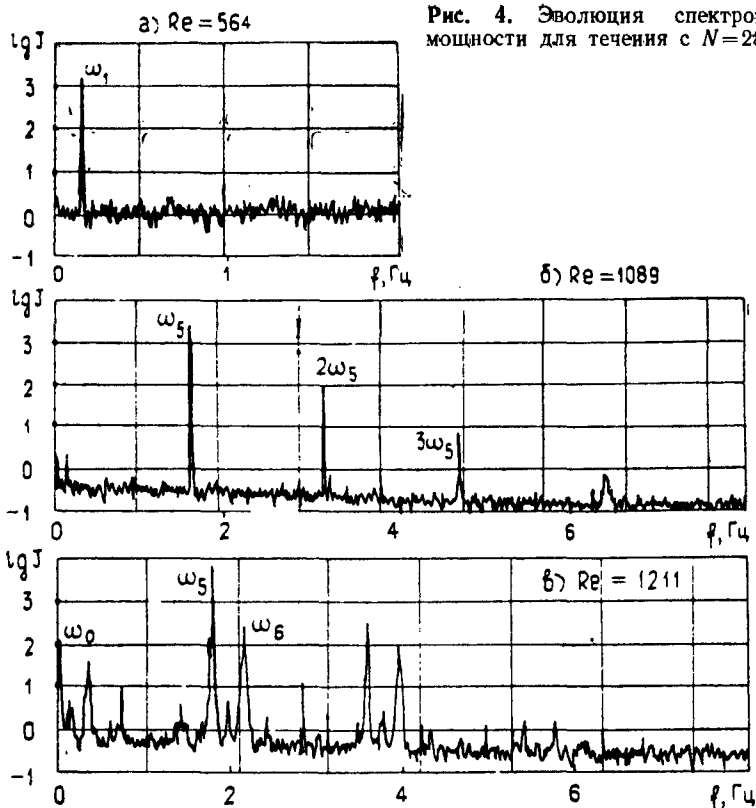


Рис. 3. Частота и ширина (на уровне 0,1 от максимума)  $\omega_2$  и  $\omega_6$  пиков в течении с  $N=30$  в зависимости от числа Re

от 900 до 980 предельный цикл  $\omega_1$  исчезает и возникает цикл на частоте  $\omega_5 = 1,63 \omega_m$ . Его характерной особенностью является наличие большого числа гармоник (рис. 4, б). Следующая бифуркация ( $Re \approx 1100$ ) приводит к возникновению

Рис. 4. Эволюция спектров мощности для течения с  $N=28$



тонкой структуры этого пика аналогично тому, как это происходит с пиком  $\omega_6$  в течении с  $N=30$ . Разумеется, при этом возникает низкочастотное движение  $\omega_0$ .

В интервале  $Re$  от 1100 до 1200 происходит коренная перестройка основного течения: система вихрей переходит в состояние с  $N=29$ ; при этом в спектре возникает ряд новых, уширенных пиков (рис. 4, в). Отметим, что течение с  $N=29$  может возникнуть и с самого начала, при потере устойчивости течения Куэтта. Этот третий путь к турбулентности описан в работе [11]. Здесь мы отметим только то, что в области  $Re \geq 1400$  различие в эволюции спектров для течений с  $N=29$  и 30 постепенно исчезает.

Сравнивая описанные здесь два «пути к турбулентности» между собой, а также с результатами [9, 10] при более узком зазоре, можно сказать, что все они отличаются по кон-

кретным значениям бифуркационных чисел Рейнольдса и типам возникающих при этом течений (см. таблицу).

Бифуркационные значения параметров для первых перестроек течения Куэтта

Источник	[11]	[9]	
Отношение высоты цилиндра к зазору	30	20	
Отношение зазора к радиусу внутреннего цилиндра	0,57	0,14	
$Re_c$ (возникновение вихрей Тейлора)	$74 \pm 2$	120	
Число вихрей Тейлора, $N$	30	28	17
$Re_1/Re_c$ (возникновение азимутальных волн)	13	6,5	1,3
Число возникающих изгибов, $m$	6	1	4
Область устойчивости азимутальных волн $(R_1^1 - Re_1)/Re_1$	0,025	0,8	14

Однако грубые, качественные аспекты картины перехода к турбулентности в различных вариантах течения Куэтта и в различных установках в целом совпадают: следующая бифуркация после тейлоровской связана с возникновением изгибной моды. Как при узком, так и при широком зазоре, можно наблюдать вначале возникновение, а затем исчезновение узкого пика по мере увеличения  $Re$ . В обоих случаях [8, 10] при больших  $Re$  наблюдаются вторичные пики на фоне развитого турбулентного движения.

В работе [9] (узкий зазор) говорится о резком, катастрофическом переходе к турбулентности при некотором числе Рейнольдса  $Re_r$ , когда внезапно исчезают узкие пики в спектре мощности. Однако из приведенных в ней спектров видно, что этот переход происходит в конечной области  $Re$  от  $20,0 Re_c$  до  $24,5 Re_c$ :  $\Delta Re : Re_r \approx 0,2$  так, что отличие от случая широкого зазора только количественное: как уже отмечалось, при широком зазоре переход к сплошному спектру затягивается на более широкую область чисел Рейнольдса  $\Delta Re/Re_r \approx 0,5 \div 1$ . Это обстоятельство делает гораздо более

удобным использование стенда с широким зазором для детального изучения механизма поэтапного возникновения турбулентности.

## 2. РАЗРУШЕНИЕ КОГВЕРЕНТНОСТИ ИЗГИБНЫХ КОЛЕБАНИЯ

Как уже отмечалось, в течении с  $N=30$ , при  $Re > 1040$  линия  $\omega_0$  уширяется. Далее будет показано, что это явление носит принципиальный характер и связано с возникновением стохастичности течения жидкости. Вначале естественно рассмотреть эволюцию линии с большим разрешением по частоте и числам Рейнольдса (рис. 5). Видно, что линия имеет сложную тонкую структуру, различную при разных  $Re$ , и что-либо более определенное сказать трудно. Гораздо более информативной, в соответствии со сказанным во введении, должна быть временная зависимость огибающей  $\omega_0$ -движения, которую можно понимать как проекцию фазовой траектории системы на одну из осей эффективного фазового пространства. Эту зависимость можно найти из реализации скорости, например по следующему алгоритму:

$$I_0(t) = |A_0(t)|^2 = \left| \frac{\Omega}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\tau}^t \exp i \omega_0(t-\tau) V_\varphi(t-\tau) e^{-\Omega^2 \tau^2} d\tau \right|^2, \quad (3)$$

где  $\tau \gg \Omega^{-1}$  и  $\Omega = 0,02 \omega_0$ .

Семейства таких зависимостей приведены на рис. 6. Эти данные получены в серии опытов с  $Re_1 = 1015 \pm 1$ . Они являются характерными и с точностью до некоторых деталей повторяются от серии к серии.

Значения средних интенсивностей и дисперсий представлены на рис. 2. Первый эксперимент (рис. 5, а и 6, а с  $Re = 1035$ ) с надкритичностью  $(Re - Re_1) \approx 2 \cdot 10^{-2} Re_1$  отвечает периодическому движению с частотой  $\omega_0$ , образом которого в фазовом пространстве является устойчивый предельный цикл. Малая, но конечная величина дисперсии ( $\delta = 0,027$ ), по-видимому, связана с шумами измерителя скорости. Следующие два эксперимента (б, в на рис. 5 и 6) отвечают числам  $Re = 1043$  и  $1054$ , превышающим некоторое бифуркационное значение  $Re_1^*$ , приводящее к медленной синусоидальной модуляции основного движения, частота которой  $\omega_0$  растет с ростом надкритичности. Эта модуляция, отчетливо видимая на рис. 5, б, в, не проявляется в спектрах из-за конечности разрешения.

До рассмотренных здесь чисел Рейнольдса течение Куэтта эволюционирует в строгом соответствии с гипотезой Ландау: три последовательные бифуркации  $Re_c = 76$ ,  $Re_1 = 1015$  и  $Re_1^{(1)} = 1040$  приводят к последовательному добавлению

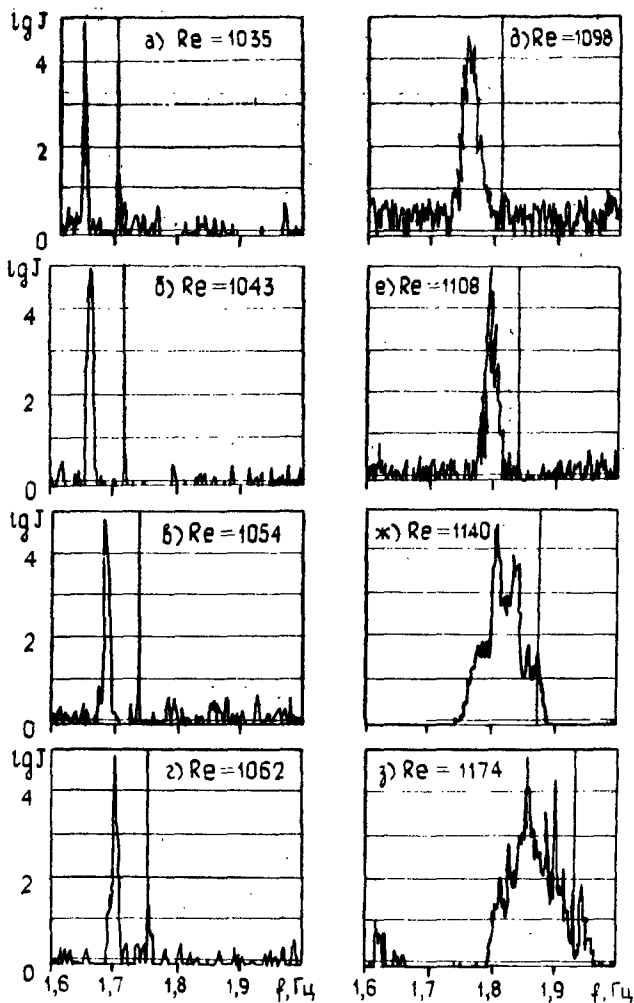


Рис. 5. Эволюция тонкой структуры  $\omega_6$  пика в течении с  $N=30$ . Вертикальная линия — частота  $2\omega_m$

степеней свободы, характеризующихся периодичностью в пространстве и времени, в течение. Другими словами, изображающая течение точка движется в эффективном фазовом пространстве по поверхности трехмерного тора. При дальнейшем увеличении числа Рейнольдса имеется целая серия близко расположенных бифуркаций, наблюдение которых затруднено

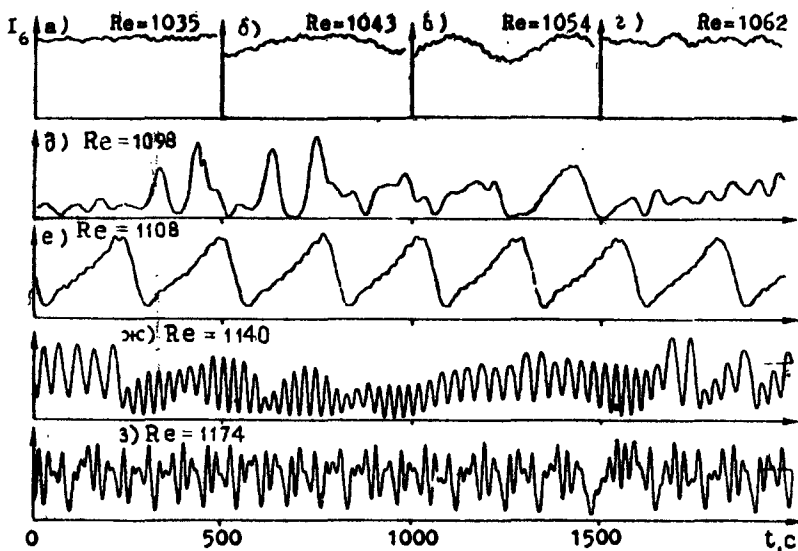


Рис. 6. Временные зависимости интенсивности движения  $I_6$  в частотном окне  $(0,98 \frac{1}{t}, 1,02)$ . Интервал времени 2000 с соответствует  $\sim 3500$  периодам быстрого движения

чрезвычайной медленностью процесса установления стационарного режима. Поэтому нет полной уверенности в том, что описанные ниже режимы непосредственно сменяют друг друга при увеличении  $Re$ . Итак, при  $Re=1062$  описанная выше периодическая модуляция отсутствует и наблюдается простой предельный цикл (рис. 5, г и 6, г). При  $Re=1098$  наблюдается сложная модуляция, которую можно назвать хаотической, насколько об этом можно судить по наблюдениям за относительно короткое время. Пик  $\omega_6$  при этом числе  $Re$  (рис. 5, д) оказывается заметно уширенным. Чрезвычайно интересно то, что при увеличении числа Рейнольдса модуляция вновь становится периодической, но не синусоидальной, а пилообразной (рис. 5, е и 6, е для  $Re=1108$ ). Далее (рис. 5, ж и 6, ж,  $Re=1140$ ) характер модуляции вновь оказывается сложным. При известном воображении на рис. 6, ж можно увидеть чередующиеся куски синусоид разной частоты. В соответствии с этим пик  $\omega_6$  на рис. 5, ж расщеплен на два широких пика. Отметим также, что частота модуляции в этом режиме на порядок больше, чем в предыдущем. При  $Re=1174$  (рис. 5, з) на правом склоне спектральной линии виден узкий пик с двумя спутниками, что свидетельствует о

наличии периодической компоненты в модуляции амплитуды, отсутствующей в предыдущем режиме.

При дальнейшем увеличении  $Re$  возникает  $\omega_2$ -мода. Ее поведение будет описано в следующем разделе.

Построим теперь феноменологическую модель. При малых надкритичностях над порогом  $Re_1$  в спектре присутствуют пики на частотах  $\omega_6$  и  $2\omega_6$ . В соответствии с этим можно написать систему уравнений для огибающих этих движений  $A$  и  $B$ :

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \gamma A + V_1 B A^* + W |A|^2 A; \quad \frac{\partial B}{\partial t} = -\tilde{\gamma} B + V_2 A^2. \quad (4)$$

При  $Re = Re_1$   $\gamma = 0$ , и потому естественно положить  $\gamma = \alpha \times (Re - Re_1)$ . При малых надкритичностях  $\gamma \ll \tilde{\gamma}$ , и потому характерное время движения должно быть  $\tau \gg \gamma^{-1}$ . Это означает, что в уравнении для  $B$  можно будет пренебречь  $\partial/\partial t$  по сравнению с  $\tilde{\gamma}$ . В таком случае движение  $B$  станет вынужденным:

$$B = V_2 A^2 / \tilde{\gamma}. \quad (5)$$

Эти соображения можно обосновать экспериментально. Во-первых, из (5) следует, что фазы движений  $A$  и  $B$  ( $\psi_1$  и  $\psi_2$ ) должны быть жестко скоррелированы:  $2\psi_1 - \psi_2 = \text{const}$ , так что величина

$$|\Phi(\omega_6, 2\omega_6)| = \left| \left\langle \frac{V_1(\omega_6) V^*(2\omega_6)}{|V(\omega_6) V(2\omega_6)|} \right\rangle \right|$$

должна быть равна единице. Ее вычисление по экспериментальным данным дает значение  $0,98 \div 0,99$  вплоть до чисел  $Re \approx 1300$ . Далее величины  $I_6 = |A_6(t)|^2$  и  $I_{6,2} = |B(t)|^2$ , вычисленные из экспериментальных данных скорости  $V_\varphi(t)$  по алгоритму (3), можно рассматривать как параметрическое изображение проекции фазовой траектории на плоскость  $XU$  (рис. 7, а). Поскольку эта траектория зашумлена, естественно сконструировать плотность вероятности пребывания системы в точке такой фазовой плоскости и далее анализировать лишь линии регрессии  $\langle X \rangle$  от  $Y$  и  $\langle Y \rangle$  от  $X$ . Результаты такой обработки представлены на рис. 7, б, где вертикальные и горизонтальные «усы» обозначают соответствующие дисперсии. Из рисунка видно, что линии регрессии концентрируются вдоль параболы, отвечающей следствию из соотношения (5):  $|B(t)| \propto |A(t)|^2$ . Извлекая корень из координаты  $Y$ , выпрямляем параболу и получаем прямую (рис. 7, в). Из всего этого следует, что движение на частоте  $2\omega_6$  является вынужденным и не является поэтому эффек-



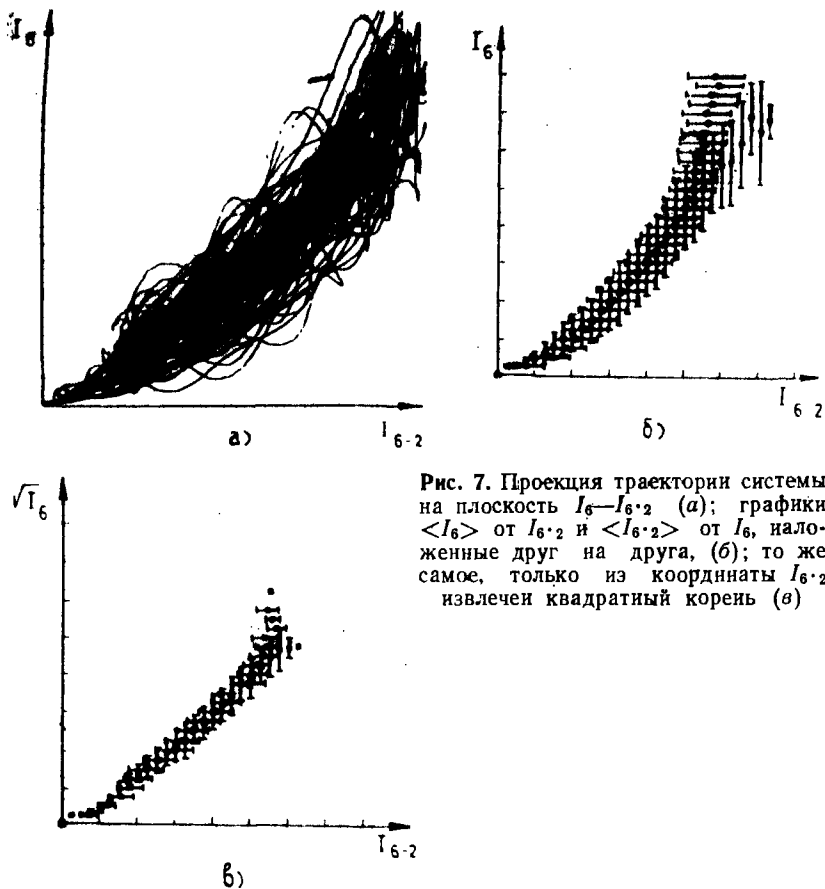


Рис. 7. Проекция траектории системы на плоскость  $I_6-I_{6 \cdot 2}$  (а); графики  $\langle I_6 \rangle$  от  $I_{6 \cdot 2}$  и  $\langle I_{6 \cdot 2} \rangle$  от  $I_6$ , наложенные друг на друга, (б); то же самое, только из координаты  $I_{6 \cdot 2}$  извлечен квадратный корень (в)

тивной степенью свободы, так что система (4) с учетом (5) приводится к стандартному виду:

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \gamma A + (iT - \eta) |A|^2 A, \quad \gamma = \alpha (\text{Re} - \text{Re}_1). \quad (6)$$

Это уравнение имеет единственное, решение, выражающее закон Ландау:

$$|A|^2 = \frac{\gamma}{\eta} = \frac{\alpha}{\eta} (\text{Re} - \text{Re}_1).$$

Рис. 2 показывает, что этот закон хорошо выполняется на эксперименте в области  $Re_1 < Re < Re_1^{(1)}$ , где существует устойчивый предельный цикл. Однако это уравнение не объясняет разрушения предельного цикла, т. е. появления временной зависимости  $A(t)$ . Дело в том, что при его выводе мы предположили отсутствие вырождения, считая, что  $\omega_6$ -течение описывается единственной пространственной функцией  $f(r): A_6(r, t) = f(r)A(t)$ . Между тем визуализация потока показывает, что даже при значительной амплитуде изгибов граница между парами вихрей почти не колеблется. Следовательно, в первом приближении течение в каждой паре является независимым, а для амплитуды изгибов пары вихрей с номером  $n$  необходимо написать свое уравнение (6) [см. первые два члена в уравнении (7)]. Таким образом,  $\omega_6$ -течение имеет высокую кратность вырождения, равную числу пар вихрей  $N/2$ , связанную с большой относительной высотой цилиндра:  $h \gg r_e - r_i$ . Взаимодействие соседних пар учтем только в линейном приближении в силу отмеченной выше его малости:

$$\frac{\partial A(n)}{\partial t} = \gamma A(n) + (iT - \eta) |A(n)|^2 A(n) - \frac{1}{4} (a + ib) [2A(n) - A(n+1) - A(n-1)]. \quad (7)$$

В этом уравнении следует считать  $\gamma > 0$ ,  $\eta > 0$ ; без ограничения общности можно положить  $a > 0$ . Разумно считать, что от числа  $Re$  зависит только  $\gamma$ .

Уравнение (7) имеет пространственно-однородное решение

$$A(n) = A \exp(i\gamma t T / \eta), \quad |A|^2 = \gamma / \eta, \quad (8)$$

совпадающее с решением уравнения (6). Кроме того, имеется целый набор более сложных решений, у которых фаза изгиба соседних пар вихрей сдвинута на некоторый угол  $2\psi$ :

$$A(n) = A \exp 2i\psi n.$$

Если предположить для простоты периодические по  $z$  граничные условия, то угол  $\psi$  сможет принимать дискретный набор значений  $\psi_m = 2\pi m/N$ , где  $m = 1, 2, \dots, N/2$  и  $N$  — число вихрей.

Критическое число Рейнольдса  $\tilde{Re}_1$ , соответствующее возникновению этих решений, больше, чем  $Re_1$ :

$$\alpha(\tilde{Re}_1 - Re_1) = a \sin^2 \psi_m.$$

Возможно, именно этим объясняется разброс критических значений  $Re_1$ , соответствующих различным сериям экспериментов.

Исследуем простейшее решение (8) на устойчивость относительно модуляций амплитуды. Полагая

$$A(n) = A \exp(i\gamma Tt/\eta) [1 + \delta A \exp(\nu_m t + 2i\psi_m n)]$$

и линеаризуя систему (7) относительно  $\delta A$ , находим инкремент модуляционной неустойчивости  $\nu_m$ :

$$\nu_m = -(\gamma + a_m) + [\gamma^2 - b_m(b_m - 2\gamma T/\eta)]^{1/2},$$

$$a_m = a \sin^2 \psi_m, \quad b_m = b \sin^2 \psi_m.$$

Если  $bT < 0$ , то  $\nu_m < 0$  и, следовательно, решение (8) устойчиво. По-видимому, этот случай реализуется в экспериментах [9, 10] с узким зазором, а также при широком зазоре для изгибной моды  $m=1$  в течении с  $N=28$ . Если же  $bT > 0$  и  $bT > a\eta$ , то пространственно однородное решение (8) неустойчиво относительно модуляционных возмущений с номерами  $m=1, 2, \dots$ , удовлетворяющими неравенству

$$\sin^2 \frac{2\pi m}{N} \leq \frac{2\gamma(bT - a\eta)}{\eta(a^2 + b^2)}. \quad (9)$$

При малых надкритичностях над порогом  $Re_1$  (малых  $\gamma$ ) ни одно из положительных целых значений  $m$  не удовлетворяет этому неравенству и, следовательно, стационарное решение будет устойчиво. Порог неустойчивости  $Re_1^{(1)}$  определяется из (9) при  $m=1$

$$\alpha(Re_1^{(1)} - Re_1) = \frac{\eta(a^2 + b^2)}{(bT - a\eta)} \sin^2 \frac{2\pi}{N}. \quad (10)$$

Если предположить, что  $a \approx b \approx \alpha Re_1$ ,  $\eta \approx T$ ,  $N=30$ , то из (10) получается «естественная» оценка

$$\frac{Re_1^{(1)} - Re_1}{Re_1} \approx \left( \frac{2\pi}{30} \right)^2 \approx 0,04,$$

совпадающая по порядку величины с экспериментальным значением этой величины 0,025. В области чисел  $Re$ :

$$Re_1^{(1)} - Re_1 < Re - Re_1 < 4(Re_1^{(1)} - Re_1)$$

неустойчивым является только один тип возмущений с номером  $m=1$ . Поэтому в рассматриваемой области  $Re$  это возмущение будет наиболее существенным. Пренебрегая остальными типами движения, получим из (7)

$$\frac{\partial A}{\partial t} = \gamma A + (iT - \eta) [(|A|^2 + 4|A_1|^2)A + 2A_1^2 A^*], \quad (11)$$

$$\frac{\partial A_1}{\partial t} = (\gamma - a_1 - ib_1)A_1 + (iT - \eta) [A^2 A_1^* + (2|A|^2 + 3|A_1|^2)A],$$

так что размерность эффективного фазового пространства уменьшилась с  $N-1=29$  до трех.

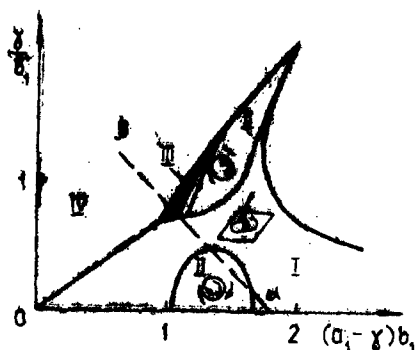


Рис. 8. Плоскость параметров системы уравнений (11), на которой отмечены области различного поведения решений  $A(t)$  (по результатам работы [13]). С ростом  $\text{Re } \lambda$  увеличивается и система (11) «перемещается» по прямой  $\alpha\beta$ .

Уравнение (11) исследовалось в работе М. Рабиновича и А. Фабриканта [13] при следующих ограничениях на параметры

$$\eta=0, \quad v=-\gamma+a_1>0.$$

На рис. 8 приведена плоскость параметров  $\gamma, v$ , на которой отмечены исследованные в этой работе области различного поведения системы (11). Если коэффициенты  $a$  и  $b$  в уравнениях (7) удовлетворяют неравенству  $b < a < 2b$ , то с ростом  $\text{Re}$  мы будем двигаться по прямой  $\alpha\beta$ , последовательно пересекая области: II — периодической модуляции  $A$  и  $A_1$ , I — устойчивого равновесия ( $A = \text{const}$ ,  $A_1 = \text{const}$ ), III — стохастического поведения  $A(t)$  и IV — область, в которой отсутствует ограничение амплитуды  $A$  при  $\eta=0$ . Если же  $\eta > 0$ , то в этой области возникает периодическая модуляция  $A(t)$ . Отметим, что именно такая последовательность режимов наблюдается в эксперименте при увеличении  $\text{Re}$  от 1040 до 1108 (рис. 5 и 6 от  $a$  до  $e$ ). Следующий режим (рис. 5,  $ж$ , 6,  $ж$ ) ( $\text{Re}=1140$ ) уже не может описываться системой уравнений (11). Действительно, из (9) следует, что при  $\text{Re} > \text{Re}^*$ ,

$$\text{Re}^* - \text{Re}_1 > 4(\text{Re}_1' - \text{Re}_1), \quad (12)$$

в область неустойчивости попадает также возмущение с номером  $m=2$ . Подставляя в (12)  $\text{Re}_1=1015$ ,  $\text{Re}_1^{(1)}=1040$ , получаем  $\text{Re}^*=1115$  и, следовательно, в режиме  $\text{Re}=1140$  должны возбуждаться две моды с  $m=1$  и  $m=2$ , так что размерность эффективного фазового пространства увеличивается с трех до пяти. Таким образом можно объяснить появление в спектре  $\text{Re}=1140 > \text{Re}^*$  (рис. 6,  $ж$ ) дополнительного пика.

### 3. ЭВОЛЮЦИЯ СТРУКТУРЫ АТТРАКТОРА С РОСТОМ ЧИСЛА РЕЙНОЛЬДСА

В разделе 2 исследовался аттрактор, центрированный на единственном быстром движении  $\omega_6$ . С ростом  $Re$  возбуждаются  $\omega_2$  и другие быстрые движения, и возникает вопрос о поведении системы в эффективном фазовом пространстве в этом случае.

а) Поведение  $\omega_2$ -моды в течении с  $N = 30$ . Вычисляя по экспериментальным данным временную зависимость интенсивности  $\omega_2$  — движения  $I_2(t)$ , можно убедиться (рис. 9), что это движение и отдаленно не напоминает предельный цикл. Напротив, это движение происходит всплесками в те моменты времени, когда интенсивность  $I_6$  уменьшается. Такое «альтернирование» этих движений хорошо видно также на рис. 9, на котором приведены результаты регрессионного анализа движений  $I_2$  и  $I_6$ .

Можно сказать, что в фазовом пространстве существуют две области — два квазиаттрактора. На одном из них система совершает движение с частотами, близкими к  $\omega_6$ , на другом — к  $\omega_2$ , причем характерная частота переходов между квазиаттракторами много меньше, чем  $\omega_6$  и  $\omega_2$ . Эксперимент показывает, что эта частота увеличивается с ростом  $Re$ , что приводит к увеличению ширины пиков  $\omega_6$  и  $\omega_2$ .

Как видно из спектра на рис. 1, б, с ростом  $Re$  появляются движения на комбинационных частотах  $\omega_6 \pm \omega_2$ . Естественно думать, что эти движения являются вынужденными и не добавляют поэтому новых координатных осей в эффективном фазовом пространстве. Для экспериментальной проверки этого был проведен регрессионный анализ интенсивностей  $I_6$ ,  $I_2$ ,  $I_{6\pm 2}$  (рис. 10). Прежде всего видно, что «вынуждающие движения»  $I_6$ ,  $I_2$  отчетливо альтернируют (рис. 10, а). Такое свойство этих движений при меньших  $Re$  уже отмечалось. Кроме того, движения  $I_{6+2}$  и  $I_{6-2}$  оказываются скоррелированными только в области малых амплитуд; при амплитудах, больших чем средние, корреляция практически исчезает (рис. 10, б). Причина этого может заключаться в том, что при таких амплитудах становятся существенными собственные нелинейные взаимодействия в модах  $I_{6\pm 2}$ , нарушающие простое соотношение  $I_{6\pm 2} \propto I_6 \cdot I_2$ , которое должно выполняться для вынужденных движений. И действительно, это соотношение относительно хорошо выполняется для моды  $I_{6+2}$  (рис. 10, в), в то время как мода  $I_{6-2}$  (рис. 10, г) проявляет большую «свободу». Резюмируя свойства комбинационных движений, можно сказать, что они являются вынужденными лишь при малых амплитудах. При увеличении  $Re$  и при случайных выбросах в область амплитуд при фиксированном  $Re$

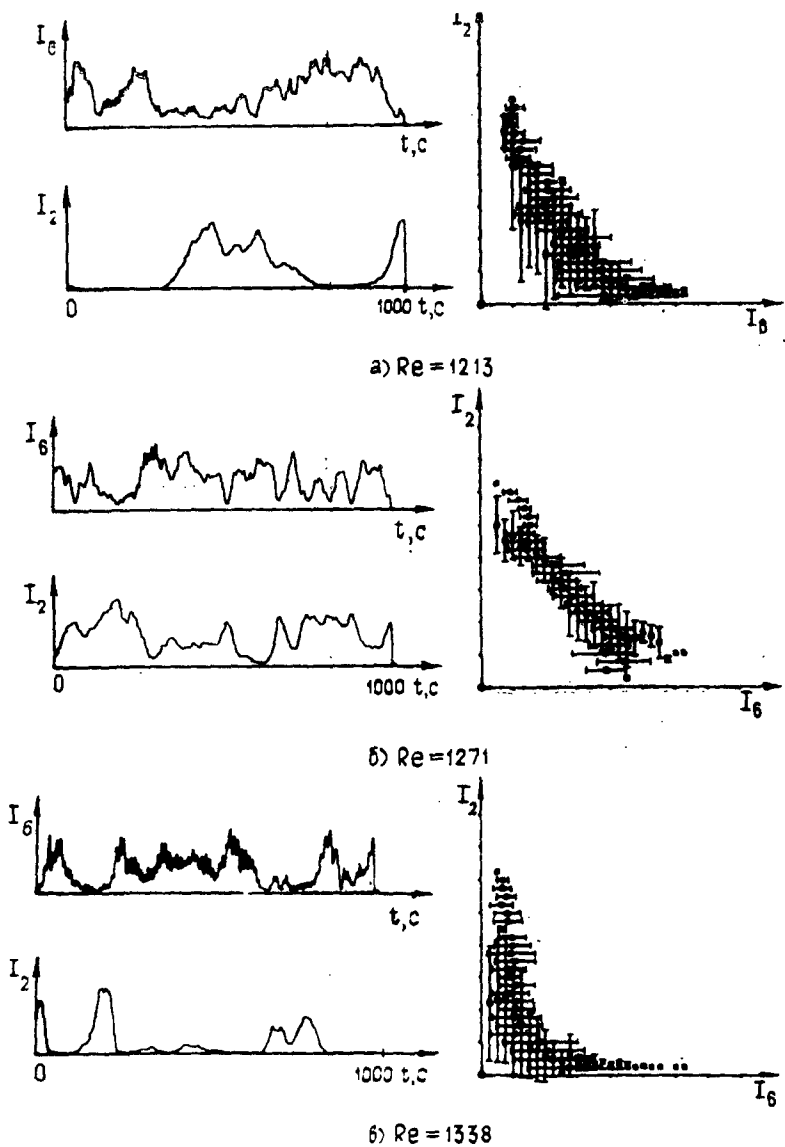


Рис. 9. Слева — временные зависимости  $I_6(t)$  и  $I_2(t)$  интенсивностей движений  $\omega_6$ -и  $\omega_2$ -мод, справа — результаты регрессионного анализа этих движений

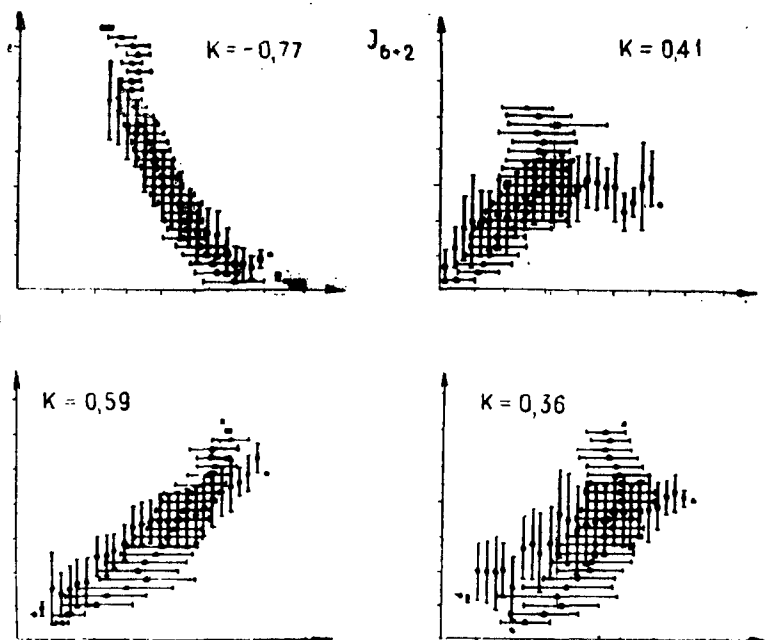


Рис. 10. Регрессионный анализ движений  $I_6$ ,  $I_2$  и  $I_{6+2}$ , центрированных на частотах  $\omega_6$ ,  $\omega_2$  и  $\omega_6 \pm \omega_2$  при  $Re=1394$ ,  $N=30$ .

амплитудные и фазовые корреляции в триплетах уменьшаются. В результате оказывается необходимым учитывать комбинационные движения как самостоятельные эффективные степени свободы. Существенно, что увеличение числа степеней свободы в этой ситуации происходит не бифуркационным образом, а постепенно.

**б) Блуждание по квазиаттракторам.** В области больших чисел Рейнольдса в спектре мощности присутствует довольно много отчетливо выраженных пиков с заметной шириной (см. спектр на рис. 1, в,  $Re=1476$ ). На рис. 11 приведены результаты регрессионного анализа наиболее интенсивных движений с частотами  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_6$  и  $\omega_7$  для реализации скорости с  $Re=1476$ , соответствующей этому спектру. По-прежнему видно отчетливое альтернирование движений  $I_2$ ,  $I_6$  (рис. 11, б). Более того, это свойство характерно для любой пары, составленной из этих четырех движений (см. рис. 11, а, г, д). Это означает, что движение жидкости с одной из этих четырех частот исключает движение с тремя оставшимися частотами. Другими словами, реализация скорости в ос-

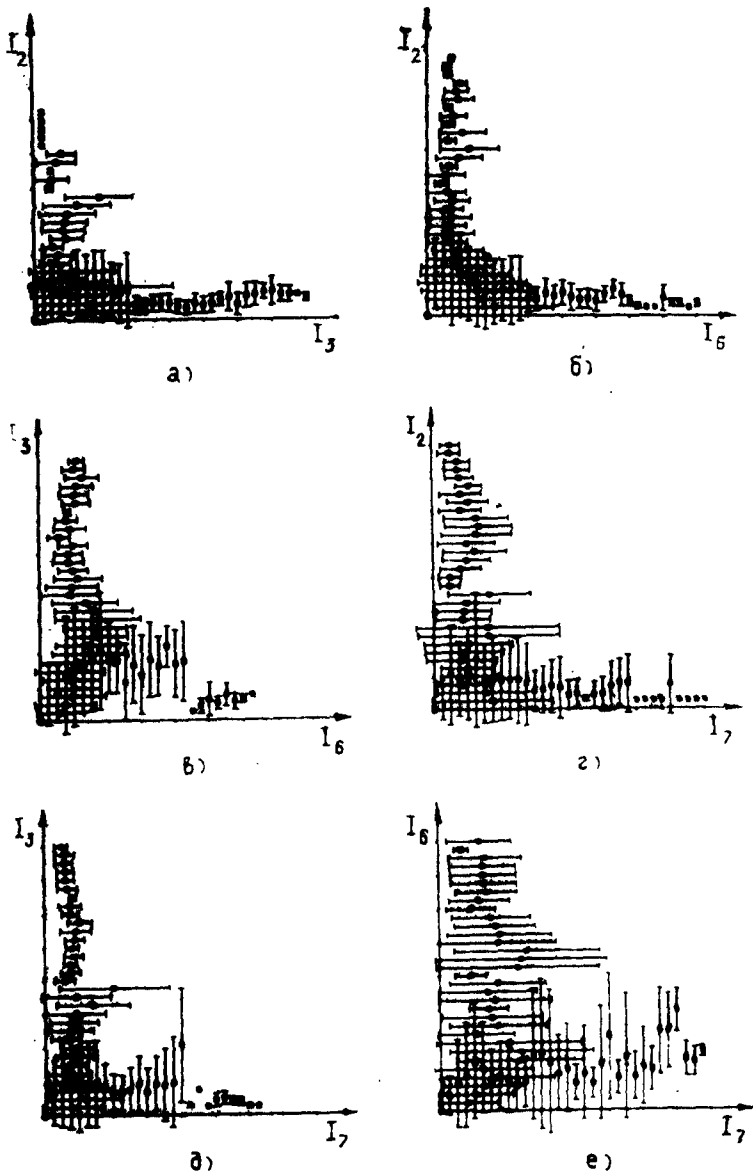


Рис. 11. Регрессионный анализ движений, центрированных на частотах  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_6$  и  $\omega_7$ , при  $Re > 1474$ ,  $N = 30$ . Исходная реализация скорости соответствует спектру на рис. 1, в



новном состоит из чередующихся кусков синусоид, характеризующихся частотами  $\omega_2$ ,  $\omega_3$ ,  $\omega_3$  и  $\omega_7$ . Сравнивая эту ситуацию с рассмотренной в предыдущем разделе, можно утверждать, что с ростом  $Re$  увеличивается размерность фазового пространства и количество квазиаттракторов, между которыми происходит случайное блуждание изображающей точки. При этом увеличивается частота перескоков, что приводит к дополнительному уширению пиков, и когда их ширина окажется сравнимой с расстоянием между ними, понятие «квазиаттрактора» теряет смысл и система совершает сложное движение в фазовом пространстве высокой размерности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Любимов Д. В., Путин Г. Ф., Чернатинский В. И. — ДАН СССР, 1977, 235, № 3, с. 554.
2. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, вып. 1, с. 123.
3. McLaughlin J. B., Martin P. C. — Phys. Rev., 1975, A12, p. 186.
4. Lorenz E. N. — J. Atmos. Sci., 1963, 20, p. 130.
5. Аркольд В. И. — В кн.: Нелинейные волны. М., Наука, 1979, с. 116.
6. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., Гостехиздат, 1953.
7. Kuznetsov E. A. et al. — Preprint N. 58. Novosibirsk, Institute of Automation and Electrometry, 1977.
8. Журавель Ф. А. и др. — Препринт № 103. Новосибирск, Институт автоматки и электрометрии, 1979.
9. Gollub J. P., Swinney H. L. — Phys. Rev. Lett., 1975, 35, N. 14, p. 927.
10. Walden R. W., Donnelly R. J. — Phys. Rev. Lett., 1979, 42, N. 5, p. 301.
11. L'vov V. S., Predtechensky A. A. — Preprint N. 111. Novosibirsk, Institute of Automation and Electrometry, 1979.
12. Кузнецов Е. А., Львов В. С., Предтеченский А. А. и др. — Письма в ЖЭТФ, 1979, 30, вып. 4, с. 226.
13. Рабинович М. И., Фабрикант А. Л. — ЖЭТФ, 1979, 77, вып. 2(8), с. 617.

## ПЕРЕХОД К СТОХАСТИЧЕСКОМУ РЕЖИМУ В ТЕЧЕНИИ МЕЖДУ ВРАЩАЮЩИМИСЯ СФЕРАМИ

Ю. Н. БЕЛЯЕВ, И. М. ЯВОРСКАЯ

Из экспериментов известно о существовании некоторых классов течений, в которых переход к турбулентности при изменении одного из определяющих параметров происходит, на первый взгляд, постепенно в результате последовательных бифуркаций одного режима течения в другой. Повышенное внимание к этим течениям, и в целом к проблеме возникновения турбулентности, в последние годы стимулировалось работами Лоренца [1] и Рюэля и Тэкенса [2]. В работе [2] предложена новая модель перехода к турбулентности, основанная на результатах исследования поведения в фазовом пространстве траекторий конечномерных динамических систем общего положения. Показано, что переход к стохастическому поведению в таких системах возможен после 3 или 4 нормальных бифуркаций, поскольку после этого вблизи любой точки фазового пространства появляется притягивающее множество — странный аттрактор, на котором все фазовые траектории неустойчивы. Спектр системы из дискретного превращается в непрерывный, автокорреляции затухают. Эта гипотеза является альтернативой модели Ландау [3]. Современное состояние вопроса изложено в обзорах Монина [4] и Рабиновича [5].

Экспериментальная проверка гипотезы [2] для течений между цилиндрами [6—9] и в плоском конвективном слое [10—12] подтвердила ее в какой-то мере, но выявились и существенные отличия, которые можно было бы объяснить высокой степенью симметрии этих течений, не предусматриваемой гипотезой [2]. Поэтому представляет интерес изучить переход к турбулентности течения более общего типа, возникающего в сферическом слое жидкости при вращении его границ с разной скоростью.

Исследование проведено в слое толщины  $\delta = (r_2 - r_1) / r_1 = 1,006$  при вращении только внутренней сферы в широком диапазоне чисел Рейнольдса  $Re = \Omega r_1^2 / \nu$  ( $r_1$  и  $r_2$  — радиусы внутренней и внешней сфер,  $r_1 = 74,86 \pm 0,02$  мм,  $\Omega$  — угловая скорость,  $\nu$  — кинематическая вязкость). В качестве рабочей

жидкости использовались растворы масла ВМ-1 в бензине. Угловая скорость поддерживалась постоянной с точностью  $\pm 0,03\%$ , жидкость термостатировалась в пределах  $\pm 0,05^\circ\text{C}$ , радиальное биение поверхности сферы на валу не превышало  $\pm 0,03$  мм.

Для изучения спектральных характеристик этого течения в экваториальной плоскости (а в некоторых экспериментах и на полюсе) устанавливался пленочный датчик термоанемометра таким образом, что максимум диаграммы чувствительности совпадал с направлением радиальной скорости. Сигнал термоанемометра преобразовывался в двоичный цифровой код и автоматически вводился в оперативную память БЭСМ-6. С помощью быстрого преобразования Фурье энергетический спектр пульсаций скорости вычислялся по 8192 точкам, а автокорреляционная функция (без выделения среднего) по формуле

$$R(\tau) = [1/(T-\tau)] \int_0^{T-\tau} f(t)f(t+\tau) dt,$$

где  $\tau \leq 0,1 T$ ;  $T$  — длительность реализации, составлявшая обычно 500—1000 периодов колебаний на основной частоте.

До наступления первой неустойчивости при  $Re_c^{(1)} = 460 \pm 10$  основное течение было стационарным и состояло из дифференциального вращения вокруг оси и циркуляции в меридиональной плоскости. Неустойчивость сопровождалась появлением в спектре первой частоты  $\nu_0$ , соответствующей характерной частоте визуально наблюдаемого режима с четырьмя азимутальными вихрями [13]. Затухание автокорреляционной функции порядка 0,3—0,5% вызывалось инструментальным шумом. В спектре наблюдается частота  $\nu_0$  и ее гармоники и частота вращения, обусловленная неидеальностью изготовления сферы.

Зависимость наблюдаемых в спектре частот, нормированных на  $\Omega$ ,  $\nu_i/\Omega$ , от числа  $Re$  показана на рис. 1 (стрелками указаны критические числа  $Re_c$ , соответствующие последовательным бифуркациям). При  $Re_c^{(2)} = 525$  перестройка сопровождается исчезновением частоты  $\nu_0$  и появлением новой частоты  $\nu_1$ , соответствующей частоте визуально наблюдаемых трех вихрей. Следующий переход к квазипериодическому режиму с двумя частотами происходил при  $Re_c^{(3)} = 720$ . Далее, при  $Re_c^{(4)} = 820$  частота  $\nu_1$  исчезала и возникал новый периодический режим с частотой  $\nu_2$ , соответствующей двум азимутальным вихрям. Еще один ламинарный режим возникал при  $Re_c^{(5)} = 880$ , когда в спектре появилась субгармоника  $1/4 \nu_2$  со своими гармониками. Датчик, установленный на полюсе, при  $Re = 880$  регистрировал появление колебаний с единственной частотой  $1/4 \nu_2 = \nu_n$  и всеми ее гармониками.

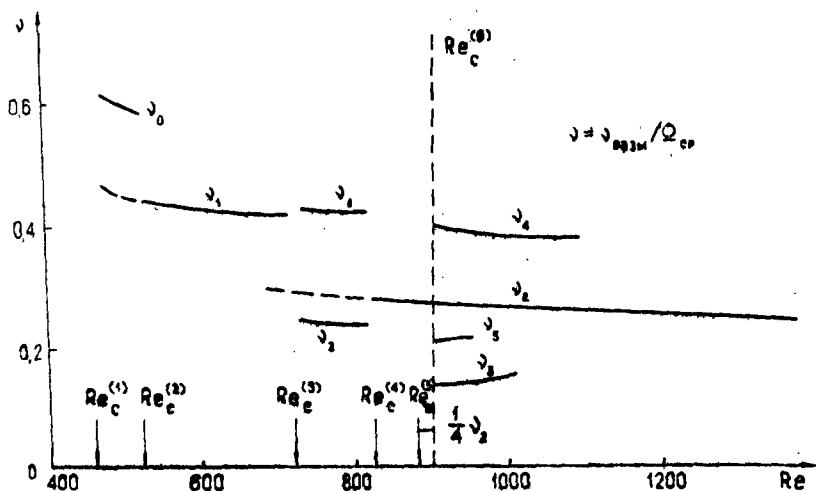


Рис. 1. Зависимости частот колебаний от числа Рейнольдса в сферическом течении Куэтта

Таким образом, в первых пяти режимах при  $Re \leq 2Re_c$  течение имеет не более двух частот. Спектры этих режимов представлены на рис. 2, а—д, на рис. 2, е приведена незатухающая автокорреляционная функция последнего режима.

Первое заметное затухание автокорреляционной функции порядка 2% отмечено при  $Re_c^{(0)} = 895$ . При этом в спектре у субгармоники и ее нечетных гармоник появляются два сателлита, что физически соответствует возникновению амплитудной модуляции (рис. 2, ж). Следует отметить, что зависимость частоты  $\nu_n$  от числа  $Re$  отличается от зависимости  $\nu_2(Re)$ , и при  $Re = 895$  происходит как бы десинхронизация колебаний на экваторе и на полюсе, что, быть может, является причиной возникновения стохастичности. Спектр на уровне четырех порядков по амплитуде остается линейчатым, затухание, по-видимому, обусловлено появлением непрерывного спектра на более низких уровнях или уширением спектральных линий.

При  $Re = 902$  в спектре исчезает частота  $1/4 \nu_2$  и регистрируются три новые частоты:  $\nu_3 = 0,1363$ ,  $\nu_4 = 0,4022$  и  $\nu_5 = 0,2078$  (рис. 2, з). Затухание автокорреляционной функции остается примерно того же порядка, что и при  $Re = 895$ . Можно выделить два временных интервала затухания автокорреляционной функции, соответствующих быстрому затуханию на высоких частотах за время  $\tau_0$  порядка периода основного колебания  $\Delta R(\tau_0)$  и медленному затуханию на большом интервале времени  $\tau_\infty$  порядка 50—60 периодов

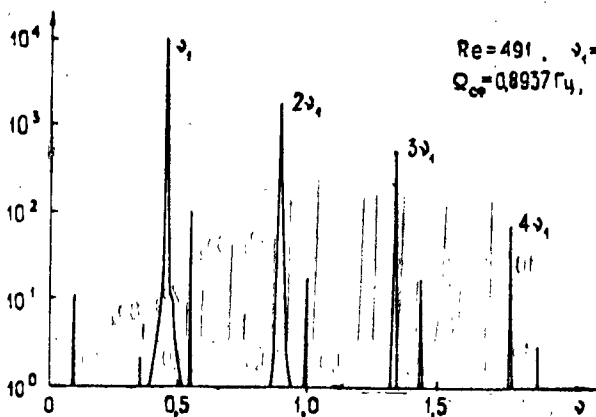
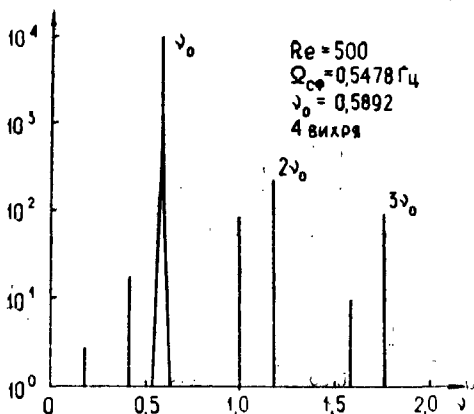


Рис. 2; а, б. Спектры и автокорреляционные функции пульсаций скорости при числах  $Re \leq 902$

основной частоты  $\Delta R(\tau_\infty)$  (рис. 3). При  $Re = 902$   $\Delta R(\tau_\infty) \approx 3\%$  и больше, чем  $\Delta R(\tau_0)$ . На полюсе при этих значениях  $Re$  частота  $1/4 \nu_2$  и ее нечетные гармоники практически исчезают, остаются колебания на частоте  $\nu_3 \approx 1/2 \nu_2$ . Поскольку зависимости частот  $\nu_2$ ,  $\nu_3$ ,  $\nu_4$  и  $\nu_5$  от  $Re$  различны, все эти частоты следует считать несоизмеримыми.

При  $Re = 915$  субгармоники в спектре также исчезают, но в окрестности частот субгармоник появляются островки непрерывного спектра, возрастает вклад компонент  $\nu_4$  и  $\nu_5$ , однако их амплитуды остаются примерно на два порядка меньше  $\nu_2$ , т. е. энергия, содержащаяся в этих колебаниях, составляет не более 1—2% от энергии колебаний на основ-

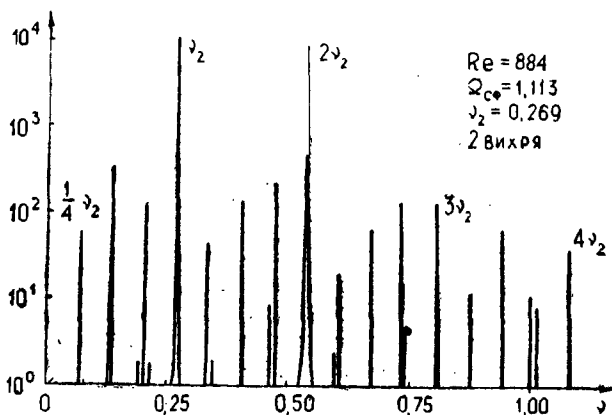
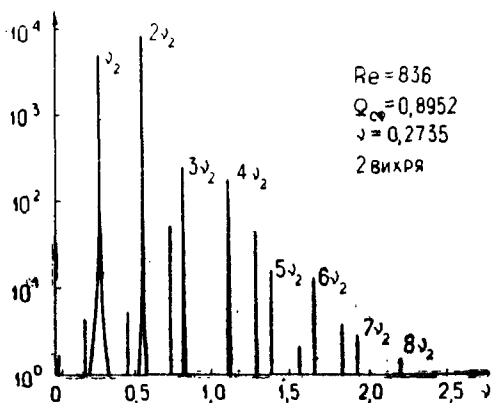
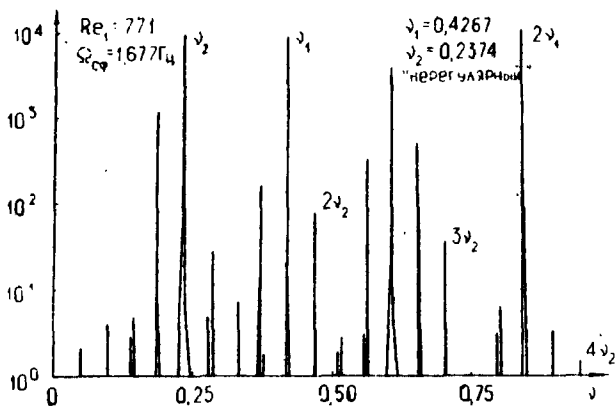


Рис. 2, в—д (продолжение)

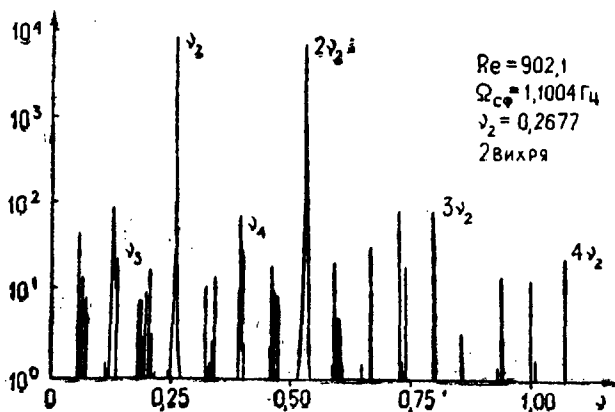
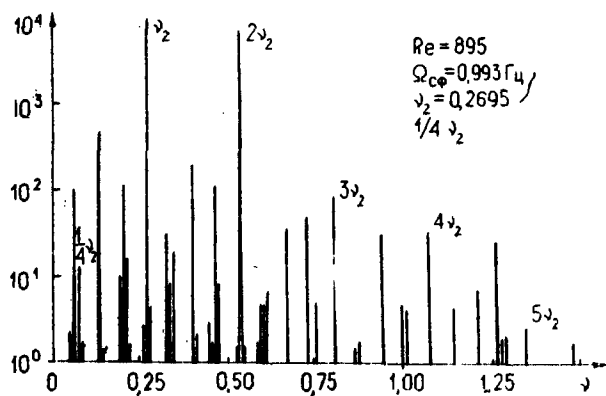
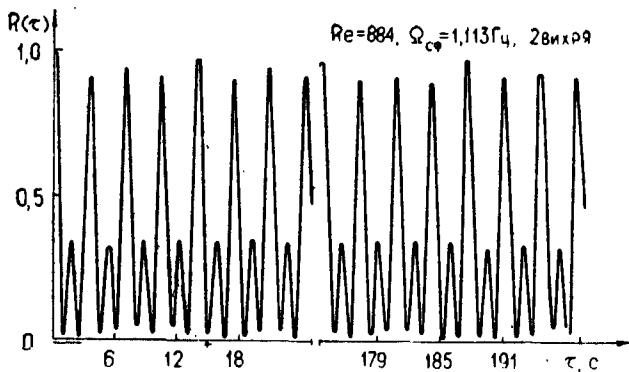


Рис. 2, в—ж (окончание)

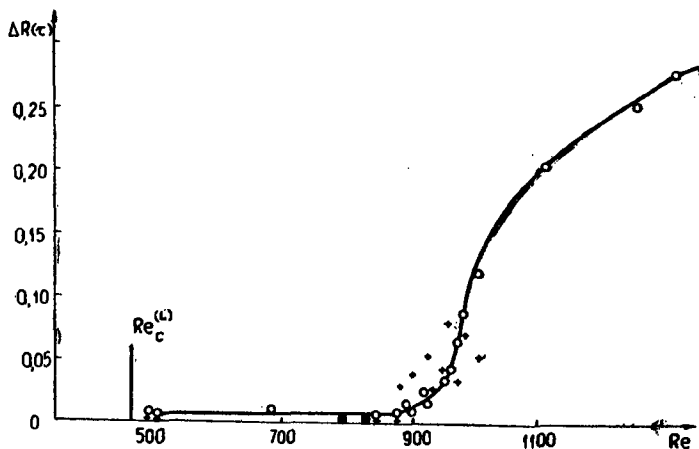


Рис. 3. Затухание автокорреляционной функции на временных интервалах:  $\sim 1$  периода колебаний и  $\sim 50-60$  периодов

ной частоте. Поэтому визуально при этих  $Re$  наблюдается режим с двумя вихрями и частотой  $\nu_2$ .

Сильное затухание автокорреляционной функции начинается при  $Re > 930$ , что видно из рис. 3. Быстрое затухание отмечено значком  $o$ , а медленное —  $+$ . Спектр течения при  $Re = 956$  представлен на рис. 4, а. Спектр сильно усложнен, но сосредоточен в основном на низких частотах, в спектре сохраняются пики на частотах  $\nu_2, \nu_3, \nu_4$  и  $\nu_5$ , видны их гар-

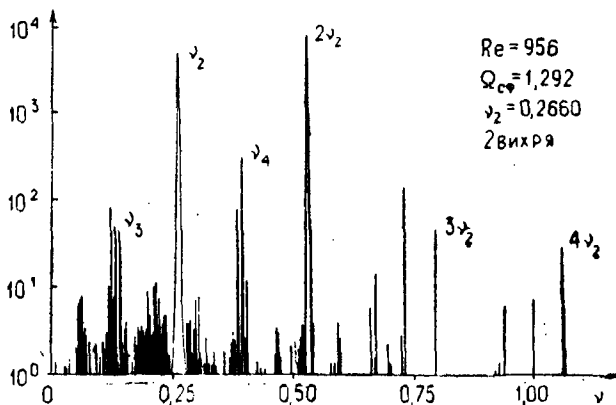


Рис. 4, а. Спектры и автокорреляционные функции пульсаций скорости при числах  $Re$ :  $956 < Re < 16300$



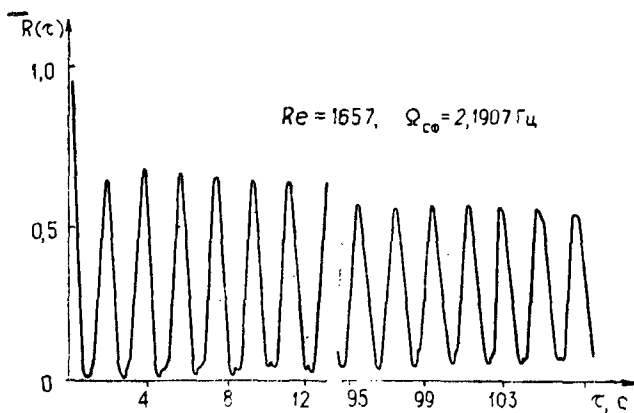
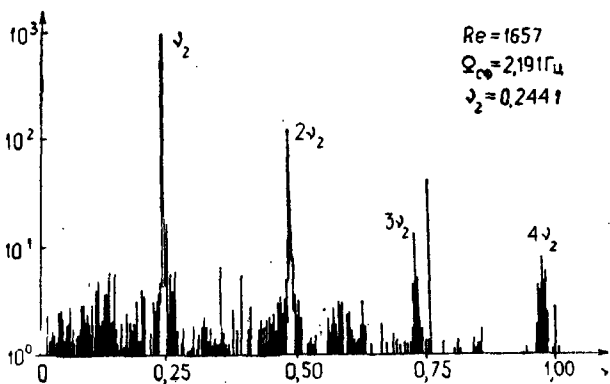
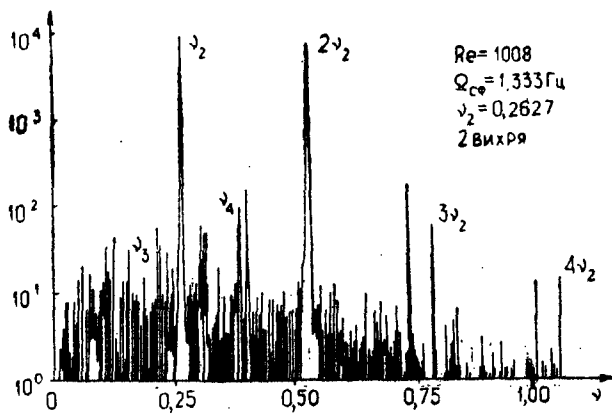


Рис. 4, б—г (продолжение)

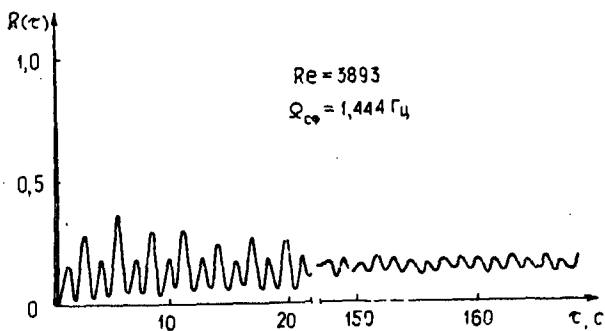
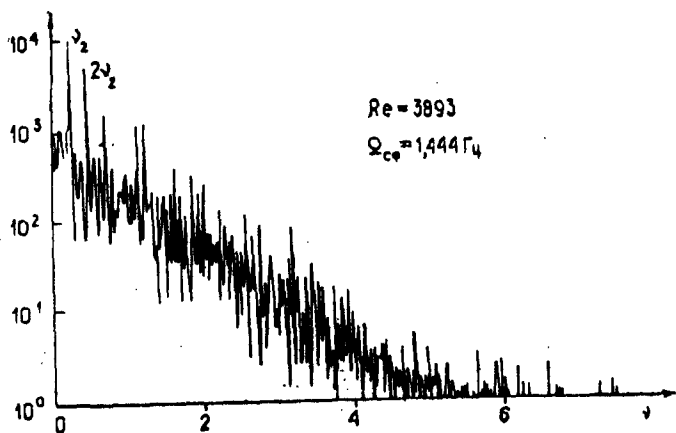
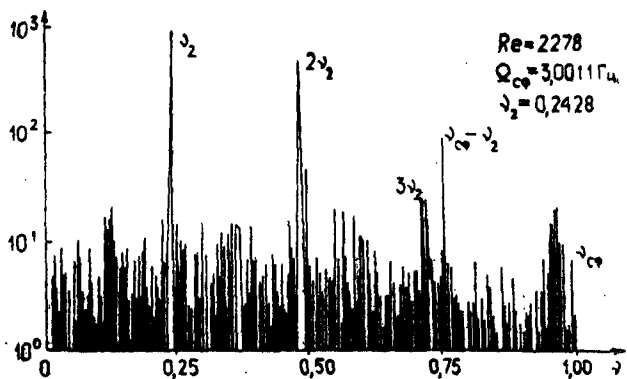


Рис. 4, д—ж (продолжение)

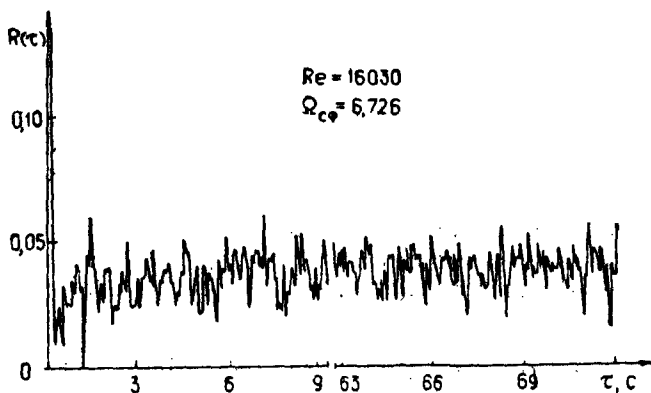


Рис. 4, з (окончание)

моники и комбинационные частоты. При дальнейшем увеличении числа  $Re$  частота  $\nu_3$  исчезает и резко возрастает затухание автокорреляционной функции. Возможно, что эти явления как-то связаны.

Развитие спектра течения при  $Re=1008$  и  $1657$  представлено на рис. 4, б, в. Автокорреляционная функция при  $Re=1657$  затухает более чем на 50% (рис. 4, з), однако, как следует из графика рис. 3, рост затухания после  $Re=1100$  заметно уменьшается. Спектры для  $Re=2278$  и  $3893$  показаны на рис. 4, д, е. Во втором случае спектр уже имеет очень большую непрерывную составляющую, но пики на основной частоте все еще на 1,5 порядка больше по амплитуде, чем непрерывная компонента. Автокорреляционная функция для  $Re=3893$  показана на рис. 4, ж. Исследование спектральных характеристик течения проведено до чисел  $Re \sim 16000 \approx 35 Re_c$ . Пики, соответствующие  $\nu_2$ , сохраняются до чисел  $Re \sim 9000 \sim 20 Re_c$ . Остаточные периодические колебания просматриваются даже при  $Re \approx 16000$ , однако в них содержится ничтожная часть энергии пульсационных компонент (рис. 4, з).

Как следует из приведенных результатов, процесс перехода к турбулентности в достаточно толстом сферическом слое имеет существенные отличия от процессов в цилиндрическом течении Куэтта [6—9] и в конвекции [10—12]. Согласно последним результатам [9] в цилиндрическом течении Куэтта переход к стохастическому режиму происходит после трех бифуркаций из квазипериодического режима с двумя частотами  $\nu_1$  и  $\nu_3$  в результате образования участка сплошного спектра вблизи разностной частоты  $\nu_1 - \nu_3$ . В случае конвек-

ции [12] в плоском слое жидкости, подогреваемой снизу, при различных числах  $Pr$  и различных отношениях продольного размера слоя к поперечному обнаружено несколько различных механизмов перехода к стохастичности: через десинхронизацию двухчастотного режима; путем генерации субгармоник в режиме с одной частотой и, наконец, бифуркации в стохастическое состояние квазипериодического режима с тремя частотами. В главном идея работы [2] подтверждается — малое число переходов, но в каждом конкретном случае, видимо, необходимо как более детальное экспериментальное изучение течения, так и более детальная разработка модели.

Переход к стохастичности в нашем случае происходит после шести (необязательно нормальных) бифуркаций. Имеет место не только накопление частот, но и исчезновение, система не сразу после перехода становится полностью стохастической — это происходит постепенно, причем возможна генерация новых частот и долго сохраняются пики на основной частоте. Переход к стохастическому режиму от периодического происходит, по-видимому, в результате разрушения синхронизации между колебаниями на полюсе  $v_n \approx 1/4 v_2$  и экваторе  $v_2$  и сопровождается «выметанием» из спектра колебаний на частоте  $1/4 v_2$  и всех ее нечетных гармоник; колебания с частотой  $v_3$  (близкой к  $1/2 v_2$ ) на полюсе сохраняются до чисел  $Re \sim 1000$  и выше.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Lorenz E. N. — J. Atm. Sci., 1963, 20, p. 130.
2. Ruelle D., Takens F. — Commun. Math. Phys., 1971, 20, p. 167.
3. Ландау Л. Д. — Докл. АН СССР, 1944, 44, с. 3111.
4. Мошин А. С. — УФН, 1978, 125, с. 97.
5. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, с. 123.
6. Gollub J. P., Swinney H. L. — Phys. Rev. Lett., 1975, 35, p. 927.
7. Fenstermacher P. R., Swinney H. L., Benson S. V., Gollub J. P. — In: Bifurcation theory and application to scientific disciplines. N.—Y., 1978.
8. Walden R. W., Donéllu R. J. — Phys. Rev. Lett., 1979, 42, p. 301.
9. Fenstermacher P. R., Swinney H. L., Gollub J. P. — J. Fluid Mech., 1979, 94, p. 103.
10. Ahlers G. — Phys. Rev. Lett., 1974, 33, p. 1485.
11. Ahlers G., Behringer R. P. — Phys. Rev. Lett., 1978, 40, p. 712.
12. Gollub J. P., Benson S. V. — Preprint, 1979.
13. Беляев Ю. П., Монахов А. А., Яворская И. М. — МЖГ, 1978, № 2, с. 9.

# НЕКОТОРЫЕ ЯВЛЕНИЯ ТУРБУЛЕНТНОСТИ В ЖИДКОСТИ С СИЛЬНО УСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ

Г. И. БАРЕНБЛАТТ

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Несмотря на многолетние усилия исследователей, гидродинамическая турбулентность в однородной жидкости продолжает в значительной мере оставаться загадкой. Расслоение жидкости по плотности в поле силы тяжести — стратификация — дополнительно осложняет картину.

Стратификация вносит в рассмотрение характерный вертикальный масштаб, — глубину, на которой плотность меняется на существенную для динамики турбулентного потока величину. Стратификация считается сильной, если характерные вертикальные размеры движения существенно превосходят этот масштаб. В настоящей статье рассмотрены некоторые явления турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией, привлекая внимание, в основном, к сравнительно недавнее время.

В изучении турбулентности в стратифицированной жидкости важную роль сыграли пионерская работа Л. Прайдтля [1] и работы А. С. Мониной и А. М. Обухова [2, 3]. Последние работы содержали, в частности, определенные предсказания о масштабе турбулентности и поле скорости для случая сильно устойчивой стратификации, полученные аналитически из очень общих предположений. Обзор дальнейших исследований, доведенный до 1971 г., можно найти в 1-м томе американского издания монографии А. С. Мониной и А. М. Яглома [4].

Предлагаемая статья начинается с анализа простейшего турбулентного сдвигового течения однородной жидкости. Полуэмпирический подход, предложенный А. Н. Колмогоровым [5, 4], позволяет получить известный логарифмический профиль скорости в таком потоке. Что будет, если этот поток стратифицирован? Мы разберем это для турбулентного потока, в котором сильно устойчивая стратификация создается мелкими взвешенными частицами. Этот случай привлекает простыми окончательными формулами, позволяющими увидеть и объяснить парадоксальное, на первый взгляд, явление — частицы ускоряют поток!

Соответствующая теория была еще ранее развита для стратификации, создаваемой расслоением по температуре. Эта теория, однако, приводит к менее эффективным соотношениям, и мы здесь на ней не останавливаемся, тем более, что с ней можно познакомиться по монографии [4], где она детально изложена.

Анализ данных экспериментов, натуральных и лабораторных, показывает, однако, что в случае сильно устойчивой температурной стратификации (и аналогично стратификации, создаваемой соленостью) в дело существенно вмешивается новое явление — внутренние волны.

Рассматривается показательный пример: перенос тепла в верхнем деятельном слое океана, где температура, соленость и т. п. подвергаются сезонным изменениям.

Следует отметить, что отличие плотности морской воды от плотности чистой воды лежит всего в пределах трех-четырех процентов, а изменения плотности имеют порядок всего лишь десятых долей процента. Тем не менее, эти небольшие изменения плотности создают существенные динамические воздействия на поток.

Распределение температуры по глубине в верхнем деятельном слое океана имеет вид, схематически представленный на рис. 1. Верхний однородный слой, в котором температура и соленость, а следовательно и плотность, постоянны, обязан своим существованием турбулентному перемешиванию. Перемешивание осуществляется ветровым сдвигом и конвекцией: опускающимися тяжелыми частицами жидкости,

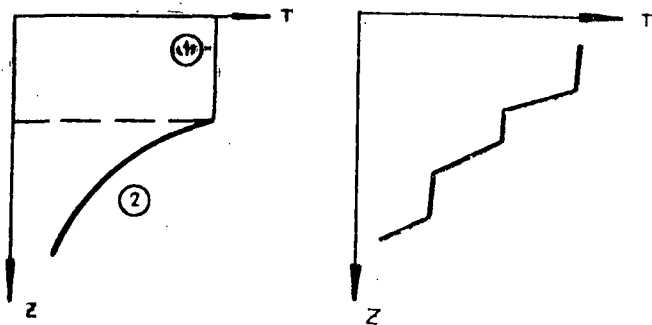


Рис. 1. Схематическое распределение температуры жидкости по глубине в верхнем деятельном слое океана: 1 — верхний однородный слой; 2 — верхний термоклин.

Рис. 2. Более прецизионные измерения показывают, что мгновенное распределение температуры по глубине негладко. Участки постоянства температуры сменяются участками с большими градиентами.

которые попадают в глубь потока из приповерхностного слоя, охлажденного и осоложенного вследствие испарения с поверхности, а также при обрушении поверхностных волн. Глубина этого слоя зависит от времени года: она растет в осенне-зимний сезон и уменьшается весной. Верхний однородный слой подпирается областью, где температура меняется резко — верхним термоклином, который заканчивается на глубине, где прекращаются сезонные изменения температуры ~200—250 м. Приводимый ниже анализ распределения температуры в сильно и устойчиво стратифицированном верхнем термоклине показывает, что коэффициент турбулентной теплопроводности в нем имеет порядок величины  $10^{-1}$ — $1$  см<sup>2</sup>/с, по непонятным, на первый взгляд, причинам — промежуточный между коэффициентом турбулентной теплопроводности в верхнем однородном слое (~ $10^3$  см<sup>2</sup>/с и более) и коэффициентом молекулярной теплопроводности (~ $10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с). Далее, более прецизионные измерения показывают (см. монографию К. Н. Федорова [6]), что мгновенное распределение температуры по глубине не бывает гладким, а носит скорее ступенчатый характер (рис. 2): участки постоянства температуры сменяются участками с большими ее градиентами.

Все это объясняется тем, что в турбулентном потоке с сильно устойчивой стратификацией турбулентность распространена не повсеместно, а пятнами и тесно связана с внутренними волнами. Взаимодействие внутренних волн и турбулентности иллюстрируется изящным опытом Филлипса, описание и анализ которого приводятся далее.

Внутренние волны определяют и самую структуру турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией. Дело в том, что они могут терять устойчивость в области вблизи гребней и впадин, где основной критерий устойчивости потока стратифицированной жидкости, число Ричардсона, имеет минимальные значения. Кроме того, внутренние волны могут обрушиваться подобно волнам на поверхности жидкости. Оба эти механизма разрушения внутренних волн наблюдались в природе [7—9]; в последнее время исследователи [8, 9] склонны считать, что потеря устойчивости волновых сдвиговых течений вблизи гребней и впадин — явление более частое. Вследствие потери устойчивости или обрушения внутренних волн (а может быть и каким-либо иным способом) образуются пятна перемешанной жидкости, которые коллапсируют — сплющиваются и расплываются вблизи уровня своей плотности. Оказывается, что наиболее продолжительной является последняя стадия этого процесса, на которой сопротивление расширению пятна оказывают вязкие силы. Расширение пятна на вязкой стадии оказывает

ся настолько медленным, что пятно может длительное время казаться наблюдателю неизменным.

Существенно, что внутри пятна жидкость однородна по плотности, а вне его — сильно устойчиво стратифицирована. Поэтому вне пятна турбулентность должна расходовать часть своей энергии на работу против силы тяжести, а внутри пятна — нет. Вследствие этого турбулентность вне пятен затухает, а внутри пятен — поддерживается на более высоком уровне. Это и определяет своеобразный «островной»\* характер турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией.

Турбулентность может поддерживать во взвешенном состоянии примесь, которая в нетурбулентной или слабо турбулентной жидкости оседает. Попадание оседающей примеси в турбулентные пятна может поэтому сделать их контрастно видимыми в окружающей среде с более слабой турбулентностью. По-видимому, это объясняет дискоидные образования в атмосфере, привлекая в последнее время широкое внимание, а также так называемые облака мутности в океане.

## 2. ПРИСТЕНОЧНАЯ ОБЛАСТЬ ПОТОКА С ПОПЕРЕЧНЫМ СДВИГОМ В ОДНОРОДНОЙ ЖИДКОСТИ

Потоком с поперечным сдвигом называется турбулентное течение, в среднем стационарное и однородное в продольном (для определенности — горизонтальном) направлении, средняя скорость  $u$  и все статистические характеристики которого зависят только от поперечной координаты  $z$ . Простейшие реализации такого потока получаются в трубе или канале вдали от входа, в пограничном слое атмосферы и т. д. Вблизи ограничивающей поток твердой стенки среднее напряжение сдвига можно считать постоянным; область, в которой это предположение справедливо, называется пристеночной областью сдвигового потока.

Исключим из рассмотрения весьма тонкую область в непосредственной близости стенки, где вязкие напряжения сравнимы с турбулентными. Тогда уравнение импульса принимает вид

$$-\rho \langle u' w' \rangle = \tau. \quad (2.1)$$

Здесь  $u'$ ,  $w'$  — пульсации продольной и вертикальной компонент скорости,  $\rho$  — плотность жидкости,  $\tau$  — тангенциальное напряжение, по условию — постоянное. Знаком  $\langle \dots \rangle$  обозначается осреднение по ансамблю. Величина  $-\rho \langle u' w' \rangle$

---

\* Удачный термин «островная» турбулентность принадлежит А. В. Гапонову-Грехову.



представляет собой средний поток продольной компоненты импульса через горизонтальную единичную площадку, т. е. тангенциальное напряжение, создаваемое турбулентностью.

В пренебрежении диффузией турбулентной энергии баланс турбулентной энергии единицы объема жидкости складывается из ее порождения за счет работы за единицу времени турбулентных касательных напряжений на переломе средней скорости  $-\rho \langle u'w' \rangle \partial_z u$  и скорости вязкой диссипации турбулентной энергии  $-\rho \epsilon_t$ . Поэтому уравнение баланса турбулентной энергии принимает вид

$$\langle u'w' \rangle \partial_z u + \epsilon_t = 0. \quad (2.2)$$

Введем по аналогии с обычным коэффициентом вязкости коэффициент турбулентного обмена импульса  $K$  посредством соотношения

$$\langle u'w' \rangle = -K \partial_z u. \quad (2.3)$$

Турбулентный поток представляет собой совокупность громадного множества вихрей, пронизывающих всю движущуюся жидкость и создающих нерегулярное, быстро меняющееся движение. Согласно простейшей гипотезе, предложенной А. Н. Колмогоровым [5], обе статистические характеристики турбулентного потока — удельная скорость диссипации турбулентной энергии  $\epsilon_t$  и коэффициент обмена импульса  $K$  — определяются в данной точке локальным средним размером вихрей или пропорциональным ему внешним масштабом турбулентности  $l$  и локальной средней энергией вихрей, в качестве меры которой можно взять величину средней турбулентной энергии единицы массы

$$b = \frac{1}{2} \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle. \quad (2.4)$$

Здесь  $v'$  — пульсация поперечной компоненты скорости.

Анализ размерностей дает

$$K = l \sqrt{b}, \quad \epsilon_t = \gamma^4 b^{3/2} / l. \quad (2.5)$$

Константу в первом соотношении (2.5.) удобно принять равной единице ввиду неопределенности масштаба, а во втором — обозначить  $\gamma^4$ . По оценке опытных данных константа  $\gamma$  близка к 0,5.

Подставляя (2.5) в (2.1) и (2.2), получаем систему уравнений

$$l \sqrt{b} \partial_z u = u_*^2, \quad l \sqrt{b} (\partial_z u)^2 - \gamma^4 b^{3/2} / l = 0. \quad (2.6)$$

Величина  $u_* = \sqrt{\tau/\rho}$  — характерная скорость потока — носит название динамической скорости. Внешний масштаб турбу-

лентности получается из тех же соображений анализа размерности пропорциональным расстоянию от стенки

$$l = \kappa \gamma z \quad (2.7)$$

( $\kappa$  — новая постоянная, называемая константой Кармана), если сделать существенное предположение о том, что на вихри не влияют ни молекулярная вязкость, ни глобальный вертикальный масштаб потока. На самом деле, это предположение лишь приближенно соответствует действительности, но мы здесь не будем касаться его возможного уточнения. Подставляя (2.7) в (2.6) и интегрируя, получаем известный логарифмический закон для распределения скорости и выражение для удельной турбулентной энергии, которая оказывается постоянной

$$u = \frac{u_*}{\kappa} \ln z + \text{const}, \quad b = \frac{u_*^2}{\gamma^2}. \quad (2.8)$$

В первом приближении эти соотношения описывают ситуацию в пристеночной области потока однородной жидкости с поперечным сдвигом. Сравнение с опытом дает для постоянной Кармана значение  $\kappa \sim 0.4$ .

### 3. ПОТОК, УСТОЙЧИВО СТРАТИФИЦИРОВАННЫЙ ВЗВЕШЕННЫМИ ЧАСТИЦАМИ

Пусть теперь тот же сдвиговой поток несет мелкие, сравнительно с вихрями, для простоты одинаковые, тяжелые частицы. Концентрацию частиц, объемную и массовую, считаем малой. Из-за мелкости частиц и малой их концентрации движение частиц можно представить себе так: они переносятся вихрями вместе с жидкостью и опускаются относительно жидкости с постоянной скоростью  $a$ , такой же, с которой изолированная частица опускалась бы в покоящейся жидкости. Из-за малости массовой концентрации вклад частиц в плотность пренебрежимо мал и уравнение баланса импульса сохраняет форму (2.1). Мы убедимся, однако, что динамическое действие частиц вследствие влияния силы тяжести может быть огромным. Это влияние осуществляется следующим образом.

Уравнение баланса турбулентной энергии принимает в потоке с частицами форму

$$\rho \langle u' w' \rangle \partial_z u + \rho \varepsilon_t + \langle \rho' w' \rangle g = 0, \quad (3.1)$$

где  $\rho'$  — пульсация плотности смеси. Последнее слагаемое (3.1), которое и отличает уравнение (3.1) от уравнения баланса турбулентной энергии однородной жидкости (2.2), представляет собой удельную работу, затрачиваемую турбулентностью на подъем взвешенных частиц. Несмотря на по-

тенциальность силы тяжести, эта работа потоку не возвращается, а диссипируется в тепло при опускании частиц относительно жидкости. Хотя пульсации плотности и малы, но ускорение силы тяжести весьма велико, так что работа подъема взвешенных частиц может играть существенную роль в балансе турбулентной энергии. Изменение турбулентной энергии оказывает влияние на поле скорости.

Уравнение (3.1) удобно переписать в виде

$$\langle u' w' \rangle \partial_z u (1 - K_0) + \varepsilon_i = 0, \quad (3.2)$$

где безразмерный параметр  $K_0$  — число Колмогорова —

$$K_0 = - \frac{\langle \rho' w' \rangle g}{\rho \langle u' w' \rangle \partial_z u} = - \frac{\sigma g \langle s' w' \rangle}{\langle u' w' \rangle \partial_z u},$$

(здесь  $\sigma = (\rho_p - \rho) / \rho$ ,  $\rho_p$  — плотность частиц,  $s$  — средняя объемная концентрация частиц,  $s'$  — пульсация этой величины) выражает собой относительную затрату турбулентной энергии на взвешивание частиц потоком. Если число  $K_0$  сравнимо с единицей, влияние частиц на динамику потока велико. Таким образом, число  $K_0$  становится дополнительным параметром, определяющим влияние стратификации\*. Поэтому соотношение (2.7) для масштаба турбулентности в однородной жидкости заменяется выражением

$$l = \kappa \gamma z \psi(K_0), \quad (3.3)$$

где  $\psi$  — некоторая функция, не возрастающая с ростом своего аргумента, поскольку частицы заведомо не увеличивают размера вихрей; очевидно, что  $\psi(0) = 1$ .

Уравнение баланса массы частиц получается приравниванием среднего турбулентного переноса частиц через единичную горизонтальную площадку  $\langle s' w' \rangle$  потоку частиц от оседания через эту площадку  $as$ :

$$\langle s' w' \rangle - as = 0. \quad (3.4)$$

Введем аналогично коэффициенту турбулентного обмена импульса коэффициент турбулентного переноса частиц согласно соотношению

$$\langle s' w' \rangle = -K_s \partial_z s$$

и распространим на него гипотезу А. Н. Колмогорова, уже использованную нами для определения коэффициента обмена импульса и скорости диссипации. Из соображений размерности имеем

$$K_s = l \gamma \overline{b} \quad (3.6)$$

(постоянный множитель в правой части для упрощения изложения принят равным единице).

\* Параметр  $K_0$  аналогичен параметру Ричардсона, возникающему в теории температурной стратификации.

Объединяя соотношения (2.1) и (3.1)—(3.6), получаем систему уравнений потока с поперечным сдвигом, стратифицированного взвешенными частицами

$$l\sqrt{b}\partial_z u = u_*^2, \quad b = \frac{u_*^2}{\gamma^2} (1 - K_0)^{1/2}, \quad l = \kappa \gamma z \psi(K_0), \quad (3.7)$$

$$l\sqrt{b}\partial_z s + as = 0, \quad K_0 = \frac{\sigma g a s}{u_*^2 \partial_z u}.$$

Мы видим, что если  $K_0 \ll 1$ , так что влияние частиц на динамику потока мало, то  $l = \kappa \gamma z$ ,  $b = u_*^2/\gamma^2$ ; подставляя эти выражения в уравнение для концентрации, получаем

$$s = \text{const } z^{-\omega}, \quad \omega = a/\kappa u_*, \quad (3.8)$$

где постоянная должна определяться из граничного условия: задания концентрации частиц на некотором уровне, причем эта граничная концентрация может быть произвольной. Если же частицы оказывают существенное влияние на динамику потока, т. е. число  $K_0$  — порядка единицы, то можно ожидать существования такого режима течения, при котором поток при неограниченном запасе частиц на подстилающей поверхности вбирает в себя максимальное количество частиц, на которое он способен. Этот «режим предельного насыщения» потока частицами должен определяться свойствами основной массы потока, т. е. системой (3.7), и описываться некоторым особым решением этой системы. Поэтому режим предельного насыщения не требует для своего нахождения дополнительных граничных условий на концентрацию.

Существенно, что в систему (3.7) входит градиент скорости  $\partial_z u$ , но не самая скорость, поэтому граничное значение скорости входит в ее выражение аддитивно. Далее, система (3.7) инвариантна относительно группы преобразований

$$S = \alpha s, \quad Z = \alpha^{-1} z, \quad U = u + \beta. \quad (3.9)$$

Стало быть, инвариантным относительно этой группы должно быть и особое решение, отвечающее режиму предельного насыщения. Пусть для этого решения

$$\partial_z u = f(z), \quad s = g(z). \quad (3.10)$$

Из инвариантности следует, что функции  $f$  и  $g$  удовлетворяют простым функциональным уравнениям

$$f(z) = \alpha f(\alpha z), \quad g(z) = \alpha g(\alpha z), \quad (3.11)$$

элементарно решая которые, находим

$$f = c_1/z, \quad g = c_2/z, \quad (3.12)$$

где  $c_1, c_2$  — константы, подлежащие определению. Подстав-

ия (3.10) — (3.11) в систему (3.7), получаем после некоторых преобразований

$$u = \frac{u_*}{\kappa \omega} \ln z + \text{const}, \quad \omega = \frac{a}{\kappa u_*} \quad (3.13)$$

конечное уравнение для определения постоянного в режиме предельного насыщения числа Колмогорова ( $K_0$ )

$$\omega = (1 - K_0)^{1/4} \psi(K_0). \quad (3.14)$$

Поскольку  $\psi(K_0)$  — невозрастающая функция своего аргумента, а  $K_0$  по своему физическому смыслу заключено между нулем и единицей, видно, что уравнение (3.14) имеет решение и, следовательно, режим предельного насыщения существует только при выполнении условия

$$\omega = \frac{a}{\kappa u_*} < 1. \quad (3.15)$$

Это условие имеет прозрачный физический смысл. Величина  $\omega$  пропорциональна отношению скорости падения частиц в жидкости к среднеквадратичной пульсации скорости жидкости. Таким образом, если пульсационная скорость велика, то за время подъема некоторого объема жидкости пульсацией скорости, обуславливаемой вихрем, частицы внутри этого объема не успевают опускаться, попадают в ядро потока и взвешиваются в нем. В противном случае частицы не взвешиваются, переносятся только в придонном слое жидкости, в ядро потока не попадают и на его динамику вне придонной области не влияют.

Уравнение (3.13) показывает, что в режиме предельного насыщения потока частицами распределение скоростей остается логарифмическим, как и в однородной жидкости (ср. (2.8)), но в нем как бы уменьшается постоянная Кармана — вместо  $\kappa$  она становится равной  $\kappa \omega$ . Это означает, что при тех же внешних условиях (перепад давления или, что то же, динамическая скорость) стратифицированный поток ускоряется по сравнению с потоком однородной жидкости. Это и понятно, поскольку сопротивление турбулентного потока определяется интенсивностью турбулентных пульсаций, т. е. удельной турбулентной энергией. Последняя же величина согласно (3.7) в стратифицированном потоке по сравнению с нестратифицированным убывает:

$$b = \frac{u_*^2}{\gamma^2} (1 - K_0)^{1/4}, \quad (3.16)$$

и притом тем более, чем больше влияние стратификации на динамику потока, т. е. чем больше число Колмогорова. Именно этим объясняются [10] пыльные бури в атмосфере Земли, а также Марса, которые в отсутствие пыли были бы

безобидными ветерками, а также ускорение движения рек, несущих большое количество наносов, неоднократно отмечавшееся гидрологами\*. Анализ показывает (см. [10]), что для пылевых частиц в атмосфере  $\omega$  мало и динамически активными оказываются режимы еще весьма далекие от режима предельного насыщения.

Изложенное выше основывалось на работах [10, 11, 12].

#### 4. РАСПРЕДЕЛЕНИЕ ТЕМПЕРАТУРЫ В ВЕРХНЕМ ТЕРМОКЛИНЕ ОКЕАНА. ОПРЕДЕЛЕНИЕ ЭФФЕКТИВНОЙ ТЕМПЕРАТУРОПРОВОДНОСТИ В ВЕРХНЕМ ТЕРМОКЛИНЕ

Турбулентные движения жидкостей с сильной устойчивой стратификацией по температуре (или, что то же, солености), в которых имеет место молекулярное перемешивание стратифицирующего агента, существенно связаны с внутренними волнами.

Чтобы убедиться в этом, рассмотрим типичный пример таких движений — верхний термоклин в океане в осенне-зимний период, когда он наиболее ясно выражен и заглубляется. Попытаемся выяснить характер процессов, происходящих в верхнем термоклине, оценив эффективный коэффициент температуропроводности в нем по данным натуральных наблюдений, исходя из определенной физической модели верхнего термоклина.

Если осреднить данные натуральных наблюдений за время порядка месяца, то влияние различных кратковременных процессов (суточные изменения, кратковременные случайные температурные аномалии и т. п.) исчезнет. При этом параметры осредненного верхнего деятельного слоя: его температура, скорость его заглубления и т. п. — будут медленно меняющимися функциями времени. Пренебрежем горизонтальной неоднородностью и будем считать процессы переноса тепла в верхнем термоклине стационарными, мелкомасштабными и однородными по глубине. В этих предположениях для распределения избыточной температуры  $\Theta$  по сравнению с осредненной за длительный промежуток времени, порядка года, температурой получается уравнение теплопроводности

$$\partial_t \Theta = \kappa \partial_{zz}^2 \Theta. \quad (4.1)$$

Здесь  $t$  — время,  $\kappa$  — эффективный вертикальный коэффициент температуропроводности, принимаемый постоянным. Заметим, что в последующем рассмотрении было бы нетруд-

---

\* Так, например, измерения на реке Янцзыцзян в Китае, известной большим количеством переносимых ею наносов, дали для постоянной Кармана значение 0,2 — вдвое меньше, чем для однородной жидкости.

но учесть переменность этого коэффициента, в частности принять его зависящим от градиента температуры. Дальнейшее покажет, что в этом усложнении нет необходимости.

В теории теплопроводности хорошо известна задача Герца о бегущей тепловой волне перед тепловым источником постоянной температуры, движущимся с постоянной скоростью. Решение этой задачи элементарно и хорошо известно; оно играет важную роль в теории горения, как это было показано в статье Я. Б. Зельдовича (см.: Нелинейные волны. Распространение и взаимодействие. М., Наука, 1981, с. 30). Принимаемая здесь физическая модель, предложенная в [13], состоит в том, что осредненный по времени термоклин представляет собой именно такую тепловую волну, движущуюся под верхним однородным слоем.

Таким образом, распределение осредненной избыточной температуры имеет вид

$$\Theta = \Theta(\xi), \quad \xi = z - ut - h_0. \quad (4.2)$$

Здесь  $u$  — осредненная скорость опускания верхнего однородного слоя, медленно меняющаяся функция времени,  $h_0$  — глубина этого слоя в некоторый условный момент времени  $t=0$ . Подставляем (4.2) в уравнение (4.1) и интегрируем получающееся обыкновенное уравнение при условиях

$$\Theta(0) = \Theta_0, \quad \Theta(\infty) = 0. \quad (4.3)$$

Здесь  $\Theta_0$  — также медленно меняющаяся функция времени, равная избыточной температуре на верхней границе верхнего термоклина — нижней границе однородного слоя. Глубина верхнего термоклина считается бесконечной. Такое упрощение возможно вследствие большой глубины океана. В результате получается простое распределение избыточной температуры

$$\Theta = \Theta_0 \exp(-u \xi / \kappa). \quad (4.4)$$

Вводя, как это обычно делается, универсальную избыточную температуру

$$\theta = (\Theta_0 - \Theta) / \Theta_0, \quad (4.5)$$

получаем универсальное соотношение

$$\theta = 1 - \exp(-u \xi / \kappa). \quad (4.6)$$

Из этого соотношения вытекает, что

$$\frac{\kappa}{u} = \int_0^{\infty} (1 - \theta) d\xi, \quad (4.7)$$

так что в координатах

$$\ln \frac{1}{1 - \theta} = \frac{\xi}{\int_0^{\infty} (1 - \theta) d\xi} \quad (4.8)$$

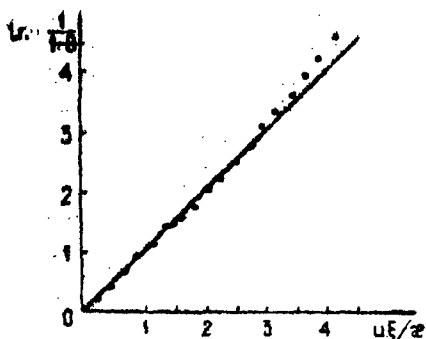


Рис. 3. Результаты обработки осредненного профиля температуры в верхнем термоклине на станции «Эхо», проведенной С. С. Ефимовым, согласуются с моделью бегущей тепловой волны

опытные точки должны лечь на прямую, проходящую через начало координат и имеющую наклон, равный единице, если предложенная модель и предположения, лежащие в ее основе, правильны. В работе [14] С. С. Ефимов и В. М. Царенко провели многочисленные обработки опытных данных различных станций в этих координатах. На рис. 3 представлены любезно предоставленные С. С. Ефимовым результаты обработки осредненного за октябрь 1968—1972 гг. профиля температуры на станции погоды «Эхо». Как видно, опытные данные хорошо подтверждают принятую модель бегущей тепловой волны для верхнего термоклина и постоянство эффективного коэффициента температуропроводности. Систематические отклонения в верхней части графика, отвечающей нижнему краю термоклина, объясняются способом обработки, при котором в этой области теряется точность. Величина  $\kappa/u$ , определенная согласно (4.7), составляет примерно  $2 \cdot 10^3$  см. Оценивая порядок средней скорости опускания верхнего однородного слоя  $u$  в этот период как  $10^{-4} \div 10^{-3}$  см·с, получаем, что эффективный вертикальный коэффициент температуропроводности  $\kappa$  составляет по порядку величины  $\sim 10^{-1} - 1$  см<sup>2</sup>/с. Эта величина — промежуточная между молекулярным коэффициентом температуропроводности ( $\sim 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с) и турбулентным коэффициентом температуропроводности в верхнем однородном слое ( $\sim 10^3$  см<sup>2</sup>/с и более). Промежуточная величина вертикального коэффициента температуропроводности показывает, что в сильно устойчиво стратифицированном верхнем термоклине подавление турбулентности стратификацией не приводит к ее полному уничтожению, так что имеется некоторый механизм под-



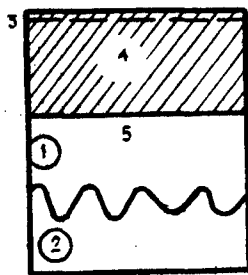
**держания турбулентности. Этот механизм — внутренние волны.**

## **5. ВНУТРЕННИЕ ВОЛНЫ И ИХ СИЛЬНОЕ ВЗАИМОДЕЙСТВИЕ С ТУРБУЛЕНТНОСТЬЮ**

Внутренние волны представляют собой специфическое для среды с устойчивой стратификацией явление. В случае, когда стратификация дискретна, т. е. в многослойной жидкости, состоящей из слоев различной постоянной плотности, наложенных друг на друга, энергия внутренних волн сосредоточена, в основном, вблизи границ раздела слоев. При сильно устойчивой непрерывной стратификации внутренние волны заполняют все пространство, занятое жидкостью, разумеется, если в жидкости имеется источник возмущений. Такие источники в океане и атмосфере имеются всегда (отметим хотя бы приливы, создающие в океане внутренние волны громадной амплитуды и длины), и внутренние волны в них представляют собой повсеместно распространенное явление [15, 16].

Сильное взаимодействие внутренних волн и турбулентности приводит к принципиально новым эффектам. Один из таких эффектов демонстрируется интересным опытом О. Филлипа [17].

Принципиальная схема этого опыта заключается в следующем (рис. 4). В бак налита двуслойная жидкость. На поверхности раздела слоев возбуждаются волны. После установления стационарной картины волны на верхней границе жидкости начинают возбуждаться турбулентность. Турбулентная область распространяется вниз; ее граница надежно визуализируется. Основной эффект заключается в том, что при подходе границы турбулентной области к поверхности раздела слоев волны исчезают и дальнейшая работа волнопродуктора становится неэффективной.



**Рис. 4.** Принципиальная схема опыта О. М. Филлипа: 1 — слой более легкой жидкости; 2 — слой более тяжелой жидкости; 3 — решетка, возбуждающая турбулентность; 4 — турбулентная область; 5 — фронт турбулентности

При теоретическом рассмотрении этого опыта [18] задача была непринципиально упрощена: слой считался горизонтально однородным и пренебрегалось сдвигом, который имел место в опыте Филлипса. В этом опыте турбулентность возбуждалась на самом деле вращением диска на верхней границе жидкости.

В условиях опыта Филлипса пренебрегать диффузией турбулентной энергии уже нельзя, она определяет основной эффект. В то же время порождение турбулентной энергии сдвиговыми напряжениями отсутствует. Уравнение баланса удельной турбулентной энергии единицы массы  $b = \langle u'^2 + v'^2 + w'^2 \rangle / 2$  принимает вид

$$\partial_t b + \partial_z \left\langle \left( \frac{p'}{\rho} + \frac{u'^2 + v'^2 + w'^2}{2} \right) w' \right\rangle + \varepsilon_t = 0, \quad (5.1)$$

где средний член отражает вклад турбулентной диффузии турбулентной энергии. Заменяем по общему правилу, которое использовалось в разделах 2, 3, диффузионный поток, стоящий под знаком  $\partial_z$  на  $-K_b \partial_z b$ . Как и в разделах 2, 3, в этой замене не содержится никакой гипотезы, это просто переобозначение, введение коэффициента турбулентного переноса турбулентной энергии  $K_b$ . Применив к этому коэффициенту и к величине  $\varepsilon_t$  гипотезу А. Н. Колмогорова, получаем

$K_b = l \sqrt{b}$  ( $l$  — внешний масштаб турбулентности, отличим постоянного множителя от единицы, как и для коэффициента обмена частиц, пренебрегаем),  $\varepsilon_t = \nu^4 b^{3/2} / l$  и уравнение (5.1) принимает вид

$$\partial_t b - \partial_z l \sqrt{b} \partial_z b + \nu^4 b^{3/2} / l = 0. \quad (5.1)$$

В начальный момент турбулентность в жидкости отсутствует

$$b(z, 0) = 0. \quad (5.3)$$

Уравнение (5.2) при нулевом начальном условии (5.3) в любых предположениях о внешнем масштабе турбулентности  $l$ , который, разумеется, ограничен, обладает свойством конечной скорости распространения возмущения (более детально об этом свойстве будет сказано ниже), так что при возбуждении турбулентности на границе турбулентная энергия отлична от нуля только в области конечной глубины  $0 \leq z \leq h(t)$ . Если турбулентная энергия подается в жидкость на границе с постоянной интенсивностью  $q$ , то  $h = \beta q^{1/3} t$ ,  $\beta = \text{const}$ , так что глубина турбулизированной

области растет по линейному закону, а распределение турбулентной энергии по глубине автомодельно

$$b = q^{2/3} f(z/q^{1/3} t). \quad (5.4)$$

Заметим, что при возбуждении турбулентности колеблющейся решеткой приток турбулентной энергии на границе удастся поддерживать постоянным лишь с помощью специальных ухищрений, обычно не применяемых. Без таких ухищрений вблизи решетки образуется слой жидкости, отбирающий все возрастающую часть энергии решетки; это было убедительно экспериментально показано С. И. Воропаевым. Поэтому распределение турбулентной энергии по глубине турбулизованной области, оставаясь автомодельным, принимает более сложный вид

$$b = A^2 t^{-2\mu} f(z/At^{1-\mu}), \quad (5.5)$$

где  $A$ ,  $\mu$  — положительные постоянные, а глубина турбулизованной области растет по закону  $h = \beta At^{1-\mu}$ ; постоянная  $\mu$  имеет обычно довольно значительную величину  $\sim 0,3-0,7$ . Так или иначе, область, занятая турбулизованной жидкостью, в каждый момент ограничена и растет со временем.

Далее, распространение внутренних гравитационных волн вблизи поверхности раздела слоев описывается обычной потенциальной теорией. Из этой теории следует, что энергия волнового движения быстро (экспоненциально) затухает при удалении от границы раздела слоев. Поэтому, пока фронт турбулентности, распространяющийся согласно предыдущему с конечной скоростью, не войдет в непосредственную близость границы раздела слоев, турбулентность не оказывает влияния на волновую картину. Турбулентность приводит к тому, что возникает турбулентный поток энергии  $E_\varphi$  потенциального волнового движения  $\vec{j}$ , направленный против ее градиента [19]

$$\vec{j} = -K_\varphi \text{grad } E_\varphi,$$

где  $K_\varphi$  — коэффициент турбулентного обмена волновой энергии, который мы снова, принимая гипотезу А. Н. Колмогорова, выражаем в том же виде  $K_\varphi = l\sqrt{b}$ , что и коэффициент обмена импульса, частиц взвеси и турбулентной энергии.

Теперь становится ясно, в чем здесь дело (рис. 5). До прихода турбулентности, в области больших градиентов  $E_\varphi$

коэффициент обмена  $K_\varphi = l\sqrt{b}$  равен нулю, а там, где этот коэффициент отличен от нуля, мал градиент  $E_\varphi$ . Поэтому турбулентный поток волновой энергии мал везде. Когда фронт турбулентности подходит к границе раздела слоев, ко-

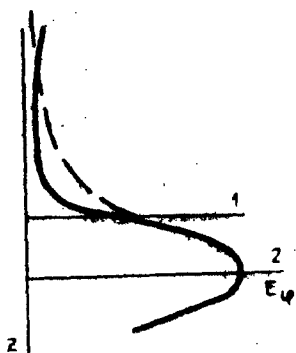


Рис. 5. Перераспределение волновой энергии по турбулентной области: 1 — фронт турбулентности; 2 — граница раздела слоев

эффицент обмена  $K_{\varphi} = l\sqrt{b}$  становится там отличным от нуля и, так как вблизи границы раздела градиент волновой энергии велик, возникает поток волновой энергии в турбулентную область. Волновая энергия распределяется по верхнему слою равномерно, волны на поверхности раздела выглаживаются и дальнейшее их возбуждение волюпродуктором становится неэффективным.

#### 6. «ОСТРОВНАЯ» ТУРБУЛЕНТНОСТЬ В ЖИДКОСТИ С СИЛЬНО УСТОЙЧИВОЙ СТРАТИФИКАЦИЕЙ

Взаимодействие внутренних волн и турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией не сводится только к перераспределению волновой энергии турбулентностью, рассмотренному в предыдущем разделе. В действительности, именно внутренние волны определяют специфический, пятнистый, «островной» характер турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией, хорошо известный из наблюдений, в частности для верхнего термоклина океана [6, 7, 20].

Дело в том, что внутренние волны могут терять устойчивость вблизи своих гребней и впадин, где локальные числа Ричардсона минимальны, и могут обрушиваться. В обоих случаях образуются пятна перемешанной жидкости, в которых плотность, в отличие от окружающей сильно стратифицированной жидкости, постоянна или почти постоянна. Натурные наблюдения обнаружили возникновение развитой турбулентности непосредственно после обрушения внутренней волны [21]. Пятна перемешанной турбулизованной жидкости эволюционируют, постепенно коллапсируя и внедряясь в окружающую стратифицированную среду языками—интрузиями.

Естественно различать три стадии эволюции пятен перемешанной жидкости: (1) начальную стадию, на которой движущая сила интрузии значительно превосходит силы сопротивления; (2) промежуточную стационарную стадию, на которой движущая сила интрузии уравнивается сопротивлением формы и волновым сопротивлением, и (3) заключительную, вязкую стадию, на которой движущая сила интрузии уравнивается вязким сопротивлением. Разумеется, между названными выше стадиями имеются промежуточные периоды; после завершения вязкой стадии пятно вследствие диффузии смешивается с окружающей жидкостью и исчезает.

Разберем эти стадии последовательно. Итак, пусть имеется сильно стратифицированная жидкость, в которой в начальный момент  $t=0$  возникает пятно перемешанной жидкости и начинается его эволюция — коллапс. Вблизи пятна распределение основного параметра стратификации — частоты Брента—Вяйсяля (частоты линейных внутренних волн, возникающих при слабом возмущении покоящейся стратифицированной жидкости)\* —

$$N = \sqrt{\frac{1}{\rho} \left| \frac{d\rho}{dz} g \right|} \quad (6.1)$$

можно считать равномерным по высоте. Типичное значение  $N$  для атмосферы составляет  $\sim 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ , для океана —  $10^{-3} \div 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ .

Анализ показывает, что на первой стадии расширение пятна происходит независимо от его формы, так что изменение любого характерного размера пятна в плане  $L$  происходит пропорционально квадрату времени

$$(L - L_0) / L_0 \sim N^2 t^2, \quad (6.2)$$

где  $L_0$  — начальный характерный размер пятна. На второй стадии закон расширения пятна уже зависит от его формы. Так, для пятна в форме длинного цилиндра с горизонтальной осью ширина пятна растет по закону

$$L \sim [SN(t - t_1)]^{1/2} \quad (6.3)$$

( $S$  — площадь поперечного сечения пятна), а его вертикальный размер  $h$  уменьшается по закону

$$h \sim [SN^{-1}(t - t_1)^{-1}]^{1/2}. \quad (6.4)$$

Здесь  $t_1$  — условный момент начала второй стадии.

\* В формуле (6.1) и далее под  $\rho$  имеется в виду потенциальная плотность, т. е. плотность жидкости, получающаяся при адиабатическом приведении давления к некоторому стандартному. Для атмосферы различные плотности и потенциальной плотности существенно.

Для пятна круговой формы в плане получаются, соответственно, соотношения

$$L \sim [NV(t-t_1)]^{1/3}, \quad h \sim [N^{-2}V(t-t_1)^{-2}]^{1/3}. \quad (6.5)$$

Здесь  $V$  — объем пятна.

Соотношения вида (6.2)—(6.4) были получены Ву [22] на основе экспериментальных данных и подтверждены теоретическим анализом Гао [23]. Более общий вывод этих соотношений и вывод соотношений (6.5) можно найти в [24].

Следует подчеркнуть, что все теоретические выводы опираются на установленное в важной работе Ву [22] следующее свойство пятен перемешанной жидкости: их объем, начиная с начальной стадии эволюции до сравнительно поздней стадии, остается неизменным. Неизменность объема пятна будет предполагаться и на заключительной, вязкой стадии его растекания.

Перейдем к рассмотрению вязкой стадии растекания пятна [24]. В предположении неизменности объема пятна, т. е. отсутствия захвата окружающей жидкости пятном и эрозии пятна, уравнение сохранения массы жидкости в пятне в естественном гидравлическом приближении принимает вид

$$\partial_t h + \operatorname{div} h \vec{v} = 0. \quad (6.6)$$

Здесь  $h(x, y, t)$  — локальная толщина пятна, зависящая от координат  $x$  и  $y$  в горизонтальной плоскости и времени  $t$ ,

$\vec{v}$  — средняя по толщине пятна скорость перемещения жидкости в пятне. Движущая сила цилиндрической частицы пятна, опирающейся на площадку  $\delta S$  горизонтальной плоскости, обусловлена действием градиента среднего по толщине пятна избыточного давления жидкости в пятне  $p$  и пространственным изменением толщины пятна  $h$ , она составляет

$$F_m = -\operatorname{grad}(ph) \delta S. \quad (6.7)$$

Избыточное давление  $p$  определяется следующим образом: внутри пятна плотность жидкости постоянна и равна плотности стратифицированной жидкости на уровне растекания  $\rho_1$ . Поэтому давление внутри пятна меняется по гидростатическому закону. (Р. В. Озмидов справедливо отметил, что это имеет место, лишь если пульсации скорости внутри пятна достаточно малы, так что вертикальное ускорение частиц жидкости мало сравнительно с ускорением силы тяжести; на заключительной стадии такое предположение представляется разумным). Давление в верхней и нижней точках некоторой вертикали пятна равно соответствующим давлениям в стратифицированной жидкости на тех же уровнях. Вне пятна, в стратифицированной жидкости, плотность перемещена и давление меняется по квадратичному закону. Вычисление разности средних по толщине давлений внутри

и вне пятна дает для среднего по толщине по данной вертикали избыточного давления выражение

$$p = \rho_1 N^2 h^2 / 12. \quad (6.8)$$

Далее, сила сопротивления, приходящаяся на единицу площади поверхности частицы, вследствие своего чисто вязкого характера на рассматриваемой заключительной стадии расплывания пятна определяется локальной средней скоростью  $\vec{v}$  частицы, эффективной динамической вязкостью жидкости в пятне  $\mu$  и локальной толщиной пятна  $h$ . Анализ размерностей показывает, что сила сопротивления единицы

площади пропорциональна  $\mu \vec{v} / h$ , а сила сопротивления, действующая на частицу, опирающуюся на горизонтальную площадку  $\delta S$ , составляет

$$F_r = c \mu (\vec{v} / h) \delta S, \quad (6.9)$$

где  $c$  — константа, определение которой из решения задачи о течении вязкой жидкости между плоскими стенками дает  $c = 12$ .

Приравнивая движущую силу частицы ее силе сопротивления и используя соотношение (6.8), находим

$$\vec{v} = - \frac{\rho_1 N^2}{12 c \mu} h \text{ grad } h^3 = - \frac{\rho_1 N^2}{4 c \mu} h^3 \text{ grad } h, \quad (6.10)$$

откуда и из уравнения (6.6) получаем для толщины пятна нелинейное уравнение типа уравнения теплопроводности

$$\partial_t h - \kappa \Delta h^5 = 0, \quad \kappa = \rho_1 N^2 / 20 c \mu = N^2 / 20 c \nu. \quad (6.11)$$

Если начальные размеры пятна перемешанной жидкости в плане примерно одинаковы, то его распространение становится симметричным уже на промежуточной стадии и заведомо симметричным на заключительной стадии (чему сильно способствует нелинейность процесса растекания — см. уравнение (6.11)). Для симметричного пятна уравнение (6.11) принимает вид

$$\partial_t h - (\kappa / r) \partial_r r \partial_r h^5 = 0. \quad (6.12)$$

Здесь  $r$  — радиальная координата.

Условие сохранения объема пятна записывается при этом в форме

$$2\pi \int_0^\infty r h(r, t) dr = V \equiv \text{const}. \quad (6.13)$$

Для нас интересна прежде всего асимптотическая стадия коллапса пятна, на которой его радиус много больше начального. Для описания этой стадии можно представить начальное распределение толщины пятна в виде сосредоточенного мгновенного источника при  $t = t_2$ .

$$h(r, t_2) \equiv 0, \quad (r \neq 0), \quad 2\pi \int_0^{\infty} r h(r, t_2) dr = V, \quad (6.14)$$

где  $t_2$  — условный момент начала вязкой стадии.

Решения подобного типа для уравнений типа уравнения теплопроводности со степенной нелинейностью рассматривались в работах [25, 26] (см. также книгу [27]). Решение задачи (6.12), (6.14) зависит от размерных величин  $t-t_2$ ,  $\kappa$ ,  $V$  и  $r$ . Анализ размерностей показывает, что это решение автомодельно

$$h = [V/2\pi\kappa(t-t_2)]^{1/5} f(\zeta), \quad (6.15)$$

$$\zeta = r[V^4\kappa(t-t_2)/16\pi^4]^{-1/10}.$$

Подставляя (6.15) в уравнение (6.12), получаем для функции  $f(\zeta)$  обыкновенное уравнение

$$\frac{d^2 f^5}{d\zeta^2} + \frac{1}{\zeta} \frac{df^5}{d\zeta} + \frac{1}{10} \zeta \frac{df}{d\zeta} + \frac{1}{5} f = 0. \quad (6.16)$$

Умножая на  $\zeta$ , получаем уравнение в полных дифференциалах, интегрируя и используя для определения констант условия (6.13), находим простое выражение для функции  $f$

$$f(\zeta) = \begin{cases} (10^{1/5}/6)^{1/4} (1-\zeta^2/\zeta_0^2)^{1/4}, & 0 \leq \zeta \leq \zeta_0 \\ 0, & \zeta \geq \zeta_0 = 10^{3/5}/2 \approx 2. \end{cases} \quad (6.17)$$

Таким образом, пятно в каждый момент имеет конечный радиус  $r_0(t)$ . В этом состоит специфика нелинейности, отличающая уравнение (6.11) от линейного уравнения теплопроводности. Радиус пятна определяется соотношением

$$r_0(t) = 2[V^4\kappa(t-t_2)/16\pi^4]^{1/10}, \quad (6.18)$$

откуда следует, что он изменяется со временем крайне медленно. Для максимальной толщины пятна получаем

$$h(0, t) = h_0(t) = (10^{1/5}/6)^{1/4} [V/2\pi\kappa(t-t_2)]^{-1/5}, \quad (6.19)$$

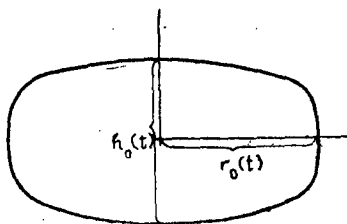


Рис. 6. Форма пятна перемешанной жидкости на вязкой стадии его растекания близка к диску: на большей части толщина пятна постоянна



т. е. ее изменение со временем также происходит очень медленно. Любопытна форма сечения пятна (рис. 6): его толщина повсюду почти постоянна и уменьшается только вблизи самого края, так что пятно имеет явно выраженную дискообразную форму.

Аналогичным образом получаются (см. [24]) и соотношения для вязкого растекания пятна в форме длинного цилиндра; мы здесь на них останавливаться не будем.

Закон расширения пятна перемешанной жидкости (6.18) выглядит весьма просто и его экспериментальная проверка была весьма желательной. Такая проверка была выполнена А. Г. Зацепиным, К. Н. Федоровым, С. И. Воропаевым и А. М. Павловым [28]. Схема поставленного ими эксперимента была следующей. В открытый плексигласовый бак, заполненный устойчиво стратифицированной по температуре жидкостью, вводилась сверху под уровень жидкости полая цилиндрическая трубка. Жидкость, попавшая в трубку, перемешивалась мешалкой, после чего трубка поднималась вверх, освобождая пятно перемешанной жидкости, которое начинало внедряться в стратифицированную окружающую жидкость. Визуальные наблюдения, фото- и киносъемка производились с использованием теневого прибора. Экспериментальное устройство позволяло наблюдать и регистрировать две последние стадии расширения пятна, на которых турбулентность в пятне уже затухала (поддержание турбулентности сдвигом в этом опыте отсутствовало). Поскольку объем пятна, кинематическая вязкость жидкости и диаметр трубы  $D$  во всех экспериментах были одинаковыми, то, если формула (6.18) верна, экспериментальные точки в координатах

$$\lg[2r_0(t)/D], \quad \lg[N^2(t-t_2)]$$

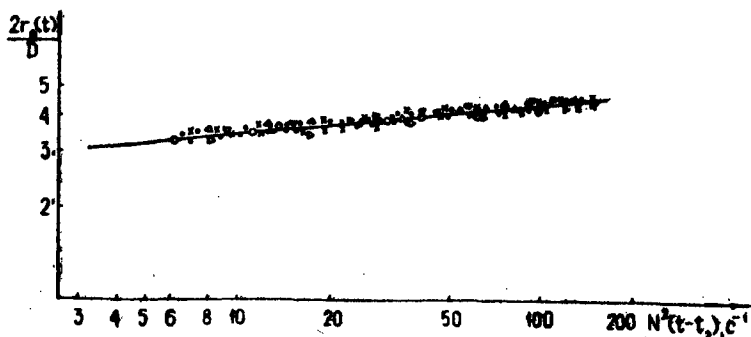


Рис. 7. Эксперимент подтверждает закон одной десятой для расширения пятна. ● —  $N=0,63 c^{-1}$ ;  
 $\times$  —  $N=1,00 c^{-1}$ ;  $\Delta$  —  $N=0,58 c^{-1}$ ;  $t_2 = -10 c$

должны лечь на единую прямую с наклоном  $1/10$ . Это хорошо подтверждает график рис. 7, заимствованный из работы [28]. Таким образом, закон одной десятой для расширения пятна перемешанной жидкости в устойчиво стратифицированной среде получил в работе [28] удовлетворительное экспериментальное подтверждение\*.

Заметим теперь, что если длительность первых двух стадий расширения пятна, как показывает опыт, не превышает одного-нескольких десятков характерных времен стратифицированной среды  $\tau \sim N^{-1}$ , то длительность вязкой стадии оказывается существенно, по крайней мере на порядок, большей. Поэтому в среде с сильно устойчивой стратификацией имеется много пятен перемешанной жидкости, находящихся, в основном, на вязкой стадии своей эволюции, когда их расширение происходит крайне медленно. При этом, в части пятен турбулентность может затухнуть, так что только постоянство плотности в пятне будет свидетельствовать о «реликтовой» турбулентности, когда-то существовавшей в них. Именно наличием пятен перемешанной жидкости разных масштабов мы объясняем (впервые это сделано в [24]) наличие микроструктуры полей температуры, солёности и т. п.: участки постоянной по высоте температуры соответствуют пересечению зондом этих пятен\*\*.

---

\* В недавней работе В. М. Журбаса [29] принятое выше предложение о том, что вязкое сопротивление определяется движениями внутри пятна, для турбулентных пятен было заменено предположением, что вязкое сопротивление создается движением окружающей жидкости, направленным в ту же сторону, что и движение жидкости в пятне. При этом толщина  $h$  пятна в соотношении (6.9) заменяется толщиной вовлеченного слоя окружающей жидкости, что приводит к соотношениям того же типа, что и рассмотренные выше, но с другими показателями степени. Для закона расширения дискообразного пятна степень времени в выражении для радиуса также мала. Нам представляется, что такое предположение не обосновано. Действительно, как показывает численный и экспериментальный анализ, вблизи пятна возникает возвратное движение жидкости.

\*\* Следует отметить одно важное обстоятельство. В условиях океана стратификация может создаваться изменчивостью по вертикали как температуры, так и солёности. Ввиду того, что коэффициент температуропроводности морской воды на два порядка больше ее коэффициента диффузии, пятно перемешанной жидкости, имеющее вначале постоянную плотность, вследствие теплоотдачи может в отдельных случаях стать тяжелее стратифицированной жидкости под пятном. В результате релей-тейлоровской неустойчивости в нижней части пятна возникнут пальцеобразные вкрапления в жидкость, расположенную под пятном. Эти вкрапления будут оказывать дополнительное влияние на микроструктуру. Большую роль процессов «двойной диффузии» и возникновения «солевых пальцев» в океане постоянно подчеркивает в своей монографии [6] К. Н. Федоров.

Наиболее существенно, однако, другое. Внутри пятна жидкость имеет постоянную плотность и турбулентность там не затрачивает свою энергию на работу против силы тяжести. Уравнение баланса средней турбулентной энергии единицы массы  $b$  имеет внутри пятна перемешанной жидкости вид

$$\rho \partial_t b = -\rho \langle u' w' \rangle \partial_z u - \rho \epsilon_t. \quad (6.20)$$

(Диффузионный член в этом уравнении отброшен. Он определяет перенос энергии из одной части пятна в другую и средней турбулентной энергии в пятне не меняет). Наоборот, вне пятен, там, где жидкость стратифицирована, турбулентность затрачивает часть своей энергии на работу против силы тяжести. Уравнение баланса турбулентной энергии содержит дополнительный расходный член  $-\langle \rho' w' \rangle g$ , большой в условиях сильной стратификации, и имеет вид

$$\rho \partial_t b = -\rho \langle u' w' \rangle \partial_z u - \rho \epsilon_t - \langle \rho' w' \rangle g. \quad (6.21)$$

Поэтому в условиях сильной стратификации имеющегося в потоке сдвига скорости хватает для поддержания турбулентности внутри пятен, пока они не коллапсируют слишком сильно\*, в то время как турбулентность вне пятен затухает.

Турбулентность в условиях сильной стратификации жидкости имеет, таким образом, своеобразный «островной» характер: пятна перемешанной жидкости с повышенной турбулентностью соседствуют с участками стратифицированной жидкости, где турбулентность слабее или просто отсутствует.

Именно это и обуславливает промежуточную величину коэффициента температуропроводности в верхнем термоклине, найденную нами в разделе 4: существенное сопротивление распространению тепла оказывают лишь нетурбулентные участки жидкости. По прямым оценкам Вудса [7], относительная доля по высоте нетурбулентных прослоек («протынь»)  $\delta$  составляла в его наблюдениях  $\sim 10^{-2}$ ; оценивая эффективный коэффициент температуропроводности  $\kappa$  по элементарной формуле

$$\kappa = \kappa_{\text{mol}} / \delta$$

( $\kappa_{\text{mol}}$  — коэффициент молекулярной температуропроводности), получаем, что для верхнего термоклина в районе станции «Эхо»  $\delta$  также имеет порядок  $10^{-3} \div 10^{-2}$ .

\* Оценки [24] показывают, что сдвиг скорости, необходимый для поддержания турбулентности в пятне, обратно пропорционален его толщине.

## 7. ДИСКООБРАЗНЫЕ ОБРАЗОВАНИЯ В АТМОСФЕРЕ И ОБЛАКА МУТНОСТИ В ОКЕАНЕ

В последнее время привлекают широкое внимание дискообразные образования неясного происхождения в атмосфере. Представляется [30], что эти образования — одно из проявлений сильной стратификации. Нам кажется, что дискообразные образования в атмосфере, по крайней мере в некоторых случаях, представляют собой именно такие очень медленно расширяющиеся дискообразные пятна повышенной турбулентности, которые были рассмотрены в предыдущем разделе, по тем или иным причинам ставшие видимыми. Оценка по формулам (6.18) толщины  $h_0$  и радиуса пятна  $r_0$  при  $N = 10^{-2} \text{ с}^{-1}$ ,  $t - t_2 = 10^4 \text{ с}$ , при представляющемся разумным объеме пятна  $V = 10^5 \text{ м}^3 = 10^{11} \text{ см}^3$  и вязкости воздуха  $\nu = 0,15 \text{ см}^2/\text{с}$ , дает  $h_0 \sim 2,2 \text{ м}$ ,  $r_0 \sim 150 \text{ м}$ .

Видимость турбулентных пятен представляет собой, как нам кажется, сравнительно редкое явление и может возникать, например, следующим образом.

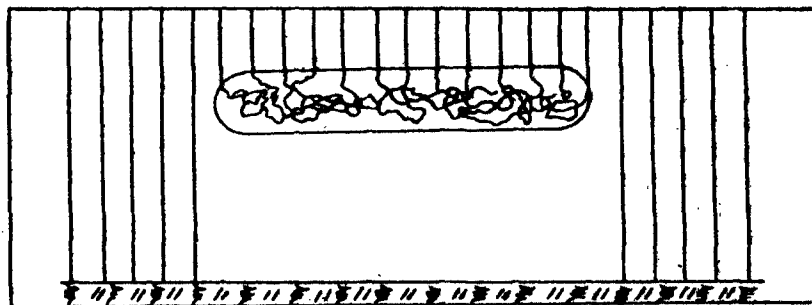


Рис. 8. Выпадающая взвесь опускается в стратифицированной среде, где турбулентность низка, но задерживается дискообразным пятном, где турбулентность может ее удерживать

Пусть по тем или иным причинам в атмосфере появилось некоторое количество примеси, например, достаточно крупного аэрозоля. При определенных условиях эта примесь выпадает более или менее равномерно по площади (рис. 8). Для удержания частиц во взвешенном состоянии необходимо выполнение условия (3.15), т. е. нужно чтобы скорость установившегося падения частиц  $a$  была меньше некоторой доли среднеквадратичной пульсации скорости. Там, где турбулентность низка — в окружающей пятно стратифицированной жидкости, это условие не выполняется и частицы во взвешенном состоянии не удерживаются. В пятне же турбу-

лентность может оказаться достаточно высокой для того, чтобы условие (3.15) выполнялось и частицы удерживались во взвешенном состоянии, как в хорошо известных в природе взвешенных потоках воздуха и воды. Удержанные взвешенные частицы увеличивают оптическую плотность пятна и оно может стать видимым в окружающем воздухе при внешнем освещении. Это может быть освещение солнцем или луной, причем для высоко расположенных пятен — также и ночью, когда солнце неглубоко под горизонтом. По мере коллапса пятна его толщина уменьшается и сдвиг скорости, необходимый для поддержания в нем турбулентности, возрастает, как уже упоминалось, обратно пропорционально его толщине. Когда имеющийся сдвиг скорости становится недостаточным для поддержания турбулентности, пятно сбрасывает частицы и становится невидимым, сливаясь с окружающим воздухом.

Для получения видимости пятна достаточно его оптической толщины  $\tau \sim 1$ . Оценивая необходимую концентрацию частиц по формуле  $n = \tau / 2\pi r^2 H$  ( $H$  — эффективная толщина пятна с учетом скоса угла зрения,  $r$  — радиус частицы), получаем, например, для частиц размером 3 мкм и  $H$  порядка  $10^3$  см,  $n \sim 10^3$  см<sup>-3</sup>, для более крупных частиц размером 30 мкм,  $n \sim 10$  см<sup>-3</sup>. Такие концентрации частиц в пылевых облаках вполне реальны.

Дискоидные образования могут наблюдаться, таким образом, там, где есть сильная устойчивая стратификация и условия для разрушения внутренних волн в атмосфере. Это может быть резкая граница атмосферных слоев, подветренная сторона невысокой горной гряды при наличии температурной инверсии и т. п. Предложенная схема согласуется с наблюдавшимися, по-видимому, относительно большими ускорениями дискоидных образований, а сообщения об участвовавших в последнее время наблюдениях дискоидных образований можно связать с загрязнением атмосферы.

Аналогичное объяснение можно дать и «облакам мутности», наблюдаемым в океане.

Заметим в заключение, что физические закономерности «островной» турбулентности, характерной для сильно стратифицированной среды, только начинают раскрываться, но даже это начало позволяет получить новый взгляд на классические результаты. Так, из рассмотренной выше картины следует, что размер вихрей в «островной» турбулентности составляет определенную долю средней толщины пятна. Именно поэтому внешний масштаб турбулентности при сильной стратификации должен перестать зависеть от поперечной координаты в пристеночной области потока со сдвигом. Этим подтверждается предсказание теории Мони́на—Обухо-

ва [2—4], полученное ими из очень общих предположений чисто математическим путем.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Prandtl L. — Beitrage Phys. für Atmosph, 1932, 19, N. 3, p. 188.
2. Монин А. С., Обухов А. М. — Докл. АН СССР, 1953, 93, № 2, с. 223.
3. Монин А. С., Обухов А. М. — Труды Геофиз. ин-та АН СССР, 1954, № 24 (151), с. 163.
4. Monin A. S., Yaglom A. M. — Statistical hydromechanics. Part 1. 1971. The MIT Press, Cambridge, Mass.
5. Колмогоров А. Н. — Изв. АН СССР. Сер. физ., 1942, 6, № 1—2, с. 56.
6. Федоров К. Н. — Тонкая термохалинная структура вод океана. Л., Гидрометеониздат, 1976, 184 с.
7. Woods J. D. — J. Fluid Mech., 1968, 32, N. 4, p. 791.
8. Коротаев Г. К., Пантелеев Н. А. — Океанология, 1977, 17, вып. 6, с. 941.
9. Беляев В. С., Гезенцевей А. Н. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1978, 14, № 6, с. 648.
10. Barenblatt G. I., Golitsyn G. S. — Journal of Atmospheric Sciences, 1974, 31, N. 7, p. 1917.
11. Баренблатт Г. И. — ПММ, 1953, 17, № 3, с. 261.
12. Баренблатт Г. И. — ПММ, 1955, 19, № 1, с. 61.
13. Баренблатт Г. И. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1978, 14, № 11, с. 1160.
14. Ефимов С. С., Царенко В. М. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1979, 15, № 12.
15. Миропольский Ю. З., Монин А. С. — В кн.: Океанология. Физика океана. Т. 2. М., Наука, 1978, с. 182.
16. Госсард Э., Хук У. — Волны в атмосфере. М., Мир, 1978.
17. Phillips O. M. Energy loss mechanisms from low-mode waves. Доклад на советско-американской конференции по внутренним волнам. Новосибирск, декабрь, 1976.
18. Баренблатт Г. И. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1977, 13, № 8, с. 845.
19. Бенилов А. Ю. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1973, 9, № 3, с. 293.
20. Монин А. С., Каменкович В. М., Корт В. Г. Изменчивость Мирового океана. Л. Гидрометеониздат, 1974, с. 262.
21. Беляев В. С., Лозовацкий И. Д., Озмидов Р. В. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1975, 11, № 7, с. 718.
22. Wu J. — J. Fluid Mech., 1969, 35, N. 3, p. 531.
23. Kao T. W. — Phys. Fluids; 1976, 19, N. 8, p. 1071.
24. Баренблатт Г. И. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1978, 14, № 2, с. 195.
25. Зельдович Я. Б., Компанец А. С. — В кн.: Сборник, посв. 70-летию А. Ф. Иоффе. М., Изд-во АН СССР, 1950, с. 61.
26. Баренблатт Г. И. — ПММ, 1952, 16, № 1, с. 67.
27. Баренблатт Г. И., Ентов В. М., Рыжик В. М. Теория нестационарной фильтрации жидкости и газа. М., Недра, 1972, 288 с.
28. Зацепин А. Г., Федоров К. Н., Воропаев С. И., Павлов А. М. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1978, 14, № 2, с. 234.
29. Журбас В. М. — Изв. АН СССР. Сер. ФАО, 1979, 15, № 9.
30. Баренблатт Г. И., Монин А. С. — Докл. АН СССР, 1979, 246, № 4, с. 834.

# ЭНЕРГЕТИКА КОНВЕКЦИИ

Г. С. ГОЛИЦЫН

## 1. ВВЕДЕНИЕ

Конвекция является простейшей и наиболее распространенной формой движения жидкости (и газа) в природе, в различных технических устройствах, в повседневной жизни. Вместе с тем достаточно развитая конвекция является типичным примером нелинейной системы с очень большим числом степеней свободы. В неоднородной по плотности жидкости в поле силы тяжести действуют архимедовы силы. Если существуют градиенты плотности  $\nabla \rho$ , не совпадающие по направлению с ускорением силы тяжести  $\vec{g}$ , то в жидкости механическое равновесие невозможно. Если же  $\nabla \rho \parallel \vec{g}$ , то равновесие нарушается, если  $\nabla \rho$  меньше так называемого адиабатического градиента плотности ([1], § 4, 5), который равен  $-g \rho / c^2$  ([2], с. 93), где  $c$  — скорость звука. Этот случай и будет здесь рассматриваться.

Обычно неоднородность поля плотности возникает при неравномерном подогреве жидкости. Тогда удобно ввести адиабатический градиент температуры  $\gamma_a = -\alpha T g / c_p$ , где  $\alpha$  — коэффициент теплового расширения среды,  $T$  — абсолютная температура,  $c_p$  — теплоемкость при постоянном давлении. Конвекция возникает, если  $\gamma = \frac{dT}{dz} < \gamma_a$ .

Рассмотрение лишь вертикальных градиентов температуры или плотности предполагает достаточно большие размеры системы и несущественность границ. Если имеются горизонтальные границы, на которых заданы температуры  $T_1$  и  $T_2$  или потоки тепла, и рассматривается слой жидкости высотой  $d$ , то условием потери устойчивости является требование

$$R = \frac{\alpha g \Delta T d^3}{\kappa \nu} > R_{кр}, \quad (1)$$

где  $R$  — число Рэлея,  $\kappa, \nu$  — коэффициенты температуропроводности и кинематической вязкости,  $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$ .

Число Рэлея возникает в уравнениях гидродинамики в приближении Буссинеска, если расстояния измерять масштабом  $d$ , скорость —  $\kappa/d$ , температуру —  $\Delta T$ . Вторым критерием подобия здесь будет число Прандтля  $P_r = \nu/\kappa$ .

Критическое значение параметра подобия — числа Рэлея — зависит от типа граничных условий. Так, для конвекции между двумя твердыми стенками  $R_{кр} = 1708$  [3, 4]. Условие (1) является более жестким, чем требование  $\gamma < \gamma_a$ , вследствие стабилизирующего влияния молекулярного переноса и границ.

Изложение большого количества результатов, полученных для конвекции при небольших закритических числах Рэлея аналитическими, численными методами и в лабораторных условиях, можно найти в работах [3, 4]. Из последних обзоров упомянем [5], где достаточно полно рассмотрены исследования конвекции до 1978 г. с подчеркнутым вниманием к нелинейным аспектам проблемы. Здесь мы основное время уделим анализу процессов превращения вводимой в жидкость тепловой или механической мощности, генерации кинетической энергии движений. Это позволит оценить средние скорости кинетической энергии движений через внешние параметры задачи. Будет показано, что в приближении слабой надкритичности получаемые выражения для скоростей и временные масштабы конвекции являются точными, а сравнением с численными и лабораторными экспериментами будет определена область их применимости, которая оказывается очень широкой в смысле интервала чисел Рэлея. Будет дан новый простой вывод законов теплопередачи при конвекции, а в заключение кратко упомянуты различные геофизические приложения и сформулированы некоторые общие выводы. Более детальное изложение материала можно найти в брошюре [6] и статьях [7—11].

## 2. АНАЛИЗ ЭНЕРГЕТИКИ КОНВЕКЦИИ

Рассмотрим бесконечный плоский горизонтальный слой жидкости, причем  $\Delta T = T_1 - T_2 > 0$  и на границах условия прилипания. Возьмем уравнение для импульса жидкой частицы в приближении Буссинеска [1—4], умножим его скалярно на вектор скорости  $v$ , осредним по горизонтали и проинтегрируем по высоте слоя от 0 до  $d$ . Тогда получим уравнение баланса энергии

$$d\dot{K}/dt = G - D, \quad (2)$$

где

$$K = \frac{\rho}{2} \int_0^d \langle u^2 + v^2 + w^2 \rangle dz \quad (3)$$



— кинетическая энергия единичного столба жидкости, угловые скобки означают горизонтальное осреднение,

$$G = \rho \alpha g \int_0^d \langle w T' \rangle dz \quad (4)$$

— скорость генерации кинетической энергии из потенциальной, штрих означает отклонение температуры от равновесной,

$$D = \rho \nu \int_0^d \langle (\nabla v)^2 \rangle dz \quad (5)$$

— скорость диссипации кинетической энергии. Если процесс в среднем стационарен, то из (2) следует, что  $G = D$ . При этом поток тепла через жидкость  $f$  в отсутствие внутренних источников в среднем постоянен. С другой стороны, при этом

$$f = \rho c_p (-\kappa \langle dT/dz \rangle + \langle w T' \rangle), \quad (6)$$

что может быть получено осреднением уравнения теплопроводности в жидкости по горизонтали (и по времени). Проинтегрируем (6) от 0 до  $d$  и с учетом (3) и граничных условий на температуру получим

$$fd = \rho c_p \kappa \Delta T + HG, \quad H = c_p / \alpha g. \quad (7)$$

Величина  $H$  с размерностью длины отвечает толщине слоя жидкости, адиабатически стратифицированного в поле силы тяжести. Так, для воздуха при  $1/\alpha = T = 300\text{K}$   $H = 30$  км, для воды при  $20^\circ\text{C}$   $H = 2000$  км.

Введем критерий подобия для теплопередачи при конвекции — число Нуссельта

$$\text{Nu} = fd / \rho c_p \kappa \Delta T, \quad (8)$$

отношение фактического потока тепла через жидкость при конвекции к потоку, который был бы в отсутствии движений, т. е. молекулярному. Тогда из (7) можно определить КПД — эффективность конвекции по преобразованию вводимой в слой тепловой мощности в скорость генерации кинетической энергии

$$\gamma = \frac{G}{f} = \frac{\alpha g d}{c_p} \frac{\text{Nu} - 1}{\text{Nu}} = \frac{d}{H} (1 - \text{Nu}^{-1}). \quad (9)$$

Это выражение может быть обобщено и на случай, когда внутри слоя есть источники тепла [6, 9]. Там же приведены результаты проверки этой формулы по данным численных экспериментов [12] и весьма тщательных и полных лабораторных измерений [13], выполненных в широком диапазоне чисел Рэлея вплоть до  $R \sim 10^7$ . В пределах точности расчетов и измерений данные [12, 13] подтверждают зависимость (9).

Нужно отметить, что выражение (9) справедливо как для ламинарной, так и турбулентной конвекции независимо от того, вращается слой как целое или покоится. Единственным ограничением здесь является приближение Буссинеска, которое справедливо, если  $d \ll H$  [6, 12].

При больших числах Рэлея  $Nu \gg 1$ , и тогда выражение (8) определяется лишь свойствами жидкости

$$\gamma = d/H. \quad (9)$$

В таком виде оно было впервые получено в работе [14]. В случае произвольных значений чисел  $R$  и  $P$  КПД  $\gamma$  является их функцией, поскольку  $Nu = Nu(R, P)$  (см. [1], § 56). Эта зависимость в настоящее время хорошо изучена экспериментально (см. [5]). При небольших закритических  $R$  в приближении слабой нелинейности она получена в [15]. Для далайковой конвекции при обеих жестких границах слоя

$$R(Nu-1)/(R-R_{кр}) = (0,69942 - 0,00472 P^{-1} + 0,00832 P^{-2})^{-1} \quad (10)$$

и аналогично для гексагональных ячеек

$$R(Nu-1)/(R-R_{кр}) = (0,89360 + 0,04959 P^{-1} + 0,06787 P^{-2})^{-1}. \quad (11)$$

Подстановка этих выражений в (8) позволяет выразить  $\gamma$  в виде рациональной функции  $R$  и  $P$ , причем зависимость от числа Прандтля слабая, если только оно не слишком мало. Существенной частью зависимости  $\gamma = \gamma(R, P)$  является множитель  $1 - Nu^{-1}$ . Его вид согласно ряду расчетов и опытов представлен на рис. 1. Треугольники соответствуют расчетам [16] при  $P=200$ , кружки — [17] при  $P=0,7$ , а серии из трех мелких значков — расчетам [18] при  $P=7$  при трех разных отношениях вертикального масштаба ячейки к горизонтальному. Сплошная кривая проведена на глаз по этим точкам, и ей соответствует пунктир для  $(1 - Nu^{-1})^{1/2}$ . Он нужен для оценки масштабов скорости и времени (см. разд. 3). Нижняя штрихпунктирная кривая соответствует опытам [19] с ртутью —  $P=0,025$ . Структура формулы (9) справедлива и для областей произвольной формы [6, 12, 20].

Рассмотрим диссипацию кинетической энергии при конвекции. В стационарном случае  $D=G$  и согласно определению (9) диссипация на единицу массы в среднем

$$\varepsilon = D/\rho d = \gamma f/\rho d = (f/\rho H) (1 - Nu^{-1}). \quad (12)$$

При  $Nu \gg 1$  отсюда следует, что  $\varepsilon$  не зависит от глубины слоя, чисел  $R$  и  $P$ , а определяется лишь потоком тепла и свойствами жидкости

$$\varepsilon \approx f/\rho H = \alpha g f/\rho c_p. \quad (12, a)$$

Во всяком случае эту формулу всегда можно рассматривать как полезную оценку сверху. Для идеального газа  $\alpha = 1/T$ , и в этом случае (12, a) переходит в формулу для  $\varepsilon$ ,

предложенную А. М. Обуховым [21] из соображений подобия и размерности при рассмотрении развитой конвекции в пограничном слое атмосферы.

### 3. ОЦЕНКА СРЕДНИХ СКОРОСТЕЙ И ВРЕМЕННОГО МАСШТАБА; РЕЖИМЫ ТЕПЛОПЕРЕДАЧИ

Знание эффективности конвекции по превращению подводимой тепловой мощности в скорость генерации кинетической энергии, равной скорости ее диссипации в стационарном случае, позволяет оценить средние скорости конвективных движений. Это можно сделать, когда известеи характерный масштаб движений и когда вязкость оказывается еще непосредственно на этом масштабе. Границы применимости этих условий определяются ниже, в разд. 4, из экспериментов.

Рассмотрим формулу для удельной диссипации [1, § 16]

$$\varepsilon = \frac{\nu}{2} \left( \frac{\partial v_i}{\partial x_i} + \frac{\partial v_k}{\partial x_k} \right)^2, \quad (13)$$

где по повторяющимся индексам подразумевается суммирование. В [6—9] показано, что если в (13) все производные одного порядка, а характерный масштаб равен половине глубины слоя  $d$  (валиковая конвекция), то средние значения компонент скорости

$$\bar{u} \approx \bar{w} \approx \frac{1}{a} \left( \frac{\varepsilon}{\nu} \right)^{1/2} d = \frac{d}{a} \left( \frac{\alpha g f}{\mu c_p} \frac{N-1}{N} \right)^{1/2}, \quad (14)$$

где  $a \approx 8$  или  $12$  в зависимости от двумерности или трехмерности конвекции,  $\mu = \rho \nu$  — динамическая вязкость. Зависимость

$$\bar{U}^2 = \bar{u}^2 + \bar{w}^2 \approx (2\varepsilon/a^2 \nu) d^2$$

вполне аналогична структуре формулы для среднего квадрата относительной скорости жидких частиц в интервале диссипации турбулентного потока [22].

Временной масштаб конвекции определим как

$$\tau = \frac{d}{\bar{u}} \approx a \left( \frac{\mu c_p}{\alpha g f} \frac{Nu}{Nu-1} \right)^{1/2}. \quad (15)$$

Отметим, что для достаточно развитой конвекции, когда  $Nu \gg 1$ , величина  $\tau$  не зависит от глубины слоя. Введем число Рэлея по потоку

$$R_f = RN = \frac{\alpha g f d^4}{\rho c_p \kappa^2 \nu}. \quad (16)$$

С его помощью и с учетом определения (1) формулу (14) можно переписать как

$$\bar{u} \approx \frac{1}{a} \left( R_f \frac{Nu-1}{Nu} \right)^{1/2} \frac{\kappa}{d} = \frac{1}{d} [R(Nu-1)]^{1/2} \frac{\kappa}{d}, \quad (17)$$

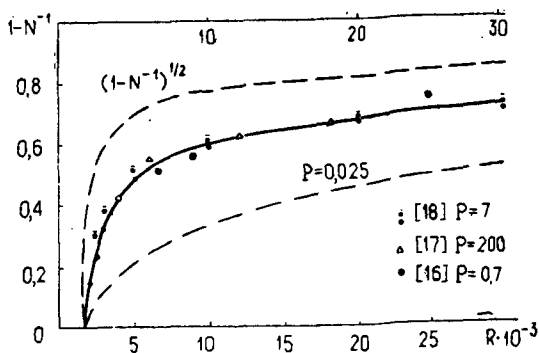


Рис. 1. Зависимость  $1 - \text{Nu}^{-1}$  от чисел Рэля и Прандтля по данным ряда авторов (см. текст)

Величина  $\kappa/d$  в теории конвекции является употребительным масштабом скорости [3, 4]. С учетом (14) отсюда получаем оценку безразмерной кинетической энергии

$$K = \frac{1}{2} (\bar{u}^2 + \bar{w}^2) \approx \frac{R(\text{Nu} - 1)}{a^2}. \quad (18)$$

Для слабонелинейной конвекции эта формула является точной. Действительно, из формул (10) и (11) следует, что  $R(\text{Nu} - 1) = (R - R_{\text{кр}})f(P)$ , т. е.  $\bar{u} \sim (R - R_{\text{кр}})^{1/2}$ . С амплитудой скорости именно в таком виде в [3, 15] рассчитана задача для валов и гексагонов. Находя значение  $K$  непосредственно по полям [3, 15] и сравнивая полученное значение  $K$  с нашим выражением  $R(\text{Nu} - 1) a^2 = (R - R_{\text{кр}})f(P) a^2$ , можно определить величину  $a$ . Расчеты, в которых участвовал А. А. Грачев, дают  $a = 8,76$  для валов, если число Прандтля не слишком мало.

В [6, 9] описаны результаты определения величины  $a$  по данным численных экспериментов по моделированию конвекции [17, 18]. Найдено, что в диапазоне чисел Рэля от 2000 до 25000 и  $0,2 < P < 7$  для  $a$  наблюдаются очень слабые зависимости от  $R$  (рост) и от  $P$  (падение), однако все значения  $a$  лежат в пределах от 8,79 до 9,69. Сравнение с данными расчетов [23] и лабораторных экспериментов [24] — менее точное, поскольку там профили скорости приведены лишь в отдельных сечениях — дает значения  $a$  в пределах от 7,5 до 10, при числах Рэля вплоть до  $R \sim 10^5$  (см. [6]). Таким образом, формула (18) верна в очень широком диапазоне чисел Рэля с коэффициентом  $a \approx 9$  с точностью 10%.

Уравнение теплопроводности в жидкости в отсутствие внутренних источников

$$\frac{\partial T}{\partial t} + v_i \frac{\partial T}{\partial x_i} = \kappa \frac{\partial^2 T}{\partial x_i^2}, \quad (19)$$

однородно относительно выбора масштаба температуры. Введем масштаб длины  $d$ , пока некритизируемый масштаб скорости  $U$  и масштаб времени  $d/U$ . В этих переменных в (19) справа перед лапласианом возникает параметр подобия  $Pe^{-1}$ , где

$$Pe = Ud/\kappa \quad (20)$$

— число Пекле. Очевидно, что если  $Pe \gg 1$ , то образуется термический пограничный слой толщиной

$$\delta \approx d Pe^{-1/2}, \quad (21)$$

а в основной массе жидкости температура должна меняться мало. Многочисленные лабораторные и численные эксперименты (см. [5]) подтверждают эту картину, показывая, что при развитой конвекции температура резко, примерно на  $\Delta T/2$ , меняется у границ, а в основной массе жидкости практически изотермична. Из непрерывности потока тепла через жидкость следует, что  $f/\rho c_p \approx \kappa \Delta T/2\delta$ . Отсюда с учетом (21) и (7) имеем

$$Nu \approx Pe^{1/2}. \quad (22)$$

Выберем масштаб скорости в виде (14). Тогда из (22) следует

$$Nu \approx [R(Nu-1)]^{1/4} a^{1/2}. \quad (23)$$

Мы уже видели, что при небольших закритических числах Ээля  $R(Nu-1) \sim R - R_{кр}$ , т. е.  $Nu \sim (R - R_{кр})^{1/4}$ . При  $Nu \gg 1$  из (23) следует  $Nu \sim R^{1/3} \cdot 2^{-4/3} a^{-2/3}$ . Оба закона давно известны из опыта [5, 25], а последний имеет и ряд теоретических обоснований, но данный вывод свободен от ряда допущений, использовавшихся ранее. Коэффициент  $2^{-4/3} a^{-2/3}$  равен 0,1 при  $a=9$  и 0,08 при  $a=12$ . Эмпирическое соотношение такого типа обычно записывается в виде  $Nu = \beta R^{1/3}$ , где  $\beta = 0,1 \div 0,2$  в зависимости от типа граничных условий. Так, при обеих твердых стенках  $\beta = 0,13$ . Наш вывод показывает, что этот коэффициент действительно должен быть заметно меньше 1. Сравнение с данными различных численных экспериментов (см. [6, 9]) показывает, что зависимость (23) хорошо выполняется уже при  $R > 2R_{кр}$ .

#### 4. ЭКСПЕРИМЕНТАЛЬНОЕ ИССЛЕДОВАНИЕ СРЕДНИХ СКОРОСТЕЙ И ВРЕМЕННОГО МАСШТАБА

В лабораторных исследованиях конвекции, как правило, ограничиваются изучением теплопередачи, т. е. зависимости  $Nu = Nu(R, P)$ . Скорости движений обычно невелики ( $\bar{u} \ll$

$\lesssim 1$  см/с), что представляет трудности для инструментальных измерений. Для подсчета же средних скоростей нужны достаточно длительные измерения во многих точках объема жидкости. Все это объясняет, почему так мало существует работ с результатами измерений скорости (сводка их небольшого количества имеется в [26], однако в первый период своего интереса к конвекции автор не знал о них; более того, численные работы [16, 17] также были неизвестны тогда (1976–1977) автору, поэтому вопрос о справедливости формул (14) и (15) был довольно острым).

Наблюдая однажды за супом, стоящим на медленном огне, автор обратил внимание, что скорости частичек в нем были порядка нескольких сантиметров в секунду, а отдельные участки их траекторий были практически прямолинейны и горизонтальны, хотя довольно нерегулярны в пространстве и времени. Тогда и возникла идея проведения простых экспериментов по определению  $\bar{u}$ , сначала качественных [8], а потом и количественных [10].

В качественных измерениях проверялась зависимость  $\bar{u} \sim d$ , следующая из (14) при  $Nu \gg 1$ . Расстояния измерялись по сетке, начерченной шариковой ручкой на дне белой эмалированной кастрюли. Трассером служили частички чая. Время перемещения чайнок в подогреваемом слое воды измерялось секундомером. Для каждой глубины слоя производилось около 35 замеров расстояний и времени их прохождения, по которым вычислялись средние скорости. Результаты измерений представлены верхней серией точек (рис. 2).

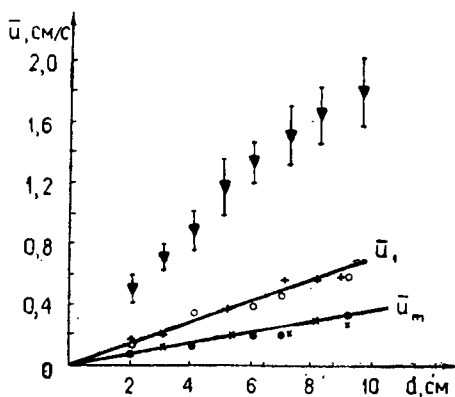


Рис. 2. Зависимость средней горизонтальной скорости конвекции от глубины. Верхние точки с дисперсиями для термической конвекции. Нижние точки — для плотностной конвекции в минеральной воде

Полная проверка формулы (14) описана в [10]. Дополнительные измерения температуры внутри воды позволяют определить ее параметры, а измерение скорости испарения, производимое путем взвешивания кастрюли с водой в начале и в конце серии измерений с учетом некоторых дополнительных факторов, даёт поток тепла  $f$ . Соотношение (17) при  $Nu \gg 1$  можно представить в виде

$$Re = a^{-1} R_f^{1/2} P^{-1}. \quad (24)$$

Результаты экспериментальной проверки этой формулы приведены на рис. 3, где темные значки — измерения А. А. Грачева, светлые — автора. Согласно этим измерениям  $a = 12,7 \pm 1,4$  (напомним, что здесь конвекция существенно трехмерна). Это значение определено для чисел Рейнольдса  $Re = \bar{u}d/\nu < 1500$ . При больших  $Re$  начинается систематическое отклонение точек от зависимости  $Re \sim R_f^{1/2}$ , что связано с наступлением режима развитой турбулентности.

Существует другой тип конвекции, изученный сейчас хорошо теоретически [27], численно [28] и в лаборатории [29, 30]. Это конвекция, возникающая при охлаждении сверху слоя жидкости. Процесс этот носит квазипериодический характер. Большую часть времени цикла занимает рост термического пограничного слоя у поверхности благодаря молекулярной теплопроводности — «холодной пленки», и когда эта более тяжелая, чем основная масса жидкости, пленка становится достаточно толстой, из нее образуются холодные термики, быстро перемешивающие слой, а затем процесс возобновляется. Согласно вычислениям [28] без учета зависимости от  $N$  коэффициент  $a = 14$  в формуле (15).

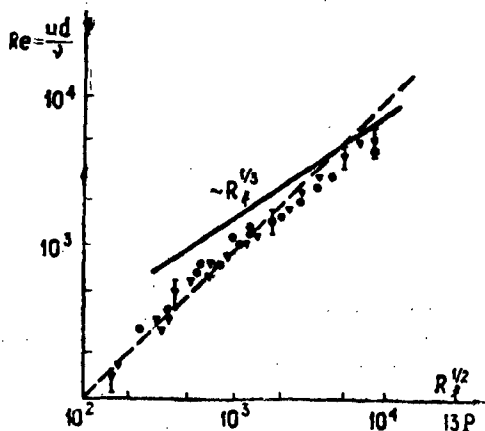


Рис. 3. Проверка зависимости (24) по данным измерений в воде (см. текст)

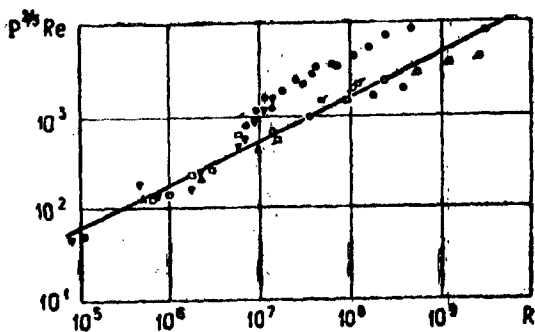


Рис. 4. Проверка зависимости (25) для развитой турбулентной конвекции. Светлые значки — для дисперсии вертикальной компоненты скорости из [26], темные — средние значения горизонтальной скорости согласно рис. 3.

Измерения длительностей квазипериодов конвекции [11], сопровождавшиеся измерениями теплового потока и средней температуры, дают возможность прямой проверки зависимости (15) и определения коэффициента  $a$ . Согласно [11]  $a = 12,1 \pm 2,3$ , в хорошем соответствии с данными только что списанных измерений средних скоростей [10].

В заключение этого раздела остановимся коротко на режиме развитой турбулентной конвекции, начинающейся согласно нашим измерениям при  $Re \gtrsim 1500$ . Из (24) с учетом (16) и (23) можно найти, что при этом число Рэлея  $R \sim 10^7$ . Этот режим исследовался многими теоретически (напр., [31]) и экспериментально [26]. Для средних скоростей здесь получаются закономерности, аналогичные колмогоровским для обычной турбулентности. Зависимость, аналогичная (24), здесь выглядит как (с учетом  $R_f = Nu R = 0,13 R^{4/3}$ )

$$Re = a_1 P^{-2/3} R_f^{1/3} = 0,5 a_1 P^{-2/3} R^{4/9}, \quad (25)$$

где  $a_1$  — коэффициент, подлежащий экспериментальному определению.

На рис. 4 дана сводка измерений вертикальной компоненты скорости  $\bar{w}$  из [26] и туда же нанесены наши данные для горизонтальной компоненты  $\bar{u}$ . Последние при  $R > 3 \cdot 10^7$  хорошо следуют зависимости (25) с  $a_1 \approx 2$ . Однако для  $\bar{w}$  аналогичный коэффициент примерно в 2,5 раза меньше, кроме того, зависимость типа (25) прослеживается и для меньших  $R$ . Некоторое обсуждение этих обстоятельств содержится в [6, 9], однако различие в поведении  $\bar{w}$  и  $\bar{u}$  в зависимости от  $R$ , по-видимому, реально и заслуживает дальнейшего изучения.



## 5. ПЛОТНОСТНАЯ КОНВЕКЦИЯ

Основной причиной термической конвекции является расширение жидкости при нагревании, в результате чего нагретая жидкая частица становится легче, а охлажденная — тяжелее своего окружения. Существуют случаи изменения плотности по другим причинам. Например, при халинной конвекции [32] причиной неустойчивости является образование более тяжелой поверхностной пленки в результате осолонения верхнего слоя воды при испарении или образовании льда. Некоторые исследователи полагают [33], что конвекция в мантии Земли вызывается дифференциацией вещества по составу, когда более тяжелая фракция тонет, а легкая — всплывает. Считается, что этот процесс в основном идет на границе жидкого ядра и мантии. Подобную конвекцию назовем плотностной, хотя и термическая конвекция связана с изменением плотности.

В приближении Буссинеска в уравнении для импульса вместо члена  $\alpha T'g$  будет фигурировать  $\rho'g/\rho_0$ , где  $\rho'$  — отклонение плотности от равновесного значения, задаваемого распределением  $\rho_0(z)$ . Для величины  $\rho'$  можно написать уравнение

$$\partial \rho' / \partial t + v_i \partial \rho' / \partial x_i = \rho_t + \kappa_D \Delta \rho', \quad (26)$$

где  $\rho_t$  — скорость дифференциации плотности в объеме,  $\kappa_D$  — коэффициент диффузии. Если дифференциация происходит на границе, то ее будем характеризовать величиной  $r_t$  — скоростью изменения плотности на поверхности раздела. Величина  $r_t$  определяет поток плотности через слой ( $\rho_t = 0$ ):

$$r_t = m = \langle \rho' w \rangle. \quad (27)$$

Аналогично (3) и (7) можно ввести среднюю скорость генерации кинетической энергии в столбе жидкости

$$G = \int_0^d \langle \rho' w g \rangle dz \quad (28)$$

и определить число типа числа Нуссельта

$$N_g = m d / \kappa_D \Delta \rho, \quad (29)$$

где  $\Delta \rho$  — разность значений плотности на верхней и нижней границе слоя (случай  $\rho_t \neq 0$  рассмотрен в [6, 9]).

Несложно показать, что механическая мощность, вводимая в поток при стационарной плотностной конвекции, равна  $m g d$ . Эффективность конвекции в смысле превращения подводимой мощности в скорость генерации кинетической энергии определим как

$$\gamma_g = G / m g d. \quad (30)$$

Интегрируя (26) от 0 до  $d$ , осредняя по горизонтали при  $\rho_l = 0$ , с помощью (29) получаем

$$\gamma_g = (N_g - 1) / N_g = 1 - N_g^{-1}. \quad (31)$$

Модификации формул (27) — (31) при  $\rho_l \neq 0$  есть в [6, 9]. Зная величину  $\gamma_g$ , сюда можно перенести все результаты разд. 3, включая законы для массопереноса. При этом роль числа Прандтля играет число Шмидта  $Sc = \nu / \kappa_D$ , а число Рэлея по потоку определяется как

$$Ra_m = \frac{m g d^4}{\rho \kappa^2_D \nu} = N_g Ra_m, \quad (32)$$

где  $Ra_m$  — аналог обычного числа Рэлея. Точно так же, как в разд. 3, получаем, что при достаточно больших  $Ra_m$

$$N_g \sim R_m^{1/4} \sim Ra_m^{1/2}. \quad (33)$$

Некоторые следствия из установленной здесь аналогии проверялись в совсем простых домашних опытах. Обыденным примером плотностной конвекции являются движения жидкости в стакане с газированной минеральной водой или с другой шипучей жидкостью.

Долгое экспериментирование с минеральной водой показало, что длительного и устойчивого выделения газа можно добиться, добавляя в нее мелкие частички. В описываемых ниже опытах использовался черный молотый перец. Проверялась формула типа (15), именно независимость (при  $N_g \gg 1$ ) характерного временного масштаба движений от глубины слоя жидкости. Опыты производились в стеклянном флаконе высотой 10 см. В качестве трассера использовался спиртовой раствор бриллиантовой зелени. Если к поверхности минеральной воды осторожно поднести каплю зелени, то вследствие движения среды из-за среднего потока массы, связанного с пузырями, из нее вытягиваются нити (в обычной воде наблюдается при этом чисто молекулярная диффузия). Измерялись два характерных интервала времени — время достижения дна любой первой нитью  $T_1$  и время достижения дна многими нитями  $T_m$ , распределенными более или менее равномерно по площади дна флакона. При измерениях с  $d$  от 2 до 9 см оба интервала времени в пределах точности 15—20% не менялись. Зная глубину слоя и время, можно определить соответствующие скорости. Значения  $\bar{w}_{1,m} = d / T_{1,m}$  нанесены в нижней части рис. 2, причем разные значки отвечают воде из разных бутылок.

## В. ГЕОФИЗИЧЕСКИЕ ПРИЛОЖЕНИЯ

Структура поверхностного слоя океана при более холодной атмосфере — одна из очевидных областей приложений. Тогда образуется холодная пленка с толщиной  $\delta$ . Согласно (14), (20), (21)

$$\delta \approx \frac{da^{1/2}}{[R(Nu-1)]^{1/4}} \approx \frac{da^{1/2}}{R_f^{1/4}} \approx 3(\rho c_p \kappa^2 \nu / \alpha gf)^{1/4}, \quad (34)$$

перепад температур в которой порядка

$$\Delta T \approx \frac{2f\delta}{\rho c_p \kappa} \approx 3 \left( \frac{f}{\rho c_p} \right)^{3/4} \left( \frac{\nu}{\alpha g} \right)^{1/4} \kappa^{-1/2}, \quad (35)$$

а характерный временной масштаб процессов по (15)

$$\tau \approx 12(\mu c_p / \alpha gf)^{1/2}.$$

Если  $f \sim 100 \text{ Вт} \cdot \text{м}^{-2}$  (характерное значение потока солнечного излучения, усваиваемого в тропиках океаном [34]), то из этих формул получаем  $\delta \approx 3 \text{ мм}$ ,  $\Delta T \approx 1^\circ \text{C}$ ,  $\tau \approx 1 \text{ мин}$ . Этому потоку тепла можно поставить в соответствие поток массы  $m = \langle \rho' w' \rangle = \alpha \langle T' w' \rangle > \rho c_p / c_p = \alpha f / c_p$ , который оказывается равным  $5 \cdot 10^{-6} \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{с}) = 150 \text{ кг}/(\text{м}^2 \cdot \text{год})$ . Это эквивалентно слою воды в 15 см, что сопоставимо с результатами более подробных расчетов (см. [2], с. 278). Наконец, согласно (12) средняя удельная диссипация кинетической энергии в океане при этом будет равна  $5 \cdot 10^{-8} \text{ м}^2/\text{с}^3 = 5 \cdot 10^{-4} \text{ см}^2/\text{с}^3$ , что вполне сопоставимо с данными измерений  $\epsilon$  в отсутствие резких градиентов течений (см. [2], с. 173). В умеренных и высоких широтах теплоотдача океана может быть меньше, и тогда значения  $\Delta T$ ,  $m$  и  $\epsilon$  уменьшатся, а  $\delta$  и  $\tau$  — увеличатся. Конечно, эти формулы могут дать лишь ориентировочные значения, поскольку здесь не учитывается ветер и поверхностные волны, нестационарность процессов и др.

Интерес автора к проблеме конвекции возник из попыток теоретически оценить скорости движения в верхней мантии Земли, которые приводят к перемещениям литосферных плит, составляющих земную кору. Обоснование гидродинамического подхода к этой проблеме можно найти в [35]. Там же рекомендуются следующие значения материальных параметров:  $\alpha = 2 \cdot 10^{-5} \text{ К}^{-1}$ ,  $c_p = 1,2 \cdot 10^3 \text{ Дж}/(\text{кг} \cdot \text{К})$ ,  $\rho = 3,6 \text{ т}/\text{м}^3$ ,  $\nu = 2 \times 10^{17} \text{ м}^2/\text{с}$ . Геотермический поток тепла в среднем равен  $6 \cdot 10^{-2} \text{ Вт}/\text{м}^2$ , а толщина верхней мантии  $d = 7 \cdot 10^5 \text{ м} = 700 \text{ км}$ . При этом из (14) получаем  $\bar{u} \approx 1 \text{ см}/\text{год}$ , в то время как ряд плит движется со скоростями до 10 см/год. В недавней статье [36] просуммированы аргументы в пользу того, что в процессе конвекции участвует вся мантия толщиной  $d \approx 3000 \text{ км}$ . Получаемые при этом скорости  $\bar{u} \approx 5 \text{ см}/\text{год}$  уже вполне сопоставимы со скоростями большинства плит.

Другой полезный вывод для изучения движений в мантии состоит в том, что из развиваемых представлений следует автономность конвекции при малых числах Рейнольдса [6, 8]. Поэтому возникает возможность лабораторного моделирования таких движений.

В качестве последнего приложения результатов теории конвекции упомянем рассмотрение [37] внутренней структуры больших (галилеевых) спутников Юпитера, состоящих, по всей видимости, из водяного льда.

## 7. ПРАВИЛО СКОРЕЙШЕЙ РЕАКЦИИ

Формулу (18) для кинетической энергии конвекции в размерном виде с учетом (8) можно представить как

$$K \approx \frac{\gamma f}{a^2} \frac{d^2}{\nu} = \frac{G}{a^2} \tau_v. \quad (36)$$

Видим, что энергия  $K$  порядка (с точностью до  $a^{-2}$ ) механической мощности  $G = \gamma f$ , высвобождаемой в жидкости при вводе в нее тепла, умноженной на время вязкой релаксации  $\tau_v = d^2/\nu$ . В разд. 3 уже отмечалось, что аналогичную структуру в интервале диссипации турбулентного потока имеет формула для кинетической энергии объема относительно ближайших соседних объемов того же размера. Формулу типа (36) можно написать и для плотностной конвекции, заменив  $\gamma f$  на  $\gamma_g m g d$  (см. разд. 5).

Рассмотрим локально однородный и изотропный турбулентный поток, возбуждаемый механически или термически. В инерционном интервале для кинетической энергии объема с массой  $\rho d^3$  относительно таких же соседних объемов кинетическая энергия

$$K \approx M(\epsilon d)^{2/3} = Q_m d(\epsilon d)^{-1/3}, \quad (37)$$

где  $Q_m = \rho \epsilon d^3$  — полная мощность энергии, подводимая от внешнего масштаба турбулентности и диссипирующая в вязком интервале. Поскольку  $(\epsilon d)^{1/2} \approx U$  — среднеквадратичной разности скоростей в двух точках пространства, разделенных расстоянием  $d$ , то  $d(\epsilon d)^{-1/3} = \tau_U$  принимается за характерное время жизни вихрей масштаба  $d$  [22]. В итоге

$$K \approx Q_m \tau_U. \quad (38)$$

К подобному же виду приводится и формула для кинетической энергии циркуляции на не слишком быстро вращающейся планете [38].

$$K \approx 2\pi \sigma^{1/8} c_p^{-1/2} q^{7/8} a^3, \quad (39)$$

где  $\sigma$  — постоянная Стефана—Больцмана,  $q$  — средний поток энергии к планете от Солнца на единицу площади,  $a$  —

радиус планеты. Эту формулу после некоторых простых преобразований можно записать как

$$K \approx Q a / c_s = Q \tau_s,$$

где  $Q = 4\pi a^2 q$  — полный приток энергии к атмосфере,  $c_s$  — изотермическая скорость звука при равновесной температуре  $T_e = (q/\sigma)^{1/4}$ ,  $\tau_s = a/c_s$  — характерное время распространения возмущения в глобальном масштабе.

Таким образом, для большого количества вынужденных геофизических течений полная кинетическая энергия определяется произведением вводимой в жидкость мощности на характерное время ее релаксации. Существенно, что во всех разобранных случаях это время является наименьшим из всех времен, которые можно построить из имеющихся в нашем распоряжении параметров задачи. Правда, оно обычно и является единственным, если верить в справедливость соответствующих гипотез автомодельности, отбрасывающих те или иные размерные параметры. Это позволяет высказать следующее правило, которое можно назвать «принципом скорейшей реакции»: кинетическая энергия установившегося вынужденного движения жидкой системы порядка подводимой к ней мощности, умноженной на минимальное время релаксации, характерное для системы. Если не использовать теорию подобия, то это правило позволяет сразу написать выражение для полной кинетической энергии системы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Ландау Л. Д., Лифшиц Е. М. Механика сплошных сред. М., ГИТТЛ, 1953.
2. Океанология. Физика океана. Под ред. В. М. Каменковича, А. С. Монаина. Т. 1. М., Наука, 1978.
3. Chandrasekhar S. Hydrodynamic and hydromagnetic stability. Oxford, Clarendon Press, 1961.
4. Гершуни Г. З., Жуховицкий Е. М. Конвективная устойчивость несжимаемой жидкости. М., Наука, 1972.
5. Busse F. H. — Rep. Progr. Phys., 1978, 41, p. 1929.
6. Голицын Г. С. Исследование конвекции с геофизическими приложениями и аналогиями. Л., Гидрометеиздат, 1981.
7. Голицын Г. С. — ДАН СССР, 1977, 234, № 3, с. 552.
8. Голицын Г. С. — ДАН СССР, 1978, 240, № 5, с. 1054.
9. Golitsyn G. S. — J. Fluid Mech., 1979, 95, pt. 3, p. 567.
10. Голицын Г. С., Грачев А. А. — Изв. АН СССР. Физ. атмос. и океана. 1979, 15, № 3, с. 330.
11. Гинзбург А. И., Голицын Г. С., Федоров К. Н. — Изв. АН СССР, Физ. атмос. и океана, 1979, 15, № 3, с. 333.
12. Hewitt J. M., McKenzie D. P., Weiss N. O. — J. Fluid Mech., 1975, 68, pt. 4, p. 721.
13. Deardorff J. W., Willis G. E. — J. Fluid Mech., 1967, 28, pt. 4, p. 675.
14. Lliboutry L. — J. Geophys. Res., 1972, 77, N. 20, p. 3759.

15. Schlüter A., Lortz D., Buss F. — J. Fluid Mech., 1965, 23, pt. 1, p. 129.
16. Lipps F. B., Somerville R. C. J. — Phys. Fluids, 1971, 14, N. 4, p. 759.
17. Lipps F. B. — J. Fluid Mech., 1976, 75, pt. 1, p. 113.
18. Clever R. M., Busse F. H. — J. Fluid Mech., 1974, 65, pt. 4, p. 625.
19. Rossby H. T. — J. Fluid Mech., 1969, 36, pt. 2, p. 309.
20. Голицын Г. С. — Изв. АН СССР. Физ. атм. ок., 1977, 13, № 8.
21. Обухов А. М. — Изв. АН СССР. Сер. геофиз., 1960, № 9, с. 1392.
22. Колмогоров А. Н. — ДАН СССР, 1941, 30, № 4, с. 299.
23. Кутателадзе С. С., Курдюшкин А. Г., Бердников В. С. — Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1974, 10, № 2, с. 137.
24. Власюк М. П., Полежаев В. И. — Препринт № 37. М., ИПМ АН СССР, 1970.
25. Кутателадзе С. С. Основы теории теплообмена. Новосибирск, Наука, 1970.
26. Garron A. M., Goldstein R. J. — Phys. Fluids, 1973, 16, N. 11, p. 1818.
27. Howard L. N. Proc. 11-th Int. Congr. Appl. Mech. München, 1966, p. 1109.
28. Foster T. D. — Geophys. Fluid Dyn., 1971, 2, N. 3, p. 201.
29. Katsaros K. B. et al. — J. Fluid Mech., 1977, 83, pt. 2, p. 311.
30. Гинзбург А. И., Зацепин Д. Г., Федоров К. Н. — Изв. АН СССР. Физ. атм. и океана, 1977, 13, № 12, с. 1268.
31. Kraichnan R. — Phys. Fluids, 1962, 5, N. 11, p. 1374.
32. Foster T. D. — J. Geophys. Res., 1968, 73, N. 6, p. 1933.
33. Артюшков Е. В. — Изв. АН СССР. Физ. Земли, 1968, № 9, с. 3.
34. Волков Ю. А. и др. — В кн.: ТРОПЭК-74. Л., Гидрометеониздат, 1974, т. 1, с. 389.
35. McKenzie D. P., Roberts J. M., Weiss N. O. — J. Fluid Mech., 1974, 62, pt. 3, p. 465.
36. Elsasser W. M., Olson P., Marsh B. D. — J. Geophys. Res., 1979, 84, B1, p. 147.
37. Golitsyn G. S. — J. Geophys. Res. Letts., 1979, N. 6, p. 466.
38. Голицын Г. С. Введение в динамику планетных атмосфер. Л., Гидрометеониздат, 1973.

# СТРУКТУРЫ КОНВЕКТИВНЫХ ТЕЧЕНИЙ В СТРАТИФИЦИРОВАННОЙ ЖИДКОСТИ

Ю. Д. ЧАШЕЧКИН

1. Свободные конвективные течения в неоднородной жидкости — один из основных процессов, вызывающий образование тонкой структуры океана [1], атмосферы [2], и, видимо, единственный механизм расслоения замкнутых стратифицированных водоемов типа озера Ванда в Антарктиде [3]. Из проведенных лабораторных опытов следует, что детально изученная при боковом нагреве [4] основная особенность пространственной структуры (ПС) конвективных течений в стратифицированной жидкости (СЖ) — образование периодических по вертикали циркуляционных слоев, разделенных тонкими листами почти покоящейся жидкости, с большими значениями градиентов температуры, солености, плотности, сдвига скорости, сохраняется и для других типов источника тепла (тонкой вертикальной нити, горизонтального цилиндра, точечного источника тепла, локализованного изменения  $T, S$  — температуры и солености). Конвективные процессы в СЖ являются удобной моделью для изучения динамики установления периодических ПС в неоднородных системах. В данном случае «быстрой» переменной является температура, «медленной» — соленость, пространственная дисперсия обусловлена различием кинетических коэффициентов — температуропроводности  $\chi = 1,43 \cdot 10^{-3}$  см<sup>2</sup>/с и диффузии соли  $k_s = 1,41 \cdot 10^{-5}$  см<sup>2</sup>/с. Рассмотрим динамику образования ПС над нагретым горизонтальным цилиндром.

2. Эксперименты выполнены в бассейне  $40 \times 15 \times 30$  см<sup>3</sup>, в боковые стенки которого вмонтированы иллюминаторы из плавленого кварца. Вблизи дна бассейна размещается нагреватель — нихромовая спираль в цилиндрической оболочке из термостойкого стекла длиной  $L = 10$  см, диаметром  $d = 1,0$  см. По внешней поверхности нагревателя уложена обмотка из медной проволоки диаметром 0,07 мм, которая является чувствительным элементом преобразователя температуры. В ходе опытов измеряется подводимая мощность  $P$  (плотность теплового потока  $q$ ), температура нагревателя  $T_0$ , распределение температуры в СЖ (с помощью термисто-

ра МТ-54) Скорость жидкости и масштаб изменения плотности  $\Lambda = (d \ln \rho(z)/dz)^{-1} = (\beta d S_0(z)/dz)^{-1}$  определяются методом плотностной метки [5] (здесь  $\rho_0(z) = \rho_0(S_0(z), T)$  — плотность,  $S(\text{‰})$  — соленость,  $T$  — температура,  $\beta = (\partial \ln \rho / \partial S)_{p,T} = 7 \cdot 10^{-4} (\text{‰})^{-1}$  — коэффициент солевого расширения). Картина течения фотографируется с помощью нового прибора ИАВ-451 [4].

3. В однородной жидкости при температуре перегрева  $\Delta T_0 = (T_0 - T_\infty) > 0,1 \text{ K}$  образуется ламинарная тепловая пелена, совершающая плавные колебания около вертикальной плоскости, проходящей через ось нагревателя. При умеренных температурах перегрева вблизи нагревателя течение ламинарно, с увеличением расстояния растет амплитуда случайных возмущений, струя турбулизуется. В турбулентной конвективной струе эпизодически возникают когерентные пространственные структуры, масштаб которых порядка диаметра нагревателя (рис. 1).

4. Стратифицированная жидкость. Эксперименты выполнены в водном растворе поваренной соли NaCl (масштаб плотности  $\Lambda = 4,2; 9,6; 13; 36 \text{ м}$ , частота свободных внутренних колебаний  $N = \sqrt{g/\Lambda} = 1,53; 1,01; 0,87; 0,52 \text{ рад/с}$ ,  $g$  — ускорение силы тяжести). При малых температурах перегрева  $\Delta T_0 < 0,1 \text{ K}$  тепловой фронт, распространяющийся от нагревателя, не меняет характера распределения плотности по глубине, заметных конвективных течений не образуется, тепло и соль переносятся молекулярной диффузией.

Мелкомасштабная слоистая структура типа [4] образуется сбоку и над нагревателем при  $1,4 < \Delta T_0 < 4 \text{ K}$ ;  $3 < Ra \cdot 10^{-4} < 8,4$ ;  $Ra = g \alpha \Lambda T d^3 / \nu \chi$  — число Рэлея. Высота



Рис. 1. Конвективное течение над нагретым цилиндром в однородной жидкости:

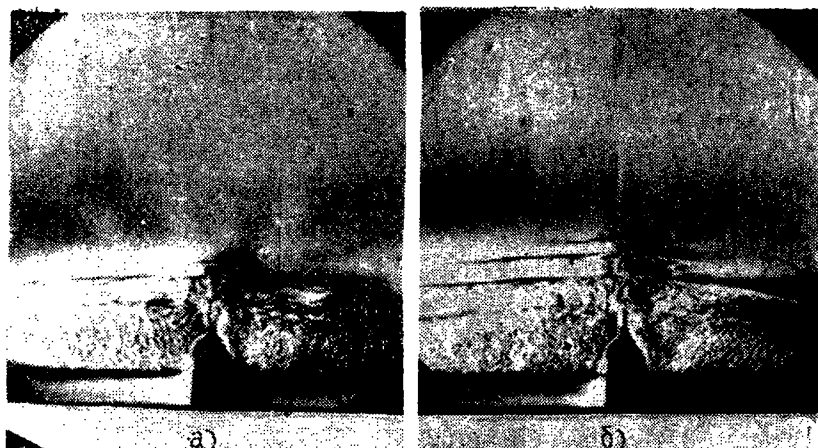
$$q = 3,2 \cdot 10^4 \text{ Вт/м}^2; \quad \Delta T_0 = 62,5 \text{ K}; \\ Ra = 1,3 \cdot 10^6; \quad Nu = 8$$



слоев  $h=0,8\div 1$  см составляет  $0,3\div 0,4 h_0$ ,  $h_0=\alpha \Delta T_0 \Lambda$  — высота адiabатического подъема нагретой жидкой частицы в СЖ, определяемая из условия гидростатической устойчивости  $\rho(S(z); T+\Delta T)=\rho(S(z+h); T)$  (здесь  $\alpha=-(\partial \ln \rho / \partial T)_{p,S} = 3 \cdot 10^{-4} K^{-1}$  — коэффициент теплового расширения). Слои постепенно растут в горизонтальном направлении. От границы области слоистого течения внутрь невозмущенной жидкости распространяются внутренние волны нулевой частоты, изменяющие распределение плотности. При постоянной температуре перегрева высота слоев и всей области течения не меняется до тех пор, пока слои не дойдут до стенок бассейна и не произойдет заметного искажения начального профиля плотности.

С увеличением  $\Delta T_0$  растет высота первичных слоев, они постепенно сливаются и над нагревателем образуется ПС другого типа. Динамика ее образования показана на рис. 2 ( $\Lambda=13$  м,  $\Delta T_0=30$  К,  $q=14000$  Вт/м<sup>2</sup> поддерживается постоянной,  $Ra=6,3 \cdot 10^5$ ). Тепловая струя в СЖ выражена слабо, ее высота подъема существенно меньше  $h_0=\alpha \Delta T_0 \Lambda$ . Высота первого слоя (рис. 2, а)  $h_1=2,6$  см  $=0,2 h_0$ . Действие градиента плотности подавляет вертикальную компоненту скорости, интенсивное вовлечение в струю окружающей жидкости уменьшает высоту подъема. В силу малости скоростей в струе не происходит полного перемешивания, всплывающие частицы жидкости сохраняют начальную соленость и при остывании опускаются отдельными тонкими струйками, образуя полосчатую и мелкопятнистую структуру внутри конвективного слоя. Вследствие пространственной неоднородности нагрева внутри слоя формируется горизонтальный градиент температуры, наибольшая температура наблюдается непосредственно над нагревателем. Внутри невозмущенной жидкости распространяется тепловой фронт сложной формы, внутри которого существуют градиенты температуры, солености, плотности. Как только разность температур в жидкости на одном горизонте превысит критическую величину, внутри теплового фронта образуется следующий горизонтальный слой с циркуляционным течением внутри и резкими вертикальными градиентами всех характеристик на его границах.

Образование нового слоя начинается непосредственно над нагревателем, при этом могут сформироваться один или два купола всплывающей жидкости одновременно. Конвективный обмен между слоями отсутствует. При замыкании циркуляционного течения адвекция внутри слоя уменьшает скорость переноса тепла по вертикали и выравнивает температуру на его верхней границе, вся картина на некоторое время стабилизируется. Затем вследствие малости скоростей



в)

Рис. 2. Образование периодической пространственной структуры над нагретым цилиндром в СЖ:

$\Lambda = 13$  м,  $N = 0,87$  рад/с,  $q = 14000$  Вт/м<sup>2</sup>,  $\Delta T_0 = 30$  К,  $Nu = 7,5$ ,  $Ra = 6,3 \cdot 10^5$ ;

а --  $t = 4$  мин; б --  $t = 9$  мин; в --  $t = 280$  мин

внутри каждого слоя их центры начинают прогреваться. Верхняя граница внешнего слоя искривляется, тепловой поток через нее увеличивается, и над ним образуется следующий слой. На рис. 2, б показано начало образования четвертого слоя. Диффузные полосы, отходящие от ячеек над третьим слоем, вызваны внутренними волнами почти нулевой частоты. Далее вся картина повторяется: прогревается центр

слоя, увеличивается тепловой поток и над ним возникает следующий слой. Всего в данных опытах наблюдалось образование восьми слоев.

При длительном нагреве растет высота слоев, вследствие перемешивания внутри и диффузии между слоями выравнивается распределение плотности, границы между слоями разрушаются, число слоев уменьшается, высота тепловой струи растет (см. рис. 2, *в*;  $t=280$  мин). Над первичными слоями наблюдается система диффузных полос, вызванных внутренними волнами. Эти волны возбуждаются циркуляционными ячейками, возникающими у нагретых боковых стенок бассейна, в которых тепловое возмущение от прогретого слоя распространяется более быстро, чем в жидкости.

Образование ПС существенно влияет на тепловой режим нагревателя. Увеличение градиента солсности приводит к уменьшению числа Прусслея  $Nu = qd/\rho c_p \chi \Delta T_0$  при тех же значениях числа Рэлея (здесь  $c_p = 4,19$  Дж/г·К — теплоемкость). Число  $Nu$  в СЖ зависит как от числа Ра, так и от числа  $S = \Lambda/d$  — отношения масштаба изменения плотности к характерному размеру нагревателя.

В СЖ образуются периодические по вертикали плоские или аксиально симметричные ячейки, в которых слои высотой  $h$  более однородной жидкости разделены тонкими листами толщиной  $\delta$  с большими градиентами. Циркуляционное течение внутри слоев образуется отдельными вихрями, вращающимися в одну сторону. Вихри образуются вблизи источника

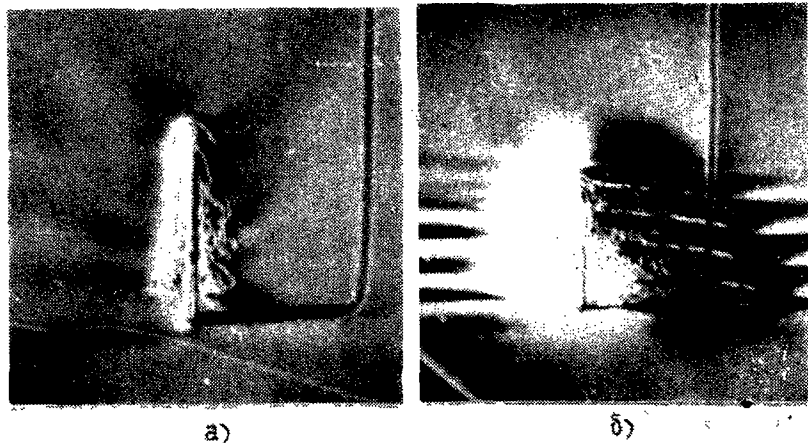


Рис. 3. Структура конвективного течения над точечным источником тепла:  
 $\Lambda = 15$  м,  $N = 0,81$  рад/с,  $P = 5,9$  Вт;  
 $a - t = 0,5$  мин;  $b - t = 10$  мин

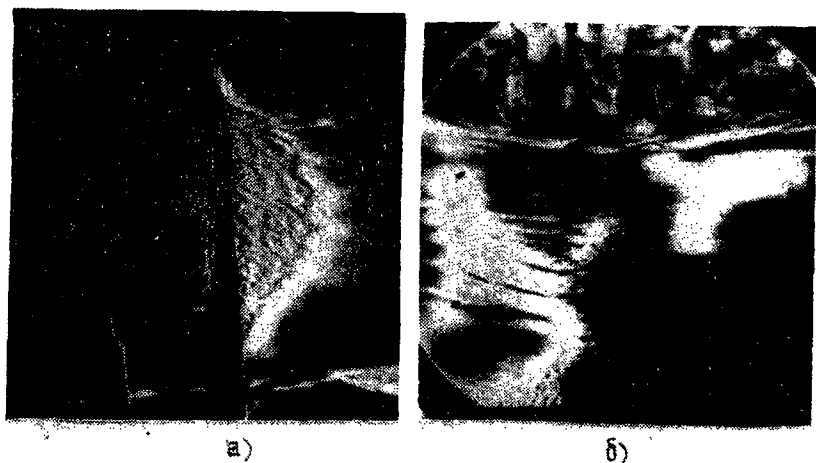


Рис. 4. Образование пространственной структуры при таянии кусочка льда в СЖ:  
 $\Lambda = 21$  м,  $N = 0,68$  рад/с,  $\Delta T_0 = 19^\circ\text{C}$ ;  
 а —  $t = 2$  мин; б —  $t = 20$  мин

(стока) тепла и постепенно перемещаются к искривленной передней границе теплового фронта. В зоне подтекающей жидкости, вблизи нижней границы слоев наблюдается инверсия (убывание) температуры с высотой. Скорости движения малы, течение не турбулизуется. Коэффициент преобразования подводимой тепловой мощности в скорость генерации кинетической энергии в СЖ существенно меньше, чем в однородной жидкости [6]. Число Рейнольдса  $Re = u_{\max} h / \nu < Re^*$  ( $Re^* = 2$  для плоского слоя,  $Re^* = 70$  для горизонтального цилиндра). Градиент плотности на границах ячеек стабилизирует течение, глобальное число Ричардсона  $Ri = g \delta^2 u / \Lambda (\Delta u_x)^2 > Ri^*$  ( $Ri = 2$  для плоского слоя,  $Ri^* = 0,8$  для цилиндра). На рис. 3, 4 приводятся тепловые фотографии картины течения над точечным источником тепла и областью локализованного изменения  $T, S$  — характеристик жидкости (таяние кусочка льда), здесь  $u = (u; v; w)$  — скорость.

Во всех случаях ПС образуется, если число Ра превышает критическое, а размеры области выделения энергии меньше внешнего горизонтального масштаба. В таблице приводятся значения  $Ra_{кр}$  для различного типа течений и зависимость высоты ячеек от температуры перегрева  $\Delta T_0$  или разности температур на верхней и нижней границе слоя  $\Delta T_i$ .

Вертикальный масштаб структуры не зависит от внешних размеров системы до тех пор, пока вносимые возмущения не

разрушат начальную стратификацию. Толщина листов с резкими градиентами плотности  $\delta_n$  в  $5 \div 8$  раз меньше высоты слоев  $h$ , и по порядку величины  $h/\delta_n = 5 \div 8 \sim \sqrt{\chi/k_s} = 10$ . Время существования ПС зависит от размеров бассейна и величины теплового потока.

В данных опытах моделируется общее свойство нелинейных систем, обладающих внутренней устойчивостью, — образование квазистационарных пространственных структур, характерный масштаб которых определяется из условия устойчивости, под действием локализованного возмущения, если его интенсивность превышает критическую. Аналогичный механизм приводит к макросегрегации (образованию стратификации) и тонкой структуре в многокомпонентных системах в поле массовых сил. В этом случае пространственная дисперсия обусловлена различием коэффициентов диффузии  $k_{S,i}$  [7].

5. В настоящее время отсутствует теоретическое описание динамики установления ПС конвекции в СЖ. Плоские задачи рассмотрены в работах [8, 9] (узкая ячейка) и [10] (широкая). Рассчитанное критическое число Рэлея  $Ra_{кр} = 20000$  [10] близко к наблюдаемому, а картина течения, состоящая из системы ячеек с противоположными направлениями циркуляции (максимумом значения и минимумом сдвига скорости на границах), не совпадает с наблюдаемой. Качественное рассуждение показывает, что решение традиционной системы уравнений свободной конвекции, в которую добавлено уравнение диффузии соли, зависит не только от координат, числа Рэлея  $Ra = g \alpha \Delta T h^3 / \nu \chi$ , солевого числа Рэлея  $Ra_S = gh^3 / \Lambda \nu k_s$ , чисел Прандтля  $Pr = \nu / \chi$ , Шмидта  $Sc = \nu / k_s$ , но и от отношения масштабов  $C = \Lambda / d$ .

В силу ограничения вертикального размера области конвекции даже для точечного или цилиндрического источника

не применимо интегральное условие типа  $\rho c_p \int_0^\infty \langle \omega T' \rangle r dr = q$  или  $\rho c_p \int_0^\infty \langle \omega T' \rangle dy = q_L$  [11], поскольку на внешних

границах области конвективный поток отсутствует и основную роль в переносе тепла играет кондуктивный поток. Для локализованных источников тепла внешние границы области конвекции, видимо, определяются условием  $Ra(r) = g \alpha (T(r) - T_\infty) h^3(r) / \nu \chi = Ra_{кр}$ . В этом случае для непрерывно действующих источников средняя температура области конвекции должна увеличиваться со временем.

Тип нагревателя	Вертикальная стенка	Наклонная стенка	Вертикальная нить	Горизонтальный цилиндр	Локализованное возмущение
Критическое число Рэлея	$g \alpha \Delta T_0 h^3 / \nu \chi = 4500 \pm 1000$	$g \alpha \Delta T_0 h^3 / \nu \chi = 3700 \pm 1000$	$g \alpha \Delta T_0 h^3 / \nu \chi = 16000 \pm 5000$	$g \alpha \Delta T_0 d^3 / \nu \chi \approx 10^5$	$g \alpha \Delta T_i h^3 / \nu \chi = (5 \div 20) \cdot 10^3$
Вертикальный масштаб	$h = h_0 = \alpha \Delta T_0 \Lambda$	$h = a(\theta) + b(\theta) h_0$	$h = \sqrt{h_0} = \sqrt{\alpha \Delta T_0 \Lambda}$	$h_i \approx \alpha \Delta T_i \Lambda$	$h \approx h_i = \alpha \Delta T_i \Lambda$

Примечание. В случае наклонной стенки, если  $\theta = 11^\circ$ , то  $a = 0,3$ ;  $b = 0,55$ , а если  $\theta = -19^\circ$ , то  $a = 0,2$ ;  $b = 0,5$ , где  $\theta$  — угол наклона нормали к стенке к горизонту.

6. Рассмотрим некоторые примеры открытых систем, в которых могут происходить подобные процессы.

В Мировом океане радиационный нагрев приводит к температурному расслоению (образованию термоклина); неравномерность распределения испарения (до 1 м в год [12]), стока и осадков вызывает солевое разделение (формирование халоклина). Образование вертикальной ПС в такой системе сопровождается любой диссипативный процесс и может вызываться притоком механической энергии, тепла, соли. В силу множественности и нестационарности причин образования, ПС обладает заметной пространственно временной изменчивостью. Интенсивные динамические воздействия (штормы, ураганы) могут разрушать температурную и солевую стратификацию и уничтожать ПС, которая будет восстанавливаться по мере установления исходных распределений температуры и солености.

В этом смысле ПС является таким же фундаментальным свойством океана, как и вертикальная стратификация. Мелкомасштабные динамические процессы (внутренние волны, турбулентность, струи) могут только перестраивать структуру, изменяя отдельные ее характеристики.

Аналогичные качественные рассуждения могут быть использованы для объяснения механизмов образования слоистой структуры многокомпонентных расплавов в поле массовых сил, затвердевание которых происходит с сохранением плоскостных и полосчатых структур, образования слоев при остывании магмы, осаждения наносов, расслоения в химических реакторах и в ряде других случаев поведения систем, в которых макросегрегация обеспечивает внутреннюю устойчивость, а локализованное внешнее воздействие (приток энергии, вещества) приводит к образованию ПС.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Федоров К. Н. Тонкая термохалинная структура вод океана. Л., Гидрометеоздат, 1976.
2. Metcalf J. I., Atlas D. — Bound. — Layer Meteorol., 1973, 4, p. 7.
3. Hoare R. A. — J. Geophys. Res., 1968, 77, N. 2, p. 607.
4. Некрасов В. Н., Попов В. А., Чашечкин Ю. Д. — Изв. АН СССР. Физика атмосферы и океана, 1976, 12, № 11, с. 1191.
5. Некрасов В. Н., Чашечкин Ю. Д. — Метрология, 1974, № 11, с. 36.
6. Голицын Г. С. — В кн.: Нелинейные волны. Стохастичность и турбулентность. Горький, ИПФ АН СССР, 1980, с. 115.
7. Turner J. S., Chen C. F. — J. Fluid Mech., 1974, 63, N. 4, p. 577.
8. Thorpe S. A., Hutt P. K., Soulsby R. — J. Fluid Mech., 1969, 38, N. 2, p. 375.
9. Hart J. E. — J. Fluid Mech., 1971, 49, N. 2, p. 279.
10. Chen C. F. — J. Fluid Mech., 1974, 63, N. 2, p. 563.
11. Morton B. R. — Phys. Fluids, 1967, 10, N. 10, p. 2120.
12. Физика океана. Гидрофизика океана, т. I. Под ред. В. М. Каменковича, А. С. Монина. М., Наука, 1978, 455 с.

## РЕГУЛЯРНЫЕ И НЕРЕГУЛЯРНЫЕ АВТОКОЛЕБАНИЯ КОНВЕКТИВНОЙ ЯЧЕЙКИ ВНУТРИ ЭЛЛИПСОИДА

Ф. В. ДОЛЖАНСКИЙ, Л. А. ПЛЕШАНОВА

В данной работе исследуется простейшая модель свободной конвекции, которая включает в себя известную стохастическую модель Лоренца [1] (обозначим ее буквой  $L$ ), описывающую движения элементарной конвективной ячейки с фиксированной в пространстве горизонтальной осью вращения и с градиентом температуры, расположенным в плоскости, перпендикулярной указанной оси. В обобщенной модели ось вращения ячейки и градиент температуры могут занимать в процессе движения произвольное положение в пространстве. Модель названа простейшей в том смысле, что она имеет наименьшее число внутренних параметров, необходимое для сохранения фундаментальных свойств исходных гидродинамических уравнений. В ее основу положены уравнения Эйлера—Пуассона (Э—П) для движения тяжелого гироскопа, которые [2, 3] в теоретико-групповом отношении, а также в отношении характера нелинейности и законов сохранения являются простейшим конечномерным аналогом уравнений Буссинеска для движения идеальной неоднородной жидкости в гравитационном поле. Таким образом, модель отвечает общим требованиям, сформулированным А. М. Обуховым [4, 5], которые предъявляются к динамическим системам, претендующим на описание реальных гидродинамических явлений.

С гидродинамической точки зрения уравнения Э—П управляют течением слабонеоднородной идеальной жидкости внутри эллипсоида на классе пространственно-линейных полей скорости и температуры [2]

$$\dot{M} = [\omega, M] + g \beta [l, q], \quad \dot{q} = [\omega, q]. \quad (1)$$

Здесь  $\omega_i = a_1 a_2 a_3 (a_i I_i)^{-1} \Omega_i$ ,  $\Omega \equiv \Omega(t) = \text{rot } v$ ,  $v = v(r, t)$  — линейное по  $r$  поле скорости,  $I_i = \sum_{s=1}^3 a_s^2 - a_i^2$ ,  $l_{0i} = a_i \cos \varphi_i$ ,  $q_i = a_i \partial T / \partial r_i$ ,  $M_i = I_i \omega_i$ , ( $i = 1, 2, 3$ ),  $a_i$  — главные



полуоси эллипсоида, которыми задается система отсчета;  $\cos \varphi_i$  — направляющие косинусы силы тяжести по отношению к главным осям,  $T = T(r, t)$  — линейное по  $r$  поле температуры;  $g$  — ускорение силы тяжести;  $\beta$  — коэффициент объемного расширения. Кроме  $q = |q|$ , инвариантами движения являются величины  $E = \frac{1}{2} \omega M + g \beta l_0 q$  и  $J = Mq$ , кото-

рые означают полную энергию и потенциальный вихрь [6] системы (1).

Вводя линейные вязкие члены и внешние притоки тепла (по Ньютону), получим следующие модельные уравнения тепловой конвекции:

$$\begin{aligned} \dot{M} &= [\omega, M] + g \beta [l_0, q] - \lambda M, \\ \dot{q} &= [\omega, q] + \mu (\hat{q} - q), \\ \hat{q}_i &= a_i \partial \hat{T} / \partial r_i \quad (i = 1, 2, 3), \quad \hat{T} = \hat{T}(r), \end{aligned} \quad (2)$$

где  $\lambda, \mu$  — эффективные коэффициенты вязкости и теплопроводности;  $\hat{T} = \hat{T}(r)$  — заданное равновесное поле температуры, которое предполагается линейным по пространству. В дальнейшем рассматривается модель свободной конвекции, в которой  $\text{grad } \hat{T}$  совпадает по направлению с силой тяжести (условия подогрева снизу).

Положим для определенности, что  $a_1 > a_2 > a_3$  и малая ось  $a_3$  расположены вертикально. В этом случае  $l_0 = (0, 0, -a_3)$ ,  $\hat{q} = (0, 0, -\Delta \hat{T})$ ,  $\Delta \hat{T}$  — перепад температур на малой полуоси эллипсоида. Введем новые безразмерные переменные  $\tau = \mu t$ ,  $\omega_i = \omega_i / \mu$  ( $i = 1, 2, 3$ ),  $\Theta_i = g \beta a_3 q_i / I_2 \lambda \mu$  ( $i = 1, 2$ ),  $\Theta_3 = g \beta a_3 (\Delta \hat{T} + q_3) / I_2 \lambda \mu$ ,  $R = g \beta a_3 \Delta \hat{T} / I_2 \lambda \mu$ ,  $\sigma = \lambda / \mu$ . В указанных переменных система записывается в виде

$$\dot{\omega} = -\sigma (\omega_1 - I_1^{-1} I_2 \Theta_2) + \Gamma_1 \omega_2 \omega_3, \quad -\sigma (\omega_2 + \Theta_1) - \Gamma_2 \omega_3 \omega_1, \quad -\sigma \omega_3 - \Gamma_3 \omega_1 \omega_2, \quad (5)$$

$$\dot{\Theta} = -R \omega_2 - \Theta_1 + \omega_2 \Theta_3 - \omega_3 \Theta_2, \quad R \omega_1 - \Theta_2 + \omega_3 \Theta_1 - \omega_1 \Theta_3, \quad -\Theta_3 + \omega_1 \Theta_2 - \omega_2 \Theta_1. \quad (6)$$

Здесь  $\Gamma_1 = (I_3 - I_2) I_1^{-1}$ ,  $\Gamma_2 = (I_3 - I_1) I_2^{-1}$ ,  $\Gamma_3 = (I_2 - I_1) I_3^{-1}$ . Внешние параметры  $R$  и  $\sigma$  естественно трактовать как числа Рэлея и Прандтля, соответственно.

Система (5), (6) включает в себя модель  $L$  как частный случай, поскольку при (а)  $\omega_1(t) \equiv \Theta_2(t) \equiv \omega_3(t) \equiv 0$ , либо (б)  $\Theta_1(t) \equiv \omega_2(t) \equiv \omega_3(t) \equiv 0$ , остальные переменные управляются динамической системой Лоренца с  $b = 1$ :

$$\dot{X} = -\sigma X + \sigma Y, \quad \dot{Y} = -XZ + RX - Y, \quad \dot{Z} = XY - bZ. \quad (7)$$

В случае (а)  $X \equiv -\omega_2$ ,  $Y \equiv \Theta_1$ ,  $Z \equiv \Theta_3$ , в случае (б)  $X \equiv \omega_1$ ,  $Y \equiv I_1^{-1} I_2 \Theta_2$ ,  $Z \equiv I_1^{-1} I_2 \Theta_3$ . Таким образом, в рассматриваемой модели уравнениями Лоренца описываются конвективные движения вокруг одной из главных горизонтальных осей.

Система (5), (6), кроме нулевого, имеет следующие положения равновесия:

$$I. (\omega^I, \Theta^I) = (0, \pm \sqrt{R-1}, 0, \mp \sqrt{R-1}, 0, R-1), \quad (8)$$

$$II. (\omega^{II}, \Theta^{II}) = (\pm \sqrt{I_1^{-1} I_2 R - 1}, 0, 0, \pm \sqrt{I_1 I_2^{-1} (R - I_1 I_2^{-1})}, R - I_1 I_2^{-1}).$$

Результаты линейной теории устойчивости указанных положений равновесия приведены на рис. 1, где сплошной кривой изображена зависимость  $R_{кр}$  — критического числа Рэлея — от  $\sigma$ . Диаграмма устойчивости относится к случаю  $I_2 = \frac{1}{2} (I_1 + I_3)$ ,  $I_1^{-1} I_3 = 2$ . В заштрихованной области хотя

бы один из стационарных режимов оказывается устойчивым. Граница области устойчивости является критической кривой для режима I (критические кривые других режимов находятся ниже) и складывается из двух ветвей  $R_1$  и  $R_2$ , которые делят область неустойчивости на три части. Заметим, что ветвь  $R_2$  совпадает с критической кривой модели L.

Основные результаты теоретического и численного исследования системы (5), (6) в надкритической области состоят в следующем.

1. Анализ, основанный на применении бифуркационной теоремы Хопфа [8], показывает, что в области I в системе имеет место прямая бифуркация, которая сопровождается возникновением в режиме мягкого возбуждения устойчивых

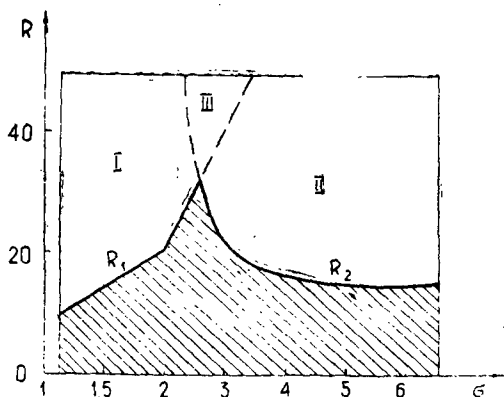


Рис. 1. Диаграмма устойчивости положений равновесия (заштрихована область устойчивости)

автоколебаний, имеющих линейчатый спектр с амплитудой  $\sim \sqrt{\Delta c}$  ( $\Delta c$  — параметр надкритичности). В фазовом пространстве системы при переходе через критическое значение  $R_{кр} = R_1$  рождаются устойчивые замкнутые орбиты, расположенные на некоторой двумерной поверхности. На рис. 2, а изображен фазовый портрет системы для  $\sigma < \sigma_0$  (см. рис. 1), оси 1 и 2 задают локальную систему координат на указанной поверхности.

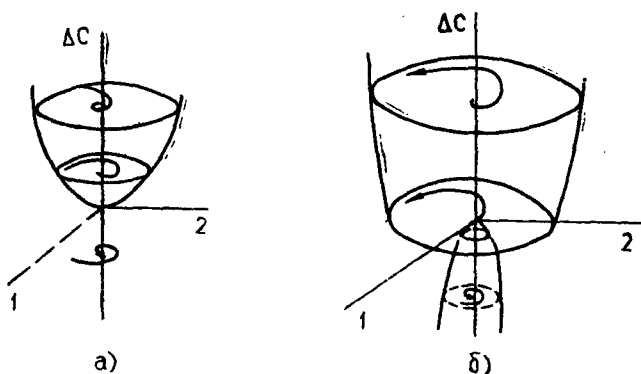


Рис. 2. Фазовый портрет: а)  $\sigma < \sigma_0$ ,  $R > R_1$  (режим мягкого возбуждения); б)  $\sigma > \sigma_0$ ,  $R > R_2$  (режим жесткого возбуждения);  $\Delta c$  — параметр надкритичности, 1 и 2 — локальные оси координат на двумерной поверхности, на которой расположены замкнутые орбиты

2. Фазовый портрет системы для  $\sigma > \sigma_0$  и значений  $R$  из области II приведен на рис. 2, б. В расширенном фазовом пространстве «аттрактор» Лоренца оказался неустойчивым. Вместо него, как видно из рис. 2, б, в режиме жесткого возбуждения устанавливаются автоколебания конечной амплитуды. В работе [7] показано, что такое поведение системы объясняется действием внутреннего механизма параметрического резонанса; пока амплитуды лоренцевых компонент малы, нулевое состояние остальных компонент модели оказывается асимптотически устойчивым. При достижении указанными амплитудами некоторого порогового значения первоначально пассивные моды начинают быстро расти, что и приводит в конечном итоге к формированию предельного цикла.

Согласно ранее выполненным исследованиям [8, 9], в рассматриваемом случае имеет место обратная бифуркация, которая сопровождается рождением неустойчивых циклов. Численное интегрирование (5), (6) в области II подтверждает

ет этот вывод. Ниже критической кривой  $R_2$  наблюдается явление, аналогичное гистерезису, когда при медленном уменьшении числа Рэлея и переходе через критическую кривую  $R=R_{кр}$ , предельный цикл продолжает оставаться устойчивым для докритических значений  $R$ , близких к  $R_2$ . При дальнейшем уменьшении числа Рэлея предельный цикл разрушается и система переходит в одно из своих устойчивых стационарных состояний, в котором остается при последующем увеличении  $R$  вплоть до перехода через критическую кривую  $R_{кр}=R_2$ , когда при  $R>R_2$  в системе устанавливаются автоколебания. Спектр мощности такого временного процесса представляет собой отдельные узкие пики. Аналогично в серии экспериментов с течением Куэтта [10], в зависимости от значений числа Рейнольдса и типа бифуркации, в системе наблюдались различные колебательные режимы с линейчатыми спектрами.

3. Численное интегрирование системы (5), (6) в области III проводилось в точках  $\sigma=2,60$ ,  $R=40$  и  $\sigma=2,55$ ,  $R=31$ . Характер процесса и его спектр для этих точек качественно не отличаются. Результаты численного интегрирования приведены на рис. 3, где показаны два типичных спектра, сосчитанных методом быстрого преобразования Фурье по реализации  $\omega_1(\tau)$ .

Значениям внешних параметров из области III соответствуют две бифуркации в системе, поведение которой определяется действием сразу двух механизмов возбуждения: мягкого и жесткого. Фазовый портрет схематически изображен на рис. 4. Как видно из рисунка, в области III в фазовом пространстве системы рождаются неустойчивые инвариантный тор и замкнутая орбита или несколько замкнутых орбит.

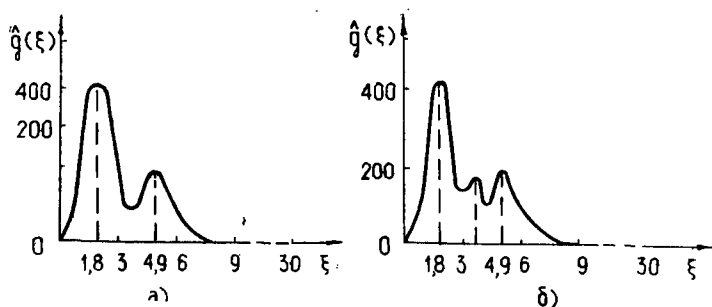


Рис. 3. Два типичных спектра, сосчитанных методом быстрого преобразования Фурье по реализации  $\omega_1 = \omega_1(\tau)$  в точке  $\sigma=2,6$ ,  $R=40$ , принадлежащей области III

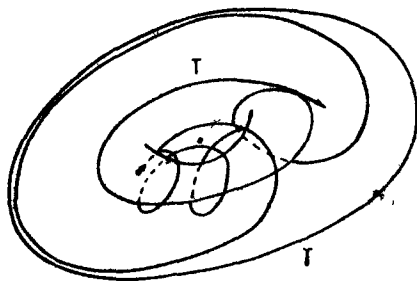


Рис. 4. Фазовый портрет системы (5), (6) для  $\sigma=2,6$  и  $R=40$

Кускам траектории, находящимся вблизи них, соответствуют на рис. 3 максимумы, но из-за неустойчивости этих инвариантных множеств временной спектр системы оказывается непрерывным.

Сходная картина имеет место в экспериментах с течением Куэтга [10], где при увеличении числа Рейнольдса наблюдается переход от колебательных режимов к турбулентности. Спектры мощности процесса при этом, как и в рассматриваемой системе, становятся сплошными, что отвечает возбуждению новых эффективных степеней свободы, которое происходит не через появление в системе новых бифуркаций, а непрерывным образом.

#### ЛИТЕРАТУРА

1. Lorenz E. N. — J. Atmos. Sci., 1963, 20, N. 3, p. 130.
2. Должанский Ф. В. — Изв. АН СССР. ФАО, 1977, 13, № 2, с. 201.
3. Вишик С. М., Должанский Ф. В. — Докл. АН СССР, 1978, 238, № 5, с. 1032.
4. Обухов А. М. — Докл. АН СССР, 1969, 184, № 2, с. 309.
5. Обухов А. М. (отв. ред.). Нелинейные системы гидродинамического типа. М., Наука, 1974.
6. Кочин Н. Е., Кибель И. А., Розе Н. В. Теоретическая гидромеханика, т. 1, 3-е изд. М., Физматгиз, 1963.
7. Должанский Ф. В., Плешанова Л. А. — Изв. АН СССР. ФАО, 1979, 15, № 1, с. 17.
8. Marsden J. E., McCracken M. The Hopf bifurcation and its applications—Appl. Math. Sci. Springer Ver lag-New York, 1976, 19.
9. McLaughlin J. B., Martin P. C.—Phys. Rev., 1975, 112, N. 1, p. 186.
10. L'vov V. S., Predtechensky A. A. — Preprint, N. 111. Novosibirsk, Institute of Automation and Electrometry, 1979.

## УМЕРЕННАЯ ТУРБУЛЕНТНОСТЬ

А. С. БАКАЙ

В докладе [1] Б. Б. Кадомцева выделены турбулентные состояния плазмы, в которых существенно проявляются корреляции движения (появляются «корреляционные области в фазовом пространстве»), и названа такая турбулентность умеренной. Он также отметил, что обычно используемые в теории слабой турбулентности разложения по степеням амплитуд волн неприменимы при описании такой турбулентности из-за неаналитичности искомых функций по амплитудам.

Несколько позже в результате изучения эволюции разнообразных неустойчивостей плазмы [2—10] было установлено, что при усилении турбулентных пульсаций их взаимодействие между собой может привести к образованию упорядоченных турбулентных структур вследствие упорядочения «коррелированных областей». При этом проявляются корреляции турбулентных потоков и волновых полей, а перенос вдоль градиента неоднородности потока, породившего турбулентность, становится турбулентно-конвективным. Явление упорядочения турбулентности и образования турбулентных структур аналогично разнообразным явлениям самоорганизации, наблюдаемым в системах самой различной природы [11—13]. Частично упорядоченная (умеренная) турбулентность занимает промежуточное состояние между состояниями сильной, слабой и вырожденной турбулентности, а кинетические уравнения, описывающие это состояние движения, имеют много общего с уравнениями, описывающими диссипативные структуры в неравновесных системах.

В настоящей статье обсуждаются механизмы упорядочения турбулентных потоков, условия возникновения умеренной турбулентности и кинетические уравнения, применяемые для ее описания. Будет рассматриваться турбулентность плазмы, где могут проявляться разнообразные корреляционные явления.

# 1. КЛАССИФИКАЦИЯ ТУРБУЛЕНТНЫХ СОСТОЯНИЙ И ПЕРЕХОДОВ

Рассмотрим поток\*, в котором поддерживается макроскопическая неоднородность масштаба  $L$ . Пусть  $\lambda$  — основной масштаб турбулентности, т. е. основной масштаб возмущений линий потока. Обозначим через  $\tau_{QL}$  характерное время обмена энергией между турбулентными пульсациями и макроскопической неоднородностью, питающей турбулентность; через  $\tau_{NL}$  — время обмена энергией между турбулентными пульсациями основного масштаба, т. е.

$$\tau_{QL} = \tau_{\text{взаимод}}(\lambda, L), \quad \tau_{NL} = \tau_{\text{взаимод}}(\lambda, \lambda). \quad (1.1)$$

Наряду с этим характерным временем введем время перемешивания линий тока или корреляционное время  $\tau_c$ . Это время определяется, как правило, взаимодействиями с мелкомасштабными пульсациями с характерным масштабом  $\varepsilon\lambda$ ,  $\varepsilon \ll 1$ :

$$\tau_c = \tau_{\text{взаимод}}(\lambda, \varepsilon\lambda; L). \quad (1.2)$$

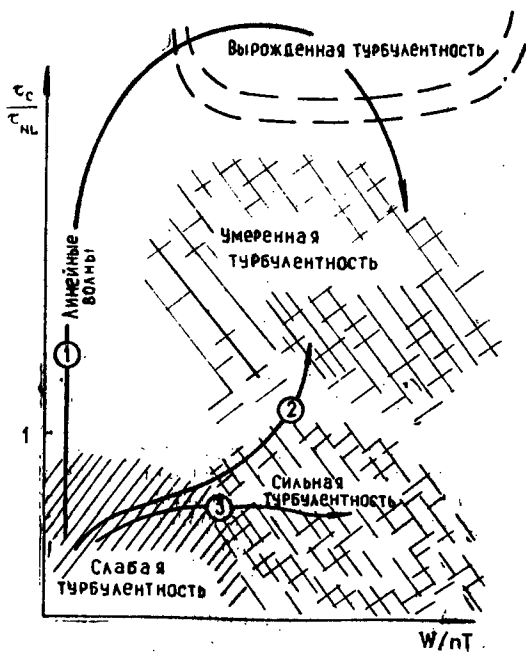


Рис. 1. Классификация турбулентных состояний

\* Имеется в виду поток в фазовом пространстве или его проекция на какое-либо подпространство, например конфигурационное.

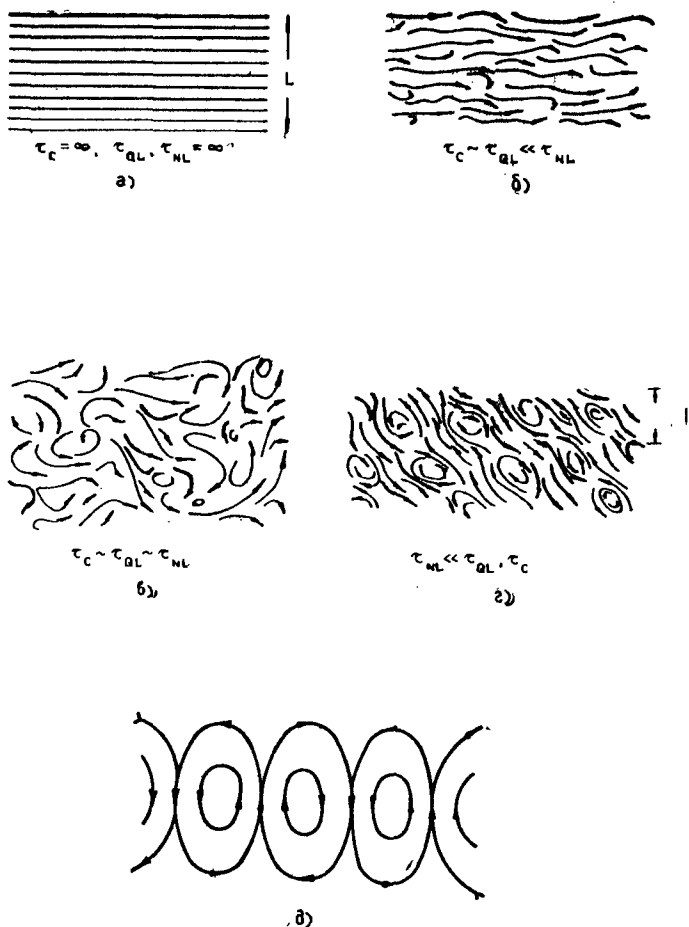


Рис. 2. Ламинарный и турбулентный потоки: *а* — ламинарный поток; *б* — слабая турбулентность; *в* — сильная турбулентность; *г* — умеренная турбулентность; *д* — вырожденная турбулентность

Кроме этого, введем безразмерный параметр, аналогичный числу Рейнольдса, характеризующий интенсивность турбулентных пульсаций. Для плазмы в качестве такого параметра удобно выбрать отношение плотности энергии турбулентных пульсаций к плотности кинетической энергии частиц,  $\varepsilon_1 = W/nT$ .

Характер турбулентности и топологическая структура по-



тока определяются двумя параметрами:  $\varepsilon_1$  и  $\varepsilon_2 = \tau_c / \tau_{NL}$ . Заметим, что  $\tau_{NL}$  обычно уменьшается с ростом  $\varepsilon_1$  по некоторому степенному закону:  $\tau_{NL} \sim \varepsilon_1^{-\tau}$ .

Классификация турбулентных состояний представлена на рис. 1. При  $\tau_c, \tau_{NL} \rightarrow \infty$  поток является ламинарным. Топологическая структура потока представлена на рис. 2, а. Если энергия пульсаций (величина возмущений линий тока) невелика, т. е.  $\varepsilon_1$  мало,  $\tau_{NL}$  велико, но перемешивание происходит быстро по сравнению со скоростью обмена энергией между макронеоднородностью и пульсациями, т. е.  $\tau_c \lesssim \tau_{QL} \ll \ll \tau_{NL}$ , то реализуется случай слабой турбулентности, описываемой кинетическими уравнениями квазилинейного вида, в которых проведено усреднение по масштабам перемешивания. Топологическая структура потока для этого случая изображена на рис. 2, б. Если время обмена энергией пульсаций между собой  $\tau_{NL}$  сравнимо с  $\tau_{QL}$ , что возможно, когда  $\varepsilon_1$  перестает быть малым и возмущения линий тока не малы, но  $\tau_c$  все еще остается самым малым из характерных времен, т. е.  $\tau_c \lesssim \tau_{NL} \lesssim \tau_{QL}$ , то реализуется состояние сильной турбулентности (рис. 2, в). Качественная перестройка топологии потока происходит, когда  $\tau_c$  перестает быть самым малым характерным временем задачи. В пределе, когда  $\tau_c \rightarrow \infty$  и  $\tau_{NL} \rightarrow \infty$ , в среде распространяются линейные волны. Если же  $\tau_{NL} \ll \tau_c, \tau_{QL}$  — турбулентность вырождается. Образуется сильно возмущенный (по сравнению с ламинарным), но полностью упорядоченный поток с неоднородной турбулентной структурой (рис. 2, д). Состояние вырожденной турбулентности соответствует образованию сильнонелинейных волн или цепочки упорядоченных конвективных ячеек (вроде ячеек Бенара).

Промежуточное место между состояниями сильной, слабой и вырожденной турбулентности занимает умеренная турбулентность. Это состояние реализуется, когда  $\tau_{NL} < \tau_c, \tau_{QL}$ , так что взаимодействие пульсаций между собой способно привести к образованию упорядоченной турбулентной структуры. При этом корреляционные длины становятся больше характерных масштабов пульсаций  $\lambda$ . Топология двумерного умеренно турбулентного потока изображена на рис. 2, г.

Как и во всякой нелинейной системе, развитие неустойчивости ламинарного потока может идти различными путями (в зависимости от начальных условий) и приводить к различным асимптотически устойчивым состояниям движения, число которых может быть больше одного. На рис. 1 стрелками показаны различные пути эволюции турбулентности в процессе развития неустойчивости ламинарного потока. Заметим, что если в системе может реализоваться только одно

устойчивое состояние, например слабой турбулентности, то конечное состояние и пути его установления практически не зависят от начальных условий.

## 2. РЕГУЛЯРНЫЕ И СТОХАСТИЧЕСКИЕ ТРАЕКТОРИИ

Плазменная турбулентность развивается в результате возбуждения большого числа волн, взаимодействующих резонансным образом между собой и с частицами. Перекрытие резонансов, как показано в обширном цикле исследований [14], ведет к стохастизации движения. Наряду с этим возможен специальный подбор начальных условий и фаз волн, такой, что при переходе частицы (или волны) из одной области резонансного взаимодействия в другую длительное время сохраняются корреляции движения. В общем случае мера таких исключительных начальных условий мала и корреляции в турбулентном движении практически не проявляются, однако в условиях развития неустойчивости или поддержания поглощающей энергию внешнего источника турбулентности скоррелированные возмущения попадают в привилегированное положение: они интенсивнее обмениваются энергией с макронеоднородностью (источником неустойчивости) и быстрее нарастают при развитии неустойчивости. Это в конечном счете приводит к упорядочению турбулентности. Чтобы глубже понять характер топологической структуры турбулентных потоков, обратимся к одному широко обсуждавшемуся (особенно при обосновании квазилинейного приближения) примеру, а именно: рассмотрим бесстолкновительный поток электронов в поле ленгмюровских волн. Аналогичное рассмотрение, как станет ясно, можно также привлечь для рассмотрения системы взаимодействующих волн.

Рассматриваемый поток описывается уравнением Власова

$$\frac{\partial f}{\partial t} + v \frac{\partial f}{\partial x} - \frac{eE}{m} \frac{\partial f}{\partial v} = 0, \quad (2.1)$$

где поле  $E(x, t)$  представимо в виде суперпозиции волн

$$E(x, t) = \varepsilon E_0 + \varepsilon \sum_n E_n \cos(kx - \omega_n t + \Theta_n) \quad (2.2)$$

и подчиняется уравнениям Максвелла в приближении электростатики. Здесь искусственно введен малый параметр  $\varepsilon$ , подчеркивающий малость амплитуд волн.

Уравнения для характеристик уравнения (2.1) (для линий тока) и для поля можно представить в следующем виде:

$$\begin{aligned} \dot{x} &= v, \quad \dot{v} = \varepsilon E_0 + \varepsilon \sum_n E_n \cos \Theta_n, \\ \dot{\Theta}_n &= kv - \omega_n, \quad \dot{E}_n = \varepsilon g_n(E, \Theta), \end{aligned} \quad (2.3)$$

где  $g$  — некоторая функция, явный вид которой здесь несуществен.

Наряду с системой (2.3) рассмотрим усредненную по фазам  $\Theta_n$  систему:

$$\dot{x}^{(0)} = v^{(0)}, \quad \dot{y}^{(0)} = \varepsilon E_0; \quad (2.4)$$

$$\dot{\Theta}_n^{(0)} = kv^{(0)} - \omega_n, \quad \dot{E}_n^{(0)} = \varepsilon \bar{g}_n. \quad (2.5)$$

Траектории, описываемые системой (2.4), представляют собой семейство квадратичных парабол, переходящее в семейство прямых при  $E_0 \rightarrow 0$ . Ясно, что эти траектории весьма грубо приближают истинные линии тока. Величину отклонения  $|v(t) - v^{(0)}(t)|$  на интервале времени  $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$  при условии, что  $v(0) = v^{(0)}(0)$ , можно оценить, воспользовавшись теоремой А. И. Нейштадта [15], которая формулируется следующим образом.

Пусть  $I(t)$  и  $J(t)$  — решения систем уравнений

$$\dot{I} = \varepsilon f(I, \Theta), \quad \dot{\Theta} = \omega(I) + \varepsilon g(I, \Theta) \quad (2.6)$$

и

$$\dot{J} = \varepsilon \bar{f}(J), \quad \dot{\psi} = \omega(J) + \varepsilon \bar{g}(J) \quad (2.7)$$

соответственно. Здесь  $I, f$  —  $n$ -компонентные векторы, а  $\Theta, \omega$  и  $g$  —  $m$ -компонентные:  $I = I_1, \dots, I_n$ ,  $\Theta = \Theta_1, \dots, \Theta_m$  и т. д.,  $m, n > 2$ . Функции  $f$  и  $g$  периодичны с периодом  $2\pi$  по  $\Theta$  и  $\bar{f}, \bar{g}$  — их усредненные по  $\Theta$  значения.

Если частоты  $\omega$  независимы, т. е. если ранг матрицы  $(\partial \omega_i / \partial I_j)$  равен числу частот  $m$ , то погрешность метода усреднения оценивается сверху следующим неравенством:

$$\max_{0 \leq t \leq 1/\varepsilon} |I(t) - J(t)| < C \sqrt{\varepsilon/\mu}, \quad (2.8)$$

где  $C$  — некоторая константа, при всех начальных условиях исключая множество относительно малой меры  $\mu$ .

Может оказаться полезной эквивалентная формулировка этой теоремы. Обозначим через  $d(\varepsilon, \rho)$  множество начальных условий  $d \subset D$  из компактной области фазового пространства,  $D$  такое, что начинающиеся на  $d$  траектории  $I(t)$  и  $J(t)$  расходятся на интервале времени  $0 \leq t \leq 1/\varepsilon$  на величину  $\rho$ . Тогда

$$\frac{\text{mes } d(\varepsilon, \rho)}{\text{mes } D} \leq C_1 \sqrt{\varepsilon/\rho}, \quad (2.9)$$

где  $C_1$  — некоторая константа.

Приведенная теорема имеет следующий смысл. В процессе медленной эволюции системы (2.6) траектория проходит через резонансные области. Резонансное взаимодействие

как раз и исключается из рассмотрения операцией усреднения по фазам. Однако для большинства начальных условий траектория приобретает нескоррелированные отклонения за время  $\tau_c \ll 1/\varepsilon$ . За промежуток времени  $\tau_c \sim 1$  траектория отклонится на величину  $\delta I \sim \varepsilon$ . Если отклонения нескоррелированы на соседних промежутках, то траектория диффундирует с коэффициентом диффузии  $D_I \sim (\delta I)^2/\tau_c \sim \varepsilon^2/\tau_c$ , что и приводит к отклонению  $\sim \sqrt{\varepsilon}$  за время  $t=1/\varepsilon$  от среднего дрейфа  $J(t)$ . Однако часть траекторий (мера их начальных условий мала), переходя из одной резонансной области в другую, не стохастизируется и может отклониться на величину  $\rho \sim 1$  от  $J(t)$ .

Применительно к траекториям заряженных частиц (2.3) приведенная теорема означает, что

$$|v(t) - v^{(0)}(t)| < C \sqrt{\varepsilon/\mu} \quad (2.10)$$

для всех начальных условий, исключая множество малой меры  $\mu$ .

Это малое множество включает в себя начальные фазы волн, скоррелированные таким образом, чтобы, переходя из резонансной области одной волны (напомним, что в пространстве скоростей резонансная область взаимодействия волны и частицы имеет ширину примерно  $\sqrt{\varepsilon E_x}$  в окрестности фазовой скорости волны) в резонансную область другой волны, частица находилась длительное время в ускоряющей (или замедляющей) фазе резонансного поля. Ясно, что в случайном волновом поле такой подбор фаз маловероятен. Что же касается всех остальных начальных условий, то они влекут за собой быструю стохастизацию траекторий, отклонения которых по  $v$  носят диффузионный характер. В предположении о стохастичности траекторий из (2.1) вытекают известные уравнения квазилинейной теории [16]. В целом картину потока, описываемого уравнениями (2.3), можно представить себе так: почти везде перемешивающий поток имеет структуру, представленную на рис. 2, б, однако в нем встречаются изредка островки, на которых линии тока упорядочены, причем относительная площадь этих островков мала.

Картина может существенно измениться, если вначале поток неустойчив. В этом случае перенос частиц по  $v$  происходит быстрее именно на тех участках, где траектории регулярны благодаря скоррелированности фаз резонансных волн. Это влечет за собой ускоренный обмен энергией частиц с полем и усиление именно скоррелированной части резонансного волнового поля. Поэтому островки регулярно-

сти будут расширяться и может наступить упорядочение потока. Следовательно, неустойчивость может приводить к усилению корреляций и упорядочению потока. В следующих разделах будут кратко рассмотрены различные процессы развития неустойчивости, приводящие к установлению умеренной турбулентности.

### 3. НЕСКОЛЬКО ПРИМЕРОВ

Турбулентная дорожка Кармана (свободная турбулентность затопленной струи), турбулизованные ячейки Бенара, ячеистая структура турбулентности в ионосфере Солнца — вот некоторые из хорошо известных примеров частично упорядоченной турбулентности. Можно думать, что эти структуры образуются вследствие неустойчивости и стохастизации первоначально возникающей вырожденной турбулентности, представляющей собой полностью упорядоченную систему конвективных ячеек. Следовательно, перечисленные турбулентные состояния представляют собой как бы недоразвитую турбулентность, в которой порядок исчезает по мере ее усиления.

Последующие примеры показывают, что слабая или сильная турбулентность, не обладающая признаками порядка, может смениться умеренной, если ее уровень достаточно высок.

То обстоятельство, что при взаимодействии волн и частиц движение частиц с близкими начальными условиями может длительное время оставаться скоррелированным, показано в [1, 17—19]. Частицы с близкими начальными координатами и скоростями образуют как бы макрочастицы в фазовом пространстве, медленно расплывающиеся со временем. Однако оставались неясности в механизмах образования и разрушения макрочастиц (см. обсуждение этих вопросов также в [20]). Что же касается корреляций волнового поля, то казалось, что нет оснований включать их в рассмотрение. Фазы волн (как принято думать) быстро перемешиваются, и их корреляции не могут играть заметной роли, если спектр колебаний достаточно широк и не очень разрежен.

То, что такое представление неверно, было показано в [2, 3] и затем в [4—7, 10], где установлено, что квазилинейный режим релаксации размытого по скоростям пучка сменяется умеренно турбулентным, когда

$$\tau_{NL} < \tau_c \approx \tau_{QL},$$

где  $\tau_{NL} = \pi / \Omega_{lr}$ ,  $\tau_{QL} = \gamma_{QL}^{-1}$ ,  $\Omega_{lr}$  — частота осцилляций захваченных частиц,  $\gamma_{QL}$  — квазилинейный инкремент роста амплитуд волн. Для пакета волн с амплитудой  $E$  и средним

воливым вектором  $k \Omega_{tr} = (k_e E / m)^{1/2}$ . При  $\Omega_{tr} > \gamma_{QL}$  возникают корреляции фаз волн с близкими волновыми векторами, причем интервалы корреляции фаз по  $k$  экспоненциально быстро нарастают с ростом амплитуд волн. При этом также образуются долгоживущие макрочастицы, причем парные корреляции движения этих макрочастиц вследствие скоррелированности фаз волн сохраняются длительное время. Поле волн разбивается на совокупность когерентных волновых пакетов, образующих упорядоченную решетку в пространстве  $(v_{\phi}, x)$  ( $v_{\phi}$  — фазовые скорости волн). Такое упорядочение поля приводит к образованию упорядоченной структуры турбулентных фазовых потоков на фазовой плоскости.

Переход квазилинейного процесса релаксации в умеренно турбулентный при  $\tau_{NL} < \tau_{QL}$  обнаружен и детально изучен в численных экспериментах [4, 5] (см. также [21, 22]). В численном [6] и лабораторном [7] экспериментах показано, что слабые начальные корреляции поля на фоне широкого спектра усиливаемых при релаксации пучка флуктуаций не ослабляются, а усиливаются и существенно влияют на процесс релаксации пучка, в частности ускоряя этот процесс.

Кадомцев и Погуце [2] показали, что при  $\tau_{NL} < \tau_{QL}$  развитие токовоконвективной неустойчивости приводит к образованию тепловых конвективных ячеек. В работах [8, 10] показано, что взаимодействие таких ячеек приводит к их взаимному упорядочению и усилению, т. е. к образованию упорядоченной турбулентной структуры потока.

Корреляции поля проявляются и в дрейфово-конвективной турбулентности в тороидальном магнитном поле, когда  $\tau_{NL}$  становится самым малым из характерных времен [9]. При этом образуются связанные состояния дрейфовых волн и конвективных ячеек со скоррелированными фазами, на которые шир не оказывает стабилизирующего воздействия, что приводит к усилению дрейфово-конвективной турбулентности и вызываемого ею переноса частиц и тепла поперек магнитного поля. Организация таких турбулентных структур в тороидальных плазменных ловушках ухудшает удержание высокотемпературной плазмы.

Во всех приведенных примерах проявляются одни и те же черты: усиление турбулентности неустойчивого потока и связанное с этим уменьшение  $\tau_{NL}$  ведет к образованию упорядоченных структур из беспорядка при  $\tau_{NL} < \tau_c$  и ускорению развития неустойчивости и переноса.

#### 4. УРАВНЕНИЯ УМЕРЕННОЙ ТУРБУЛЕНТНОСТИ

При упорядоченной структуре турбулентности нельзя рассматривать ее как однородную и свести описание к уравне-

ниям для среднего градиента неоднородности и среднего уровня турбулентных пульсаций, как это делается в квазилинейном приближении. Уравнения умеренной турбулентности должны описывать турбулентно-конвективный перенос и корреляции поля. Рассмотрим уравнения, пригодные для описания умеренно турбулентной стадии развития токовоконвективной неустойчивости токовой плазмы, находящейся в тороидальном магнитном поле с широм. Вид кинетических уравнений, описывающих турбулентный поток, определяется топологической структурой последнего. Поэтому умеренно турбулентные потоки другой природы подчиняются уравнениям того же вида, что и рассмотренные ниже (см. [10]). Вместе с тем рассматриваемый случай проще других, поскольку здесь отсутствует турбулентность волновой природы.

Токовоконвективная неустойчивость развивается в плазме конечной проводимости при наличии радиального градиента температуры,  $\partial T/\partial r < 0$ . Кадомцев и Погуце показали [23], что в результате развития этой неустойчивости в тороидальном магнитном поле с широм на нелинейной стадии ( $\tau_{NL} < \tau_{QL}$ ) вблизи резонансных\* магнитных поверхностей при  $\tau_{NL} < \tau_{QL}$  образуются тепловые конвективные ячейки с поперечной длиной волны  $\lambda_{mn} = 2\pi r_{mn}/m$  ( $r_{mn}$  — радиус резонансной поверхности) и радиальным размером

$$x_m = a \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right|^{1/3} m^{-2/3}, \quad (4.1)$$

где  $a$  — некоторая функция, зависящая от напряженности и геометрии магнитного поля, проводимости и продольной теплопроводности плазмы (см. [23]), явный вид которой здесь несуществен. Скорость конвекции в ячейке пропорциональна возмущению температуры  $T'$

$$v_m = \frac{2AT'}{x_m}, \quad (4.2)$$

а инкремент токовоконвективной неустойчивости равен

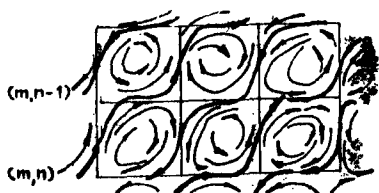
$$\gamma_m \approx -2A \left( \frac{\partial T}{\partial r} \right) x_m^{-1}, \quad (4.3)$$

где  $A$  — некоторая величина, слабо зависящая от  $r$ . Из приведенных соотношений видно, что образование конвективных

\* Резонансными называются также магнитные поверхности, на которых магнитные силовые линии замкнуты. Силовая линия замкнется на себя, если, совершив  $m$  полных оборотов по полоидальному углу  $\varphi$ , она обернется ровно  $n$  раз по тороидальному углу  $\theta$ . Поэтому резонансные поверхности принято обозначать парой целочисленных индексов  $(m, n)$ .



а)



б)



в)

Рис. 3. Изолированная цепочка конвективных ячеек (а). Перекрывающиеся ячейки упорядочиваются (б) и взаимно усиливаются, образуя упорядоченные конвективные потоки (в)

ячеек происходит, когда  $\tau_{NL} < \tau_{QL}$ , т. е. при  $T \gtrsim x_m |\partial T / \partial r|$ .

Ячейки, образующиеся вблизи соседних резонансных поверхностей  $(m, n)$  и  $(m, n \pm 1)$ , изолированы, если их размеры меньше, чем расстояние между соседними поверхностями

$$\Delta_m \approx \frac{r_{mn}^2}{m^2 R \Theta},$$

где  $R$  — большой радиус тора,  $\Theta$  — шир (константа обычно порядка  $10^{-1}$ ).

Конвективный поток тепла в изолированной ячейке детально описан Кадомцевым и Погуце [см. 23]. Ячейки перекрываются, если  $x_m \gtrsim \Delta_m$ , т. е. при

$$m \approx m_0 = r_{mn}^{3/2} \left[ a \left| \frac{\partial T}{\partial r} \right| R \Theta \right]^{-3/4}. \quad (4.4)$$



Как показано в [8], при перекрытии ячеек происходит их взаимное упорядочение, поскольку при этом неустойчивость и радиальная тепловая конвекция усиливаются. Так образуется турбулентная структура, общий вид которой представлен на рис. 3.

Перемешивание линий тока происходит в основном из-за мелкомасштабных конвективных ячеек, для которых

$$m \ll m_0.$$

Коэффициент диффузии линий тока на мелкомасштабных ячейках оценивается следующим выражением (см. также [23]):

$$D_{\perp 0} \approx \varepsilon^3 x_0 \gamma_0, \quad (4.5)$$

где  $x_0 = x_{m_0}$ ,  $\gamma_0 = \gamma_{m_0}$  и  $\varepsilon \ll 1$ ;  $\varepsilon x_0$  — масштаб мелких ячеек.

Из рис. 3, б видно, что в турбулентном потоке выделяются восходящие и нисходящие конвективные потоки основного масштаба  $x_0$ . Кинетические уравнения умеренной турбулентности можно представить в следующем виде:

$$T_1(r, t) = \omega_0 T_1(r - x_0, t - \tau_0) + (1 - \omega_0) T_2(r, t - \tau_0), \quad (4.6)$$

$$T_2(r, t) = (1 - \omega_0) T_1(r, t - \tau_0) + \omega_0 T_2(r + x_0, t - \tau_0),$$

где  $T_1$  и  $T_2$  — средние значения температур в восходящем и нисходящем потоках,  $\tau_0 \approx \sqrt{2} x_0 / v_0$ ,  $v_0 = v_{m_0}$ . В выражениях

(4.1) — (4.3) при определении  $x_0$ ,  $v_0$ ,  $\tau_0$  и  $\gamma_0$  следует положить  $T = T_+ = \frac{1}{2} (T_1 + T_2)$  и  $T' = T_- = \frac{1}{2} (T_1 - T_2)$ ,  $\omega_0$  — вероят-

ность того, что элемент потока останется в восходящем (нисходящем) потоке после смещения по  $r$  на расстояние  $x_0$ . Переход элемента из нисходящего потока в восходящий и наоборот является следствием поперечной диффузии с коэффициентом (4.5), поэтому

$$\begin{aligned} \omega_0 &\approx \frac{1}{2} \left[ 1 + \exp \left( - \frac{\pi^2 D_{\perp 0} \tau_0}{x_0^2} \right) \right] \approx \\ &\approx \frac{1}{2} [1 + \exp(-\pi^2 \varepsilon^3 \gamma_0 \tau_0)] \approx 1 - \frac{\pi^2 \varepsilon^3}{2}. \end{aligned} \quad (4.7)$$

От уравнений в конечных разностях (4.6) можно с известными предосторожностями перейти к системе дифференциальных уравнений, которые имеют следующий вид:

$$\tau_0 \frac{\partial T_+}{\partial t} = \omega_0 \frac{\partial T_-}{\partial r}; \quad (4.8)$$

$$\tau_0^2 \frac{\partial^2 T_-}{\partial t^2} + 2(1 - \omega_0) \tau_0 \frac{\partial T_-}{\partial t} = \frac{x_0^2}{r} \frac{\partial}{\partial r} r \frac{\partial T_-}{\partial r}. \quad (4.9)$$

Важной особенностью системы (4.8), (4.9) является наличие инерционного члена (член со второй производной по  $t$ ) во втором уравнении. В пределе сильного перемешивания  $\omega_0 \rightarrow 1/2$  это слагаемое не играет никакой роли и уравнение (4.9) описывает турбулентную диффузию теплового потока. Если же  $\omega_0 \rightarrow 1$  (случай сильного упорядочения), то исчезает первая производная в (4.9) и получаем волновое уравнение, описывающее вырожденную турбулентность.

Из (4.8), (4.9) вытекают соотношения

$$T_- \approx \frac{x_0}{2(1-\omega_0)} \frac{\partial T_+}{\partial r}; \quad (4.10)$$

$$q_{\perp T} \approx \frac{\omega_0}{4(1-\omega_0)^2} x_0^2 \gamma_0 \frac{\partial T_+}{\partial r}. \quad (4.11)$$

Здесь  $q_{\perp T}$  — поперечный тепловой поток.

Видно, что локальный градиент температуры  $\sim T_-/x_0$  достигает значения  $T_+/2(1-\omega_0)$ , т. е. в  $[2(1-\omega_0)]^{-1}$  раз больше среднего градиента температуры и совпадает с последним, если  $\omega_0 \rightarrow 1/2$ , т. е. когда порядок исчезает. Соотношения вида (4.10) составляют содержание основного постулата полуэмпирических теорий турбулентности, основанных на введении понятия длины перемешивания потока  $l_{\text{mix}}$ . В данном случае

$$l_{\text{mix}} = \frac{x_0}{2(1-\omega_0)}.$$

Коэффициент при  $\partial T_+/\partial r$  в (4.11) естественно трактовать как коэффициент турбулентной диффузии. Видно, что на умеренно турбулентной стадии развития неустойчивости он в  $\omega_0/4(1-\omega_0)^2$  раз больше квазилинейного, определяемого соотношением (4.5), в котором следует положить  $\varepsilon=1$  при учете вклада в диффузию ячеек основного масштаба  $m_0$ .

Видно, что уравнения умеренной турбулентности учитывают конечные значения длин корреляции потока и в пределе сильного перемешивания ( $\tau_c < \tau_0$ ,  $\omega_0 \rightarrow 1/2$ ) переходят в уравнения квазилинейного вида, а при  $\tau_c \rightarrow \infty$ ,  $\omega_0 \rightarrow 1$  описывают вырожденную турбулентность (напомним, что в этом случае уравнение (4.9) является волновым).

## 5. ЗАКЛЮЧИТЕЛЬНЫЕ ЗАМЕЧАНИЯ

В рассмотренном выше примере топология потока существенно зависит от геометрии магнитного поля. Структурная перестройка потока и взаимное упорядочение взаимодействующих конвективных ячеек, сравнимых размеров при

$\tau_{NL} < \tau_{QL}$ , происходит благодаря тому, что инкремент роста возмущений при упорядочении возрастает, т. е. неустойчивость потока является причиной упорядочения турбулентного потока. Топологическая структура потока, обусловленная взаимодействием ячеек главного масштаба ( $m \approx m_0$ ), в достаточной степени ясна. Однако это не исключает возможности появления гиперструктуры с масштабом намного большим, чем  $\lambda_0$ , или субструктур мелких масштабов. Что касается гиперструктур, то в рассмотренном примере они могут возникнуть при наложении крупномасштабных ( $m \gg m_0$ ) ячеек и ячеек основного масштаба. Резонансные поверхности с малыми  $m$  и связанные с ними крупные ячейки встречаются редко, однако в области локализации таких ячеек структура потока будет определяться именно ими, а ячейки масштаба  $m_0$  будут играть роль мелкомасштабных пульсаций.

Рассмотрение вопроса о существовании субструктур, образуемых мелкими ячейками ( $m = \varepsilon^{-1} m_0$ ,  $\varepsilon \ll 1$ ), заменяем предположением об отсутствии порядка на малых масштабах и учитываем влияние мелкомасштабной турбулентности на структуру основного масштаба, введя квазилинейный коэффициент турбулентной диффузии  $D_{\perp}$  (4.5). Этот коэффициент содержит неопределенный малый параметр  $\varepsilon$ , от которого зависит отношение  $\tau_c / \tau_{NL}$ , т. е. степень упорядоченности потока.

Вывод кинетических уравнений турбулентности можно провести более последовательно, разделив масштабы в уравнениях теплопереноса

$$\frac{\partial T}{\partial t} + (v \nabla) T + \nabla \chi_{\perp} \nabla T = 0 \quad (5.1)$$

и уравнении для  $v$ , которое связывает скорость  $v$  с неоднородностью температуры. Для этого скорость  $v$  и неоднородность температуры необходимо представить в виде суммы слагаемых

$$T = T_0 + T_{\varepsilon}, \quad v = v_0 + v_{\varepsilon}$$

и затем, подставляя в уравнения движения, провести усреднение по всем мелким масштабам. Для мелкомасштабных пульсаций получим квазилинейные уравнения, в которых роль среднего распределения температуры играет  $T_0 + T_{\varepsilon} = T_+ + T_-$ , а для  $T_+$  и  $T_-$  в конечном счете получим уравнения вида (4.6) или (4.8), (4.9).

Аналогичный подход применим и при описании других видов умеренной турбулентности.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Қадомцев Б. Б.* — В кн.: Проблемы теории плазмы. Киев, Наукова думка, 1972, с. 271.
2. *Бакай А. С.* — В кн.: Асимптотические методы в теории нелинейных колебаний. Киев, Наукова думка, 1977.
3. *Бакай А. С.* — ДАН СССР, 1977, 237, с. 1069.
4. *Бакай А. С., Сигов Ю. С.* — ДАН СССР, 1977, 237, с. 1326.
5. *Бакай А. С., Сигов Ю. С.* — Препринт № 52. М., ИПМ АН СССР, 1977.
6. *Бакай А. С., Сигов Ю. С.* — Препринт № 34. М., ИПМ АН СССР, 1978.
7. *Бакай А. С., Криворучко С. М., Некрашевич С. А.* — Письма в ЖЭТФ, 1980, 30.
8. *Бакай А. С.* — Письма в ЖЭТФ, 1979, 29, с. 746.
9. *Бакай А. С.* — Письма в ЖЭТФ, 1978, 28, с. 10.
10. *Bakai A. S.* — Plasma Phys. and Contr. Nucl. Fusion Res., 1978, IAEA, Vienna, 1979, p. 285.
11. *Николис Г., Пригожин И.* Самоорганизация в неравновесных системах. М., Мир, 1979.
12. *Эбелинг В.* Образование структур при необратимых процессах. М., Мир, 1979.
13. *Haken H.* Synergetics. Berlin—Heidelberg—New York, 1977.
14. *Заславский Т. М., Чуриков Б. В.* — УФН, 1971, 105, с. 3.
15. *Нейштадт А. И.* — ДАН ССР, 1976, 226, с. 1295.
16. *Веденов А. А., Велихов Е. П., Сагдеев Р. З.* — УФН, 1961, 73, с. 701.
17. *Kadomtsev B. B., Pogutse O. P.* — Phys. Rev. Lett., 1970, 25, p. 1155.
18. *Kadomtsev B. B., Pogutse O. P.* — Phys. Fluids, 1971, 14, p. 2470.
19. *Dupree T.* — Phys. Fluids, 1972, 15, p. 334.
20. *Misquish Y., Balescu R.* Plasma Phys, 1977.
21. *Morse R., Nielson C.* — Phys. Fluids, 1969, 12, p. 2418.
22. *Biskamp D., Welter H.* — Nucl. Fusion, 1972, 12, p. 89.
23. *Қадомцев Б. Б., Погуце О. П.* — В кн.: Вопросы теории плазмы. Т. 5. М., Атомиздат, 1967.

# К ТЕОРИИ СЛАБОТУРБУЛЕНТНЫХ КОЛМОГОРОВСКИХ СПЕКТРОВ\*

С. В. ВОЛОЦКИЙ, А. В. КАЦ, В. М. КОНТОРОВИЧ,  
В. Н. МЕЛЬНИК, В. А. ШНЕЙДМАН

## 1. ВОЛНЕНИЕ НА МЕЛКОЙ ВОДЕ — ДВУМЕРНЫЙ АНАЛОГ АКУСТИЧЕСКОЙ ТУБУЛЕНТНОСТИ

Хотя слабая турбулентность волн на поверхности жидкости детально исследовалась [2—4], не были получены спектры для поверхностных гравитационных волн большой длины, удовлетворяющих условию  $kh \ll 1$  ( $k$  — волновое число,  $h$  — глубина жидкости). Закон дисперсии  $\omega_k^2 = gkh$  в этом случае близок к линейному

$$\omega_k \approx \sqrt{gh} k \left[ 1 - \frac{(kh)^2}{6} \right], \quad kh \ll 1, \quad (1)$$

благодаря чему ситуация напоминает акустическую турбулентность [5, 6]: преобладающим становится малоугловое рассеяние волн друг на друге. Близость закона дисперсии (1) к распадному приводит к тому, что эффективным становится рассеяние через «виртуальную» волну (рис. 1), идущее за счет распадов и слияний во втором порядке теории возмущений. В области, где дисперсия преобладает над нелинейным затуханием  $\gamma_{NL} \sim I_{ст}\{N\}/N$ , справедливо нераспадное кинетическое уравнение с интегралом столкновений  $I_{ст}$ , определяемым этим процессом

$$\begin{aligned} I_{ст}\{N\} &= \int d\tau_k W_k f_k, \quad d\tau_k = dk_1 dk_2 dk_3, \\ W_k &= U_k \delta(k+k_1-k_2-k_3) \delta(\omega+\omega_1-\omega_2-\omega_3), \quad U_k = \pi |3! \bar{V}_4|^2, \\ f_k &= N_1 N_2 N_3 + NN_2 N_3 - NN_1 N_2 - NN_1 N_3. \end{aligned} \quad (2)$$

Функция распределения  $N \equiv N_k$  пропорциональна парному коррелятору возвышений поверхности.

Используя вычисленные в [3] матричные элементы, для эффективного взаимодействия (рис. 1) имеем:

$$\bar{V}_4 \sim \frac{V_3^2}{\omega_k (\Theta^2 + (kh)^2)}, \quad V_3^2 \sim \frac{\omega_k}{kh} k^3, \quad \Theta \lesssim kh \ll 1, \quad (3)$$

где  $\Theta$  — (малые) углы рассеяния. Эта оценка следует и непосредственно из уравнения КП [6]. Существенная роль дисперсионных добавок (1) в (2) и (3) приводит к неоднородно-

\* Статья может рассматриваться как продолжение авторского обзора [1].

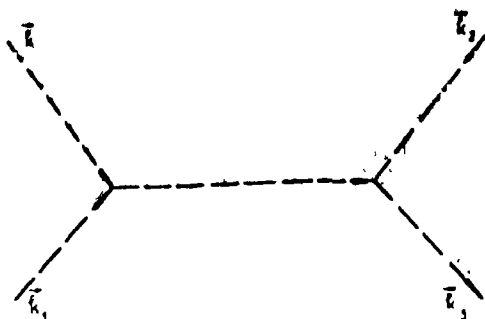


Рис. 1. Диаграмма взаимодействия через «виртуальную» волну

сти вероятности перехода  $W_{\kappa}$  по волновым числам. Поэтому использовавшиеся ранее при отыскании степенных решений кинетического уравнения преобразования подобия [2—4, 7] не являются теперь операциями симметрии.

Однако матричный элемент и законы сохранения однородны относительно преобразований, которые содержат дополнительное растяжение углов  $\Theta_i = k_i \hat{k}$ . Действительно, с учетом квазиодномерности процессов рассеяния интеграл столкновений  $I_{\text{ст}}$  переводится в себя преобразованиями  $\hat{\lambda}_i$ , состоящими

в замене переменных интегрирования, переводящих  $k_i$  в  $k$  (растяжение и поворот), с дополнительным растяжением  $k$ -плоскости в ортогональном  $k$  направлении в  $k/k_i$  раз. Например,

$$k_2 \rightarrow \lambda_2 k = \lambda_2^2 k_2, \quad k_1 \rightarrow \lambda_2 k_3, \quad k_3 \rightarrow \lambda_2 k_1, \quad (4)$$

$$\Theta_2 \rightarrow -\lambda_2 \Theta_2, \quad \Theta_1 \rightarrow \lambda_2 (\Theta_3 - \Theta_2), \quad \Theta_3 \rightarrow \lambda_2 (\Theta_1 - \Theta_2), \quad \lambda_2 = \frac{\kappa}{\kappa_2}.$$

Якобиан такого преобразования не зависит от углов. Учитывая согласно (2) инвариантность  $U_{\kappa}$  относительно указанной группы, следуя изложению в [4, 7] методу, находим два неравновесных решения стационарного кинетического уравнения. Это распределения, соответствующие постоянному потоку энергии  $J_1$ , или числа «частиц» (волн)  $J_0$  по спектру

$$N_{\kappa} = A_1 k^{-2} (A_1 \sim J_1^{1/3}), \quad N_{\kappa} = A_0 k^{-5/3} (A_0 \sim J_0^{1/3}). \quad (5)$$

Потоки направлены так же, как и в коротковолновой области [8]:

$$\text{sign } J_1 > 0, \quad \text{sign } J_0 < 0.$$

Квазиодномерный характер рассеяния приводит к тому, что могут формироваться анизотропные распределения с той же

энергетической зависимостью, но  $A$  теперь является функцией угла  $\Theta$  при условии достаточно плавного изменения  $N(\Theta)$  на масштабах  $kh$ . Это связано с медленностью релаксации по углам в сравнении с релаксацией по энергии при линейном законе дисперсии [9].

Полученные распределения локальны. Это позволяет получить их из простых оценок, использующих вид интеграла столкновений и постоянство потока (см. [3]). Действительно, из законов сохранения (энергии или числа волн) следует оценка потока через интеграл столкновений

$$J_i(k) \sim \omega^i k^2 I_{ст}\{N_k\},$$

а благодаря локальности

$$I_{ст}\{N_k\} \sim U_k N_k^3 \dot{k}^i / \omega_k.$$

В инерционном интервале  $J_i(k) = J_i$ , откуда

$$N_k \sim (|J_i| \omega^{4-i} U_k^{-1})^{1/3} k^{-2} \quad (i=0, 1). \quad (6)$$

Это соответствует найденным выше спектрам с учетом оценки  $U_k \sim h^{-3}$ , следующей из формулы (3).

Для времени релаксации  $\tau \sim \gamma_{NL}^{-1}$ , получаем

$$\tau \sim (J_i^2 U_k)^{-1/3} \omega_k.$$

Условие применимости кинетического уравнения  $\gamma_{NL} \ll \ll \omega_k (kh)^2$ , выраженное через среднеквадратичное возмущение  $\langle \zeta^2 \rangle = g^{-1} \int dk \omega_k N_k$ , принимает простой вид (при  $k_{max} h \sim 1$ )

$$\frac{\langle \zeta^2 \rangle}{h^2} \ll (kh)^2 \ll 1. \quad (7)$$

Условие (7) означает преобладание (малой) дисперсии над нелинейностью в слаботурбулентной длинноволновой области. Видно, что полученные спектры имеют довольно широкий интервал существования.

В действительности, интервал турбулентности может существенно ограничиваться за счет выхода волн из области «шторма» с характерным размером  $l \gg h$ . Это приводит к ограничению, следующему из условия  $\tau < l / \sqrt{gh}$ ,

$$h^{-1} \left( \frac{h}{l} \right)^{1/3} < k < h^{-1}. \quad (8)$$

В связи с обнаружением В. Е. Захаровым и Е. И. Шульманом зануления  $V_k$  в КП приближении [28] необходимо изменение  $U_k \sim h^{-3} (kh)^4$  и  $N_k = A_1 k^{-10/3}$ ,  $A_0 k^{-3}$  вместо (5).

## 2. ДВУХПОТОКОВЫЕ РАСПРЕДЕЛЕНИЯ В ПЛАЗМЕННОМ ТУБУЛЕНТНОМ РЕАКТОРЕ (ПТР)

В тех случаях, когда существуют два изотропных интеграла движения (энергия и число волн или частиц) интересно выяснить структуру двухпотокowych решений, так как именно они будут формироваться источниками, рождающими частицы при конечных энергиях. Однако здесь возникают трудности, связанные с нестепенным видом таких решений.

Подобный анализ удается провести для модифицированных (см. ниже) кинетических уравнений, описывающих систему фотонов  $N_\omega$  и электронов  $n_\epsilon$  в ПТР (см. [1]), что связано с более удобной для этих целей симметрией по сравнению с гидродинамическими моделями.

Стартуя от однопотокowych решений [10—12]

$$N = A \omega^{-1/2}, \quad n = a \epsilon^s \sim \begin{cases} \epsilon^{-4} & a \sim J_{\text{част}} \\ \epsilon^{-5} & a \sim |J_{\text{эн}}| \end{cases} \quad (9)$$

будем искать решение системы в виде рядов по отношению потоков энергии и числа частиц

$$n(\epsilon) = \sum_{m=0}^{\infty} a_m \epsilon^{s_m}, \quad N(\omega) = \sum_{m=0}^{\infty} A_m \omega^{\beta_m}, \quad (10)$$

где слагаемые с  $m=0$  отвечают однопотокowому решению. Это позволит строить чисто потокowe распределения, не содержащие равновесной части и, соответственно, имеющие более простую структуру. Требование постоянства потока по спектру приводит к рекуррентным соотношениям для индексов, которые имеют решения

$$s_m = -5 + m, \quad \beta_m = \frac{m-1}{2} |J_{\text{эн}}| / J_{\text{част}} > \epsilon, \quad \sqrt{\omega}; \quad (11)$$

$$s_m = -4 - m, \quad \beta_m = -\frac{m+1}{2} |J_{\text{эн}}| / J_{\text{част}} < \epsilon, \quad \sqrt{\omega} \quad (12)$$

в зависимости от того, какой из потоков является преобладающим. Свою роль в (10) играют нулевые и линейные по меньшему потоку слагаемые, так как коэффициент при  $\epsilon^{-4}$  пропорционален потоку частиц, а при  $\epsilon^{-5}$  — потоку энергии. Остальные уравнения выражают коэффициенты с наибольшим номером через предыдущие.

Оказывается, что хотя каждое из однопотокowych решений является точным решением уравнений ПТР, двухпотокowое решение у системы отсутствует. Действительно, структура уравнений для  $a_m$  и  $A_m$  такова, что коэффициентами при них являются моменты вероятности перехода  $u(\omega/\epsilon^2)$



$$B(\nu) = \int_0^{\infty} x^{\nu} u(x) dx.$$

А именно, при  $m > 1$

$$a_m \left[ B(0) + A_0 s_m B\left(\frac{1}{2}\right) \right] + A_m [a_0 s_0 B(\beta_m + 1)] +$$

$$+ \sum_{q=1}^{m-1} A_q a_{m-q} [s_{m-q} B(\beta_q + 1)] = 0, \quad (13)$$

$$a_m \left[ B\left(-\frac{s_m + 5}{2}\right) + A_0 s_m B\left(-\frac{s_m + 4}{2}\right) \right] +$$

$$+ A_m \left[ a_0 s_0 B\left(-\frac{s_0 + 4}{2}\right) \right] +$$

$$+ \sum_{q=1}^{m-1} A_q a_{m-q} \left[ s_{m-q} B\left(-\frac{s_m + 4}{2}\right) \right] = 0.$$

Функция  $u(\omega/\varepsilon^2)$  быстро убывает на  $\infty$ , так что на верхнем пределе интегралы  $B(\nu)$  сходятся при любом  $\nu$ . Но при малом аргументе  $u(x)$  имеет степенной вид

$$u(x) \sim x^r \quad (r=0, 1/3, 1), \quad x \rightarrow 0, \quad (14)$$

где значение  $r$  зависит от вида ПТР [13]. Поэтому моменты в одном из уравнений соответствуют отрицательным индексам и начинают расходиться на некотором значении  $m$

$$B\left(-\frac{s_m + 5}{2}\right) \rightarrow \infty, \quad m \geq 2(r+1), \quad \varepsilon J_{\text{част}} < |J_{\text{эн}}|; \quad (15)$$

$$B(\beta_m + 1) \rightarrow \infty, \quad m \geq 2r + 3, \quad \varepsilon J_{\text{част}} > |J_{\text{эн}}|. \quad (16)$$

Выясним физический смысл расходимости. Так как частоты ограничены снизу значением плазменной (циклотронной) частоты, то асимптотика  $\omega/\varepsilon^2 \rightarrow 0$  реализуется только за счет  $\varepsilon \rightarrow \infty$ , т. е. за счет электронов очень больших энергий. Однако присутствие таких электронов связано лишь с тем, что рассматривается пространственно однородная модель ПТР. В реальном пространственно ограниченном источнике электроны с предельно большими энергиями отсутствуют. Поэтому попытаемся исключить их вклад, не нарушая автономности и не отказываясь от пространственной однородности системы. Для этого заменим  $u(x)$  на  $u_{x_0}(x)$ , где (рис. 2)

$$u_{x_0}(x) = \begin{cases} u(x), & x > x_0 \\ 0, & x < x_0 \end{cases} \quad (17)$$

причем в окончательном результате устремим  $x_0 \rightarrow 0$ , т. е.

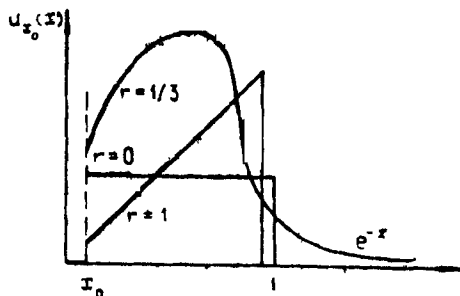


Рис. 2. Поведение модифицированной вероятности переходов при больших и малых аргументах  $x = \omega/\varepsilon^2$ . Показатели  $r=0$  и  $1$  соответствуют комптоновскому ПТР на медленных и быстрых плазмонах,  $r=1/3$  — синхротронному ПТР

заменяем уравнения ПТР модифицированными уравнениями

$$n_\varepsilon = \frac{1}{\varepsilon^2} \frac{\partial}{\partial \varepsilon} \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int_0^\infty d\omega S_{x_0}(\varepsilon, \omega),$$

$$\dot{N}_\omega = \frac{1}{\omega^3} \lim_{x_0 \rightarrow 0} \int_0^\infty d\varepsilon S_{x_0}(\varepsilon, \omega), \quad (18)$$

$$S_{x_0}(\varepsilon, \omega) = \varepsilon^2 u_{x_0} \left( \frac{\omega}{\varepsilon^2} \right) \left( \omega N \frac{\partial n}{\partial \varepsilon} + n \right).$$

Оказывается, что эта процедура позволяет получить конечные решения. Действительно, при  $x_0 \ll 1$  моменты, начиная с некоторого номера ((15) либо (16)) становятся велики по  $1/x_0$ . Соответственно коэффициенты  $a_m$  либо  $A_m$ , стоящие при них, приобретут малость по  $x_0$ , и при  $x_0 \rightarrow 0$  обращаются в нуль. Благодаря этому в решении с преобладающим потоком энергии обрывается ряд для  $n(\varepsilon)$

$$a_m \rightarrow 0, \quad m \geq 2(r+1), \quad \text{в } J_{\text{част}} < |J_{\text{эн}}|, \quad (19)$$

а в решении с преобладающим потоком частиц — ряд для  $N(\omega)$

$$A_m \rightarrow 0, \quad m \geq 2r+3, \quad \sqrt{\omega} J_{\text{част}} > |J_{\text{эн}}|. \quad (20)$$

Таким образом, одна из функций распределения представляется конечным числом степенных слагаемых. Коэффициенты при них параметризуются двумя потоками и находятся из уравнений (15), (16) и аналогичных им неоднородных уравнений при  $m=0$  и  $1$ , после чего второе распределение находится решением линейного интегрального уравнения. Самый простой пример соответствует преобладающему потоку

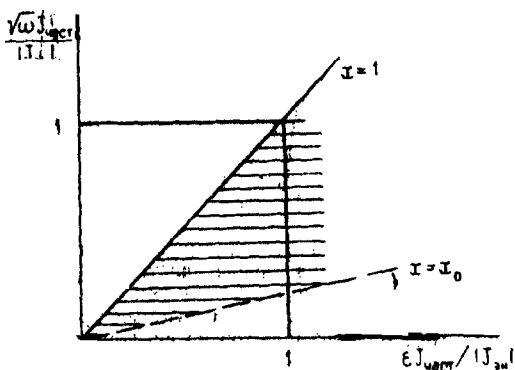


Рис. 3. Область интегрирования для ступеньки  $u(x) = \theta(1-x)$  в случае преобладающего потока энергии по спектру в модифицированных уравнениях ПТР

энергии и  $r=0$  (при этом интегрирование в (18) проводится по показанной на рис. 3 области). В этом случае ряд для  $n(\epsilon)$  обрывается на втором слагаемом:

$$n(\epsilon) = a_0 \epsilon^{-5} + a_1 \epsilon^{-4} \quad (a_0 \sim |J_{ЭН}|, \quad a_1 \sim J_{\text{част}}). \quad (21)$$

Распределение электронов представляет собой как бы «суперпозицию» решения с потоком энергии и с потоком частиц (конечно, это случайное совпадение, уравнения (18) нелинейны). В электронном спектре возникает характерный излом и лишь асимптотика является степенной. Для  $u(x) = \theta(1-x)$  ряд для  $N(\omega)$  суммируется (геометрическая прогрессия) к виду

$$N(\omega) = A_0 \omega^{-1/2} \psi(x), \quad (22)$$

$$\psi(x) = 1 + \frac{\text{const}}{x^2} \frac{\partial}{\partial x} \frac{x^4}{1+x}, \quad x \sim \frac{\sqrt{\omega} J_{\text{част}}}{|J_{ЭН}|}.$$

При произвольном  $u(x)$  выражение для  $N(\omega)$  в случае преобладающего потока энергии может быть получено в квадратурах, поскольку электронное уравнение сводится к интегральному уравнению для  $N$  с разностным ядром.

Автомодельная структура решений

$$n(\epsilon) = a_0 \epsilon^{-5} \Phi \left( \frac{\epsilon J_{\text{част}}}{J_{ЭН}} \right), \quad N(\omega) = A_0 \omega^{-1/2} \psi \left( \frac{\sqrt{\omega} J_{\text{част}}}{J_{ЭН}} \right) \quad (23)$$

отражает автомодельность уравнений (18) в инерционном интервале. В системах с двумя изотропными законами сохранения могут реализоваться два инерционных интервала, в

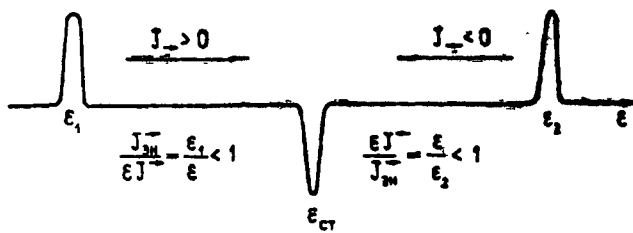


Рис. 4. Два инерционных интервала в системе с законами сохранения числа частиц и энергии между локализованными источниками  $\epsilon_{1,2}$  и общим стоком  $\epsilon_{ст}$ , в каждом из которых преобладает один из потоков по спектру

одном из которых преобладает поток энергии, а в другом — поток частиц (рис. 4).

### 3. ВЫСОКОЭНЕРГЕТИЧНЫЕ СТЕПЕННЫЕ ХВОСТЫ В РАСПРЕДЕЛЕНИЯХ ИОНОВ ПРИ НАЛИЧИИ ПОТОКА ПО СПЕКТРУ

Как уже отмечалось (см. [1] и цитированную там литературу), при взаимодействии частиц между собой, так же как и при взаимодействии частиц с волнами или волн друг с другом, могут формироваться потоковые степенные распределения. В плазме типичными источниками надтепловых частиц могут быть пронизывающие плазму пучки, ядерные реакции и т. п. При этом мощности источников, как правило, невелики. В подобных условиях возможно формирование квазистационарных спектров, имеющих вид, близкий к равновесному распределению, которое весьма слабо возмущено в области тепловых энергий, но существенно обогащено быстрыми частицами, образующими «хвост» распределения, простирающийся вплоть до энергии источника [14]. Такая картина, соответствующая относительно малым потокам (или большим температурам (ср. [1]), означает, что частицы хвоста взаимодействуют главным образом с тепловыми частицами. При энергиях ионов  $\epsilon > T(M/m)^{1/2}$ , где  $M/m$  — отношение масс иона и электрона, преобладает неупругое взаимодействие ионов с тепловыми электронами с характерным временем релаксации по энергии  $\tau$  [15]. Как будет видно, структура потоковой части распределения (хвоста) совершенно аналогична слаботурбулентным колмогоровским спектрам в инерционном интервале. Распределение параметризуется потоком (частиц) по спектру  $J$ , а степенной закон убывания определяется свойствами рассеяния (рис. 5).

Кинетическое уравнение, записанное в виде уравнения непрерывности, определяет выражение для потока  $I(\rho)$  от

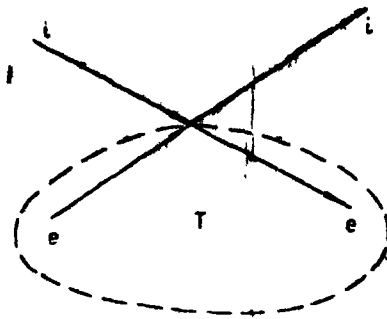


Рис. 5. Схема рассеяния ионов на тепловых электронах

высокоэнергетических источников. Для уравнения Ландау  $J(p)$  сводится к виду

$$J(p) = \frac{\pi \alpha M^2}{3} \int \frac{dn' n'^2}{v'} [v' + v - |v' - v|]^3 \left( f \frac{\partial f_e}{\partial \epsilon'} - f_e \frac{\partial f}{\partial \epsilon} \right), \quad (24)$$

где  $\alpha = \pi e^4 z^2 \lambda$  ( $ze$  — заряд иона,  $\lambda$  — кулоновский логарифм),  $f^e(\epsilon')$  — изотропная функция распределения электронов,  $f(\epsilon)$  — ионов. В области между источником и стоком асимптотика стационарного решения кинетического уравнения наряду с максвелловской частью

$$f_M = \frac{n}{(2\pi MT)^{3/2}} e^{-\epsilon/T}$$

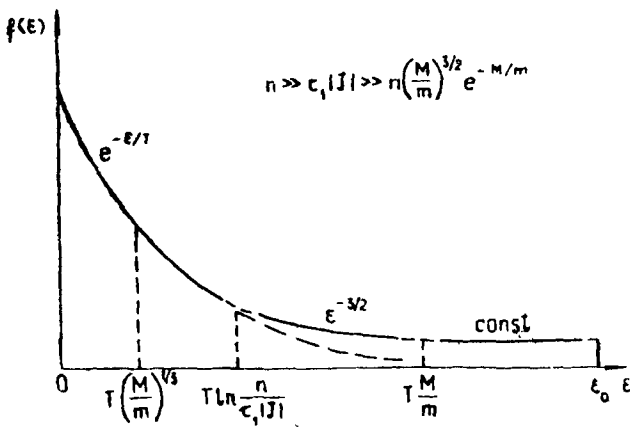


Рис. 6. Функция распределения ионов по энергиям

содержит потоковое, слагаемое, т. е.  $f(\varepsilon) = f^* + f^{ст}$  (рис. 6). Последнее описывает степенной хвост\*, соответствующий постоянству потока по спектру  $J(p) = J$  [16, 17, 14]

$$f_{(\varepsilon)}^{ст} = \frac{2J\tau_1}{(2M)^{3/2}} \varepsilon^{-3/2}, \quad T\left(\frac{M}{m}\right)^{1/2} < \varepsilon < T\left(\frac{M}{m}\right); \quad (25)$$

$$f^{ст}(\varepsilon) = \frac{2J\tau_2}{(2M\Gamma)^{3/2}}, \quad \tau_2 = \tau_1 \left(\frac{m}{M}\right)^{3/2}, \quad T\left(\frac{M}{m}\right) < \varepsilon. \quad (26)$$

Существенно, что в рассматриваемом случае малых потоков  $J \ll n/\tau$  (27)

(что означает малость числа хвостовых частиц  $n^{ст} \ll n$ ), зависимость  $f^{ст}$  от  $J$  линейна. При большом потоке  $J\tau > n$  начинают преобладать ион-ионные столкновения хвостовых частиц и эта зависимость сменяется корневой. Такой предельный случай, когда отсутствует равновесная часть распределения, исследован в работе [18]. Ему более близка гидродинамическая аналогия.

Можно убедиться в устойчивости степенных решений [14] (относительно локальных, т. е. убывающих быстрее самого решения на  $\infty$  возмущений). Для формирования «хвоста» не обязательно должен существовать сток, обеспечивающий стационарность системы. При включении источника формируются распределения вида (25)—(26) с нестационарным фронтом, движущимся в сторону малых энергий [14, 17]. Неоднородный в пространстве пучок «в среднем» также приводит к распределению рассматриваемого вида. [14].

Наличие «хвоста» у распределения частиц, вообще говоря, влияет на физические процессы в плазме. Электронные хвосты изменяют дисперсионные свойства плазмы, приводя к возрастанию затухания длинных плазменных волн [18], что может быть весьма существенно, например, в связи с проблемой коллапса. Ионные хвосты влияют на скорости ядерных реакций. Так, в условиях недр Солнца вторичные реакции частиц с большими зарядовыми числами происходят, главным образом, на хвостовых частицах [14]. Существенна роль нетепловых высокоэнергетичных частиц и в низкотемпературной [19, 20] и твердотельной [21] плазме. Потоковые степенные распределения находят применение также в физике космических лучей и радиоастрономии (см. литературу,

\* Степенной характер асимптотики в каждой из областей связан с однородностью ядра в выражении для потока (24) в этих областях.

цитированную в [1], а также [22, 23]). Список этот несомненно не полон и будет расти\*.

## ЛИТЕРАТУРА

1. Кац А. В., Конторович В. М. — В сб.: Нелинейные волны. М., Наука, 1979, с. 151.
2. Захаров В. Е., Филовейко Н. Н. — ДАН СССР, 1966, 170, № 6, с. 1292.
3. Кац А. В., Конторович В. М. — ПМТФ, 1974, № 6, с. 97.
4. Кадомцев Б. Б., Конторович В. М. — Изв. вузов. Радиофизика, 1974, 17, № 4, с. 511.
5. Захаров В. Е., Сагдеев Р. З. — ДАН СССР, 1970, 192, № 2, с. 297.
6. Кадомцев Б. Б., Петвиашвили В. И. — ДАН СССР, 1973, № 4, с. 794.
7. Kats A. V., Kontorovich V. M. — Physica, 1977, 86a, p. 471.
8. Кац А. В. — ЖЭТФ, 1976, 71, № 6, с. 2104.
9. Гуревич В. Л., Лайхтман Б. Д. — ЖЭТФ, 1975, 69, № 4, с. 1230.
10. Norman C. A., Ter Haar D. — Phys. Reps., 1975, 17, p. 307.
11. Цытович В. Н. — Изв. вузов. Радиофизика, 1976, 19, № 5—6, с. 822.
12. Кац А. В., Конторович В. М. — ЖЭТФ, 1977, 73, № 6, с. 2157.
13. Каплан С. А., Цытович В. Н. Плазменная астрофизика. М., Наука, 1972.
14. Мельник В. Н., Кац А. В., Конторович В. М. — ЖЭТФ, 1980, 78, № 3, с. 966.
15. Грубников Б. А. — Вопросы теории плазмы, 1963, 1, с. 154.
16. Cordey J. G., Houghton M. J. — Nuclear Fusion, 1978, 18, p. 215.
17. Гришанов Н. В., Днестровский Ю. Н., Кареткина Н. В., Костомаров Д. П. — Физика плазмы, 1976, 2, № 2, с. 260.
18. Кац А. В., Конторович В. М., Моисеев С. С., Новиков В. Е. — ЖЭТФ, 1976, 71, № 1, с. 177.
19. Гудзенко Л. И., Яковленко С. И. Плазменные лазеры. М., Атомиздат, 1978.
20. Кринберг И. А. Кинетика электронов в ионосфере и плазмосфере Земли. М., Наука, 1978.
21. Бабенко В. А., Галушко Н. П., Залюбовский И. И. и др. — ЖТФ, 1980, 50, № 4, с. 848.
22. Кац А. В., Конторович В. М., Кочанов А. Е. — Astrophys. Space Sci., 1978, 57, p. 347.
23. Конторович В. М., Кочанов А. Е. — Astrophys. and Space Sci., 1980, 71, p. 295.
24. Захаров В. Е., Кузнецов Е. А. — ЖЭТФ, 1978, 75, № 3, с. 904.
25. Кузнецов Е. А., Носков Н. Н. — ЖЭТФ, 1978, 75, № 4, с. 1309.
26. Лутовинов В. С., Чечеткин В. Р. — ЖЭТФ, 1979, 76, № 1, с. 223.
27. Львов В. С. Лекции по волновой и гидродинамической турбулентности. Новосибирск, НГУ, 1978.
28. Zakharov V. E., Schulman E. J. — Physica, 1980, 1D, p. 192.

\* Ряд интересных вопросов теории слабой турбулентности рассмотрен в работах [24—26] (спектры, обусловленные некогерентным взаимодействием высокочастотных и низкочастотных волн; спектры гиротропной турбулентности на фоне колмогоровского спектра; спектры вихревых вихревых волн в ферромагнетике), а также в лекциях [27]. Коллективные процессы в замагниченной плазме с группой быстрых ионов рассмотрены в обзоре [28].

## РИТМЫ МОЗГА

С. М. ОСОВЕЦ, Д. А. ГИНЗБУРГ, В. С. ГУРФИНКЕЛЬ,  
Л. П. ЛАТАШ, Б. В. МАЛКИН, П. В. МЕЛЬНИЧУК,  
Е. Б. ПАСТЕРНАК

Электрические волны, записываемые с поверхности мозга, являются, пожалуй, одним из немногих примеров того, когда точно регистрируемый и регулярно наблюдаемый феномен зачастую становится объектом своего рода научного нигилизма, отрицательного консерватизма. Это тем более удивительно, что, казалось бы, интерес к такому явлению должен быть особенно велик, ибо оно происходит в самом удивительном творении природы — мозгу. В итоге вопросы о происхождении мозговых ритмов, о роли их в деятельности здорового и больного мозга очень далеки от того, чтобы на них были даны сколь-нибудь исчерпывающие ответы.

Нельзя сказать, чтобы эти вопросы оставались вне сферы внимания многочисленных исследователей — экспериментаторов и теоретиков. Наоборот, известно поистине огромное количество работ, в которых делаются попытки построения моделей и схем, составленных из нейроноподобных элементов, и теоретического анализа таких схем с целью выяснения характерных особенностей их поведения, и в частности колебательных свойств. Такие исследования проводились как с помощью аналитических методов, так и с помощью широкого использования ЭВМ, на которых проводилось моделирование подобных систем. Однако для этих работ характерен несколько абстрактный подход. Неясно, к каким именно мозговым образованиям относятся рассматриваемые колебательные процессы. Если к коре, то какова здесь роль подкорковых структур?

Решающим вопросом в разработке теоретических основ функционирования мозга как раз является вопрос о взаимодействии различных мозговых образований, роли и значении каждого из них в тех или иных физиологических процессах, деятельности мозга в целом. Большой интерес представляет, в частности, вопрос о взаимодействии новой коры мозга с подкорковыми структурами.

В настоящей работе делается попытка выяснить некото-



рые особенности функционирования здорового и больного мозга как результат взаимодействия колебательных процессов коры и подкорковых структур. При этом не будем проводить аналитических исследований, которые обязательно предполагают некоторые конкретные модели, а будем исходить из определенных общих свойств нейроподобных систем, которые независимо от конкретных схем представляют собой цепи с сильно выраженными нелинейными характеристиками, причем эти цепи обладают характерными чертами, присущими колебательным контурам. Как это будет видно из дальнейшего, основные рассматриваемые здесь эффекты проявляются именно в результате нелинейных свойств рассматриваемых объектов и поэтому настоящее сообщение имеет самое непосредственное отношение к обсуждаемым в данном сборнике проблемам.

### НЕКОТОРЫЕ СВЕДЕНИЯ О ФИЗИОЛОГИИ РИТМОВ МОЗГА

Электроэнцефалография — регистрация и изучение колебаний электрических потенциалов целого мозга — ведет свое начало как наука с 1928 г., когда Бергер впервые дал систематизированное описание электрической активности мозга, зарегистрированной с помощью электронных усилительных средств. Бергер и его последователи показали, что наиболее четко ритмические колебания потенциала, отводимые с поверхности головы, выражены в состоянии спокойного бодрствования — психической релаксации (глаза закрыты, мышечная расслабленность) [1—3]. При этом у большинства людей наблюдается в задних отделах полушарий отчетливо выраженный так называемый альфа-ритм — колебания с частотой 8—12 Гц и, как правило, амплитудой до 100 мкВ. В разных условиях были зарегистрированы и более быстрые волны, преимущественно в передних отделах полушарий — бета-волны 14—17 Гц и 18—25 Гц, и более медленные тета-волны 4—7 Гц и, наконец, дельта-волны до 2—3 Гц (рис. 1, 2). Эти колебания (главным образом альфа-ритм) в ответ на любое изменение ситуации, вызывающее нестандартное действие, претерпевают единообразные изменения в виде различной степени подавления ритмической активности. Это отмечается при неожиданных раздражениях, при ожидании значимых сигналов, при резких эмоциональных реакциях, в процессе обучения. Но как только все становится на свои места, обучение завершается, действия и сигналы становятся привычными, восстанавливается внешне монотонная ритмика. Выяснилось, что наиболее многообразные изменения ЭЭГ возникают во время сна [4, 5], когда отмечается 4—5 различных картин

с закономерным чередованием характера ритмической активности (см. рис. 1), в которых участвуют колебания альфа-, бета-, тэта- и дельта-диапазонов, причем для некоторых из них такая активность имеет вид веретенообразных пакетов — амплитуда колебаний сначала увеличивается, достигает максимума, затем спадает. Такие веретена с разным интервалом возникают вновь. И все это происходит во сне — состоянии, которое ранее считалось функционально бедным, отдыхом, бездеятельностью, разлитым торможением. Отсюда впечатление, что ЭЭГ — это не «окно» в деятельность мозга, а «окно» в бездеятельность. Правда, тут же выяснились противоречия: например, ритм дремоты — тэта-ритм — оказался характерным для состояния эмоционального реагирования. Особенно этот ритм проявляется у детей, в ЭЭГ ко-

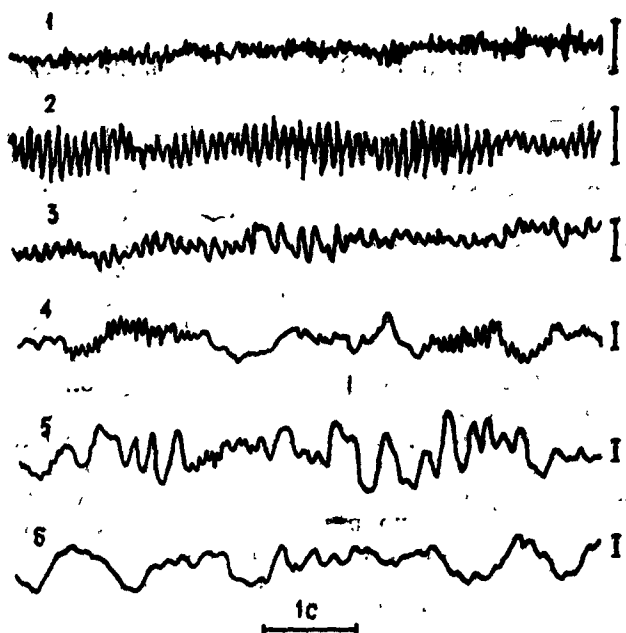


Рис. 1. Спонтанные ритмы ЭЭГ здорового человека, характерные для разных состояний бодрствования и сна (регистрация с кожи головы): 1 — активное бодрствование, напряженное внимание; 2 — бодрствование в покое; 3 — дремотное состояние (1-я стадия «медленного» сна, сходная картина наблюдается часто в «быстром» сне); 4 — 2-я стадия «медленного» сна («сонные веретена»); 5 и 6 — 3-я и 4-я стадии «медленного» сна (так называемый «дельта-сон»). Калибровка 1 с; 50 мкВ. Из [3]

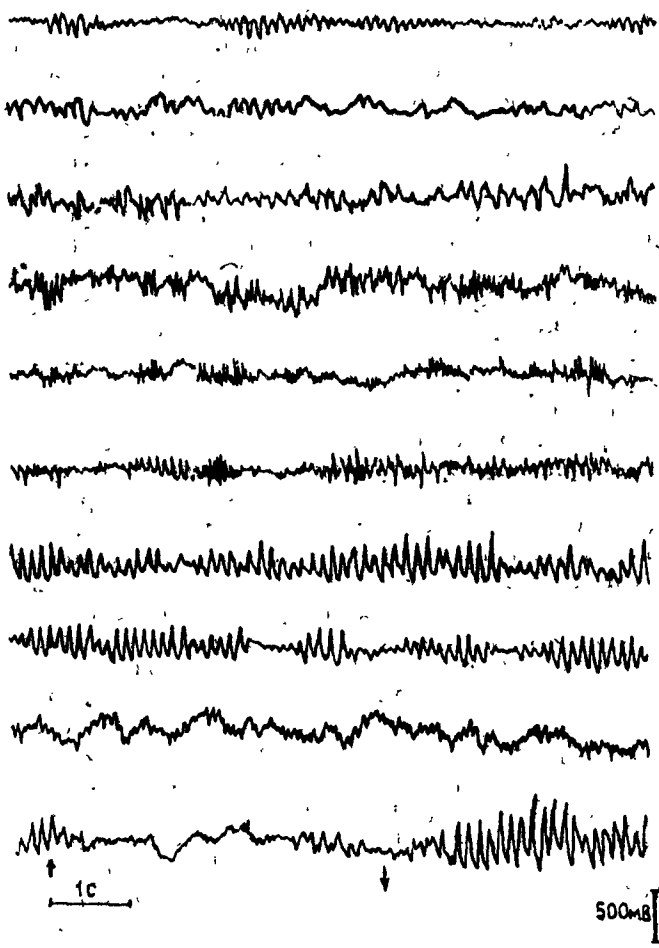


Рис. 2. Спонтанные ритмы ЭЭГ человека, зарегистрированные с поверхности обнаженного мозга во время нейрохирургической операции (разные зоны мозга и разные диапазоны частот). Калибровка: 1 с, 500 мкВ. Из [3]

торых он наблюдается и во время бодрствования. Возникла странная ситуация: ритмы мозга, их динамика оказались связаны, скорее, с более общими понятиями и представлениями, которыми главным образом занималась психология (бодрствование — сознание, сон, эмоции, внимание, автоматизация деятельности), чем с локальными физиологическими, хотя регистрация производилась от совокупности нервных

клеток в определенных зонах мозга и поэтому эти ритмы, казалось бы, должны находиться в большей связи с физиологическими закономерностями. Более тонкие психические явления также не коррелировали с ритмами мозга. Паттерны электрических потенциалов — это не паттерны мысли [6]. Амплитуды колебаний ЭЭГ связаны с количеством одновременно функционирующих нейронов, их синхронизацией (отсюда повышение амплитуды колебаний приобрело синоним «синхронизация», а снижение — «десинхронизация»). Волны ЭЭГ являются результатом суммации, но не потенциалов действия, распространяющихся практически без затухания от нейрона к нейрону по нервным волокнам (аксонам), а особых сравнительно «медленных» процессов, возникающих в теле и дендритах нейронов.

При определенных условиях взаимодействие нейронов путем передачи через синапсы возбуждающих и тормозных сигналов при некотором уровне спонтанной активности приводит к способности нейронных цепочек генерировать ритмические колебания определенного диапазона частот, причем, как указывалось выше, период таких колебаний во много раз превышает время генерации импульса одиночным нейроном. Такие цепочки-контуры в принципе способны к генерации как затухающих, так и незатухающих колебаний. Естественно, что характеристики таких контуров являются существенно нелинейными, причем нелинейность типа насыщения присуща элементам, из которых составлены схемы (см. также [7—9]). Таков пока итог известных к настоящему времени фактов и соображений, на них основанных.

До сего времени происхождение спонтанных ритмов ЭЭГ и их функциональное значение в целостной деятельности мозга — предмет споров и сомнений. Вне сомнений и споров остается практическое приложение электроэнцефалографии, которая оказалась могучим средством для диагностики патологии мозга, в первую очередь очаговой патологии (опухоль, эпилептические очаги), но данные ЭЭГ информативны и при общих расстройствах (при отравлениях, недостатке кислорода — гипоксии, дефиците сахара в крови — гипогликемии).

Дальнейший ход событий показал, что ЭЭГ отражает чрезвычайно важные по своему функциональному значению процессы, происходящие в мозгу и определяющие активную деятельность последнего как в бодрствовании, так и во сне, а также некоторые проявления его патологии. Основой таких представлений явились весьма существенные открытия в физиологии мозга, сделанные в 40—60 гг. и относящиеся как к функционированию нервных элементов — нейронов, так и к работе механизмов целого мозга. Для проблемы ритмов

ЭЭГ наиболее принципиально важными нам представляются следующие три открытия, внутренне связанные между собой.

Первое из них связано с работами Бёрнса [10], в которых было показано методом изучения электрической активности изолированных участков коры больших полушарий головного мозга (новой коры), что хотя обычная ЭЭГ регистрируется с поверхности коры, последняя сама по себе не обладает способностью к длительной генерации незатухающих колебаний электрических потенциалов. После изоляции участка коры от подкорковых структур путем перерезки соответствующих нервных волокон, но при сохранении ненарушенного кровообращения и нормальной жизнедеятельности нейронов в этом участке, электрическая активность в нем быстро затухает и спонтанно, без дополнительных внешних воздействий, не возникает. Приложение одиночного надпорогового электрического стимула вызывает в этом участке электрическую активность в виде нейронного всплывкового разряда (что является показателем сохранения жизнедеятельности) в сочетании с медленной волной, регистрируемой с поверхности участка коры (рис. 3). Такая активность распространяется со скоростью 20 см/с и захватывает весь изолированный участок. Следом за ней в течение 2—5 с регистрируются затухающие колебания с частотой 2 Гц, после чего наступает «биоэлектрическое молчание» до следующей стимуляции. Изолированная кора никогда не генерирует организованной ритмической активности, характерной для нормальной ЭЭГ.

Отсюда возникает естественное предположение, что рит-

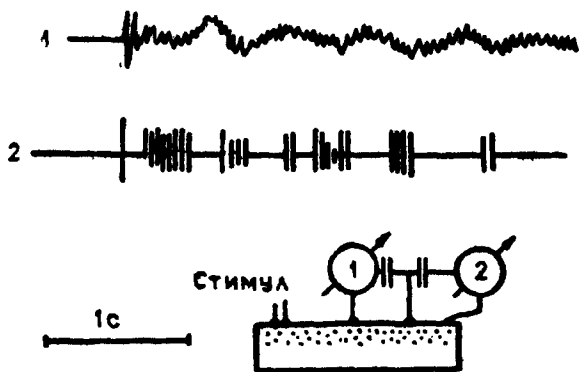


Рис. 3. Электрическая активность изолированного участка коры мозга кошки, вызванная одиночным раздражением (ударом тока): 1—медленные волны, регистрируемые с поверхности коры; 2—импульсная активность нейронов внутри коры. Внизу — схема опыта. Из [10]

мическая активность ЭЭГ, регистрируемая от коры мозга, вызывается ритмизованными посылками из других отделов мозга. Поэтому мы считаем вторым важнейшим открытием выяснение вопроса о существовании и местоположении генераторов ритмической активности мозга — пейсмекеров (физики предпочли бы термин «осцилляторы», но, так как термин «пейсмекеры» твердо установился в физиологии, мы его сохраним). Это оказалось возможным в большой мере благодаря разработке экспериментальных методов использования погружных электродов (в том числе и микроэлектродов), отводящих локальную электрическую активность глубинных структур мозга, причем такая техника позволяет измерять как внеклеточную активность, так и активность внутриклеточную. Итоги этих исследований суммированы в прекрасной книге Андерсена и Андерссона [11] и получили развитие в последующих работах [12]. Оказалось, что пейсмекеры — генераторы незатухающих ритмических колебаний — в мозгу высших животных расположены главным образом в нейронных скоплениях (ядрах) таламуса — структуре, расположенной в глубине мозга. Пейсмекеры имеются и в некоторых образованиях так называемого обонятельного мозга, но их вклад в ЭЭГ высших млекопитающих существенно меньше, а в ЭЭГ человека не выявлен вовсе. Пейсмекеры таламуса обладают способностью к генерации автоколебаний, т. е.

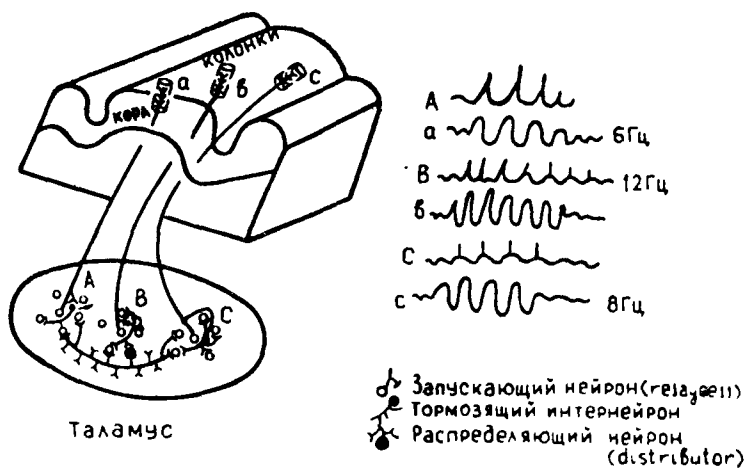


Рис. 4. Схема соотношения пейсмекеров таламуса с функциональными единицами коры. Нейроны трех пейсмекерных зон таламуса — А, В и С, различающихся по частоте, и связанные с ними колонки нейронов коры а, в и с. Справа — соответствующие записи электрической активности. Из [11]

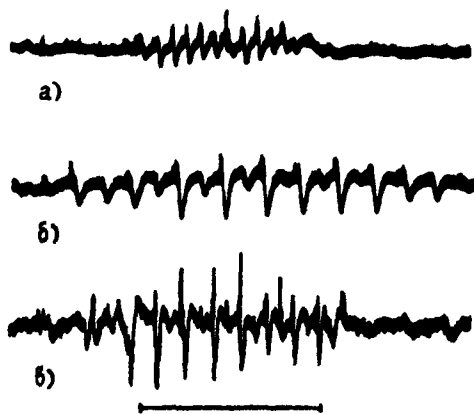


Рис. 5. Разные по частоте ритмы, возникающие в различных ядрах таламуса кошки, регистрируемые непосредственно через погружные электроды: а — вентробазальное ядро; б — дорзолатеральное; в — медиальное. Из [12]

могут генерировать спонтанные ритмы в условиях отключения как от притока импульсов от органов чувств и нижних этажей центральной нервной системы, так и после удаления новой коры [11—13]. Было установлено, что в таламусе таких пейсмекеров много (порядка  $10^4$ ), причем они отличаются по частоте, топографии проекций на кору и расположению в разных ядрах таламуса. Большинство из них находится в так называемых неспецифических, т. е. не связанных специально с каким-либо видом чувствительности, преимущественно средних ядрах. Схема взаимодействий пейсмекеров таламуса с корой и различных участков таламуса между собой приведена на рис. 4, взятом из [11]. То обстоятельство, что в различных участках таламуса генерируется ритмическая активность разного диапазона частот, видно на рис. 5 [12]. Наличие связей в самом таламусе между его ядрами и внутри них приводит к тому, что разные пейсмекеры, особенно с близкими собственными частотами, оказываются способными к синхронизации, так что число эффективных автогенераторов относительно невелико (порядка 400) и они еще могут быть дополнительно сгруппированы по диапазонам частот ЭЭГ. Ритмическая активность таламических ядер передается с помощью залпов импульсных посылок определенным участкам коры (возможно, функциональным единицам типа единообразно реагирующих колонок нейронов).

Так как паттерны этой ритмической активности, ее выраженность варьируют, должны существовать какие-то допол-

нительные воздействия, определяющие возникновение такой вариабельности.

Третьим выдающимся достижением в физиологии мозга, имеющим важнейшее отношение к спонтанным ритмам в ЭЭГ, и в частности к механизмам ее регулирования, явилось раскрытие функций особой системы нейронов сетчатого вещества — ретикулярной формации (РФ), расположенной в стволе мозга [13]. Было установлено, что раздражение РФ электрическим током через вживленные электроды вызывает в ЭЭГ реакцию десинхронизации с резким уменьшением амплитуды спонтанных ритмов, с увеличением удельного веса относительно высокочастотных составляющих. Наблюдается картина, практически идентичная тому, что имеет место при пробуждении, мобилизации внимания, эмоциональном стрессе (отсюда синонимы — реакция активации, реакция пробуждения). Разрушение РФ приводило к усилению спонтанной ритмической активности в ЭЭГ с появлением веретенообразных ритмических всплесков. Обращает на себя внимание то, что изменения ЭЭГ, характерные для прямого электрического раздражения РФ (реакция активации), возникают и при болевых раздражениях кожи и внутренних органов, при неожиданных или значимых сигналах, поступающих через органы чувств — сенсорные входы (зрение, слух, обоняние, осязание и т. д.). Известно, что сигналы от всех сенсорных входов поступают в особые (боковые — специфические) ядра таламуса и после определенной переработки направляются в соответствующие зоны коры мозга. Однако полная сохранность этой системы восходящей передачи сигналов при разрушении РФ не обеспечивает реакции активации в ЭЭГ при сенсорном возбуждении. Следовательно, для десинхронизации ритмов мозга необходим «заход» сенсорных сигналов в РФ и изменение ее деятельного состояния. Установлено, что на уровне ствола мозга (в первую очередь, его верхних разделов), а возможно — и более высоких уровнях, сенсорный поток (передача сенсорной информации в виде импульсных посылок, идущих по проводящим путям в мозгу) раздваивается, как бы дублируется (рис. 6). Один поток идет по специфическим сенсорным системам (зрительной, слуховой и т. д.), состоящим из релейных ядер и проводников, в определенные специфические ядра таламуса, а оттуда — к проекционным зонам коры, представляющим корковые входы для конкретных видов чувствительности. Второй поток представляют импульсные посылки от этих специфических сенсорных систем, которые по особым ответвлениям (коллатералям) поступают в РФ и независимо от сенсорной принадлежности изменяют ее состояние, что сказывается на характеристиках спонтанных ритмов по всей



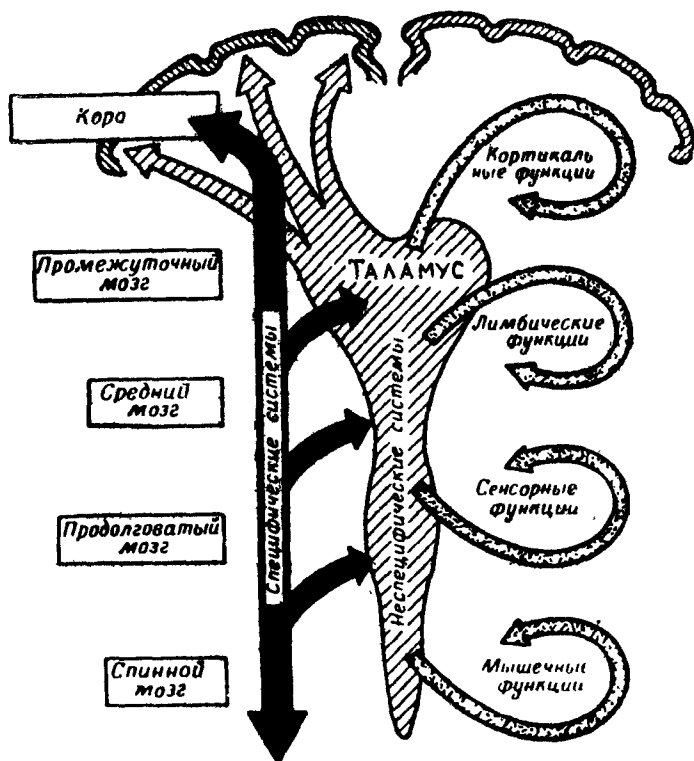


Рис. 6. Схема раздвоения потока нервных импульсов на специфический и неспецифический в головном мозгу с ответвлениями специфических путей (черный цвет) к «неспецифическим» образованиям (заштрихованные) РФ мозгового ствола и промежуточного мозга. Из [13]

поверхности коры мозга или в больших ее отделах. Эта система была названа неспецифической системой восходящей активации. Действие ее в значительной степени реализуется через срединные (также «неспецифические») ядра таламуса и имеющиеся в них пейсмекеры (автогенераторы) ритмов мозга. Воздействие на пейсмекеры потока импульсов, из РФ может в зависимости от интенсивности этого потока или других характеристик способствовать или препятствовать синхронизации тех или иных групп пейсмекеров, определяя паттерн (рисунок) ЭЭГ. Конечно, это схематизированная картина, так как в РФ, кроме сигналов из сенсорных систем, поступает множество сигналов из других отделов мозга: новой коры, обонятельного мозга (лимбической системы), под-

корковых ядер, мозжечка и др., а также разнообразные химические воздействия, причем все они участвуют в общем балансе соотношений, результатом которого являются спонтанные ритмы ЭЭГ.

По поводу функционального значения разделения потока поступающей информации был высказан ряд гипотез, большая часть которых усматривает здесь факторы настройки по отношению к разветвляющейся деятельности: изменение возбудимости нейронов, индивидуализация их активности в результате десинхронизации и др. [13—15]. Для дальнейшего изложения важно, что раздвоение потока поступающей информации действительно имеет место, что один поток в рамках специфической сенсорной системы проходит через специальные ядра таламуса и особые проекционные зоны коры, практически не изменяя спонтанных ритмов мозга, в то время как другой проходит через РФ и систему пейсмекеров таламуса, изменяя эти ритмы, которые адресуются ко всем или во всяком случае к значительным совокупностям образований в коре, таламусе и других высших отделах мозга.

Приведенные данные были получены главным образом в исследованиях на животных. Однако имеется много фактов, позволяющих считать, что они относятся и к людям. Спонтанные ритмы целого мозга бодрствующего и спящего человека (альфа-ритм, бета-ритм, тета-ритм, ритм «сонных веретен» и другие) также связаны с активностью разных (по доминирующей частоте и внутримозговой топографии) групп пейсмекеров, расположенных в глубинных структурах мозга, в первую очередь в таламусе [2, 5, 11]. Известно, что разрушение нервных волокон, идущих от таламуса к новой коре, приводит к исчезновению соответствующих ритмов. Колебательные свойства функциональных единиц коры мозга человека, по-видимому, аналогичны описанным свойствам коры других млекопитающих, в частности кошек, на которых проводил эксперименты Бёрнс. Так как эксперимент с изолированной корой здорового человека невозможен, свидетельства указанной аналогии были получены при анализе патологии мозга, когда такая изоляция возникла в результате болезни. Имеется описание клинического случая [16] с почти полным исключением глубинных структур мозга у больного с менингококковым менингоэнцефалитом. На аутопсии было выявлено тотальное разрушение нейронных формаций промежуточного мозга (включая таламус) и ствола мозга (преимущественно РФ) при относительной сохранности коры и подкоркового белого вещества больших полушарий. В течение 14 суток у больного регистрировались ЭЭГ, которые имели вид низкоамплитудной неорганизован-

ной активности с преобладанием медленных волн с частотой примерно 2 Гц. В этой ситуации воздействие на кору со стороны глубинных структур сводилось к нерегулярному «запуску» нейронных формаций коры, создающих затухающие колебания, сходные с активностью, наблюдаемой при раздражении изолированных участков коры животных. При выраженном кислородном голодании (гипоксии) в ЭЭГ отмечается неорганизованная дельта-активность (частота около 2 Гц), что также, по-видимому, отражает собственные колебательные свойства коры в условиях резко ослабленных воздействий со стороны глубинных структур [17].

Таковы данные по физиологии мозга, которые явились исходными при выдвижении и обосновании (в той мере, в какой это оказалось возможным) некоторых гипотез о функциональном значении ритмической активности ЭЭГ в деятельности здорового и больного мозга человека. Изложение этих гипотез и составляет основное содержание настоящей работы.

Прежде всего сформулируем представление о том, каков характер взаимодействия ядер таламуса с новой корой, исходя из того, что нам известно о колебательных свойствах каждого из этих отделов мозга. Согласно имеющимся представлениям пейсмекеры таламуса путем соответственно организованных ритмических импульсных посылок, генерируемых ими спонтанно, воздействуют на функциональные элементы коры. Эти элементы представляют собой вторую колебательную систему, обладающую свойствами так называемого пассивного колебательного контура с сильно выраженной нелинейностью. Такой контур в нормальных условиях не может генерировать спонтанную ритмическую активность. Собственная частота этого контура ( $\sim 2$  Гц) существенно меньше собственных частот пейсмейкеров таламуса. Имеющиеся данные указывают на то, что выход из таламуса к функциональным элементам коры осуществляется через особые вставочные нейроны — интернейроны, включенные в колебательные контуры коры таким образом, что это эквивалентно включению колебательного потенциала с частотой соответствующих пейсмейкеров таламуса в цепь колебательного контура коры.

### **РИТМЫ МОЗГА И МЕХАНИЗМЫ ПЕРЕХОДА В РЕЖИМЫ ЭПИЛЕПТИЧЕСКОЙ ПАТОЛОГИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ**

Приведенные представления о взаимодействии колебательных процессов в таламусе и новой коре были использованы при рассмотрении генерализованных разрядов в ЭЭГ при некоторых формах эпилепсии [18]. При этом мы исходили из представлений, что к участкам коры, которые здесь

рассматриваются в виде пассивного колебательного контура с сильно выраженной нелинейностью типа насыщения, приложен неккий переменный потенциал с частотой, заметно превышающей собственную частоту участков коры ( $\sim 2$  Гц). Такое устройство обладает некоторыми свойствами суперрегенератора, предложенного еще в 20-е годы Армстронгом. Основные особенности таких систем следующие.

При малой амплитуде подведенного переменного потенциала систему можно считать линейной. Измеренные в любом участке напряжения или токи имеют две составляющие: затухающие колебания с собственной частотой и незатухающие — с частотой подведенного управляющего потенциала. С увеличением амплитуды последнего проявляются нелинейные эффекты, которые при определенных условиях приводят к скачкообразному переходу системы в другие режимы, и в частности к режиму, при котором система генерирует колебания с частотой, равной половине частоты приложенного потенциала, что сопровождается резким увеличением амплитуды колебаний. Необходимое условие перехода системы в режим с «делением» частоты вдвое требует исполнения неравенства

$$|E| > k \left| \frac{\omega - \nu/2}{\omega} \right|.$$

Здесь  $E$  — величина, характеризующая интенсивность управляющего потенциала,  $\nu$  — частота его колебаний,  $\omega$  — собственная частота колебаний управляемого контура,  $k$  — коэффициент, зависящий от конкретных свойств и параметров

схемы,  $\left| \frac{\omega - \nu/2}{\omega} \right|$  — расстройка. Это условие является необходимым.

Переход системы в режим генерации незатухающих колебаний большой амплитуды с возможным «делением» частоты вдвое (по отношению к частоте управляющего сигнала) может быть вызван как повышением интенсивности управляющего потенциала — величины  $E$ , так и уменьшением «расстройки», когда при сравнительно малой интенсивности  $E$  частота собственных колебаний управляемого контура  $\omega$  увеличивается и становится близкой к половинной частоте колебаний управляющего потенциала.

Вернемся к физиологическим представлениям о характере взаимодействия таламуса и новой коры в процессе генерирования ритмов ЭЭГ и о возможном проявлении этого взаимодействия при переходе в патологический режим. Наглядным примером являются пароксизмальные ритмы, характерные для эпилептических припадков различных типов (рис. 7 из [3]). Если сопоставить данные физиологии с соображениями,

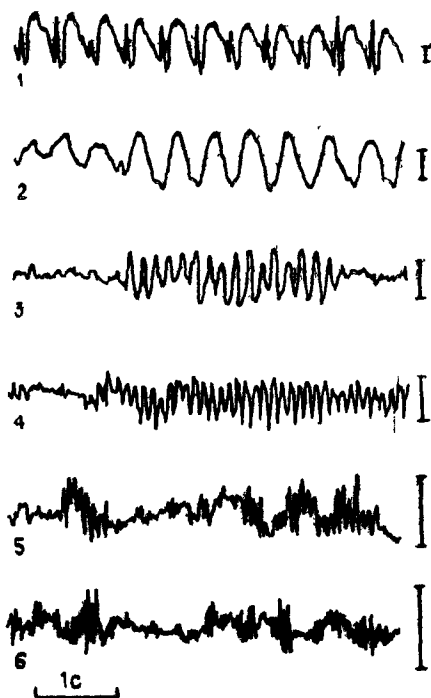


Рис. 7. Виды пароксизмальных ритмов, которые часто возникают у больных эпилепсией и в межприпадочный период (субклинические разряды): 1 и 2 — комплекс волн — пик 3 Гц или вспышка волн 3 Гц (разряды типа малого припадка), 3 — вспышка волн 6 Гц (типа психомоторного припадка), 4—6 — вспышки волн 10, 14 и 25 Гц (наблюдаются по всему мозгу при большом припадке).  
Калибровка: 1 с, 100 мкВ. Из [3]

приведенными выше, то величина  $E$  соответствует интенсивности воздействия пейсмейкеров таламуса (например, степени их синхронизации, частоте — количеству импульсов в каждом залпе);  $\nu$  — частоте их колебаний — залпов;  $\omega$  — собственной частоте колебаний функциональных элементов коры. Тогда переход нормального ритма ЭЭГ в пароксизмальный, характерный для генерализованных (охватывающих практически весь мозг или значительные зоны обоих полушарий, с исключением сознания) эпилептических припадков, в соответствии с приведенным неравенством может быть обусловлен либо усилением действия пейсмейкеров таламуса, либо увеличением частоты собственных колебаний коры. В обоих случаях нелинейные эффекты возрастают и появляется возможность скачкообразного перехода системы в генераторный

режим, и в частности в режим колебаний с частотой, равной половине частоты доминирующей группы пейсмекеров таламуса, с резким увеличением амплитуды колебаний. Это напоминает явления, имеющие место в линейных системах с периодическими коэффициентами, описываемых уравнениями типа Матье. Переход в подобный режим может сопровождаться возникновением колебательных процессов и с другими частотами. С ростом  $E$  или повышением собственной частоты в результате каких-либо патологических изменений в коре могут возбуждаться колебания с частотами  $n\nu/2$ , где  $n$  — целое число 1, 2, 3, ... Такого рода закономерности, относящиеся к ЭЭГ человека, могут, однако, характеризовать динамику процессов в других участках организма (рис. 8 из [19]).

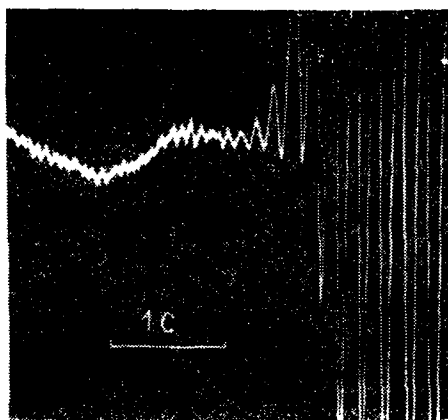


Рис. 8. Регистрация дрожания (тремора) у больного паркинсонизмом. Момент перехода физиологического тремора в паркинсонический с делением частоты дрожания вдвое и резким увеличением амплитуды. Из [19]

Таким образом, переход нормальных ритмов в пароксизмальные может быть обусловлен как повышенном интенсивности ритмического воздействия таламуса вследствие, например, возросшей синхронизации пейсмекеров, так и первичным нарушением нормального функционирования коры в результате наличия различных патологических факторов (рубцов, объемный процесс, нарушение химизма и т. д.), приводящих к повышению собственной частоты колебательных контуров коры. Так как в нормальной ЭЭГ обычно доминирует альфа-ритм (10—12 Гц), приведенная гипотеза объясняет появление в ЭЭГ разрядов 5—6 Гц при психомоторных припадках (рис. 7) — деление альфа-частоты вдвое в соот-

ветствии с отношением  $\omega = \frac{n\nu}{2}$  при  $n=1$  и около 10, 15, 20 Гц при больших судорожных припадках — этому соответствует  $n=2, 3, 4$ . В пользу приведенной гипотезы говорит правильность полученного на ее основе прогноза. Так, для того чтобы гипотеза была справедливой для пароксизмов типа малых припадков (*petit mal*) с характерной частотой 2,5—3,5 Гц (рис. 7, 1 и 2), следовало бы предположить, что доминирующей частотой пейсмекеров таламуса в этом случае является частота тэта-ритма (5—7 Гц) при  $n=1$ . Действительно, оказалось, что имеется связь условий возникновения разрядов с частотой около 3 Гц типа *petit mal* и возникновения в ЭЭГ тэта-ритма в естественных и патологических состояниях. Так, малые припадки чаще всего бывают у детей [20, 21], у которых в норме тэта-ритм хорошо выражен, и нередко проходят с возрастом; у взрослых больных — в определенных стадиях эпа, для которых характерно наличие выраженной тэта-активности [5, 22]; при легочной гипервентиляции с усилением тэта-ритма [23]. Выявлено, что на ЭЭГ в моменты, непосредственно предшествующие разряду *petit mal*, возникают всплески тэта-волн кратной частоты (рис. 9), что особенно четко видно в случае замены генера-

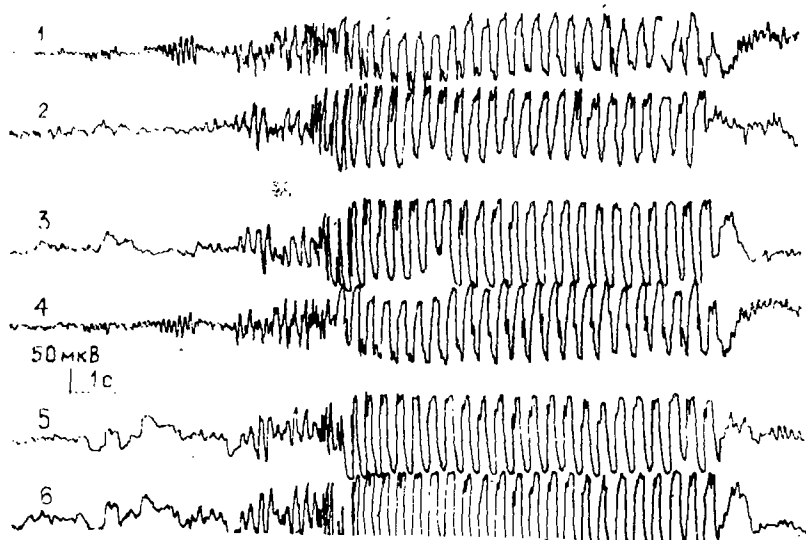
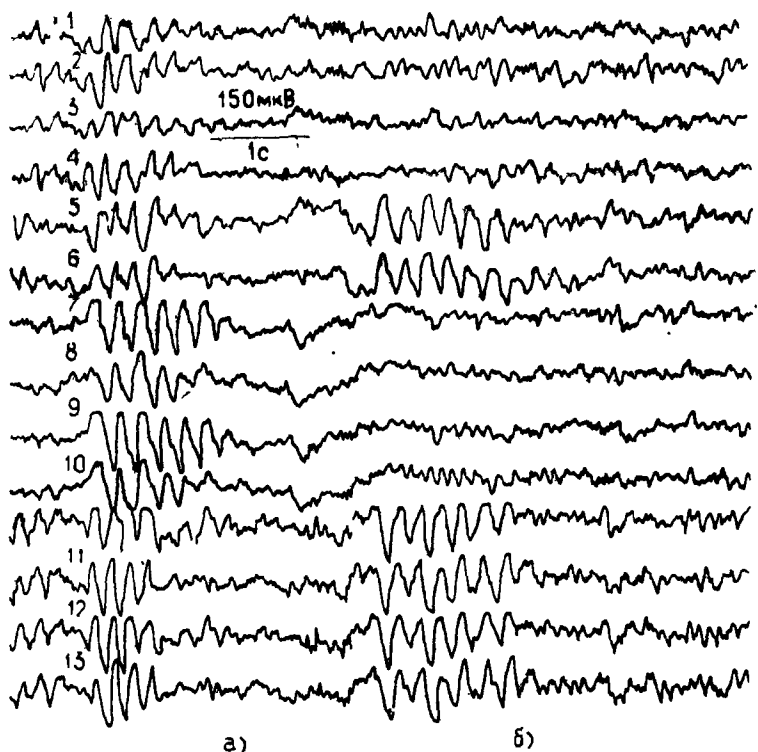


Рис. 9. Всплески тэта-волн 7 Гц непосредственно перед субклиническим пароксизмальным разрядом частоты 3,5 Гц у подростка, страдающего малыми припадками (в период засыпания). Обозначение отведений ЭЭГ: 1 и 2 — затылочные; 3 и 4 — теменные; 5 и 6 — лобные монополярные (соответственно от правого и левого полушарий).  
Калибровка: 1 с, 50 мкВ



**Рис. 10.** Генерализованный (а) и парциальный (б) субклинические разряды дельта-волн 3—3,5 Гц у ребенка, страдающего малыми припадками См при парциальном разряде вспышку тэта-ритма 7 Гц в центральных и лобных отделах полушарий. Обозначение отведений ЭЭГ: 1 и 2 — центральные; 3 и 4 — височные; 5 и 6 — затылочные монополярные; 7 и 8 — лобно-височные; 9 и 10 — лобно-центральные; 11 и 12 — височно-затылочные, 13 и 14 — затылочно-теменные биполярные (соответственно от правого и левого полушарий). Калибровка: 1 с, 50 мкВ

лизованного по всей коре разряда парциальным, когда в «свободных» от разряда *petit mal* зонах регистрируется тэта-ритм удвоенной частоты (рис. 10). Недавно подтверждающие данные были получены также методами спектрального анализа ЭЭГ в зоне коркового очага [24].

Таким образом, выявленные связи между условиями появления в ЭЭГ тэта-ритма и генерации пароксизмальной ритмической активности с частотой 3 Гц можно расценивать как определенное подтверждение предлагаемой гипотезы. Не исключено, что с тэта-ритмом связано возникновение и психомоторного разряда (ритмы с частотой 5—6 Гц). В этом



случае в соотношении  $\omega = \frac{n \nu}{2}$ .  $n$  должно быть равно двум.

Сформулированная здесь гипотеза позволяет также разрешить противоречие между утверждением канадских исследователей [3] о ведущей роли в генезе генерализованных пароксизмальных разрядов подкорковых образований (центроцефалических — расположенных в «средине» мозга) и данными французских эпилептологов, которые считают первичным поражение корковых формаций и участие корковых же механизмов синхронизации [25].

В свете излагаемой здесь гипотезы справедливы обе точки зрения, которые не исключают, а дополняют друг друга, ибо как увеличение интенсивности воздействия на кору пейсмекеров таламуса до критического значения при относительно большой «расстройке», так и изменение колебательных характеристик коры при первичном ее поражении с увеличением собственной частоты колебательных элементов и уменьшением «расстройки» оказываются достаточными для перехода системы в патологический режим.

#### **НЕКОТОРЫЕ СООБРАЖЕНИЯ О ФУНКЦИОНАЛЬНОМ ЗНАЧЕНИИ РИТМИЧЕСКОЙ АКТИВНОСТИ МОЗГА**

Изложенная выше гипотеза носит частный характер, поскольку она содержит в себе попытку объяснения механизма изменения ритмов мозга в специфических условиях перехода в режим патологической активности при некоторых формах эпилепсии. Однако она относится по меньшей мере к двум более общим моментам: а) в большей степени подтверждает исходную схему взаимодействия коры мозга с пейсмекерами таламуса в процессе формирования ритмов ЭЭГ и б), что не менее важно, свидетельствует в пользу принципиального положения о функциональной значимости этих ритмов.

Поэтому следующим шагом в развитии наших представлений явилась попытка выяснить вопрос о том, каким образом в рамках принятой схемы обуславливаются уже известные закономерности нормальных вариаций ритмов мозга и какую роль они могут играть в целостной деятельности мозга. Наиболее существенными фактическими предпосылками являются следующие:

а) наличие пейсмекеров (типа автогенераторов) ритмов ЭЭГ главным образом в таламических ядрах, через которые проходит основной поток информации к новой коре и от нее;

б) наличие достаточно большого числа таких пейсмекеров, генерирующих как частоты различных диапазонов (альфа-, бета-, тета-, возможно и дельта-); так и незначи-

тельно отличающиеся частоты в пределах одного диапазона;

в) имеет место взаимодействие между пейсмекерами типа вовлечения — синхронизации их, что в определенных условиях приводит к уменьшению числа действующих диапазонов частот, вплоть до доминирования частот одного диапазона или к почти монохроматическому режиму в случаях гиперсинхронных ЭЭГ;

г) спонтанные ритмы ЭЭГ регистрируются практически по всей поверхности полушарий или с очень больших территорий, захватывающих доли большого мозга или совокупности этих долей;

д) воздействие пейсмейкеров таламуса на кору мозга, по всей видимости, осуществляется в виде незатухающих ритмических посылок из таламуса на кору (см. выше), способную к пассивному ответу, присущему затухающему колебательному контуру;

е) имеется известная ассоциация ритмов ЭЭГ с различными видами поведения.

Исходя из перечисленных предпосылок, представляется весьма вероятным, что спонтанные ритмы ЭЭГ связаны с осуществлением каких-то общих, фундаментальных функций мозга, вовлекающих мозг целиком или большими комплексами его структур. Одним из наиболее вероятных кандидатов на такие функции, «обслуживаемые» ритмами ЭЭГ, является функция памяти. Ее распределенный характер (когда память представлена практически по всему мозгу и в каждом его участке представлена вся память), ассоциативность, опора на другие глобальные функции мозга (сон, бодрствование, мотивации, внимание, эмоции), определяющие активность мозговой деятельности как ее особый атрибут (согласно Н. А. Бернштейну), были показаны многочисленными исследователями [26—31].

В данной работе рассмотрение будет относиться только к тому, что называют долговременной памятью, а именно — к записи и извлечению (считыванию) следов событий, которые сохраняются в мозгу длительно, вероятно в течение всей жизни. Все, что относится к восприятию событий, так называемой иконической и кратковременной памяти, предварительной классификации, отбору, кодированию запоминаемого материала, т. е. всему тому, что предшествует записи долговременных следов, на данном этапе выносятся за скобки. Не будут рассматриваться также конкретные клеточные и субклеточные процессы, лежащие в основе долговременного хранения. Это предметы особых исследований, которые в своей постановке, возможно, смогут использовать соображения, сформулированные ниже и носящие сугубо гипотетический характер.

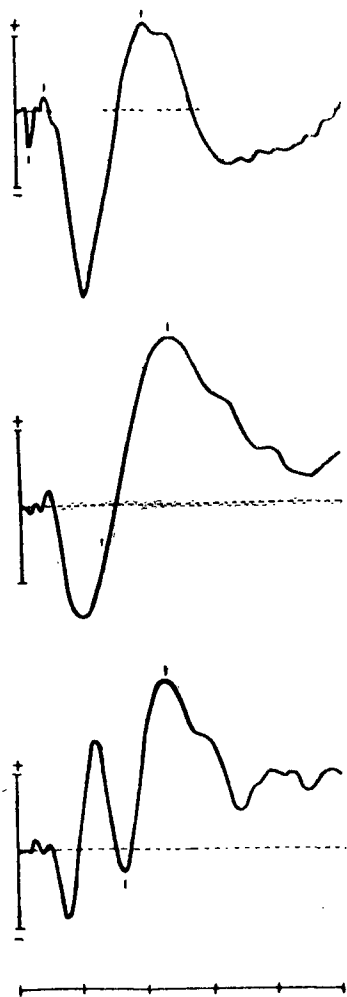
В настоящее время конкурируют две концепции, относящиеся к нейрофизиологическим основам долговременной памяти. Одна из них, составляющая основу так называемых коммутаторных теорий памяти (см. [27]), подразумевает, что запоминание в результате обучения — это установление между нейронами каких-то локальных связей, которых ранее не было, либо такое же локальное повышение эффективности связей, существовавших ранее, облегчающее их закономерное срабатывание в повторяющихся условиях. Теории такого рода находят широкое распространение среди нейрофизиологов преимущественно аналитического направления. Однако помимо того, что сейчас не существует прямых экспериментальных доказательств в пользу таких теорий, они сталкиваются со значительными трудностями в объяснении ряда известных фактов, таких как распределенность памяти, мгновенное обучение, в том числе на основе подражания, малое влияние на долговременную память локальных повреждений мозга и некоторые другие.

Поэтому в качестве альтернативы коммутаторным теориям выдвигается и получает все больше экспериментальных подтверждений концепция, названная Джоном [27, 28] теорией статистической конфигурации. Смысл ее состоит в том, что при долговременном запоминании в самых различных участках мозга возникают отображающие системы, состоящие из большого числа нейронов, которые активизируются под воздействием определенной последовательности внешних стимулов, поступающих при научении в неслучайном порядке. В результате, в определенных участках мозга, воспринимающих такие стимулы, возникает некоего упорядоченный рисунок (паттерн) нервных импульсов. Подобные паттерны, по-видимому, создаются нейронами, спонтанно активными в момент научения, и являются специфическими для каждой конкретной информации. Выходя на большие территории мозга, такие паттерны взаимодействуют с другими влияниями, не случайно связанными с накопленным опытом. При этом в популяциях нейронов, расположенных на этих территориях, появляется определенная пространственно-временная конфигурация нейронной активности, которая и является отображающей системой. Именно эта устойчивая конфигурация, упорядоченность активности нейронов в данной популяции (ансамбле, сети) инвариантно связана с запечатленной информацией. Однако определяется такая конфигурация статистически, т. е. в усредненных проявлениях активности популяций, в увеличении вероятности появления определенного пространственно-временного паттерна, без жесткой связи с индивидуальным поведением какого-то специализированного нейрона, входящего в ансамбль и выявляющего свою

связь с данным запоминанием лишь в условиях многократных тестирований (регистраций).

Таким образом, эта теория справляется по меньшей мере с двумя существенными затруднениями в попытках объяснения мозговой памяти: объясняет ее распределенность (одинаковые паттерны во многих местах) и способность одной и той же популяции нейронов участвовать в запоминаниях многих признаков, событий за счет вхождения в различные организации пространственно-временных паттернов. Иными словами, соблюдаются основные положения, сформулированные Лешли [26]: вся память всюду и каждый элемент — носитель многих следов. Джон подчеркивает [27], что предлагаемая теория не является «теорией поля», ибо она исходит из признания высокоорганизованной структуры мозга, зависимости характера возбуждений нейронного ансамбля от взаимодействия между нейронами внутри него и роли модификации в самих нейронах (в синапсах или во внутриклеточном аппарате) в создании в конечном итоге той или иной конкретной конфигурации паттерна. Экспериментальным обоснованием концепции статистической конфигурации можно считать результаты изучения так называемой вызванной электрической активности мозга при обучении (в простейшем случае — выработка условного рефлекса). Эта вызванная активность исследовалась в двух формах: в виде вызванных потенциалов (ВП), регистрируемых с поверхности черепа одновременно с ЭЭГ, но с использованием специальной процедуры суммации и усреднения (привязанной к моменту восприятия или действия) для выделения из случайного «шума», каким в данном случае является сама ЭЭГ (рис. 11); в виде импульсной нервной активности, регистрируемой одновременно от многих нейронов или только от одиночных, которая также отсчитывалась относительно каких-то моментов времени, связанных с обучением.

В этих исследованиях ВП было обнаружено, что сравнительно поздняя часть ВП весьма чувствительна к действию таких внутренних факторов, как значимость сигнала, интерес, ожидание, готовность к действию (рис. 12), вызывающих в ней характерные амплитудно-временные изменения [32, 33]. Выяснилось, что поздние «эндогенные» компоненты ВП по генезу близки к волнам ЭЭГ. При обучении, по мере закрепления его результатов, в поздней части ВП отмечается появление особых изменений, создающих специфический паттерн и регистрируемых практически во всех областях большого мозга в ситуации, когда эти результаты извлекаются [27, 28]. Такие изменения были выявлены при обычном визуальном наблюдении ВП во многих областях мозга в опытах с выработкой, использованием и переучиванием условных



**Рис. 11.** Типичные усредненные ВП с четко выраженными поздними компонентами при воздействии слуховым (вверху), кожным (посредине) и зрительным (внизу) стимулом. Калибровка: 100 мс/деление, 10 мкВ. [Из 32]

рефлексов. Однако имеются данные, что специфический паттерн ВП, связанный с конкретным обучением, особенно четко проявляется при использовании определенных методов математического анализа [34, 35], в частности факторного анализа, позволяющего установить очень тонкое соответствие как с запоминаемым событием, так и с исходным состоянием организма. Этим, в частности, обосновывается метод идентификации по показателям ВП фармакологических веществ не

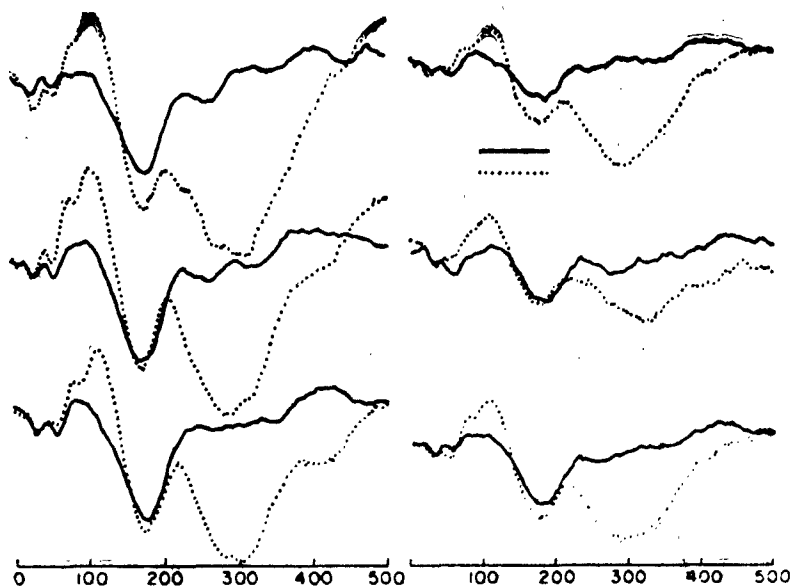


Рис. 12. Изменения паттерна слухового ВП за счет поздних компонентов у разных лиц при разной степени неопределенности появления сигнала (точки): высокой — слева, более низкой — справа. Сплошной линией обозначен ВП при регулярном возникновении сигнала. Место регистрации — центральная область свода черепа. Время — м/с. Из [32]

только по группам, но и по индивидуальным препаратам.

Результаты непосредственного изучения активности нейронов мозга (групповой или индивидуальной) у животных и человека, с помощью вживленных электродов, в процессе обучения и при его завершении также выявили единообразный характер сдвигов, наблюдавшихся практически во всех отделах мозга [28, 31]. Эти сдвиги, как правило, выявляются лишь при достаточном усреднении и имеют вид особых паттернов, статистических конфигураций. Такие паттерны зарегистрированы при выработке условных рефлексов у животных, при запоминании слов — у человека [30].

Сказанное выше дает основания считать теорию статистической конфигурации принципиально более приемлемой в качестве исходной для исследования процессов формирования и считывания долговременной памяти в мозгу. Можно считать, что центральную роль в этом процессе играет формирование специфических паттернов, проявляющихся в виде

определенных статистических конфигураций активности нейронов, и распределенный характер таких паттернов, т. е. их появление на больших мозговых территориях, а также необходимость при анализе механизма записи долговременного следа определить и механизм его считывания. Предлагаемая гипотеза представляет собой попытку осветить все эти моменты с единой точки зрения. При этом, по нашему мнению, необходимо: 1) указать на возможные механизмы возникновения в мозгу многочисленных (практически неограниченного количества) различных паттернов, которые могут иметь непосредственное отношение к ситуациям, фиксируемым в памяти; 2) объяснить их распределенный (генерализованный) характер; 3) показать, что имеется вытекающая из приведенных представлений возможность существования экономного, быстродействующего считывания, тесно связанного со способом записи.

Идеи, лежащие в основе предлагаемой здесь гипотезы, связаны, в сфере физики, с новым подходом к ритмам коры и механизмам генерации этих ритмов. Такой подход обусловлен сравнительно недавними достижениями в развитии теории нелинейных колебаний и волн [36—39], приведших к введению понятия о так называемых «странных аттракторах». Развивая идеи, выдвинутые в свое время Ландау, а затем Холфом, Рюэль и Таккенс в 1971 г. [36] дали математическое описание разных нелинейных динамических систем, показавшее способность к генерации ими многопериодических и даже стохастических режимов. В дальнейшем было показано [37, 39], что, в частности, взаимодействие нелинейных автогенераторов может порождать такие режимы, причем паттерны этих режимов будут различными при разных изменениях взаимодействия между генераторами. Важно, что подобные режимы осуществляются без введения в систему случайных функций и без возбуждения большого числа степеней свободы: многопериодический режим, который представляет для предлагаемой гипотезы особый интерес, может возникнуть при взаимодействии немногих (даже двух) автогенераторов. Многопериодические паттерны характеризуют собой слабые, но не очень слабые, взаимодействия, причем конкретная структура паттерна определяется, при прочих равных условиях, как возмущающим воздействием; так и уже существующим взаимодействием. Необходимыми условиями являются: 1) нелинейность системы; 2) ее диссипативность; 3) описание ее поведения системой дифференциальных уравнений выше второго порядка. В нашей литературе подробное изложение и углубление приведенных представлений дано в статьях А. С. Моница [38] и М. И. Рабиновича [39].

Если с физических позиций, изложенных выше, рассмот-

реть вопросы, относящиеся к функциональному значению спонтанных ритмов мозга и, в частности, их возможной роли в механизмах фиксации и считывания долговременной памяти в мозгу, то очевидной представляется возможность объяснить механизм возникновения различных многочастотных паттернов электрической активности в ЭЭГ (см., например, рис. 1, верхнюю строчку, и рис. 2). Также сравнительно просто объясняется их распространенность по многим структурам мозга. Наличие большого числа пейсмекеров таламуса, различающихся по частоте, и присущая им нелинейность обуславливают при различных (приходящих извне по сенсорным системам или изнутри мозга, при изменении его внутренней активности) возмущающих воздействиях переход системы в режим генерации многочастотных паттернов, различающихся набором составляющих частот, их амплитудой и фазой. Действительно, хорошо известно, что любое воздействие извне или внутренний сдвиг, сколь-нибудь существенно изменяющий состояние мозга, приводит к явному «расстройству» относительно упорядоченных ритмов мозга, к появлению многопериодических паттернов. Такая «деорганизация» в сочетании с десинхронизацией ритмов наблюдается в лабораторных условиях при разнообразных сенсорных раздражениях, привлечении внимания, возникновении целенаправленного действия, при эмоциональных сдвигах, состояниях стресса. Эти паттерны выявляются грубо, «на глаз», при относительно длительных сдвигах состояния. Имеются основания полагать, что в реальных условиях такие сдвиги много динамичней и тоньше, в соответствии с большей динамичностью возмущающих воздействий, изменяющих взаимодействия пейсмекеров таламуса. В реальных условиях многопериодические паттерны ЭЭГ летучи и почти неуловимы из-за постоянной частотной и фазовой модуляции вследствие крайне частых и труднопредсказуемых изменений условий внутри и вовне. Если же с помощью искусственных методов такие условия стабилизировать, что достигается в процессе исследований ВП многократным повторением одинаковых воздействий и наличием момента начала отсчета для суммации и усреднения, то в таких «тупых» [6] условиях (мозгу приходится реагировать на повторяющиеся бессмысленные стимулы) многопериодический паттерн становится отчетливо выраженным, преимущественно в поздних компонентах ВП. Количество практически различных паттернов определяется наличием шумов и случайных помех, что должно являться предметом специальных исследований (ибо не исключено, что в обеспечении устойчивости системы к помехам возможную роль играет раздвоение сенсорного потока на уровне ствола мозга и взаимодействие его обеих частей, о



чем речь будет ниже). Определенный же волновой паттерн (или лежащий в его основе паттерн ритмических импульсных всплесков из пейсмекеров таламуса) может создать условия для возникновения избирательной статистической конфигурации нейронных разрядов в коре и других отделах мозга. Генерализованный (распределенный) характер этих явлений объясняется генерализованным же характером суммарного выхода системы таламических пейсмекеров и всего комплекса ретикулярных влияний — так называемых неспецифических восходящих проекций — на кору мозга. Это, как известно, проявляется в относительно единообразных картинах ЭЭГ, наблюдавшихся на больших территориях коры спонтанно, и односторонности сдвигов, возникающих при многих воздействиях.

Предлагаемая гипотеза в плане нейрофизиологическом дает особую интерпретацию факту дихотомизации импульсных потоков на уровне ствола мозга, промежуточного и переднего мозга на специфические — несущие по специальным путям информацию о событии, закодированную в виде последовательности нервных импульсов, и неспецифические — передающие эти импульсации в качестве индивидуальных возмущающих воздействий системе пейсмекеров таламуса и другим контролирующим эти пейсмекеры формациям мозга. Эти потоки обеспечивают в последующем взаимодействие на отображающих (запоминающих) системах специфического импульсного потока со специфическим же многопериодическим паттерном (см. также [40]). Такая вторичная конвергенция и вызывает в нейронном субстрате изменения, представляющие собой долговременный след, который имеет характер паттернов статистической конфигурации. Можно предположить, что свойством этого следа является способность его «оживления» при воздействии только одной составляющей — некоторого характерного многопериодического волнового паттерна. В этом смысле воспоминание или узнавание — это «освещение» таким паттерном записанной ранее во взаимодействии с подобным паттерном информации.

Ясно, что в таком общем виде, который здесь приведен, предлагаемая гипотеза порождает огромное количество вопросов, ответы на которые сейчас дать невозможно. Отметим наиболее важные из них.

Центральным является вопрос о том, действительно ли в нейронах мозга (или их частях) возникают под действием импульсных характеристик событий и специфического многопериодического паттерна следовые изменения, которые в дальнейшем могут избирательно активизироваться только многопериодическим паттерном? Каков вклад собственных колебательных свойств коры в этот процесс? Каким конкрет-

ным механизмом обеспечивается статистический характер пространственно-временной конфигурации нейронных процессов? Каким образом при воспоминании активизируется именно нужный паттерн? Даже при очень большой скорости простого перебора механизм последнего вряд ли можно принять. Многопериодические паттерны в принципе могут быть специфичны, индивидуальны, как индивидуальны, неповторимы все события реальной жизни. Однако, кроме индивидуальности и неповторимости, в событиях имеются и элементы общности. Если эти элементы общности сказываются при формировании многопериодических паттернов ЭЭГ, то возникает основа для классификации, а следовательно для ограничения зоны перебора. Элементы общности могут содержаться не только во внешних событиях, но и во внутренних состояниях (например, показателях бодрствования, эмоциях, мотивациях, установках и т. д.), что может сказываться на разном вкладе разных пейсмекеров (в смысле диапазона вырабатываемых ими частот) таламуса в общий генерируемый паттерн и также явиться основой для внутренней классификации. В связи с этим можно думать, что паттерн, осуществляющий считывание, может быть в какой-то мере отличным от паттерна, участвовавшего в записи следа. Предстоит выяснить, каким образом генерация многопериодических паттернов связана с функциональной специализацией полушарий мозга.

Бесспорно, что наша гипотеза оставляет очень много неясного, но она имеет, как нам кажется, два несомненных достоинства. Во-первых, она не противоречит ни одному из известных нам фактов, давая в то же время, хотя бы частично, функциональную интерпретацию спонтанным ритмам ЭЭГ (мы отнюдь не утверждаем, что указанными функциями их назначение исчерпывается), и, во-вторых, что особенно важно, она дает конкретное направление дальнейшим поискам в связи с необходимостью и принципиальной возможностью экспериментальной проверки. Эти достоинства — свидетельство эвристичности гипотезы.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Walter W. G.* — Handbook of physiology Sec. I. Washington, 1959, 1, p. 278.
2. *Уолтер Грей.* Живой мозг. М., Мир, 1966.
3. *Пенфилд У., Джаспер Г.* Эпилепсия и функциональная анатомия головного мозга человека. М., ИЛ, 1958.
4. *Kales A.* Sleep; Physiology & Pathology. Philadelphia-Toronto, Lippincott, 1969.
5. *Латаш Л. П.* Гипоталамус, приспособительная активность и электроэнцефалограмма. М., Наука, 1968.

6. *Callaway E.*—In: Behavior & Brain Electrical Activity Burch N., Altshuler H. I. (eds). N.—Y., Plenum, 1975, p. 473.
7. *Wilson H. R., Cowan J. D.*—Biophys. Journ., 1972, 12, p. 1.
8. *Wilson H. R., Cowan J. D.*—Kybernetik, 1973, 13, p. 55.
9. *Beurle R. L.*—Phil. Trans. Roy. Soc. Ser. B., 1956, 240, p. 55.
10. Бёрнс Б. Неопределенность в нервной системе. М., Мир, 1969.
11. *Andersen P., Andersson S. A.* Physiological Basis of the Alpha-Rhythm. N.—Y., Appleton, 1968.
12. *Andersson S. A., Manson J. R.*—Electroencephalogr. Clin. Neurophysiol. 1971, 31, N. 1, p. 21.
13. Мэзун Г. Бодрствующий мозг. М., Мир, 1965.
14. *Bremer F.*—In: The Nature of Sleep. Wolstenholme G. E. W., O'Connor M. (eds). Ciba Symp. Lond., 1960, p. 30.
15. Барлоу Х. — В кн.: Теория связи в сенсорных системах. М., Мир, 1964, с. 65.
16. *Deliyannakis S., Toannerd F., Davaroucas A.*—Clinical Electroencephalogr., 1975, 6, N 2, p. 75.
17. Малкин В. Б., Гиппенрейтер Е. Б. Острая и хроническая гипоксия. М., Наука, 1977.
18. *Осовец С. М., Гинзбург Д. А., Гурфинкель В. С.* и др. — Физиология человека, 1977, 3, № 3, с. 482.
19. *Гурфинкель В. С., Осовец С. М.* — Биофизика, 1973, 8, с. 731
20. Мысловодский М. С. Гиперсинхронные ритмы коры больших полушарий. М., Наука, 1973.
21. *Livingstone S.*—Convulsive Disorders in Children. Springfield, Thomas, 1954.
22. *Halasz P., Devenyi E.* — Acta Med. Acad. Sci. Hung., 1974, 31, N. 1, p. 31.
23. *Гинзбург Д. А., Коломеер Э. К.* — Физиология человека, 1975, 1, № 4, с. 640.
24. *Simon O., Mülner E., Heineman U.* — Electroencephal. Clin. Neurophysiol. 1976, 40, N 5, p. 449.
25. *Bancaud J., Talairach E., Bonisa A.*—La stereoelectroencephalographie dans l'épilepsie. Paris, 1965.
26. *Lashley K. S.*—In: Physiological Mechanisms in Animal Behavior. Cambr., 1950, p. 454.
27. Джон Е. Р. — В кн.: Механизмы формирования и торможения условных рефлексов. М., Наука, 1973, с. 183.
28. *John E. R., Schwartz E. L.*—Annu. Rev. Psychol., 1978, 29, p. 1.
29. *Pribram K. H.*—Languages of the Brain. New Jersey, Englewood, 1971.
30. Бехтерева Н. П., Бундзен П. В., Гоголицы Ю. Л. Мозговые коды психической деятельности. Л., Наука, 1977.
31. Коган А. Б. — В кн.: Гагарские беседы, 1979, т. 7, с. 60.
32. *Donchin E., Lindsley D. B.* (eds). Average Evoked Potentials. Washington, NASA, 1969.
33. Рутман Э. М. Вызванные потенциалы в психологии и психофизиологии. М., Наука, 1979.
34. *John E. R., Walker P., Sawood D., Rush M., Cohrmann J.* — Int. Rev. Neurobiol., 1972, 15, p. 273.
35. *Charman R. M., McCrary J. W., Chapman J. A., Braydon H. R.* Brain a. Language. 1978, 5, p. 195.
36. *Ruelle D., Takken F.*—Comm. Math Phys., 1971, 20, p. 167
37. *Aizawa J.*—Progr Theor. Phys., 1976, 56, p. 703
38. Монин А. С. — УФН, 1978, 125, с. 97.
39. Рабинович М. И. — УФН, 1978, 125, с. 123
40. *Pribram K. H.* — Fed. Proc., 1978, 37, p. 2271.

# СПИРАЛЬНЫЕ ВОЛНЫ ВОЗБУЖДЕНИЯ В СЕРДЕЧНОЙ МЫШЦЕ

В. И. КРИНСКИЙ, В. Г. ЯХНО

## 1. ВВЕДЕНИЕ

В этой работе рассматриваются двумерные источники волн возбуждения и описываются некоторые экспериментальные данные о таких волнах активности. Основное внимание уделяется источнику волн возбуждения, образованному спиральной волной, вращающейся в односвязной среде, — ревербератору. Автоволновые процессы, в том числе и спиральные волны, могут реализоваться в широком классе систем [1, 2], но здесь мы приведем примеры существования и обсудим модели таких волн в сердечной мышце.

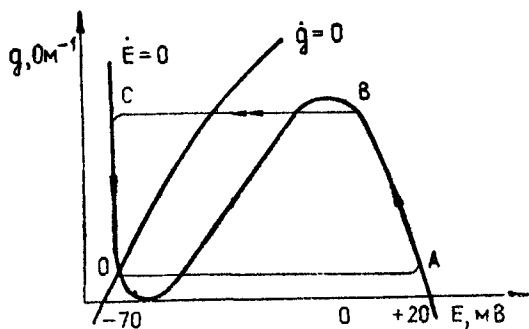
Основные процессы, связанные с распространением волн в возбудимых средах, описываются с помощью уравнений:

$$\frac{\partial E}{\partial t} = \frac{\partial^2 E}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 E}{\partial y^2} + F(E, g); \quad (1, a)$$

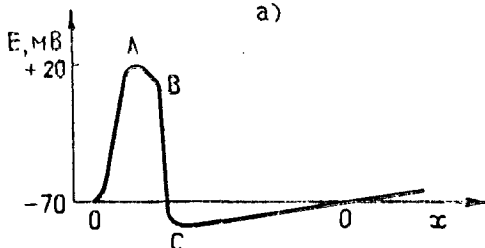
$$\frac{\partial g}{\partial t} = G(E, g). \quad (1, б)$$

При моделировании процессов возбуждения в сердечной мышце переменная  $E$  соответствует потенциалу мембраны клетки,  $g$  — проводимости медленного ионного тока через мембрану. Нелинейные функции  $F$  и  $G$  находятся из экспериментальных измерений с фиксацией потенциала на мембране [3]. Уравнения более высокого порядка для возбудимых тканей описаны в работах Ходжкина, Хаксли и их учеников [4]. Заметим, что основной особенностью  $F(E, g)$  является наличие неустойчивого участка (рис. 1, а). Вид импульса возбуждения и схематическое изображение волны на плоскости показано на рис. 1, б, в.

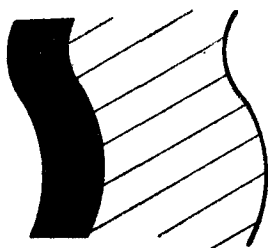
А. Н. Колмогоров, И. Г. Петровский, И. С. Пискунов [5], Я. Б. Зельдович, Д. А. Франк-Каменецкий [6] являются пионерами изучения волн в средах, описываемых одним уравнением 1, а. Но в таких средах возможен лишь сравнительно узкий класс волновых решений — здесь имеются только бегущие волны. В реальных возбудимых средах класс волновых явлений оказывается значительно шире. Он включает



а)



б)



в)

**Рис. 1.** Волны в модели (1): а — фазовая плоскость модели (1). Показаны нуль-изоклины и области, соответствующие физиологическим состояниям возбуждения (АВ), рефракторности (АВСО), покоя (малая окрестность особой точки 0); б — волна; в — ее схематическое изображение. Возбужденные участки зачернены, рефрактерные заштрихованы

в себя различные источники воли, нестационарные режимы распространения импульсов, с которыми, например, в сердечной мышце связывают различные нарушения ритмической работы сердца.

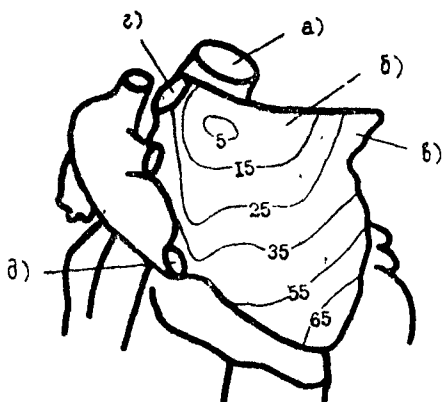
О существовании спиральных волн в биологических объектах упоминалось еще в начале века [7]. Однако математи-

ческое изучение таких волн было начато лишь полвека спустя Винером и Розенблумом [8]. Балаховским [9] был построен первый пример спиральной волны в непрерывной односвязной среде. Кринским [10] были изучены качественно новые режимы в неоднородных средах: появление и исчезновение ревербераторов на неоднородностях, размножение ревербераторов. Существование таких источников в модельных химических реакциях было впервые показано Заикиным и Жаботинским [11]. В их экспериментах также были подтверждены теоретически предсказанные механизмы возникновения ревербераторов на неоднородностях и из разрывов фронта волны [12, 13]. Ревербераторы в трехмерном пространстве были получены и изучены Винфри [14]. Спиральные волны были зарегистрированы в сердечной мышце [15, 16], в клетке плазмодия миксомицета [17], в колонии клеток *Dictyostelium Discoideum* [18].

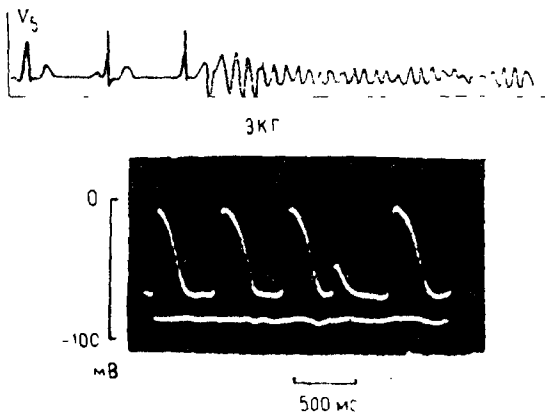
## 2. НОРМАЛЬНОЕ РАСПРОСТРАНЕНИЕ ВОЛН В СЕРДЦЕ. АРИТМИИ, ФИБРИЛЛЯЦИЯ

Сигнал, вызывающий механическое сокращение сердца, каждую секунду испускается водителем ритма в сердце — синусным узлом — и распространяется в виде волны электрического возбуждения по клеткам сердца (рис. 2). Скорость волны в предсердии примерно 0,2 м/с, длина волны — 15 см.

Нормальный режим распространения волн может нарушаться при различных заболеваниях, вызывая нарушения ритмических сокращений сердца — аритмии. На рис. 3 приведен пример записи электрокардиограммы (ЭКГ) при возникновении одной из наиболее опасных аритмий — фибрилляции желудочков сердца. Видно, что фибрилляция связана с резким повышением частоты электрических колебаний и, кроме того, колебания приобретают нерегулярный характер. Однако форма импульса (потенциала действия), зарегистрированного в отдельной клетке, почти не отличается от нормальной. Это указывает на то, что механизмы фибрилляции сердца лежат вне пределов теории колебаний (не связаны, например, с явлениями типа странного аттрактора). Фибрилляция у человека может возникать в результате поражения отдельных (часто очень небольших, размером с горошину) участков сердечной мышцы, например, при инфаркте миокарда. Фибрилляцию можно вызвать в эксперименте и на здоровом сердце животного. Для этого на сердце подают два раздражающих импульса, и при определенном интервале между ними ответ сердечной ткани содержит более чем два импульса (рис. 4, б) [19]. Это явление носит название феномена



**Рис. 2.** Нормальное распространение волн возбуждения в сердечной мышце. Цифры — время в м/с. Волны распространяются из области синусного узла со скоростью 0,5 м/с. *а* — аорта, *б* — синусный узел, *в* — правое ушко, *г* — верхняя полая вена, *д* — нижняя полая вена



**Рис. 3.** Патологический режим работы сердечной мышцы: *а* — электрокардиограмма (ЭКГ) при возникновении фибрилляции; *б* — мембранный потенциал отдельной клетки сердечной мышцы при фибрилляции (микроэлектродная запись). Видно, что форма импульсов остается нормальной. Следовательно, фибрилляция — «автоволновой», а не «автоколебательный» процесс

уязвимости и представляет собой начальный этап развития фибрилляции.

В теоретических работах было показано, что при таких условиях должны возникать источники спиральных волн

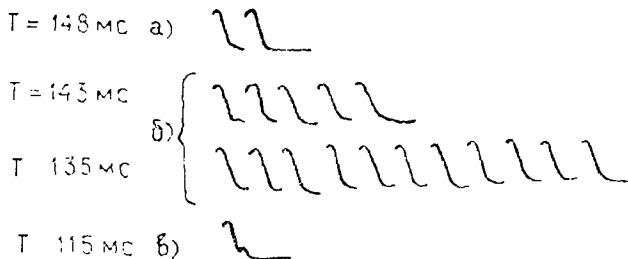


Рис. 4. Феномен уязвимости на полости миокарда [19]) -- два стимула (показаны стрелками) вызывают ответ из многих импульсов: а - интервал между стимулами достаточно велик, и на два стимула возникает два ответа (как в первом волокне); б -- интервал между стимулами уменьшен (попадает в зону уязвимости), и на два стимула возникает более чем два ответа; в -- интервал между стимулами еще уменьшен, так что второй стимул попал в зону рефрактерности первого, и на два стимула возникает только один ответ (так же, как и в первом волокне)

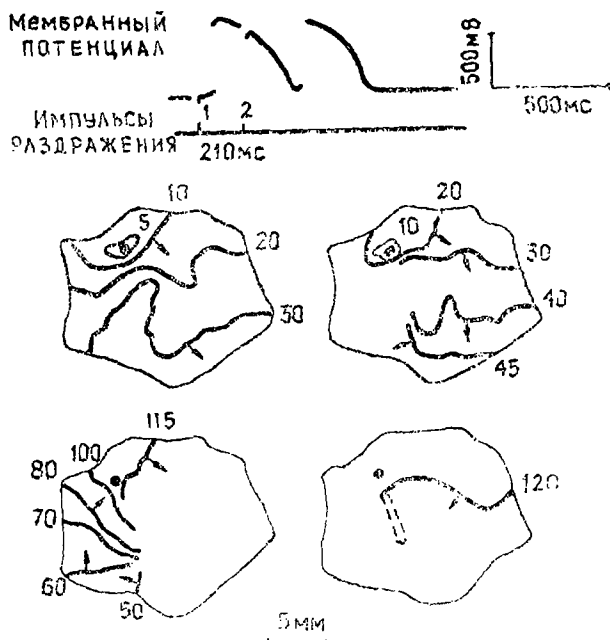


Рис. 5. Распространение волн при возникновении феномена уязвимости на полке из предсердия кролика. Видно возникновение спиральной волны на полости миокарда. По нерегулярности формы фронта первой волны можно судить о неоднородности ткани, фронт второй волны разрывается, и возникает спиральная волна [15, 16]



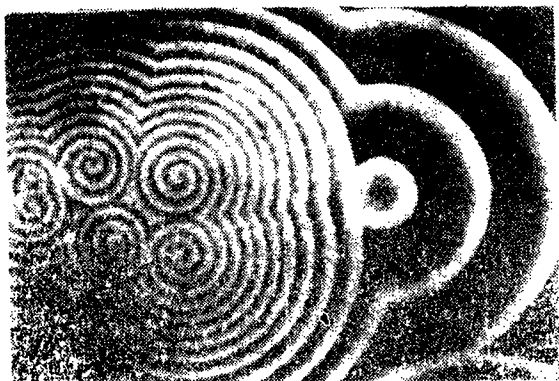


Рис. 6. Ведущий центр и спиральная волна в химической возбудимой среде [12]

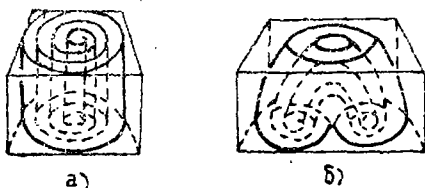


Рис. 7. Два варианта трехмерной спиральной волны [14]

(см. далее рис. 10, 11) [1, 10]. Экспериментально это было подтверждено в работах Аллесси и др. [15, 16]. На рис. 5 показано формирование спиральной волны на предсердии кролика.

Наглядные данные об образовании различных источников в таких средах получены на модельной химической системе Заикиным и Жаботинским. На рис. 6 показаны источники типа ревербератор и источник типа ведущий центр. Заметим, что при одних и тех же условиях ревербератор всегда излучает более высокочастотную серию импульсов, чем ведущий центр, соответственно и длина волн от ревербератора меньше, чем от ведущего центра. На рис. 7 показан ревербератор в трехмерной среде [14].

### 3. МОДЕЛИ

Основные процессы, связанные с образованием, размножением и исчезновением ревербераторов могут быть объяснены на качественном уровне на основе аксиоматического

описания [1, 10]\*. Однако количественное описание параметров ревербератора требует более детальных математических моделей, например типа (1). Надо отметить, что в настоящее время большинство данных о количественных характеристиках спиральных волн получено с помощью численного моделирования на ЦВМ, поскольку надежных теоретических методов для таких задач пока не существует.

Перейдем к описанию одного ревербератора. Из аксиоматической теории следует, что ревербератор образуется из разрыва фронта волны (см. рис. 6). Частота его вращения  $\Omega = 1/R$ , а ядро представляет собой линию длиной  $\lambda/2 = vR/2$  [10].

Численные расчеты показывают, что ревербератор представляет собой «язык» возбуждения, вращающийся в некоторой области. Численными расчетами были обнаружены два режима вращения ревербератора: стационарный и нестационарный [20]. При стационарном режиме вращение волны периодическое. Нестационарному режиму соответствует движение в виде «розетки». Зависимость характеристик ревербератора от параметров приведена на рис. 8, а, б, левая ветвь соответствует стационарному вращению, правая — нестационарному.

Опишем теперь аналитические подходы к исследованию ревербератора. Один из вариантов аналитического описания — одномерное приближение. Среда представляется в виде узкого кольца. Находится минимальный размер кольца, при котором еще возможно вращение волны в кольцо. Интерес к минимальному размеру вызван тем, что именно его необходимо менять, если ставится задача о прекращении режима реверберации. Из теории стационарных волн для уравнений (1) известно, что такие волны могут существовать лишь при  $\lambda > \lambda_{\min}$ . Минимальный размер волны соответствует случаю, когда устойчивый стационарный импульс сливается с неустойчивым стационарным импульсом (см. [2]). Количественное исследование характеристик одномерного ревербератора для модели сердечной ткани было выполнено в работе [21]. Результаты этих расчетов также показаны на рис. 8, а, б. Видно, что оценки из такой модели дают несколько меньшие значения по сравнению с результатами численных расчетов.

Одномерные оценки для параметров ревербератора могут быть получены также с помощью упрощенного рассмотрения.

---

\* Модели, в которых учитывается только сам факт движения изображающей точки по замкнутой траектории, показанной на рис. 1, называются аксиоматическими. В таких моделях задается длительность импульса  $\tau$ , длительность рефрактерности  $R$  и скорость распространения импульса  $v$ .

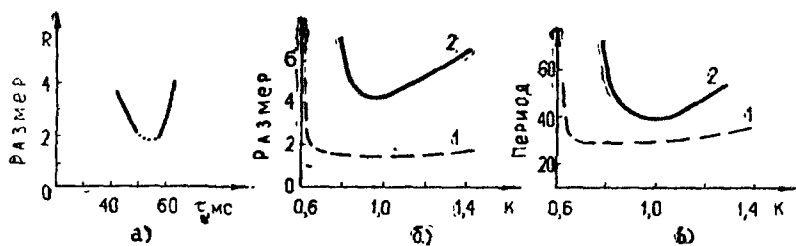


Рис. 8. Изменение размера ядра ревербератора в стационарном и нестационарном случаях в зависимости от длительности импульса возбуждения (а) [20]. Зависимость периода вращения и длины волны ревербератора в зависимости от  $k$ -параметра, характеризующего наклон падающего участка в функции  $F(E, g)$  (б) [20]. 2 — расчет на ЦВМ двумерной модели, 1 — одномерный вариант ревербератора (кольцо минимальной длины) [25]

Естественно предположить, что в волне минимального размера длительность импульса того же порядка, что и длительность фронта возбуждения. Тогда длина волны приблизительно равна  $4l_{\text{фр}} \approx 2\pi r_{\text{мин}}$ , а минимальный радиус кольца  $r_{\text{мин}}$  равен  $\sim 2l_{\text{фр}}/\pi$ . Частота вращения определяется с помощью характеристики  $a = a(g)$ , представляющей собой зависимость стационарной скорости фронта возбуждения от величины медленной переменной. Расчет  $a = a(g)$  описан в работах [22, 23]. Для случая, когда  $a(g)$  аппроксимируются кубичным полиномом  $\gamma[E - m_1(g)][E - m_2(g)][E - m_3(g)]$ , а значения функции  $|G(E, g)|$  считаются в первом приближении одинаковыми и равными  $G_0(g_{\text{кр}})$ , можно записать оценочные формулы для минимального размера ядра  $r_{\text{мин}}$  и частоты вращения возбуждения  $\Omega$  в виде [24]

$$r_{\text{мин}} \approx \frac{4\sqrt{2}}{\pi\sqrt{\gamma[m_3(g_{\text{кр}}) - m_1(g_{\text{кр}})]}}; \quad (2)$$

$$\Omega = \frac{4l_{\text{фр}}}{a_{\text{мин}}} \approx 0,25 \left\{ \gamma G_0(g_{\text{кр}}) [m_3(g_{\text{кр}}) - m_1(g_{\text{кр}})] \frac{d}{dg} \Big|_{g=g_{\text{кр}}} [m_1(g) + m_3(g) - 2m_2(g)] \right\}^{1/2}. \quad (3)$$

Если воспользоваться количественными значениями для функций  $F$  и  $G$ , соответствующих модели Нобла (модель, описывающая работу клеток проводящей системы сердца), то из данных работы [21] и формул (2), (3) получаются практически одинаковые численные оценки:

$$r_{\text{мин}} \approx 2 \text{ мм}, \quad \Omega \approx (4 \div 14) \text{ Гц}, \quad \tau \approx 0,180 \div 0,05 \text{ с.}$$

Эти оценки хорошо соответствуют известным экспериментальным данным (см., например, рис. 3).

Важно отметить, что такой простой подход показывает, как можно получить оценки для параметров ревербератора из экспериментальных измерений. Для этого необходимо определить длину фронта возбуждения при малых скоростях импульсов, распространяющихся в одномерной системе.

Аналитические решения, описывающие ревербератор в двумерной среде, в настоящее время неизвестны. Имеются лишь начальные попытки такого рода вычислений, связанные с определением профиля потенциала возбуждения в ядре ревербератора. Такой расчет был выполнен одним из авторов этой работы (В. Г. Яхно) и А. В. Панфиловым для случая идеализированных нелинейных функций. Пусть  $G(E, g) = -g + \beta E$ , а  $F(E, g) = -g + \gamma E$  при  $E < |E_0|$  и  $F(E, g) = -g - \delta E + (\gamma + \delta)E_0$  при  $E \geq E_0$  и  $F(E, g) = -g - \delta E - (\gamma + \delta)E_0$  при  $E \leq -E_0$  и  $\delta \rightarrow \infty$ .

Тогда решение для стационарного ревербератора в цилиндрической системе координат  $(\Theta, r)$  можно записать в виде

$$E = \frac{R(r)}{R_0} E_0 \sin[m\Theta - \Omega t + \varphi(r)]; \quad (4)$$

$$g = \frac{R(r)}{R_0} E_0 \frac{\beta}{\Omega^2 + 1} \{ \sin[n\Theta - \Omega t + \varphi(r)] + \Omega \cos[m\Theta - \Omega t + \varphi(r)] \}. \quad (5)$$

Новые переменные  $R(r)$  и  $\varphi(r)$  определяются следующей системой уравнений:

$$\ddot{R} + \frac{1}{r} \dot{R} + \kappa R - \left( \frac{m^2}{r^2} + p^2 \right) R = 0, \quad (6)$$

$$\dot{p} + p \left( \frac{1}{r} + r \frac{1}{R} \dot{R} \right) + H = 0,$$

где

$$\kappa = \gamma - \frac{\beta}{\Omega^2 + 1}, \quad H = \Omega \left( \varepsilon - \frac{\beta}{\Omega^2 + 1} \right), \quad p(r) = \varphi. \quad (7)$$

Предположим, что размер ядра  $r_{\min}$  определяется условием  $\dot{R}(r_{\min}) = 0$ , и при этом  $R(r_{\min}) = R_0$ . При  $H = 0$ ,  $\varphi(r) = \text{const}$  и, следовательно,  $\Omega = \sqrt{\beta/\varepsilon - 1}$ , решение уравнения (6) записывается через функции Бесселя:  $R(r) = I_m(\sqrt{\gamma - \varepsilon} r)$ . Тогда, например, для  $m = 1$ ,  $r_{\min} = \sqrt{\gamma - \varepsilon}$ . Для случая  $H \neq 0$  зави-

симости  $R(r)$  и  $\varphi(r)$  можно получить численным расчетом (6) ÷ (7). Варианты таких зависимостей для  $m=1$  показаны на рис. 9. Частота вращения ревербератора определяется при этом из уравнения  $H - \Omega [e - \beta / (\Omega^2 - 1)] = 0$ .

Другой уровень описания требуется для процессов взаимодействия источников волн, нахождения условий появления, исчезновения и размножения ревербераторов из-за неоднородностей среды. Можно ли в этом случае строить аналитические процедуры, основанные на исследовании уравнений системы (1)? Может быть, можно вывести из них новые уравнения для некоторых усредненных характеристик или для координат, размера, частоты вращения ревербератора? Однако пока это — лишь предположения.

Отметим, что такие процессы могут быть объяснены и исследованы на качественном уровне в рамках аксиоматического описания. Рис. 10 и 11 поясняют механизм возникновения ревербератора: на рис. 10 показано возникновение разрыва волны, а на рис. 11 — возникновение из разрыва ревербератора. На рис. 11 приведен случай, когда слева величина рефрактивности ( $R$ ) меньше, чем справа ( $R_1$ ). Возбужденные участки зачернены, рефракторные — заштрихованы. В начальный момент времени  $A$  волна 2 движется только по левой области, справа фронт возбуждения волны 2 упирается в более длинный рефракторный хвост волны 1. В следующий момент  $B$  волна 2, двигаясь вдоль границы двух областей ( $BC$ ), отстает от волны 1 (волна 1 приходит в точку  $B$  по кратчайшему пути  $AB$ , а волна 2 — по длинному  $CB$ ), фронт возбуждения волны 2

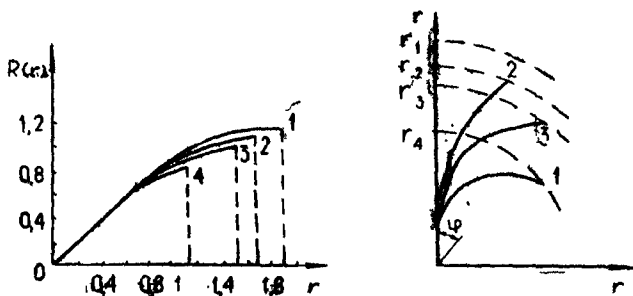
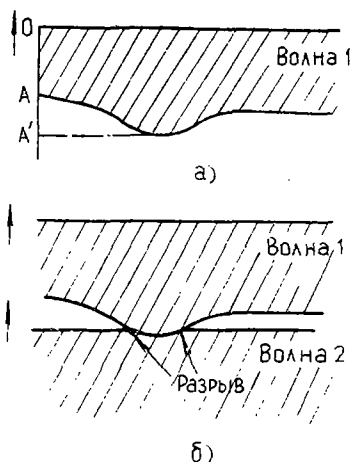
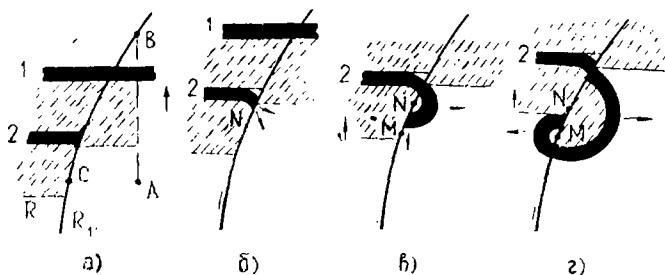


Рис. 9. Изменение амплитуды  $R(r)$  и фазы  $\varphi(r)$  волны от радиуса  $r$ . Зависимости получены из модели (6) — (7) для случая  $m=1$ : 1 —  $H=0$ ; 2 —  $H=\pm 1$ ; 3 —  $H=\pm 2$ ; 4 —  $H=\pm 5$ . Соответствующие значения для минимальных размеров ядра ревербератора  $r_i$  ( $i=1 \div 4$ ) показаны пунктиром



**Рис. 10.** Возникновение разрыва волны в неоднородной среде: *а* — распространение одиночной волны (стрелки указывают направление распространения). Из-за неоднородности среды рефракционный хвост волны оказывается разнородной длины (от  $OA$  до  $OA'$ ) в разных местах; *б* — возникновение разрыва второй волны. Разрыв возникает, если интервал между фронтами первой и второй волны достаточно мал (меньше, чем  $OA'$ , но больше, чем  $OA$ , см. рис. *а*). Такого типа явления лежат в основе феномена уязвимости (см. рис. 4, *б*)



**Рис. 11.** Механизм возникновения ревербератора при огибании разрывом волны участка с повышенной рефрактерностью

благодаря этому пачинает соприкасаться в точке  $M$  с покоящимися участками правой области. Далее,  $B$ -возбуждение от волны 2 распространяется по правой области, в точке  $M$  оно сможет вновь перейти в левую область. На рис. 11, *г*

волна перешла в левую область и образовала ревербератор. Процессы разрыва и закручивания фронта волны объясняют механизм уязвимости сердца (см. рис. 4 и 10): при попадании волны в интервал уязвимости она разрывается и образует ревербератор (рис. 11).

Как показывает анализ, в неоднородной среде ревербератор имеет конечное время жизни [10], тем большее, чем более однородна среда. Этот вывод хорошо подтверждается в эксперименте: в химической (однородной) среде ревербератор имеет бесконечное время жизни, а возникающие при уязвимости в сердце источники успевают послать лишь несколько импульсов (рис. 4, б).

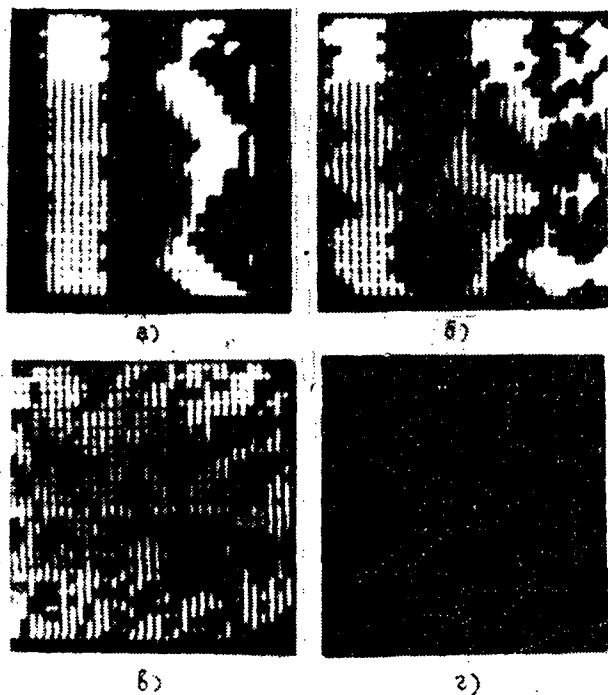


Рис. 12. Возникновение фибрилляции в модели возбудимой среды (фото с дисплея ЦВМ):

*а* — две волны, распространяющиеся справа налево; видно искривление фронта второй волны и появление разрыва; *б* — начало фибрилляции; *в* — развитая фибрилляция (подсвечены элементы среды, находящиеся в возбужденном состоянии,  $r=7$ ,  $R=17$ ,  $L_1+L_2 \approx 2 \times 2$ ); *г* — при уменьшении отношения  $r/R$  хорошо видны отдельные ревербераторы (подсвечены только передний фронт волны;  $r=2$ ,  $R=6$ )

Основные черты фибрилляции могут быть объяснены возникновением в сердце большого числа ревербераторов. Здесь весьма важной оказывается способность ревербераторов размножаться. Поясним подробнее это свойство. Распространяющиеся от ревербератора волны следуют почти вплотную одна за другой (период равен рефрактерности) и разрываются на неоднородностях, как показано на рис. 10. В результате спиральная волна, возникшая в неоднородной среде, может породить новые спиральные волны (см. рис. 11). Заметим, что в однородной среде спиральные волны не должны размножаться (как это и наблюдалось в химической возбудимой среде) [12].

При фибрилляции в неоднородной среде конкурируют два процесса: размножение автоволн, умирание автоволн. От отношения скоростей этих двух процессов зависит, какой окончательный тип режима реализуется в среде. Если скорость размножения  $V_p$  оказывается больше, чем скорость умирания  $V_y$ , то число источников может начать расти, и в среде будет развиваться хаотический процесс распространения волн (рис. 12). При обратном соотношении скоростей ( $V_p < V_y$ ) в среде восстанавливается состояние покоя, и режимы, близкие к фибрилляции, оказываются невозможными. При этом получаются критические значения характеристик, аналогичные тем, которые имеют место в цепных реакциях, при превышении которых оказываются возможными сложные режимы (например, так называемая критическая масса фибрилляции — минимальная масса сердечной ткани, при превышении которой становится возможной фибрилляция). Расчеты зависимостей таких характеристик от параметров используются для разработки критериев отбора лекарственных средств, защищающих сердце от фибрилляции.

#### 4. ВЫВОДЫ

Приведенные в работе факты показывают, что весьма широкий класс автоволновых процессов в сердечной мышце может быть описан с помощью моделей возбудимых сред. Известно, что та же базовая модель (1) может описывать автоволновые процессы в возбудимых средах другой физической природы: в ряде химических реакций, в некоторых активных физических системах. Однако, описывая главные особенности поведения возбудимых сред, модель (1) не отражает многих деталей, связанных с особенностями строения того или иного объекта. Для модели сердечной ткани, например, базовая модель (1) справедлива на временах порядка нескольких секунд. Поэтому если нас интересует поведение ревербераторов на отрезке времени порядка минут,



мы вынуждены будем учитывать в модели (1) новые процессы именно с таким характерным временем. К таким процессам можно отнести: а) некоторые специфические биохимические превращения на мембранах клеток; б) обратное влияние механического натяжения сердечной ткани на электрические процессы и т. д.

Теория распространения нелинейных волн в возбудимых средах еще только начинает создаваться. Число решенных в этой области задач несравнимо меньше числа важных и интересных задач, еще ожидающих своего решения. Здесь имеется обширное и благодатное поле деятельности для исследователей, владеющих качественными методами и физико-математической интуицией.

## ЛИТЕРАТУРА

1. *Иваницкий Г. Р., Кринский В. И., Сельков Е. Е.* Математическая биофизика клетки. М., Наука, 1978.
2. *Васильев В. А., Романовский Ю. М., Яхно В. Г.* — УФН, 1979, 128, № 4, с. 625.
3. *Krinsky V. I., Porotico V. I.* — *Studia biophysica*, 1973, 39, N. 2, p. 69.
4. *Скотт А.* — В кн.: Волны в активных и нелинейных средах в приложении к электронике. М., Сов. радио, 1977, с. 285.
5. *Колмогоров А. Н., Петровский И. Т., Пискунов Н. С.* — Бюллетень МГУ (секция А). М., 1937, 1, вып. 6.
6. *Зельдович Я. Б., Франк-Каменецкий Д. А.* — ДАН СССР, 1938, 19, с. 693.
7. *Mines G. R.* — *J. Physiol (Lond)*, 1913, 46, p. 350.
8. *Винер Н., Розенблум А.* — В кн.: Кибернетический сборник, вып. 3. М., ИЛ, 1961.
9. *Балаховский И. С.* — *Биофизика*, 1965, 10, с. 1063.
10. *Кринский В. И.* — Проблемы кибернетики. М., Наука, 1968, 20, с. 59.
11. *Zaikin A. N., Zhabotinskii A. M.* — *Nature*, 1970, 255, p. 7.
12. *Жаботинский А. М.* Концентрационные автоколебания. М., Наука, 1974.
13. *Zhabotinskii A. M., Zaikin A. N.* — *J. theor. biol.*, 1973, 40, p. 45.
14. *Winfree A. T.* — *Science*, 1973, 181, p. 937.
15. *Allessie M. A., Bonke F. I. M., Schopman F. I. G.* — *Circulation Res.*, 1973, 33, N. 1, p. 54.
16. *Allessie M. A., Bonke F. I. M., Schopman F. I. G.* — *Circulation Res.*, 1976, 39, N. 2, p. 168.
17. *Барановский Э. П.* — Немышечные формы подвижности. Пуццино. АН СССР, 1976, с. 47.
18. *Gross T., Peacy M., Trevan D.* — *J. Cell. Sci.*, 1976, 22, p. 645.
19. *Саксон М. И., Кукушкин Н. И., Букаускас Ф. Ф.* — Регроградное возбуждение в миокарде и его роль в генезе аритмии уязвимой фазы сердечного цикла. 1971. Деп. № 4274—72.
20. *Зыков В. С.* Исследование циркуляции волн в двумерной возбудимой среде методом математического моделирования. Канд. дис. [Рукопись]. М., 1978.

21. Храмов Р. Н., Крицкий В. Н. — Биофизика, 1977, 22, вып. 3, с. 516.
22. Островский Л. А., Яхно В. Г. — Биофизика, 1976, 20, вып. 3, с. 489.
23. Яхно В. Г. — Биофизика, 1976, 21, вып. 3, с. 547.
24. Яхно В. Г. Анализ нестационарных волковых процессов в возбудимой среде. Канд. дис. [Рукопись]. Горький, 1977, с. 68.
25. Панфилов А. В. Спиральные волны в возбудимых средах. Исследования на моделях типа Фитц-Хью, Нагумо, Дипл. раб. [Рукопись]. Пушкино, 1979.

## СОДЕРЖАНИЕ

<b>Предисловие</b>	
<i>М. И. Рабинович.</i> Стохастические автоколебания в радиофизике и гидродинамике. Эксперименты и модели	5
<i>Я. Г. Синай.</i> О законе универсальности Фейгенбаума	24
<i>Б. П. Безручко, С. П. Кузнецов, Д. И. Трубецкой.</i> Стохастические автоколебания в системе электронных пучок — обратная волна	29
<i>В. Б. Дихтяр, В. Я. Кислов.</i> Стохастические колебания в резонансных автогенераторах с запаздыванием	37
<i>В. И. Сбитнев.</i> Стохастичность в системе двух связанных вибраторов	46
<i>В. С. Львов, А. А. Предтеченский.</i> Поэтапный переход к турбулентности в течении Куэтта	57
<i>Ю. Н. Беляев, И. М. Яворская.</i> Переход к стохастическому режиму в течении между вращающимися сферами	78
<i>Г. И. Барыблатт.</i> Некоторые явления турбулентности в жидкости с сильно устойчивой стратификацией	89
<i>Г. С. Галицын.</i> Энергетика конвекции	115
<i>Ю. Д. Чащечкин.</i> Структуры конвективных течений в стратифицированной жидкости	131
<i>Ф. В. Должанский, Л. А. Плейшанова.</i> Регулярные и нерегулярные автоколебания конвективной ячейки внутри эллипсоида	140
<i>А. С. Бакай.</i> Умеренная турбулентность	146
<i>С. В. Волоцкий, А. В. Кац, В. М. Конторович, В. Н. Мельник, В. А. Шнейдман.</i> К теории слаботурбулентных колмогоровских спектров	161
<i>С. М. Осроец, Д. А. Гинзбург, В. С. Гурфинкель, Л. П. Лапаш, Б. В. Малкин, П. В. Мельничук, Е. Б. Пастернак.</i> Ритмы мозга	172
<i>В. И. Крицкий, В. Г. Яхья.</i> Спиральные волны возбуждения в сердечной мышце	200

Редактор Н. А. Городецкая  
Техн редактор А. П. Елисеева

Сдано в набор 16 09 80 Подписано к печати 31 12 80. МЦ 00803  
Формат 60×90<sup>1</sup>/<sub>16</sub>. Бумага для глубокой печати Гарнитура литературная  
Печать высокая. Усл. печ. л. 13,75. Уч.-изд. л. 19,49. Тираж 1000 экз  
Заказ 8112 Темплан 1980 г., поз. 3. Цена 3 р. 20 к.

Дзержинская типография Горьковского областного управления  
издательств, полиграфии и книжной торговли  
пр Циолковского, 15